Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) ...

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) ...

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) ...

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) ...

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix ...

Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix $M(\beta) \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ der Gestalt

$$M(\beta) := \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$$

→ Satz 10.2

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine ... wie folgt:

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine Bilinearform auf K^n wie folgt:

$$\begin{aligned} \beta_A : K^n \times K^n &\longrightarrow K \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v}^T A \mathbf{w} \end{aligned}$$

→ Satz 10.2

Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind ... .

Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind isomorph.

→ Satz 10.2

Die **darstellende Matrix** einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ ist gegeben durch ...

Die **darstellende Matrix** einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ ist gegeben durch

$$M_B(\beta) \colon = \beta(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_{ij}$$

→ Def. 10.3

Zwei Matrizen A, A' sind **kongruent**, falls es ...

Zwei quadratische Matrizen A, A' sind **kongruent**, falls es eine invertierbare Matrix S gibt mit

$$A' = S^T A S$$

→ Def. 10.5

Eine Bilinearform β auf V ist **symmetrisch**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **symmetrisch**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β auf V ist **schiefsymmetrisch**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **schiefsymmetrisch**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β auf V ist **alternierend**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **alternierend**, falls für alle $\mathbf{v} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β ist **symmetrisch** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **symmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ **symmetrisch** ist:

$$M(\beta)^T = M(\beta)$$

→ Satz 10.9

Eine Bilinearform β ist **schiefsymmetrisch** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **schiefsymmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ **schiefsymmetrisch** ist:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

→ Satz 10.9

Eine Bilinearform β ist **alternierend** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **alternierend** genau dann, wenn für ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ gilt:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

und

$$M(\beta)_{ii} = 0 \text{ für alle } i$$

→ Satz 10.9

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- …
- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- ...

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine Sesquilinearform η ist **hermitesch**, falls ...

Eine Sesquilinearform η ist **hermitesch**, falls gilt

$$\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\eta(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.10

Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix der Form ...

Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix $M(\eta) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ der Form

$$M(\eta) \colon = \eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$$

→ Satz 10.11

Zu einer gegebenen komplexen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:
...

Zu einer gegebenen komplexen quadratischen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:

$$\eta_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \colon = \mathbf{v}^T A \overline{\mathbf{w}}$$

→ Satz 10.11

Eine symmetrische Bilinearform β auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls ...

Def

Eine symmetrische Bilinearform β auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

→ Def. 10.14

Eine hermitesche Bilinearform β auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls ...

Def

Eine hermitesche Bilinearform β auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

→ Def. 10.14

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ...

Def

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.

→ Def. 10.15

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist ...

Def

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist eine positiv definite hermitesche Bilinearform.

→ Def. 10.15

Ein **euklidischer Vektorraum** ist ...

Ein **euklidischer Vektorraum** $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

→ Def. 10.15

Ein **unitärer Vektorraum** ist ...

Ein **unitärer Vektorraum** $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

→ Def. 10.15

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \end{aligned}$$

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \sqrt{\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle} \end{aligned}$$

(Die Norm wird durch das Skalarprodukt **induziert**.)

→ Def. 10.15

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) (Verhältnis Norm und 0)...

(ii) $\|s\cdot\mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v}\in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s\cdot\mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = \ldots$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) (**Dreiecksungleichung**:)
$\ldots$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) (**Cauchy-Schwarz-Ungleichung**):
$\ldots$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
$v \in V$ heißt **normiert**, falls $\ldots$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
$v \in V$ heißt **normiert**, falls $\|v\| = 1$

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $v, w \in V$ sind zueinander **orthogonal**, falls ...

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $v, w \in V$ sind zueinander **orthogonal**, falls $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$ [Notation: $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$]

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis B von V heißt **Orthonormalbasis** von V, falls ...

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ von V heißt **Orthonormalbasis** von V, falls

- jedes $\mathbf{b}_i \in B$ normiert ist, und
- jeweils $\mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j$ für $i \neq j$

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidisch oder unitär. Das **orthogonale Komplement** eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist

$$W^\perp :=$$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidisch oder unitär. Das **orthogonale Komplement** eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist

$$W^\perp := \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \text{ für alle } \mathbf{w} \in W\}$$

→ Def. 10.23

Ein **affiner Unterraum** eines Vektorraums V ist ...

Ein **affiner Unterraum** eines Vektorraums V ist eine Teilmenge der Form

$$\mathbf{u}_0 + U = \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} - \mathbf{u}_0 \in U\}$$

für einen Untervektorraum $U \subseteq V$.

Eine **affine Hyperebene** ist ...

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte bd8678f8-bdc1-11ec-9d64-0242ac120002

Eine **affine Hyperebene** ist ein affiner Unterraum, dessen zugehöriger Untervektorraum U die Dimension $\dim U = \dim V - 1$ hat.

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H =$$

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H = \{\mathbf{v} \in V \,|\, \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = d\}$$

für einen normierten Vektor $\mathbf{n}$ und ein $d \in \mathbb{R}$ mit $d \geqslant 0$

→ Satz 10.25

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. (Winkel zwischen Vektoren und ihrem Kreuzprodukt) ...
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. (Norm des Kreuzprodukts) ...

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt ...

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

→ Def. 11.1

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist ... , für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

→ Def. 11.1

Alle Eigenwerte einer Isometrie ...

Alle Eigenwerte einer Isometrie haben Betrag 1.

→ Satz 10.2

Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form

$$a = \pm 1$$

→ Satz 10.2

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a = x + \mathrm{i}y \text{ mit } x^2 + y^2 = 1$$

→ Satz 10.2

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 10.2

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) ...

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) ...

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) ...

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) ...

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(K) &:= \ldots \\ &= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) | \det(A) \neq 0\}, \cdot)\end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(K) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot)\end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(K) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= \ldots\end{aligned}$$

Die **allgemeine lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(K) &:= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid f_A \text{ Isomorphismus}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot)\end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) :=$$

Die **spezielle lineare Gruppe** über einem Körper K ist definiert als

$$\mathrm{SL}_n(K) := (\{A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n) \mid \det(A) = 1\}, \cdot)$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= \ldots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Die **orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) :=$$

Die **spezielle orthogonale Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) :&= \ \dots \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= \ \dots \end{aligned}$$

Die **unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) :&= (\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid f_A \text{ Isometrie}\}, \cdot) \\ &= (\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}, \cdot) \end{aligned}$$

→ Def/Satz 11.5

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) :=$$

Die **spezielle unitäre Gruppe** ist definiert als

$$\mathrm{SU}(n) := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

→ Def/Satz 11.5

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist ... oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Rotation um **0** oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder ...

.

Eine Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Rotation um $\mathbf{0}$ oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden.

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe O(2) hat die Form

$$\mathrm{O}(2) = \dots \\ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

Die orthogonale Gruppe O(2) hat die Form

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ \dot\cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

→ Lemma 11.6

Die orthogonale Gruppe O(2) hat die Form

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ \dots$$

Die orthogonale Gruppe O(2) hat die Form

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ \dot\cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

→ Lemma 11.6

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines ... euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten ON-Basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten ON-Basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat … eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten ON-Basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten ON-Basis eine darstellende Matrix der Form …

Struktursatz für euklidische Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums hat bezüglich einer geeigneten ON-Basis eine darstellende Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit A_i Rotationsmatrizen.

→ satz 11.7

Sei K eine Körper, V ein K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt **f-stabil**, falls …

Sei K eine Körper, V ein K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.
Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt **f-stabil**, falls $f(W) \subseteq W$.

→ Satz 11.7

Jede Isometrie f eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums $V \neq \{0\}$ besitzt … (Untervektorraum)

Jede Isometrie f eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums $V \neq \{0\}$ besitzt einen f-stabilen Untervektorraum der Dimension 1 oder 2.

→ Lemma 11.11

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines ... unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird ... dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis dargestellt von ...

Struktursatz für unitäre Isometrien
Jede Isometrie eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums wird bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis dargestellt von einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}, |a_i| = 1$.

→ Satz 11.12

Ein Endomorphismus f eines euklidischen oder unitären Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist **selbstadjungiert**, falls ...

Ein Endomorphismus f eines euklidischen oder unitären Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist **selbstadjungiert**, falls

$$\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

→ Def. 12.1

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann ist äquivalent:

- ...
- A ist symmetrisch ($A = A^T$)
  bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann ist äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist **selbstadjungiert** bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n.
- A ist symmetrisch ($A = A^T$)
  bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

→ Notiz 12.2

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann ist äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist **selbstadjungiert** bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n.
- ...

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n), K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann ist äquivalent:

- Die lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ist **selbstadjungiert** bezüglich des Standardskalarprodukts auf K^n.
- A ist symmetrisch ($A = A^T$)
  bzw. hermitesch ($A = \overline{A^T}$)

→ Notiz 12.2

Alle Eigenwerte eines **selbstadjungierten Endomorphismus** ...

Alle Eigenwerte eines **selbstadjungierten Endomorphismus** sind reell.

→ Satz 12.3

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines **selbstadjungierten Endomorphismus** ...

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines **selbstadjungierten Endomorphismus** stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 12.3

Spektralsatz

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu $\ldots$ f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

Spektralsatz
(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

$\rightarrow$ Satz 12.4

Spektralsatz
(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert $\ldots$

Spektralsatz
(Hauptachsentransformation für selbstadj. Abb.)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf V existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

$\rightarrow$ Satz 12.4

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder $\ldots$ Matrix A existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $\ldots$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit …

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **reellen symmetrischen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder … Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \overline{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix … mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \overline{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit …

Hauptachsentransformation für Matrizen
Zu jeder **hermiteschen** Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ existiert eine Matrix $S \in \mathrm{U}(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \overline{S}^T AS = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.5

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert ... B mit

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt: ...

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder symmetrischen Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert ... mit:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt: ...

Hauptachsentransformation für Formen

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform β auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ existiert eine Orthonormalbasis B, in der gilt:

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.6

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist ...

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **quadratische Abbildung** ist

$$\begin{aligned} q_\beta : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

→ Def 12.7

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist ...

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und β eine Bilinearform auf V.
Die assoziierte **reelle affine Quadrik** ist die Menge

$$Q_\beta := \{\mathbf{v} \in V \mid \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1\}$$

→ Def 12.7

Hauptachsentransformation für Quadriken
Jede reelle affine Quadrik in einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis $(\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n})$ von V die Form ...

Hauptachsentransformation für Quadriken
Jede reelle affine Quadrik in einem **euklidischen** Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ hat bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis $(\mathbf{b_1}, \dots, \mathbf{b_n})$ von V die Form

$$Q = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b_i} \in V \mid \sum a_i x_i^2 = 1\}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

→ Satz 12.8

Trägheitssatz von Sylvester
Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form ...

Trägheitssatz von Sylvester
Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu einer Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der $+1$-, -1- und 0-Einträge ist dabei durch A eindeutig bestimmt.

→ Satz 12.9