Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) ...

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) ...

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) ...

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) ...

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K$,$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix ...

Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix $M(\beta) \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ der Gestalt

$$M(\beta) := \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$$

→ Satz 10.2

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine ...
wie folgt:

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine Bilinearform auf K^n wie folgt:

$$\beta_A : K^n \times K^n \longrightarrow K$$
$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v}^T A \mathbf{w}$$

→ Satz 10.2

Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind ... .

Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind isomorph.

→ Satz 10.2

Die **darstellende Matrix** einer Bilinearform β bezüglich einer Basis B ist gegeben durch ...

Die **darstellende Matrix** einer Bilinearform β bezüglich einer Basis B ist gegeben durch

$$M_B(\beta) := \beta(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_{ij}$$

→ Def. 10.3

Zwei Matrizen A, A' sind **kongruent**, falls es ...

Zwei quadratische Matrizen A, A' sind **kongruent**, falls es eine invertierbare Matrix S gibt mit

$$A' = S^T A S$$

→ Def. 10.5

Eine Bilinearform β auf V ist **symmetrisch**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **symmetrisch**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β auf V ist **schiefsymmetrisch**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **schiefsymmetrisch**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β auf V ist **alternierend**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **alternierend**, falls für alle $\mathbf{v} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β ist **symmetrisch** genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **symmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ **symmetrisch** ist:

$$M(\beta)^T = M(\beta)$$

→ Satz 10.9

Eine Bilinearform β ist **schiefsymmetrisch** genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **schiefsymmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ **schiefsymmetrisch** ist:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

→ Satz 10.9

Eine Bilinearform β ist **alternierend** genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **alternierend** genau dann, wenn für ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ gilt:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

und

$$M_{ii} = 0 \text{ für alle } i$$

→ Satz 10.9

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- ...
- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- ...

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine Sesquilinearform η ist **hermitesch**, falls ...

Def

Eine Sesquilinearform η ist **hermitesch**, falls gilt

$$\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\eta(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.10

Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix der Form ...

Satz

Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix $M(\eta) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ der Form

$$M(\eta) \colon= \eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$$

→ Satz 10.11

Zu einer gegebenen komplexen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:
...

Satz

Zu einer gegebenen komplexen quadratischen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:

$$\eta_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \colon= \mathbf{v}^T A \overline{\mathbf{w}}$$

→ Satz 10.11

Eine symmetrische Bilinearform β auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls ...

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Eine symmetrische Bilinearform β auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

→ Def. 10.14

Eine hermitesche Bilinearform β auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls ...

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Eine hermitesche Bilinearform β auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

→ Def. 10.14

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ...

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.

→ Def. 10.15

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist ...

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist eine positiv definite hermitesche Bilinearform.

→ Def. 10.15

Ein **euklidischer Vektorraum** ist ...

Ein **euklidischer Vektorraum** $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

→ Def. 10.15

Ein **unitärer Vektorraum** ist ...

Ein **unitärer Vektorraum** $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

→ Def. 10.15

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \end{aligned}$$

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \end{aligned}$$

(Die Norm wird durch das Skalarprodukt **induziert**.)

→ Def. 10.15

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) (Verhältnis Norm und 0) ...

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**: $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**: $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = \ldots$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) (**Dreiecksungleichung**:)
$\ldots$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) (**Cauchy-Schwarz-Ungleichung**):
$\ldots$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18