Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) ...

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) ...

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) ...

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) ...

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, für die gilt:

(1) $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$

(2) $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(3) $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$

(4) $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix ...

Jede Bilinearform β auf K^n liefert eine Matrix $M(\beta) \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ der Gestalt

$$M(\beta) := \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$$

→ Satz 10.2

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine ... wie folgt:

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine Bilinearform auf K^n wie folgt:

$$\begin{aligned} \beta_A : K^n \times K^n &\longrightarrow K \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v}^T A \mathbf{w} \end{aligned}$$

→ Satz 10.2

Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind ... .

Die Menge der Bilinearformen auf K^n und die Menge der $n \times n$ Matrizen über K sind isomorph.

→ Satz 10.2

Die **darstellende Matrix** einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ ist gegeben durch ...

Die **darstellende Matrix** einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ ist gegeben durch

$$M_B(\beta) := \beta(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_{ij}$$

→ Def. 10.3

Zwei Matrizen A, A' sind **kongruent**, falls es ...

Zwei quadratische Matrizen A, A' sind **kongruent**, falls es eine invertierbare Matrix S gibt mit

$$A' = S^T AS$$

→ Def. 10.5

Eine Bilinearform β auf V ist **symmetrisch**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **symmetrisch**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β auf V ist **schiefsymmetrisch**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **schiefsymmetrisch**, falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β auf V ist **alternierend**, falls ...

Eine Bilinearform β auf V ist **alternierend**, falls für alle $\mathbf{v} \in V$

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

→ Def. 10.7

Eine Bilinearform β ist **symmetrisch** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **symmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ **symmetrisch** ist:

$$M(\beta)^T = M(\beta)$$

→ Satz 10.9

Eine Bilinearform β ist **schiefsymmetrisch** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **schiefsymmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ **schiefsymmetrisch** ist:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

→ Satz 10.9

Eine Bilinearform β ist **alternierend** genau dann, wenn … (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform β ist **alternierend** genau dann, wenn für ihre darstellende Matrix $M(\beta)$ gilt:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

und

$$M(\beta)_{ii} = 0 \text{ für alle } i$$

→ Satz 10.9

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- …

- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- ...

Eine **Sesquilinearform** η auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\eta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- η ist linear in der ersten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$
- η ist semilinear in der zweiten Koordinate:
  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$
  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$ und alle $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine Sesquilinearform η ist **hermitesch**, falls ...

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte 7e2e222e-bbf4-11ec-8422-0242ac120002

Eine Sesquilinearform η ist **hermitesch**, falls gilt

$$\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\eta(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.10

Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix der Form ...

Satz
LinA-II-10-Skalarprodukte bd8dcf48-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Jede Sesquilinearform η liefert eine Matrix $M(\eta) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ der Form

$$M(\eta) \colon = \eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$$

→ Satz 10.11

Zu einer gegebenen komplexen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:
...

Satz
LinA-II-10-Skalarprodukte bd8dcf48-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Zu einer gegebenen komplexen quadratischen Matrix A existiert eine Sesquilinearform η wie folgt:

$$\eta_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \colon = \mathbf{v}^T A \overline{\mathbf{w}}$$

→ Satz 10.11

Eine symmetrische Bilinearform β auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls ...

Eine symmetrische Bilinearform β auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

→ Def. 10.14

Eine hermitesche Bilinearform β auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls ...

Eine hermitesche Bilinearform β auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist **positiv definit**, falls

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

→ Def. 10.14

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ...

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.

→ Def. 10.15

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist ...

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist eine positiv definite hermitesche Bilinearform.

→ Def. 10.15

Ein **euklidischer Vektorraum** ist ...

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Ein **euklidischer Vektorraum** $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

→ Def. 10.15

Ein **unitärer Vektorraum** ist ...

Def
LinA-II-10-Skalarprodukte d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Ein **unitärer Vektorraum** $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

→ Def. 10.15

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \end{aligned}$$

Die assoziierte **Norm** zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} \end{aligned}$$

(Die Norm wird durch das Skalarprodukt **induziert**.)

→ Def. 10.15

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) (Verhältnis Norm und 0)...

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s|\,\|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = \ \ldots$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \, \|\mathbf{v}\|$

(iii) (**Dreiecksungleichung**:)
$\ldots$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) (**Cauchy-Schwarz-Ungleichung**):
$\ldots$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) $\|s \cdot \mathbf{v}\| = |s| \, \|\mathbf{v}\|$

(iii) **Dreiecksungleichung**:
$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

(iv) **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:
$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
$v \in V$ heißt **normiert**, falls $\ldots$

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.
$v \in V$ heißt **normiert**, falls $\|v\| = 1$

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $v, w \in V$ sind zueinander **orthogonal**, falls ...

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $v, w \in V$ sind zueinander **orthogonal**, falls $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ [Notation: $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$]

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis B von V heißt **Orthonormalbasis** von V, falls ...

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ von V heißt **Orthonormalbasis** von V, falls

- jedes $\mathbf{b}_i \in B$ normiert ist, und
- jeweils $\mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j$ für $i \neq j$

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch oder unitär. Das **orthogonale Komplement** eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist

$$W^\perp :=$$

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch oder unitär. Das **orthogonale Komplement** eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist

$$W^\perp := \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \text{ für alle } \mathbf{w} \in W\}$$

→ Def. 10.23

Ein **affiner Unterraum** eines Vektorraums V ist ...

Ein **affiner Unterraum** eines Vektorraums V ist eine Teilmenge der Form

$$\mathbf{u}_0 + U = \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} - \mathbf{u}_0 \in U\}$$

für einen Untervektorraum $U \subseteq V$.

Eine **affine Hyperebene** ist ...

Eine **affine Hyperebene** ist ein affiner Unterraum, dessen zugehöriger Untervektorraum U die Dimension $\dim U = \dim V - 1$ hat.

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H =$$

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H = \{\mathbf{v} \in V \,|\, \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = d\}$$

für einen normierten Vektor $\mathbf{n}$ und ein $d \in \mathbb{R}$ mit $d \geqslant 0$

→ Satz 10.25

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. (Winkel zwischen Vektoren und ihrem Kreuzprodukt) ...
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. (Norm des Kreuzprodukts) ...

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
2. $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt ...

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

→ Def. 11.1

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist ... , für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine **Isometrie** ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$, für die gilt:

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \text{ für alle } \mathbf{v} \in V$$

→ Def. 11.1

Alle Eigenwerte einer Isometrie ...

Alle Eigenwerte einer Isometrie haben Betrag 1.

→ Satz 10.2

Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem euklidischen Vektorraum haben die Form

$$a = \pm 1$$

→ Satz 10.2

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a =$$

Eigenwerte einer Isometrie in einem unitären Vektorraum haben die Form

$$a = x + \mathrm{i}y \text{ mit } x^2 + y^2 = 1$$

→ Satz 10.2

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie …

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Isometrie stehen senkrecht zueinander.

→ Satz 10.2

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) …

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) …

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) ...

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) ...

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $V = K^n$ versehen mit dem entsprechenden Standardskalarprodukt.
Für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ sind äquivalent:

(i) f_A ist eine Isometrie auf V.

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = \overline{A}^T$

(iii) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

(iv) Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von V.

→ Satz 11.3