Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung  $\beta \colon V \times V \to K$ , für die gilt:

- $(1) \dots$
- (2)  $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- (3)  $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$  für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$
- (4)  $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung  $\beta \colon V \times V \to K$ , für die gilt:

- (1)  $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$  für alle  $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$
- (2)  $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- (3)  $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$  für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$
- (4)  $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

 $\rightarrow$  Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung  $\beta \colon V \times V \to K$ , für die gilt:

- (1)  $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$  für alle  $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$
- $(2) \ldots$
- (3)  $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$  für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$
- (4)  $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung  $\beta \colon V \times V \to K$ , für die gilt:

- (1)  $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$  für alle  $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$
- (2)  $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- (3)  $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$  für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$
- (4)  $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

→ Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung  $\beta \colon V \times V \to K$ , für die gilt:

- (1)  $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$  für alle  $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$
- (2)  $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- $(3) \dots$
- (4)  $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung  $\beta \colon V \times V \to K$ , für die gilt:

- (1)  $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$  für alle  $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$
- (2)  $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- (3)  $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$  für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$
- (4)  $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

 $\rightarrow$  Def. 10.1

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung  $\beta \colon V \times V \to K$ , für die gilt:

- (1)  $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$  für alle  $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$
- (2)  $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- (3)  $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$  für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$
- $(4) \dots$

Sei K ein Körper, V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine (bilineare) Abbildung  $\beta \colon V \times V \to K$ , für die gilt:

- (1)  $\beta(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v_1}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v_2}, \mathbf{w})$  für alle  $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$
- (2)  $\beta(s \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- (3)  $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_1}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w_2})$  für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$
- (4)  $\beta(\mathbf{v}, s \cdot \mathbf{w}) = s \cdot \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  für alle  $s \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

 $\rightarrow$  Def. 10.1

Jede Bilinearform $\beta$ auf $K^n$ liefert eine Matrix	Jede Bilinearform $\beta$ auf $K^n$ liefert eine Matrix $M(\beta) \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ der Gestalt
	$M(eta) := eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$
	$\rightarrow$ Satz 10.2

Jede Matrix $A \in \operatorname{Mat}_K(n \times n)$ liefert eine	
wie folgt:	

Jede Matrix  $A \in \operatorname{Mat}_K(n \times n)$  liefert eine Bilinearform auf  $K^n$  wie folgt:

$$\beta_A: K^n \times K^n \longrightarrow K$$
 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v}^T A \mathbf{w}$ 

 $\rightarrow$  Satz 10.2

Die Menge der Bilinearformen auf  $K^n$  und die Menge der  $n \times n$  Matrizen über K sind . . .

Die Menge der Bilinearformen auf  $K^n$  und die Menge der  $n \times n$  Matrizen über K sind isomorph.

 $\rightarrow$  Satz 10.2

Die darstellende Matrix einer Bilinearform  $\beta$  bezüglich einer Basis  $B = (\mathbf{b}_i)_i$  ist gegeben durch ...

Die darstellende Matrix einer Bilinearform  $\beta$  bezüglich einer Basis  $B = (\mathbf{b}_i)_i$  ist gegeben durch

$$M_B(\beta) \colon = \beta(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)_{ij}$$

 $\rightarrow$  Def. 10.3

Zwei Matrizen $A, A'$ sind <b>kongruent</b> , falls es	Zwei quadratische Matrizen $A,A'$ sind <b>kongruent</b> , falls es eine invertierbare Matrix $S$ gibt mit $A' = S^T A S$ $\to$ Def. 10.5
Eine Bilinearform $\beta$ auf $V$ ist <b>symmetrisch</b> , falls	Eine Bilinearform $\beta$ auf $V$ ist <b>symmetrisch</b> , falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$
	$\rightarrow$ Def. 10.7
Def LinA-II-10-Skalarprodukte 57381bea-bbe3-11ec-8422-0242ac120002	
Eine Bilinearform $\beta$ auf $V$ ist <b>schiefsymmetrisch</b> , falls	Eine Bilinearform $\beta$ auf $V$ ist <b>schiefsymmetrisch</b> , falls für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
	$eta(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -eta(\mathbf{w},\mathbf{v})$
	$\rightarrow$ Def. 10.7
Def LinA-II-10-Skalarprodukte 57381bea-bbe3-11ec-8422-0242ac120002	
Eine Bilinearform $\beta$ auf $V$ ist <b>alternierend</b> , falls	Eine Bilinearform $\beta$ auf $V$ ist <b>alternierend</b> , falls für alle $\mathbf{v} \in V$ $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$

Def LinA-II-10-Skalarprodukte

57381bea-bbe3-11ec-8422-0242ac120002

→ Def. 10.7

Eine Bilinearforr (darstellende	 nmetrisch	genau danı	n, wenn

Eine Bilinearform  $\beta$  ist **symmetrisch** genau dann, wenn ihre darstellende Matrix  $M(\beta)$  symmetrisch ist:

$$M(\beta)^T = M(\beta)$$

→ Satz 10.9

LinA-II-10-Skalarprodukte

Eine Bilinearform  $\beta$  ist schiefsymmetrisch genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform  $\beta$  ist schiefsymmetrisch genau dann, wenn ihre darstellende Matrix  $M(\beta)$  schiefsymmetrisch ist:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

→ Satz 10.9

LinA-II-10-Skalarprodukte

fb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002

Eine Bilinearform  $\beta$  ist **alternierend** genau dann, wenn ... (darstellende Matrix)

Eine Bilinearform  $\beta$  ist **alternierend** genau dann, wenn für ihre darstellende Matrix  $M(\beta)$  gilt:

$$M(\beta)^T = -M(\beta)$$

und

$$M(\beta)_{ii} = 0$$
 für alle i

→ Satz 10.9

LinA-II-10-Skalarprodukte

fb0e2cdc-bbf2-11ec-8422-0242ac120002

Eine **Sesquilinearform**  $\eta$  auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum Vist eine Abbildung  $\eta \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\eta$  ist semilinear in der zweiten Koordinate:  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$  $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$  und alle  $s \in \mathbb{C}$

Eine **Sesquilinearform**  $\eta$  auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum Vist eine Abbildung  $\eta \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\eta$  ist linear in der ersten Koordinate:  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ für alle  $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{w} \in V$  und alle  $s \in \mathbb{C}$
- $\eta$  ist semilinear in der zweiten Koordinate:  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$  $eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in V$  und alle  $s \in \mathbb{C}$

Eine **Sesquilinearform**  $\eta$  auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum V ist eine Abbildung  $\eta\colon V\times V\longrightarrow \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften:

•  $\eta$  ist linear in der ersten Koordinate:  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ für alle  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V$  und alle  $s \in \mathbb{C}$ 

.

Eine **Sesquilinearform**  $\eta$  auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum V ist eine Abbildung  $\eta\colon V\times V\longrightarrow \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\eta$  ist linear in der ersten Koordinate:  $\eta(\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + s \cdot \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ für alle  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V$  und alle  $s \in \mathbb{C}$
- $\eta$  ist semilinear in der zweiten Koordinate:  $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$   $\eta(\mathbf{v}, s\mathbf{w}) = \bar{s} \cdot \eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$  und alle  $s \in \mathbb{C}$

→ Def. 10.10

Eine Sesquilinearform  $\eta$  ist **hermitesch**, falls ...

Eine Sesquilinearform  $\eta$  ist hermitesch, falls gilt

$$\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\eta(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$$

für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ 

→ Def 10.10

Def LinA-II-10-Skalarprodukte

7e2e222e-bbf4-11ec-8422-0242ac120002

Jede Sesquilinearform  $\eta$  liefert eine Matrix der Form . . .

Jede Sesquilinearform  $\eta$ liefert eine Matrix  $M(\eta)\in {\rm Mat}_{\mathbb C}(n\times n)$ der Form

$$M(\eta)$$
: =  $\eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_{ij}$ 

→ Satz 10.11

Satz LinA-II-10-Skalarprodukte

bd8dcf48-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Zu einer gegebenen komplexen Matrix A existiert eine Sesquilinearform  $\eta$  wie folgt:

. .

Zu einer gegebenen komplexen quadratischen Matrix A existiert eine Sesquilinearform  $\eta$  wie folgt:

$$\eta_A(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \colon = \mathbf{v}^T A \overline{\mathbf{w}}$$

 $\rightarrow$  Satz 10.11

Satz LinA-II-10-Skalarprodukte

bd8dcf48-bc10-11ec-8422-0242ac120002

Eine symmetrische Bilinearform $\beta$ auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist <b>positiv definit</b> , falls	Eine symmetrische Bilinearform $\beta$ auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist <b>positiv definit</b> , falls
	$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ für alle $\mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$
	$\rightarrow$ Def. 10.14
Def LinA-II-10-Skalarprodukte ca81504e-bc10-11ec-8422-0242ac120002	
Eine hermitesche Bilinearform $\beta$ auf einem $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist <b>positiv definit</b> , falls	Eine hermitesche Bilinearform $\beta$ auf einem $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist <b>positiv definit</b> , falls
200 <b>P</b> 200 200 200 100 100 100 100 100 100 100	$eta(\mathbf{v},\mathbf{v})>0$ für alle $\mathbf{v}\in V\setminus\{0\}$
	$\rightarrow$ Def. 10.14
Def LinA-II-10-Skalarprodukte	
·	
Ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist	Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.
	ightarrow Def. 10.15
Def LinA-II-10-Skalarprodukte d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002	
Elm II IV Saddiplodakee dibiloo iice 0422 022240120002	
Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem $\mathbb{C} ext{-}Vektorraum}$ ist $\dots$	Ein <b>Skalarprodukt</b> auf einem C-Vektorraum ist eine positiv definite hermitesche Bilinearform.
	$\rightarrow$ Def. 10.15
Def LinA-II-10-Skalarprodukte d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002	

Ein euklidischer Vektorraum ist	

Ein euklidischer Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist ein  $\mathbb{R}\text{-Vektorraum }V$ zusammen mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  $\rightarrow$  Def. 10.15

LinA-II-10-Skalarprodukte

LinA-II-10-Skalarprodukte

Ein unitärer Vektorraum ist ...

Ein unitärer Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Die assoziierte Norm zu einem euklidischen oder uni-

tären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist gegeben durch

 $\rightarrow$  Def. 10.15

Die assoziierte Norm zu einem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist gegeben durch

d1b1125a-bc10-11ec-8422-0242ac120002

$$\left\| \cdot \right\| :V\longrightarrow \mathbb{R}$$

 $\mathbf{v}\mapsto$ 

 $\left\| \cdot \right\| :V\longrightarrow \mathbb{R}$  $\mathbf{v}\mapsto\sqrt{\langle\mathbf{v},\mathbf{v}
angle}$ 

(Die Norm wird durch das Skalarprodukt induziert.)

 $\rightarrow$  Def. 10.15

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

- (i) (Verhältnis Norm und 0)...
- (ii)  $||s \cdot \mathbf{v}|| = |s| ||\mathbf{v}||$
- (iii) Dreiecksungleichung:  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) Cauchy-Schwarz-Ungleichung:  $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

- (i)  $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$  für alle  $\mathbf{v} \in V$  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii)  $||s \cdot \mathbf{v}|| = |s| ||\mathbf{v}||$
- (iii) Dreiecksungleichung:  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) Cauchy-Schwarz-Ungleichung:  $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  gilt:

- (i)  $\|\mathbf{v}\| \ge 0$  für alle  $\mathbf{v} \in V$  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii)  $||s \cdot \mathbf{v}|| = \dots$
- (iii) Dreiecksungleichung:  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \le \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) Cauchy-Schwarz-Ungleichung:  $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  gilt:

- (i)  $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$  für alle  $\mathbf{v} \in V$  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii)  $||s \cdot \mathbf{v}|| = |s| ||\mathbf{v}||$
- $\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & \textbf{Dreiecksungleichung:} \\ & \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \end{aligned}$
- $\begin{array}{ll} \text{(iv)} & \textbf{Cauchy-Schwarz-Ungleichung:} \\ & |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \\ \end{array}$

 $\rightarrow$  Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  gilt:

- (i)  $\|\mathbf{v}\| \ge 0$  für alle  $\mathbf{v} \in V$  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii)  $||s \cdot \mathbf{v}|| = |s| ||\mathbf{v}||$
- (iii) (Dreiecksungleichung:)
- $\begin{array}{ll} \text{(iv)} \;\; \textbf{Cauchy-Schwarz-Ungleichung:} \\ |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \\ \end{array}$

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$  gilt:

- (i)  $\|\mathbf{v}\| \ge 0$  für alle  $\mathbf{v} \in V$  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii)  $||s \cdot \mathbf{v}|| = |s| ||\mathbf{v}||$
- $\label{eq:constraint} \begin{aligned} (\mathrm{iii}) \ \ & \textbf{Dreiecksungleichung:} \\ & \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \end{aligned}$
- $\begin{array}{ll} \text{(iv)} & \textbf{Cauchy-Schwarz-Ungleichung:} \\ |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \end{array}$

→ Satz 10.18

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  gilt:

- (i)  $\|\mathbf{v}\| \ge 0$  für alle  $\mathbf{v} \in V$  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii)  $||s \cdot \mathbf{v}|| = |s| ||\mathbf{v}||$
- $\label{eq:constraint} \begin{aligned} (\mathrm{iii}) \quad & \textbf{Dreiecksungleichung:} \\ & \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \end{aligned}$
- (iv) (Cauchy-Schwarz-Ungleichung): ...

. . .

In jedem euklidischen oder unitären Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  gilt:

- (i)  $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$  für alle  $\mathbf{v} \in V$  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii)  $||s \cdot \mathbf{v}|| = |s| ||\mathbf{v}||$
- (iii) Dreiecksungleichung:  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
- (iv) Cauchy-Schwarz-Ungleichung:  $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

→ Satz 10.18

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.  $v \in V$  heißt **normiert**, falls . . .

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.  $v \in V$  heißt **normiert**, falls  $\|v\| = 1$ 

→ Def. 10.20

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $v, w \in V$ sind zueinander <b>orthogonal</b> , falls	Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. $v, w \in V$ sind zueinander <b>orthogonal</b> , falls $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ [Notation: $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ ]
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis $B$ von $V$ heißt <b>Orthonormalbasis</b> von $V$ , falls	Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Eine Basis $B = (\mathbf{b}_i)_i$ von $V$ heißt <b>Orthonormalbasis</b> von $V$ , falls • jedes $\mathbf{b}_i \in B$ normiert ist, und • jeweils $\mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j$ für $i \neq j$
	ightarrow Def. 10.20
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch oder unitär. Das <b>orthogonale</b> Komplement eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist $W^{\perp} :=$	Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch oder unitär. Das <b>orthogonale Komplement</b> eines Untervektorraums $W \subseteq V$ ist $W^{\perp} := \{ \mathbf{v} \in V   \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \text{ für alle } \mathbf{w} \in W \}$

 $\rightarrow$  Def. 10.23

Ein affiner Unterraum eines Vektorraums V ist  $\dots$ Ein affiner Unterraum eines Vektorraums V ist eine Teilmenge der Form  $\mathbf{u}_0 + U = \{ \mathbf{v} \in V | \mathbf{v} - \mathbf{u}_0 \in U \}$ für einen Untervektorraum  $U\subseteq V.$ 

Eine affine Hyperebene ist	Eine <b>affine Hyperebene</b> ist ein affiner Unterraum, dessen zugehöriger Untervektorraum $U$ die Dimension $\dim U = \dim V - 1$ hat.

Def LinA-II-10-Skalarprodukte

nd9679f9\_hds1\_11.ss\_0d64\_0349s\_s120003

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H =$$

Jede affine Hyperrebene in einem euklidischen oder unitären VR hat die Form

$$H = {\mathbf{v} \in V | \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = d}$$

für einen normierten Vektor **n** und ein  $d \in \mathbb{R}$  mit  $d \geqslant 0$ 

→ Satz 10.25

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

- 1. (Winkel zwischen Vektoren und ihrem Kreuzprodukt) ...
- 2.  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \triangleleft (\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

- 1.  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x} \text{ und } (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
- 2.  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \triangleleft (\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

- 1.  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x} \text{ und } (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
- 2. (Norm des Kreuzprodukts) ...

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

- 1.  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$  und  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$
- 2.  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

→ Satz 10.28