Proiect Identificarea Sistemelor

Ghișa Alexandru-Nicolae, grupa 30132

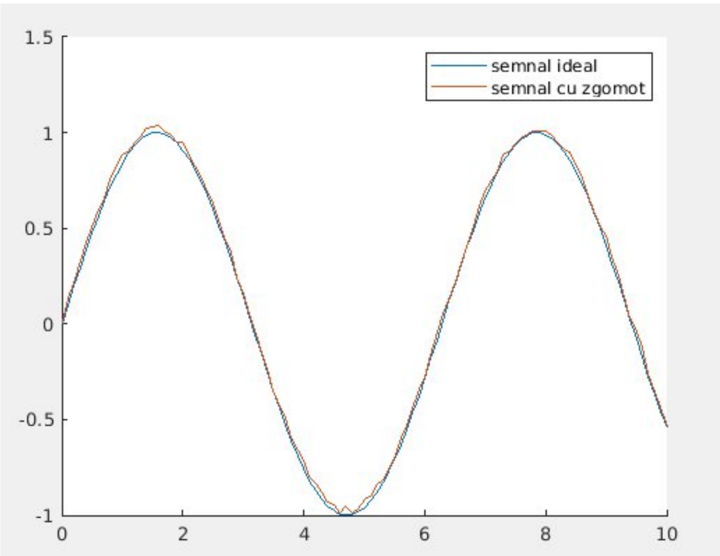
Scop

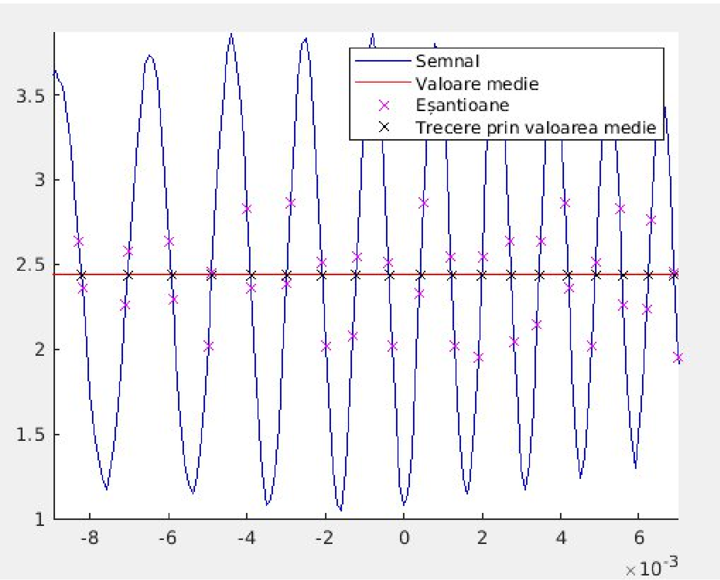
Identificarea unui sistem de ordin 2 fără zerouri respectiv un sistem de ordin 2 cu un zero prin metode neparametrice și parametrice pe baza semnalelor de intrare (un sinus cu amplitudine constantă și frecvența variabilă) și de ieșire (răspunsul sistemului la intrare).

Identificare prin metode neparametrice

Diagrama Nyquist

Am utilizat diagrama Nyquist pentru identificarea ambelor sisteme, dar am realizat și o funcție care ia ca parametru numele fișierul cu date experimentale și face identificarea automat (funcția *identificare*).





Pentru a realiza diagrama Nyquist trebuie calculată amplificarea și defazajul semnalului de ieșire față de cel de intrare pentru fiecare frecvență. Defazajul reprezintă întârzierea semnalului de ieșire fața de cel de intrare, în radiani. Acesta poate fi calculat cu cea mai mare precizie la trecerea semnalului prin 0 (valoarea medie). Deoarece frecvența de eșantionare este finită, niciun eșantion nu va fi exact în 0. Momentul exact (t_0) când semnalul trece prin valoarea medie poate fi calculat prin interpolarea liniară dintre două eșantioane adiacente acesteia, la momentele de timp t_i și t_{i+1}.

$$y_i = at_i + b$$

$$y_{i+1} = at_{i+1} + b$$

$$a = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}, b = y_i - at_i$$

$$t_0 = \frac{\bar{y} - b}{a}$$

Amplificarea (modulul) este egală cu raportul dintre amplitudinea semnalului de intrare și semnalului de ieșire. Neglijând zgomotul, am considerat valorile minime și maxime la jumătatea a două treceri succesive prin 0.

$$\varphi = -\frac{t_{y_i} - t_{u_i}}{t_{u_{i+1}} - t_{u_i}}\pi, M = \frac{y_j}{u_j}$$

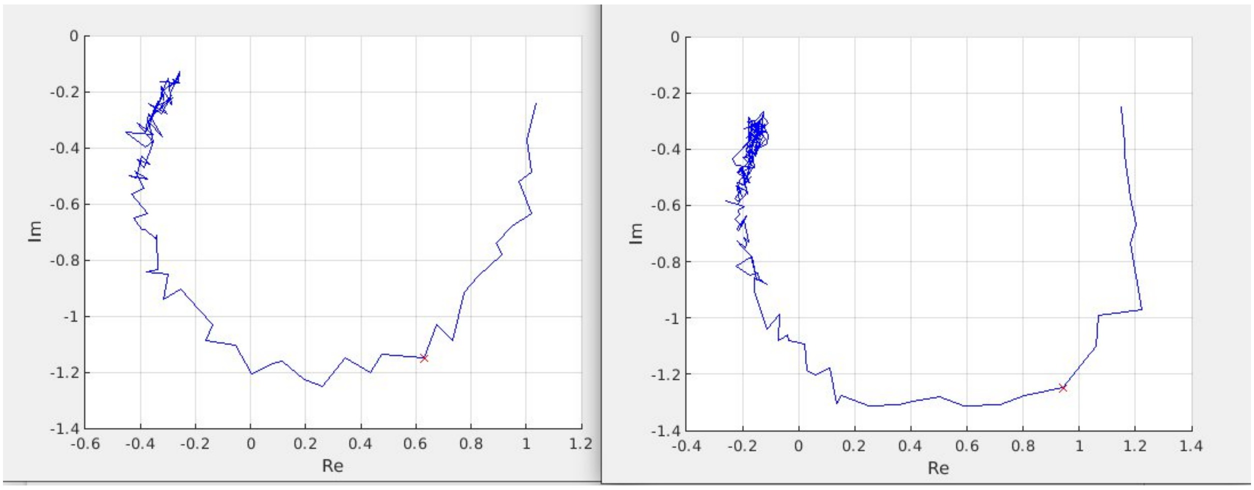
,unde t_{y_i}, t_{u_i} reprezintă momentele în care semnalul trece prin valoarea medie, iar y_j, u_j valorile minime/maxime.

Cunoscând modulul (M) și faza (φ) funcției de transfer la mai multe frecvențe putem realiza diagrama Nyquist, calculând partea reală, respectiv imaginară.

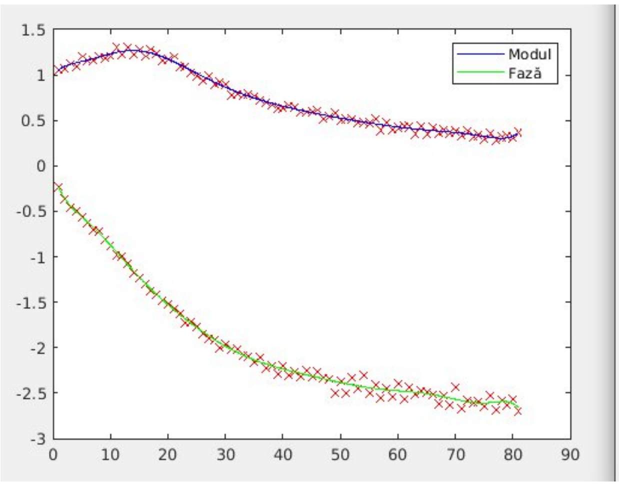
$$Re\{H(j\omega)\} = M\, cos\varphi$$

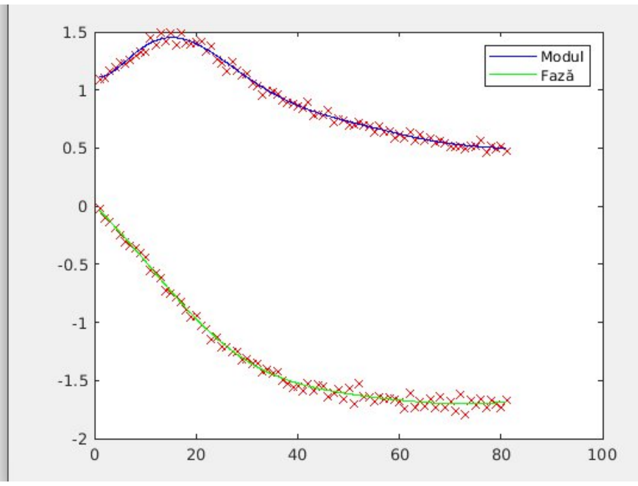
$$Im\{H(j\omega)\} = M\, sin\varphi$$

Din cauza zgomotului, frecvența de rezonanță respectiv frecvența la intersecția cu axa reală, nu pot fi calculate cu o precizie foarte mare, ceea ce poate fi observat și pe diagramă Nyquist, ceea ce a dus la erori destul de mari: $\varepsilon_{MPN} = 8.8316\%$ pentru sistemul fără zerouri, respectiv $\varepsilon_{MPN} = 13.3853\%$ pentru cel cu un zero,



așa am m-am decis să interpolez vectorul modului și al fazei cu un polinom. Pentru a afla gradul optim, am calculat eroarea medie pătratică normalizată pentru gradul 5 până la 15, pentru toate datele la care am avut acces (ale colegilor de grupă). Pentru sistemul fără zerouri am testat două metode, rezonanța și -π/2.

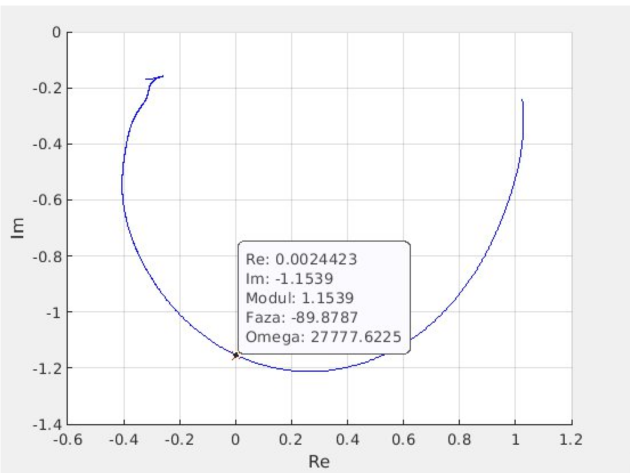


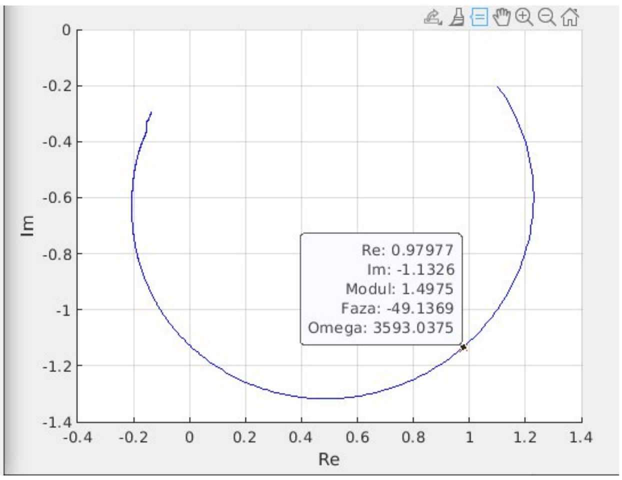


Sistem fără zerouri								Sistem cu un zero			
Rezonanță				-π/2				Rezonanță			
grad	ε_{min}	ε_{medie}	ε_{max}	grad	ε_{min}	ε_{medie}	ε_{max}	grad	ε_{min}	ε_{medie}	ε_{max}
5	3.63	20.36	78.87	5	3.54	5.77	9.38	5	4.45	9.45	35.58
6	3.61	7.47	22.12	6	3.54	5.14	6.75	6	4.37	6.79	10.38
7	3.78	5.85	11.67	7	3.60	5.03	6.74	7	4.33	6.55	10.67
8	3.66	6.16	10.59	8	3.54	4.96	7.57	8	4.20	6.51	9.73
9	3.60	6.68	14.65	9	3.48	4.89	7.61	9	4.13	6.67	10.07
10	3.83	7.32	14.35	10	3.48	4.81	7.25	10	4.22	6.85	9.66
11	3.97	7.60	14.36	11	3.47	4.76	7.23	11	4.20	6.93	9.85
12	4.42	7.95	13.54	12	3.48	4.73	6.82	12	4.32	6.99	10.82
13	4.22	8.21	16.23	13	3.49	4.73	7.41	13	4.31	7.13	11.49
14	4.10	7.98	15.13	14	3.48	4.73	7.26	14	4.38	7.10	11.00
15	4.10	8.04	15.14	15	3.46	4.74	7.25	15	4.42	7.18	10.94

Am ales un polinom de gradul 12 și metoda -π/2 pentru sistemul fără zerouri și gradul 8 și rezonanța pentru sistemul cu un zero, astfel eroarea a scăzut la $\varepsilon_{MPN} = 4.2305\%$, respectiv $\varepsilon_{MPN} = 7.4673\%$, în cazul datelor mele.

După interpolare, capetele de frecvență joasă și înaltă sunt distorsionate, dar nu sunt folosite în identificare





Sistem de ordin 2 fără zerouri

Funcția de transfer

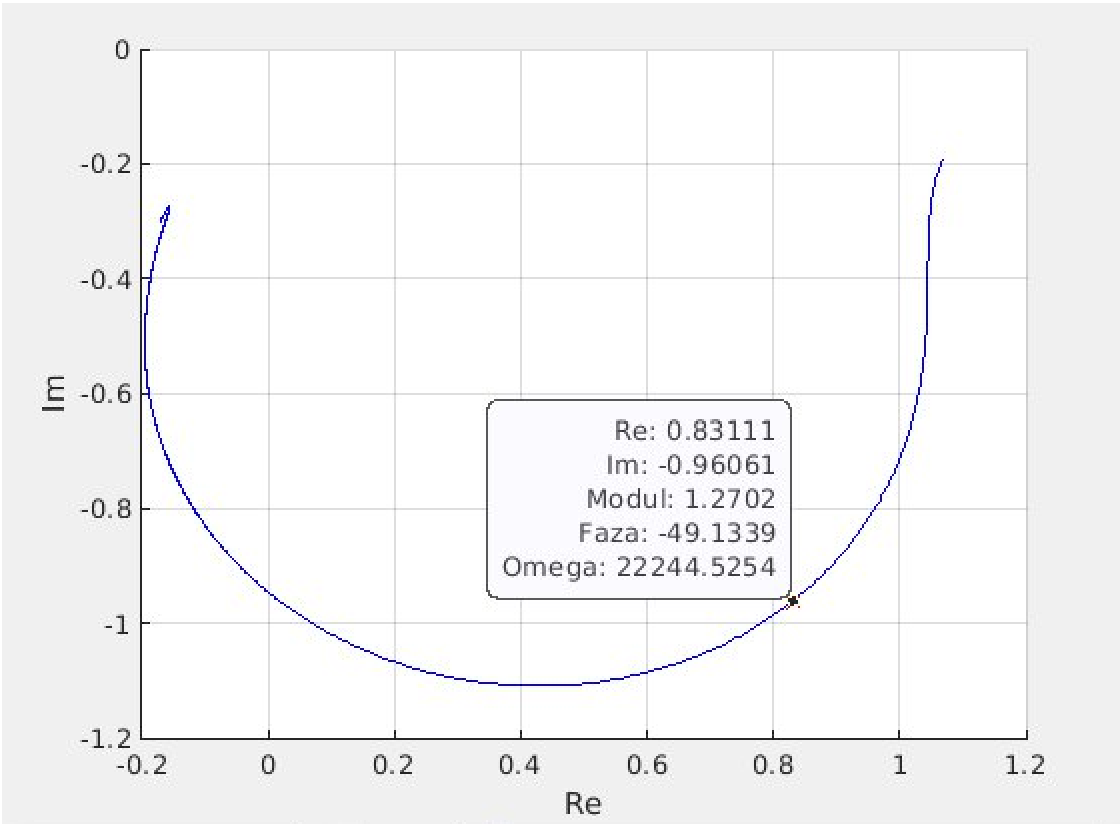
$$H(s) = k\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Unde $k = factorul\ de\ proportionalitate,\ \zeta = factorul\ de\ ammortizare,\ \omega_n = pulsatia\ natural$

Identificare prin metoda rezonanței

$$k = \frac{\overline{y}}{\overline{u}} = 1.0079$$

Am citit pulsația și modulul la rezonanță de pe diagrama Nyquist:



$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.2702$$

$$=> \ 4M_r^2\zeta^4 - 4M_r^2\zeta^2 + 1 = 0$$

$$\zeta_{1,2} = \frac{M_r \pm \sqrt{4M_r^2 - 1}}{2M_r}$$

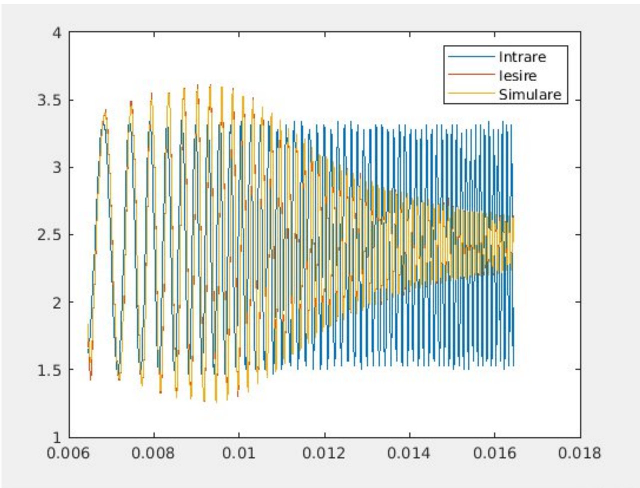
$$\zeta_1 = 0.8991 \ \zeta_2 = 0.4378$$

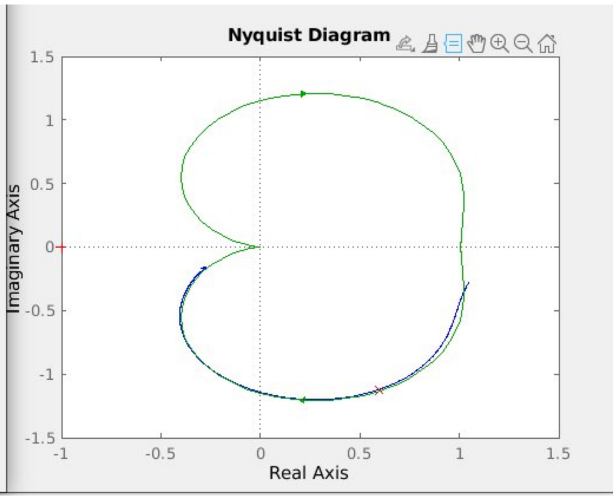
Deoarece fenomenul de rezonanța apare pentru un factor de amortizare mai mic decât $\sqrt{2}/_2$, voi alege valoarea cea mai mică, ζ_2

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 22244 \ rad/s$$
$$=> \omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-2\zeta^2}} = 28328 \ rad/s$$

$$H(s) = 1.0079\frac{802475584}{s^2 + 24804s + 802475584}$$

Validarea rezultatelor



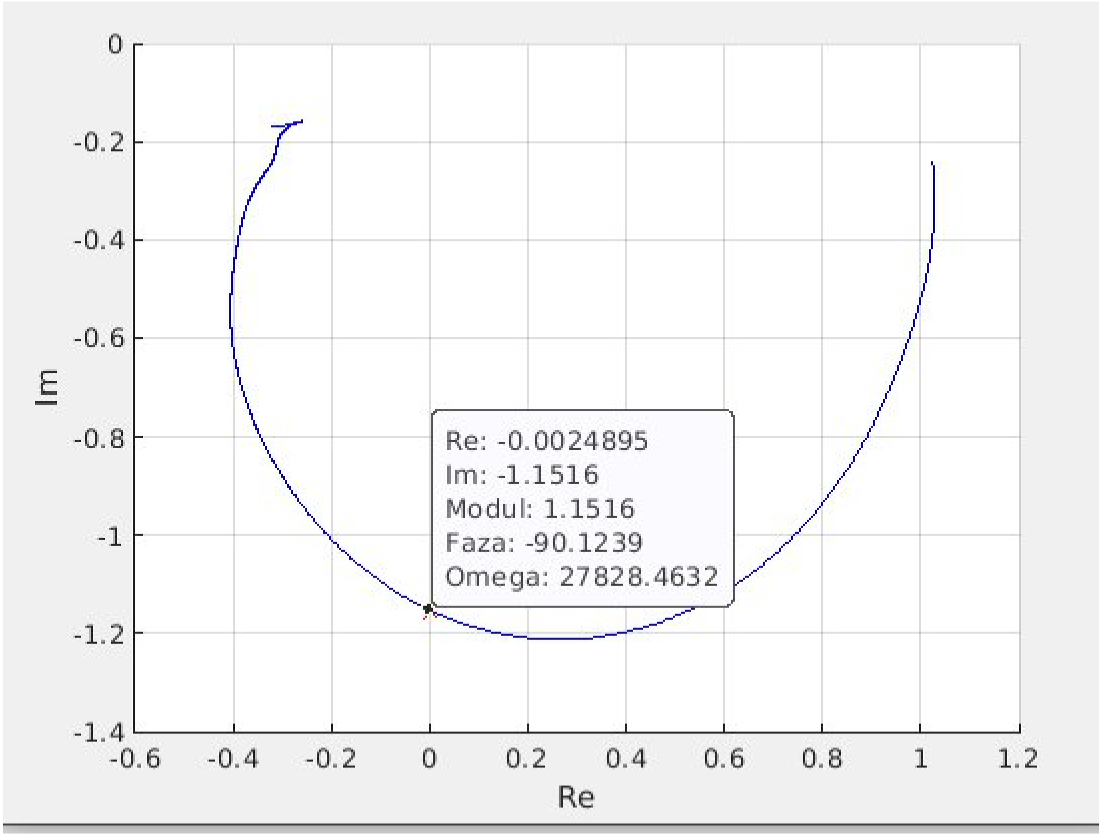


Compararea semnalului de ieșire cu simularea intrării.

Compararea diagramei Nyquist obținută din datele experimentale cu cea a funcției de transfer identificate.

$$\varepsilon_{MPN} = 6.3391\%$$

Identificare prin analiza sistemului la defazaj de -π/2



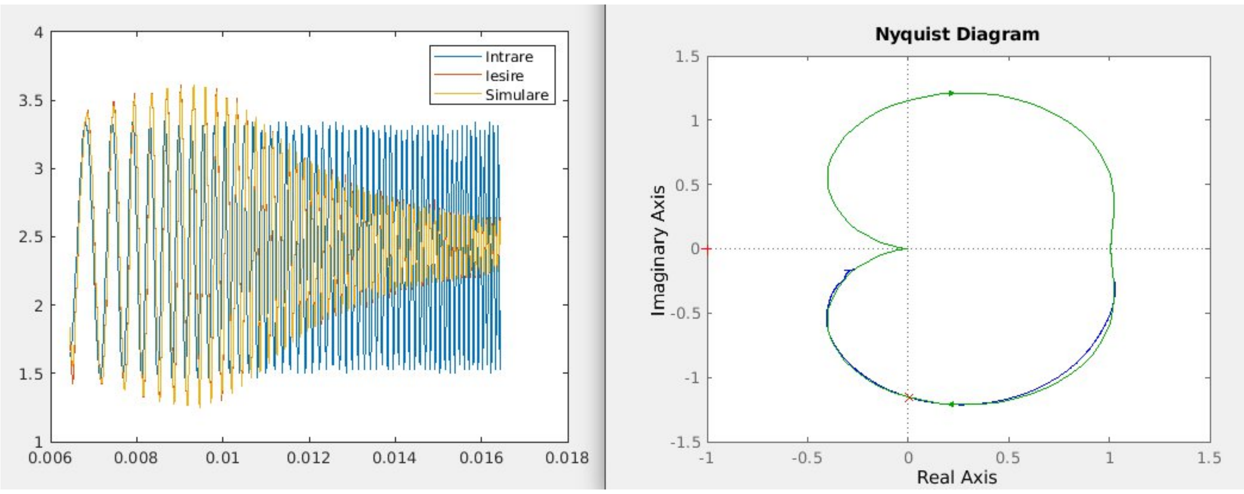
$$k = \frac{\overline{y}}{\overline{u}} = 1.0079$$

$$\omega_n = \omega_{-\pi} = 27828\ rad/s$$

$$\zeta = \frac{k}{2M_{-\pi}} = 0.4367$$

$$H(s) = 1.0079\frac{774397584}{s^2 + 24305s + 774397584}$$

Validarea rezultatelor



Compararea semnalului de ieșire cu simularea intrării.

Compararea diagramei Nyquist obținută din datele experimentale cu cea a funcției de transfer identificate.

$$\varepsilon_{MPN} = 4.2305\%$$

Model spațiul stărilor – forma canonică observabilă

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n & k\omega_n^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Condiții inițiale

$$x_1 = y \; x_2 = \dot{y}$$

Calculul erorii

$$\varepsilon_{MPN} = \frac{\|y - y_{sim}\|}{\|y - \bar{y}\|}$$

Sistem de ordin 2 cu un zero

Funcția de transfer

$$H(s) = k\frac{\omega_n^2(T_z s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} => H(j\omega) = k\frac{T_z j\omega + 1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

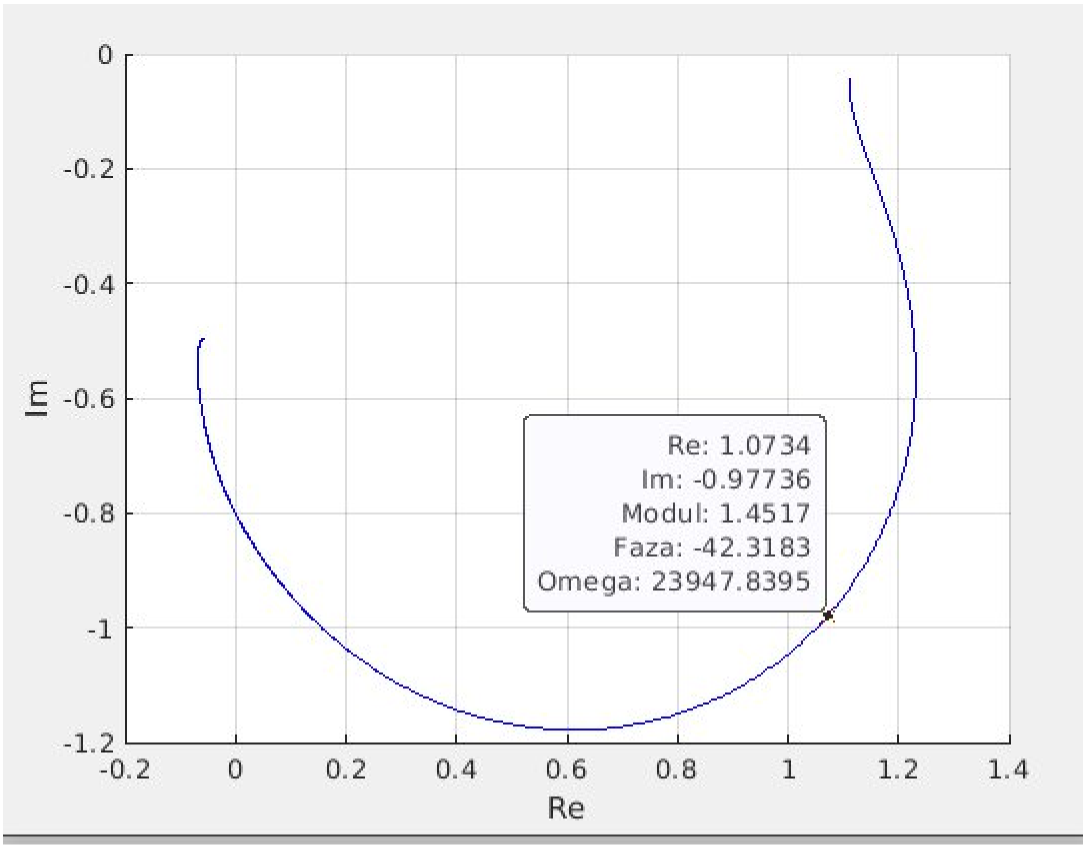
Unde $k = factorul\ de\ proportionalitate,\ \zeta = factorul\ de\ ammortizare,\ \omega_n = pulsatia\ natural,$

$T_z\ =\ constanta\ de\ timp\ a\ zeroului$

$$k = \frac{\overline{y}}{\overline{u}} = 1.0101$$

Identificare prin metoda rezonanței

Am citit pulsația, modulul și faza la rezonanță de pe diagrama Nyquist:



$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 23947\ rad/s => \frac{\omega_r}{\omega_n} = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = 1.4517,\ \angle H(j\omega) = -42.32°$$

$$\angle H(j\omega) = arctg(T_z\omega) - arctg\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} => \angle H(j\omega_r) = arctg(T_z\omega_r) - arctg\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = k\frac{\sqrt{(T_z\omega)^2+1}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} => \left|H(j\omega_r)\right| = k\frac{\sqrt{\left(T_z\omega_r\right)^2+1}}{\sqrt{4\zeta^2(1-\zeta^2)}}$$

$$=> T_z\omega = \sqrt{\left(\frac{\left|H(j\omega)\right|}{k}\right)^2\cdot 4\zeta^2(1-\zeta^2)-1}$$

Înlocuind în ecuația fazei,

$$=> \angle H(j\omega) = arctg\sqrt{\left(\frac{\left|H(j\omega)\right|}{k}\right)^2\cdot 4\zeta^2(1-\zeta^2)-1} - arctg\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta}$$

,această ecuație poate fi rezolvată în Matlab cu ajutorul funcției fsolve.

Funcție de transfer

$$\frac{14006\ (s+6.208e04)}{(s^2+2.397e04s\ +8.608e08)}$$

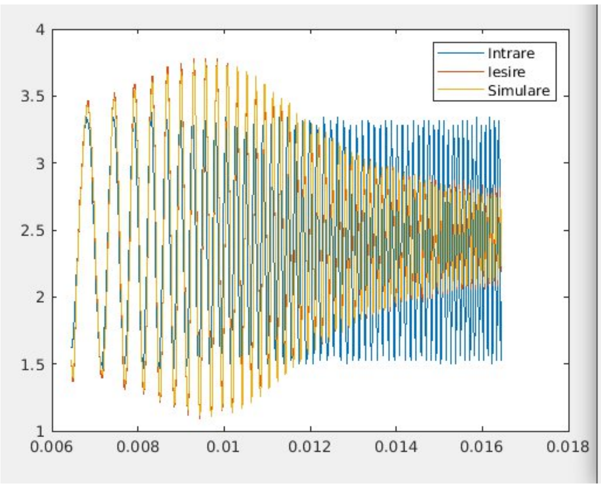
Model spațiul stărilor – forma canonică de observare

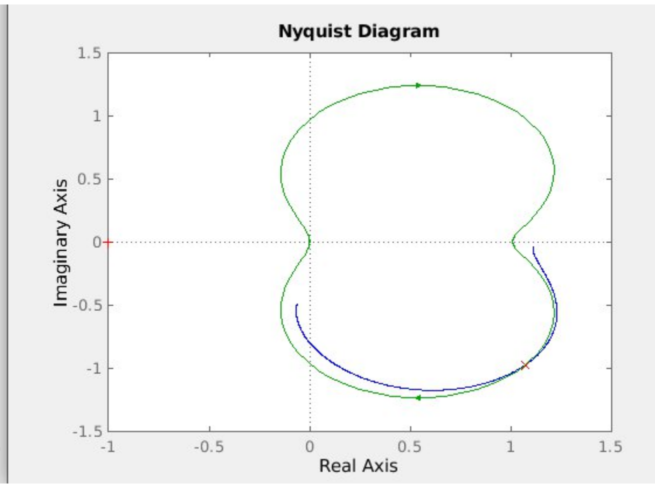
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\zeta\omega_n & 1 & k\omega_n^2T_z \\ -\omega_n^2 & 0 & k\omega_n^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Condiții inițiale

$$x_1 = y\ x_2 = \dot{y} + 2\zeta\omega_n y - k\omega_n^2T_z u$$

Validarea rezultatelor





Compararea semnalului de ieșire cu simularea intrării.

Compararea diagramei Nyquist obținută din datele experimentale cu cea a funcției de transfer identificate.

$$\varepsilon_{MPN} = \frac{\|y - y_{sim}\|}{\|y - \bar{y}\|} = 7.4673\%$$

Identificare prin metode parametrice

Sistem de ordin 2 fără zerouri

Funcția de transfer discretă

$$H(s) = k\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H_{zoh}(s) = \frac{1 - e^{sTe}}{s}$$

$$H(z) = Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\{H(s) * H_{zoh}(s)\}\right\}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}\right\}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{k\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}\right\}\right\}$$

$$H(z) = k\omega_n^2(1 - z^{-1})Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s \ + (\zeta\omega_n)^2 - (\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2)}\right\}\right\}$$

Notăm

$$a = \zeta\omega_n,\ b = (\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2,\ \phi = arctg(-\frac{a}{b})$$

Conform tabelului de transformate Laplace și Z

$$H(z) = k\omega_n^2(1 - z^{-1})\frac{1}{a^2 + b^2}\left[\frac{z}{z - 1} - \frac{z^2 - ze^{-aT}sec\,\Phi\,cos(bT - \Phi)}{z^2 - 2ze^{-aT}cos(bT) + e^{-2aT}}\right]$$

$$H(z) = k\omega_n^2(1 - z^{-1})\frac{1}{a^2 + b^2}\left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - z^{-1}e^{-aT}sec\,\Phi\,cos(bT - \Phi)}{1 - 2z^{-1}e^{-aT}cos(bT) + z^{-2}e^{-2aT}}\right]$$

Notăm

$$l = \frac{k\omega_n^2}{a^2 + b^2},\ m = e^{-aT}sec\,\Phi\,cos(bT - \Phi),\ n = 2e^{-aT}cos(bT),\ \ p = e^{-2aT}$$

$$H(z) = l(1 - z^{-1})\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - mz^{-1}}{1 - nz^{-1} + pz^{-2}}\right)$$

$$H(z) = l - \frac{l(1 - z^{-1})(1 - mz^{-1})}{1 - nz^{-1} + pz^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{l(1 - nz^{-1} + pz^{-2}) - l(1 - z^{-1})(1 - mz^{-1})}{1 - nz^{-1} + pz^{-2}}$$

$$H(z) = l\frac{(1+m-n)z^{-1} + (p-m)z^{-2}}{1-nz^{-1}+pz^{-2}}$$

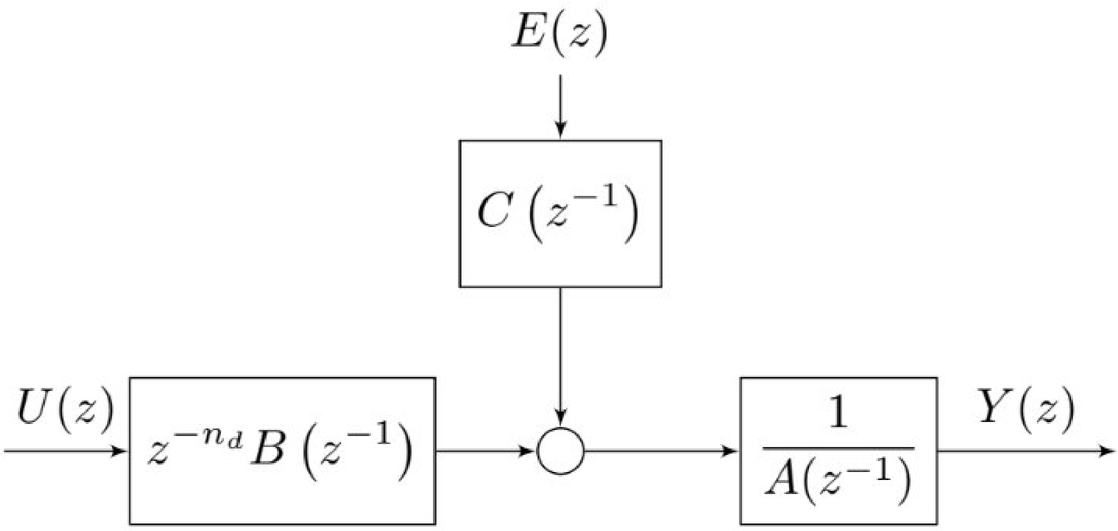
$$H(z) = l\frac{(1+m-n) + (p-m)z^{-1}}{1-nz^{-1}+pz^{-2}}z^{-1}$$

Funcția de transfer discretă are un zero, deși cea în continuu nu avea niciunul, deci parametrii cu care se apelează funcțiile armax respectiv oe sunt $n_A = n_F = 2$, $n_B = 2$, $n_C = 2$, $n_k = n_d = 1$

Pentru a elimina zeroul voi înlocui z^{-1} cu $1 = e^{0 \cdot Te}$

$$H(z) = l\frac{1-n+p}{1-nz^{-1}+pz^{-2}}z^{-1}$$

Metode validate prin autocorelație - armax



Model identificat:

$$A(z) = 1 - 1.72\,z^{-1} + 0.7866\,z^{-2}$$

$$B(z) = 0.06999\,z^{-1} - 0.003263\,z^{-2}$$
$$C(z) = 1 - 1.582\,z^{-1} + 0.6822\,z^{-2}$$

Funcția de transfer de la intrare la ieșire este

$$H(z) = z^{-n_k}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = z^{-1}\frac{0.06999 - 0.003263\,z^{-1}}{1 - 1.72\,z^{-1} + 0.7866\,z^{-2}}$$

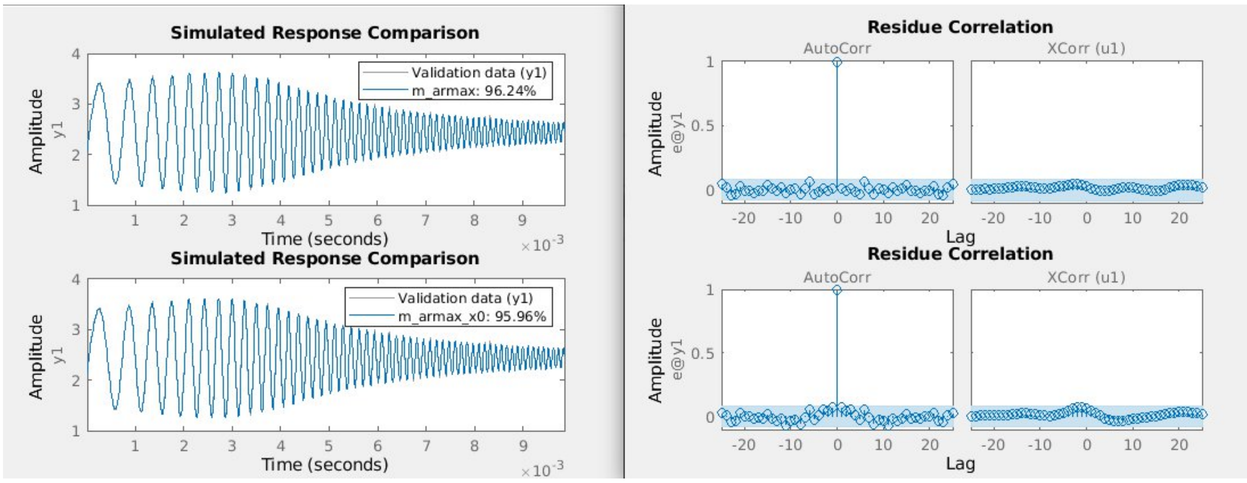
În continuu acest model are un zero în plus

$$H(s) = \frac{4019\, s + 7.552e08}{s^2 + 2.4e04\, s + 7.489e08}$$

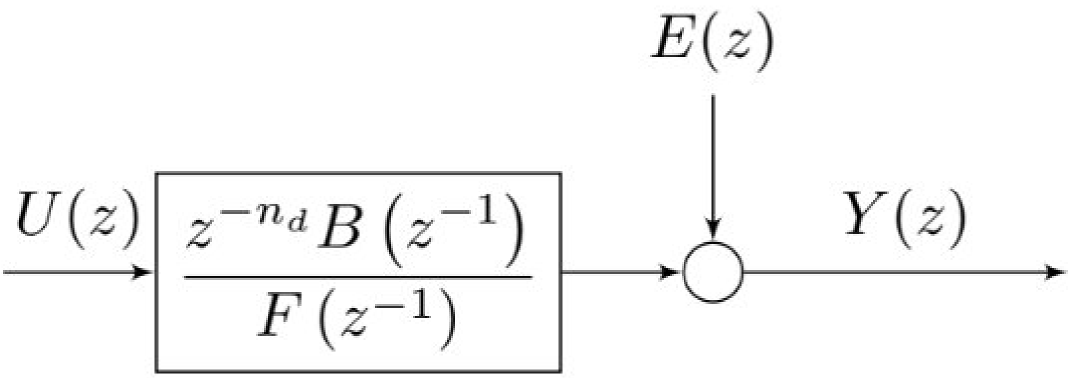
Pentru a-l elimina voi înlocui zeroul cu 0

$$H(s) = \frac{7.575e08}{s^2 + 2.4e04\, s + 7.489e08}$$

Validare – în urma eliminării zeroului eroarea medie pătratică normalizată a crescut cu mai puțin de 0.5%, iar testul autocorelației este în continuare trecut. $\varepsilon_{MPN} = 4.04\%$



Metode validate prin intercorelație – oe



Model identificat:

$$B(z) = 0.07019\, z^{-1} - 0.003286\, z^{-2}$$
$$F(z) = 1 - 1.72\, z^{-1} + 0.7862\, z^{-2}$$

Funcția de transfer de la intrare la ieșire este

$$H(z) = z^{-n_d}\frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} = z^{-1}\frac{0.07019 - 0.003263\, z^{-1}}{1 - 1.72\ z^{-1} + \ 0.7862\, z^{-2}}$$

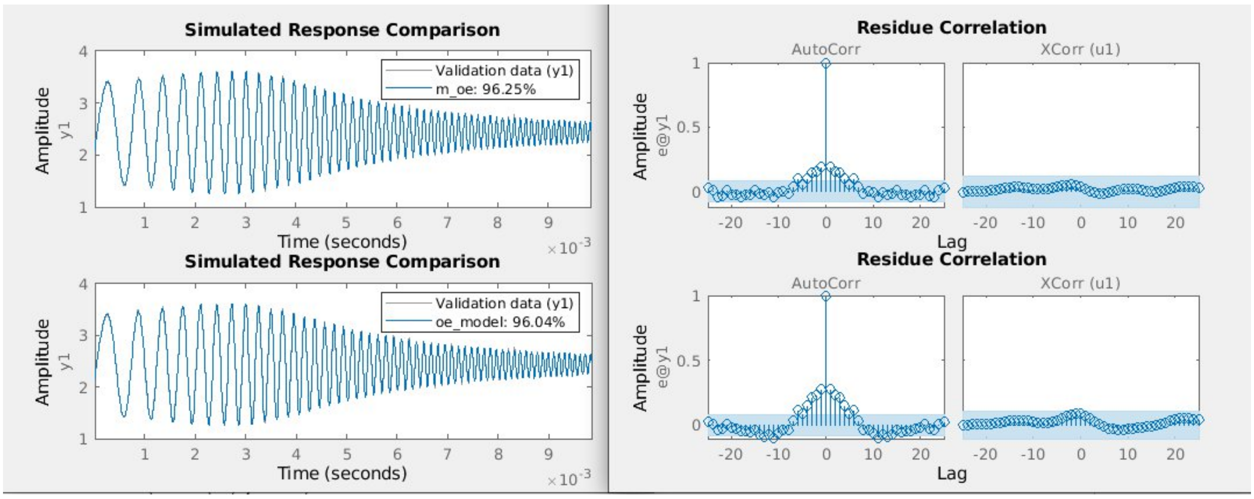
În continuu acest model are un zero în plus

$$H(s) = \frac{4033\, s\ +\ 7.575e08}{s^{\,2} +\ 2.406e04\, s\ +\ 7.511e08}$$

Pentru a-l elimina voi înlocui zeroul cu 0

$$H(s) = \frac{7.575e08}{s^{\,2} +\ 2.406e04\, s\ +\ 7.511e08}$$

Validare – în urma eliminării zeroului eroarea medie pătratică normalizată a crescut cu mai puțin de 0.5%, iar testul intercorelației este în continuare trecut. $\varepsilon_{MPN} = 3.96\%$



Sistem de ordin 2 cu un zero

Funcția de transfer discretă

$$H(s) = k\frac{\omega_n^2(T_z s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H_{zoh}(s) = \frac{1 - e^{sTe}}{s}$$

$$H(z) = Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\{H(s) * H_{zoh}(s)\}\right\}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}\right\}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{k\frac{\omega_n^2(T_z s + 1)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}\right\}\right\}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{k\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}\right\}\right\} + (1 - z^{-1})Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{k\frac{\omega_n^2 T_z s}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}\right\}\right\}$$

Prima parte fiind un sistem de ordin 2 fără zerouri

$$H(z) = l\frac{(1 + m - 2n) + (p - m)z^{-1}}{1 - 2nz^{-1} + pz^{-2}}z^{-1} + H'(z)$$

$$H'(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{k\frac{\omega_n^2 T_z}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}\right\}\right\}$$

$$H'(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{k\frac{\omega_n^2 T_z}{s^2 + 2\zeta\omega_n s \ + (\zeta\omega_n)^2 - (\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2}\right\}\right\}$$

Notăm

$$a = \zeta\omega_n, b = (\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2, \phi = arctg(-\frac{a}{b})$$

Conform tabelului de transformate Laplace și Z

$$H'(z) = k\omega_n^2 T_z(1 - z^{-1})\frac{1}{b}\left(\frac{ze^{-aT}sin(bT)}{z^2 - 2ze^{-aT}cos(bT) + e^{-2aT}}\right)$$

$$H'(z) = \frac{k\omega_n^2 T_z}{b}(1 - z^{-1})\left(\frac{z^{-1}e^{-aT}sin(bT)}{1 - 2z^{-1}e^{-aT}cos(bT) + z^{-2}e^{-2aT}}\right)$$

Notăm

$$l' = \frac{k\omega_n^2 T_z}{b} e^{-aT} sin(bT),\ n = 2e^{-aT} cos(bT),\ \ p = e^{-2aT}$$

$$H'(z) = l'(1 - z^{-1}) \frac{z^{-1}}{1 - 2nz^{-1} + pz^{-2}}$$

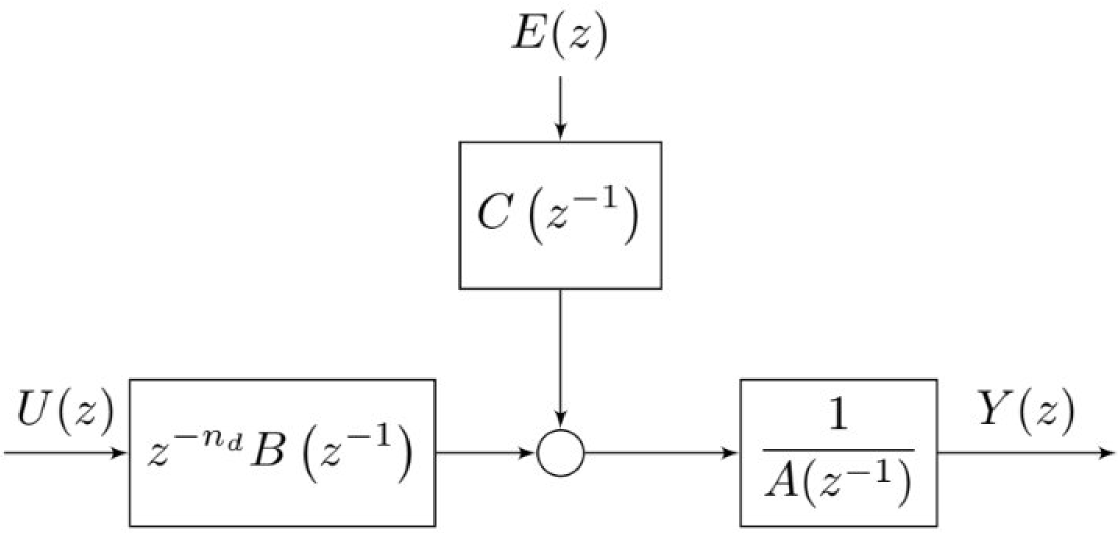
$$H'(z) = l' \frac{(1 - z^{-1})}{1 - 2nz^{-1} + pz^{-2}} z^{-1}$$

$$H(z) = l \frac{(1 + m - 2n) + (p - m)z^{-1}}{1 - 2nz^{-1} + pz^{-2}} z^{-1} + l' \frac{1 - z^{-1}}{1 - 2nz^{-1} + pz^{-2}} z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{\left[l(1 + m - 2n) + l'\right] + \left[l(p - m) + l'\right] z^{-1}}{1 - 2nz^{-1} + pz^{-2}} z^{-1}$$

Funcția de transfer discretă are un zero deci parametrii cu care se apelează funcțiile armax respectiv iv4 sunt $n_A = 2$, $n_B = 2$, $n_k = 1$

Metode validate prin autocorelație - armax



Model identificat:

$$A(z) = 1 - 1.71\, z^{-1} + 0.7693 z^{-2}$$

$$B(z) = 0.2326\, z^{-1} - 0.1729\, z^{-2}$$

$$C(z) = 1 - 1.083\, z^{-1} + 0.3849\, z^{-2} - 0.06773\, z^{-3} - 0.05194\, z^{-4} - 0.1317\, z^{-5}$$

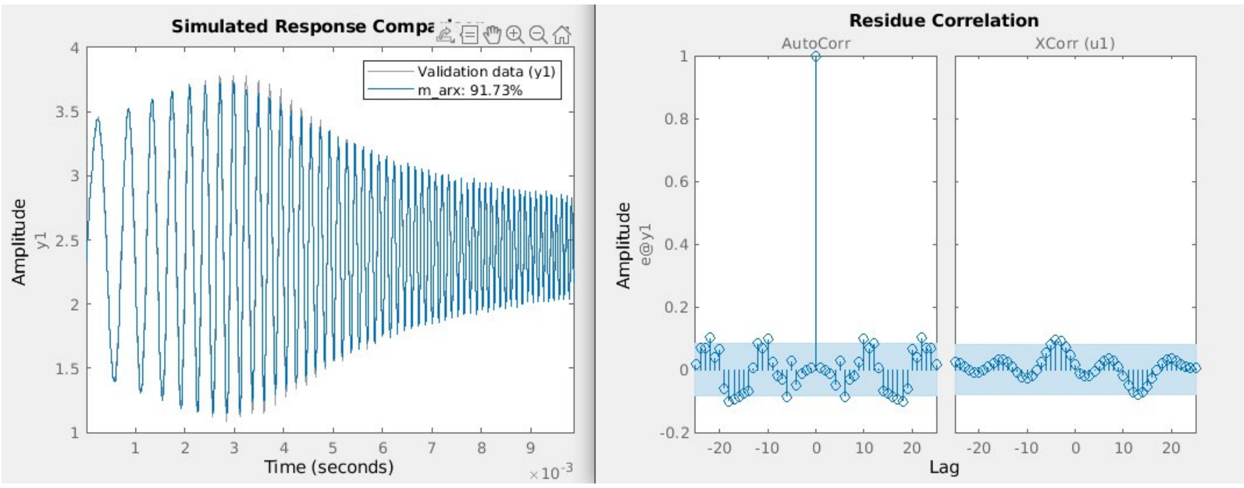
Funcția de transfer de la intrare la ieșire este

$$H(z) = z^{-n_k}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = z^{-1}\frac{0.2326 \ - 0.003263\ z^{-1}}{1\ -\ 1.71\ z^{-1}\ +\ 0.7693z^{-2}}$$

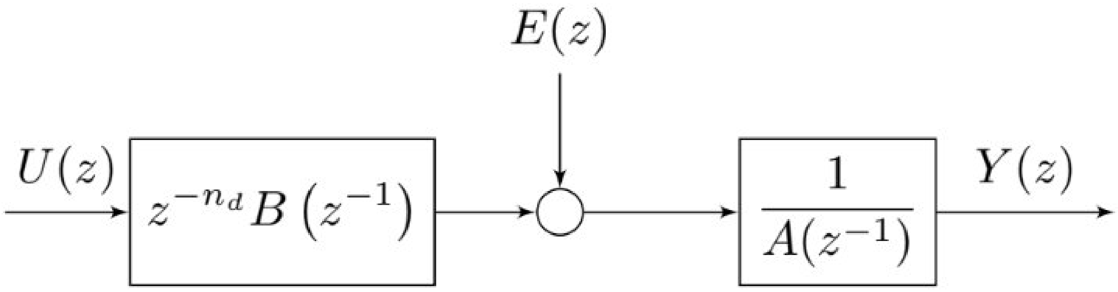
În continuu

$$H(s) = \frac{2.316e04\ s\ +\ \ 6.82e08}{s^2\ +\ 2.623e04\ s\ +\ 6.75e08}$$

Validare: testul autocorelației este trecut, iar $\varepsilon_{MPN} = 8.27\%$



Metode validate prin intercorelație – iv4



Model identificat:

$$A(z)\ \ =\ 1\ -\ 1.693\ z^{\ -1} + 0.7532\ z^{\ -1}$$

$$B(z)\ \ =\ 0.2161\ z^{\ -1} - 0.1553\ z^{\ -1}$$

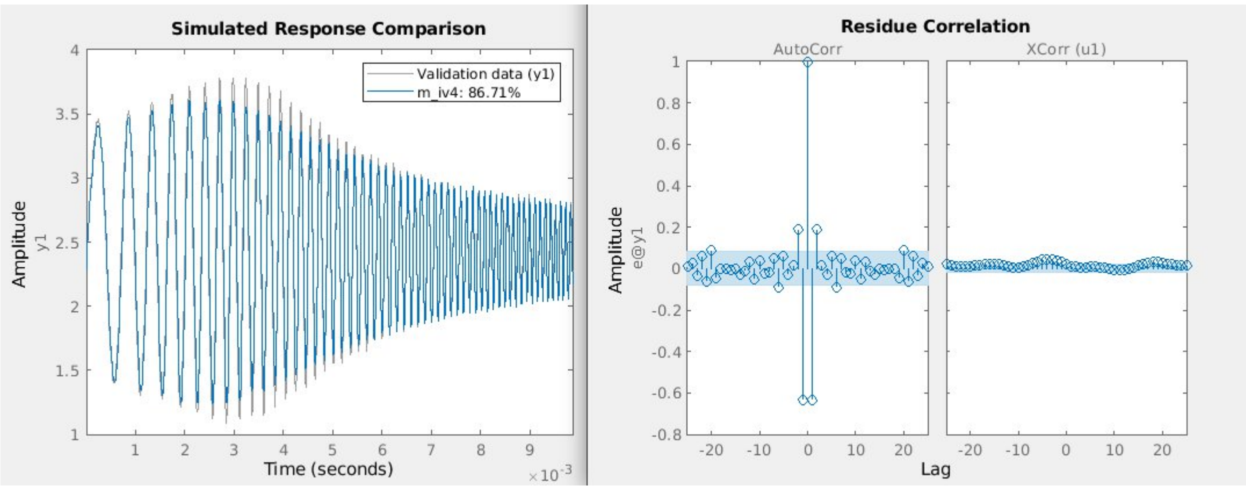
Funcția de transfer de la intrare la ieșire este

$$H(z) = z^{-n_k}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = z^{-1}\frac{0.2161 - 0.1553z^{-1}}{1 - 1.693\,z^{-1} + 0.7532\,z^{-1}}$$

În continuu

$$H(s) = \frac{2.141e04\,s + 7.022e08}{s^2 + 2.834e04\,s + 6.985e08}$$

Validare: testul intercorelației este aproape trecut, iar $\varepsilon_{MPN} = 12.29\%$



Concluzii

Pentru sistemul fără zerouri nu se observă o diferență semnificativă între precizia metodelor neparametrice și cele parametrice (armax(2,2,2,1)) , dar pentru sistemul cu un zero metodele de identificare neparametrice sunt superioare.

	Sistem fără zerouri		Sistem cu un zero	
	Metode neparametrice	Metode parametrice	Metode neparametrice	Metode parametrice
ε_{medie}	4.96	5.27	6.51	10.95
ε_{min}	3.54	3.92	4.20	6.41
ε_{max}	7.56	7.71	9.73	16.19