

La macchina di Turing Universale

Alberto Marchetti Spaccamela

Definizione di Macchina di Turing

Definizione 1.1: macchina di Turing

Una *macchina di Turing* è costituita da un **alfabeto di lavoro** Σ contenente il simbolo \square e da un **grafo delle transizioni**, ovvero un grafo etichettato $G = (V, E)$ tale che:

- $V = \{q_0\} \cup F \cup Q$ è l'insieme degli **stati** (q_0 è lo stato **iniziale**, F è l'insieme degli stati **finali** e Q è l'insieme degli stati che non sono iniziali né finali);
- E è l'insieme delle **transizioni** e, a ogni transizione, è associata un'etichetta formata da una lista l di triple (σ, τ, m) , in cui σ e τ sono simboli appartenenti a Σ e $m \in \{R, L, S\}$, tale che non esistono due triple in l con lo stesso primo elemento.

I simboli σ e τ che appaiono all'interno di una tripla dell'etichetta di una transizione indicano, rispettivamente, il simbolo attualmente letto dalla testina e il simbolo da scrivere, mentre il valore m specifica il movimento della testina: in particolare, R corrisponde allo spostamento a destra, L allo spostamento a sinistra e S a nessun spostamento. Nel seguito di questa dispensa, per evitare di dover specificare ogni volta

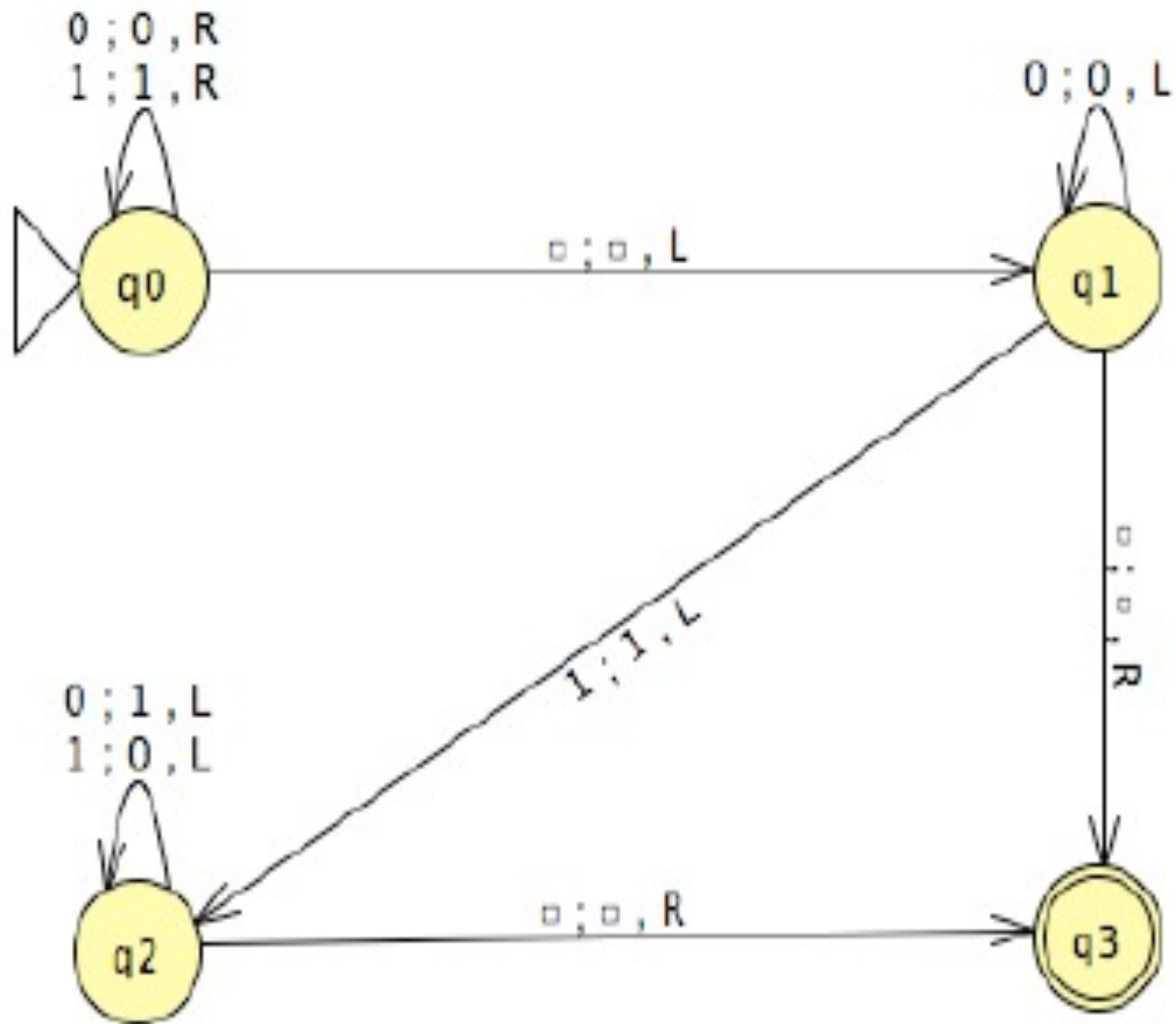
Rappresentazione tabellare

.3: rappresentazione tabellare della macchina per il complemento bit a bit

ferimento alla macchina di Turing introdotta nell'Esempio 1.1 e mostr
, la corrispondente rappresentazione tabellare di tale macchina è la segu

stato	simbolo	stato	simbolo	movimento
q0	0	q0	1	R
q0	1	q0	0	R
q0	□	q1	□	L
q1	0	q1	0	L
q1	1	q1	1	L
q1	□	q2	□	R

Rappresentazione grafica



Un limite delle Macchine di Turing (MdT):

Le MdT sono "hardwired"



Le MdT eseguono
un solo programma

I computer che usiamo sono programmabili

Soluzione: La macchina di Turing universale

Attributi:

- Riprogrammabile
- Simula ogni altra Macchina di Turing

La macchina di Turing universale U

Simula ogni altra Macchina di Turing

Input della macchina di Turing universale

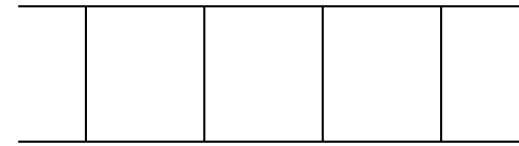
Descrizione di M - una macchina di Turing

I - stringa di input di M

U esegue il calcolo di M su I

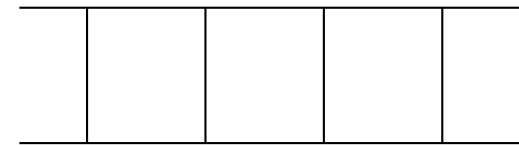
tre nastri: all'inizio

Nastro 1



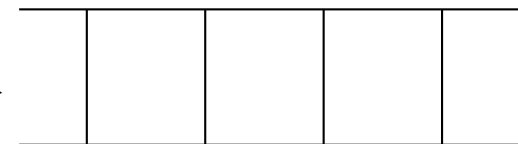
Descrizione di M
Input I

Nastro 2



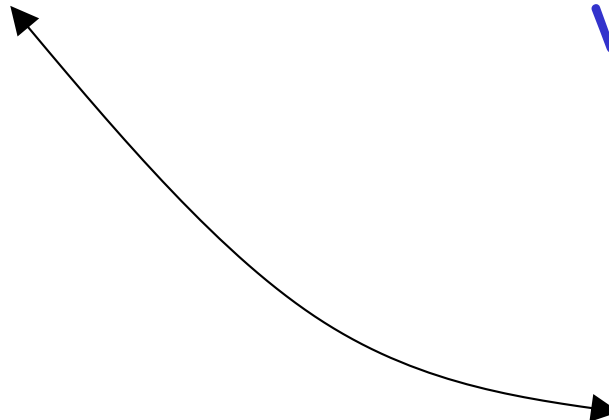
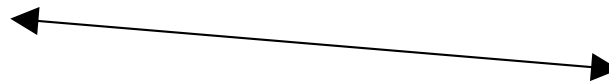
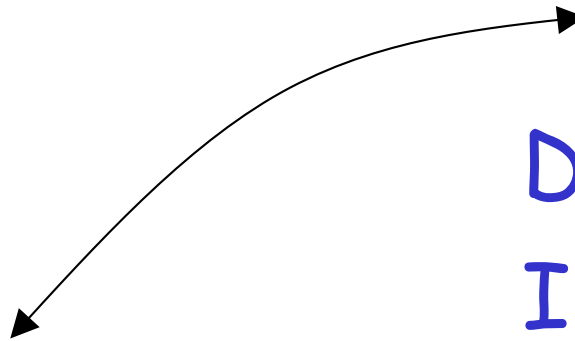
vuoto

Nastro 3



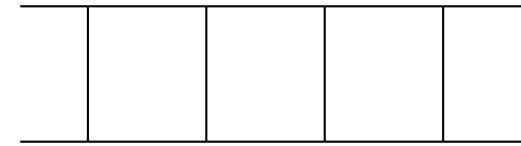
vuoto

U Macchina
di Turing
Universale



tre nastri: in esecuzione

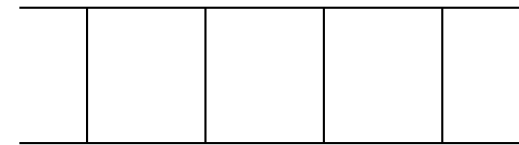
Nastro 1



Descrizione di M

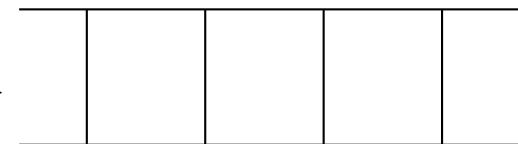
U Macchina
di Turing
Universale

Nastro 2

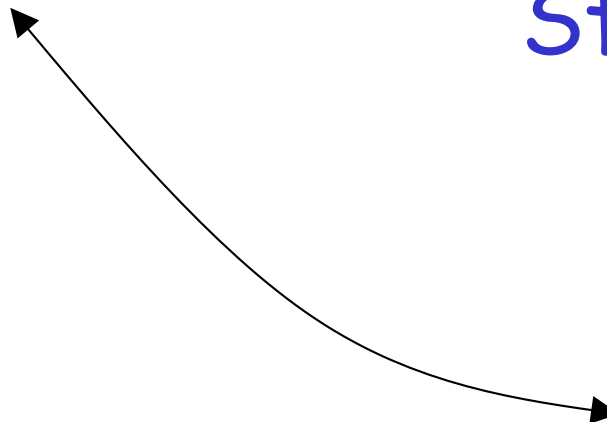
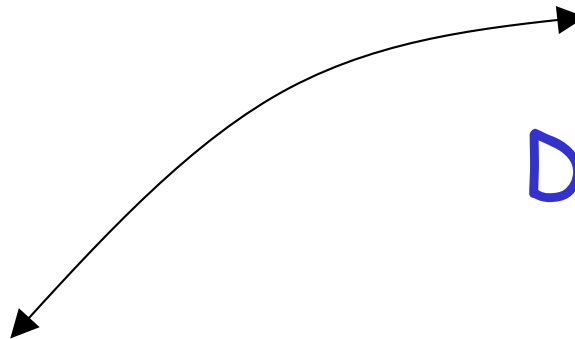


Stato attuale di M

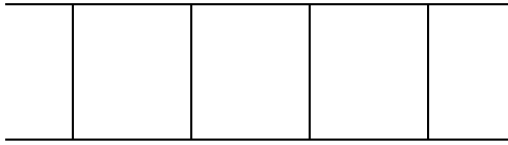
Nastro 3



Nastro di M

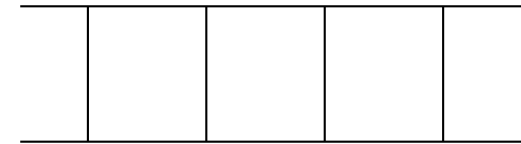


Nastro 1



Descrizione di M

Nastro 3



Nastro di M

Descriviamo (codifichiamo) M
come una stringa di simboli :

Assumiamo che M abbia alfabeto $\{0,1,\square\}$

Codifichiamo

0 con Z 1 con U \square con B

Quindi se nastro M contiene $\square 01100\square$

Terzo nastro di macchina universale è BZUZZB

Nastro 1

--	--	--	--	--

Descrizione di M

Descriviamo (codifichiamo) M
come una stringa di simboli :

Assumiamo che M abbia alfabeto $\{0,1,\square\}$

Codifichiamo

0 con Z 1 con U \square con B

Nastro 1

--	--	--	--	--

Descrizione di M

Descriviamo (codifichiamo) M
come una stringa di simboli :

Assumiamo M abbia stati $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$

Stato iniziale q_0 , stato finale q_1

Codifichiamo gli stati $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$
con rappresentazione binaria

q_0 con 0, q_1 con 1, q_2 con 10, q_3 con 11,

Nastro 1

--	--	--	--	--

Descrizione di M

Descriviamo (codifichiamo) M
come una stringa di simboli :

I movimenti della testina sono così codificati

Sinistra L

Destra R

Nessun movimento S

Nastro 1

--	--	--	--	--

Descrizione di M

Descriviamo (codifichiamo) M
come una stringa di simboli : riassunto

Alfabeto di macchina universale

Z, U, B (per codificare alfabeto di M)

$0,1$ (per codificare gli stati di M)

R, L, S (per codificare gli spostamenti)

$;$ (serve per separare sul primo nastro
la descrizione di M dall'input)

Descrizione di M

Nastro 1

--	--	--	--	--

Alfabeto di macchina universale

Z, U, B (per codificare alfabeto di M)

0,1 (per codificare gli stati di M)

R, L, S (per codificare gli spostamenti)

stato	simbolo	stato	simbolo	movimento	codifica
q0	0	q0	1	R	0Z0UR
q0	1	q0	0	R	0U0ZR
q0	□	q2	□	R	0B10BR
q2	0	q2	0	L	10Z10ZL
q2	1	q2	1	L	10U10UL
q2	□	q1	□	R	10B1BR

Codifica COMPLETA macchina è

0Z0UR0U0ZR0B10BR10Z10ZL10U10UL10B1BR

stato	simbolo	stato	simbolo	movimento	codifica
q0	0	q0	1	R	0Z0UR
q0	1	q0	0	R	0U0ZR
q0	□	q2	□	R	0B10BR
q2	0	q2	0	L	10Z10ZL
q2	1	q2	1	L	10U10UL
q2	□	q1	□	R	10B1BR

Codifica: 0Z0UR0U0ZR0B10BR10Z10ZL10U10UL10B1BR

Stessa macchina codifica diversa

0B11BL0U0ZROZO....

stato	simbolo	stato	simbolo	movimento	codifica
q0	□	q2	□	R	0B10BR
q0	1	q0	0	R	0U0ZR
q0	0	q0	1	R	0Z0UR
q2	□	q1	□	R	10B1BR
q2	1	q2	1	L	10U10UL
q2	0	q2	0	L	10Z10ZL

Passi Macchina Universale

1. Copia sul terzo nastro l'input x codificato mediante i simboli U e Z .
2. Inizializza il contenuto del secondo nastro con la codifica dello stato iniziale di M .
3. In base allo stato (contenuto nel secondo nastro) e al simbolo letto (terzo nastro), cerca sul primo nastro una transizione che possa essere applicata. Se tale transizione non viene trovata, termina in una configurazione di rigetto.
4. Altrimenti, applica la transizione modificando il contenuto del terzo nastro e aggiornando il secondo nastro in base al nuovo stato di M .
5. Se il nuovo stato è uno stato finale di M , termina nell'unico stato finale di U . Altrimenti, torna al Passo 3.

passo 1: Copia sul terzo nastro l'input x codificato mediante i simboli U e Z .

1. Posiziona la testina sul primo simbolo alla destra del simbolo " ; " il quale viene cancellato.

2. Scorre il primo nastro verso destra e, per ogni simbolo diverso da \square lo copia sul terzo nastro (spostando la testina di questo nastro a destra) e lo cancella.

3. Posiziona la testina del primo nastro e quella del terzo nastro sul simbolo diverso da \square più a sinistra.

Passo 2: Inizializza il contenuto del secondo nastro con la codifica dello stato iniziale di T.

il secondo passo inizializza il contenuto del secondo nastro con la codifica dello stato iniziale, *deve semplicemente scrivere su tale nastro il simbolo 0 e posizionare la testina su di esso*

Ricordiamo che in base alle assunzioni fatte nel paragrafo precedente, lo stato iniziale di una qualunque macchina di Turing è quello di indice 0.

Passo 3: In base allo stato (nastro 2) e al simbolo letto (nastro 3), cerca sul primo nastro una transizione da applicare

Cerca sul primo nastro la prima occorrenza del contenuto del secondo nastro (stato).

Una volta trovata tale occorrenza la ricerca prosegue verificando se il simbolo immediatamente successivo è uguale al simbolo attualmente scandito sul terzo nastro: in tal caso, posiziona la testina sulla seconda parte della transizione appena identificata.

Altrimenti, prosegui cercando sul primo nastro un'altra occorrenza del contenuto del secondo nastro.

Se si scorre tutto il primo nastro e non si trova la transizione ERRORE

Passo 4: Copia sul terzo nastro l'input x codificato mediante i simboli U e Z .

1. Cancella l'intero contenuto del secondo nastro e copia su di esso il nuovo stato (sequenza di simboli 0 e 1 contenuta sul primo nastro e il cui primo simbolo è attualmente scandito)
2. Sostituisci il simbolo attualmente scandito sul terzo nastro con quello presente sul primo nastro e sposta la testina di quest'ultimo nastro di una posizione a destra.
3. In base al simbolo letto sul primo nastro, sposta la testina del terzo nastro (se il nuovo simbolo letto su tale nastro è \square sostituiscilo con il simbolo B)
4. Posiziona la testina del primo nastro sul primo simbolo a sinistra diverso da \square (preparandosi per prossimo passo)

Passo 5: Se il nuovo stato è uno stato finale di M , termina nell'unico stato finale di U .
Altrimenti, torna al Passo 3.

Ricordiamo che siamo in stato finale di M se il contenuto del secondo nastro è uguale alla stringa 1.

1. Se siamo in stato finale cancella il contenuto del primo nastro e copia l'output della macchina simulata, decodificato facendo uso di simboli 0 e 1.

2. Se non è così la macchina di Turing universale torna a eseguire il terzo passo

Sulle dispense la macchina U è data nei dettagli

Osservazioni

1. U è una Macchina di Turing in grado di simulare ogni altra macchina di Turing
2. U ha 28 stati (!) ed è in grado di simulare una qualunque macchina di Turing (anche una con un milione di stati)

Assurdo?

1. Sappiamo che esistono interpreti C scritti in C
2. Un interprete C ha dimensione finita ed è in grado di eseguire un programma C di lunghezza qualunque