تمرین سری دوم درس جبر خطی کاربردی

علامه نادر ۴۰۰۱۳۱۰۱۸

①

آ) از طرفین رابطه Trace می‌گیریم.

$AB - BA = A \rightarrow trace(AB - BA) = trace(A)$

$\rightarrow trace(AB) - trace(BA) = trace(A)$

$\rightarrow trace(A) = 0$ $\boxed{\text{صحیح}}$

می‌دانیم قطر اصلی AB و BA یکی است.

در نتیجه A^{-1} وجود ندارد.

ب)

$A^2 = A \rightarrow det(A^2) = det(A) \rightarrow det(A)det(A) = det(A) \rightarrow det(A) = 1$

پ)

$det(A) \neq 0 \rightarrow A^{-1}$ موجود است $\boxed{\text{صحیح}}$

ت) مانند بخش آ پیش می‌رویم.

$Trace(AB - BA) = Trace(I) \rightarrow Trace(AB) - Trace(BA) = Trace(I_n)$

$\rightarrow 0 = n$

$\boxed{\text{غلط}}$

که به تناقض میرسیم، بنابراین غلط است.

ث) به عنوان مثال نقض $B = I_3$

$A = (-I)^4 + 3(-I)^2 - 7I + 3I = I + 3I - 7I + 3I = 0$

$det(0) = 0 \rightarrow A^{-1}$ موجود نیست $\boxed{\text{غلط}}$

آ) از رابطه $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{I} \quad (A^T)^{-1} = \frac{1}{det(A^T)} adj(A^T) \rightarrow adj(A^T) = det(A^T)\,(A^T)^{-1}$$

* می‌دانیم $det(A^T) = det(A)$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ $\Leftarrow$

$$\rightarrow adj(A^T) = det(A)\,(A^{-1})^T$$

$$\text{II} \quad A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) \rightarrow adj(A) = det(A)\,A^{-1}$$

از طرفین Transpose می‌گیریم و از آنجایی که دترمینان یک عدد ثابت است از Transpose خارج می‌شود.

$$adj(A)^T = (det(A)\,A^{-1})^T \Rightarrow adj(A)^T = det(A)\,(A^{-1})^T$$

در نتیجه ←

$$\text{I} , \text{II} \quad \boxed{adj(A^T) = adj(A)^T}$$

ب)

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) \xrightarrow{\times A} \cancel{AA^{-1}}^{\,I} = \frac{1}{det(A)} A\, adj(A) \xrightarrow{\times adj(A)^{-1}} adj(A)^{-1} = \frac{A}{det(A)} \quad \text{I}$$

$$\underbrace{(A^{-1})^{-1}}_{A} = \frac{1}{det(A^{-1})} adj(A^{-1}) \rightarrow det(A^{-1})\,A = adj(A^{-1}) \rightarrow adj(A^{-1}) = \frac{A}{det(A)} \quad \text{II}$$

$$* \; det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

$$\text{I} = \text{II} \quad \boxed{adj(A^{-1}) = adj(A)^{-1}}$$

پ)

ث) $\begin{cases} \mathrm{Trace}(I-AB) = \mathrm{Trace}(I_n) - \mathrm{Trace}(AB) \\ \mathrm{Trace}(I-BA) = \mathrm{Trace}(I_n) - \mathrm{Trace}(BA) \end{cases} \Leftarrow \mathrm{Trace}(AB) = \mathrm{Trace}(BA)$

ش) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \rightarrow \operatorname{adj}(A) = \det(A) A^{-1} \xrightarrow{\times \operatorname{adj}(A)^{-1}} I = \det(A) \operatorname{adj}(A)^{-1} A^{-1}$

$\xrightarrow{\times A} A = \det(A) \operatorname{adj}(A)^{-1} \longrightarrow \operatorname{adj}(A)^{-1} = \frac{A}{\det(A)}$ (I)

$\operatorname{adj}(A)^{-1} = \frac{1}{\det(\operatorname{adj}(A))} \times \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) \rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(\operatorname{adj}(A)) \operatorname{adj}(A)^{-1}$ (II)

$* \det(\operatorname{adj} A) = \det(A)^{n-1}$ (III)

جایگذاری I و III در II

$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1} \times \frac{A}{\det(A)} = \boxed{\det(A)^{n-2} A}$ ✓

آ) تجزیه LU را حساب کنید : بدون استفاده از row interchange ، ماتریس را به فرم اشلون در می آوریم.

همزمان اعدادی را در L می گذاریم که همان اعمال L را به I تبدیل کند.

$$A=\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}$$

$$d-b-c+b$$

برای این که 4 عنصر محوری داشته باشیم باید a، $b-a$، $c-b$، $d-c$ صفر نباشند.

ب)

شروط $\begin{cases} a \neq 0 \\ b-a \neq 0 \\ c-b \neq 0 \\ d-c \neq 0 \end{cases}$

⑤ با استفاده از ماتریس های بلوکی معادل A^2 را بیابید:

رابطه : $AB = col_1(A)\, row_1(B) + col_2(A)\, row_2(B) + \cdots$

$$AA = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&2&1&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\2\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&2&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&3&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&3\end{bmatrix} =$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & 1+3 \\ & 1 & & & & & 1+3 & 1 \\ & & 1 & & & 1+2 & & \\ & & & 1 & 1+2 & 1 & & \\ & & & & 4 & 2+2 & & \\ & & & & & 4 & & \\ & & & & & & 9 & 3+3 \\ & & & & & & & 9 \end{bmatrix}$$

⑥ دترمینان بیابید.

الف)

$$\begin{bmatrix}1&1&3\\-2&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&7\\0&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&7\\0&0&1-\frac{7}{4}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3\\0&4&7\\0&0&-\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$\det = 1\times4\times-\frac{3}{4}$$

$$\boxed{=-3}$$

ب)

ج) هر سطر ها را یک واحد به پایین شیفت می دهیم و سطر آخر را به اول انتقال می دهیم با این کار n بار عمل row interchange را انجام داده ایم بنابراین دترمینان n بار قرینه شده است.

$$\begin{bmatrix}a_n&0&0&\cdots&\\0&a_1&&&\\0&\cdot&a_2&&\\\vdots&&&\ddots&\\0&\cdots&0&&a_{n-1}\end{bmatrix}\qquad\boxed{\det=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n}$$

د)

ه)

و)

⑦ نوشتن ماتریس برگشت ماتریس ها با ماتریس های مقدماتی و الحاقی:

ابتدا با استفاده از روش ماتریس های مقدماتی پیش می رویم. ماتریس افزوده $[A\quad I]$ را تشکیل می دهیم و به فرم اشلون کاهش یافته در می آوریم. پس از آن A به I و I به A^{-1} تبدیل شده است.

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc}-6&14&-6&1&0&0\\-33&25&-7&0&1&0\\10&-6&10&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\det(A)=-6(250-42)-14(-330+70)-6(198-250)$$
$$=2703$$

ماتریس A دارای محاسبات پیچیده ای است بنابراین فقط Inv ماتریس های B و C را حساب می کنیم. (با روش Elem)

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

ستون اول

$A_{11}=(250-42)=208$

$A_{12}=-(-330+70)=260$

$A_{13}=(198-250)=-52$

ستون دوم

$A_{21}=-(140-36)=-104$

$A_{22}=(-60+60)=0$

$A_{23}=-(+36-140)=104$

(A) روش ماتریس الحاقی

ستون سوم

$A_{31}=(-98+150)=52$

$A_{32}=-(42-198)=-156$

$A_{33}=(150+162)=312$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}208&-104&52\\260&0&-156\\-52&104&312\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(A)}{2703}$$

$\det = 2703$

ادامه سوال 7

$\boxed{\text{ماتریس های مقدماتی}}$

(B

$$B=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&-7&-9&1&0&0\\2&5&6&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&-7&-9&1&0&0\\0&-2&-3&1&1&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&-7&-9&1&0&0\\0&-2&-3&1&1&0\\0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&1\end{array}\right)\overset{\text{ضرب}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&7&9&-1&0&0\\0&2&3&-1&-1&0\\0&0&1&1&-1&4\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&7&0&-10&9&-36\\0&2&0&-4&2&-12\\0&0&1&1&-1&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&4&2&6\\0&2&0&-4&2&-12\\0&0&1&1&-1&4\end{array}\right)\overset{\text{ضرب}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&1&3\\0&1&0&-2&1&-6\\0&0&1&1&-1&4\end{array}\right)\longrightarrow\boxed{inv(B)=\begin{pmatrix}2&1&3\\-2&1&-6\\1&-1&4\end{pmatrix}}$$

وچون به I_3 رسیدیم یعنی معکوس موجود است.

$$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\,adj(B)\qquad adj(B)=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{21}&B_{31}\\B_{12}&B_{22}&B_{32}\\B_{13}&B_{23}&B_{33}\end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{ماتریس الحاقی}}$

$B_{11}=(20-18)=2$
$B_{21}=-(-28+27)=1$
$B_{31}=(-42+45)=3$

سطر اول

$B_{12}=-(8-6)=-2$
$B_{22}=(-8+9)=1$
$B_{32}=-(-12+18)=-6$

سطر دوم

$B_{13}=(6-5)=1$
$B_{23}=-(-6+7)=-1$
$B_{33}=(-10+14)=4$

سطر سوم

$$\det(B)=-2\overset{2}{(20-18)}+7\overset{2}{(8-6)}-9\overset{1}{(6-5)}=-4+14-9=\boxed{1}$$

$$\boxed{B^{-1}=\frac{1}{1}\times\begin{bmatrix}2&1&3\\-2&1&-6\\1&-1&4\end{bmatrix}}$$

ادامه سوال 7)

ماتریس C

در همین ابتدا اگر دترمینان این ماتریس را محاسبه کنیم خواهیم دید این ماتریس معکوس پذیر نیست. اما با این وجود $[A \quad I]$ را به فرم اشلون نیز در می آوریم تا ببینیم که A (در این سوال C) به I تبدیل نمی شود.

$$\det(C) = (\overset{10}{\cancel{28-18}}) + 2(\overset{-10}{\cancel{-16+6}}) + (\overset{10}{\cancel{24-14}}) = 0$$

$\boxed{C^{-1} \text{ موجود نیست}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود ماتریس C فقط دو درایه محوری دارد و Singular است پس هرگز به فرم $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ در نخواهد آمد.

اگر بخواهیم از روش ماتریس الحاقی هم پیش برویم:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \operatorname{adj}(C)$$

می بینیم که چون $\det(C)=0$ این عبارت تعریف نشده خواهد شد.

سوال 8

الف)

$$A A^{-1} = I \longrightarrow \det(A A^{-1}) = \det(I) \longrightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1$$

$$\longrightarrow \boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$

ب)

$$\det\left((A^4)^T B^{-1} A^{-4} (B^3)^T \right) = \det((A^4)^T) \det(B^{-1}) \det(A^{-4}) \det((B^3)^T)$$

$$\overset{*}{\longrightarrow} \cancel{\det(A^4) \det(A^{-4})}_{**} \; \cancel{\det(B^{-1}) \det(B)}_{**} \det(B^2)$$

$* \; \det A^T = \det A$

$** \; \det A = \frac{1}{\det(A^{-1})}$

$$= \det(B^2)$$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 4 \times 9 \times 16 = \boxed{576}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

سوال 9) برای بدست آوردن x_3 به روش کرامر باید b را در ستون 3 A جایگذاری کنیم.

$$A_3(b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Cramers Rule : $x_3 = \dfrac{\det(A_3(b))}{\det(A)}$

در ادامه باید دترمینان این دو ماتریس را بدست آوریم. از روش کاهش سطری یا نرم افزار استفاده می کنیم.

ادامه سوال ۹

الف)

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-1&0&-1\\3&5&1&2&1\\-1&0&0&-1&1\\0&1&4&1&0\\0&-2&-3&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&-1&0&-1\\0&\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&2&\frac{5}{2}\\0&\frac{3}{2}&-0.5&-1&0.5\\0&1&4&1&0\\0&-2&-3&0&4\end{pmatrix}\overset{\times 2}{\underset{\times 2}{\sim}}\begin{pmatrix}2&3&-1&0&-1\\0&1&5&4&5\\0&3&-1&-2&1\\0&1&4&1&0\\0&-2&-3&0&4\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&3&-1&0&-1\\0&1&5&4&5\\0&0&-16&-14&-14\\0&0&-1&-3&-5\\0&0&7&8&14\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&-1&0&-1\\0&1&5&4&5\\0&0&-16&-14&-14\\0&0&0&-3+\frac{14}{16}&-5+\frac{14}{16}\\0&0&7-\frac{7}{16}16&8-\frac{7}{16}14&14-\frac{7}{16}14\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&3&-1&0&-1\\0&1&5&4&5\\0&0&-16&-14&-14\\0&0&0&-2.12&-4.12\\0&0&0&1.87&7.87\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&-1&0&-1\\0&1&5&4&5\\0&0&-16&-14&-14\\0&0&0&-2.12&-4.12\\0&0&0&0&\cancel{4.25}\ 4.24\end{pmatrix}$$

~~$\det(A)=287.6$~~

محاسبات طولانی!

$\det(A_3(b))$ را نیز محاسبه می‌کنیم

و در رابطه قرار می‌دهیم.

۹-ب)

$$A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\3&6&-1\\1&1&5\end{pmatrix}\qquad \det(A)=1(11)-1(2)+5(21)=114$$

$$A_1(b)=\begin{pmatrix}b_1&1&-2\\b_2&6&-1\\b_3&1&5\end{pmatrix}\qquad A_2(b)=\begin{pmatrix}4&b_1&-2\\3&b_2&-1\\1&b_3&5\end{pmatrix}\qquad A_3(b)=\begin{pmatrix}4&1&b_1\\3&6&b_2\\1&1&b_3\end{pmatrix}$$

$$\det A_1(b)=b_1(30+1)-b_2(5+2)+b_3(-1+12)$$

$$\det A_2(b)=-b_1(15+1)+b_2(20+2)-b_3(-4+6)$$

$$\det A_3(b)=b_1(3-6)-b_2(4-1)+b_3(24-3)$$

$$x_1=\frac{\det(A_1(b))}{\det(A)}\ \checkmark\qquad x_2=\frac{\det(A_2(b))}{\det(A)}\ \checkmark\qquad x_3=\frac{\det(A_3(b))}{\det(A)}\ \checkmark$$