غلامرضا دار          تمرین شماره ۱ درس جبر خطی کاربردی استاد امیرمزلقانی

۴۰۰۱۳۱۰۱۸

(1)

a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$x_1 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0$

$\boxed{x_1 = \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3}$

$x_1$ متغیر basic است (ستون اول محوری است)

$x_2, x_3$ متغیر free هستند.

فرم کلی جواب : $X = \left( \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \,,\; x_2, x_3 \right)$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد

b) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 0 & \cancel{5}-4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\to \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 0 + 0 = -4 \\ 0 + 0 + x_3 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = \frac{3}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x_1 - 7x_2 = -4 \to x_1 = -4 + 7x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{3}{2} \end{cases}$

$x_1, x_3, x_4$ متغیر basic هستند.

$x_2$ متغیر آزاد است.

فرم کلی جواب : $X = \left( 7x_2 - 4 \,,\; x_2 \,,\; 0 \,,\; \frac{3}{2} \right)$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$

همه متغیرها basic هستند (همه ستون‌ها محوری)

هیچ متغیری free نیست.

حالت $[0\,0\,0\,0\,b]$ نداریم بنابراین یک جواب یکتا خواهیم داشت.

جواب یکتا : $(0, 0, -1, 1)$

② ثابت کنید دو ماتریس زیر هم ارز سطری نیستند.

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ × مخالف شدند

$\begin{cases} R_2 += -\frac{a}{2} R_1 \\ R_3 += -\frac{b}{2} R_2 \\ R_3 += c R_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & k & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & k+14 & 2g+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & k+9 & 2g+h+1 \end{array}\right)$$

الف) در صورتی که $k \neq -9$ باشد، جواب یکتا خواهیم داشت.

ب) در صورتی که $k = -9$ باشد و $2g+h+1 = 0$ باشد، بی‌نهایت جواب خواهیم داشت.

ج) در صورتی که $k=-9$ باشد، و $2g+h+1 \neq 0$ باشد، حالت $[0\,0\,0\,b]$ در سطر آخر رخ می‌دهد، دستگاه جواب نخواهد داشت.

④ دو طرف معادله‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) = y(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$$

$y = 2$ ✓

در این دو حالت معادلات جواب خواهند داشت.

$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) = 0$ ✓

⑤ با فرض $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b=1 \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{اشلون}} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ b=-1 \longrightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times \end{cases}$$

- در حالت $a \neq 0$ ، $b=1$ بی‌نهایت جواب داریم.
- چون به حالت $[0\,0\,0\,b]$ رسیدیم جواب نداریم.
- در سایر حالت‌ها برای $b$، یک مقدار برای جواب خواهیم داشت.
- در حالت $a=0$ پس از انجام تعدادی آزمایش می‌بینیم که جواب نداریم.

(6)

1 الف) نادرست - اگر $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی باشد، حداقل یک $v_i$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی سایر اعضا نوشت.

مثال:
$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$
در این مجموعه که وابسته خطی است، $v_2$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی سایر بردارها نوشت.

2 ب) نادرست - هر تعداد بردارهای مستقل باید "n" باشد. به عنوان مثال در فضای $R^3$ اگر بردارهای $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ را داشته باشیم، ترکیب خطی این بردارها یک صفحه از $R^3$ را Span می‌کنند.

3 ج) درست - فرض کنیم مستقل خطی نباشد؛ آنگاه وابسته خطی است. اگر وابسته خطی باشد یعنی می‌توان v را با ترکیب خطی بردارهای درون "S" نوشت. یعنی بردار $\vec{v}$ در Span(S) قرار دارد که با فرض مسئله متناقض است.

4 د) درست - سه حالت زیر را اثبات می‌کنیم

$$\begin{cases} (1)\ v_1 \neq a(v_1+v_2) + b(v_1+v_2+v_3) \\ (2)\ v_1+v_2 \neq a(v_1) + b(v_1+v_2+v_3) \\ (3)\ v_1+v_2+v_3 \neq a(v_1) + b(v_1+v_2) \end{cases}$$

ابتدا فرض می‌کنیم بردارهای معرفی شده وابسته خطی باشند و به این نتیجه می‌رسیم که با فرض اولیه مسئله در تناقض است.

(1) $v_1 = av_1 + av_2 + bv_1 + bv_2 + bv_3 \rightarrow v_1 = v_1(a+b) + bv_2 + bv_3$

$(1-a-b)v_1 = bv_2 + bv_3 \rightarrow v_1 = \frac{b}{(1-a-b)} v_2 + \frac{b}{(1-a-b)} v_3$

$\rightarrow v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3$

که می‌دانیم غلط است چون $v_1, v_2, v_3$ مستقل خطی هستند.

(2) $v_1 + v_2 = av_1 + bv_1 + bv_2 + bv_3 \rightarrow v_1(1-a-b) + v_2(1-b) = bv_3$

$\rightarrow v_3 = v_1 \frac{(1-a-b)}{b} + v_2 \frac{(1-b)}{b}$

$\rightarrow v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$

که می‌دانیم غلط است چون $v_1, v_2, v_3$ مستقل خطی هستند.

(3) $v_1 + v_2 + v_3 = av_1 + bv_2 + bv_1 \rightarrow v_3 = (a+b-1)v_1 + bv_2$

$v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$

که می‌دانیم غلط است چون $v_1, v_2, v_3$ مستقل خطی هستند.

همچنین عکس این قضیه نیز به همین شکل قابل اثبات است.

[5]
هـ) نادرست - اگر سطری $[0\,0\,0\,0\,b]$ باشد ناسازگار خواهد شد. مثال نقض $(0\,0\,0\,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$ $(1\,0\,0\,0)$

$(x_4 = 0)$ بی‌نهایت جواب دارد.

[6]
و) نادرست - مثال نقض $\begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}_{4\times 5}$ ستون‌های ماتریس ذکر شده وابسته خطی هستند.

[7]
ز) نادرست + کافی نیست، ممکن است $x$ ترکیبی خطی از $\{z, w\}$ باشد و تغییری در مستقل بودن $y$ ایجاد نمی‌کند (فرض ثابت می‌ماند) اما باعث می‌شود $\{x, y, z, w\}$ مستقل خطی نباشد.

[8]
ح) نادرست -

$$a)\ T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$b)\ T\left(a\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a x_1 \\ 0 \\ a z_1 \end{pmatrix} = aT\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \checkmark \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a, b \rightarrow$ $\boxed{\text{پس خطی است}}$

(7)

$T(\vec{u}),\ T(\vec{v})$ وابسته خطی $\longrightarrow$ $aT(\vec{u}) + bT(\vec{v}) = 0$

$\vec{u},\ \vec{v}$ مستقل خطی $\longrightarrow$ $a\vec{u} + b\vec{v} \neq 0$

چون $T$ خطی است: $T(a\vec{u} + b\vec{v}) = 0 \xleftarrow[\text{ترکیب}]{\text{خاصیت}} aT(\vec{u}) + bT(\vec{v}) = 0$

$T(x) = 0$

$x = a\vec{u} + b\vec{v}$ و می‌دانیم که $x$ صفر نیست (غیر بدیهی)

چون $0 \neq a\vec{u} + b\vec{v}$ (مستقل خطی)

⑧

الف) $T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}x_1+x_1'\\x_2+x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4(x_1+x_1')-2(x_2-x_2')\\3|x_2+x_2'|\end{pmatrix}$

که به ازای مقادیر مختلف $(x_2+x_2')$ رفتار متفاوتی خواهد داشت.

✗

$x_2+x_2'\geq 0$ : $\begin{pmatrix}(4x_1-2x_2)+(4x_1'-2x_2')\\3x_2+3x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_1-2x_2\\3x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4x_1'-2x_2'\\3x_2'\end{pmatrix}$

$=T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$ ok

$x_2+x_2'<0$ : $\begin{pmatrix}(4x_1-2x_2)+(4x_1'-2x_2')\\(-3x_2)+(-3x_2)\end{pmatrix}\neq T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$ not ok

~~[illegible]~~ $\boxed{\text{تبدیل خطی نیست.}}$

ب) $T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}x_1+x_1'\\x_2+x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(x_1+x_1')\\x_2+x_2'\end{pmatrix}$

از آنجایی که $\sin(x_1)+\sin(x_1')\neq\sin(x_1+x_1')$ نمی‌توان جدا سازی کرد بنابراین ~~یک~~ $\boxed{\text{تبدیل خطی نیست}}$ ✗

ج) $\begin{pmatrix}3(x_1+x_1')\\(x_1+x_1')-(x_2+x_2')\\2(x_1+x_1')+(x_2+x_2')+(x_3+x_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1+3x_1'\\x_1-x_2+x_1'-x_2'\\2x_1+x_2+x_3+2x_1'+x_2'+x_3'\end{pmatrix}$

✓

$=T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3\end{pmatrix}$ ✓

$T\left(a\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}ax_1\\ax_2\\ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ax_1\\ax_1-ax_2\\2ax_1+ax_2+ax_3\end{pmatrix}$ فاکتور $=a\begin{pmatrix}3x_1\\x_1-x_2\\2x_1+x_2+x_3\end{pmatrix}$

$=aT\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ✓

پس تبدیل خطی است.