تمرین سری چهارم جبرخطی کاربردی   [illegible]   ٤۰۰۱۳۱۰۱۸

۱) محاسبه بردار ویژه و مقدار ویژه :

$$a)\quad A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix},\ Ax=\lambda x \rightarrow (A-\lambda I)x=0$$

$$|A-\lambda I|=0 \rightarrow \begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -1\\ 1 & 3-\lambda & -1\\ -1 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$+(2-\lambda)\big((3-\lambda)(2-\lambda)-2\big)-(1)\big(2(2-\lambda)-2\big)+(-1)\big(-2+(3-\lambda)\big)=0$$

$$(2-\lambda)^2(3-\lambda)-2(2-\lambda)-2(2-\lambda)+2+2-(3-\lambda)=0$$

$$(2-\lambda)^2(3-\lambda)-4(2-\lambda)-(3-\lambda)+4=(4-4\lambda+\lambda^2)(3-\lambda)-8+4\lambda$$

$$-3+\lambda+4=12-12\lambda+3\lambda^2-4\lambda+4\lambda^2-\lambda^3-8-3+\cancel{4}+\lambda=$$

$$5-\lambda^3+7\lambda^2-15\lambda=0 \rightarrow \cancel{\lambda^3-7\lambda^2+15\lambda=5}$$

$$\lambda=\begin{cases}1\\1\\5\end{cases}\qquad \lambda_1=5\quad \lambda_2=1\quad \lambda_3=1$$

به ازای هر مقدار ویژه بدست آمده ، بردار ویژه متناظر را بدست می آوریم .

$$\lambda_1)\quad (A-\lambda_1 I)v_1=0 \rightarrow v_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2)\quad (A-\lambda_2 I)v_2=0 \rightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3)\quad ($$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} =$

پس $(\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-3) = 6 - 6(\lambda-4) + 12(\lambda-3) = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 3$

$\lambda_1)\quad (A-\lambda_1 I)v_1 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2)\quad (A-\lambda_2 I)v_2 = 0 \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda_3)\quad (A-\lambda_3 I)v_3 = 0 \rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

۲) می‌دانیم $\det A^T = \det A$

الف) $(\lambda I - M) = 0$

فرض کنیم $\bar{\lambda}$ بردار ویژه ماتریس M^T باشد داریم

$(\bar{\lambda} I - M^T) = 0$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \xrightarrow{T} A^T\vec{v}^T = \lambda^T\vec{v}^T \rightarrow A^T(\ \ ) = \lambda(\ \ )$

بنابراین λ هم مقدار ویژه ماتریس A است و هم A^T.

ب) می‌دانیم که ترانهاده یک ماتریس پایین مثلثی، یک ماتریس بالا مثلثی است. در بخش الف اثبات کردیم که مقدارویژه‌های یک ماتریس و ترانهاده آن با هم برابرند. بنابراین این قضیه برای ماتریس‌های بالا مثلثی نیز اثبات شد.

ادامه سوال ۲

c)

سوال ③ قطری سازی کنید

a) $|\lambda I - A| = 0$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -1$

میبینیم که مقدار ویژه تکراری داریم پس قطری نمی شود

b) $|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 - 16\lambda = \lambda(\lambda^2 - 7\lambda - 16) = 0$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \dfrac{7 - \sqrt{15}\,i}{2} \qquad \lambda_3 = \dfrac{7 + \sqrt{15}\,i}{2}$

ماتریس قطری حاصل $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & -\frac{\sqrt{15}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} & 7/2 \end{pmatrix}$

سوال 5

ب) اگر $A^2=0$ باشد $\to |A^2|=0 \to |A|^2=0 \to |A|=0$ (I)

$|\lambda I - A|=0 \to |0-A|=0 \to |A|=0$ (II)

با ترکیب I و II داریم اگر ۰ مقدار ویژه A باشد $|A|$ صفر $|A|^2$ صفر $|A^2|$ صفر و $A^2=0$ ✓

ج) ~~[illegible]~~

$|u+v|^2 = |u|^2+|v|^2+2|u||v|$

$|u-v|^2 = 〃 \quad 〃 \quad - \quad 〃$

$|u+v|^2+|u-v|^2 = 2|u|^2+2|v|^2+\cancel{2|u||v|}-\cancel{2|u||v|}$ همین!؟

د) $|au+bv|=|bu+av|$

توان 2 $\quad |au|^2+|bv|^2+2|au||bv| = |bu|^2+|av|^2+2|bu||av|$

$|au|^2+|bv|^2+\cancel{2ab|u||v|} = |bu|^2+|av|^2+\cancel{2ab|u||v|}$

$\cancel{|au|^2+|bv|^2}$

$a^2|u|^2+b^2|v|^2=b^2|u|^2+a^2|v|^2$

$a^2|u|^2-b^2|u|^2=a^2|v|^2-b^2|v|^2$

$\cancel{(a^2-b^2)}|u|^2=\cancel{(a^2-b^2)}|v|^2 \to |u|=|v|$

سوال (7)

a) جمع توان λ ها = ۹ بعد

b) $(\lambda-4)^3$: برای $\lambda=4$ صفر می‌شود که توان 3 دارد پس 3 بعد

c) تعداد بردار ویژه‌ها مستقل خطی = ابعاد nullspace ٤ بعد

سوال (8)

$q_1 q_3 = 0 \qquad q_1 q_2 = 0 \qquad q_2 q_3 = 0$

$q_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad q_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \qquad q_3 = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$

ساروس

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 3d & 5g \\ 2b & 3e & 5h \\ 2c & 3f & 5i \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2a3e5i + 3d5h2c + 5g2b3f - 5g3e2c - 2b3d5i - 2a3f5h$$

$$= 3aei + 3dhc + 3gbf - 3gec - 3bde - 3afh$$

$$\begin{aligned} & q_1 q_2 = 0 \rightarrow ad + be + cf = 0 \\ + \; & q_1 q_3 = 0 \rightarrow ag + bh + ic = 0 \\ + \; & q_2 q_3 = 0 \rightarrow gd + eh + if = 0 \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} & ad + bc + cf + ag + bh + ic + gd \\ & + eh + if = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow |A| = 3(aie + dhc + gbf + gec + bde + afh) = 0$$

سوال ۹) چک می‌کنیم ضرب داخلی پایه‌ها با هر کدام از پایه‌ها صفر باشد. (شرط orthogonal بودن)

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$\langle u_1, u_3 \rangle = a + (c+d) = 0$

کم می‌کنیم $\quad a - b = 0$

$\langle u_2, u_3 \rangle = b + (c+d) = 0 \qquad \boxed{a = b}$

مقدارگذاری می‌کنیم (عددگذاری) $\quad a = 1 \,,\, b = 1 \rightarrow c = 1 \,,\, d = -2$

$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

سالروز عملیات افتخار آفرین مرصاد (۱۳۶۷ ه.ش)

سوال ۱۵

(1

$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $T(e_1)= 0+0+(1+0)b_3=b_3$

$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $T(e_2)=(0-1)b_1-2b_2+0=-b_1-2b_2$

$e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $T(e_3)=(2-0)b_1-0+(0+3)b_3=2b_1+3b_3$

(2

$[T(e_1)]_B=r_1[T(b_1)]_B+r_2[T(b_2)]_B+r_3[T(b_3)]_B$

که در آن $[e_1]_B=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}$

$e_1=r_1b_1+r_2b_2+r_3b_3$

الی آخر

سوال ۱۱) محاسبه A^2 و A^6 ابتدا مقادیر ویژه‌های A را حساب می‌کنیم

$$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \lambda^3(\lambda+4) = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0 \qquad \lambda_4 = -4$$

$\lambda_{1,2,3})$ $\quad A v_1 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ مشابه : $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_4)$ $\quad A v_4 = -4 v_4 = \{ \rightarrow v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} \rightarrow A^2 = PD^2P^{-1} \rightarrow A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

ادامه (H) حساب A^6 مشابه A^2 فقط $A^6 = PD^6P^{-1}$

$$A^6 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & (2^2)^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & P^{-1} & \end{pmatrix}$$

$=$ ضرب می‌کنیم