تمرین سری اول جبرخطی کاربردی   علیرضا ملک   ۴۰۰۱۳۱۰۱۸

(1)

الف) $x_1^2 + x_2^2 + 10x_1x_2 = \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$

$= \begin{bmatrix} x_1+5x_2 & 5x_1+x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_2 + x_2^2$ ✓

ب) $9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3 = \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$

$= \begin{bmatrix} 9x_1-4x_2+4x_3 & -4x_1+7x_2 & 4x_1+11x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$

$= 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 + 4x_1x_3 + 11x_3^2$ ✓

---

(2) ابتدا eigen وکتورها، eigen ولیوهای این ماتریس را حساب می‌کنیم.

الف) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & -6 \\ -16 & 4 & 10 \end{bmatrix} = B$

$\det(B - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 16 & 4-\lambda & -6 \\ -16 & 4 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{بسط}} (-\lambda)\left[[4-\lambda][10-\lambda]+24\right]$

$-2\left[6\times 16 - 16[10-\lambda]\right] + 1\left[16\times 4 + 16[4-\lambda]\right] = 0$

$= (-4\lambda + \lambda^2)(10-\lambda) - 24\lambda - 192 + 320 - 32\lambda + 48 + 48 - 16\lambda = 0$

$= -40\lambda + 4\lambda^2 + 10\lambda^2 - \lambda^3 - 24\lambda - 32\lambda - 16\lambda = -224$

$= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 32\lambda = -224 \rightarrow \lambda^3 - 14\lambda^2 + 32\lambda = 224$ اشتباه است

ادامه سوال ② الف)

$\lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda(\lambda-6)(\lambda-8) = 0$

$\lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = 6 \ , \ \lambda_3 = 8$

$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = PBP^{-1}$

ادامه سوال 2

ب) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I)=0 \rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \rightarrow$$

$$(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-1\right)-1\left(1-(1-\lambda)\right)+1\left(1-(1-\lambda)\right)=0$$

$\boxed{\lambda_1=0}$ $\quad -\lambda_1^2(\lambda-3)=0 \rightarrow \boxed{\lambda_2=0}, \boxed{\lambda_3=3}$ $\quad Av_1=\lambda v_1=0$

$Av_2=$

$v_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \quad v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad v_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

$$P=[v_1\ v_2\ v_3]=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

سوال 3

$$A^TA=\begin{pmatrix}-3&6&6\\1&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1\\6&-2\\6&-2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}81&27\\27&9\end{bmatrix}$$

$$\det(A^TA-\lambda I)=0 \rightarrow \lambda^2-90\lambda=0 \rightarrow \lambda_1=90,\ \lambda_2=0$$

$v_1=\begin{pmatrix}-1/3\\1\end{pmatrix} \quad v_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \quad \Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{90}&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$A^TA=U\Sigma V^T \rightarrow U=A^TAV\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}81&27\\27&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/3&3\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{90}}&0\\0&0\end{bmatrix}$$

ادامه سوال 3

$$AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\det(AA^T - \lambda I) = 0 \longrightarrow (\lambda-9)(\lambda-25) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 25 \end{cases}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{25} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U = AA^T v \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

سوال 4

سوال 5 اگر ماتریس A متقارن و real باشد آنگاه قطری پذیر است. ← $A = U \Sigma V^T$

میدانیم A pd است پس درایه‌های Σ نامنفی خواهند بود. دو ریشه خواهیم داشت.

← $B^2 = A$

سوال 6

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 6-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144 = 0 \rightarrow \lambda_3 = 3$$

$$-(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-8) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 8 \quad \lambda_2 = 6 \quad \lambda_3 = 3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ادامه سوال 6

$A = Q \Lambda Q^{-1}$

باید V ها را نرمال کنیم

$$A = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{|V_1|} & \frac{V_2}{|V_2|} & \frac{V_3}{|V_3|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{V_1}{|V_1|} \\ \frac{V_2}{|V_2|} \\ \frac{V_3}{|V_3|} \end{bmatrix}$$