سوال۱)

نشان دهید اگر A، n بردار ویژه‌ی مستقل خطی داشته باشد A^T هم n بردار ویژه‌ی مستقل خطی دارد.

پاسخ)

اگر A، n بردار ویژه‌ی مستقل خطی داشته باشد آنگاه طبق تئوری قطری سازی داریم $A = PDP^{-1}$

$$A^T = (PDP^{-1})^T = {P^{-1}}^T D^T P^T = {P^T}^{-1} D^T P^T = QDQ^{-1}$$

سوال۲)

فرض کنیدA یک ماتریس $n \times n$ متقارن باشد. فرض کنید x هربرداری در C^n باشد و در نظر بگیرید$q = \bar{x}^T A x$ ، تساوی‌های زیر نشان می‌دهند که $q = \bar{q}$.هرکدام از تساوی ها را با ادله کافی توجیه کنید.

$$q = \overline{\bar{x}^T A x} \underset{a}{\rightarrow} x^T \overline{A x} \underset{b}{\rightarrow} x^T A \bar{x} \underset{c}{\rightarrow} (x^T A \bar{x})^T \underset{d}{\rightarrow} \bar{x}^T A^T x \underset{e}{\rightarrow} q$$

پاسخ)

a) طبق قوانین مزدوج داریم:$\bar{x}^T = \overline{x^T}$
b) چون A حقیقی است پس: $A = \bar{A}$
c) $x^T A \bar{x}$ یک عدد حقیقی است و می‌توان به آن به شکل بردار 1×1 نگاه کرد.
d) طبق خصوصیات ترانهاده(بدیهی)
e) $A = \bar{A}$ و تعریف q

سوال ۳)

فرض کنید A یک ماتریس 2×2 و حقیقی با یک مقدار ویژه‌ی مختلط $e = a - bi$ باشد و بردار متناظر آن به نام v در فضای C^2 تعریف شده باشد.

الف) نشان دهید:

$$aRe(v) + bIm(v) = A\big(Re(v)\big) \quad \text{و} \quad -bRe(v) + aIm(v) = A\big(Im(v)\big)$$

ب) اگر C و P به شکل صورت زیر تعریف شوند ثابت کنید $AP = PC$

$$P = [Re(v) \quad Im(v)] \text{ و } C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ و } A = PCP^{-1}$$

پاسخ)

الف)

$$\begin{aligned} &Av = lv \\ &= (a - bi)\big(Re(v) + iIm(v)\big) \\ &= \big(aRe(v) + bIm(v)\big) + i\big(aIm(v) - bRe(v)\big) \\ &A\big(Re(v)\big) = Re(Av) = aRe(v) + bIm(v) \\ &A\big(Im(v)\big) = Im(Av) = -bRe(v) + aIm(v) \end{aligned}$$

ب) با توجه به قسمت قبل داریم:

$$A\big(Re(v)\big) = P\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ و } A\big(Im(v)\big) = P\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$$

$$AP = \Big[A\big(Re(v)\big) \;\; A\big(Im(v)\big)\Big] = P\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = PC$$

سوال ۴) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ -20 & -21 \end{bmatrix}$ باشد و به ترتیب مقادیر x و .... و A^5x برابر $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 31 \\ -41 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -191 \\ 241 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 991 \\ -1241 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -4991 \\ 6241 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 24991 \\ -31241 \end{bmatrix}$ باشد. برداری با ورودی دوم ۱ پیدا کنید که به بردار ویژه A نزدیک باشد و البته مقدار ویژه آن را هم بدست آورید.

پاسخ)

می دانیم که $A^5x = \begin{bmatrix} 24991 \\ -31241 \end{bmatrix}$ تخمین خوبی برای بردار ویژه است که می توانیم با تقسیم بر 31241- به بردار ویژه مورد نظر سوال آن را تبدیل کنیم.

$$V = \frac{-1}{31241}\begin{bmatrix} 24991 \\ -31241 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7999 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در مرحله بعد باید مقدار Av را برای بدست آوردن مقدار ویژه محاسبه کنیم:

$$AV = \begin{bmatrix} 4.0015 \\ -5.0020 \end{bmatrix} = -5.0020V$$

که متوجه می شویم که مقدار ویژه برابر 5.0020- است.

سوال ۵) ماتریس A را به صورت $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید. بردار $V = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ یکی از بردار ویژه های ماتریس A است و دو مقادیر ویژه ی دیگر آن برابر 0.5 و 0.2 است. سیستم $x_{k+1} = Ax_k$ را بدست آورید که در مورد آن می دانیم که $x_0 = (0, 0.3, 0.7)$ است. چه اتفاق برای x_k می افتد وقتی $k \to \infty$ است؟

پاسخ)

ابتدا باید مقدار ویژه ی متناظر با بردار ویژه ای که در سوال داده شده است را بیابیم.

$$Av_1 = \begin{bmatrix} .4 & 0 & .2 \\ .3 & .8 & .3 \\ .3 & .2 & .5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} .1 \\ .6 \\ .3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .1 \\ .6 \\ .3 \end{bmatrix} = 1 \cdot v_1$$

که متوجه می شویم مقدار ویژه ۱ است.

حال باید بردار ویژه ی متناظر با مقادیر ویژه ای که در سوال داده شده است را بیابیم:

ابتدا $\lambda_2 = 0.5$:

$$(A - .5I)v_2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -.1 & 0 & .2 & 0 \\ .3 & .3 & .3 & 0 \\ .3 & .2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال برای $\lambda_2 = 0.2$:

$$(A - .2I)v_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} .2 & 0 & .2 & 0 \\ .3 & .6 & .3 & 0 \\ .3 & .2 & .3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

باید مقادیر وزن ها را طوری بدست آوریم که $x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ باشد :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} .1 & 2 & -1 & 0 \\ .6 & -3 & 0 & .3 \\ .3 & 1 & 1 & .7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & .1 \\ 0 & 0 & 0 & .3 \end{array}\right]$$

که این به این معنی است که :

$$x_0 = v_1 + .1v_2 + .3v_3$$

$$x_1 = Av_1 + .1Av_2 + .3Av_3 = v_1 + .1 \cdot (.5)v_2 + .3 \cdot (.2)v_3$$

$$x_2 = A^2v_1 + .1A^2v_2 + .3A^2v_3 = v_1 + .1 \cdot (.5)^2v_2 + .3 \cdot (.2)^2v_3$$

$$\vdots$$

$$x_k = v_1 + .1 \cdot (.5)^kv_2 + .3 \cdot (.2)^kv_3$$

که با توجه به عبارت بالا وقتی $k \to \infty$ باشد، X_k به سمت V_1 میل می کند چون $(0.5)^k \to 0$ و $(0.2)^k \to 0$ است.

سوال۶)

الف) ماتریس M را معکوس پذیر درنظر بگیرید، ثابت کنید اگر v بردار ویژه متناظر با λ (مقدار ویژه ماتریس M) باشد، آنگاه $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه M^{-1} خواهد بود.

پاسخ)

از آنجایی که M معکوس پذیر هست، پس می توان نتیجه گرفت که $\lambda \neq 0$؛ سپس بنابر تعریف داریم:

$$Mv = \lambda v \to v = M^{-1}\lambda v \to M^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

ب) اگر ماتریس $M = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر ویژه M^5, M^{-1} را بدست آورید.

پاسخ)

اگر معادله مشخصه M را با $p(\lambda)$ نمایش دهیم، داریم:

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -12 & 4 \\ -1 & 0-\lambda & -2 \\ -1 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-12)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda - 2$$

$$p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

بنابراین مقادیر ویژه A برابر با 2 و 1+ و 1- خواهند بود.

برای محاسبه مقادیر ویژه M^5 نیز می دانیم اگر λ مقدار ویژه M باشد، λ^5 مقدار ویژه ی M^5 خواهد بود. بنابراین مقادیر ویژه M^5 برابر خواهند شد با : 32 و 1+ و 1-

همچنین می دانیم یک ماتریس معکوس ناپذیر است، اگر یک مقدار ویژه ی ۰ داشته باشد؛ چون M مقدار ویژه ۰ ندارد پس معکوس پذیر است و برای مقادیر ویژه M^{-1} طبق قسمت "الف" داریم:

$$\frac{1}{2}, \quad \pm 1$$

سوال۷) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ و $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$ و $x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید.

الف) یک پایه (Basis) برای A از بردار ویژه v_1 و بردار ویژه ی دیگری بنام v_2 بیابید.

پاسخ)

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 0.6 - \lambda & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 - \lambda \end{bmatrix} = (0.6 - \lambda)(0.7 - \lambda) - 0.3 \times 0.4 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.3) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 0.3 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

برای $\lambda = 0.3$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 0.6 - 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.7 - 0.3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -x_2$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{x_2 = 1} x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = v_2$$

بنابراین $\{v_1, v_2\}$ یک پایه برای R^2 خواهد بود.

ب) نشان دهید x_0 را می توان به فرم $x_0 = v_1 + cv_2$ نوشت.

پاسخ)

$$x_0 = v_1 + cv_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} + c. \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

می توان استنتاج کرد اگر $c = \frac{1}{14}$ شود رابطه برقرار خواهد بود.

سوال ۸) فرض کنید $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ به ترتیب بردار ویژه های متناظر با مقدار ویژه ی 2- و ۳ در ماتریس A می باشند. حاصل $A^2\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ را حساب کنید.

پاسخ)

$$A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

بررسی می کنیم که آیا $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ ترکیب خطی ای از دو بردار ذکر شده هست یا خیر.

$$a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\1 & 1 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$a = 2, \qquad b = 1$$

حال برای محاسبه $A^2\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$، ابتدا $A\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ را حساب می کنیم.

$$A\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = A\left(2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) = 2A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + A\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 2\times 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$A^2\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = A\left(6\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) = 6A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 2A\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 6\times 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 2(-2)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}26\\22\end{bmatrix}$$