به نام خدا

پاسخ تمرین سری **اول** درس **بهینه‌سازی**

(نیمسال دوم ۱۴۰۰)

۱- به سوالات زیر پاسخ دهید.

a) نشان دهید برای هر $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$، داریم: $\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(A)$

b) فرض کنید A یک ماتریس $n \times m$ باشد. نشان دهید $\text{rank}\ (A) = 1$ برقرار است اگر و فقط اگر بردارهایی به شکل $v \in \mathbb{R}^n$ و $w \in \mathbb{R}^m$ وجود داشته باشند به طوریکه:

$$A = vw^T$$

c) چه تفاوتی میان توابع Linear و Affine وجود دارد؟

۲- نشان دهید که مجموعه‌ی $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - x_2 + x_3 \le 4\} \subset \mathbb{R}^3$ یک مجموعه محدب است.

۳- نشان دهید اگر مجموعه‌های S_1 و S_2 در $\mathbb{R}^{m\times n}$ محدب باشند، مجموعه حاصل جمع جزئی آن‌ها که به‌صورت زیر تعریف می‌شود نیز مجموعه‌ای محدب خواهد بود.

$$S = \{(x, y_1 + y_2) | x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$$

۴- ابتدا نشان دهید که یک مجموعه محدب است اگر و تنها اگر اشتراک آن با هر خطی محدب باشد. سپس فرض کنید مجموعه‌ی $C \subset \mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n | \ x^TAx + b^Tx + c \le 0\},$$

که در آن A یک ماتریس متقارن ($A \in \mathbb{S}^n$) است. همچنین $b \in \mathbb{R}^n$ و $c \in \mathbb{R}$ است. نشان دهید که اگر $A \succcurlyeq 0$ باشد آنگاه مجموعه C محدب خواهد بود. (راهنمایی: می‌توانید نشان دهید که اشتراک C با هر خط دلخواهی محدب است.)

۵- نشان دهید که برای توابع quasiconvex ویژگی‌های زیر برقرار است.

a) تابع $f: \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ quasiconvex است اگر و تنها اگر:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \max\{f(x), f(y)\}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0,1] \qquad (1)$$

b) اگر تابع $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ quasiconvex باشد، تابع

$$g(x) = f(Ax + b), \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

نیز quasiconvex خواهد بود. در این تابع $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $b \in \mathbb{R}^n$ است.

۶- محدب بودن توابع زیر را بررسی کنید.

a. $f(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{-1/f_i(x)}$, $D_f = \{x |\ \mathrm{f}_i(x) < 0 , i = 1, \dots , m ,\ \mathrm{f}_i(x) \text{ is convex}\}$

b. $f(X, y) = y^T X^{-1} y$, $D_f = \{(\mathrm{X,y}) |\ \mathrm{X} + \mathrm{X}^T \succ 0\}$

۷- فرض کنید توابع $f_0, \dots, f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی پیوسته باشند، مسئله‌ی تخمین تابع f_0 را به شکل ترکیب خطی از توابع $f_1, \dots, f_n$ در نظر بگیرید. برای $x \in \mathbb{R}^n$ می‌گوییم تابع $f = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$ تابع f_0 را با حد خطای $\epsilon > 0$، در محدوده‌ی $[0, T]$ تقریب می‌زند اگر $\left|f(t) - f_0(t)\right| \le \epsilon$ برای $0 \le t \le T$ برقرار باشد. حال حد خطای ثابت $\epsilon > 0$ را فرض می‌کنیم و پهنای تقریب[1] را به صورت بزرگ‌ترین T به‌طوری که تابع f تابع f_0 را در محدوده‌ی $[0, T]$ تقریب بزند به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W(x) = \sup\{T |\ |x_1 f_1(t) + \cdots + x_n f_n(t) - f_0(t)| \le \epsilon \ \ for\ 0 \le t \le T\}$$

نشان دهید که W یک تابع quasiconcave می‌باشد.

۸- به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف)نشان دهید تابع $f(x, y) = \sqrt{xy}$ روی $x \ge 0$ و $y \ge 0$ مقعر است.

ب) نشان دهید تابع $f(x) = \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$ تابعی محدب بر روی $x \in \mathbb{R}^n$ می باشد.

(تابع مذکور log-of-sum-of-exponentials می باشد)

ج) نشان دهید تابع $-\sqrt{(x)}$ تابعی مقعر است.

(راهنمایی: در صورت استفاده از تعریف، برای قسمت الف سوال می‌توانید از نامساوی کوشی شوارتز[2] و برای قسمت ب می‌توانید از نامساوی هولدر[3] کمک بگیرید.)

۹- تابع هزینه در مساله least squares به صورت زیر می‌باشد:

$$J(X) = \left|\left|Y - AX\right|\right|_2^2$$

که در آن Y متغیر هدف، A ماتریس از پیش مشخص ورودی و X بردار متغیرها می‌باشد. نشان دهید در نقطه‌ی

$$X^* = (A^T A)^{-1} A^T Y$$

مشتق تابع هزینه صفر می‌باشد.

---

[1] approximation width

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Schwarz_inequality

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6lder%27s_inequality

۱۰- مقدار x برای حل مسألهی بهینهسازی L2 regularized least squares را با مشتق گیری بدست آورید:
$\min J(X) = ||Y - AX||_2^2 + \lambda||X||_2^2$

تمرین‌های پیاده‌سازی

۱۱- برای حل مسائل بهینه‌سازی ابزارهای زیادی وجود دارد. به‌عنوان چند مثال می‌توان به CVX[4] یا CVXPY[5] اشاره کرد. علاوه‌بر ابزارهایی که در اینجا نام آنها آورده شده است ابزارهای دیگری نیز موجود است که می‌توان از آنها برای حل مسائل بهینه‌سازی بهره برد. با استفاده از ابزار CVX به حل مساله 4.1 مطرح شده در کتاب Convex Optimization[6] بپردازید و پاسخ‌های به دست آمده را با پاسخ‌هایی که به‌صورت تحلیلی برای این مساله به دست می‌آید مقایسه کنید.

۱۲- در ادامه چند قطعه کد در قالب CVX آورده شده است که به بیان قیودی بر روی متغیرهای x و y و z می‌پردازد. در این کدها برخی از قواعد CXV نقض شده است و بنابراین نامعتبر هستند. ابتدا به طور مختصر توضیح دهید که چرا این کدها نامعتبر هستند و سپس طوری معادل آن‌ها را بازنویسی کنید که مطابق با قوانین CVX باشند. (در بازنویسی می‌توانید از قیود مساوی و نامساوی خطی و همچنین نامساوی‌هایی که با استفاده از توابع CVX ساخته شده‌اند استفاده کنید. همچنین می‌توانید در بازنویسی خود متغیرهای جدیدی را هم معرفی کنید. درصورت نیاز توضیح دهید که چرا فرم بازنویسی شده معادل با فرم اولیه مطرح شده در سوال است.) در ادامه پاسخ خود را با ساخت یک مساله بهینه‌سازی کوچک که شامل قید مطرح شده می‌باشد آزمایش کنید. (مطمئن شوید که CVX می‌تواند قیدهای موردنظر را بدون خطا پردازش کند.)

```
(a) norm( [ x + 2*y , x - y ] ) == 0

(b) square( square( x + y ) ) <= x - y

(c) 1/x + 1/y <= 1; x >= 0; y >= 0

(d) norm([ max( x , 1 ) , max( y , 2 ) ]) <= 3*x + y

(e) x*y >= 1; x >= 0; y >= 0

(f) ( x + y )^2 / sqrt( y ) <= x - y + 5

(g) x^3 + y^3 <= 1; x>=0; y>=0

(h) x+z <= 1+sqrt(x*y-z^2); x>=0; y>=0
```

---

[4] http://cvxr.com/cvx/
[5] https://www.cvxpy.org/
[6] Boyd, Stephen, Stephen P. Boyd, and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.

فرمت گزارش:

گزارش بایستی حاوی تمام نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری در قالب فایل PDF باشد.

درصورتی که تمرینات را به‌صورت دستنویس حل می‌کنید. فایل‌های عکس تمرینات را با کیفیت مناسب و به ترتیب سوالات در یک فایل pdf قرار دهید و درنهایت این فایل را آپلود نمایید.

فایل گزارش خود را به شکل « StdNum_HWNum.pdf» نام‌گذاری کنید. (مانند 9272203_HW2.pdf)

فرمت کدها:

برای هر تمرین شبیه‌سازی کامپیوتری بایستی فایل کد جداگانه در محیط MATLAB، Python یا R تهیه شود.

هر فایل کد خود را به شکل « Q_k » نام‌گذاری کنید. که k بیانگر شماره سوال شبیه‌سازی خواهد بود.

نحوه تحویل:

فایلهای کد و گزارش خود را که طبق فرمت‌های فوق تهیه شده‌اند، در قالب یک فایل فشرده بارگذاری نمایید. فایل فشرده را به شکل «StdNum_HW2.zip» نام‌گذاری کنید. (مانند 9272203_HW2.zip)

تذکر:

- در صورتیکه پارامتر خاصی در سوالات مشخص نشده با توجه به اطلاعاتی که در ارتباط با محدوده پارامتر دارید، مقدار دلخواهی انتخاب کنید و آن را در گزارش توضیح دهید.
- ارسال تمرین‌های تئوری تا یک روز تاخیر بلامانع است. پس از آن پاسخ این بخش بارگذاری خواهد شد و لذا مواردی که پس از بارگذاری پاسخ‌ها ارسال شوند قابل قبول نخواهد بود.
- برای تمرین‌های بخش پیاده‌سازی در مجموع ۷ روز تاخیر مجاز است (برای کل تمرینات جمع تاخیرهای شما نباید از ۷ روز بیشتر شود). در صورت تاخیر بیشتر از ۷ روز کسر ۵ درصد نمره از نمره کل تمرینات پیاده‌سازی به ازای هر روز تاخیر مد نظر قرار خواهد گرفت.
- در صورت شبیه بودن تمارین دانشجویان، نمره تمرین بین دانشجویان با تمرین مشابه تقسیم خواهد شد.
- در صورت وجود هرگونه سوال یا ابهام با یکی از ایمیل‌های shervin.halat@gmail.com و یا b.roshanfekr@aut.ac.ir ارتباط برقرار کنید.