تمرین سری دوم بهینه‌سازی   علیرضا ولد   ۴۰۰۱۳۱۰۱۸

① با استفاده از شرط A مسئله را تغییر می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && \bar{A}x + V|x| \preceq b \end{aligned}$$

برای حذف کردن $|x|$:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && \bar{A}x + Vy \preceq b \\ & && -y \preceq x \preceq y \end{aligned}$$

② a) همان‌طور که می‌بینیم، دامنه مقادیر قابل قبول در مسئله اصلی، زیر مجموعه دامنه مقادیر قابل قبول مسئله ساده شده است بنابراین اگر مسئله ساده سازی شده infeasible باشد، مسئله اصلی نیز infeasible خواهد بود. همچنین مقدار بهینه برای مسئله ساده شده هیچ وقت نمی‌تواند بیشتر از جواب بهینه مسئله اصلی شود ($x_i \le 1$) بنابراین پاسخ بهینه مسئله ساده شده کران پایین برای مسئله اصلی است.

b) مقدار بهینه برای مسئله ساده شده، مقدار بهینه برای مسئله اصلی نیز است.

تمرین سری دوم بهینه سازی علیرضا ملک ۴۰۰۱۳۱۰۱۸

(4) ماتریس P را با کمک راهنمایی سوال می‌نویسیم.

$$P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = [\sigma_0 \; \sigma_1 \; \cdots \; \sigma_{k-1}]^T$$

$$h(\sigma) = \frac{1}{2}(x_0 + P\sigma)^T A (x_0 + P\sigma) + b^T (x_0 + P\sigma)$$

$$= \frac{1}{2} x_0^T A x_0 + x_0^T A P\sigma + \frac{1}{2}\sigma^T P^T A P \sigma + b^T x_0 + (b^T P)\sigma$$

$$= \frac{1}{2} x_0^T A x_0 + b^T x_0 + (P^T A^T x_0 + P^T b)^T \sigma + \frac{1}{2}\sigma^T (P^T A P)\sigma$$

$$= \boxed{C + \hat{b}^T \sigma + \frac{1}{2}\sigma^T \hat{A}\sigma}$$

$$C = \frac{1}{2} x_0^T A x_0 + b^T x_0 \qquad \hat{b} = P^T A^T x_0 + P^T b \qquad \hat{A} = P^T A P$$

چون بردارهای P_0 تا P_k مستقل خطی اند پس: $\Leftarrow$ P is full Rank

$$\hat{A} = P^T A P \succ 0 \quad \text{(Positive definite)}$$

که نتیجه می‌شود $h(\sigma)$ یک تابع درجه 2 اکیدا محدب است.

تمرین سری دوم بهینه سازی علیرضا دلد ۴۰۰۱۳۱۰۱۸

5) a)

- $1/k! \to 0$ as $k \to \infty$

- $$\frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \frac{1}{k+1} \to \underline{\underline{0}} \text{ as } k \to \infty$$

پس $\frac{1}{k!}$ به صورت superlinearly همگرا می‌شود. ✓

- $$\frac{1/(k+1)!}{1/(k!)^2} = \frac{k!}{k+1} \to \underline{\underline{\infty}} \text{ as } k \to \infty$$

پس $\frac{1}{k!}$ به صورت Quadratically همگرا نمی‌شود. ✗

b) برای kهای زوج داریم

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = \frac{x_k/k}{x_k} = \boxed{\frac{1}{k} \to 0}$$

برای kهای فرد داریم

$$// = \frac{(1/4)^{2^k}}{x_{k-1}/k} = k\frac{(1/4)^{2^k}}{(1/4)^{2^{k-1}}}$$

$$= \boxed{k(1/4)^{2^{k-1}} \longrightarrow 0}$$

بنابراین Q superlinear است.

برای kهای زوج:

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^2} = \frac{x_k/k}{x_k^2} = \frac{1}{k}4^{2^k} \to \infty$$

چون برابر بی‌نهایت به ∞ همگرا شد پس Q quadratically نیست.

تمرین سری دوم بهینه سازی غلامرضا ملک ۴۰۰۱۳۱۰۱۸

⑥ طبق رابطه Steepest Descent داریم

$$X_{n+1} = X_n - \alpha f'(X_n)$$

با جایگذاری مشتق f در رابطه داریم

$$X_1 = X_0 + \alpha (AX_0 - b)$$

در صورت سوال گفته شده که در یک مرحله همگرا می‌شویم

$$AX_1 - b = 0 \longrightarrow \text{همگرا}$$

با جایگذاری X_1 داریم

$$A(X_0 + \alpha (AX_0 - b)) - b = 0$$

ضرب

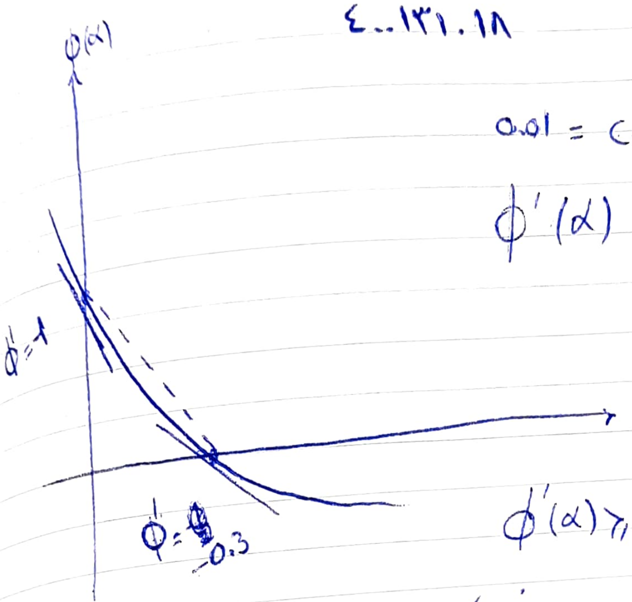
$$\underbrace{(AX_0 - b)} + \alpha A \underbrace{(AX_0 - b)} = (I + \alpha A)(AX_0 - b) = 0$$

برای اینکه معادله بالا جواب داشته باشد ماتریس A باید ضریبی از ماتریس همانی (I) باشد

~~همچنین~~ یا

ماتریس A باید Psd باشد و معادله $Ax_0 = b$ جواب داشته باشد.

تمرین سری دوم بهینه‌سازی [illegible]   ۴۰۱۳۱۰۱۸



(7) فرض کنیم $c_1 = 0.99$ و $c_2 = 0.01$

$\phi'(\alpha) \le -0.3$ (I)

به ازای نقاط چپ برقرار

طبق شرط دوم ولف داریم $\phi'(\alpha) \ge -0.01$

که طبق (I) به ازای هیچ α برقرار نیست ✓

(8) محدودیت‌ها و تابع هدف قابل جداسازی هستند. تابع هدف به فرم $\sum c_i x_i$ است که هر کدام آنها به یک متغیر وابسته هستند. پس می‌توانیم مینیمایز کردن را برای هر x_i به طور جدا انجام دهیم.

x_i بهینه $c_i x_i$ را با توجه به محدودیت $l_i \le x_i \le u_i$ مینیمایز می‌کند. اگر c_i منفی بود $x_i = u_i$ و اگر c_i مثبت بود $x_i = l_i$ و اگر $c_i = 0$ باشد هر x_i در بازه $[l_i, u_i]$ بهینه است.

$\cancel{P^* = c_{max}}$

$$p^* = l^T c^+ + u^T c^-$$

$$c_i^+ = \max\{c_i, 0\} \quad c_i^- = \max\{-c_i, 0\}$$