به نام خدا

پاسخ تمرین سری **اول** درس **بهینه‌سازی**

(نیمسال دوم ۱۴۰۰)

۱- به سوالات زیر پاسخ دهید.

a) نشان دهید برای هر $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$، داریم: $\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(A)$

b) فرض کنید A یک ماتریس $n \times m$ باشد. نشان دهید $\text{rank}\ (A) = 1$ برقرار است اگر و فقط اگر بردارهایی به شکل $v \in \mathbb{R}^n$ و $w \in \mathbb{R}^m$ وجود داشته باشند به طوریکه:

$$A = vw^T$$

c) چه تفاوتی میان توابع Linear و Affine وجود دارد؟

پاسخ:

a) فرض کنیم $\mathbf{x} \in N(A)$ برقرار است به طوری که $N(A)$، null space ماتریس A می باشد. لذا داریم:

$$\begin{aligned} &A\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Longrightarrow \mathrm{x} \in N\left(A^TA\right) \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$N(A) \subseteq N(A^TA)$$

مجددا فرض کنیم: $\mathbf{x} \in N(A^TA)$

آنگاه:

$$\begin{aligned} A^TA\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Longrightarrow \mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Longrightarrow (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \Longrightarrow A\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Longrightarrow \mathbf{x} &\in N(A) \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$N(A^TA) \subseteq N(A)$$

لذا از نتایج بدست آمده در بالا داریم:

$$N\left(A^T A\right) = N(A)$$
$$\Longrightarrow \dim\left(N\left(A^T A\right)\right) = \dim\left(N(A)\right)$$
$$\Longrightarrow \operatorname{rank}\left(A^T A\right) = \operatorname{rank}(A)$$

b)

فرض کنیم $A = \mathbf{v}\mathbf{w}^T$. اگر $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$، در نتیجه داریم:

$$A\mathbf{u} = \mathbf{v}\mathbf{w}^T\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v}$$

لذا، ماتریس **A** موجب نگاشت هر برداری از $\mathbb{R}^m$ به ضریبی اسکالری از بردار $\mathbf{v}$ می‌گردد. لذا $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{im} A) = 1$

حال فرض کنیم: $\operatorname{rank}(A) = 1$، لذا برای تمامی بردارهای $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$، به ازای بردار ثابت $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$، داریم:

$$A\mathbf{u} = k\mathbf{v}$$

لذا به طور خاص، رابطه‌ی بدست آمده برای بردارهای پایه‌ی $\mathbb{R}^m$ برقرار است، لذا هر یک از ستون‌های ماتریس A ضریب اسکالری از بردار $\mathbf{v}$ می‌باشد، به طوری که:

$$A = (w_1\mathbf{v} \quad w_2\mathbf{v} \quad \cdots \quad w_m\mathbf{v}) = \mathbf{v}(w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_m) = \mathbf{v}\mathbf{w}^T$$

c) تابع f یک تابع خطی است اگر عبارت $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ برای هرمقداری از ضرایب a و b برقرار باشد. اما تابع g آفین است اگر داشته باشیم: $g(x) = f(x) + c$، که در آن f یک تابع خطی و c یک مقدار ثابت است. لازم به ذکر است که مقدار c می‌تواند صفر باشد که به این معنا است که هر تابع خطی، یک تابع آفین است.

۲- نشان دهید که مجموعه‌ی $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4\} \subset \mathbb{R}^3$ یک مجموعه محدب است.

پاسخ:

فرض کنید $X = (x_1, x_2, x_3)$ و $Y = (y_1, y_2, y_3)$ دو نقطه در S باشند. بر اساس فرضیات مساله خواهیم داشت:

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \quad and \quad 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 4$$

حال فرض کنید $W = (w_1, w_2, w_3)$ یک نقطه دلخواه بر روی خط واصل X و Y باشد. برای یک ضریب دلخواه $0 \leq \lambda \leq 1$ داریم:

$$W = \lambda X + (1 - \lambda)Y$$

بنابراین:

$$2w_1 - w_2 + w_3 = \lambda(2x_1 - x_2 + x_3) + (1-\lambda)(2y_1 - y_2 + y_3) \leq 4\lambda + 4(1-\lambda) = 4$$

به این ترتیب مشاهده می‌شود که W نیز در مجموعه S قرار می‌گیرد. پس این مجموعه محدب است.

۳- نشان دهید اگر مجموعه‌های S_1 و S_2 در $\mathbb{R}^{m\times n}$ محدب باشند، مجموعه حاصل جمع جزئی آن‌ها که به‌صورت زیر تعریف می‌شود نیز مجموعه‌ای محدب خواهد بود.

$$S = \{(x, y_1 + y_2) | x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$$

پاسخ:

دو نقطه ی به صورت $(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2), (\tilde{x}, \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) \in S$ در نظر می‌گیریم، به طوری که:

$$(\bar{x}, \bar{y}_1) \in S_1, (\bar{x}, \bar{y}_2) \in S_2, (\tilde{x}, \tilde{y}_1) \in S_1, (\tilde{x}, \tilde{y}_2) \in S_2$$

حال برای $0 \leq \theta \leq 1$ داریم:

$$\theta(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + (1-\theta)(\tilde{x}, \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = \left(\theta\bar{x} + (1-\theta)\tilde{x}, (\theta\bar{y}_1 + (1-\theta)\tilde{y}_1) + (\theta\bar{y}_2 + (1-\theta)\tilde{y}_2)\right)$$

که این نقطه نیز با توجه به محدب بودن مجموعه های S_1 و S_2 عضوی از مجموعه S می باشد:

$$\left(\theta\bar{x} + (1-\theta)\tilde{x}, \theta\bar{y}_1 + (1-\theta)\tilde{y}_1\right) \in S_1$$
$$\left(\theta\bar{x} + (1-\theta)\tilde{x}, \theta\bar{y}_2 + (1-\theta)\tilde{y}_2\right) \in S_2$$

بنابراین مجموعه حاصل‌جمع جزئی با توجه به تعریف آورده شده مجموعه‌ای محدب خواهد بود.

۴- ابتدا نشان دهید که یک مجموعه محدب است اگر و تنها اگر اشتراک آن با هر خطی محدب باشد. سپس فرض کنید مجموعه‌ی $C \subset \mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n | \, x^T A x + b^T x + c \leq 0\},$$

که در آن A یک ماتریس متقارن ($A \in \mathbb{S}^n$) است. همچنین $b \in \mathbb{R}^n$ و $c \in \mathbb{R}$ است. نشان دهید که اگر $A \succcurlyeq 0$ باشد آنگاه مجموعه C محدب خواهد بود. (راهنمایی: می‌توانید نشان دهید که اشتراک C با هر خط دلخواهی محدب است.)

پاسخ:

قسمت اول) می‌دانیم اشتراک هر دو مجموعه‌ی محدب یک مجموعه‌ی محدب است بنابراین اگر S یک مجموعه‌ی محدب باشد، اشتراک آن با یک خط نیز محدب خواهد بود. حال فرض کنیم اشتراک مجموعه‌ی S با هر خطی، یک مجموعه‌ی محدب تشکیل دهد. دو نقطه‌ی دلخواه مانند x_1 و x_2 در این مجموعه فرض می‌کنیم ($x_1, x_2 \in S$). اشتراک

مجموعه‌ی S با خطی که از دو نقطه‌ی x_1 و x_2 می‌گذرد، محدب است. بنابراین هر ترکیب خطی این دو نقطه نیز در مجموعه‌ی اشتراک قرار دارد پس می‌توان نتیجه گرفت هر ترکیب خطی از این دو نقطه در مجموعه‌ی S هم قرار دارد بنابراین مجموعه‌ی S نیز محدب است.

قسمت دوم) برای آن‌که نشان دهیم مجموعه‌ی C محدب است، نشان می‌دهیم که اشتراک آن با خط دلخواه $\{\hat{x} + tv |\ t \in \mathbb{R}\}$ محدب است. برای این خط دلخواه داریم:

$$(\hat{x} + tv)^T A(\hat{x} + tv) + b^T(\hat{x} + tv) + c = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

که در آن:

$$\alpha = v^T A v, \quad \beta = b^T v + 2\hat{x}^T A v, \quad \gamma = c + b^T \hat{x} + \hat{x}^T A \hat{x}.$$

به این ترتیب اشتراک مجموعه C با خطی که توسط $\hat{x}$ و v تعریف شده است به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\{\hat{x} + tv \mid \alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0\}$$

این مجموعه درصورتی محدب است که $\alpha \geq 0$ باشد. با توجه به آن که براساس فرض مساله داریم $A \succcurlyeq 0$، بنابراین $\alpha = v^T A v \geq 0$ به ازای هر v برقرار است.

۵- نشان دهید که برای توابع quasiconvex ویژگی‌های زیر برقرار است.

a) تابع $f: \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ quasiconvex است اگر و تنها اگر:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0,1] \qquad (1)$$

b) اگر تابع $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ quasiconvex باشد، تابع

$$g(x) = f(Ax + b), \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

نیز quasiconvex خواهد بود. در این تابع $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $b \in \mathbb{R}^n$ است.

پاسخ:

a) فرض کنید تابع f، quasiconvex باشد. اگر $f(x) = \infty$ یا $f(y) = \infty$ باشد آنگاه رابطه‌ی (1) برقرار است بنابراین فرض می‌کنیم:

$$\max\{f(x), f(y)\} < \infty$$

است. حال *sublevel set* زیر را درنظر بگیرید:

$$L = \{z | f(z) \leq \max\{f(x), f(y)\}\}.$$

x و y متعلق به L هستند. از طرفی با توجه به آنکه f quasiconvex است پس L محدب است. بنابراین به ازای تمام $\alpha \in [0,1]$ خواهیم داشت $\alpha x + (1-\alpha)y \in L$. بنابراین رابطه‌ی (1) برقرار است.

حال فرض کنید که رابطه‌ی (1) برقرار باشد و دو نقطه‌ی x و y را در sublevel set

$$\{z | f(z) \leq \gamma\}$$

درنظر بگیرید. به این ترتیب به ازای هر $\alpha \in [0,1]$ خواهیم داشت:

$$f(ax + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \gamma$$

بنابراین sublevel set

$$\{z | f(z) \leq \gamma\}$$

محدب است و به این ترتیب می‌توان quasiconvex بودن f را نتیجه گرفت.

b) برای آنکه نشان دهیم g یک تابع quasiconvex است بایستی نشان دهیم که به ازای هر $\gamma \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ی

$$V_\gamma = \{x | f(Ax + b) \leq \gamma\}$$

محدب است. این مجموعه می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$V_\gamma = \{x \big| Ax + b = y, y \in L_\gamma\},$$

که در آن $L_\gamma = \{y | f(y) \leq \gamma\}$ است. از آنجا که تابع f محدب است می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموعه‌ی L_γ محدب است که محدب بودن مجموعه‌ی V_γ را نتیجه می‌دهد.

۶- محدب بودن توابع زیر را بررسی کنید.

a. $f(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{-1/f_i(x)}$, $D_f = \{x |\ \mathrm{f}_i(x) < 0 , i = 1, \ldots, m ,\ \mathrm{f}_i(x) \text{ is convex}\}$

b. $f(X, y) = y^T X^{-1} y$, $D_f = \{(\mathrm{X,y}) |\ \mathrm{X} + \mathrm{X}^T \succ 0\}$

پاسخ:

a. تابع $h(u) = e^{\frac{1}{u}}$ در بازه‌ی R^+ محدب است زیرا

$$h'(u) = -\frac{1}{u^2} e^{\frac{1}{u}} ,\ h''(u) = \frac{2}{u^3} e^{\frac{1}{u}} + \frac{1}{u^4} e^{\frac{1}{u}}$$

بنابراین تابع $h(-f_i(x)) = e^{-\frac{1}{f_i(x)}}$ نیز تابعی محدب است. و همچنین جمع توابع محدب نیز محدب است. پس تابع نهایی نیز محدب است.

b. این تابع محدب نیست. برهان خلف: فرض می‌کنیم تابع f محدب باشد. تابع g(s) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(s) = f(X, y),\ \mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ -s & 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

چون طبق فرض تابع f محدب است تابع $g(s)$ نیز باید محدب باشد. اما تابع $g(s)$ طبق تعریف بالا برابر $\frac{2}{1+s^2}$ خواهد بود که واضحا محدب نیست. پس فرض خلف درست نیست و تابع $f(X, y)$ محدب نیست.

۷- فرض کنید توابع $f_0, \dots, f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، توابعی پیوسته باشند، مسئله‌ی تخمین تابع f_0 را به شکل ترکیب خطی از توابع $f_1, \dots, f_n$ در نظر بگیرید. برای $x \in \mathbb{R}^n$ می‌گوییم تابع $f = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$ تابع f_0 را با حد خطای $\epsilon > 0$، در محدوده‌ی $[0, T]$ تقریب می‌زند اگر $\left|f(t) - f_0(t)\right| \leq \epsilon$ برای $0 \leq t \leq T$ برقرار باشد. حال حد خطای ثابت $\epsilon > 0$ را فرض می‌کنیم و پهنای تقریب[1] را به صورت بزرگ‌ترین T به‌طوری که تابع f تابع f_0 را در محدوده‌ی $[0, T]$ تقریب بزند به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W(x) = \sup\{T \mid |x_1 f_1(t) + \cdots + x_n f_n(t) - f_0(t)| \leq \epsilon \ for\ 0 \leq t \leq T\}$$

نشان دهید که W یک تابع quasiconcave می‌باشد.

پاسخ:

به منظور اثبات تابع quasiconcave بودن تابع W نشان می‌دهیم که مجموعه‌های $\{x \mid W(x) \geq \alpha\}$ به ازای تمامی α ها محدب هستند. داریم $W(x) \geq \alpha$ اگر و تنها اگر

$$-\epsilon \leq x_1 f_1(t) + \cdots + x_n f_n(t) - f_0(t) \leq \epsilon$$

برای تمامی $t \in [0, \alpha)$.

درنتیجه مجموعه‌ی $\{x \mid W(x) \geq \alpha\}$ در واقع حاصل تلاقی مقادیر نامتناهی از نیم-فضاها (دو نیم‌فضا به ازای هر t) هستند. لذا مجموعه‌هایی که به‌صورت فوق تعریف شدند محدب هستند.

۸- به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف)نشان دهید تابع $f(x, y) = \sqrt{xy}$ روی $x \geq 0$ و $y \geq 0$ مقعر است.

ب) نشان دهید تابع $f(x) = \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$ تابعی محدب بر روی $x \in \mathbb{R}^n$ می باشد.

(تابع مذکور log-of-sum-of-exponentials می باشد)

[1] approximation width

ج) نشان دهید تابع $-\sqrt{(x)}$ تابعی مقعر است.

(راهنمایی: در صورت استفاده از تعریف، برای قسمت الف سوال می‌توانید از نامساوی کوشی شوارتز[۲] و برای قسمت ب می‌توانید از نامساوی هولدر[۳] کمک بگیرید.)

پاسخ:

الف)

کافیست دو نقطه‌ی (x_0, y_0) و (x_1, y_1) را در نظر بگیریم. حال کافیست نشان دهیم که:

$$f\left(t(x_0, y_0) + (1-t)(x_1, y_1)\right) \geq tf\left((x_0, y_0)\right) + (1-t)f\left((x_1, y_1)\right)$$

که با به توان دو رساندن طرفین نامساوی داریم:

$$(tx_0 + (1-t)x_1)\left(ty_0 + (1-t)y_1\right) \geq \left(t\sqrt{x_0 y_0} + (1-t)\sqrt{x_1 y_1}\right)$$

که با توجه به نامساوی کوشی-شوارتز بدیهی می باشد.

ب)

فرض می‌کنیم:

$$u_i = e^{x_i}, v_i = e^{y_i}$$

لذا داریم:

$$f(\theta x + (1-\theta)y) = \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\theta x_i + (1-\theta)y_i}\right) = \log\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\theta} v_i^{(1-\theta)}\right)$$

همچنین از نامساوی Hölder داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

به طوری که $1/p + 1/q = 1$.

با اعمال این نامساوی در رابطه ی $f(\theta x + (1-\theta)y)$ داریم:

[۲] https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Schwarz_inequality

[۳] https://en.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6lder%27s_inequality

$$\log\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\theta} v_i^{(1-\theta)}\right) \leq \log\left[\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\theta\cdot\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^{1-\theta\cdot\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta}\right]$$

سمت راست نامساوی را می توان به رابطه ی زیر تغییر داد:

$$\theta\log\sum_{i=1}^{n} u_i + (1-\theta)\log\sum_{i=1}^{n} v_i$$

(توجه شود که در اینجا منظور از θ و $\theta - ۱$ به ترتیب $\frac{۱}{p}$ و $\frac{۱}{q}$ می باشند.)

لذا به رابطه ی

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

رسیدیم.

ج)

از روی تعریف توابع محدب و مقعر، میخواهیم ثابت کنیم که برای $t \in (0,1)$ و $x \neq y$ رابطه ی زیر برقرار است:

$$\sqrt{tx + (1-t)y} > t\sqrt{x} + (1-t)\sqrt{y}$$

چون دو طرف نامساوی مثبت هست، نامساوی معادل زیر می باشد:

$$tx + (1-t)y > t^2x + (1-t)^2y + 2t(1-t)\sqrt{xy}$$

که می توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$t(1-t)x + t(1-t)y > 2t(1-t)\sqrt{xy}$$

که رابطه ی بالا معادل است با:

$$x + y > 2\sqrt{xy}$$

که برابر است با:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0$$

که نامساوی ای بدیهی می باشد.

۹- تابع هزینه در مساله least squares به صورت زیر می‌باشد:

$$J(X) = ||Y - AX||_2^2$$

که در آن Y متغیر هدف، A ماتریس از پیش مشخص ورودی و X بردار متغیرها می‌باشد. نشان دهید در نقطه‌ی

$$X^* = (A^TA)^{-1}A^TY$$

مشتق تابع هزینه صفر می‌باشد.

پاسخ:

$$J(X) = (Y - AX)^T(Y - AX) = Y^TY - 2Y^TAX + X^TA^TAX$$

در حالت کلی داریم:

$$\frac{\partial(AX)}{\partial X} = A^T, \frac{\partial(X^TA)}{\partial X} = A, \frac{\partial(X^TAX)}{\partial X} = AX + A^TX$$

پس با استفاده از روابط بالا داریم:

$$\frac{\partial J(X)}{\partial X} = -2\frac{\partial(Y^TAX)}{\partial X} + \frac{\partial(X^TA^TAX)}{\partial X} = -2A^TY + 2A^TAX = 0 \rightarrow X^* = (A^TA)^{-1}A^TY$$

۱۰- مقدار x برای حل مسأله‌ی بهینه‌سازی L2 regularized least squares را با مشتق گیری بدست آورید:

$$\min J(X) = ||Y - AX||_2^2 + \lambda||X||_2^2$$

پاسخ:

$$J(X) = (Y - AX)^T(Y - AX) = Y^TY - 2Y^TAX + X^TA^TAX + \lambda X^TX$$

$$\frac{\partial J(X)}{\partial X} = -2A^TY + 2A^TAX + 2\lambda X = 0 \ \rightarrow \ X^* = (A^TA{+}\lambda I)^{-1}A^TY$$