



به نام خدا

پاسخ تمرین سری سوم درس بهینه‌سازی

(نیمسال دوم ۱۴۰۰)



۱- صفحات زیر را در نظر بگیرید:

$$x + y + z = 1$$

$$-x - y + z = 0$$

نقطه‌ای را روی خط تلاقی دو صفحه‌ی مذکور بیابید که دارای کمترین فاصله از مبدا مختصات باشد.

۲- جدول زیر جمعیت تخمینی کشور آمریکا (به میلیون) در سال‌های مختلف می‌باشد. فرض کنید که میان زمان  $t$  و جمعیت  $P(t)$  رابطه‌ی نمایی برقرار می‌باشد به این شکل که  $P(t) = ae^{bt}$ ، که در آن  $a$  و  $b$  پارامترهایی هستند که قصد یافتن آن‌ها را داریم. براساس مقادیر داده شده در جدول زیر پارامترهای  $a$  و  $b$  را به روش least squares تخمین بزنید سپس جمعیت آمریکا را برای سال ۲۰۱۰ پیش‌بینی نمایید. (راهنمایی: مدل نمایی داده‌شده را به فرم خطی تبدیل کنید یعنی  $\ln P(t) = \ln a + bt$ )

year	1980	1985	1990	1995
population	227	237	249	262

۳- فرض کنید  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  نمونه‌های تصادفی باشند که با استفاده از توزیع Geometric( $\theta$ ) به‌دست آمده‌اند. براساس نمونه‌های تصادفی فوق مقدار  $MLE^1$  را برای پارامتر  $\theta$  بیابید.

۴- فرض کنید  $y \in \{0,1\}$  یک متغیر تصادفی باشد که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$y = \begin{cases} 1 & a^T u + b + v \leq 0 \\ 0 & a^T u + b + v > 0 \end{cases}$$

در این رابطه  $u \in \mathbb{R}^n$  است و  $v$  نیز یک متغیر تصادفی با توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس یک است.

تخمین ML را برای یافتن  $a$  و  $b$ ، با فرض آنکه داده‌های  $(u_i, y_i), i = 1, \dots, N$  داده شده باشند به‌صورت یک مساله‌ی بهینه‌سازی محدب بنویسید.

<sup>1</sup> Maximum likelihood estimator

۵- مسالهی بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{i=1}^n x_i \log(x_i) \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \\ & && 1^T x = 1 \end{aligned}$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$  متغیر مساله است. همچنین داریم:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  و  $b \in \mathbb{R}^m$ . مسالهی دوگان متناظر با مسالهی بهینه‌سازی فوق را بنویسید.

۶- نیم‌فضای  $H = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x + \alpha \geq 0\}$  را در نظر بگیرید که در آن  $\alpha \in \mathbb{R}$ ،  $a \in \mathbb{R}^n$  هستند و همچنین داریم  $a \neq 0$ . مسالهی پیدا کردن نقطه‌ای در  $H$  که کمترین نرم اقلیدسی را داشته باشد در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x^T x \\ & \text{subject to} && a^T x + \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

با استفاده از شروط KKT پاسخ بهینه‌ی این مسالهی بهینه‌سازی را به دست آورید.

۷- فرض کنید که  $x \in \mathbb{R}^2$  باشد ( $x = [x_1, x_2]$ )، سپس مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x_1 + x_2 \\ & \text{subject to} && x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \\ & && x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

براساس ناحیه‌ی  $\text{feasible}$  برای این مساله، پاسخ بهینه را حدس بزنید و برقرار بودن شروط KKT را برای آن بررسی کنید.

### تمرین‌های پیاده‌سازی

۸- مسالهی بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید. (برای این مساله می‌توانید از CVX استفاده کنید)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - x_1 \\ & \text{subject to} && x_1 + 2x_2 \leq u_1 \\ & && x_1 - 4x_2 \leq u_2 \\ & && 5x_1 + 76x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

در این مساله،  $x_1$  و  $x_2$  متغیرهای مساله هستند.  $u_1$  و  $u_2$  نیز پارامترهای مساله هستند که مقدار آن‌ها از پیش مشخص است.

(a) مساله‌ی بهینه‌سازی فوق را برای پارامترهای  $u_1 = -2$  و  $u_2 = -3$  حل کنید و پاسخ بهینه را برای مساله‌ی اولیه<sup>۲</sup>  $(x_1^*, x_2^*)$  و مساله‌ی دوگان  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$  به دست آورید. فرض کنید  $p^*$  نشان‌دهنده‌ی مقدار بهینه باشد. نشان دهید شروط KKT به ازای پاسخ بهینه که برای مساله‌ی اولیه و دوگان به دست آمد برقرار است.

(b) حال فرض کنید پارامترهای  $u_1$  و  $u_2$  به صورت زیر دچار تغییرات جزئی شده باشند.

$$u_1 = -2 + \delta_1, \quad u_2 = -3 + \delta_2$$

در اینجا  $\delta_1$  و  $\delta_2$  می‌توانند مقادیر  $\{-0.05, 0, 0.05\}$  را اتخاذ کنند. به ازای تمامی مقادیری که  $\delta_1$  و  $\delta_2$  می‌توانند داشته باشند مقدار بهینه‌ی مساله‌ی تغییر یافته<sup>۳</sup>  $(p_{pred}^*)$  را تخمین بزنید و آن را با پاسخ دقیق مساله‌ی تغییر یافته  $(p_{exact}^*)$  مقایسه کنید. (این پاسخ با حل مساله‌ی جدید محاسبه می‌شود). نتایج خود را در جدولی مانند جدول زیر ثبت کنید.

$\delta_1$	$\delta_2$	$p_{pred}^*$	$p_{exact}^*$
0	0		
0	-0.05		
0	0.05		
-0.05	0		
-0.05	-0.05		
-0.05	0.05		
0.05	0		
0.05	-0.05		
0.05	0.05		

۹- یک گراف بدون جهت را در نظر بگیرید که حاوی  $n$  راس است. هدفی که در این مساله دنبال می‌شود دسته‌بندی رئوس این گراف است. فرض کنید برای تعداد  $m$  راس، برچسب مشخص شده باشد. این برچسب‌ها با  $y$  نشان داده می‌شوند.  $y$  یک بردار با اندازه  $m$  است که در درایه‌های آن مقدار برچسب رئوس ذخیره شده است ( $m < n$ ). برای به دست آوردن برچسب سایر رئوس می‌توانیم از مساله‌ی بهینه‌سازی زیر استفاده کنیم.

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T L x \\ \text{s.t.} \quad & S^T x = y \end{aligned}$$

---

primal<sup>۲</sup>  
Perturbed<sup>۳</sup>

در این جا  $x$  متغیر مساله است.  $x$  یک بردار با اندازه  $n$  است که درایه‌های آن برچسب راس متناظر را نشان می‌دهد.  $L$  نشان‌دهنده‌ی ماتریس لاپلاسین متناظر با گراف است. در صورتی که فرض کنیم گراف مفروض با ماتریس مجاورت  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  مشخص شده باشد، ماتریس لاپلاسین به صورت  $L = D - W$  محاسبه می‌شود که در آن  $D$  نشان‌دهنده‌ی ماتریس درجه‌ی رئوس می‌باشد. این ماتریس یک ماتریس قطری است که درایه‌ی  $i$  ام قطر اصلی آن برابر با درجه‌ی رأس  $i$  گراف است. در نهایت  $S$  نیز یک ماتریس است که مشخص می‌کند برچسب کدام راس‌ها از پیش مشخص است. اندازه‌ی این ماتریس  $n \times m$  می‌باشد. ستون‌های این ماتریس، بردارهای one-hot هستند که در آن درایه‌ی متناظر با راس دارای برچسب، مقدار یک دارد و سایر درایه‌ها مقدار صفر دارند.

می‌خواهیم از این روش برای دسته‌بندی داده‌های USPS استفاده کنیم. این مجموعه حاوی تصاویر اعداد دستنویس با اندازه  $16 \times 16$  است که حاوی ۱۱۰۰ تصویر به ازای هر رقم بین ۰ تا ۹ است. به ازای هر رقم تعداد ۱۰۰ تصویر را به صورت تصادفی انتخاب کنید. سپس با استفاده از نمونه‌های انتخاب شده یک گراف همسایگی تشکیل دهید. برای این منظور برای هر نمونه‌ی  $i$ ، ۱۰ نمونه‌ی دیگری که کمترین فاصله اقلیدسی را با آن دارند پیدا کرده و به ازای هر کدام یک یال در ماتریس مجاورت گراف قرار دهید. وزن یالی که نمونه‌های  $i$  و  $j$  را به یکدیگر متصل می‌کند با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد.

$$w_{ij} = \exp\left(\frac{[dist(p_i, p_j)]^2}{2\sigma^2}\right)$$

در این رابطه  $p_i$  و  $p_j$  نشان‌دهنده‌ی بردارهای ویژگی نمونه‌های  $i$  و  $j$  هستند.  $\sigma$  نیز نشان‌دهنده‌ی یک پارامتر است. یک مقدار پیشنهادی برای این پارامتر می‌تواند یک سوم میانگین فاصله‌ی ده همسایگی به ازای تمامی نمونه‌ها باشد.

پس از ساخت گراف ده همسایگی، بخشی از رئوس گراف را به صورت تصادفی به عنوان نمونه‌های آموزشی انتخاب کنید و با حل مساله‌ی بهینه‌سازی داده شده با استفاده از شروط KKT، برچسب متناظر با سایر نمونه‌ها را تخمین بزنید و دقت دسته‌بندی را گزارش کنید. این آزمایش را برای زمانی که داده‌های آموزشی ۳۰، ۴۰ و ۶۰ درصد از کل نمونه‌ها را تشکیل می‌دهند انجام دهید. (به منظور ساخت دیتاست مورد نظر یک فایل پایتون قرار داده شده است). (برای این سوال استفاده از CVX مجاز نیست).

## فرمت گزارش:

گزارش بایستی حاوی تمام نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری در قالب فایل PDF باشد. در صورتی که تمرینات را به صورت دستنویس حل می‌کنید. فایل‌های عکس تمرینات را با کیفیت مناسب و به ترتیب سوالات در یک فایل pdf قرار دهید و در نهایت این فایل را آپلود نمایید.

فایل گزارش خود را به شکل «StdNum\_HWNum.pdf» نام‌گذاری کنید. (مانند 9272203\_HW2.pdf)

## فرمت کدها:

برای هر تمرین شبیه‌سازی کامپیوتری بایستی فایل کد جداگانه در محیط MATLAB، Python یا R تهیه شود. هر فایل کد خود را به شکل «Q\_k» نام‌گذاری کنید. که k بیانگر شماره سوال شبیه‌سازی خواهد بود.

## نحوه تحویل:

فایل‌های کد و گزارش خود را که طبق فرمت‌های فوق تهیه شده‌اند، در قالب یک فایل فشرده بارگذاری نمایید. فایل فشرده را به شکل «StdNum\_HW2.zip» نام‌گذاری کنید. (مانند 9272203\_HW2.zip)

## تذکر:

- در صورتیکه پارامتر خاصی در سوالات مشخص نشده با توجه به اطلاعاتی که در ارتباط با محدوده پارامتر دارید، مقدار دلخواهی انتخاب کنید و آن را در گزارش توضیح دهید.
- ارسال تمرین‌های تئوری تا یک روز تاخیر بلامانع است. پس از آن پاسخ این بخش بارگذاری خواهد شد و لذا مواردی که پس از بارگذاری پاسخ‌ها ارسال شوند قابل قبول نخواهد بود.
- برای تمرین‌های بخش پیاده‌سازی در مجموع ۷ روز تاخیر مجاز است (برای کل تمرینات جمع تاخیرهای شما نباید از ۷ روز بیشتر شود). در صورت تاخیر بیشتر از ۷ روز کسر ۵ درصد نمره از نمره کل تمرینات پیاده‌سازی به ازای هر روز تاخیر مد نظر قرار خواهد گرفت.
- در صورت شبیه بودن تمرین دانشجویان، نمره تمرین بین دانشجویان با تمرین مشابه تقسیم خواهد شد.
- در صورت وجود هرگونه سوال یا ابهام با یکی از ایمیل‌های [shervin.halat@gmail.com](mailto:shervin.halat@gmail.com) و یا [b.roshanfekr@aut.ac.ir](mailto:b.roshanfekr@aut.ac.ir) ارتباط برقرار کنید.