南 京 林 业 大 学 试 卷(A 卷)

课程 线性代数 A　　　　　　2017~2018 学年第 1 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，则 $\begin{vmatrix} 3a_1 & 2a_1-b_1 & c_1-b_1 \\ 3a_2 & 2a_2-b_2 & c_2-b_2 \\ 3a_3 & 2a_3-b_3 & c_3-b_3 \end{vmatrix}=$ (D).

(A) 3　　(B) −3　　(C) 6　　(D) −6 ✓

2. 设 A, B 均为 n 阶方阵，则下列运算正确的是(C).

(A) $AB=BA$　　(B) $(AB)^k=A^kB^k$

(C) $|AB|=|BA|$ $=|A||B|=|B||A|$　　(D) $B^2-A^2=(B-A)(B+A)$

AB可交换的情况下. ABD ✓

3. 设 $n(n\geq 2)$ 阶方阵 A 可逆，A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，则(C).

$\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow A^*$可逆

$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}$
$=|A|^{n-1}\cdot\frac{A}{|A|}=|A|^{n-2}\cdot A$

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$　　(B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$　　(D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$

回忆: $AA^*=A^*A=|A|E$
$|A|\neq 0$
$\Leftrightarrow \left(\frac{A}{|A|}\right)A^*=A^*\left(\frac{A}{|A|}\right)=E$
$\Rightarrow (A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$

T4. 回忆: 当P,Q可逆时,则有
$R(A)=R(PA)$ 左乘可逆阵
$=R(AQ)$ 右乘
$=R(PAQ)$

4. 设 $A_{m\times n}$，又 C 是 n 阶可逆矩阵，且 $R(A)=r$，$R(AC)=r_1$，则(C).

(A) $r>r_1$　　(B) $r<r_1$　　(C) $r=r_1$　　(D) 以上皆有可能.

5. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么基础解系还可以是(B).

与基础解系等价
与线性无关向量组
一定是基础解系.

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(C) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 齐次方程通解. 只有一个向量, 不是基础解系　　(D) $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_2$ 线性相关

$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$
$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$
可逆 $=C$.

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

T1. $\tau(124659783)=9$
交换位置改变奇偶性.

1. 已知排列 $1246m97n3$ 为奇排列，则 $m=$ 5，$n=$ 8.

2. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，则行列式 $|A^2+3A-E|=$ −81.

3. 设 n 阶方阵 A 的各行元素之和均为零，且 $R(A)=n-1$，则方程组 $Ax=0$ 的通解为 $x=k(1,1,\cdots,1)^T$
$k\in R$

$A=0$.

$3=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$
$\Rightarrow R(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=3$

$A=BC$ — A的列向量可以被B的列向量线性表示
⇓ C可逆
B的列向量可以被A的列向量线性表示

$B=AC^{-1}$ — B…

相互线性表示：等价.

$\tau(2134)=1$

$-2x^3$

4. 设 $D=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 2 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$，则 D 的展开式中 x^3 的系数为 $\underline{-2}$.

行列式中的每一项来自于不同行不同列的元素之积再加上一个符号.

5. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$ 正定，则常数 a 的取值范围为 $\underline{-\frac{\sqrt{14}}{2}<a<\frac{\sqrt{14}}{2}}$.

三、计算下列行列式（每题 8 分，共 16 分）

1.化数字行列式为三角形行列式计算

2.化数字行列式为分块的三角行列式计算

$\begin{vmatrix} A & O \\ B & C \end{vmatrix}$ or $\begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix}$

把数字小的放左上.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$； $=56$

三阶以上的行列式不要用对角线法计算

2. $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

三、四、五、六题型固定

四、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X.

五、（12 分）求向量组

$\vec{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T$，$\vec{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T$，$\vec{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$，$\vec{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^T$，$\vec{\alpha}_5=(2,1,5,10)^T$

的秩和一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示。

六、（12 分）当 a,b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=a \\ x_2+2x_3+2x_4=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4=b \end{cases}$ 无解？有解？并在有解时求其全部解。

七、（15 分）已知二次型

$$f=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+2ax_1x_3-6x_2x_3,\quad (a>0)$$

通过正交变换 $x=Py$ 化成标准形 $f=4y_1^2+9y_2^2$，求

（1）常数 a；

（2）正交变换矩阵 P.

八、（5 分）设 A、B 均为 n 阶方阵，且满足 $AB=A+B$. 证明 $A-E$ 可逆，并求 $(A-E)^{-1}$.