南 京 林 业 大 学 试 卷(A 卷)

课程 线性代数 A　　2016~2017 学年第 1 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1． 下列是奇排列的是（ **B** ）．

(A) 12345　　(B) 14325　　(C) 1432576　　(D) 18432576

2． 五阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中应有一项为（ **C** ）．

(A) $a_{11}a_{23}a_{45}a_{53}a_{44}$　　(B) $a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{54}$

(C) $a_{11}a_{23}a_{35}a_{52}a_{44}$　　(D) $a_{12}a_{23}a_{35}a_{52}a_{44}$

分析：由行列式定义知行列式的每一项必需来自来于不同行与不同列的元素相乘，每一行每一列只能取一个元素，不能多也不能少。

3． 设三阶行列式 $D=\det(a_{ij})=2$，则 $\det(-3a_{ij})=$（ **C** ）．

(A) -6　　(B) 18　　(C) -54　　(D) 9

分析：$\det(-3a_{ij})=(-3)^3\det(a_{ij})=-27\times 2=-54$

4． 设 A 是任一 $n(n\ge 3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵，又常数 $k\neq 0,\pm 1$，则必有 $(kA)^*=$（ **B** ）．

(A) kA^*　　(B) $k^{n-1}A^*$　　(C) k^nA^*　　(D) $k^{-1}A^*$

分析：因为 kA 中的每一个元素的代数余子式为 $k^{n-1}A_{ij}$，所以 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$，故选 B

5． 设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是一组 n 维向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则（ **D** ）．

(A) $R(A)=4$　　(B) $R(A)=n$　　(C) $R(A)=1$　　(D) $R(A)\le 3$

分析：因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\le 2$，从而知 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\le 3$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．若n阶实矩阵A满足$AA^T=E$，则称A为正交矩阵.设A,B都是n阶正交矩阵，若$|A|+|B|=0$，则$|A+B|=$ $\underline{|A+B|=0}$

分析：$|A+B|=|AE+EB|=|AB^TB+AA^TB|=\left|A\left(B^T+A^T\right)B\right|$

$$=|A||B^T+A^T||B|=|A|\left|(B+A)^T\right||B|=|A||A+B|\left(-|A|\right)=-|A|^2|A+B|$$

从而得

$$\left(1+|A|^2\right)|A+B|=0\Rightarrow|A+B|=0$$

2．设$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，则$A$的逆矩阵$A^{-1}=$____________.

分析：记$A_1=5,A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$，则$A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

3．设3阶矩阵A的特征值为$1,-1,2$，则行列式$\left|A^2+3A-E\right|=$_______.

分析：记$f(x)=x^2+3x-1$，所以$f(A)=\mathrm{A}^2+3A-E$，由于A的特征值为$1,-1,2$，所以$f(A)=\mathrm{A}^2+3A-E$的特征值分别为$f(1)=3,f(-1)=-3,f(2)=9$。故

$$\left|A^2+3A-E\right|=f(1)f(-1)f(2)=3\times(-3)\times9=-81$$

4．设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$及$\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_s\eta_s$都是非齐次线性方程组$Ax=b$的解向量，则$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=$ $\underline{\ \ 1\ \ }$.

分析：$\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_s\eta_s$是非齐次线性方程组$Ax=b$的解向量，必有

$$A\left(\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_s\eta_s\right)=b\Rightarrow\lambda_1A\eta_1+\lambda_2A\eta_2+\cdots+\lambda_sA\eta_s=b$$

$$\Rightarrow\lambda_1b+\lambda_2b+\cdots+\lambda_sb=b\quad\Rightarrow\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=1$$

5．若实二次型$f=x^2+4xy+ky^2+z^2$为正定的，则k应满足的条件是$\underline{k>4}$

分析：实二次型 $f=x^2+4xy+ky^2+z^2$为正定的充要条件是各阶顺序主子式都要大于 0，二次型

矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，一阶顺序主子式$|A_1|=1>0,$ 二阶顺序主子式

$$|A_2|=\begin{vmatrix}1&2\\2&k\end{vmatrix}=k-4>0,\ \text{三阶顺序主子式}|A_3|=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&k&0\\0&0&1\end{vmatrix}=k-4>0$$

$\Rightarrow k>4$

三、计算下列行列式（每题 8 分，共 16 分）

1. $\begin{vmatrix}2&-1&3&2\\1&0&-2&1\\3&-4&5&2\\2&0&-3&4\end{vmatrix}$；　　2. $D_n=\begin{vmatrix}x&y&y&\cdots&y\\y&x&y&\cdots&y\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\y&y&y&\cdots&y\\y&y&y&\cdots&x\end{vmatrix}$.

解：（1）$\begin{vmatrix}2&-1&3&2\\1&0&-2&1\\3&-4&5&2\\2&0&-3&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&-2&1\\2&-1&3&2\\3&-4&5&2\\2&0&-3&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&-2&1\\0&-1&7&0\\0&-4&11&-1\\0&0&1&2\end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix}1&0&-2&1\\0&-1&7&0\\0&0&-17&-1\\0&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-2&1\\0&-1&7&0\\0&0&1&2\\0&0&-17&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-2&1\\0&-1&7&0\\0&0&1&2\\0&0&0&33\end{vmatrix}=-33$$

（2）将第一行乘(-1)分别加到其余各行, 得

$$D_n=\begin{vmatrix}x&y&y&\cdots&y\\y-x&x-y&0&\cdots&0\\y-x&0&x-y&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\y-x&0&0&0&x-y\end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-y \end{vmatrix}=\left(x+(n-1)y\right)\left(x-y\right)^{n-1}$$

四、（10 分）已知矩阵 A、B 和 X 满足关系式：$AX=B+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解：$AX=B+2X \Rightarrow \left(A-2E\right)X=B$，而 $A-2E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$是可逆矩阵。所以

$X=\left(A-2E\right)^{-1}B$，故有

$$\left(A-2E,B\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow X=\left(A-2E\right)^{-1}B=\begin{pmatrix} -1 & -10 & -1 \\ -3 & -15 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

五、（12 分）求向量组

$\vec{\alpha}_1=\left(1,0,2,1\right)^T$, $\vec{\alpha}_2=\left(1,2,0,1\right)^T$, $\vec{\alpha}_3=\left(2,1,3,0\right)^T$, $\vec{\alpha}_4=\left(2,5,-1,4\right)^T$, $\vec{\alpha}_5=\left(1,-1,3,-1\right)^T$

的秩和一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示。

解：$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&2&0&6&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个最大线性无关组，且有

$$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3\ ,\quad \alpha_5=0\cdot\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$$

六、（12 分）当a,b取何值时，方程组$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=3\\x_1+2ax_2+x_3=4\\x_1+x_2+bx_3=4\end{cases}$无解？有唯一解？有无穷多解，并在有无穷多解时求其通解。

解：线性方程组的增广矩阵为

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&a&1&3\\1&2a&1&4\\1&1&b&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&a&1&3\\0&a&0&1\\1&1&b&4\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&a&0&1\\0&1&b-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&0&a(b-1)&1-2a\\0&1&b-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&b-1&2\\0&0&a(b-1)&1-2a\end{pmatrix}$$

1）当 a=0 或 b=1，$a\neq\frac{1}{2}$时，线性方程组无解；

2）当$a\neq0,b\neq1$时，线性方程组有唯一的解；

3）当$b=1,a=\frac{1}{2}$时，有

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&a&1&3\\1&2a&1&4\\1&1&b&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故线性方程组有无穷多解，其通解为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\mathrm{k}\in\mathbf{R}$$

七、（15 分）已知二次型: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+4x_1x_3-4x_2x_3$，请用正交变换化此二次型为标准形，并写出相应的正交矩阵。

解：二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$ ，故特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&-1-\lambda&-2\\2&-2&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(3-\lambda)(3+\lambda)=0$$

得到 A 的特征值分别为 $\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$

当 $\lambda_1=0$ 时，解线性方程组 $(A-0\cdot E)x=0$ 得到特征向量为 $\xi_1=(-2,-2,1)^T$

当 $\lambda_2=3$ 时，解线性方程组 $(A-3E)x=0$ 得到特征向量为 $\xi_2=(2,-1,2)^T$

当 $\lambda_1=-3$ 时，解线性方程组 $(A+3E)x=0$ 得到特征向量为 $\xi_3=(-1,2,2)^T$

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是属于不同特征值的特征向量，所以它们是正交向量组，故只要单位化

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{3}(-2,-2,1)^T,\quad \eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{3}(2,-1,2)^T,\quad \eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{3}(-1,2,2)^T$$

故得到正交线性变换 $x=Py$，其中 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$

使得

$$f(x_1,x_2,x_3)=0\cdot y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$$

八、（5 分）设方阵 A 满足方程 $A^2-3A+5E=0$，证明： $A+2E$ 可逆，并求它的逆矩阵。

解：由 $A^2-3A+5E=0$ 得

$$(A+2E)(A-5E)=-15E\Rightarrow(A+2E)\left(-\frac{1}{15}(A-5E)\right)=E$$

所以 $A+2E$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{15}(A-5E)$