高等数学（下）知识点

主要公式总结

第八章 空间解析几何与向量代数

1、 二次曲面

1） 椭圆锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

2） 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 旋转椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

3） 单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

4） 椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ 双曲抛物面（马鞍面）：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$

5） 椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 双曲柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

6） 抛物柱面：$x^2=ay$

（二） 平面及其方程

1、 点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

法向量：$\vec{n}=(A,B,C)$，过点 (x_0,y_0,z_0)

2、 一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$

截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

3、 两平面的夹角：$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

$\Pi_1\perp\Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ ； $\Pi_1 /\!/ \Pi_2 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}}$

4、 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

高等数学（下）知识点

（三） 空间直线及其方程

1、 一般式方程：$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

2、 对称式（点向式）方程：$\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$

$\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}.$

方向向量：$\vec{s} = (m,n,p)$，过点 (x_0, y_0, z_0)

3、 两直线的夹角：$\vec{s}_1 = (m_1,n_1,p_1)$，$\vec{s}_2 = (m_2,n_2,p_2)$，

$$\cos\varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ ； $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$

4、 直线与平面的夹角：直线与它在平面上的投影的夹角，

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$L // \Pi \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$ ； $L \perp \Pi \Leftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

第九章 多元函数微分法及其应用

1、 连续：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

2、 偏导数：

$f_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ ； $f_y(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

3、 方向导数：

$\dfrac{\partial f}{\partial l} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$ 其中 α, β 为 l 的方向角。

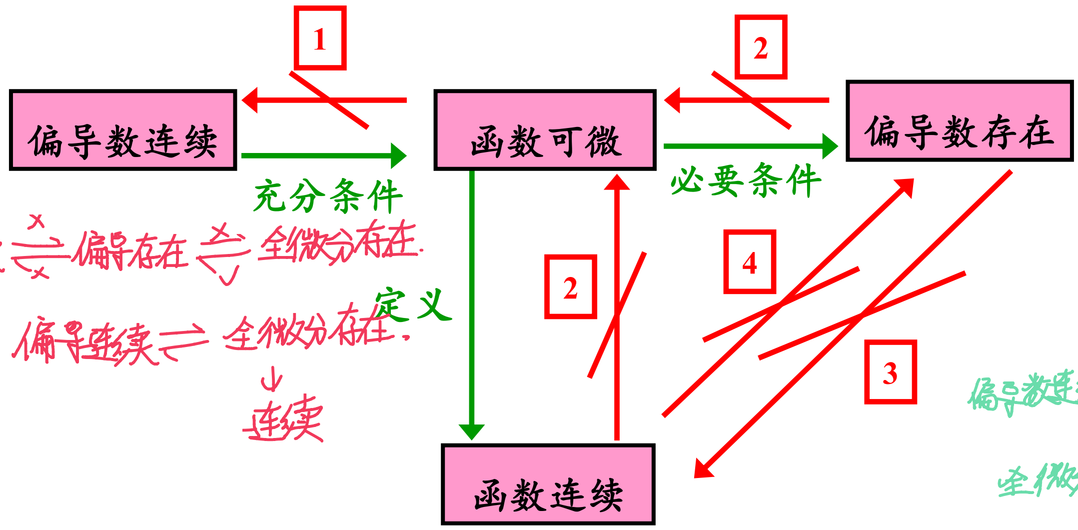
4、 梯度：$z = f(x,y)$，则 $gradf(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0)\vec{j}$。

5、 全微分：设 $z = f(x,y)$，则 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

（一） 性质

1、 函数可微，偏导连续，偏导存在，函数连续等概念之间的关系：

高等数学（下）知识点



连续 $\overset{\times}{\rightleftharpoons}$ 偏导存在 $\overset{\times}{\rightleftharpoons}$ 全微分存在.

偏导连续 ⇌ 全微分存在.

↓

连续

连续 $\overset{\times}{\rightleftharpoons}$ 偏导存在 $\overset{\times}{\rightleftharpoons}$ 全微分.

偏导连续 ⇌ 全微分存在.

↓

连续!

偏导数连续 ⇌ 全微分存在.

↓

连续.

全微分存在 → 偏导存在.

↓ 连续存在

2、　　微分法

1）　　复合函数求导：链式法则

若 $z=f(u,v), u=u(x,y), v=v(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

z — u, v — x, y

（二）　应用

f_{xx}　f_{yy}　f_{xy}

1）　　求函数 $z=f(x,y)$ 的极值　　解方程组 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ 求出所有驻点，对于每一个驻点 (x_0,y_0)，令

$A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，

$AC-B^2>0$　$A<0$　极大值

$AC-B^2>0$　$A>0$　极小值.

$AC-B^2<0$　函数没有极值.

$AC-B^2=0$ 不定.

① 若 $AC-B^2>0$，$A>0$，函数有极小值，　若 $AC-B^2>0$，$A<0$，函数有极大值；

② 若 $AC-B^2<0$，函数没有极值；

③ 若 $AC-B^2=0$，不定。

$AC-B^2>0$　$A>0$　极小值.

$AC-B^2>0$　$A<0$　极大值.

$AC-B^2<0$　函数没有极值.

$AC-B^2=0$.

2、　　几何应用

1）　　曲线的切线与法平面

曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，则 Γ 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$（对应参数为 t_0）处的

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$

法平面方程为：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

2） 曲面的切平面与法线

曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$，则 Σ 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为：$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

第十章 重积分

（一） 二重积分 ：几何意义：曲顶柱体的体积

1、 定义：$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

2、 计算：

1） 直角坐标

$$D=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{matrix}\right\},\quad \iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)\,dy$$

$$D=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}\phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\\ c\le y\le d\end{matrix}\right\},\quad \iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)\,dx$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\cdot d\rho.$$

2） 极坐标

$$D=\left\{(\rho,\theta)\middle|\begin{matrix}\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{matrix}\right\}\quad \iint_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho$$

（二） 三重积分

1、 定义：$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$$

2、 计算：

1） 直角坐标

$$\iint_D dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz.$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\iint_D dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz$$ ------------- “先一后二”

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\int_a^b dz\iint_{D_z}f(x,y,z)\,dx\,dy.$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\int_a^b dz\iint_{D_z}f(x,y,z)\,dx\,dy$$ ------------- “先二后一”

2） 柱面坐标

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases},\quad \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\iiint_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv=\iiint_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

3） 球面坐标

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$r^2\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_\Omega f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi) r^2\sin\phi \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

$r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$

（三） 应用

曲面 $S: z = f(x,y), (x,y)\in D$ 的面积：

$$A = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$A = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$

第十一章 曲线积分与曲面积分

（一） 对弧长的曲线积分

1、 定义：$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$

2、 计算：

设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} (\alpha\le t\le\beta)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\phi(t),\psi(t)]\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t \quad, \quad (\alpha<\beta)$$

（二） 对坐标的曲线积分

1、 定义：设 L 为 xoy 面内从 A 到 B 的一条有向光滑弧，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上有界，定义

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k, \quad \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k .$$

向量形式：$\int_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

2、 计算：

设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为

$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} (t:\alpha\to\beta)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \{P[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t) + Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

高等数学（下）知识点

3、两类曲线积分之间的关系：

设平面有向曲线弧为 L：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$L$ 上点 (x,y) 处的切向量的方向角为：α,β，

$\cos\alpha=\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$，$\cos\beta=\dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$，

则 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s$.

（三）格林公式

1、格林公式：设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数，

则有 $\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

2、G 为一个单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 G 上具有连续一阶偏导数，

则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ $\Leftrightarrow$ 曲线积分 $\int\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关

（四）对面积的曲面积分

1、定义：

设 Σ 为光滑曲面，函数 $f(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数，

定义 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2、计算：——"一单二投三代入"

$\Sigma: z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（五）对坐标的曲面积分

1、定义：

设 Σ 为有向光滑曲面，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的有界函数，定义

$\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$ 同理，

$\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$ ；$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$

2、　性质：

1）$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，则

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

计算：——“一投二代三定号”

$\Sigma: z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$，$z=z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，$R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为上侧取“＋”，Σ 为下侧取“－”.

3、　两类曲面积分之间的关系：

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中 α,β,γ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向角。

（六）　高斯公式

1、　高斯公式：设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，Σ 的方向取外侧，函数 P,Q,R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或 $$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

2、　通量与散度

通量：向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 通过曲面 Σ 指定侧的通量为：$\Phi=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

散度：$div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

（七）　斯托克斯公式

1、　斯托克斯公式：设光滑曲面 Σ 的边界 Γ 是分段光滑曲线，Σ 的侧与 Γ 的正向符合右手法则，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在包含 Σ 在内的一个空间域内具有连续一阶偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

为便于记忆，斯托克斯公式还可写作：

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

2、 环流量与旋度

环流量：向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 沿着有向闭曲线Γ的环流量为 $\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$

旋度：$rot\ \vec{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$

第十二章 无穷级数

（一） 常数项级数

1、 定义：

1）无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\cdots$

部分和：$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$，

正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n\ge 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n\geqslant 0$

交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，$u_n\ge 0$

2）级数收敛：若 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ 存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，否则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

3）条件收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散；

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛

绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛。

2、 性质：

1） 改变有限项不影响级数的收敛性；

2） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 收敛；

3） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则任意加括号后仍然收敛；

4） 必要条件：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=0$．（注意：不是充分条件！）

3、 审敛法

正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n\ge 0$

高等数学（下）知识点

1） 定义：$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在；

2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$有界；

3） 比较审敛法：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，且$u_n \le v_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$

大收小收

小发大发·

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

4） 比较法的推论：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，若存在正整数 m，当 $n>m$ 时，$u_n \le kv_n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若存在正整数 m，当 $n>m$ 时，$u_n \ge kv_n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

5） 比较法的极限形式：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = l$ $(0 \le l < +\infty)$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} > 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

6） 比值法：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则当$l<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；则当$l>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；当$l=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

7） 根值法：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，设$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$，则当$l<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；则当$l>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；当$l=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

8） 极限审敛法：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，若$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot u_n > 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot u_n = +\infty$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；若存在$p>1$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} n^p\cdot u_n = l$ $(0 \le l < +\infty)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

交错级数：

莱布尼茨审敛法：交错级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，$u_n \ge 0$ 满足：① $u_{n+1} \le u_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，② 且$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛。

① $|u_n| \geq |u_{n+1}|$ $(-1)^n u_n.$

② $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

任意项级数：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$、 $|q|<1$ 收敛 $|q|\ge 1$ 发散

高等数学（下）知识点

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases}\text{收敛} & p>1\\ \text{发散} & p\le 1\end{cases}$

常见典型级数：几何级数：$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases}\text{收敛}, & |q|<1\\ \text{发散}, & |q|\ge 1\end{cases}$ ； p -级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1\\ \text{发散}, & p\le 1\end{cases}$

（二） 函数项级数

1、 定义：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，收敛域，收敛半径，和函数；

2、 幂级数：$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

3、 收敛半径的求法：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则收敛半径 $R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ 0, & \boxed{\rho=+\infty}\\ +\infty, & \rho=0\end{cases}$

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}.\ x\in(-\infty,+\infty).$

4、 泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$$

展开步骤：（直接展开法）

1） 求出 $f^{(n)}(x),\quad n=1,2,3,\cdots$；

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}.\ x\in(-\infty,+\infty).$

2） 求出 $f^{(n)}(x_0),\quad n=0,1,2,\cdots$；

3） 写出 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$；

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,\ x\in(-\infty,+\infty).$

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}.\ x\in(-\infty,+\infty).$

4） 验证 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$ 是否成立。

间接展开法：（利用已知函数的展开式）

1） $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$

2） $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in(-\infty,+\infty).$

3） $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ x\in(-1,1).$

4） $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,\ 1)$；

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1)$

$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^{n+1},\ x\in(-1,1]$

5） $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad x\in(-1,\ 1)$

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1,1).$

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ x\in(-1,1)$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x},\ x\in(-1,1).$

6） $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-1,\ 1]$

$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}.$

7） $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,\ 1)$

8） $(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,\quad x\in(-1,\ 1)$

$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-1,1).$

5、 傅里叶级数

1） 定义：

正交系：$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx\cdots$ 函数系中任何不同的两个函数的乘积在区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上积分为零。

傅里叶级数：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

系数：
$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,\ 2,\ 3,\cdots) \end{cases}$$

2） 收敛定理：（展开定理）

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，并满足狄利克雷（ Dirichlet ）条件：

1） 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；

2） 在一个周期内只有有限个极值点，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\overset{\text{收敛}}{=}\begin{cases} f(x), & x\text{为连续点} \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为间断点} \end{cases}$$

3） 傅里叶展开：

①求出系数：
$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,\ 2,\ 3,\cdots) \end{cases};$$

②写出傅里叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$；

③根据收敛定理判定收敛性。