南京林业大学试卷(A 卷)（答案）

课程 概率统计 B　　　　2021~2022 学年第 2 学期

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

姓名

班号

学号

一. 单项选择题（每题 4 分，共 40 分）

1. 设A,B,C是三个事件,则$\overline{A\cup B\cup C}$表示 (B)

(A)至少有一个事件发生　　(B)三个事件都不发生

(C)至多有一个事件发生　　(D)恰有一个事件发生

2. 设A，B为随机事件，若$P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=1$，则$P(A\overline{B})=$ (B)

(A) 0.2　(B) 0.3　(C) 0.1　(D) 0.15

3. 袋中有10个球，其中有4个黑球3个白球和3个红球，现将袋中球一一摸出来，则第二次摸到的是黑球的概率为(B)

(A) 0.5　(B) 0.4　(C) 0.3　(D) 0.2

4. 下列各函数是某随机变量的分布函数的是：（ C ）

（A）$F(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　　（B）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$, 且$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1$

（C）$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$　　（D）$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.5, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$

5. 在四次独立重复试验中，事件A至少发生一次的概率为$\dfrac{65}{81}$,则事件A在每次试验中发生的概率为(C)

(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

6. 设X与Y相互独立，分布律为

X	0	1
p	0.3	0.7

，

Y	0	1
p	0.3	0.7

则必有（ C ）

(A) $X=Y$　(B) $P(X=Y)=1$　(C) $P(X=Y)=0.58$　(D) $P(X=Y)=0$

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$是分别来自总体$X\sim N(\mu,1)$和$Y\sim N(\mu,2^2)$的简单随机样本，μ 的一个无偏估计有形式$T=a\sum_{i=1}^{n}X_i+b\sum_{j=1}^{m}Y_j$，则当$a$、$b$为 (D) 时，$T=a\sum_{i=1}^{n}X_i+b\sum_{j=1}^{m}Y_j$ 最有效。

(A) $a=\dfrac{1}{m+4n},b=\dfrac{1}{m+4n}$　　(B) $a=\dfrac{1}{m+4n},b=\dfrac{4}{m+4n}$

(C) $a=\frac{4-mn}{4n}, b=\frac{n}{4}$ (D) $a=\frac{4}{m+4n}, b=\frac{1}{m+4n}$

8. 设随机变量 X，Y，已知$\rho_{XY}=0$，则下列不成立的是（ C ）

（A）$Cov(X，Y)=0$ （B）$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$

（C）X与Y相互独立 （D）$E(XY)=E(X)E(Y)$

9. 设$X_1, X_2,\cdots, X_n$为来自正态分布总体$X\sim N(0,1)$ 的随机样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$，则（$C$ ）

（A）$\bar{X}\sim N(0,1)$ （B）$n\bar{X}\sim N(0,1)$ (C) $\sqrt{n}\cdot\bar{X}/S\sim t(n-1)$ （D）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-1)$

10. 设X_1，$X_2,\cdots X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，σ^2已知，则μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为（C ）

(A) $\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right)$ (B) $\left(\bar{X}-\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}u_\alpha, \bar{X}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}u_\alpha\right)$

(C) $\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ (D) $\left(\bar{X}-\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

二. 计算题：（本大题有 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. 仓库中有 10 箱同种产品，其中甲、乙、丙三个厂生产了其中的 5、3、2 箱，三厂的次品率分别为 0.1，0.3，0.4，从 10 箱产品中任取一箱，从该箱中任取一件进行检验，结果发现是该件产品为次品，问该箱产品最可能是哪个厂家生产？

解：设$A_i\,(i=1,2,3)$分别表示甲、乙、丙厂生产的产品，B表示产品为次品，则

$P(A_1)=0.5, P(A_2)=0.3, P(A_3)=0.2$，$P(B|A_1)=0.1, P(B|A_2)=0.3$，$P(B|A_3)=0.4$

$\therefore P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}=\frac{5}{22}$， $P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}=\frac{9}{22}$

$P(A_3|B)=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}=\frac{8}{22}$ ……………6分

由于$P(A_2|B)$最大，所以最可能是乙厂生产。 ……………8分

2. 设对某校大一学生的数学成绩进行调查，其结果X近似服从正态分布，且$X\sim N(75,100)$，依此计算:(1)成绩超过85分的学生占该年级的比例；(2)成绩低于60分的学生占该年级的比例。

下表为标准正态分布表，$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

X	1	1.5	2	2.5	3
$\Phi(x)$	0.8413	0.9332	0.9772	0.9938	0.9987

解:(1) $P(X>85)=1-P(X\le 85)$

$$=1-\Phi(\frac{85-75}{10})=1-\Phi(1)=0.1587 \cdots\cdots 4分$$

(2) $P(X<60)=\Phi(\frac{60-75}{10})=\Phi(-1.5)=1-\Phi(1.5)=0.0668 \cdots\cdots 8分$

3. 设一盒中有5个纪念章，编号为1,2,3,4,5，在其中等可能的任取3个，用X表示取出的3个纪念章上的最大号码，求随机变量X的分布律及数学期望$E(X)$。

解：X的所有可能取值为3,4,5，且

$P(X=3)=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$, $P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$， ……4分

$\therefore X$的分布律为：

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

$\therefore E(X)=3\times 0.1+4\times 0.3+5\times 0.6=4.5$ ……8分

4. 设随机变量X的概率密度函数为：$f(x)=ke^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$

求：(1) 常数k；(2) $P(0\le X\le 1)$；(3) X的分布函数$F(x)$。

解:(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} ke^{x}dx+\int_{0}^{+\infty} ke^{-x}dx=1 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$ ……………2分

(2) $P(0\le X\le 1)=\int_0^1 \frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1})=\frac{e-1}{2e}$ ……………5分

(3) i)当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$

ii)当$x\ge 0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_0^x \frac{1}{2}e^{-t}dt=1-\frac{1}{2}e^{-x}$

$$\therefore\ F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0\end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8分$$

5. 设随机变量(X,Y)的联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}kx^2y^3 & ,0<x<1,0<y<1,\\ 0 & ,其他\end{cases}$

求:(1) $P(0<X\le\frac{1}{2},0<Y\le 1)$;(2)判断$X$、$Y$的独立性;(3) $E(X)$。

解:(1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy=1 \quad \therefore \int_0^1 dx\int_0^1 kx^2y^3dy=1 \Rightarrow k=12$

$\therefore P(0<X\le\frac{1}{2},0<Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^1 f(x,y)dy=12\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^1 x^2y^3dy=\frac{1}{8}$ ……3分

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1 12x^2y^3dy=3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

同理 $f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 12x^2y^3dx=4y^3, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$\because f_X(x)\times f_Y(x)=p(x,y) \quad \therefore X$与$Y$独立 ……6分

(3) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 12x^3y^3dy=\dfrac{3}{4}$ ……8分

三. 应用题：（本大题有 2 小题，第 1 题 12 分，第 2 题 8 分，共 20 分）

1. 设总体X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0 \quad, & 其他.\end{cases}$其中，$\theta>-1$是未知参数，$X_1$，$X_2,\cdots X_n$是来自总体$X$的样本，分别用矩法和最大似然估计法求$\theta$的估计量。

解:(1). $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$

由$E(X)=\overline{X}$ 得$\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$

故矩法估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$ ……6分

(2). θ的似然函数为$L(\theta)=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta}\quad(0<x_i<1)$

$\therefore\ \ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，得$\theta=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

故θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$ ……12分

2. 往年某地小麦良种千粒重为33克，今年气候干旱，为了解是否受到影响，在该地9个种植小区抽取了样本，计算出千粒重的平均值为$\bar{x}=30.8$克，修正样本标准差 $s=\sqrt{\dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2}=1.65$克，若千粒重服从正态分布，问今年的千粒重是否与往年的千粒重有明显变化？ (显著性水平$\alpha=0.05$)

($t_{0.05}(9)=1.833$，$t_{0.05}(8)=1.860$, $t_{0.025}(9)=2.622$，$t_{0.025}(8)=2.3060$，$z_{0.05}=1.64$, $z_{0.025}=1.96$)

解：检验问题(H_0,H_1)为：H_0：$\mu=33\leftrightarrow H_1$：$\mu\neq 33$,

由于σ^2未知，用T 检验法，拒绝域为：

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)\,|\left|\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$ ………4分

将$n=9$，$t_{0.025}(8)=2.306$代入检验统计量得

$$|T|=\left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{30.8-33}{1.65/3}\right|=4>2.306$$

所以在显著水平$\alpha=0.05$下，应拒绝H_0，即今年的千粒重与往年的千粒重有明显变化！

………8分