线代A练习四参考答案

一、选择题（每小题5分，共25分。）

1、已知四阶行列式D_4第一行的元素依次为1，2，－1，－1，它们的余子式为2，-2，1，0，则D_4的值为（ D ）

（A）-3；（B）-5；（C）3；（D） 5.

2、已知n阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 0 & 1 & . & . & 1 \\ . & & 1 & & \\ . & & & & .. \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$，则$|A|$的所有元素的代数余子式之和等于（ B ）

（A）0；（B）1；（C）-1；（D）2.

3、设A是$m\times n$矩阵，C是n阶可逆矩阵，矩阵A的秩为r，矩阵$B=AC$的秩r_1，则（ C ）

（A）$r>r_1$；（B）$r<r_1$；（C）$r=r_1$；（D）r与r_1的关系依C而定.

4、设A为$m\times n$矩阵，齐次线性方程组$Ax=0$仅有零解的充分必要条件是（ A ）

（A）A的列向量组线性无关；（B）A的列向量组线性相关；

（C）A的行向量组线性无关；（D）A的行向量组线性相关.

5、设λ是n阶可逆矩阵A的特征值，ξ是A的对应于λ的特征向量，P是n阶可逆矩阵，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*$的对应于特征值$\frac{|A|}{\lambda}$的特征向量是（ A ）

（A）$P^{-1}\xi$；（B）$P\xi$；（C）$P^T\xi$；（D）$(P^T)^{-1}\xi$.

二、填空题（每小题5分，共25分。）

1、设A,B都是n阶正交矩阵，若$|A|+|B|=0$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$___**0**____.

2、已知$AB-B=A$，其中$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

3、已知向量组a_1,a_2,a_3,a_4.线性无关，若向量组$a_1+ka_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4+a_1$线性相关，则$\boldsymbol{k}=$___**1**____.

4、若线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=2b \end{cases}$无解，则常数$a,b$应满足的条件是

$\underline{a=-8}$且$\underline{b\neq 1}$.

5、若 4 阶矩阵A与B相似，且A的特征值为 1，2，3，4，则矩阵$B^{*}-E$的全部特征值为 $\underline{\ 23,\quad 11,\quad 7,\quad 5\ }$ 。

三、计算证明题（50 分）

1、（12 分）求向量组$a_1=(1,3,0,5),a_2=(1,2,1,4),a_3=(1,1,2,3),a_4=(1,-3,6,-1)$的一个极大线性无关组和秩，并将不在极大无关组里的向量用极大无关线性表示。

解：设$A=(a_1{}^T,a_2{}^T,a_3{}^T,a_4{}^T)$，用初等行变换将$A$化为行阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&2&1&-3\\0&1&2&6\\5&4&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-6\\0&1&2&6\\0&-1&-2&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}&\mathbf{-5}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{6}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$ （6 分）

易知，a_1,a_2为向量组a_1,a_2,a_3,a_4的一个极大线性无关组，它的秩为 2.　（4 分）

且有　$\boldsymbol{a_3=-a_1+2a_2}$，$\boldsymbol{a_4=-5a_1+6a_2}$　（2 分）

2、(15 分)设A为三阶实对称矩阵，且满足条件$A^2+2A=0$，已知A的秩$\boldsymbol{R(A)=2}$

(1)求A的全部特征值；

(2)当k为何值时，矩阵$A+kE$为正定矩阵，其中E为三阶单位矩阵.

解：(1)设λ为A的一个特征值，对应的特征向量为ξ，即$A\xi=\lambda\xi$于是

$(A^2+2A)\xi=(\lambda^2+2\lambda)\xi$，由于$A^2+2A=0$，可知$\lambda^2+2\lambda=0$，解得$\lambda=-2,\lambda=0$。

（5 分）

因为实对称矩阵A必可对角化，又$\boldsymbol{R(A)=2}$，

所以 A 应对角矩$\begin{pmatrix}-2&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}$相似.　（2 分）

因此的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.　（2 分）

(2)矩阵$A+kE$为实对称矩阵，其特征值为$-2+k,-2+k,k$，（4 分）

于是当$k>2$时，矩阵$A+kE$的特征值都为正数，因此$A+kE$为正定矩阵.（2 分）

3、(15 分) 已知二次型 $f=2x_1{}^2+3x_2{}^2+3x_3{}^2+2ax_2x_3\,(a>0)$ 通过正交变换可化为标准形 $f=y_1{}^2+2y_2{}^2+5y_3{}^2$，求参数 a 及所用的正交变换.

解：二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$ （2 分）

设所求的正交矩阵为 Q，则 $Q^TAQ=\Lambda$

即 $$Q^T\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix},$$

两边取行列式， 有 $\left|Q^T\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}Q\right|=2(9-a^2)=10$ （2 分）

即 $2(9-a^2)=10$，解得 $a=2(>0)$ 又因为 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$，故

当 $\lambda=1$ 时，解方程组 $(E-A)X=0$ 得特征向量 $a_1=(0,1,-1)^T$ （2 分）

当 $\lambda=2$ 时，解方程组 $(2E-A)X=0$ 得特征向量 $a_2=(1,0,0)^T$ （2 分）

当 $\lambda=5$ 时，解方程组 $(5E-A)X=0$ 得特征向量 $a_2=(0,1,1)^T$ （2 分）

显然 a_1， a_2， a_3 是正交向量组，将它们单位化后得:

$$\beta_1=\frac{a_1}{\|a_1\|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix};\ \beta_2=\frac{a_2}{\|a_2\|}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ \beta_3=\frac{a_3}{\|a_3\|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}.$$ （2 分）

故所求的正交矩阵为 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$. （1 分）

4、(8 分) 设 A 是 n 阶矩阵，且满足 $A^2=E$，证明: $\boldsymbol{R(A-E)+R(A+E)=n}$.

证明：由题设 $A^2=E$ 得 $(E-A)(E+A)=0$, 于是有

$$\boldsymbol{R(E-A)+R(E+A)\le n}$$ （4 分）

由 $(E-A)+(E+A)=2E$，可知

$$n=r(E)=r(2E)\le r(E-A)+r(E+A)，$$ （3 分）

综上得 $r(E-A)+r(E+A)=n$. （1 分）