南京林业大学试卷(B 卷)（答案）

课程 线性代数 A　　　　2018~2019 学年第 1 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

姓名　　　　班号　　　　学号

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 排列 $13\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots2$ 的逆序数是（ B ）.

(A) n^2　　(B) $n(n-1)$　　(C) $n(n+1)$　　(D) $n!$

2. 五阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中应有一项为（ C ）.

(A) $a_{11}a_{23}a_{45}a_{53}a_{44}$　　(B) $a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{54}$

(C) $a_{11}a_{23}a_{35}a_{52}a_{44}$　　(D) $a_{12}a_{23}a_{35}a_{52}a_{44}$

3. 设 A 是任一 $n(n\geq3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵，又常数 $k\neq0,\pm1$，则必有 $(kA)^*=$（ B ）.

(A) kA^*　　(B) $k^{n-1}A^*$　　(C) k^nA^*　　(D) $k^{-1}A^*$

4. 设 A 为 3 阶方阵，$R(A)=1$，则（ D ）.

(A) $R(A^*)=3$　　(B) $R(A^*)=2$

(C) $R(A^*)=1$　　(D) $R(A^*)=0$

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性无关的是（ C ）.

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

(C) $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $A=(1,2,3)$，$B=(-1,1,0)$，则 $(A^TB)^2=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\-3&3&0\end{pmatrix}$.

2．若三阶方阵 A 有特征值 $1，2，-1$，则行列式 $\left|A^*+3A+2E\right|=$ $\underline{21}$.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 $t=$ $\underline{\ -3\ }$.

4. 设 $D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $-A_{11}+3A_{12}+A_{13}+3A_{14}=$ $\underline{\ 0\ }$.

5. 若实二次型 $f=x^2+4xy+ky^2+z^2$ 为正定的，则 k 应满足的条件是 $\underline{k>4}$.

三、计算下列行列式（每题 8 分，共 16 分）

1. $\begin{vmatrix}3&2&5&1\\2&0&6&2\\-1&-1&-2&0\\3&2&0&4\end{vmatrix}$；　　2. $D_n=\begin{vmatrix}b&a&\cdots&a\\a&b&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&a&\cdots&b\end{vmatrix}$.

解：1. $\begin{vmatrix}3&2&5&1\\2&0&6&2\\-1&-1&-2&0\\3&2&0&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&2&5&1\\1&0&3&1\\-1&-1&-2&0\\3&2&0&4\end{vmatrix}=12.$　　（4 分,8 分）

2. $D_n=\begin{vmatrix}b&a&\cdots&a\\a&b&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&a&\cdots&b\end{vmatrix}=\left[b+(n-1)a\right]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&b&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&a&\cdots&b\end{vmatrix}=\left[b+(n-1)a\right](b-a)^{n-1}.$

（4 分，8 分）

四、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*XA=2XA-8E$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X.

解：由 $A^*XA=2XA-8E$，左乘 A 整理得 $AA^*XA=2AXA-8A$，　　（4 分）

又 $|A|=-2\neq 0$，用 A^{-1} 右乘上式，得 $\left|A\right|X=2AX-8E\Rightarrow(A+E)X=4E.$　　（8 分）

所以 $$X=4(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$　　（10 分）

五、（12 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\1&1&0&1\\0&0&1&-1\\2&-1&3&2\end{pmatrix}$.

（1）求行最简形矩阵 B 及可逆矩阵 P 使得 $PA=B$；

（2）求 A 的列向量组的一个最大无关组，并用此最大无关组线性表示其余向量.

解:（1）由 $(A,E)\sim(B,P)$ 即得

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\1&-\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$ （3 分，6 分）

（2）A 的列向量组的一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.（8 分，10 分，12 分）

六、（12 分）当 λ 取何值时，非齐次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1,\\(2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1,\\(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda,\end{cases}$ 有无穷多解，并求其通解.

解：对增广矩阵施行初等行变换

$$B=\begin{pmatrix}1&1&2-\lambda&1\\2-\lambda&2-\lambda&1&1\\3-2\lambda&2-\lambda&1&\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2-\lambda&1\\0&\lambda-1&-(\lambda-1)(2\lambda-5)&3(\lambda-1)\\0&0&-(\lambda-1)(\lambda-3)&\lambda-1\end{pmatrix},$$ （6 分）

则当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解.（8 分）

一特解为 $\eta=(1,0,0)^T$，对应齐次方程组的基础解系为

$\alpha_1=(-1,0,1)^T$, $\alpha_2=(-1,1,0)^T$,（10 分）

于是通解为 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\eta,\ k_1,k_2\in\mathbb{R}$.（12 分）

七、（15 分）已知二次型

$$f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2+2ax_2x_3,\ (a<0)$$

通过正交变换 $x=Py$ 化成标准形 $f=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$，求

（1）常数 a；

（2）正交变换矩阵 P.

解：（1）二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$，（2 分）

由 $|A|=-8$，解得 $a=-2$；（4 分）

（2）又 A 的特征值为 $\lambda_1=-2, \lambda_2=1, \lambda_3=4,$（7 分）

$\lambda_1=-2$ 时，解 $(A+2E)x=0$ 得

A 的属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的单位特征向量 $\eta_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^T$，（9 分）

$\lambda_2=1$ 时，解 $(A-E)x=0$ 得

A 的属于特征值 $\lambda_2=1$ 的单位特征向量 $\eta_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)^T$，（11 分）

$\lambda_3=4$，解 $(A-4E)x=0$ 得

A 的属于特征值 $\lambda_2=4$ 的单位特征向量 $\eta_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^T$.（13 分）

即可得到所求的正交矩阵

$$P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$（15 分）

八、（5 分）设方阵 A 满足方程 $A^2+A-6E=O$，证明 $A+4E$ 可逆，并求其逆矩阵.

证明：$(A+4E)(A-3E)=-6E$，即 $A+4E$ 可逆，（3 分）

$$(A+4E)^{-1}=-\frac{A-3E}{6}.$$（5 分）