南京林业大学试卷B(A卷)（参考答案）

课程 概率统计B　　2015~2016 学年第 2 学期

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

姓名

班号

学号

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．若 A，B 是随机事件，则以下结论正确的是（ B ）.

$(A)\ P(B\cup A)=P(A)$　　$(B)\ P(BA)=P(A)$

$(C)\ P(AB)=P(B)$　　$(D)\ P(A-B)=P(A)-P(B)$

2．设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=a\left(\frac{1}{2}\right)^2,(k=1,2,\cdots)$，则 $a=$（ B ）.

$(A)\ 0.5$　　$(B)\ 1$　　$(C)\ 2$　　$(D)\ -1$

3．设随机变量 (X,Y)，且方差 $D(X)=25, D(Y)=36,$ 相关系数 $\rho_{XY}=0.4$，

则 $D(3X-2Y)=$（ C ）.

$(A)\ 40$　　$(B)\ 85$　　$(C)\ 37$　　$(D)\ 61$

4．设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(0,1)$，$\bar{X},S^2$ 分别是样本的均值和样本方差，则下列不正确的是（ D ）

（A）$\bar{X}\sim N(0,1)$　　（B）$n\bar{X}\sim N(0,1)$

（C）$\frac{\bar{X}}{S}\sim t(n-1)$　　（D）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$

5．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 μ 和 σ^2 未知，若样本容量为 n，且分位点均指定为“上侧分位点”时，

则 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为（ B ）.

$(A)\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)}\right)$　　$(B)\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$

$(C)\left(\frac{(n-1)S^2}{t^2_{0.025}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{t^2_{0.975}(n-1)}\right)$　　$(D)\left(\bar{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)$

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1．设 A，B 为随机事件且互不相容，且 $P(A\cup B)=0.8, P(A)=0.2,$ 是 $P(B)=$ 0.6

2．已知 5 只黄色小鸡和 4 只黑色小鸡，随机地从中取出 2 只，则取出的小鸡颜色相同的概率为 $\underline{\dfrac{4}{9}}$（用数字作答）。

3．设 $E(X)=\mu, D(\mathrm{X})=\sigma^2$，则应用切比雪夫不等式得 $P\left(|X-\mu|\geq 3\sigma\right)\leq \underline{\dfrac{1}{9}}$

4、设 X_1, X_2, X_3 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,1)$ 的样本，则当 $a=\underline{\ 2\ }$ 时，$\hat{\mu}=X_1-aX_2+2X_3$ 是总体均值 μ 的无偏估计。

5、 设 $X\sim \mathrm{N}(2,\sigma^2)$，且 $P(2<X<4)=0.3$，则 $P(X<0)=\underline{\ 0.2\ }$

三、（12 分）在秋菜运输中，某汽车可能到甲、乙、丙三地去拉菜，设到此三处拉菜的概率分别为 $0.2, 0.5, 0.3$ 而在各处拉到一级菜的概率分别为 $0.1, 0.3, 0.7$

（1）求汽车拉到一级菜的概率；

（2）已知汽车拉到一级菜，求该车菜是乙地拉来的概率。

解：

四、（12 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x, & |x|\leq\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，试求：（1）$P\left(-\dfrac{\pi}{4}<X<\dfrac{\pi}{4}\right)$；（2）$X$ 的分布函数；（3）$Y=2X+\pi$ 的概率密度函数.

解：（1）$P\left(-\dfrac{\pi}{4}<X<\dfrac{\pi}{4}\right)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}\cos x dx=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}0, x<-\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin x, -\dfrac{\pi}{2}\leq x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1, x\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，

（3）$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2X+\pi\leq y)=P\left(X\leq\dfrac{y-\pi}{2}\right)=F_X\left(\dfrac{y-\pi}{2}\right)$

$$f_Y(\mathrm{y})=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y-\pi}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{y}{2}\right), 0\leq y\leq 2\pi\\ 0, other\end{cases}$$

五、（12 分）设二维随机变量（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, 0<|x|<1, |y|<x \\ 0, \quad other\end{cases}$$

（1）求随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度；（2）求 $P\left(X<\frac{1}{2}, Y>0\right)$；

（3）问 X 和 Y 是否相互独立？

解：（1）边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x} 1dy, 0<x<1 \\ 0, \quad other\end{cases}=\begin{cases}2x, 0<x<1 \\ 0, \quad other\end{cases}$$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}1+y, -1<y<0 \\ 1-y, 0<y<1 \\ 0, \quad other\end{cases}$$

（2）$P\left(X<\frac{1}{2}, Y>0\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^x 1dy=\frac{1}{8}$

（3）　因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不是相互独立的。

六、（12 分）设二维随机变量（X，Y）的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{other}\end{cases}$

求（1）$E(X), E(Y)$；（2）$Cov(X,Y)$；（3）ρ_{XY}.

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_x^1 6x^2dy=\frac{1}{2}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_x^1 6xydy=\frac{3}{4}$$

（2）$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_x^1 6x^2ydy=\frac{2}{5}$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{40}$$

（3）$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_x^1 6x^3dy=\frac{3}{10}$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} y^2f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_x^1 6xy^2dy=\frac{3}{5}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}\ ,\ D(Y^2)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

七、（12 分）设某总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $,\theta>-1$ 为未知参数. 且 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自总体的一个样本，试求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

解：（1）求矩估计量：由 $E(X)=\frac{1+\theta}{2+\theta}=\bar{X}$ 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$

（2）求最大似然估计量：似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}，\ \ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

八、（10 分）电工器材厂生产一种云母带，其厚度服从正态分布，且平均厚度经常保持为 0.13mm，某日开工后检验 10 处的厚度，算出平均值为 0.146mm，样本标准差为 0.015mm，问该日云母带的厚度的均值与 0.13mm 有无显著差异？显著性水平 $\alpha=0.02$ （$z_{0.01}=2.33$，$t_{0.01}(9)=2.82, t_{0.01}(10)=2.76$）

解：检验假设：$H_0:\mu=0.13$，$H_1:\mu\neq0.13$.

因 σ 未知，采用 t 检验法，选择统计量为 $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(9)$.

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{0.146-0.13}{0.015/\sqrt{10}}=3.373>t_{0.01}(9)=2.82,$$

所以拒绝原假设 H_0，即认为该日云母带的厚度的均值与 0.13mm 有显著差异。