南京林业大学试卷（期中测试）

课程 概率统计 B　　20 23 ~20 24 学年第 2 学期

题号	一	二	三	四	总分
得分					

姓名

班号

学号

一、选择题（请从以下四个选项中选择一个完成第 1-10 题，每题 4 分，共 40 分）

(A) 充分但不必要　(B) 必要但不充分　(C) 充分必要　(D) 既不充分也不必要

1. “随机事件 A,B 互不相容”是“随机事件 A,B 对立”的（ B ）条件.

2. “随机事件 A,B 互不相容”是“随机事件 A,B 独立”的（ D ）条件.

3. “随机事件 A 是不可能事件”是“$P(A)=0$”的（ A ）条件.

4. “随机事件 A,B,C 两两独立”是“随机事件 A,B,C 相互独立”的（ B ）条件.

5. “随机事件 A,B 独立”是“随机事件 $\bar{A},\bar{B}$ 独立”的（ C ）条件.

6. “X 不是离散型随机变量”是“X 是连续型随机变量”的（ B ）条件.

7. “X 服从正态分布”是“$2X+3$ 服从正态分布”的（ C ）条件.

8. “(X,Y) 服从二维正态分布”是“X,Y 均服从正态分布”的（ A ）条件.

9. “随机变量 X,Y 独立”是“随机变量 X,Y 不相关”的（ A ）条件.

10. “$D(X)=0$”是“X 是常数”的（ B ）条件.

二、填空题（请在每小题的横线上填写答案，每题 4 分，共 40 分）

11. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$__________.

【解析】$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$，$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$，

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}$。

12. 已知离散型随机变量 X 的分布律为

1	2	3
$a^2-0.1a$	0.24	$1-1.3a$

，则 $a=$__________.

【解析】根据分布律的性质有 $a^2-0.1a+0.24+1-1.3a=1$，即 $a^2-1.4a+0.24=0$，

故 $a=0.2$ 或 $a=1.2$。又 $\begin{cases} a^2-0.1a>0 \\ 1-1.3a>0 \end{cases}$，故 $a=0.2$。

13. 一个袋中有编号为 1,2,3,4,5 的 5 只球，同时取 3 只，X 表示取出 3 只球中的最大号码，那么 $P\{X=4\}=$__________.

【解析】$P\{X=4\}=\dfrac{C_3^2}{C_5^3}=0.3$。

14. 已知 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \ln x, & 1\le x<\mathrm{e}\\ 1, & x\ge \mathrm{e}\end{cases}$，则 $P\{0<X\le 3\}=$__________.

【解析】$P\{0<X\le 3\}=F(3)-F(0)=1-0=1$。

15. 设 $X\sim U(0,5)$，则方程 $4t^2+4Xt+X+2=0$ 有实根的概率为__________.

【解析】$\Delta=16X^2-16(X+2)\ge 0$，故 $X\le -1$ 或 $X\ge 2$。

故 $P\{X\le -1\bigcup X\ge 2\}=\int_2^5\dfrac{1}{5}\mathrm{d}x=\dfrac{3}{5}$。

16. 在区间 $[0,\pi]$ 上均匀任取两个数 X,Y，则 $P\{\cos(X+Y)<0\}=$__________.

【解析】$P\{\cos(X+Y)<0\}=P\left\{\dfrac{\pi}{2}<X+Y<\dfrac{3\pi}{2}\right\}=1-\dfrac{(\pi/2)^2}{\pi^2}=\dfrac{3}{4}$。

17. 设 $X\sim N(3,4)$，$Y\sim N(2,9)$，X,Y 相互独立，则 $P\{X-Y>1\}=$__________.

【解析】$X-Y\sim N(1,13)$，故 $P\{X-Y>1\}=P\left\{\dfrac{(X-Y)-1}{\sqrt{13}}>0\right\}=\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$。

18. 设随机变量 $X\sim\pi(\lambda)$ 且 $E(X)=D^2(X)$，则 $P\{X>1\}=$__________.

【解析】$\lambda=\lambda^2$，故 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$。又 $\lambda>0$，故 $\lambda=1$。

从而 $P\{X>1\}=1-P\{X\le 1\}=1-2\mathrm{e}^{-1}$。

19. 设随机变量 X,Y 相互独立，且它们的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则随机变量 $U=\min(X,Y)$ 的分布函数 $F(u)=$__________.

【解析】$F(u)=P\{U\le u\}=P\{\min(X,Y)\le u\}=1-P\{\min(X,Y)>u\}$

$=1-P\{X>u,Y>u\}=1-P\{X>u\}P\{Y>u\}=1-[1-F_1(u)][1-F_2(u)]$。

20. 设随机变量 $(X,Y)\sim N(1,0;3^2,4^2;-0.5)$，$Z=X+Y$，则 $\rho_{XZ}=$__________.

【解析】因为 $E(X)=1$，$E(Y)=0$，$D(X)=9$，$D(Y)=16$，$\rho_{XY}=-0.5$，

所以 $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=-6$。于是，$E(Z)=E(X)+E(Y)=1$，

$D(Z)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=13$，$Cov(X,Z)=D(X)+Cov(X,Y)=3$。

从而 $\rho_{XZ}=\dfrac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$。

三、**解答题（请给出详细解题过程，每小问 4 分，共 20 分）**

21. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1,0<y<a \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

其中a是常数.（1）求a的值；（2）求(X,Y)的分布函数$F(x,y)$；（3）判断X,Y的独立性，并说明理由；（4）求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$；（5）求$D(Z)$.

【解析】（1）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^a (x+y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(ax+\frac{1}{2}a^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^2=1$，即$a^2+a-2=0$。

故$a=-2$或$a=1$。又$a>0$，故$a=1$。

（2）① 当$x\le 0$时，$F(x,y)=0$；

② 当$0<x<1$时，

1° 当$y\le 0$时，$F(x,y)=0$；

2° 当$0<y<1$时，$F(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y (u+v)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}xy(x+y)$；

3° 当$y\ge 1$时，$F(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^1 (u+v)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}x(x+1)$；

③ 当$x\ge 1$时，

1° 当$y\le 0$时，$F(x,y)=0$；

2° 当$0<y<1$时，$F(x,y)=\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^y (u+v)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}y(y+1)$；

3° 当$y\ge 1$时，$F(x,y)=1$，

综上，

$$F(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}xy(x+y), & 0<x<1,0<y<1 \\ \frac{1}{2}x(x+1), & 0<x<1,y\ge 1, \\ \frac{1}{2}y(y+1), & x\ge 1,0<y<1 \\ 1 & x\ge 1,y\ge 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}。$$

（3）$f_X(x)=\begin{cases} \int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y, & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，

$f_Y(y)=\begin{cases} \int_0^1 (x+y)\mathrm{d}x, & 0<y<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}=\begin{cases} y+\frac{1}{2}, & 0<y<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$。

因为$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以X,Y不独立。

（4）$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y<z}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

① 当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

② 当 $0 \le z < 1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}z^3$；

③ 当 $1 \le z < 2$ 时，$F_Z(z)=\int_0^{z-1}\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y+\int_{z-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{z-x}(x+y)\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}z^3+z^2-\frac{1}{3}$；

④ 当 $z \ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$，

综上，

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} z^2, & 0 \le z < 1 \\ 2z-z^2, & 1 \le z < 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}。$$

（5）$E(Z)=\int_0^1 z\cdot z^2\mathrm{d}z+\int_1^2 z\cdot(2z-z^2)\mathrm{d}z=\frac{7}{6}$，$E(Z^2)=\int_0^1 z^2\cdot z^2\mathrm{d}z+\int_1^2 z^2\cdot(2z-z^2)\mathrm{d}z=\frac{3}{2}$，

故 $D(Z)=E(Z^2)-E^2(Z)=\frac{5}{36}$。