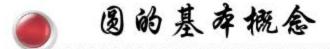


课程目标





- 普通圆的生成算法
 - 中点画圆法
- Bresenham 画圆算法
- 正负法

圆的八方向对称性

圆心在 (x_c, y_c) , 半径为 R 圆的方程是:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

圆关于坐标轴、和对角线对称

在对圆进行扫描转换时,只需计算 0° 到 45° 之间的一段圆弧就能得到整个圆。

圆的八方向对称性

对于圆心为 (x_c, y_c) 的圆,用程序 CirclePoints 显示 8 个相对称的点。

```
void CirclePoints (int xc, int yc, int x, int y, int Color)
{
    PutPixel (xc + x, yc + y, Color);
    PutPixel (xc + x, yc - y, Color);
    PutPixel (xc - x, yc + y, Color);
    PutPixel (xc - x, yc - y, Color);
    PutPixel (xc + y, yc + x, Color);
    PutPixel (xc + y, yc - x, Color);
    PutPixel (xc - y, yc + x, Color);
    PutPixel (xc - y, yc - x, Color);
}
```

圆的生成算法1--使用二次多项式

圆心在 (x_c, y_c) , 半径为 R 圆的方程是:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

利用该方程沿x 轴从 x_c-R 到 x_c+R 以单位步长步进计算出对应的y值,即可得到圆周上每点的y值:

$$y = y_c \pm \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2}$$

缺点:每步包含大量的计算,所画像素位置的间距是不一致。

圆的生成算法2--使用极生标



另一种消除不等间距的方法是使用圆的极坐标方程:

$$x = x_c + R\cos\theta$$
, $y = y_c + R\sin\theta$

缺点: 涉及到三角运算,同样增加了计算量。

最为常用的生成圆的有效算法有以下三种:

- 1. 中点画圆法
- 2. Bresenham 画圆算法
- 3. 正负法

考虑中心在原点, 半径为R的半径为r,

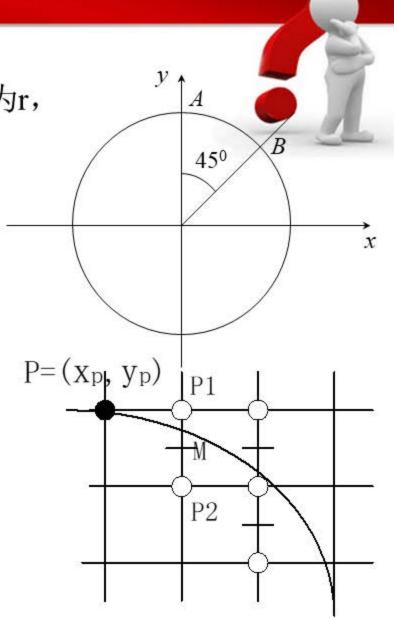
从x=0到x=y的1/8圆

$$x_{i+1} = x_i + 1$$

相应的y则在两种可能中选择:

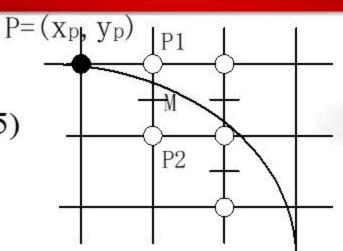
y=y_i,或者 y=y_i-1

选择的原则是在2个像素之间的中点处给出一判定函数,并据此在2个像素中选择最靠近圆的那个像素。





$$d = F(M) = F(x_p + 1, y_p - 0.5)$$
$$= (x_p + 1)^2 + (y_p - 0.5)^2 - R^2$$



若 d<0,则取P1为下一象素,而且再下一象素的判别式为 $d'=F(x_p+2,y_p-0.5)=(x_p+2)^2+(y_p-0.5)^2-R^2=d+2x_p+3$ 若d>=0,则取P2为下一象素,而且再下一象素的判别式为 $d'=F(x_p+2,y_p-1.5)=(x_p+2)^2+(y_p-1.5)^2-R^2=d+2(x_p-y_p)+5$ 第 一个象素是(0,R),判别式d的初始值为 $d_0=F(1,R-0.5)=1.25-R$

中点圆扫描转换算法

void MidpointCircle(intr, int Color)

```
int x, y;
float d;
x = 0; y = r; d = 1.25 - r;
CirclePoints (0, 0, x, y, Color);
while(x < y) {
  if (d < 0) \{d += x*2.0 + 3; \}
  else \{d += (x - y) *2.0 + 5; y -- ;\}
  x ++;
  CirclePoints (0, 0, x, y, Color);
```



由于判定函数 d 的初值是浮点数,因此算法必须做浮点数的算术运算。

希望有一个效率更高的只进行整数运算的算法。

为此, 定义一个新的判定函数: h = d - 0.25

这样在初始化时,h=1-R,而条件 d<0 变成了 h<-0.25。

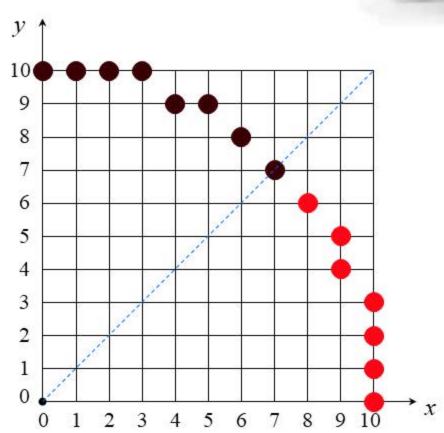
由于h的初值是整数,且其相应的增量也是整数,因此可将条件h < -0.25 改为h < 0。

这样算法就变成了关于h的只进行整数运算的形式。

例:用中点算法画圆心为O(0,0),半径为R=10的

八分之一圆弧。

- -9 0 10
- -6 1 10
- -1 2 10
- 6 3 10
- -3 4 9
- 8 5 9
- 5 6 8
 - 77





```
void MidpointCircle(int r, int Color)
   int x, y, d;
   x = 0; y = r; d = 1 - r;
   CirclePoints (0, 0, x, y, Color);
   while (x < y)
    if (d < 0) \{ d += x*2 + 3; \}
     else { d += (x - y)*2 + 5; y --; }
    x ++;
     CirclePoints (0, 0, x, y, Color);
```



Bresenham 算法是画圆的最有效的算法之一。

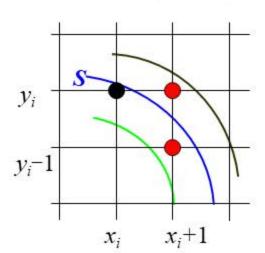
设要画的圆的圆心在坐标原点(0,0),半径为R。

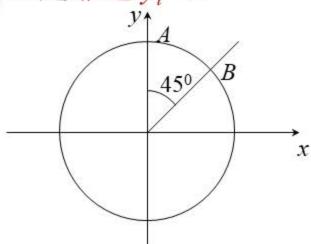
考虑第一象限的上半部的八分之一圆弧的生成过程

在这种情况下,x 每步增加 1,相应的 y_{i+1} 则有两种选择:

$$y_{i+1}=y_i$$
 或 y_i-1 .

选择的原则是考察精确值y是靠近 y_i 还是靠近 y_i-1 。



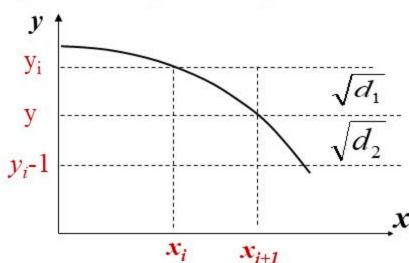


Bresenham画圆算法采用一个决策值来确定到底是选择 y_i 还是 y_i -1。

在 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_i+1$ 位置上,用 \mathbf{d}_1 和 \mathbf{d}_2 来标识两个候选像素的y值与圆弧上理想y值的差值,则: $\mathbf{y}^2=\mathbf{r}^2-(\mathbf{x}_i+1)^2$

$$d_1 = y_i^2 - y^2 = y_i^2 - r^2 + (x_i + 1)^2$$

$$d_2 = y^2 - (y_i - 1)^2 = r^2 - (x_i + 1)^2 - (y_i - 1)^2$$



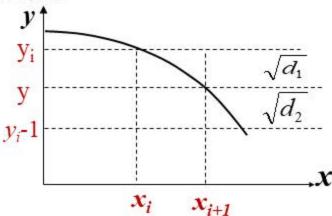
令 $d_i=d_1-d_2$,并代入 d_1 、 d_2 ,则有:

$$d_i=2(x_i+1)^2+y_i^2+(y_i-1)^2-2r^2$$

这里di就是Bresenham画圆算法的第i步决策值。

如果 d_i <0,则 $y_{i+1}=y_i$;

如果 $d_i >= 0$,则 $y_{i+1} = y_i - 1$ 。



余下的问题是如何快速地计算判定函数 d_i ?

$$d_i=2(x_i+1)^2+y_i^2+(y_i-1)^2-2r^2$$

在i+1步, d_{i+1} 为: $d_{i+1}=2(x_{i+1}+1)^2+y_{i+1}^2+(y_{i+1}-1)^2-2r^2$

已知 $x_{i+1}=x_i+1$,因而得到: $d_{i+1}=2(x_i+1+1)^2+y_{i+1}^2+(y_{i+1}-1)^2-2r^2$

若 d_i <0,取右方像素, $y_{i+1} = y_i$,则:

$$d_{i+1}=2(x_i+1+1)^2+y_i^2+(y_i-1)^2-2r^2=d_i+4x_i+6$$

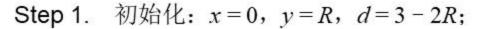
若 $\mathbf{d}_{i} \ge 0$,取右下方像素, $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_{i} - 1$,则:

$$d_{i+1}=2(x_i+1+1)^2+(y_i-1)^2+(y_i-1-1)^2-2r^2=d_i+4(x_i-y_i)+10$$

而决策值的初值 d_0 由x=0,y=r代入前面公式,得:

$$d_0=2(0+1)^2+r^2+(r-1)^2-2r^2=3-2r$$

基于上述推导,生成圆的 Bresenham 算法之步骤如下:



Step 2. 当x < y 时,执行以下操作:

- 2.1 画像素点 (x, y);
- 2.2 求下一个像素点:

$$x = x + 1, \quad y = \begin{cases} y, & d < 0 \\ y - 1, & d \ge 0 \end{cases}$$

2.3 计算下一个判定函数:

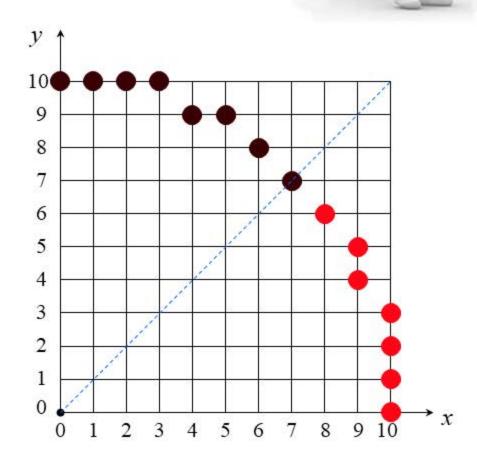
$$d = \begin{cases} d + 4x + 6, & d < 0 \\ d + 4(x - y) + 10, & d \ge 0 \end{cases}$$

Step 3. 若 x = y, 画像素点 (x, y);

Step 4. 算法结束。

例 用 Bresenham 算法画圆心为 O(0, 0) ,半径为 R = 10 的八分之一圆弧。

d	\boldsymbol{x}	y
-17	0	10
-11	1	10
-1	2	10
13	3	10
-5	4	9
17	5	9
11	6	8
	7	7



圆 Bresenham 扫描转换算法

```
void Circle BRES (int xc, int yc, int R, int Color)
{
   int x = 0, y = R, d = 3 - 2*R;
   while (x < y) {
        CirclePoints (xc, yc, x, y, Color);
        if (d \ge 0) {
           d += 4 - 4*y; y--;
         d += 4*x + 6; x ++;
   if(x == y)
      CirclePoints (xc, yc, x, y, Color);
```





设要绘制的圆的圆心在 (x_c, y_c) 半径为 R,令:

$$F_{circle}(x, y) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - R^2$$

则圆将平面分为三个区域:

$$F_{circle}(x,y)$$
 $\{ < 0 , (x,y)$ 位于圆周内 $= 0 , (x,y)$ 位于圆周上 $> 0 , (x,y)$ 位于圆周外

以第一象限的四分之一圆弧为例,说明正负法的原理。

取 $P_0(x_0, y_0) = (x_c, y_c + R)$,求得点 $P_i(x_i, y_i)$ 后,寻找 $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ 的原则是:

当
$$F_{circle}(x_i, y_i) \le 0$$
 时, $x_{i+1} = x_i + 1$, $y_{i+1} = y_i$;

当
$$F_{circle}(x_i, y_i) > 0$$
 时, $x_{i+1} = x_i$, $y_{i+1} = y_i - 1$ 。

即,当点 P_i 在圆周内或圆周上时,向右走一步,而当点 P_i 在圆周外时,向下走一步。这样用于逼近圆弧的像素点均在圆周的附近,且使判定函数时正时负,这就是正负法名称的由来。



每找一点都要计算一次判定函数 $F_{circle}(x, y)$ 。

如果直接计算,由于要进行乘法,不仅耗时,而且也不易硬件实现。

因此,应建立计算判定函数 $F_{circle}(x,y)$ 的高效算法以避免乘法。

 $F_{circle}(x_0, y_0) = 0$ 。 若 $F_{circle}(x_i, y_i)$ 已经求出,

那么 $F_{circle}(x_{i+1}, y_{i+1})$ 的计算分两种情形:

情形1. $F_{circle}(x_i, y_i) \leq 0$. 此时, $x_{i+1} = x_i + 1$, $y_{i+1} = y_i$,那么

$$F_{circle}(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_{i+1} - x_c)^2 + (y_{i+1} - y_c)^2 - R^2$$

$$= (x_i + 1 - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 - R^2$$

$$= F_{circle}(x_i, y_i) + 2(x_i - x_c) + 1$$



情形2. $F_{circle}(x_i, y_i) > 0$.

此时,
$$x_{i+1} = x_i + 1$$
, $y_{i+1} = y_i - 1$,那么
$$F_{circle}(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_{i+1} - x_c)^2 + (y_{i+1} - y_c)^2 - R^2$$
$$= (x_i - x_c)^2 + (y_i - 1 - y_c)^2 - R^2$$
$$= F_{circle}(x_i, y_i) - 2(y_i - y_c) + 1$$

因此,由 (x_i,y_i) 求下一点判定函数的递推公式为:

$$F_{circle}(x_{i+1}, \ y_{i+1}) = \begin{cases} F_{circle}(x_i, \ y_i) + 2(x_i - x_c) + 1, & F_{circle}(x_i, \ y_i) \le 0 \\ F_{circle}(x_i, \ y_i) - 2(y_i - y_c) + 1, & F_{circle}(x_i, \ y_i) > 0 \end{cases}$$



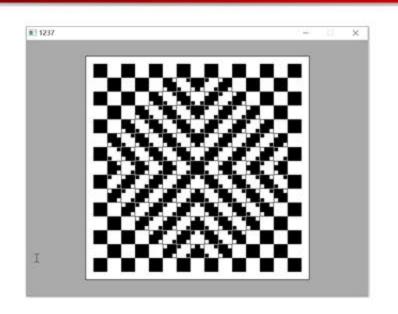
```
void circle_PNM (int xCenter, int yCenter, int Radius, int Color)
```

```
int x = xCenter, y = yCenter + Radius;
int f = 0;
while (y > yCenter) {
   PutPixel (x, y, Color);
   if (f > 0) {f += 2*(yCenter - y) + 1; y --;}
   else { f += 2*(x - xCenter) + 1; x ++; }
if (y == yCenter) PutPixel(x, y, Color)
```



视觉错觉艺术图片





• 这是网上经常见的视觉错觉艺术图片,可以用程序生成。

视觉错觉艺术图片

```
#include (graphics.h>
#include (conio.h)
// 定义回调
void (*callback)(int x. int y):
// 画方块上的小方块
void DrawSmallBox(int x, int y, bool lt, bool rt, bool lb, bool rb)
    int nx = x × 26 - 13;
    int ny = y × 26 - 13;
    if (1t) solidrectangle(nx + 1, ny + 1, nx + 1 + 6, ny + 1 + 6);
    if (rt) solidrectangle(nx + 24, ny + 1, nx + 24 - 6, ny + 1 + 6);
    if (1b) solidrectangle(nx + 1, ny + 24, nx + 1 + 6, ny + 24 - 6);
    if (rb) solidrectangle(nx + 24, ny + 24, nx + 24 - 6, ny + 24 - 6);
// 圓中的每个点(回调函数)
void CirclePoints(int x. int u)
    if (x == 0 && u < 0)
        DrawSmallBox(x, y, false, false, true, true);
    else if (x == 0 && u > 0)
        DrawSmallBox(x, y, true, true, false, false);
    else if (x < 0 && u == 0)
        DrawSmallBox(x, y, false, true, false, true);
    else if (x > 0 && u == 0)
        DrawSmallBox(x, y, true, false, true, false);
    else if (x == 0 && u == 0)
    else if ((x < 0 && y < 0) || (x > 0 && y > 0))
        DrawSmallBox(x, y, false, true, true, false);
    else
       DrawSmallBox(x, y, true, false, false, true);
// 基于 Bresenham 算法面填充圈
poid FillCircle_Bresenham(int x, int y, int r)
    int tx = 0, tu = r, d = 3 - 2 x r, i:
    while( tx < ty)
        // 面水平两点连线(<45度)
        for (i = x - ty; i <= x + ty; i++)
           CirclePoints(i, y - tx);
           if (tx != 8) // 防止水平线重复绘制
               CirclePoints(i, y + tx);
```

// 取上面的点

if (d < 0)

d +: 4 + tx + 6:

```
// 取下面的点
           // 画水平两点连续(>45度)
           for (i = x - tx: i <= x + tx: i++)
               CirclePoints(i, y - ty):
               CirclePoints(i, y + ty);
           d += 4 × (tx - ty) + 10, ty--:
       tx++:
   if (tx == ty)
                         // 面水平两点连线(=45度)
       for (i = x - ty; i <= x + ty; i++)
           CirclePoints(i, y - tx):
           CirclePoints(i, y + tx):
// 主函数
void main()
   // 创建绘图窗口
   initgraph(648, 488);
   setbkcolor(LIGHTGRAY);
   cleardevice():
   setorigin(320, 240):
   // 画 15 x 15 的间隔黑白块, 垂块 26 x 26, 共 390 x 390
   setlinecolor(BL GCK)
   setfillcolor(WHITE):
   fillrectangle(-210, -210, 209, 209);
   COLORREF fc = WHITE:
   for (int x = -195: x < 195: x += 26)
       for (int y = -195; y < 195; y *= 26)
           fc = ("fc) & 0xffffff;
           setfillcolor(fc):
           solidrectangle(x, y, x + 25, y + 25):
   // 在填充圆内的方块内面小方块
   setrop2(R2_XORPEN):
   setfillcolor(WHITE):
   FillCircle_Bresenham(0, 0, 6):
   // 按任意键退出
   getch():
   closegraph():
```

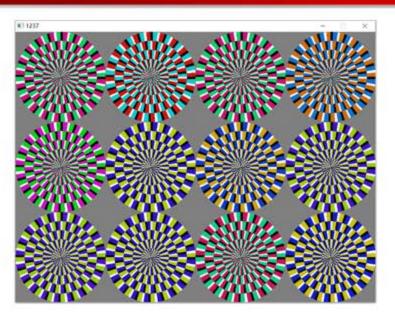






旋转圆



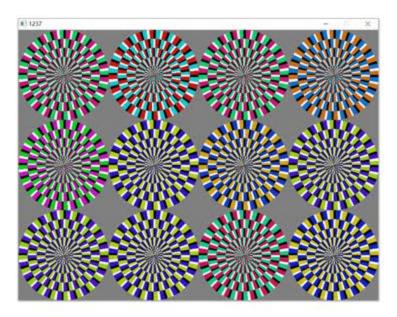


绘制过程 绘制准常神奇的错觉图片,静止的圆盘看起来却有在转动的错觉。

首先学习绘制扇形函数和RGB颜色模型,绘制了一个基本单元;然后学习了for循环语句和循环的嵌套,实现了旋转圆的绘制;最后学习了HSV颜色模型,并利用随机函数和按键切换,实现了丰富多变的旋转圆错觉图案。

```
#include (graphics.h)
#include (conio.h)
#include (stdio.h)
#include <time.h>
int main()
   float Pi = 3.14159: // 圆周率Pi
   initgraph(800,600): // 打开一个窗口
   setbkcolor(RGB(128,128,128)); // 设置背景颜色为灰色
   cleardevice(): // 以背景颜色清空画布
   srand(time(8)): // 随机种子函数
   int centerX,centerY: // 國心坐标
   int radius: // 圆半径
   int i:
   float offset; // 同一半径各组扇形之间的角度偏移量
   float totalOffset: // 不同半径之间的角度偏移量
   while(1) // 重复执行
      for (centerX = 180;centerX<800;centerX=centerX+200) // 对圆心x坐标循环
          for (centerY = 100;centerY<600;centerY=centerY+200) // 对图心g坐标循环
             totalOffset = 0; // 同一半径各组扇形之间的角度偏移量
             float h = rand()%180; // 随机色调
             COLORREF color1 = HSUtoRGB(h, 0, 9, 0, 8); // 色调1生成的颜色1
             COLORREF color2 = HSUtoRGB(h+180.0.9.0.8); // 色调2生成的颜色2
             for (radius=100;radius>0;radius=radius-20) // 半径从大到小绘制
                 int left = centerX - radius: // 圆外切矩形左上角x坐标
                 int top = centerY - radius; // 圆外切矩形左上角y坐标
                 int right = centerX + radius; // 國外切距形右下角x坐标
                 int bottom = centerY + radius: // 圆外切矩形右下角y坐标
                 for (i=8;i<20;i++) // 绕着旋转一周,绘制扇形区域
                    offset = ixPi/10 + totalOffset; // 各组扇形之间偏移的角度
                    setfillcolor(color1): // 色课1生成的颜色1
                    solidpie(left.top.right.bottom.offset.2mPi/60+offset);
                    setfillcolor(RGB(255,255,255));// 设置填充颜色为白色
                    solidpie(left,top.right,bottom,2xPi/60+offset,3xPi/60+offset);
                    setfillcolor(color2): // 色调2生成的颜色2
                    solidpie(left.top.right.bottom.3×Pi/60+offset.5×Pi/60+offset);
                    setfillcolor(RGB(0,0,0)):// 设置填充颜色为黑色
                    solidpie(left.top.right.bottom.5xPi/60+offset.6xPi/60+offset):
                 totalOffset = totalOffset + Pi/20: // 不同半径间角度偏移量为Pi/20
      _getch(): // 暂停, 等待按键输入
   return 0:
```







冰墩墩





将冰墩墩简化成多个椭圆,并且按照不同部位,分步用函数分别绘制。适合初学者借鉴学习与加以细化,例此可以细化一下冰墩墩的腿部和手部细节,将它肚子上的文字改成冬奥LOGO,改变一下眼睛的颜色等等,还可以画一只雪客融。

可以借鉴的地方

幸程序改变了原有的坐标原点,通过观察,我们发现冰墩墩大部分身体都是对称的,因此,可以通过改变它的坐标原点,只需获取一步的坐标点,通过对称绘制另一步,减少获取坐标需要的时间。

```
#include(graphics.h>
#include(conio.h>
#include(math.h)
#define PI acos(-1.0)
#define WIDTH 800
#define HEIGHT 800
double th = PI / 180;
void DrawBack():
void DrawEar():
void DrawLeg();
void DrawArm():
void DrawBody():
void DrawEue():
void DrawNose():
void DrawMouth():
void DrawColour();
void DrawLogo();
                                           // 绘制标志
void heart(int x0, int y0, int size, COLORREF C);
                                                                       // 绘制心
void DrawEllipse(int x0, int y0, int a, int b, int k, COLORREF color); // 绘制倾斜椭圆
int main()
    initgraph(WIDTH, HEIGHT):
    DrawBack():
    setorigin(WIDTH / 2, HEIGHT / 2);
                                           // 绘制耳朵
    DrawEar():
    DrawLeg():
    DrawArm():
    DrawBody():
                                           // 绘制眼睛
    DrawEye():
    DrawNose():
                                           // 绘制鼻子
    DrawMouth():
                                           // 绘制彩带
    DrawColour():
                                           // 绘制标志
    DrawLogo():
    heart(330, -120, 10, RED);
    setfillcolor(RED):
    floodfill(330, -100, RED);
    _getch():
    return 0:
```





```
void DrawBack()
    float H = 190:
                        // 色相
    float S = 1:
                        // 饱和度
    float L = 0.7f;
                        // 亮度
    for (int y = 0: y < HEIGHT: y++)
        L += 0.0002f:
        setlinecolor(HSLtoRGB(H, S, L));
        line(0, y, WIDTH - 1, y);
    1
)
void DrawEar()
    setfillcolor(BLACK);
    solidcircle(172, -300, 62);
    solidcircle(-172, -300, 62);
)
uoid DrawLeg()
    setfillcolor(BLACK):
    solidellipse(44, 155, 168, 348):
    solidellipse(-44, 155, -168, 348);
void DrawArm()
    DrawEllipse(-267, 50, 100, 60, 50, BLACK):
    DrawEllipse(297, -60, 100, 60, 50, BLACK):
    setfillcolor(BLACK):
    floodfil1(-267, 50, BLACK);
    floodfill(297, -60, BLACK);
void DrawBody()
    setlinecolor(BLACK);
    setlinestyle(PS_SOLID, 8);
    setfillcolor(WHITE):
    fillellipse(-270, -354, 270, 260);
```

```
void DrawEye()
    DrawEllipse(109, -131, 84, 60, 314, BLACK):
    DrawEllipse(-109, -131, 84, 60, -314, BLACK):
    setfillcolor(BLACK):
    floodfill(109, -131, BLACK):
    floodfill(-109, -131, BLACK);
    setfillcolor(WHITE):
    setlinestyle(PS_SOLID, 1):
    solidcircle(92, -137, 30);
    solidcircle(-92, -137, 30);
    setfillcolor(BLACK);
    solidcircle(90, -137, 26):
    solidcircle(-90, -137, 26):
    setfillcolor(WHITE):
    solidcircle(81, -146, 9):
    solidcircle(-81, -146, 9);
void DrawNose()
    setlinestyle(PS_SOLID, 1):
    setfillcolor(BLACK);
    solidellipse(-26, -106, 26, -63);
void DrawMouth()
    setlinecolor(BLACK):
    setlinestyle(PS_SOLID, 8):
    arc(-43, -75, 43, -7, PI, 0);
void DrawColour()
    setlinecolor(BLACK):
    setlinestyle(PS_SOLID, 8):
    setlinecolor(RGB(91, 198, 250));
    ellipse(-205, -265, 205, 74);
    setlinecolor(RGB(119, 216, 113));
    ellipse(-215, -275, 215, 84);
    setlinecolor(RGB(254, 122, 185));
    ellipse(-225, -285, 225, 94);
```





```
void DrawLogo()
    RECT r = { -116, 100, 116, 175 };
    settextcolor(BLACK);
    setbkmode(TRANSPARENT);
    settextstyle(60, 0, _T("黑体"));
    drawtext(_T("BeiJing"), &r, DT_CENTER | DT_UCENTER | DT_SINGLELINE);
    RECT r1 = ( -116, 175, 116, 250 ):
    drawtext(_T("2022"), &r1, DT_CENTER | DT_UCENTER | DT_SINGLELINE);
void DrawEllipse(int x0, int y0, int a, int b, int k, COLORREF color)
    double i:
    double x, y, tx, ty;
    for (i = -180; i <= 180; i = i + 0.5)
        x = a \times cos(i \times th);
         y = b \times sin(i \times th);
         tx = x:
         ty = y:
        x = tx \times cos(k \times th) - ty \times sin(k \times th) + x0;
         y = y0 - (ty \times cos(k \times th) + tx \times sin(k \times th)):
         setfillcolor(color):
         solidcircle((int)x, (int)y, 2);
void heart(int x0, int y0, int size, COLORREF C)
    double m, n, x, y;
    double i:
    for (i = 0; i \le 2 \times \text{size}; i = i + 0.01)
        // 产生极坐标点
         m = 1:
        n = -size \times (((sin(i) \times sqrt(fabs(cos(i)))) / (sin(i) + 1.4142)) - 2 \times sin(i) + 2);
         // 转换为笛卡尔坐标
         x = n \times cos(m) + x0:
         y = n \times \sin(m) + y0;
         setfillcolor(C):
         solidcircle((int)x, (int)y, 1);
```







实验

- 1. 实现中点画圆算法。
- 2. Bresenham画圆算法。
- 3. 正负法画圆。
- 4. 绘制作品

