学号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　姓名

3.4 基 础 题

3.4.1 第三章练习一

一．选择题（以下每题仅有一个答案是正确的，请选出你的答案并填在下面的答题框内）

1．设(X,Y)的联合分布律如下，则a,b应满足　　　　　　　　　　　　（ C ）.

Y \ X	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	a	b

(A) $a+b=1$　　(B) $a-b=1$　　(C) $a+b=\frac{1}{3}$　　(D) $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

3．同时掷两颗均匀的骰子,以 X,Y 分别表示第 1 颗和第 2 颗骰子出现的点数,则(A).

（A）$P\{X=i,Y=j\}=\frac{1}{36},i,j=1,2,\cdots 6$　　（B）$P\{X=Y\}=\frac{1}{36}$

（C）$P\{X\neq Y\}=\frac{1}{2}$　　（D）$P\{X\leq Y\}=\frac{1}{2}$

4．设(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}6x^2y & 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，G 为一平面区域,则下列结论中错误的是(B).

(A) $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$　　(B) $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G 6x^2ydxdy$

(C) $P\{(X\geq Y)\}=\iint\limits_{x\geq y} f(x,y)dxdy$　　(D) $P\{X\geq Y\}=\int_0^1 dx\int_0^x 6x^2ydy$

*5．设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}x^2+\frac{1}{3}xy & 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 2\\ 0 & 其他\end{cases}$，则$P\{X+Y\geq 1\}$=(A).

(A) $\frac{65}{72}$　　(B) $\frac{7}{72}$　　(C) $\frac{1}{72}$　　(D) $\frac{71}{72}$

二、填空题：

6．设(X,Y)的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases}Axy^2, 0<x<1,0<y<1\\ 0,其他\end{cases}$，则常数$A=$ __6__

7. 设(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)=\begin{cases}A\arctan x\cdot\arctan y, x>0, y>0\\ 0,其他\end{cases}$，则 $A=\underline{\dfrac{4}{\pi^2}}$

8. 随机点 (X,Y) 落在矩形域 $[x_1<x\le x_2, y_1<y\le y_2]$ 的概率为 $\underline{F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)}$.

9. 设$f(x,y)$是X,Y的联合分布密度，$f_X(x)$是X的边缘分布密度，则$\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\mathrm{dx}=$ $\underline{1}$.

三．解答题

10. 设连续型随机变量$\left(X,Y\right)$的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{k}xy & 0\le x\le 1\ \ 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

（1）常数 k（2）求$\left(X,Y\right)$的联合分布函数$F(x,y)$；（2）求 X 与 Y 的边缘概率密度。

(1) k=4 (2) $\mathrm{F}(x,y)=\begin{cases}0, x<0,\ y<0\\ x^2y^2\ \ ,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ \ y^2\ \ ,x>1,\ 0\le y\le 1\\ x^2\ \ ,0\le x\le 1, y>1\\ 1, x>1, y>1\end{cases}$ (3)

$f_X(x)=\begin{cases}2x & ,0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$, $f_Y(x)=\begin{cases}2y & ,0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

*11. 设连续型随机变量$\left(X,Y\right)$的联合概率密度函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y & x^2\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

（1）求$\left(X,Y\right)$的联合分布函数$F(x,y)$；（2）求 X 与 Y 的边缘概率密度。

（1）$$\mathrm{F}(x,y)=\begin{cases}0, y<0 \text{ 或 } x<-1 \\ -\frac{11}{8}x^7+\frac{7}{8}x^3y^2+\frac{1}{2}y^{\frac{7}{2}} \quad ,-1\le x<0,\ 0\le y\le 1 \\ -\frac{3}{8}x^7+\frac{7}{8}x^3y^2+\frac{1}{2}y^{\frac{7}{2}} \quad ,0\le x<1,\ 0\le y\le 1 \\ \frac{7}{20}y^5+\frac{1}{2}y^{\frac{7}{2}} \quad , x\ge 1,\ 0\le y\le 1 \\ -\frac{11}{8}x^7+\frac{7}{8}x^3+\frac{1}{2},-1\le x<0,\ y>1 \\ -\frac{3}{8}x^7+\frac{7}{8}x^3+\frac{1}{2},0\le x<1,\ y>1 \\ 1, \qquad x>1, y>1\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy & -1\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2(1-x^4) & -1\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydx & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

学号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　姓名

3.4.2　第三章练习二

一、选择题

1．设随机变量 X,Y 的联合分布律如下表，且 X,Y 相互独立，则 a,b 应满足　　　（ A ）.

（A）$a=\frac{2}{9},b=\frac{1}{9}$　　（B）$a=\frac{1}{9},b=\frac{2}{9}$

（C）$a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{3}$　　（D）$a=-\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$

X \ Y	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	a	b

2．若随机变量 X,Y 相互独立，则它们的连续函数 $g(X)$ 和 $h(Y)$ 所确定的随机变量　（ C ）.

（A）　不一定相互独立　　　（B）一定不独立

（C）也是相互独立　　　（D）绝大多数情况下相独立

3．设 X,Y 相互独立，X 服从 $[0,2]$ 均匀分布，$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$ 则 $P\{X\le Y\}=$（ A ）.

（A）$\frac{1}{4}(1-e^{-4})$　（B）$\frac{1}{4}\cdot e^{-4}$　（C）$\frac{1}{4}e^{-4}+\frac{3}{4}$　（D）$\frac{1}{2}$

4．设随机变量 X,Y 相互独立，其分布分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$，则随机变量 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数 $F(u)=$（ C ）.

（A）$\max\{F_1(u),F_2(u)\}$　　（B）$\min\{1-F_1(u),1-F_2(u)\}$

（C）$F_1(u)F_2(u)$　　（D）$1-[1-F_1(u)][1-F_2(u)]$

二、填空题：

5．设 X,Y 是相互独立的随机变量，其分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则 $Z=\min(X,Y)-1$ 的分布函数 $F_Z(z)=$ $\underline{1-(1-F_X(z+1))(1-F_Y(z+1))}$.

6．若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，相互独立，$k_1X-k_2Y$ 服从分布 $\underline{N(k_1\mu_1-k_2\mu_2,k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2)}$；

*7．X,Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布，则 $Z=X+Y$ 的分布为 <u>参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布</u>

三．解答题

8．已知随机变量 X 与 Y 的分布律分别为$\begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 1 \\ p & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} Y & 0 & 1 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，且

$P\{XY=0\}=1$

（1）求(X,Y)的联合分布律；（2）判别X,Y是否相互独立。

（1）二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$\begin{pmatrix} (X,Y) & (-1,0) & (-1,1) & (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ P & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

（2）X,Y不是相互独立

9．设(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & x>0,y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，判别$X,Y$是否相互独立。

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^{+\infty}2e^{-(x+2y)}dy & 0<x \\ 0 & x\le 0 \end{cases}=\begin{cases} e^{-x} & 0<x \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^{+\infty}2^{-(x+2y)}dx & 0<y \\ 0 & y\le 0 \end{cases}=\begin{cases} 2e^{-2y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 所以 X 与 Y 相互独立。

*10．已知(X,Y)的联合分布律为$\begin{pmatrix} (X,Y) & (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) & (2,0) & (2,1) \\ p & 0.1 & 0.15 & 0.25 & 0.20 & 0.15 & 0.15 \end{pmatrix}$

求$U=X+Y$，V=XY 的分布律。

解：$\begin{pmatrix} U & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.1 & 0.4 & 0.35 & 0.15 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} V & 0 & 1 & 2 \\ p & 0.65 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix}$

*11．设(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & x>0,y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，求随机变量$Z=X+2Y$的概率密度函数$f_Z(z)$。

解：

$$F_Z(z)=P\{X+2Y\le z\}=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy \quad =\begin{cases}\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}dy & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

所以 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}ze^{-z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$