学号________________　　　　姓名________________

6.4 基 础 题

6.4.1　第六章练习一答案

1. 设$X_1,\cdots,X_n$是来自总体$N(\mu_0,\sigma^2)$的简单随机样本，σ^2未知， 则下列不为统计量的是（　D　）

（A）$T=\min\{X_i-\mu_0\}$　　　　（B）　$T=\overline{X}$

（C）$T=(X_1,\cdots,X_n)$　　　　（D）$T=(X_1+\cdots+X_n)/\sigma$

2. 下列关于分位数的说法，不正确的是（　c　）

（A）$z_{1-\alpha}=-z_\alpha$　　　　（B）$t_{1-\alpha}=-t_\alpha$

（C）$\chi^2_{1-\alpha}(n)=-\chi^2_\alpha(n)$　　　　（D）$F_{1-\alpha}(m,n)F_\alpha(n,m)=1$

3. $X_1,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(0,1)$的样本, $\overline{X},S^2$分别为样本均值与样本方差, 则（ C ）.

（A）$\overline{X}\sim N(0,1)$　（B）$n\overline{X}\sim N(0,1)$　（C）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$　（D）$\frac{\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且都服从正态分布$N(0.3^2)$, 设$X_1,X_2,\cdots,X_9$, $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$分别是来自两总体的简单随机样本, 则统计量$U=\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2}}\sum_{i=1}^{n}X_i$服从

分布是(A).

（A）　$t(9)$　　（B）　$t(8)$　　（C）$N(0,81)$　　（D）$N(0,9)$

二．填空题（请将答案填在下面的答题框内）

5. 设$X_1,\cdots,X_n$是来自具有$\chi^2(n)$分布总体的样本，$\overline{X},S^2$分别为样本均值与样本方差，则

（1）$E\overline{X}=$___n_____　（2）　$D\overline{X}=$___2______

6*. 设$X_1,\cdots,X_n$为来自总体分布为泊松分布$P(\lambda)$的样本，$\overline{X},S^2$分别为样本均值与样本方差，则

注：　嘎玛分布记号沿用浙江大学版《概率论与数理统计》

（1） $D(\overline{X})=\underline{\dfrac{\lambda}{n}}$ （2） $D(S^2)=\underline{\dfrac{1}{(n-1)^2}(n\lambda^3+2(n-1)\lambda^2)}$

三．解答题（请将每题答案填在答题框内，并在指定处列出主要步骤及推演过程）

7. 设 $X_1,\cdots,X_6$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$S^2=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(X_i-\overline{X})^2$，求 $D(S^2)$

解： 由基本定理可知，

$$S^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(5)$$

再由卡方分布的性质可知，

$$D(S^2)=2\times5=10$$

8*. 设 $X_1,\cdots,X_4$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，记 $V=\dfrac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+X_4^2}}$，求 V 的分布。

解： 不妨假设 $\sigma=1$ ，否则分子分母同除以 σ 。

$$X_2^2+X_3^2+X_4^2\sim\chi^2(3)$$

由 t 分布的定义可知，

$$V=\frac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+X_4^2}}=\frac{X_1}{\sqrt{(X_2^2+X_3^2+X_4^2)/3}}\sim t(3)$$

注： 嘎玛分布记号沿用浙江大学版《概率论与数理统计》

学号________________　　姓名________________

6.4.2　第六章练习二答案

1. 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立， $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,\frac{1}{2})$, $X_3 \sim N(0,\frac{1}{3})$，则

$X_1^2 + 2X_2^2 + 3X_3^2$ 服从____B______分布。

（A） $\chi^2(3)$　　　　（B） $\chi^2(3)$

（C） $\chi^2(3)$　　　　（D） $t(3)$

2*.　设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的简单随机样本， $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为来自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的简单随机样本，且两者独立； S_X^2, S_Y^2 为样本方差；则下列说法正确的是（D）

（A） $S_X^2 + S_Y^2$ 是混合样本的样本方差　（B） S_X^2 / S_Y^2 是 σ_1^2 / σ_2^2 的无偏估计量

（C） $S_X^2 / S_Y^2 \sim F(m-1, n-1)$　　（D）在 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时， $S_X^2 / S_Y^2 \sim F(m-1, n-1)$

3. 下列判断中，错误的是（　D　）.

（A）若 $F \sim F(m,n)$ ，则 $\frac{1}{F} \sim F(n,m)$　（B）若 $T \sim t(n)$ ，则 $T^2 \sim F(1,n)$

（C）若 $X \sim N(0,1)$,则$X^2 \sim \chi^2(1)$　　（D）在正态总体下 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n-1)$

4. 设总体 X 服从 $N(\mu_1, \sigma^2)$ ，总体 Y 服从 $N(\mu_2, \sigma^2)$ ， $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为来自总体 X 的简单随机样本， $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 为来自总体 Y 的简单随机样本，则

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\right) = （\quad A \quad）.$$

（A） σ^2　（B） $2\sigma^2$　（C） $3\sigma^2$　（D） $4\sigma^2$

二．填空题（请将答案填在下面的答题框内）

5. 设 X_1， $X_2, \cdots X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ 服从 $\chi^2(n)$ 分

注：　嘎玛分布记号沿用浙江大学版《概率论与数理统计》

布，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\underline{\frac{n-1}{\sigma^2}\chi^2\ (n-1)=\Gamma\left(\frac{n-1}{2},\frac{2(n-1)}{\sigma^2}\right)}$ 分布.

6. 设 X_1，$X_2,\cdots X_{25}$ 是来自总体 $X\sim\chi^2(1)$ 的一个样本，则 $\sum_{i=1}^{25}X_i$ 服从 $\underline{\chi^2(25)}$ 分布.

7*. 设总体 X 服从指数分布 $Exp(\lambda)$，而 X_1，$X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $2n\lambda\overline{X}$ 服从____$\underline{\chi^2(2n)}$______分布.

三．解答题（请将每题答案填在答题框内，并在指定处列出主要步骤及推演过程）

8 、设 $X_1,\cdots,X_6$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，又设

$$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$$

试求常数 c，使 cY 服从 χ^2 分布。

解： 由正态分布的性质可知，$X_1+X_2+X_3\sim N(0,3)$，$X_4+X_5+X_6\sim N(0,3)$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(X_1+X_2+X_3)\sim N(0,1),\quad \frac{1}{\sqrt{3}}(X_4+X_5+X_6)\sim N(0,1)$$

再由卡方分布的定义可知

$$\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)^2+\frac{1}{3}(X_4+X_5+X_6)^2\sim\chi^2(2)$$

所以

$$3Y\sim\chi^2(2).$$

因此，应取常数 $c=\frac{1}{3}$.

9*、设 $X_1,\cdots,X_4$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，设

$$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$$

则当 a,b 为何值时，X 服从 χ^2 分布？其自由度为何？

解： 由正态分布的性质可知，$X_1-2X_2\sim N(0,5)$，$3X_3-4X_4\sim N(0,25)$

注： 嘎玛分布记号沿用浙江大学版《概率论与数理统计》

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(X_1-2X_2)\sim N(0,1)\text{，}\quad \frac{1}{5}(3X_3-4X_4)\sim N(0,1)$$

再由卡方分布的定义可知

$$\frac{1}{5}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{25}(3X_3-4X_4)^2\sim \chi^2(2)$$

所以 $a=\dfrac{1}{5}$，$b=\dfrac{1}{25}$，X 服从自由度为 2 的 χ^2 分布。

注： 嘎玛分布记号沿用浙江大学版《概率论与数理统计》