学号________________________　　　　姓名__________________________

4.4　基　础　题

4.4.1　第四章练习一

一. 单选题

1. 随机变量 $X \sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,则 $E(2X+1)=($　　C　　$)$.

(A) $\dfrac{4}{10}+1$　　(B) $4\times10+14$　　(C) 21　　(D) 20

2. X 服从 $[0,2]$ 上的均匀分布,则 $D(X)=($　B　$)$.

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{6}$　　(D) $\dfrac{1}{12}$

3. X 为随机变量，$E(X)=-1, D(X)=3$，则 $E[3(X^2+2)]=($　A　$)$.

(A) 18　　(B) 9　　(C) 30　　(D) 36

4. 设 X 服从二项分布，$E(X)=2.4, D(X)=1.44$，则二项分布的参数为(　A　).

(A) $n=6, p=0.4$　　(B) $n=6, p=0.1$

(C) $n=8, p=0.3$　　(D) $n=24, p=0.1$

5. 下式中错误的是(　B　).

(A) $E(X^2)=D(X)+(E(X))^2$　　(B) $D(2X+3)=2D(X)$

(C) $E(3Y+b)=3E(Y)+b$　　(D) $D(E(X))=0$

6. X,Y 相互独立，且方差都存在，则 $D(2X-3Y)=($　C　$)$.

(A) $2DX-3DY$　　(B) $4DX-9DY$　　(C) $4DX+9DY$　(D) $2DX+3DY$

7. 二维随机向量 (X,Y) 满足 $E(XY)=EX\cdot EY$，则(　B　).

(A) $D(XY)=DX\cdot DY$　　(B) $D(X+Y)=D(X-Y)$

(C) X,Y 独立　　(D) X，Y 不独立

二．计算题

1．有 3 只球，4 只盒子，盒子的编号为 1，2，3，4，将球逐个独立地，随机地放入 4 只盒子中去．设 X 为在其中至少有一只球的盒子的最小号码(例如 $X=3$ 表示第 1 号，第 2 号盒子是空的，第 3 号盒子至少有一只球)，求 $E(X)$.

解：∵　事件 $\{X=1\}$={一只球装入一号盒，两只球装入非一号盒}+{两只球装入一号盒，一只球装入非一号盒}+{三只球均装入一号盒}（右边三个事件两两互斥）

∴　$$P(X=1)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$$

∵事件“X=2”=“一只球装入二号盒，两只球装入三号或四号盒”+“两只球装二号盒，一只球装入三或四号盒”+“三只球装入二号盒”

∴ $$P(X=2)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{19}{64}$$

同理： $$P(X=3)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{7}{64}$$

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

故 $$E(X)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}.$$

2. 设(X,Y)的分布律为

Y \ X	1	2	3
−1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求$\mathrm{E}(X),\mathrm{E}(Y)$； (2) 设$Z=Y/X$，求$E(Z)$.

解：（1）由X，Y的分布律易得边缘分布为

Y \ X	1	2	3	
−1	0.2	0.1	0	0.3
0	0.1	0	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.1	0.3
	0.4	0.2	0.4	

E(X)=1×0.4+2×0.2+3×0.4=0.4+0.4+1.2=2 E(Y)= (−1)×0.3+0×0.4 +1×0.3=0.

（2）

$Z=Y/X$	−1	−1/2	−1/3	0	1/3	1/2	1
p_k	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

$E(Z)$= (−1)×0.2+(−0.5)×0.1+(−1/3)×0+0×0.4+1/3×0.1+0.5×0.1+1×0.1
= (−1/4)+1/30+1/20+1/10=(−15/60)+11/60=−1/15.

3. 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)} & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$，

求(1) $E(X)$、$E(Y)$；(2) $D(X)$、$D(Y)$.

解：（1） $E(X)=\iint\limits_D xf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}2xe^{-(x+2y)}dy=1$

$$E(Y)=\iint\limits_D yf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}2ye^{-(x+2y)}dy=\frac{1}{2}$$

（2） $E(X^2)=\iint\limits_D x^2f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}2x^2e^{-(x+2y)}dy=2$

$$E(Y^2)=\iint\limits_D y^2f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}2y^2e^{-(x+2y)}dy=\frac{1}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{1}{4}.$$

学号________________________　　　　姓名__________________________

4.4.2　第四章练习二

一. 选择题

1. 如果$Cov(X,Y)=0$，则下列结论中正确的是(　C　).

(A) X,Y 相互独立　　(B) $D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$

(C) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$　　(D) $D(X-Y)=D(X)-D(Y)$

2. 如果 X,Y 为两个随机变量,且 $E[(X-EX)(Y-EY)]=0$，则 X,Y(　D　).

(A) 独立　(B) 不独立　(C) 相关　(D) 不相关

3. 设 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，则以下结论正确的是(　A　).

(A) X,Y 不相关　(B) X,Y 独立　(C) $\rho_{xy}=1$　(D) $\rho_{xy}=-1$

4. 下式中错误的是(　D　).

(A) $D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$　(B) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

(C) $Cov(X,Y)=\frac{1}{2}[D(X+Y)-DX-DY]$　(D) $D(2X-3Y)=4DX+9DY-6Cov(X,Y)$

二. 计算题

1. 设(X,Y)的分布律为

Y \ X	0	1	2
0	1/6	1/3	1/12
1	2/9	1/6	0
2	1/36	0	0

求(1) $E(X),E(Y)$; (2) $D(X),D(Y)$; (3) $Cov(X,Y),\rho_{XY}$.

解：(1)　$E(X)=0\times\frac{15}{36}+1\times\frac{3}{6}+2\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$　　$E(Y)=0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{7}{18}+2\times\frac{1}{36}=\frac{4}{9}$

(2)　$E(X^2)=0^2\times\frac{15}{36}+1^2\times\frac{3}{6}+2^2\times\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$　　$D(X)=\frac{7}{18}$

$E(Y^2)=0^2\times\frac{7}{12}+1^2\times\frac{7}{18}+2^2\times\frac{1}{36}=\frac{1}{2}$　　$D(Y)=\frac{49}{162}$

(3)　$E(XY)=1\times\frac{1}{6}$　　$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{7}{54}$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

2．设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y) & 0\le x,y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$.

求(1) $E(X),E(Y)$；（2）$D(X),D(Y)$；（3）$Cov(X,Y),\rho_{XY}$.

解： (1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 x\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 y\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$

(2) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 x^2\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{5}{3}$

$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 y^2\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{5}{3}$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36}$，类似 $D(Y)=\frac{11}{36}$

(3) $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 xy\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-(\frac{7}{6})^2=-\frac{1}{36}$

故 $\rho_{XY}=\frac{-1/36}{11/36}=-\frac{1}{11}$.