姓名

班号

学号

南京林业大学试卷(B 卷)（答案）

课程 概率统计 B　　　　　　　　　2016~2017 学年第 2 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1.已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.2$，$P(A|B)=P(A)$, 则 $P(B|A)=$ 0.2.

解：由 $P(A|B)=P(A)$ 得 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)=0.2$$

2.共有电影票 10 张，其中 10 元的 5 张，30 元的 3 张以及 50 元的 2 张，从中任意抽取 3 张，则其中至少有两张是同价格的票的概率是______.

解：利用对立事件的概率，可得 $p=1-\dfrac{C_5^1C_3^1C_2^1}{C_{10}^3}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

3.设离散型随机变量 X 的可能取值为 $-1,0,1$,且取这三个数的概率之比为 1:2:3,则 $P(X=0)=\dfrac{1}{3}$.

解：$1=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)$

$$P(X=-1)=2P(X=0)=3P(X=1)$$

$$\Rightarrow P(X=0)=\frac{1}{3}$$

4.设 X_1、X_2、X_3 为来自正态总体 $X\sim N(\mu,1)$ 的简单随机样本,则当 $a=$ 5/6 时,

$\hat{\mu}=aX_1+\dfrac{1}{2}X_2-\dfrac{1}{3}X_3$ 是总体均值 μ 的无偏估计.

5.设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 $DX=\dfrac{1}{18}$.

解： $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\dfrac{2}{3}$ ，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

二. 单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，则 $Y=3X$ 的概率密度为___C___.

(A) $\dfrac{1}{\pi(1+9y^2)}$　　(B) $\dfrac{1}{\pi(9+y^2)}$　　(C) $\dfrac{3}{\pi(9+y^2)}$　　(D) $\dfrac{3}{\pi(1+y^2)}$

解：$F(y)=P(Y\le y)=P(3X\le y)=P\left(X\le\dfrac{y}{3}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{y}{3}}f(x)dx$

$$\Rightarrow f(y)=F'(y)=\frac{1}{3}f\left(\frac{y}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{\pi\left(1+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right)}=\frac{3}{\pi(9+y^2)}$$

2. 设随机变量 $X\sim N(\mu,5^2)$，$Y\sim N(\mu,10^2)$，$P_1=P\{X\le\mu-5\}$，$P_2=P\{Y\ge\mu+10\}$，则结论正确的是__A__.

(A) $P_1=P_2$　　(B) $P_1>P_2$　　(C) $P_1<P_2$　　(D) $P_1+P_2=1$

解：$X\sim N(\mu,5^2)\Rightarrow\dfrac{X-\mu}{5}\sim N(0,1)$，$Y\sim N(\mu,10^2)\Rightarrow\dfrac{Y-\mu}{10}\sim N(0,1)$

$$P_1=P\{X\le\mu-5\}=\mathrm{P}\left(\frac{X-\mu}{5}\le-1\right)=\Phi(-1)$$

$$P_2=P(Y\ge\mu+10)=P\left(\frac{Y-\mu}{10}\ge1\right)=1-\Phi(1)$$

所以由 $1-\Phi(1)=\Phi(-1)$ 得 $P_1=P_2$。

3. 设二维随机变量（X，Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}k, & 0\le y\le x\le1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 $k=$___C___.

(A) 1　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) 2　　(D) $\dfrac{1}{3}$

解：$1=\iint\limits_{0\le y\le x\le1}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{0\le y\le x\le1}kdxdy=k\int_0^1dx\int_0^xdy=\dfrac{1}{2}k\Rightarrow k=2$

4. 已知随机变量 X 和 Y 的方差存在都大于 0，又满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$,则 X 与 Y 的协方差 $COV(X,Y)=$__A__.

(A) 0　　　　(B) $\frac{1}{2}$　　　　(C) 1　　　　(D) -1

解：$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$， $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$

由 $D(X+Y)=D(X-Y)$ 得 $Cov(X,Y)=0$。

5. 设总体 X 服从区间 $[0,\theta]$ 的上的均匀分布，θ 为未知参数，$\bar{x}$ 是样本均值，则结论正确的是__B__.

(A) θ 的矩估计是 $\overline{X}$　　　　(B) θ 的矩估计是 $2\overline{X}$

(C) θ 的最大似然估计是 $\overline{X}$　　　　(D) θ 的最大似然估计是 $2\overline{X}$

解：由矩估计得

$$\mu_1=E(X)=\frac{\theta-0}{2}\ ,\ A_1=\overline{X}，由\ \mu_1=A_1\ 得\ \theta\ 的矩估计量为\ 2\overline{X}$$

三、（12 分）已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者. 今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，求：（1）该人恰好是色盲患者的概率是多少? （2）若该人恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少?

解：设 A 事件为“挑选到的人是男性”，B 事件为“挑选到的人是女性”，C 事件为“挑选到的人是色盲患者”. 可知，A，B 构成样本空间 S 的一个划分.

（1）由全概率公式：$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$

$=0.5\times0.05+0.5\times0.0025=0.02625$　　（8 分）

(2)由贝叶斯公式：　$P(A|C)=\dfrac{P(C|A)P(A)}{P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)}$.

故　$P(A|C)=\dfrac{0.5\times0.05}{0.5\times0.05+0.5\times0.0025}=\dfrac{20}{21}\approx0.9523$.　　（12 分）

四、（12 分）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若 x\in[1,8],\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求：（1）X 的分布函数 $F(X)$;（2）随机变量 $Y=F(X)$的分布函数.

解：（1）易见，当 $x<1$ 时，$F(x)=0$；当 $x>8$ 时，$F(x)=1$；

对于 $x\in[1,8]$，有 $F(x)=\int_1^x\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t=\sqrt[3]{x}-1$. $F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \sqrt[3]{x}-1 & 1\le x<8\\ 1 & x\ge8\end{cases}$　　（8 分）

（2）设 $G(y)$是随机变量 $Y=F(X)$的分布函数.

显然，当 $y<0$ 时，$G(y)=0$；当 $y\ge1$ 时，$G(y)=1$；　　（10 分）

对于 $y\in[0,1)$，有

$G(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{\sqrt[3]{X}-1\le y\}=P\{X\le (y+1)^3\}=F[(y+1)^3]=y$.

于是，Y=F(X)的分布函数为$G(y)=\begin{cases}0, & 若y<0,\\ y, & 若0\le y<1,\\ 1, & 若y\ge 1.\end{cases}$ （12 分）

五、（12 分）设二维随机变量(X , Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{k}{R^2}, & x^2+y^2<R^2,\\ 0, & x^2+y^2\ge R^2.\end{cases}$

（1）试确定常数 k；（2）求边缘概率密度；（3）问 X , Y 是否独立？

解：

(1) $k=\dfrac{1}{\pi}$ （5 分）

(2) 当 $|x|<R$ 时，(X,Y)关于 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}.$$

当 $|x|\ge R$ 时， $f_X(x)=0$.

即
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & |x|<R,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

同理，(X,Y)关于 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$ 为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}, & |y|<R,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ （10分）

(3) 因 $f(x,y)\ne f_X(x)\ f_Y(y)$,所以 X , Y 不独立。 （12 分）

六、（12 分）设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，试求：（1）随机变量 X 和 Y 的协方差 $COV(X,Y)$；（2）随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

解：三角形区域为 $G=\{(x,y):0\le x\le 1, 1-x\le y\le 1\}$；随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$f(x,y)=\begin{cases}2, & 若(x,y)\in G,\\ 0, & 若(x,y)\notin G.\end{cases}$ 以 $f_X(x)$ 表示 X 的概率密度，则

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时， $f_X(x)=0$；

当 $0<x<1$ 时，有 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1-x}^{1}2\mathrm{d}y=2x$. $f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

因此 $E(X)=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$， $E(X^2)=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$，故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{18}$.

同理可得 $E(Y)=\dfrac{2}{3}$， $D(Y)=\dfrac{1}{18}$.

$$E(XY)=\iint_G 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 y\mathrm{d}y=\frac{5}{12},$$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\dfrac{5}{12}-\dfrac{4}{9}=-\dfrac{1}{36}$， （9 分）

于是 $D(U)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{18}-\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$. （12 分）

七、（12 分）设总体 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^2}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0.\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 为未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本观察值.

（1）求 θ 的最大似然估计量.

（2）求 θ 的矩估计量.

解：

（1）当 $x_i>0$ 时, $i=1,2,\cdots,n$， $L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^n x_i\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}}$，

$$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\ln\prod_{i=1}^n x_i-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta},$$

$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{2n}{\theta}+\dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2}=0$，故 $\hat\theta=\dfrac{\overline{X}}{2}$. （6 分）

（2） $E(X)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\theta^2}x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=-\dfrac{x^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\theta\int_0^{+\infty}\dfrac{2x}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=2\theta$，

令 $E(X)=2\theta=\overline{X}$， 则 $\hat\theta=\dfrac{\overline{X}}{2}$. （12 分）

八、（本题满分 10 分）某厂生产的零件，设计要求其长度为 68mm，实际生产的零件其长度服从正态分布 $N(\mu,3.6^2)$，今从生产的零件中抽取 16 个，测得其样本均值为 $\overline{x}$=69.5 mm，问在显著性水平 α =0.05 下，是否可认为生产的零件符合要求？

（已知： $z_{0.05}=1.645, z_{0.025}=1.96, t_{0.05}(15)=1.7531, t_{0.025}(15)=2.1315$ ）

解： $H_0:\mu=68, H_1:\mu\ne 68$.

因为 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,拒绝域 $|z|>z_{0.025}=1.96$ （9 分）

因 $|z|=\left|\dfrac{69.5-68}{3.6/\sqrt{16}}\right|=1.667<z_{0.025}$， 所以应接受 H_0，即认为生产的零件符合要求. （10 分）