一、选择题

1．已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$互相平行，但方向相反，且$|\vec{a}|>|\vec{b}|$，则必有（ B ）．

(A) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ (B) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ √

(C) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|-|\vec{b}|$ (D) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}|-|\vec{b}|$

2．设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=2$处条件收敛，则此幂级数（ B ）．

?

(A) 收敛半径可能大于2 (B) 收敛半径一定等于2 √

(C) 在$x=-1$条件收敛 (D) 在$x=-2$处条件收敛

3．设$e^x-e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则$a_3=$（ C ）． ☆ e^x的展开式．

(A) 0 (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

4．二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$（ D ）．

(A) 等于0 (B) 等于1 (C) 等于2 (D) 不存在

5．曲面$3xyz-z^3=a^3$在点$(0,a,-a)$处的切平面方程是（ A ）． 切平面公式．

(A) $x+z+a=0$ (B) $x+y-a=0$ (C) $y+z=0$ (D) $x+y+z=0$

6．设函数$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$，l是xOy平面上从点$(0,0)$出发的不平行于坐标轴的任何射线，则偏导数$f_x(0,0)$和方向导数$f_l(0,0)$（ C ）． ?

(A) 两个都不存在 (B) 两个都存在

(C) 只有偏导数存在 (D) 只有方向导数存在

7．更换积分次序$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=$（ A ）．

(A) $\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx$ (B) $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{y} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^2 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx$ (D) $\int_1^2 dy\int_{2-y}^{y} f(x,y)dx$

8．微分方程$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$的通解为（ A ）．

$(A)\ y=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$　　　　$(B)\ y=x(-\cos x+C)$

$(C)\ y=\frac{1}{x}(-\sin x+C)$　　　　$(D)\ y=\frac{1}{x}(\cos x+C)$

9．平面曲线 $x=\cos t+t\sin t$， $y=\sin t-t\cos t\ (0\le t\le 2\pi)$ 的长度等于（　D　）.

$(A)\ \pi$　　　　$(B)\ \pi^2$　　　　$(C)\ 2\pi$　　　　$(D)\ 2\pi^2$

10．设 C 是正方形 $|x|+|y|=1$ 取逆时针方向，则 $\oint_C y^2dx+(2x+\cos^2 y)dy=$（　D　）.

$(A)\ 0$　　　　$(B)\ 1$　　　　$(C)\ 2$　　　　$(D)\ 4$

二、计算题

1．求过点 $A(0,2,4)$，且同时平行于平面 Π_1： $x+2z=1$ 和平面 Π_2： $y-3z=2$ 的直线的方程.

解：所求直线过点 $A(0,2,4)$.

由所求直线与两平面平行，可取直线方向向量为

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=(-2,3,1).$$

故所求直线方程为 $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$.

2．判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{2^n}$ 的敛散性.

解： $u_n=3^n\sin\frac{\pi}{2^n}>0$，级数为正项级数.

因 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}}=\frac{3}{2}>1$，

故级数发散.

3．设 Σ 是整个球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 取外侧，求曲面积分

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^3+y^3)dydz+(y^3+z^3)dzdx+(z^3+x^3)dxdy.$$

解： Σ 是闭曲面，取外侧，在 Σ 围成的立体 Ω 上， $P=x^3+y^3$， $Q=y^3+z^3$， $R=z^3+x^3$ 偏

导存在连续，且

$$P_x + Q_y + R_z = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

利用高斯公式，得

$$\oiint_{\Sigma} (x^3 + y^3)dydz + (y^3 + z^3)dzdx + (z^3 + x^3)dxdy = 3\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dV$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho = \frac{32}{5}\pi$$

4．求二阶微分方程 $y'' - 2y' + y = x^2$ 的通解.

解：对应其次方程 $y'' - 2y' + y = 0$，特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0$，特征根 $r_{1,2} = 1$，

齐次方程通解为 $y = C_1 e^x + C_2 xe^x$.

因 $\lambda = 0$ 不是特征根，设原方程一个特解为 $y^* = ax^2 + bx + c$，代入方程得

$$ax^2 + (b - 4a)x + (2a - 2b + c) = x^2 \Rightarrow a = 1, b = 4, c = 6$$

于是 $$y^* = x^2 + 4x + 6 .$$

故所求通解为 $$y = C_1 e^x + C_2 xe^x + x^2 + 4x + 6 .$$

三、计算题

1．设 $z = z(x, y)$ 由 $e^z = xyz$ 所确定，（1）求 dz；（2）验证 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2z}{z-1}$.

解：（1）设 $F(x, y, z) = e^z - xyz$，则 $F_x = -yz$， $F_y = -xz$， $F_z = e^z - xy$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}$， $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{e^z - xy}$.

所以 $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{z}{e^z - xy}(ydx + xdy).$$

（2）由（1）得 $$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xyz}{e^z - xy} = \frac{2xyz}{xyz - xy} = \frac{2z}{z-1}.$$

2．求函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$ 的极值.

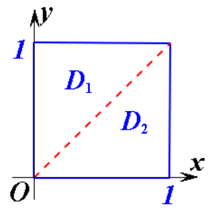
解：定义域为 R^2，且 $f_x = 2x - y - 1$， $f_y = -x + 2y - 1$

令$\begin{cases} f_x = 2x - y - 1 = 0 \\ f_y = -x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$，得驻点为$(1,1)$.

$A = f_{xx} = 2$，$B = f_{xy} = -1$，$C = f_{yy} = 2$，$\Delta = B^2 - AC = -3$

在$(1,1)$点处，$\Delta = -3 < 0$，$A = 2 > 0$，故函数极小值为$f(1,1) = -1$，无极大值.

3．设D为正方形区域：$0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 1$，求二重积分$\iint\limits_D |y - x| d\sigma$.



解：如图，直线把D分为D_1，D_2，则$D = D_1 + D_2$，于是

$$\iint\limits_D |y - x| d\sigma = \iint\limits_{D_1} (y - x) d\sigma + \iint\limits_{D_2} (x - y) d\sigma$$

$$= 2\iint\limits_{D_1} (y - x) d\sigma = 2\int_0^1 dx \int_x^1 (y - x) dy$$

$$= 2[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

四、计算题

（1）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n$（其中$|x| < 1$）的和函数；（2）求常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}$的和.

解：（1）由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$

$$= (\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})' + \sum_{n=1}^{\infty}x^n = (\frac{x^2}{1-x})' + \frac{x}{1-x} = \frac{3x - 2x^2}{(1-x)^2}，\ |x| < 1.$$

得所求和函数为$s(x) = \frac{3x - 2x^2}{(1-x)^2}$，$|x| < 1$.

（2）令$x = \frac{1}{2}$，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n |_{x=1/2} = s(\frac{1}{2}) = 4$.