南京林业大学试卷(B 卷)（答案）

课程 线性代数 A　　　　　　2016~2017 学年第 1 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1． 排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数是（　B　）．

$(A)\ n^2$　　$(B)\ \dfrac{n(n-1)}{2}$　　$(C)\ \dfrac{n(n+1)}{2}$　　$(D)\ n!$

2． 一个 n 阶行列式是（　C　）项的代数和.

$(A)\ n$　　$(B)\ n^2$　　$(C)\ n!$　　$(D)\ n^3$

3． 设 A, B 均为 n 阶方阵，则下列运算正确的是（　D　）．

$(A)\ (AB)^k = A^k B^k$　　$(B)\ AB = BA$

$(C)\ B^2 - A^2 = (B-A)(B+A)$

(D) 若 $AB = BA$，则 $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

4． 下述命题不正确的是（　D　）．

$(A)\ R(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$；　　(B) 若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$；

(C) 若 P,Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A)$；　$(D)\ R(A+B) \ge R(A) + R(B)$.

5． 设 A 为 n 阶可逆方阵，λ 为 A 的一个特征值，则 A^* 的一个特征值为（　B　）．

$(A)\ \lambda^{-1}|A|^n$　　$(B)\ \lambda^{-1}|A|$　　$(C)\ \lambda|A|$　　$(D)\ \lambda^{-1}|A|^{n-1}$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1． 设 $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3$，则 $D_1 = \begin{vmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{\ -9\ }$.

2．设$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则$A$的逆矩阵$A^{-1}=$ $\underline{\frac{1}{12}\begin{pmatrix}4&0&0\\-1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}}$.

3．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$ $\underline{\ 2\ }$.

4．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$为3阶非零矩阵，且$AB=O$，则$t=$ $\underline{\ -3\ }$.

5．已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$正定，则常数$a$的取值范围为

$\underline{-\frac{\sqrt{14}}{2}<a<\frac{\sqrt{14}}{2}}$.

三、计算下列行列式（每题8分，共16分）

1. $\begin{vmatrix}1&2&0&5\\3&5&6&2\\4&2&8&3\\2&1&2&9\end{vmatrix}$；

2. $D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&b&\cdots&b\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$.

解：1.原式$=\begin{vmatrix}1&2&0&5\\3&5&6&2\\4&2&8&3\\2&1&2&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&6&-13\\-6&8&-17\\-3&2&-1\end{vmatrix}=88$ （3分，6分，8分）

2.

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&b&\cdots&b\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\1&a&b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&b&b&\cdots&b\\1&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$

.

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$ （3分，6分，8分）

四、（10 分）已知矩阵A、B和X满足关系式：$AX=B+X$，其中$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 7 & -2 & 4\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解：$\left(A-E,B\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 7 & -2 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$（4 分，8 分）

由 $X=\left(A-E\right)^{-1}B$，则 $X=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ -1 & 2 & -2\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$. （10 分）

五、（12 分）求向量组

$\vec{\alpha}_1=\left(1,0,1,1\right)^T$，$\vec{\alpha}_2=\left(1,1,2,1\right)^T$，$\vec{\alpha}_3=\left(2,1,3,3\right)^T$，$\vec{\alpha}_4=\left(3,2,5,3\right)^T$，$\vec{\alpha}_5=\left(1,-1,0,2\right)^T$ 的秩和一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示。

解：$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4,\vec{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 3 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，（2 分，4 分，6 分）

则秩为 3，最大无关组为 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$，且 $\vec{\alpha}_4=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_5=\vec{\alpha}_1-2\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$.（8 分，10 分，12 分）

六、（12 分）当 λ 取何值时，方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$ 无解？有唯一解？有无穷多解，并在有无穷多解时求其通解。

解：$B=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda-1)\end{array}\right)$ （6 分）

所以当 $\lambda=-2$ 时方程组无解； （8 分）

当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，方程组有唯一解； （10 分）

当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解，通解为 $x=k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T+(-2,0,0)^T$.（12 分）

七、（15 分）已知二次型: $f=5x_1^{\ 2}+5x_2^{\ 2}+3x_3^{\ 2}-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$，请用正交变换化此二次型为标准形，并写出相应的正交矩阵。

解：二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$，（2 分）

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$，（4 分）

解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9.$（7 分）

$\lambda_1=0$ 时，解 $(0-A)x=0$ 得 A 的属于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $\eta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，（9 分）

$\lambda_2=4$ 时，解 $(4E-A)x=0$ 得 A 的属于特征值 $\lambda_2=4$ 的特征向量 $\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，（11 分）

$\lambda_3=9$ 时，解 $(9E-A)x=0$ 得 A 的属于特征值 $\lambda_3=9$ 的特征向量 $\eta_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，（13 分）

三个特征向量已经两两正交，将其标准化后作为列即可得到所求的正交矩阵：

$$T=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

在此矩阵下，原二次型化为 $f=4{y_2}^2+9{y_3}^2$.（15 分）

八、（5 分）设方阵 A 满足方程 $A^2-4A+3E=0$，证明：$A+3E$ 可逆，并求它的逆矩阵。

解：由 $A^2-4A+3E=0$ 得 $(A+3E)(A-7E)=-24E$ 知 $A+3E$ 可逆（3 分）

且

$$(A+3E)^{-1}=-\frac{1}{24}(A-7E).$$（5 分）