南京林业大学试卷(B卷)（参考答案）

课程 概率统计B　　　　　　2017~2018 学年第 2 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

姓名

班号

学号

一、选择题（每题3分，共15分）

1．若 $A\subset B$ 且 $P(A)>0$，则以下结论正确的是（　B　）．

$(A)\ P(A-B)=P(A)-P(B)$　　$(B)\ P(\bar{A}\cup B)=1$

$(C)\ P(B\mid A)=0$　　$(D)\ P(A\mid B)=1$

2．设在3重伯努利试验中事件 A 至少出现一次的概率为 $\frac{7}{8}$，则 $P(A)=$（　D　）．

$(A)\ 1/8$　　$(B)\ 1/4$　　$(C)\ 3/8$　　$(D)\ 1/2$

3．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$，分布函数为 $F(x)$，则

当 $0\le x<1$ 时 $F(x)=$（　B　）．

$(A)\ 1+\frac{x^2}{2}$　　$(B)\ \frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}$　　$(C)\ \frac{e^x}{2}+\frac{x^2}{2}$　　$(D)\ \frac{x^2}{2}$

4．设 $E(X)=0, D(X)=2$，用切比雪夫不等式估计概率 $p=P(X^2<3)$，则（　A　）．

$(A)\ p\ge 1/3$　　$(B)\ p<1/3$　　$(C)\ p\ge 2/3$　　$(D)\ p<2/3$

5. 设总体 $X\sim N(2,1^2)$，X_1,X_2,X_3,X_4 为其样本，若统计量 $a[(X_1-X_2)^2+(X_3+X_4-4)]^2$ 服从 χ^2-分布，则 $a=$（　A　）

$(A)\ \frac{1}{2}$　　$(B)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$　　$(C)\ 1$　　$(D)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题（每空3分，共15分）

1．设事件 A_1,A_2,A_3 两两互不相容且 $\sum_{i=1}^{3}A_i=\Omega$， $P(A_1)=P(A_2)=2P(A_3)$，对于事件 B 有

$P(B|A_1)=P(B|A_2)=P(B|A_3)=\frac{1}{3}$，则 $P(B)=\underline{1/3}$， $P(A_1|B)=\underline{2/5}$.

2．设 $X\sim N(3,1)$， $Y\sim N(2,1)$ 且 X,Y 相互独立， $Z=X-2Y+1$，则 $P(Z<0)=\underline{1/2}$.

3．设总体 $X\sim N(\mu,1^2)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(\bar{X}\pm 1.96/\sqrt{n})$，设 L 为该置信区间长度，若要使 $L\le 2$，则样本容量 n 应满足 $\underline{n\ge 4或n\ge 3.8416}$.（$u_{0.05}=1.64,u_{0.025}=1.96$）

4．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， X_1,X_2 为其样本，若 $\hat{\mu}=aX_1-\frac{1}{2018}X_2$ 是 μ 的一个无偏点估计，则

$a=\underline{2019/2018}$.

三、(12 分) 设袋中有五个相同的小球，其中有三个标号为1，两个标号为2，现某人随机抽取三个，记三个球的号码之和为 X . 试求:（1）X 的分布律;（2）$E(X)$ 和 $D(X)$;（3）$Y=\cos(\pi X)$ 的分布律.

解:（1）

X	3	4	5
P	0.1	0.6	0.3

, （4 分）

（2）$E(X)=4.2$， $E(X^2)=18$， $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0.36$， （10 分）

（3）

Y	-1	1
P	0.4	0.6

, （12 分）

四、(12 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+kx, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$，试求:（1）$k$ 的值;（2） $P(-2<X<1)$;（3） $E(X^2)$.

解: （1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2(1+kx)dx=1$ 得 $k=-1/2$， （4 分）

（2）$P(-2<X<1)=\int_0^1(1-x/2)dx=3/4$， （8 分）

（3）$E(X^2)=\int_0^2 x^2(1-x/2)dx=2/3$. （12 分）

五、（12 分）某网店店主每周周五进货以备周六、日 2 天销售，根据多周统计，这 2 天销售量 X,Y

相互独立且服从以下分布：$\begin{array}{c|cc} X & 4 & 5 \\ \hline P & 0.4 & 0.6 \end{array}$，$\begin{array}{c|ccc} Y & 4 & 5 & 6 \\ \hline P & 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{array}$. 求：（1）$(X,Y)$ 的分布律；（2）2 天销售总量 $Z=X+Y$ 的分布律；（3）如果周五进货 9 件，不够卖的概率多大？

解：（1）(X,Y) 的分布律 $\begin{array}{c|ccc} X\backslash Y & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & 0.08 & 0.2 & 0.12 \\ 5 & 0.12 & 0.3 & 0.18 \end{array}$，（4 分）

（2）$\begin{array}{c|cccc} X+Y & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline P & 0.08 & 0.32 & 0.42 & 0.18 \end{array}$，（8 分）

（3）$P(X+Y>9)=0.6$.（12 分）

六、（14 分）设 (X,Y) 服从区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$ 上的均匀分布.（1）求 (X,Y) 的概率密度函数 $f(x,y)$；（2）求关于 X 和 Y 的边缘概率密度并判断 X 与 Y 是否独立；（3）求 $P(0<Y<X<\frac{1}{2})$.

解：（1）$f(x,y)=\begin{cases} 1/\pi, & x^2+y^2\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$（2 分）

（2）当 $-1<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1/\pi dy=2\sqrt{1-x^2}/\pi$，即

$$f_X(x)=\begin{cases} 2\sqrt{1-x^2}/\pi, & -1<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

当 $-1<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1/\pi dx=2\sqrt{1-y^2}/\pi$，即

$$f_Y(y)=\begin{cases} 2\sqrt{1-y^2}/\pi, & -1<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立；（10 分）

（3）$P(0<Y<X<\frac{1}{2})=\iint_{D:0<y<x<\frac{1}{2}} f(x,y)d\sigma=1/8\pi$.（14 分）

七、（14 分）设某种元件使用寿命为总体 X（单位：年），已知其概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases} \theta x^{-(\theta+1)}, & x>1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，其中 $\theta>1$ 为未知参数. 现从该种元件中随机抽取 8 个，分别测得

其寿命如下：1.4，1.7，1.5，1.9，1.8，1.3，1.6，1.1，试求：（1）样本均值 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2；（2）θ 的矩估计值 $\hat{\theta}$ 和最大似然估计值 $\hat{\theta}_L$.

解：（1）$\overline{x}=1.5375$， $s^2=0.07125$， （2分）

（2）$\mu_1=E(X)=\theta\int_1^{+\infty}x^{-\theta}dx=\dfrac{\theta}{\theta-1}$ ，解得 $\theta=\dfrac{\mu_1}{\mu_1-1}$

从而 $$\hat{\theta}=\frac{A_1}{A_{1-1}}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1},$$ （5分）

又 $\overline{x}=1.5375$ 故 $\hat{\theta}=2.86$. （7分）

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{-(\theta+1)}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{-(\theta+1)}$， $\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 $\hat{\theta}_L=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$， （12分）

代入数据得 $\hat{\theta}_L=2.40$. （14分）

八、（6 分）某批矿砂的 9 个样品中的镍含量，经测定分别为（%） $3.31, 3.27, 3.24, 3.28, 3.23, 3.24, 3.26, 3.26, 3.24$. 已知该种矿砂的镍含量服从标准差为 $\sigma=0.2$ 的正态分布，问在 $\alpha=0.05$ 下能否接受假设：这批矿砂的镍含量的均值为3.45？（$z_{0.05}=1.645$，$z_{0.025}=1.96$）

解：检验假设：$H_0:\mu=3.45$，$H_1:\mu\neq 3.45$. （2分）

因 σ 已知，采用 Z 检验法，其拒绝域为 $|z|=\left|\dfrac{\overline{x}-3.45}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{0.025}$. （4分）

$|z|=\left|\dfrac{\overline{x}-3.45}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=2.865>1.96$，拒绝 H_0，即认为这矿砂的镍含量不是3.45. （6分）