南京林业大学试卷(A 卷)（答案）

姓名　　班号　　学号

课程 高等数学 A(2)　　　2018~2019 学年第 2 学期

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．设向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，且 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=\sqrt{2}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=\underline{\sqrt{5}}$.

2．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}-u_n\right)$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\underline{e}$.

3．以 $y_1=e^{-x}$, $y_2=xe^{-x}$ 为特解的二阶常系数线性齐次微分方程为 $\underline{y''+2y'+y=0}$.

4．设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds=\underline{2\pi}$.

5．函数 $u=xy^2z^3$ 在 $M(3,2,1)$ 处的梯度为 $\underline{gradu=(4,12,36)}$.

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数中必定收敛的是（　D　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

2．设直线 L 通过点 $A(-2,1,3)$ 和 $B(0,-1,2)$，则点 $C(10,5,10)$ 到直线 L 的距离为（　B　）.

(A) $30\sqrt{2}$　　(B) $10\sqrt{2}$　　(C) $20\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{2}$

3. 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，则极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0-2\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=$（　C　）.

(A) $-2f'_x(x_0,y_0)$　　(B) $\dfrac{1}{2}f'_x(x_0,y_0)$　　(C) $-2f'_y(x_0,y_0)$　　(D) $\dfrac{1}{2}f'_y(x_0,y_0)$

4．设 $f(x)=x^3, x\in[0,\ 1]$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, x\in(-\infty,\ +\infty)$，其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx,\ n=1,2,3,\cdots$， $S(x)$ 是 $f(x)$ 偶延拓的傅里叶级数，则 $S\left(-\dfrac{1}{3}\right)=$

（　B　）.

$(A)\ -\dfrac{1}{27}$　　　　$(B)\ \dfrac{1}{27}$　　　　$(C)\ 1$　　　　$(D)\ -1$

5．若$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{y}^{\varphi(y)} f(x,y)dx$成立，则$\varphi(y)=$（　C　）.

$(A)\ y^2$　　　　$(B)\ y$　　　　$(C)\ \sqrt{y}$　　　　$(D)\ \sqrt[3]{y}$

三、计算题（每题 7 分，共 14 分）

1．设由方程$xy+xz+yz=1$确定了隐函数$z=f(x,y)$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解：设$F(x,y,z)=xy+xz+yz-1$，则$F'_x=y+z$，$F'_y=x+z$，$F'_z=x+y$，

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}.$$
（4 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y+z)}{(x+y)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x+z)}{(x+y)^2}.$$
（7 分）

2．设$u=yf(\dfrac{x}{y})+xg(\dfrac{y}{x})$，其中函数$f,g$具有二阶连续导数，求$x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf'\cdot\dfrac{1}{y}+g+xg'\cdot(-\dfrac{y}{x^2})=f'+g-\dfrac{y}{x}g'$，（2 分）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''+g'\cdot(-\frac{y}{x^2})+\frac{y}{x^2}g'+\frac{y^2}{x^3}g''=\frac{1}{y}f''+\frac{y^2}{x^3}g'',$$
（4 分）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(-\frac{x}{y^2})\cdot f''+g'\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}g'-\frac{y}{x^2}g''=-\frac{x}{y^2}f''-\frac{y}{x^2}g'',$$
（6 分）

故
$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$
（7 分）

四、计算题（每题 7 分，共 21 分）

1．计算$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy$，其中$D$是以$(0,0)$，$(1,1)$，$(0,1)$为顶点的三角形闭区域.

解：$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx$　（2 分）

$$=\int_0^1\frac{y^3}{3}e^{-y^2}dy=-\frac{1}{6}\left[y^2e^{-y^2}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-y^2}dy^2\right]=\frac{1}{6}\left[1-2e^{-1}\right].$$
（5 分，7 分）

2．计算$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dv$，其中积分区域$\Omega$是由曲面$x^2+y^2=2z$及$z=2$所围成的闭区域

解：$x^2+y^2=2z$ 和 $z=2$ 的交线是平面 $z=2$ 上的圆 $x^2+y^2=4$，故 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}：$x^2+y^2\le 4$，利用柱坐标得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot rdrd\theta dz \qquad (2分)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz=2\pi\int_0^2 r^3(2-\frac{r^2}{2})dr=\frac{16\pi}{3}. \qquad (5分,7分)$$

3．计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中 Σ 是由 $x^2+y^2+z^2=a^2(x\ge 0,y\ge 0)$ 及坐标平面 $x=0$，$y=0$ 所围成的闭区域的整个边界曲面.

解：因为 Σ_3 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 一部分，而被积函数定义在 Σ_3 上，故总有

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=a^2,$$

所以

$$\iint_{\Sigma_3}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint_{\Sigma_3}a^2dS=a^2\iint_{\Sigma_3}dS=a^2\cdot\frac{4\pi a^2}{4}=\pi a^4, \qquad (3分)$$

（应用 $\iint\limits_{\Sigma}dS=$ 曲面 Σ 的面积）

最后 $$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=(\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3})(x^2+y^2+z^2)dS \qquad (5分)$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^4+\frac{1}{4}\pi a^4+\pi a^4=\frac{3}{2}\pi a^4. \qquad (7分)$$

五、计算题（每题 7 分，共 14 分）

1．求微分方程 $\left(x+1\right)\dfrac{dy}{dx}-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$ 的通解.

解:由原式得 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$，所以对应的齐次方程为

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0\Rightarrow\frac{dy}{2y}=\frac{dx}{x+1},两边积分得\ y=C(x+1)^2. \qquad (2分)$$

设 $y=C(x)(x+1)^2$ 是 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的解,

则 $y'=C'(x)(x+1)^2+2C(x)(x+1)$,代入 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 得

$C'(x)(x+1)^2=(x+1)^{\frac{5}{2}}$,所以 $C(x)=\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$，（5 分）

所求通解为 $$y=(x+1)^2\,[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C].$$（7 分）

2．求微分方程 $y''-3y'+2y=5$ 满足 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$ 的特解.

解：微分方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，其根为 $r_1=1, r_2=2$，

故对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.（2 分）

易得 $y^*=\dfrac{5}{2}$ 为非齐次方程的一个特解，故原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{5}{2}$.

由 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$，得 $\begin{cases} C_1+C_2+\dfrac{5}{2}=1 \\ C_1+2C_2=2 \end{cases}$，解之得 $C_1=-5$，$C_2=\dfrac{7}{2}$.（5 分）

综上满足初始条件的特解为 $y=-5e^x+\dfrac{7}{2}e^{2x}+\dfrac{5}{2}$.（7 分）

六、（本题 11 分）（1）求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域及和函数；（2）求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{4^{n+1}}$ 的和.

解：（1）因为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2}=1$，且当 $x=\pm1$ 时，数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n(n+1)$ 发散.所以原幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.（2 分）

设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，$x\in(-1,1)$，

则

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$（8 分）

（2）取 $x=\dfrac{1}{4}$,得 $s\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{16}{9}$，

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^{n+1}}=\frac{1}{4}s\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{9}.$$（11 分）