南京林业大学试卷(B 卷)答案

课程 线性代数B　　2019~2020 学年第 1 学期

题号	一	二	三	四	总分
得分					

姓名　　班号　　学号

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 2$，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & 0 \\ 2a_{21} & a_{22} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ __4__.

2、设 A 为 2 阶可逆阵，且 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\underline{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}$.

3、设 A 为二阶矩阵，满足 $|A-E|=0, |2A+4E|=0$，则 A 的特征值为 $\underline{1和-2}$.

4、设齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 中系数矩阵 A 为 8×6 矩阵，且其基础解系中仅含 2 个解向量，则 $R(A)=$ __4__.

5、已知矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ 具有相同的特征值，则 $a=$ __6__.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_r$ 的秩为 s，则（　C　）.

（A）$r=s$　（B）$r\le s$　（C）$s\le r$　（D）$s<r$

2、设 n 阶方阵 A,B 和 C，则下列说法正确的是（　B　）.

（A）$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　（B）$AB=0$，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$

（C）$(AB)^T=A^TB^T$　（D）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

3、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $R(A)=m<n$，则非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$（　D　）.

（A）有无穷多解　（B）有唯一解　（C）无解　（D）无法判断解的情况

4、向量组 $\vec{\alpha}_1=(3,1,t)^T, \vec{\alpha}_2=(4,t,0)^T, \vec{\alpha}_3=(1,0,t)^T$ 线性无关，则（　D　）.

（A）$t=0或t=2$（B）$t\ne 1或t\ne -2$　（C）$t=1或t=-2$（D）$t\ne 0或t\ne 2$

5、设 A 为三阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $|-3A^*|=$（　A　）.

（A）$-\frac{27}{4}$　　（B）$\frac{27}{4}$　　（C）$-\frac{3}{4}$　　（D）$\frac{3}{4}$

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

1、计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\2&5&3&2\\2&-2&-2&-2\\-1&-4&-7&4\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\2&5&3&2\\2&-2&-2&-2\\-1&-4&-7&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\2&5&3&2\\1&-1&-1&-1\\-1&-4&-7&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\0&7&-1&0\\0&0&-3&-2\\0&-5&-5&5\end{vmatrix}$　　----6 分

$=-10\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\0&7&-1&0\\0&0&-3&-2\\0&1&1&-1\end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix}7&-1&0\\0&-3&-2\\1&1&-1\end{vmatrix}=-370$. .　　-----10 分

2、设 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ 且 $AX=A+2X$，求矩阵 X.

解：由 $AX=A+2X$，得 $(A-2E)X=A$，

又由于 $|A-2E|\neq 0$，所以 $(A-2E)$ 可逆，故 $X=(A-2E)^{-1}A$　　---3 分

$(A-2E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix},(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&\frac{5}{3}&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　---10 分

3、求向量组 $\vec{a}=(2,4,2)$，$\vec{b}=(1,1,0)$，$\vec{c}=(2,3,1)$，$\vec{d}=(3,5,2)$ 的秩和一个极大无关组。

解：$A=(\vec{a}^T,\vec{b}^T,\vec{c}^T,\vec{d}^T)=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

-------5 分

向量组的秩为 2，它的一个极大无关组：$\vec{a},\vec{b}$.　　------10 分

4、求解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_3+2x_4=5 \end{cases}$.

解：$\therefore \overline{A}=\left(A|b\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ -------5 分

$\therefore \begin{cases} x_1=-2x_3-2x_4+5 \\ x_2=x_3+x_4-3 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases}$ 基础解系为$\vec{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\vec{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 原方程组的一个特解为$\vec{\eta}=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

则原方程组的通解为$\overrightarrow{X}=c_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+c_2\overrightarrow{\varepsilon_2}+\vec{\eta}=c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. --------10 分

（c_1,c_2为任意常数）

5、求$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解：(1) 由题意$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-\left(\lambda-2\right)(\lambda-4)^2=0$，

特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4$； ------------6 分

$\lambda_1=2$时，$\left(A-2E\right)x=0$基础解系为$p_1=(0,-1,1)^T$，属于$\lambda_1=2$的特征向量为$kp_1,k\neq 0$；

$\lambda_2=\lambda_3=4$时，$\left(A-4E\right)x=0$基础解系为$p_2=(1,0,0)^T$ ； $p_3=(0,1,1)^T$ ；

属于$\lambda_2=\lambda_3=4$的特征向量为$k_1p_1+k_2p_2,k_1$、k_2不全为0. ----------------10 分

6、已知三阶方阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$有一个特征向量为$\vec{\varepsilon}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。

（1）求a,b的值； （2）求对应于$\vec{\varepsilon}$的特征值

解：设对应于$\vec{\varepsilon}$的特征值为λ，则有$A\vec{\varepsilon}=\lambda\vec{\varepsilon}$，

即 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{cases} -1 = \lambda \\ 5 + a - 3 = \lambda \\ -1 + b + 2 = -\lambda \end{cases}$ ----6 分

（1）$\therefore \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \end{cases}$； -------8 分

（2）$\therefore \lambda = -1$. -------10 分

四、证明题（10 分）

17、设 $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$， $\vec{b}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$， $\cdots$ $\vec{b}_r = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_r$，且向量组 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 线性无关。证明：向量组 $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_r$ 线性无关。

证明：

设存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 使得等式 $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \cdots + \lambda_r \vec{b}_r = \vec{0}$ 成立，

也即 $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \cdots \lambda_r(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots \vec{a}_r) = \vec{0}$

化简得 $(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r)\vec{a}_1 + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_r)\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_r \vec{a}_r = \vec{0}$ -------5 分

又因为向量组 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 线性无关

则

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r = 0 \\ \qquad \lambda_2 + \cdots + \lambda_r = 0 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad \lambda_r = 0 \end{cases}$$

解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$，故向量组 $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_r$ 线性无关。 -------10 分