线代A练习四

一、选择题（每小题5分，共25分。）

1、已知四阶行列式D_4第一行的元素依次为1，2，－1，－1，它们的余子式为2，-2，1，0，则D_4的值为（　　）

（A）-3；　（B）-5；　（C）3；　（D）　5.

2、已知n阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 0 & 1 & . & . & 1 \\ . & & 1 & & \\ . & & & & .. \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$，则$|A|$的所有元素的代数余子式之和等于（　　　）

（A）0；　（B）1；　（C）-1；　（D）2.

3、设A是$m\times n$矩阵，C是n阶可逆矩阵，矩阵A的秩为r，矩阵$B=AC$的秩r_1，则（　　）

（A）$r>r_1$；　（B）$r<r_1$；　（C）$r=r_1$；　（D）r与r_1的关系依C而定.

4、设A为$m\times n$矩阵，齐次线性方程组$Ax=0$仅有零解的充分必要条件是（　）

（A）A的列向量组线性无关；　（B）A的列向量组线性相关；

（C）A的行向量组线性无关；　（D）A的行向量组线性相关.

5、设λ是n阶可逆矩阵A的特征值，ξ是A的对应于λ的特征向量，P是n阶可逆矩阵，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*$的对应于特征值$\frac{|A|}{\lambda}$的特征向量是（　　）

（A）$P^{-1}\xi$；　（B）$P\xi$；　（C）$P^T\xi$；　（D）$(P^T)^{-1}\xi$.

二、填空题（每小题5分，共25分。）

1、设A,B都是n阶正交矩阵，若$|A|+|B|=0$，则$|A+B|=$__________.

2、已知$AB-B=A$，其中$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则$A=$__________.

3、已知向量组a_1,a_2,a_3,a_4.线性无关，若向量组$a_1+ka_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4+a_1$线性相关，则$k=$__________.

4、若线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=2b \end{cases}$无解，则常数$a,b$应满足的条件是__________.

5、若 4 阶矩阵 A 与 B 相似，且 A 的特征值为 1，2，3，4，则矩阵 B^*-E 的全部特征值为 ____________________.

三、计算证明题（50 分）

1、（12 分）求向量组 $a_1=(1,3,0,5), a_2=(1,2,1,4), a_3=(1,1,2,3), a_4=(1,-3,6,-1)$ 的一个极大线性无关组和秩，并将不在极大无关组里的向量用极大无关线性表示。

2、(15 分)设 A 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2+2A=0$，已知 A 的秩 $\boldsymbol{R(A)=2}$

(1)求 A 的全部特征值；

(2)当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵.

3、(15 分)已知二次型 $f=2x_1{}^2+3x_2{}^2+3x_3{}^2+2ax_2x_3(a>0)$ 通过正交变换可化为标准形 $f=y_1{}^2+2y_2{}^2+5y_3{}^2$，求参数 a 及所用的正交变换.

4、(8 分)设 A 是 n 阶矩阵，且满足 $A^2=E$，证明: $\boldsymbol{R(A-E)+R(A+E)=n}$.