线代 A 期末练习二

一、填空题

1. $(AB)^k = A^k B^k$ 成立的条件是________

2. 若 $A^3 = 0$,则 $(A-E)^{-1} =$ ____________________

3. 求矩阵的逆 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$ =_________________

4. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 的标准形为______________________

5. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 49 \end{vmatrix}$ = __________________

6. 已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 0,1,2，则________________

7. 已知 $\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 a= _______

8. 设集合 $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a+b+c=0, a,b,c \in R \right\}$,

   则 V 的一组基为_________________________

9. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 λ _____________

10．已知 A 为 4×3 的矩阵，进行如下变换：$c_2 + 2c_1$，写出这种变换对应的初等矩阵______________

二、计算题

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$　　　　2. $D=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n+b \\ \cdots & & \cdots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$

三、已知 $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 且满足 $AX=A+X$，求矩阵 X

四、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，

(1)求 A 的特征值和特征向量 (2)求可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵(3)计算 $\left|A^*-(2A)^{-1}\right|$

五、求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的一个最大线性无关组，并将其余向量用最大无关组表示

六、求解下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=4 \\ x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1-3x_2+3x_4=1 \\ 7x_2+3x_3-x_4=-3 \end{cases}$$

七、利用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+2x_2x_3$ 为标准形。

八、（1）若向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，但不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s=1}$ 线性表出，证明：α_s 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s=1}$ 线性表出。

(2). 设 A 为 n 阶的方阵，证明：当 $R(A)=n$ 时，$R(A^*)=n$.(其中 A^* 为 A 的伴随矩阵)