

第4-1章 曲线基本概念



课程目标



曲线的分类

曲线的表示方法

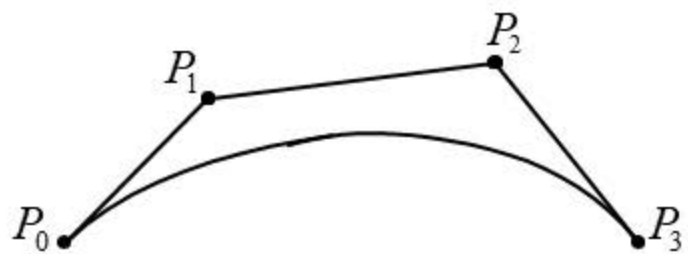
绘制曲线的基本思想

曲线的常用术语

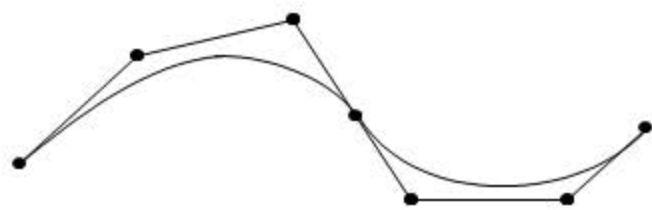
曲线的分类



- ✓ 规则曲线
- ✓ 不规则曲线



Bézier曲线曲面



B样条曲线曲面

曲线的表示



显示表示

- ✓ 形式 $y=f(x)$
- ✓ 一个 x 值只对应一个 y 值
- ✓ 不能表示封闭或多值曲线

曲线的表示



隐式表示

- ✓ 形式 $f(x,y)=0$
- ✓ 三维空间曲线的隐式表示式为交面式:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

曲线的表示



参数表示

- ✓ 将曲线上各点坐标变量显式地表示成参数的函数形式
- ✓ 例如用参数 t 表示，曲线上每一点笛卡尔坐标的参数式

$$x=x(t)$$

$$y=y(t) \quad t \in [0,1]$$

- ✓ 曲线上一点坐标的矢量表示

$$p(t)=[x(t) \ y(t)] \quad t \in [0,1]$$

曲线的表示



参数表示

- ✓ 通常将参数区间规范化为 $t \in [0, 1]$
- ✓ $P_0(x_0, y_0)$ 和 $P_1(x_1, y_1)$ 两点的直线段的参数方程

$$P = P_0 + (P_1 - P_0)t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t, \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

- ✓ 例如，端点坐标 $p_1[1, 2]$, $p_2[4, 3]$ 的直线段参数方程

$$x(t) = 1 + 3t \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$y(t) = 2 + t$$

绘制曲线的基本思想



参数表示

- ✓ 用很多短直线段来逼近曲线
- ✓ 曲线的光滑度和精确度取决于数据点的精度和数量
- ✓ 点的数量越多，直线段越短，则连成的曲线愈接近于理想曲线

参数样条曲线的常用术语



实际工作中常采用二次或三次参数样条曲线

✓ 二次参数样条曲线

$$P(t)=A_0+A_1t+A_2t^2$$

✓ 三次参数样条曲线

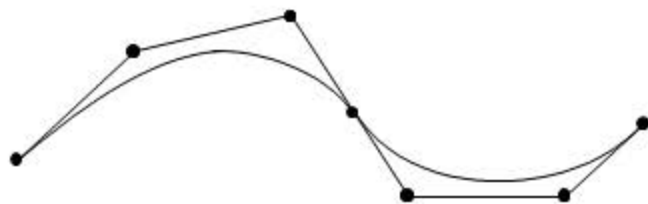
$$P(t)=A_0+A_1t+A_2t^2+A_3t^3$$

参数样条曲线的常用术语



型值点和控制点

- ✓ 型值点：曲线上少量描述曲线几何形状的数据点
- ✓ 控制点：用来控制或调整曲线形状的特殊点，曲线段本身不通过该控制点



参数样条曲线的常用术语



切线、法线和曲率

✓ 当曲线上的点Q趋于M时，割线的极限位置称为曲线在点M处的切线

✓ 若参数曲线上任一点的坐标

$$\mathbf{p}(t) = [\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)]$$

✓ 该点的切线方程即为参数曲线在该点处的一阶导数

$$\mathbf{p}'(t) = [\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t), \mathbf{z}'(t)]$$

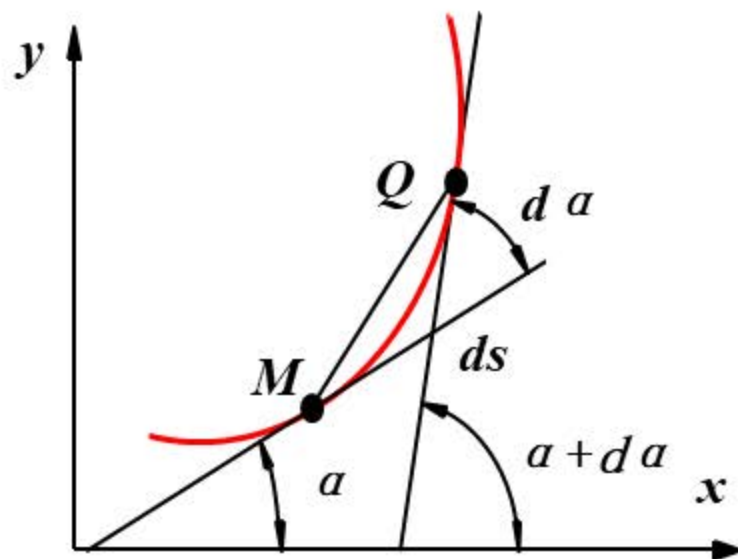
参数样条曲线的常用术语



切线、法线和曲率

- ✓ **法线**就是垂直切线方向且通过该点的直线
- ✓ 曲率是切线的方向角对于弧长的转动率,其值为曲线在M处的**二阶导数**

$$k = \lim_{MQ} \frac{\delta}{MQ} = \frac{d\alpha}{ds}$$



参数样条曲线的常用术语

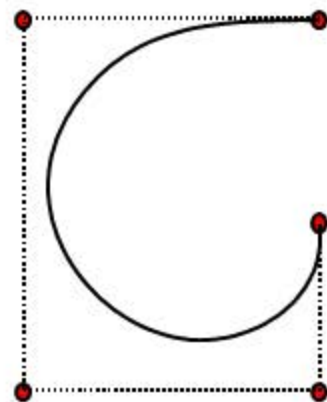


插值、逼近和拟合

- ✓ **插值**与**逼近**是曲线设计中两种不同方法
- ✓ **插值**：建立的曲线数学模型**严格通过**每一个**型值点**
- ✓ **逼近**：建立的曲线数学模型只是**近似地接近**型值点



曲线的插值



曲线的逼近

参数样条曲线的常用术语



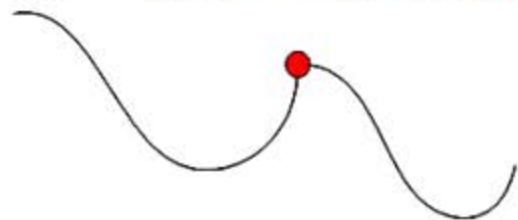
- ✓ 为保证分段参数曲线从一段到另一段平滑过渡，在连接点处要求各种参数连续性条件
- ✓ 参数连续性和几何连续性

参数样条曲线的常用术语

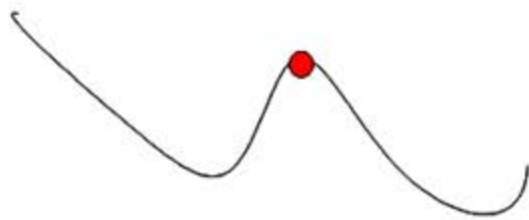


参数连续性

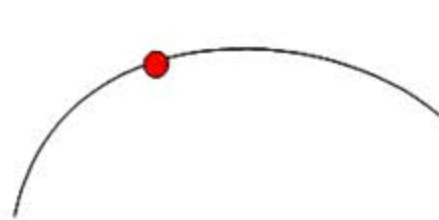
- ✓ **0阶参数连续性**，记为 C^0 ，指曲线相连，即**第一个**曲线段**终点**与**第二个**曲线段**起点**相同
- ✓ **1阶参数连续性**，记为 C^1 ，指两个相邻曲线段方程在相交点处有相同的一阶导数（切线）。
- ✓ **2阶参数连续性**，记为 C^2 ，指两个曲线段在**交点**处有相同的一阶和二阶导数



(a) 0阶连续性



(b) 1阶连续性



(c) 2阶连续性

参数样条曲线的常用术语



几何连续性

- ✓ **0阶几何连续性**，记为 G_0 ，即两个曲线段必在公共点处有相同的坐标。
- ✓ **1阶几何连续性**，记为 G_1 ，指**一阶导数**在两个相邻段的交点处**成比例但不一定相等**。
- ✓ **2阶几何连续性**，记为 G_2 ，指两个曲线段在相交处**其一阶和二阶导数均成比例**。