南京林业大学试卷 B(B 卷)（参考答案）

课程 概率统计 A　　　　2015~2016 学年第 2 学期

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

姓名

班号

学号

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．若 A，B 是随机事件，则以下结论正确的是（　C　）.

$(A)\ P(AB)=P(A)P(\mathrm{B})$　　　　$(B)\ P(A-B)=P(A)-P(B)$

$(C)\ P(A\bar{B})=P(A-B)$　　　　$(D)\ P(B\cup A)=P(A)+P(B)$

2．设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=ck^2,(k=1,2,3)$，则 $c=$（　D　）.

$(A)\ 1$　　$(B)\ 1/6$　　$(C)\ 1/14$　　$(D)\ 14$

3．设随机变量 (X,Y)，且方差 $D(X)=4, D(Y)=1,$ 相关系数 $\rho_{XY}=0.6$，

则 $D(3X-2Y)=$（　D　）.

$(A)\ 40$　　$(B)\ 34$　　$(C)\ 17.6$　　$(D)\ 25.6$

4．设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\bar{X},S^2$ 分别是样本的均值和样本方差，则下列不正确的是（　C　）

（A）$\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$　　　（B）$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

（C）$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n)$　　　（D）$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

5. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 σ^2 未知，若样本容量为 n，且分位点均指定为“上侧分位点”时，则 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为（　D　）.

$(A)\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)$　　　$(B)\left(\bar{X}\pm\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n)\right)$

$(C)\left(\bar{X}\pm\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)\right)$　　　$(D)\left(\bar{X}\pm\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)$

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1．设 A，B 为随机事件且相互独立， $P\left(A\cup B\right)=0.8, P(A)0.2,$ 是 $P(B)=$ $\underline{\dfrac{3}{4}}$

2．已知 10 件产品中有 4 件次品，从这 10 件产品中依次取 2 件，则第件为次品的概率为 $\underline{0.4}$

3．设随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，则应用切比雪夫不等式得 $P\left(\left|X-3\right|\geq 3\right)\leq$ $\underline{\dfrac{1}{3}}$

4、设 X_1, X_2, X_3 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,1)$ 的样本，则当 $a=$ $\underline{\dfrac{1}{6}}$ 时，

$\hat{\mu}=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{2}X_2+aX_3$ 是总体均值 μ 的无偏估计。

5、 在一元线性回归分析中，通过样本观测值计算得 $\overline{x}=1.6, \overline{y}=3, \hat{b}=3,$ 则关于 x 的回归方程为

$\underline{\hat{y}=3x-1.8}.$

解：回忆回归直线方程：

$$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x \quad \text{或者} \quad \hat{y}=\overline{y}+\hat{b}\left(x-\overline{x}\right)$$

三、（12 分）市场供应的热水瓶中，甲厂产品占 50%，乙厂产品上占 30%，丙厂产品占 20%，甲厂的合格率为 90%，乙厂产品的合格率为 85%，丙厂产品的合格率为 80%。
（1）求买到的热水瓶是合格品的概率；（2）若已知买到的一个是合格品，求这个热水瓶是甲厂生产的概率。

解：设 B_1, B_2, B_3 分别表示：“买到的是甲、乙、丙厂的产品”，A 表示“买到的是合格产品”，则

（1）由全概率公式得

$$P(A)=P(B_1)P(A\,|\,B_1)+P(B_2)P(A\,|\,B_2)+P(B_3)P(A\,|\,B_3)$$

$$=50\%\times 90\%+30\%\times 85\%+20\%\times 80\%=86.5\%$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(B_1\,|\,A)=\frac{P\left(AB_1\right)}{P(A)}=\frac{50\%\times 90\%}{86.5\%}\approx 52\%$$

四、（12 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x, & |x|\leq\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，试求：（1）

$P\left(-\dfrac{\pi}{4}<X<\dfrac{\pi}{4}\right)$；（2）$X$ 的分布函数；（3）$Y=2X+\pi$ 的概率密度函数.

解：（1）$P\left(-\dfrac{\pi}{4}<X<\dfrac{\pi}{4}\right)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}\cos x dx=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} 0, x<-\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin x, -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1, x\ge\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$，

（3）$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+\pi\le y)=P\left(X\le\dfrac{y-\pi}{2}\right)=F_X\left(\dfrac{y-\pi}{2}\right)$

$$f_Y(y)=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y-\pi}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{y}{2}\right), 0\le y\le 2\pi \\ 0, other\end{cases}$$

五、（12 分）设二维随机变量（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, 0<|x|<1, |y|<x \\ 0, \quad other\end{cases}$$

（1）求随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度；（2）求 $P\left(X<\dfrac{1}{2}, Y>0\right)$；

（3）问 X 和 Y 是否相互独立？

解：（1）边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x} 1dy, 0<x<1 \\ 0, \quad other\end{cases}=\begin{cases}2x, 0<x<1 \\ 0, \quad other\end{cases}$$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}1+y, -1<y<0 \\ 1-y, 0<y<1 \\ 0, \quad other\end{cases}$$

（2）$P\left(X<\dfrac{1}{2}, Y>0\right)=\int_{0}^{\frac{1}{2}} dx\int_{0}^{x} 1dy=\dfrac{1}{8}$

（3）　因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不是相互独立的。

六、（12 分）设二维随机变量（X，Y）的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{other}\end{cases}$

求（1）$E(X), E(Y)$；（2）$Cov(X,Y)$；（3）ρ_{XY}.

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dy=\int_{0}^{1} dx\int_{x}^{1} 6x^2 dy=\dfrac{1}{2}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dy=\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{1}6xydy=\frac{3}{4}$$

（2）$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dy=\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{1}6x^2ydy=\frac{2}{5}$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{40}$$

（3）$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dy=\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{1}6x^3dy=\frac{3}{10}$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dy=\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{1}6xy^2dy=\frac{3}{5}$$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ ，$D(Y^2)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

七、（12 分）设某总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$\theta>-1$ 为未知参数. 且 $X_1,\dots,X_n$ 是来自总体的一个样本，试求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

解：（1）求矩估计量：由 $E(X)=\frac{1+\theta}{2+\theta}=\bar{X}$ 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$

（2）求最大似然估计量：似然函数为

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}$，$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

八、（10 分）电工器材厂生产一种云母带，其厚度服从正态分布，且平均厚度经常保持为 0.13mm，某日开工后检验 10 处的厚度，算出平均值为 0.146mm，样本标准差为 0.015mm，问该日云母带的厚度的均值与 0.13mm 有无显著差异？显著性水平 $\alpha=0.02$ （$z_{0.01}=2.33$，$t_{0.01}(9)=2.82, t_{0.01}(10)=2.76$）

解：检验假设：$H_0 : \mu = 0.13$，$H_1 : \mu \neq 0.13$.

因σ未知，采用 t 检验法，选择统计量为 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(9)$.

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{0.146 - 0.13}{0.015/\sqrt{10}} = 3.373 > t_{0.01}(9) = 2.82 ,$$

所以拒绝原假设H_0，即认为该日云母带的厚度的均值与 0.13mm 有显著差异。