3.2 离散余弦变换

图像处理中常用的正交变换除了傅里叶变换外，还有其他一些有用的正交变换。其中离散余弦就是一种。离散余弦变换表示为DCT。

3.2.1 离散余弦变换的定义

一维离散余弦变换的定义由下式表示

$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x) \qquad (3—74)$$

$$F(u)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \qquad (3—75)$$

式中 $F(u)$ 是第 u 个余弦变换系数，u 是广义频率变量，u=1,2, …N-1 ；$f(x)$ 是时域N点序列， x=0,1,2, …N-1

一维离散余弦反变换由下式表示

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{N}}F(0)+\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{u=1}^{N-1}F(u)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

(3—76)

显然，式(3—74)式(3—75)和式(3—76)构成了一维离散余弦变换对。

二维离散余弦变换的定义由下式表示

$$F(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

$$F(0,v)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

$$F(u,0)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \qquad \textbf{(3—77)}$$

$$F(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

式(3—77)是正变换公式。其中 $f(x,y)$ 是空间域二维向量的元素, $x,y=0,1,2\ldots,N-1$;

$F(u,v)$ 是变换系数阵列的元素。式中表示的阵列为 $N \times N$

二维离散余弦反变换由下式表示

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = {} & \frac{1}{N}F(0,0) + \frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{v=1}^{N-1} F(0,v)\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N} \\
& + \frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{u=1}^{N-1} F(u,0)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\
& + \frac{2}{N}\sum_{u=1}^{N-1}\sum_{v=1}^{N-1} F(u,v)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}
\end{aligned}
$$

(3—78)

式中的符号意义同正变换式一样。式(3—77)和式(3—78)是离散余弦变换的解析式定义。更为简洁的定义方法是采用矩阵式定义。如果令N＝4，那么由一维解析式定义可得如下展开式

$$
\begin{cases}
F(0) = 0.500\,f(0) + 0.500\,f(1) + 0.500\,f(2) + 0.500\,f(3) \\
F(1) = 0.653\,f(0) + 0.271\,f(1) - 0.271\,f(2) - 0.653\,f(3) \\
F(2) = 0.500\,f(0) - 0.500\,f(1) - 0.500\,f(2) + 0.500\,f(3) \\
F(3) = 0.271\,f(0) - 0.653\,f(1) + 0.653\,f(2) - 0.271\,f(3)
\end{cases}
$$

(3—79)

写成矩阵式

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.500 & 0.500 & 0.500 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.500 & -0.500 & -0.500 & 0.500 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

(3—80)

若定义[A] 为变换矩阵，[$F(u)$] 为变换系数矩阵，[$f(x)$] 为空域数据矩阵，则一维离散余弦变换的矩阵定义式可写成如下形式

$$[F(u)] = [A][f(x)] \qquad (3—81)$$

同理，可得到反变换展开式

$$\begin{cases} f(0) = 0.500F(0) + 0.653F(1) + 0.500F(2) + 0.271F(3) \\ f(1) = 0.500F(0) + 0.271F(1) - 0.500F(2) - 0.653F(3) \\ f(2) = 0.500F(0) - 0.271F(1) - 0.500F(2) + 0.653F(3) \\ f(3) = 0.500F(0) - 0.653F(1) + 0.500F(2) - 0.271F(3) \end{cases}$$

(3—82)

写成矩阵式

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.653 & 0.500 & 0.271 \\ 0.500 & 0.271 & -0.500 & -0.653 \\ 0.500 & -0.271 & -0.500 & 0.653 \\ 0.500 & -0.653 & 0.500 & -0.271 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix}$$

即 $[f(x)]=[A]'\ [F(u)]$ (3—84)

当然，二维离散余弦变换也可以写成矩阵式

$$[F(u,v)]=[A][f(x,y)][A]'$$
$$[f(x,y)]=[A]'[F(u,v)][A]$$
(3—85)

式中**[*f*(*x*,*y*)]** 是空域数据阵列，***F*[(*u*,*v*)]** 是变换系数阵列，**[A]** 是变换矩阵，$[A]'$ 是 **[*A*]** 的转置。

3.2.2 离散余弦变换的正交性

由一维DCT的定义可知

$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)$$

$$F(u)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

它的基向量是

$$\left\{\sqrt{\frac{1}{N}},\ \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right\} \qquad (3—86)$$

在高等数学中，切比雪夫多项式的定义为

$$T_0(p) = \sqrt{\frac{1}{N}}$$

$$T_u(z_x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos[u \arccos(z_x)] \qquad (3—87)$$

式中 $T_u(z_x)$ 是 u 和 Z_X 多项式。它的第N个多项式为

$$T_N(z_x)=\sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left[N\arccos(z_x)\right]$$

如果 $T_N(z_x)=0$

那么 $z_x=\cos\frac{(2x+1)\pi}{2N}$

将此式代入 $T_N(z_x)$

$$T_N = \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left\{u\arccos\left[\cos\frac{(2x+1)\pi}{2N}\right]\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \qquad (3—88)$$

显然，这与一维**DCT**的基向量是一致的。因为切比雪夫多项式是正交的，所以**DCT**也是正交的。另外，离散余弦变换的正交性也可以通过实例看出。如前所示，当**N**＝ 4 时，

$$[A]=\begin{bmatrix} 0.500 & 0.500 & 0.500 & 0.500 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.500 & -0.500 & -0.500 & 0.500 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix}$$

$$[A]'=\begin{bmatrix} 0.500 & 0.635 & 0.500 & 0.2710 \\ 0.500 & 0.271 & -0.500 & -0.653 \\ 0.500 & -0.271 & -0.500 & 0.653 \\ 0.500 & -0.653 & 0.500 & -0.271 \end{bmatrix}$$

显然 $$[A][A]'=[I]$$

这是满足正交条件的。从上述讨论可见，离散余弦变换是一类正交变换。

3.2.3 离散余弦变换的计算

与傅里叶变换一样，离散余弦变换自然可以由定义式出发进行计算。但这样的计算量太大，在实际应用中很不方便。所以也要寻求一种快速算法。

首先，从定义出发，作如下推导

$$F(u)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)R_e\left\{e^{-j\frac{(2x+1)u\pi}{2N}}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{N}}R_e\left\{\sum_{x=0}^{N-1}f(x)e^{-j\frac{(2x+1)u\pi}{2N}}\right\}$$

(3—89)

式中 R_e 是取其实部的意思。如果把时域数据向量作下列延拓，即：

$$f_e(x)=\begin{cases} f(x) & x=0,1,2,\cdots\cdots,N-1 \\ 0 & x=N,N+1,\cdots\cdots,2N-1 \end{cases} \qquad (3—90)$$

则 $f_e(x)$ 的离散余弦变换可写成下式

$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{2N-1}f_e(x)$$

$$F(u)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{2N-1}f_e(x)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{N}}R_e\left\{\sum_{x=0}^{2N-1}f_e(x)\,e^{-j\frac{(2x+1)u\pi}{2N}}\right\} \qquad (3—91)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{N}}R_e\left\{e^{-j\frac{u\pi}{2N}}\cdot\sum_{x=0}^{2N-1}f_e(x)\,e^{-j\frac{2xu\pi}{2N}}\right\}$$

由式(3—91)可见

$$\sum_{x=0}^{2N-1} f_e(x)\, e^{-j\frac{2xu\pi}{2N}}$$

是2*N*点的离散傅里叶变换。

所以，在作离散余弦变换时，可以把序列长度延拓为2N，然后作离散傅里叶变换，产生的结果取其实部便可得到余弦变换。

同样道理，在作反变换时，首先在变换空间，把 **[*F*(*u*)]** 作如下下延拓

$$F_e(u)=\begin{cases} F(u) & u=0,1,2,\cdots\cdots,N-1 \\ 0 & u=N,N+1,\cdots\cdots,2N-1 \end{cases} \qquad (3—92)$$

那么，反变换也可用式**(3—93)**表示

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{N}}F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{u=1}^{2N-1}F_e(u)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{u=1}^{2N-1}F_e(u)R_e\left\{e^{j\frac{(2x+1)u\pi}{2N}}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{u=1}^{2N-1}F_e(u)R_e\left\{e^{j\frac{2xu\pi}{2N}}\cdot e^{j\frac{u\pi}{2N}}\right\} \\
&\frac{1}{\sqrt{N}}F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}}R_e\left\{\sum_{u=1}^{2N-1}F_e(u)\cdot e^{j\frac{u\pi}{2N}}\cdot e^{j\frac{2xu\pi}{2N}}\right\} \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{N}} - \sqrt{\frac{2}{N}}\right]F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}}R_e\left\{\sum_{u=0}^{2N-1}\left[F_e(u)\cdot e^{j\frac{u\pi}{2N}}\right]e^{j\frac{2xu\pi}{2N}}\right\}
\end{aligned}
$$

(3—93)

由式(3—93)可见，离散余弦反变换可以从

$$\left[F_e(u) \cdot e^{j\frac{u\pi}{2N}} \right]$$

的2N点反傅里叶变换

实现。