线性代数 A 期末练习题五

一、单项选择题

1．设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，则 $\begin{vmatrix} 2a_1 & 4a_1-3b_1 & c_1 \\ 2a_2 & 4a_2-3b_2 & c_2 \\ 2a_3 & 4a_3-3b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$（　　）．

(A) 6　　(B) 4　　(C) -12　　(D) -48

2．设 A 为 n 阶方阵，且 $A^3=E$，则下列结论一定正确的是（　　）．

(A) $A=E$　　(B) A 不可逆

(C) A 可逆，且 $A^{-1}=A$　　(D) A 可逆，且 $A^{-1}=A^2$

3．设 A,B 都是 n 阶可逆矩阵，且满足 $(AB)^2=E$，则下列等式正确的是（　　）．

(A) $A=B^{-1}$　　(B) $AB=E$　　(C) $BA=E$　　(D) $(BA)^2=E$

4．设 A^* 为 n 阶方阵 A 的伴随矩阵，则 $\left|\,|A^*|A\,\right|=$（　　）．

(A) $|A|^{n^2}$　　(B) $|A|^n$　　(C) $|A|^{n^2-n}$　　(D) $|A|^{n^2-n+1}$

5、已知 A，B 是方阵，且 $C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,则 C 的伴随矩阵为 C^*＝（　）

（A）$\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

6．下述命题不正确的是（　　）．

(A) $R(A_{m\times n})\le \min\{m,n\}$；　　(B) 若 $A\sim B$，则 $R(A)=R(B)$；

(C) 若 P,Q 可逆，则 $R(PAQ)=R(A)$；　(D) $R(A+B)\ge R(A)+R(B)$.

7、已知 $Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，$P$ 为 3 阶非零矩阵，且满足 $PQ=O$，则（　　　）．

(A) $t=6$ 时 P 的秩必为 1；　　(B) $t=6$ 时 P 的秩必为 2；

(*C*) $t \neq 6$时 P 的秩必为 1；　　　　　　　　(*D*) $t \neq 6$时 P 的秩必为 2.

8、设 A 为 n 阶奇异矩阵，A 中有一元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} \neq 0$，则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系所含向量的个数为（　　　）.

(*A*) i 个；　　　(*B*) j 个；　　　(*C*) 1 个；　　　(*D*) n 个.

9、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，那么基础解系还可以是（　　　）.

(*A*) $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$；　　　　(*B*) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$；

(*C*) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3$；　　　　(*D*) $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_2$.

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．设三阶行列式 $A = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{21} + 3A_{22} + 4A_{23} =$ ________________.

2、设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 1$，则行列式 $\left|A^3 + 2A - E\right| =$ ________.

3、设 $A_{m\times n}$，又 C 是 m 阶可逆矩阵，且，$R(CA) = r$，则 $R(A) =$ __________.

4、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，则 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 一定线性________

5．设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为矩阵 A 的 n 个列向量，若 $b = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$，则方程组 $Ax = b$ 的通解为________________________________.

6、设有二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (\lambda - 1)x_1^2 + \lambda x_2^2 + (\lambda + 1)x_3^2$，当满足（　　）时，$f$ 是正定二次型.

(*A*) $\lambda > -1$　　　(*B*) $\lambda > 0$　　　(*C*) $\lambda > 1$　　　(*D*) $\lambda \geq 1$

三、计算行列式的值

1、$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$　　　　2、$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$ $(a_i \neq 0)$

四、设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}$ 满足 $3\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$，且已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

五、设向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$.

求该向量组的秩及一个最大线性无关组，并将其余向量由所求出的最大无关组线性表示.

六、设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-1 \\ ax_2+x_3=1 \\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0 \end{cases}$，问:a 取何值时，此方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

七、二次曲面: $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可经正交变换 $(x,y,z)^T=P(\xi,\eta,\zeta)^T$ 化为椭圆柱面 $\eta^2+4\zeta^2=4$, 求 a,b 和 P.

八、设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，证明 $A+2E$ 可逆，并求 $(A+2E)^{-1}$。