线代A期末练习三参考答案

一、单项选择题

1、已知A,B是同阶方阵，下列等式中正确的是（ A ）

（A）$|AB|=|A||B|$；　　（B）$(AB)^T=A^TB^T$；

（C）$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$；　　（D）$(AB)^k=A^kB^k$.

2、设A是$m\times n$矩阵，齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充要条件是（B）

（A）$r(A)=n$；（B）$r(A)<n$；（C）$|A|=0$；（D）$m>n$.

3、设A是5×4矩阵,则下列命题正确的是（B）

（A）A的行向量组线性无关；　　（B）A的行向量组线性相关；

（C）A的列向量组线性无关；　　（D）A的列向量组线性相关.

4、设A是n阶可逆矩阵，λ是A的一个特征值，则A^*的一个特征值是（ B ）

（A）$\lambda^{-1}|A|^n$；（B）$\lambda^{-1}|A|$；（C）$\lambda|A|$；（D）$\lambda|A|^n$.

5、设n阶方阵A与B相似，则下列命题不正确的是（ D ）

（A）A与B有相同的特征值；　　（B）$r(A)=r(B)$；

（C）$|A|=|B|$；　　（D）A与B有相同的特征向量.

二、填空题

1、已知$\alpha_1=(1,2,t),\alpha_2=(1,1,-1),\alpha_3=(2,3,1)$，当$\underline{\boldsymbol{t\neq2}}$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

2、$f(y)=\begin{vmatrix}2y & 1 & -1\\ -y & -2y & y\\ 1 & 2 & y\end{vmatrix}$中$y^3$的系数是$\underline{\quad -4\quad}$.

3、设A为3阶方阵，A的特征值为−1，1，2，则$|3A^{-1}|=\underline{\boldsymbol{-\frac{27}{2}}}$.

4、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三元线性方程组$Ax=b$的三个解，且$r(A)=2$，$\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_2-\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则$Ax=b$的通解为$\underline{(1,0,2)^T+k(1,1,1)^T\ (k\in R)}$

5、设二次型$f=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$是正定的，则$t$的范围是

$\underline{\boldsymbol{-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}}}$

三、已知 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX=A+2X$，求矩阵 X

解：由 $AX=A+2X$ 得（$A-2I$）$X=A$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&0\end{vmatrix}=3$$

所以 $X=(A-2I)^{-1}A$

$$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&1&1\\1/3&-2&-4/3\end{pmatrix}$$

故 $$X=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&3&2\\2/3&-4&-5/3\end{pmatrix}$$

四、求下列向量组的秩和一个最大无关组.

$\alpha_1=(1,1,1,1)$, $\alpha_2=(2,-3,1,-1)$, $\alpha_3=(1,-1,2,3)$, $\alpha_4=(4,-3,4,3)$.

解：对 A 进行初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{4}\\\mathbf{1}&\mathbf{-3}&\mathbf{-1}&\mathbf{-3}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{4}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{3}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{4}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

此向量组的秩为：R（A）＝3

它的一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

五、已知线性方程组 $\begin{cases}kx_1-x_2=k,\\kx_2-x_3=k,\\kx_3-x_4=k,\\-x_1+kx_4=k.\end{cases}$

（1） k 为何值时，方程组有惟一解? 无解？无穷多解？

(2) 在有无穷多解的情况下求出其通解.

解： (1) 系数矩阵 A 的行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k & -1 \\ -1 & 0 & 0 & k \end{vmatrix}=k^4-1$$

当 $k\neq\pm1$时，方程组有惟一解；

当 $k=1$时， $r(A)=3, r(Ab)=4$，方程组无解；

当 $k=-1$时， $r(A)=r(Ab)=3$，方程组有无穷多解；

(2) 对增广矩阵进行行初等变换：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以原方程组的通解为： $x=(1,0,1,0)^T+k(-1,1,-1,1)^T \quad (k\in R)$

六、已知三阶方阵 A 的特征值为−1，1，2. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}^3$.

(1) 求矩阵 A 的行列式及 A 的秩；

(2) 求矩阵 B 的特征值及其相似对角矩阵.

解：(1) $|A|=-2$ ， $\boldsymbol{R(A)=3}$

(2) 设 λ 为 A 的特征值， x 为 A 的对应于 λ 的特征向量，则：

$\boldsymbol{Bx=(E-3A^2+2A^3)x=(1-3\lambda^2+2\lambda^3)x}$ $\therefore B$ 的特征值为−4，0，5

B 的相似对角矩阵为： $\begin{pmatrix} -4 & & \\ & 0 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

七、设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵.

解： $\boldsymbol{|A-\lambda E|}=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(-\lambda+2)=0$

得到 A 的特征值分别是 $\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=2$

$\lambda_1=\lambda_2=-1$时，$A+E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得到两个正交的特征向量为

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\eta_1=\dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\eta_2=\dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_3=2$时，$A-2E=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，对应于$\lambda_2=2$的一个特征向量

为$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，位化得$\eta_3=\dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

所以得正交阵为

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\\-2/\sqrt{6}&0&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{6}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

八、证明题

（1）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，试证$\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 线性无关.

（2）设A为$m\times n$矩阵, B为$n\times m$矩阵, 且$m>n$. 证明：$|AB|=0$.

证：（1）令$x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+2\alpha_2)+x_3(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)=0$

整理得：$(x_1+x_2+x_3)\alpha_1+(2x_2+2x_3)\alpha_2+3x_3\alpha_3=0$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以有：$x_1=0,x_2=0,x_3=0.$

则向量组$\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$线性无关.

（2）A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，且$m>n$，

$\therefore R(A)\le n,R(B)\le n,$

$\Rightarrow R(AB)\le\min(R(A),R(B))\le n<m$

又AB为m阶方阵，则$|AB|=0$.