南京林业大学试卷(A 卷)（参考答案）

课程 概率统计 B　　　　　　2017~2018 学年第 2 学期

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

姓名　　班号　　学号

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．若 $B \subset A$ 且 $P(A) > 0$，则以下结论正确的是（　A　）．

(A) $P(A \cup \bar{B}) = 1$　　　　(B) $P(B - A) = P(B) - P(A)$

(C) $P(A \mid B) = 0$　　　　(D) $P(B \mid A) = 1$

2．设在 3 重伯努利试验中事件 A 至少出现一次的概率为 $\frac{26}{27}$，则 $P(A) =$（　D　）．

(A) $1/27$　　(B) $1/9$　　(C) $1/3$　　(D) $2/3$

3．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}e^{1-x}, & x \ge 1 \end{cases}$，分布函数为 $F(x)$，

则当 $x \ge 1$ 时 $F(x) =$（　C　）．

(A) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}e^{1-x}$　　(B) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{1-x}$　　(C) $1 - \frac{1}{2}e^{1-x}$　　(D) $1 - e^{1-x}$

4．设 $E(X) = 0, D(X) = 1$，则用切比雪夫不等式估计概率 $p = P(X^2 < 3)$ 得（　A　）．

(A) $p \ge 2/3$　　(B) $p < 2/3$　　(C) $p \ge 1/3$　　(D) $p < 1/3$

5．设总体 $X \sim N(0, 2^2)$， X_1, X_2, X_3 为其样本，若 $a(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$ 服从 χ^2 分布，则 $a =$（　D　）．

(A) 1　　(B) $1/2$　　(C) $1/3$　　(D) $1/4$

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1．记某试验的样本空间为 Ω，设事件 A_1, A_2, A_3 两两互不相容且 $\sum_{i=1}^{3} A_i = \Omega$，

$P(A_1)=P(A_2)=2P(A_3)$，对于事件 B 有 $P(B|A_1)=P(B|A_2)=P(B|A_3)=\frac{1}{4}$，则

$P(B)=\underline{1/4}, P(A_1|B)=\underline{2/5}$.

2．设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1,X_2 为其样本，若 $\hat{\mu}=aX_1+\frac{1}{2018}X_2$ 是 μ 的一个无偏点估计，则

$a=\underline{2017/2018}$.

3．设 $X \sim N(3,1)$，$Y \sim N(2,1)$ 且 X,Y 相互独立，$Z=X-3Y+4$，则 $D(Z)=\underline{10}$.

4．设 $X \sim N(3,1^2)$，则 $P(2<X<3)=\underline{0.3413}$.（$\Phi(1)=0.8413$）

三、（12 分）设箱中有五张相同的纸牌，其中有三张标号为 2，两张标号为 3，现某人随机地抽取三张，记三张牌的号码之和为 X．试求:（1）X 的分布律;（2）$E(X)$ 和 $D(X)$;（3）$Y=\cos(\pi X)$ 的分布律.

解：（1）

X	6	7	8
P	0.1	0.6	0.3

，（4 分）

（2）$E(X)=7.2$，$E(X^2)=52.2$，$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0.36$，（10 分）

（3）

Y	-1	1
P	0.6	0.4

.（12 分）

四、（12 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1-kx, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，试求:（1）$k$ 的值;（2）$P(0<X<1)$;（3）$E(X^2)$.

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2(1-kx)dx=1$ 得 $k=1/2$，（4 分）

（2）$P(0<X<1)=\int_0^1(1-x/2)dx=3/4$，（8 分）

（3）$E(X^2)=\int_0^2 x^2(1-x/2)dx=2/3$.（12 分）

五、（12 分）某网店店主每周周五进货以备周六、日 2 天销售，根据多周统计，这 2 天销售量 X,Y 彼此独立且服从以下分布：

X	3	4
P	0.6	0.4

，

Y	4	5	6
P	0.5	0.3	0.2

．求:（1）(X,Y) 的分布律;（2）2 天销售总量 $Z=X+Y$ 的分布律;（3）如果周五进货 8 件，不够卖的概率多大?

解：（1）(X,Y)的分布律

$X\backslash Y$	4	5	6
3	0.3	0.18	0.12
4	0.2	0.12	0.08

，（4分）

（2）

$X+Y$	7	8	9	10
P	0.3	0.38	0.24	0.08

，（8分）

（3）$P(X+Y>8)=0.32$．（12分）

六、（14 分）设(X,Y)服从区域$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$上的均匀分布．（1）求$(X,Y)$的概率密度函数$f(x,y)$；（2）求关于$X$和$Y$的边缘概率密度并判断$X$与$Y$是否独立；（3）求$P(0<Y<X<1)$．

解：（1）$f(x,y)=\begin{cases}1/4\pi, & x^2+y^2\le 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$（2分）

（2）当$-2<x<2$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}1/4\pi dy=\sqrt{4-x^2}/2\pi$，即

$$f_X(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}/2\pi, & -2<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

当$-2<y<2$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}1/4\pi dx=\sqrt{4-y^2}/2\pi$，即

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{4-y^2}/2\pi, & -2<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

由于$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故X与Y不独立；（10分）

（3）$P(0<Y<X<1)=\iint_{D:0<y<x<1}f(x,y)d\sigma=1/8\pi$．（14分）

七、（14 分）设某种元件使用寿命为总体X（单位：年），已知其概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta 2^\theta x^{-(\theta+1)}, & x>2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中$\theta>1$为未知参数．现从该种元件中随机抽取8个，分别测得其寿命如下：2.4，2.7，2.5，2.9，2.8，2.3，2.6，2.1，试求：（1）样本均值$\bar{x}$和样本方差s^2；（2）θ的矩估计量及矩估计值$\hat{\theta}$和最大似然估计量及最大似然估计值$\hat{\theta}_L$．

解：（1）$\bar{x}=2.5375$，$s^2=0.07125$（2分）

（2）$\mu_1=E(X)=\theta 2^\theta\int_2^{+\infty}x^{-\theta}dx=\dfrac{2\theta}{\theta-1}$，解得$\theta=\dfrac{\mu_1}{\mu_1-2}$

从而 $$\hat{\theta}=\frac{A_1}{A_1-2}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-2},$$ （5 分）

又 $\bar{x}=2.5375$ 故 $\hat{\theta}=4.72$. （7 分）

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta 2^{\theta}x_i^{-(\theta+1)}=\theta^n 2^{n\theta}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{-(\theta+1)}$， $\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln 2-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln 2-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 $\hat{\theta}_L=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln 2}$, （12 分）

代入数据得 $\hat{\theta}_L=4.29$. （14 分）

八、（6 分）某批矿砂的 9 个样品中的镍含量，经测定分别为（%）$3.31, 3.27, 3.24, 3.28, 3.23, 3.24, 3.26, 3.26, 3.24$. 已知该种矿砂的镍含量服从标准差为 $\sigma=0.2$ 的正态分布，问在 $\alpha=0.05$ 下能否接受假设：这批矿砂的镍含量的均值为 3.25？（$z_{0.05}=1.645$，$z_{0.025}=1.96$）

解：检验假设：$H_0:\mu=3.25$， $H_1:\mu\neq 3.25$. （2 分）

因 σ 已知，采用 Z 检验法，其拒绝域为 $|z|=\left|\frac{\bar{x}-3.25}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{0.025}$. （4 分）

$|z|=\left|\frac{\bar{x}-3.25}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=0.1335<1.96$，接受 H_0，即认为这矿砂的镍含量为 3.25. （6 分）