南京林业大学试卷(A 卷)（答案）

课程 概率统计 B　　　　2022~2023 学年第 2 学期

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

姓名

班号

学号

一、单项选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．设事件 A 和 B 相互对立（$P(A)>0, P(B)>0$），则以下结论**不正确**的是（ C ）．

（A）$P(A|B)=0$　（B）$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$　（C）$P(B-A)=1$（D）$P(A+B)=1$

2．设 $X\sim N(0,2^2)$，则对于任何实数 k 都有（ B ）．

（A）$P(X\le k)=P(X\ge k)$　　（B）$P(X\le k)=1-P(X\le -k)$

（C）$|k|X\sim N(0,2^2|k|)$　　（D）$X+k\sim N(k,2^2+k^2)$

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<+\infty$ 为随机变量 X 的概率密度．则 $E(X)$（ D ）．

（A）等于 0　　（B）等于 1　　（C）等于 2　　（D）不存在．

4．设 X_1,X_2,X_3 相互独立且 $E(X_i)=1,D(X_i)=1$（$i=1,2,3$），则对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 由切比雪夫不等式可得（ A ）．

（A）$P(|\sum_{i=1}^{3}X_i-3|\ge\varepsilon)\le 3\varepsilon^{-2}$　　（B）$P(|\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i-1|\ge\varepsilon)\le\varepsilon^{-2}$

（C）$P(|\sum_{i=1}^{3}X_i-3|\ge\varepsilon)\le\varepsilon^{-2}$　　（D）$P(|\sum_{i=1}^{3}X_i-1|\ge\varepsilon)\le\varepsilon^{-2}$

5. 设总体 $X\sim N(3,2^2)$，X_1,X_2,X_3,X_4 为其简单随机样本，若统计量

$a[(X_1-X_2)^2+(X_3+X_4-6)^2]$ 服从 χ^2- 分布，则 $a=$（ D ）．

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　（D）$\dfrac{1}{8}$

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．设 $P(A)=0.3, P(A\cup B)=0.7$，则 $P(B-A)=$ 0.4 ．

2．设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{1}{2}\lambda^k, k=1,2,\cdots$，则 $P(X>2)=$ 4/9 ．

3．设 X,Y 都服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，且 X,Y 相互独立，则 $P(X^2+Y^2\le 1)=\underline{\pi/4}$.

4. 设随机变量 $X\sim P(2)$，即：$P(X=k)=\dfrac{2^k}{k!}e^{-2},k=0,1,2,\cdots$，另设随机变量 $Y\sim B(9,\dfrac{1}{3})$，即：

$P(Y=k)=C_9^k(\dfrac{1}{3})^k(\dfrac{2}{3})^{9-k},k=0,1,2,\cdots,9$；若 X 和 Y 独立，且 $Z=X-3Y-2$，则 $D(Z)=\underline{20}$.

5．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， X_1,X_2 为其简单随机样本，已知 $\hat{\mu}=aX_1+\dfrac{1}{2023}X_2$ 是 μ 的一个无偏估计，则 $a=\underline{\dfrac{2022}{2023}}$.

三、解答题（每题 10 分，共 60 分）

1．有两个口袋，甲袋中装有1个白球和2个黑球，乙袋中装有2个白球和1个黑球．从甲袋中任取一个球放入乙袋，再从乙袋中任取一个球．求：(1) 从乙袋中取到的是白球的概率；(2) 若发现从乙袋中取出的是白球，则从甲袋中取出放入乙袋的球，哪种颜色的可能性大？

解：设 A_1 ＝“第一次取到白球”， A_2 ＝“第一次取到黑球”，B ＝“第二次取到白球”则 $P(A_1)=1/3$，

$P(B|A_1)=3/4$，$P(A_2)=2/3$，$P(B|A_2)=1/2$ （3 分）

（1）由全概率公式 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=7/12$ （6 分）

（2）由贝叶斯公式

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum\limits_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)}=3/7,\quad P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum\limits_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)}=4/7,$$

$P(A_1|B)<P(A_2|B)$，黑颜色的可能性大. （10 分）

2．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}k\sqrt{x}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，试求：

（1）k；（2）$E(X^{\frac{3}{2}})$；（3）求 $Y=2-3X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 kx^{\frac{1}{2}}dx=2k/3=1$ 得 $k=3/2$ （3 分）

（2）$E(X^{3/2})=\int_0^1 x^{3/2}\dfrac{3}{2}x^{1/2}dx=1/2$. （6 分）

（3）$y=2-3x$ 严格单调，其反函数 $x=(2-y)/3$ 连续可导且 $x_y'=-1/3$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{(2-y)/3}, & -1<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{(2-y)/3}, & -1<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ （10 分）

3．已知5件产品中有3件合格品，2件次品，从这批产品中任取2件，记其中合格品数为 X，次品数为 Y．求：（1）(X,Y) 的分布律；（2）关于 X 和 Y 的边缘分布律，并判断 X 和 Y 是否相互独立；（3）$Z=X-Y$ 的分布律.

解：（1）(X,Y) 的联合分布律为 （4 分）

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0	0	0.1
1	0	0.6	0
2	0.3	0	0

（2）X 和 Y 的分布律为 $\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1 & 2\\ \hline P & 0.1 & 0.6 & 0.3\end{array}$，$\begin{array}{c|ccc} Y & 0 & 1 & 2\\ \hline P & 0.3 & 0.6 & 0.1\end{array}$，不独立 （7 分）

（3）$Z=X-Y$ 的分布律 $\begin{array}{c|ccc} Z & -2 & 0 & 2\\ \hline P & 0.1 & 0.6 & 0.3\end{array}$. （10 分）

4．设 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}x+y, 0\le x\le 1且0\le y\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$.

（1）求关于 X 和 Y 的边缘概率密度；（2）判断 X 与 Y 是否独立；（3）求 $P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})$.

解：（1） $f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dy=x+\frac{1}{2}, 0\le x\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1(x+y)dx=\frac{1}{2}+y, 0\le y\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$ （4 分）

（2）因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不相互独立； （7 分）

（3） $P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})=\iint_{D:x\le\frac{1}{2},y\le\frac{1}{2}}f(x,y)d\sigma=\int_0^{1/2}dy\int_0^{1/2}(x+y)dx=1/8$. （10 分）

5. 设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta 2^{\theta}x^{-(\theta+1)}, & x>2\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 $\theta>1$ 为未知参数；$X_1,X_2,\cdots,X_n$

为其简单随机样本，，试求：（1）θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；（2）θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

解：（1） $\mu_1=E(X)=\theta 2^{\theta}\int_2^{+\infty}x^{-\theta}dx=\frac{2\theta}{\theta-1}$ ，解得 $\theta=\frac{\mu_1}{\mu_1-2}$

从而 $\hat{\theta}=\dfrac{\mu_1}{\mu_1-2}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-2}$，（5 分）

（2）$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta 2^{\theta}x_i^{-(\theta+1)}=\theta^n 2^{n\theta}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{-(\theta+1)}$，$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln 2-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+n\ln 2-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 $\hat{\theta}_L=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln 2}$，

从而 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_L=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-n\ln 2}$.（10 分）

已知某种苹果重量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，随机抽取 10 个苹果，测得其平均重量为 $\bar{x}=227.2g$，样本方差

6. 为 $s^2=9.48^2g^2$，问能否认为苹果的平均重量是 $220g$？（$t_{0.025}(9)=2.2622$，$\sqrt{10}\approx 3.16$）

解：假设：$H_0:\mu=220, H_1:\mu\neq 220$,（2 分）

当 H_0 成立时，构造检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(9)$,（5 分）

$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，拒绝域为：$W=\{T\,\big|\,|T|>2.2622\}$,

因为 $\bar{x}=227.2$，$s=9.48$，所以 $|T_0|=\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{227.2-220}{9.48/3.16}\right|=2.4>2.2622$,（8 分）

故拒绝 H_0，即不能认为苹果重量为 $220g$.（10 分）