南 京 林 业 大 学 试 卷(A 卷)

课程 线性代数B　　　　2019~2020 学年第 1 学期

题号	一	二	三	四	五	总　　分
得分						

一、填空题（每题3分，共15分）

1. 若三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 0 \\ a_{21} & 3a_{22} & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}=3$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=$ ___1___.

2. 设 A 为3阶可逆阵，且其伴随矩阵 $A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 设 A 为三阶矩阵，满足 $|A+2E|=0, |A-E|=0, |2A-3E|=0,$ 则行列式 $|A|=$ ___-3___.

4. 设齐次线性方程组 $AX=0$ 中的系数矩阵 A 为 8×6 矩阵，且 A 的秩 $R(A)=4$，则其基础解系中所含解向量的个数为__2__.

5. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 的特征多项式相同, 则 $x=$ __0__.

二. 选择题（每题3分，共15分）

1. 设 A 为三阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|2A|=2$，则 $\left|(4A)^{-1}-3A^*\right|=$（ D ）。

（A）$\frac{16}{27}$　　（B）$-\frac{16}{27}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$-\frac{1}{2}$

2. 设 n 阶方阵 A,B 和 C，则下列说法正确的是（ B ）。

（A）$AB=AC$，则 $B=C$　　（B）$AB=0$，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$

（C）$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　　（D）$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

3. 向量组 $\vec{\alpha}_1=(1,0,t)^T, \vec{\alpha}_2=(5,t,t)^T, \vec{\alpha}_3=(3,1,t)^T$ 的秩为3，则（ D ）。

（A）$t=0$ 或 $t=2$　　（B）$t\neq 1$ 且 $t\neq -2$

（C）$t=1$ 或 $t=-2$　　（D）$t\neq 0$ 且 $t\neq 2$

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$AX=0$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 所对应的齐次线性方程组，则下列

结论正确的是（　D　）

（A）. 若 $AX=0$ 仅有零解，则 $AX=b$ 有唯一解

（B）. 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 有无穷多个解

（C）. 若 $AX=b$ 有无穷多个解，则 $AX=0$ 仅有零解

（D）. 若 $AX=b$ 有无穷多个解，则 $AX=0$ 有非零解

5. 设 2 是非奇异矩阵 A 的一个特征值，则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值等于（ B ）

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

三、计算题（每小题 9 分，共 27 分）

1. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\2&5&3&2\\2&-2&-2&-1\\-1&-4&-7&4\end{vmatrix}$，记 A_{ij} 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，

计算 $A_{21}-A_{22}+4A_{23}+2A_{24}$。

解：$A_{21}-A_{22}+4A_{23}+2A_{24}=\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\1&-1&4&2\\2&-2&-2&-1\\-1&-4&-7&4\end{vmatrix}$　　--3 分

$=\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\0&0&2&1\\0&0&-6&-3\\0&-5&-5&5\end{vmatrix}=0$　　---9 分

2、设 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$ 且 $AX=A+2X$，求矩阵 X。

解：　由于 $|A\text{-}2E|\neq 0$，所以 $(A-2E)$ 可逆，故 $X=(A-2E)^{-1}A$　　---3 分

$$(A-2E|A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&-4&3&2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)$$　　---6 分

所以 $X=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$　　---9 分

3、求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}$ 的列向量组的秩及一个最大无关组，并将其余向量用此最大无关组线性表出。

解：$(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ------5 分

行向量组的秩为 2，它的一个最大无关组：$\vec{a},\vec{b}$

且 $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ ； $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$ 。 ------9 分

四、计算、讨论题（每小题 12 分，共 36 分）

1. 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\\lambda x_1+x_2+x_3=1\end{cases}$

讨论 λ 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？无穷多解时，请求解。

解：系数行列式 $A=\begin{vmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}$

$=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$

（1）当 $\lambda\neq$ -2 且 $\lambda\neq1$ 时，原方程组有唯一解。 --------4 分

（2）当 $\lambda=$ -2 时， $\overline{A}=\left(A\middle|b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&4\\1&-2&1&-2\\-2&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&3\end{array}\right)$

$R\left(A\right)=2,R\left(\overline{A}\right)=3,$ 原方程组无解。 --------7 分

（3）当 $\lambda=1$ 时，$\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

所以导出组的基础解系为 $\overrightarrow{\varepsilon_1}=\left(-1,1,0\right)^T,\overrightarrow{\varepsilon_2}=\left(-1,0,1\right)^T$

原方程组的一个特解$\vec{\eta}=\left(1,0,0\right)^T$，则原方程组的通解为

$$\overrightarrow{X}=c_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+c_2\overrightarrow{\varepsilon_2}+\vec{\eta}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$ （c_1,c_2为任意常数） ----12 分

2、求矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

解：(1) 由题意

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&1\\0&3-\lambda&0\\-4&1&4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)^2=0,$$

特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=3$； （6 分）

$\lambda_1=0$时，

$\left(A+0\cdot E\right)x=0$基础解系为$p_1=(1,0,1)^T$；

属于$\lambda_1=0$的特征向量为$kp_1=k(1,0,1)^T$，$k\neq 0$ （9 分）

$\lambda_2=\lambda_3=3$时，

$\left(A-3E\right)x=0$基础解系为$p_2=(\frac{1}{4},1,0)^T$ ； $p_3=(\frac{1}{4},0,1)^T$ ；

属于$\lambda_2=\lambda_3=2$的特征向量为$k_2p_2+k_3p_3$，k_2、k_3不全为 0 （12 分）

3. 已知三阶方阵$A=\begin{pmatrix}2&4t&2\\2t&1&1\\2t+1&2&2t+1\end{pmatrix}$，就$t$的值讨论矩阵$A$的秩$R\left(A\right)$

解：对矩阵A进行初等行变换有

$$A=\begin{pmatrix}2&4t&2\\2t&1&1\\2t+1&2&2t+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2t&1\\2t&1&1\\1&1&2t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2t\\0&1-2t&1-4t^2\\0&0&2\left(1-2t\right)\left(1+t\right)\end{pmatrix}$$ ----6 分

（1）当$t\neq\frac{1}{2}$且$t\neq -1$时，$R(A)=3$； -------8 分

（2）当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，有 $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $R(A)=1$； ------10 分

（3）当 t=-1时，有 $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $R(A)=2$。 -------12 分

五、证明题（共 7 分）

设 A 为3阶方阵，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 为 A 的属于特征值$1,-1$的特征向量，向量$\vec{\alpha}_3$ 满足 $A\vec{\alpha}_3=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$，

证明：$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性无关。

证明：

设存在一组数k_1,k_2,k_3使得等式$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+k_3\vec{\alpha}_3=\vec{0}----(1)$ 成立，

所以 $A\left(k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+k_3\vec{\alpha}_3\right)=\vec{0}$

又因为$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 为 A 的属于特征值$1,-1$的特征向量，所以$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 线性无关

有 $A\vec{\alpha}_1=\vec{\alpha}_1,A\vec{\alpha}_2=-\vec{\alpha}_2$，又 $A\vec{\alpha}_3=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$ （3 分）

所以$\left(k_1+k_3\right)\vec{\alpha}_1+\left(-k_2+k_3\right)\vec{\alpha}_2+k_3\vec{\alpha}_3=\vec{0}--------(2)$

联立（1）（2）整理得$k_3\vec{\alpha}_1+\left(-2k_2+k_3\right)\vec{\alpha}_2=\vec{0}$

所以$k_2=0,k_3=0$ ，回代（1）式因$\vec{\alpha}_1$ 是非零列向量，所以$k_1=0$

故$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性无关。 （7 分）