第5-1章 图形变换

课程目标

- 图形变换的基本概念
- 齐次变换
- 二维变换
- 三维变换
- 组合变换

图形变换的基本概念

- 一个图形的最基本要素是点，点构成线，线构成面，而体是由若干面构成
- 只要改变了图形的各点坐标位置，整个图形也就完成了变换。

图形变换的基本概念

- 在二维空间中，用 **(x,y)** 表示平面上的一点
- 在三维空间中，用 **(x,y,z)** 表示空间上的一点
- 可以用点集来表示一个平面图形或三维立体

图形变换的基本概念

- 写成矩阵的形式为

$$
\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}
$$

图形变换的基本概念

- 图形的点集可用矩阵方式来表达

- 图形变换可以通过相应的矩阵运算来实现，即：

$$\text{图形旧点集} \times \text{变换矩阵} \xrightarrow{\text{矩阵运算}} \text{图形新点集}$$

5.1 几何变换

- 对于二维图形，点集矩阵为n×2
- 由矩阵乘法运算可知，一个n×2的点集矩阵
  [X, Y]和一个2×2的变换矩阵相乘，则有

$$[\mathrm{X}\ \ \mathrm{Y}]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\mathrm{ax+cy}\ \ \ \mathrm{bx+dy}] = [\mathrm{X}'\ \ \mathrm{Y}']$$

  - [X′ Y′]为变换后的坐标
  - 变换矩阵中a，b，c，d取不同的值，可以实现旋转、对称、错切、缩放等变换，从而达到对图形进行变换的目的

5.1 几何变换

- 但2×2的变换矩阵不适合平移变换

$$
\begin{cases}
x' = x + \triangle x \\
y' = y + \triangle y
\end{cases}
$$

- △x，△y是平移量，应为常数

$$
[X \quad Y] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [ax+cy \quad bx+dy] = [X' \quad Y']
$$

- cy ，bx均非常量

5.1 几何变换

- 需要把2×2矩阵扩充为3×2矩阵　　$T=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ k & m \end{bmatrix}$

- 点向量扩充，将[X　Y]扩充为[X Y 1]，n×3阶矩阵。
- 点集矩阵与变换矩阵即可进行乘法运算。

$$[x\ \ y\ \ 1]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ k & m \end{bmatrix} = [ax+cy+k\quad bx+dy+m]$$

5.1 几何变换

$$[x\ \ y\ \ 1]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ k & m \end{bmatrix} = [ax+cy+k\quad bx+dy+m]$$

- 令b=c=0，a=d=1，得平移变换矩阵： $T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & m \end{bmatrix}$

$$[x\ \ y\ \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & m \end{bmatrix} = [x+k\quad y+m] = [x'\quad y']$$

- k，m分别为X，Y方向的平移量

几何变换的齐次坐标法

- 将[X Y]扩充为[X Y 1]，实际上是由二维向量变为三维向量
- 但[X Y 1]可以看作是Z = 1的平面上的点
  - 即：扩充后，图形落在Z = 1的平面上，它对图形的形状没有影响。

几何变换的齐次坐标法

- 齐次坐标法：用三维向量表示二维向量的方法。
- 进一步推广，用**n+1**维向量表示**n**维向量的方法称之为齐次坐标法。

几何变换的齐次坐标法

- 使二维变换矩阵有更多功能
- 将3×2变换矩阵扩充为3×3阶矩阵

$$T = \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ k & m & s \end{bmatrix}$$

- □ a、b、c、d 用于图形的比例、对称、错切、旋转变换；
- □ k、m用于图形的平移变换；
- □ p、q用于图形的透视变换；
- □ s用于图形的全比例变换。

5.2 二维基本变换

- 比例变换
- 对称变换
- 旋转变换
- 平移变换

1 比例变换

- 比例变换是让点的**x,y**坐标各乘以一个比例因子，其变换公式为：

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = dy \end{cases}$$

1 比例变换

因此，可令比例变换矩阵T_s为：

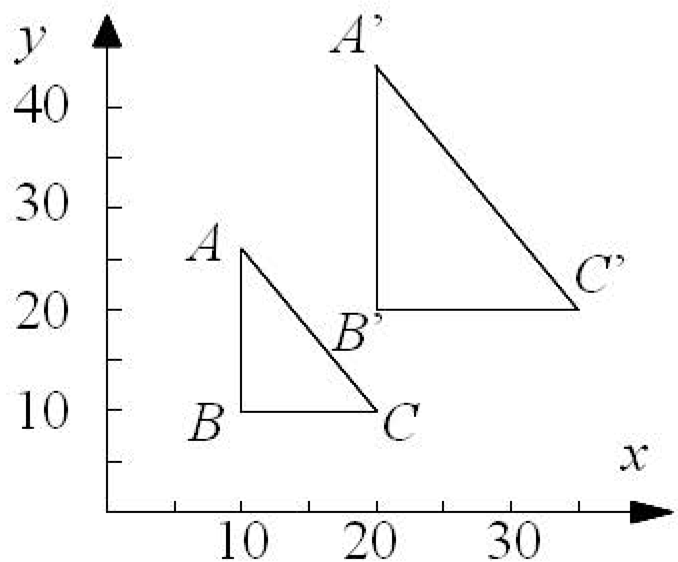
$$T_s=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，则：\begin{bmatrix} X & Y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=[ax\ dy\ 1]=\begin{bmatrix} X' & Y' & 1 \end{bmatrix}$$

- a,d分别为x,y方向上的比例因子（a,d>0）
- 若a=d=1， 恒等变换，变换后点坐标不变
- 若a=d≠1，等比变换， （a=d>1）或（a=d<1）
- 若a≠d，不等比变换

1 比例变换

- 原三角形ABC经放大2倍后变为三角形

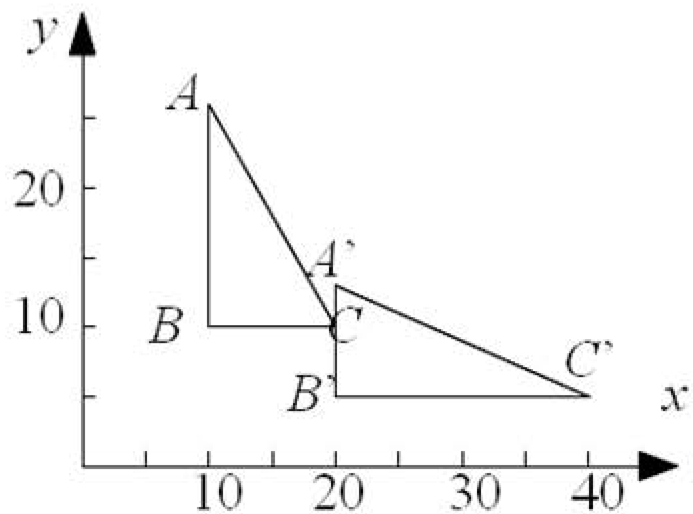
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 52 & 1 \\ 20 & 20 & 1 \\ 40 & 20 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
=
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} x' & y' & \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 10 & 26 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \\ 20 & 10 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A' \\ B' \\ C' \end{array}
\end{array}
$$



1 比例变换

- 若a≠d，则变换后图形将变形。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 26 \\ 10 & 10 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} x' & y' \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 20 & 13 & 1 \\ 20 & 5 & 1 \\ 40 & 5 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A' \\ B' \\ C' \end{array} \end{array}$$



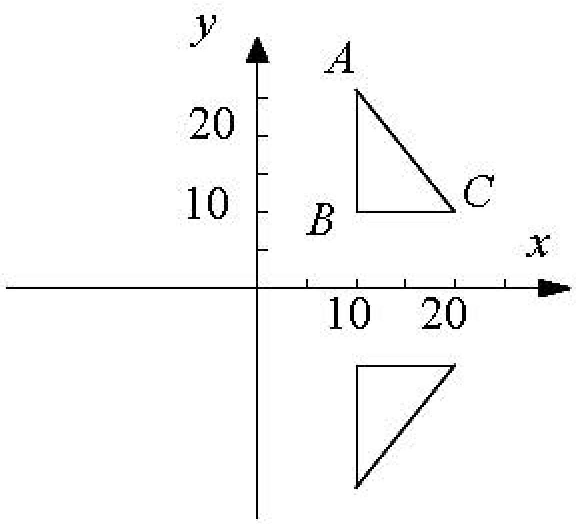
2 对称变换

- 对称变换可分为对坐标轴、±45°线和原点的对称变换。

2 对称变换

- 对X轴对称有：X′=X， Y′=-Y
- 则变换矩阵为：

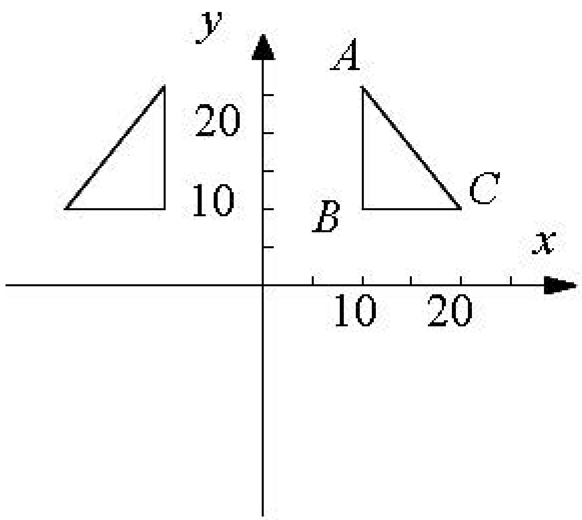
$$T_{mx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，\quad 即\ [X\ \ Y\ \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [X\ -Y\ \ 1] = [X'\ \ Y'\ \ 1]$$



2 对称变换

- 对Y轴对称有：X′=-X，Y′=Y
- 则变换矩阵为：

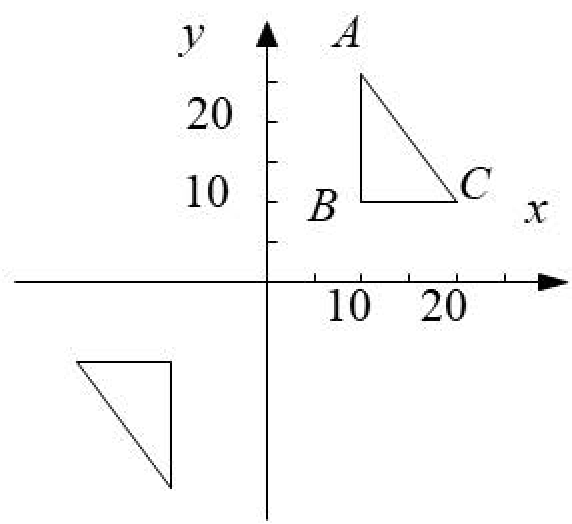
$$T_{my}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}，\text{即}\ [X\ \ Y\ \ 1]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[-X\ \ Y\ \ 1]=[X'\ \ Y'\ \ 1]$$



2 对称变换

- 对原点对称有：**X′=-X，Y′=-Y**
- 则变换矩阵为：

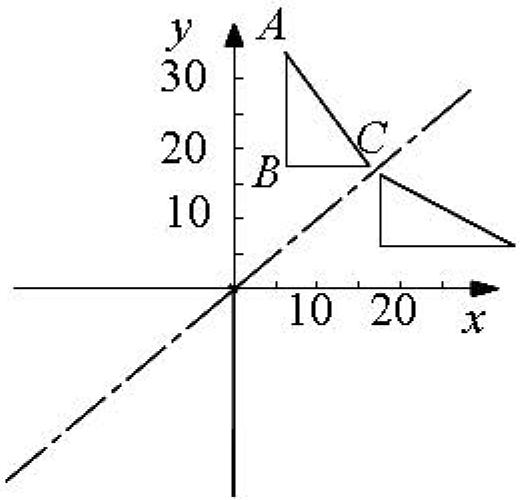
$$T_{mo}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}，\text{即}\ [X\ \ Y\ \ 1]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[-X\ -Y\ \ 1]=[X'\ \ Y'\ \ 1]$$



2 对称变换

- 对+45° 对称有：X′=Y, Y′=X
- 则变换矩阵为：

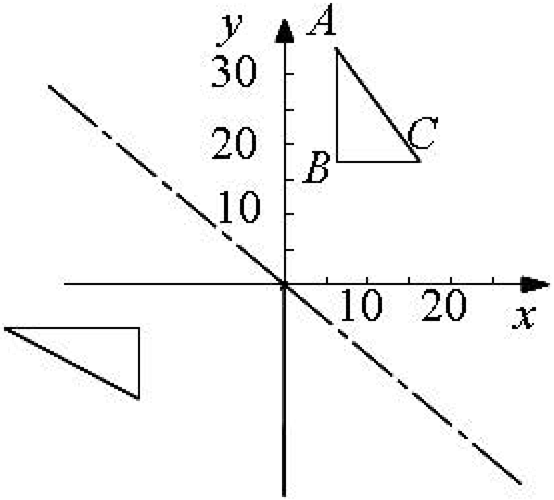
$$T_{m,+45}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}，即\ [X\ \ Y\ \ 1]\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=[Y\ \ X\ \ 1]=[X'\ \ Y'\ \ 1]$$



2 对称变换

- 对-45° 对称有：X′=-Y， Y′=-X
- 则变换矩阵为：

$$T_{m,-45} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，\quad 即\ [X\ \ Y\ \ 1]\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-Y\ \ -X\ \ 1] = [X'\ \ Y'\ \ 1]$$



3 旋转变换

- 假定图形的旋转是指绕坐标原点旋转θ角，且逆时针为正，顺时针为负
- 变换矩阵为

$$T_r = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 旋转变换

- 则对点进行旋转变换：

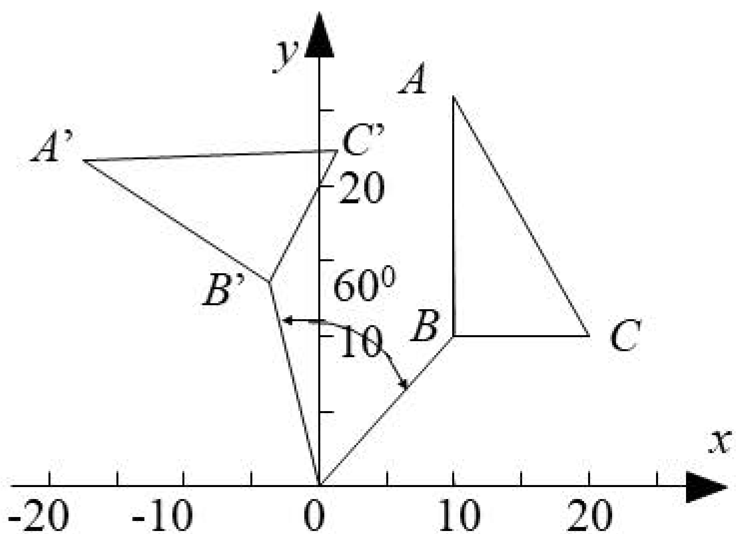
$$[x \ \ y \ \ 1]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [x\cos\theta - y\sin\theta \quad x\sin\theta + y\cos\theta \quad 1] = [x' \ \ y' \ \ 1]$$

3 旋转变换

- 对三角形*ABC*进行旋转变换（θ= 60°）

$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\
\begin{bmatrix} 10 & 26 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \\ 20 & 10 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} \cos 60 & \sin 60 & 0 \\ -\sin 60 & \cos 60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x' & y' & \end{array} \\
\begin{bmatrix} -17.516 & 21.66 & 1 \\ -3.66 & 13.66 & 1 \\ 1.34 & 22.32 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
 \\ A' \\ B' \\ C'
\end{array}
$$



4 平移变换

- 平移变换矩阵为：

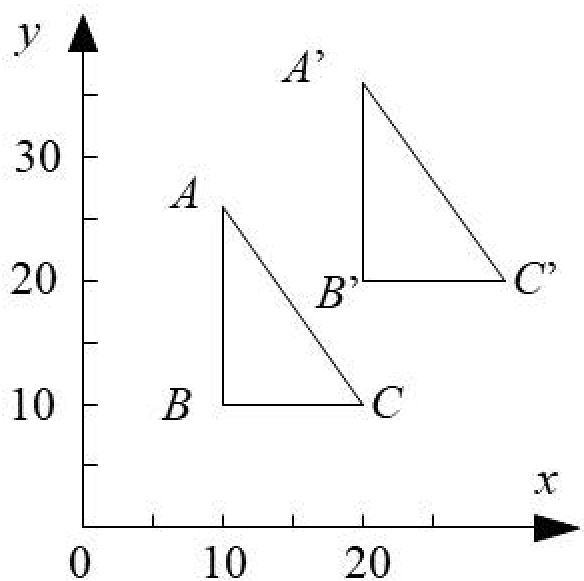
$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & m & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & m & 1 \end{bmatrix} = [x+k \quad y+m \quad 1] = [x' \quad y' \quad 1]$$

4 平移变换

- 令*k*=10，*m*=10，对三角形*ABC*作平移变换

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 26 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \\ 20 & 10 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} x' & y' & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 20 & 36 & 1 \\ 20 & 20 & 1 \\ 30 & 20 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A' \\ B' \\ C' \end{array} \end{array}$$



5 错切变换

错切变换的变换矩阵为：

$$T_{sh}=\begin{bmatrix}1 & b & 0\\ c & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\text{，则：}\quad [\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y}\ \ \mathbf{1}]\begin{bmatrix}1 & b & 0\\ c & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[x+cy\ \ \ bx+y\ \ \ 1$$

5 错切变换

(1)沿X向错切

令$b = 0$，沿X向错切的变换矩阵为：

$$T_{shx} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } [X \ \ Y \ \ 1] \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x + cy \ \ y \ \ 1] = [x' \ \ y' \ \ 1]$$

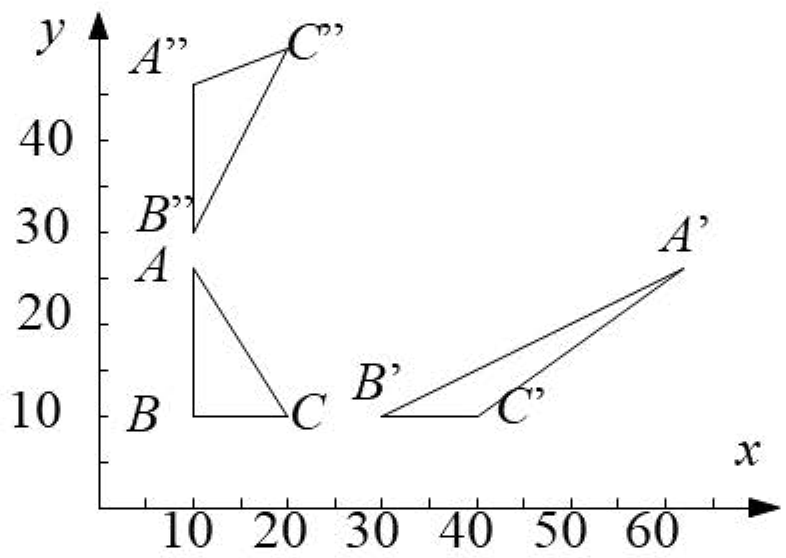
$(c \neq 0)$

Y坐标不变，X坐标有一增量CY，这就相当于原来平行于Y轴的线向X方向错切成与X轴成α角的直线，且有$\mathrm{tg}\alpha = y/cy = 1/c$。当$c>0$时沿$+X$向错切；$c<0$时，沿$-x$向错切。

5 错切变换

设$c=2$，对图中三角形ABC进行错切变换得：

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 26 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \\ 20 & 10 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x' & y' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 62 & 26 & 1 \\ 30 & 10 & 1 \\ 40 & 10 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A' \\ B' \\ C' \end{array}$$



5 错切变换

(2)沿Y轴方向错切

令 $c=0$，$T_{shy}=\begin{bmatrix}1 & b & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则

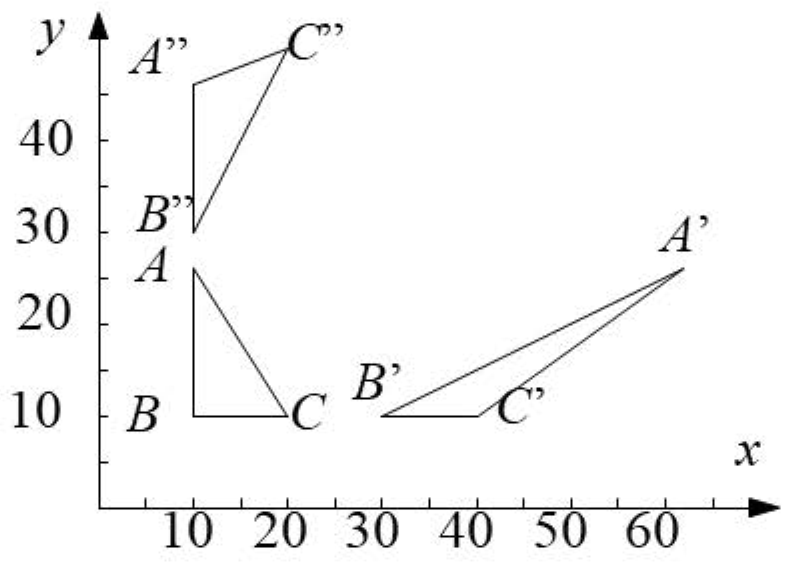
$$[X\ \ Y\ \ 1]\begin{bmatrix}1 & b & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[x\ \ bx+y\ \ 1]=[x'\ \ y'\ \ 1]\ (b\neq 0)$$

变换的结果是X坐标不变，而Y坐标产生一增量bx，使原来平行于X轴的线倾斜θ角且$tg\theta=x/bx=1/b$。当$b>0$时,沿$+Y$向错切；$b<0$时沿$-Y$向错切。

5 错切变换

设$b=2$，对图中三角形ABC进行错切变换得：

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad x & y \qquad \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 26 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \\ 20 & 10 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad x'' & y'' \qquad \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 46 & 1 \\ 10 & 30 & 1 \\ 20 & 50 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A'' \\ B'' \\ C'' \end{array}$$



4.3 二维组合变换

- 基本变换：可用一个变换矩阵形式来实现。
- 有些变换仅用一种基本变换是不能实现的，必须由两种或多种基本变换组合才能实现。
- 由多种基本变换组合而成的变换称之为组合变换，相应的变换矩阵叫做组合变换矩阵。

4.3 二维组合变换

- 问题1：绕任意点旋转变换
- 平面图形绕任意点P(Xp,Yp)旋转α角，如何实现？

4.3 二维组合变换

① 将旋转中心平移到原点，变换矩阵为：

$$\boldsymbol{T_{t1}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -x_p & -y_p & 1\end{bmatrix}$$

② 将图形绕坐标系原点旋转α角，变换矩阵为：

$$\boldsymbol{T_{r2}}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4.3 二维组合变换

③ 将旋转中心平移回到原点的位置：

$$T_{t3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}$$

- 因此，绕任意点*P*的旋转变换矩阵为：

$$T = T_{t1} \times T_{r2} \times T_{t3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 二维组合变换

- 相乘后得：

$$T=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ x_p(1-\cos\alpha)+y_p\sin\alpha & -x_p\sin\alpha+y_p(1-\cos\alpha) & 1 \end{bmatrix}$$

- 当x_p=0，y_p=0时，即为对原点的旋转变换。

4.3 二维组合变换

- 问题2：对任意直线的对称变换
  - 设任意直线的方程为$AX+BY+C=0$
  - 直线在X轴和Y轴上的截距分别为$-C/A$和$-C/B$
  - 直线与X轴的夹角$\alpha=\mathrm{arctg}(-A/B)$

4.3 二维组合变换

①平移直线，使其通过原点（可以沿x轴平移，也可以沿Y轴平移，这里以沿x轴平移为例），变换矩阵为：

$$\boldsymbol{T}_{1t}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ C/A & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4.3 二维组合变换

②绕原点旋转-α，使直线与X坐标轴重合，变换矩阵为：

$$T_{2r}=\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) & 0\\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4.3 二维组合变换

③对**x**坐标轴对称变换，其变换矩阵为：

$$\boldsymbol{T}_{3m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 二维组合变换

④绕原点旋转使直线回到原来与x轴成α角的位置，变换矩阵为：

$$T_{4r}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4.3 二维组合变换

⑤平移直线，使其回到原来的位置，变换矩阵为：

$$T_{5t}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -C/A & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4.3 二维组合变换

- 通过上述5个步骤，即可实现图形对任意直线的对称变换，其组合变换矩阵为：

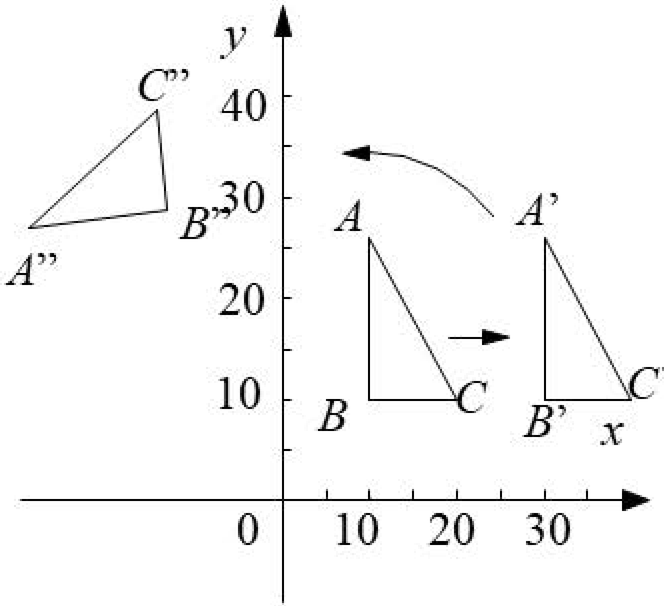
$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_{1\mathrm{t}}\times\boldsymbol{T}_{2\mathrm{r}}\times\boldsymbol{T}_{3\mathrm{m}}\times\boldsymbol{T}_{4\mathrm{r}}\times\boldsymbol{T}_{5\mathrm{t}}=\begin{bmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha & 0\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha & 0\\ (\cos2\alpha-1)\cdot\frac{C}{A} & \sin2\alpha\cdot\frac{C}{A} & 1\end{bmatrix}$$

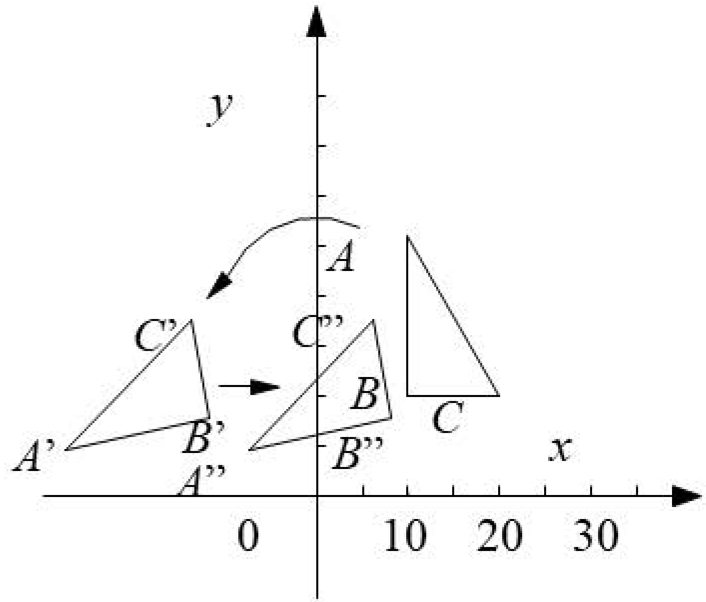
4.3 二维组合变换

- 复杂变换是通过基本变换的组合成的。
- 矩阵的乘法不适用于交换律， $[A]\ [B] \neq [B]\ [A]$ ，组合的顺序一般是不能颠倒
- 顺序不同，则变换的结果亦不同。

4.3 二维组合变换

- 不同顺序的基本变换组合得到不同的变换结果。





4.4 三维基本变换

- 比例变换
- 对称变换
- 错切变换
- 旋转变换
- 平移变换

三维基本变换

- 三维图形的变换是二维图形变换的简单扩展
- 变换原理是把齐次坐标点(x,y,z,1)通过变换矩阵变换成新的齐次坐标点(x', y', z′, 1)

三维基本变换

- 在三维空间里，用四维齐次坐标 **[x y z 1]** 表示三维点，三维变换矩阵则用 **4×4** 阶矩阵表示

[x y z 1]×T = [x' y' z' 1]

- 其中T为三维基本变换矩阵：

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ k & m & n & s \end{bmatrix}$$

1 比例变换

比例变换矩阵 $Ts = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 主对角线上的元素a，e，j的作用是产生比例变换
- 其中a，e，j分别为沿x，y，z轴方向的比例因子

- 对点进行比例变换

$$[x\ \ y\ \ z\ \ 1]\cdot Ts$$
$$=[ax\ \ ey\ \ jz\ \ 1]$$
$$=[x'\ \ y'\ \ z'\ \ 1]$$

1 比例变换

- 对点进行比例变换

$$[x\ \ y\ \ z\ \ 1]\cdot Ts$$
$$=[ax\ \ ey\ \ jz\ \ 1]$$
$$=[x'\ \ y'\ \ z'\ \ 1]$$

2 对称变换

- 三维对称变换包括对原点、对坐标轴和对坐标平面的对称
- 常用的是对坐标平面的变换

(1) 对xoy平面的对称变换

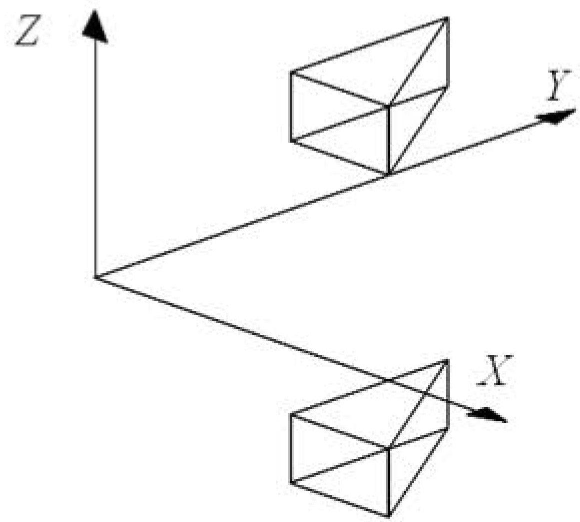
对称变换矩阵 $T_{m,xoy}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

对点进行对称变换

$[x\ \ y\ \ z\ \ 1]\cdot T_{m,xoy}$

$=[x'\ \ y'\ \ z'\ \ 1]$

$=[x\ \ y\ \ -z\ \ 1]$



(2) 对xoz平面的对称变换

对称变换矩阵

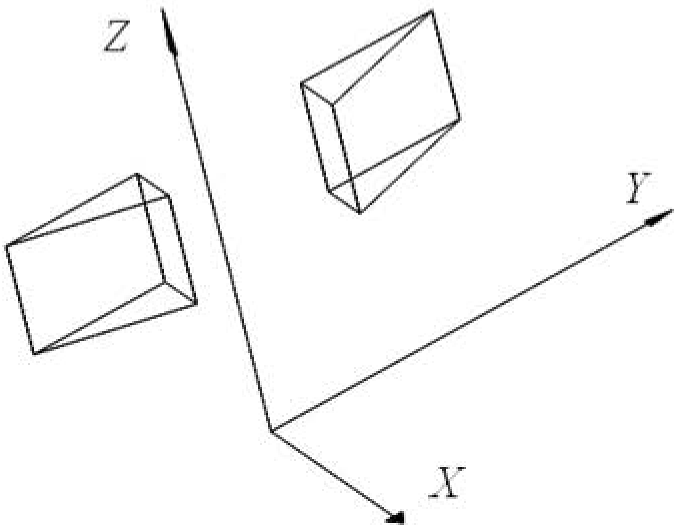
$$T_{m,xoz}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

对点进行对称变换

[x y z 1]·Tm,xoz

=[x' y' z' 1]

=[x -y z 1]



(3) 对yoz平面的对称变换

对称变换矩阵

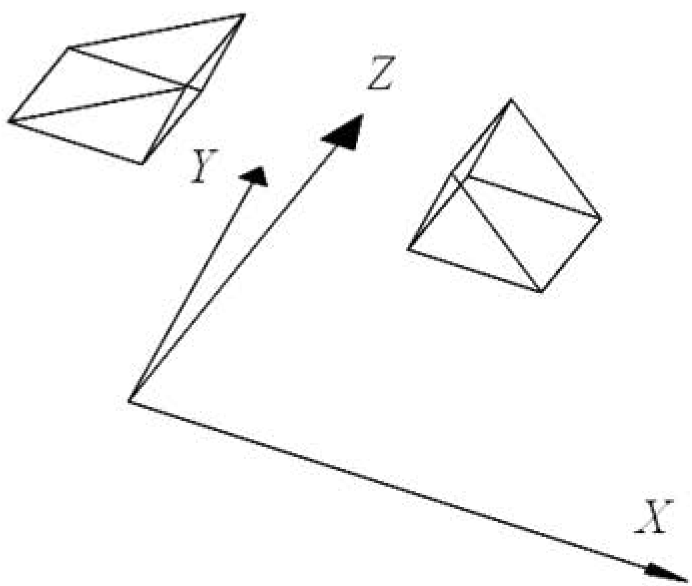
$$\boldsymbol{T}_{m,yozz}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

对点进行对称变换

[x y z 1]·Tm,yoz

=[x' y' z' 1]

=[-x y z 1]

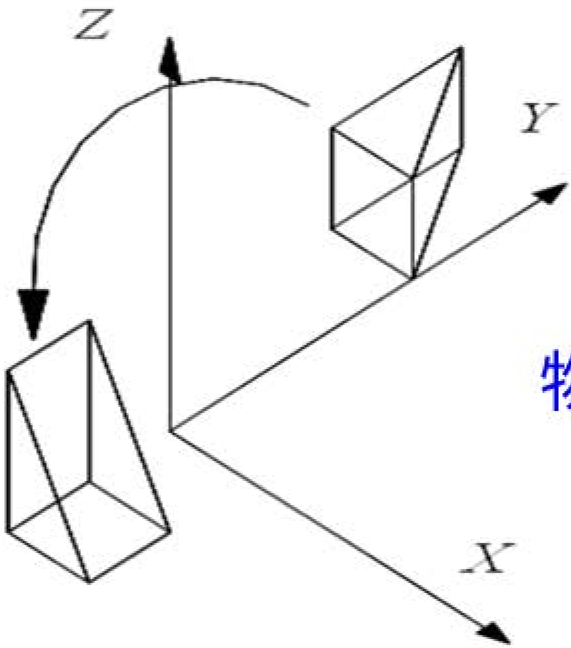


3 旋转变换

- 三维旋转变换可以看作是三个二维旋转变换，且旋转轴分别为**x**，**y**，**z**轴。

(1) 绕x轴旋转α角

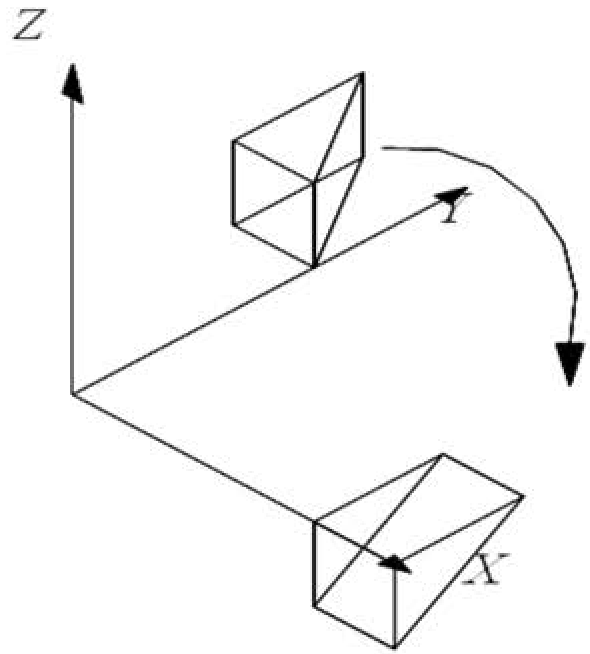
对称变换矩阵 $\mathbf{T}_{rx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



物体x轴旋转90°变换结果

(2) 绕y轴旋转β角

对称变换矩阵 $\mathbf{T}_{ry}=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

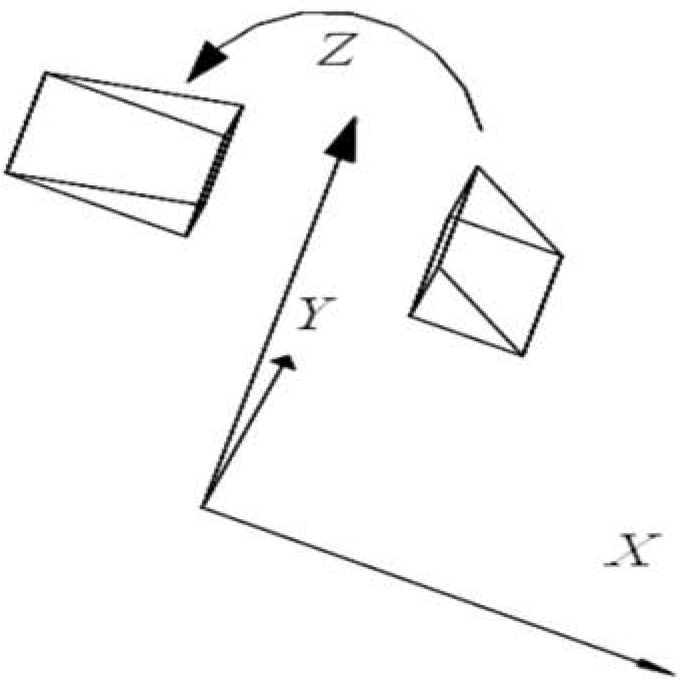


物体y轴旋转90°变换结果

(3) 绕Z轴旋转γ角

对称变换矩阵

$$\mathbf{T}_{rz}=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



物体z轴旋转90°变换结果

4 平移变换

- 将空间一点(x，y，z)平移到新位置(x′，y′，z′)的变换矩阵为：

$$T_t=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ k & m & n & 1\end{bmatrix}$$

- 变换后新点的坐标为：

$$[x' \ y' \ z' \ 1]=[x \ y \ z \ 1]Tt=[x+k \ y+m \ z+n \ 1]$$

□ 其中：k，m，n分别为沿x，y，z方向上的平移量。

5 错切变换

错切变换是指三维立体沿*x*，*y*，*z*三个方向产生错切，错切变换是画斜轴测图的基础，其变换矩阵为：

$$\boldsymbol{T}_{sh}=\begin{bmatrix}1 & b & c & 0\\ d & 1 & f & 0\\ h & i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[x\ y\ z\ 1]\,Tsh = [x+dy+hz\ \ bx+y+iz\ \ cz+fy+z\ \ 1] = [x'\ y'\ z\ 1]$$

由变换结果看出，一个坐标的变化受另外两个坐标变化的影响。

5 错切变换

(1) 沿x含y错切

变换矩阵：$\boldsymbol{T}_{sh,\,x(y)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\d&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

错切变换：

$$[x\ y\ z\ 1]\,Tsh{,}x(y)=[x+dy\ y\ z\ 1]=[x'\ y'\ z\ 1]$$

5 错切变换

(2) 沿x含z错切

变换矩阵：$T_{\mathrm{sh,x(z)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

错切变换：

$$[x\ y\ z\ 1]\,T\mathrm{sh,x(z)} = [x+\mathrm{h}z\ \ y\ \ z\ \ 1] = [x'\ y'\ z'\ 1]$$

5 错切变换

(3) 沿y含x错切

变换矩阵： $$T_{sh,y(x)}=\begin{bmatrix}1 & b & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

错切变换：

$$[x\ y\ z\ 1]T_{sh,y(x)}=[x\ \ y+bx\ \ z\ \ 1]=[x'\ y'\ z'\ 1]$$

5 错切变换

(4) 沿y含z错切

变换矩阵： $T_{sh,\,y(z)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&i&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

错切变换：

$$[x\ y\ z\ 1]\,Tsh,y(z)=[x\ \ y+iz\ \ z\ \ 1]=[x'\ y'\ z'\ 1]$$

5 错切变换

(5) 沿z含x错切

变换矩阵：$T_{\text{sh, z(x)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

错切变换：

$$[x\ y\ z\ 1]\,T\text{sh,z(x)} = [x\ y\ z+cx\ 1] = [x'\ y'\ z'\ 1]$$

5 错切变换

(6) 沿z含y错切

变换矩阵： $T_{sh,\ z(y)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

错切变换：

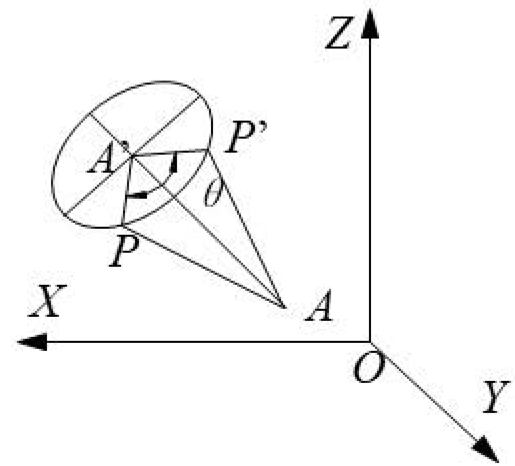
$$[x\ y\ z\ 1]\,T_{sh,z(y)} = [x\ y\ z+fy\ 1] = [x'\ y'\ z'\ 1]$$

4.5 三维组合变换

- 通过对三维基本变换矩阵的组合，可以实现对三维物体的复杂变换。

三维组合变换

- 问题1:
  - 用三维组合变换的方法来解决绕任意轴旋转的问题
  - 设空间旋转轴是AA'，A的坐标是(x_A,y_A,z_A)，A'的坐标是$(x`_A,y'_A,z`_A)$，空间点$P(x,\ y,\ z)$绕AA'轴旋转θ角到$P'(x',y',z')$，



绕任意轴旋转

三维组合变换

- T_{AR}为绕任意轴的旋转变换矩阵
- 它是由基本变换矩阵组合而成，任务就是要构造矩阵T_{AR}

三维组合变换

1. 将点P与旋转轴AA'一直起作平移变换，使旋转轴AA'过原点，A与原点重合，其变换矩阵为：

$$T_{1t}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -x_A & -y_A & -z_A & 1\end{bmatrix}$$

三维组合变换

2. 令**AA'**轴先绕**X**轴逆时针旋转α角，使其与**XOZ**平面共面，再绕**Y**轴顺时针旋转β角，使其与**Z**轴重合，变换矩阵为：

$$T_{2rxy}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\beta) & 0 & \sin(-\beta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

绕X轴旋转 α 角　　　　绕Y轴旋转 β 角

- α和β角可通过旋转轴的两个端点坐标计算得到

三维组合变换

3. 将P点绕Z轴（即AA'轴）旋转θ角，变换矩阵为：

$$\mathbf{T}_{3r\,z}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维组合变换

4．对步骤(2)作逆变换，将*AA'*旋转回到原来的位置，变换矩阵为：

$$
\mathbf{T}_{4ry\,x}=\begin{bmatrix}\cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

三维组合变换

5．对步骤(1)作逆变换，将旋转轴平移回到原来的位置，变换矩阵为：

$$\mathbf{T}_{5t}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\x_A&y_A&z_A&1\end{bmatrix}$$

三维组合变换

- 上述五步连起来，便组成绕任意轴的旋转变换矩阵：

$$\mathbf{T}_{\mathrm{AR}} = \mathbf{T}_{1t}\mathbf{T}_{2r\,\mathrm{xy}}\mathbf{T}_{3r\,\mathrm{z}}\mathbf{T}_{4r\,\mathrm{yz}}\mathbf{T}_{5t}$$

课后练习

- 已知三角形各顶点坐标为(10,10)、(10,30)和(30,15)试对其进行下列变换，写出变换矩阵，画出变换后的图形。
  - 沿X向平移20，沿Y向平移15，再绕原点旋转90°。
  - 绕原点旋转90°，在沿X向平移20，沿Y向平移15.

课后练习

- 已知直线方程为：
  - y=kx+b
  - x/a+y/b=1 (a≠0, b≠0)

  试导出图形对该直线进行对称变换的变换矩阵。