南京林业大学试卷(A 卷)（答案）

课程 概率统计 B　　　　　　2018~2019 学年第 2 学期

题号	一	二	三	四	总分
得分					

姓名

班号

学号

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．对事件 A,B，若 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，且 $P(A|B)=1$，则 $P(\bar{B}|\bar{A})=$ __1__.

2．在 $1\sim5$ 五个自然数中任取两数，则两数之积为偶数的概率为 $\underline{\frac{7}{10}}$.

3．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $E(X)=3$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}(x-1)f(x)dx=$ __2__.

4．设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(-2,1)$，且 X 和 Y 独立，$Z=2X-Y+1$，则 $E(Z^2)=$ __14__.

5．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$（$n>1$）为其样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差，则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\underline{(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))}$.

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．设 A,B 为任意事件，则关于 $P(AB)$ 有（　D　）.

（A）$P(AB)\geq P(A)$　　　　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$

（C）$P(AB)\geq P(A)+P(B)$　　　　（D）$P(AB)\leq\frac{1}{2}[P(A)+P(B)]$

2．设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，X_1,X_2 为其样本，又 $Y=\max\{X_1,X_2\}$，则 Y 的分布函数为（　A　）.

（A）$F^2(y)$　　（B）$[1-F(y)]^2$　　（C）$1-F^2(y)$　　（D）$1-F(y)$

3．设随机变量 X 的概率密度是 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，用切比雪夫不等式估计概率 $p=P(|X-2|\geq3)$，有（　C　）.

（A）$p\leq\frac{5}{9}$　　（B）$p\geq\frac{5}{9}$　　（C）$p\leq\frac{4}{9}$　　（D）$p\geq\frac{4}{9}$；

4．设总体 $X\sim N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$（$n>1$）为其样本，$\bar{X}$ 是样本均值，则以下统计量服从 χ^2 分布的是（　D　）.

（A）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$　　（B）$2(X_1-X_n)^2$　　（C）$(\bar{X}-\mu)^2$　　（D）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

5．设总体X服从泊松分布$\pi(\lambda)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$（$n>1$）为其样本，$\bar{X}$和S^2分别是样本均值和样本方差，则以下统计量中不是λ的无偏估计量的是（　C　）．

（A）$\bar{X}$　　（B）$2X_1-X_n$　　（C）$2X_1+X_n$　　（D）S^2

三、计算下列各题（每题12分，共48分）

1．设随机变量X的分布律为$\begin{array}{c|ccc} X & -2 & 1 & 3 \\ \hline P & \frac{1}{2} & a & b \end{array}$，且$E(X)=0$．试求：（1）$a,b$的值；（2）$X$的分布函数；（3）$D(X)$．

解：（1）由$E(X)=-1+a+3b=0,a+b=1/2$解得$a=b=1/4$，从而

X的分布律$\begin{array}{c|ccc} X & -2 & 1 & 3 \\ \hline P & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array}$；　　（4分）

（2）$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ 1/2, & -2\le x<1 \\ 3/4, & 1\le x<3 \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}$；　　（8分）

（3）$E(X)=0$，$E(X^2)=9/2,D(X)=E(X^2)-E^2(X)=9/2=4.5$．　　（12分）

2．设随机变量X,Y相互独立，且X的分布律为$P(X=0)=\frac{1}{3},P(X=1)=\frac{2}{3}$，$Y$的概率密度$f(y)=\begin{cases} 2y, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求：（1）$P(Y\le E(Y))$；（2）$P(X+Y\le\frac{3}{2})$．

解：

（1）$E(Y)=\int_0^1 2y^2dy=2/3,P(Y\le E(Y))=\int_0^{2/3}2ydy=4/9$，　　（6分）

（2）$P(X+Y\le\frac{3}{2})=P(X=0)P(X+Y\le\frac{3}{2}|X=0)+P(X=1)P(X+Y\le\frac{3}{2}|X=1)$

$$=\frac{1}{3}P(Y\le\frac{3}{2})+\frac{2}{3}P(Y\le\frac{1}{2})=\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$　　（12分）

3．对于上题中的随机变量Y，求$Z=Y^2$的概率密度$f_Z(z)$．

解：由于

$z=y^2(0<y<1)$严格单调，反函数 $y=\sqrt{z}$ 连续可导且 $y'_z=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$ 又 $R(Z)=(0,1)$，（6 分）

由公式得 $f_Z(z)=\begin{cases}2\sqrt{z}\times\dfrac{1}{2\sqrt{z}}, & 0<z<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1, & 0<z<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$.（12 分）

4．设 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}k\dfrac{x}{y}, & 0<x<1,1<y<e\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$.

求:（1）k 的值;（2）求关于 X 和 Y 的边缘概率密度，并判断 X 与 Y 是否独立;（3）求 $P(Y<2)$.

解:（1）由规范性 $k\int_0^1 xdx\int_1^e \dfrac{1}{y}dy=k/2=1$ 得 $k=2$；（4 分）

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_1^e\dfrac{2x}{y}dy=2x$，$(0<x<1)$，

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1\dfrac{2x}{y}dx=\dfrac{1}{y}$，$(1<y<e)$，

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立;（8 分）

（3）$P(Y<2)=\iint_{D:y<2}f(x,y)d\sigma=2\int_0^1 xdx\int_1^2\dfrac{1}{y}dy=\ln 2$.（12 分）

四、计算下列各题（第一题 12 分，第二题 10 分，共 22 分）

1．设总体 X 的概率密度 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 θ 为未知参数，又设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 容量为 n 的样本，试求:（1）θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；（2）θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

解:（1）$\mu_1=E(X)=\dfrac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^3dx=\dfrac{3\theta}{4}$，解得 $\theta=\dfrac{4}{3}\mu_1$，从而 $\hat{\theta}=\dfrac{4}{3}\bar{X}$，（6 分）

（2）$L(\theta)=\prod_{i=1}^n\dfrac{3x_i^2}{\theta^3}=\dfrac{3^n}{\theta^{3n}}\prod_{i=1}^n x_i^2$，$\ln L(\theta)=n\ln 3-3n\ln\theta+2\sum_{i=1}^n\ln x_i$，

由于 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{3n}{\theta}<0$，故 $L(\theta)$ 单调减少，又 $0<x_i<\theta,\theta>\max(x_i),i=1,2,\cdots,n$，

故 $$\hat{\theta}_L = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n).$$ （12 分）

2．某厂生产的某种铝材长度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其均值 μ 设定为 **240 cm**．现从该厂抽取 **9** 件产品，测得 $\bar{x} = 239.5$ cm，$s^2 = 0.16$，试判断该厂这批铝材的长度是否满足设定要求？（取 $\alpha = 0.05$）．（附：$t_{0.05}(8) = 1.86$，$t_{0.025}(8) = 2.31$）

解：由题意，即在 $\alpha = 0.05$ 下检验假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 240$ *vs* $H_1: \mu \neq \mu_0$ （2 分）

检验统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$，拒绝域 $|T| = \left|\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$ （7 分）

又

$$|t| = \left|\frac{239.5 - 240}{0.4/3}\right| = 3.75 > t_{0.025}(8) = 2.31,$$

从而拒绝 H_0，认为不满足设定要求. （10 分）