

# 南京林业大学试卷(B卷)

课程 线性代数 A

2020~2021 学年第 1 学期

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 行列式有两行元素对应相等是该行列式等于 0 的（ ）条件.

- (A) 充分 (B) 必要 (C) 充要 (D) 既不充分也不必要

2. 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $A^3 = E$ , 则下列结论一定正确的是（ ）.

- (A)  $A = E$  (B)  $A$  不可逆 (C)  $A$  可逆, 且  $A^{-1} = A$  (D)  $A$  可逆, 且  $A^{-1} = A^2$

3. 设  $\xi_1, \xi_2$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的两个不同解, 则以下结论正确的是（ ）.

- (A)  $\frac{1}{5}\xi_1 + \frac{4}{5}\xi_2$  是  $Ax = b$  的解 (B)  $\xi_1 - \xi_2$  是  $Ax = b$  的解  
(C)  $\xi_1 + \xi_2$  是  $Ax = 0$  的解 (D)  $\frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2$  是  $Ax = 0$  的解

4. 设  $A, B$  都是  $n$  阶可逆矩阵, 且满足  $(AB)^2 = E$ , 则下列等式正确的是（ ）.

- (A)  $A = B^{-1}$  (B)  $AB = E$  (C)  $BA = E$  (D)  $(BA)^2 = E$

5. 设  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的秩为 4, 则向量组  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3,$

$\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4$  的秩为（ ）.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

6. 设  $\alpha$  是  $n$  维非零实列向量, 矩阵  $A = E + \alpha\alpha^T$ ,  $n \geq 3$ , 则（ ）.

- (A)  $A$  至少有  $n-1$  个特征值为 1; (B)  $A$  只有 1 个特征值为 1;  
(C)  $A$  恰有  $n-1$  个特征值为 1; (D)  $A$  没有 1 个特征值为 1.

7. 设  $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -1$ , 则  $D_1 = \begin{vmatrix} 4a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & b_2 & b_3 \\ -2c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix} =$ （ ）.

- (A) 4 (B) -4 (C) -2 (D) 2

8. 设  $A_{m \times n}$  为实矩阵, 且  $R(A) = m < n$ , 则下列不正确的是（ ）.

- (A) 若  $AB = 0$ , 则  $B = 0$ ; (B) 若  $BA = 0$ , 则  $B = 0$ ;

(C)  $A^T Ax = 0$  有无穷多个解; (D)  $AA^T x = 0$  只有零解.

9. 设矩阵  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 已知矩阵  $A$  相似于  $B$ , 则  $R(A-2E) + R(A-E)$  ( ).

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

10. 设  $P$  为  $n$  阶正交矩阵,  $x$  是一个  $n$  维列向量, 且  $\|x\| = 1$ , 则  $\|Px\| =$  ( ).

(A) -1 (B) -2 (C) 1 (D) 2

二、计算题 (每小题 10 分, 共 50 分)

1. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  的值。

2. 设问  $a, b$  为何值时, 线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$  有唯一解, 无解, 有无穷多组解? 并求

在有无穷多组解时的通解.

3. 已知  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ , 解矩阵方程  $3B + 2X = XA$ .

4. 求  $\alpha_1 = (2, 1, 3, -1)^T$ ,  $\alpha_2 = (3, -1, 2, 0)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 3, 4, -2)^T$ ,  $\alpha_4 = (4, -3, 1, 1)^T$  的一个最大线性无关组. 并将其余的向量用该最大线性无关组线性表出。

5. 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  的特征值与全部特征向量.

三、(本题 10 分) 求一个正交线性变换, 将二次型  $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$  化成标准形。

四、(每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设 3 阶方阵  $A$  的伴随矩阵为  $A^*$ , 且  $|A| = \frac{1}{2}$ , 求  $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ .

2. 设矩阵  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ , 其中  $a_2, a_3, a_4$  线性无关,  $a_1 = 2a_2 - a_3$ . 向量  $b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ , 求方程  $Ax = b$  的通解.