线性代数 A 期末练习题五参考答案

一、单项选择题

1．设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，则 $\begin{vmatrix} 2a_1 & 4a_1-3b_1 & c_1 \\ 2a_2 & 4a_2-3b_2 & c_2 \\ 2a_3 & 4a_3-3b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$（ C ）.

$(A)\ 6$ $(B)\ 4$ $(C)\ -12$ $(D)\ -48$

分析：$\begin{vmatrix} 2a_1 & 4a_1-3b_1 & c_1 \\ 2a_2 & 4a_2-3b_2 & c_2 \\ 2a_3 & 4a_3-3b_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 2a_1 & -3b_1 & c_1 \\ 2a_2 & -3b_2 & c_2 \\ 2a_3 & -3b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2\times(-3)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-12$

2．设 A 为 n 阶方阵，且 $A^3=E$，则下列结论一定正确的是（ D ）.

$(A)\ A=E$ $(B)\ A$ 不可逆

$(C)\ A$ 可逆，且 $A^{-1}=A$ $(D)\ A$ 可逆，且 $A^{-1}=A^2$

3．设 A,B 都是 n 阶可逆矩阵，且满足 $(AB)^2=E$，则下列等式正确的是（ D ）.

$(A)\ A=B^{-1}$ $(B)\ AB=E$ $(C)\ BA=E$ $(D)\ (BA)^2=E$

分析：因为 $(AB)^2=E$，所以 $ABAB=E \Rightarrow BAB=A^{-1}E=A^{-1}$

$\Rightarrow BABA=A^{-1}A=E \Rightarrow (BA)^2=E$

4．设 A^* 为 n 阶方阵 A 的伴随矩阵，则 $\left||A^*|A\right|=$（ D ）.

$(A)\ |A|^{n^2}$ $(B)\ |A|^n$ $(C)\ |A|^{n^2-n}$ $(D)\ |A|^{n^2-n+1}$

分析：$\left||A^*|A\right|=|A^*|^n|A|=\left(|A|^{n-1}\right)^n|A|=|A|^{n^2-n+1}$

5、已知 A，B 是方阵，且 $C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,则 C 的伴随矩阵为 C^*＝（ D ）

（A）$\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

6．下述命题不正确的是（ D ）.

(A) $R(A_{m\times n})\le \min\{m,n\}$；　　　　　　(B)若 $A\sim B$，则 $R(A)=R(B)$；

(C)若 P,Q 可逆，则 $R(PAQ)=R(A)$；　(D) $R(A+B)\ge R(A)+R(B)$.

分析：本题是考察矩阵秩的性质。（A）、（B）、（C）都是正确的。如

$R(PAQ)=R(AQ)=R(A)$，所以（C）是正确的。（D）不正确。因为

$R(A+B)\le R(A)+R(B)$。

7、已知 $Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$P$ 为 3 阶非零矩阵，且满足 $PQ=O$，则（　　　）.

(A) $t=6$时 P 的秩必为 1；　　　　　(B) $t=6$时 P 的秩必为 2；

(C) $t\ne 6$时 P 的秩必为 1；　　　　　(D) $t\ne 6$时 P 的秩必为 2.

分析：设 $Q=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，（当 $t\ne 6$时）由 $PQ=O$ 知，Q 的列向量都是齐次方程组 $Px=0$ 的解，从而知 $Px=0$至少有两个线性无关的解向量，故 $R(P)\le 1$， P 为 3 阶非零矩阵，所以 $R(P)\ge 1$，故有 $R(P)=1$。选（C）。

8、设 A 为 n 阶奇异矩阵，A 中有一元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\ne 0$，则齐次线性方程组 $Ax=0$的基础解系所含向量的个数为（　　　）.

(A) i个；　　　(B) j个；　　　(C)1 个；　　　(D) n个.

分析：因为 A 为 n 阶奇异矩阵,且有一个 $A_{ij}\ne 0$，所以 $R(A)=n-1$, 即齐次线性方程组 $Ax=0$的基础解系所含向量的个数只有 1 个。所以选（C）。

9、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$的基础解系，那么基础解系还可以是（　　　）.

(A) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$；　　　　　(B) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$；

(C) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$；　　　　　　(D) $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_2$.

分析：本题是考察等价的基础解系。因为

$\left(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$是可逆矩阵

所以 $R(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与

$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 等价，从而 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 也是一组基础解系。

注：与基础解系等价的线性无关向量组也是一组基础解系。

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．设三阶行列式 $A=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix}1&3&4\\2&1&3\\4&7&3\end{vmatrix}$， A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$A_{21}+3A_{22}+4A_{23}=$_______________.

分析： $A_{21}+3A_{22}+4A_{23}=\begin{vmatrix}1&3&4\\2&1&3\\1&3&4\end{vmatrix}=0$

2、设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,-1,1$，则行列式 $|A^3+2A-E|=$_______.

分析：记 $f(x)=x^3+2x-1$，所以 $f(A)=A^3+2A-E$，由于 A 的特征值为 $1,-1,1$，

所以

$f(A)=A^3+2A-E$ 的特征值分别为 $f(1)=2, f(-1)=-4, f(1)=2$。故

$$|A^3+2A-E|=2\times(-4)\times 2=-16$$

3、设 $A_{m\times n}$，又 C 是 m 阶可逆矩阵，且，$R(CA)=r$，则 $R(A)=$ __r__.

4、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 一定线性__相关__

5．设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为矩阵 A 的 n 个列向量，若

$b=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，则方程组 $Ax=b$ 的通解为______________________________.

分析：因为 $b=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，故可得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

所以 $x=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 是非齐次线性方程组的一个特解，故方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r+(1,\cdots,1)^T$$

6、设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(\lambda-1)x_1^2+\lambda x_2^2+(\lambda+1)x_3^2$，当满足（　C　）时，$f$ 是正定二次型.

(A) $\lambda>-1$　　(B) $\lambda>0$　　(C) $\lambda>1$　　(D) $\lambda\geq 1$

分析：f 的是正定的充分必要条件是所有顺序主子式大于零。

$A_1=|\lambda-1|=\lambda-1>0\ \Rightarrow \lambda>1$，而四个答案中只有（C）才满足。从而不必讨论二、三阶顺序主子式。

三、计算行列式的值

1、$D=\begin{vmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{vmatrix}$　　2、$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$ $(a_i\neq 0)$

1、解：$D=\begin{vmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{vmatrix}$

$$=(a+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a-1&0&0\\0&0&a-1&0\\0&0&0&a-1\end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^3$$

2、解：$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1+0\\1&1+a_2&\cdots&1+0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&0\\1&1+a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(r_{i<n}-r_n)} + a_n \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(\text{按第}n\text{列展开})} = a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_nD_{n-1}$$

$$D_n = a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_nD_{n-1} = a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_n\left(a_1a_2\cdots a_{n-2} + a_{n-1}D_{n-2}\right)$$

$$=\cdots = a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n + \ldots + a_2\cdots a_{n-1}a_n$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

四、设 3 阶方阵 A, B, X 满足 $3B+2X=XA$，且已知 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解： $3B+2X=XA \Rightarrow 3B=XA-2X \Rightarrow 3B=X(A-2E)$

$$\Rightarrow X=3B(A-2E)^{-1}=3\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

而 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X=3B(A-2E)^{-1}=3\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -21 & 9 & -3/2 \\ -54 & 21 & 3 \\ -27 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

五、设向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_5=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$.

求该向量组的秩及一个最大线性无关组，并将其余向量由所求出的最大无关

组线性表示.

解 令 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

所以最大线性无关组是 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$，且 $\vec{\alpha}_3=-\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$， $\vec{\alpha}_5=4\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2-3\vec{\alpha}_3$.

1. 六、设非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=-1\\ ax_2+x_3=1\\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$ ，问:a 取何值时，此方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

解：对增广矩阵进行初等行变换

$$\left(A,b\right)=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&a&1&1\\1&3&a+1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&a&1&1\\0&1&a&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&1&a&1\\0&0&1-a^2&1-a\end{pmatrix}$$

（1） 当 $a=-1$ 时， $r(A)=2,r(\tilde{A})=3,$ $r(A)\neq r(\tilde{A})$,方程组无解;

（2） 当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -1$ 时， $r(A)=r(\tilde{A})=3$ 方程组有唯一解;

（3） 当 $a=1$ 时， $r(A)=r(\tilde{A})=2<3$,方程组有无穷多解。此时

$$\left(A,b\right)\sim\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \left(k\in R\right)$

七、二次曲面: $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可经正交变换

$(x,y,z)^T=P(\xi,\eta,\zeta)^T$ 化为椭圆柱面 $\eta^2+4\zeta^2=4$, 求 a,b 和 P.

解析：设二次型 $f(x,y,z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$ 的矩阵为 A, 由题意

知 f 经正交线性替换可标准化为 $f(\xi,\eta,\zeta)=\eta^2+4\zeta^2$, 设其标准型对应矩阵为 B, 则矩阵 A 与 B 相似, 且

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-(a+2)\lambda^2+(2a-b^2-1)\lambda+(b-1)^2=|\lambda E-B|=\lambda^3-5\lambda^2+4\lambda$$

解得 $a=3,b=1$.所求矩阵 P 即是将二次型

$$f(x,y,z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$$

标准化的正交矩阵. 矩阵 A 的特征值为 0, 1, 4. 分别求得其对应特征向量为

$$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,-1,1)^T,\alpha_3=(1,2,1)^T.$$

将其单位化得

$$\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T,\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T,\beta_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T.$$

$P=(\beta_1\beta_2\beta_3)$ 即为所求.

八、设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，证明 $A+2E$ 可逆，并求 $(A+2E)^{-1}$。

解： 由 $A^2-A-2E=0\Rightarrow(A+2E)(A-3E)=-4E$，所以 $A+2E$ 可逆，且

$$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A).$$