南 京 林 业 大 学 试 卷(A 卷)

课程 线性代数 A 2017~2018 学年第 1 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，则 $\begin{vmatrix} 3a_1 & 2a_1-b_1 & c_1-b_1 \\ 3a_2 & 2a_2-b_2 & c_2-b_2 \\ 3a_3 & 2a_3-b_3 & c_3-b_3 \end{vmatrix}=$(D).

(A) 3　　　(B) -3　　　(C) 6　　　(D) -6

分析：$\begin{vmatrix} 3a_1 & 2a_1-b_1 & c_1-b_1 \\ 3a_2 & 2a_2-b_2 & c_2-b_2 \\ 3a_3 & 2a_3-b_3 & c_3-b_3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} a_1 & 2a_1-b_1 & c_1-b_1 \\ a_2 & 2a_2-b_2 & c_2-b_2 \\ a_3 & 2a_3-b_3 & c_3-b_3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-6$

2. 设 A, B 均为 n 阶方阵，则下列运算正确的是(　C　).

(A) $AB=BA$　　　(B) $(AB)^k=A^kB^k$

(C) $|AB|=|BA|$　　　(D) $B^2-A^2=(B-A)(B+A)$

分析：$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$

3. 设 $n(n\ge 2)$ 阶方阵 A 可逆，A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，则(　　).

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$　　　(B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$　　　(D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$

分析：因为 A 可逆，故有 $A^*=|A|A^{-1}\Rightarrow\left(A^*\right)*=^*=|A^*|\left(A^*\right)^{-1}=|A|^{n-1}\dfrac{A}{|A|}=|A|^{n-2}A$

4. 设 $A_{m\times n}$，又 C 是 n 阶可逆矩阵，且 $R(A)=r$，$R(AC)=r_1$，则(　　).

(A) $r>r_1$　　　(B) $r<r_1$　　　(C) $r=r_1$　　　(D) 以上皆有可能.

分析：可逆矩阵不影响其他矩阵的秩，所以 $R(AC)=R(A)\Rightarrow r=r_1$

5. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，那么基础解系还可以是(　　).

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(C) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$　　(D) $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_2$

分析：因为$\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，而$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\neq 0$

即$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$可逆，从而$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$与等价，且都线性无关，故

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系。

二. 填空题（每题3分，共15分）

1. 已知排列$1246m97n3$为奇排列，则$m=$__5__，$n=$__8__.

分析：当取$m=5,n=8$时，此时的逆序数为$\tau\left(124659783\right)=1+2+1+3+1+1=9$

所以124659783是奇排列。

2. 设3阶矩阵A的特征值为$1,-1,2$，则行列式$\left|A^2+3A-E\right|=$________.

分析：因为A的特征值为$1,-1,2$，故A^2+3A-E的特征值分别为$3,-3,9$，则有

$$\left|A^2+3A-E\right|=3\times\left(-3\right)\times 9=-81$$

3. 设n阶方阵A的各行元素之和均为零，且$R(A)=n-1$，则方程组$Ax=0$的通解为________.

分析：n阶方阵A的各行元素之和均为零，表明齐次线性方程组$Ax=0$有一个解为

$(1,1,\cdots,1)^T$，而$R(A)=n-1$，故只有一个基向量，从而$x=(1,1,\cdots,1)^T$就是$Ax=0$的

一个基础解系，故$Ax=0$的通解为$k(1,1,\cdots,1)^T,k\in R$.

4. 设$D=\begin{vmatrix}x&x&1&0\\2&x&2&3\\2&3&x&2\\1&1&2&x\end{vmatrix}$，则$D$的展开式中$x^3$的系数为__-2__.

分析：含有x^3的项只有一项$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，所以这项为

$$\left(-1\right)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x\cdot 2\cdot x\cdot x=-2x^3$$

5. 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$正定，则常数$a$的取值范围

为________.

分析：二次型矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ a & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

A 的各阶顺序主子式为

$$|A_1|=1>0,|A_2|=\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 4\end{vmatrix}=4-a^2>0,\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ a & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=7-2a^2>0$$

$$\Rightarrow |a|<\sqrt{\frac{7}{2}}$$

三、计算下列行列式（每题 8 分，共 16 分）

1. $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & 4\\ 1 & -3 & 5 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 5 & 2 & -3 & 5\end{vmatrix}$；

2. $D_n=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

解：1）$\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & 4\\ 1 & -3 & 5 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 5 & 2 & -3 & 5\end{vmatrix}\overset{r_1-r_3}{\underset{r_4-2r_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 3 & 3\\ 1 & -3 & 5 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3 & 3\\ 0 & -4 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -8 & -5\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 10 & -1\\ 0 & 0 & -6 & -5\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -5\\ 0 & 0 & 10 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-6 & -5\\ 10 & -1\end{vmatrix}=56$$

2） 当 $n=1$ 时，有 $D_1=1$

当 $n=2$ 时，有 $D_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7$

当 $n\geq 3$ 时，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1&3&3&3&\cdots&3\\3&2&3&3&\cdots&3\\3&3&3&3&\cdots&3\\3&3&3&4&\cdots&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\3&3&3&3&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&3&3&\cdots&3\\2&-1&0&0&\cdots&0\\2&0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&0&0&0&\cdots&n-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0&0&\cdots&0\\1&3&3&3&\cdots&3\\2&-1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&0&0&0&\cdots&n-3\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}3&3&3&3&\cdots&3\\-1&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&n-3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&3\\-1&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n-3\end{vmatrix}=6\cdot(n-3)!$$

四、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X.

解：因为 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=4\neq0$，A 可逆，由

$A^*X=A^{-1}+2X$ 得 $|A|A^{-1}X=A^{-1}+2X$，即 $4A^{-1}X=A^{-1}+2X$

$$\Rightarrow\left(4A^{-1}-2E\right)X=A^{-1}\Rightarrow X=\left(4A^{-1}-2E\right)^{-1}A^{-1}=\left(A\left(4A^{-1}-2E\right)\right)^{-1}$$

$\Rightarrow X=\left(4E-2A\right)^{-1}$ 后略

五、（12 分）求向量组

$\vec{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T$，$\vec{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T$，$\vec{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$，$\vec{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^T$，$\vec{\alpha}_5=(2,1,5,10)^T$

的秩和一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示。

解：$\left(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4,\vec{\alpha}_5\right)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&0&0&-1&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

向量组的一个最大线性无关组为$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$，而且

$$\vec{\alpha}_3 = 3\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 \ , \qquad \vec{\alpha}_4 = 2\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$$

六、（12 分）当a,b取何值时，方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = b \end{cases}$无解？有解？并在有解时求其全部解。

解：$$(\mathrm{A,b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & b-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$$

1）当$a \neq 0$或$b \neq 2$时，线性方程组无解；

2）当$a = 0, b = 2$时，线性方程组有解，且有

$$(\mathrm{A,b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到同解线性方程组 $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 2 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 3 \end{cases}$，取 $x_3 = k_1, x_4 = k_2$，则得到原方程的全部解为

$$\begin{cases} x_1 = k_3 + k_4 - 2 \\ x_2 = -2k_3 - 2k_4 + 3 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases} \quad \text{或写成} \quad x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in R$$

七、（15 分）已知二次型

$$f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2ax_1x_3 - 6x_2x_3 \text{，} \ (a > 0)$$

通过正交变换$x = Py$化成标准形$f = 4y_1^2 + 9y_2^2$，求

（1）常数a；

（2）正交变换矩阵P.

解：因为二次型通过正交变换 $x=Py$ 化成标准形为 $f=4y_1^2+9y_2^2$，故二次型矩阵 A 的特征值分别为 4，9，0.从而 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix}5&-1&a\\-1&5&-3\\a&-3&3\end{vmatrix}=-\left(5a^2-6a-27\right)=0 \quad \Rightarrow a=3,a=-\frac{9}{5}$$（舍去，因 a>0）

故有 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$

（2）A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$

当 $\lambda_1=0$ 时，有 $(A-\lambda E)x=0\Rightarrow Ax=0$，且

$$A-0\cdot E=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&4&0\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&6&-3\\0&-6&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=4$ 时，有 $(A-\lambda E)x=0\Rightarrow(A-4E)x=0$

$$A-4E=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&1&-3\\3&-3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&0&0\\0&0&-10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所对应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=9$ 时，有 $(A-\lambda E)x=0\Rightarrow(A-9E)x=0$，且

$$A-9E=\begin{pmatrix}-4&-1&3\\-1&-4&-3\\3&-3&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-5&-5&0\\-1&-4&-3\\3&-3&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-4&-3\\3&-3&-6\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & -6 & -6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所对应的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

再单位化（这里不用正交化，因为实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交）

$$\eta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix},\quad \eta_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

所以所求的正交变换矩阵为

$$P=\left(\eta_1,\eta_2,\eta_3\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

对应的正交变换为 $x=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}y$，即得 $f=4y_2^2+9y_3^2$

八、（5 分）设 A 、 B 均为 n 阶方阵，且满足 $AB=A+B$. 证明 $A-E$ 可逆，并求 $(A-E)^{-1}$.

证明：因为 $AB=A+B$，故有 $AB-B-A=0$

$$\Rightarrow\left(A-E\right)B-\left(A-E\right)=E\quad\Rightarrow\left(A-E\right)\left(B-E\right)=E$$

故 $A-E$ 可逆，且 $(A-E)^{-1}=B-E$