南京林业大学试卷（标准答案）

课程 概率论与数理统计 B（A 卷） 2014~2015 学年第 二 学期

姓名

班号

学号

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 小明和他的 4 位同学排成一队，求小明排在队伍一端的概率 $\underline{\frac{2}{5}}$.

2. 设 A、B、C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=\frac{1}{8}$，$P(AC)=P(BC)=0$，则 $P(A\cup B\cup C)=\underline{\frac{5}{8}}$.

3. 设 X 表示“掷一枚骰子出现的点数”，则 $E(X)=\underline{\frac{7}{2}}$，$D(X)=\underline{\frac{35}{12}}$.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，$\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差，若 $\left(\overline{X}\right)^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计，则 $c=\underline{\frac{1}{n}}$.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 是来自总体 $N(1,4)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 表示样本均值，则 $\overline{X}\sim\underline{N(1,\frac{1}{5})}$.

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，则 $F(x)$（ A ）

（A）一定是非负的； （B）一定是严格单调递增的；

（C）左连续； （D）$F(+\infty)=0$.

2. 设 $X\sim U(0,4)$，则（ A ）

（A）$P\{X<2\}=0.5$ （B）$P\{2<X<5\}=0.3$

（C）$P\{-1<X<3\}=0.7$ （D）$P\{X>3\}=0.15$

3. 设 X，Y 是任意两个随机变量，且 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=0$，则 X 和 Y（ D ）

（A）独立； （B）不独立；

（C）相关； （D）不相关.

4. 设$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则$D(\chi^2)=$（ B ）。

（A）n　　（B）$2n$　　（C）n^2　　（D）$\dfrac{1}{n^2}$

5. 设随机变量X和Y相互独立，且$D(X)=2$，$D(Y)=3$,则$D(3X-2Y)=$（ B ）.

（A）2;　　（B）6;　　（C）8;　　（D）12。

三、（10 分）发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“●”和“—”，由于通讯系统受到干扰，当发出信号“●”时，收报台以概率 0.8 及 0.2 收到信号“●”和“—”，又当发出信号“—”时，收报台以概率 0.9 及 0.1 收到信号“—”和“●”，求

(1)当收报台收到信号“●”时，发报台确系发出信号“●”的概率；

(2)当收报台收到信号“—”时，发报台确系发出信号“—”的概率。

解：设A表示发报台发出信号“●”，B 表示收报台收到信号“●”．则

$P\{A\}=0.6$，$P\{\overline{A}\}=0.4$，$P\{B\mid A\}=0.8$，$P\{\overline{B}\mid A\}=0.2$，$P\{B\mid \overline{A}\}=0.1$，$P\{\overline{B}\mid \overline{A}\}=0.9$．由全概率公式得

$$P\{B\}=P\{B\mid A\}P\{A\}+P\{B\mid \overline{A}\}P\{\overline{A}\}=0.8\times 0.6+0.1\times 0.4=0.52$$

$$P\{\overline{B}\}=P\{\overline{B}\mid A\}P\{A\}+P\{\overline{B}\mid \overline{A}\}P\{\overline{A}\}=0.2\times 0.6+0.9\times 0.4=0.48$$

(1) $P\{A\mid B\}=\dfrac{P\{AB\}}{P\{B\}}=\dfrac{P\{B\mid A\}P\{A\}}{P\{B\}}=\dfrac{0.8\times 0.6}{0.52}=\dfrac{12}{13}$,

(2) $P\{\overline{A}\mid \overline{B}\}=\dfrac{P\{\overline{A}\,\overline{B}\}}{P\{\overline{B}\}}=\dfrac{P\{\overline{B}\mid \overline{A}\}P\{\overline{A}\}}{P\{\overline{B}\}}=\dfrac{0.9\times 0.4}{0.48}=\dfrac{3}{4}$.

四、（10 分）设连续型随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} Ax\sin x, 0<x<\pi, \\ 0, \quad other, \end{cases}$$

求：（1）常数A；（2）X的概率分布函数$F(x)$，（3）$P\{\dfrac{\pi}{4}<X<\dfrac{3\pi}{4}\}$.

解 (1) 由$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^{\pi} Ax\sin x\,dx$，得$A=\dfrac{1}{\pi}$；

(2) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{\pi}(\sin x - x\cos x), & 0\le x<\pi,\\ 1, & x\ge \pi,\end{cases}$

(3) $P\{\dfrac{\pi}{4}<X<\dfrac{3\pi}{4}\}=F(\dfrac{3\pi}{4})-F(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

五、(10 分)设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{other},\end{cases}$$

(1) 问 X，Y 是否独立;(2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解:(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}e^{-x}(x+1), x>0,\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}0, y\le 0,\\ \dfrac{1}{2}e^{-y}(y+1), y>0,\end{cases}$$

由于 $f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以 X，Y 不独立;

(2) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\,dy=\begin{cases}0, z\le 0,\\ \dfrac{1}{2}z^2e^{-z}, z>0.\end{cases}$ (3 分，5 分，6 分)

六、(10 分)设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & other,\end{cases}$$

求 $E(X),\ E(Y),\ Cov(X,Y),\ \rho_{XY}$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}xdy=\dfrac{2}{3},$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}ydy=0,$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}xydy=0,$$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,\ \rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0.$

七、(12 分)设随机变量 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, 0\le x\le 1,\\ 0\ ,\quad other,\end{cases}$ ，其中 $\theta>0$，θ 为未知参数。

求（1）未知参数 θ 的矩估计量，（2）未知参数 θ 的极大似然估计量。

解 (1) $\mu_1=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}\,dx=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，得 $\theta=\left(\dfrac{\mu_1}{1-\mu_1}\right)^2$，所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$.

(3) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一个样本值，似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1})=\theta^{\frac{n}{2}}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\sqrt{\theta}-1},\ \ln L=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L=\dfrac{n}{2\theta}+\dfrac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$, 得 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2}$.

八、(8 分) 要求一种电子元件的平均使用寿命不得低于 1000 小时，生产者从一批这种元件中随机抽取 16 只，测得寿命如下：

920，969，961，914，922，958，942，968

930，980，947，965，962，975，938，949

已知该种元件的寿命（小时）服从正态分布 $N(\mu,100^2)$，（$z_{0.05}=1.645, z_{0.025}=1.96.$）

(1) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

(2) 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，判定这批元件是否合格？

解 (1) $n=16$，$\sigma=100$，$\overline{x}=950$，故 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(950\pm\frac{100}{4}z_{0.025}\right)=\left(950\pm\frac{100}{4}\times1.96\right)=(901,999).$$

(3) 本题要求在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验假设 $H_0:\mu\ge1000$，$H_1:\mu<1000$. 由于 σ^2 已知，

故采用 Z 检验，取 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 为检验统计量，$n=16$，$\sigma=100$，$\overline{x}=950$，拒绝域为

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le -z_\alpha=-1.645.$$

Z 的观察值为 $z=\frac{950-1000}{100/\sqrt{16}}=-2<-1.645$，落在拒绝域内，故在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝原假设，认为这批元件不合格。