姓　名

学　号

号

线代 A 期末练习一参考答案

一、填空题

1．已知全排列$1x47y65$为偶排列，则 $x=$__3__；$y=$__2__.

2．设 A 为 3 阶方阵，且满足 $|A|=2$，则 $|2A|=$__16__.

3. 将矩阵 A 添加一行得到矩阵 B，记 $R(A)=r_1, R(B)=r_2$，则 r_1, r_2 的大小关系为$\underline{r_1\le r_2}$.

4．已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$，则矩阵 A 的第 3 行所有元素的余子式之和为__0__.

5．若 3 阶方阵 A 的特征值为 1、2、−3，则 A^2-A+E 的特征值为__1，3，13__.

6．已知 $\vec{\eta}_1=(1,2,3,4)^T$，$\vec{\eta}_2=(1,1,1,1)^T$ 为四元方程组 $Ax=0$ 两个解，其中 A 的秩 $R(A)=2$，，则方程组 $Ax=0$ 通解为$\underline{k_1(1,2,3,4)^T+k_2(1,1,1,1)^T}$.

7. 三维向量空间 R^3 中向量 $(3,2,1)^T$ 在基 $\vec{\alpha}_1=(1,0,0)^T$，$\vec{\alpha}_2=(0,1,0)^T$，$\vec{\alpha}_3=(0,0,1)^T$ 下的坐标为$\underline{(3,2,1)}$.

8．设 $A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=\underline{x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3}$.

9. 设 $V=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\middle| a,b,\in R\right\}$为实数域 R 上的线性空间,则 V 的维数等于__2__.

10. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+4x_2{}^2+4x_3{}^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，则当 λ 取值范围为$\underline{-2<\lambda<1}$时，$f(x_1,x_2,x_3)$为正定二次型.

二、计算下列行列式

1、 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$　　2、 $D_n=\begin{vmatrix} -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -n & & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \end{vmatrix}$

解：1、 $D=\begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=60$

2、 $D_n=\begin{vmatrix} -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -n & & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -n & & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \end{vmatrix}$

$=(-1)^n(n+1)^{n-1}$

三、设 $A=(1,2,3),B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，求 $AB,BA,(BA)^5$

解： $AB=(2),BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix},(BA)^5=16\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$（3 分，6 分，8 分）

四、解矩阵方程 $AX=X+B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

法一、解：由 $AX=X+B$ 得 $(A-E)X=B$

$$(A-E,B)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -16 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & -3 & 7 \end{pmatrix}$，则 $X=(A-E)^{-1}B=\begin{pmatrix} -11 & 2 & -4 \\ -12 & 3 & -5 \\ 16 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

法二、$|A-E|=-1,(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$，$X=(A-E)^{-1}B=\begin{pmatrix}-11&2&-4\\-12&3&-5\\16&-3&7\end{pmatrix}$

五、设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=4\\-x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2\\x_1-x_2+x_3=4\end{cases}$，问(1)当$\lambda$等于何值时，方程组无解；（2）当$\lambda$等于何值时，方程组有解，并求出此时方程组的通解.

解：$(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\-1&\lambda&1&\lambda^2\\1&-1&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&1&-1&0\\0&0&\lambda+1&\lambda^2+4\end{pmatrix}$

当$\lambda=-1$时，$R(A)=2\neq R(A|b)=3$，无解；

当$\lambda\neq-1$时，$R(A)=R(A|b)=3$，有惟一解；

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\\dfrac{\lambda^2+4}{\lambda+1}\\\dfrac{\lambda^2+4}{\lambda+1}\end{pmatrix}.$$

六、设$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\vec{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$,求$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$的一个最大无关组和向量组的秩，并将其余向量由此最大无关组线性表示.

解：$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&-1&1&-1\\1&1&2&-1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-2&-1&-2\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

则此向量组的秩为 3，可取最大无关组为$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$,且$\vec{\alpha}_3=\frac{3}{2}\vec{\alpha}_1+\frac{1}{2}\vec{\alpha}_2$

七、设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$求一矩阵可逆 P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵

解：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，令 $\left|A-\lambda E\right|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=0$，可得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$，

当 $\lambda_1=\lambda_2=2,\left(A-2E\right)\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=0$ 时，$\left(A-0E\right)\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,

$P=(\vec{P}_1,\vec{P}_2,\vec{P}_3)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$

八、证明题

(1) 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是齐次方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系,证明：$\vec{\xi}_1+2\vec{\xi}_2$，$\vec{\xi}_1-\vec{\xi}_2$，$\vec{\xi}_3-3\vec{\xi}_1$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系；

证明：因为 $A(\vec{\xi}_1+2\vec{\xi}_2)=A\vec{\xi}_1+2A\vec{\xi}_2=0$，所以 $\vec{\xi}_1+2\vec{\xi}_2$ 方程组 $AX=0$ 的解，同理 $\vec{\xi}_1-\vec{\xi}_2$，$\vec{\xi}_3-3\vec{\xi}_1$ 也是 $Ax=0$ 的解；

又因为 $(\vec{\xi}_1+2\vec{\xi}_2，\vec{\xi}_1-\vec{\xi}_2，\vec{\xi}_3-3\vec{\xi}_1)=(\vec{\xi}_1，\vec{\xi}_2，\vec{\xi}_3)\begin{pmatrix}1&1&-3\\2&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，而 $\left|\begin{pmatrix}1&1&-3\\2&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=-3\neq0$，

则向量组 $\vec{\xi}_1+2\vec{\xi}_2$，$\vec{\xi}_1-\vec{\xi}_2$，$\vec{\xi}_3-3\vec{\xi}_1$ 与 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$ 等价，所以也是基础解系；

(2) 设 $A=E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T$，其中 $\vec{\xi}$ 为 n 维非零列向量，证明：$A^2=A$ 的充分必要条件是 $\vec{\xi}^T\vec{\xi}=1$.

证明：因为 $A^2=(E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T)^2=E-2\vec{\xi}\vec{\xi}^T+\vec{\xi}(\vec{\xi}^T\vec{\xi})\vec{\xi}^T=E+(\vec{\xi}^T\vec{\xi}-2)(\vec{\xi}\vec{\xi}^T)$

所以 $A^2=A\Leftrightarrow\vec{\xi}\vec{\xi}^T-2=-1\Leftrightarrow\vec{\xi}^T\vec{\xi}=1$.