姓名

班号

学号

南京林业大学试卷(B卷)(答案)

课程 概率论与数理统计B 20 14 ~20 15 学年第 2 学期

一、填空题（每题4分，共20分）

1. 设某袋中有4个白球，5个黑球，现从袋中任取两球，则至少有一个黑球的概率是 $\underline{\frac{5}{6}}$.

2. 若 A, B 是两个事件，则 $P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B})=\underline{1}$.

3. 设 X 表示10次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 $E(X^2)=\underline{18.4}$.

4. 设 $E(X)=\mu,\ D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式有 $P\{|X-\mu|<3\sigma\}\ge\underline{\frac{8}{9}}$.

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，则 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$ 服从 $\underline{\chi^2(n)}$ 分布.

二、选择题（每题4分，共20分）

1. 若随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$ 则下列式子中正确的是（ C ）.

(A) $E(2X-1)=2np$； (B) $E(2X+1)=4np+1$；

(C) $D(2X+1)=4np(1-p)$； (D) $D(2X-1)=4np(1-p)-1$.

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}-cx+\dfrac{1}{2}, & -1\le x\le 0\\ 0, & other\end{cases}$，则常数 c 为（ B ）。

(A) -3； (B) 1； (C) 0； (D) -1.

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & other.\end{cases}$

则概率 $P\left\{X+Y>0.5\right\}=$（ C ）.

(A) 0.125； (B) 0.25； (C) 0.75； (D) 0.875.

4. 在假设检验中，记 H_0 为原假设，则（ D ）称为第一类错误。

(A) H_0 不真，接受 H_0； (B) H_0 不真，拒绝 H_0；

(C) H_0为真，接受H_0；　　　　　　　　(D) H_0为真，拒绝H_0.

5. 设 $\{X_n\}$ $(n\geq 1)$ 为相互独立的随机变量序列，且都服从参数为 θ 的指数分布，$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ 是标准正态分布的分布函数，则（ C ）

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\theta}{\sqrt{n}\theta}\leq x\right\}=\Phi(x)$；　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leq x\right\}=\Phi(x)$；

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\theta}{\sqrt{n}\theta}\leq x\right\}=\Phi(x)$；　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\theta}{\sqrt{n\theta}}\leq x\right\}=\Phi(x)$.

三、（10 分）据以往的资料，以为母亲患某种传染病的概率为 0.5，当母亲患病时，她的第一个、第二个孩子患病的概率均为 0.5，且两个孩子均不患病的概率为 0.25，当母亲未患病时，每个孩子必定不患病。问：1. 第一个孩子未患病的概率？2. 当第一个孩子未患病时，第二个孩子未患病的概率？

解：分别以C,N_1,N_2，记事件“母亲患病”，“第一个孩子未患病”，“第二个孩子未患病”。（2 分）

1. $P(N_1)=P(N_1|C)P(C)+P(N_1|\bar{C})P(\bar{C})=0.5\times0.5+1\times0.5=0.75.$　　　　（7 分）

2. $P(N_2\mid N_1)=\frac{P(N_1N_2)}{P(N_1)}=\frac{P(N_1N_2\mid C)P(C)+P(N_1N_2\mid\bar{C})P(\bar{C})}{P(N_1)}$

$$=\frac{0.5\times0.5\times0.5+1\times0.5}{0.75}=\frac{5}{6}.$$　　　　（10 分）

四、（10 分）设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq -2,\\ A+B\arcsin\frac{x}{2}, & -2<x\leq 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

求：1. 常数 A,B；2. 分布密度 $f(x)$；3. $P\{|X|<1\}$.

解：1.由 $\lim\limits_{x\to-2}F(x)=F(-2)$，$\lim\limits_{x\to2}F(x)=F(2)$，$A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{\pi}$　　　　（4 分）

2. $f(x)=\frac{dF(x)}{x}=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}},-2<x<2\\ 0,\quad other\end{cases}$ （7 分）

3. $P\{|X|<1\}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{1}{3}.$ (10 分)

五、（12 分）已知(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi},x^2+y^2\le 1\\ 0,\quad other\end{cases}$$

求：1. 边缘密度函数；2. X,Y 是否独立，为什么？ 3. $P\{X\ge Y\}$.

解：1. $f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy,-1\le x\le 1,\\ 0,\qquad other.\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1,\\ 0,\qquad other.\end{cases}$

$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx,-1\le y\le 1,\\ 0,\qquad other.\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},-1\le y\le 1,\\ 0,\qquad other.\end{cases}$ （6 分）

2. 由于 $f(x,y)\ne f(x)f(y)$，故 X,Y 不相互独立. （8 分）

3. $P\{X\ge Y\}=\iint\limits_{X\ge Y}f(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}.$ （12 分）

六、（12 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y),0\le x,y\le\frac{\pi}{2};\\ 0,\qquad other.\end{cases}$$

求：$E(X)$，$E(Y)$，$D(X)$，$D(Y)$和ρ_{XY}.

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy=\frac{\pi}{4}$， （2 分）

$E(X^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2$，

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2$， （4 分）

同理可得 $E(Y)=\frac{\pi}{4}$，$D(Y)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2$，（8 分）

又 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xy\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy=\frac{\pi}{2}-1$，

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-1$，

所以 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{8\pi-\pi^2-16}{\pi^2+8\pi-32}$.（12 分）

七、（10 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta},0<x<1;\\ 0, \qquad other.\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

解：$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$，故参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.（4 分）

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本值，则样本的似然函数为 $L(\theta)=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}$（6 分）

对数似然函数

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

解得最大似然估计量 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$（10 分）

八、（6 分）要求一种元件平均使用寿命不得低于 1000 小时，生产者从一批这种元件中随即抽取 25 件，测得其寿命的平均值为 950 小时。已知该种元件寿命服从标准差为 $\sigma=100$ 的正态分布。问这批元件是否合格？（$\alpha=0.05$，$\mu_{0.05}=1.645$）

解：检验假设：$H_0\geq1000$，$H_1<1000$.（2 分）

因 σ 已知，采用 U 检验法，其拒绝域为 $u=\frac{\overline{x}-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\leq-u_{0.05}$.（4 分）

$u=\frac{950-100}{100/\sqrt{25}}=-2.5<-1.645$，拒绝 H_0，即认为这批元件不合格.（6 分）