线代 A 期末练习二参考答案

一、填空题

1. $(AB)^k = A^k B^k$ 成立的条件是 AB=BA

2. 若 $A^3=0$,则 $(A-E)^{-1}=$ $\underline{E+A+A^2}$

3. 求矩阵的逆 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

4. 已知 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 49 \end{vmatrix}$ = 20

6. 已知方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 0,1,2，则 x=1

7. 已知 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 a= 1

8. 设集合 $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a+b+c=0, a,b,c\in R\right\}$,

   则 V 的一组基为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 λ =1 或 2

10．已知 A 为4×3的矩阵，进行如下变换：c_2+2c_1，写出这种变换对应的初等矩阵$\underline{\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$

二、计算题

1. $\begin{vmatrix}1&2&2&2\\2&3&1&2\\1&1&1&1\\1&0&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{-3}&\mathbf{-2}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{3}&\mathbf{-3}&\mathbf{-2}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}\end{vmatrix}\cdots 5'=-2$

2. $D=\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&\cdots&a_n+b\\\cdots&&\cdots&\\a_1&a_2&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}=(a_1+a_2+\cdots+a_n+b)\begin{vmatrix}1&a_2&\cdots&a_n\\1&a_2+b&\cdots&a_n+b\\\cdots&&\cdots&\\1&a_2&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n+b)\begin{vmatrix}1&a_2&\cdots&a_n\\0&b&\cdots&0\\\cdots&&\cdots&\\0&0&\cdots&b\end{vmatrix}=(a_1+a_2+\cdots+a_n+b)b^{n-1}$$

三、已知$A=\begin{bmatrix}4&2&1\\3&2&5\\3&2&3\end{bmatrix}$且满足$AX=A+X$，求矩阵 X

解：$X=(A-E)^{-1}A$

$$(A-E\quad A)\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&11/3&2/3&-3\\0&1&0&-3&0&4\\0&0&1&-1&0&2\end{array}\right)\qquad X=\begin{pmatrix}11/3&2/3&-3\\-3&0&4\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

四、已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-4&-1&0\\6&3&1\end{pmatrix}$，

(1)求 A 的特征值和特征向量 (2)求可逆阵 P，使$P^{-1}AP$为对角阵(3)计算$\left|A^*-(2A)^{-1}\right|$

解：(1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-4&-1-\lambda&0\\6&3&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-3)=0$

$$\lambda=1,3,-3$$

$\lambda=1 \quad A-E\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，取 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，对应 $\lambda=1$ 的所有的特征向量为 $\boldsymbol{k\xi_1}\left(\boldsymbol{k\neq 0}\right)$

$\lambda=3 \quad A-3E\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，取 $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$，对应 $\lambda=3$ 的所有的特征向量为 $\boldsymbol{k\xi_2}\left(\boldsymbol{k\neq 0}\right)$

$\lambda=-3 \ A+3E\sim\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 取 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，对应 $\lambda=-3$ 的所有的特征向量为 $\boldsymbol{k\xi_3}\left(\boldsymbol{k\neq 0}\right)$

令 $P=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&-2&2\\1&3&-3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}}$

(3) $\left|A^*-(2A)^{-1}\right|=\left|A^*-\frac{1}{2}A^{-1}\right|=\boldsymbol{\left|-9A^{-1}-\frac{1}{2}A^{-1}\right|=\left(-\frac{19}{2}\right)^3\frac{1}{-9}=\frac{19^3}{72}}$

五、求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\6\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\5\\10\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ 的一个最大线性无关组，并将其余向量用最大无关组表示

解：$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=\begin{pmatrix}1&2&3&-2\\3&1&5&1\\6&2&10&2\\2&-1&2&3\end{pmatrix}\sim\boldsymbol{\begin{pmatrix}1&0&7/5&4/5\\0&1&4/5&-7/5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}}$

$\because R\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=R(\alpha_1,\alpha_2) \quad \therefore \alpha_1,\alpha_2$ 为向量组的一个最大无关组，且 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha_3=\frac{7}{5}\alpha_1+\frac{4}{5}\alpha_2}\\ \boldsymbol{\alpha_4=\frac{4}{5}\alpha_1-\frac{7}{5}\alpha_2}\end{cases}$

六、求解下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=4\\x_2+x_3+x_4=3\\x_1-3x_2+3x_4=1\\7x_2+3x_3-x_4=-3\end{cases}$$

解：$\left(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$。

对应的齐次方程为$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$，基础解系为$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

非齐次$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 - x_4 = -3 \\ x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$的一个特解为$\begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$，非齐次的通解为$k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

七、利用配方法化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+2x_2x_3$为标准形。

解：$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+2x_2x_3=2\left(x_1+x_2\right)^2-\left(x_2-x_3\right)^2+x_3^2$

则$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 即$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

作变换 $x=Py$，则二次型的标准形为 $f\left(y\right)=2{y_1}^2-{y_2}^2+y_3^2$

八、（1）若向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，但不能由向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s=1}$线性表出，证明：$\alpha_s$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s=1}$线性表出。

证明：反设α_s能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s=1}$线性表出，即存在常数$l_1,l_2,\cdots,l_{s=1}$，使得

$\alpha_s=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s=1}$成立。

另向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，即存在常数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\left(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}\right)}$成立。

即β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s=1}$线性表出，矛盾！假设错误，原结论成立。

(2).设 A 为 n 阶的方阵，证明：当$R(A)=n$时， $R\left(A^*\right)=n$.(其中A^*为 A 的伴随矩阵)

证明：$\because R(A)=n$， $\therefore |A|\neq 0$，由于$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}\neq 0$ ，所以$R\left(A^*\right)=n$