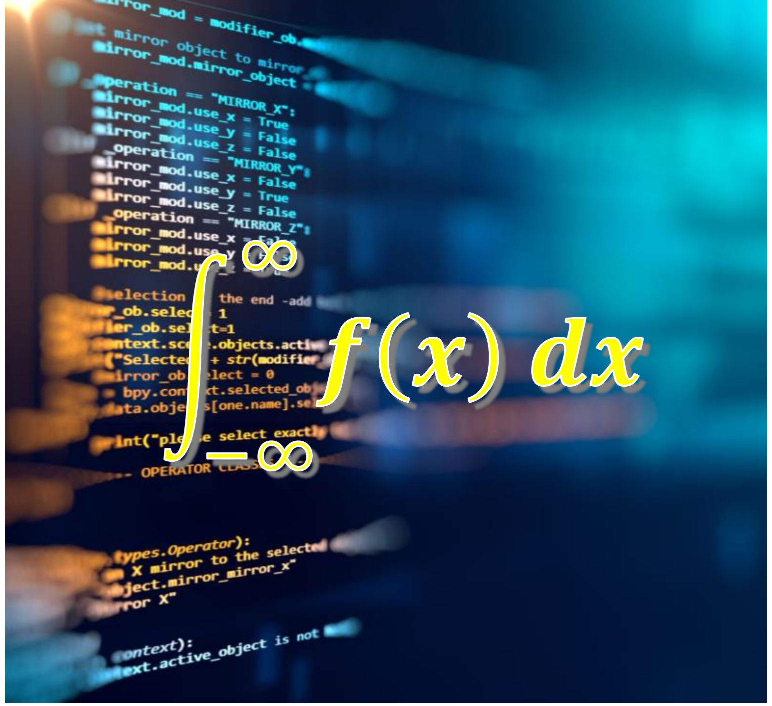
INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Anexo da Semana 14



COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Integrais Impróprias
Apresentação

- As técnicas de integração numérica introduzidas anteriormente foram pensadas para estimar integrais da forma

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

onde os limites a e b são finitos.

- Embora seja muito comum ver esses tipos de integrais em aplicações de engenharia, existem situações onde integrais impróprias são encontrados e devem ser estimadas numericamente.
- Algumas dessas integrais aparecem nas seguintes formas:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \;(a > 0), \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \;(b < 0), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Integrais Impróprias
Apresentação

- Um tipo de integrais impróprias são aquelas em que ao menos uma extremidade é estendida até o infinito, ou seja, elas aparecem nas seguintes formas:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \ (a > 0), \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \ (b < 0), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

- Outro tipo de integral imprópria são integrais cujas extremidades são finitas, mas a função integrada é ilimitada em pelo menos uma (ou duas) das extremidades.
- Uma abordagem para manipular as singularidades é alterar variáveis para remover a singularidade e então usar uma técnica de aproximação padrão.

Integrais Impróprias
Resolução

- Por exemplo, considere

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \;(a > 0)$$

- Se o integrando $f(x)$ se reduz a zero ao menos tão rápido quanto x^{-2} faz quando $x \to \infty$, então a integral é resolvida com uma mudança simples de variável:

$$x = \frac{1 + (a-1)z}{z} \;\; e \;\; dx = -\frac{1}{z^2}dz,$$

$$z = \frac{1}{x + 1 - a}$$

- Então:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^0 f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot -\frac{1}{z^2}dz = \int_0^1 \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

Integrais Impróprias
Resolução

$$\int_0^{1/a} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

- A integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx \ (b < 0)$ pode ser trabalhada de maneira similar.
- Pode acontecer do integrando ser singular no limite inferior em $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ e no limite superior em $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$. Por causa disso, uma fórmula de Newton-Cotes aberta, como a regra composta do ponto médio pode ser utilizada para que a integral seja estimada sem usar os dados no(s) ponto(s) final(is).
- Outras transformações usuais são $x = -\ln t$, $x = t/(1-t)$, $x = \operatorname{tg} t$ e $x = \sqrt{(1+t)(1-t)}$

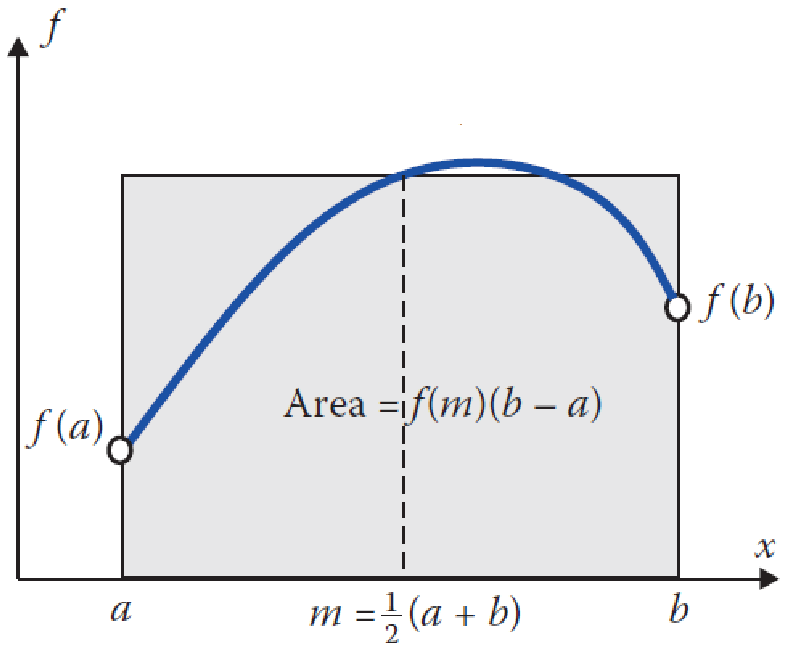
Integrais Impróprias
Resolução

$$\int_0^{1/a} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

- Faz-se necessário neste momento, abrir um parênteses para apresentar a regra do ponto médio.
- A regra do ponto médio é uma fórmula aberta de Newton-Cotes que permite o cálculo da integral sem usar dados nas extremidades do intervalo de integração.

Regra do ponto médio

- Na regra retangular, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é aproximada pela área de um retângulo.

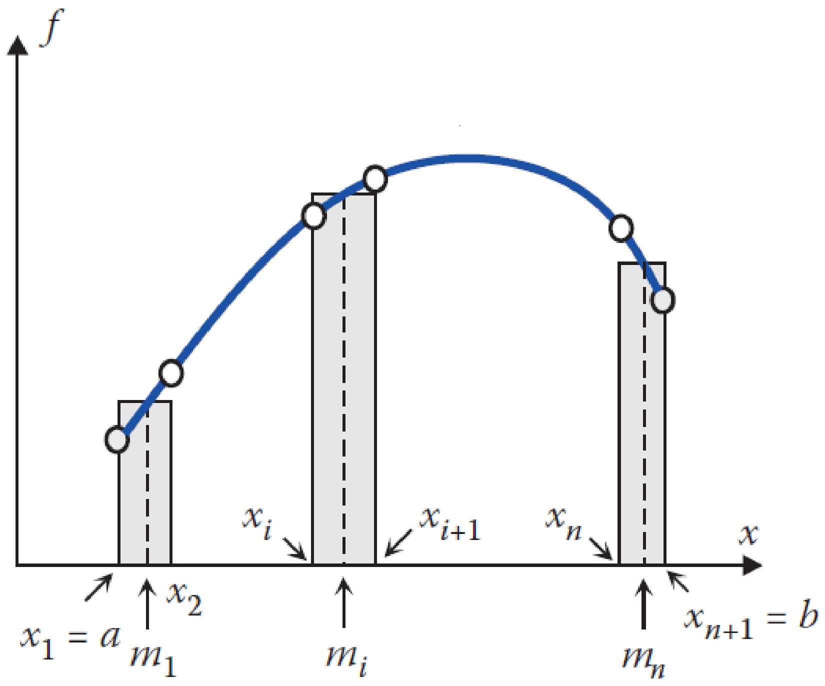


A regra do ponto médio é uma versão da regra do retângulo onde o ponto médio do intervalo [a,b] é utilizado para construir o retângulo.

Ela só é aplicável quando o integrando é uma expressão analítica.

É evidente pela Figura que o erro da aproximação pode ser muito grande. A precisão pode ser melhorada usando a sua versão composta.

Regra do ponto médio
Aplicação composta



$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{m} f(m_i)$$

onde

$$m = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$$

e

$$h = \frac{b-a}{n}$$

- O erro de truncamento pode ser estimado por:

$$E = \left[\frac{1}{24}(b-a)\overline{f''}\right]h^2$$

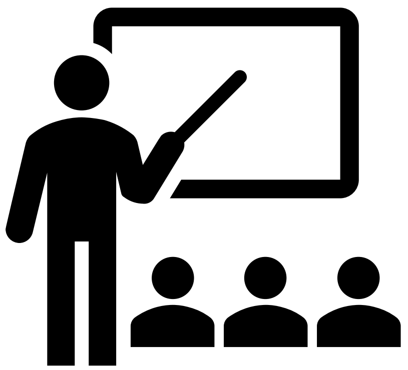
onde $\overline{f''}$ é o valor médio estimado de f'' no intervalo [a, b].

EXEMPLO 1

Utilizando a regra composta do ponto médio com oito segmentos avalie

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2}\,dx$$

Calcule o erro verdadeiro, sabendo que o valor exato da integral é $\ln(3)$.



Exemplo 1
Solução

- Para $n = 8$, $h = \frac{(b-a)}{8} = \frac{2}{8} = 0{,}25$
- Assim, os 9 nós são definidos como $x_1 = -1, x_2 = -0{,}75, \dots, x_9 = 1$ e os respectivos valores da função $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x+2}$ nos pontos médios valem:

$$f(-0{,}875) = 0{,}8889;\ \ f(-0{,}625) = 0{,}7273;\ \ f(-0{,}375) = 0{,}6154;$$
$$f(-0{,}125) = 0{,}5333;\ \ f(0{,}125) = 0{,}4706;\ \ f(0{,}375) = 0{,}4210;$$
$$f(0{,}625) = 0{,}3810;\ \ f(0{,}875) = 0{,}3478;$$

- Com esse dados o valor da integral resulta em:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} dx = h \sum_{i=1}^{n} f(m_i) = 0{,}25 \cdot 4{,}3853 = 1{,}0963$$

Exemplo 1
Solução

- O erro verdadeiro será:

$$E_t = \ln(3) - 1{,}0963 = 0{,}00231 \quad \rightarrow \epsilon_t = 0{,}21\%$$

Integrais Impróprias
Resolução

- Voltando as integrais impróprias, a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

pode ser decomposta em

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-a} f(x)\, dx + \int_{-a}^{b} f(x)\, dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\, dx$$

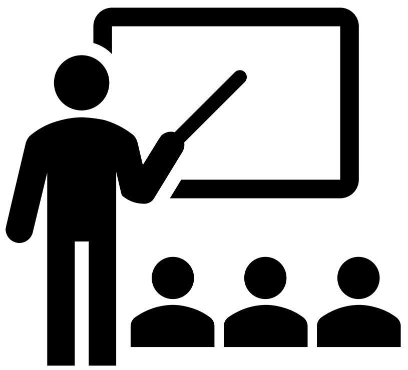
- Na primeira integral, escolhe-se $-a$ tal que $f(x)$ comece a convergir assintoticamente para zero ao menos tão rápido quanto x^{-2}.
- Na última integral, b é escolhida de modo que a condição da taxa de redução de $f(x)$ também seja satisfeita.
- A integral do meio pode ser aproximando uma fórmula fechado de Newton-Cotes.

EXEMPLO 2

Calcular a integral

$$\int_{1}^{\infty} x^{-3/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Calcule o erro verdadeiro, sabendo que o valor exato da integral é $\ln(3)$.



Exemplo 2
Solução

$$\int_1^{\infty} x^{-3/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \;\xrightarrow{\;x=\frac{1}{z}\;\to\; dx=-\frac{1}{z^2}dz\;}\; \int_0^1 \left(\frac{1}{z}\right)^{-3/2} \sin(z)\,\frac{1}{z^2}\,dz$$

$$\int_0^1 \frac{z^{3/2}}{z^2}\sin(z)dz$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}}\sin(z)\;dz$$

- Resultando em uma integral imprópria, pois a função f(z) não é limitada ao aproximar-se do extremo inferior do intervalo (singularidade).
- A integral pode ser computada, pois $\mathrm{sen}(z)$ é analítica em $z = 0$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} dz$ converge.

Exemplo 1
Solução

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z)\ dz$$

- Uma maneira de resolver esta integral é aplicando a regra composta do ponto médio. Para

$n\ = 8\,,\ \ h\ = \frac{(b-a)}{8} = \frac{1}{8} =\ 0{,}125$

- Assim, os 9 nós são definidos como $x_1\ = 0, x_2\ = 0{,}125, \ldots, x_9\ = 1$ e os respectivos valores da função $\mathrm{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z)$ nos pontos médios valem:

$$f(0{,}0625) = 0.2498373;\ \ f(0{,}1875) = 0.43048;\ \ f(0{,}3125) = 0.5499627;$$
$$f(0{,}4375) = 0.6405383;\ \ f(0{,}5625) = 0.7110702;\ \ f(0{,}6875) = 0.7653649;$$
$$f(0{,}8125) = 0.8054343;\ \ f(0{,}9375) = 0.832517;$$

- Com esse dados o valor da integral resulta em:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z)\ dz = h \sum_{i=1}^{n} f(m_i) = 0{,}125 \cdot 4{,}9852047 = 0{,}6231506$$

Exemplo 1
Solução

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z)\ dz$$

- A tabela abaixo apresenta o valor da integral em função do valor n escolhido:

n	4	8	16	32	64	128
I	0,6278471	0,6231506	0,6214686	0,6208681	0,6206543	0,6205783

Exemplo 1
Solução

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z)\ dz$$

- Outra maneira de resolver esta integral é aplicando a regra do ponto médio na extremidade onde a singularidade ocorre e aplicar outro método numérico ao restante do segmento. Assim, de 0 e 0,1 utilizar-se-á regra do ponto médio. Para o resto do segmento, a regra de Simpson 1/3.
- Para a extremidade inferior $f(0{,}05)$ = 0,2235136 e,

$$\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z)\ dz = 0{,}1 \times 0{,}2235136 = 0.0223514$$

- Aplicando a regra de Simpson 1/3 ao restante do intervalo:

$$\int_{0,1}^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z)\ dz = (0{,}9)\frac{[f(0{,}1) + 4f(0{,}55) + f(1)]}{6} = 0{,}5964506$$

- Finalmente,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z)\ dz = 0{,}6188020$$

Exemplo 2
Solução

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z) \; dz$$

- Como $\mathrm{f(z)} = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$ $(0 < p < 1)$, com g(z) analítica em $z \ = \ a$, uma terceira maneira de avaliar a integral $\int_a^b f(z)\, dz$ é:

$$\int_a^b \frac{g(z)}{(z-a)^p} dz = \int_a^b \frac{g(z) - p_n(z)}{(z-a)^p} dz + \int_a^b \frac{p_n(z)}{(z-a)^p} dz$$

onde $p_n(z)$ é escolhido é o polinômio de Taylor de grau n resultante da expansão de $g(z)$ em torno do ponto $z = a$.

Exemplo 2
Solução

$$\int_a^b \frac{g(z)}{(z-a)^p}dz = \int_a^b \frac{g(z)-p_n(z)}{(z-a)^p}dz + \int_a^b \frac{p_n(z)}{(z-a)^p}dz$$

- A integral da direita pode ser calculada analiticamente.
- A integral do lado esquerdo pode ser resolvida numericamente utilizando uma regra de Simpson composta, pois a singularidade do integrando foi removida, pois:

$$\lim_{z \to a} \frac{g(z)-p_n(z)}{(z-a)^p} = 0$$

para $0 < p < 1$. Assim

$$\begin{cases} \frac{g(z)-p_n(z)}{(z-a)^p}, & para\ a < z \leq b \\ 0 & , para\ z = a \end{cases}$$

Exemplo 2
Solução

$$\int_a^b \frac{g(z)}{(z-a)^p}dz = \int_a^b \frac{g(z)-p_n(z)}{(z-a)^p}dz + \int_a^b \frac{p_n(z)}{(z-a)^p}dz$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}}\sin(z)\ dz$$

- No nosso exemplo, $g(z) = \mathrm{sen}(z)$ e $a = 0$, resultando na expansão em série de Taylor :

$$p_4(z) = z - \frac{z^3}{3!}$$

- Assim, com $p = \frac{1}{2}$, a integral da direita resulta:

$$\int_0^1 \frac{p_n(z)}{(z-a)^p}dz = \int_0^1 \frac{z - \frac{z^3}{3!}}{\sqrt{z}}dz = \int_0^1 \left(z^{1/2} - \frac{z^{\frac{5}{2}}}{6}\right)dz$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}}\sin(z)dz = 2\left(\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^{7/2}}{42}\right)\Big|_0^1 = 0{,}6190476$$

Exemplo 2
Solução

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z)\ dz$$

$$\int_a^b \frac{g(z)}{(z-a)^p} dz = \int_a^b \frac{g(z)-p_n(z)}{(z-a)^p} dz + \int_a^b \frac{p_n(z)}{(z-a)^p} dz$$

- Resolvendo a integral da esquerda utilizando a Regra de Simpson 1/3 com n = 4, resulta:

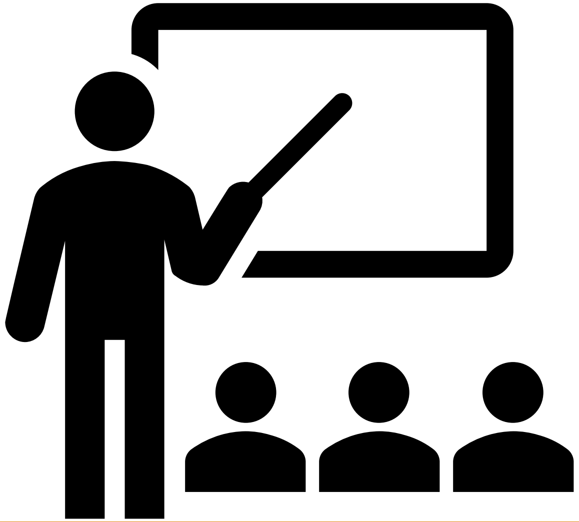
$$\int_0^1 \frac{sen(z)-p_n(z)}{\sqrt{z}} dz = \frac{(b-a)}{3n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$

$$\int_0^1 \frac{sen(z)-p_n(z)}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{12}[0+4\cdot 0{,}0000163+2\cdot 0{,}0003661+4\cdot 0.0022531+0.0081377] = 0.0014956$$

- Assim:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(z)\ dz = \int_0^1 \frac{sen(z)-p_n(z)}{\sqrt{z}} dz + \int_0^1 \frac{p_n(z)}{\sqrt{z}} dz = 0{,}6205432$$

EXERCÍCIO



Calcular a integral imprópria

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx$$

Resposta: $-0,577 = -\gamma$ (constante de Euler)

Bibliografia e crédito das figuras

CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.

CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.

ESFANDIARI, Ramin S. Numerical methods for engineers e scientists using Matlab. CRC Press, 2017