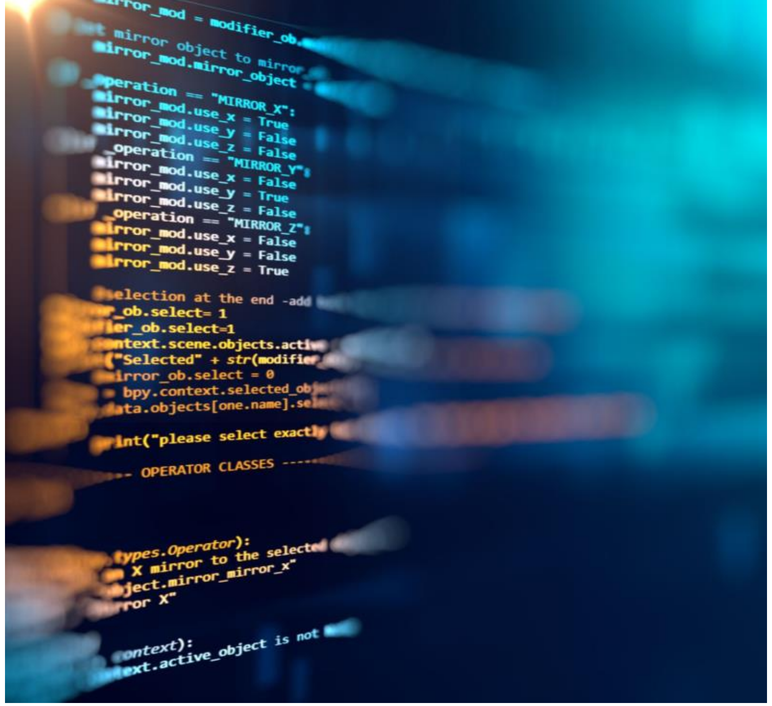
SEMANA 5



COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS

PARTE I

MÉTODOS DIRETOS

A. ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Computação Científica

prof. Marco Villaça

Sistemas de equações lineares:

- Uma equação linear em variáveis $x_1, x_2, \ \ldots \ , x_n$ é um a equação da forma

$$a_1x_1 + \ a_2x_2 + \ \ldots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, \ \ldots \ , a_n$ e b são constantes reais ou complexas.

- As constantes a_i são chamadas de coeficientes de x_i
- A constante b é chamada de termo constante da equação.

Sistemas de equações lineares:

- Um sistema de equações lineares ou sistema linear é uma coleção finita de equações lineares de mesmas variáveis. Um sistema linear de m equações e n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser escrito como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_n \end{cases}$$

Sistemas de equações lineares:

- Uma solução do sistema linear $[\mathrm{A}]\{\mathrm{x}\} = \{\mathrm{b}\}$ é um vetor coluna de números $\{\mathrm{s}\}$ tal que todas as equações do sistema são satisfeitas quando se faz $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$.

  Ou seja, $\{\mathrm{s}\}$ satisfaz

$$[\mathrm{A}]\{\mathrm{s}\} = \{\mathrm{b}\}.$$

- O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado o conjunto solução do sistema.

Métodos diretos versus métodos iterativos

- Dois tipos de métodos numéricos são usados para resolver sistemas de equações lineares;
  - Nos métodos diretos, a solução é obtida com a realização de operações algébricas nas equações;
  - Nos métodos iterativos, uma solução inicial aproximada é assumida e então utilizada em um processo iterativo.

Eliminação de Gauss: nota histórica

- A Eliminação de Gauss é conhecido universalmente como "o" método para resolver equações lineares. Como Leonhard Euler (1771, parte 2, sec. 1, cap. 4, art. 45) observou, ele é maneira mais natural de proceder.
- Muitos contribuíram para moldar a eliminação de Gauss, incluindo Carl Gauss. Seu método, aplicável a um caso especial, foi adotado no século XIX por profissionais da computação manual.
- Uma confusão histórica atribuiu a Gauss a criação do método.

Eliminação de Gauss ingênua
Notação matricial

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_n
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}
$$

Eliminação de Gauss ingênua
Notação matricial: matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

$$[A\,|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss ingênua
Forma triangular superior

$$[A\,|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

A eliminação gaussiana é um método de resolver o sistema de equações lineares conduzindo a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

para a forma triangular superior, onde as variáveis foram progressivamente eliminadas das linhas e podem ser calculadas regressivamente a partir da última linha.

Eliminação de Gauss ingênua

- A eliminação de Gauss consiste, assim, em 2 passos:
  - As equações são manipuladas para eliminar as variáveis, resultando em uma equação com uma variável na última linha;
  - Essa equação, pode ser resolvida diretamente e o resultado substituído regressivamente para determinar as variáveis eliminadas
- O Método apresentado a seguir é chamado eliminação de Gauss ingênua porque não evita o problema da divisão por zero, crítico em algoritmos para computadores.

Eliminação de Gauss ingênua

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

$\times\, a_{21}/a_{11}$

O próximo passo é preencher com zeros a 1ª coluna a partir da 2ª linha em diante.

$$\begin{array}{cccccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} & | \quad b_2 \\ - \quad a_{11}\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} & \cdots & \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} & | \quad \dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \hline \mathbf{0} & a_{22}-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23}-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} & \cdots & a_{2n}-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} & | \quad b_2-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \end{array}$$

Eliminação de Gauss ingênua

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \boldsymbol{a_{22}^{(1)}} & \boldsymbol{a_{23}^{(1)}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}^{(1)}} & \boldsymbol{b_2^{(1)}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\mathrm{n}1} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

Nova matriz aumentada

o símbolo “$^{(1)}$” indica que os coeficientes foram modificados de seus valores originais.

Eliminação de Gauss ingênua

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \boldsymbol{a_{22}^{(1)}} & \boldsymbol{a_{23}^{(1)}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}^{(1)}} & \boldsymbol{b_2^{(1)}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \boldsymbol{a_{22}^{(1)}} & \boldsymbol{a_{23}^{(1)}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}^{(1)}} & \boldsymbol{b_2^{(1)}} \\ 0 & \boldsymbol{a_{32}^{(1)}} & \boldsymbol{a_{33}^{(1)}} & \cdots & \boldsymbol{a_{3n}^{(1)}} & \boldsymbol{b_3^{(1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

O processo de **eliminação progressiva** é repetido para as linhas restantes. Por exemplo, a primeira linha é multiplicada por a_{31}/a_{11} e subtraída da terceira linha.

Eliminação de Gauss ingênua

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} & & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{22}^{(1)}} & \boldsymbol{a_{23}^{(1)}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}^{(1)}} & & \boldsymbol{b_2^{(1)}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{32}^{(1)}} & \boldsymbol{a_{33}^{(1)}} & \cdots & \boldsymbol{a_{3n}^{(1)}} & & \boldsymbol{b_3^{(1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{n2}^{(1)}} & \boldsymbol{a_{n3}^{(1)}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}^{(1)}} & & \boldsymbol{b_n^{(1)}} \end{array}\right]$$

Nova matriz aumentada, onde o símbolo "(1)" indica que os coeficientes foram modificados de seus valores originais.

Nos passos precedentes, a_{11} é chamado de elemento pivô, que se for nulo pode interferir no processo.

Eliminação de Gauss ingênua

O próximo passo é preencher com zeros a 2ª coluna a partir 3ª linha em diante utilizando $a_{22}^{(1)}$ como elemento pivô, resultando em

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

Nova matriz aumentada, onde o símbolo "(2)" indica que os coeficientes foram alterados dua vezes

Eliminação de Gauss ingênua

- O processo se repete até a matriz A se tornar uma matriz triangular superior.
- Encerrada a eliminação progressiva, passa-se agora a etapa conhecida como substituição regressiva

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}^{(n-1)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n^{(n-1)}} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Eliminação de Gauss ingênua

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}^{(n-1)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n^{(n-1)}} \end{Bmatrix}$$

Esse resultado é substituído na equação *(n-1)-ésima* linha para determinar x_{n-1}.

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Eliminação de Gauss ingênua

- Esse processo de substituição regressiva, que continua até que todos as variáveis x's remanescentes sejam determinadas, é representada pela equação:

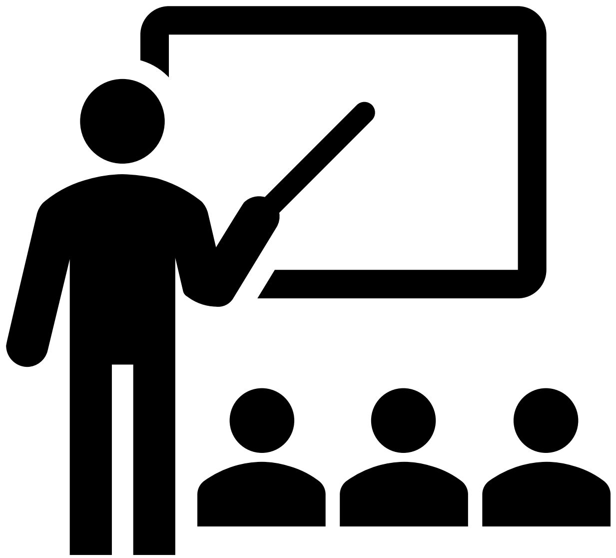
$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{i-1} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

para $i = n-1, n-2, \dots, 1.$

EXEMPLO 1

- Use a eliminação de Gauss ingênua para resolver o sistema

$$\begin{cases} 6\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 12 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 = -12 \\ x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$



EXEMPLO 1

- Inicia-se o processo formando-se a matriz aumentada

$$[A\,|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 12 \\ 4 & 3 & -1 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

- Multiplica-se a 1ª linha da matriz por 2/3 e subtrai-se o resultado da 2ª linha e multiplica-se a 1ª linha da matriz por 1/6 e subtrai-se o resultado da 3ª linha:

$$[A\,|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 12 \\ \mathbf{4 - 6 \cdot \frac{2}{3}} & \mathbf{3 - 1 \cdot \frac{2}{3}} & \mathbf{-1 - 2 \cdot \frac{2}{3}} & \mathbf{-12 - 12 \cdot \frac{2}{3}} \\ \mathbf{1 - 6 \cdot \frac{1}{6}} & \mathbf{2 - 1 \cdot \frac{1}{6}} & \mathbf{1 - 2 \cdot \frac{1}{6}} & \mathbf{8 - 12 \cdot \frac{1}{6}} \end{array}\right]$$

EXEMPLO 1

$$[A\,|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 12 \\ \mathbf{4-6\cdot\frac{2}{3}} & \mathbf{3-1\cdot\frac{2}{3}} & \mathbf{-1-2\cdot\frac{2}{3}} & \mathbf{-12-12\cdot\frac{2}{3}} \\ \mathbf{1-6\cdot\frac{1}{6}} & \mathbf{2-1\cdot\frac{1}{6}} & \mathbf{1-2\cdot\frac{1}{6}} & \mathbf{8-12\cdot\frac{1}{6}} \end{array}\right]$$

- Resultando nas novas segunda e terceiras linhas

$$[A\,|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & -7/3 & -20 \\ 0 & 11/6 & 2/3 & 6 \end{array}\right]$$

EXEMPLO 1

$$[A\,|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & -7/3 & -20 \\ 0 & 11/6 & 2/3 & 6 \end{array}\right]$$

- Para encerrar o processo de eliminação progressiva, multiplica-se a 2ª linha da matriz por 11/14 e subtrai-se o resultado da 3ª linha,

$$[A\,|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & -7/3 & -20 \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{11}{6} - \frac{7}{3} \cdot \frac{11}{14}} & \mathbf{\frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{11}{14}} & \mathbf{6 + 20 \cdot \frac{11}{14}} \end{array}\right]$$

obtendo-se

$$[A\,|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & -7/3 & -20 \\ 0 & 0 & 5/2 & 152/7 \end{array}\right]$$

EXEMPLO 1

$$[A\,|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & -7/3 & -20 \\ 0 & 0 & 5/2 & 152/7 \end{array}\right]$$

- Por substituição regressiva calcula-se x_3, x_2 e x_1:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \Rightarrow x_3 = \frac{152/7}{5/2} = 8{,}685714$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{i-1} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{-20 + (7/3)\,8{,}685714}{7/3} = 0{,}114285$$

$$x_1 = \frac{12 - (2 \cdot 8{,}685714 + 0{,}114285)}{6} = -0{,}914286$$

Função Scilab

Eliminação de Gauss Ingênua

Função Scilab

```
function x=gaussi(A, b)
   // Eliminação de Gauss Ingênua
  // onde x vetor solução
   //     A é a matriz de coeficientes
   //     b é o vetor de termos constantes
   // exec('path\gaussi.sci',-1)
   // x=gaussi(A, b)
   [m,n] = size(A);
   if  m~=n then
      error('A deve ser uma matriz quadrada.');
   end
   n=length(b)
  if m~=n then
     error('Dimensão incorreta de b');
  end
   nb = n + 1;
   A = [A b];   // obtendo a matriz aumentada
```

Função Scilab

Os A(j,i) que seriam eliminados são usadas para armazenar os multiplicadores

$$
\begin{array}{cc}
 & i \\
j & \left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & b_n
\end{array}\right] \\
 & k
\end{array}
$$

```
// eliminação progressiva
 for i = 1:n-1
   for j = i+1:n
     A(j,i) = A(j,i)/A(i,i);
     //   for k = i+1:nb
     //        A(j,k)= A(j,k)-A(j,i)*A(i,k);
     //   end
     A(j,i+1:nb)= A(j,i+1:nb)-A(j,i)*A(i,i+1:nb);
     disp(A)
   end
 end
```

Função Scilab

```
// substituição regressiva
  x = zeros(n,1);
  x(n)= A(n,nb)/A(n,n);
  for i=n-1:-1:1
    // for j=i+1:n
    //    x(i) = x(i) + A(i,j) * x(j);
    // end
    // x(i) = (A(i,nb)-x(i)) /A(i,i);
    // para resolver a equação em uma única linha
    // usa-se um for implícito para o somatório
    x(i) = (A(i,nb) - A(i,(i+1):n) * x((i+1):n)) /A(i,i);
  end
endfunction
```

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{i-1} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

Pivotamento

- Eliminação de Gauss ingênua – possibilidade de divisão por zero:

$$
\begin{aligned}
& & +2x_2 & -x_3 & = & \quad 27 \\
-3x_1 & & -5x_2 & +2x_3 & = & -61{,}5 \\
x_1 & & +x_2 & +6x_3 & = & -21{,}5
\end{aligned}
$$

- Se a primeira equação for adotada como equação pivô haverá uma divisão por zero, pois $a_{11} = 0$.

- Quando a ordem de grandeza do elemento pivô for muito pequena quando comparada a dos outros elementos podem ocorrer erros de arredondamento.

- Use a eliminação de Gauss para resolver:

$$\begin{cases} 0{,}0001\,x_1 + x_2 = 0{,}6667 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

- Encontre x_1 e x_2 com o elemento pivô a_{11} = 0,0001 com 3, 4, 5 e 6 algarismos significativos;

- Troque a ordem das equações e repita os cálculos com 3, 4, 5 e 6 algarismos significativos. Note que o elemento pivô agora é a_{11} = 1

- Analise os resultados, sabendo que a solução exata é x_1 = 1/3 e x_2 = 2/3.

Exercício 1

Pivotamento parcial

- Assim, antes de cada passo da eliminação progressiva, é vantajoso, e às vezes imprescindível, determinar o maior coeficiente na coluna abaixo do elemento pivô.
- Feito, isso trocam-se as linhas de modo que o maior coeficiente seja o elemento pivô.
  - Esse procedimento é conhecido como pivotamento parcial.
- Quando se procura o maior coeficiente nas linhas e nas colunas, tem-se o pivotamento completo.
  - O aumento na complexidade não é compensado pelos possíveis ganhos.

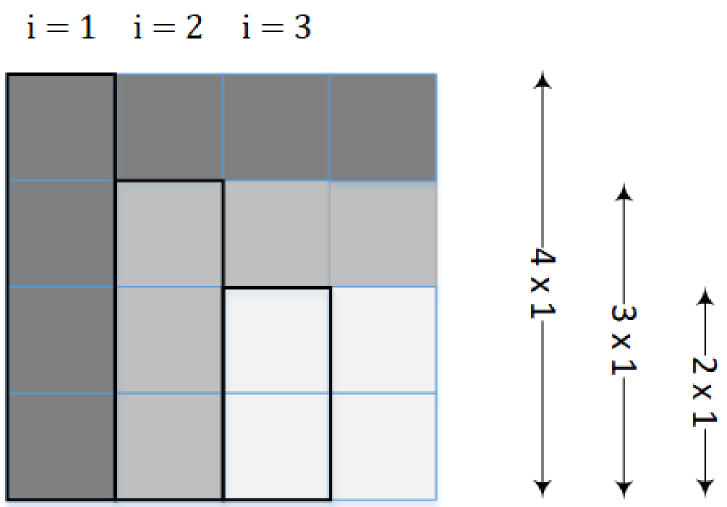
Pivotamento parcial

- Considere que a medida que o pivô avança para a coluna i o maior coeficiente abaixo do elemento pivô esteja sempre na última linha k da submatriz analisada ou na última linha l da matriz original (4 x 4)

- Assim, é possível com o auxílio da tabela, estabelecer a seguinte relação entre i, k e l :

$$l = k + i - 1$$

- Lembre que a permutação é feita na matriz aumentada original.



Dimensão da submatriz	l	k	i
$4\ x\ 4$	4	4	1
$3\ x\ 3$	4	3	2
$2\ x\ 2$	4	2	3

Função Scilab

Método de gauss com pivotamento

Função Scilab

```
function x=gaussp(A, b)
   // Eliminação de Gauss com pivotamento
  // onde x vetor solução
   //     A é a matriz de coeficientes
   //     b é o vetor de termos constantes
   // exec('path\gaussp.sci',-1)
   // x=gausp(A, b)
   [m,n] = size(A);
   if  m~=n then
      error('A deve ser uma matriz quadrada.');
   end
  n=length(b)
  if m~=n then
     error('Dimensão incorreta de b');
  end
   nb = n + 1;
   A = [A b];   // pbtendo a matriz aumentada
```

Função Scilab

```
// eliminação progressiva
 for i=1:n-1
    // pivotamento parcial
    // encontrar o maior coef. da coluna abaixo do pivo
    [maior,k]=max(abs(A(i:n,i)));
    l = i + k - 1;
    if l~=i then
       A([l,i],:)=A([i,l],:);
    end
    for j=i+1:n
       A(j,i) = A(j,i)/A(i,i);
       A(j,i+1:nb)=A(j,i+1:nb)-A(j,i)*A(i,i+1:nb);
       disp(A);
    end
 end
```

Função Scilab

```
// substituição regressiva
   x = zeros(n,1);
   x(n)= A(n,nb)/A(n,n);
   for i=n-1:-1:1
        x(i) = (A(i,nb) - A(i,(i+1):n) * x((i+1):n)) /A(i,i);
   end
endfunction
```

- Use a eliminação de Gauss com pivotamento para resolver manualmente o sistema

$$\begin{cases} 3\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 2 \\ 6\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 = -2 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

- Com o auxílio da Função Scilab, confira o resultado obtido

Exercício 2

Bibliografia e crédito das figuras

CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.

CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.

EULER, L. **Anleitung zur Algebra.** Lund, 1771.