SEMANA 6

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}}{u_{ii}}$$

$$para\ j = i + 1, \ldots n$$

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS

PARTE II

MÉTODOS DIRETOS

C. DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY

Computação Científica

prof. Marco Villaça

Decomposição ou fatoração de Cholesky

- A decomposição LU pode ser aplicada a qualquer matriz não singular.
- Fatorações alternativas podem ser usadas em matrizes especiais.
- A fatoração de Cholesky pode ser usada para matrizes simétricas positivas definidas.
- Se $A \in \mathbb{R}$ é uma matriz simétrica definida positiva, sempre existe uma matriz triangular superior de mesma dimensão tal que

$$A = [U]^T [U]$$

Decomposição de Cholesky

- Matrizes simétricas:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

- Matriz positiva definida:

$$x^t A\, x > 0\ para\ todo\ x\ \neq 0$$

- Critério de Sylvester: Uma matriz simétrica A é positiva definida se e somente se todos os menores principais tem determinante positivo.
- Menores Principais: determinantes de todas as submatrizes de A cujas diagonais coincidem ou fazem parte da diagonal de A.

Decomposição de Cholesky

- Para uma matriz 3 x3 os menores principais são:

$$a_{11} \quad , \quad a_{22} \quad , \quad a_{33}$$

$$det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \quad , \quad det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\right) \quad , \quad det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

$$det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

Decomposição de Cholesky

- Menores Principais Líderes: determinantes das submatrizes de A obtidas ao se eliminarem as últimas k colunas e k linhas, com k = n - 1, n – 2, ..., 0:

$$a_{11} \quad , \quad det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \quad , \quad det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

- **Se todos os menores principais líderes são positivos → todos os menores principais são positivos.**

Decomposição de Cholesky

- Se todos os elementos da diagonal principal de uma matriz simétrica A tiverem o mesmo sinal **e**

- se em cada uma de suas linhas o valor absoluto do elemento da diagonal principal é maior que a soma dos valores absolutos de todos os demais elementos da linha

A é positiva definida.

- Sistemas de equações lineares resultantes das aplicações das **leis de Kirchhoff** apresentam essas características, podendo assim serem resolvidos com o auxílio da decomposição de Cholesky.

Decomposição de Cholesky

- Os termos da equação $A = [U]^T[U]$podem ser multiplicados e igualados, resultando nas seguintes equações de recorrência:

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}}{u_{ii}} \quad para\ j = i + 1, \dots n$$

Decomposição de Cholesky

Após a matriz A ser decomposta, a solução de um sistema de equações lineares pode ser encontrada, em 2 passos:

1. Uma substituição progressiva é executada resolvendo a equação $[U]^T \{d\} = \{b\}$ para $\{d\}$:

$$d_i = \frac{b_i \quad - \sum_{k=i}^{i-1} u_{ki} d_k}{u_{ii}}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Decomposição de Cholesky

2. Uma substituição regressiva idêntica a fase de substituição regressiva da eliminação de Gauss é executada para resolver $[U]\{x\} = \{d\}$ para $\{x\}$:

$$x_n = \frac{d_n}{u_{nn}}$$

$$x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}$$

para $i = n-1, n-2, \dots, 1.$

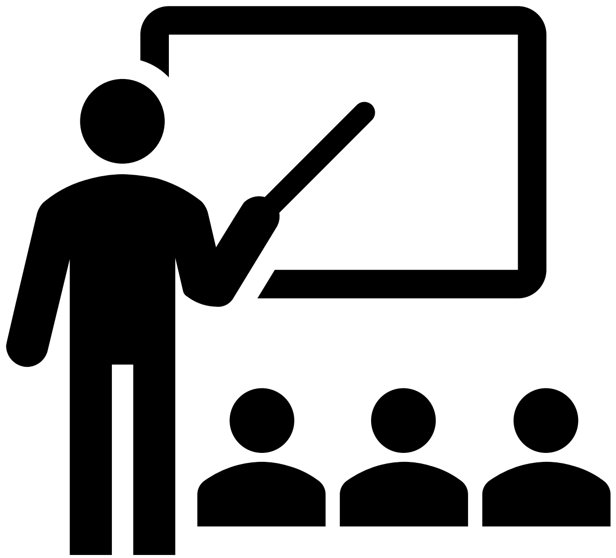
Decomposição de Cholesky
Vantagens

- Corte nos requisitos de armazenamento já que somente a matriz U é necessária;
- Estável mesmo sem pivotamento;
- Mais rápida que a fatoração LU por um fator de 2.

EXEMPLO 1

- Use a Fatoração de Cholesky para resolver o sistema

$$\begin{cases} 1{,}5\,x_1 + -0.7x_2 + \quad 2x_3 = 0{,}5 \\ \quad -0{,}7x_1 + \; x_2 - x_3 = -1 \\ \quad 2x_1 - \quad x_2 + \quad 3\,x_3 = 0{,}5 \end{cases}$$



EXEMPLO 1

- A matriz [A] apresenta os seguintes menores principais líderes:

$$1{,}5\ ,\ \ det\left(\begin{bmatrix} 1{,}5 & -0{,}7 \\ -0{,}7 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1{,}01\ ,\ \ det\left(\begin{bmatrix} 1{,}5 & -0{,}7 & 2 \\ -0{,}7 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0{,}33$$

- Assim, [A] é uma matriz simétrica definida positiva e, consequentemente, pode ser fatorada na proposta de Cholesky.

EXEMPLO 1

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -0{,}7 & 2 \\ -0{,}7 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Os coeficientes de [U] podem ser obtidos conforme segue:

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}}$$

$$u_{11} = \sqrt{1,5} = 1,224745$$

$$u_{12} = \frac{-0,7}{1,224745} = -0,571548$$

$$u_{13} = \frac{2}{1,224745} = 1,632993$$

$$u_{22} = \sqrt{1 - (-0,571548)^2} = 0,820569$$

$$u_{23} = \frac{-1 - (-0,571548 \cdot 1,632993)}{0,820569} = -0,0812438$$

$$u_{33} = \sqrt{3 - [(1,632993)^2 + (-0.0812438)^2]} = 0,571606$$

EXEMPLO 1

- Assim,

$$U = \begin{bmatrix} 1{,}224745 & -0{,}571548 & 1{,}632993 \\ 0 & 0{,}820569 & -0{,}0812438 \\ 0 & 0 & 0{,}571606 \end{bmatrix}$$

- Obtida a matriz $[U]$, utiliza-se $[U]^T$ para resolver o sistema

$$[U]^T\{d\}=\{b\}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}224745 & 0 & 0 \\ -0{,}571548 & 0{,}820569 & 0 \\ 1{,}632993 & -0{,}0812438 & 0{,}571606 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{Bmatrix}$$

EXEMPLO 1

$$\begin{bmatrix} 1{,}224745 & 0 & 0 \\ -0{,}571548 & 0{,}820569 & 0 \\ 1{,}632993 & -0{,}0812438 & 0{,}571606 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{Bmatrix}$$

- Por substituição progressiva, calculam-se d_1, d_2 e d_3:

$$d_1 = \frac{0{,}5}{1{,}224745} = 0{,}408248$$

$$d_2 = \frac{-1 + 0{,}57154 \cdot d_1}{0{,}820569} = -0{,}934315$$

$$d_3 = \frac{0{,}5 - (1{,}632993 \cdot d_1 - 0{,}0812438 \cdot d_2)}{0{,}571606} = -0.424372$$

EXEMPLO 1

- Conhecido o vetor {d} define-se o seguinte sistema triangular superior

$$[U]\{x\}=\{d\}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}224745 & -0{,}571548 & 1{,}632993 \\ 0 & 0{,}820569 & -0{,}0812438 \\ 0 & 0 & 0{,}571606 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}408248 \\ -0{,}9343155 \\ -0{,}424372 \end{Bmatrix}$$

Por substituição regressiva, calcula-se a solução x_3, x_2 e x_1:

$$x_3 = \frac{-0{,}424372}{0{,}571606} = -0{,}742421$$

$$x_2 = \frac{-0{,}9343155 + 0{,}0812438 \cdot -0{,}742421}{0{,}820569} = -1{,}212126$$

$$x_1 = \frac{0{,}408248 + 0{,}571548 \cdot (-1{,}212126) - 1{,}632993 \cdot (-0{,}742421)}{1{,}224745} = 0{,}757568$$

Função Scilab

Fatoração de Cholesky

Função Scilab

```
function x=cholesky(A, b)
// Fatoração de Cholesky
// function x = cholesly(A, b)
// onde x vetor solução
//     A é a matriz de coeficientes
//     b é vetor de termos independentes
   soma = 0;
   [m,n] = size(A);
   if  m~=n then
      error('A deve ser uma matriz quadrada');
   end
   m = lenght(b);
   if  m~=n then
      error('Vetor b com número incorreto de linhas.');
   end
```

A matriz triangular superior $[U]$ é armazenada na matriz $[A]$.

Função Scilab

```
//Obtenção da Matriz U Fatoração de Cholesky
  for i = 1:n
    for j = i:n
      if i == j then
        for k=1:(i-1)
          soma = soma + A(k,i)^2;
        end
       A(i,i)= sqrt(A(i,i)- soma);
       soma = 0;
      else
       for k=1:(i-1)
          soma = soma + A(k,i)*A(k,j);
       end
       A(i,j)= (A(i,j)-soma)/A(i,i);
       soma = 0;
      end
    end
  end
  disp('U',A);
```

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}}$$

O vetor $\{d\}$ é armazenado temporariamente no vetor $\{x\}$

Função Scilab

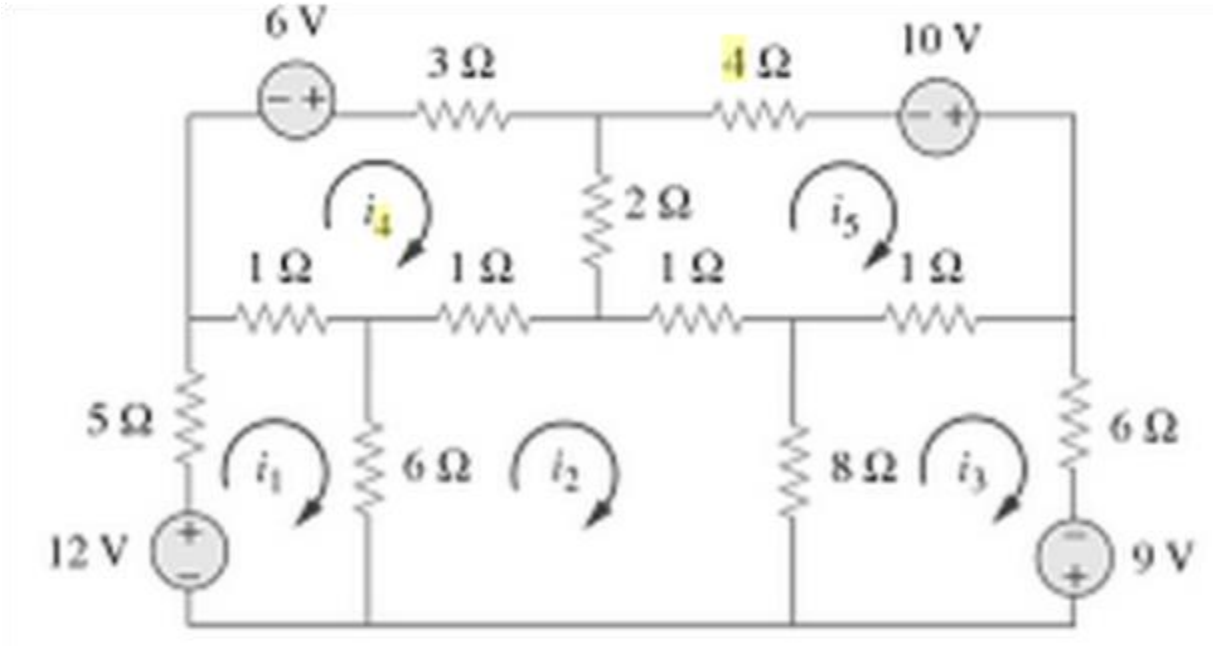
$$x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j}{u_{ii}}$$

```
// substituição progressiva
  for i = 1:n
    for k=1:(i-1)
       soma = soma + A(k,i)*x(k);
    end
    x(i)= (b(i)-soma)/A(i,i);
    soma = 0;
  end
  disp('d',x);
   // substituição regressiva
   x(n)= x(n)/A(n,n);
   for i=n-1:-1:1
     x(i)=(x(i)-A(i,(i+1):n)*x((i+1):n))/A(i,i);
   end
endfunction
```

$$d_i = \frac{b_i - \sum_{k=i}^{i-1} u_{ki} d_k}{u_{ii}}$$

$$x_n = \frac{d_n}{u_{nn}}$$

Encontre as correntes de malhas do circuito da figura abaixo, utilizando a decomposição de Cholesky



Exercício 1

A função apresentada não para a função de Cholesky não checa se a matriz A é simétrica positiva definida.

Modifique a função apresentada de forma que ela apresente uma mensagem de erro se a matriz A inserida pelo usuário não for simétrica positiva definida.

Exercício 2

Bibliografia e crédito das figuras

CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.

CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.

EULER, L. **Anleitung zur Algebra.** Lund, 1771.