Computação Científica

SEMANA 2

GABARITO DAS ATIVIDADES

Computação Científica

prof. Marco Villaça

1. Considere a função

$$f(x)=\sqrt{(x^2+1)}-1$$

- Reescreva a função racionalizando o numerador, isto é, removendo a raiz quadrada do numerador.
- Usando aritmética decimal de 5 dígitos com corte, calcule f(0,001) utilizando a função original e a função racionalizada.

  Respostas: 0 e $0,5 \times 10^{-6}$.
- Utilizando aritmética de dupla precisão (10 dígitos), calcule novamente f(0,001) utilizando as duas formas da função.
- Utilizando aritmética de dupla precisão, calcule $f(1 \times 10^{-6})$ utilizando as duas formas da função.
- Explique os resultados.

Exercício 4

Exercício 1
corte e função original com 5 dígitos

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$$

$$f(0{,}1 \times 10^{-2}) = \sqrt{(0{,}1 \times 10^{-2})^2 + 0{,}1\ \times 10^1} - 0{,}1 \times 10^1$$

$$f(0{,}1 \times 10^{-2}) = \sqrt{0{,}01\ \times 10^{-4} + 0{,}1\ \times 10^1} - 0{,}1 \times 10^1$$

$$f(0{,}1 \times 10^{-2}) = \sqrt{0{,}0000001\ \times 10^1 + 0{,}1\ \times 10^1} - 0{,}1 \times 10^1$$

$$f(0{,}1 \times 10^{-2}) = \sqrt{0 + 0{,}1\ \times 10^1} - 0{,}1 \times 10^1 = 0$$

Exercício 1
corte e racionalização com 5 digitos

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$f(x) = \frac{(0{,}1 \times 10^{-2})^2}{\sqrt{(0{,}1 \times 10^{-2})^2 + 0{,}1\ \times 10^1} + 0{,}1\ \times 10^1}$$

$$f(x) = \frac{0{,}01\ \times 10^{-4}}{\sqrt{0{,}1\ \times 10^1} + 0{,}1\ \times 10^1} = \frac{0,1\ \times 10^{-5}}{0{,}2\ \times 10^1} = 0{,}5 \times 10^{-6}$$

Exercício 1
corte e função original com 10 dígitos

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$$

$$f(0{,}1 \times 10^{-2}) = \sqrt{(0{,}1 \times 10^{-2})^2 + 0{,}1\ \times 10^1} - 0{,}1 \times 10^1$$

$$f(0{,}1 \times 10^{-2}) = \sqrt{0{,}01\ \times 10^{-4} + 0{,}1\ \times 10^1} - 0{,}1 \times 10^1$$

$$f(0{,}1 \times 10^{-2}) = \sqrt{0{,}0000001\ \times 10^1 + 0{,}1\ \times 10^1} - 0{,}1 \times 10^1$$

$$f(0{,}1 \times 10^{-2}) = \sqrt{0{,}1000001\ \times 10^1} - 0{,}1 \times 10^1$$

$$f(0{,}1 \times 10^{-2}) = 0{,}1000000499 \times 10^1 - 0{,}1 \times 10^1$$

$$f(0{,}1 \times 10^{-2}) = 0{,}0000000499 \times 10^1 = 0{,}499 \times 10^{-6}$$

Exercício 1
corte e racionalização com 10 digitos

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$f(x) = \frac{(0{,}1 \times 10^{-2})^2}{\sqrt{(0{,}1 \times 10^{-2})^2 + 0{,}1\ \times 10^1} + 0{,}1\ \times 10^1}$$

$$f(x) = \frac{0{,}01\ \times 10^{-4}}{0{,}10000005 \times 10^1 + 0{,}1\ \times 10^1} = \frac{0,1\ \times 10^{-5}}{0{,}20000005 \times 10^1} = 0{,}4999998750 \times 10^{-6}$$

2. Codifique a regra de Horner em linguagem C, para avaliar

$$f(x) = x^3 - 6{,}1\,x^2 + 3{,}2\,x + 1{,}5 \text{ em } x = 4{,}71$$

Exercício 5

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x\,a_n))\ldots))$$

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    int n,i;
    float x, a[10],y;
    printf("Entre com o grau do polinomio: ");
    scanf("%d",&n);
    printf("Entre com o valor de x : ");
    scanf("%f",&x);
    printf("Entre com os coeficientes: \n" );
    printf("a%d = ",n);
    scanf("%f",&y);
    for(i=n-1; i>=0; i--) {
        printf("a%d = ",i);
        scanf("%f",&a[i]);
        y = y*x + a[i];
    }
    printf("O valor do polinomio em x = %f vale %f", x, y);
    return 0;
}
```

SOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 2

3. Conforme foi visto, a perda de exatidão devido a erros de arredondamento pode ser reduzida pelo rearranjo dos cálculos. Pede-se:

- Avalie $f(x) = x^3 - 6{,}1\, x^2 + 3{,}2\, x + 1{,}5$ em $x = 4{,}71$ usando aritmética de 3 dígitos com arredondamento e corte e calcule os respectivos erros relativos.

  `Respostas: -13,4; -13,5; 6%, 5%`

- Reescreva o polinômio empregando a regra de Horner, e avalie em usando aritmética de 3 dígitos com arredondamento e corte e calcule os respectivos erros relativos.

  `Respostas: -14,3; -14,2; 0,25%; 0;45%`

- Discuta os resultados.

Exercício 6

Exercício 3 – arredondamento

$x^3 - 6{,}1\,x^2 + 3{,}2x + 1{,}5$ em $x = 4{,}71$

$\boldsymbol{Valor\ exato = -14,2639}$

PRODUTOS

$$
\begin{array}{rccc}
 & x & x^2 & x^3 \\
 & 0{,}471 \times 10^1 & 0{,}222 \times 10^2 & 0{,}105 \times 10^3 \\
\times\, coef & 0{,}32 \times 10^1 & 0{,}61 \times 10^1 & \\
\hline
= & 0{,}151 \times 10^2 & 0{,}135 \times 10^3 & 0{,}105 \times 10^3
\end{array}
$$

SOMAS

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^3 & - & 6{,}1\,x^2 & & & & & & \\
0{,}105 \times 10^3 & - & 0{,}135 \times 10^3 & = & -0{,}030 \times 10^3 & = & -0{,}30 \times 10^2 & & \\
 & & & & & (+3{,}2x) & 0{,}151 \times 10^2 & & \\
 & & & & & = & -0{,}149 \times 10^2 & & \\
 & & & & & (+1{,}5) & 0{,}015 \times 10^2 & & \\
 & & & & & = & -0{,}134 \times 10^2 & = & \mathbf{-13,4}
\end{array}
$$

Exercício 3 – corte

$x^3 - 6{,}1\,x^2 + 3{,}2x + 1{,}5$ em $x = 4{,}71$ $\qquad$ $\boldsymbol{Valor\ exato = -14,2639}$

PRODUTOS

$$\begin{array}{lccc}
 & x & x^2 & x^3 \\
 & 0{,}471 \times 10^1 & 0{,}221 \times 10^2 & 0{,}104 \times 10^3 \\
\times\, coef & 0{,}32 \times 10^1 & 0{,}61 \times 10^1 & \\
\hline
= & 0{,}150 \times 10^2 & 0{,}134 \times 10^3 & 0{,}104 \times 10^3
\end{array}$$

SOMAS

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^3 & - & 6{,}1\,x^2 & & & & & & \\
0{,}104 \times 10^3 & - & 0{,}134 \times 10^3 & = & -0{,}030 \times 10^3 & = & -0{,}30 \times 10^2 & & \\
 & & & & & (+3{,}2x) & 0{,}150 \times 10^2 & & \\
 & & & & & = & -0{,}150 \times 10^2 & & \\
 & & & & & (+1{,}5) & 0{,}015 \times 10^2 & & \\
 & & & & & = & -0{,}135 \times 10^2 & = & \mathbf{-13,5}
\end{array}$$

Exercício 3 – arredondamento por horner

$x^3 - 6{,}1\,x^2 + 3{,}2x + 1{,}5$ em $x = 4{,}71$

$\boldsymbol{Valor\ exato = -14,2639}$

$1{,}5 + \quad x \cdot \quad (3{,}2 + \quad x \cdot \quad (-6{,}1 + x) \quad)$

$(-0{,}61 \times 10^1 + 0{,}471 \times 10^1)$

$0{,}471 \times 10^1 \cdot (-0.139 \times 10^1)$

$-0{,}065469 \times 10^2$

$+0{,}32 \times 10^1$

$-0{,}655 \times 10^1$ (normalizando)

$0{,}471 \times 10^1 \cdot (-0{,}335 \times 10^1)$

$+0{,}015 \times 10^2$

$-0{,}158 \times 10^2$

$-0{,}143 \times 10^2$

$\mathbf{-14,3}$

Exercício 3 – corte por horner

$x^3 - 6{,}1\,x^2 + 3{,}2x + 1{,}5$ em $x\ =\ 4{,}71$

$\boldsymbol{Valor\ exato = -14,2639}$

$1{,}5 + \quad x \cdot \quad (3{,}2 + \quad x \cdot \quad (-6{,}1 + x) \quad)$

$(-0{,}61 \times 10^1 + 0{,}471 \times 10^1)$

$0{,}471 \times 10^1 \cdot (-0.139 \times 10^1)$

$-0{,}065469 \times 10^2$

$-0{,}654 \times 10^1$ (normalizando)

$+0{,}32 \times 10^1$

$0{,}471 \times 10^1 \cdot (-0{,}334 \times 10^1)$

$+0{,}015 \times 10^2$

$-0{,}157 \times 10^2$

$-0{,}142 \times 10^2$

$\boldsymbol{-14,2}$

Demonstre a solução analítica de:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

Exercício 1 (Parte 2)

Exercício 1

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2 \xrightarrow{c_d/m = a} \frac{dv}{dt} = g - av^2 \Rightarrow \int \frac{dv}{g - av^2} = \int dt$$

$$\int \frac{dv}{g - av^2} \Rightarrow \int \frac{dv}{g\left(1 - \frac{av^2}{g}\right)} \Rightarrow \frac{1}{g} \int \frac{dv}{1 - \left(\sqrt{\frac{a}{g}} v\right)^2}$$

$$u = \sqrt{\frac{a}{g}} \mathrm{v} \Rightarrow du = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}} dv \Rightarrow dv = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a}} du \Rightarrow \frac{\sqrt{g}}{g\sqrt{a}} \int \frac{du}{1 - u^2}$$

Exercício 1

$$\int \frac{dv}{g - av^2} = \int dt$$

$$\frac{\sqrt{g}}{g\sqrt{a}} \int \frac{du}{1 - u^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{ag}} \int \frac{du}{1 - u^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{ag}} \operatorname{arctanh} u$$

$$u = \sqrt{{}^{a}/_{g}}\, \mathrm{v}$$

$$\frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{{}^{a}/_{g}}\, \mathrm{v}}{\sqrt{ag}}$$

$$\int \frac{dv}{g - av^2} = \int dt \Rightarrow \frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{{}^{a}/_{g}}\, \mathrm{v}}{\sqrt{ag}} = t + C$$

Exercício 1

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

$$\frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{a/g}\,\mathrm{v}}{\sqrt{ag}} = t + C \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctanh} \sqrt{a/g}\,\mathrm{v} = \sqrt{ag}\,(t + C)$$

$$v = \sqrt{g/a}\,\tanh[\sqrt{ag}\,(t + C)]$$

$v(0) = 0$

$$0 = \sqrt{g/a}\,\tanh[\sqrt{ag}\,C] \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Exercício 1

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

$$v = \sqrt{{}^{g}/_{a}}\tanh[\sqrt{ag}\,(t + C)]$$

$c_d/m = a$ $\quad\Downarrow\quad$ $C = 0$

$$v = \sqrt{{}^{g \cdot m}/_{c_d}}\tanh\left[\sqrt{{}^{g \cdot c_d}/_{m}}\ t\right]$$