Computação Científica

SEMANA 13

INTERPOLAÇÃO

PARTE II – INTERPOLAÇÃO POR SPLINES E POR PARTES

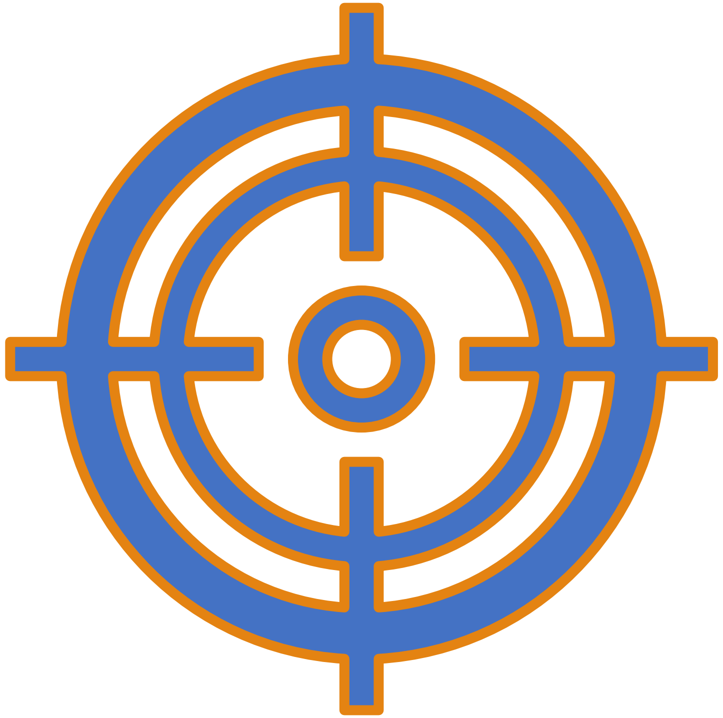
Computação Científica

prof. Marco Villaça

Interpolação por Splines

Objetivos:

- Compreender o que são splines.
- Entender porque elas são estudadas.
- Aproximar funções por splines.

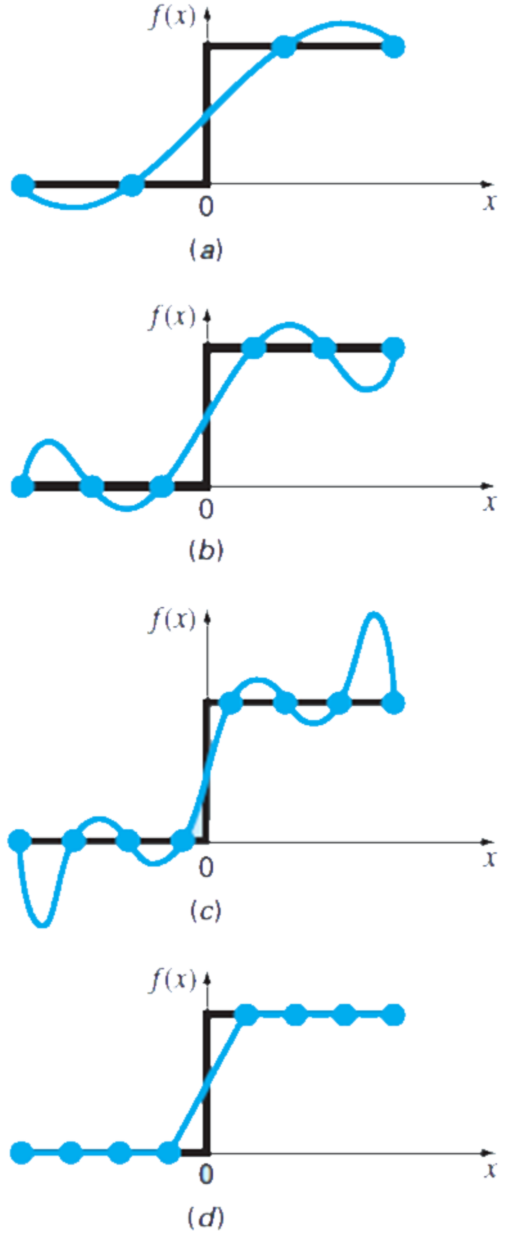


Interpolação Spline

- É uma técnica que divide o intervalo de interesse em vários subintervalos e interpola, da forma mais suave possível, nestes subintervalos com polinômios de pequeno grau .
- É uma alternativa as situações em que o número de pontos de interpolação é grande e a inexatidão na aproximação obtida com um polinômio leva a erros de arredondamento e oscilações.

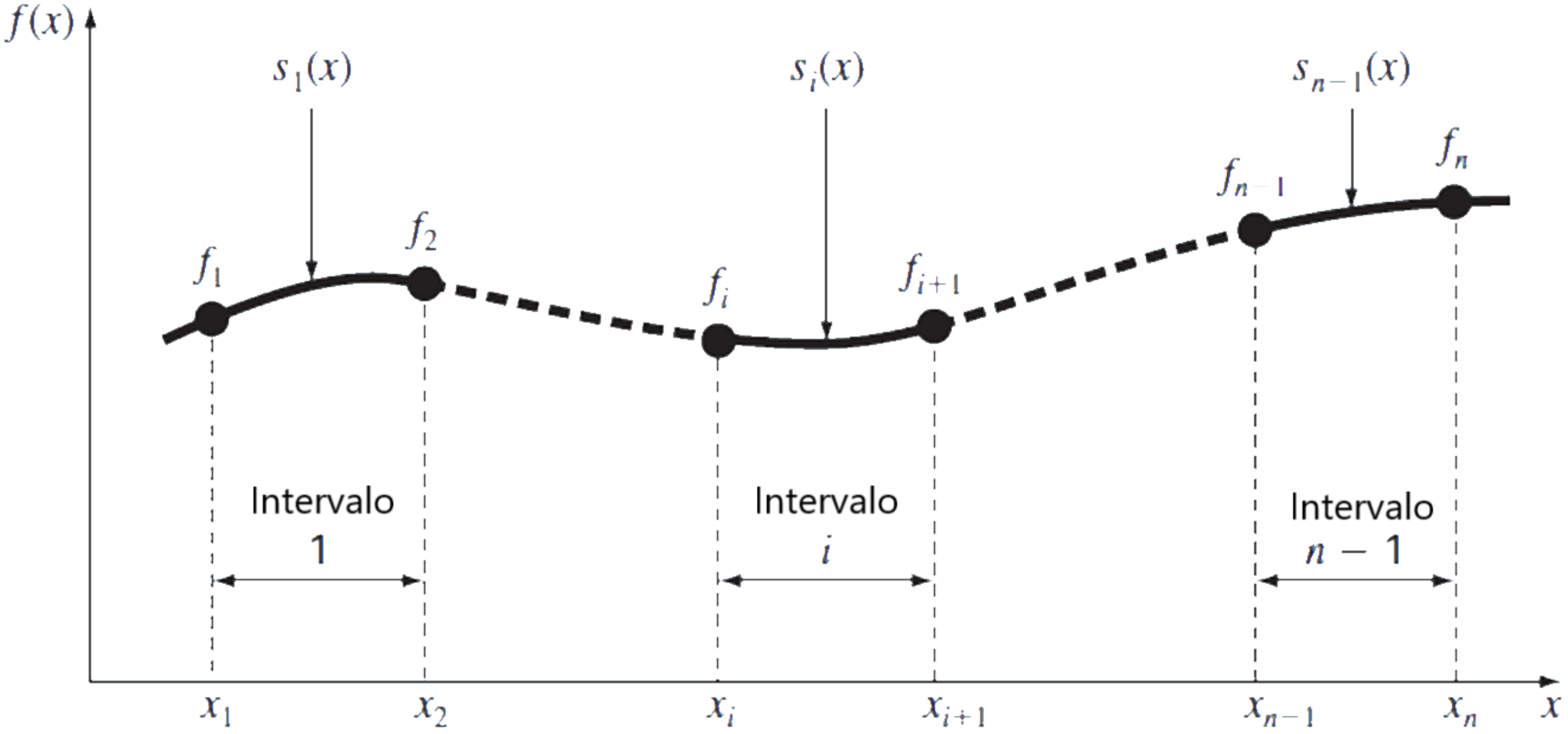
Interpolação Spline

- A figura ao lado ilustra uma situação na qual os splines são superiores aos polinômios de grau mais altos. Perceba que a variação abrupta da função em $t = 0$ provoca oscilações nos polinômios interpoladores (a, b e c).
- A spline linear (d) fornece uma aproximação muito mais aceitável.



Splines Lineares

- Notação usada para deduzir splines.
  - ✓ Observe que há $n - 1$ intervalos para n pontos dados.



Splines Lineares

- Cada função é uma reta que liga dois pontos das extremidades dos intervalos:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

- Para $x = x_i$:

$$s_i(x_i) = a_i$$

ou

$$a_i = f_i$$

- E b_ié a inclinação da reta ligando os dois pontos:

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

onde f_i é uma abreviação para f(x_i).

Splines Lineares

- Substituindo os valores de a_i e b_i

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

$$s_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

- Essa equação podem ser usada para calcular o valor da função em qualquer intervalo.

$$a_i = f_i$$

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

EXEMPLO 1

Ajuste os dados da Tabela com splines de 1^0 grau:

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

EXEMPLO 1

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

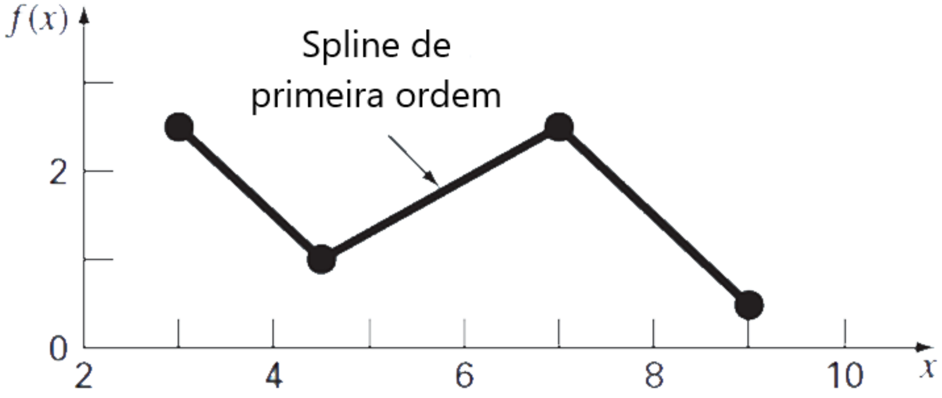
$$s_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

- Para o primeiro intervalo:

$$s_1(x) = 2{,}5 + \frac{1 - 2{,}5}{4{,}5 - 3{,}0}(x - 3)$$

$$s_1(x) = 5{,}5 - x$$

- Calculando para os outros intervalos, o spline de 1º grau resultante é representado abaixo.



01

A principal desvantagem desses splines é que eles não são suaves.

02

Onde 2 splines se encontram (nós), a inclinação varia abruptamente.

03

Em termos formais, a derivada 1ª da função é descontínua nesses pontos.

04

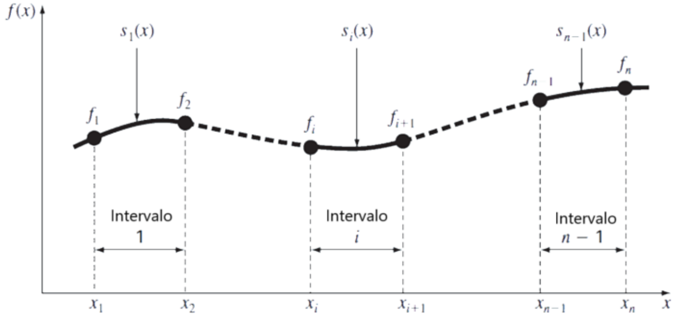
Isso indica a utilização de splines polinomiais de grau superior.

Splines lineares

Splines quadráticos

- Para garantir que as $n - ésimas$ derivadas sejam contínuas, um spline de grau $n + 1$ deve ser usado.
- Os splines cúbicos ou de terceiro grau garantem a continuidade da primeira e segundas derivadas, sendo por isso mais utilizados.
- Devido a maior complexidade da dedução dos splines cúbicos, nesse material será apresentada apenas a dedução dos splines quadráticos.
- Para os splines cúbicos, apresentaremos apenas as equações finais.

Splines quadráticos



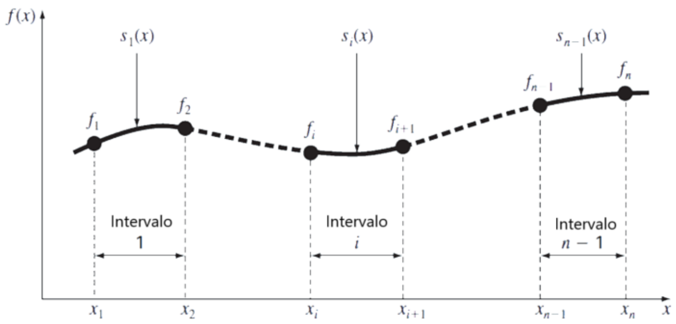
- O polinômio para cada intervalo pode ser representado de forma geral como:

$$s_i(x) = a_i + b_i\,(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \qquad (i)$$

- Observando a figura da página 5, perceba que para n pontos dados, existem $n-1$ intervalos e, consequentemente $3(n-1)$ constantes indeterminadas – a's, b's e c’s.

- Portanto, $3(n-1)$ equações ou condições são necessárias para calcular as incógnitas.

$$s_i(x) = a_i + bi\ (x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$



Splines quadráticos

1. Condição de continuidade: a função deve passar por todos os pontos. Assim:

$$s_i(x_i) = ai\ + b_i\ (x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 = f_i$$

o que fornece:

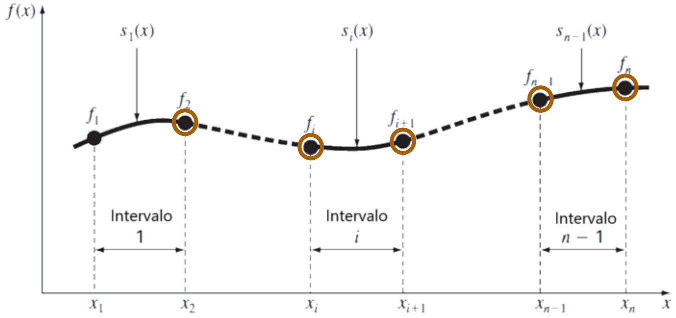
$$a_i = f_i \qquad \text{(ii)}$$

Resultado que pode ser incorporado a (i):

$$s_i(x) = f_i\ + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \qquad \text{(iii)}$$

A determinação dos coeficientes a_i, reduz o número de condições para $2(n-1)$.

Splines quadráticos



2. Os valores da função de polinômios adjacentes devem ser iguais nos nós, condição que pode ser escrita para o nó $i+1$

$$f_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = f_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 \qquad \text{(iv)}$$

como:

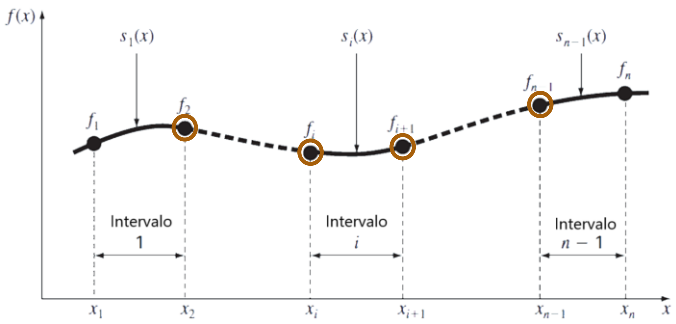
$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

A equação (iv) simplifica para :

$$f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = f_{i+1} \qquad \text{(v)}$$

Essa equação pode ser escrita para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, o que equivale a $(n-1)$ condições, significando que agora faltam apenas $(n-1)$ condições

Splines quadráticos



3. Condição de "suavidade" - as derivadas primeiras nos nós internos devem ser iguais. Derivando-se (i), obtém-se

$$s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i)$$

Condição que escrita para o nó $(i + 1)$ resulta em:

$$b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})$$

ou:

$$b_i + 2c_i h_i = b_{i+1} \qquad \text{(vi)}$$

Essa equação escrita para os nós interiores ($i = 1, 2, \ldots, n - 2$) resulta em $(n - 2)$ condições, significando que agora faltam apenas $(n - 1) - (n - 2) = 1$ condição.

Splines quadráticos

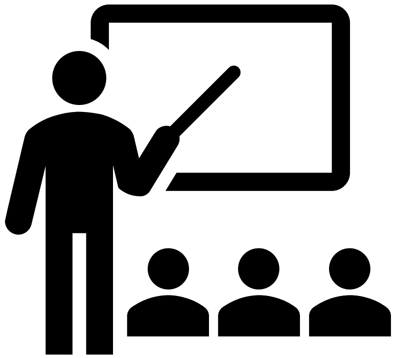
$$s_i(x) = a_i + bi\ (x - xi) + c_i(x - x_i)^2$$

4. Arbitrariamente, considere a derivada segunda no primeiro ponto nula. Como a derivada segunda de (i) é $2\ c_i$, resulta que:

$$c_1 = 0$$

Condição que indica que os dois primeiros pontos serão ligados por uma reta

EXEMPLO 2



Ajuste um spline quadrático aos mesmos dados empregados no Exemplo 1. Use os resultados para fazer uma estimativa em x = 5.

4 pontos → (n – 1) = 3 intervalos → 3(n-1) condições

Isso implica que após aplicar a condição de continuidade (1) e a condição da derivada segunda nula, restam 2(n-1) – 1 = 5 condições.

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

EXEMPLO 1

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

$$f_i + bihi + c_i h_i^2 = f_{i+1}$$

$$b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}$$

- A equação (v) é escrita para $i = 1, 2, 3$ com $c_1 = 0$, resultando em:

$$f_1 + b_1 h_1 = f_2$$
$$f_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 = f_3$$
$$f_3 + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 = f_4$$

- A continuidade das derivadas, equação (vi) produz $(n-2)$ equações adicionais, o que resulta (lembrando que $c_1 = 0$):

$$b_1 = b_2$$

$$b_2 + 2c_2 h_2 = b_3$$

EXEMPLO 1

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

- As equações podem ser reordenadas:

$$b_1 h_1 = f_2 - f_1$$

$$b_2 h_2 + c_2 h_2^2 = f_3 - f_2$$

$$b_3 h_3 + c_3 h_3^2 = f_4 - f_3$$

$$b_1 - b_2 = 0$$

$$b_2 - b_3 + 2 c_2 h_2 = 0$$

- Colocando na forma matricial e substituindo os valores:

$$\begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & 0 & 6{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

EXEMPLO 1

$$s_i(x) = a_i + bi\ (x - xi) + c_i(x - x_i)^2$$

- Resolvendo o sistema no Scilab, resulta:

$$b_1 = -1$$

$$b_2 = -1$$

$$b_3 = 2{,}2$$

$$c_2 = 0{,}64$$

$$c_3 = 1{,}6$$

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

- Esses resultados juntamente com os valores $a_i = f_i$ e $c_1 = 0$ são substituídos na equação (i) para construção dos splines quadráticos:

$$s_1(x) = 2{,}5 - (x - 3{,}0)$$

$$s_2(x) = 1 - (x - 4{,}5) + 0{,}64(x - 4{,}5)^2$$

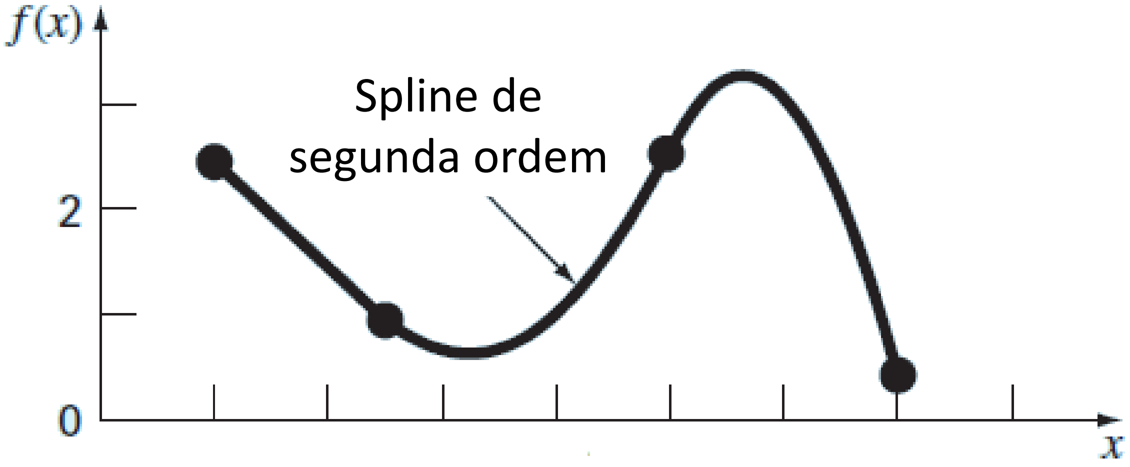
$$s_i(x) = 2{,}5 + 2{,}2\ (x - 7) + 1{,}6(x - 7)^2$$

- Como $x = 5$ está no segundo intervalo:

$$s_2(x) = 1 - (5 - 4{,}5) + 0{,}64(5 - 4{,}5)^2 = 0{,}66$$

EXEMPLO 2

O ajuste completo do spline quadrático é mostrado na figura ao lado. O ajuste é prejudicado pela reta unindo os 2 primeiros pontos e pelos valores mínimo do segundo intervalo e o máximo do terceiro parecerem inadequados.



i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

SPLINES CÚBICOS

- São os mais utilizados pois oferecem a representação mais simples com a aparência desejada de suavidade.
- Polinômios de grau superior tendem a exibir instabilidades.
- O polinômio para cada intervalo pode ser representado de forma geral como:

$$s_i(x) = a_i + \ b_i(x - xi) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \qquad \text{(vii)}$$

- Nesse caso existem $4(n-1)$ constantes indeterminadas e, portanto, $4(n-1)$ condições são necessárias.

SPLINES CÚBICOS

- Como foi o caso dos splines quadráticos, a spline deve passar através de todos os pontos de dados, o que fornece as primeiras $(n-1)$ condições.
- As $3(n-1)$ condições restantes, são obtidas a partir das propriedades e de duas condições impostas.

SPLINES CÚBICOS

- Propriedades

1. Cada uma das cúbicas deve se unir nos nós, o que fornece outras $(n-1)$ condições.
2. As primeiras derivadas nos nós interiores devem ser iguais, o que fornece $(n-2)$ condições, gerando um déficit de uma condição.
3. As segundas derivadas nos nós interiores devem ser iguais, gerando também $(n-2)$ condições, gerando um déficit de mais uma condição.

- Duas condições impostas devem suprir as condições que faltam.

SPLINES CÚBICOS NATURAIS

- O nome natural deve-se ao fato dos polinômios cúbicos serem lineares além dos nós extremos.
- Nestas equações, assume-se que as segundas derivadas no primeiro e último nós são iguais a zero.
- A especificação de tais condições nas extremidades recebe o nome de spline natural.

- Determinação das constantes a:

$$a_i = f_i \qquad \text{(viii)}$$

SPLINES CÚBICOS NATURAIS

Determinação das constantes b e d

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \qquad \text{(ix)}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \qquad \text{(x)}$$

SPLINES CÚBICOS NATURAIS

Determinação das constantes c

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(xi)}$$

- Note que além dos coeficientes c_1, c_2, …, c_{n-1}, o sistema envolve um coeficiente c_n que não está diretamente relacionado com nenhum dos $(n-1)$ polinômios s_i.

SPLINES CÚBICOS NATURAIS

Determinação das constantes c

- Na realidade c_n está diretamente relacionado com as condições no extremo do intervalo de interpolação e sua determinação depende do tipo de spline.
- Além do spline natural, outros dois tipos de splines são populares:
- Condição de extremidade amarrada (clamped):

  Essa condição envolve a especificação das primeiras derivadas no primeiro e últimos nós (amarra a inclinação nesses nós).
- Condição de extremidade com um não nó (not-a-knot):

  Força a continuidade da derivada terceira no segundo e penúltimo nó. Desse modo, esses nós não representam mais a junção de duas funções cúbicas diferentes, não sendo mais nós verdadeiros.

SPLINES CÚBICOS
Clamped

$$s_i(x) = a_i + \ b_i(x - xi) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n, x_{n-1}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Derivando a equação (vii):

$$s_i{}'(x) = \ b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

- Para o primeiro segmento em $x = x_1$:

$$s_1{}'(x_1) = f_1{}' = b_1$$

- Substituindo a equação (ix) para $i \ = 1$ na equação acima, resulta a primeira condição imposta que deve substituir a primeira linha da equação (xi):

$$\boxed{2h_1c_1 + h_1c_2 = 3(f[x_2, x_1] - f_1{}')}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

SPLINES CÚBICOS
Clamped

- Lembrando a primeira derivada da spline cúbica é

$$s_i{'}(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

- Para o último segmento em $x = x_n$:

$$s_{n-1}{'}(x_n) = f_n{'} = b_{n-1} + 2c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + 3d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2$$

- Substituindo a equação (x) na equação acima para $i = n - 1$, resulta

$$f_n{'} = b_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1} + c_n h_{n-1}$$

- Substituindo a equação (ix) para $i = n - 1$ na equação acima, resulta a segunda condição imposta que deve substituir a enésima linha da equação (xi):

$$\boxed{h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3(f_n{'} - f[x_n, x_{n-1}])}$$

SPLINES CÚBICOS CLAMPED
Determinação das constantes c

$$\begin{bmatrix} 2h_1 & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3(f[x_2,x_1]-f_1{}') \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 3(f_n{}'-f[x_n,x_{n-1}]) \end{Bmatrix} \qquad \text{(xi)}$$

SPLINES CÚBICOS
Not-a-Knot

- Com a continuidade da 3ª derivada nos segundo e penúltimo nós, duas condições são impostas:

$$d_1 = d_2 \; e \; d_{n-2} = d_{n-1}$$

- Como o spline já especifica que o valor da função e suas primeira e segunda derivadas são iguais nesses nós, a condição $d_1 = d_2$ torna $s_1(x) \; e \; s_2(x)$ polinômio cúbicos idênticos. O mesmo ocorre com $s_{n-2}(x) \; e \; s_{n-1}(x)$.

- Aplicando a equação (x) em $d_1 = d_2$ e $d_{n-1} = d_n$, resultam as duas condições condições que devem substituir a primeira e a enésima linha da equação (xi):

$$\boxed{\begin{gathered} h_2 c_1 - (h_1 + h_2) c_2 + h_1 c_3 = 0 \\ h_{n-1} c_{n-2} - (h_{n-2} + h_{n-1}) c_{n-1} + h_{n-2} c_n = 0 \end{gathered}}$$

SPLINES CÚBICOS NOT-A-KNOT
Determinação das constantes c

$$\begin{bmatrix} h_2 & -(h_1+h_2) & h_1 & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & h_{n-1} & -(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(xi)}$$

EXEMPLO 3

Ajuste splines cúbicos naturais aos mesmos dados usados nos exemplos 1 e 2. Utilize os resultados para fazer uma estimativa do valor em x = 5.

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

EXEMPLO 3

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- O primeiro passo é empregar a equação (xi) para gerar um conjunto de equações simultâneas que nos fornecerão os coeficientes c:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 8 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4{,}8 \\ -4{,}8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$c_1 = 0$$
$$c_2 = 0.839543726$$
$$c_3 = -0{,}766539924$$
$$c_4 = 0$$

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

EXEMPLO 3

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \qquad \text{(ix)}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \qquad \text{(x)}$$

- As equações (ix) e (xii) podem ser usadas para calcular os coeficientes b e d:

$$b_1 = -\ 1{,}4197719 \qquad d_1 = 0{,}1865653$$
$$b_2 = -\ 0{,}1604563 \qquad d_2 = -\ 0{,}2141445$$
$$b_3 = 0{,}0220532 \qquad d_3 = 0{,}1277567$$

- Esses resultados, juntamente com os valores de *a* (eq. viii) podem ser substituídos na eq. (vii) para obter os splines cúbicos:

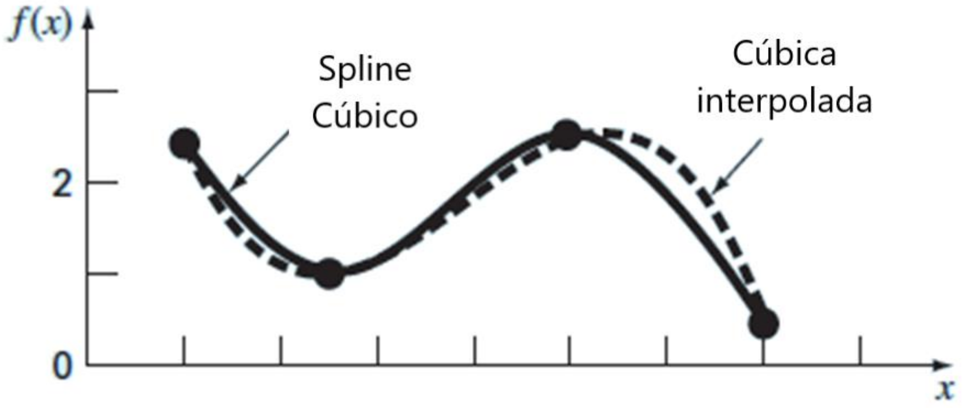
$$s_1(x) = 2{,}5 - 1{,}4997719(x-3) + 0{,}1865653(x-3)^3$$
$$s_2(x) = 1{,}0 - 0{,}1604563(x-4{,}5) + 0{,}8395437(x-4{,}5)^2 - 0{,}2141445(x-4{,}5)^3$$
$$s_3(x) = 2{,}5 + 0{,}0220532(x-7) - 0{,}7665399(x-7)^2 + 0{,}1277567(x-7)^3$$

EXEMPLO 3

- As equações anteriores podem ser utilizadas para calcular valores dentro da cada intervalo. Como x = 5 está contido no segundo intervalo, resulta:

$$s_2(5) = 1 - 0{,}1604563(0{,}5) + 0{,}8395437(0{,}5)^2 - 0{,}2141445(0{,}5)^3 = 1{,}1028897$$

- A Figura abaixo mostra o ajuste completo do spline cúbico.



A partir do conjunto de dados com cinco pontos a seguir

x	8	11	15	18	22
y	5	9	19	8	7

a) Determine splines cúbicos naturais que façam o ajuste dos dados;

b) Determine o valor interpolado de y em $x = 12{,}7$.

c) Trace um gráfico com os pontos do conjunto de dados

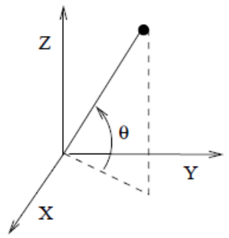
Exercício 1

Exercício 2

- Ajuste splines cúbicos não é nó aos mesmos dados usados no exemplo 3. Apresente a estimativa do valor em x = 5.

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

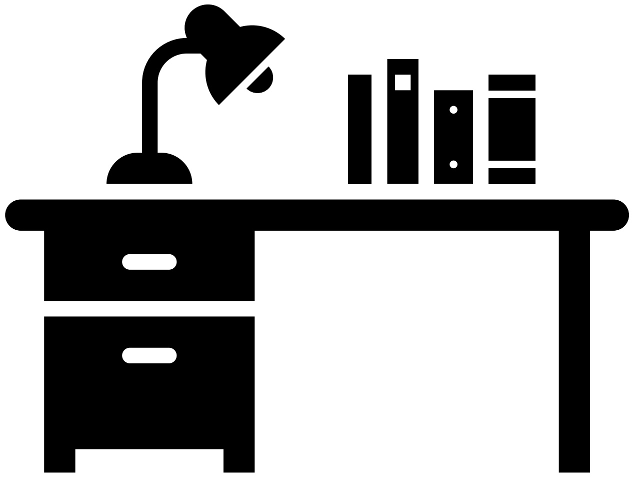
Um braço de um robô deve passar nos instantes t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 por posições pré-definidas $\theta(t_0)$, $\theta(t_1)$, $\theta(t_2)$, $\theta(t_3)$, $\theta(t_4)$ e $\theta(t_5)$, onde $\theta(t)$ é o ângulo (em radianos) que o braço do robô faz com o plano XOY



x	1	2	3	4	5	6
y	1	1,25	1,75	2,25	3	3,15

a) Com base nos dados da tabela, aproxime a trajetória do robô por uma spline cúbica amarrada. Indique também uma aproximação da posição do robô no instante $t = 1.5\ s$.

b) Calcule uma aproximação à velocidade do robô no instante $t = 1.5$ s.



Exercício 3

INTERPOLAÇÃO

PARTE II – INTERPOLAÇÃO POR SPLINES E POR PARTES

CONTINUAÇÃO

Computação Científica

prof. Marco Villaça

Perigos da interpolação com polinômios de grau elevado

- A função de Runge é um exemplo conhecido de uma função que não pode ser bem ajustada com polinômios:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

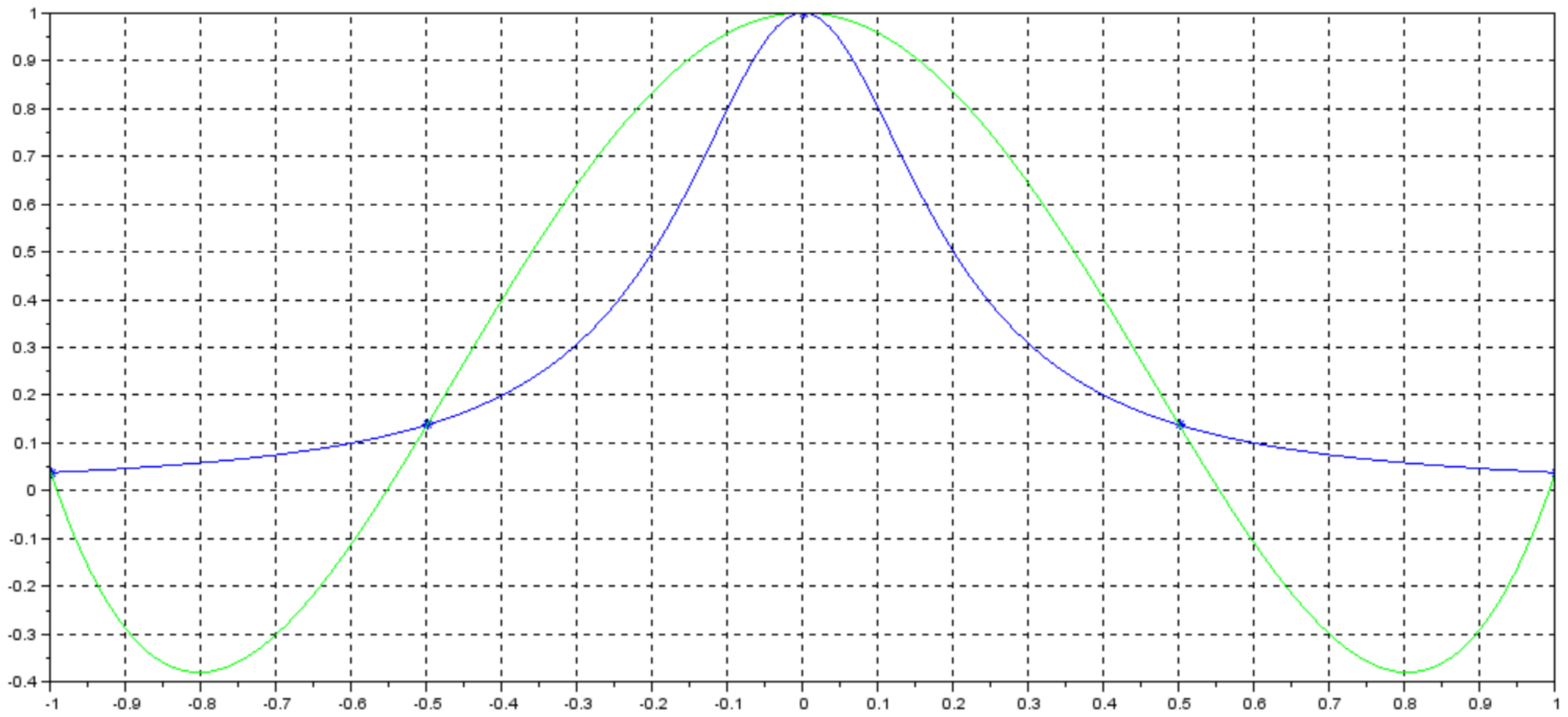
- O script Scilab a seguir ajusta um polinômio de grau 4 a 5 pontos igualmente espaçados da função de Runge e gera uma figura comparando a função de Runge com o polinômio gerado.
- Como mostra a figura, o polinômio não segue satisfatoriamente a função de Runge, sendo que, quanto maior o grau, pior será o ajuste (CHAPRA, 2012, p.424).

Perigos da interpolação com polinômios de grau elevado

```
n = 5;
x = linspace(-1,1,n);
y = 1 ./ (1+25*x.^2)
for i = 1:n
    for j = 1:n
    A(i,j) = x(i)^(j-1);
    end
end
```

```
b = y';
p = A\b;
xx = linspace(-1,1,100);
P = p(1) + p(2)*xx + p(3)*xx.^2 + p(4)*xx.^4 + p(5)*xx.^4;
yy = 1 ./ (1+25*xx.^2)
plot(x,y,'*',xx,yy,'b', xx,P,'g');
xgrid;
```

$$\begin{array}{c} 3x3 \\ \begin{bmatrix} x(1)^0 & x(1)^1 & x(1)^2 \\ x(2)^0 & x(2)^1 & x(2)^2 \\ x(3)^0 & x(3)^1 & x(3)^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{Bmatrix}$$



Perigos da interpolação com polinômios de grau elevado

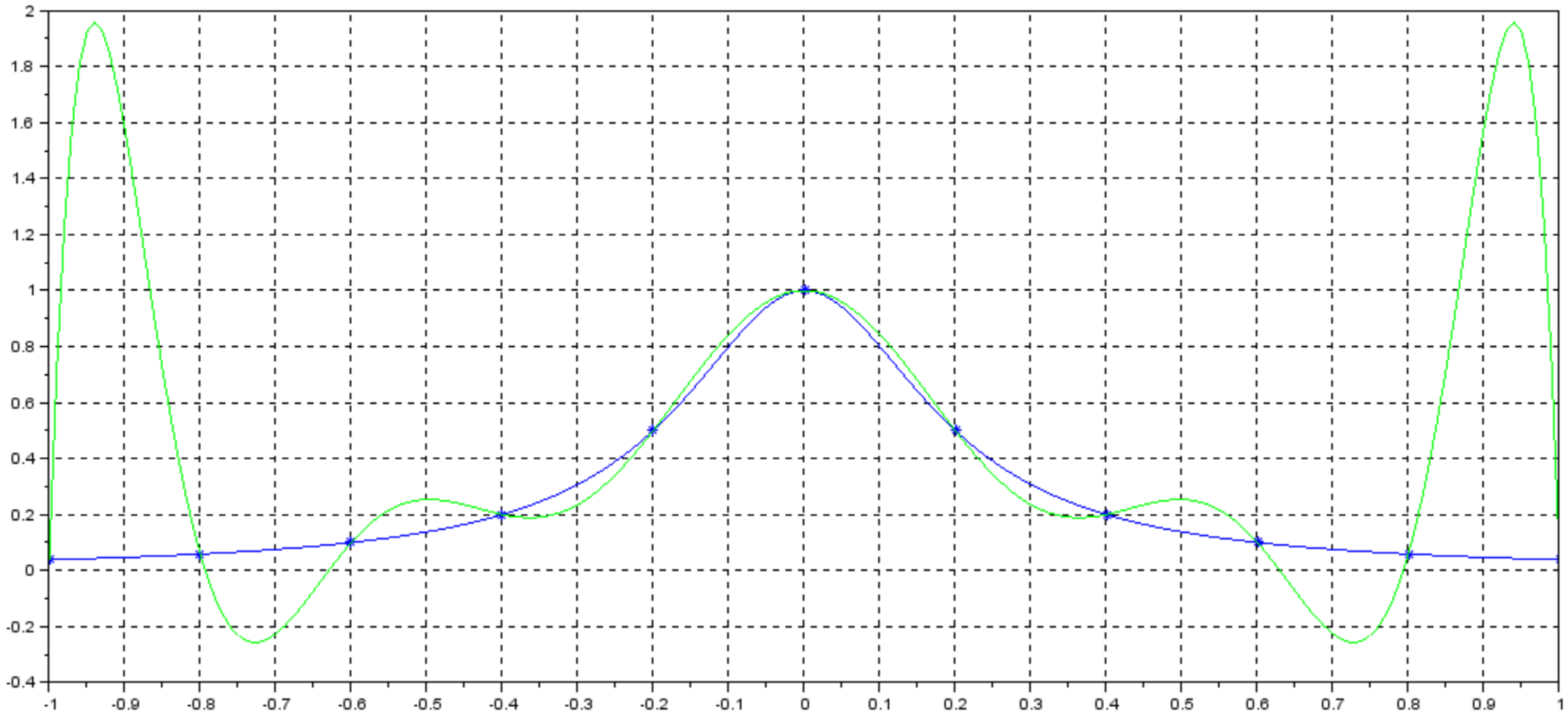
Comparação da função de Runge (linha azul) com a interpolação polinomial de quarto grau (linha verde)

Perigos da interpolação com polinômios de grau elevado

- O script Scilab a seguir ajusta um polinômio interpolador de Lagrange de grau 10 a 11 pontos igualmente espaçados da função de Runge e gera uma figura comparando a função de Runge com o polinômio gerado.
- O script chama a função Lagrange, apresentada anteriormente.
- Como mostra a figura, o polinômio não segue precariamente a função de Runge,

Perigos da interpolação com polinômios de grau elevado

```
exec('path\Lagrange.sci', -1)

n = 1 + input('Entre com o grau do polinômio: ');

x = linspace(-1, 1, n);

y = 1 ./ (1+25*x.^2)

xx = linspace(min(x),max(x),200)

yy = 1 ./ (1+25*xx.^2)

yint = Lagrange(x, y, xx)

plot(x, y, '*’, xx, yy, 'b’, xx, yint, 'g'); xgrid
```



Perigos da interpolação com polinômios de grau elevado

Comparação da função de Runge (linha azul) com a interpolação polinomial de décimo grau (linha verde)

INTERPOLAÇÃO POR PARTES NO SCILAB

- O script a seguir usa funções nativas do Scilab para ajustar 9 pontos dados igualmente espaçados e amostrados da função de Runge no intervalo [-1,1], empregando um spline cúbico natural.

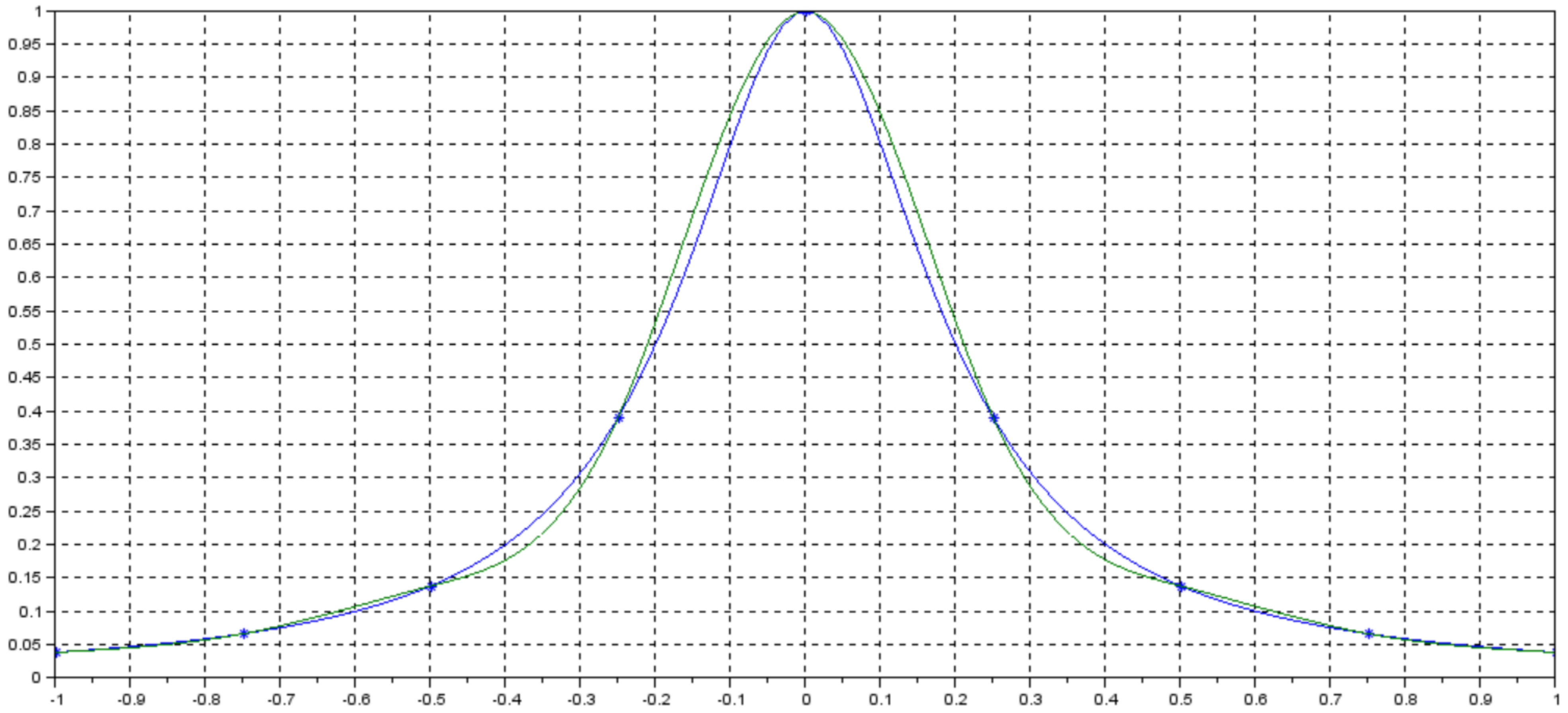
- A figura gerada mostra que o spline natural segue bem a função de Runge sem exibir oscilações pronunciadas entre os pontos.

INTERPOLAÇÃO POR PARTES NO SCILAB

```
// gera os nove pontos
deff("y=runge(x)","y=1 ./(1 + 25*x.^2)")
a = -1; b = 1; n = 9;
x = linspace(a, b, n)';
y = runge(x);
/* Esta função computa o spline cúbico s
que interpola os pontos (xi,yi) i.e.,
temos os       s(xi) = yi para todos i =
1,..,n. O spline resultante s é
completamente definido pela    tripla
(x,y,d) onde d é o vetor com as
derivadas       nos xi: s'(xi)= di          */
d = splin(x,y,'natural');
// com s''(x1) = s''(xn) = 0
```

INTERPOLAÇÃO POR PARTES NO SCILAB

```
// gera-se em vetor mais finamente
// espaçado
xx = linspace(a, b, 100);
//  e  100 pontos da função de runge
yx = runge(xx);
// Dados três vetores (x,y,d) definindo
uma função de spline cúbico com yi =
s(xi), di = s'(xi) esta função avalia s
em xx
s =  interp(xx, x, y, d);
// gera os gráficos
// pontos - *, runge - azul, splines -
verde
plot(x,y,'*', xx, yx,'b',xx,s,'g');
```



INTERPOLAÇÃO POR PARTES NO SCILAB

Comparação da função runge (linha azul) com um ajuste de 9 pontos por um spline natural gerado com o Scilab (linha verde)

Função Scilab

INTERPOLAÇÃO SPLINE

Função Scilab

```
function [y, b, c, d, ye]=splines(x, y, xe)
/* onde o y(a), b, c, d são vetores com coeficientes das (n-1)
cubicas naturais
   ye é o valor da variável dependente em xe
   x é o vetor dos pontos amostrados da variável independente
   y é o vetor dos pontos amostrados da variável dependente */
 n = length(x);
 if n ~= length(y) then
    error("vetores x e y com dimensões diferentes");
 end
```

Função Scilab

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_1 & \boxed{2(h_1+h_2) \quad h_2 \quad \ddots \quad h_{n-2} \quad 2(h_{n-2}+h_{n-1})} & h_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \end{matrix}} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

```
// cálculo das diferenças finitas
for i = 1:n-1
   h(i) = x(i+1)-x(i);
   ddf(i) = (y(i+1)-y(i))/h(i);
end
A = zeros(n-2, n-2);   //monta A
f = zeros(n-2,1);      //monta f
```

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Função Scilab

```
//Gerar a matriz A e o vetor coluna f
for i = 1:n-2
    for j = 1:n-2
        if i == j then
            A(i,j) = 2*(h(i)+h(i+1));
        elseif j == i+1 then
            A(i,j) = h(j);
        elseif i == j+1 then
            A(i,j) = h(i);
        end
    end
    f(i) = 3*(ddf(i+1)-ddf(i));
end
```

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Função Scilab

$$b_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}$$

```
c = zeros (n, 1);
c(2:n-1,1) = A\f;
for i=1:n-1
   d(i) = (c(i+1)-c(i))/(3*h(i));
   b(i) = ddf(i)- (h(i)/3)*(2*c(i)+c(i+1));
   //descobrindo em qual segmento está o ponto a ser
   // interpolado
   if (xe > x(i)) & (xe < x(i+1)) then
      j = i;
   end
end
k = xe - x(j);
ye = y(j) + b(j)*k + c(j)*k^2 + d(j)*k^3;
```

Função Scilab

```
//construindo as splines
for j=1:n-1
    xx = linspace(x(j), x(j+1), 1000);
    k = xx-x(j);
    yy = y(j) + b(j)*k + c(j)*k .^2 + d(j)*k .^3;
    plot2d(xx, yy);
end
ylabel("Splines");
xlabel(“x");
xgrid;
endfunction
```

EXEMPLO 4

Utilizando a função Scilab fornecida, ajuste splines cúbicos naturais aos mesmos dados usados no exemplo 3. Apresente a estimativa do valor em x = 5.

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

EXEMPLO 4

--> x=[3,4.5,7,9];

--> y=[2.5 1 2.5 0.5]

y =

2.5   1.   2.5   0.5

--> **[a, b, c, d, ye] = splines(x, y, 5)**

a =

2.5   1.   2.5   0.5

b =

-1.4197719

-0.1604563

0.0220532

c =

0.

0.8395437

-0.7665399

0.

d =

0.1865653

-0.2141445

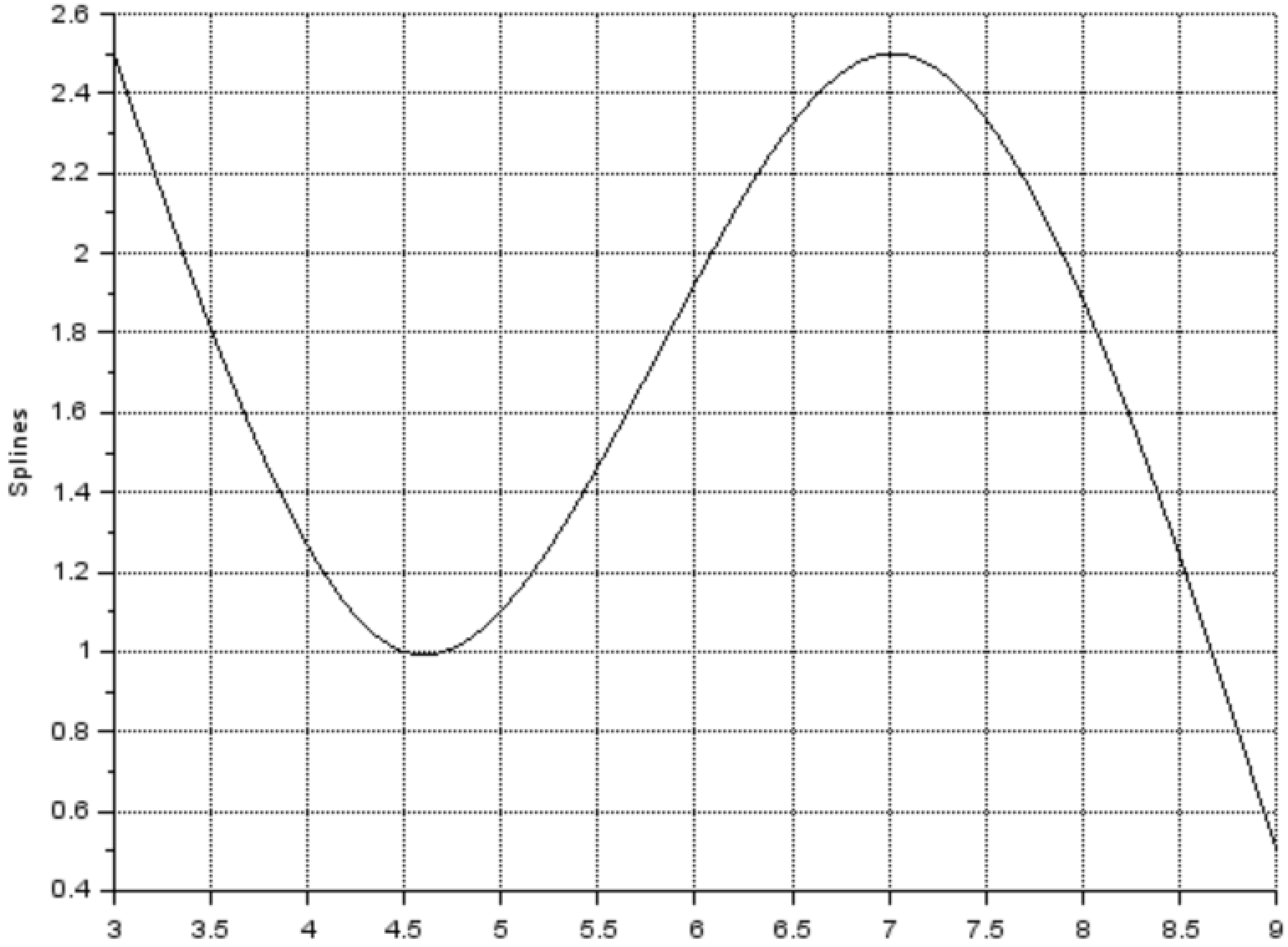
0.1277567

ye =

1.1028897

EXEMPLO 4

Gráfico gerado pela função Scilab

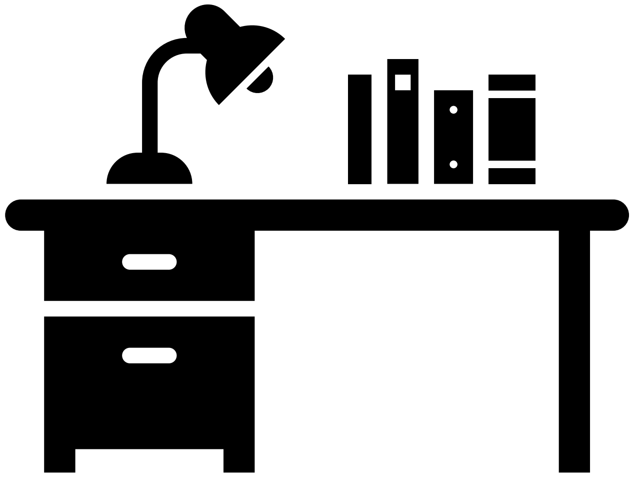


Modifique a função splines fornecida de modo que ela calcule os splines *clamped* e *not-a-knot*. O novo cabeçalho seria:

```
function [y, b, c, d, ye]=splines(x, y, xe, tipo, vetor)
```

onde:

- tipo = ‘n’, spline natural
- tipo = ‘c’, *clamped* (nesse caso é necessário passar através de vetor as derivadas primeiras nas extremidades)
- tipo = ‘k’, *not-a-knot*
- vetor é uma informação necessária apenas no tipo clamped



Exercício 4

Bibliografia e crédito das figuras

CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.

CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solução Exercício 1

- O primeiro passo é empregar a equação (xi) para gerar um conjunto de equações simultâneas que nos fornecerão os coeficientes c:

x	8	11	15	18	22
y	5	9	19	8	7

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 14 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ -18{,}5 \\ 10{,}25 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_5 = 0$$
$$c_2 = 0{,}7575188$$
$$c_3 = -1{,}7763158$$
$$c_4 = 1{,}112782$$

Solução Exercício 1

$$c_1 = c_5 = 0$$
$$c_2 = 0{,}7575188$$
$$c_3 = -1{,}7763158$$
$$c_4 = 1{,}112782$$

x	8	11	15	18	22
y	5	9	19	8	7

- A equação (ix) pode ser usada para calcular os coeficientes b :

$$b_1 = 0{,}5758145$$
$$b_2 = 2{,}8483709$$
$$b_3 = -1{,}226817$$
$$b_4 = -3{,}2174185$$

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \qquad \text{(ix)}$$

Solução Exercício 1

$$c_1 = c_5 = 0$$
$$c_2 = 0{,}7575188$$
$$c_3 = -1{,}7763158$$
$$c_4 = 1{,}112782$$

x	8	11	15	18	22
y	5	9	19	8	7

- A equação (x) pode ser usada para calcular os coeficientes d :

$$d_1 = 0{,}0841688$$
$$d_2 = -0{,}2111529$$
$$d_3 = 0{,}3210109$$
$$d_4 = -0{,}0927318$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \qquad \text{(x)}$$

Solução Exercício 1

x	8	11	15	18	22
y	5	9	19	8	7

- Esses resultados, juntamente com os valores de *a* (eq. viii) podem ser substituídos na eq. (vii) para obter os splines cúbicos:

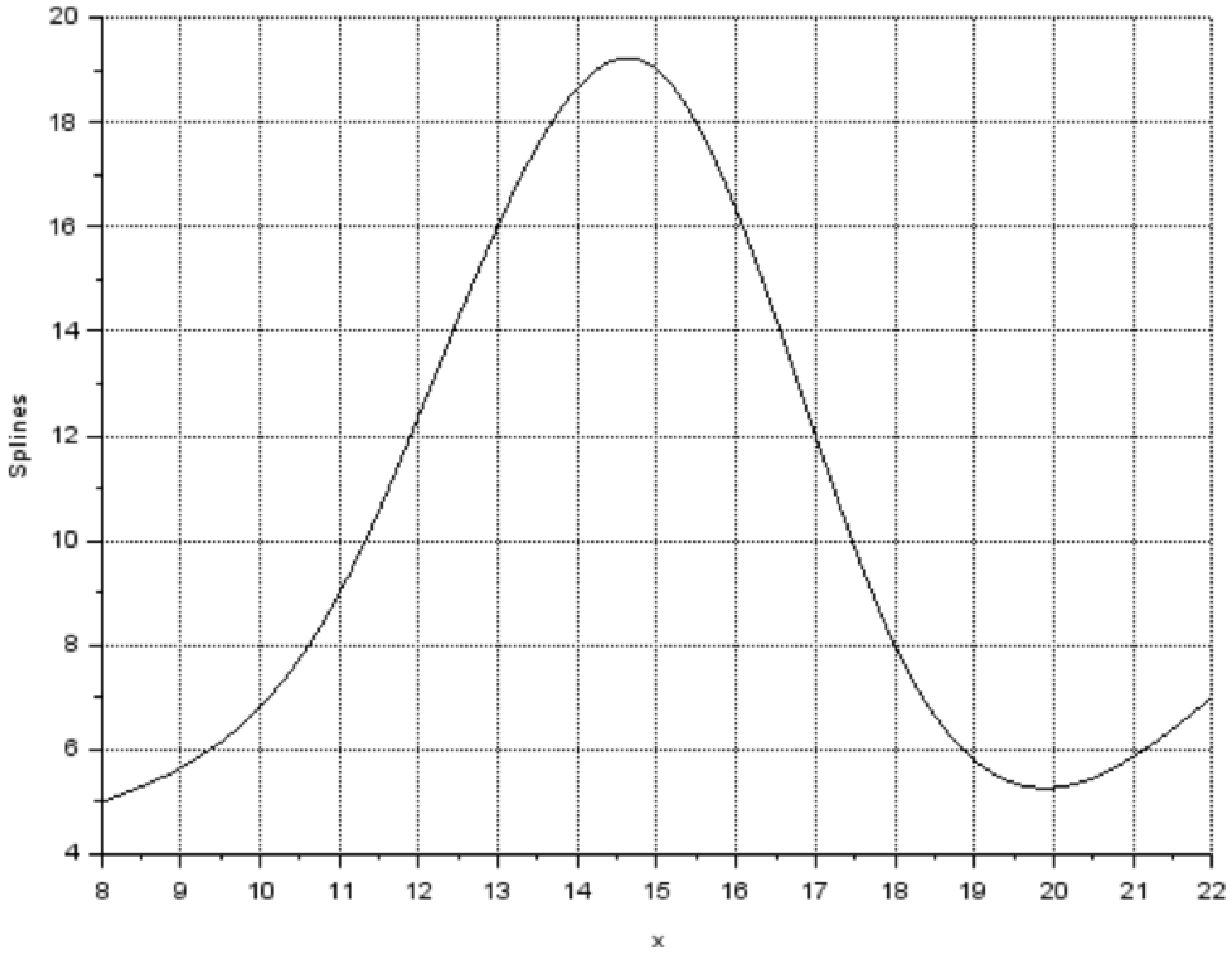
$$s_1(x) = 5 + 0{,}5758145(x-8) - 0{,}0841688(x-8)^3$$
$$s_2(x) = 9{,}0 + 2{,}8483709(x-11) + 0{,}7575188(x-11)^2 - 0{,}2111529(x-11)^3$$
$$s_3(x) = 19 - 1{,}226817(x-15) - 1{,}77631583(x-15)^2 + 0{,}0329992(x-15)^3$$
$$s_4(x) = 8 - 3.2174185(x-18) + 1{,}112782(x-18)^2 - 0{,}0927318(x-18)^3$$

- $\mathrm{x} \; = 12{,}7 \text{ está no segundo segmento. Assim.}$

$$s_2(12{,}7) = 9{,}0 + 2{,}8483709 \cdot 1{,}7 + 0{,}7575188 \cdot 1{,}7^2 - 0{,}2111529 \cdot 1{,}7^3 \cong 14{,}99$$

Solução Exercício 1 – Script Scilab

```
clear; x=[8 11 15 18 22]; y=[5 9 19 8 7]; n = length(x)
 b=[0.5758145 2.8483709 -1.226817 -3.2174185]
c=[0 0.7575188 -1.7763158 1.112782]
d=[0.0841688 -0.2111529 0.3210109 -0.0927318]
for j=1:n-1
    xx = linspace(x(j), x(j+1), 1000)
    k = xx-x(j)
    yy = y(j) + b(j)*k + c(j)*k .^2 + d(j)*k .^3
    plot2d(xx, yy);
end
ylabel("Splines"); xlabel("x"); xgrid;
```



Solução Exercício 1 – Gráfico

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

Solução Exercício 2

- Substituindo as expressões apropriadas na equação (xi) resulta:

$$\begin{bmatrix} h_2 & -(h_1+h_2) & h_1 & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & h_{n-1} & -(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Substituindo os valores e calculando:

$$\begin{bmatrix} 2{,}5 & -4 & 1{,}5 & \\ 1{,}5 & 8 & 2{,}5 & \\ & 2{,}5 & 9 & 2 \\ & 2 & -4{,}5 & 2{,}5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4{,}8 \\ -4{,}8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= 1{,}0925926 \\ c_2 &= 0{,}5259259 \\ c_3 &= -0{,}4185185 \\ c_4 &= -1{,}1740741 \end{aligned}$$

Solução Exercício 2

$c_1 = 1{,}0925926$
$c_2 = 0{,}5259259$
$c_3 = -0{,}4185185$
$c_4 = -1{,}1740741$

i	x_i	y_i
1	3,0	2,5
2	4,5	1
3	7,0	2,5
4	9,0	0,5

- A equação (ix) podem ser usadas para calcular os coeficientes b :

$$b_1 = \frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(2c_1 + c_2) = \frac{1 - 2{,}5}{1{,}5} - \frac{1{,}5}{3}(2 \cdot 1{,}0925926 + 0{,}5259259) = -2{,}3555556$$

$$b_2 = \frac{f_3 - f_2}{h_2} - \frac{h_2}{3}(2c_2 + c_3) = \frac{2{,}5 - 1}{2{,}5} - \frac{2{,}5}{3}(2 \cdot 0{,}5259259 \ - 0{,}4185185) = 0{,}0722223$$

$$b_3 = \frac{f_4 - f_3}{h_3} - \frac{h_3}{3}(2c_3 + c_4) = \frac{0{,}5 - 2{,}5}{2{,}0} - \frac{2{,}0}{3}(-2 \cdot 0{,}4185185 - 1{,}1740741) = 0{,}3407407$$

- É um pressuposto que $d_1 = d_2 = d_3$. Assim, usando a equação (x) fornece:

$$d_1 = d_2 = d_3 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} = \frac{0{,}5259259 - 1{,}0925926}{3 \cdot 1{,}5} = -0.1259259$$

Solução Exercício 2

- Esses resultados, juntamente com os valores de *a* (eq. viii) podem ser substituídos na eq. (vii) para obter os splines cúbicos:

$$s_1(x) = 2{,}5 - 2.3555556(x-3) + 1{,}0925926(x-3)^2 - 0{,}1259259(x-3)^3$$
$$s_2(x) = 1{,}0 + 0{,}0722223(x-4{,}5) + 0{,}5259259(x-4{,}5)^2 - 0{,}1259259(x-4{,}5)^3$$
$$s_3(x) = 2{,}5 + 0{,}3407407(x-7) - 0{,}4185185(x-7)^2 - 0{,}1259259(x-7)^3$$

- Nesse caso específico todas as cúbicas são iguais:

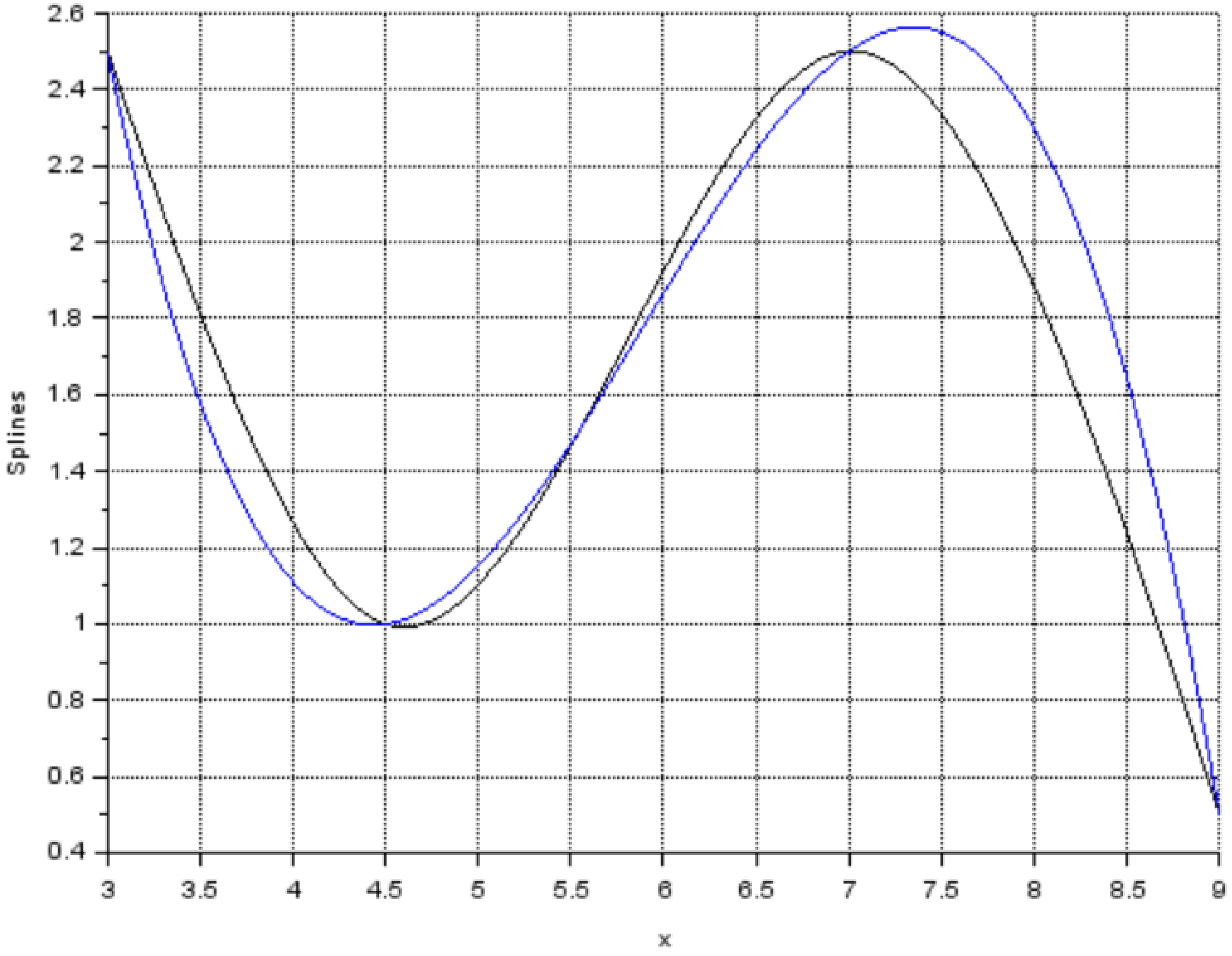
$$s(x) = \ 22{,}8 \ - 12{,}311111\,x \ + 2{,}2259257\,x^2 - 0{,}1259259\,x^3$$

- Assim qualquer uma das 3 equações anteriores podem ser utilizadas para calcular o valor correspondente a $x = 5$. Utilizando o segundo intervalo, resulta:

$$s_2(5) = 1{,}0 + 0{,}0722223 \cdot 0{,}5 + 0{,}5259259 \cdot 0{,}5^2 - 0{,}1259259 \cdot 0{,}5^3 = 1{,}1518519$$

Solução Exercício 2 – Script Scilab

```
n = length(x)
b=[-2.3555556 0.0722223 0.3407407]; c=[1.0925926 0.5259259 -0.4185185]
d=[-0.1259259 -0.1259259 -0.1259259]
for j=1:n-1
    xx = linspace(x(j), x(j+1), 1000)
    k = xx-x(j);
    yy = y(j) + b(j)*k + c(j)*k .^2 + d(j)*k .^3
    plot2d(xx, yy);
end
ylabel("Splines"); xlabel("x"); xgrid;
```



Solução Exercício 2 – Gráfico

Natural – **Preto**
Not a knot - **Azul**

Solução Exercício 3

a) Como a expressão analítica de f(x) não é conhecida e a spline solicitada foi a amarrada, vai ser necessário estimar o valor das derivadas nos nós extremos. Assim, reservam-se os dois pontos contíguos aos extremos para estimar essas derivadas. Esses pontos não farão parte da spline.

t	1	2	3	4	5	6
θ	1	1,25	1,75	2,25	3	3,15

x	1	3	4	6
y	1	1,75	2,25	3,15

$$f'_1 = \frac{1,25 - 1}{1} = 0,25$$

$$f'_n = \frac{3,15 - 3}{1} = 0,15$$

Novo conjunto de pontos

Solução Exercício 3

x	1	3	4	6
y	1	1,75	2,25	3,15

- Substituindo as expressões apropriadas na equação (xi) resulta:

$$\begin{bmatrix} 2h_1 & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3(f[x_2,x_1]-f_1{'}) \\ 3(f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]) \\ 3(f_n{'}-f[x_n,x_{n-1}]) \end{Bmatrix}$$

- Substituindo os valores e calculando:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}375 \\ 0{,}375 \\ -0{,}15 \\ -0.9 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= 0{,}0804687 \\ c_2 &= 0{,}0265625 \\ c_3 &= 0{,}0546875 \\ c_4 &= -0{,}2523437 \end{aligned}$$

$$c_1 = 0{,}0804687$$
$$c_2 = 0{,}0265625$$
$$c_3 = 0{,}0546875$$
$$c_4 = -0{,}2523437$$

Solução Exercício 3

- A equação (ix) pode ser usada para calcular os coeficientes b :

$$b_1 = \frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(2c_1 + c_2) = \frac{1{,}75 - 1}{2} - \frac{2}{3}(2 \cdot 0{,}0804687 + 0{,}0265625) = 0{,}25$$

$$b_2 = \frac{f_3 - f_2}{h_2} - \frac{h_2}{3}(2c_2 + c_3) = \frac{2{,}25 - 1{,}75}{1} - \frac{1}{3}(2 \cdot 0{,}0265625 + 0{,}0546875) = 0{,}4640625$$

$$b_3 = \frac{f_4 - f_3}{h_3} - \frac{h_3}{3}(2c_3 + c_4) = \frac{3{,}15 - 2{,}25}{2{,}0} - \frac{2{,}0}{3}(2 \cdot 0{,}0546875 - 0{,}2523437) = 0{,}5453125$$

$$c_1 = 0{,}0804687$$
$$c_2 = 0{,}0265625$$
$$c_3 = 0{,}0546875$$
$$c_4 = -0{,}2523437$$

x	1	3	4	6
y	1	1,75	2,25	3,15

Solução Exercício 3

- A equação (x) pode ser usada para calcular os coeficientes d :

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} = \frac{0{,}0265625 - 0{,}0804687}{3 \cdot 2} = -0{,}0089844$$

$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3h_2} = \frac{0{,}0546875 - 0{,}0265625}{3 \cdot 1} = 0{,}009375$$

$$d_3 = \frac{c_4 - c_3}{3h_3} = \frac{-0{,}2523437 - 0{,}0546875}{3 \cdot 2} = -0{,}0511719$$

$c_1 = 0{,}0804687$
$c_2 = 0{,}0265625$
$c_3 = 0{,}0546875$
$c_4 = -0{,}2523437$

x	1	3	4	6
y	1	1,75	2,25	3,15

Solução Exercício 3

- Esses resultados, juntamente com os valores de *a* (eq. viii) podem ser substituídos na eq. (vii) para obter os splines cúbicos:

$$s_1(x) = 1 + 0{,}25\,(x-1) + 0{,}0804687(x-1)^2 - 0{,}0089844(x-1)^3$$

$$s_2(x) = 1{,}75 + 0{,}4640625(x-3) + 0{,}0265625(x-3)^2 + 0{,}009375(x-3)^3$$

$$s_3(x) = 2{,}25 + 0{,}5453125(x-4) + 0{,}0546875(x-4)^2 - 0{,}0511719(x-4)^3$$

- As equações anteriores podem ser utilizadas para calcular valores dentro da cada intervalo. Como x = 1,5 está contido no segundo intervalo, resulta:

$$s_1(x) = 1 + 0{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}0804687 \cdot 0{,}5^2 - 0{,}0089844 \cdot 0{,}5^3 = 1{,}1439941$$

Resposta: $\theta \; = 1{,}1439941\, rad$

Solução Exercício 3

b) A velocidade corresponde à derivada de $s_1(x)$:

$$s_1'(x) = 0{,}25\ + 0{,}1609374\,(x-1) - 0{,}0269532(x-1)^2$$

Para $x\ =\ 1{,}5$:

$$s_1'(1{,}5) = 0{,}25\ + 0{,}1609374(0{,}5) - 0{,}0269532(0{,}5)^2 = 0{,}3217774$$

Resposta: $\omega\ =\ 0{,}3237\, rad/s$

Solução Exercício 3 – Script Scilab

```
clear
x=[1 3 4 6]; y=[1 1.75 2.25 3.15]; n = length(x)
b=[0.25 0.4640625 0.54531255]; c=[0.08046878 0.0265625 0.0546875]
d=[-0.0089844 0.009375 -0.0511719]
for j=1:n-1
    xx = linspace(x(j), x(j+1), 1000)
    k = xx-x(j);
    yy = y(j) + b(j)*k + c(j)*k .^2 + d(j)*k .^3
    plot(xx, yy,'b');
end
ylabel("Splines"); xlabel("t"); xgrid;
```

Solução Exercício 2 – Gráfico