SEMANA 8

$$x_i^{novo} = d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}\, x_j^{novo} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}\, x_j^{velho}$$

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS

PARTE III – MÉTODOS ITERATIVOS:

GAUSS-SEIDEL

Computação Científica

prof. Marco Villaça

Método de Gauss-Seidel

- A eliminação de Gauss e suas variações são chamados de métodos diretos.
- Um outro caminho para resolver sistemas de equações lineares é partir de uma estimativa inicial do vetor solução e refiná-la através de um processo iterativo.

Método de Gauss-Seidel

- Suponha que se queira resolver o sistema de equações 3 x 3 abaixo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

onde os elementos da diagonal principal são todos não nulos.

Método de Gauss-Seidel

- Para aplicar um método iterativo se deve rearranjar o sistema da seguinte maneira:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_3}{a_{33}}$$

COLOCANDO SUBSCRITOS

$$x_1^k = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{k-1} - a_{13}x_3^{k-1}}{a_{11}}$$

$$x_2^k = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{k} - a_{23}x_3^{k-1}}{a_{22}}$$

$$x_3^k = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{k} - a_{32}x_2^{k}}{a_{33}}$$

Método de Gauss-Seidel

- O processo será finalizado até que a solução convirja segundo o critério de parada para todo o i

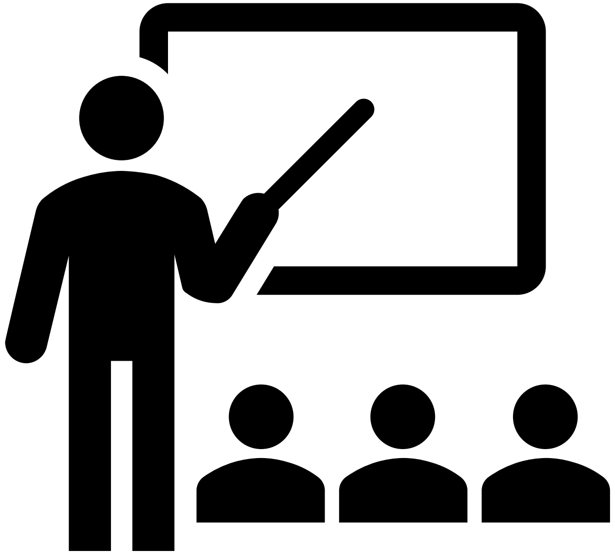
$$\varepsilon_{a,i} = \left| \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^k} \right| \times 100 \leq \varepsilon_s$$

EXEMPLO 1

Utilize o método de Gauss-Seidel para resolver resolver

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Usando a aproximação inicial $\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} = \{0, 0, 0\}$. Realize três iterações, sabendo a solução é $\{x_1, x_2, x_3\} = \{1, 1, 1\}$.



EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$
$$2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -3$$
$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4$$
$$\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} = \{0, 0, 0\}$$

- Rearranjando as equações e colocando-se os subscritos, obtém-se

$$x_1^k = \frac{7 - 2\,x_2^{k-1} + x_3^{k-1}}{6}$$

$$x_2^k = \frac{3 + 2\,x_1^k + 2\,x_3^{k-1}}{7}$$

$$x_3^k = \frac{4 - x_1^k + 2\,x_2^k}{5}$$

k = 1

$$x_1^1 = \frac{7 - 2\,x_2^0 + x_3^0}{6} = \mathbf{1,1667}$$

$$x_2^1 = \frac{3 + 2\,x_1^1 + 2\,x_3^0}{7} = \frac{3 + 2 \cdot \mathbf{1,1667}}{7} = \mathbf{0,7619}$$

$$x_3^1 = \frac{4 - x_1^1 + 2\ \cdot x_{21}^1}{5} = \frac{4 - \mathbf{1,1667} + 2\ \cdot \mathbf{0,7619}}{5} = 0{,}8714$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$
$$2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -3$$
$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4$$

$$\{x_1^1, x_2^1, x_3^1\} = \{1{,}1667;\ 0{,}7619;\ 0{,}8714\}$$

- Para a segunda iteração, obtém-se

$$x_1^k = \frac{7 - 2\,x_2^{k-1} + x_3^{k-1}}{6}$$

$$x_2^k = \frac{3 + 2\,x_1^k + 2\,x_3^{k-1}}{7}$$

$$x_3^k = \frac{4 - x_1^k + 2\,x_2^k}{5}$$

k = 2

$$x_1^2 = \frac{7 - 2\,x_2^1 + x_3^1}{6} = \frac{7 - 2 \cdot 0{,}7619 + 0{,}8714}{6} = \mathbf{1{,}0579}$$

$$x_2^2 = \frac{3 + 2\,x_1^2 + 2\,x_3^1}{7} = \frac{3 + 2 \cdot \mathbf{1{,}0579} + 2 \cdot 0{,}8714}{7} = \mathbf{0{,}9798}$$

$$x_3^2 = \frac{4 - x_1^2 + 2\,x_2^2}{5} = \frac{4 - \mathbf{1{,}0579} + 2 \cdot \mathbf{0{,}9798}}{5} = 0{,}9803$$

$$6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$
$$2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -3$$
$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$\{x_1^2, x_2^2, x_3^2\} = \{1{,}0579; 0{,}9798; 0{,}9803\}$$

- Para a terceira iteração obtém-se, obtém-se

$$x_1^k = \frac{7 - 2\,x_2^{k-1} + x_3^{k-1}}{6}$$
$$x_2^k = \frac{3 + 2\,x_1^{k} + 2\,x_3^{k-1}}{7}$$
$$x_3^k = \frac{4 - x_1^{k} + 2\,x_2^{k}}{5}$$

k = 3

$$x_1^3 = \frac{7 - 2\,x_2^2 + x_3^2}{6} = \frac{7 - 2 \cdot 0{,}9798 + 0{,}9803}{6} = \mathbf{1{,}0034}$$
$$x_2^3 = \frac{3 + 2\,x_1^3 + 2\,x_3^2}{7} = \frac{3 + 2 \cdot \mathbf{1{,}0034} + 2 \cdot 0{,}9803}{7} = \mathbf{0{,}9953}$$
$$x_3^3 = \frac{4 - x_1^3 + 2\,x_2^3}{5} = \frac{4 - \mathbf{1{,}0034} + 2 \cdot \mathbf{0{,}9953}}{5} = 0{,}9974$$

- Os erros relativos percentuais aproximados para cada variável valem:

$$\varepsilon_{a,2} = \left|\frac{0{,}9953 - 0{,}9798}{0{,}9953}\right| \times 100 = 1{,}56\ \%$$
$$\varepsilon_{a,1} = \left|\frac{1{,}0034 - 1{,}0579}{1{,}0034}\right| \times 100 = 5{,}43\ \%$$
$$\varepsilon_{a,3} = \left|\frac{0{,}9974 - 0{,}9803}{0{,}9974}\right| \times 100 = 1{,}71\ \%$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

- A Tabela abaixo apresenta estas e as próximas estimativas da solução:

	Inicial	Primeira	Segunda	Terceira	Quarta	Quinta	Sexta
x_1	0	1,1667	1,0579	1,0034	1,0011	1,0001	1,0000
x_2	0	0,7619	0,9798	0,9953	0,9996	0,9999	1,0000
x_3	0	0,8714	0,9803	0,9974	0,9996	0,9999	1,0000

Método de Gauss-Seidel
Iteração de Jacobi

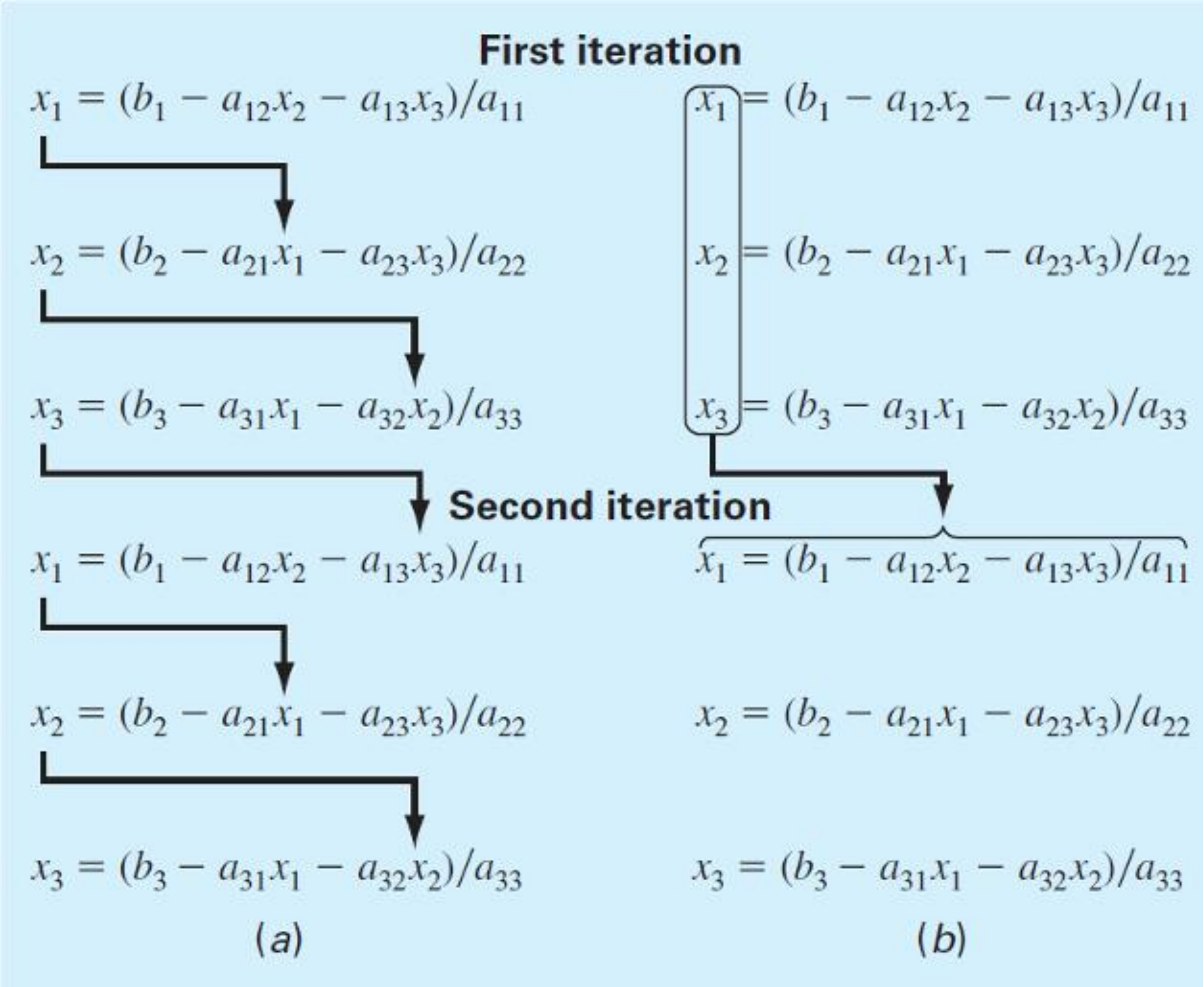
- À medida que cada novo valor é calculado, ele é imediatamente usado na próxima equação para se determinar outro valor de x. Dessa forma se a solução estiver convergindo, a melhor estimativa disponível será empregada.

- Uma abordagem alternativa, chamada iteração de Jacobi, não utiliza imediatamente os valores gerados, eles são guardados para a próxima iteração.

(a) Método de Gauss-Seidel

x

(b) Iteração de Jacobi



Método de Gauss-Seidel
Forma matricial

$$x_1^{novo} = \frac{b_1}{a_{11}} - 0 - \frac{a_{12}x_2^{velho}}{a_{11}} - \frac{a_{13}x_3^{velho}}{a_{11}}$$

$$x_2^{novo} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}x_1^{novo}}{a_{22}} - 0 - \frac{a_{23}x_3^{velho}}{a_{22}}$$

$$x_3^{novo} = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}x_1^{novo}}{a_{33}} - \frac{a_{32}x_2^{novo}}{a_{33}} - 0$$

ou

$$\{x\} = \{d\} - [C]\{x\}$$

$$x_1^k = \frac{7 - 2\,x_2^{k-1} + x_3^{k-1}}{6}$$

$$x_2^k = \frac{3 + 2\,x_1^k + 2\,x_3^{k-1}}{7}$$

$$x_3^k = \frac{4 - x_1^k + 2\,x_2^k}{5}$$

Método de Gauss-Seidel
Forma matricial

$$x_1^{novo} = \frac{b_1}{a_{11}} - 0 - \frac{a_{12}x_2^{velho}}{a_{11}} - \frac{a_{13}x_3^{velho}}{a_{11}}$$

$$x_2^{novo} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}x_1^{novo}}{a_{22}} - 0 - \frac{a_{23}x_3^{velho}}{a_{22}}$$

$$x_3^{novo} = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}x_1^{novo}}{a_{33}} - \frac{a_{32}x_2^{novo}}{a_{33}} - 0$$

ou

$$\{x\} = \{d\} - [C]\{x\}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{Bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{11} & a_{32}/a_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Seidel
Fórmula de recorrência

$$\{x\} = \{d\} - [C]\{x\} \quad \Rightarrow \quad x_i^{novo} = d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}\, x_j^{novo} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}\, x_j^{velho}$$

$$x_1^{novo} = \frac{\boldsymbol{b_1}}{\boldsymbol{a_{11}}} - \quad 0 \quad - \frac{a_{12}\boldsymbol{x_2^{velho}}}{a_{11}} - \frac{a_{13}\boldsymbol{x_3^{velho}}}{a_{11}}$$

$$x_2^{novo} = \frac{\boldsymbol{b_2}}{\boldsymbol{a_{22}}} - \frac{\boldsymbol{a_{21}x_1^{novo}}}{a_{22}} - \quad 0 \quad - \frac{a_{23}x_3^{velho}}{a_{22}}$$

$$x_3^{novo} = \frac{\boldsymbol{b_3}}{\boldsymbol{a_{33}}} - \frac{a_{31}\boldsymbol{x_1^{novo}}}{a_{33}} - \frac{a_{32}\boldsymbol{x_2^{novo}}}{a_{33}} - \quad 0$$

Método de Gauss-Seidel
Convergência

- Pode-se mostrar que se a condição abaixo for satisfeita para cada i, o Método de Gauss-Seidel irá convergir:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

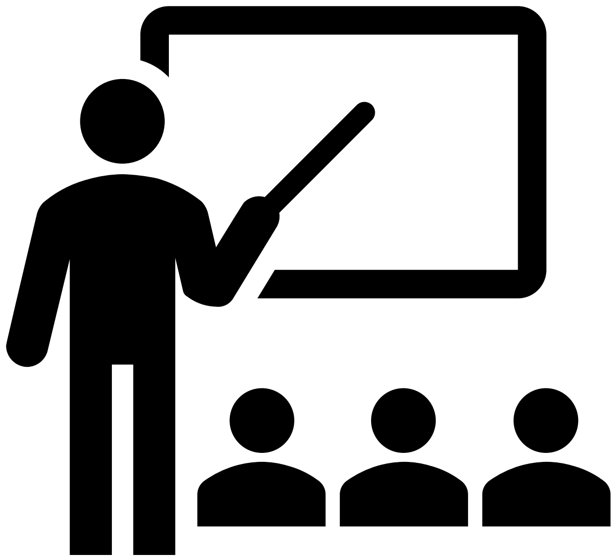
- Isto é, se o valor absoluto do coeficiente da diagonal em cada uma das equações for maior que a soma do valor absoluto dos outros coeficientes da equação, a convergência está garantida.
- Muitos problemas práticos da engenharia são sistemas que obedecem tal condição, ou seja, são sistemas de diagonal dominante.

EXEMPLO 2

Troque a primeira linha pela segunda linha do sistema de diagonal dominante e realize três iterações, usando a aproximação inicial $\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} = \{0, 0, 0\}$ e o Método de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Lembre que a solução do sistema é $\{x_1, x_2, x_3\} = \{1, 1, 1\}$.



EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -3$$
$$6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$
$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4$$
$$\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} = \{0, 0, 0\}$$

- Rearranjando as equações e colocando-se os subscritos, obtém-se

$$x_1^k = \frac{-3 + 7\,x_2^k - 2\,x_3^{k-1}}{2}$$
$$x_2^k = \frac{7 - 6\,x_1^{k-1} + x_3^{k-1}}{2}$$
$$x_3^k = \frac{4 - x_1^k + 2\,x_2^k}{5}$$

k = 1

$$x_1^1 = \frac{-3 + 7\,x_2^0 - 2\,x_3^0}{2} = -1{,}5$$
$$x_2^1 = \frac{7 - 6\,x_1^1 + x_3^0}{2} = \frac{7 + 6\ \cdot 1{,}5}{2} = 8$$
$$x_3^1 = \frac{4 - x_1^1 + 2\,x_2^1}{5} = \frac{4 + 1{,}5 + 2\ \cdot 8}{5} = 4{,}3$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -3$$
$$6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$
$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4$$

$$\{x_1^1, x_2^1, x_3^1\} = \{-1{,}5; 8; 4{,}3\}$$

- Para a segunda iteração, obtém-se

$$x_1^k = \frac{7 - 2\,x_2^{k-1} + x_3^{k-1}}{6}$$

$$x_2^k = \frac{3 + 2\,x_1^{k} + 2\,x_3^{k-1}}{7}$$

$$x_3^k = \frac{4 - x_1^{k} + 2\,x_2^{k}}{5}$$

k = 2

$$x_1^1 = \frac{-3 + 7\,x_2^1 - 2\,x_3^1}{2} = \frac{-3 + 7 \cdot\ 8 - 2\ \cdot\ 4{,}3}{2} = 22{,}2$$

$$x_2^1 = \frac{7 - 6\,x_1^2 + x_3^1}{2} = \frac{7 - 6\ \cdot 22{,}2 + 4{,}3}{2} = -60{,}95$$

$$x_3^1 = \frac{4 - x_1^2 + 2\,x_2^2}{5} = \frac{4 - 22{,}2 - 2\ \cdot 60{,}95}{5} = -28{,}02$$

A solução está claramente divergindo.

Método de Gauss-Seidel
Convergência

- Salienta-se, porém, que a dominância da diagonal não é uma condição necessária para o Método de Gauss-Seidel convergir.
- Quando ambos os métodos convergem, o método de Gauss - Seidel converge mais rápido.
- Pode-se, entretanto, preferir o método de Jacobi se o programa estiver sendo executado em processadores paralelos porque todas as n equações podem ser resolvidas simultaneamente em cada iteração

Método de Gauss-Seidel
Convergência

- Salienta-se, porém, que a dominância da diagonal não é uma condição necessária para o Método de Gauss-Seidel convergir.
- Quando ambos os métodos convergem, o método de Gauss - Seidel converge mais rapidamente.
- Pode-se, entretanto, preferir o método de Jacobi se o programa estiver sendo executado em processadores paralelos porque todas as n equações podem ser resolvidas simultaneamente em cada iteração

Método de Gauss-Seidel
Relaxamento

- A convergência do método de Gauss-Seidel pode ser acelerada empregando-se uma técnica chama de relaxamento.

- Nela, cada valor de x calculado é modificado por uma média ponderada dos resultados da iteração atual e anterior, ou seja:

$$x_i^{novo} = \lambda x_i^{novo} + (1 - \lambda) x_i^{velho}$$

onde λ é um fator de ponderação, escolhido entre 0 e 2.

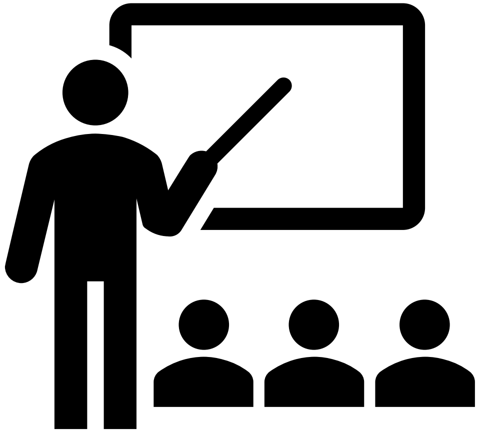
Método de Gauss-Seidel
Relaxamento – Escolha de λ

- Se $0 < \lambda < 1$, tem-se o sub-relaxamento, em geral usado para que sistemas não convergentes convirjam, ou para apressar a convergência, amortecendo as oscilações.

- Se $1 < \lambda < 2$, tem-se o sobre relaxamento, usado para acelerar a convergência de um sistema que converge a uma taxa muito lenta. Essa abordagem é conhecida como sobre relaxamento sucessivo (SOR).

- **A técnica de relaxamento é, geralmente, desnecessária para uma única solução de um conjunto de equações. Porém, torna-se útil quando o mesmo sistema precisa ser resolvido repetidamente.**

.



EXEMPLO 3

Aplicando o método de Gauss-Seidel para resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

Cujo a solução exata é $\{x_1 \ , x_2 \ \} = \{-20, -14\}$ usando como aproximação inicial $\{x_1^0, x_2^0\} = \{0, 0\}$ e como critério de parada $\varepsilon_s \leq 0.1\ \%$, obteve-se a seguinte tabela com as estimativas consecutivas da solução:

	Inicial	Primeira	Segunda	Terceira	Quarta	Quinta	...	Décima sexta
x_1	0	-6	-10,667	-13,778	-15,852	-17,234		-19,968
x_2	0	-4,6667	-7,778	-9,8518	-11.234	-12,156		-13,979

Resolver o sistema escolhendo um fator de ponderação λ = 1,3 para acelerar a convergência.

EXEMPLO 3 - SOLUÇÃO

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\{x_1^0, x_2^0\} = \{0, 0\}$$

$$\{x_1\ , x_2\ \} = \{-20, -14\}$$

- Cada x será modificado por uma média ponderada

$$\boldsymbol{x^{novo} = 1,3\ x^{novo} - 0,3\ x^{velho}}$$

- Rearranjando as equações e colocando-se os subscritos, obtém-se:

$$x_1^k = -6 + \ x_2^{k-1} \xrightarrow{\mathbf{k = 1}} x_1^1 = -6 + \ x_2^0 = -6$$

PONDERANDO

$$x_1^1 = 1{,}3\ x_1^1 - 0{,}3\ x_1^0 = 1{,}3 \cdot (-6) = -7{,}8$$

$$x_2^k = \frac{-2 + 2\ x_1^k}{3} \xrightarrow{\mathbf{k = 1}} x_2^1 = \frac{-2 + 2\ x_1^1}{3} = \frac{-2 + 2 \cdot (-7{,}8)}{3} = -5{,}8667$$

PONDERANDO

$$x_2^1 = 1{,}3\ x_2^1 - 0{,}3\ x_2^0 = 1{,}3 \cdot (-5{,}867) = -7{,}6267$$

x_1	**-6**
x_2	-4,6667

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\{x_1^0, x_2^0\} = \{0, 0\}$$

$$\{x_1\ , x_2\ \} = \{-20, -14\}$$

EXEMPLO 3 - SOLUÇÃO

- Em apenas mais seis estimativas a solução é obtida com a precisão desejada, nove a menos que estimativas necessárias sem a aplicação do fator de ponderação. A tabela abaixo apresenta os valores obtidos pelas estimativas consecutivas.:

	Inicial	Primeira	Segunda	Terceira	Quarta	Quinta	...	Sétima
x_1	0	-7,8	-15,374	-18,662	-19,712	-19,968		-20,008
x_2	0	-7,6267	-11,903	-13,469	-13,909	-14,000		-14,004

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL
Fórmula de recorrência com relaxamento

$$x_i^{novo} = d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}\, x_j^{novo} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}\, x_j^{velho}$$

$$\boldsymbol{x^{novo} = \lambda\, x^{novo} + (1-\lambda)\, x^{velho}}$$

$$x_i^{novo} = \lambda\left(d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}\, x_j^{novo} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}\, x_j^{velho}\right) + (1-\lambda) x_i^{velho}$$

Uma multiplicação a menos

$$x_i^{novo} = \lambda\left(d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}\, x_j^{novo} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}\, x_j^{velho} - x_i^{velho}\right) + x_i^{velho}$$

Função Scilab

Método Iterativo de Gauss-Seidel

Função Scilab

```
function [x, iter]=gauss_seidel(A, b, lam, es, maxi)
// onde x vetor solução
//      A é a matriz de coeficientes
//      b é o vetor de entrada
//      lam é o fator de relaxamento lambda, por default = 1
//      es é o critério de parada, por default = 0.0001%
//      maxi é o numero máximo de iterações, default = 50
//
   if argn(2) < 3 then
     lam = 1;
   end
   if argn(2) < 4 then
     es = 0.0001;
   end
   if argn(2) < 5 then
     maxi = 50;
   end
```

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{Bmatrix}$$

Função Scilab

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{11} & a_{32}/a_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

```
[m,n] = size(A);
  if  m~=n then
    error('A deve ser uma matriz quadrada');
  end
  m = length(b);
  if  m~=n then
    error('Vetor b com número incorreto de linhas.');
  end
  //C = A; d = b;
  // Obtém C, d e condições iniciais em zero
  for i = 1:n
    x(i) = 0;
    b(i) = b(i)/A(i,i);
    A(i,1:n)= A(i,1:n)/A(i,i);
    A(i,i)=0;
  end
```

$$x_i^{novo} = \lambda\left(d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}\, x_j^{novo} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}\, x_j^{velho} - x_i^{velho}\right) + x_i^{velho}$$

Função Scilab

```
// obtenção da solução
   iter = 0;
   while(1)
      for i=1:n
         x_old = x(i)
         x(i)=lam*(b(i)- A(i,:)*x - x_old) + x_old;
         if x(i)~=0 then
            ea(i)= abs((x(i)-x_old)/x(i))*100;
         end
      end
      iter = iter + 1;
      disp(x);
      disp(ea)
      if max(ea)<=es | iter >= maxi  then
         break;
      end
   end
   if iter == maxi then
      x = 'Processo não convergiu';
   end
endfunction
```

Bibliografia e crédito das figuras

CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.

CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.

- Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= -4 \\ 7x_1 - 1x_2 &= 6 \end{aligned}$$

usando a aproximação inicial $(x_1,x_2) = (0,0)$.

- Realize 3 iterações, sabendo que a solução é $(x_1,x_2) = (1,1)$.
- Realize as mesmas três iterações trocando as linhas do sistema.
- Explique os resultados.

Exercício 1

- Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema

$$
\begin{aligned}
-0{,}5\,x_1 \;-x_2 &= -4 \\
2\,x_1 \;-3\,x_2 &= 6
\end{aligned}
$$

usando a aproximação inicial $(x_1,x_2) = (0,0)$.

- Realize 3 iterações, sabendo que a solução é $(x_1,x_2) = (5{,}1428571;\ 1{,}4285714)$.
- Realize as mesmas três iterações usando um fator de ponderação de 0,8
- Explique os resultados.

Exercício 2

- (a) Utilize a sua função Scilab:

```
function [x, iter] = gauss_seidel(A,b,lam,es,maxi)
```

para resolver o sistema com ε_s = 0,00001%

$$
\begin{aligned}
0{,}8\,x_1 - 0{,}4\,x_2 \phantom{{}-0{,}4\,x_3} &= 41 \\
-0{,}4\,x_1 + 0{,}8\,x_2 - 0{,}4\,x_3 &= 25 \\
-0{,}4\,x_2 + 0{,}8\,x_3 &= 105
\end{aligned}
$$

- (b) Repita (a), mas use sobre relaxamento com λ = 1,2. Compare o número de iterações necessárias para cada solução.

Exercício 3

- (a) Utilize a sua função Scilab:

```
function [x, iter] = gauss_seidel(A,b,lam,es,maxi)
```

para resolver o sistema com ε_s = 0,00001%

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 7 \\
4x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= -20 \\
4x_1 - 4x_2 + 10x_3 &= 70
\end{aligned}
$$

- (b) Repita (a), mas use sobre relaxamento com λ = 0,93. Compare o número de iterações necessárias para cada solução.

Exercício 4

- Modifique a função Scilab Gauss-Seidel para imprimir o gráfico da variável x_1 em função dos número de iterações.
- Utilize esta função nos exercícios 3 e 4 para compreender porque em um caso se usa sub-relaxamento e em outro sobre relaxamento.
- Apresente os gráficos (usando o fator λ e sem utilizá-lo, ou seja, com λ=1) de cada exercício e comente o resultado.

Exercício 5