Computação Científica

SEMANA 2

ERROS EM REPRESENTAÇÕES NUMÉRICAS E

ARITMÉTICA EM PONTO FLUTUANTE

PARTE II (COMPLEMENTO)

SÉRIES DE TAYLOR:

MAIS SOBRE DERIVAÇÃO NUMÉRICA

Computação Científica

prof. Marco Villaça

Séries de Taylor

Aproximação por diferenças finitas de derivadas superiores

- Terceira diferença dividida finita progressiva

$$f^{(3)}(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3} + O(h)$$

- Terceira diferença dividida finita regressiva

$$f^{(3)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3} + O(h)$$

- Terceira diferença dividida finita centrada

$$f^{(3)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3} + O(h^2)$$

Séries de Taylor

Aproximação por diferenças finitas de derivadas superiores

- Quarta diferença dividida finita progressiva

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4} + O(h)$$

- Quarta diferença dividida finita regressiva

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4} + O(h)$$

- Quarta diferença dividida finita centrada

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4} + O(h^2)$$

Séries de Taylor

Fórmulas de derivação de alta precisão

- Fórmulas de diferenças divididas de alta acurácia podem ser geradas incluindo termos adicionais na expansão em série de Taylor.
- Como foi visto, a expansão em série de Taylor progressiva pode ser escrita como:

$$f(x_{\mathrm{i}+1}) = f(x_{\mathrm{i}}) + f'(x_{\mathrm{i}})h + \frac{f''(x_{\mathrm{i}})}{2!}h^2 + \cdots$$

- Isolando a primeira derivada:

$$f'(x_{\mathrm{i}}) = \frac{f(x_{\mathrm{i}+1}) - f(x_{\mathrm{i}})}{h} - \frac{f''(x_{\mathrm{i}})}{2}h + O(h^2)$$

Séries de Taylor

Fórmulas de derivação de alta precisão

$$\boldsymbol{f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2)}$$

- Anteriormente, truncou-se o resultado acima excluindo os termos da segunda derivada e de ordem superior, o que resultou em:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

- Para obter maior precisão, substituir-se-á o termo da segunda derivada pela sua aproximação progressiva:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

- Obtendo-se:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

Séries de Taylor

$$f'(x_i) = \frac{\mathrm{f}(x_{i+1}) - \mathrm{f}(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2)$$

Fórmulas de derivação de alta precisão

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

- Finalmente, agrupando os termos:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

- Note que a inclusão do termo da segunda derivada melhorou a precisão para $O(h^2)$. Versões de maior precisão podem ser desenvolvidas para as fórmulas regressivas e centrada, bem como aproximações para as derivadas de ordem superior, conforme será resumido a seguir.

Séries de Taylor
Fórmulas de derivação de alta precisão

- Fórmulas de diferença dividida finita progressiva:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2} + O(h^2)$$

$$f^{(3)}(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3} + O(h^2)$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4} + O(h^2)$$

Séries de Taylor
Fórmulas de derivação de alta precisão

- Fórmulas de diferença dividida finita regressiva:

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} + O(h^2)$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2} + O(h^2)$$

$$f^{(3)}(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3} + O(h^2)$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4} + O(h^2)$$

Séries de Taylor
Fórmulas de derivação de alta precisão

- Fórmulas de diferença dividida finita centrada:

$$f'(x_{\mathrm{i}}) = \frac{-f(x_{\mathrm{i}+2}) + 8f(x_{\mathrm{i}+1}) - 8f(x_{\mathrm{i}-1}) + f(x_{\mathrm{i}-2})}{12h} + O(h^4)$$

$$f''(x_{\mathrm{i}}) = \frac{-f(x_{\mathrm{i}+2}) + 16f(x_{\mathrm{i}+1}) - 30f(x_{\mathrm{i}}) + 16f(x_{\mathrm{i}-1}) - f(x_{\mathrm{i}-2})}{12h^2} + O(h^4)$$

$$f^{(3)}(x_{\mathrm{i}}) = \frac{-f(x_{\mathrm{i}+3}) + 8f(x_{\mathrm{i}+2}) - 13f(x_{\mathrm{i}+1}) + 13f(x_{\mathrm{i}-1}) - 8f(x_{\mathrm{i}-2}) + f(x_{\mathrm{i}-3})}{8h^3} + O(h^4)$$

$$f^{(4)}(x_{\mathrm{i}}) = \frac{-f(x_{\mathrm{i}+3}) + 12f(x_{\mathrm{i}+2}) + 39f(x_{\mathrm{i}+1}) + 56f(x_{\mathrm{i}}) - 39f(x_{\mathrm{i}-1}) + 12f(x_{\mathrm{i}-2}) + f(x_{\mathrm{i}-3})}{6h^4} + O(h^4)$$

EXEMPLO 5

No Exemplo 3, utilizou-se as aproximações por diferenças progressiva e regressiva de O(h) e uma aproximação por diferença centrada de O(h^2) para estimar a derivada primeira de

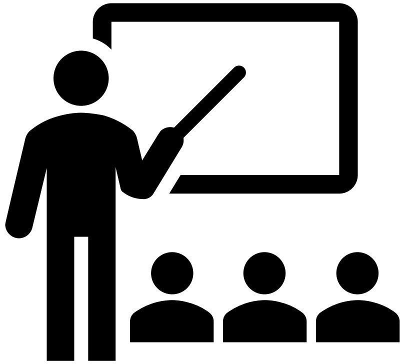
$$f(x) = 25x^3 – 6x^2 + 7x - 88$$

em x = 2 usando o passo de cálculo de 0,5 e 0,25.

Os resultados obtidos para h = 0,25 foram:

	Diferença progressiva $O(h)$	Diferença regressiva $O(h)$	Diferença centrada $O(\boldsymbol{h^2})$
Estimativa	320,5625	248,5625	284,5625
$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)	13,27	12,17	0,55

Sendo os erros obtidos com base no valor verdadeiro de 283.



Repita esses cálculos, mas use as fórmulas de alta precisão da página 8, 9 e 10 deste documento.

EXEMPLO 5

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

- Solução: $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x \; - 88$

$$f'(x) = 75x^2 - 12x + 7 \rightarrow f'\,(2) = 75 \cdot 2^2 - \; 12 \cdot 2 + 7 = 283$$

- Diferença progressiva

$$f(2{,}5) = 25 \cdot 2{,}5^3 - 6 \cdot 2{,}5^2 + 7 \cdot 2{,}5 \; - 88 = 283{,}625$$

$$f(2{,}25) = 25 \cdot 2{,}25^3 - 6 \cdot 2{,}25^2 + 7 \cdot 2{,}25 - 88 = 182{,}141$$

$$f(2) = 25 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 = 102$$

$$f'(2) = \frac{-283{,}625 + 4 \cdot 182{,}141 - 3 \cdot 102}{2 \cdot 0{,}25} = 277{,}878$$

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{283 - 277{,}878}{283}\right| \times 100 = 1{,}81\%$$

EXEMPLO 5

$$f'(x_\mathrm{i}) = \frac{3f(x_\mathrm{i}) - 4f(x_{\mathrm{i}-1}) + f(x_{\mathrm{i}-2})}{2h} + O(h^2)$$

- Diferença regressiva

$$f(1{,}5) = 25 \cdot 1{,}5^3 - 6 \cdot 1{,}5^2 + 7 \cdot 1{,}5 \ - 88 = -6{,}625$$

$$f(1{,}75) = 25 \cdot 1{,}75^3 - 6 \cdot 1{,}75^2 + 7 \cdot 1{,}75 - 88 = 39{,}8594$$

$$f(2) = 25 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 = 102$$

$$f'(2) = \frac{3 \cdot 102 - 4 \cdot 39{,}8694 - 6{,}625}{2 \cdot 0{,}25} = 279{,}795$$

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{283 - 279{,}795}{283}\right| \times 100 = 1{,}13\%$$

EXEMPLO 5

$$f'(x_{\mathrm{i}}) = \frac{-f(x_{\mathrm{i}+2}) + 8f(x_{\mathrm{i}+1}) - 8f(x_{\mathrm{i}-1}) + f(x_{\mathrm{i}-2})}{12h} + O(h^4)$$

- Diferença centrada

$$f(2{,}5) = 25 \cdot 2{,}5^3 - 6 \cdot 2{,}5^2 + 7 \cdot 2{,}5 - 88 = 283{,}625$$

$$f(2{,}25) = 25 \cdot 2{,}25^3 - 6 \cdot 2{,}25^2 + 7 \cdot 2{,}25 - 88 = 182{,}141$$

$$f(1{,}75) = 25 \cdot 1{,}75^3 - 6 \cdot 1{,}75^2 + 7 \cdot 1{,}75 - 88 = 39{,}8594$$

$$f(1{,}5) = 25 \cdot 1{,}5^3 - 6 \cdot 1{,}5^2 + 7 \cdot 1{,}5 - 88 = -6{,}625$$

$$f'(x_{\mathrm{i}}) = \frac{-283{,}625 + 8 \cdot 182{,}141 - 8 \cdot 39{,}8594 - 6{,}625}{12 \cdot 0{,}25} = 282{,}79$$

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{283 - 282{,}79}{283}\right| \times 100 = 0{,}074\%$$

- Como já era esperado os erros encontrados foram mais precisos que os obtidos no Exemplo 3. Lembre que as fórmulas baseadas na série de Taylor são equivalentes a passar polinômios pelos pontos dados, quanto mais pontos, maior a precisão

Bibliografia e crédito das figuras

CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.

CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.