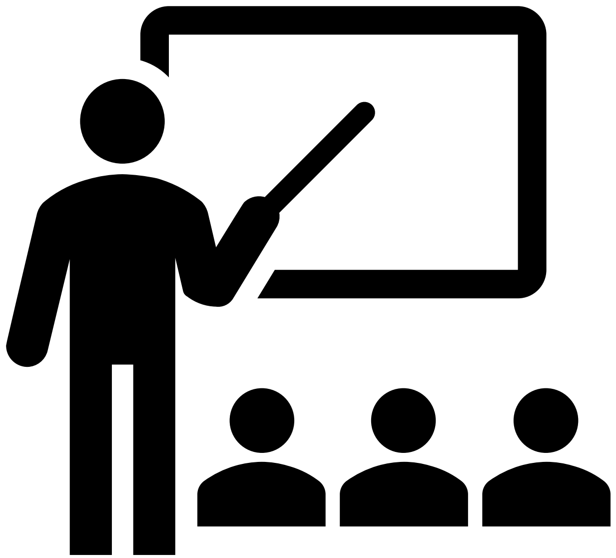
Computação Científica

REVISÃO FATORAÇÃO LU

EXEMPLO 1

Use a Fatoração LU para resolver o sistema

$$\begin{cases} 2\,x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 0{,}5\,x_3 = 1 \\ 0{,}5\,x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$



EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$\begin{cases} 2\,x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 0{,}5\,x_3 = 1 \\ 0{,}5\,x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

- Inicia-se, fazendo U = A

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- Após, multiplica-se a primeira linha de A por $l_{21} = 1/2$ e subtrai-se o resultado da segunda linha, obtendo-se:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- Na sequência, multiplica-se a primeira linha de A por $l_{31} = 0{,}5/2$ e subtrai-se o resultado da terceira linha, obtendo-se

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1{,}75 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1,75 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,25 & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- Para completar a eliminação progressiva, multiplica-se a nova segunda linha por $l_{32} = 0,5$ e subtraindo o resultado da terceira linha, chega-se a:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,75 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

- Resolver: [L] {d} = {b}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ com } d_i = b_i \ - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, d_j \text{ e i} = 1, 2, \ldots, \text{n}$$

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = 1 - 0{,}5 \cdot d_1 = 0{,}5$$

$$d_3 = 1 - 0{,}25 \cdot d_1 - 0{,}5 \cdot d_2 = 0{,}5$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

- Conhecido o vetor {d} define-se o seguinte sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{Bmatrix} \text{ com } x_n = \frac{d_n}{u_{nn}} \text{ e } x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}$$

para $i = n-1, n-2, \dots, 1$

$$x_3 = \frac{0,5}{1,75} = 0,285714$$

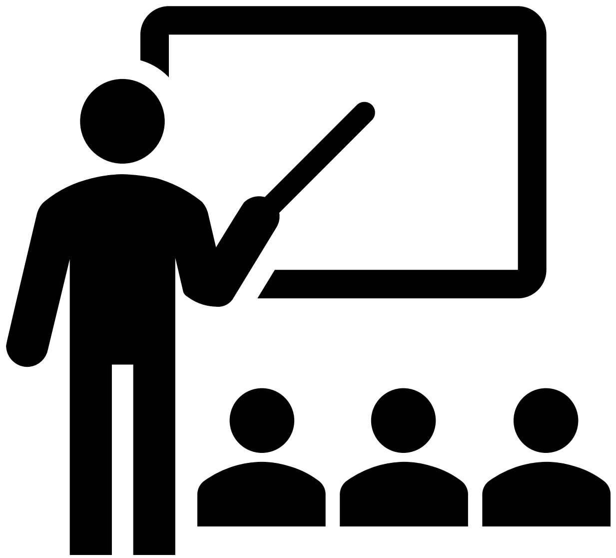
$$x_2 = 0,5$$

$$x_1 = \frac{1-(2 \cdot 0,5+0,285714)}{2} = -0,142857$$

EXEMPLO 2

Use a Fatoração LU com pivotamento para resolver o sistema

$$\begin{cases} 0{,}5\,x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0{,}5 \\ x_1 + 2x_2 + 0{,}5x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0{,}5 \end{cases}$$



EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$\begin{cases} 0{,}5\,x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0{,}5 \\ x_1 + 2x_2 + 0{,}5x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0{,}5 \end{cases}$$

- Inicia-se, fazendo U = A

$$U = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0{,}5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$U = \begin{bmatrix} 0,5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0,5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- O processo de eliminação progressiva começa trocando-se a primeira linha pela terceira linha nas matrizes U e P de permutação :

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0,5 \\ 0,5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Após, multiplica-se a primeira linha de A por $l_{21} = 1/2$ e subtrai-se o resultado da segunda linha, obtendo-se

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Na sequência, multiplica-se a primeira linha de A por $l_{31} = 0{,}5/2$ e subtrai-se o resultado da terceira linha, obtendo-se

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 3{,}75 & 1{,}75 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 3{,}75 & 1{,}75 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para utilizar como pivô o elemento de maior valor absoluto, troca-se a segunda linha pela terceira linha nas matrizes U, P e L, sendo que na matriz L apenas os fatores multiplicadores.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3{,}75 & 1{,}75 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3{,}75 & 1{,}75 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Após, multiplica-se a nova segunda linha por $l_{32} = 1{,}5/3{,}75$ e subtraindo o resultado da terceira linha, chega-se a

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3{,}75 & 1{,}75 \\ 0 & 0 & -0{,}7 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

- Resolver: [L] {d} =[P] {b}

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,25 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{com } d_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_j$$

$$d_1 = 0,5$$

$$d_2 = 0,5 - 0,25 \cdot d_1 = 0,375$$

$$d_3 = -1 - (0,5 \cdot d_1 + 0,4 \cdot d_2) = -1,4$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

- Conhecido o vetor {d} define-se o seguinte sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3{,}75 & 1{,}75 \\ 0 & 0 & -0{,}7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}375 \\ -1{,}4 \end{Bmatrix} \text{com } x_n = \frac{d_n}{u_{nn}} \text{ e } x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}$$

para $i = n-1, n-2, \dots, 1$

$$x_3 = \frac{-1{,}4}{-0{,}7} = 2$$

$$x_2 = \frac{0{,}375 - 1{,}75 \cdot 2}{3{,}75} = -0{,}833333$$

$$x_1 = \frac{0{,}5 + 0{,}833333 - 2}{2} = -0{,}333333$$

Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de 4800, 5800 e 5700 m^3 de areia, cascalho fino e cascalho grosso, respectivamente, para um projeto de construção. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição dessas minas é:

Componente	Areia %	Cascalho fino %	Cascalho grosso %
Mina 1	52	30	18
Mina 2	20	50	30
Mina 3	25	20	55

Utilizando a **Fatoração LU com pivotamento**, responda quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para atender as necessidades do engenheiro?

Exercício

Função Scilab

FATORAÇÃO LU

Função Scilab

```
function x=fatoralu(A, b)
   // Fatoração LU
   // function x = fatorlu(A, b)
   // onde x vetor solução
   //     A é a matriz de coeficientes
   //     b é o vetor de termos constantes
   //
   [m,n] = size(A);
   if  m~=n then
      error('A deve ser uma matriz quadrada');
   end
   P = eye(n,n);
```

Função Scilab

```
for k = i+1:nb
  A(j,k)= A(j,k)-A(j,i)*A(i,k);
end
```

```
// eliminação progressiva
for i = 1:n-1
    [maior, k]= max(abs(A(i:n,i)));
    l = i + k - 1;
    if l~=i then
        A([l,i],:)=A([i,l],:);
        P([l,i],:)=P([i,l],:);
    end
    for j = i+1:n
        A(j,i) = A(j,i)/A(i,i)
        A(j,i+1:n)= A(j,i+1:n)-A(j,i)*A(i,i+1:n);
    end
end
```

Função Scilab

```
// substituição progressiva
  b = P*b;
  d = zeros(n,1);
  d(1)=b(1);
  for i = 2:n
    for j = 1:i-1
      d(i)= d(i) + A(i,j)*d(j);
    end
    //d(i)= b(i)-(A(i,1:(i-1))*d(1:(i-1)));
    d(i) = b(i) - d(i);
  end
```

$$d_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_j \qquad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Função Scilab

```
// substituição regressiva
  x = zeros(n,1);
  x(n)= d(n)/A(n,n);
  for i=n-1:-1:1
     x(i)=(d(i)-A(i,(i+1):n)*x((i+1):n))/A(i,i);
  end
endfunction
```

$$x_n = \frac{d_n}{u_{nn}} \quad x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}$$ para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

Bibliografia e crédito das figuras

CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.

CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.