Computação Científica

SEMANA 14

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

REGRADO TRAPÉZIO,
REGRA DE SIMPSON,
ESTUDO SOBRE ERROS E
INTEGRAÇÃO DUPLA

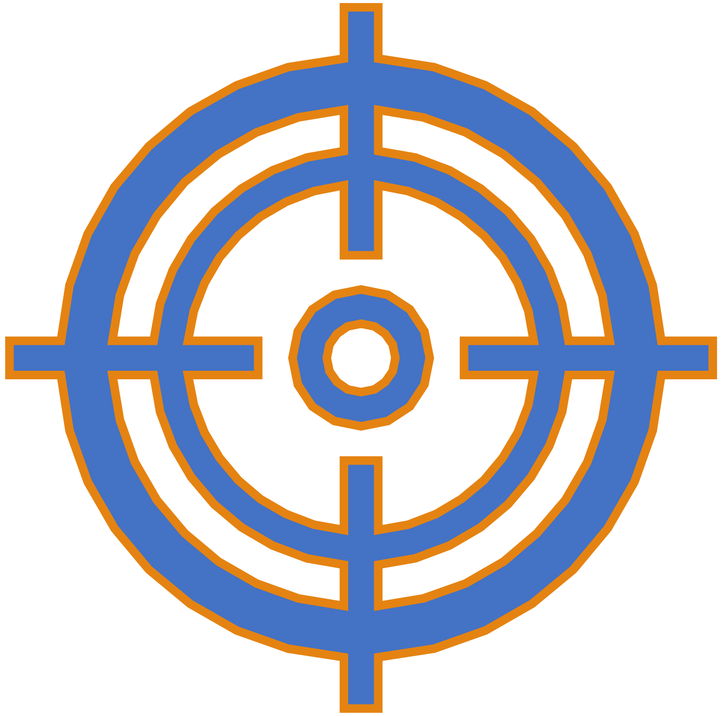
Computação Científica

prof. Marco Villaça

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Objetivos:

- Introduzir os conceitos de integração numérica.
- Saber como implementar as fórmulas de Newton-Cotes.
- Resolver problemas de engenharia utilizando a integração numérica.



FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

- São os esquemas mais comuns de integração numérica;
- A estratégia utilizada é substituir uma função complicada por um polinômio de fácil integração:

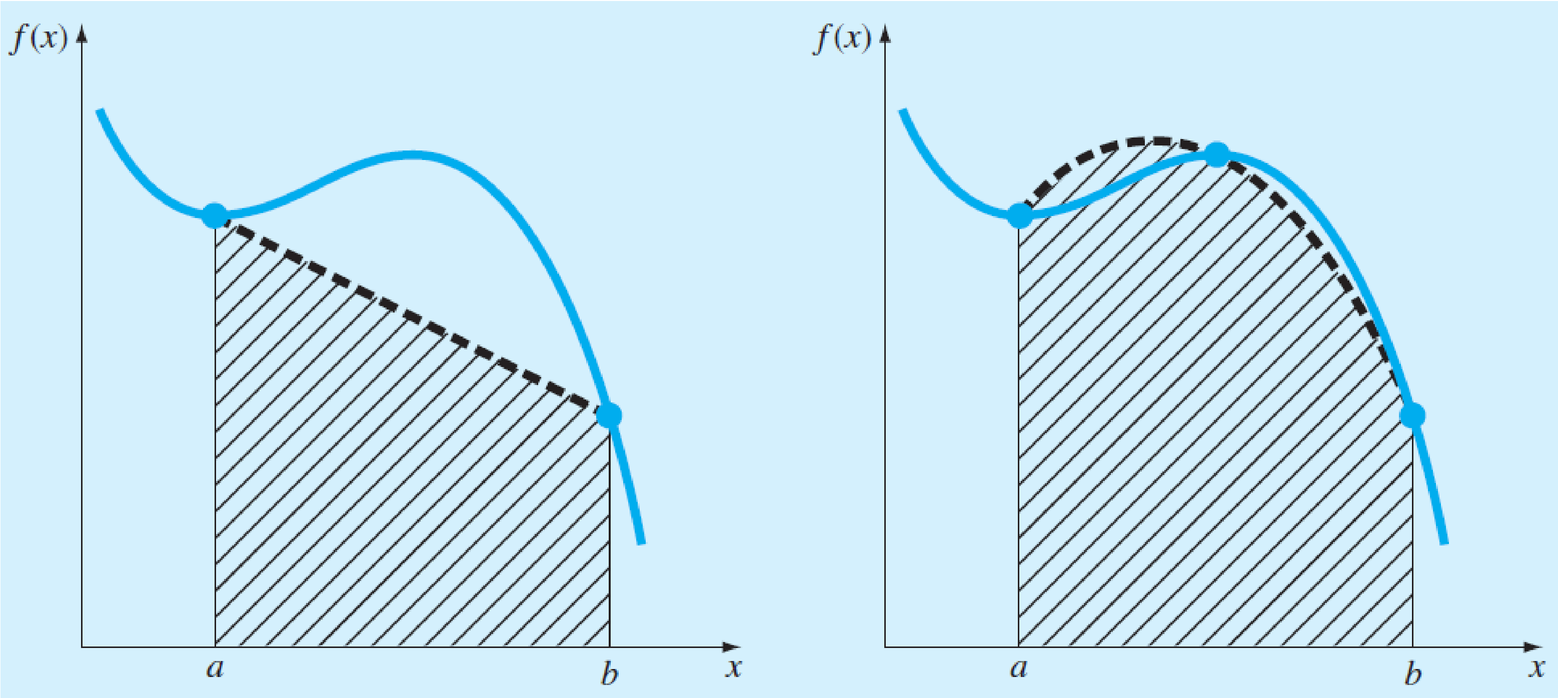
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_n(x)dx \qquad \text{(i)}$$

onde $f_n\,(x)$ é um polinômio da forma

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \qquad \text{(ii)}$$

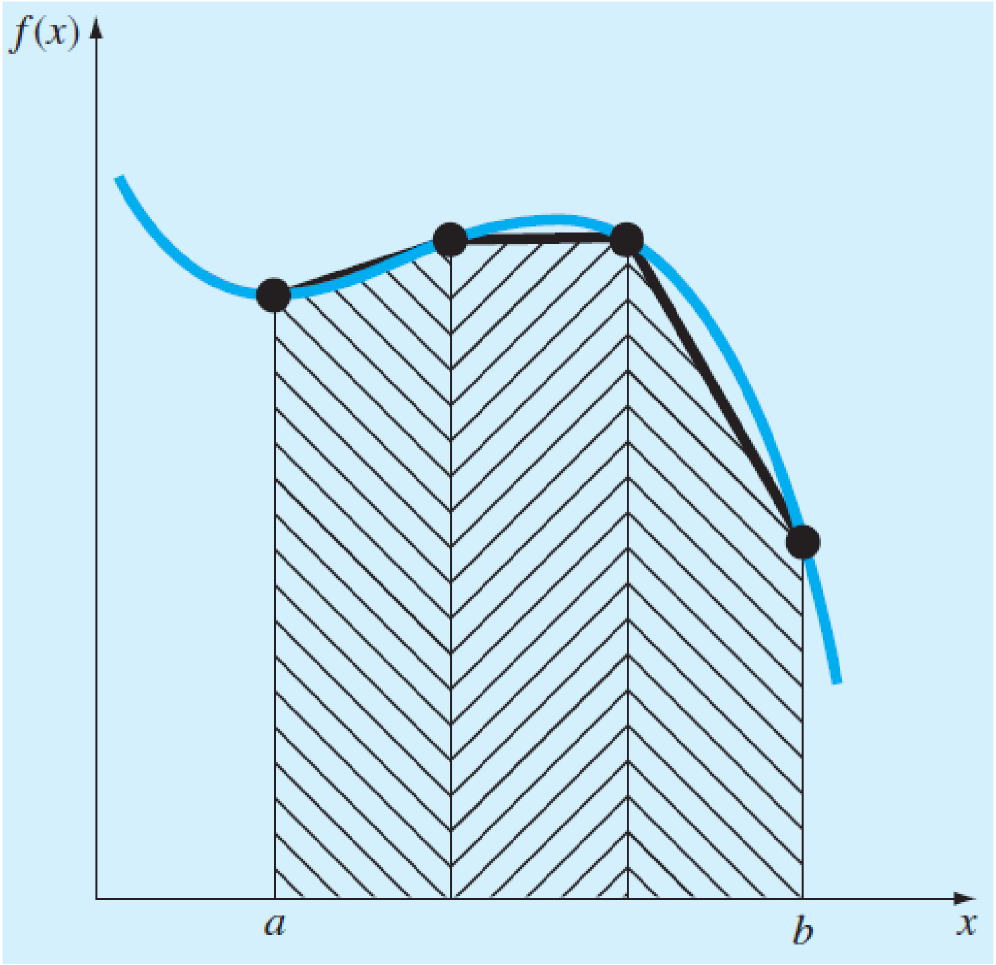
FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

- A figura à esquerda, mostra um polinômio de primeiro grau (reta) sendo usado como uma aproximação. Já a figura da direita, uma parábola é usada com o mesmo propósito.



FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

- A integral também pode ser aproximada utilizando uma série de polinômios aplicados por partes à função ou aos dados em segmentos de comprimento constante como, por exemplo na figura ao lado.



A REGRA DO TRAPÉZIO

- Fórmula de Newton-Cotes que corresponde ao caso no qual o polinômio na equação (i) é de primeiro grau:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] dx \qquad \text{(iii)}$$

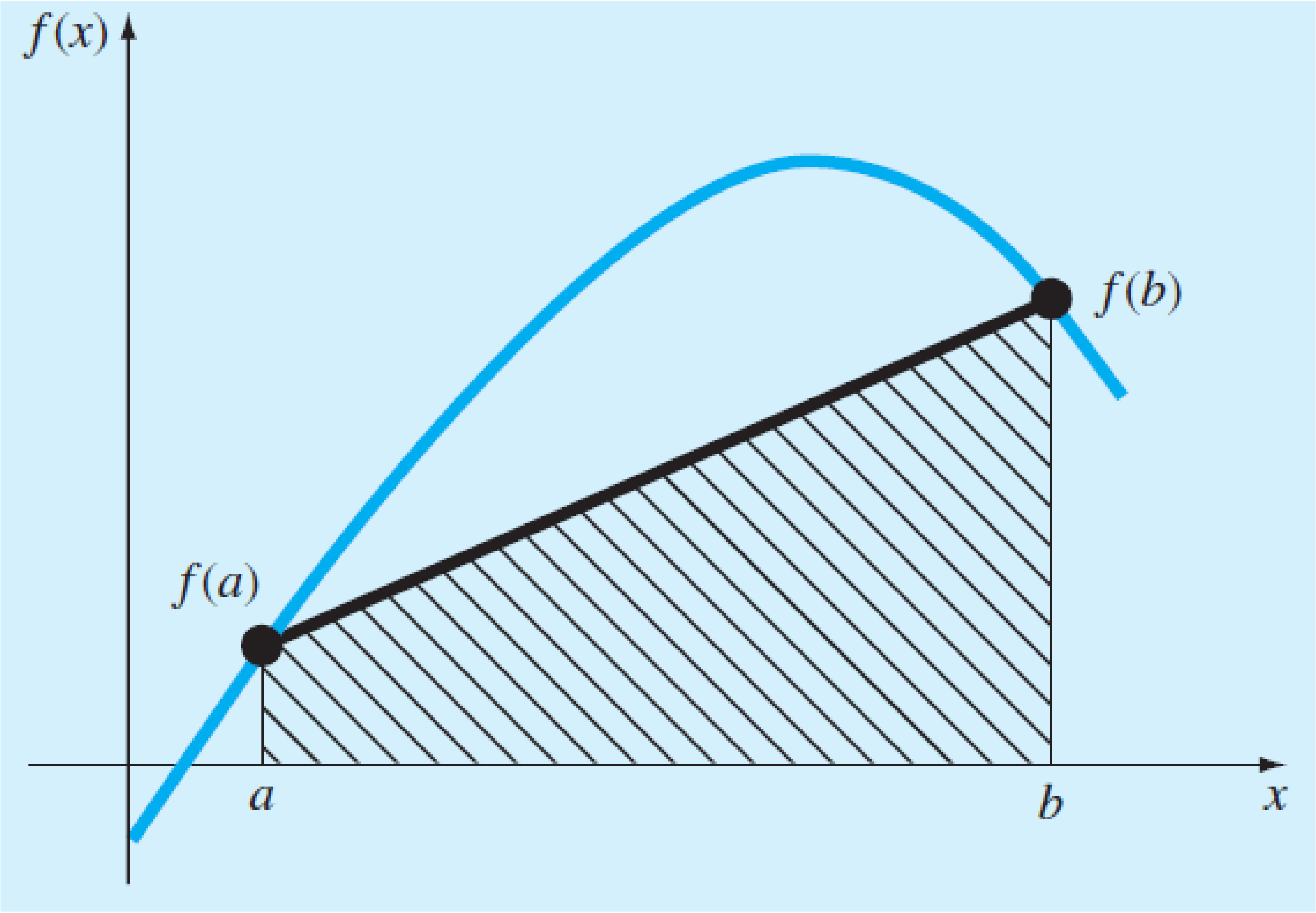
- Integrando (iii) resulta:

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2} \qquad \text{(iv)}$$

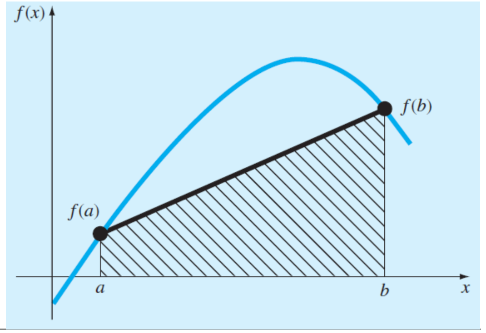
que é conhecida como regra do trapézio.

A REGRA DO TRAPÉZIO

- Geometricamente a regra do trapézio é equivalente a aproximar a integral pela área do trapézio sob a reta que une a e b:



A REGRA DO TRAPÉZIO



- Da geometria, sabe-se que a fórmula para calcular a área de um trapézio é a **altura vezes a média das bases.** Como em nosso caso o trapézio está apoiado sobre um de seus lados, resulta:

$$I = largura \times altura\ média \tag{v}$$

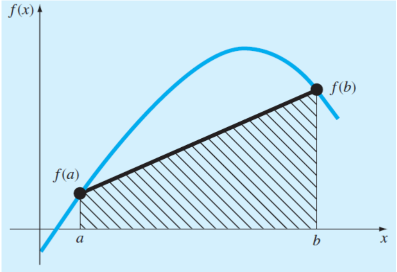
ou

$$I = (b - a) \times altura\ média \tag{vi}$$

- Sendo, no caso dos trapézios a altura média calculada por

$$\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DO TRAPÉZIO



- Aplicando um polinômio interpolador linear de Newton a função da figura da página 8, resulta:

$$f_1(x) = f(a) + x\,\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} - a\,\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$$

- Agrupando o primeiro e o último termo obtém-se:

$$f_1(x) = x\,\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} + \frac{f(a)(b-a) - a[f(b) - f(a)]}{(b-a)}$$

ou

$$f_1(x) = x\,\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} + \frac{b\,f(a) - a\,f(b)}{(b-a)}$$

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DO TRAPÉZIO

$$f_1(x) = x\,\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} + \frac{b\,f(a) - a\,f(b)}{(b-a)}$$

- Integrando a expressão anterior de a até b, resulta:

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} \cdot \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] + \frac{b\,f(a) - a\,f(b)}{(b-a)} \cdot (b-a)$$

- Simplificando a expressão acima

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{2} (b+a) + b\,f(a) - a\,f(b)$$

$$I = \frac{b\,f(b)}{2} + \frac{a\,f(b)}{2} - \frac{b\,f(a)}{2} - \frac{a\,f(a)}{2} + b\,f(a) - a\,f(b)$$

$$I = f(b)\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2} - a\right) + f(a)\left(b - \frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DO TRAPÉZIO

$$I = f(b)\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2} - a\right) + f(a)\left(b - \frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

- Resolvendo os termos entre parênteses da expressão anterior, resulta em:

$$I = f(b)\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) + f(a)\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

ou

$$I = \frac{f(b)}{2}(b-a) + \frac{f(a)}{2}(b-a)$$

- Finalmente,

$$I = (b-a)\left[\frac{f(a) + f(b)}{2}\right]$$

que é a expressão da regra do trapézio

ERRO DE TRUNCAMENTO
REGRA DO TRAPÉZIO

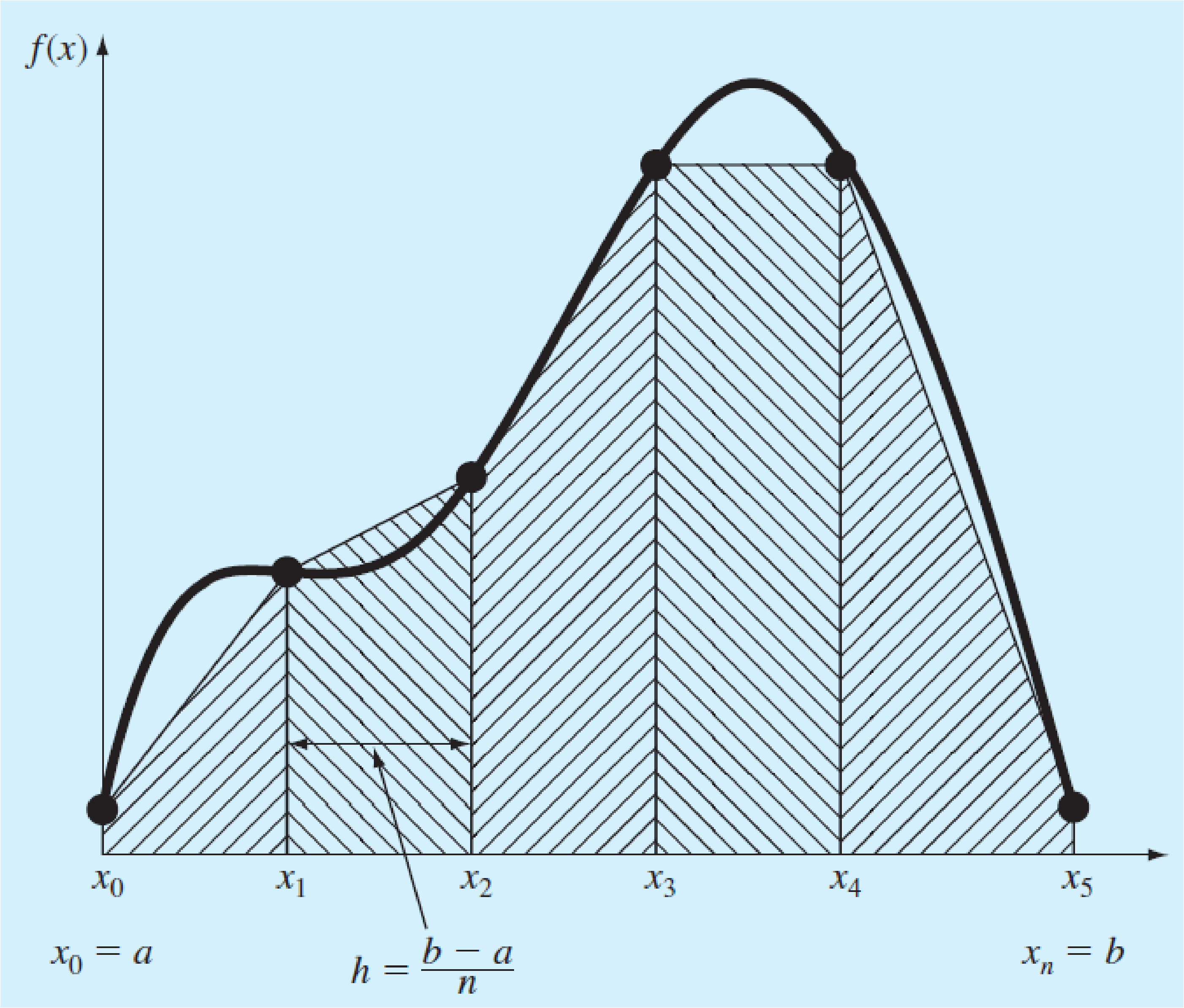
- Obviamente quando se utiliza um único segmento de reta para aproximar uma integral, assume-se um erro que pode ser substancial. Uma estimativa para o erro de truncamento resultante de uma única aplicação da da regra do trapézio é (CHAPRA, 2012, p. 469):

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

onde ξ está em algum ponto do intervalo [a, b].

REGRA DO TRAPÉZIO
Aplicação múltipla

- Consiste em aplicar a regra do trapézio em n segmentos de um intervalo de integração.
- As áreas de cada segmento individual são somadas para fornecer uma estimativa do integral do intervalo inteiro.



A REGRA DO TRAPÉZIO - Aplicação múltipla

- Na figura, a integral total pode ser representada como

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

- Substituindo cada integral pela regra do trapézio (ii)

$$I = h\,\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\,\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h\,\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \qquad \text{(viii)}$$

ou, agrupando os termos:

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \qquad \text{(ix)}$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

A REGRA DO TRAPÉZIO - Aplicação múltipla

- Como $h = (b - a)/n$, a expressão (ix) pode ser expressa nos termos de (vi) por

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{LARGURA}} \underbrace{\frac{\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]}{2n}}_{\text{ALTURA MÉDIA}} \qquad \text{(x)}$$

- Um erro para a aplicação múltipla da regra do trapézio pode ser obtida pela soma dos erros individuais dos segmentos:

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \qquad \text{(xi)}$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

A REGRA DO TRAPÉZIO - Aplicação múltipla

onde $f''(\xi_i)$ é a derivada segunda em um ponto ξ_i localizado no segmento i. Esse resultado pode ser simplificado por uma estimativa do valor médio da derivada segunda no intervalo todo como:

$$\overline{f''} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n} \qquad \text{(xii)}$$

- Substituindo (xii) em (xi), resulta:

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\overline{f''} \qquad \text{(xiii)}$$

que é uma aproximação do erro. Observe que o erro de truncamento será divido por 4 se o número de segmentos for dobrado.

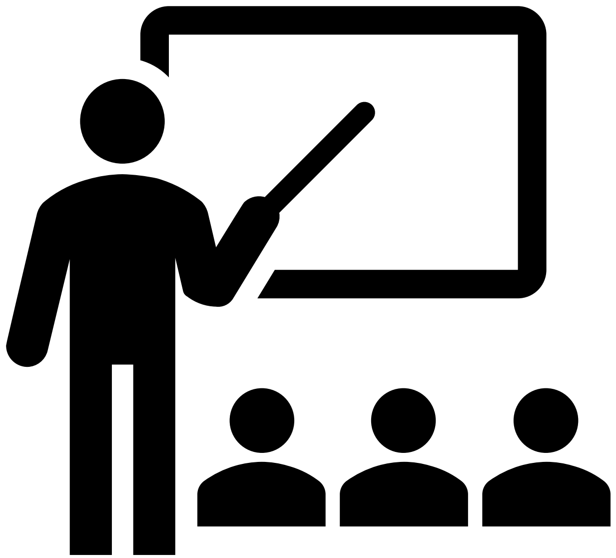
EXEMPLO 1

Use a regra do trapézio com 4 segmentos para obter uma estimativa da integral de

$f(x) =$

$$0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

de 0 a $0{,}8$. O valor exato da integral é $1{,}640533$.



EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

$$0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$I = (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]}{2n}$$

- Para $n = 4$ segmentos:

$$h = 0{,}8 / 4 = 0{,}2$$

$$f(0) = 0{,}2; \quad f(0{,}2) = 1{,}288; \quad f(0{,}4) = 2{,}456;$$
$$f(0{,}6) = 3{,}464; \quad f(0{,}8) = 0{,}232.$$

- Com esse dados o valor da integral calculado pela equação (x) resulta em:

$$I = 0{,}8\,\frac{[0{,}2 + 2(1{,}288 + 2{,}456 + 3{,}464) + 0{,}232]}{8} = 1{,}4848$$

- O erro verdadeiro será:

$$E_t = 1{,}6405333 - 1{,}4848 = 0{,}1557333 \quad \rightarrow \epsilon_t = 9{,}5\%$$

EXEMPLO 1 - SOLUÇÃO

- Para avaliar o erro aproximado, primeiro se deve estimar o valor médio da segunda derivada:

$$\overline{f''} = \frac{\int_0^{0,8} (-400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3)\, dx}{0,8 \; - 0} = -60$$

- Substituindo esse valor em (xi), obtém-se o erro aproximado:

$$E_a = -\frac{(0,8)^3}{12\,(4)^2}\,(-60) = 0,16$$

$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\overline{f''}$$

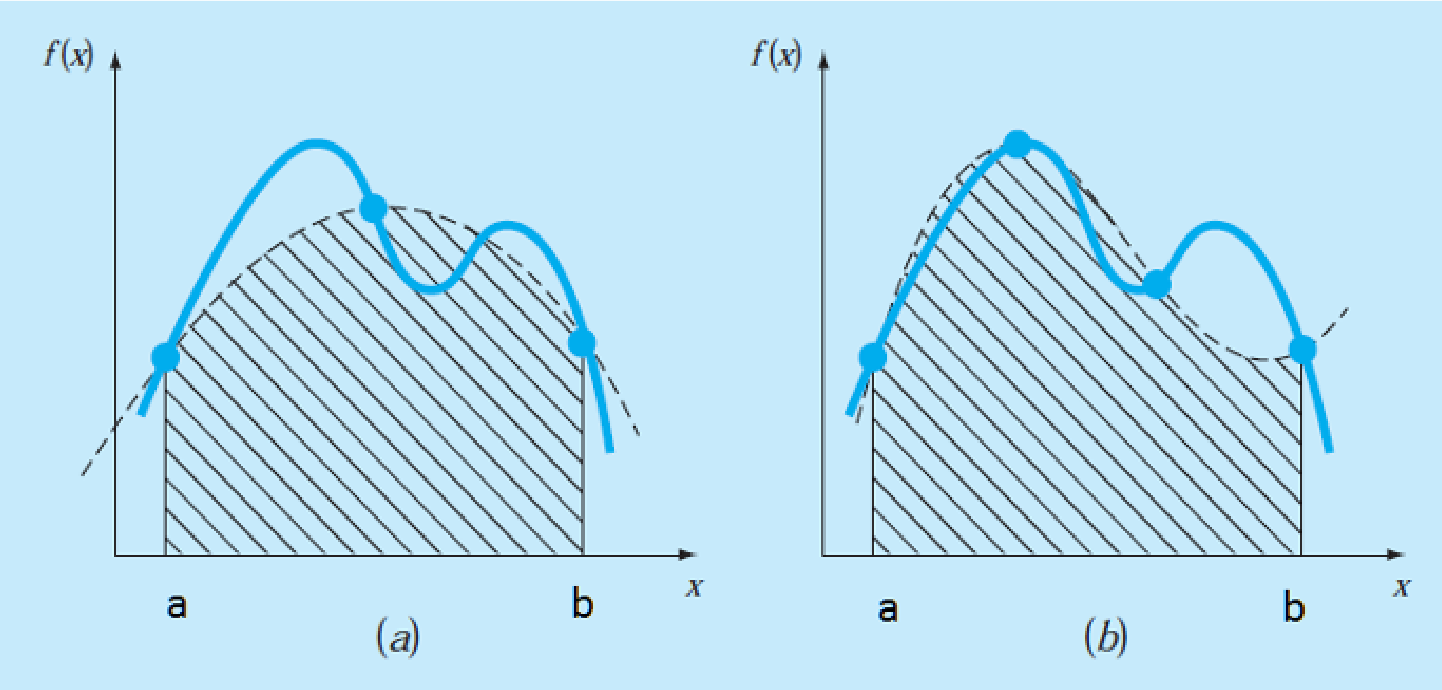
Avalie a integral do Exemplo 1 utilizando 10 segmentos.

Resposta: $I\ =\ 1{,}6150,\ \epsilon_t = 1{,}6\ \%$

Exercício 1

REGRAS DE SIMPSON

- Utilizam polinômios de grau mais elevado para unir os pontos.



(a) A regra 1/3 de Simpson consiste em obter a área sob uma parábola ligando 3 pontos
(b) (b) a regra 3/8 consiste em obter a área sob uma cúbica ligando 4 pontos.

A REGRA DO SIMPSON 1/3

- Quando o polinômio da equação (i) for um polinômio de segundo grau, tem-se a regra 1/3 de Simpson:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx \qquad \text{(xiv)}$$

onde a e b são designados como x_0 e x_2, sendo x_1 o ponto médio entre a e b, respectivamente

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_n(x)dx$$

A REGRA DO SIMPSON 1/3

- O resultado da integração anterior é:

$$I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \qquad \text{(xv)}$$

ou

$$I = (b - a)\frac{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}{6} \qquad \text{(xvi)}$$

A REGRA DO SIMPSON 1/3

- Segundo Chapra (2012, p. 475), o erro de truncamento vale:

$$E_t = -\frac{1}{90}h^5 f^4(\xi)$$

ou

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^4(\xi) \qquad \text{(xvii)}$$

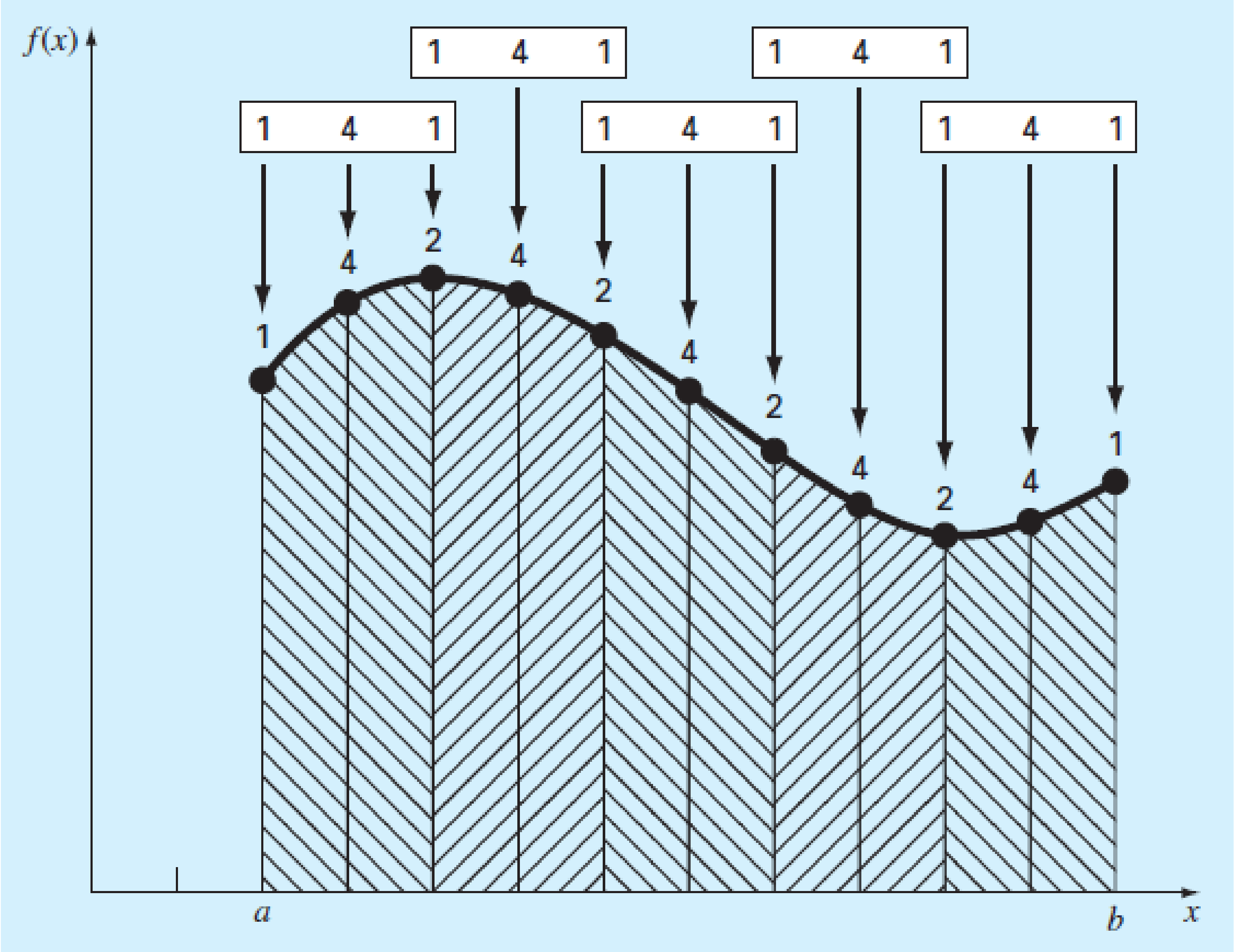
REGRA DE SIMPSOM 1/3- Aplicação múltipla

- Da mesma forma que a regra do trapézio, a regra de Simpson pode ser melhorada dividindo-se o intervalo de integração em diversos segmento de mesmo comprimento:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

- Aplicando-se o mesmo procedimento utilizado na regra do trapézio, chega-se a seguinte expressão para estimar a integral:

$$I = (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f\left(x_j\right) + f(x_n)\right]}{3n} \qquad \text{(xviii)}$$



REGRA DE SIMPSOM 1/3 - Aplicação múltipla

- E a esta expressão para estimar o erro aproximado

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\overline{f^4} \text{ (xix)}$$

- Na figura os pesos relativos estão representados acima dos valores da função. Observe que a regra 1/3 deve ser utilizada com um número par de segmentos.

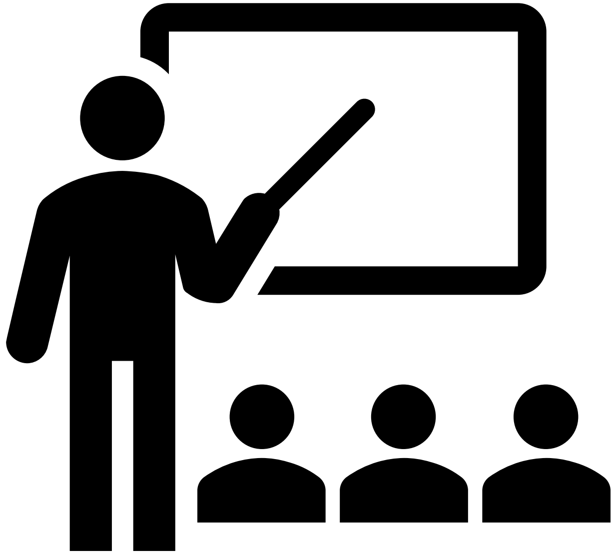
EXEMPLO 2

Use a regra de Simpson 1/3 com 4 segmentos para obter uma estimativa da integral de

$f(x) =$

$$0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

de $0\ a\ 0{,}8$. O valor exato da integral é $1{,}640533$.



EXEMPLO 2 SOLUÇÃO

$$I = (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 4\,\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\,\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f\left(x_j\right) + f(x_n)\right]}{3n}$$

- Para $n = 4$ segmentos:

$$h = 0{,}8\,/\,4 = 0{,}2$$

$$f(0) = 0{,}2;\;\; f(0{,}2) = 1{,}288;\;\; f(0{,}4) = 2{,}456;$$
$$f(0{,}6) = 3{,}464;\;\; f(0{,}8) = 0{,}232.$$

- Com esse dados o valor da integral calculado pela equação (xviii) resulta em:

$$I = 0{,}8\,\frac{[0{,}2 + 4(1{,}288 + 3{,}464) + 2(2{,}456) + 0{,}232]}{12} = 1{,}623467$$

- O erro verdadeiro será:

$$E_t = 1{,}6405333 - 1{,}623467 = 0{,}017067 \quad \rightarrow \epsilon_t = 1{,}04\%$$

- Cerca de 9 vezes mais acurada que a regra do trapézio.

EXEMPLO 2 - SOLUÇÃO

- Para avaliar o erro aproximado, utiliza-se a equação (xix):

$$E_a = -\frac{(0{,}8)^5}{180\,(4)^4}\,(-2400) = 0{,}017067$$

onde -2400 é o valor médio da quarta derivada para o intervalo, obtido de:

$$\overline{f^4} = \frac{\int_0^{0{,}8}(-21600 + 48000x)\,dx}{0{,}8\ - 0} = -2400$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\overline{f^4}$$

A REGRA 3/8 DE SIMPSON

- A regra 3/8 de Simpson corresponde ao caso que um polinômio de Lagrange de terceiro grau é ajustado a quatro pontos e integrado para fornecer:

$$I = \frac{3h}{8}\left[\, f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \,\right] \qquad \text{(xx)}$$

ou

$$I = (b-a)\,\frac{\left[\, f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \,\right]}{8} \qquad \text{(xxi)}$$

A REGRA 3/8 DE SIMPSON

- A regra 3/8 apresenta um erro de:

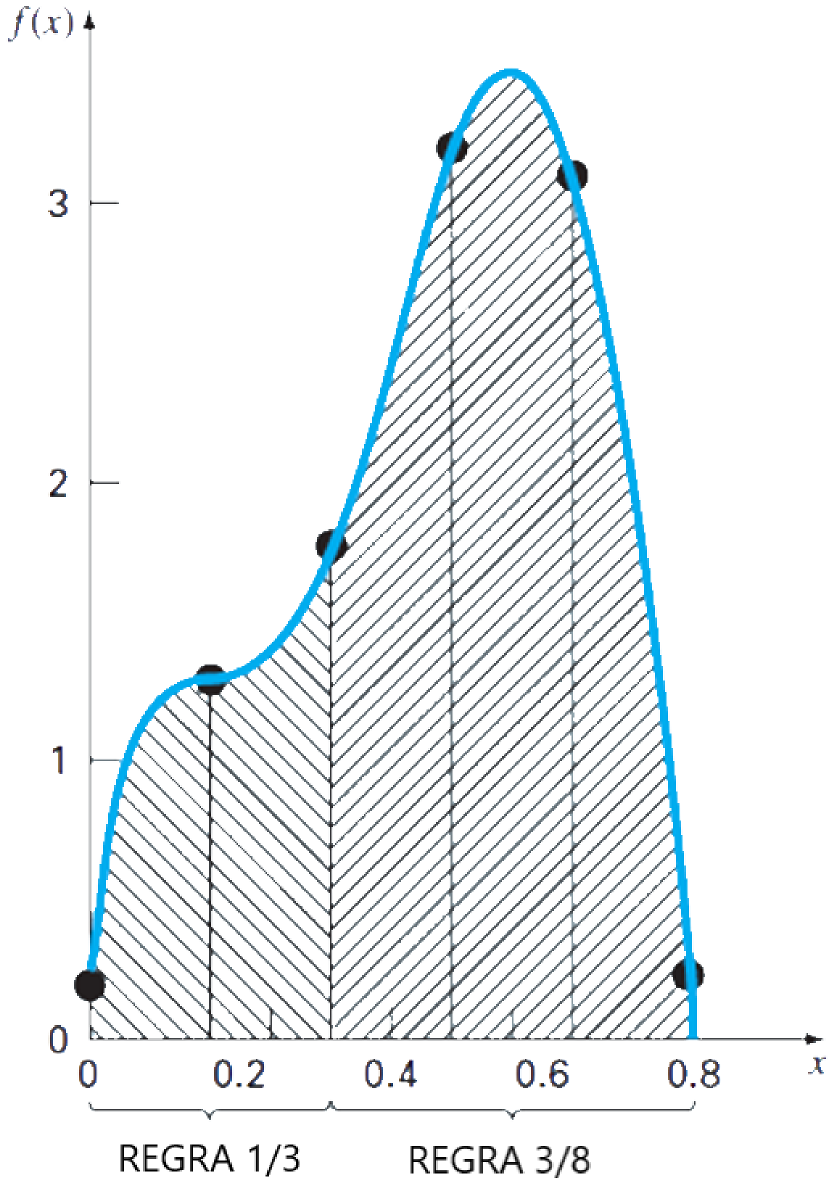
$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^4(\xi)$$

ou

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^4(\xi) \qquad \text{(xxii)}$$

REGRA 3/8 DE SIMPSON

- A regra 1/3 de Simpson é o método preferido, pois alcança acurácia de terceira ordem (erro proporcional à quarta derivada) baseada em apenas 3 pontos.
- A regra 3/8 é usada em conjunto com a regra 1/3 quando o número de segmentos é impar, como alternativa a regra do trapézio, de menor acurácia.



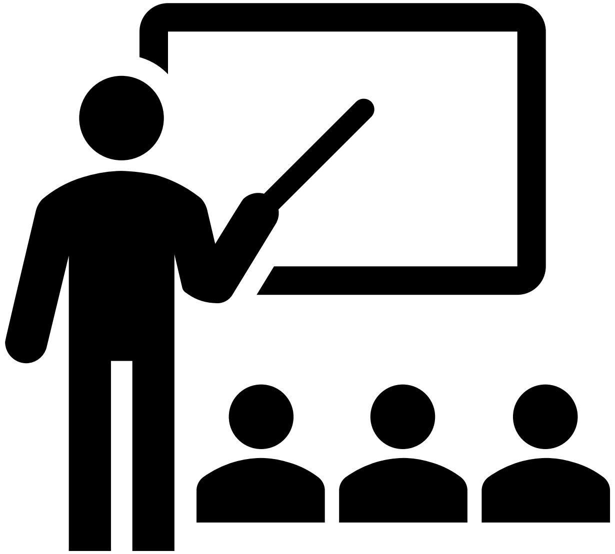
EXEMPLO 3

Use a regra 3/8 de Simpson em conjunto com a regra 1/3 para obter utilizando 5 segmentos uma estimativa da integral de

$$f(x) =$$

$$0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

de 0 a $0{,}8$. O valor exato da integral é $1{,}640533$.



EXEMPLO 3 - SOLUÇÃO

- Para n = 5 segmentos, h = 0,16:

$$f(0) = 0{,}2;\ f(0{,}16) = 1{,}296919;\ f(0{,}32) = 1{,}743393;$$

$$f(0{,}48) = 3{,}186015;\ f(0{,}64) = 3{,}186015;\ f(0{,}8) = 0{,}232.$$

- Aplicando a regra 1/3 de Simpson aos dois primeiros segmentos (eq. xvi):

$$I = 0{,}32\,\frac{[0{,}2 + 4(1{,}296919) + 1{,}743393]}{6} = 0{,}3803237$$

$$I = (b-a)\frac{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}{6}$$

EXEMPLO 2 - SOLUÇÃO

- Para os três últimos segmentos, utiliza-se a regra 3/8 para obter: :

$$I = 0{,}48 \; \frac{[1{,}743393 + 3(3{,}186015) + 3(3{,}186015) + 0{,}232]}{8} = 1{,}264754$$

- A integral total é a soma dos resultados anteriores:

$$I_T \; = \; 0{,}3803237 \; + \; 1{,}264754 \; = \; 1{,}645077$$

- O erro verdadeiro é:

$$E_t = 1{,}6405333 - 1{,}645077 = -0{,}00276831 \quad \rightarrow \epsilon_t = 0{,}28\%$$

$$I = (b - a) \; \frac{[\, f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \,]}{8}$$

INTEGRAÇÃO COM SEGMENTOS DESIGUAIS

- Nesses casos, uma alternativa é empregar a regra do trapézio para cada segmento e somar os resultados:

$$I = h_1 \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h_2 \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h_n \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \quad \text{(xx)}$$

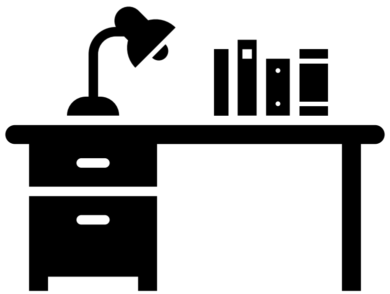
- onde h_i é a largura do segmento i:

Utilizando a regra do trapézio, determine a distância percorrida para os seguintes dados de velocidade:

t (s)	1	2	3,25	4,5	6	7	8	8,5	9	10
v (m/s)	5	6	5,5	7	8,5	8	6	7	7	5

Calcule também a velocidade média no percurso.

Resposta: $d = 60{,}125\ m$; $\quad v_{med} = 6{,}68\ m/s$



Exercício 2

INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA

- As técnicas discutidas neste capítulo podem ser usada para resolver integrais múltiplas:
  - ✓ Por exemplo, para resolver uma integral dupla, aplica-se um dos métodos vistos na primeira dimensão para cada valor da segunda dimensão constante.
  - ✓ Depois, o método é aplicado para integrar na segunda dimensão

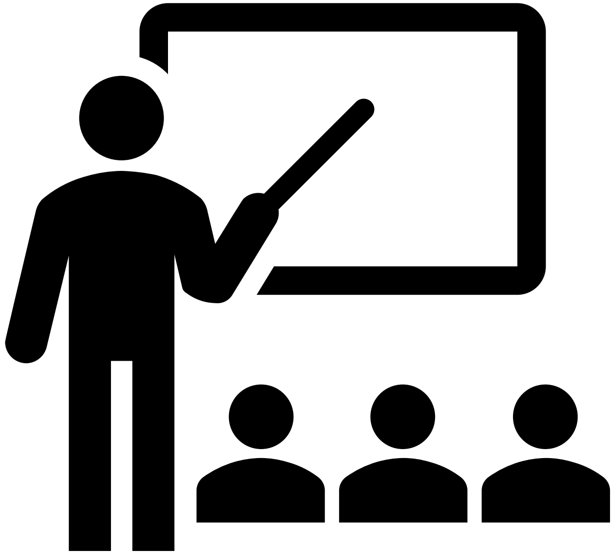
EXEMPLO 4

Considere que a temperatura de uma placa retangular aquecida seja descrita pela seguinte função:

$$\mathrm{T}(x, y) = 2\,x\,y + 2\,x - x^2 - 2\,y^2 + 72.$$

Se a placa tiver 8 m de comprimento (x) e 6 m de largura (y), calcule a temperatura média.

O valor exato da temperatura média é 58,6667 ^{0}C.

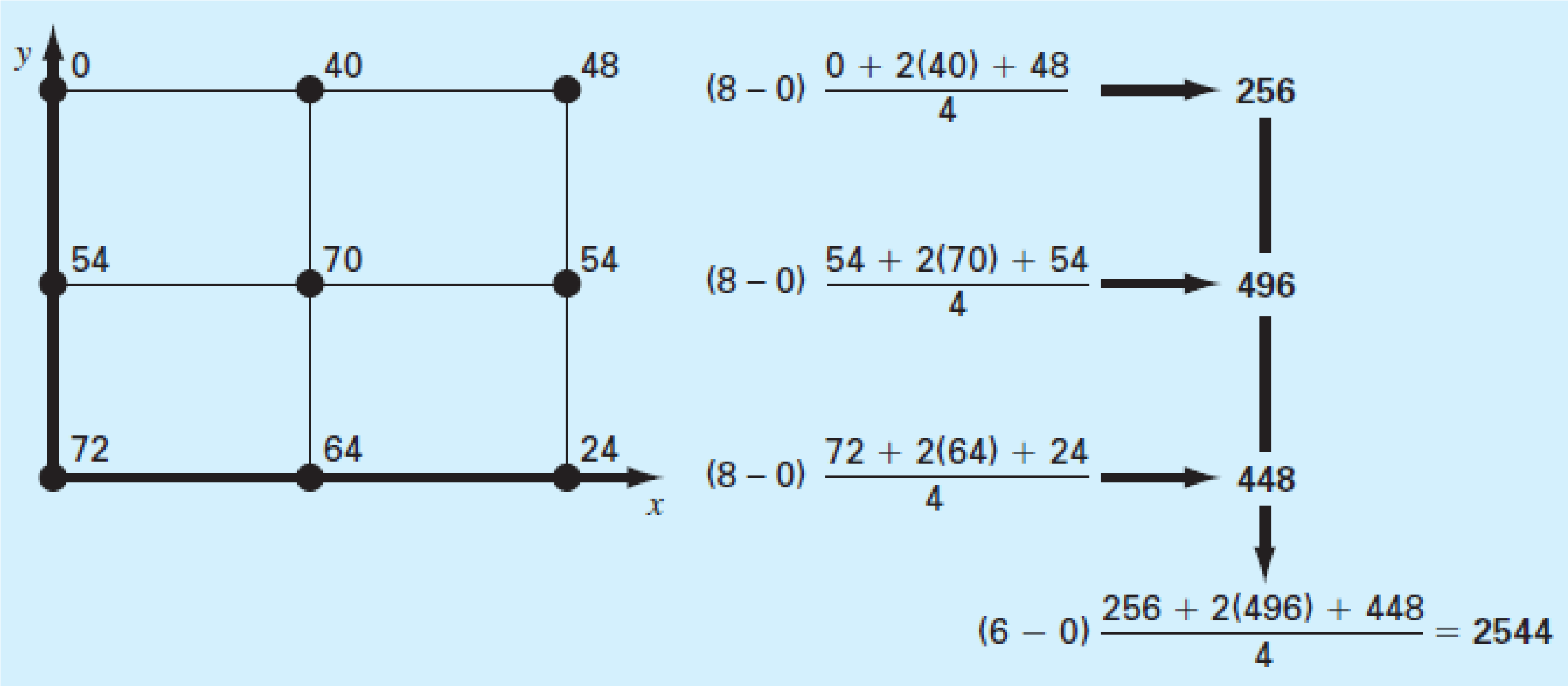


EXEMPLO 4

- Utilizar-se-á a regra do trapézio com dois segmentos em cada dimensão.
- As temperaturas nos valores necessários de x e y, bem como a aplicação do método são esquematizados na figura ao lado.

$$I = (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]}{2n}$$

$$\mathrm{T}(x,y) = 2\,x\,y + 2\,x - x^2 - 2\,y^2 + 72$$



Dividindo-se o resultado pela área da placa, obtém-se uma temperatura média igual a 53 ⁰C.

Utilize a regra 3/8 de Simpson para resolver o exemplo anterior.

Resposta: 58,6667 ^{0}C.

Exercício 3

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA
FUNÇÕES NATIVAS

- O Scilab oferece a função inttrap para calcular a integral numérica de uma função usando a regra do trapézio. A forma geral da função é

```
v = inttrap(x, y)
```

onde:

x – vetor com os valores das abcissas x

y – vetor com os valores de f(x)

EXEMPLO 5

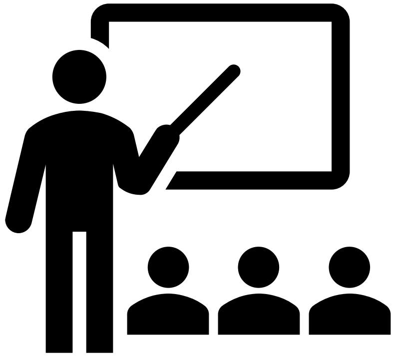
Resolva o Exemplo 1 utilizando a função inttrap.

Exemplo 1

Use a regra do trapézio com 4 segmentos para obter uma estimativa da integral de

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

de 0 a $0{,}8$. O valor exato da integral é $1{,}640533$.



EXEMPLO 5 - SOLUÇÃO

```
-->x=linspace(0,0.8,5);

-->y = 0.2 +25*x - 200*x^2 + 675*x^3 - 900*x^4 +
400*x^5;

-->I = inttrap(x,y)

 I  =


    1.4848
```

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA
FUNÇÕES NATIVAS

- O Scilab oferece a função `int2d` para calcular a integral dupla. A forma geral da função é

```
[I,err]=int2d(X,Y,f)
```

onde:

- ✓ X é um array 3 por N contendo as abscissas dos vértices dos N triângulos;
- ✓ Y é um array 3 por N contendo as ordenadas dos vértices dos N triângulos;
- ✓ f é uma função externa definindo o integrando f(u,v);
- ✓ I é o valor da integral;
- ✓ err é o erro estimado.

EXEMPLO 6

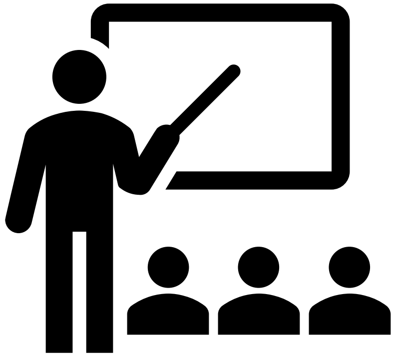
Resolva o Exemplo 4 utilizando a função `int2d`.

Exemplo 4

Considere que a temperatura de uma placa retangular aquecida seja descrita pela seguinte função:

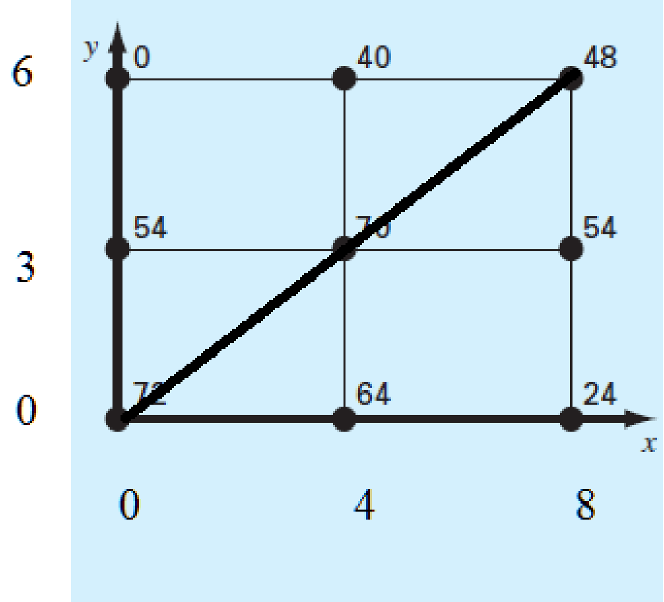
$$\mathrm{T}(x, y) = 2\,x\,y + 2\,x - x^2 - 2\,y^2 + 72$$

Se a placa tiver 8 m de comprimento (x) e 6 m de largura (y), calcule a temperatura média.



Exemplo 6 - Solução

```
--> x=[0,0 ;8,0;8,8];
--> y=[0,0 ;0,6;6,6];
--> deff('z=f(x,y)','z=2*x.*y + 2*x - x^2 -2*y^2 + 72');
-->[I,e]=int2d(x,y,f)
 e  =
      6.253D-13
 I  =
      2816.
```



Função Scilab

REGRA DO TRAPÉZIO

Função Scilab

```
function I=trap(a, b, fun, n)
//a é o limite inferior de integração
//b é o limite superior de integração
//n é o número de intervalos (número de pontos n+1)
//fun é  a função na forma literal ou um vetor de pontos
//
   if argn(2)<4 then   //vetor de pontos
      fx = fun;
      n = length(fun)-1;
   else    //função literal
      x = linspace(a,b,n+1);
      fx = evstr(fun);
   end
```

Função Scilab

```
soma = 0;
  for i=2:n
     soma = soma+fx(i);
  end
  I = (b-a)*(fx(1)+2*soma+fx(n+1))/(2*n);
endfunction
```

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

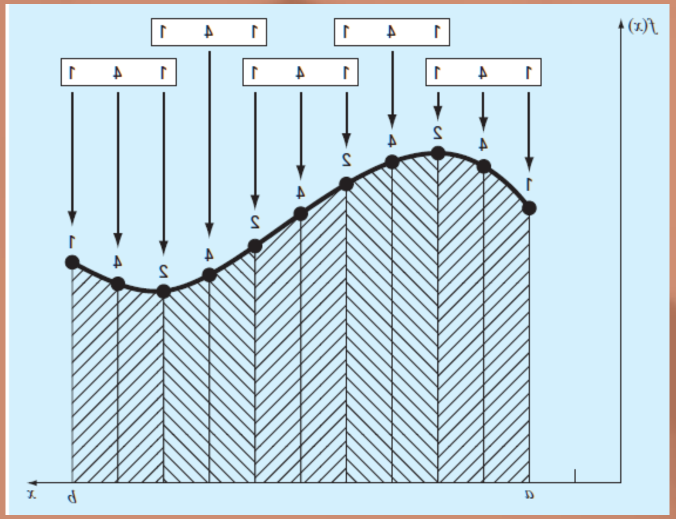
Função Scilab

REGRA DO SIMPSON 1/3

Função Scilab

```
function I=simpson1_3(a, b, fun, n)
/*a é o limite inferior de integração
  b é o limite superior de integração
  n é o número de intervalos (número de pontos n+1)
  fun é a função na forma literal ou um vetor de pontos
*/
   if argn(2)<4 then   //vetor de pontos
      fx = fun;
      n = length(fun)-1;
   else   //função literal
      x = linspace(a,b,n+1);
      fx = evstr(fun);
   end
```

Função Scilab



```
if modulo(n,2)~=0 then
    error("o número de segmentos deve ser par");
  end
  soma1 = fx(n); soma2 = 0;
  for i=3:2:n-1
    soma1 = soma1 + fx(i-1); // fx(n) já está na soma
    soma2 = soma2 + fx(i);
  end
  I = (b-a)*(fx(1)+4*soma1+2*soma2+fx(n+1))/(3*n);
endfunction
```

$$I = (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right]}{3n}$$

Bibliografia e crédito das figuras

CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.

CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.