SEMANA 10

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$
$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$
$$k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3 h)$$

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

PARTE IV – MÉTODOS DE EULER E RUNGE-KUTTA

Computação Científica

prof. Marco Villaça

VISÃO GERAL

- Este capítulo se dedica à solução de equações diferenciais ordinárias (EDO) da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (i)$$

- No Capítulo I, parte II, usou-se um método numérico para resolver uma EDO, mais especificamente a velocidade do saltador de *bungee jumping* em queda livre:

Novo valor = valor antigo + inclinação x tamanho do passo

ou em termos matemáticos

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \quad (ii)$$

- onde a inclinação ϕ é chamada de função incremento.

VISÃO GERAL

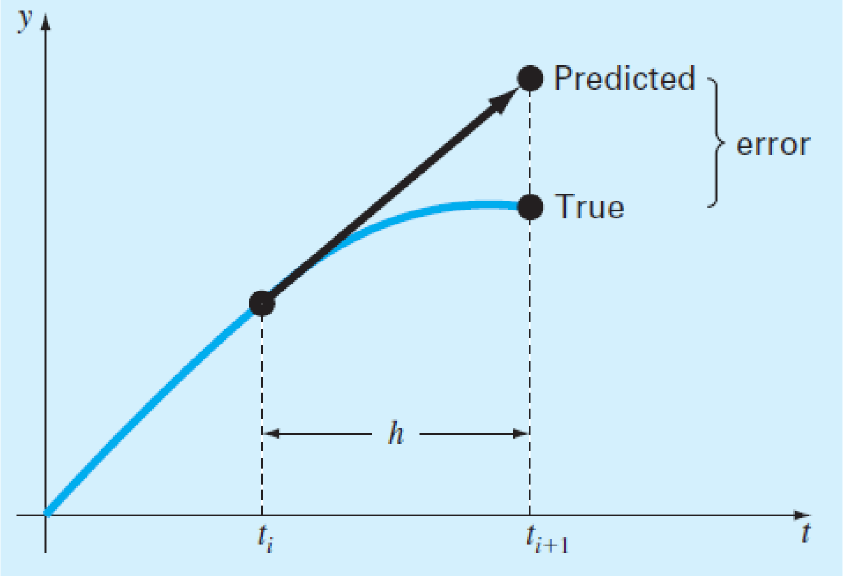
- De acordo com a equação (*ii*), a estimativa da inclinação ϕ é empregada para extrapolar de um valor antigo y_i para um valor novo y_{i+1}, em uma distância h.
- Essa forma aplicada passo a passo traça a trajetória da solução para o futuro.
- Esses métodos são conhecidos como *métodos de passo único* ou *métodos de Runge-Kutta*.
- Os métodos de passo único se diferenciam pela maneira como é feita a estimativa da inclinação.
- A abordagem mais simples é chamada de *Método de Euler*.

Método de Euler

- O Método de Euler usa a ED para obter uma estimativa da inclinação na forma da primeira derivada em $t_{i:}$
  - Ou seja, a inclinação no início do intervalo é tomada como uma aproximação da inclinação média em todo o intervalo:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h \quad (iii)$$

onde $f(t_i, y_i)$ é a equação diferencial calculada em t_i e y_i.

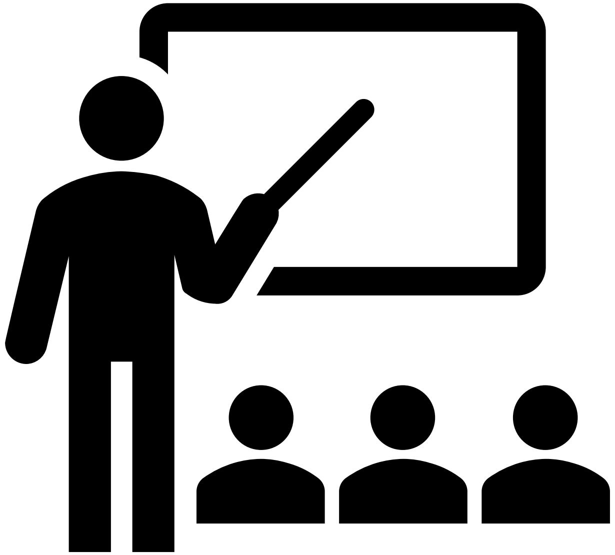


EXEMPLO 10.1

Usar o Método de Euler para integrar $y' = 4\,e^{0,8\,t} - 0,5y$ de t = 0 a 4, com um passo de 1.

A condição inicial em t = 0 é y = 2. A solução exata, determinada analiticamente é (mostre):

$$y = \frac{4}{1,3}\left(e^{0,8t} - e^{-0,5t}\right) + 2\,e^{-0,5\,t}$$



Exemplo 10.1 Solução

$y' = 4\, e^{0,8\,t} - 0,5y$

- A equação (ii) pode ser usada para implementar o método de Euler:

$$y(1) = y(0) + f(0,2)\cdot h$$

onde y(0) = 2, h = 1 e a estimativa de inclinação em t = 0 é

$$f(0,2) = 4e^{0} - 0,5 \cdot 2 = 3$$

Assim,

$$y(1) = 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

- A solução verdadeira em t = 1 é:

$$y = \frac{4}{1,3}\left(e^{0,8} - e^{-0,5}\right) + 2\,e^{-0,5} = 6,19463$$

Assim, o erro relativo percentual verdadeiro vale:

$$\varepsilon_t = \left|\frac{6,19463 - 5}{6,19463}\right| \cdot 100 = 19,28\,\%$$

Exemplo 10.1
Solução

- Usar o Método de Euler para integrar $y' = 4\ e^{0,8\,t} - 0,5y$ de t = 0 a 4, com um passo de 1.

A condição inicial em t = 0 é y = 2. A solução exata, determinada analiticamente é (mostre):

$$y = \frac{4}{1,3}\left(e^{0,8t} - e^{-0,5t}\right) + 2\,e^{-0,5\,t}$$

A equação (ii) pode ser usada para implementar o método de Euler:

$$y(1) = y(0) + f(0,2) \cdot h$$

onde y(0) = 2, h = 1 e a estimativa de inclinação em t = 0 é

$$f(0,2) = 4e^{0} - 0,5 \cdot 2 = 3$$

Assim,

$$y(1) = 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

Exemplo 10.1
Solução

$$y' = 4\,e^{0,8\,t} - 0,5y$$

- Para o segundo passo:

$$y(2) = y(1) + f(1,5) \cdot 1$$

onde

$$\mathrm{f}(1,5) = 4e^{0,8} - 0,5 \cdot 5 = 6,40216$$

Assim,

$$y(2) = 5 + 6,40216 \cdot 1 = 11,40216$$

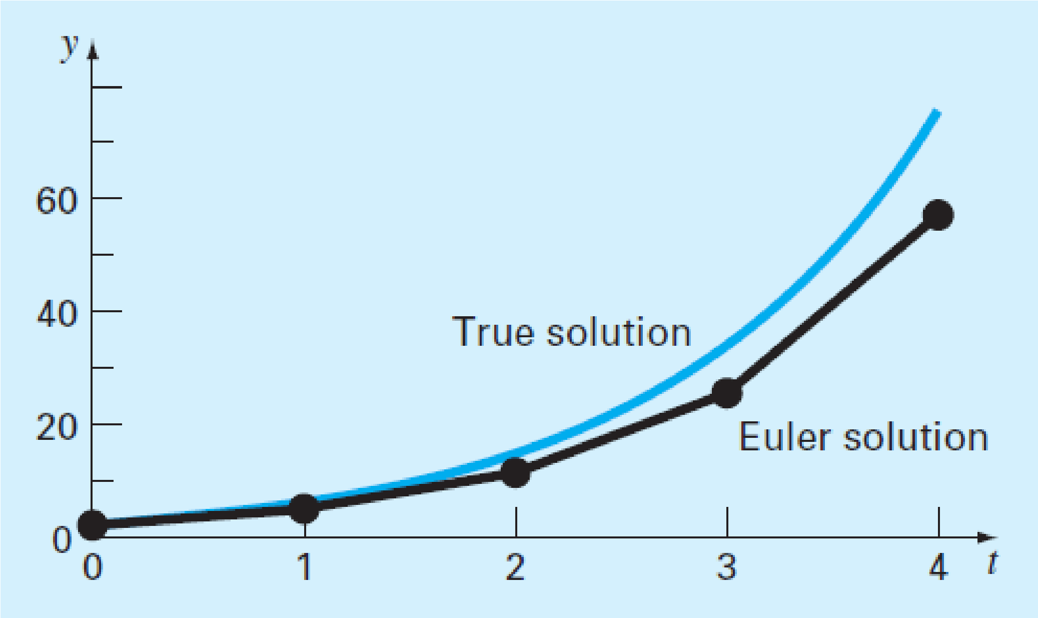
A solução verdadeira em t = 2 é:

$$y = \frac{4}{1,3}\left(e^{1,6} - e^{-1}\right) + 2\,e^{-1} = 14,8439$$

Assim o erro relativo percentual verdadeiro:

$$\varepsilon_t = \left|\frac{14,8439 - 11,4021}{14,8439}\right| \cdot 100 = 23,19\,\%$$

t	y_{true}	y_{Euler}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)
0	2.00000	2.00000	
1	6.19463	5.00000	19.28
2	14.84392	11.40216	23.19
3	33.67717	25.51321	24.24
4	75.33896	56.84931	24.54



Exemplo 10.1 Solução

- Repetindo os cálculos, constrói-se a Tabela 11.1 e a Figura 11.1.
- Observe que o erro é considerável. Logicamente, esse erro pode ser reduzido usando-se um passo de cálculo menor

Nota histórica

- O *Método de Euler* foi publicado em seu trabalho de três volumes *Institutiones calculi integrals* (Fundações do cálculo integral) nos anos de 1768 a 1770.
- No volume 1, seção II, capítulo 7, De integratione aequationum differentialium per approximationem, Euler declara que "o principal objetivo do cálculo integral é a solução de equações diferenciais".
- O que hoje se conhece por métodos de Runge-Kutta foram inicialmente desenvolvidos por Carl Runge (1895), que transformou o método de Euler em um esquema mais elaborado, capaz de oferecer maior exatidão.
- Wilhelm Kutta (1901) estendeu essa classe de métodos até a quinta ordem.

Métodos de Runge-Kutta (RK)

- Existem muitas variações, mas todas podem ser colocadas na forma geral:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \qquad (iv)$$

onde ϕ é chamada de função incremento, que representa a inclinação em um intervalo.

Métodos de Runge-Kutta

- A função incremento possui como forma geral:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n (v)$$

onde os a's são constantes e os k's são

$$k_1 = f(t_i, y_i) (vi.a)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) (vi.b)$$

$$k_3 = f(t_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) (vi.c)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f\left(t_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h\right) (vi.d)$$

sendo os p's e os q's constantes.

Métodos de Runge-Kutta

- As diversas variações do método de Runge-Kutta estão relacionadas com o número de termos da função incremento.
- O método RK de primeira ordem é, de fato, o Método de Euler.
- Neste curso, abordar-se-á a forma mais popular dos métodos de RK, o Método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico.

Método RK clássico de 4ª ordem

- Possui como forma geral:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \qquad (vii)$$

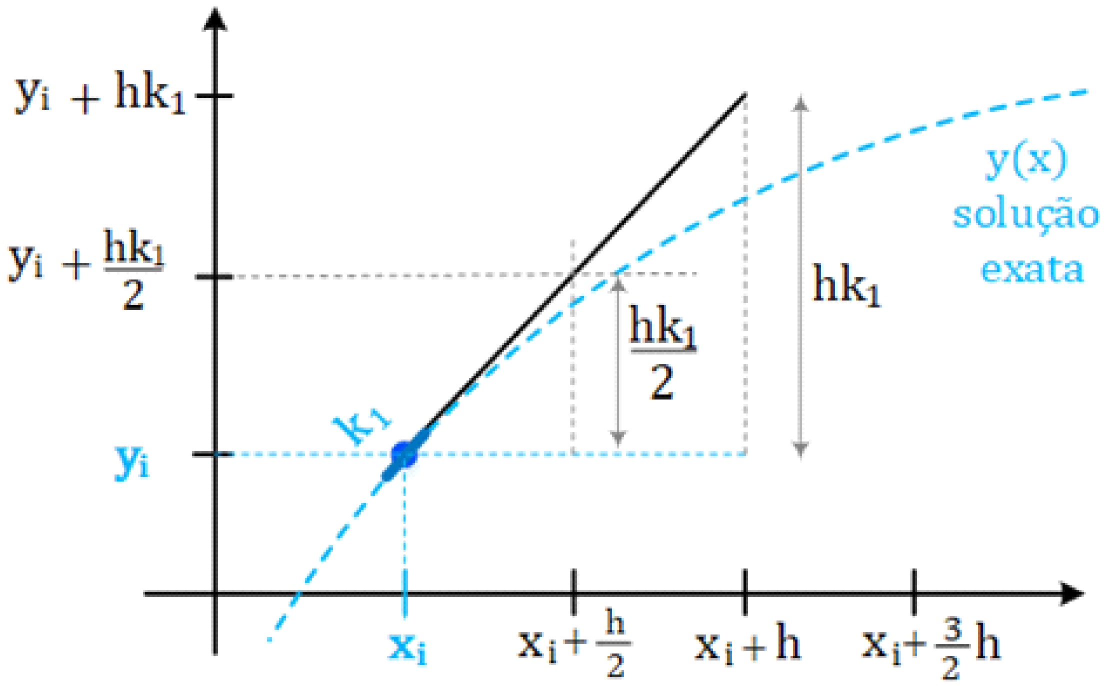
onde

$$k_1 = f(t_i, y_i) \qquad (viii.a)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \qquad (viii.b)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \qquad (viii.c)$$

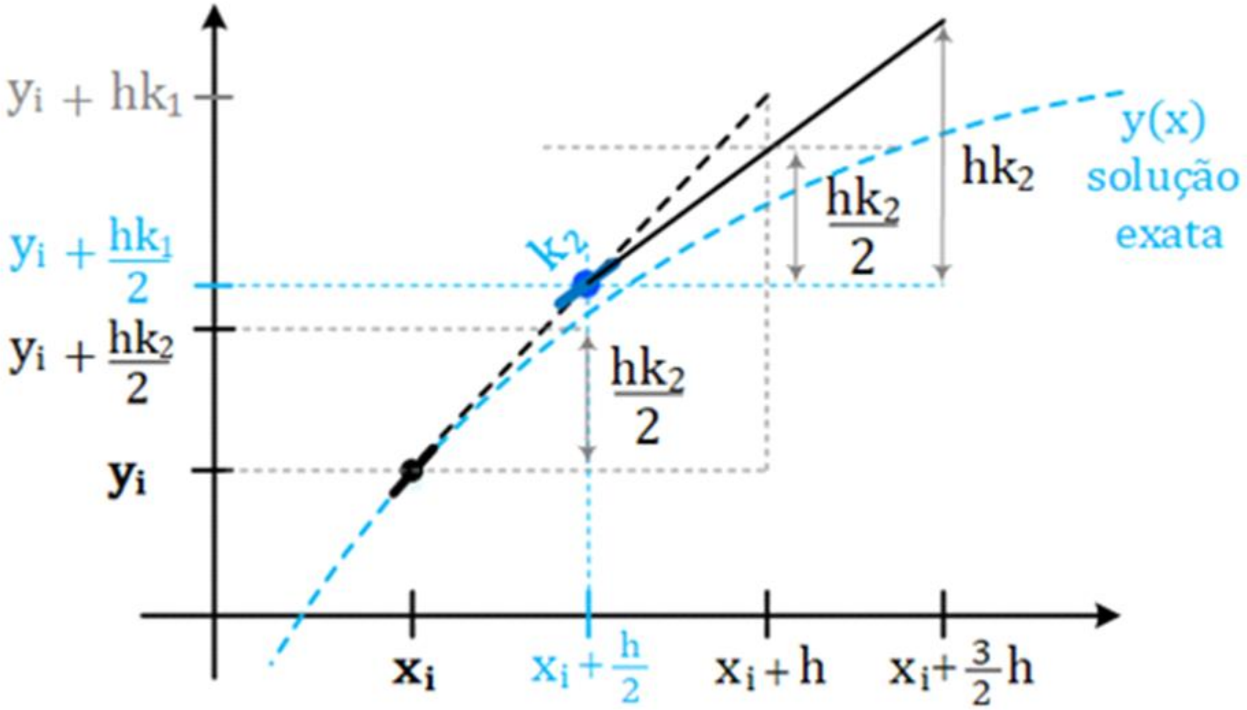
$$k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3 h) \qquad (viii.d)$$



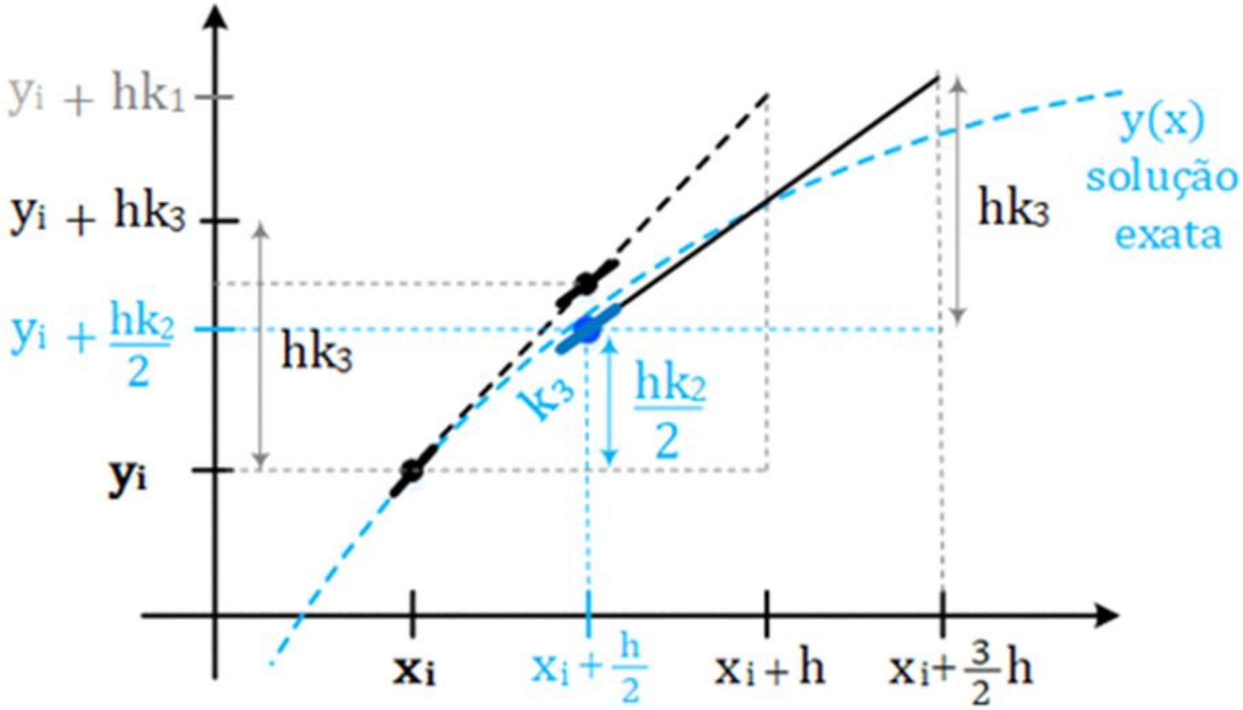
Método RK clássico de 4ª ordem
Interpretação gráfica

- **1ª estimativa $k_1 = f(x_i, y_i)$ e preparação para a 2ª estimativa:**
- Para a segunda estimativa, o método de RK utilizará a metade do incremento ($hk_1 / 2$) e o valor de x na metade do caminho entre x_i e o próximo passo $x_i + h$.

Método RK clássico de 4ª ordem Interpretação gráfica



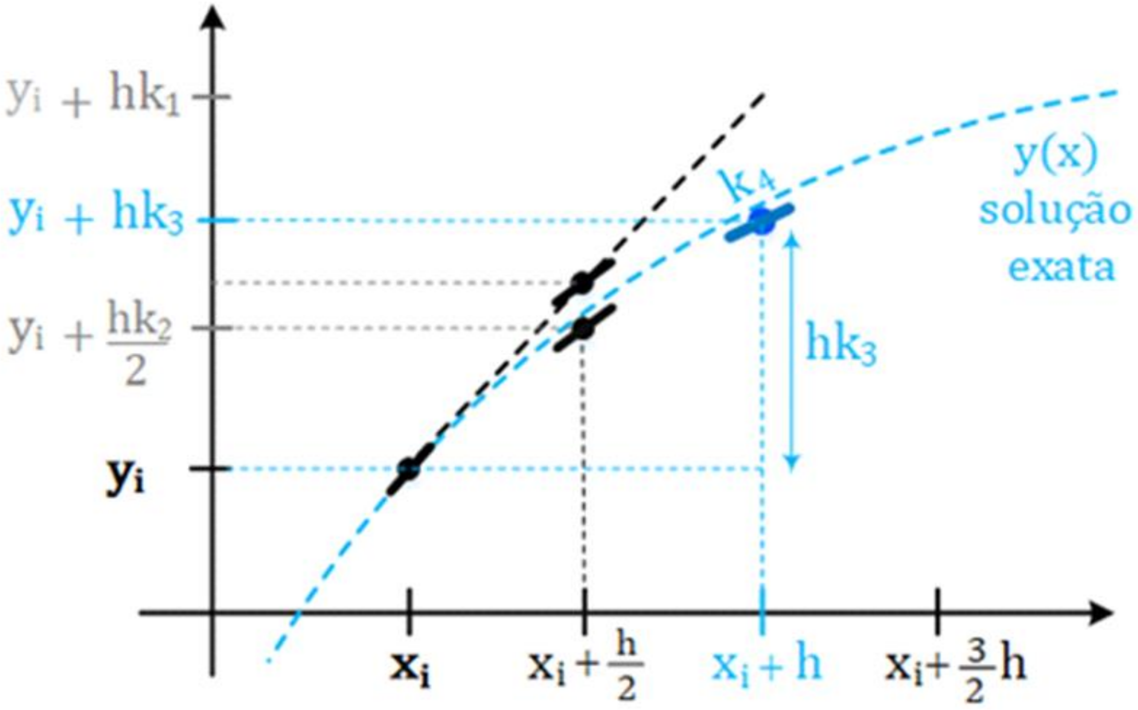
- **2ª estimativa $k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2)$ e preparação p/ a 3ª:**
- Para a segunda estimativa, o método de RK pega a metade do incremento ($hk_2/2$) e o valor de x na metade do caminho entre x_i e o próximo passo $x_i + h$.



Método RK clássico de 4ª ordem Interpretação gráfica

- **3ª estimativa $k_3 = f(x_i+h/2,\ y_i+hk_2/2)$ e preparação p/ a 4ª:**
- Após realizar o segundo cálculo de valor médio, o método RK4 utiliza o valor de $x = x_i + h$ e $y = y_i + h\,k_3$

Método RK clássico de 4ª ordem Interpretação gráfica



- **4ª estimativa $k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$:**
- É realizada a estimativa final, calculando a inclinação da solução que passa pelo valor $(x_i + h, y_i + h\, k_3)$.

Método RK clássico de 4ª ordem

- Tem-se, então, 4 inclinações perto do ponto atual (x_i, y_i). Cada um dos k's da expressão *(vii)* representa uma inclinação.
- Assim, a equação *(vii)* representa uma média ponderada que fornece uma estimativa melhorada da inclinação para o cálculo do próximo ponto.

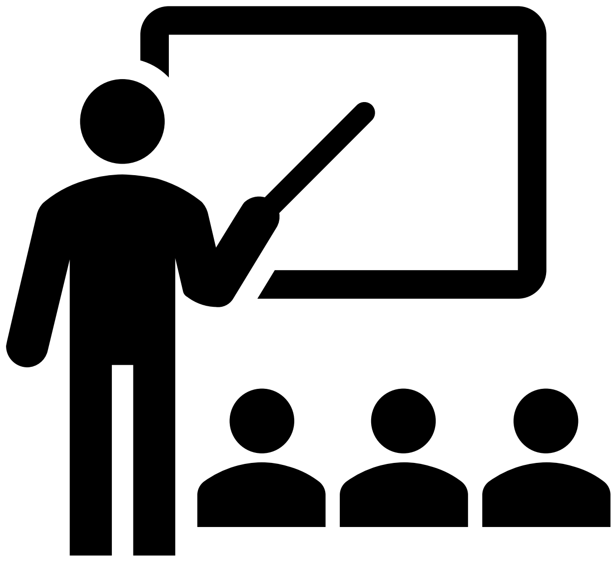
EXEMPLO 10.2

- Usar o Método RK 4ª ordem para integrar

$$y' = 4e^{0,8\,t} - 0,5y$$

de t = 0 a 1, com um passo 1.

A condição inicial em t = 0 é y = 2.



Exemplo 10.2 Solução

$y' = 4\ e^{0,8\,t} - 0,5y$

- A inclinação no início do intervalo é calculada como

$$k_1 = f(0,2) = 4e^0 - 0,5 \cdot 2 = 3$$

- Com esse valor, calcula-se um valor de y e a inclinação k_2 no meio do intervalo:

$$y(0,5) = y(0) + \frac{1}{2}k_1 h = 2 + 0,5 \cdot 3 = 3,5$$

$$k_2 = f(0,5{,}3,5) = 4 \cdot e^{0,8 \cdot 0,5} - 0,5 \cdot 3,5 = 4,21730$$

- Com k_2, calcula-se um novo valor de y e a inclinação k_3 no meio do intervalo:

$$y(0,5) = y(0) + \frac{1}{2}k_2 h = 2 + 0,5 \cdot 4,21730 = 4,10865$$

$$k_3 = f(0,5{,}4,10865) = 4 \cdot e^{0,8 \cdot 0,5} - 0,5 \cdot 4,10865 = 3,91297$$

Exemplo 10.2
Solução

$y' = 4\, e^{0,8\,t} - 0,5y$

- Com esse valor, calcula-se um valor de y e a inclinação k_4 no final do intervalo:

$$y(1) = y(0) + k_3 h = 2 + 3,91297 \cdot 1 = 5,91297$$
$$k_4 = f\left(1,\ \ 5,91297\right) = 4 \cdot e^{0,8 \cdot 1} - 0,5 \cdot 5,91297 = 5,94568$$

- Finalmente, a equação (vii) fornece a estimativa derradeira no final do intervalo:

$$y(1,0) = y(0) + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right) h$$
$$y(1,0) = 2 + \frac{1}{6}\left(3 + 2 \cdot 4,21730 + 2 \cdot 3,91297 + 5,94568\right) \cdot 1$$
$$y(1,0) = 2 + 4,20104 = 6,20104$$

- O erro relativo percentual verdadeiro vale:

$$\varepsilon_t = \left| \frac{6,19463 - 6,20104}{6,19463} \right| \cdot 100 = 0,103\,\%$$

Exemplo 10.2
Solução

- Observe que o erro relativo percentual verdadeiro empregando o método de Euler com o mesmo passo de cálculo era de 19,28 %!

$$\varepsilon_t = \left| \frac{6,19463 - 6,20104}{6,19463} \right| \cdot 100 = 0,103\,\%$$

Sistemas de EDOS simultâneas

- Forma geral:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_{1,} y_{2,} \cdots, y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_{1,} y_{2,} \cdots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_{1,} y_{2,} \cdots, y_n)$$

- A solução de tal sistema exige que sejam conhecidas n condições iniciais no valor inicial de t.

Aplicando RK4 em EDOs de mais alta ordem

- Seja a EDO:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + xy = e^x$$

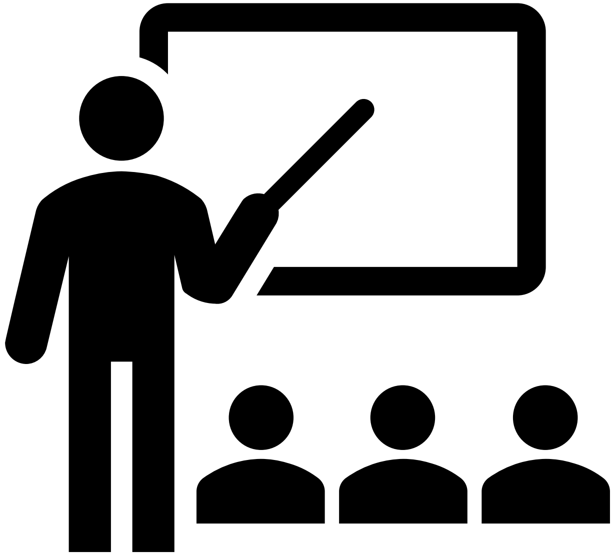
- Para aplicar RK4, monta-se o seguinte sistema:

$$y = y_1$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = y_2$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy_2}{dt} = y_3$$
$$\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{dy_3}{dt} = e^x - xy_1 + 2y_2 - y_3$$

EXEMPLO 10.3

Determine a velocidade e a posição do saltador de *bungee jumping* em queda livre utilizando o método RK4. Considere que em t = 0, x = v = 0, e integre para t = 2 s com um passo de 1 s. A aceleração da gravidade é 9,81 m/s^2 e o saltador tem uma massa de 68,1 kg, com um coeficiente de arraste de 0,25 kg/m.

Elabore uma função Scilab que utilize o método de RK4 para a solução de sistemas de EDOs e teste determinando a velocidade e a posição do saltador para t = 10 s



EXEMPLO - SOLUÇÃO

- Organizando o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{C_d}{m} v^2 \end{cases}$$

$$x = y_1$$

$$v = y_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(t, y_1, y_2) = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_1(t, y_1, y_2) = 9{,}81 - 0{,}0036711 \cdot y_2^2 \end{cases}$$

Para t = 0, $y_1(0) = 0$ e $y_2(0) = 0$

$$k_1 = f\left(t_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(t_i + h, y_i + k_3 h\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h$$

EXEMPLO - SOLUÇÃO

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(t, y_1, y_2) = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_1(t, y_1, y_2) = 9{,}81 - 0{,}0036711 \cdot y_2^2 \end{cases}$$

- Primeiro passo:

$k_{1,1} = f_1(0{,}0{,}0) = 0$ ⇨ $y_1(0{,}5) = y_1(0) + k_{1,1} \cdot \frac{h}{2} = 0 + 0 \cdot 0{,}5 = 0$

$k_{1,2} = f_2(0{,}0{,}0) = 9{,}81$ ⇨ $y_2(0{,}5) = y_2(0) + k_{1,2} \cdot \frac{h}{2} = 0 + 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 4{,}905$

$k_{2,1} = f_1(0{,}5, 0, 4{,}905) = 4{,}905$ ⇨ $y_1(0{,}5) = y_1(0) + k_{2,1} \cdot \frac{h}{2} = 0 + 4{,}905 \cdot 0{,}5 = 2{,}4525$

$k_{\mathbf{2,2}} = f_2(0{,}5, 0, 4{,}905)$
$= 9{,}81 - 0{,}0036711 \cdot 4{,}905^2$
$= 9{,}7216769$ ⇨ $y_2(0{,}5) = y_2(0) + k_{2,2} \cdot \frac{h}{2} = 0 + 9{,}7216769 \cdot 0{,}5 =$
$4{,}8608385$

EXEMPLO - SOLUÇÃO

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(t, y_1, y_2) = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_1(t, y_1, y_2) = 9{,}81 - 0{,}0036711 \cdot y_2^2 \end{cases}$$

$y_1(0{,}5) = 2{,}4525$ $\quad y_2(0{,}5) = 4{,}8608385$

- Primeiro passo:

$k_{3,1}$
$= f_1(0{,}5, 2{,}4525, 4{,}8608385)$
$= 4{,}8608385$

$\Rightarrow$ $y_1(1) = y_1(0) + k_{3,1} \cdot h = 0 + 4{,}8608385 \cdot 1 =$ $4{,}8608385$

$k_{3,2} = f_2(0{,}5, 2{,}4525, 4{,}8608385)$
$= 9{,}81 - 0{,}0036711 \cdot 4{,}8608385^2$
$= 9{,}7232602$

$\Rightarrow$ $y_2(1) = y_2(0) + k_{3,2} \cdot h = 0 + 9{,}7232602 \cdot 1 =$ $9{,}7232602$

$k_{4,1} = f_1(1, 4{,}8608385, 9{,}72326025)$
$= 9{,}7232602$

$\Rightarrow$ $y_1(1) = y_1(0) + \dfrac{h}{6}\left(k_{1,1} + 2\,k_{2,1} + 2\,k_{3,1} + k_{4,1}\right)$
$= 4{,}8758229$

$k_{4,2} = f_2(1, 4{,}8608385, 9{,}72326025)$
$= 9{,}81 - 0{,}0036711 \cdot 9{,}7232602^2$
$= 9{,}4629276$

$\Rightarrow$ $y_2(1) = y_2(0) + \dfrac{h}{6}\left(k_{1,2} + 2\,k_{2,2} + 2\,k_{3,2} + k_{4,2}\right)$
$= 9{,}6938003$

EXEMPLO - SOLUÇÃO

- Aplicando o mesmo procedimento em um segundo passo, chega-se a (confira):

$k_{1,1} = 9{,}6938003$

$k_{1,2} = 9{,}4650276$

$k_{2,1} = 14{,}426314$

$k_{2,2} = 9{,}045976$

$k_{3,1} = 14{,}216788$

$k_{3,2} = 9{,}0680081$

$k_{4,1} = 18{,}761808$

$k_{4,2} = 8{,}5177528$

$$y_1(2) = 19{,}166125\ m$$

$$y_2(2) = 18{,}728925\ {}^{m}/_{s}$$

A disciplina de Circuitos Elétricos de um curso de Engenharia no ano letivo de 2018/2, tem 92 alunos inscritos. Inicialmente, um grupo de 10 alunos resolveu lançar o boato de que a avaliação de recuperação iria ser cancelada. Em média cada estudante conversa com outros colegas a uma taxa de 2 estudantes/hora, podendo estes já saberem ou não da novidade. Se y representar o número de estudantes que sabem do boato no instante de tempo t (horas) então a taxa de recepção do boato é dada por:

$$\frac{dy}{dt} = 2\,y\left(\frac{92-y}{92}\right)$$

a) Utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, calcule o número de estudantes que após 2 horas tomou conhecimento do boato (use h = 1).

b) Encontre a solução analítica e calcule o erro verdadeiro percentual introduzido pelo método numérico utilizado.

Exercício

Função Scilab

Runge Kutta – 4ª ordem

Função Scilab

```
function [y, t]=rk4(fun, ti, tf, h, y0)
// Res. de sist. EDs por RK4
// function [y,t]=rk4(fun,ti,tf,h,y0)
// onde y é o vetor solução para a variavel depentente
//      t é o vetor da variável independente
//      ti é o instante inicial
//      tf é o instante final
//      h é o tamanho do pass
//      y0 valor inicial da variável dependente
// Exemplo de chamada:
// exec('path\rk4.sci',-1)
// fun = '[ya(2),9.81-(0.25/68.1)*ya(2)^2]'
// [y,t]=rk4(fun,ti,tf,h,y0)
//

  t(1) = ti; y(1,:)=y0; i =1;ta=ti
```

Função Scilab

```
// inicio do processo iterativo
  while ta < tf do
    ya = y(i,:);
    k1 = evstr(fun);
    ya=y(i,:)+k1*h/2;
    ta = ta + h/2;
    k2 = evstr(fun);
    ya=y(i,:)+k2*h/2;
    k3 = evstr(fun);
    ya=y(i,:)+k3*h;
    ta = ta + h/2;
    k4 = evstr(fun);
    phi = (k1+2*(k2+k3)+k4)/6;
    y(i+1,:)=y(i,:)+phi*h;
    t(i+1)=ta;
    i=i+1;
  end
endfunction
```

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$
$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$
$$k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3 h)$$

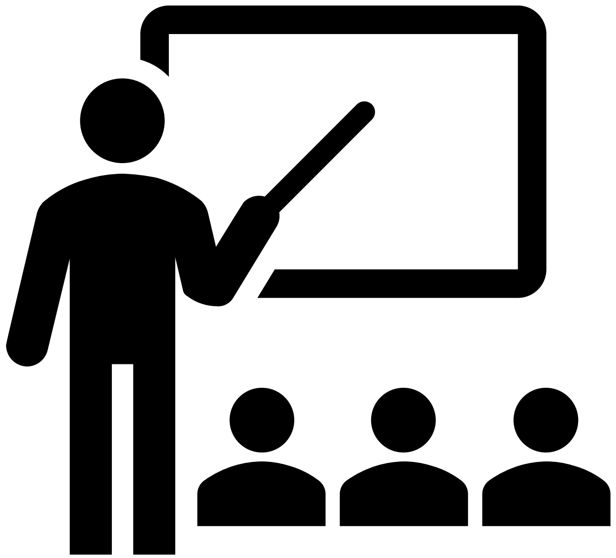
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

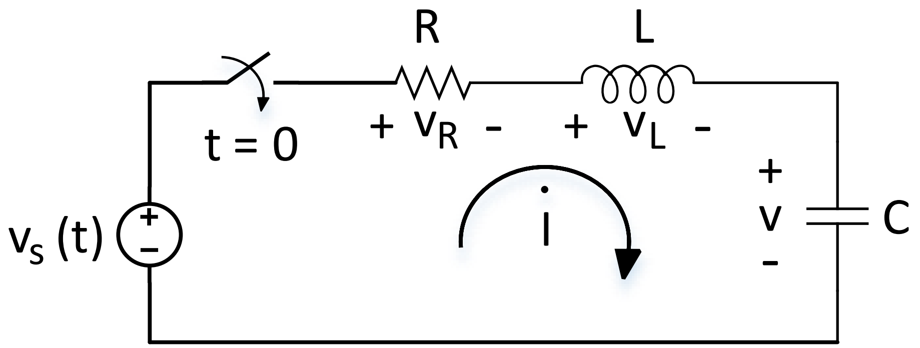
EXEMPLO 10.4

Obtenha o gráfico de $v(t)$ para 0 < t < 0,5s para o circuito da Figura, sendo $v_S(t) = 12\,V$, $L = 0{,}5\,H$, $C = 3{,}2\,mF$ e $R = 30\,\Omega$. Suponha $v(0) = -10\,V$ e $i(0) = 0{,}16\,A$:

a) Usando a solução analítica

b) Numericamente com auxílio do Scilab e h = 0,025





EXEMPLO 10.4

a) Com as condições iniciais v(0) e i(0) determinadas, o primeiro passo para encontrar a solução é encontrar $dv(0^+)/dt$:

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{I_0}{C} = \frac{0{,}16}{3{,}2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1600}{32} = 50\,V/s$$

O próximo passo é determinar o caso, calculando α e ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}5 \cdot \ 3{,}2 \cdot 10^{-3}}} = \frac{100}{\sqrt{16}} = 25\,rad/s$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{30}{2 \cdot 0{,}5} = 30\,rad/s$$

EXEMPLO 10.4

Como $\alpha > \omega_0$, ambas as raízes são reais e distintas e a resposta é **superamortecida,** da forma:

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + V_S = \boldsymbol{A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + 12}$$

As raízes são calculadas como segue

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2} = -30 + \sqrt{30^2 - 25^2} = -30 + 16{,}58$$

$$s_1 = -13{,}42\ rad/s$$

$$s_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2} = -30 - \sqrt{30^2 - 25^2} = -30 - 16{,}58$$

$$s_2 = -46{,}58\ rad/s$$

Assim a resposta completa é

$$v(t) = A_1 e^{-13{,}42 t} + A_2 e^{-46{,}58 t} + 12$$

EXEMPLO 10.4

O 3^0 passo é encontrar as constantes desconhecidas.

$$v(t) = A_1 e^{-13{,}42t} + A_2 e^{-46{,}58t} + 12 \xrightarrow{t\ =\ 0} v(0) = A_1 e^0 + A_2 e^0 + 12 = -10$$

$v(0) = -10$

Derivando

$$\frac{dv(t)}{dt} = -13{,}42\, A_1 e^{-13{,}42t} - 46{,}58\, A_2 e^{-46{,}58t}$$

$t\ =\ 0$ $\quad dv(\,0^+)/dt = 50$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -13{,}42\, A_1 e^0 - 46{,}58\, A_2 e^0 = 50$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_2} = -22 \\ -13{,}42\, \boldsymbol{A_1} - 46{,}58 \boldsymbol{A_2} = 50 \end{cases}$$

EXEMPLO 10.4

$$\begin{cases} \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_2} = -22 \times \mathbf{46,58} \\ -13{,}42\,\boldsymbol{A_1} - 46{,}58\boldsymbol{A_2} = 50 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A_2} = 7{,}40$$

$$A_1 = -29{,}40$$

$+$

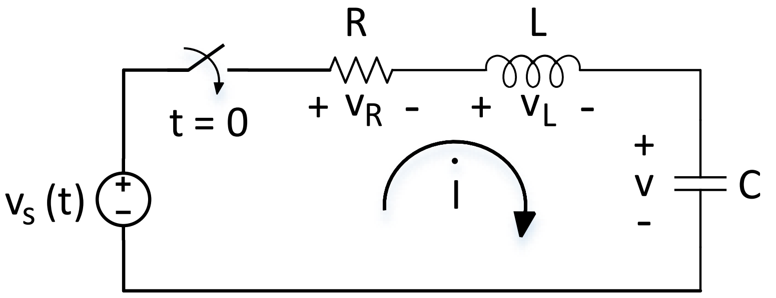
$$33{,}16\,A_1 = -974{,}76$$

$$v(t) = A_1 e^{-13{,}42t} + A_2 e^{-46{,}58t} + 12$$

$$A_1 = -29{,}40$$
$$A_2 = 7{,}40$$

$$v(t) = -29{,}40e^{-13{,}42t} + 7{,}40e^{-46{,}58t} + 12 \quad (V)$$ válida para $t \geq 0$.

EXEMPLO 10.4



b) Montando o sistema de EDOs de 1ª ordem:

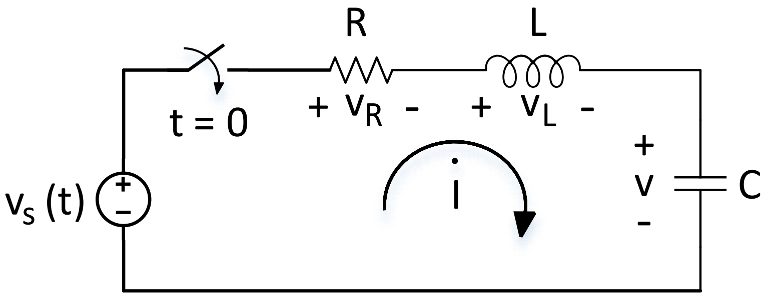
$$i = C\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{i}{C}$$

$$R\,i + L\frac{di}{dt} + v = v_S \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}(v + R\,i - v_S)$$

Para uso no Scilab, a função literal fica:

```
--> R=30; L=0.5; C=3.2d-3; vs=12;
--> fun='[ya(2)/C, (-1/L)*(ya(1)+R*ya(2)-vs)';
```

EXEMPLO 10.4



Para traçar o gráfico de v(t) usando a função RK4, incluir no fim da função (antes de endfunction) a linha:

```
plot(t,y(:,1)); xgrid
```

Assim, os comandos executados no Scilab serão:

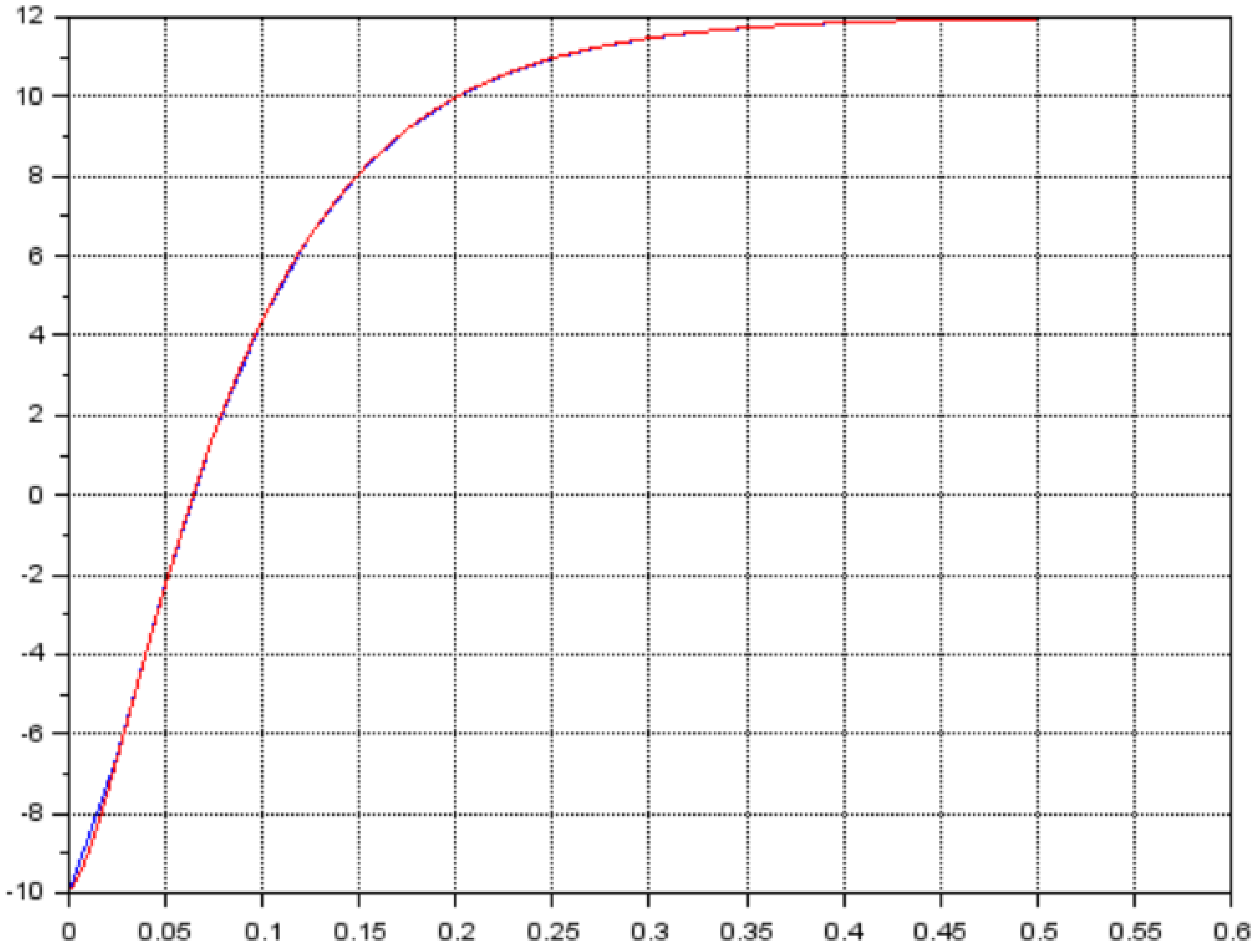
```
--> R=30; L=0.5; C=3.2d-3; vs=12;
--> fun='[ya(2)/C, (-1/L)*(ya(1)+R*ya(2)-vs)]';
--> [y,t]=rk4(fun,0,0.5,0.025,[-10, 0.16])
```

EXEMPLO 10.4

Para sobrepor o gráfico que representa solução analítica, executam-se os seguintes comando no console:

```
--> t=linspace(0,0.5,100);
--> v=-29.4*exp(-13.42*t)+7.4*exp(-45.68*t)+12;
--> plot(t,v,'red’)
gerando o resultado final mostrado a seguir
```

EXEMPLO 10.4



--- Numérico

--- Analítico

Bibliografia e crédito das figuras

- CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.
- CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.
- EULER, Leonhard. **Institutionum calculi integralis volumen primun.** Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org/pages/E342.html>. Acessado em 29 de setembro de 2015.
- KUTTA, W. Beitrag zur näherungsweisen integration totaler differentialgleichungen. **Z. Math. Phys.**, vol. 46, p. 435 – 453, 1901.
- RUNGE, C. Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. **Math. Ann.**, vol. 46, p. 167 – 178, 1895.