



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Prof. Marco Valério Miorim Villaça

Capítulo III

Resolução de sistemas de equações lineares por métodos diretos e iterativos

Parte II – Métodos diretos

B. Fatoração ou Decomposição LU (Lower Up)

Fatoração LU

- Embora seja um método seguro para resolver sistemas de equações lineares da forma $[A] \{x\} = \{b\}$, a *Eliminação de Gauss* se torna ineficiente ao resolver sistemas com a mesma matriz $[A]$, mas com diferentes vetores $\{b\}$, pois manipula $[A]$ e $\{b\}$ juntos.
- A *Fatoração LU* separa a eliminação da matriz $[A]$, das manipulações do vetor $\{b\}$. Assim, após $[A]$ ser decomposta, ela pode ser utilizada na solução do sistema para múltiplos vetores $\{b\}$.

Fatoração LU

- Deseja-se resolver o sistema de equações 3 x 3:

$$[A]\{x\} - \{b\} = 0 \quad (i)$$

- Com o objetivo de resolver o sistema, a matriz A será fatorada como o produto de uma matriz triangular inferior L e uma matriz U triangular superior, levando o sistema a ser reescrito na seguinte sequência:

$$[L][U]\{x\} - \{b\} = 0 \quad (ii)$$

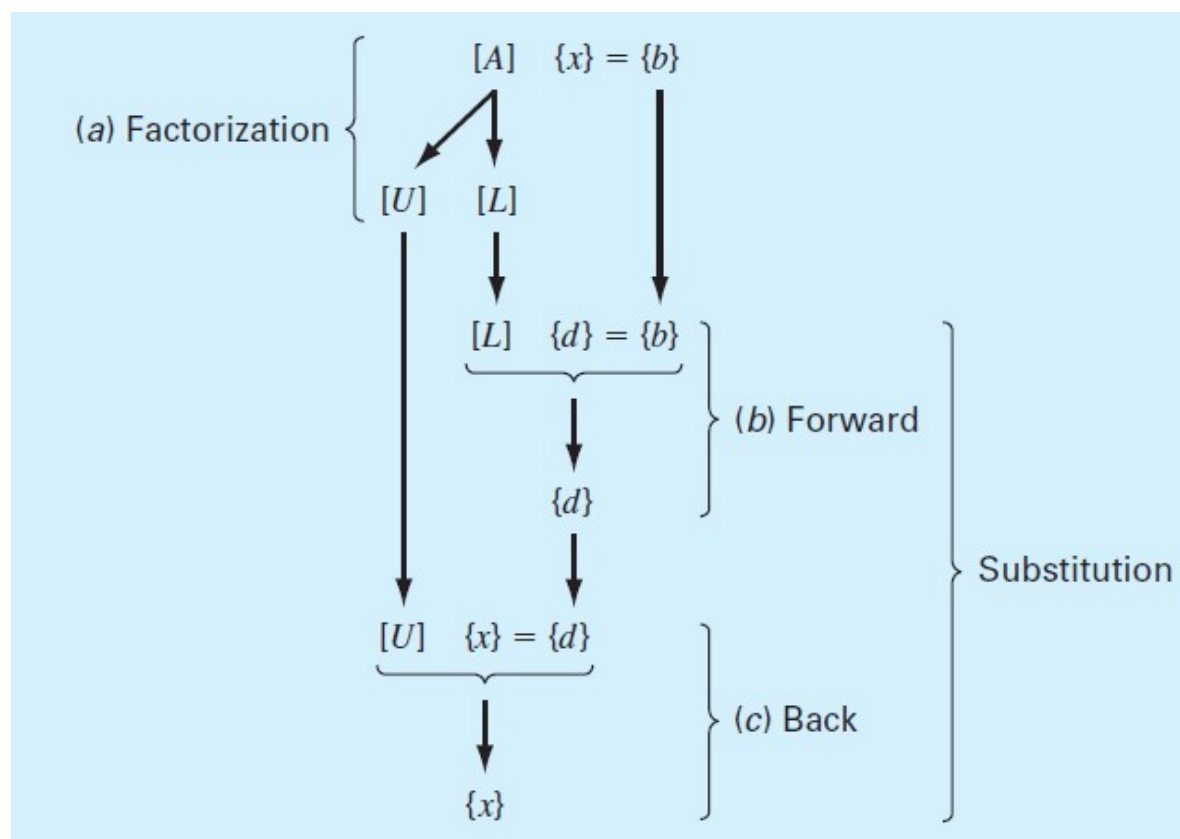
$$[L] \{[U]\{x\}\} - \{b\} = 0 \quad (iii)$$

$$[L]\{d\} = \{b\} \quad (iv)$$

$$e \quad [U]\{x\} = \{d\} \quad (v)$$

Fatoração LU

- A figura abaixo apresenta a estratégia de 2 passos para obter a solução de (i) com o auxílio da Fatoração LU:



Fatoração LU

- A matriz U é obtida ao final do escalonamento da matriz A:

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad (vi)$$

- A matriz L é obtida a partir da matriz identidade ao final do escalonamento da matriz A:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (vii)$$

Fatoração LU

- Substituindo (vii) em (iv) e (vi) em (v), obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (viii)$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (ix)$$

Fatoração LU

- Descrevendo a estratégia de 2 passos:

1. **Passo da Fatoração LU:**

(a) A matriz A é fatorada ou decomposta nas matrizes triangulares L e U ;

2. **Passo da substituição**, onde L e U são usadas para obter a solução de x :

(b) A equação (viii) é usada para se obter o vetor d por substituição progressiva;

(c) O resultado é substituído em (ix), a qual é resolvida por substituição regressiva para x .

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

Nota histórica

- O matemático britânico Alan Turing (1948) formulou a eliminação Gaussiana como uma *fatoração LU* de uma matriz e introduziu o *número de condicionamento de uma matriz*, ambos deles itens fundamentais da análise numérica moderna.

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

- É fácil perceber que a matriz U é um produto direto do passo de eliminação progressiva da eliminação de Gauss (EG) sobre a matriz A :

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \quad (viii)$$

- Embora não seja aparente, a matriz L também é obtida nesse passo, conforme veremos para um sistema 3×3 .

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

- Seja o sistema 3 x 3:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$
- O primeiro passo da EG é multiplicar a linha 1 pelo fator

$$l_{21} = a_{21} / a_{11}$$

e subtrair o resultado da segunda linha para eliminar a_{21} .

- Similarmente, a linha 1 é multiplicada por

$$l_{31} = a_{31} / a_{11}$$

e subtrair o resultado da terceira linha para eliminar a_{31} .

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

- O último passo da EG é multiplicar a linha 2 modificada pelo fator

$$l_{32} = a'_{32} / a'_{22}$$

e subtrair o resultado da terceira linha para eliminar a_{32} .

- Os elementos l_{21} , l_{31} e l_{32} podem ser armazenados na matriz A no lugar dos elementos a_{21} , a_{31} e a_{32} os quais a eliminação busca anular:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ l_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ l_{32} & l_{32} & a''_{33} \end{bmatrix} \quad (ix)$$

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

- A matriz representada em (ix) é uma forma eficiente de armazenar a fatoração LU da matriz A:

$$[A] = [L][U]$$

onde

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

Exercício

- Dada as equações:

$$\begin{array}{rrcr} 10x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 27 \\ -3x_1 & -5x_2 & +2x_3 & = -61,5 \\ x_1 & +x_2 & +6x_3 & = -21,5 \end{array}$$

- (a) Realize a Fatoração LU baseada na eliminação de Gauss.
- (b) Confira o resultado utilizando a função *lu* do *Scilab*.

$$[L, U] = \text{lu}(A) ;$$

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

- Após a matriz A ser decomposta, a solução de um sistema de equações lineares pode ser encontrado, em 2 passos:

1. Uma substituição progressiva é executada resolvendo a

equação (vii) para {d}:
$$d_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_j \quad \text{para } i=1, 2, \dots, n$$

2. Uma substituição regressiva idêntica a fase de substituição regressiva da EG é executada para resolver (ii) para {x}:

$$x_n = \frac{d_n}{u_{nn}}$$
$$x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j}{u_{ii}} \quad \text{para } i=n-1, n-2, \dots, 1$$

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

Exercício

- Complete o exercício anterior gerando a solução do sistema de equações realizando as substituições progressiva e regressiva.

Fatoração LU com pivotamento

- Utiliza-se uma matriz de permutação $[P]$ para manter o controle das linhas pivotadas.
- Uma matriz de permutação é uma matriz quadrada binária que tem o efeito de gerar uma permutação dos elementos de um vetor ou entre linhas ou colunas de uma matriz. É formada apenas de zeros e uns, sendo que apenas um elemento por linha e por coluna apresenta valor igual a um.
- A Matriz identidade é uma matriz de permutação.

Fatoração LU com pivotamento

1. Eliminação

A matriz $[U]$ é gerada por eliminação com pivotamento, enquanto armazenam-se os fatores de multiplicação em $[L]$.

A matriz $[P]$ e os fatores de multiplicação **devem acompanhar** o pivotamento, de modo que

$$[P] [A] = [L] [U]$$

Fatoração LU com pivotamento

2. Substituição Progressiva

$$[L] \{d\} = [P] \{b\}$$

3. Substituição regressiva

A solução é obtida da mesma forma que no passo equivalente da eliminação de Gauss:

$$[U] \{x\} = \{d\}$$

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

Exercício

- Dadas as equações

$$2x_1 - 6x_2 - x_3 = -38$$

$$-3x_1 - x_2 + 6x_3 = -34$$

$$-8x_1 + x_2 - 2x_3 = -40$$

- Resolva o sistema manualmente, utilizando a Fatoração LU com pivotamento.
- Para conferir, utilize a função *lu* e o operador `' \ '` para obter a solução.
- Faça uma função *Scilab* que obtenha a solução do sistema utilizando a eliminação de Gauss por *fatoração LU* com pivotamento (Geração das matrizes, substituições progressiva e regressiva).

Bibliografia e crédito das figuras

- CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATLAB for engineers and scientists**. McGrawHill, 2012.
- CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers**. McGrawHill, 2010.
- TURING, Alan. Rounding-off errors in matrix processes. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, vol. I, pp. 287 – 308, set. de 1948.