Método de Newton Raphson

6.4 RAÍZES MÚLTIPLAS

Uma *raiz múltipla* corresponde a um ponto onde a função é tangente ao eixo x. Por exemplo, uma raiz dupla aparece em

$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1) \tag{6.9}$$

ou, multiplicando os termos, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. A equação tem uma *raiz dupla* porque um valor de x torna dois termos na Equação (6.9) iguais a zero. Graficamente, isso corresponde à curva tocar o eixo x tangencialmente na raiz dupla. Examine a Figura 6.10*a* em $x = 1$. Observe que, na raiz, a função toca o eixo, mas não o cruza.

Uma *raiz tripla* corresponde ao caso no qual um valor de x anula três termos em uma equação, como em

$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)(x-1)$$

ou, multiplicando os termos, $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$. Observe que a descrição gráfica (Figura 6.10*b*) indica novamente que a função é tangente ao eixo na raiz, mas que, nesse caso, o eixo é cruzado. Em geral, raízes com multiplicidade ímpar cruzam o eixo, enquanto as pares não. Por exemplo, a raiz quádrupla na Figura 6.10*c* não cruza o eixo.

As raízes múltiplas causam algumas dificuldades para muitos dos métodos numéricos descritos na Parte Dois:

1. O fato de a função não mudar de sinal em raízes de multiplicidade par impede o uso dos métodos intervalares confiáveis, que foram discutidos no Capítulo 5. Portanto, dos métodos descritos neste livro, você está limitado aos métodos abertos, que podem divergir.
2. Um outro problema possível está relacionado ao fato de que não só $f(x)$ mas também $f'(x)$ vai a zero na raiz. Isso introduz problemas tanto no método de Newton-Raphson quanto no da secante, já que ambos contêm a derivada (ou sua estimativa) no denominador de suas respectivas fórmulas, o que pode resultar na divisão por zero quando a solução converge para muito próximo da raiz. Uma forma simples de contornar esse problema é baseada no fato que pode ser demonstrado teoricamente (Ralston e Rabinowitz, 1978) que $f(x)$ sempre atingirá zero antes de $f'(x)$. Portanto, se uma verificação do zero for incluída no programa de computador, os cálculos podem ser parados antes de $f'(x)$ atingir zero.
3. É possível demonstrar que os métodos de Newton-Raphson e da secante são linearmente — em vez de quadraticamente — convergentes para raízes múltiplas (Ralston e Rabinowitz, 1978). Foram propostas modificações para diminuir esse problema. Ralston e Rabinowitz (1978) indicaram que uma pequena mudança na formulação restaura sua convergência quadrática, como em

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{6.9a}$$

onde m é a multiplicidade da raiz (isto é, $m = 2$ para uma raiz dupla, $m = 3$ para uma raiz tripla etc.). É claro que isso pode ser uma alternativa insatisfatória, porque depende do conhecimento prévio da multiplicidade da raiz.

Uma outra alternativa, também sugerida por Ralston e Rabinowitz (1978), é definir uma nova função $u(x)$, isto é, o quociente da função por sua derivada, como em

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{6.10}$$

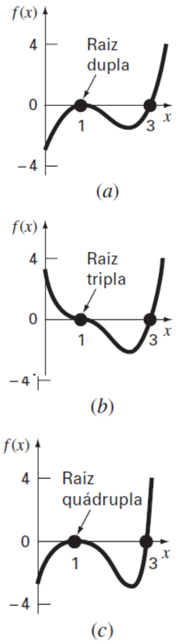

FIGURA 6.10
Exemplos de raízes múltiplas que são tangentes ao eixo x. Observe que a função não cruza o eixo em cada lado das raízes de multiplicidade par (*a*) e (*c*), enquanto cruza o eixo nos casos ímpares (*b*).

É possível mostrar que essa função tem raízes em todas as mesmas posições que a função original. Portanto, a Equação (6.10) pode ser substituída na Equação (6.6) para deduzir uma forma alternativa para o método de Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)} \tag{6.11}$$

A equação (6.10) pode ser derivada para fornecer

$$u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \tag{6.12}$$

As Equações (6.10) e (6.12) podem ser substituídas na Equação (6.11) e o resultado pode ser simplificado para fornecer

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)} \tag{6.13}$$

Referência: Chapra, Steven C. **Métodos numéricos para engenharia.** 5. ed. Porto Alegre : AMGH, 2011.

Exercício:

Seja a função

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 = 0$$

a) Utilizando a função vista em aula, calcular pelo Método de Newton Raphson, as raízes de multiplicidade 3 e a raiz de multiplicidade 1 de $f(x)$, com erro relativo percentual de 0,0001%.

b) Modificar a função adaptando a equação alternativa do método de Newton Raphson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\, f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)\, f''(x_i)}$$

e calcular as raízes de multiplicidade 3 e a raiz de multiplicidade 1 de $f(x)$, com erro relativo percentual de 0,0001%.

c) Analise os resultados obtidos.