```
function [raiz,fx,ea,iter]=bissec(func,xl,xu,es,maxit,varargin)
% bissec: localização de raízes pelo método da bissecção
%  [raiz,fx,ea,iter]=bisect(func,xl,xu,es,maxit,p1,p2,...):
%    usa o método da bissecção para encontrar a raiz de func
% entrada:
%  func = nome da função
%  xl, xu = aproximações inferior e superior
%  es = erro relativo desejado (padrão = 0,0001%)
%  maxit = número máximo de iterações permitidas (padrão = 50)
%  p1,p2,... = parâmetros adicionais usados por func
% saída:
%  raiz = raiz real
%  fx = valor da função em raiz
%  ea = erro relativo aproximado (%)
%  iter = número de iterações

if nargin<3,error('são necessários pelo menos 3 argumentos de
entrada'),end
test = func(xl,varargin{:})*func(xu,varargin{:});
if test>0,error('não há mudança de sinal'),end
if nargin<4|isempty(es), es=0.0001;end
if nargin<5|isempty(maxit), maxit=50;end
iter = 0; xr = xl; ea = 100;
while (1)
  xr_velho = xr;
  xr = (xl + xu)/2;
  iter = iter + 1;
  if xr ~= 0,ea = abs((xr - xr_velho)/xr) * 100;end
  test = func(xl,varargin{:})*func(xr,varargin{:});
  if test < 0
    xu = xr;
  elseif test > 0
    xl = xr;
  else
    ea = 0;
  end
  if ea <= es | iter >= maxit,break,end
end
raiz = xr; fx = func(xr, varargin{:});
```

FIGURA 5.7 Função do MATLAB para implementar o método da bissecção.

5.5 O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

O *método da falsa posição* (também chamado de método da interpolação linear) é outro método intervalar bem conhecido, bastante similar ao método da bissecção, com a exceção de que ele utiliza uma estratégia diferente para chegar à sua nova estimativa da raiz. Em vez de dividir o intervalo de x_l a x_u em duas partes iguais, ele localiza a raiz ligando $f(x_l)$ e $f(x_u)$ por uma reta (Figura 5.8). A intersecção dessa reta com o eixo x representa uma estimativa melhorada da raiz, ou seja, a forma da função influencia a nova estimativa da raiz. Usando triângulos semelhantes, a intersecção da reta com o eixo x pode ser estimada como (ver Chapra e Canala, 2010, para detalhes)

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \tag{5.7}$$

Essa é a *fórmula da falsa posição*. O valor de x_r calculado com a Equação (5.7) substitui então qualquer uma das duas aproximações iniciais, x_l ou x_u, que forneça um valor da função com o mesmo sinal que $f(x_r)$; dessa forma, os valores de x_l e x_u sempre delimitam a raiz verdadeira. O processo é repetido até que a raiz seja estimada adequadamente, e o algarismo é idêntico ao da bissecção (Figura 5.7), com a diferença de que a Equação (5.7) é utilizada para calcular a estimativa da raiz.

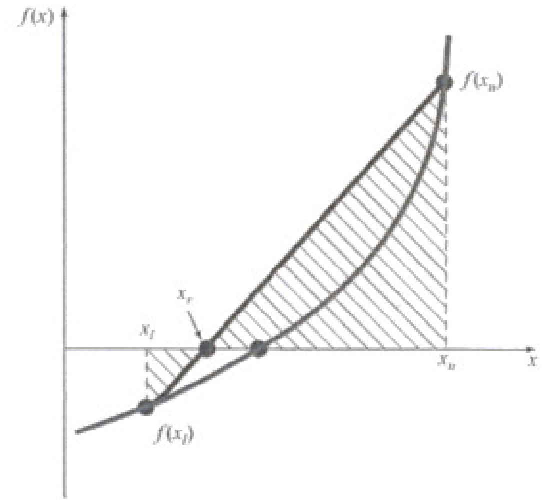

FIGURA 5.8 O método da falsa posição.

EXEMPLO 5.5 O método da falsa posição

Use o método da falsa posição para resolver o mesmo problema abordado graficamente e com o método da bissecção nos Exemplos 5.1 e 5.3.

Solução. Como no Exemplo 5.3, comece os cálculos com aproximações $x_l = 50$ e $x_u = 200$.

Primeira iteração:

$$x_l = 50 \qquad f(x_l) = -4{,}579387$$

$$x_u = 200 \qquad f(x_u) = 0{,}860291$$

$$x_r = 200 - \frac{0{,}860291(50 - 200)}{-4{,}579387 - 0{,}860291} = 176{,}2773$$

que tem um erro relativo verdadeiro de 23,5%.

Segunda iteração:

$$f(x_l)f(x_r) = -2{,}592732$$

A raiz, portanto, está no primeiro subintervalo e x_r se torna a aproximação superior da próxima iteração, x_u = 176,2773,

$$x_l = 50 \qquad f(x_l) = -4{,}579387$$
$$x_u = 176{,}2773 \qquad f(x_u) = 0{,}566174$$
$$x_r = 176{,}2773 - \frac{0{,}566174(50 - 176{,}2773)}{-4{,}579387 - 0{,}566174} = 162{,}3828$$

que tem erros relativos verdadeiro e aproximado de 13,76% e 8,56%, respectivamente. Caso deseje refinar a estimativa da raiz, é possível fazer iterações adicionais.

Embora o método da falsa posição geralmente tenha um melhor desempenho que a bissecção, há casos em que seu desempenho é deficiente ou inferior ao da bissecção, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 5.6 Um caso em que a bissecção é preferível à falsa posição

Use a bissecção e a falsa posição para localizar a raiz de

$$f(x) = x^{10} - 1$$

entre x = 0 e 1,3.

Solução. Usando a bissecção, os resultados podem ser resumidos por

Iteração	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	0	1,3	0,65	100,0	35
2	0,65	1,3	0,975	33,3	2,5
3	0,975	1,3	1,1375	14,3	13,8
4	0,975	1,1375	1,05625	7,7	5,6
5	0,975	1,05625	1,015625	4,0	1,6

Depois de cinco iterações, o erro verdadeiro foi reduzido para menos de 2%. Na falsa posição é obtida uma saída muito diferente:

Iteração	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	0	1,3	0,09430		90,6
2	0,09430	1,3	0,18176	48,1	81,8
3	0,18176	1,3	0,26287	30,9	73,7
4	0,26287	1,3	0,33811	22,3	66,2
5	0,33811	1,3	0,40788	17,1	59,2

Depois de cinco iterações, o erro verdadeiro diminuiu para cerca de 59%. É possível avaliar melhor tais resultados analisando-se o gráfico da função. Como na Figura 5.9, a curva viola a hipótese básica na qual a falsa posição está baseada – isto é, se $f(x_l)$ está muito mais próxima de zero do que $f(x_u)$, então a raiz está mais próxima de x_l do que de x_u (lembre-se da Figura 5.8). Devido à forma da função presente, o contrário é verdadeiro.

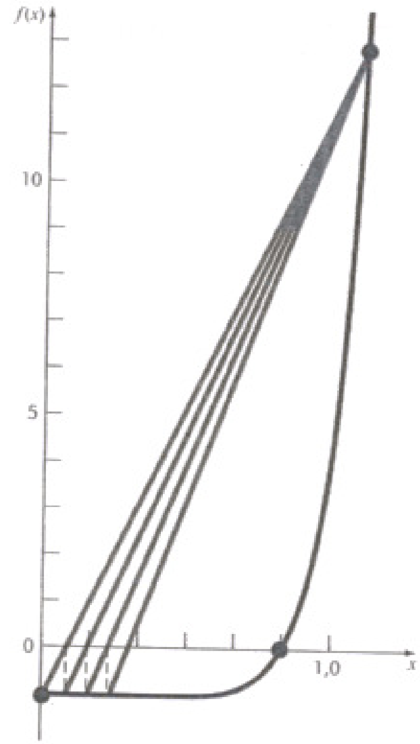

FIGURA 5.9 Gráfico de $f(x) = x^{10} - 1$, ilustrando a convergência lenta do método da falsa posição.

O exemplo anterior ilustra que, com relação aos métodos de localização de raízes, generalizações não costumam ser aceitas. Embora um método como a falsa posição seja quase sempre superior à bissecção, invariavelmente há casos que violam essas conclusões gerais. Portanto, além de se usar a Equação (5.5), os resultados deveriam sempre ser verificados substituindo a estimativa da raiz na equação original e verificando se o resultado está próximo de zero.

O exemplo também ilustra uma grande fraqueza do método da falsa posição: ele é unilateral, ou seja, conforme as iterações continuam, uma das extremidades do intervalo tenderá a permanecer fixa – o que pode levar à convergência insatisfatória, particularmente para funções com curvatura significativa. Possíveis soluções para essa desvantagem estão disponíveis em outras referências (Chapra e Canale, 2010).