

ВВЕДЕНИЕ

Полвека назад практически все электронные устройства были аналоговые, т.е. используемые в них сигналы являлись непрерывными. Типичными примерами могут служить радиоприемники, телевизоры, магнитофоны, различные усилители того времени. При проектировании таких устройств использовались, главным образом, методы непрерывной математики.

Теперь трудно найти человека, который не сталкивался бы с устройствами, использующими цифровые технологии и, следовательно, достижения дискретной математики являются актуальными.

Дискретная математика в последние годы быстро развивалась и в настоящее время огромное количество специалистов проводит исследования в различных ее областях. Она служит основой для создания интеллектуальных систем информации, защиты информации, нахождения методов принятия решения на основе анализа неполной и частично противоречивой информации.

Данное пособие предназначено не для математиков, оно ориентировано на студентов, обучающихся в технических вузах.

При подготовке данного пособия авторы стремились в основном к доступному изложению материала (за счет определенного снижения строгости), чтобы его с малыми затратами труда и времени могли освоить студенты технических вузов, и вообще каждый, кто изъявит желание ознакомиться с вводными понятиями дискретной математики.

Рассмотрены вопросы семи разделов, изучаемых в курсе дискретной математики: теории множеств, бинарных отношений, элементов математической логики, булевых функций, теории алгоритмов и автоматов, комбинаторики и теории графов. Изложены основные теоретические сведения и разобраны многочисленные примеры решения задач по всем разделам. Приведены варианты задач для выполнения индивидуальных заданий и расчетно–графических работ.

1. Теория множеств

Цель: познакомить с основными понятиями теории множеств, операциями над множествами, отображением множеств; научить использовать эти понятия и операции при решении задач.

1.1. Теоретическая часть

1.1.1. Множества, их элементы и подмножества

Под **множеством** понимают совокупность различных объектов любой природы, объединенных по какому – либо признаку, которые называют **элементами множества**.

Множества принято обозначать прописными буквами A, B, C, \dots , а их элементы – малыми буквами a, b, c, \dots .

Запись $a \in A$ означает, что объект a является элементом множества A (а принадлежит множеству A). Если объект b не принадлежит множеству B , то пишут $b \notin B$.

Стандартные обозначения важных числовых множеств:

\mathbb{N} – множество натуральных чисел;

\mathbb{Z} – множество целых чисел;

\mathbb{Q} – множество рациональных чисел;

\mathbb{R} – множество действительных (вещественных) чисел;

\mathbb{C} – множество комплексных чисел.

Множество можно обозначить также, записав внутри фигурных скобок все его элементы или записав их свойства. Например, $\{2, 4, 6, \dots\}$ – множество всех четных положительных чисел, $\{x \mid x = 2k + 1 \text{ для } k \in \mathbb{Z}\}$ – множество всех нечетных чисел.

Множество, число элементов которого конечно, называют **конечным**. В противном случае множество называют **бесконечным**.

Бесконечные множества делятся на счетные и несчетные. Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью натурального ряда чисел, то оно называется **счетным**, в противном случае – **несчетным**.

В разделе математики, называемом дискретной математикой, рассматриваются конечные и счетные множества.

Если каждый элемент множества A есть элемент множества B , то A называют **подмножеством** множества B и пишут $A \subseteq B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B называют **равными** и пишут $A = B$, иначе пишут $A \neq B$. Если $A \subseteq B$, $A \neq B$, то пишут $A \subset B$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается \emptyset или V . Пустое множество считается конечным множеством и подмножеством любого множества.

Если $A \subset B$, $A \neq \emptyset$, то множество A называется **собственным** подмножеством множества B .

Пустое множество и множество A называются **несобственными** подмножествами множества A .

Множество, содержащее все элементы, находящиеся в рассмотрении, называется **универсальным** и обозначается U .

Число всех подмножеств любого конечного множества, содержащего n элементов, равно 2^n . Так, например, для множества $\{a_1, a_2, a_3\}$ всеми его подмножествами являются \emptyset , $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_3\} = U$.

1.1.2. Операции над множествами

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

В частности, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$.

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству A , так и множеству B :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

В частности, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap U = A$.

Дополнением множества A называется множество \bar{A} , состоящее из всех элементов универсального множества U , не принадлежащих множеству A :

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

Заметим, что $A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Перечисленные операции проиллюстрируем диаграммами Эйлера – Венна (рис. 1.1).

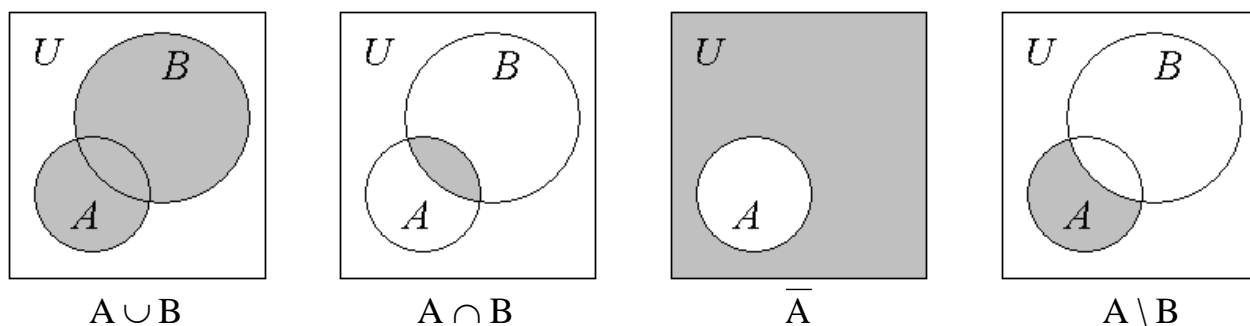


Рис. 1.1. Диаграммы Эйлера – Венна

Отметим порядок выполнения операций над множествами: 1) дополнение ($\bar{}$), 2) пересечение (\cap), 3) объединение (\cup), разность (\setminus).

Укажем основные свойства операций объединения, пересечения и дополнения:

1. Ассоциативность операций объединения и пересечения:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

2. Коммутативность операций объединения и пересечения:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

3. Законы идемпотентности:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

4. Законы дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

5. Законы поглощения:

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

6. Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

7. Закон двойного дополнения: $\overline{\overline{A}} = A$.

Отметим еще две важные операции над множествами – декартово произведение и симметрическую разность.

Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар (x, y) , где $x \in A$, $y \in B$:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

Аналогично вводятся понятия декартова произведения n сомножителей и декартовой степени множества:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\},$$

$$A \times A \times \dots \times A = A^n \quad (\text{для } n \text{ сомножителей}).$$

В частности, $P^2 = P \times P$, $P^3 = P \times P \times P$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств $A \setminus B$, $B \setminus A$:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Проиллюстрируем последнюю операцию диаграммой Эйлера – Венна (рис. 1.2).

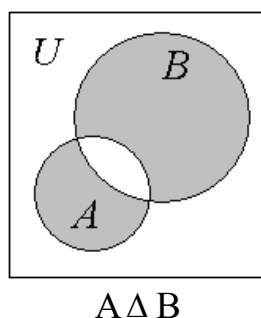


Рис. 1.2 Диаграмма Эйлера – Венна для симметрической разности множеств

1.1.3. Отображение множеств

Отображением f множества X в множество Y называют правило, по которому каждому элементу x множества X поставлен в соответствие некоторый

единственный элемент y множества Y . Для обозначения отображения f множества X в множество Y пользуются записью $f : X \rightarrow Y$.

Если x – элемент множества X , то соответствующий ему при отображении $f : X \rightarrow Y$ элемент y множества Y называют **образом элемента** x при данном отображении, обозначают $f(x)$ и пишут $y = f(x)$. Совокупность всех тех элементов x множества X , образом которых при отображении $f : X \rightarrow Y$ является данный элемент y множества Y , называют **прообразом элемента** y при данном отображении и обозначают $f^{-1}(y)$.

Если $A \subseteq X$, то совокупность всех элементов множества Y , которые при отображении $f : X \rightarrow Y$ являются образами хотя бы одного элемента множества A , называют **образом множества** A при данном отображении и обозначают $f(A)$. Если $B \subseteq Y$, то совокупность всех тех элементов множества X , образы которых при отображении $f : X \rightarrow Y$ принадлежат множеству B , называют **прообразом множества** B при данном отображении и обозначают $f^{-1}(B)$.

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называют **инъективным**, если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 множества X их образы $f(x_1)$ и $f(x_2)$ также различны, и **сюръективным**, если для каждого элемента y множества Y существует элемент x множества X такой, что $y = f(x)$. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **биективным** (взаимно однозначным), если оно инъективно и сюръективно.

Два множества называются **изоморфными** (эквивалентными), если существует биективное отображение одного из них в другое.

Для сокращения записей будем пользоваться следующими специальными символами:

\Rightarrow – «следует», «если ..., то»;

\Leftrightarrow – «равносильно», «тогда и только тогда, когда».

1.2. Практическая часть

Пример 1.1. Пусть $A = \{1, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 3, 8, 10\}$, $C = \{3, 9, 10\}$. Перечислить все элементы следующих множеств:

$$\text{а) } A \cap B \cup B \cap C = D, \quad \text{б) } (A \cup C) \setminus (B \cap A) = E.$$

Решение. Из определений операций над множествами и порядка выполнения этих операций имеем:

$$\text{а) } A \cap B = \{3, 8\}, \quad B \cap C = \{3, 10\} \Rightarrow D = \{3, 8, 10\};$$

$$\text{б) } A \cup C = \{1, 3, 5, 8, 9, 10\}, \quad B \cap A = \{3, 8\} \Rightarrow E = \{1, 5, 9, 10\}.$$

Пример 1.2. Пусть множество A состоит из точек $M(x, y)$ плоскости, для которых $|x| \leq 3$ и $|y| \leq 5$, множество B – из точек плоскости, для которых $x^2 + y^2 \leq 25$, множество C – из точек плоскости, для которых $x < 0$. Требуется изобразить множество $A \cap B \setminus C$.

Решение. По условию множество A представляет собой прямоугольник с центром симметрии в начале системы координат, множество B – круг радиуса 5 с центром тоже в начале системы координат, множество C – левую полуплоскость

координатной плоскости xOy . Тогда $A \cap B$ – «обрезанный» прямоугольник $KLST$, $A \cap B \setminus C$ – множество точек, полученное удалением из $A \cap B$ точек полуплоскости $x < 0$. Искомое множество затонировано на рис. 1. 3.

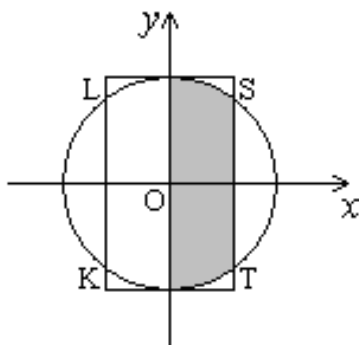


Рис. 1.3.

Пример 1.3. Доказать, что $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Решение. Произвольный элемент $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$. Доказательство завершено.

Пример 1.4. Упростить выражение $\overline{\overline{A \cap \overline{B} \cup A \cap B \cap \overline{C}}}$.

Решение. $\overline{\overline{A \cap \overline{B} \cup A \cap B \cap \overline{C}}} =$ (по законам де Моргана) $= \overline{\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{A \cap B \cap \overline{C}}} =$ (снова дважды применяем законы де Моргана, закон двойного отрицания и другие законы) $= A \cap \overline{B} \cap \overline{A \cap B \cap \overline{C}} = A \cap \overline{B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) =$
 $= A \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cup A \cap \overline{B} \cap C = A \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cup A \cap \overline{B} \cup A \cap \overline{B} \cap C =$
 $= \emptyset \cup A \cap \overline{B} = A \cap \overline{B}$.

Итак, $\overline{\overline{A \cap \overline{B} \cup A \cap B \cap \overline{C}}} = A \cap \overline{B}$.

Пример 1.5. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$. Перечислить все элементы множеств $A \times B$, $B \times A$, A^2 .

Решение. $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$, $B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$, $A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Пример 1.6. Пусть $A = \{x \mid x \in [0, 1]\}$. Требуется изобразить множество A^2 .

Решение. $A^2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Этому множеству соответствует множество точек на плоскости, имеющих неотрицательные координаты, не превосходящие единицы (рис. 1. 4).

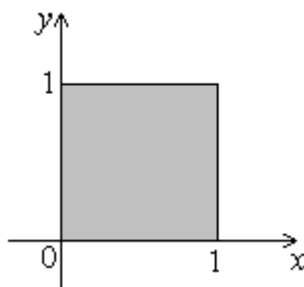


Рис. 1.4.

Пример 1.7. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 4, 8\}$. Рассмотрим отображения $f_1 : X \rightarrow Y$, $f_2 : X \rightarrow Y$:

$$\begin{aligned} f_1 : a &\rightarrow 1, \\ b &\rightarrow 4, \\ c &\rightarrow 8, \\ d &\rightarrow 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : 1 &\rightarrow b, \\ 4 &\rightarrow c, \\ 8 &\rightarrow d. \end{aligned}$$

Определить, являются ли эти отображения инъективными и сюръективными.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} f_1(a) &= 1, & f_1^{-1}(1) &= \{a\}, & f_2(1) &= b, & f_2^{-1}(b) &= \{1\}, \\ f_1(b) &= 4, & f_1^{-1}(4) &= \{b\}, & f_2(4) &= c, & f_2^{-1}(c) &= \{4\}, \\ f_1(c) &= f_1(d) = 8, & f_1^{-1}(8) &= \{c, d\}, & f_2(8) &= d, & f_2^{-1}(d) &= \{8\}, f_2^{-1}(a) = \emptyset. \end{aligned}$$

Образы $f_1(c)$, $f_1(d)$ элементов c , d совпадают, поэтому отображение $f_1 : X \rightarrow Y$ не является инъективным. Для каждого элемента множества Y существует элемент множества X , образом которого при отображении $f_1 : X \rightarrow Y$ является этот элемент множества Y , поэтому отображение $f_1 : X \rightarrow Y$ является сюръективным. Так как образы любых двух различных элементов множества Y при отображении $f_2 : Y \rightarrow X$ различны, то это отображение является инъективным. В множестве Y не существует элемента, образом которого при отображении $f_2 : Y \rightarrow X$ является элемент a множества X , поэтому последнее отображение не является сюръективным.

1.3. Индивидуальные задания

1. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, множества A, B, C, D заданы в табл. 1. Перечислить все элементы множества D .

Таблица 1

Вариант	Множества
1	$A = \{1, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 9\}$, $D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A} \cap B)) \times C$
2	$A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 6, 8\}$, $C = \{1, 4\}$, $D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$
3	$A = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $C = \{1, 8, 10\}$, $D = ((\overline{A} \cap C) \setminus (B \cup A)) \times B$
4	$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \overline{A} \times ((\overline{B} \cup C) \setminus (A \cap C))$
5	$A = \{2, 5, 6, 8, 9\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{2, 10\}$, $D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A} \cap B)) \times C$
6	$A = \{3, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 7, 9\}$, $C = \{2, 5\}$. $D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$

Вариант	Множества
7	$A = \{2, 4, 5, 7, 8\}, B = \{2, 3, 5\}, C = \{1, 2, 9\},$ $D = ((A \cap C) \setminus (\overline{B \cup A})) \times B$
8	$A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}, B = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, C = \{2, 3, 4\},$ $D = \overline{A} \times ((\overline{B \cup C}) \setminus (A \cap C))$
9	$A = \{3, 6, 7, 9, 10\}, B = \{4, 5, 6\}, C = \{1, 3\},$ $D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A \cap B})) \times C$
10	$A = \{4, 7, 8\}, B = \{3, 5, 7, 8, 10\}, C = \{3, 6\},$ $D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$
11	$A = \{3, 5, 6, 8, 9\}, B = \{3, 4, 6\}, C = \{2, 3, 10\},$ $D = ((A \cap C) \setminus (\overline{B \cup A})) \times B$
12	$A = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}, C = \{3, 4, 5\},$ $D = \overline{A} \times ((\overline{B \cup C}) \setminus (A \cap C))$
13	$A = \{1, 4, 7, 8, 10\}, B = \{5, 6, 7\}, C = \{2, 4\},$ $D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A \cap B})) \times C$
14	$A = \{5, 8, 9\}, B = \{1, 4, 6, 8, 9\}, C = \{4, 7\},$ $D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$
15	$A = \{4, 6, 7, 9, 10\}, B = \{4, 5, 7\}, C = \{1, 3, 4\},$ $D = ((\overline{A \cap C}) \setminus (\overline{B \cup A})) \times B$
16	$A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{1, 2, 3, 6, 8, 9, 10\}, C = \{4, 5, 6\},$ $D = \overline{A} \times ((\overline{B \cup C}) \setminus (A \cap C))$
17	$A = \{1, 2, 5, 8, 9\}, B = \{6, 7, 8\}, C = \{3, 5\},$ $D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A \cap B})) \times C$
18	$A = \{6, 9, 10\}, B = \{2, 5, 7, 9, 10\}, C = \{5, 8\},$ $D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$
19	$A = \{1, 5, 7, 8, 10\}, B = \{5, 6, 8\}, C = \{2, 4, 5\},$ $D = ((A \cap C) \setminus (\overline{B \cup A})) \times B$
20	$A = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}, B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 10\}, C = \{5, 6, 7\},$ $D = \overline{A} \times ((\overline{B \cup C}) \setminus (A \cap C))$
21	$A = \{2, 3, 6, 9, 10\}, B = \{7, 8, 9\}, C = \{4, 6\},$ $D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A \cap B})) \times C$
22	$A = \{1, 7, 10\}, B = \{1, 3, 6, 8, 10\}, C = \{6, 9\},$ $D = C \times ((A \cap B) \setminus (C \cup \overline{B}))$
23	$A = \{1, 2, 6, 8, 9\}, B = \{6, 7, 9\}, C = \{3, 5, 6\},$ $D = ((A \cap C) \setminus (\overline{B \cup A})) \times B$
24	$A = \{1, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10\}, C = \{6, 7, 8\},$ $D = \overline{A} \times ((\overline{B \cup C}) \setminus (A \cap C))$
25	$A = \{1, 3, 4, 7, 10\}, B = \{8, 9, 10\}, C = \{5, 7\},$ $D = ((A \cup C) \setminus (\overline{A \cap B})) \times C$

2. Преобразовать выражение, заданное в табл. 2.

Таблица 2

Вариант	Выражение
1	$(A \setminus B) \cup (A \cap B)$
2	$(\overline{A \cap B}) \setminus (A \setminus B)$
3	$(A \cup B) \setminus B$
4	$(B \setminus A) \cup (A \cap B)$
5	$(\overline{A \cup B}) \setminus \overline{B}$
6	$(A \cup \overline{B}) \setminus A$
7	$(A \cup \overline{B}) \setminus \overline{A}$
8	$A \setminus (A \cup B)$
9	$B \setminus (A \cup B)$
10	$\overline{A} \setminus (A \cup B)$
11	$\overline{B} \setminus (A \cup B)$
12	$(A \setminus B) \setminus (A \cup B)$
13	$(A \setminus B) \setminus (A \cap B)$
14	$(A \setminus B) \setminus (\overline{A \cap B})$
15	$(A \setminus B) \setminus (\overline{A \cup B})$
16	$(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$
17	$(A \setminus B) \cap (\overline{B \setminus A})$
18	$(\overline{A \setminus B}) \cap (B \setminus A)$
19	$(A \setminus B) \cup (B \setminus \overline{A})$
20	$(A \setminus B) \cup (\overline{B \setminus A})$
21	$(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{B \setminus A})$
22	$(A \cap B) \cap (\overline{B \setminus A})$
23	$(A \cup B) \cap (\overline{B \setminus A})$
24	$(A \cap B) \cup (B \setminus A)$
25	$(\overline{A \cap B}) \cup (B \setminus A)$

1.4. Вопросы и упражнения для самоконтроля и повторения

1. Дайте определения конечного и счетного множеств.

2. Дайте определения подмножества, равенства множеств, пустого множества, собственного подмножества, несобственного подмножества, универсального множества.

3. Дайте определения объединения, пересечения, разности множеств, дополнения множества, проиллюстрируйте их диаграммами Эйлера – Венна.

4. Укажите основные свойства операций над множествами.

5. Дайте определения декартова произведения множеств, декартовой степени множества.

6. Дайте определение симметрической разности множеств, проиллюстрируйте его диаграммой Эйлера – Венна.

7. Дайте определения отображения, образа элемента, прообраза элемента, образа множества, прообраза множества.

8. Дайте определения инъективного, сюръективного, биективного отображений.

9. Даны множества $A = \{2, 3, 4, 8\}$, $B = \{1, 2, 8, 12\}$, $C = \{1, 8, 9\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Перечислите все элементы следующих множеств:

1) $D = (A \cup C) \setminus (B \cap \bar{A})$;

2) $E = (A \cap B \cup B \cap C) \times D$.

10. Используя свойства операций над множествами, преобразуйте выражения:

1) $(A \setminus B) \cap B$;

2) $(A \setminus B) \cap (A \cup B)$;

3) $\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(B \setminus A)}$.

11. Факультативный курс по математике посещают 20 студентов, а по физике – 30 студентов. Найдите число студентов, посещающих факультатив по математике или физике, если:

1) факультативные занятия проходят в одно и то же время;

2) факультативные занятия проходят в разные часы и 10 студентов посещают оба факультатива.

12. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$. Рассмотрим отображение $f : X \rightarrow X : a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow a$. Определите, является ли оно биективным.

13. Даны отображения в виде обычных числовых функций $y = f(x)$, действующие из $D(y)$ в P ($f : D(y) \rightarrow P$):

1) $y = x^2$, 2) $y = x^3$, 3) $y = \sin x$, 4) $y = \sqrt{x}$, 5) $y = 7$.

Классифицируйте каждое из них на инъективность, сюръективность, биективность.

14. Определите образ отрезка $[0, 2]$ при отображении $f : P \rightarrow P$, где $f(x) = x^2$. Определите прообраз отрезка $[4, 9]$ при данном отображении.

2. Бинарные отношения

Цель: познакомить с понятием бинарного отношения и понятиями, связанными с ним, научить использовать их при решении задач.

2.1. Теоретическая часть

2.1.1. Понятие бинарного отношения и связанные с ним понятия

Всякое подмножество P декартова произведения $A \times B$ непустых множеств A и B называется **бинарным отношением** между элементами множеств A и B . Если $(u, v) \in P$, то говорят, что элементы u и v находятся в отношении P (говорят

также, что элемент u находится в отношении R к элементу v). Всякое подмножество множества $A \times A$ называется бинарным отношением на A .

Вместо «отношение между элементами множеств A и B » можно сказать «отношение на паре множеств A, B ». Указать на принадлежность пары (a, b) отношению R можно несколькими способами:

$$(a, b) \in R, \quad R(a, b), \quad aRb.$$

Последний способ может показаться странным, однако, на самом деле им часто пользуются: $2 < 7, 5 = 5$.

Задать бинарное отношение можно различными способами. Можно перечислить все пары, принадлежащие отношению, или указать какое – то свойство, специфичное именно для этих пар. Иногда полезно задать отношение матрицей.

Пусть R – бинарное отношение между элементами конечных множеств $A = \{a_1, \dots, a_m\}, B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Матрица $\|R\| = (p_{ij})$, имеющая m строк и n столбцов, называется **матрицей отношения** R , если ее элементы удовлетворяют следующему условию:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, b_j) \in R, \\ 0, & \text{если } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Произведением (или композицией) **отношений** $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq B \times C$ называется отношение $R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$, образованное следующим образом: пара $(x, y) \in A \times C$ принадлежит $R_1 \circ R_2$ тогда и только тогда, когда в B существует такой элемент z , для которого $(x, z) \in R_1$ и $(z, y) \in R_2$.

Для бинарного отношения R на конечном множестве A полезно знать способ нахождения матрицы $\|R \circ R\|$: $\|R \circ R\| = \|R\| \cdot \|R\|$, где матрицы умножаются по обычному правилу умножения матриц, но произведение элементов матриц и сумма таких произведений при перемножении матриц находятся по правилам $0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 1 = 1, 0 + 0 = 0, 1 + 1 = 1, 1 + 0 = 0 + 1 = 1$.

Обратным отношением для бинарного отношения R называется множество R^{-1} , состоящее из тех пар (a, b) , для которых $(b, a) \in R$.

2.1.2. Виды бинарных отношений. Отношение эквивалентности

Укажем особенно часто встречающиеся виды бинарных отношений.

Бинарное отношение R на множестве A называется

а) **рефлексивным**, если $(x, x) \in R$ для каждого $x \in A$;

б) **антирефлексивным**, если $(x, x) \notin R$ для каждого $x \in A$;

в) **симметричным**, если для любых $x, y \in A$ из $(x, y) \in R$ следует, что и $(y, x) \in R$;

- г) **антисимметричным**, если для любых $x, y \in A$ из $(x, y) \in P$ и $x \neq y$ следует, что $(y, x) \notin P$;
- д) **транзитивным**, если для любых $x, y, z \in A$ из $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$ следует, что $(x, z) \in P$.

По свойствам матрицы бинарного отношения можно судить о некоторых свойствах самого отношения. Пусть $\|P\| = (p_{ij})$ – матрица бинарного отношения P на некотором множестве. Это отношение является

- 1) рефлексивным, если на главной диагонали матрицы $\|P\|$ нет нулей;
- 2) антирефлексивным, если на главной диагонали матрицы $\|P\|$ нет единиц;
- 3) симметричным, если матрица $\|P\|$ симметрическая: $p_{ij} = p_{ji}$ для любых i и j ;
- 4) антисимметричным, если матрица $\|P\|$ такова что из $p_{ij} = p_{ji}$ следует $i = j$;
- 5) транзитивным, если матрица $\|P\|$ такова, что элементы матрицы $\|P \circ P\| = (q_{ij})$ удовлетворяют неравенствам $q_{ij} \leq p_{ij}$ для любых i, j .

Бинарное отношение P на множестве A называется **диагональю**, если оно состоит из всех пар вида (x, x) , где $x \in A$. Диагональ на множестве A обозначается id_A .

Бинарное отношение P на множестве A называется **отношением эквивалентности**, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Отношение эквивалентности обозначается символом E или \sim .

Классом эквивалентности элемента $x \in A$ называется множество $E(x)$ всех элементов $y \in A$ таких, что $x \sim y$.

Каждый элемент множества A принадлежит одному из классов эквивалентности. Разные классы эквивалентности не пересекаются. Поэтому говорят, что отношение эквивалентности разбивает множество A на попарно непересекающиеся классы эквивалентности.

Множество всех классов эквивалентности элементов множества A для отношения эквивалентности E называется **фактор – множеством** A по E и обозначается A/E .

2.1.3. Отношения порядка и упорядоченные множества

Бинарное отношение P на множестве A называется **отношением частичного порядка**, если оно является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным. Оно обозначается символом \leq , а обратное ему отношение \leq^{-1} обозначается символом \geq . Множество, на котором задано отношение частичного порядка, называется **частично упорядоченным множеством**.

Бинарное отношение P на множестве A называется **отношением строгого порядка**, если оно определяется так: $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \leq y$ и $x \neq y$. Оно обозначается

символом $<$. Это бинарное отношение не является отношением частичного порядка, так как оно не удовлетворяет условию рефлексивности $x < x$.

Если в множестве A есть элементы x и y , о которых нельзя сказать, что $x \leq y$ или $y \leq x$, то такие элементы называются *несравнимыми*. Отношение частичного порядка называется *отношением линейного порядка*, если любые два элемента x и y множества A *сравнимы*, то есть $x \leq y$ или $y \leq x$. Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется *линейно упорядоченным множеством*.

2.2. Практическая часть

Пример 2.1. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Перечислить все элементы бинарного отношения R на паре множеств A, B :

$$R = \{(a, b) \mid a > b, a \in A, b \in B\}.$$

Указать диагональ на множестве A .

Решение. Множество $A \times B$ содержит 18 упорядоченных пар. Из них пары $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$ принадлежат бинарному отношению R , потому что $2 > 1$, $3 > 1$, $3 > 2$. Следовательно, $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$. Диагональ на множестве A : $\text{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Пример 2.2. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Составить матрицу бинарного отношения $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}$ на паре множеств A, B .

Решение. Так как множество A состоит из четырех элементов, а множество B – из трех, то матрица $\|R\| = (r_{ij})$ имеет четыре строки и три столбца. Из определения матрицы бинарного отношения вытекает:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1 \text{ (так как } (1, 3) \in R), \\ r_{12} &= 1 \text{ (так как } (1, 4) \in R), \\ r_{13} &= 0 \text{ (так как } (1, 5) \notin R), \\ r_{21} &= 0 \text{ (так как } (2, 3) \notin R), \\ r_{22} &= 1 \text{ (так как } (2, 4) \in R), \end{aligned}$$

и так далее. Получаем

$$\|R\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.3. Пусть $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{f, g, h\}$, множества пар

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 3)\}, \\ R_2 &= \{(2, f), (2, g), (4, f), (4, g), (4, h)\} \end{aligned}$$

являются бинарными отношениями между элементами множеств A , B и B , C соответственно. Определить композицию $P_1 \circ P_2$ этих отношений и обратное отношение для отношения P_1 .

Решение. Из определения композиции бинарных отношений вытекает, что $P_1 \circ P_2 = \{(a, f), (a, g), (b, f), (b, g)\}$. Из определения обратного бинарного отношения вытекает, что $P_1^{-1} = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, c)\}$.

Пример 2.4. Пусть множество $A = \{в, к, м\}$ состоит из волка, кошки и мышки. Обозначим через P_1 множество тех пар зверей (p, q) , в которых зверь p может съесть зверя q , а через P_2 – множество тех пар (r, s) , в которых зверь r не может съесть зверя s . Определить, являются ли бинарные отношения P_1, P_2 на множестве A рефлексивными, антирефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными.

Решение. Очевидно, что

$$P_1 = \{(в, к), (в, м), (к, м)\},$$

$$P_2 = \{(в, в), (к, к), (м, м), (к, в), (м, в), (м, к)\}.$$

Так как бинарное отношение P_1 не содержит пар $(в, в)$, $(к, к)$, $(м, м)$, то оно является антирефлексивным (следовательно, не является рефлексивным). Оно не содержит пар $(к, в)$, $(м, в)$, $(м, к)$, поэтому является антисимметричным (следовательно, не является симметричным). Бинарное отношение P_1 является транзитивным. Отношение P_2 является рефлексивным, антисимметричным, транзитивным.

Пример 2.5. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $P = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$ – бинарное отношение на множестве A . Определить с помощью матрицы $\|P\|$, является ли отношение P рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

Решение. Составим матрицу бинарного отношения P :

$$\|P\| = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как на главной диагонали матрицы $\|P\|$ нет нулей, то отношение P является рефлексивным (следовательно, оно не является антирефлексивным). Так как матрица $\|P\|$ не является симметрической (например, $p_{14} \neq p_{41}$), то отношение P не является симметричным. Так как, например, $p_{24} = p_{42}$, то отношение P не является антисимметричным.

Составим матрицу $\|P \circ P\|$:

$$\|P \circ P\| = \|P\| \cdot \|P\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая соответствующие элементы матриц $\|P \circ P\| = (q_{ij})$ и $\|P\| = (p_{ij})$, видим, что неравенство $q_{ij} \leq p_{ij}$ выполняется не для любых i, j (например, $q_{12} > p_{12}$), следовательно, отношение P не является транзитивным.

Пример 2.6. Установить, определяет ли свойство «быть однокурсником» отношение эквивалентности на множестве всех студентов, обучающихся в академии.

Решение. Пусть A – множество всех студентов, обучающихся в академии. Рассмотрим бинарное отношение $P \subseteq A \times A$, состоящее из всех пар студентов, являющихся однокурсниками, то есть $P = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ – однокурсники, } a \in A, b \in A\}$. Оно является рефлексивным, так как каждый студент является однокурсником по отношению к самому себе, то есть $(a, a) \in P$ для любого $a \in A$. Оно является симметричным (если a – однокурсник по отношению к b , то и b – однокурсник по отношению к a , то есть если $(a, b) \in P$, то и $(b, a) \in P$). Оно является транзитивным (если a – однокурсник по отношению к b , b – однокурсник по отношению к c , то a – однокурсник по отношению к c , то есть если $(a, b) \in P$ и $(b, c) \in P$, то $(a, c) \in P$). Следовательно, свойство «быть однокурсником» определяет отношение эквивалентности P на множестве всех студентов, обучающихся в академии.

Пример 2.7. Пусть A – множество всех пар натуральных чисел. Будем писать $(a_1, b_1)P(a_2, b_2)$, если $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, где a_1, a_2, b_1, b_2 – натуральные числа. Определить, является ли бинарное отношение P на множестве A отношением частичного порядка. Является ли оно отношением линейного порядка?

Решение. Очевидно, что $(a, b)P(a, b)$ для любых натуральных чисел a, b , поэтому бинарное отношение P является рефлексивным. Если $(a_1, b_1)P(a_2, b_2)$ и $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$, то $((a_2, b_2), (a_1, b_1)) \notin P$ (если $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ и $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$, то хотя бы одно из неравенств $a_2 \leq a_1$, $b_2 \leq b_1$ является неверным), поэтому бинарное отношение P является антисимметричным. Если $(a_1, b_1)P(a_2, b_2)$ и $(a_2, b_2)P(a_3, b_3)$, то $(a_1, b_1)P(a_3, b_3)$, поэтому отношение P является транзитивным. Следовательно, бинарное отношение P является отношением частичного порядка. Так как, например, элементы $(1, 2)$ и $(2, 1)$ несравнимы, то оно не является отношением линейного порядка.

2.3. Индивидуальные задания

1. Перечислить все элементы бинарного отношения P на паре множеств A, B :

$$P = \{(a, b) \mid a > b, a \in A, b \in B\}.$$

2. Составить матрицу бинарного отношения F на множестве A . Определить, является ли данное отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

Множества A, B и бинарное отношение F заданы в табл. 3.

Таблица 3

Вариант	Множества A, B , бинарное отношение F
1	$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\},$ $F = \{(3, 5), (3, 7), (5, 3), (7, 3)\}$
2	$A = \{1, 2, 4, 5\}, B = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\},$ $F = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (4, 4), (5, 5)\}$
3	$A = \{3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\},$ $F = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$
4	$A = \{4, 5, 6, 7\}, B = \{2, 3, 6, 8, 10, 12\},$ $F = \{(4, 4), (4, 6), (5, 5), (5, 7), (6, 4), (6, 6), (7, 5), (7, 7)\}$
5	$A = \{1, 2, 5, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\},$ $F = \{(2, 2), (2, 5), (2, 6), (5, 2), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 5), (6, 6)\}$
6	$A = \{5, 6, 7, 9\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\},$ $F = \{(5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 9), (6, 6), (7, 7), (9, 9)\}$
7	$A = \{1, 3, 4, 6\}, B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\},$ $F = \{(1, 3), (1, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (6, 1)\}$
8	$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\},$ $F = \{(1, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$
9	$A = \{2, 3, 5, 6\}, B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\},$ $F = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$
10	$A = \{3, 4, 6, 8\}, B = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\},$ $F = \{(4, 6), (4, 8), (6, 4), (8, 4)\}$
11	$A = \{2, 3, 5, 6\}, B = \{2, 4, 5, 7, 9, 10\},$ $F = \{(2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 6), (5, 5), (6, 6)\}$
12	$A = \{4, 5, 6, 7\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\},$ $F = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (7, 7)\}$
13	$A = \{5, 6, 7, 8\}, B = \{3, 4, 7, 9, 11, 13\},$ $F = \{(5, 5), (5, 7), (6, 6), (6, 8), (7, 5), (7, 7), (8, 6), (8, 8)\}$
14	$A = \{2, 3, 6, 7\}, B = \{3, 5, 7, 9, 10, 11\},$ $F = \{(3, 3), (3, 6), (3, 7), (6, 3), (6, 6), (6, 7), (7, 3), (7, 6), (7, 7)\}$
15	$A = \{6, 7, 8, 10\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\},$ $F = \{(6, 6), (6, 7), (6, 8), (6, 10), (7, 7), (8, 8), (10, 10)\}$
16	$A = \{2, 4, 5, 7\}, B = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\},$ $F = \{(2, 4), (2, 5), (4, 7), (5, 4), (5, 7), (7, 2)\}$
17	$A = \{2, 3, 4, 5\}, B = \{3, 4, 6, 8, 9, 10\},$ $F = \{(2, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$

Вариант	Множества А, В, бинарное отношение F
18	$A = \{3, 4, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $F = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (6, 6), (6, 7), (7, 6), (7, 7)\}$
19	$A = \{4, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $F = \{(5, 7), (5, 9), (7, 5), (9, 5)\}$
20	$A = \{3, 4, 6, 7\}$, $B = \{3, 5, 6, 8, 10, 11\}$, $F = \{(3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 7), (6, 6), (7, 7)\}$
21	$A = \{5, 6, 7, 8\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $F = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (7, 7), (8, 6), (8, 8)\}$
22	$A = \{6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 5, 8, 10, 12, 14\}$, $F = \{(6, 6), (6, 8), (7, 7), (7, 9), (8, 6), (8, 8), (9, 7), (9, 9)\}$
23	$A = \{3, 4, 7, 8\}$, $B = \{4, 6, 8, 10, 11, 12\}$, $F = \{(4, 4), (4, 7), (4, 8), (7, 4), (7, 7), (7, 8), (8, 4), (8, 7), (8, 8)\}$
24	$A = \{7, 8, 9, 11\}$, $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $F = \{(7, 7), (7, 8), (7, 9), (7, 11), (8, 8), (9, 9), (11, 11)\}$
25	$A = \{3, 5, 6, 8\}$, $B = \{3, 4, 6, 7, 9, 10\}$, $F = \{(3, 5), (3, 6), (5, 8), (6, 5), (6, 8), (8, 3)\}$

2.4. Вопросы и упражнения для самоконтроля и повторения

1. Дайте определение бинарного отношения между элементами множеств А и В, определение бинарного отношения на множестве А.

2. Дайте определение матрицы бинарного отношения между элементами конечных множеств.

3. Дайте определение произведения (композиции) бинарных отношений.

4. Изложите способ нахождения матрицы композиции $P \circ P$ для бинарного отношения Р на конечном множестве А.

5. Дайте определения рефлексивного, антирефлексивного, симметричного, антисимметричного, транзитивного бинарных отношений.

6. Какой вид матрицы бинарного отношения соответствует: рефлексивному, антирефлексивному, симметричному, антисимметричному бинарным отношениям?

7. Изложите способ определения транзитивности бинарного отношения на конечном множестве.

8. Дайте определения диагонали, отношения эквивалентности.

9. Дайте определения отношений частичного порядка, строгого порядка, линейного порядка.

10. Приведите пример бинарного отношения, которое не является рефлексивным и не является антирефлексивным.

11. Приведите пример бинарного отношения, которое не является симметричным и не является антисимметричным.

12. Приведите пример бинарного отношения, которое не является транзитивным.

13. Проверьте, является ли бинарное отношение $P = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ на множестве $A = \{1, 2, 3\}$ отношением эквивалентности.

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Математическая логика представляет собой формальный математический аппарат, который изучает способы логических рассуждений. Простейшую из формальных логических теорий называют *алгеброй высказываний*. Из высказываний состоит всякое логическое рассуждение.

3.1. Теоретическая часть

3.1.1. Высказывания. Логические операции над элементарными высказываниями

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором в рассматриваемой ситуации можно утверждать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Примеры истинных высказываний: «Река Волга впадает в Каспийское море»; «Луна – спутник Земли». Примеры ложных высказываний: «Воронеж – столица Японии»; «В Томске водятся кентавры».

Если высказывание является истинным (ложным) в любой логической ситуации, то оно называется *тождественно истинным (ложным)* или *логической константой*, которую принято обозначать И(Л). В противном случае высказывание называется *переменным*.

Простейшие высказывания, из которых можно образовать различные новые высказывания, будем называть *элементарными* и обозначать А, В, С,..., Х, Y, Z,... . Обсудим ниже логические операции над элементарными высказываниями.

Дизъюнкция. Обозначается $A \vee B$, читается: «А или В». При этом разделительный смысл союза «или» исключается. Истинностная таблица дизъюнкции имеет следующий вид:

Таблица 3.1

А	В	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Дизъюнкция двух элементарных высказываний является ложным высказыванием тогда и только тогда, когда оба составляющие ее высказывания ложны.

Конъюнкция. Эта операция обозначается $A \wedge B$ (читается «А и В»). Значения истинности или ложности полученного сложного высказывания задаются следующей таблицей истинности:

Таблица 3.2

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Итак, конъюнкция двух элементарных высказываний истинна тогда и только тогда, когда оба элементарные высказывания истинны.

Отрицание. Обозначается \bar{A} , читается «не А». Это единственная логическая операция, относящаяся к **одному** высказыванию, – *унарная*, в отличие от остальных – *бинарных*, относящихся к **двум** высказываниям. Таблица истинности указанной операции следующая:

Таблица 3.3

A	\bar{A}
и	л
л	и

Импликация. Обозначается $A \rightarrow B$, читается: «если А, то В». При этом А называется *посылкой*, а В – *следствием*. Истинностная таблица импликации:

Таблица 3.4

A	B	$A \rightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Импликация ложна тогда и только тогда, когда посылка А истинна, а следствие В – ложь.

Двойная импликация. Обозначается $A \leftrightarrow B$, читается: «А тогда и только тогда, когда В». Таблица истинности:

Таблица 3.5

А	В	$A \leftrightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Двойная импликация является истинным высказыванием тогда и только тогда, когда оба высказывания, ее составляющие, одновременно истинны или ложны.

Замечания.

1. Отметим, что число строк истинностной таблицы для n элементарных высказываний равно 2^n (без «командной» строки). Так, в таблицах 3.1, 3.2, 3.4, 3.5 по четыре строки, а в таблице 3.3 – две.
2. Естественный порядок указанных выше логических операций следующий: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, двойная импликация. Скобки применяются в случае, когда этот порядок нужно нарушить.

3.1.2. Формулы алгебры высказываний

Дадим следующее определение формулы алгебры высказываний.

1. Отдельно стоящая буква $A, B, C, \dots, X, Y, Z, \dots$ – формула.
2. Если A, B – формулы, то формулами являются и $(\bar{A}), (\bar{B}), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$.
3. Других формул нет.

Например, высказывание $S = (A \rightarrow B) \wedge ((\bar{B} \rightarrow C) \rightarrow \bar{A})$ является формулой.

Две формулы алгебры высказываний называются *равносильными*, если результирующие столбцы таблиц истинности этих формул совпадают.

Ниже приводим основные равносильные формулы алгебры высказываний:

$$\begin{array}{ll}
 A \vee A = A & \\
 A \wedge A = A & \left. \vphantom{\begin{array}{l} A \vee A = A \\ A \wedge A = A \end{array}} \right\} \text{идемпотентность} \\
 A \vee B = B \vee A & \\
 A \wedge B = B \wedge A & \left. \vphantom{\begin{array}{l} A \vee B = B \vee A \\ A \wedge B = B \wedge A \end{array}} \right\} \text{коммутативность} \\
 (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) & \\
 (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) & \left. \vphantom{\begin{array}{l} (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) \\ (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \end{array}} \right\} \text{ассоциативность}
 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) &= (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned} \right\} \text{дистрибутивность}$$

$$A \vee I = I \qquad A \wedge L = L$$

$$A \vee L = A \qquad A \wedge I = A$$

$$A \vee \bar{A} = I \qquad A \wedge \bar{A} = L$$

$$\bar{\bar{A}} = A \qquad \bar{L} = I \qquad \bar{I} = L$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{A \vee B} &= \bar{A} \wedge \bar{B} \\ \overline{A \wedge B} &= \bar{A} \vee \bar{B} \end{aligned} \right\} \text{законы де Моргана}$$

Отметим, что операции импликации и двойной импликации можно заменить дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, используя следующие равносильные формулы:

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B,$$

$$A \leftrightarrow B = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}),$$

$$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}).$$

3.2. Практическая часть

Пример 1. Пусть имеются два элементарных высказывания:

A – «Этот треугольник равнобедренный»,

B – «Этот треугольник равносторонний».

Записать высказывания, соответствующие всем логическим операциям.

Решение. Как следует из приведенных выше логических операций, имеем:

$A \vee B$ – «Этот треугольник равнобедренный или равносторонний».

$A \wedge B$ – «Этот треугольник равнобедренный и равносторонний».

\bar{A} – «Этот треугольник не равнобедренный».

$A \rightarrow B$ – «Если этот треугольник равнобедренный, то он равносторонний».

$A \leftrightarrow B$ – «Этот треугольник равнобедренный тогда и только тогда, когда он равносторонний».

Пример 2. Построить истинностную таблицу следующего сложного высказывания S:

$$S = \overline{(A \rightarrow B)} \wedge C \vee (A \leftrightarrow \bar{C}).$$

Решение. Отметим, что завершающей логической операцией в решении примера будет дизъюнкция. Ниже приводим истинностную таблицу высказывания S , которая (без командной) будет состоять из $2^3=8$ строк:

A	B	C	$A \rightarrow B$	$\overline{(A \rightarrow B)}$	$\overline{(A \rightarrow B)} \wedge C$	\bar{C}	$(A \leftrightarrow \bar{C})$	S
и	и	и	и	л	л	л	л	л
и	и	л	и	л	л	и	и	и
и	л	и	л	и	и	л	л	и
и	л	л	л	и	л	и	и	и
л	и	и	и	л	л	л	и	и
л	и	л	и	л	л	и	л	л
л	л	и	и	л	л	л	и	и
л	л	л	и	л	л	и	л	л

Пример 3. Построить таблицу истинности для формулы

$$S = (A \rightarrow B) \wedge ((\bar{B} \rightarrow C) \rightarrow \bar{A}).$$

Решение. Соблюдая приоритеты логических операций и расставленных в формуле скобок, получаем:

A	B	C	$A \rightarrow B$	\bar{B}	$\bar{B} \rightarrow C$	\bar{A}	$((\bar{B} \rightarrow C) \rightarrow \bar{A})$	S
и	и	и	и	л	и	л	л	л
и	и	л	и	л	и	л	л	л
и	л	и	л	и	и	л	л	л
и	л	л	л	и	л	л	и	л
л	и	и	и	л	и	и	и	и
л	и	л	и	л	и	и	и	и
л	л	и	и	и	и	и	и	и
л	л	л	и	и	л	и	и	и

Из построенной таблицы истинности видно, что формулы \bar{A} и S равносильны.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задание. Требуется получить высказывания S_1 своего варианта N и S_2 варианта $N+3$, составить для них таблицы истинности и выяснить, равносильны ли эти высказывания.

Задача 1. Даны следующие элементарные высказывания:

A – Сидоров сдаст экзамен;

B – Сидоров будет посещать лекции;

C – Сидоров будет заниматься самостоятельно.

Требуется записать с помощью логических операций высказывание:

Вариант	Высказывание
1	Сидоров сдаст экзамен, если будет посещать лекции и заниматься самостоятельно.
2	Если Сидоров будет заниматься самостоятельно, но не станет посещать лекции, он не сдаст экзамен.
3	Сидоров сдаст экзамен тогда и только тогда, когда будет посещать лекции и заниматься самостоятельно.
4	Сидоров не сдаст экзамен, если не будет заниматься самостоятельно, даже если он будет посещать лекции.
5	Если Сидоров не сдаст экзамен, значит он не занимался самостоятельно или не посещал лекции.
6	Если Сидоров сдаст экзамен, то он посещал лекции и занимался самостоятельно.

Задача 2. Даны следующие элементарные высказывания:

А – Сидоров правильно ответит на вопрос;

В – Иванов правильно ответит на вопрос;

С – Петров правильно ответит на вопрос.

Требуется записать с помощью логических операций высказывание:

Вариант	Высказывание
7	Сидоров правильно ответит на вопрос, если на него правильно ответят и Иванов, и Петров.
8	Сидоров правильно ответит на вопрос, если на него ответит правильно либо Иванов, либо Петров.
9	Сидоров правильно ответит на вопрос, если на него ответит правильно Иванов, но не ответит Петров.
10	Сидоров правильно ответит на вопрос, если на него ответит правильно Петров, но не ответит Иванов.
11	Если Иванов и Петров неверно ответят на вопрос, то на него ответит правильно Сидоров.
12	Иванов правильно ответит на вопрос тогда и только тогда, когда на него ответят правильно Петров и Сидоров.
13	Сидоров неверно ответит на вопрос, если на него правильно ответит Иванов, но не ответит Петров.
14	Сидоров тогда и только тогда неверно ответит на вопрос, когда на него неверно ответит и Иванов, и Петров.

Задача 3. Даны следующие элементарные высказывания:

А – Илья выполнит норматив;

В – Илья не будет пропускать тренировки;

С – Илья не будет нарушать спортивный режим.

Требуется записать с помощью логических операций высказывание:

Вариант	Высказывание
15	Илья выполнит норматив, если не будет пропускать тренировки и нарушать спортивный режим.
16	Если Илья не будет пропускать тренировки, но будет нарушать спортивный режим, он не выполнит норматив.
17	Илья выполнит норматив тогда и только тогда, когда не будет пропускать тренировки и нарушать спортивный режим.
18	Илья не выполнит норматив, если будет пропускать тренировки, даже не нарушая спортивного режима.
19	Если Илья не выполнит норматив, значит он пропускал тренировки, либо нарушал спортивный режим.

Задача 4. Даны следующие элементарные высказывания:

А – Анне понравится спектакль;

В – Ирине понравится спектакль;

С – Ольге понравится спектакль.

Требуется записать с помощью логических операций высказывание:

Вариант	Высказывание
20	Анне понравится спектакль, если он понравится либо Ирине, либо Ольге.
21	Анне понравится спектакль тогда и только тогда, когда он понравится и Ирине, и Ольге.
22	Анне не понравится спектакль, если он даже понравится Ольге, но не понравится Ирине.
23	Анне не понравится спектакль, если он не понравится ни Ольге, ни Ирине.
24	Анне понравится спектакль, если даже он не понравится Ирине, но понравится Ольге

Задача 5. Даны следующие элементарные высказывания:

А – Семен пойдет в турпоход;

В – Захар пойдет в турпоход;

С – Антон пойдет в турпоход.

Требуется записать с помощью логических операций высказывание:

Вариант	Высказывание
25	Семен пойдет в турпоход, если вместе с ним пойдут и Захар, и Антон.
26	Семен пойдет в турпоход, если даже с ним не пойдет Антон, но пойдет Захар.
27	Семен не пойдет в турпоход, если вместе с ним не пойдут и Захар, и Антон.
28	Семен пойдет в турпоход тогда и только тогда, когда с ним пойдут и Захар, и Антон.

3.4. Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Что такое высказывание? Приведите примеры истинных и ложных высказываний.
2. Какие логические операции вы знаете? Запишите высказывания, соответствующие всем логическим операциям на примере элементарных высказываний: А – идет дождь; В – светит солнце.
3. Какой вид имеет истинностная таблица дизъюнкции?
4. Запишите таблицу истинности конъюнкции.
5. Какой вид имеет истинностная таблица импликации?
6. Запишите таблицу истинности для двойной импликации.
7. Чему равно число строк истинностной таблицы для n элементарных высказываний?
8. Каков естественный порядок выполнения логических операций?
9. Дайте определение формулы алгебры высказываний.
10. Какие две формулы алгебры высказываний называются равносильными?

4. БУЛЕВА АЛГЕБРА. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

4.1. Теоретическая часть

4.1.1. Аксиомы булевой алгебры

Джордж Буль – ирландский математик и логик (1815 – 1864) – впервые сформулировал основные положения алгебры логики.

В булевой алгебре операции выполняются не над числами, а над высказываниями, представленными двоичными переменными. В результате

получаются сложные высказывания. Эти сложные высказывания записываются в виде формул, также носящих двоичный характер. Например, пусть A – это высказывание «Идет дождь». Если оно является истинным, то пишут $A=1$. Соответственно запись $A=0$ обозначает: высказывание «Идет дождь» ложно.

Всякая буква, обозначающая некоторое высказывание, – это переменная величина, принимающая одно из двух значений – либо 0, либо 1. Такую переменную называют двоичной.

Двоичная переменная в булевой алгебре определяется следующими аксиомами:

$$A=1, \text{ если } A \neq 0; \quad A=0, \text{ если } A \neq 1.$$

В обычной алгебре (школьной) над переменными выполняются операции сложения, вычитания, умножения, деления и т.д. В булевой же алгебре основными являются только три операции. Их называют **дизъюнкция, конъюнкция, инверсия**.

Операция дизъюнкции обозначается: $A \vee B$. Однако, если учесть некоторое сходство операции дизъюнкции с арифметическим сложением, то вместо знака \vee можно писать знак арифметического сложения: $A+B$. Этим знаком мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Дизъюнкция, называемая иногда логическим сложением, определяется следующими аксиомами:

$$\begin{array}{ll} 0+0=0; & 1+0=1; \\ 0+1=1; & 1+1=1. \end{array}$$

Конъюнкция обозначается знаком \wedge , но т.к. конъюнкция – «родня» арифметическому умножению, то вместо знака \wedge будем использовать точку, либо вообще не указывать никакого знака: $A \wedge B = A \cdot B = AB$.

Конъюнкция (логическое умножение) определяется следующими аксиомами:

$$\begin{array}{ll} 0 \cdot 0=0; & 1 \cdot 0=0; \\ 0 \cdot 1=0; & 1 \cdot 1=1. \end{array}$$

Инверсия, или отрицание обозначается чертой над буквой: \bar{A} , и определяется следующими аксиомами:

$$\bar{0} = 1; \quad \bar{1} = 0.$$

4.1.2. Свойства дизъюнкции и конъюнкции

Рассмотрим следующие основные свойства:

а) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством **коммутативности**:

$$A + B = B + A; \quad AB = BA;$$

б) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством **ассоциативности**:

$$(A + B) + C = A + (B + C); \quad (AB)C = A(BC),$$

что позволяет удалять скобки во всех случаях, когда знаками дизъюнкции или конъюнкции соединяются более двух переменных:

$$(A + B) + C = A + B + C; \quad (AB)C = ABC;$$

в) **конъюнкция дистрибутивна** относительно дизъюнкции:

$$A(B + C) = AB + AC,$$

что позволяет раскрывать скобки в выражениях и выносить общий множитель за скобки, например:

$$A(B + C + D + E) = AB + AC + AD + AE,$$

$$ABC + ABD + ABEF = AB(C + D + EF);$$

г) **дизъюнкция дистрибутивна** относительно конъюнкции:

$$A + BC = (A + B)(A + C); \quad A + BCD = (A + B)(A + C)(A + D);$$

д) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством **идемпотентности**:

$$A + A = A; \quad A \cdot A = A.$$

Эти свойства легко доказываются при помощи системы аксиом. Докажем, например, справедливость утверждения: дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции. Доказательство представим в виде таблицы:

Таблица 4.1

A	B	C	BC	A+BC	(A+B)	(A+C)	(A+B)·(A+C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

В левой части таблицы перечислены все возможные наборы значений трех переменных, а в правой выделены две колонки. Первую озаглавим выражением $A+BC$, вторую – $(A+B)(A+C)$. Подставим в эти выражения значения $A = B = C = 0$.

Тогда получим:

$$A+BC = 0; \quad (A+B)(A+C) = 0,$$

т.е. на наборе 000 утверждение справедливо.

Точно так же перебираем остальные наборы значений переменных и заполняем правую часть таблицы. Получаем, что выделенные колонки равны между собой. Это значит, что на каждом наборе значений переменных выражения $A+BC$ и $(A+B)(A+C)$ принимают одинаковые значения. Следовательно, утверждение «дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции» справедливо.

4.1.3. Теоремы одной переменной

Список теорем одной переменной имеет вид:

$$\begin{array}{ll} A + 0 = A; & A \cdot 0 = 0; \\ A + 1 = 1; & A \cdot 1 = A; \\ A + A = A; & A \cdot A = A; \\ A + \bar{A} = 1; & A \cdot \bar{A} = 0; \end{array}$$

$$\bar{\bar{A}} = A,$$

где последняя теорема отражает свойство инволюции.

Все теоремы одной переменной доказываются при помощи аксиом путем перебора значений переменной. Например, докажем первую теорему.

Пусть $A = 0$, тогда получим $0 + 0 = 0$, что является верным утверждением согласно аксиомам, приведенным выше. Пусть теперь $A = 1$. Получаем $1 + 0 = 1$. Согласно тем же аксиомам, получаем верный результат.

4.1.4. Дизъюнктивные и конъюнктивные формы

Булевы формулы могут быть записаны в виде суммы либо в виде произведения каких-либо выражений. В первом случае говорят о **дизъюнктивной** форме, во втором – о **конъюнктивной**. Например, выражения

$$AB + CDE, \quad A + B + CD, \quad A + B + C + D$$

Представлены в дизъюнктивной форме, а выражения

$$(A + B)(C + D), \quad (A + C)(C + D + E)DF$$

– в конъюнктивной.

Если булева формула записана в виде суммы выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с отрицанием или без отрицания), либо произведение некоторых аргументов, то эта формула является представленной в **дизъюнктивной нормальной форме** (ДНФ). Например, выражения

$$AB + C\bar{D}; \quad A + \bar{B} + CDE\bar{E}; \quad A + B + C + \bar{D}$$

представлены в ДНФ, а формула $A + B(C + \bar{D})$ к ДНФ не относится, так как второе слагаемое не является ни отдельным аргументом, ни произведением переменных.

Если булева формула записана в виде произведения выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с отрицанием или без отрицания), либо сумму некоторых аргументов, то эта формула является представленной в **конъюнктивной нормальной форме** (КНФ). Например, выражения

$$(A + \bar{B})(C + \bar{A} + D); \quad AB(C + D + \bar{E})$$

записаны в КНФ, а формула

$$(A + \bar{B}C)(D + E)$$

КНФ не является, поскольку в первой паре скобок содержится произведение $\bar{B}C$.

Выражение, представленное отдельным аргументом или его отрицанием либо суммой или произведением нескольких переменных, одновременно входит в класс ДНФ и КНФ. Например:

$$A; \quad \bar{D}; \quad B + C + D; \quad ABC; \quad B + \bar{C} + \bar{E} + F; \quad A\bar{C}\bar{E}\bar{F}.$$

4.1.5. Теоремы поглощения, склеивания и де Моргана

Теорема поглощения записывается в двух формах – дизъюнктивной и конъюнктивной, соответственно:

$$A + AB = A; \quad A(A + B) = A.$$

Выражение второе можно получить из первого, если знаки сложения и умножения поменять местами.

Теорема склеивания также имеет две формы – дизъюнктивную и конъюнктивную:

$$AB + A\bar{B} = A; \\ (A + B)(A + \bar{B}) = A.$$

Теорема поглощения, как и теорема склеивания, применяется при упрощении булевых формул, например:

$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B = \bar{A}(\bar{B} + B) = \bar{A};$$

$$A\bar{B}C + ABC = AC(\bar{B} + B) = AC;$$

$$(AB + C)(AB + \bar{C}) = AB + AB\bar{C} + ABC + C\bar{C} = AB.$$

Теорема де Моргана связывает все три основные операции булевой алгебры – дизъюнкцию, конъюнкцию и инверсию:

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B};$$

$$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}.$$

Первая теорема читается так: отрицание произведения есть сумма отрицаний. Вторая: отрицание суммы есть произведение отрицаний.

Теорема де Моргана применима и к большему числу переменных:

$$\overline{ABC} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C};$$

$$\overline{A + B + C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C};$$

$$\overline{A + \bar{B} + \bar{C}} = \bar{A}BC;$$

$$\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = A + B + C.$$

4.1.6. Булевы функции. Элементарные булевы функции

В общем случае функция – это некоторое правило (закон), согласно которому каждому элементу множества X , представляющего собой область значений независимого переменного x , ставится в соответствие определенный элемент множества F , под которым понимается область значений зависимого переменного f . В случае булевых функций $X = F = \{0,1\}$. Правилom, при помощи которого задается функция, может служить любая булева формула, например:

$$f = A\bar{B} + C.$$

Символом f здесь обозначена функция, которая является, как и аргументы A, B, C , двоичной переменной.

Аргументы – это независимые переменные, они могут принимать любые значения – либо 0, либо 1. Функция же f – зависимая переменная. Ее значение полностью определяется значениями переменных и логическими связями между ними.

Булевы функции можно задавать таблицами. В таблице перечисляются все возможные наборы значений аргументов, и для каждого набора указывается значение функции. Такую таблицу называют **таблицей соответствия (истинности)**.

Приведем обозначения, названия и таблицы, определяющие так называемые **элементарные булевы функции**.

- 1) Функции 0 и 1 называются соответственно **тождественным нулем** и **тождественной единицей**.
- 2) Функция f_1 называется **тождественной функцией** и обозначается через x .
- 3) Функция f_2 называется **отрицанием x** и обозначается \bar{x} .

Таблица 4.2

x	0	1	f_1	f_2
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

- 4) Функция f_3 называется **конъюнкцией x_1 и x_2** , обозначается $x_1 x_2$, или $x_1 \cdot x_2$ и часто читается « x_1 и x_2 ».
- 5) Функция f_4 называется **дизъюнкцией x_1 и x_2** , обозначается $x_1 + x_2$ и часто читается « x_1 или x_2 ».
- 6) Функция f_5 называется **суммой по модулю 2 x_1 и x_2** , обозначается $x_1 \oplus x_2$ и часто читается « x_1 плюс x_2 » или « x_1 неравнозначно x_2 ».
- 7) Функция f_6 называется **эквивалентностью x_1 и x_2** , обозначается $x_1 \sim x_2$ или $x_1 \leftrightarrow x_2$ и часто читается « x_1 эквивалентно x_2 » или « x_1 равнозначно x_2 ».
- 8) Функция f_7 называется **импликацией x_1 и x_2** , обозначается $x_1 \rightarrow x_2$ и часто читается « x_1 имплицирует x_2 » или «из x_1 следует x_2 ».
- 9) Функция f_8 называется **штрихом Шеффера x_1 и x_2** , обозначается $x_1 | x_2$ и часто читается «не x_1 и x_2 » или « x_1 несовместно с x_2 ».
- 10) Функция f_9 называется **стрелкой Пирса x_1 и x_2** , обозначается $x_1 \downarrow x_2$ и часто читается «не x_1 или x_2 ».

Таблица 4.3

x_1	x_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

4.1.7. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

Функции, которые принимают единичное значение только на одном наборе, получили специальное обозначение. Называют их минимальными термами, а коротко – **минтермами**. Минтермом n переменных называется такое их произведение, в которое каждая переменная входит один раз (с отрицанием или без). Обозначаются минтермы буквой m с десятичным индексом, являющимся номером минтерма. Двоичный эквивалент номера минтерма – это набор, на котором минтерм принимает единичное значение. Например, если функция зависит от трех аргументов A, B, C , то

$$m_0 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}, \quad m_1 = \bar{A}\bar{B}C, \quad m_2 = \bar{A}B\bar{C}, \quad m_3 = \bar{A}BC, \quad \text{и т.д.}$$

Если таблица соответствия содержит только одну единицу в колонке f , то функция представляет собой минтерм. Если же в колонке f содержится две единицы (в различных строках), то функцию образует сумма соответствующих минтермов. Такой случай представлен в табл. 4.4.

В ней единицы расположены в строках 2 и 5, следовательно:

$$f = m_2 + m_5 = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C.$$

Аналогично рассуждая, приходим к выводу о том, что в функцию может входить три, четыре и так далее минтермов. И вообще, всякая совокупность единиц в колонке f дает некоторую булеву функцию и ее всегда можно записать в виде суммы минтермов.

Таблица 4.4

№	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Если функция представлена в виде суммы минтермов n аргументов, то говорят, что она записана в **совершенной дизъюнктивной нормальной форме**, сокращенно **СДНФ**.

Пусть функция, принимающая единичное значение на наборах 001, 010, 100, 101 и 110. Тогда ее аналитическое представление в СДНФ примет вид

$$f = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}.$$

Всякая булева функция заданного числа аргументов представима в виде суммы минтермов единственным образом. По этой причине СДНФ называют иногда **стандартной формой**, а также **канонической**.

Макстерм (максимальный терм) – это булева функция, которая, в отличие от минтерма, принимает единичное значение на всех наборах, за исключением одного. На этом единственном наборе макстерм принимает нулевое значение. В таблице соответствия для таких функций колонка f содержит точно один нуль и $2^n - 1$ единиц, где n – число аргументов, от которых зависит макстерм.

Макстермы будем обозначать большой буквой M с десятичными индексами по аналогии с обозначением минтермов. Нетрудно заметить, что макстерм – это отрицание минтерма, и наоборот: минтерм – это отрицание макстерма. Воспользуемся этим обстоятельством и найдем аналитическое выражение макстерма.

Таблица 4.5

Пусть функция зависит от аргументов

A, B, C , и пусть в таблице соответствия в строке 5 колонки f записан нуль, а во всех остальных строках – единицы (табл. 4.5). Добавим справа еще одну колонку и запишем в нее ту же функцию f , но в инверсной форме. Тогда $\bar{f} = m_5 = A\bar{B}C$, откуда получаем:

$$\bar{\bar{f}} = f = \bar{m}_5 = \overline{A\bar{B}C} = \bar{A} + B + \bar{C}.$$

№	A	B	C	f	\bar{f}
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	0

Индекс макстерма определяется точно так же, как и в случае минтерма.

Макстермом n переменных называется такая их сумма, в которую каждая переменная входит один раз (с отрицанием или без). Очевидно, что число различных макстермов такое же, как и число минтермов, т.е. 2^n , где n – число переменных макстерма.

Между индексами минтермов и макстермов имеется вполне определенная связь:

$$m_i = \bar{M}_{2^n-i-1}; \quad M_i = \bar{m}_{2^n-i-1}, \quad \text{где } i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1.$$

Если задана СДНФ некоторой булевой функции f , то найти ее СКНФ очень легко. Сначала находим СДНФ инверсии заданной функции. В \bar{f} войдут все минтермы, отсутствующие в f , и ни один минтерм не войдет одновременно в f и

\bar{f} . Затем записываем аналитическое выражение для \bar{f} и результат инвертируем по теореме де Моргана. Проиллюстрируем это примером.

$$\text{Пусть } f = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C.$$

В эту функцию, зависящую от трех аргументов, не входят минтермы m_3, m_6, m_7 . Следовательно, они войдут в инверсию функции f :

$$\bar{f} = \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC.$$

Инвертируем по теореме де Моргана:

$$f = (A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + \bar{C}) = M_4 M_1 M_0.$$

Это и есть искомая СКНФ заданной функции f .

4.2. Практическая часть

Пример 1. Представить функцию $f = (x \sim y) \cdot z$ в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

Решение. Составим таблицу истинности для данной функции:

x	y	z	$x \sim y$	$(x \sim y) \cdot z$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Из таблицы истинности видно, что функция принимает значение 1 на двух наборах 001 и 111. Тогда ее аналитическое представление в СДНФ примет вид

$$f = \bar{A}\bar{B}C + ABC$$

Пример 2. Представить функцию $f = x + y\bar{z}$ в совершенной конъюнктивной нормальной форме.

Решение. Составим таблицу истинности для данной функции:

x	y	z	$y\bar{z}$	$x + y\bar{z}$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Из таблицы истинности видно, что функция принимает значение 0 на трех наборах 000, 001 и 011. Тогда аналитическое выражение для \bar{f} будет:

$$\bar{f} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz.$$

Инвертируем по теореме де Моргана:

$$f = \bar{\bar{f}} = \overline{\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz} = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z}).$$

Это и есть искомая СКНФ заданной функции f .

4.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Представить функцию f в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

Вариант	Функция f	Вариант	Функция f
1	$x\bar{y} + xz$	8	$\overline{x + y} \sim z$
2	$(x + \bar{y}) \sim z$	9	$(x \oplus y) \cdot \bar{z}$
3	$(x \oplus y)z$	10	$x\bar{y} + x\bar{z}$
4	$yz + \bar{x}z$	11	$(x y) \cdot z$
5	$(x \sim y)z$	12	$\bar{y}z + xz$
6	$(x z) \cdot \bar{y}$	13	$(x z) \cdot y$
7	$x\bar{y} + \bar{x}z$	14	$yz + x\bar{z}$

Задача 2. Представить функцию f в совершенной конъюнктивной нормальной форме.

Вариант	Функция f	Вариант	Функция f
15	$z \rightarrow x\bar{y}$	22	$(x \oplus y) \rightarrow z$
16	$(x + \bar{y}) \sim z$	23	$\bar{z} + (x \sim y)$
17	$x\bar{y} + \bar{x}z$	24	$(x y) \rightarrow z$
18	$\overline{x + y} \sim z$	25	$(x + \bar{y}) z$
19	$\overline{xy} \rightarrow z$	26	$xy \rightarrow \bar{y}z$
20	$z \rightarrow (x \oplus y)$	27	$\bar{z} \rightarrow (x \oplus y)$
21	$(x \sim y) + z$	28	$(x + \bar{y}) \rightarrow z$

4.4. Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Какими аксиомами определяется дизъюнкция или логическое сложение?
2. Какими аксиомами определяется конъюнкция или логическое умножение?
3. Какими аксиомами определяется инверсия или логическое отрицание?
4. Назовите основные свойства дизъюнкции.
5. Запишите основные свойства конъюнкции.
6. Перечислите теоремы одной переменной.
7. Что такое дизъюнктивная нормальная форма? Приведите пример.
8. Что такое конъюнктивная нормальная форма? Приведите пример.
9. Запишите теоремы поглощения.
10. Запишите теоремы склеивания.
11. Вспомните теоремы де Моргана.
12. Что такое булевы функции и как их можно задать?
13. Вспомните элементарные булевы функции.
14. Что такое минтерм и как представить функцию в совершенной дизъюнктивной нормальной форме?
15. Что такое макстерм и как представить функцию в совершенной конъюнктивной нормальной форме?

5. КОМБИНАТОРИКА

Число, место и комбинация – три взаимно перекрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи.

Дж. Сильвестр

На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определенном порядке и т.д. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют «**комбинаторные задачи**».

Термин «**комбинаторика**» происходит от латинского «**combinare**» - сочетать, соединять. Комбинаторика – одно из направлений математики, предшествовавшее и ставшее в дальнейшем основой дискретной математики.

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами. Она имеет широкий круг приложений: теория вероятностей, теория информации, теория надежности, алгебраическая топология, алгебра и математический анализ.

5.1. Теоретическая часть

5.1.1. Основные соотношения комбинаторики: размещение, перестановка, сочетание

Определение. *Факториалом* натурального числа **n** будем называть произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до **n**.

Обозначение. В качестве обозначения факториала **n** используют запись – **n!** (читают: «эн факториал»): $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Принято считать, что $0! = 1$. Факториал обладает следующим свойством: $n! = n(n - 1)!$ (его также называют *основным свойством факториала*). Это равенство справедливо для любого $n \geq 1$.

Следует заметить, что функция **n!** возрастает очень быстро. Так, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, а вот уже $10! = 3628800$. Вычислять факториалы больших чисел прямым умножением на калькуляторе очень долго, а очень больших чисел – и на компьютере не быстро. А как же справлялись с этим до создания компьютеров и калькуляторов? Еще в начале 18-го века (в 1730 году) английским математиком Дж. Стирлингом была получена формула для приближенного вычисления факториалов, которая тем точнее, чем больше число **n**. Сейчас эта формула называется **формулой Стирлинга**:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n},$$

где $\pi = 3,14159\dots$, $e = 2,71828\dots$ (основание натуральных логарифмов), причем относительная ошибка при пользовании этой формулой для вычисления $n!$ меньше $(e^{1/12n} - 1)$ и, таким образом, стремится к нулю при неограниченном возрастании n .

Например, при $n = 10$ формула Стирлинга дает $n! \approx 3598700$, тогда как точное значение $10! = 3628800$; относительная ошибка в данном случае составляет менее 1 %. Эта формула имеет многочисленные применения в приложениях математики, особенно в теории вероятностей и математической статистике.

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

Размещением из n элементов по k элементов ($0 < k \leq n$) называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее k элементов.

Размещения – это выборки (комбинации), состоящие из k элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается символом A_n^k (читают: «а из эн по ка» или «число размещений из n по k ») и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) \quad \text{или} \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Буква **A** происходит от французского слова «**Arrangement**», которое переводится как «размещение, приведение в порядок».

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов.

Перестановка – это выборки (комбинации), состоящие из n элементов и отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n (читают: «пэ из эн») и вычисляется по формуле

$$P_n = n!.$$

Эта формула следует из определения перестановки:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1.$$

Буква **P** происходит от французского слова «**Permutation**», которое переводится как «перестановка».

Сочетанием из n элементов по k элементов ($0 < k \leq n$) называется любое подмножество, которое содержит k элементов данного множества.

Сочетания – это выборки (комбинации), состоящие из k элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, т.е. отличаются только составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читают: «цэ из эн по ка» или «число сочетаний из n по k ») и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Буква C происходит от французского слова «**Combinaison**», которое переводится как «сочетание».

Числа C_n^k обладают многими интересными свойствами. Перечислим наиболее известные из них:

- 1) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
- 2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
- 3) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- 4) $C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}$;
- 5) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$;
- 6) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$;
- 7) $C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m$.

Определенные таким образом размещения, перестановки, сочетания называют **схемой выбора без возвращения**.

Рассмотрим теперь **схему выбора с возвращением**.

Если при выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это **размещения с повторениями**. Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из n элементов по k с повторениями обозначается символом \tilde{A}_n^k и вычисляется по формуле

$$\tilde{A}_n^k = n^k.$$

Если при выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно без последовательного упорядочивания, то говорят, что это **сочетания с**

повторениями. Число всех сочетаний из n элементов по k с повторениями обозначается символом \tilde{C}_n^k и вычисляется по формуле

$$\tilde{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Пусть во множестве с n элементами есть k различных элементов, при этом 1-ый элемент повторяется n_1 раз, 2-ой элемент повторяется n_2 раз, k -ый элемент повторяется n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Перестановки из n элементов данного множества называют **перестановками с повторениями** из n элементов. Число перестановок с повторениями из n элементов обозначается символом $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ и вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

5.1.2. Основные правила комбинаторики

Сформулируем два основных правила комбинаторики.

Правило суммы

Если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить n способами, а другое – m способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $n + m$ способами.

Правило произведения

Пусть требуется выполнить одно за другим два действия. Если первое действие можно выполнить n способами, второе – m способами, тогда оба действия можно выполнить $n \cdot m$ способами.

Правила суммы и произведения естественным образом обобщаются и на случай многих действий, а именно, если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и так далее, до k -го действия, которое можно выполнить n_k способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $n_1 + n_2 + \dots + n_k$, а все действия $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

5.1.3. Бином Ньютона

Бином Ньютона – это название формулы, выражающей любую целую положительную степень суммы двух слагаемых (бинома, двучлена) через степени этих слагаемых, а именно:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \dots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n, \text{ где } n - \text{целое положительное число, } a \text{ и } b - \text{какие угодно числа.}$$

Числа $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) называются **биномиальными коэффициентами**, а выражение $C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ называют $(k+1)$ -ым членом разложения.

Частными случаями бинома Ньютона при $n = 2$ и $n = 3$ являются известные формулы сокращенного умножения для квадрата и куба суммы двух чисел a и b :

$$(a + b)^2 = C_2^0 \cdot a^2 + C_2^1 \cdot a^1 \cdot b + C_2^2 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = C_3^0 \cdot a^3 + C_3^1 \cdot a^2 \cdot b + C_3^2 \cdot a \cdot b^2 + C_3^3 \cdot b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Например, в рассмотренной формуле квадрат суммы первым членом разложения является $C_2^0 \cdot a^{2-0} \cdot b^0 = a^2$, вторым членом - $C_2^1 \cdot a^{2-1} \cdot b^1 = 2ab$, третьим - $C_2^2 \cdot a^{2-2} \cdot b^2 = b^2$.

Биномиальные коэффициенты можно представить в виде арифметического треугольника Паскаля (см. табл. 5.1).

Таблица 5.1

Показатель степени	Биномиальные коэффициенты					
$n = 0$	C_0^0					
$n = 1$	$C_1^0 \quad C_1^1$					
$n = 2$	$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$					
$n = 3$	$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$					
$n = 4$	$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$					
$n = 5$	$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$					
$n = 6$	$C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6$					
...	...					

Эта таблица больше известна в виде таблицы значений биномиальных коэффициентов (см. табл. 5.2):

Таблица 5.2

Показатель степени	Треугольник Паскаля (биномиальные коэффициенты)						
n = 0	1						
n = 1	1		1				
n = 2	1			2		1	
n = 3	1				3		1
n = 4	1		4		6		1
n = 5	1			5		10	
n = 6	1				15		1
...	...						

Боковые стороны состоят из единиц. Внутри треугольника Паскаля стоят числа, которые получаются сложением двух соответствующих чисел над ними. Это правило справедливо для всех внутренних чисел треугольника Паскаля и объясняется свойствами коэффициентов бинома Ньютона.

Свойства биномиальных коэффициентов

1. Коэффициенты, равноудаленные от начала и конца разложения, равны между собой $C_n^p = C_n^{n-p}$ ($p = 0, 1, 2, \dots, n$).

2. Сумма биномиальных коэффициентов равна числу 2, возведенному в степень, равную показателю степени бинома Ньютона

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

3. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах; каждая из них равна 2^{n-1} .

5.1.4. Метод включений и исключений

Метод включений и исключений применяется к важной задаче разделения множеств на подмножества в зависимости от того, обладают ли их элементы определенной совокупностью свойств или нет.

Рассмотрим сначала задачу о нахождении числа элементов объединения множеств. Обозначим через $N(A)$ количество элементов множества **A**. Основная формула, которой пользуются при нахождении числа элементов объединения двух множеств, такова:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

Эта формула совершенно очевидна из диаграммы Эйлера-Венна (рис. 5.1).

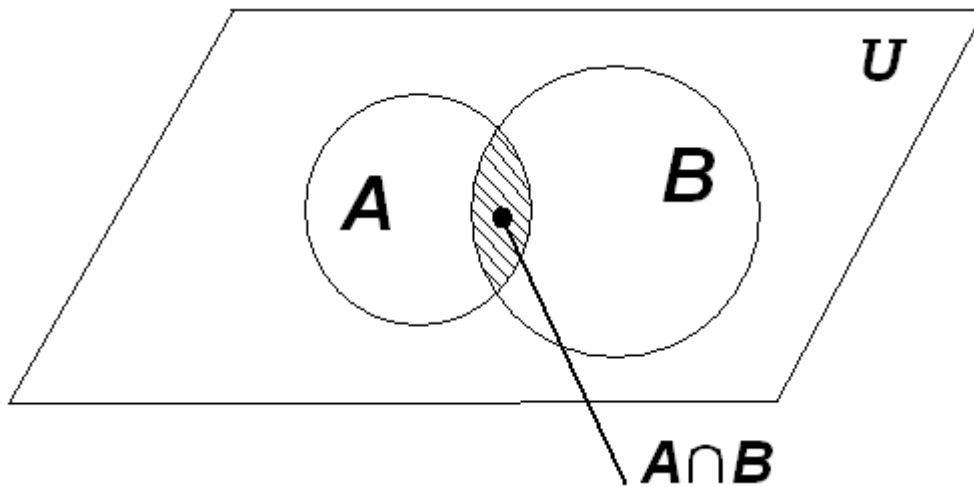


Рис. 5.1

Действительно, в сумме $N(A) + N(B)$ каждый элемент принадлежащий и A, и B учитывается дважды; поэтому после вычитания из $N(A) + N(B)$ количества элементов, принадлежащих пересечению этих множеств, получим в точности число элементов $A \cup B$.

Аналогичными рассуждениями обосновывается формула для трех множеств:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C).$$

Эту формулу тоже можно изобразить с помощью диаграммы (рис. 5.2).

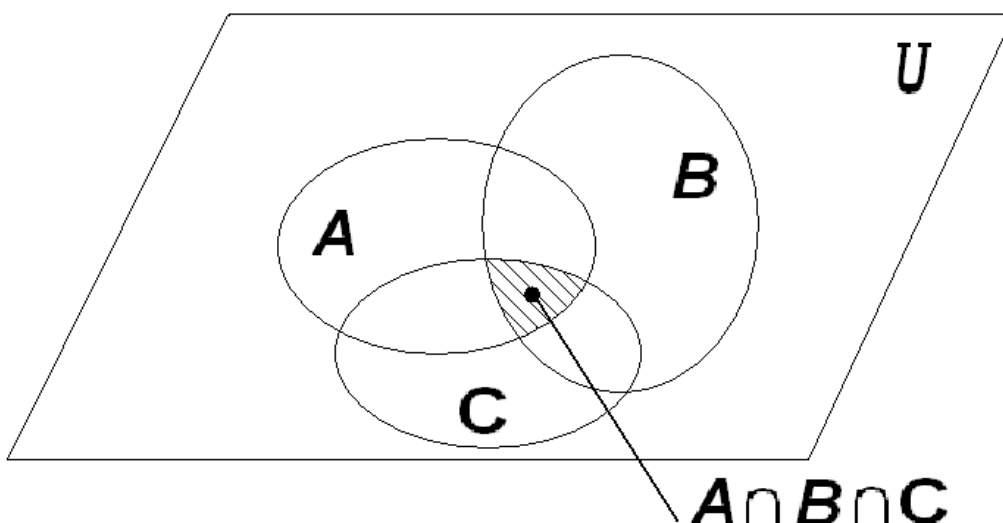


Рис. 5.2

В общем случае имеет место следующее утверждение.

Теорема (формула включений-исключений).

Пусть A_1, A_2, \dots, A_n – конечные множества. Тогда

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n N(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \cdot N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Замечание. При решении многих задач применяется следующий обобщенный вариант формулы включений-исключений. Пусть для любого i множество A_i является подмножеством некоторого множества A . Обозначим через \bar{A}_i дополнение к A_i до множества A : $\bar{A}_i = A \setminus A_i$. Тогда

$$N(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = N(A) - \sum_{i=1}^n N(A_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(A_i \cap A_j) - \dots + (-1)^{n-1} \cdot N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Определим функцию $\omega(n)$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega(0) &= N(A); \quad \omega(1) = \sum_{i=1}^n N(A_i); \\ \omega(k) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \quad (k \leq n). \end{aligned}$$

Пусть $N(r)$ – число элементов множества A , которые принадлежат ровно r различным множествам A_i (если $r = 0$, то – ни одному). С помощью введенных функций формула включений-исключений принимает вид:

$$N(0) = \omega(0) - \omega(1) + \omega(2) - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \omega(n).$$

Имеет место и более общее соотношение:

$$N(r) = \omega(r) - C_{r+1}^1 \cdot \omega(r+1) + C_{r+2}^2 \cdot \omega(r+2) - \dots + (-1)^{n-r} \cdot C_n^{n-r} \cdot \omega(n).$$

5.2. Практическая часть

Задача 1. Научное общество состоит из 25 человек. На ближайшем собрании необходимо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

Решение. В этом случае нужно найти число размещений из 25 элементов по 4 – «разместить» некоторых из 25 человек на 4 должностях. Ведь здесь играет роль и то, кто будет выбран в руководство общества, и то, какие посты займут выбранные представители. Поэтому ответ можно дать в виде формулы

$$A_{25}^4 = \frac{25!}{(25-4)!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600.$$

Ответ: этот выбор может быть сделан 303600 способами.

Задача 2. Из 10 кандидатов на одну и ту же должность должны быть выбраны трое. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

Решение. В этом случае нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 3, так как важно лишь то, кто конкретно из кандидатов будет избран на эту должность. Поэтому ответ можно дать в виде формулы

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120.$$

Ответ: этот выбор может быть сделан 120 способами.

Задача 3. Сколькими способами можно расставить 4 книги на полке?

Решение. Необходимо составить всевозможные упорядоченные множества из 4 элементов, т.е. составить перестановки. Количество их равно

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Ответ: книги на полке расставить 24 способами.

Задача 4. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не угрожали друг другу?

Решение. Ладья бьет по горизонтали и по вертикали. Поэтому при требуемом расположении восьми ладей на каждой горизонтали и на каждой вертикали должно стоять по одной ладье. Одно такое расположение найти совсем легко – достаточно выстроить ладьи по диагонали, и они не будут бить друг друга. Сколькими же способами можно расположить ладьи требуемым образом? Возьмем одно из подходящих по условию расположений и обозначим через a_1 номер занятого поля на вертикали **a**, через a_2 – на вертикали **b**, ..., через a_8 – на вертикали **h**.

Среди чисел a_1, a_2, \dots, a_8 нет ни одной пары одинаковых, так как иначе две ладьи попали бы на одну и ту же горизонталь, поэтому (a_1, a_2, \dots, a_8) будет некоторой перестановкой чисел 1, 2, ..., 8.

Обратно, если a_1, a_2, \dots, a_8 – некоторая перестановка чисел 1, 2, ..., 8, то ей соответствует некоторое расположение ладей, при котором они не могут бить друг друга.

Например, на рис. 5.3 изображено расположение ладей, которое соответствует перестановке (5, 7, 6, 3, 2, 4, 1, 8).

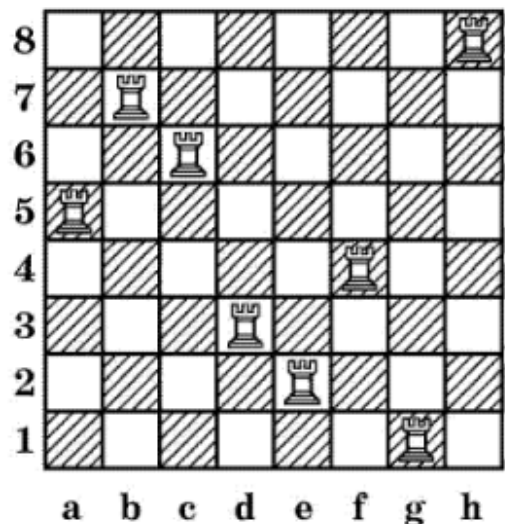


Рис. 5.3

Таким образом, число искомых расположений равно числу перестановок чисел 1, 2, ..., 8, то есть P_8 . Но $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$. Значит, ладьи можно расположить требуемым образом 40320 способами.

Ответ: ладьи можно расположить 40320 способами.

Задача 5. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?

Решение. Поскольку по условию задачи в один вагон могут сесть несколько человек, и поскольку рассадка зависит от того, кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещения с повторениями:

$$\tilde{A}_9^7 = 9^7 = 4782969.$$

Эту же задачу можно решить, применяя комбинаторное правило умножения: действие – рассадить 7 человек распадается на 7 этапов: разместить первого пассажира, разместить второго пассажира, ..., разместить седьмого пассажира. Первый этап – размещение первого пассажира можно выполнить 9 способами, второго пассажира тоже можно разместить 9 способами, и т.д.:

$$\underbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 9}_7 = 9^7 = 4782969.$$

Ответ: 4782969 способов рассадки по вагонам.

Задача 6. Сколько различных сигналов можно составить из четырех флажков различных цветов, если каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флажков?

Решение. Составить сигнал можно из двух флажков, из трех или из четырех. Действие – составить сигнал – означает: выбрать флажки из четырех и расположить их в определенном порядке. Таким образом, в каждом случае нужно выполнить два этапа: первый – выбрать флажки, второй – расположить выбранные флажки в определенном порядке.

Составляем сигналы из двух флажков: выбрать два флажка из четырех можно

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6 \text{ различными способами, и расположить выбранные два}$$

флажка в определенном порядке можно $2! = 1 \cdot 2 = 2$ числом способов. Таким образом, согласно комбинаторному правилу умножения, можно составить $6 \cdot 2 = 12$ различных сигналов из двух флажков.

Составляем сигналы из трех флажков: выбрать три флажка из четырех можно

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4 \text{ различными способами, и расположить выбранные три}$$

флажка в определенном порядке можно: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ числом способов. Таким образом, согласно комбинаторному правилу умножения, можно составить $4 \cdot 6 = 24$ различных сигналов из трех флажков.

Составляем сигналы из четырех флажков: выбрать четыре флажка из четырех

$$\text{можно } C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{1}{0!} = 1 \text{ - одним способом, а расположить выбранные четыре}$$

флажка в определенном порядке можно $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ способами. Значит, можно составить $1 \cdot 24 = 24$ различных сигнала из четырех флажков.

Применим теперь комбинаторное правило сложения: всего существует $12 + 24 + 24 = 60$ сигналов из не менее чем двух флажков.

Ответ: можно составить 60 различных сигналов.

Задача 7. Сколько перестановок можно получить из букв слова КОЛОКОЛА?

Решение. Требуется найти число перестановок с повторениями на множестве из 8 букв, среди которых:

буква **К** повторяется 2 раза;

буква **О** повторяется 3 раза;

буква **Л** повторяется 2 раза;

буква **А** повторяется 1 раз.

Таким образом,

$$P_8(2;3;2;1) = \frac{8!}{2!3!2!1!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2!3!2!1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680.$$

Ответ: 1680 перестановок.

Задача 8. Сколькими способами можно расставить 9 книг на полке так, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение. Будем считать выделенные 4 книги за один элемент. Тогда данное множество содержит 6 элементов. Количество способов расстановки этих элементов есть количество перестановок из 6 элементов:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Но сами 4 книги, которые стоят рядом можно расставить $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ способами. Расстановка 4 книг – это первое действие, расстановка 5 книг с блоком из 4-х книг – это второе действие. Данные действия последовательны, значит применимо правило умножения. Тогда способов всего $24 \cdot 720 = 17280$.

Ответ: 17280 способов расстановки книг.

Задача 9. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают значения 8 см, 10 см, 12 см и 14 см?

Решение. Для подсчета числа таких треугольников воспользуемся формулой числа сочетаний с повторениями

$$\tilde{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 = 20.$$

Ответ: 20 треугольников.

Задача 10. Возвести $(a + b)$ в пятую степень.

Решение. Используя строку треугольника Паскаля, которой соответствует пятая степень (см. табл. 5.3),

Таблица 5.3

Показатель степени	Треугольник Паскаля (биномиальные коэффициенты)						
n = 0	1						
n = 1	1		1				
n = 2	1		2	1			
n = 3	1	3	3		1		
n = 4	1	4	6	4	1		
n = 5	1	5	10	10	5	1	
n = 6	1	6	15	20	15	6	1
...	...						

находим значения биномиальных коэффициентов: 1, 5, 10, 10, 5, 1. Получаем

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Ответ: $(a + b)^3 = a^3 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

Задача 11. Найти коэффициент шестого члена разложения для $(a + b)^{10}$.

Решение. Так как выражение $C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ называют $(k+1)$ -ым членом разложения, то $n = 10$, $k = 6 - 1 = 5$. Таким образом, коэффициент шестого члена равен

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9 = 252.$$

Ответ: 252.

Задача 12. На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии – 700, а по стереометрии – 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии – 500, по планиметрии и стереометрии – 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Сколько абитуриентов не решили ни одной задачи?

Решение. При решении задачи будем использовать формулу включений-исключений. В роли исходного множества A выступает множество из 1000 абитуриентов, подмножества A_1 , A_2 , A_3 составляют абитуриенты решившие задачи по алгебре, планиметрии и стереометрии соответственно. Имеем

$$\begin{aligned}\omega(0) &= 1000; & \omega(1) &= 800 + 700 + 600 = 2100; \\ \omega(2) &= 600 + 500 + 400 = 1500; & \omega(3) &= 300.\end{aligned}$$

Тогда

$$N(0) = \omega(0) - \omega(1) + \omega(2) - \omega(3) = 1000 - 2100 + 1500 - 300 = 100.$$

Ответ: 100 абитуриентов не решили ни одной задачи.

Задача 13. В месяце было 12 дождливых, 8 ветреных, 4 холодных дня, дождливых и ветреных – 5 дней, дождливых и холодных – 3 дня, ветреных и холодных – 2 дня, дождливых, ветреных и холодных – 1 день. Сколько дней была плохая погода?

Решение. Пусть множество **A** – дождливые дни, множество **B** – ветреные дни, множество **C** – холодные, а множество **D** – дни с плохой погодой. Тогда

$$D = A \cup B \cup C.$$

Количество дней с плохой погодой:

$$N(D) = N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C) = 12 + 8 + 4 - 5 - 3 - 2 + 1 = 15.$$

Ответ: 15 дней была плохая погода.

Задача 14. В группе, состоящей из 20 человек, 6 знают немецкий, 7 – французский, 8 – английский язык, 3 человека знают немецкий и французский, 4 – немецкий и английский, 5 – французский и английский и один человек знает все 3 языка. Сколько человек знают ровно два иностранных языка?

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся формулой

$$N(r) = \omega(r) - C_{r+1}^1 \cdot \omega(r+1) + C_{r+2}^2 \cdot \omega(r+2) - \dots + (-1)^{n-r} \cdot C_r^{n-r} \cdot \omega(n).$$

Так как $r = 2$, то $N(2) = \omega(2) - C_3^1 \cdot \omega(3)$.

По условию задачи $\omega(2) = 3 + 4 + 5 = 12$; $\omega(3) = 1$, тогда

$$N(2) = 12 - C_3^1 \cdot 1 = 12 - \frac{3!}{1!2!} \cdot 1 = 12 - 3 = 9.$$

Ответ: 9 человек знают ровно два языка.

Задача 15. Из 100 студентов 60 читают журнал В; 50 читают журнал С; 50 читают журнал Д; 30 – журналы В и С; 20 – журналы С и Д; 40 – журналы В и Д; 10 – журналы В, С и Д. Сколько студентов читает хотя бы один журнал?

Решение. В роли исходного множества **A** выступает множество из 100 студентов. Подмножества A_1, A_2, A_3 составляют студенты, читающие журналы В, С и Д соответственно. По условию задачи

$$\omega(0) = 100; \quad \omega(1) = 60 + 50 + 50 = 160;$$

$$\omega(2) = 30 + 20 + 40 = 90; \quad \omega(3) = 10.$$

Тогда число студентов, которые не читают ни один из трех журналов равно

$$N(0) = \omega(0) - \omega(1) + \omega(2) - \omega(3) = 100 - 160 + 90 - 10 = 20.$$

Для того чтобы найти число студентов, которые читают хотя бы один журнал, нужно из общего числа студентов (100) вычесть число студентов, которые не читают ни один из трех журналов (20). Таких студентов будет 80.

Ответ: 80 студентов читает хотя бы один журнал.

5.3. Задачи для самостоятельного решения

ЗАДАНИЕ № 1. Решить задачу

Вариант 1. Сколькими способами можно выбрать 2 детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Вариант 2. Сколько различных имен – отчеств можно составить из имен Надежда, Иван, Андрей, Наталья, Дмитрий, Людмила, Александр?

Вариант 3. Из лаборатории, в которой работают заведующий и 10 сотрудников, надо отправить 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если заведующий лабораторией обязательно должен поехать в командировку?

Вариант 4. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещены?

Вариант 5. Сколько слов можно образовать из букв слова ФРАГМЕНТ, если слова должны состоять из семи букв?

Вариант 6. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг, если две определенные книги должны стоять рядом?

Вариант 7. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

Вариант 8. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова САПФИР, которые начинаются с буквы Ф и оканчиваются буквой Р?

Вариант 9. В круговой диаграмме круг разбит на 5 секторов. Секторы решили закрасить разными красками, взятыми из набора, содержащего 10 красок. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 10. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам по одному в вагон?

Вариант 11. В финале конкурса «Студент года» принимают участие 6 человек. Сколькими способами могут распределиться три призовых места?

Вариант 12. Сколько различных слов можно составить из букв слова МАТЕМАТИКА?

Вариант 13. Номер автомобиля состоит из трех букв и трех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 10 цифр и алфавит из 30 букв?

Вариант 14. Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

Вариант 15. 10 команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1-е, 2-е и 3-е места. Две команды, занявшие последние места, не будут участвовать в следующем первенстве. Сколько разных вариантов результата первенства может быть, если учитывать только положение первых трех и последних двух команд?

Вариант 16. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую цифру можно использовать только один раз?

Вариант 17. Из слова РОТ перестановкой букв можно получить еще такие слова: ТОР, ОРТ, ОТР, ТРО, РТО. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова ЛОГАРИФМ?

Вариант 18. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 человек, можно создать из 14 преподавателей?

Вариант 19. На плоскости даны 5 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?

Вариант 20. Сколько диагоналей в выпуклом десятиугольнике?

Вариант 21. Имеется 6 видов конвертов без марок и 3 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

Вариант 22. Для освещения событий в одной из стран ближнего зарубежья решено отправить трех корреспондентов газеты. Сколькими способами это можно сделать, если в штате 32 сотрудника?

Вариант 23. Бригада, занимающаяся ремонтом школы, состоит из 12 маляров и 5 плотников. Из них для ремонта физкультурного зала надо выделить 4 маляров и 2 плотников. Сколькими способами можно это сделать?

Вариант 24. Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть ровно 7 человек?

Вариант 25. Сколькими способами можно разместить одну за другой на странице 5 различных заметок?

ЗАДАНИЕ № 2. Решить задачу

Задача 1. Из 170 студентов журнал А читают 52 человека, журнал В – 48 человек, журнал С – 30 человек, журналы А и В – 13 человек, журналы А и С – 16 человек, журналы В и С – 14 человек, а все три журнала – 6 человек.

Вариант	Вопрос
1	Сколько студентов не читают ни один из журналов А, В, С?
2	Сколько студентов читают не менее двух из журналов А,В,С?
3	Сколько студентов читают хотя бы один из журналов А, В, С?
4	Сколько студентов читают только один из журналов А, В, С?

Задача 2. Из 100 предприятий некоторого профиля 32 выпускают продукцию А, 28 – продукцию В и 17 – продукцию С. При этом продукцию А и В выпускают 9 предприятий, продукцию А и С – 8 предприятий, продукцию В и С – 7 предприятий, а все три вида продукции – 3 предприятия.

Вариант	Вопрос
5	Сколько предприятий выпускают не менее двух из перечисленных видов продукции?
6	Сколько предприятий выпускают хотя бы один из перечисленных видов продукции?
7	Сколько предприятий выпускают только один из перечисленных видов продукции?
8	Сколько предприятий не выпускают ни один из перечисленных видов продукции?

Задача 3. Из 110 деталей прошли обработку на станке А 27 деталей, на станке В – 40 деталей и на станке С – 19 деталей. При этом на станках А и В обработаны 11 деталей, на станках А и С – 9 деталей, на станках В и С – 10 деталей, а на всех трех станках – 4 детали.

Вариант	Вопрос
9	Сколько деталей прошли обработку не менее чем на двух из перечисленных станков?
10	Сколько деталей прошли обработку хотя бы на одном из перечисленных станков?
11	Сколько деталей прошли обработку только на одном из перечисленных станков?
12	Сколько деталей не прошли обработку ни на одном из перечисленных станков?

Задача 4. Из 150 студентов 34 изучали немецкий язык, 52 – английский и 26 – французский. При этом немецкий и английский языки изучали 15 человек, немецкий и французский – 14 человек, английский и французский – 16 человек, а все три языка – 6 человек.

Вариант	Вопрос
13	Сколько студентов изучали не менее двух из перечисленных иностранных языков?
14	Сколько студентов изучали хотя бы один из перечисленных иностранных языков?
15	Сколько студентов изучали только один из перечисленных иностранных языков?
16	Сколько студентов не изучали ни один из перечисленных иностранных языков?

Задача 5. Обследование 85 женщин показало, что косметикой фирмы А пользуются 23 из них, косметикой фирмы В – 31 и косметикой фирмы С – 18. При этом косметикой фирм А и В пользуются 14 женщин, косметикой фирм А и С – 11, косметикой фирм В и С – 9, а косметикой всех трех фирм – 4 женщины.

Вариант	Вопрос
17	Сколько женщин пользуются косметикой не менее двух из перечисленных фирм?
18	Сколько женщин пользуются косметикой хотя бы одной из перечисленных фирм?
19	Сколько женщин пользуются косметикой только одной из перечисленных фирм?
20	Сколько женщин не пользуются косметикой ни одной из перечисленных фирм?

Задача 6. Из 110 семей автомобиль марки А имеют 23 семьи, автомобиль марки В – 31 семья и автомобиль марки С – 28 семей. При этом по автомобилю марки А и В имеют 11 семей, по автомобилю марки А и С – 10 семей, по автомобилю марки В и С – 17 семей, а по автомобилю всех трех марок – 4 семьи.

Вариант	Вопрос
21	Сколько семей имеют автомобили не менее двух из перечисленных марок?
22	Сколько семей имеют автомобили хотя бы одной из перечисленных марок?
23	Сколько семей имеют автомобиль только одной из перечисленных марок?
24	Сколько семей не имеют автомобиль ни одной из перечисленных марок?

Задача 7. Из 100 человек напиток типа А употребляют 25 человек, типа В – 30 человек и типа С – 40 человек. При этом напитки типа А и В употребляют 11 человек, типа А и С – 13 человек, типа В и С – 12 человек, а напитки всех трех типов – 5 человек.

Вариант	Вопрос
25	Сколько человек употребляют напитки не менее двух из перечисленных типов?

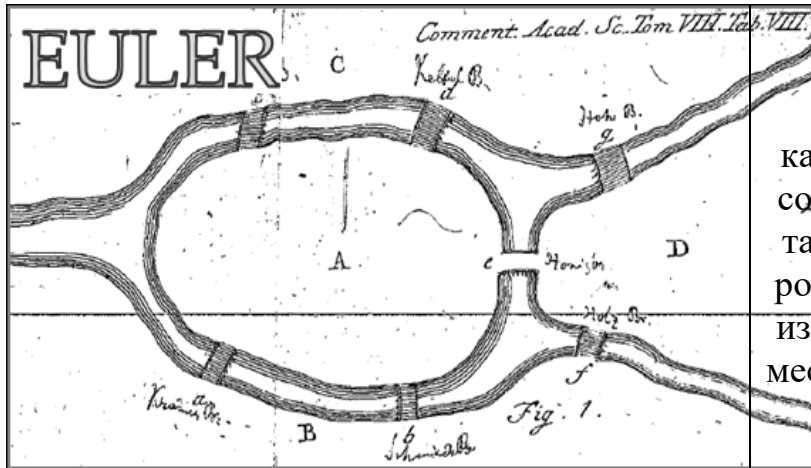
5.4. Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Что называется комбинаторикой?
2. Дайте определение факториала.
3. Сформулируйте основное свойство факториала.
4. Запишите формулу Стирлинга. Каково ее применение?
5. Что называется размещением?
6. Запишите формулу для подсчета числа размещений.
7. Что называется сочетанием?
8. Запишите формулу для подсчета числа сочетаний.
9. Что называется перестановкой?
10. Запишите формулу для подсчета числа перестановок.
11. Запишите формулу для подсчета числа размещений с повторениями.
12. Запишите формулу для подсчета числа сочетаний с повторениями.
13. Запишите формулу для подсчета числа перестановок с повторениями.
14. Сформулируйте правило суммы.
15. Сформулируйте правило произведения.
16. Что такое бином Ньютона?
17. Запишите формулу бинома Ньютона.
18. Какие числа называются биномиальными коэффициентами?
19. Какой вид имеет бином Ньютона при $n = 2$?
20. Запишите формулу бинома Ньютона при $n = 3$.
21. Что такое арифметический треугольник Паскаля?
22. Какими свойствами обладают числа арифметического треугольника Паскаля?
23. Перечислите основные свойства биномиальных коэффициентов.
24. В каких задачах применяется метод включений и исключений.
25. Запишите формулу включений-исключений.
26. Какой вид имеет формула включений-исключений для двух множеств?
27. Какой вид имеет формула включений-исключений для трех множеств?
28. Запишите обобщенную формулу включений-исключений.

6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Теория графов – это область дискретной математики, особенностью которой является геометрический подход к изучению объектов.

Начало теории графов датируют 1736 годом, когда Л. Эйлер решил популярную в то время задачу «о семи кёнигсбергских мостах», ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов.



Жители города Кёнигсберга (ныне Калининград) каждому приезжему предлагали совершить прогулку по городу таким образом, чтобы, пройдя ровно по одному разу по каждому из семи мостов, вернуться в то же место, откуда начиналась прогулка (рис. 6.1).

Рис.6.1

Решая эту задачу, а точнее доказывая невозможность ее решения, Эйлер изобразил Кёнигсберг в виде графа, отождествив его вершины с частями города, а ребра – с мостами, которыми связаны эти части (рис. 6.2).

Заметим, что сам термин «граф» был введен спустя 200 лет (в 1936 году) Д. Кёнигом в его монографии «Теория конечных и бесконечных графов».

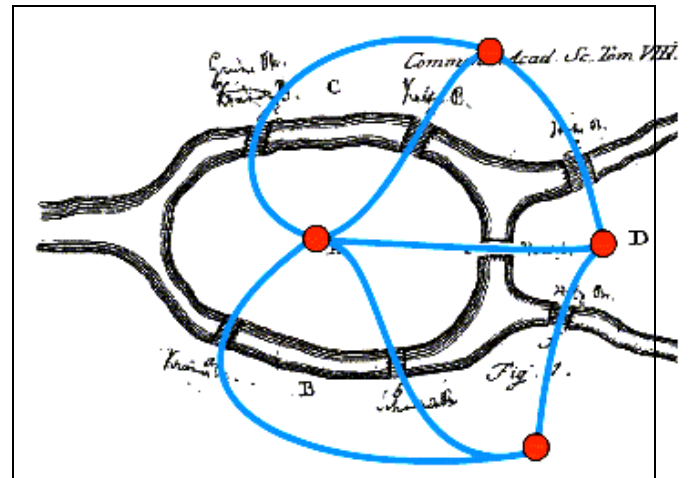


Рис. 6.2

В XIX веке графы использовались для построения схем электрических цепей и молекулярных схем, а в начале XX века привлекли внимание топологов, и теория графов стала развиваться как глава теоретико-множественной топологии.

В настоящее время теория графов является эффективным аппаратом формализации современных инженерных и научных задач в различных областях знаний, в экономической и планово-финансовой практике, в автоматизации управления производством, в календарном и сетевом планировании, в программировании для вычислительной техники, в теории транспортных сетей, в логистике, в исследовании операций и анализе структуры систем, теории игр, теории механизмов и т.д.

6.1. Теоретическая часть

6.1.1. Основные понятия и определения

Графом $G = (X, U)$ называется совокупность двух конечных множеств: $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ – множества его вершин (они графически изображаются точками) и $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$ – множества ребер или дуг.

Последние представляют собой пары элементов $u = (x_i, x_j)$ и изображают связи между объектами $x_i, x_j \in X$ в виде линий, их соединяющих. При этом **связь со стрелкой называется дугой, а без стрелки – ребром.**

Дуга определяет направление соответствующей связи между объектами (вершинами графа), поэтому дугу $u = (x_i, x_j)$ **иногда называют ориентированным ребром.** В этом случае вершина x_i считается начальной вершиной дуги, а x_j – ее конечной вершиной. Связь без стрелки (ребро) можно заменить парой противоположно направленных дуг.

Две вершины графа x_i, x_j называются смежными, если существует соединяющее их ребро (x_i, x_j) . При этом x_i, x_j называют концами ребра.

Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину графа.

Если ребро соединяет вершины x_i, x_j , то говорят, что оно **инцидентно** этим вершинам. При этом указанные **вершины инцидентны ребру (x_i, x_j) .**

Вершина, для которой не существует инцидентных ей ребер, называется **изолированной.**

Граф называется **неориентированным** (неорграфом), если каждое его ребро не ориентировано.

Граф называется **ориентированным** (орграфом), если каждое его ребро ориентировано.

На рис. 6.3 изображен неориентированный граф $G = (X, U)$:

$$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \},$$

$$U = \{ u_1 = (x_1, x_2), u_2 = (x_2, x_3), u_3 = (x_1, x_3), u_4 = (x_3, x_4) \}.$$

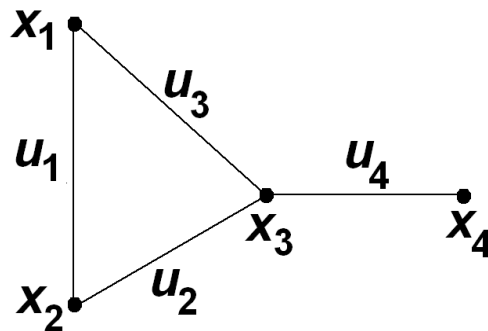


Рис. 6.3

На рис. 6.4 изображен ориентированный граф $G = (X, U)$:

$$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \},$$

$$U = \{ u_1 = (x_1, x_2), u_2 = (x_1, x_3), u_3 = (x_3, x_4), u_4 = (x_3, x_2) \}.$$

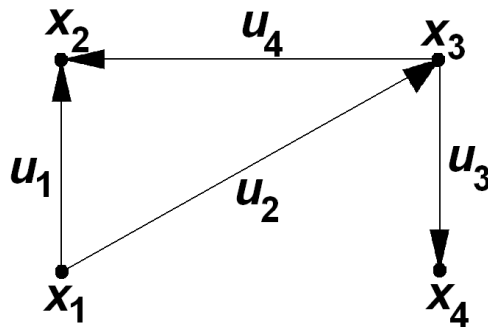


Рис. 6.4

Неорграф, полученный из орграфа заменой каждой его дуги на ребро, называется **основанием графа**.

Граф, у которого имеются как ориентированные ребра (дуги), так и неориентированные, называется **смешанным**.

Если две смежные вершины графа соединяют несколько различных ребер (при этом два ребра с совпадающими ориентациями считаются одинаковыми), то ребра называются **кратными**, а их количество – **кратностью ребра**.

Если начальная и конечная вершины ребра совпадают, то ребро называют **петлей** (обычно ее считают неориентированным ребром).

На рис. 6.5 изображен неориентированный граф, у которого шесть вершин и восемь ребер. Вершина x_6 является изолированной.

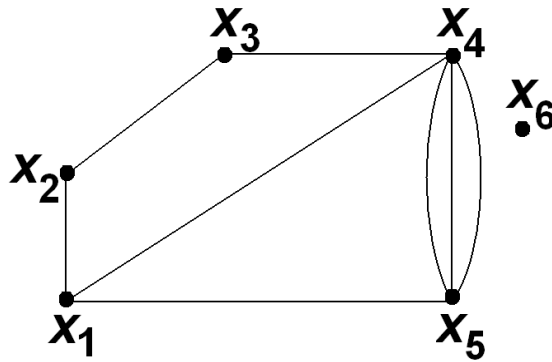


Рис. 6.5

Смежными вершинами этого графа являются, например, x_2 и x_3 , x_1 и x_4 . Ребро (x_4, x_5) инцидентно вершинам x_4, x_5 . Вершина x_4 инцидентна ребрам (x_4, x_1) , (x_4, x_3) , (x_4, x_5) . Кратность ребра (x_4, x_5) равна трем.

На рис. 6.6 изображен ориентированный граф, имеющий четыре вершины и семь дуг. Смежными вершинами здесь являются, например, x_1 и x_2 , x_3 и x_4 .

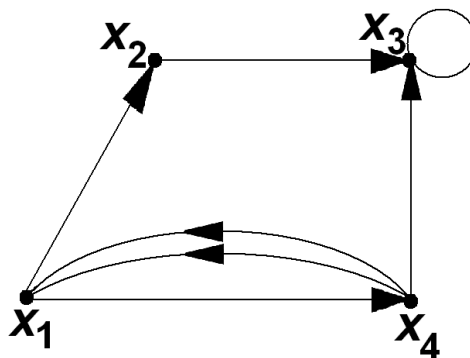


Рис. 6.6

Смежными дугами будут, например, (x_4, x_1) , (x_4, x_3) , (x_1, x_4) . Дуга (x_2, x_3) инцидентна вершинам x_2 и x_3 . Вершина x_1 инцидентна дугам (x_1, x_2) , (x_1, x_4) , (x_4, x_1) . Кратность ребра (x_1, x_4) равна двум (а не трем, как может показаться). Граф имеет петлю (x_3, x_3) .

Граф с петлями и кратными ребрами называется **псевдографом**.

Граф с кратными ребрами, но без петель называется **мультиграфом**.

Граф без петель и кратных ребер называется **простым графом**.

На рис. 6.7 изображены: а) псевдограф; б) мультиграф; в) простой граф.

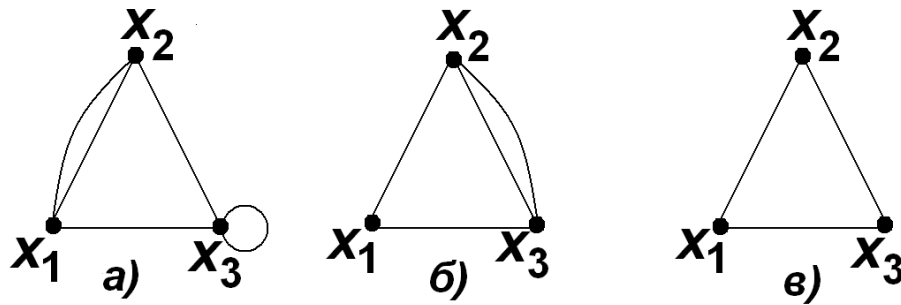


Рис. 6.7

Граф называется **полным**, если две его любые вершины — смежные, и обозначается K_n , где n — число его вершин.

На рис. 6.5, 6.6 изображены неполные графы, а на рис. 6.7 — все графы полные.

В случае ориентированного графа говорят, что дуга (x_i, x_j) **исходит** из вершины x_i и **заходит** в вершину x_j .

Число дуг, исходящих из вершины x_i , называют **полустепенью исхода вершины x_i** , которую будем обозначать $d^-(x_i)$.

Число дуг, заходящих в вершину x_i , называют **полустепенью захода** этой вершины, которую будем обозначать $d^+(x_i)$.

Для неориентированного графа **степенью вершины x_i** (будем обозначать ее $d(x_i)$) называется **число ребер, инцидентных этой вершине** (при этом петли считаются дважды, а степень изолированной вершины считают равной нулю).

Для **ориентированного графа** **степень вершины x_i** определяется по формуле $d(x_i) = d^-(x_i) + d^+(x_i)$.

Рассмотрим граф $G = (X, U)$. Если $X' \subseteq X$ и $U' \subseteq U$, причем концы любого ребра (дуги) $u \in U'$ принадлежат X' , то $G' = (X', U')$ называется подграфом графа G . Если при этом $X' = X$, то соответствующий подграф называется **остовным**.

На рис. 6.8 изображены: а) заданный (исходный) граф; б) остовной подграф.

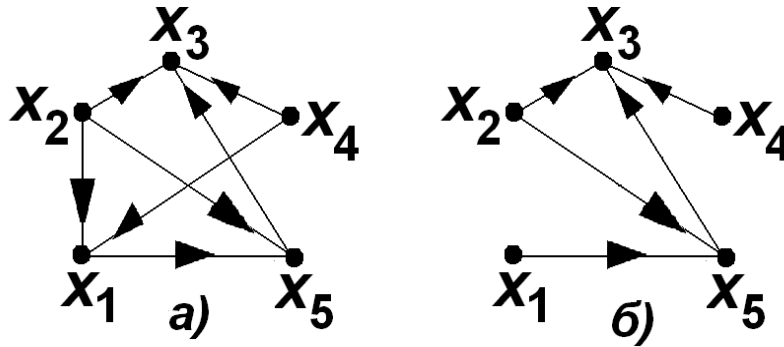


Рис. 6.8

Вычислим степень вершины, например, x_5 исходного графа:

$$d(x_5) = d^-(x_5) + d^+(x_5) = 1 + 2 = 3.$$

Замечание. Приведем еще одно определение графа.

Пусть заданы множество $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ и на нем отображение Γ : каждому $x_i \in X$ поставлено в соответствие определенное множество $\Gamma(x_i) \subseteq X$.

Графом $G = (X, \Gamma)$ называется пара, состоящая из множества X и отображения Γ . При этом множество X называется множеством вершин графа.

Проиллюстрируем это определение на конкретном примере.

Пусть X – множество всех работ x_i некоторого проекта или плана. Зададим отображение Γ множества X так, что $\Gamma(x_i)$ – множество работ, каждая из которых не может начаться прежде, чем закончится работа x_i .

Пусть, например, работами будут:

x_1 - вспашка земли,

x_2 - посев,

x_3 - прополка,

x_4 - уборка урожая,

x_5 - доставка урожая на заготовительный пункт.

Тогда множество X запишется как $X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \}$, а отображение Γ можно определить следующим образом:

$$\Gamma(x_1) = \{ x_2, x_3, x_4, x_5 \},$$

$$\Gamma(x_2) = \{ x_3, x_4, x_5 \},$$

$$\Gamma(x_3) = \{ x_4, x_5 \},$$

$$\Gamma(x_4) = \{ x_5 \},$$

$$\Gamma(x_5) = \emptyset.$$

Множество X и отображение Γ этого множества определили орграф G (рис. 6.9), вершины которого – работы x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , а дуги – $(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_5)$.

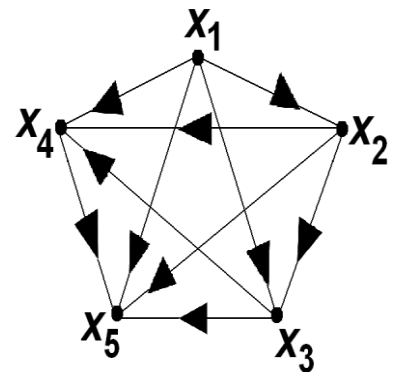


Рис. 6.9

7.1.2. Числа внутренней и внешней устойчивости графа

Пусть задан граф $G = (X, \Gamma)$.

Множество $S \subseteq X$ называется внутренне устойчивым, если никакие две вершины из S не являются смежными.

Внутренне устойчивыми множествами графа, изображенного на рис. 6.10, являются, например, $S_1 = \{ x_1, x_3 \}$, $S_2 = \{ x_5 \}$, $S_3 = \{ x_2, x_4 \}$.

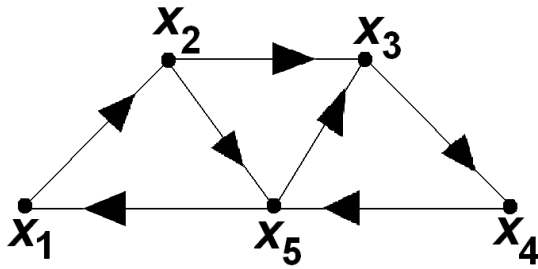


Рис. 6.10

Множество $\{x_1, x_3, x_5\}$ не является внутренне устойчивым, так как содержит смежные вершины, например, x_1 и x_5 .

Каждое из всех внутренне устойчивых множеств S_1, S_2, S_3, \dots графа G содержит определенное число $|S_1|, |S_2|, |S_3|, \dots$ вершин этого графа. Наибольшее из этих чисел называется **числом внутренней устойчивости графа G** и обозначается символом $\alpha(G)$. Таким образом, по определению

$$\alpha(G) = \max_{S_i \subseteq X} |S_i|.$$

На рис. 6.11 представлены два графа: а) и б). Граф а) имеет число внутренней устойчивости $\alpha(G) = 1$, так как любая пара вершин G является смежной. Граф б) содержит внутренне устойчивые множества $S_1 = \{x_1, x_5\}$, $S_2 = \{x_1, x_3\}$, $S_3 = \{x_1, x_4\}$, $S_4 = \{x_2, x_5\}$, $S_5 = \{x_2, x_4\}$. Если к любому из них добавить еще один элемент – вершину графа, не принадлежащую множеству, - то новое подмножество вершин графа перестанет быть внутренне устойчивым. Следовательно, в этом случае $\alpha(G) = 2$.

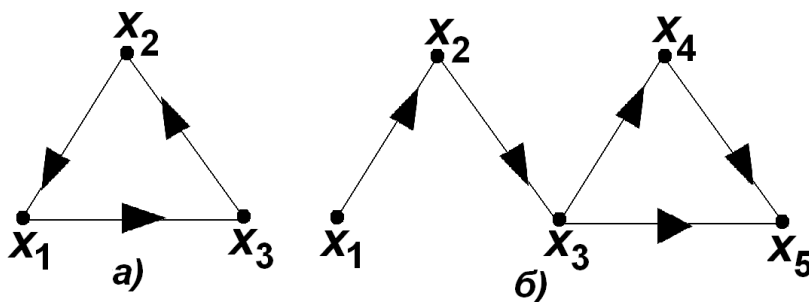


Рис. 6.11

Пусть задан граф $G = (X, \Gamma)$.

Внешне устойчивым множеством графа называется такое подмножество $R \subseteq X$, что для каждого $x_i \in (X \setminus R)$ выполняется условие $\Gamma(x_i) \cap R \neq \emptyset$, т.е. существует дуга (ребро), исходящая из x_i и входящая в вершину из R .

Внешне устойчивыми множествами графа, изображенного на рис. 6.12, являются, например, множества $R_1 = \{x_1, x_3, x_4\}$, $R_2 = \{x_1, x_4\}$, $R_3 = \{x_4\}$. Множество $N = \{x_1, x_3\}$ не является внешне устойчивым, так как для вершины графа x_2 дуга, исходящая из нее, не заходит в N .

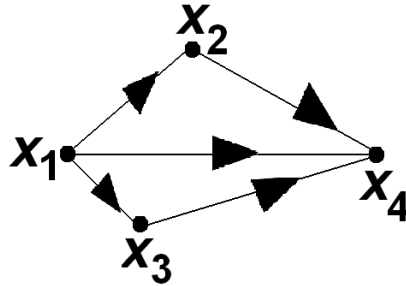


Рис. 6.12

Каждое из всех внешне устойчивых множеств R_1, R_2, R_3, \dots графа G содержит определенное число $|R_1|, |R_2|, |R_3|, \dots$ вершин этого графа. Наименьшее из этих чисел называется **числом внешней устойчивости графа G** и обозначается символом $\beta(G)$. Таким образом, по определению

$$\beta(G) = \min_{R_i \subseteq X} |R_i|.$$

Число внешней устойчивости графа, изображенного на рис. 6.12, равно единице, так как можно выбрать одну вершину - x_4 , в которую из оставшихся вершин графа заходят хотя бы по одной дуге.

6.1.3. Путь, цепь, контур, цикл. Связность графа

Путем в орграфе называется такая последовательность его дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Для неорграфа такая последовательность его ребер называется **цепью**.

Под **длиной пути (цепи)** понимается количество дуг (ребер), его (ее) составляющих.

Если каждой дуге (ребру) приписано некоторое число, называемое **весом**, то граф называется **взвешенным**.

У взвешенного графа длина пути (цепи) вычисляется как сумма весов всех дуг (ребер), составляющих путь (цепь).

В качестве примера взвешенного графа может служить карта автомобильных дорог с указанием расстояний между населенными пунктами, которые эти дороги соединяют. Цепью в этом случае является любая дорога на карте, а длиной этой цепи – протяженность дороги.

Путь (цепь), у которого (которой) начальная и конечная вершины совпадают, называется **контуром (циклом)**.

Замечание. Следует усвоить, что понятиям ребра, цепи, цикла в неориентированном графе соответствуют понятия дуги, пути, контура в ориентированном графе.

Для лучшего их запоминания приведем эти термины в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Оргграф	Неоргграф
дуга	ребро
путь	цепь
контур	цикл

В неоргграфе, представленном на рис. 6.13 а), одна из цепей имеет вид $(x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6)$, а один из циклов - $(x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_2)$.

В оргграфе, представленном на рис. 6.13 б), одним из путей будет $(x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_1)$, а одним из контуров - $(x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_2)$.

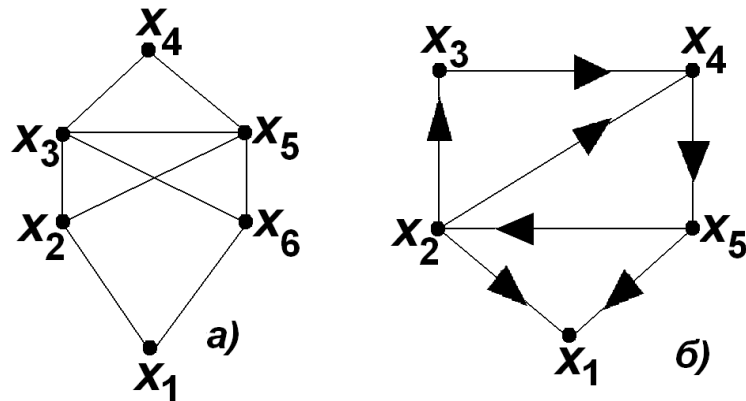


Рис. 6.13

Если в орграфе существует только одна вершина, не имеющая входящих дуг, и только одна – не имеющая исходящих дуг, то любой путь, соединяющий эти вершины, называется **полным путем**.

В графе, представленном на рис. 6.14, полными путями будут $1 - 2 - 3$; $1 - 3$; $1 - 5 - 4 - 3$.

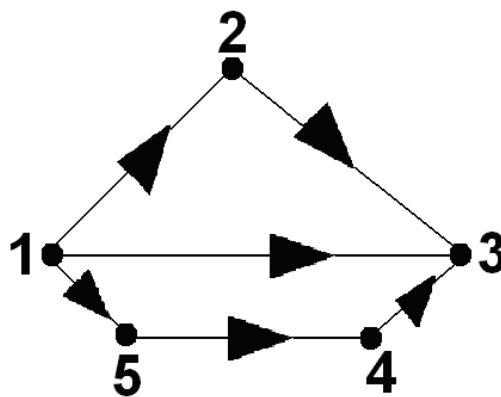


Рис. 6.14

Неориентированный граф называется связным, если любые его вершины связаны цепью, и **несвязным** в противном случае.

Ориентированный граф назовем связным в том случае, когда связным является его основание (т.е. связным является неорграф, полученный из исходного орграфа заменой всех его дуг на ребра).

На рис. 6.15 а) представлен связный неорграф. Орграф, представленный на рис. 6.15 б), связным не является.

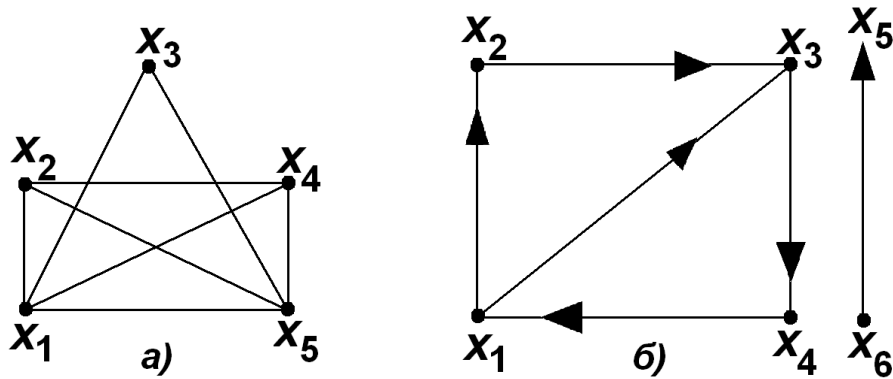


Рис. 6.15

6.1.4. Матричные представления графов

Графы можно представлять с помощью различных матриц, что является удобным при использовании алгебраических методов решения многих задач теории графов.

Наиболее важными матричными представлениями являются матрицы смежности и инцидентности.

Пусть $G = (X, U)$ - произвольный граф с числом вершин n .

Матрицей смежности этого графа называется квадратная матрица размера $n \times n$, элементы которой a_{ij} равны числу ребер (дуг), идущих из i -ой вершины в j -ю.

Охарактеризуем матрицы смежности некоторых видов графов:

- 1) матрица смежности для неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали;
- 2) если граф без петель, то $a_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$);
- 3) если граф простой, то матрица смежности является бинарной и состоит только из нулей и единиц;
- 4) матрица смежности полного неорграфа состоит из одних единиц, кроме диагональных элементов, которые равны нулю;
- 5) сумма всех элементов строки (столбца) матрицы смежности неориентированного графа равна степени соответствующей вершины графа;
- 6) число дуг, выходящих из вершины x_i (полустепень исхода $d^-(x_i)$), равно сумме элементов строки i матрицы смежности, а число дуг,

входящих в вершину x_i (полустепень захода $d^+(x_i)$), равно сумме элементов столбца i матрицы смежности (матрица смежности орграфа позволяет найти степень $d(x_i)$ любой его вершины x_i).

На рис. 6.16 представлен неориентированный граф, а на рис. 6.17 – ориентированный. Обозначим их матрицы смежности через A_1 и A_2 соответственно. Тогда

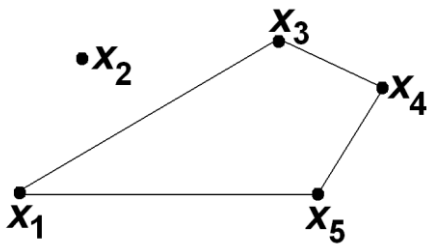


Рис. 6.16

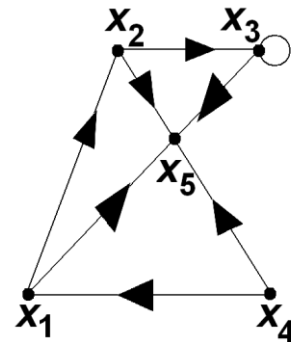


Рис. 6.17

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для орграфа, представленного на рис. 6.17, согласно элементам его матрицы смежности A_2 степени вершин следующие: $d(x_1) = 2 + 1 = 3$, $d(x_2) = 2 + 1 = 3$, $d(x_3) = 2 + 2 = 4$, $d(x_4) = 1 + 1 = 2$, $d(x_5) = 1 + 3 = 4$.

Матрица смежности полностью задает граф. Любая квадратная матрица, состоящая из нулей и единиц, может быть рассмотрена как матрица смежности некоторого графа.

Матрицей инцидентности неориентированного графа $G = (X, U)$ с n вершинами и m ребрами называется матрица B размерности $n \times m$, элементы которой b_{ij} определяются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } u_j, \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } u_j. \end{cases}$$

Матрицей инцидентности ориентированного графа $G = (X, U)$ с n вершинами и m дугами называется матрица B размерности $n \times m$, элементы которой b_{ij} определяются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ является началом дуги } u_j \\ -1, & \text{если вершина } x_i \text{ является концом дуги } u_j \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } u_j \end{cases}$$

Составим матрицу инцидентности B орграфа, представленного на рис. 6.18:

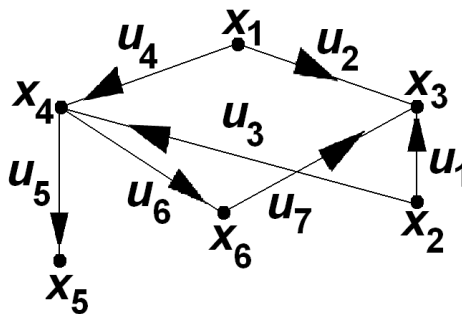


Рис. 6.18

Дуга u_1 имеет начало в вершине x_2 ($b_{21} = 1$), конец – в вершине x_3 ($b_{31} = -1$) и не инцидентна вершинам x_1, x_4, x_5, x_6 ($b_{11} = b_{41} = b_{51} = b_{61} = 0$). Таким образом, определены элементы первого столбца матрицы B .

Аналогично определяются остальные элементы матрицы инцидентности, которая имеет следующий окончательный вид:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Если элементами некоторой матрицы, не имеющей одинаковых столбцов, являются лишь числа 0 , 1 , -1 , причем в каждом ее столбце содержится по одной 1 и одной -1 , то ее можно принять за матрицу инцидентности некоторого графа.

6.1.5. Деревья. Алгоритм Краскала

Существует один простой и важный тип графов, которому разные авторы дали одинаковое название – деревья. Деревья отличаются предельной простотой строения. С их помощью легко описывается структура самых различных объектов: организаций и учреждений, книг и документов, математических формул, химических соединений, компьютерных файловых систем, программ и многое другое.

Считается, что первым использовал понятие дерева Г. Кирхгофф в 1847 году при исследовании электрических цепей. Спустя десятилетия химик А. Кэли ввел термин «дерево» при изучении структуры углеводородных соединений и получил первые важные результаты в этом разделе теории графов.

Деревом называется связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

Простейшее дерево состоит из двух вершин, соединенных ребром.

Деревом является, например, изображение на карте реки с ее притоками.

Примеры деревьев представлены на рис. 6.19.

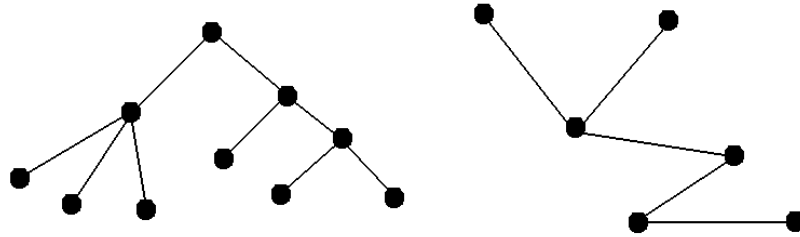


Рис. 6.19

Любой граф без циклов называется **лесом**.

Таким образом, деревья являются компонентами леса. Граф на рис. 6.20 – это лес.

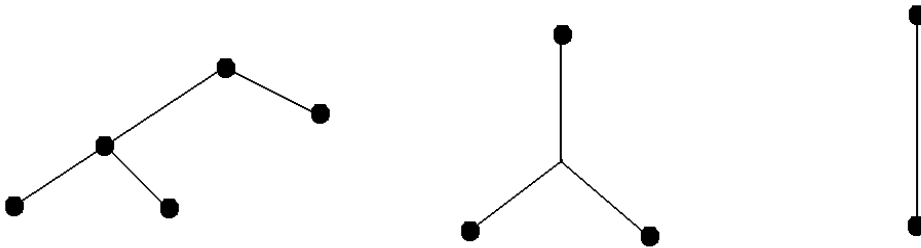


Рис. 6.20

В следующей теореме перечислены некоторые простые свойства деревьев.

Теорема. Пусть $G = (X, U)$ – граф с n вершинами и m ребрами. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. G – дерево;
2. G – связный граф и $m = n - 1$.
3. G не содержит циклов и $m = n - 1$.
4. Любые две несовпадающие вершины графа соединены ровно одной простой цепью.
5. G не содержит циклов и обладает тем свойством, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Остовным деревом или **остовом** графа G называется любой остовный подграф (содержащий все вершины графа) графа G , являющийся деревом.

На рис. 6.21 изображен неориентированный граф (а) и все его остовы (б, в, г).

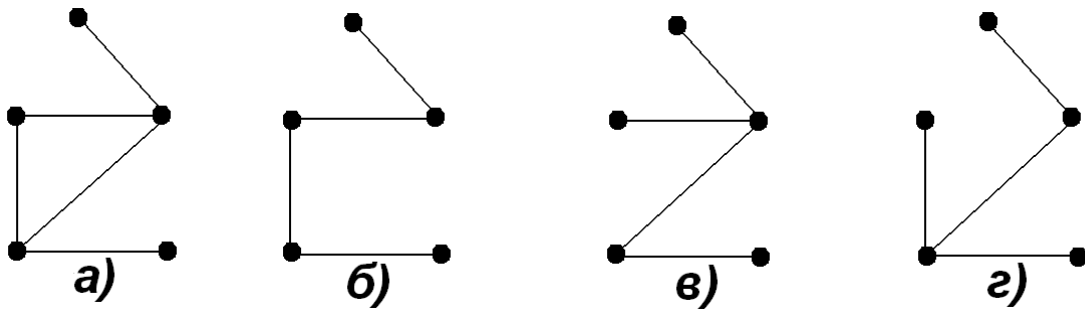


Рис. 6.21

Рассмотрим следующую практическую задачу.

Пусть на некоторой территории расположены населенные пункты, которые необходимо связать, например, сетью асфальтированных дорог так, чтобы стоимость сети была минимальна.

Каждому населенному пункту сопоставим вершину графа. Пары вершин соединим ребрами, каждому из которых в качестве веса поставим в соответствие стоимость прокладки соответствующего участка дороги.

Отыскание оптимальной сети дорог будет связано с нахождением остова построенного графа.

Постановка задачи. Пусть задан связный неориентированный граф $G = (X, U)$, каждому ребру u которого поставлено в соответствие число $l(u) > 0$, называемое длиной этого ребра. Требуется найти остов графа G , общая длина ребер которого минимальна.

Его можно найти с помощью **алгоритма Краскала**.

Алгоритм Краскала построения кратчайшего остова взвешенного графа:

Шаг 1. Строим граф T выбрасыванием из исходного графа G всех его ребер.

Шаг 2. Составляем список ребер графа G в порядке возрастания их весов (длин).

Шаг 3. Начав с первого ребра в этом списке, добавляем последовательно ребра в граф T , соблюдая условие: ребро, приводящее к появлению цикла в T , не участвует в указанной процедуре.

Шаг 4. Продолжаем действия, описанные в шаге 3, до тех пор, пока число ребер в T не станет равным $n - 1$, где n — число вершин графа G . Получившееся дерево и является кратчайшим остовом исходного графа.

На рис. 6.22 изображены: а) исходный взвешенный граф G ; б) его кратчайший остов.

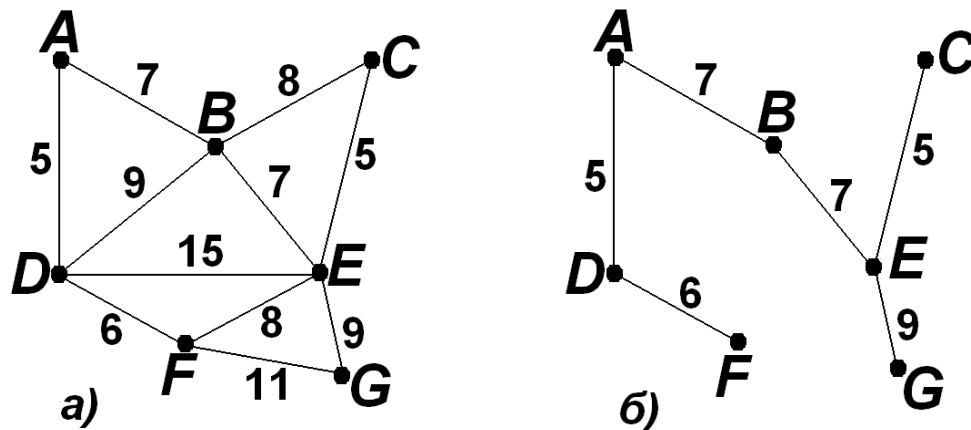


Рис. 6.22

6.1.6. Обходы графов

Под **обходом графов (поиском на графах)** понимается процесс систематического просмотра всех ребер или вершин графа с целью отыскания ребер или вершин, удовлетворяющих некоторому условию, при этом каждая вершина просматривается (посещается) в точности один раз.

При решении многих задач, использующих графы, необходимы эффективные методы регулярного обхода вершин и ребер графов. К стандартным и наиболее распространенным методам относятся: **поиск в глубину** и **поиск в ширину**. Эти методы чаще всего рассматриваются на ориентированных графах, но они применимы и для неориентированных, ребра которых считают двунаправленными.

Алгоритмы обхода в глубину и в ширину лежат в основе решения различных задач обработки графов, например, построения остовного леса, проверки связности, вычисления расстояний между вершинами и многих других.

Поиск в глубину

При поиске в глубину посещается первая вершина, затем необходимо идти вдоль ребер графа, до попадания в тупик. Вершина графа является тупиком, если все смежные с ней вершины уже посещены. После попадания в тупик нужно

возвращаться назад вдоль пройденного пути, пока не будет обнаружена вершина, у которой есть еще не посещенная смежная вершина, а затем необходимо двигаться в этом новом направлении. Процесс оказывается завершенным при возвращении в начальную вершину, причем все смежные с ней вершины уже должны быть посещены.

Таким образом, основная идея поиска в глубину – когда возможные пути по ребрам, выходящим из вершин, разветвляются, нужно сначала полностью исследовать одну ветку и только потом переходить к другим веткам (если они останутся нерассмотренными).

Алгоритм поиска в глубину:

Шаг 1. Всем вершинам графа присваивается значение не посещенная. Выбирается первая вершина и помечается как посещенная.

Шаг 2. Для последней, помеченной как посещенная, вершины выбирается смежная вершина, являющаяся первой помеченной как не посещенная, и ей присваивается значение посещенная. Если таких вершин нет, то берется предыдущая помеченная вершина.

Шаг 3. Повторить шаг 2 до тех пор, пока все вершины не будут помечены как посещенные (рис. 6.23).

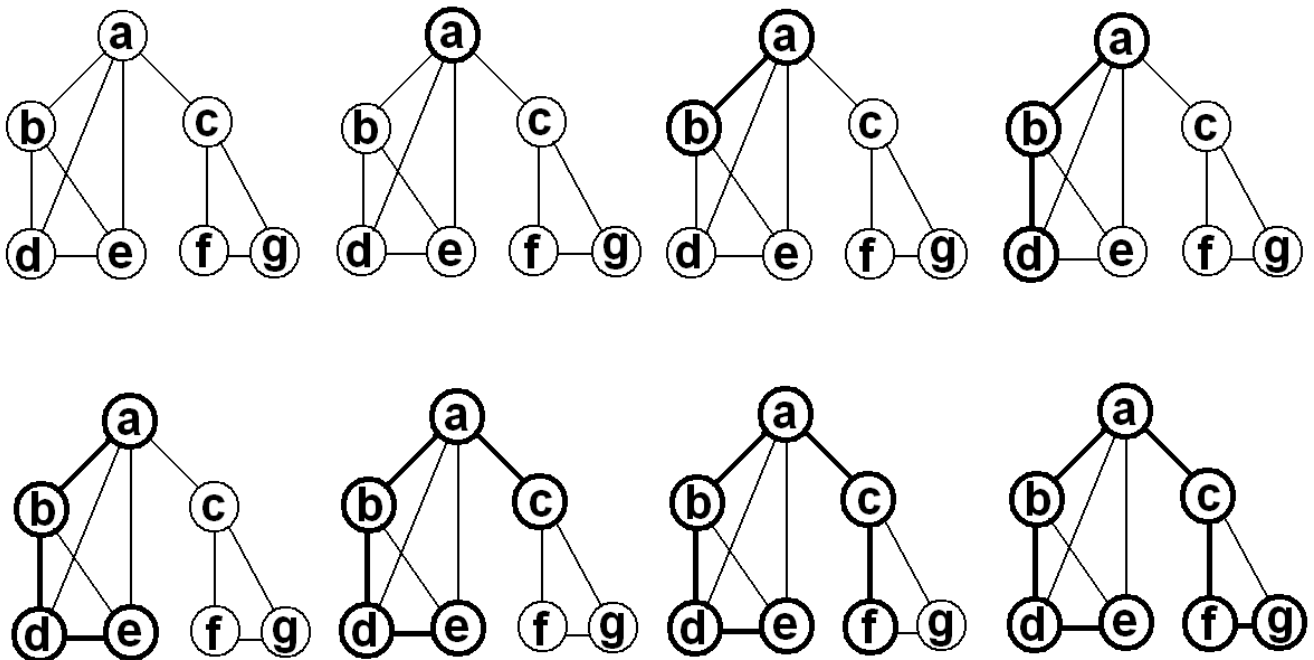


Рис. 6.23. Демонстрация алгоритма поиска в глубину

Поиск в ширину

При поиске в ширину, после посещения первой вершины, посещаются все соседние с ней вершины. Потом посещаются все вершины, находящиеся на расстоянии двух ребер от начальной. При каждом новом шаге посещаются вершины, расстояние от которых до начальной на единицу больше предыдущего. Чтобы предотвратить повторное посещение вершин, необходимо вести список посещенных вершин. Для хранения временных данных, необходимых для работы алгоритма, используется очередь – упорядоченная последовательность элементов, в которой новые элементы добавляются в конец, а старые удаляются из начала.

Таким образом, основная идея поиска в ширину заключается в том, что сначала исследуются все вершины, смежные с начальной вершиной (вершина, с которой начинается обход). Эти вершины находятся на расстоянии 1 от начальной. Затем исследуются все вершины на расстоянии 2 от начальной, затем все на расстоянии 3 и т.д.

Алгоритм поиска в ширину:

Шаг 1. Всем вершинам графа присваивается значение не посещенная. Выбирается первая вершина и помечается как посещенная (и заносится в очередь).

Шаг 2. Посещается первая вершина из очереди (если она не помечена как посещенная). Все соседние вершины заносятся в очередь. После этого она удаляется из очереди.

Шаг 3. Повторяется шаг 2 до тех пор, пока очередь не будет пуста (рис. 6.24).

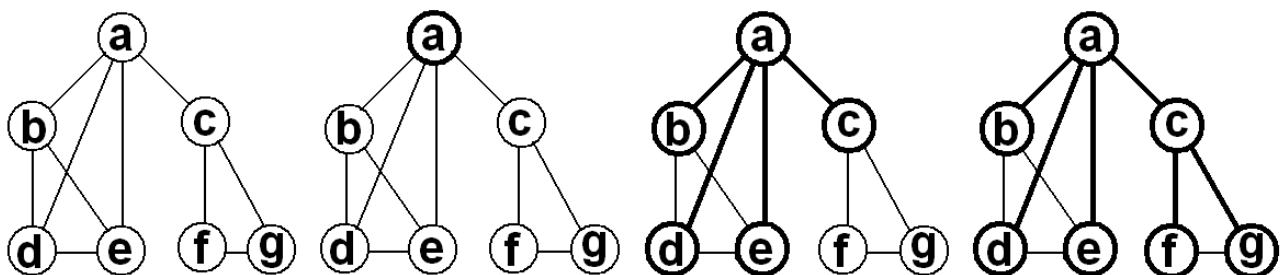


Рис. 6.24. Демонстрация алгоритма поиска в ширину

Заметим что, если граф связан и конечен, то поиск в ширину или поиск в глубину обойдет все вершины этого графа по одному разу.

6.1.7. Эйлеровы и гамильтоновы графы

Цикл графа G , в котором содержатся все ребра графа и каждое ребро встречается в нем только один раз, называется **эйлеровым циклом**.

Граф, в котором имеется эйлеров цикл, называется **эйлеровым графом**. Такой граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

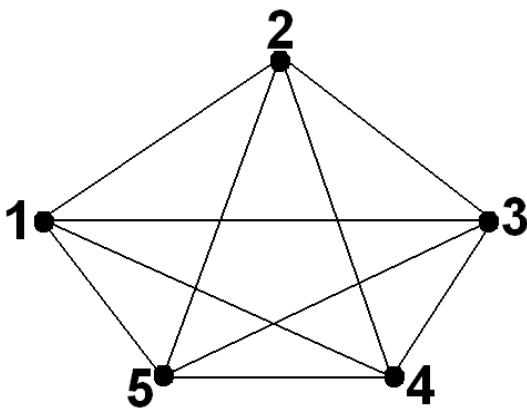


Рис. 6.25

На рис. 6.25 изображен эйлеров граф, так как он содержит эйлеров цикл:

$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 1$.

Принадлежность графа к классу эйлеровых легко устанавливается следующей теоремой.

Теорема (критерий эйлеровости). Связный неориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четные.

Вернемся к знаменитой в свое время задаче о кёнигсбергских мостах.

Река Прегель делит город Кёнигсберг на четыре части А, В, С, Д, соединенные между собой семью мостами (рис. 6.26). Требуется определить, можно ли, находясь в какой-то части города, пройти по каждому из мостов один раз и вернуться в отправную точку.

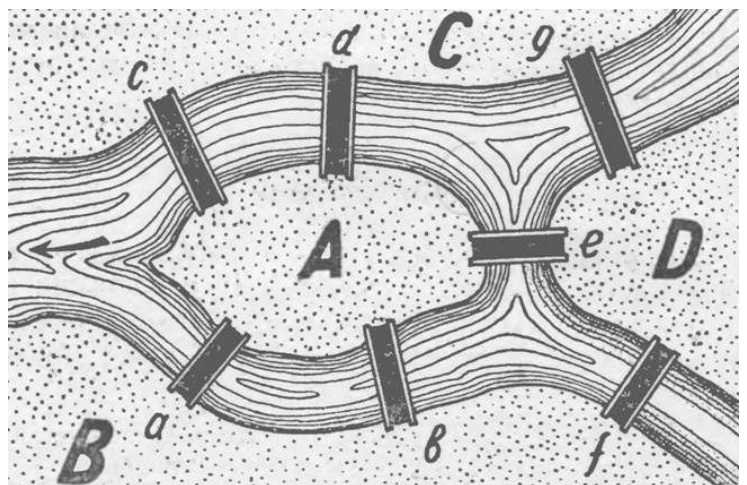


Рис. 6.26

Так как в задаче существенны только переходы через мосты, план города можно свести к изображению графа (точнее, мультиграфа), в котором ребра соответствуют мостам, а вершины – различным разделенным частям города, которые обозначены буквами А, В, С, Д (рис. 6.27).

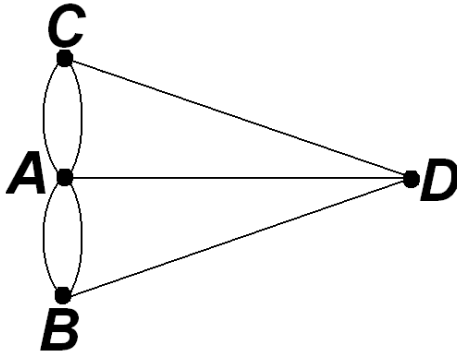


Рис. 6.27

В этом графе есть вершины с нечетными степенями, поэтому в нем не существует цикла, проходящего по всем ребрам – мостам единственный раз. Следовательно, этот граф не является эйлеровым.

Для эйлеровых графов существует процедура, называемая **алгоритмом Флэра**, которая позволяет достаточно быстро построить один из существующих эйлеровых циклов. Этот алгоритм задается следующими правилами:

1. Произвольно выбирают некоторую вершину x_1 и ребро u_1 , инцидентное x_1 . Этому ребру присваивают номер 1. Вычеркивают это ребро u_1 и переходят в вершину x_2 по ребру $u_1 = (x_1, x_2)$.
2. Находясь в вершине x_i , следует не выбирать ребро, соединяющее x_i и x_1 , если имеется возможность иного выбора.
3. Находясь в вершине x_i , не следует выбирать ребро, если его удаление приводит на данном этапе к разбиению графа на две связные компоненты, каждая из которых имеет, хотя бы по одному ребру.
4. После того, как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода ребер.

Отыскание эйлеровых циклов используется, например, при оптимизации процессов проверки состояния электрических, телефонных, железнодорожных линий, автомагистралей, для составления оптимальных маршрутов при уборке помещений коридоров в больших учреждениях.

Цикл, проходящий ровно один раз через каждую вершину графа G , называется **гамильтоновым циклом**, а G называется **гамильтоновым графом**.

Термин «гамильтонов» связан с именем математика У. Гамильтона, придумавшего в 1859 году игру под названием «Кругосветное путешествие».

Каждой из двадцати вершин додекаэдра (рис. 6.28) приписано название одного из городов мира.

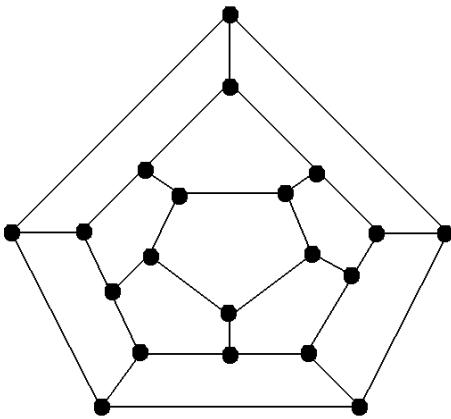


Рис. 6.28

Требуется, переходя по ребрам додекаэдра от одного города к другому и посетив каждый из них только один раз, оказаться в исходной точке. Очевидно, что задача сводится к отысканию цикла, проходящего через все вершины ровно один раз.

Граф, представленный на рис. 6.29 а) , является гамильтоновым, так как содержит гамильтонов цикл, состоящий из последовательности ребер $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$. Граф, представленный на рис. 6.29 б) гамильтоновым не является.

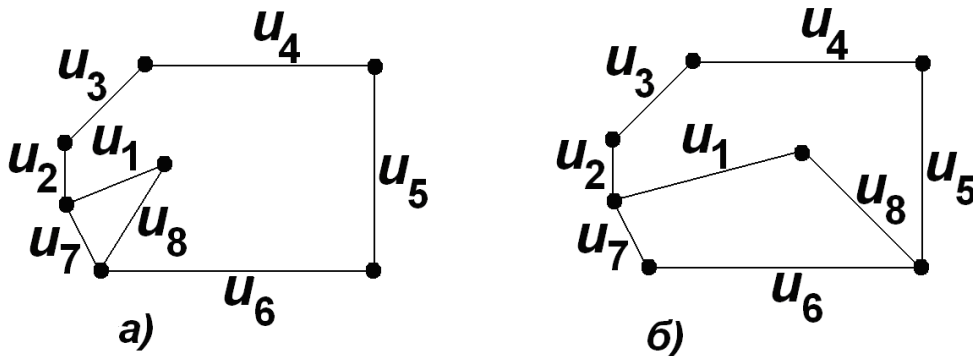


Рис. 6.29

Гамильтоновы графы служат моделью при составлении расписания движения поездов, для телекоммуникационных сетей и т.д.

Сравнивая определения эйлерова и гамильтонова циклов, нельзя не заметить их существенное сходство. В первом случае накладывается требование однократного прохождения по каждому ребру графа (через вершины можно проходить неоднократно), а во втором – требование однократного прохождения через каждую вершину (ребра, задействованные в цикле, также проходятся однократно). И поскольку для эйлеровых циклов имеется весьма простое необходимое и достаточное условие существования, естественно предположить (в силу отмеченного сходства), что и для гамильтоновых циклов есть подобный

критерий. Однако такой критерий не найден. Более того, его поиск – одно из важных направлений теории графов.

Тем не менее, многие графы являются гамильтоновыми. В любом полном графе K_n можно отыскать гамильтонов цикл.

Полный граф K_5 изображен на рис. 6.30.

Его цикл $A - B - C - D - E - A$, очевидно является гамильтоновым. В нем есть другие гамильтоновы циклы. Поскольку каждая вершина смежна с остальными, то, начиная с вершины A , в качестве второй вершины цикла мы можем выбрать любую из четырех оставшихся. Далее у нас будет три варианта для выбора третьей вершины и два для четвертой, после чего мы вернемся в вершину A .

Таким образом, у нас есть $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ цикла. Поскольку каждый цикл можно проходить как в одном направлении, так и в другом, то реально в графе K_5 есть только двенадцать различных гамильтоновых циклов.

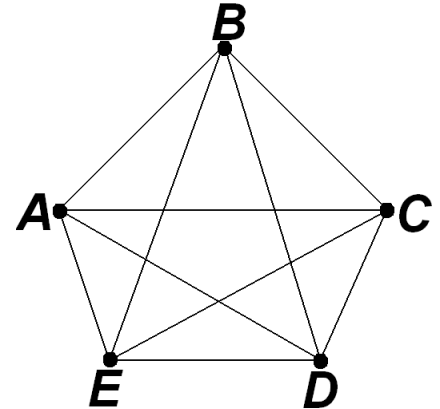


Рис. 6.30

В настоящее время известно несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов. Одно из них устанавливается следующей теоремой.

Теорема Оре. Если для любой пары x и y несмежных вершин графа G порядка $n \geq 3$ выполняется условие $d(x) + d(y) \geq n$, то G - гамильтонов граф.

Из теоремы Оре вытекает следующее, несколько более слабое, но очень простое для проверки достаточное условие гамильтоновости.

Теорема Дирака. Если для любой вершины x графа G порядка $n \geq 3$ выполняется неравенство $d(x) \geq \frac{n}{2}$, то G - гамильтонов граф.

Замечание. Достаточные условия гамильтоновости графа, даваемые теоремой Оре и теоремой Дирака необходимыми не являются. Например, изображенный на рис. 6.31 гамильтонов граф этим условиям не удовлетворяет.

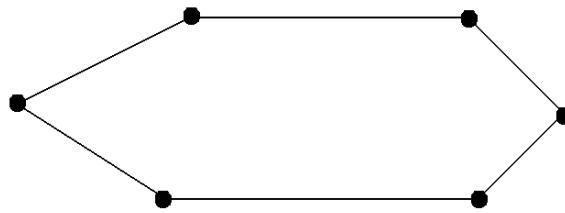


Рис. 6.31

Гамильтоновы графы применяются для моделирования многих практических задач. Основой всех таких задач служит классическая **задача коммивояжёра**: бродячему торговцу требуется посетить несколько городов, пройдя при этом минимальное расстояние, и вернуться в родной город.

Графическая модель задачи коммивояжёра состоит из гамильтонова графа, вершины которого изображают города, а ребра – связывающие их дороги. Кроме того, каждое ребро оснащено весом, обозначающим транспортные затраты, необходимые для путешествия по соответствующей дороге, такие, как, например, расстояние между городами. Для решения задачи необходимо найти гамильтонов цикл минимального общего веса.

Задача коммивояжёра и ее модификации имеют большое число практических приложений в различных областях человеческой деятельности: сбор почтовых отправок из почтовых ящиков, проектирование электрических сетей, управление автоматическими линиями и другие.

6.1.8. Планарность графов

Часто встречаются ситуации, когда важно выяснить, возможно ли нарисовать граф на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем печатным способом, электрические цепи наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды. Таким образом возникает понятие плоского графа.

Плоским графом назовем граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины.

Говорят, что **два графа** $G_1 = (X_1, U_1)$ и $G_2 = (X_2, U_2)$ **изоморфны**, если существует взаимно-однозначное отображение (биекция) $f: X_1 \rightarrow X_2$, сохраняющее отношение смежности; другими словами, для любых вершин x и y графа G_1 их образы $f(x)$ и $f(y)$ смежны в G_2 тогда и только тогда, когда x и y смежны в G_1 .

На рис. 6.32 изображены три изоморфных графа.

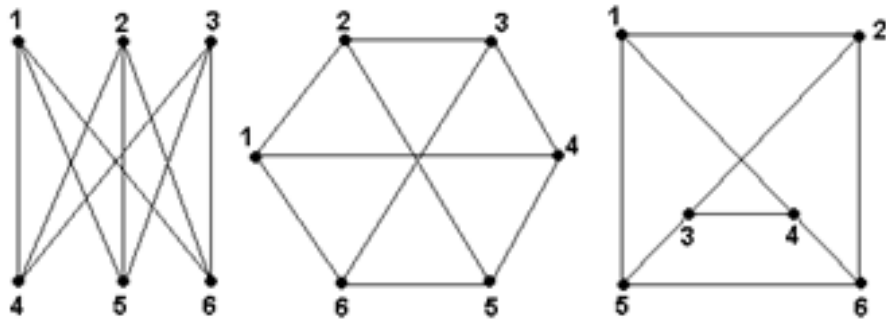


Рис. 6.32

Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется **планарным**. О планарных графах говорят, что они укладываются на плоскости (имеют плоскую укладку).

На рис. 6.33 изображены два планарных графа – трехмерный куб и полный граф K_4 и их плоская укладка.

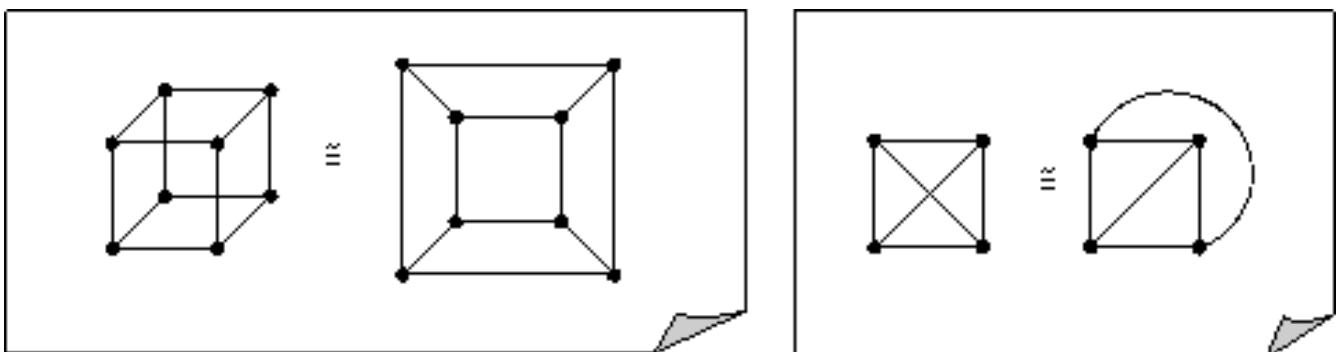


Рис. 6.33

Очевидно, что всякий подграф планарного графа планарен.

Гранью плоского графа называется множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена кривой, не пересекающей ребра графа. Тем самым каждая точка плоскости принадлежит хотя бы одной грани плоского графа.

Границей грани будем считать множество вершин и ребер, принадлежащих данной грани.

Отметим, что всякий плоский граф имеет одну, и притом единственную, неограниченную грань. Такая грань называется **внешней**, а все остальные – **внутренними**.

Так, плоский граф куба имеет шесть граней (пять внутренних и одну внешнюю), граф K_4 имеет четыре грани (три внутренних и одну внешнюю).

Для всякого связного плоского графа число граней f связано с числом вершин m и числом его ребер n *формулой Эйлера*: $n - m + f = 2$. Из которой следует, что число граней любой плоской укладки связного планарного (n, m) - графа постоянно и равно $m - n + 2$.

Имеется два основных не планарных графа: граф K_5 и $K_{3,3}$, которые изображены на рис. 6.34.

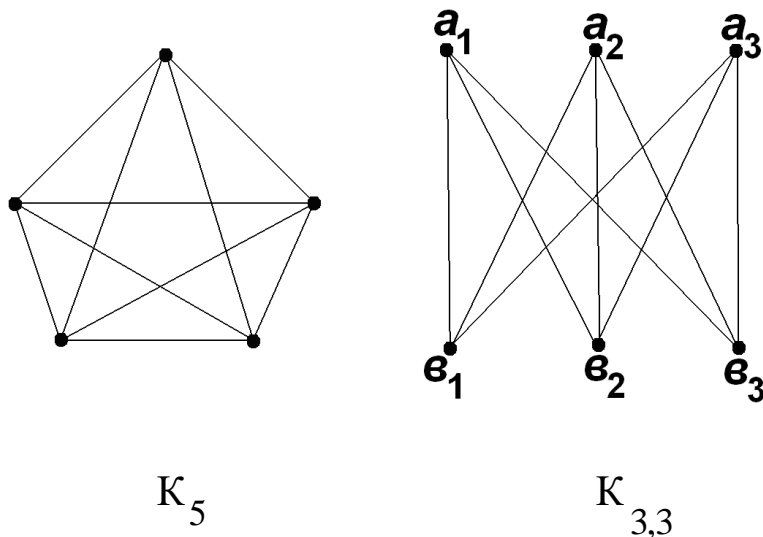


Рис. 6.34

Граф $K_{3,3}$ - это граф с шестью вершинами $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, в котором каждая вершина a_i соединена ребром с каждой вершиной b_j и других ребер нет.

Оказывается, что K_5 и $K_{3,3}$ - по существу единственные не планарные графы в том смысле, что любой не планарный граф «содержит» один из них.

Чтобы сформулировать это утверждение более точно, понадобится понятие «гомеоморфных графов».

Два графа **гомеоморфны** (или тождественны с точностью до вершин степени 2), если они оба могут быть получены из одного и того же графа «включением в его ребра» новых вершин степени 2.

Например, графы, изображенные на рис. 6.35, гомеоморфны.

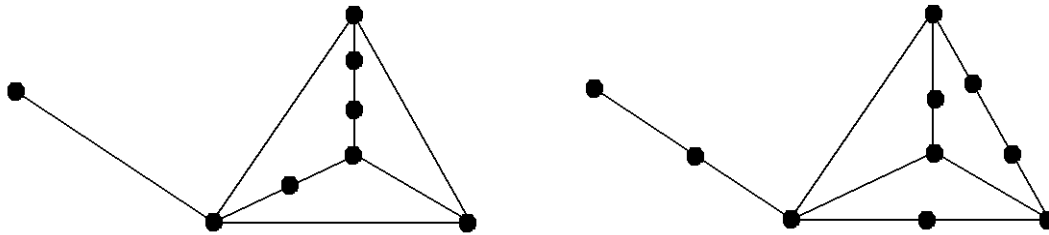


Рис. 6.35

Добавление (включение) одной вершины Z в какое-нибудь ребро осуществляется следующим образом: пусть ребро u инцидентно вершинам X и Y ; тогда ребро u удаляется из графа, но добавляется два новых ребра: u_1 , инцидентное вершинам X и Z , и u_2 , инцидентное вершинам Z и Y .

Ясно, что введение термина «гомеоморфны» удобно только с технической точки зрения – включение или удаление вершин степени 2 не имеет никакого отношения к планарности. Однако это позволяет установить следующий важный результат, известный как теорема Понтрягина – Куратовского, который дает необходимое и достаточное условие планарности графа.

Теорема Понтрягина – Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

6.1.9. Раскраска графов

В приложениях теории графов нередко возникают задачи, для решения которых необходимо разбить множество всех вершин графа в объединение непустых непересекающихся подмножеств таким образом, чтобы вершины из одного и того же подмножества были попарно не смежными, а число таких подмножеств – минимально возможным.

При решении таких задач, можно представлять себе, что мы раскрашиваем вершины графа в различные цвета, причем сделать это надо так, чтобы любые две смежные вершины были раскрашены в разные цвета, а число использованных цветов было минимально возможным.

При рассмотрении раскрасок графов принято заменять названия красок натуральными числами («номерами» красок).

Пусть k – натуральное число. **Раскраской** неориентированного графа $G = (X, U)$ в k цветов, или просто k – раскраской, называется отображение f множества X в множество $\{1, 2, 3, \dots, k\}$. Если при этом $f(x) = i$ для некоторой вершины $x \in X$, то будем говорить, что вершина x раскрашена в i -й цвет.

Раскраска f графа называется **правильной**, если $f(x) \neq f(y)$ для любых двух смежных вершин x и y этого графа. Если существует правильная k – раскраска графа G , то G называют **k – раскрашиваемым**.

Число k называется **хроматическим числом** графа G и обозначается через $\chi(G)$, если существует правильная k – раскраска графа G , но не существует его правильной $(k - 1)$ – раскраски.

Правильная $\chi(G)$ – раскраска графа G называется **оптимальной**.

Из определения следует, что наличие петель и кратность ребер никак не влияют на правильность раскрасок. Поэтому будем рассматривать только простые графы.

На рис. 6.36 приведен пример правильной раскраски графа из четырех вершин, хроматическое число такого графа равно трем.

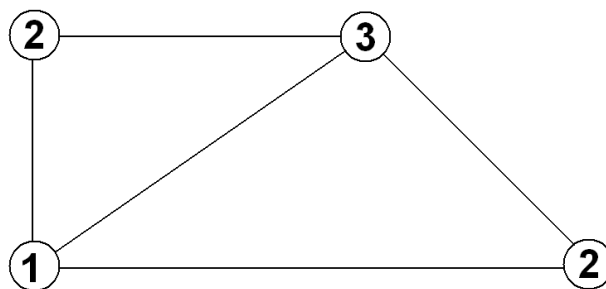


Рис. 6.36

Легко найти хроматические числа некоторых известных графов. Например, $\chi(K_n) = n$, $\chi(G) = 2$, где K_n - полный граф, у которого n вершин; G - дерево. Однако эффективные методы определения хроматического числа произвольных графов до сих пор не найдены. В такой ситуации актуальны оценки хроматического числа, выражаемые в терминах более или менее просто вычисляемых параметров графа.

Обозначим через $P(G)$ наибольшую из степеней вершин графа G .

Теорема. Для любого неориентированного графа G выполняется неравенство $\chi(G) \leq P(G) + 1$.

Проблема раскраски планарных графов является одной из самых знаменитых проблем теории графов. Она возникла из задачи раскраски географической карты, при которой любые две соседние страны должны быть окрашены в различные цвета. Эта задача легко сводится к задаче раскраски планарного графа.

В 1879 году английский математик Кэли четко сформулировал гипотезу четырех красок.

Гипотеза четырех красок. Всякий планарный граф 4- раскрашиваем.

Попытки доказать эту гипотезу привели в 1890 году к появлению теоремы Хивуда.

Теорема Хивуда. Всякий планарный граф 5- раскрашиваем.

После этого появлялось довольно много «доказательств» гипотезы четырех красок и «контрпримеров» к ней, в которых обнаружились ошибки. В 1977 году доказательство гипотезы было, наконец, получено математиками К. Appelом и В. Хейкенем и опубликовано в двух статьях. Значительную часть рутинных проверок выполнил компьютер, на это потребовалось около двух тысяч часов машинного времени. Такое доказательство и по сей день не признается многими математиками, поскольку его сложно повторить. Однако, можно считать, что формально гипотеза о четырех красках доказана.

Задачи раскраски не только вершин, но и ребер графа занимают важное место в истории развития теории графов и в самой теории графов. К построению раскрасок сводится целый ряд практических задач, например, задачи составления расписаний, распределения оборудования, проектирования некоторых технических изделий.

Задача составления расписаний. Предположим, что нужно прочесть несколько лекций за кратчайшее время. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно (например, их читает один и тот же лектор или лекции читаются в одной и той же группе по разным предметам).

Построим граф G , вершины которого биективно соответствуют лекциям, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие лекции нельзя читать одновременно. Очевидно, что любая правильная раскраска этого графа определяет допустимое расписание: лекции, соответствующие вершинам графа, окрашенные одинаково, можно проводить одновременно. Справедливо и обратное, любое такое расписание определяет правильную раскраску графа G . Следовательно, кратчайшее время, необходимое для проведения всех лекций, равно $\chi(G)$, а из оптимальной раскраски графа G получается необходимое расписание.

Задача распределения ресурсов. Необходимо выполнить некоторое множество $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ работ. Имеется множество $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ ресурсов, необходимых для выполнения этих работ. Каждая работа использует часть указанных ресурсов, одновременно могут выполняться работы, использующие разные ресурсы. Все работы выполняются за одно и то же время t . Необходимо распределить ресурсы так, чтобы общее время выполнения всех работ было минимальным.

Рассмотрим граф G с множеством вершин V . Две различные вершины v_i и v_j ($i \neq j$) смежны тогда и только тогда, когда для выполнения работ v_i и v_j требуется хотя бы один общий ресурс. Наименьшее время выполнения всех работ равно $\chi(G) \cdot t$. Оптимальная раскраска графа G определяет распределение ресурсов.

Задача о проектировании коробки скоростей. Коробка скоростей – механизм для изменения частоты вращения ведомого вала при постоянной частоте вращения ведущего. Это изменение происходит за счет того, что находящиеся внутри коробки шестерни (зубчатые колеса) вводятся в зацепление специальным образом. Одна из задач, стоящая перед конструктором коробки, заключается в минимизации ее размеров, а это часто сводится к минимизации числа валов, на которых размещаются шестерни.

Построим граф G , вершины которого биективно соответствуют шестерням. Если по какой-то причине две шестерни не должны находиться на одном валу (например, они могут быть в зацеплении, или их общий вес велик для одного вала и т.д.), то соответствующие вершины графа соединим ребром. Вершины, имеющие один цвет при правильной раскраске этого графа, определяют шестерни, которые могут находиться на одном валу, а хроматическое число $\chi(G)$ равно минимальному количеству валов, нужных для проектируемой коробки.

6.2. Практическая часть

Пример 1. В пунктах $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (рис. 6.37) могут быть расположены источники излучения. Если источники, помещенные в пунктах x_i и x_j влияют друг на друга, они соединены ребром (x_i, x_j) . Какое максимальное количество источников излучения и в каких пунктах можно расположить так, чтобы они не оказывали влияния друг на друга?

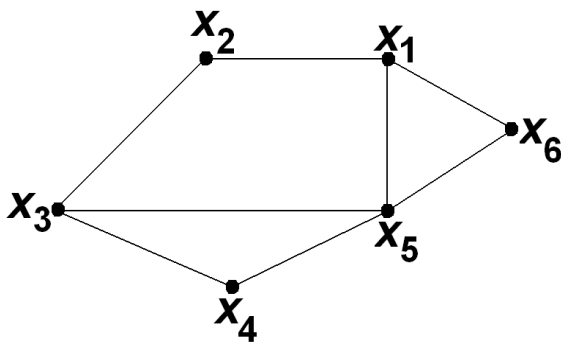


Рис. 6.37

Решение. Рассмотрим последовательность внутренне устойчивых множеств графа G , изображенного на рис. 6.37:

$$S_1 = \{x_2\},$$

$$S_2 = \{x_2, x_4\},$$

$$S_3 = \{x_2, x_4, x_6\}.$$

Нетрудно понять, что в рассматриваемом графе четыре вершины не могут составить внутренне устойчивое множество, поэтому число внутренней устойчивости графа $\alpha(G) = 3$, т.е. лишь три источника излучения, не влияющие друг на друга, можно расположить в пунктах x_2, x_4, x_6 .

Пример 2. Нарисуйте неорграф G с множеством вершин $X = \{a, b, c, d, e\}$ и множеством ребер $U = \{(a, b); (a, e); (b, c); (b, d); (c, e); (d, e)\}$. Выпишите его матрицу смежности.

Решение. Граф G показан на рис. 6.38.

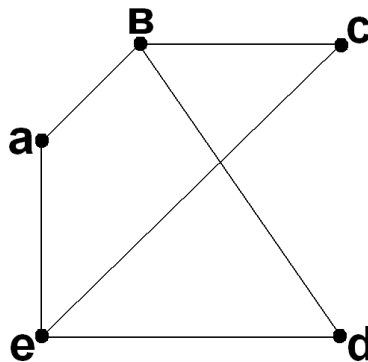


Рис. 6.38

Его матрица смежности имеет вид:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Пример 3. На рис. 6.39 изображен неорграф с вершинами $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$, которые обозначают некоторые объекты. Ребра графа соединяют вершины – объекты, допускающие взаимное наблюдение друг за другом. Требуется оборудовать камерами видеонаблюдения минимальное количество из имеющихся объектов, чтобы это позволило вести наблюдение за всеми оставшимися объектами.

Решение. Для решения задачи достаточно найти в графе внешне устойчивое множество с минимальным количеством вершин и число внешней устойчивости графа. Не трудно убедиться, что таким множеством является $\{x_2, x_5\}$, т.е. $\beta(G) = 2$.

Итак, видеокамеры, помещенные в x_2, x_5 смогут держать под наблюдением объекты $x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9$.

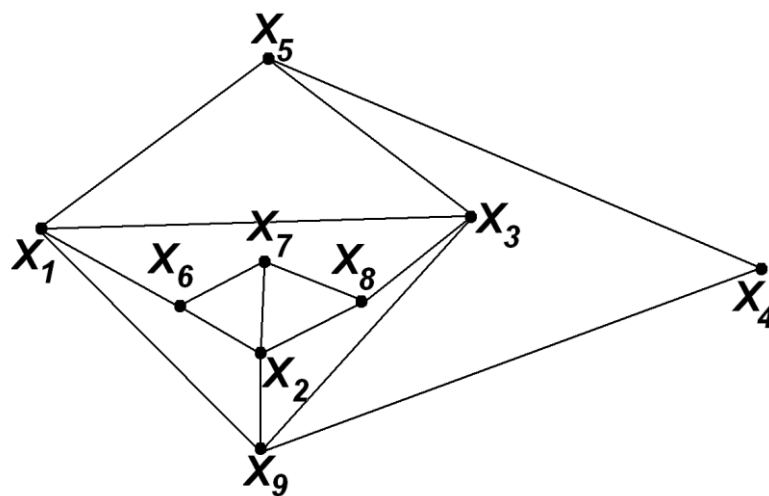


Рис. 6.39

Пример 4. Построить матрицы смежности и инцидентности для графа G , изображенного на рис. 6.40.

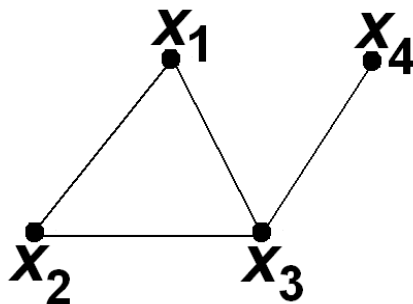


Рис. 6.40

Решение. Матрица смежности имеет вид:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Для того чтобы построить матрицу инцидентности необходимо пронумеровать ребра графа (рис. 6.41).

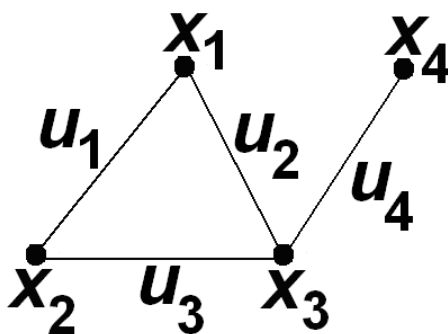


Рис. 6.41

Матрица инцидентности имеет вид:

$$B = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Пример 5. Построить матрицы смежности и инцидентности для графа G (рис. 6.42).

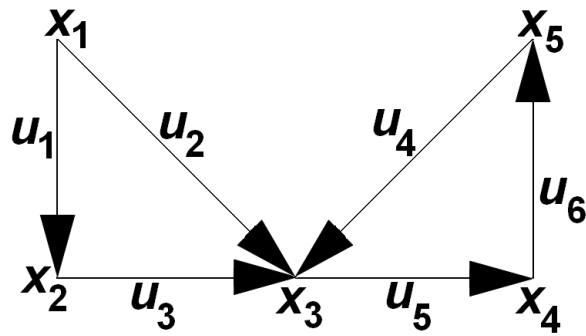


Рис. 6.42

Решение. Составим матрицы смежности и инцидентности для заданного графа G .

Матрица смежности имеет вид:

$$A = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Матрица инцидентности имеет вид:

$$B = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Пример 6. Изобразить орграф G , если его матрица смежности имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Орграф G с такой матрицей смежности представлен на рис. 6.43.

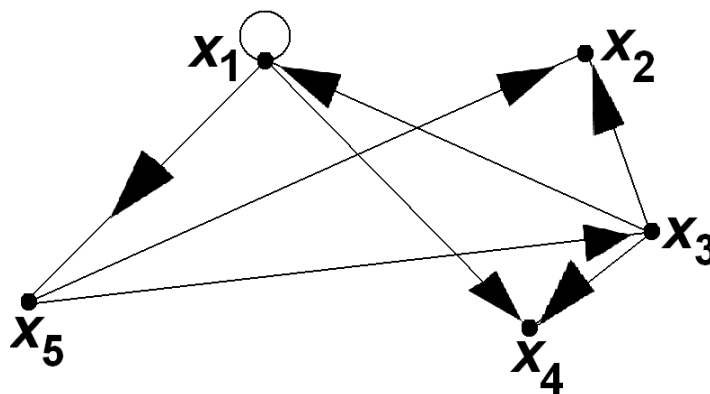


Рис. 6.43

Пример 7. Изобразить оргграф, для которого матрица

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

является матрицей инцидентности.

Решение. Изобразим четыре вершины (по числу строк матрицы B) и соединим их пятью (по числу столбцов матрицы B) дугами: $u_1 = (x_2, x_3)$, $u_2 = (x_3, x_4)$, $u_3 = (x_4, x_1)$, $u_4 = (x_1, x_3)$, $u_5 = (x_4, x_2)$ (рис. 6.44). Построенный граф будет иметь матрицу инцидентности B .

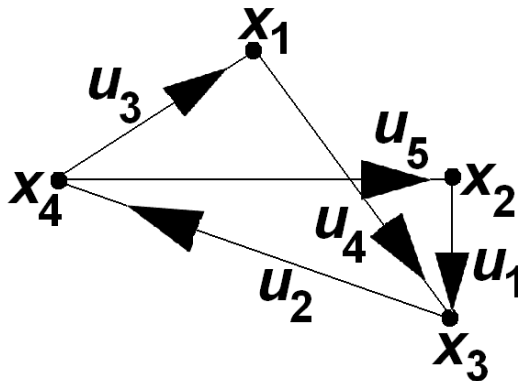


Рис. 6.44

Пример 8. Найти два разных остовных дерева в графе G (рис. 6.45).

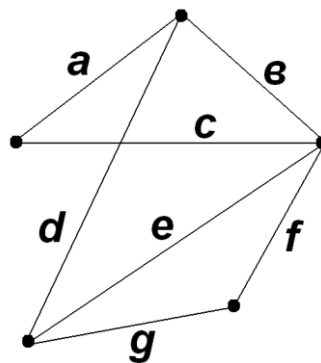


Рис. 6.45

Решение. В этом графе существует несколько остовных деревьев.

Одно из них получается последовательным выбором ребер: a , b , d и f .
Другое - b , c , e и g .

Названные деревья показаны на рис. 6.46.

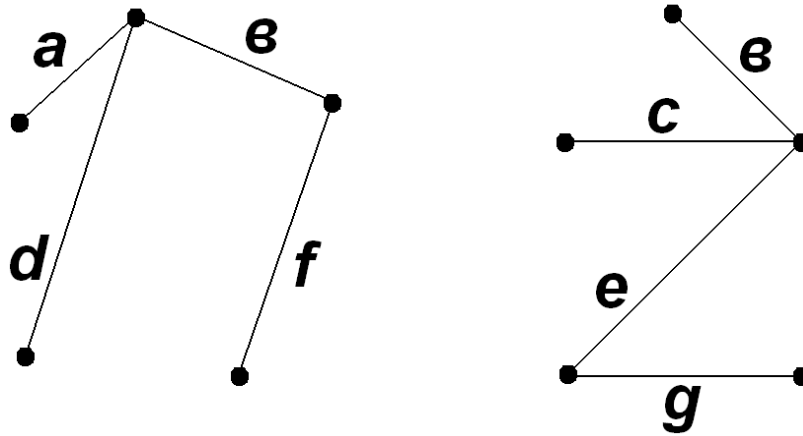


Рис. 6.46

Пример 9. Построить кратчайший остов графа, представленного на рис. 6.47.

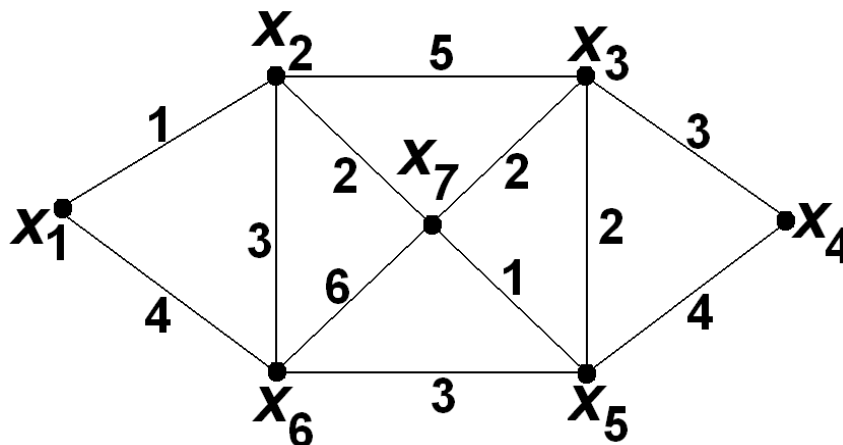


Рис. 6.47

Решение.

1. Изобразим отдельно все семь вершин заданного графа.
2. Перечислим все ребра графа в порядке не убывания их длин (см. табл. 6.2):

Таблица 6.2

Длина ребра	Ребра
1	$(x_1, x_2), (x_5, x_7)$
2	$(x_2, x_7), (x_3, x_7), (x_3, x_5)$
3	$(x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_2, x_6)$
4	$(x_1, x_6), (x_4, x_5)$
5	(x_2, x_3)
6	(x_6, x_7)

Заданный граф имеет семь вершин, поэтому кратчайший его остов, согласно алгоритму Краскала, будет состоять из шести ребер, представленных на рис. 6.48.

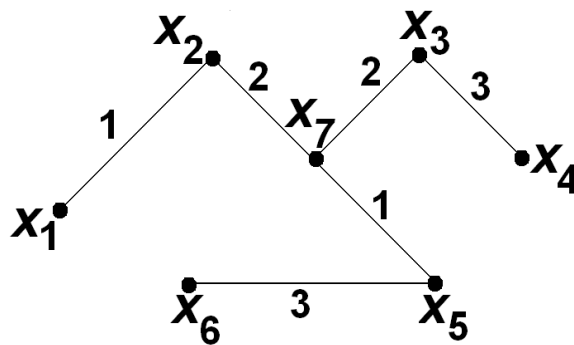


Рис. 6.48

Отметим, что сначала при построении искомого остова графа были последовательно отобраны ребра (x_1, x_2) , (x_5, x_7) , (x_2, x_7) , (x_3, x_7) . Затем ребро (x_3, x_5) было пропущено, т.к. оно образовывало цикл с ранее

отобранными ребрами (x_3, x_7) , (x_5, x_7) . Остальными двумя ребрами кратчайшего остова графа стали (x_3, x_4) , (x_5, x_6) .

Пример 10. Существует ли эйлеров цикл в графах (рис. 6.49)?

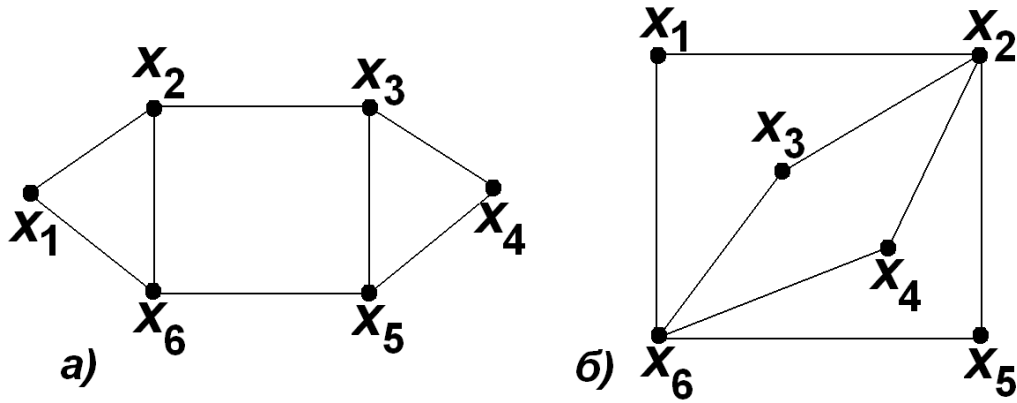


Рис. 6.49

Решение. Граф является эйлеровым, если степени всех его вершин четные.

а) Так как у графа есть вершины с нечетными степенями, например, $d(x_2)=3$, то в нем нет эйлерова цикла.

б) Граф является эйлеровым, так как $d(x_1)=d(x_5)=d(x_3)=d(x_4)=2$, $d(x_2)=d(x_6)=4$.

Одним из эйлеровых циклов будет цикл (рис. 6.50):

$(x_1, x_2) - (x_2, x_3) - (x_3, x_6) - (x_6, x_4) - (x_4, x_2) - (x_2, x_5) - (x_5, x_6) - (x_6, x_1)$.

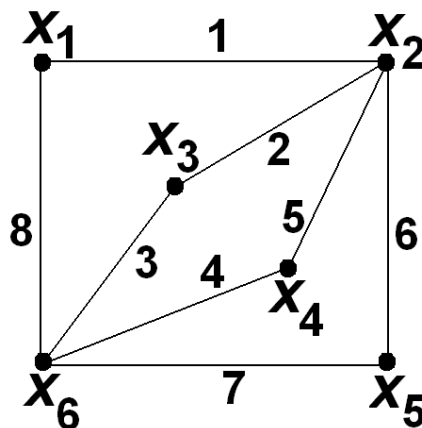
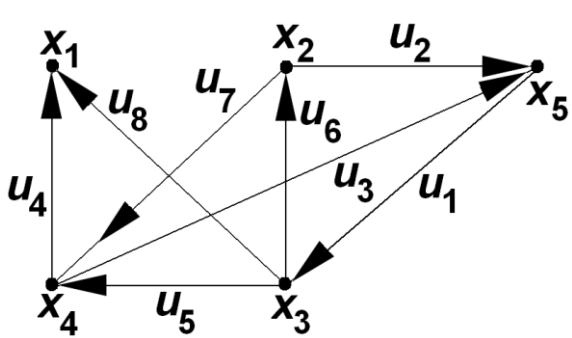
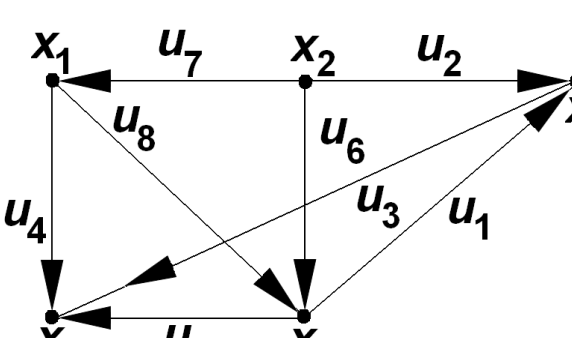
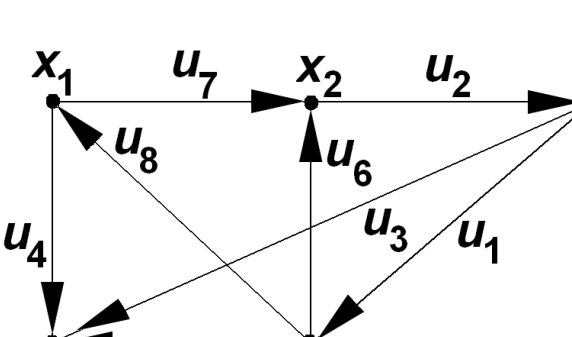


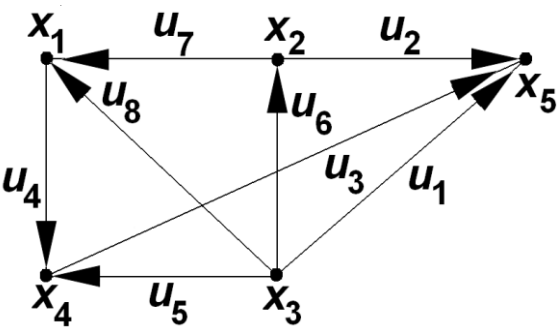
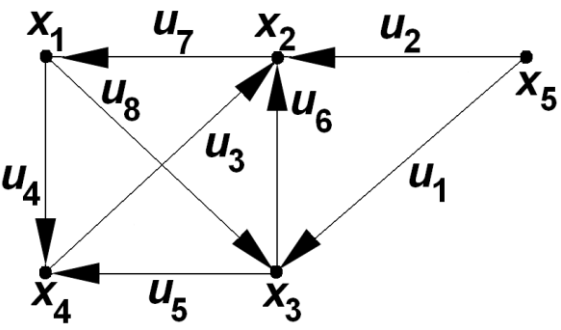
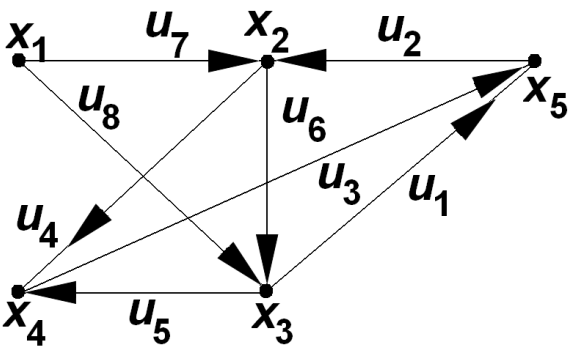
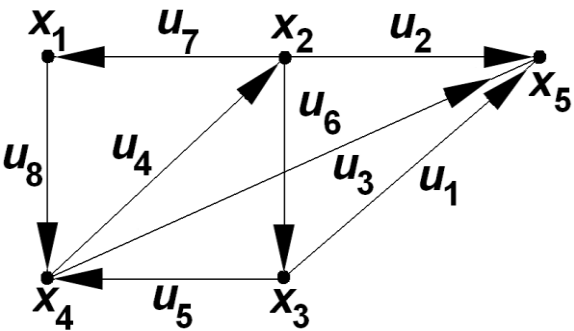
Рис. 6.50

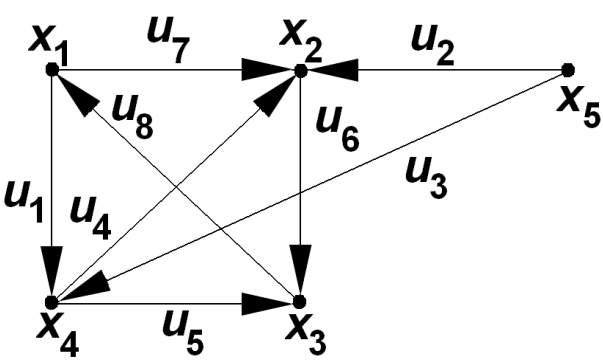
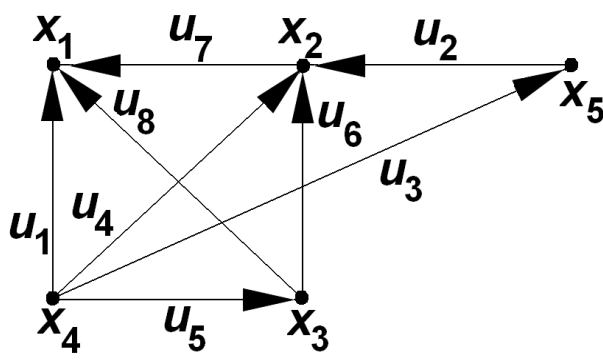
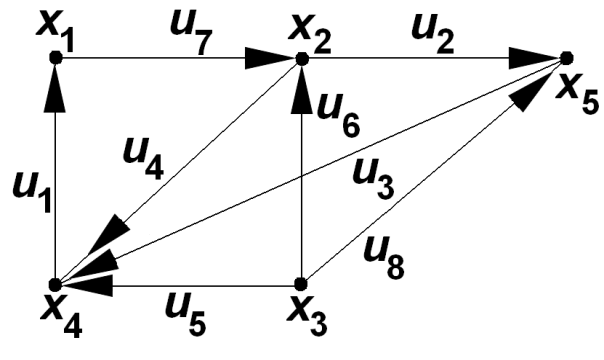
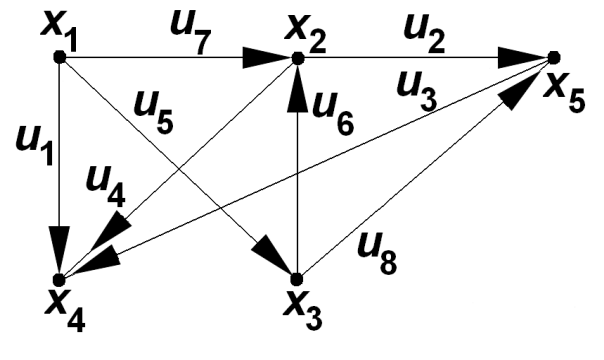
6.3. Задачи для самостоятельного решения

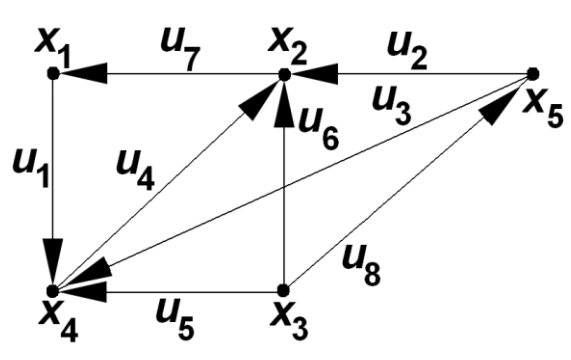
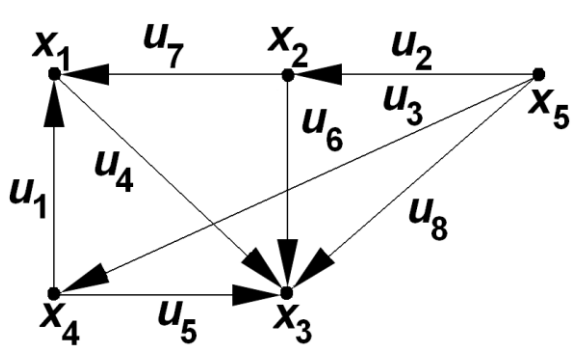
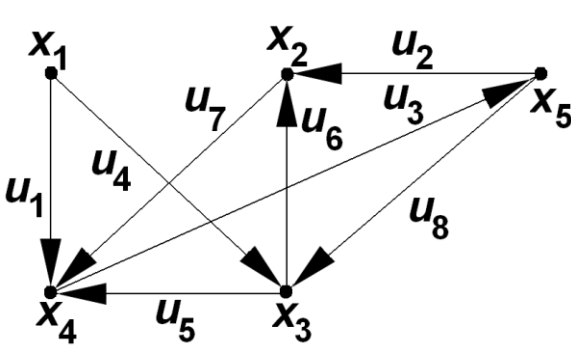
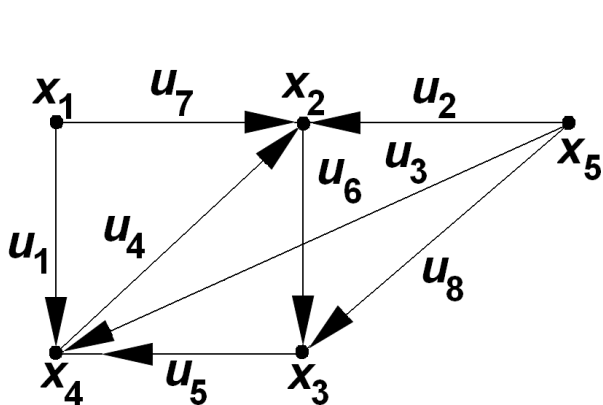
ЗАДАНИЕ № 1. Для заданного орграфа:

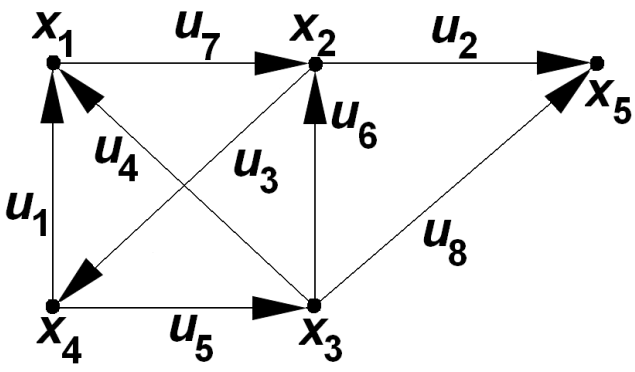
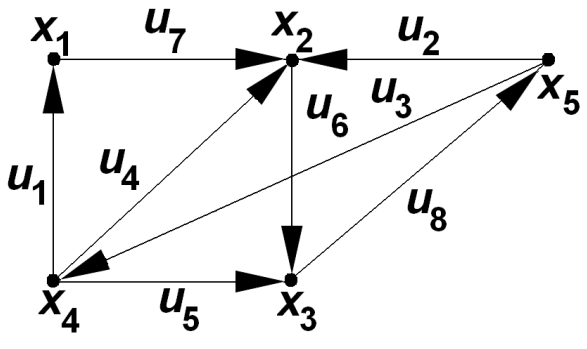
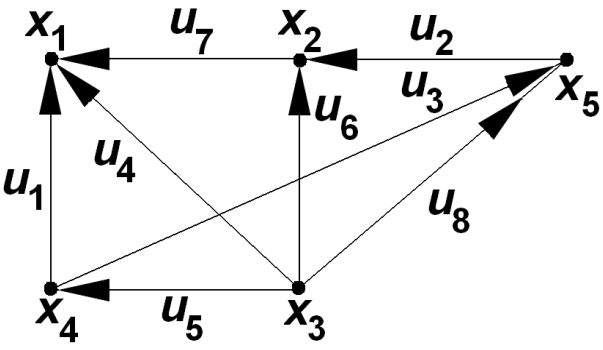
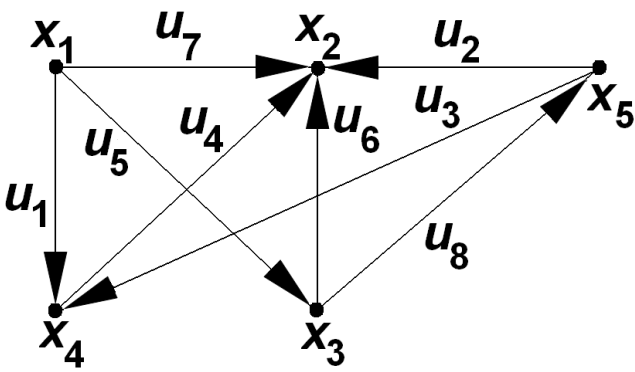
- 1) вычислите степени всех его вершин;
- 2) приведите по одному примеру пути и контура;
- 3) постройте матрицы смежности и инцидентности.

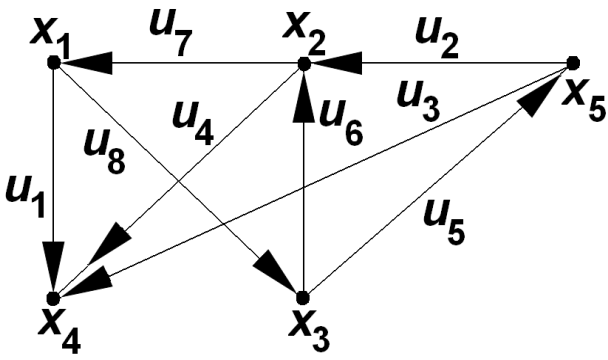
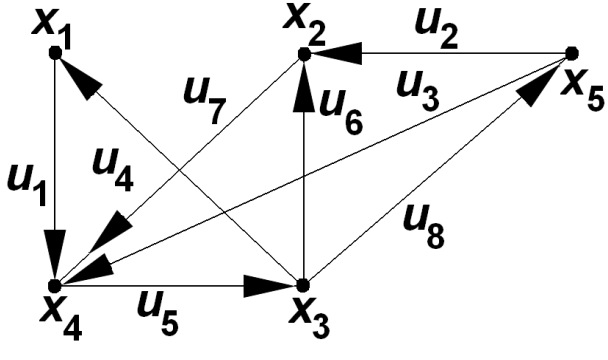
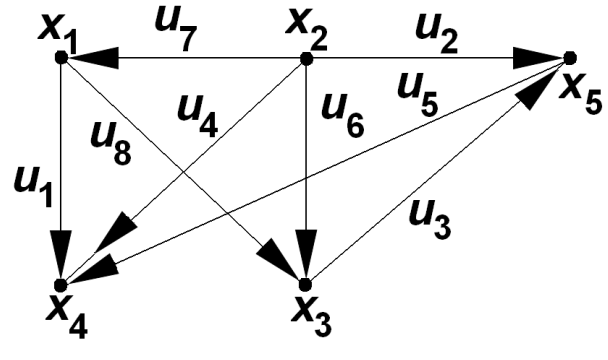
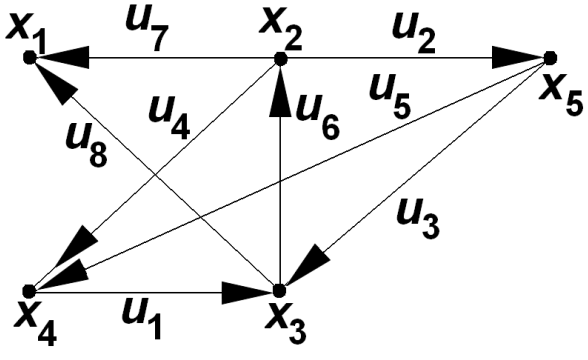
Вариант	Граф
1	
2	
3	

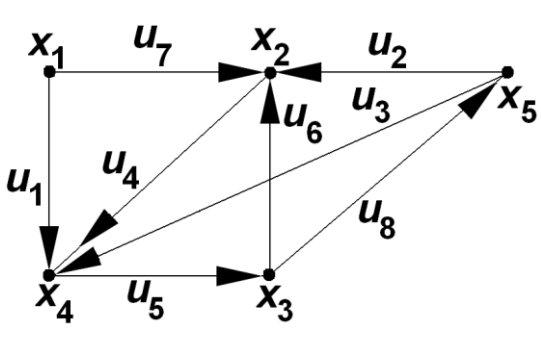
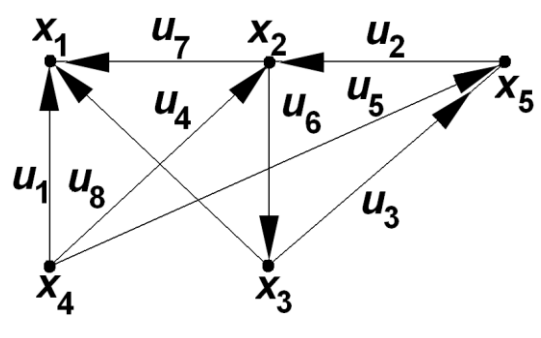
Вариант	Граф
4	
5	
6	
7	

Вариант	Граф
8	
9	
10	
11	

Вариант	Граф
12	
13	
14	
15	

Вариант	Граф
16	
17	
18	
19	

Вариант	Граф
20	
21	
22	
23	

Вариант	Граф
24	
25	

ЗАДАНИЕ № 2. Изобразите орграф по его матрице смежности A .

Вариант	A	Вариант	A
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Вариант	A	Вариант	A
5	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант	A	Вариант	A
17	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		

ЗАДАНИЕ № 3. Найдите остов минимального веса, применив алгоритм Краскала.

Вариант	Граф
1	
2	
3	

Вариант	Граф
4	
5	
6	

Вариант	Граф
7	
8	
9	

Вариант	Граф
10	
11	
12	

Вариант	Граф
13	
14	
15	

Вариант	Граф
16	
17	
18	

Вариант	Граф
19	
20	
21	

Вариант	Граф
22	
23	
24	

Вариант	Граф
25	

6.4. Вопросы для самоконтроля и повторения

1. Определение графа. Виды графов.
2. Степень вершины графа.
3. Числа внутренней и внешней устойчивости графа.
4. Понятия пути, цепи, контура, цикла, связности графа.
5. Матричные представления графов.
6. Деревья. Свойства деревьев.
7. Остовное дерево графа. Алгоритм Краскала.
8. Обходы графов. Поиск в глубину и поиск в ширину.
9. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости.
10. Гамильтоновы графы. Достаточные условия гамильтоновости графа.
11. Плоские и планарные графы.
12. Формула Эйлера.
13. Необходимое и достаточное условия планарности графа.
14. Раскраска графа. Правильная раскраска графа.
15. Хроматическое число, его оценка.
16. Раскраска планарного графа.

Библиографический список

1. Владимирский, Б. М. Математика. Общий курс [Текст] : учеб. / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. – 960 с.
2. Поздняков, С. Н. Дискретная математика [Текст] : учеб. / С.Н. Поздняков, С.В. Рыбин. – М. : Академия, 2008. – 448 с.

Оглавление

Введение	3
1. Теория множеств	4
1.1. Теоретическая часть	4
1.1.1. Множества, их элементы и подмножества	4
1.1.2. Операции над множествами	5
1.1.3. Отображение множеств	6
1.2. Практическая часть	7
1.3. Индивидуальные задания	9
1.4. Вопросы и упражнения для самоконтроля и повторения	11
2. Бинарные отношения	12
2.1. Теоретическая часть	12
2.1.1. Понятие бинарного отношения и связанные с ним понятия	12
2.1.2. Виды бинарных отношений. Отношение эквивалентности	13
2.1.3. Отношения порядка и упорядоченные множества	14
2.2. Практическая часть	15
2.3. Индивидуальные задания	18
2.4. Вопросы и упражнения для самоконтроля и повторения	19
3. Элементы математической логики	20
3.1. Теоретическая часть	20
3.1.1. Высказывания. Логические операции над элементарными высказываниями	20
3.1.2. Формулы алгебры высказываний	22
3.2. Практическая часть	23
3.3. Задачи для самостоятельного решения	24
3.4. Вопросы для самоконтроля и повторения	27
4. Булева алгебра	27
4.1. Теоретическая часть	27
4.1.1. Аксиомы булевой алгебры	27
4.1.2. Свойства дизъюнкции и конъюнкции	29
4.1.3. Теоремы одной переменной	30
4.1.4. Дизъюнктивные и конъюнктивные формы	30
4.1.5. Теоремы поглощения, склеивания и де Моргана	31
4.1.6. Булевы функции. Элементарные булевы функции	32
4.1.7. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы	34
4.2. Практическая часть	36
4.3. Задачи для самостоятельного решения	37
4.4. Вопросы для самоконтроля и повторения	38
5. Комбинаторика	39
5.1. Теоретическая часть	39
5.1.1. Основные соотношения комбинаторики: размещение, перестановка, сочетание	39
5.1.2. Основные правила комбинаторики	42
5.1.3. Бином Ньютона	42
5.1.4. Метод включений и исключений	44
5.2. Практическая часть	46
5.3. Задачи для самостоятельного решения	52

5.4. Вопросы для самоконтроля и повторения	57
6. Основы теории графов	58
6.1. Теоретическая часть	59
6.1.1. Основные понятия и определения	59
6.1.2. Числа внутренней и внешней устойчивости графа	64
6.1.3. Путь, цепь, контур, цикл. Связность графа	66
6.1.4. Матричные представления графов	69
6.1.5. Деревья. Алгоритм Краскала	72
6.1.6. Обходы графов	75
6.1.7. Эйлеровы и гамильтоновы графы	78
6.1.8. Планарность графов	82
6.1.9. Раскраска графов	85
6.2. Практическая часть	89
6.3. Задачи для самостоятельного решения	98
6.4. Вопросы для самоконтроля и повторения	115
Библиографический список	116