Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Воронежская государственная лесотехническая академия»

Е.О. Уточкина Е.В. Смирнова В.В. Зенина

# МАТЕМАТИКА

## Теория вероятностей

Учебное пособие

Воронеж 2014

УДК 519.2
**М34**

Одобрено учебно-методическим советом
ФГБОУ ВПО «ВГЛТА» ( протокол № 5 от 31 января 2014 г.)

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математической физики ВГУ Л.А. Минин

**М34** Математика. Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е.О. Уточкина, Е.В. Смирнова, В.В. Зенина ; М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО «ВГЛТА». – Воронеж, 2014. – ЭБС ВГЛТА.

Учебное пособие включает в себя основные понятия и теоремы теории вероятностей. Приводится подробное решение примеров различного уровня сложности и типовых заданий.

Учебное пособие предназначено для студентов технических и экономических направлений подготовки.

УДК 519.2

# ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

## 1. Принцип умножения.

Пусть необходимо выполнить одно за другим одновременно **r** действий. Если первое действие можно выполнить $\mathbf{n_1}$ способами, после чего второе – $\mathbf{n_2}$ способами и т.д. до **r**- го действия, которое можно выполнить $\mathbf{n_r}$ способами, то все **r** действий вместе в указанном порядке можно выполнить $\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r}$ способами.

**Пример 1.** Бросают три игральных кубика и наблюдают за числом очков, появившихся на каждом кубике. Сколько различных исходов опыта возможно?

**Решение.** Бросают три игральных кубика, поэтому по принципу умножения $\mathbf{r=3}$. На выпавшей грани первого кубика может появиться одно очко, два очка, три очка, …, шесть очков. Поэтому $\mathbf{n_1=6}$. Аналогично для второго кубика – $\mathbf{n_2=6}$ и для третьего кубика – $\mathbf{n_3=6}$. Применяя принцип умножения, находим число всех исходов опыта:

$$\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216}.$$

**Пример 2.** Сколько существует нечетных трехзначных чисел?

**Решение.** Выбирается три цифры, поэтому $\mathbf{r=3}$. Первая цифра может быть любой, кроме нуля, поэтому $\mathbf{n_1=9}$. Вторая цифра может быть любой, т.е. $\mathbf{n_2=10}$. Третья цифра должна быть нечетной, поэтому $\mathbf{n_3=5}$. Тогда всех возможностей

$$\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 9 \cdot 10 \cdot 5 = 450}.$$

**Пример 3.** Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры не повторяются?

**Решение.** По принципу умножения $\mathbf{r=4}$. Для выбора первой цифры имеется шесть различных способов, т.е. $\mathbf{n_1=6}$. После того как выбрана первая цифра, осталось пять способов выбора второй цифры, т.е. $\mathbf{n_2=5}$. Для выбора третьей цифры остается четыре способа, т.е. $\mathbf{n_3=4}$. Последняя четвертая цифра может быть выбрана тремя способами, т.е. $\mathbf{n_4=3}$. Следовательно, согласно принципу умножения имеется $\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360}$ способов расстановки цифр, т.е. всего четырехзначных чисел без повторения цифр можно составить **360**.

**Замечание к принципу умножения.** Если на выполнение какого-либо из r действий наложено ограничение, то подсчет удобнее начинать с выполнения именно этого действия.

**Пример 4.** В машине 5 мест, одно место водителя. Сколькими способами могут сесть в машину 5 человек, если место водителя могут занять только двое из них?

**Решение.** По принципу умножения $\mathbf{r=5}$. Подсчет начнем с места водителя $\mathbf{n_1=2}$, следующее место может занять любой из 4-х оставшихся человек, т.е. $\mathbf{n_2=4}$, следующее место может занять любой из 3-х оставшихся человек и т.д. Поэтому $\mathbf{n_3=3}$, $\mathbf{n_4=2}$, $\mathbf{n_5=1}$.

Итак, всех возможностей: $\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48}$.

## 2. **Размещения** (упорядоченные выборки).

Пусть дано множество **A**, состоящее из **n** различных элементов $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}$.

Упорядоченные наборы, состоящие из **m** элементов ($0<m\le n$) множества **A**, называются ***размещениями*** из **n** элементов множества **A** по **m** элементов множества.

Из определения вытекает, что ***размещения*** – это выборки (комбинации), состоящие из **m** элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из **n** элементов по **m** обозначается символом $\mathbf{A_n^m}$ и вычисляется по формуле

$$\mathbf{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}, \text{ где } \mathbf{n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n},\ \mathbf{0! = 1}.$$

## 3. **Перестановки.**

Размещения из **n** элементов по **n** элементов называются **перестановками** из **n** элементов.

***Перестановки*** – это выборки (комбинации), состоящие из **n** элементов и отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

Число перестановок из **n** элементов обозначается символом $\mathbf{P_n}$ и вычисляется по формуле:

$$\mathbf{P_n = A_n^n = n!}.$$

## 4. **Сочетания** (неупорядоченные выборки).

Неупорядоченные наборы, состоящие из **m** элементов ($0<m\le n$) множества **A**, называются ***сочетаниями*** из **n** элементов множества А по **m** элементов.

***Сочетания*** – это выборки (комбинации), каждая из которых состоит из **m** элементов, взятых из данных **n** элементов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, т.е. отличаются только составом элементов.

Число сочетаний из **n** элементов по **m** элементов обозначается символом $C_n^m$ и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

**Пример 5.** Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 9 дисциплин.

**Решение.** Каждый вариант расписания представляет набор 5 дисциплин из 9, отличающийся от других вариантов как составом дисциплин, так и порядком их следования (или и тем, и другим), т.е. является размещением из 9 элементов по 5. Число вариантов расписания, т.е. число размещений из 9 по 5, находим по формуле

$$A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 15120.$$

**Пример 6.** В шахматном турнире участвует 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

**Решение.** Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, т.е. представляет собой сочетание из 16 элементов по 2. Их число находим по формуле

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!\cdot(16-2)!} = \frac{16!}{2!\cdot 14!} = \frac{14!\cdot 15\cdot 16}{2!\cdot 14!} = \frac{15\cdot 16}{1\cdot 2} = 120.$$

**Пример 7.** Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

**Решение.** Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, т.е. является перестановкой из 7 элементов. Их число находим по формуле:

$$P_7 = A_7^7 = 7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040.$$

**Пример 8**. Из вазы, в которой стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики, выбирают 1 красную и 2 розовых гвоздики. Сколькими способами это можно сделать.

**Решение.** Одну красную гвоздику можно выбрать $n_1 = C_{10}^1 = 10$ способами. Выбрать две розовые гвоздики из имеющихся четырех можно $n_2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} = 6$ способами. Поэтому букет из одной красной и двух розовых гвоздик можно составит (по принципу умножения) $n_1\cdot n_2 = C_{10}^1\cdot C_4^2 = 10\cdot 6 = 60$ способами.

# ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №1
## (Элементы комбинаторики)

### Вариант 1

**1.** Бросают одновременно три монеты и наблюдают за выпадением герба или цифры на верхних гранях каждой монеты. Сколько различных исходов опыта возможно?
**2.** В розыгрыше первенства по футболу участвует 10 команд. Известно, что те, кто займет первые 3 места получат золотую, серебряную и бронзовую медали, а последние две команды выбывают. Сколько различных результатов первенства возможно?

### Вариант 2

**1.** В карточке спортлото 36 клеток. Играющий должен отметить 6. Каково число всех возможных вариантов?
**2.** Сколькими способами могут 8 человек встать в очередь в театральную кассу?

### Вариант 3

**1.** Сколько пятизначных четных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8, если никакую цифру не использовать более одного раза?
**2.** Студенту необходимо сдать 4 экзамена за 10 дней. Сколькими способами можно составить ему расписание, если в один день нельзя сдавать более одного экзамена?

### Вариант 4

**1.** Сколько различных «слов», состоящих из четырех букв, можно образовать из букв слова ЭКЗАМЕН?
**2.** Из 4 первокурсников, 5 второкурсников и 6 третьекурсников надо выбрать 3 студента на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?

### Вариант 5

**1.** Группа студентов изучает 10 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день должно быть 4 разных занятия?
**2.** В урне 12 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было 3 белых и 2 черных шара?

**Вариант 6**

**1.** Три мальчика и три девочки садятся на шесть мест, мальчики на четные, а девочки на нечетные. Сколькими способами они могут это сделать?
**2.** В урне 10 белых и 7 черных шаров. Сколькими способами из них можно выбрать 5 шаров черного цвета?

**Вариант 7**

**1.** На окружности выбрано 10 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
**2.** В электричке 12 вагонов. Сколько существует способов размещения 4 пассажиров, если в одном вагоне должно быть не более одного пассажира?

**Вариант 8**

**1.** Сколькими способами можно распределить 15 выпускников по трем районам, если в одном из них имеется 8, в другом – 5 и в третьем – 2 вакантных места?
**2.** Сколькими способами 3 награды за I, II и III места могут быть распределены между 10 участниками соревнований?

**Вариант 9**

**1.** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещено?
**2.** В вазе стоят 9 красных и 7 белых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее любые 3 гвоздики?

**Вариант 10**

**1.** В пространстве заданы четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести через эти точки?
**2.** Металлург, изучающий сплавы, при проведении эксперимента может использовать 3 различных температурных режима, 6 различных значений времени остывания и 4 различные присадки меди. Выбор температурного режима, значения времени остывания и типа присадки полностью определяют эксперимент. Сколько различных экспериментов может провести металлург?

**Вариант 11**

**1.** В распоряжении агрохимика есть 6 различных типов минеральных удобрений. Ему необходимо провести эксперименты по изучению влияния любой тройки минеральных удобрений. Сколько всего таких экспериментов придется провести?
**2.** Сколько различных дробей можно составить из чисел 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, берущихся попарно?

**Вариант 12**

**1.** Из 10 спортсменов выбирают 4-х участников эстафеты 800 x 400 x 200 x 100. Сколькими способами можно расставить спортсменов на этих этапах соревнования?
**2.** В урне 8 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 6 шаров, чтобы среди них было 4 белых и 2 черных?

**Вариант 13**

**1.** Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг (три горизонтальных полосы), если имеется материя 5 различных цветов?
**2.** На погранзаставе 40 рядовых и 8 офицеров. Сколькими способами можно составить наряд по охране границы, если он состоит из двух офицеров и четырех рядовых?

**Вариант 14**

**1.** Из пункта А в пункт В можно добраться самолетом, поездом, автобусом, а из пункта В в пункт С – пешком, на тракторе, на лошади, на лодке. Сколькими способами можно выбрать дорогу от пункта А до пункта С через пункт В?
**2.** Сколькими способами можно расставить на книжной полке пятитомник произведений Дж. Лондона, располагая книги в произвольном порядке?

**Вариант 15**

**1.** Группу из 15 студентов нужно разделить на две подгруппы так, чтобы в одной подгруппе было 4 человека, а в другой оставшиеся 11 человек. Сколько способов для этого найдется?
**2.** Подбрасывают одновременно три игральных кубика и наблюдают за числом очков, выпавших на каждом из них. Сколько возможно различных исходов опыта таких, что на каждом игральном кубике выпадет четное число очков?

**Вариант 16**

**1.** Сколько можно составить четырехзначных чисел, у которых две последние цифры различные?
**2.** Сколько словарей надо издать, чтобы можно было выполнять переводы с любого из 5 языков непосредственно на любой из этих языков?

**Вариант 17**

**1.** Сколько существует пятизначных чисел, у которых на четных местах стоят четные цифры?
**2.** Из 10 мальчиков и 10 девочек спортивного класса для участия в соревнованиях надо составить три команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочки. Сколькими способами это можно сделать?

**Вариант 18**

**1.** Сколько можно составить четырехзначных чисел так, чтобы любые две соседние цифры были различные?
**2.** В группе 12 девушек и 8 юношей. Сколькими способами можно назначить 5 дежурных так, чтобы среди них было 2 девушки?

**Вариант 19**

**1.** Сколько различных инициалов (Ф.И.О.) можно образовать, используя 5 первых букв русского алфавита?
**2.** Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, нужно выбрать 6 человек, так, чтобы среди них было ровно 2 женщины. Сколькими способами это можно сделать?

**Вариант 20**

**1.** В футбольной команде 13 полевых игроков и 2 вратаря. Сколькими способами можно выбрать играющий состав из 10 полевых игроков и одного вратаря?
**2.** Сколько различных «слов», состоящих из не менее четырех букв, можно образовать из букв слова БУРАН?

**Вариант 21**

**1.** Два стрелка должны поразить 6 мишеней (каждый по 3 любых мишени). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?
**2.** Сколько существует пятизначных чисел, которые начинаются цифрой 2 и оканчиваются цифрой 7?

**Вариант 22**

**1.** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди этих чисел таких, которые не начинаются с цифры пять?
**2.** В стройотряде 15 студентов. Сколькими способами их можно разбить на три бригады численностью 3, 7 и 5 человек?

**Вариант 23**

**1.** Из группы в 10 человек надо выбрать 2-х для выполнения одной работы и 3-х для другой. Сколькими способами это можно сделать?
**2.** Сколько разных сигналов можно поднять на мачте, имея четыре вымпела различных цветов, если каждый сигнал должен состоять из 3-х вымпелов?

**Вариант 24**

**1.** Сколькими способами из 9 человек можно избрать комиссию, состоящую из 5 человек, так чтобы один определенный человек вошел в состав этой комиссии?
**2.** Сколько различных «слов» (под «словом» понимается любая комбинация букв) можно составить, переставляя буквы в слове Л Е Т О?

**Вариант 25**

**1.** В ящике 10 деталей, среди которых 6 бракованных. Наудачу выбирается комплект из 5 деталей. Сколько всего комплектов, в каждом из которых только 2 детали бракованные?
**2.** Сколько существует четырехзначных чисел, у которых на четных местах стоят нечетные цифры, а на нечетных местах – четные цифры?

**Вариант 26**

**1.** Сколькими способами можно среди 9 студентов распределить 4 билета в цирк и 3 билета в театр?
**2.** Две команды, в каждой из которых по 5 спортсменов, строятся в одну шеренгу. Сколькими способами можно построить шеренгу, чтобы игроки одной команды не стояли рядом?

**Вариант 27**

**1.** Сколько существует пятизначных нечетных чисел, которые не содержат цифру 6?

**2.** В ящике 15 деталей, среди которых 6 бракованных. Наудачу выбирают комплект, состоящий из 5 деталей. Сколько всего комплектов в каждом из которых нет бракованных деталей?

**Вариант 28**

**1.** В комнате 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 7 гостей?
**2.** Сколько чисел, заключенных между 1000 и 9999, не содержат цифру 3?

**Вариант 29**

**1.** На железнодорожной дороге 50 станций. На каждом билете печатаются названия станций отправления и прибытия. Сколько различных билетов можно напечатать?
**2.** Группа туристов из 7 юношей и 5 девушек выбирает по жребию 4-х человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «четверку» попадут 3 девушки и 1 юноша?

**Вариант 30**

**1.** Бросают три игральных кубика и наблюдают за числом выпавших очков на каждом из них. Из всех возможных случаев выпадения очков, сколько будет таких, что на всех трех кубиках выпадет разное число очков?
**2.** Из колоды, состоящей из 36 карт, наудачу берут три карты. В скольких случаях окажется, что две их них красной масти, а одна черной?

## КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть некоторый опыт может приводить лишь к одному из конечного множества результатов. Эти результаты будем называть элементарными исходами. Предположим, что элементарные исходы удовлетворяют следующим условиям:

1) образуют ***полную группу***, т.е. в каждом испытании обязан появиться какой-нибудь из этих исходов;

2) ***попарно несовместны***, т.е. два различных элементарных исхода не могут появиться в одном испытании;

3) ***равновозможны***, т.е. шансы появления у всех элементарных исходов одинаковы.

В этих условиях может быть использовано ***классическое определение вероятности***.

Вероятностью события **A** называется число **P(A)**, равное отношению числа исходов испытания, благоприятствующих событию **A** к общему числу исходов:

$$\mathbf{P(A)=\frac{m}{n}},$$

где **n**- общее число исходов испытания; **m** – число исходов, благоприятствующих событию **A**, т. е. число элементарных исходов, в которых появляется событие **A**.

Из классического определения вероятности следует, что вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т. е.

$$\mathbf{0 \le P(A) \le 1}.$$

**Пример 1.** В урне находится 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

**Решение.** Опыт состоит в выборе наудачу одного шара из урны. Число всех равновозможных исходов опыта равно: **n = 12+8= 20**.

Рассмотрим событие **A** – вынут белый шар.

Число исходов, благоприятствующих событию **A**, равно: **m=12**. Следовательно, по формуле классического определения вероятности имеем:

$$\mathbf{P(A)=\frac{m}{n}=\frac{12}{20}=0{,}6}.$$

**Пример 2.** Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

**Решение.** Опыт состоит в бросании двух игральных костей (один раз) и наблюдении за числом очков, появившихся на верхних гранях. Общее число равновозможных исходов опыта равно: **n= 6·6=36** (каждое число очков, выпавших на одной кости, может сочетаться со всеми числами очков, выпавших на другой кости).

Рассмотрим событие **A** – сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

Событию **A** благоприятствуют только два исхода опыта: (1,4) и (4,1), т.е. **m=2**. Следовательно, искомая вероятность

$$\mathbf{P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}}.$$

**Пример 3.** Ребенок играет с шестью буквами разрезной азбуки А, В, К, М, О, С. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд получится слово «МОСКВА»?

**Решение.** Опыт состоит в случайном расположении шести букв в ряд. Все исходы опыта – множество перестановок из шести различных букв. Число всех исходов опыта равно: $\mathbf{n=P_6 = 6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720}$.

Рассмотрим событие **А** – при случайном расположении шести букв в ряд получено слово «МОСКВА». Очевидно, что такое расположение букв единственно, т. е. **m=1**. Найдем вероятность события **А**:

$$\mathbf{P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{720}}.$$

**Пример 4.** В ящике находится 20 деталей, из них 8 бракованных. Из ящика наудачу извлекают 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажутся две бракованные детали.

**Решение.** Опыт состоит в выборе наудачу 5 деталей из ящика, в котором находится 20 деталей. Все исходы опыта – множество сочетаний из 20 деталей по 5 деталей. Число всех исходов опыта

$$\mathbf{n=C_{20}^5=\frac{20!}{5!\cdot15!}=\frac{15!\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20}{5!\cdot15!}=\frac{16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=15504}.$$

Рассмотрим событие **А** – среди 5 деталей, извлеченных из ящика, две детали бракованные.

Если среди 5 деталей две бракованные, то остальные три детали небракованные. Тогда число исходов, благоприятствующих событию **А**, можно найти по принципу умножения. Нужно выполнить одно за другим два действия: из 8 бракованных выбрать две детали, а затем из 12 небракованных выбрать 3 детали. Первое действие можно выполнить $\mathbf{m_1=C_8{}^2}$ способами, второе действие можно выполнить $\mathbf{m_2=C_{12}{}^3}$ способами. Тогда

$$\mathbf{m=m_1\cdot m_2=C_8{}^2\cdot C_{12}{}^3=}$$

$$\mathbf{=\frac{8!}{2!\cdot6!}\cdot\frac{12!}{3!\cdot9!}=\frac{6!\cdot7\cdot8}{2!\cdot6!}\cdot\frac{9!\cdot10\cdot11\cdot12}{3!\cdot9!}=\frac{7\cdot8}{1\cdot2}\cdot\frac{10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3}=6160}.$$

Найдем вероятность события **А**:

$$\mathbf{P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6160}{15504}=\frac{385}{969}\approx0{,}397}.$$

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 2
## (Классическое определение вероятности)

### Вариант 1

**1.** Найти вероятность того, что в наудачу написанном двухзначном числе цифры разные.

**2.** В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш?

**Вариант 2**

**1.** В урне находятся 12 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что среди наугад вынутых 5 шаров только 3 шара будут черными.
**2.** Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

**Вариант 3**

**1.** Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.
**2.** В ящике имеется 28 деталей, из которых 6 бракованных. Из ящика наудачу извлекают 3 детали. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных?

**Вариант 4**

**1.** Устройство состоит из пяти элементов, два из которых изношены. При включении устройства случайным образом включаются два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.
**2.** Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна семи.

**Вариант 5**

**1.** Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
**2.** Из ящика, в котором 10 белых и 6 черных шаров, берут наудачу 3 шара. Какова вероятность того, что один из них белый, а два черных?

**Вариант 6**

**1.** Устройство состоит из шести элементов, два из которых изношены. При включении устройства случайным образом включаются два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся изношенные элементы.
**2.** Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна восьми.

**Вариант 7**

**1.** Собрание, на котором присутствует 20 мужчин и 10 женщин, выбирает делегацию из четырех человек. Каждый может быть избран с равной вероятностью. Найти вероятность того, что в делегацию войдут 3 женщины.
**2.** Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна шести, а разность – двум.

**Вариант 8**

**1.** В коробке шесть одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.
**2.** В 25 экзаменационных билетах содержатся по два вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил 45 вопросов. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им вопросов?

**Вариант 9**

**1.** Трехзначное число образовано случайным выбором трех неповторяющихся цифр из цифр 1, 2, 3, 5. Какова вероятность того, что это число четное?
**2.** В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров. Известно, что 6 из них нуждаются в общей регулировке. Мастер берет первые попавшиеся 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в общей регулировке?

**Вариант 10**

**1.** В ящике имеется 10 деталей, среди которых 7 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
**2.** На 5 карточках разрезной азбуки изображены буквы Е, Е, Л, П, П. Ребенок случайным образом выкладывает их в ряд. Какова вероятность того, что у него получится слово ПЕПЕЛ?

**Вариант 11**

**1.** В автоколонне 40 автомобилей, из них 10 легковых автомобилей. Половина автомобилей выезжает для перевозки грузов. Какова вероятность того, что среди них будет 5 легковых автомобилей?
**2.** Отрезок разделен на три равные части. На этот отрезок наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что на каждую из трех частей отрезка попадет по одной точке.

**Вариант 12**

**1.** На полке в случайном порядке расставлены 4 книги из собрания сочинений Хемингуэя. Какова вероятность того, что они стоят в порядке возрастания номеров слева направо?
**2.** На стоянке 15 исправных автомобилей и 5 неисправных. Механик наудачу выбирает 3 автомобиля для осмотра. Какова вероятность того, что он выбрал неисправные автомобили?

**Вариант 13**

**1.** На полке стоят 10 книг, из них 3 – по теории вероятностей. Наугад выбираются 3 книги. Какова вероятность того, что две из них по теории вероятностей?
**2.** При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

**Вариант 14**

**1.** Два приятеля, независимо друг от друга, садятся в электричку, состоящую из 9 вагонов. Какова вероятность того, что они окажутся в разных вагонах?
**2.** Из 12 лотерейных билетов, содержащих 4 выигрышных, наугад берут 6 билетов. Какова вероятность того, что половина из них будет выигрышных?

**Вариант 15**

**1.** Студент знает 14 вопросов из 20. В билете содержатся 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на два из них.
**2.** За круглым столом случайно рассаживаются 4 мужчины и 4 женщины. Какова вероятность того, что мужчины и женщины будут чередоваться друг с другом?

**Вариант 16**

**1.** Из 20 сбербанков 7 расположены за чертой города. Для аудиторской проверки случайно выбраны 5 сбербанков. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся в черте города?
**2.** Бросили три монеты. Какова вероятность того, что на двух выпадет герб, а на одной надпись?

**Вариант 17**
**1.** Брошены две игральные кости. Какова вероятность выпадения двух различных граней?

**2.** Среди 17 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрывается 7 пригласительных билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки?

**Вариант 18**

**1.** На студенческой конференции представлены 15 докладов, из которых 5 сделаны первокурсниками. Награждаются три студента за научные доклады. Какова вероятность, что двое из награжденных будут старшекурсниками?
**2.** Бросают три игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

**Вариант 19**

**1.** Бросают две игральных кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит пяти?
**2.** В конверте среди 20 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 8 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

**Вариант 20**

**1.** В урне 10 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета?
**2.** Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, полученные кубики перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь только две окрашенные грани.

**Вариант 21**

**1.** Телефонный номер состоит из 6 цифр. Определить вероятность того, что все цифры различны.
**2.** Из колоды карт (их 36) наугад вынимают 5 карт. Какова вероятность, что среди этих карт будут 2 туза и 3 шестерки?

**Вариант 22**

**1.** Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 50. Найти вероятность того, что среди 3-х наугад выбранных вопросов студент знает только два вопроса?
2**.** Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей
6 очков не появится ни разу?

**Вариант 23**

**1.** Из 100 карточек с числами 00, 01,02,…, 98, 99 случайно выбирается одна. Какова вероятность того, что сумма цифр на выбранной карточке равна 16?
**2.** В цехе работают пять мужчин и четыре женщины. По табельным номерам отобраны шесть человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

**Вариант 24**

**1.** Владелец карточки лотереи «Спортлото» (5 из 36) зачеркивает 5 номеров. Какова вероятность того, что им будет угадано только 4 номера в очередном тираже?
**2.** Бросают две игральных кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков больше семи?

**Вариант 25**

**1.** Из колоды в 36 карт берут наугад четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будут представлены все четыре масти.
**2.** Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков будет равно 6?

**Вариант 26**

**1.** В лифт 9-этажного дома входят 4 человека. Какова вероятность того, что они выйдут на разных этажах?
**2.** В корзине находятся 5 красных и 4 синих мяча. Из корзины наудачу вынимают два мяча. Какова вероятность, что они оба окажутся красными?

**Вариант 27**

**1.** На десяти одинаковых по форме и размеру карточках написаны буквы слова МАТЕМАТИКА – по одной букве на каждой карточке. Карточки тщательно перемешаны. Их вынимают наудачу и располагают на столе одна за другой. Какова вероятность снова получить слова МАТЕМАТИКА?
**2.** У сборщика 10 деталей, из которых 4 одного типа, а 6 другого. Какова вероятность того, что взятые наудачу две детали окажутся разных типов?

**Вариант 28**
**1.** Из букв слова РОТОР, составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекаются 3 буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ТОР?

**2.** В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

**Вариант 29**

**1.** В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?
**2.** На шести одинаковых по форме и размеру карточках написаны буквы Н, М, И, Я, Л, О, по одной на каждой карточке. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки.

**Вариант 30**

**1.** В ящике 15 шаров, из которых 5 голубых, 5 красных и 5 зеленых шаров. Наугад вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров 2 голубых.
**2.** Какова вероятность, что трехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе имеет все цифры различные?

## ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Событие, которое в результате опыта должно произойти непременно, называется ***достоверным*** событием.

Событие, которое в данном опыте не может произойти, называется ***невозможным.***

Вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможного события равна нулю.

Два события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

***Противоположным*** событию А называется событие $\overline{\mathbf{A}}$ состоящее в том, что в результате опыта событие **А** не наступит.

***Суммой*** событий **А** и **В** называется событие **С=А+В**, состоящее в наступлении хотя бы одного из них, т.е. или события **А**, или события **В**, или **А** и **В** вместе.

Если события **А** и **В** несовместны, то **С=А+В** – это событие **А**, или **В**.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

***Произведением*** событий **А** и **В** называется событие $\mathbf{C=A\cdot B}$, состоящее в совместном появлении и события **А**, и события **В**.

Два события называются ***независимыми***, если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Два события называются ***зависимыми***, если вероятность одного из них зависит от появления или непоявления другого события.

Если **A** и **B** – зависимые события, то вероятность события **B**, вычисленную в предположении, что событие **A** уже наступило, называют ***условной вероятностью*** и обозначают $\mathbf{P_A(B)}$.

Несколько событий называются ***независимыми в совокупности***, если любое из них не зависит от любой совокупности остальных.

**Теорема сложения вероятностей несовместных событий**. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P(A+B) = P(A)+P(B).}$$

**Следствие 1.** Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1) + P(A_2)+\ldots+P(A_n)}.$$

**Следствие 2.** Если события $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$,…, $\mathbf{A_n}$ попарно несовместны и образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\mathbf{P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n) =1}.$$

**Следствие 3.** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}.$$

**Теорема сложения вероятностей совместных событий**. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$\mathbf{P(A+B) = P(A)+P(B) – P(A \cdot B)}.$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Например, для трех совместных событий:

$$\mathbf{P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C) – P(A \cdot B) – P(A \cdot C) – P(B \cdot C)+ P(A \cdot B \cdot C)}.$$

Проще, однако, найти вероятность суммы нескольких совместных событий $\mathbf{P(S)=P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)}$, используя равенство $\mathbf{P(S)+P(\overline{S})=1}$, где $\mathbf{\overline{S} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n}$ - противоположно событию **S**. Тогда $\mathbf{P(S)= 1-P(\overline{S})}$.

**Теорема умножения вероятностей независимых событий**. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B).}$$

**Следствие 1.** Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) =P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n)}.$$

**Следствие 2.** Вероятность появления хотя бы одного из событий $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, …, $\mathbf{A_n}$, независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий $\mathbf{\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \ldots, \overline{A}_n}$:

$$\mathbf{P(A_1+ A_2+ A_3\ldots+A_n)= 1 – P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n)}.$$

**Теорема умножения вероятностей зависимых событий.** Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности появления одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предложении, что первое событие уже наступило:

$$\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)}.$$

**Следствие.** Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности появления одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятности каждого последующего события вычисляются в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$\mathbf{P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n)},$$

где $\mathbf{P_{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n)}$ - вероятность появления события $\mathbf{A_n}$, вычисленная в предположении, что события $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, …, $\mathbf{A_{n-1}}$ наступили.

Например, для трех зависимых событий

$$\mathbf{P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cdot B}(C)}.$$

**Пример 1.** Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, а из второго – 0,91. Найти вероятность поражения мишени.

**Решение.** Пусть событие **A** – поражение мишени, событие $\mathbf{A_1}$- поражение мишени из первого орудия, событие $A_2$ – поражение мишени из второго орудия. Тогда $\mathbf{A=A_1+A_2}$. Поскольку события $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ совместны, то

$$\mathbf{P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2)}.$$

Так как события $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ независимы, то $\mathbf{P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)}$, где $\mathbf{P(A_1)=0,85}$, а $\mathbf{P(A_2)=0,91}$ по условию задачи. Следовательно,

$$\mathbf{P(A) = 0,85+0,91 - 0,85 \cdot 0,91 = 0,9865}.$$

**Пример 2.** В урне 2 белых и 7 черных шаров. Из нее наудачу вынимают (без возвращения) 2 шара. Какова вероятность того, что они оба будут одного цвета?

**Решение.** Введем события:

**A** – оба шара одного цвета,

$\mathbf{A_1}$ – оба шара белого цвета,

$\mathbf{A_2}$ – оба шара черного цвета.

Тогда $\mathbf{A=A_1+A_2}$. События $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ несовместны. Следовательно,

$$\mathbf{P(A) = P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2)}.$$

Вычислим вероятности событий $A_1$ и $A_2$:

$$P(A_1)=\frac{m}{n}=\frac{1}{C_9^2}=\frac{2!\cdot 7!}{9!}=\frac{1\cdot 2}{8\cdot 9}=\frac{1}{36};$$

$$P(A_2)=\frac{m}{n}=\frac{C_7^2}{C_9^2}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{2!\cdot 7!}{9!}=\frac{6\cdot 7}{8\cdot 9}=\frac{7}{12}.$$

Итак,

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{36}+\frac{7}{12}=\frac{11}{18}\approx 0{,}61.$$

**Пример 3.** При увеличении напряжения может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя одного из трех последовательно соединенных элементов; вероятности отказа элементов соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4. Определить вероятность того, что разрыва цепи не произойдет.

**Решение.** Пусть события $A_1$, $A_2$, $A_3$ означают выход из строя соответственно первого, второго и третьего элементов. Их вероятности по условию соответственно равны: $P(A_1)=0{,}2$; $P(A_2)=0{,}3$; $P(A_3)=0{,}4$. Тогда вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ (соответственно первый, второй и третий элемент не вышел из строя) равны:

$$P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-0{,}2=0{,}8;\quad P(\overline{A}_2)=0{,}7;\quad P(\overline{A}_3)=0{,}6.$$

Событие **A**, состоящее в том, что разрыва цепи не произошло, есть произведение независимых событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$. Следовательно, получаем:

$$P(A)=P\,(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}336.$$

**Пример 4.** В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно, один за другим, вынимают три шара. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй – красным и третий – белым.

**Решение.** Рассмотрим следующие события:

**A** – первый вынутый шар черный,
**B** – второй шар красный,
**C** – третий шар белый.

Обозначим через **D** событие, заключающееся в том, что шары вынуты в последовательности: черный, красный, белый. Событие $D=A\cdot B\cdot C$.

Так как события **A**, **B**, **C** зависимые, то

$$P\,(D)=P\,(A\cdot B\cdot C)=P\,(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cdot B}(C).$$

Вероятность того, что первоначально вынут черный шар, $P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

Вероятность извлечения из урны красного шара при условии, что первоначально был вынут черный шар, $\mathbf{P_A(B) = \frac{5}{14}}$, так как после изъятия черного шара в урне осталось 14 шаров и из них – 5 красных. Вероятность извлечения из урны белого шара после того, как были извлечены черный и красный шары, $\mathbf{P_{A\cdot B}(C)=\frac{4}{13}}$ (после изъятия черного и красного шаров в урне осталось 13 шаров и из них – 4 белых).

Таким образом,

$$\mathbf{P\,(D) = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13} = \frac{4}{91} \approx 0{,}044}\,.$$

**Пример 5.** Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу вынимают три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна «дама».

**Решение.** Пусть событие **A** – среди трех карт окажется хотя бы одна дама. Введем в рассмотрение противоположное событие $\mathbf{\overline{A}}$ – среди вынутых карт нет ни одной «дамы». Найдем $\mathbf{P(\overline{A})}$.

$$\mathbf{P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = \frac{32!}{3!29!}\cdot\frac{3!\,33!}{36!} = \frac{30\cdot 31\cdot 32}{34\cdot 35\cdot 36} \approx 0{,}69}\,.$$

Тогда

$$\mathbf{P\,(A) = 1 - P\,(\overline{A}) = 1 - 0{,}69 = 0{,}31}\,.$$

**Пример 6.** Три стрелка производят по одному выстрелу в цель независимо друг от друга. Вероятности попадания в цель для каждого из них соответственно равны: 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что:

а) в цель попадет только третий стрелок;

б) в цель попадет только один стрелок;

в) в цель попадут только два стрелка;

г) в цель попадет хотя бы один стрелок.

**Решение.** Рассмотрим следующие события:

$\mathbf{A_1}$ – первый стрелок попал в цель;

$\mathbf{A_2}$ – второй стрелок попал в цель;

$\mathbf{A_3}$ – третий стрелок попал в цель.

По условию $\mathbf{P(A_1)=0{,}7}$; $\mathbf{P(A_2)=0{,}8}$; $\mathbf{P(A_3)=0{,}9}$.

а) Пусть событие **A** – в цель попал только третий стрелок, тогда $\mathbf{A = \overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3}$. Так как события $\mathbf{\overline{A}_1, \overline{A}_2, A_3}$ независимые, тогда

$$\mathbf{P(A) = P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) = 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9 = 0{,}054}\,.$$

б) Пусть событие **B**- в цель попал только один стрелок, тогда

$$\mathbf{B = A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3 + \overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3 + \overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3}$$

Отсюда, используя теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, имеем:

$$\mathbf{P(B) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) =}$$
$$\mathbf{=0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}092}.$$

в) Пусть событие **C** – в цель попадут только два стрелка. Тогда

$$\mathbf{C = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3},$$

откуда

$$\mathbf{P(C) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}398}.$$

г) Пусть событие **D**- в цель попадет хотя бы один стрелок.

Рассмотрим противоположное событие $\mathbf{\overline{D}}$ – ни один из стрелков в цель не попадет, т.е. все стрелки промахнутся.

Так как $\mathbf{\overline{D} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3}$, то

$$\mathbf{P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}994}.$$

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 3
## (Теоремы сложения и умножения вероятностей)

### Вариант 1

**1.** Устройство состоит из трех независимых работающих элементов. Вероятность безотказной работы ( в течение смены) первого элемента равна 0,9; второго – 0,7; третьего 0,6. Найти вероятность того, что в течение смены без сбоя будут работать:

а) только два устройства;

б) все три устройства.

**2.** Крупная оптовая компания занимается оптовой продажей материалов для строительства и ремонта жилья и, имея список покупателей в 3-х регионах, основанный на ее собственной системе кодов, рассылает им по почте каталог товаров. Менеджер компании полагает, что вероятность того, что компания не получит откликов на разосланные предложения ни из одного региона, равна 0,25. Чему в этом случае равна вероятность того, что компания получит ответ хотя бы из одного региона?

### Вариант 2

**1.** Вероятность того, что деталь находится в 1-м, 2-м, 3-м ящике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что:

а) деталь находится только во втором ящике;

б) деталь находится только в одном ящике.

**2.** Модельер, разрабатывая новую коллекцию одежды к весеннему сезону, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зеленый цвет будет в моде весной, модельер оценивает в 0,8, что черный – в 0,4, а вероятность того, что будет моден красный цвет – в 0,9. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, оценить вероятность того, что цветовое решение коллекции будет удачным хотя бы по одному из выбранных цветов.

**Вариант 3**

**1.** Вероятности попадания в мишень для трех стрелков равны, соответственно, 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки делают по одному выстрелу. Найти вероятность того, что:

а) мишень поразит только первый стрелок;

б) в мишени не менее двух пробоин.

**2.** На полке расставлено 10 учебников, 4 из них в переплете. Случайным образом с полки взяли 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из них будет в переплете.

**Вариант 4**

**1.** Испытуемому предъявляется три теста. Вероятности решения тестов соответственно равны 0,7; 0,6; 0,4. Определить вероятность того, что:

а) хотя бы один тест будет решен;

б) только первый тест будет решен.

**2.** Три студента решают, пойти им на дискотеку, или нет. Первые два (независимо друг от друга) бросают по монете, и если выпал герб – голосуют «за». Третий бросает кубик, принимая положительное решение при выпадении шести очков. Какова вероятность пойти на дискотеку, если решение принимается большинством голосов?

**Вариант 5**

**1.** Работают одновременно три радиолокационные станции, которые обнаруживают некоторый объект с вероятностями 0,1; 0,2; 0,3. Определить вероятность того, что:

а) только одна из радиолокационных станций обнаружит объект;

б) хотя бы одна из радиолокационных станций обнаружит объект.

**2.** Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

**Вариант 6**

**1.** Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного товара по каждому из 3-х центральных телевизионных каналов, равна 0,05. Предполагается, что эти события – независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу:

а) по всем 3 каналам;

б) хотя бы по одному из этих каналов?

**2.** В урне имеется 5 шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу из урны по одному (без возвращения) извлекают три шара. Какова вероятность того, что их номера совпадут с номерами извлечений?

**Вариант 7**

**1.** Покупатель может приобрести акции двух компаний А и В. Надежность первой оценивается экспертами на уровне 90%, а второй – 80%. Чему равна вероятность того, что:

а) обе компании в течение года не станут банкротами;

б) только одна из компаний в течение года не станет банкротами?

**2.** Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле, если она не меняется от выстрела к выстрелу.

**Вариант 8**

**1.** Вероятность попадания в мишень для трех стрелков равны, соответственно, 0,5; 0,9; 0,6. Стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что:

а) в цель не попал один стрелок;

б) в цель не попал хотя бы один стрелок?

**2.** В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее один за другим вынимают (без возвращения) два шара. Найти вероятность того, что они разного цвета.

**Вариант 9**

**1.** Ведется стрельба по удаляющейся цели. При каждом выстреле вероятность попадания уменьшается вдвое, для первого выстрела она составляет 0,8. Сделано 4 выстрела. Найти вероятность:

а) поражения цель при всех выстрелах;

б) ровно двух попаданий.

**2.** Брошены последовательно три монеты. Какова вероятность того, что «герб» появится хотя бы один раз?

**Вариант 10**

**1.** Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены его внимания потребует первый станок, равна 0,3; второй – 0,4; третий – 0,5. Найти вероятность того, что:

а) в течение смены внимания потребуют какие-либо два станка;

б) в течение смены внимания потребует хотя бы один из станков.

**2.** В первой урне 5 белых, 11 черных, 8 красных шаров, во второй 10 белых, 8 черных и 6 красных шаров. Из обеих урн извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара белого цвета?

**Вариант 11**

**1.** В городе 3 коммерческих банка, оценка надежности которых – 0,95, 0,9 и 0,85 соответственно. В связи с определением хозяйственных перспектив развития города администрацию интересуют ответы на следующие вопросы:

а) какова вероятность того, что в течение года обанкротятся все три банка;

б) что обанкротится хотя бы один банк?

**2.** Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на 3 из 4 поставленных в билете вопросов. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?

**Вариант 12**

**1.** Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность того, что в течение смены выйдет из строя первый элемент равна 0,3; второй – 0,2; третий – 0,1. Найти вероятность того, что в течение смены:

а) произойдет сбой в одном из элементов устройства;

б) сбой произойдет не менее чем в двух элементах устройства.

**2.** Вероятность для компании, занимающейся строительством терминалов для аэропортов, получить контракт в стране А равна 0,4, вероятность выиграть его в стране В равна 0,3. Вероятность того, что контракты будут заключены и в стране А, и в стране В, равна 0,12. Чему равна вероятность того, что компания получит контракт хотя бы в одной стране?

**Вариант 13**

**1.** Батарея из трех орудий произвела залп. Вероятность промаха первого орудия равна 0,3; второго – 0,1, третьего – 0,4. Какова вероятность того, что:

а) в цель попало не более одного орудия;

б) в цель попало только два орудия?

**2.** В лотерее 30 билетов, из которых 5 выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея три билета?

**Вариант 14**

**1.** Три стрелка делают по одному выстрелу. Вероятность того, что промахнется первый стрелок, равна 0,1, второй -0,15, третий -0,2. Найти вероятность того, что:

а) в мишени окажутся только 2 пробоины;

б) в мишени окажется не более одной пробоины.

**2.** Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент не знает хотя бы один их трех предложенных ему вопросов.

**Вариант 15**

**1.** В ящике 15 деталей, из которых 5 окрашены. Сборщик взял наудачу три детали. Найти вероятность того:

а) среди них не менее двух окрашенных деталей;

б) хотя бы одна деталь окрашена.

**2.** О двух акциях А и В известно, что они выпущены одной и той же отраслью. Вероятность того, что акция А поднимется завтра в цене, равна 0,2. Вероятность того, что обе акции А и В поднимутся завтра в цене 0,12. Предположим, что вы знаете, что акция А поднимется в цене завтра. Чему равна вероятность того, что и акция В завтра поднимется в цене?

**Вариант 16**

**1.** Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком равна 0,2, вторым – 0,3. Первый стрелок сделал два выстрела, второй – один. Определить вероятность того, что:

а) цель поражена;

б) только второй стрелок поразит цель.

**2.** Только один из 8 ключей подходит к данной двери. Найти вероятность того, что придется опробовать не более трех ключей.

**Вариант 17**

**1.** Вероятность выхода из строя станка в течение одного рабочего дня равна 0,01. Какова вероятность того, что

а) за три рабочих дня станок ни разу не выйдет из строя;

б) за три рабочих дня станок выйдет из строя только один раз?

**2.** Для разрушения моста достаточно попадания одной авиабомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросили 4 бомбы, вероятность попадания которых соответственно равны: 0,7; 0,5; 0,5; 0,3.

**Вариант 18**

**1.** Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что наугад взятое изделие окажется бракованным, равна 0,15. Проверено три изделия. Какова вероятность того, что:

а) все изделия стандартные;

б) два из них бракованные?

**2.** Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. Найти вероятность того, что корреспондент услышит радиста.

**Вариант 19**

**1.** Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены его внимания потребует первый станок, равна 0,3; второй – 0,4; третий – 0,2. Найти вероятность того, что:

а) в течение смены внимания не потребует только один станок;

б) в течение смены внимания не потребуют не менее двух станков?

**2.** ЭВМ состоит из 3-х блоков, неисправность каждого из которых вызывает сбой в работе машины. Вероятность возникновения неисправности в течение часа в каждом из блоков равна, соответственно, 0,1; 0,1; 0,2. Определить вероятность сбоя ЭВМ в течение часа.

**Вариант 20**

**1.** Из партии изделий отбираются изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,3. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий:

а) только два будут высшего сорта;

б) хотя бы одно изделие будет высшего сорта.

**2.** В урне 2 белых, 3 черных, 5 красных шаров. Вынимают по очереди три шара. Определить вероятность того, что первый шар будет красного цвета, второй-белого, третий – черного цвета.

**Вариант 21**

**1.** В первом ящике 2 белых и 4 черных шара. Во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика наудачу вынули по шару. Какова вероятность того, что

а) оба шара белых;

б) шары разного цвета?

**2.** Вероятность попадания в мишень при трех выстрелах хотя бы один раз для некоторого стрелка равна 0,936. Найти вероятность попадания при одном выстреле, если она не меняется от выстрела к выстрелу.

**Вариант 22**

**1.** Спортсмен стреляет в мишень три раза с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,7. Какова вероятность того, что

а) стрелок лишь один раз попадет в мишень;

б) по крайней мере два выстрела будут удачными?

**2.** Город имеет 2 независимых резервных источника электроэнергии для использования в случае аварийного отключения постоянного источника электроэнергии. Вероятность того, что любой из 2-х резервных источников будет доступен при отключении постоянного источника, составляет 0,8. Какова вероятность того, что не произойдет аварийное отключение электроэнергии, если выйдет из строя постоянный источник?

**Вариант 23**

**1.** Для сигнализации об аварии установлено два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого и 0,9 для второго сигнализатора. Найти вероятность того, что при аварии сработает:

а) только один сигнализатор;

б) хотя бы один сигнализатор.

**2.** Три команды $A_1$, $A_2$, $A_3$ спортивного общества А состязаются соответственно с командами $B_1$, $B_2$, $B_3$ общества В. Вероятности того, что команды общества А выигрывают матчи у команд общества В равны: при встрече $A_1$ с $B_1$ -0,8, $A_2$ с $B_2$ -0,4, $A_3$ с $B_3$ – 0,4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьих не бывает). Победа какого общества вероятней?

**Вариант 24**

**1.** В ящике находится 20 деталей, из них 4 бракованных. Контролер берет наудачу одну за другой две детали. Какова вероятность того, что:

а) и первая, и вторая деталь окажутся небракованными;

б) одна из деталей будет бракованной?

**2.** Вытачивается деталь прибора в виде прямоугольного параллелепипеда. Деталь считается годной, если длина каждого из ее ребер отклоняется от заданных размеров не более, чем на 0,01мм. Вероятность отклонений, превышающих 0,01 мм, составляет по длине 0,08, по ширине 0,12, по высоте 0,1. Найти вероятность непригодности детали.

**Вариант 25**

**1.** Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула имеется в первом, втором и третьем справочнике, соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что:

а) студент найдет формулу только в одном справочнике;

б) по крайней мере в двух справочниках студент найдет нужную ему формулу.

**2.** Изготовление коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания состоит из трех последовательных операций: отливки изделия, грубой обработки (зачистки) и окончательной обработки. Качество изделия при переходе от одной операции к другой не проверяется. При отливке вала брак допускается с вероятностью 0,15; при грубой обработке – 0,12; при окончательной обработке – 0,08. Найти вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.

**Вариант 26**

**1.** Вероятность дозвониться с первой попытки в справочное бюро вокзала равна 0,4. Какова вероятность того, что:

а) удастся дозвониться при втором звонке;

б) придется звонить не более трех раз?

**2.** Покупатель ищет необходимую ему вещь, обходя три магазина. Вероятность наличия ее в каждом магазине равна 0,2. Что вероятнее – найдет он искомую вещь или нет?

**Вариант 27**

**1.** Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответит:

а) только один из них;

б) хотя бы один из студентов.

**2.** Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,35. Найти вероятность попадания при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,75.

**Вариант 28**

**1.** Для приема партии готовых изделий применяют выборочный контроль. Для этого берут наугад 3 изделия. Если среди них окажется:

а) хотя бы одно бракованное;

б) более одного бракованного, то бракуется вся партия.

Вычислить в обоих случаях вероятность того, что при таком способе контроля партия, состоящая из 46 стандартных изделий и 4 бракованных, будет принята.

**2.** Абонент забыл последнюю цифру телефона и набирает ее наугад. Какова вероятность того, что он дозвонится со второй попытки?

**Вариант 29**

**1.** ОТК проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие данной партии нестандартно, равно 0,1. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий:

а) только одно окажется нестандартным;

б) хотя бы одно окажется нестандартным.

**2.** В урне находится 3 белых, 4 желтых и 2 черных шара. Из нее наугад вынимают (без возвращения) один за другим по одному шару. Какова вероятность того, что белый шар появится раньше желтого?

**Вариант 30**

**1.** Студент знает 10 из 15 вопросов программы зачета. Экзаменатор задает ему вопросы до тех пор, пока не обнаруживает пробел в знаниях студента. Найти вероятность того, что будут заданы:

а) два вопроса;

б) более двух вопросов.

**2.** Найти вероятность того, что заказанный (в данный промежуток времени) междугородный разговор не состоится, если вероятность занятости всех каналов связи в этот промежуток равна 0,7, а вероятность отсутствия вызываемого абонента равна 0,4.

## ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БЕЙЕСА

Если известно, что событие $\mathbf{A}$ может произойти только совместно с одним из событий (гипотез) $\mathbf{H_1, H_2, \ldots, H_n}$, которые образуют полную группу попарно несовместных событий, то вероятность события $\mathbf{A}$ вычисляется по ***формуле полной вероятности***

$$\mathbf{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{Hi}(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\cdot P_{Hn}(A)},$$

где $\mathbf{P(H_i)}$ - вероятность гипотезы $\mathbf{H_i\ (i=1,2,\ldots,n)}$,

причем $\mathbf{P(H_1)+P(H_2)+\ldots+P(H_n)=1}$;

$\mathbf{P_{Hi}(A)}$ - условная вероятность события $\mathbf{A}$, т.е. вероятность события при условии, что произошла гипотеза $\mathbf{H_i\ (i=1,2,\ldots,n)}$.

Для определения вероятности гипотезы $\mathbf{H_i\ (i=1,2,\ldots,n)}$ при условии, что в результате опыта произошло событие $\mathbf{A}$, используется ***формула Бейеса***

$$\mathbf{P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{Hi}(A)}{P(A)}},$$

где $\mathbf{P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\cdot P_{Hn}(A)}$ – формула полной вероятности.

Формула Бейеса позволяет переоценить вероятности гипотез, принятых до опыта, после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие $\mathbf{A}$.

**Пример 1.** Два автомата изготавливают одинаковые детали. Известно, что первый автомат производит 30% всей продукции. Вероятность изготовления детали, соответствующей стандарту, первым автоматом равна 0,99, вторым – 0,98. Все изготовленные за смену детали складываются вместе. Определите вероятность того, что взятая наудачу деталь не соответствует стандарту.

**Решение.** Пусть событие $\mathbf{A}$ - взятая наудачу деталь не соответствует стандарту.

Гипотезы:

$\mathbf{H_1}$ - взятая деталь изготовлена первым автоматом;

$\mathbf{H_2}$ - взятая деталь изготовлена вторым автоматом.

События $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}$ - несовместны и образуют полную группу.

Вычислим вероятности гипотез.

$$\mathbf{P(H_1)=\tfrac{30}{100}=0{,}3;\quad P(H_2)=1-P(H_1)=1-0{,}3=0{,}7.}$$

Вычислим условные вероятности:

$\mathbf{P_{H_1}(A)}$ - вероятность изготовления детали не соответствующей стандарту автоматом;

$\mathbf{P_{H_2}(A)}$ - вероятность изготовления детали не соответствующей стандарту вторым автоматом.

$$\mathbf{P_{H_1}(A)=1-0{,}99=0{,}01;\quad P_{H_2}(A)=1-0{,}98=0{,}02.}$$

Вероятность события $\mathbf{A}$ находим по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=0{,}3\cdot 0{,}01+0{,}7\cdot 0{,}02=0{,}017.}$$

**Пример 2.** Имеются три урны. В первой урне 1 белый и 1 черный шар, во второй – 2 белых и 3 черных шара, в третьей – 4 белых и 7 черных шаров. Из выбранной наугад урны вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

**Решение.** Пусть событие $\mathbf{A}$ - извлечен белый шар.

Гипотезы:

$\mathbf{H_1}$ - выбрана первая урна;

$\mathbf{H_2}$ - выбрана вторая урна;

$\mathbf{H_3}$ - выбрана третья урна.

События $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ - попарно несовместны и образуют полную группу.

Поскольку всего имеется три гипотезы, причем выбор любой из урн равновозможен, и сумма вероятностей гипотез равна единице (так как они образуют полную группу событий), то вероятность каждой из гипотез равна $\frac{1}{3}$, т. е.

$$\mathbf{P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.}$$

Вычислим условные вероятности:

$\mathbf{P_{H_1}(A)}$ - вероятность извлечения белого шара из первой урны;

$\mathbf{P_{H_2}(A)}$ - вероятность извлечения белого шара из второй урны;

$\mathbf{P_{H_3}(A)}$ - вероятность извлечения белого шара из третьей урны.

$$\mathbf{P_{H_1}(A) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}; \quad P_{H_2}(A) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}; \quad P_{H_3}(A) = \frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}.}$$

Вероятность события $\mathbf{A}$ подсчитываем по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =}$$

$$\mathbf{= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{4}{11}\right) = \frac{139}{330} \approx 0{,}421}.$$

**Пример 3.** В супермаркет однотипные товары поставляются тремя фирмами в отношении 1:3:5. Среди продукции первой фирмы качественные товары составляют 90%, второй – 80%, третьей - 95%. Приобретенный товар оказался некачественным. Найти вероятность того, что оно является продукцией первой фирмы.

**Решение.** Пусть событие $\mathbf{A}$ - товар некачественный.

Гипотезы:

$\mathbf{H_1}$ - товар является продукцией первой фирмы;

$\mathbf{H_2}$ - товар является продукцией второй фирмы;

$\mathbf{H_3}$ - товар является продукцией третьей фирмы.

События $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ - попарно несовместны и образуют полную группу.

Известно, что товары поставляются тремя фирмами в отношении 1:3:5. Пусть коэффициент пропорциональности $\mathbf{k}$. Тогда первая фирма поставляет $\mathbf{k}$ товаров, вторая - $\mathbf{3k}$, третья - $\mathbf{5k}$.

Вероятность гипотез до появления события $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{P(H_1) = \frac{k}{k+3k+5k} = \frac{1}{9};\ P(H_2) = \frac{3k}{k+3k+5k} = \frac{1}{3};\ P(H_3) = \frac{5k}{k+3k+5k} = \frac{5}{9}.}$$

Условные вероятности:

$\mathbf{P_{H_1}(A)}$ - вероятность того, что продукция первой фирмы некачественная;

$\mathbf{P_{H_2}(A)}$ - вероятность того, что продукция второй фирмы некачественная;

$\mathbf{P_{H_3}(A)}$ - вероятность того, что продукция третьей фирмы некачественная.

$$\mathbf{P_{H_1}(A) = 1 - \frac{90}{100} = 0{,}1;\ P_{H_1}(A) = 1 - \frac{80}{100} = 0{,}2;\ P_{H_1}(A) = 1 - \frac{95}{100} = 0{,}05.}$$

Вероятность события $\mathbf{A}$ находим по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) =}$$

$$\mathbf{= \frac{1}{9}\cdot 0{,}1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}2 + \frac{5}{9}\cdot 0{,}05 \approx 0{,}106}.$$

Искомая вероятность того, что приобретенный некачественный товар является продукцией первой фирмы, вычисляется по формуле Бейеса

$$\mathbf{P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}\cdot 0{,}1}{0{,}106} \approx 0{,}105}.$$

**Пример 4.** Страховая компания разделяет застрахованных по трем классам риска: 1 класс – малый риск, 2 класс – средний, 3 класс – большой риск. Среди всех клиентов компании клиентов первого класса риска в два раза больше, чем второго и в три раза больше, чем третьего. Вероятность наступления страхового случая для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что клиент, получивший денежное вознаграждение за период страхования, относится к группе среднего риска?

**Решение.** Пусть событие $\mathbf{A}$ - клиент получил денежное вознаграждение за период страхования.

Гипотезы:

$\mathbf{H_1}$ - клиент относится к группе малого риска;

$\mathbf{H_2}$ - клиент относится к группе среднего риска;

$\mathbf{H_3}$ - клиент относится к группе большого риска.

События $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ - попарно несовместны и образуют полную группу.

Пусть вероятность того, что клиент компании относится к группе малого риска $\mathbf{P(H_1) = p}$. Так как среди всех клиентов компании клиентов первого класса риска в два раза больше, чем второго и в три раза больше, чем третьего, то вероятности гипотез $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ будут равны: $\mathbf{P(H_2)=\frac{p}{2}}$; $\mathbf{P(H_3)=\frac{p}{3}}$. Поскольку гипотезы образуют полную группу событий, то $\mathbf{P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1}$. Тогда $\mathbf{p+\frac{p}{2}+\frac{p}{3}=1}$. Следовательно, $\mathbf{p=\frac{6}{11}}$. Таким образом,

$$\mathbf{P(H_1)=\frac{6}{11}, P(H_2)=\frac{3}{11}, P(H_3)=\frac{2}{11}}.$$

Условные вероятности:

$\mathbf{P_{H_1}(A)}$ - вероятность получения страховки клиентом 1- го класса;

$\mathbf{P_{H_2}(A)}$ - вероятность получения страховки клиентом 2 - го класса;

$\mathbf{P_{H_3}(A)}$ - вероятность получения страховки клиентом 3 - го класса.

$$\mathbf{P_{H_1}(A)=0{,}01;\quad P_{H_2}(A)=0{,}03;\quad P_{H_3}(A)=0{,}08}.$$

Вероятность события $\mathbf{A}$ подсчитываем по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=}$$

$$\mathbf{=\frac{6}{11}\cdot 0{,}01+\frac{3}{11}\cdot 0{,}03+\frac{2}{11}\cdot 0{,}08\approx 0{,}028}.$$

Искомая вероятность того, что клиент, получивший денежное вознаграждение за период страхования, относится к группе среднего риска, вычисляется по формуле Бейеса

$$\mathbf{P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{11}\cdot 0{,}03}{0{,}028}\approx 0{,}292}.$$

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 4
## (Формула полной вероятности. Формула Бейеса)

### Вариант 1

**1.** Для контроля продукции из 3-х партий деталей взята для испытания одна деталь. Деталь с равной вероятностью может быть взята из каждой партии. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 2/3 деталей бракованных, а в 2-х других - все стандартные?

**2.** Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависит от их местоположения, и находятся в отношении 1:2:2. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы 0,3, для второй - 0,4, для третьей - 0,5. Пассажир направился в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

**Вариант 2**

**1.** Среди студентов института - 30% первокурсники, 35% студентов учатся на 2-м курсе, на 3-м и 4-м курсе их 20% и 15% соответственно. По данным деканатов известно, что на первом курсе 20% студентов сдали сессию только на отличные оценки, на 2-м - 30%, на 3-м - 35%, на 4-м - 40% отличников. Наудачу вызванный студент оказался отличником. Чему равна вероятность того, что он (или она) - третьекурсник?
**2.** При разрыве снаряда образуется крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1:3:6. При попадании в бронетранспортер, крупный осколок пробивает броню с вероятностью – 0,9, средний – 0,3, мелкий – 0,1. Какова вероятность, что попавший в броню осколок пробьет броню?

**Вариант 3**

**1.** Приборы одного наименования изготовляются двумя заводами. 1-ый завод поставляет 2/3 всех приборов, 2-ой – 1/3. Надежность приборов 1-го завода 0,95, а 2-го - 0,92. Найти надежность прибора, поступающего в продажу.
**2.** Игроки могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В одной игре используется одна игральная кость, а в другой – две. Счёт в игре в первом случае равен количеству очков, выпавших на кости, а во втором – сумме очков, выпавших на обеих костях. Вы слышите, что выпало два очка. Какова вероятность, что играют в игру с одной костью?

**Вариант 4**

**1.** На трёх дочерей Аню, Катю и Анфису в семье возложена обязанность по мытью тарелок. Аня, как старшая, выполняет 40% всей работы, остальную работу Катя и Анфиса делят пополам. Вероятность того, что Аня может разбить тарелку равна 0,02, для Кати и Анфисы эта вероятность равна 0,03 и 0,02 соответственно. Родители слышали звон разбитой посуды. Какова вероятность, что тарелки мыла Аня?
**2.** При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире», эти сигналы встречаются в соотношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

**Вариант 5**

**1.** На книжной полке 4 книги являются детективами, 6 – романы, а 10 – фантастика. Вероятность того, что книга понравится, равна: для детектива – 0,8, для романа – 0,6, для фантастики – 0,35. В дорогу выбирается первая попавшаяся книга. Чему равна вероятность того, что она понравится?

**2.** При отклонении от нормы режима работы автомата срабатывает сигнализатор С1 с вероятностью 0,8, а С2 - с вероятностью 0,4. Вероятность того, что автомат снабжен сигнализатором С1 равна 0,6, а С2 - 0,4. Получен сигнал о разладе автомата. Какова вероятность того, что автомат снабжен сигнализатором С1?

**Вариант 6**

**1.** В группе спортсменов - 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна для лыжника 0,9; для велосипедиста -0,8; для бегуна - 0,75. Вызванный наудачу спортсмен норму выполнил. Найти вероятность того, что это бегун.
**2.** Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,67. Вероятность того, что товар будет пользоваться спросом при наличии на рынке конкурирующего товара, равна 0,42. Вероятность того, что конкурирующая фирма выпустит аналогичный товар на рынок в течение интересующего нас периода, равна 0,35. Чему равна вероятность того, что товар будет иметь успех?

**Вариант 7**

**1.** Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: класс А (мало рискует), класс В (рискует средне), класс С (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у нее, 30% принадлежат к классу А, 50% - к классу В, 20% - к классу С. Вероятность попасть в автомобильную катастрофу в течение 12 месяцев для класса А равна 0,01, для класса В – 0,03, для класса С – 0,1. Некто страхует свою машину в этой компании и в течение 12 месяцев попадает в аварию. Какова вероятность того, что он относится к классу А?
**2.** В трех корзинах в детском саду лежат игрушки. В первой 5 зайчиков и 3 собачки, во второй – 8 зайчиков и 3 собачки и в третьей – 7 зайчиков и 2 собачки. Ребенок подошел к наугад выбранной корзине и взял игрушку. Какова вероятность, что это собачка?

**Вариант 8**

**1.** Экономист-аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на «хорошую», «посредственную» и «плохую» и оценивает их вероятности для данного момента времени в 0,15; 0,7 и 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает с вероятностью 0,6, когда ситуация «хорошая»; с вероятностью 0,3, когда ситуация «посредственная», и с вероятностью 0,1, когда ситуация «плохая». Пусть в настоящий момент индекс экономического состояния возрос. Чему равна вероятность того, что экономика страны на подъеме?

**2.** На сборку поступают изделия с трех автоматов. Первый дает в среднем 0,2% брака, второй – 0,1% и третий – 0,5%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если отношение числа деталей, произведенных на трех автоматах 2:3:3.

**Вариант 9**

**1.** Из 1000 ламп 200 принадлежит 1-ой партии, 300 - 2-ой, 500 - 3-ей. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Определить вероятность того, что наудачу выбранная лампа будет бракованной.

**2.** Сообщение можно передать письмом, по телефону и по факсу с одинаковой вероятностью. Вероятности того, что сообщение дойдет до получателя в каждой из перечисленных возможностей соответственно равны 0,7, 0,6 и 0,9. Сообщение адресатом получено. Какова вероятность, что оно передано по факсу?

**Вариант 10**

**1.** В группе 25 студентов: 4 отличника, 9 хорошистов, остальные - троечники. Вероятность получения оценки “отлично” на экзамене по математике для первых – 0,95, для вторых – 0,7, для троечников – 0,3. Студент получил пятерку на экзамене. Найти вероятность, что он хорошист.

**2.** При слиянии акционерного капитала двух фирм аналитики фирмы, получающей контрольный пакет акций, полагают, что сделка принесет успех с вероятностью, равной 0,65, если председатель совета директоров поглощаемой фирмы выйдет в отставку; если он откажется, то вероятность успеха будет равна 0,3. Предполагается, что вероятность ухода в отставку председателя составляет 0,7. Чему равна вероятность успеха сделки?

**Вариант 11**

**1.** Имеются три одинаковых ящика. В первом ящике лежат 2 белых и 2 чёрных шара; во втором ящике - 3 чёрных; в третьем - 1 чёрный и 5 белых. Некто, случайным образом выбирая ящик, наугад вынимает из него шар. Какова вероятность, что шар будет белый?

**2.** На факультете юношей в три раза больше, чем девушек. 80% студентов и 75% девушек имеют пригласительные билеты на факультетский вечер. В деканат принесли кем-то потерянный билет. Какова вероятность того, что он принадлежит юноше?

**Вариант 12**

**1.** Приборы одного наименования изготавливаются тремя заводами: первый поставляет в два раза больше, чем второй, третий в три раза меньше, чем второй. Вероятность безотказной работы прибора в течение гарантированного срока равна 0,8 для первого завода, 0,85 для второго и 0,9 для третьего. Наудачу взятый прибор выдержал гарантийный срок. Найти вероятность того, что он изготовлен на втором заводе.
**2.** Агент по недвижимости пытается продать участок земли под застройку. Он полагает, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев с вероятностью 0,9, если экономическая ситуация в регионе не будет ухудшаться. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то вероятность продать участок составит 0,5. Экономист, консультирующий агента, полагает, что с вероятностью, равной 0,7, экономическая ситуация в регионе в течение следующих 6 месяцев будет ухудшаться. Чему равна вероятность того, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев?

**Вариант 13**

**1.** Из числа авиалиний некоторого аэропорта 60% -местные, 30% -по СНГ и 10% -международные. Среди пассажиров местных авиалиний 50% путешествуют по делам, связанным с бизнесом, на линиях СНГ таких пассажиров 60%, на международных - 90%. Из прибывших в аэропорт пассажиров случайно выбирается один. Чему равна вероятность того, что он бизнесмен.
**2.** Первый станок производит в три раза меньше болтов, чем второй. В продукции первого станка брак составляет 2%, а в продукции второго – 3%. Выбранный наудачу болт оказался годным. Какова вероятность того, что он произведен первым станком?

**Вариант 14**

**1.** Три хлебокомбината города производят продукцию, обеспечивающую город хлебобулочными изделиями в пропорции 2:3:5. Первый хлебокомбинат производит 30% продукции высшего качества, второй - 40%, третий - 60%. Приобретенный продукт оказался высшего качества. Найти вероятность того, что это изделие изготовлено на втором хлебокомбинате.
**2.** Прибор может работать в трех режимах: нормальном, форсированном и недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 70% случаев работы прибора, форсированный - в 20%, недогруженный - в 10%. Надежность прибора (вероятность безотказной работы в течение заданного времени $t$) для нормального режима равна 0,8, для форсированного - 0,5, для недогруженного-0,9. Найти полную (с учетом случайности условий) надежность прибора.

**Вариант 15**

**1.** Среди поступающих на сборку деталей с первого автомата – 1% бракованных, со второго автомата – 2%, с третьего – 2%, с четвертого – 3%. Производительности автоматов относятся, как 4:3:2:1 соответственно. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется стандартной.

**2.** Исследованиями психологов установлено, что мужчины и женщины поразному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследований показали, что 70% женщин позитивно реагируют на изучаемый круг ситуаций, в то время как 40% мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность того, что ее заполнял мужчина?

**Вариант 16**

**1.** Судоходная компания организует средиземноморские круизы в течение летнего периода и проводит несколько круизов в сезон. Поскольку в этом виде бизнеса очень высокая конкуренция, то важно, чтобы все каюты зафрахтованного под круизы корабля были полностью заняты туристами, тогда компания получит прибыль. Эксперт по туризму, нанятый компанией, предсказывает, что вероятность того, что корабль будет полон в течение сезона, будет равна 0,92, если доллар не подорожает по отношению к рублю, и с вероятностью - 0,75, если доллар подорожает. По оценкам экономистов, вероятность того, что в течение сезона доллар подорожает по отношению к рублю, равна 0,23. Чему равна вероятность того, что билеты на все круизы будут проданы?

**2.** Из 18 стрелков пять попадают в цель с вероятностью 0,8; семь – с 0,7; четыре - с 0,6 и два - с 0,5. Наудачу выбранный стрелок промахнулся. Какова вероятность того, что он принадлежал к группе, которая имела наибольшую вероятность попадания?

**Вариант 17**

**1.** Завод получает 45% деталей завода №1, 30% – завода №2, 25% – завода №3. Вероятность того, что деталь 1-ого завода отличного качества равна 0,7; для 2-ого и 3-его завода эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Сборщик берет наудачу одну деталь. Какова вероятность, что она отличного качества?

**2.** В сборной по футболу 7 игроков из «Спартака», 8 – из «Динамо», 6 – из «Локомотива» и 4 – из ЦСКА. Статистикой установлено, что вероятность забить гол в играх сборной для спартаковца составляет 0,5, для динамовца -0,4, для железнодорожника - 0,35 и для армейца - 0,3. В матче нашими футболистами забит один гол. Какова вероятность того, что его забил игрок «Спартака»?

**Вариант 18**

**1.** Противник использует самолеты пяти типов. Известно, что на данном участке фронта сосредоточено примерно равное числе самолетов каждого типа. Вероятности сбить самолет при проходе над оборонительной зоной соответственно равны для них 0,6, 0,3, 0,2, 0,1, 0,1. Самолет противника, прорывавшийся через оборонительную зону, сбит. Чему равна вероятность того, что это самолет первого типа?
**2.** Транснациональная компания обсуждает возможности инвестиций в некоторое государство с неустойчивой политической ситуацией. Менеджеры компании считают, что успех предполагаемых инвестиций зависит, в частности, и от политического климата в стране, в которую предполагается вливание инвестиционных средств. Менеджеры оценивают вероятность успеха в 0,55, если преобладающая политическая ситуация будет благоприятной; в 0,3, если политическая ситуация будет нейтральной; в 0,1, если политическая ситуация в течение года будет неблагоприятной. Менеджеры компании также полагают, что вероятности благоприятной, нейтральной и неблагоприятной политических ситуаций соответственно равны: 0,6, 0,2 и 0,2. Чему равна вероятность успеха инвестиций?

**Вариант 19**

**1.** В магазин поступили однотипные изделия с 3-х заводов, причем 1-й завод поставляет 20% изделий, 2-ой - 30%, 3-й - 50%. Среди изделий 1-го завода 80%, 2-го - 60%, 3-го - 50% первосортных. Определить вероятность купить первосортное изделие.
**2.** В компьютерном классе института 7 IBM типа Pentium и 5 компьютеров других модификаций. Вероятность сбоя в работе в течение учебного занятия для Pentium равна 0,2, для других компьютеров – 0,3. Студент на занятии работает за произвольно выбранным компьютером. На занятии компьютер дал сбой в работе. Найти вероятность того, что студент работал на Pentium.

**Вариант 20**

**1.** Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса - 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?
**2.** Из 4-х игральных костей одна фальшивая, на ней 6 очков выпадает с вероятностью 1/3. При бросании случайно выбранной кости выпала шестёрка. Какова вероятность того, что была выбрана фальшивая кость?

**Вариант 21**

**1.** Вероятность того, что в некотором производстве изделие удовлетворяет стандарту, равна 0,96. Предполагается упрощенная система испытаний, которая для стандартных изделий дает положительный результат с вероятностью 0,98, а для изделий, не удовлетворяющих стандарту, с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее испытание, удовлетворяет стандарту?
**2.** Была проведена одна и та же контрольная работа в трех параллельных группах. В 1-й группе, где 30 учащихся, оказалось 8 работ, выполненных на «отлично»; во 2-й, где 28 учащихся, - 6 работ; в 3-й, где 27 учащихся, - 9 работ. Найти вероятность того, что первая взятая наудачу при повторной проверке работа (из работ, принадлежащих группе, которая также выбрана наудачу) окажется выполненной на «отлично».

**Вариант 22**

**1.** В корпорации обсуждается маркетинг нового продукта, выпускаемого на рынок. Исполнительный директор корпорации желал бы, чтобы новый товар превосходил по своим характеристикам соответствующие товары конкурирующих фирм. Основываясь на предварительных оценках экспертов, он определяет вероятность того, что новый товар более высокого качества по сравнению с аналогичными в 0,5, такого же качества - в 0,3, хуже по качеству - в 0,2. Опрос рынка показал, что новый товар конкурентоспособен. Из предыдущего опыта проведения опросов следует, что если товар действительно конкурентоспособный, то предсказание такого же вывода имеет вероятность, равную 0,7. Если товар такой же, как и аналогичные, то вероятность того, что опрос укажет на его превосходство, равна 0,4. И если товар более низкого качества, то вероятность того, что опрос укажет на его конкурентоспособность, равна 0,2. С учетом результата опроса оцените вероятность того, что товар действительно более высокого качества.
**2.** В тире имеется 5 винтовок, вероятности попаданий из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одну из винтовок наудачу.

**Вариант 23**

**1.** Экспортно-импортная фирма собирается заключить контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из развивающихся стран. Если основной конкурент фирмы не станет одновременно претендовать на заключение контракта, то вероятность получения контракта оценивается в 0,45; в противном случае - в 0,25. По оценкам экспертов компании вероятность того, что конкурент выдвинет свои предложения по заключению контракта, равна 0,4. Чему равна вероятность заключения контракта?

**2.** Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность 1-го автомата вдвое больше производительности 2-го. 1-й автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а 2-й - 84% деталей отличного качества. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена 1-м автоматом.

**Вариант 24**

**1.** Половина всех арбузов поступает в магазин с 1 - ой базы, 1/3 - со 2 - ой базы, остальные - с 3 - ей базы. Арбузы с повышенным содержанием нитратов составляют на 1 - ой базе 15%, на 2 - ой базе - 10%, на 3 - ей - 20%. Какова вероятность купить недоброкачественный арбуз?

**2.** Первая урна содержит 3 красных, 2 белых и 1 синий шар. Вторая урна содержит 4 белых и 2 синих шара. Бросается игральная кость. Если на ней выпало 1 или 6 очков, вынимается шар из первой урны, в противном случае – из второй. Вытащен синий шар. Какова вероятность, что он взят из второй урны?

**Вариант 25**

**1.** Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4 студента, из второй - 6 студентов, из третьей - 5. Вероятности того, что студент из первой, второй, третьей групп попадет в сборную института соответственно равны 0,9; 0,7; 0,8. Один из отобранных студентов попал в сборную команду. Какова вероятность, что он принадлежит к первой группе?

**2.** Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: № 1 (мало рискует), № 2 (рискует средне), №3 (рискует сильно). Агентство предполагает, что из всех водителей, застраховавших автомобили, 30% принадлежат к классу №1, 50% -к классу №2 и 20%-к классу № 3. Вероятность того, что в течение года водитель класса № 1 попадет хотя бы в одну аварию, равна 0,01. для водителя класса № 2 эта вероятность равна 0,02, а для водителя класса №3 - 0,08. Найти вероятность того, что водитель, застраховавший свою машину, не попадет в аварию течение года.

**Вариант 26**

**1.** Двигатель работает в нормальном режиме в 80% случаев и в форсированном – в 20% случаев. Вероятность выхода из строя двигателя за время t в нормальном режиме равна 0,1, в форсированном – 0,7. За время работы двигатель не вышел из строя. Найти вероятность того, что двигатель работал в форсированном режиме.

**2.** В студенческом стройотряде 2 бригады первокурсников и одна второкурсников. В каждой бригаде первокурсников 5 юношей и 3 девушки, а в бригаде второкурсников 4 юноши и 4 девушки. Из наудачу выбранной бригады назначили одного человека для поездки в город. Какова вероятность того, что выбран юноша?

**Вариант 27**

**1.** В пирамиде 60% винтовок, которые снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; из винтовки без оптического прицела - 0,7. Выстрелив, стрелок поразил мишень. Найти вероятность того, что он стрелял из винтовки с оптическим прицелом.

**2.** В составе Думы представлены 3 партии: 100, 150, 50 человек от 1-й, 2-й и 3-й партий соответственно. Кандидата на должность спикера Думы поддерживают 50% представителей первой партии, 70% - второй партии и 10% - третьей партии. Какова вероятность того, что наудачу выбранный член Думы поддерживает выдвинутую кандидатуру на должность спикера Думы?

**Вариант 28**

**1.** 30% телевизоров поступает в магазин с первой фабрики, 20% со второй и остальные с третьей. Брак на этих фабриках составляет 5%, 3% и 4% соответственно. Купленный телевизор оказался бракованным. Какова вероятность того, что он поступил с третьей фабрики?

**2.** Имеется две одинаковых на вид урны. В первой урне содержится 4 белых и 1 черный, во второй – 3 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наудачу одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

**Вариант 29**

**1.** Студент, живущий в пригороде, может возвращаться домой на автобусе или электричке. В 80% случаев студент выбирает автобус, в 20% -электричку. Если он едет на автобусе, то в 75% возвращается домой к 6 вечера, если же он едет на электричке, то только в 70% случаев возвращается домой к 6 вечера. Однажды студент вернулся домой к шести часам вечера. Какова вероятность, что он ехал на электричке?

**2.** Рабочий обслуживает три станка. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго – 0,03 и для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в 3 раза больше, чем второго, а третьего в 2 раза меньше, чем второго. Найти вероятность того, что наудачу взятая из ящика деталь оказалась бракованной.

**Вариант 30**

**1.** В ОТК работают мастер, проверяющий 80% изготовленных изделий, и ученик, проверяющий 20% изделий. Мастер замечает брак в 95% случаев, тогда как ученик - в 90% случаев. Изделие, прошедшее контроль, оказалось дефектным и возвращено покупателем. Какова вероятность, что изделие проверял ученик?
**2.** Для приема зачета преподаватель приготовил 50 задач по дифференциальному исчислению и 30 задач по интегральному исчислению. Для сдачи зачета студент должен решить доставшуюся ему наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он умеет решать 39 задач по дифференциальному исчислению и 25 - по интегральному?

## ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Пусть производится $\mathbf{n}$ независимых однотипных испытаний, в каждом из которых событие $\mathbf{A}$ может появиться с вероятностью $\mathbf{p}$. Тогда вероятность непоявления события $\mathbf{A}$, т.е. $\mathbf{P(\overline{A})}$, равна $\mathbf{q = 1 - p}$.

Вероятность того, что событие $\mathbf{A}$ произойдет в этих $\mathbf{n}$ независимых испытаниях ровно $\mathbf{k}$ раз (безразлично в какой последовательности), можно вычислить по ***формуле Бернулли***

$$\mathbf{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}}.$$

Вероятность того, что в $\mathbf{n}$ испытаниях событие наступит:

а) ***менее*** $\mathbf{k}$ ***раз***: $\mathbf{P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1)}$;
б) ***более*** $\mathbf{k}$ ***раз***: $\mathbf{P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n)}$;
в) ***не менее*** $\mathbf{k}$ ***раз***: $\mathbf{P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)}$;
г) ***не более*** $\mathbf{k}$ ***раз***: $\mathbf{P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)}$.

**Пример 1.** Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 1/5. Вы купили 5 билетов. Найти вероятность того, что а) четыре билета выигрышные; б) хотя бы один билет выигрышный; в) более трех билетов выигрышные.

**Решение.** Пусть событие $\mathbf{A}$ - выигрыш по лотерейному билету. Число лотерейных билетов $\mathbf{n = 5}$. $\mathbf{P(A)}$ - вероятность выигрыша по лотерейному билету: $\mathbf{p = P(A) = \frac{1}{5}}$**.** Тогда $\mathbf{q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}}$.

а) Вероятность того, что выигрышными будут четыре билета ($\mathbf{k = 4}$)

$$\mathbf{P_5(4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 = 5 \cdot \frac{1}{625} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{625} = 0{,}0064}.$$

б) Пусть событие $\mathbf{B}$ – хотя бы один из купленных билетов выигрышный. Рассмотрим событие $\mathbf{\overline{B}}$, противоположное событию $\mathbf{B}$:

$\mathbf{\overline{B}}$ - среди купленных билетов нет выигрышных.

$$\mathbf{P(\overline{B}) = P_5(0) = C_5^0 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1024}{3125} = 0{,}32768}.$$

Теперь вычислим вероятность искомого события:

$$\mathbf{P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}32768 = 0{,}67232}.$$

в) Вероятность того, что выигрышными будут более трех билетов (т.е. или четыре, или пять)

$$\mathbf{P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 + C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 0{,}00672}.$$

**Пример 2.** Студент для прохождения тестирования по математике должен решить 18 из 20 задач. Он правильно решил 15 задач, а на остальные из-за нехватки времени отвечает наугад. Какова вероятность пройти тестирование, если в каждой задаче дается четыре варианта ответа и только один из них правильный?

**Решение.** Пусть событие $\mathbf{A}$ - студент наугад правильно выберет вариант ответа в задаче тестирования, $\mathbf{p = P(A) = \frac{1}{4}}$, $\mathbf{q = P(\overline{A}) = \frac{3}{4}}$. Так как студент правильно решил 15 задач, то ещё остается 5 заданий и для прохождения тестирования ему необходимо правильно указать ответ для не менее трех из них. Вероятность пройти тестирование:

$$\mathbf{P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \approx}$$

$$\mathbf{\approx 0{,}1025}.$$

# СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

***Случайной величиной*** называется величина, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Приведем некоторые примеры случайных величин.

1) Число очков, выпадающих на игральной кости. Эта величина может принимать одно из следующих значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
2) Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, …, 100.
3) Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b).

Случайные величины в дальнейшем будем обозначать большими буквами $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ а их возможные значения – соответственно строчными буквами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Например, $\mathbf{X}$ – число попаданий при трех выстрелах. Возможные значения этой случайной величины: $\mathbf{x_1}=0$, $\mathbf{x_2}=1$, $\mathbf{x_3}=2$, $\mathbf{x_4}=3$.

Случайная величина называется ***дискретной***, если её возможные значения есть отдельные изолированные числа (т. е. между двумя соседними возможными значениями нет других значений). Дискретная случайная величина принимает эти значения с определенными вероятностями.

Из приведенных выше случайных величин дискретными являются случайные величины примеров 1, 2.

Бывают случайные величины, которые принимают значения из некоторого интервала.

К таким величинам относится случайная величина примера 3.

Чтобы охарактеризовать дискретную случайную величину $\mathbf{X}$, следует указать её возможные значения $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, …, $\mathbf{x_n}$ и вероятности событий, состоящих в том, что случайная величина $\mathbf{X}$ приняла значение $\mathbf{x_i}$:

$$\mathbf{p_i = P(\,X = x_i)},\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

В результате испытания произойдет только одно из полной группы событий: $\mathbf{X{=}x_1}$, $\mathbf{X{=}x_2}$, …, $\mathbf{X{=}x_n}$. Поскольку сумма вероятностей полной группы попарно несовместных событий равна 1, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{p_i} = \mathbf{1}$.

***Законом распределения*** дискретной случайной величины называют соответствие между возможными её значениями и их вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения удобно записывать в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения $\mathbf{x_i}$, а вторая – их вероятности $\mathbf{p_i}$:

| $\mathbf{X}$ | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | … | $\mathbf{x_n}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}$ | $\mathbf{p_1}$ | $\mathbf{p_2}$ | … | $\mathbf{p_n}$ |

Эта таблица называется ***рядом распределения***.

Пусть **x** – некоторое действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что **X** примет значение меньше **x**, обозначим через **F(x)**, т. е. $\mathbf{F(x) = P(X < x)}$.

Функция **F(x)** называется ***функцией распределения*** случайной величины **X**.

Случайная величина называется ***непрерывной***, если её функция распределения непрерывна и кусочно-дифференцируема.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

**1.** Значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]:

$$\mathbf{0 \le F(x) \le 1}.$$

**2.** Функция распределения есть неубывающая функция:

$$\mathbf{F(x_2) \ge F(x_1)}, \text{ если } \mathbf{x_2 > x_1}.$$

**3.** Вероятность того, что случайная величина **X** примет значение, принадлежащее интервалу **(a, b)**, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$\mathbf{P\ (a < X < b) = F\ (b) - F\ (a)}.$$

**4.**Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} \mathbf{F(x) = 0}, \quad \lim_{x \to +\infty} \mathbf{F(x) = 1}.$$

***Плотностью распределения вероятностей*** непрерывной случайной величины **X** называют первую производную от функции распределения:

$$\mathbf{f(x) = F'(x)}.$$

Зная плотность распределения **f(x)**, можно найти функцию распределения **F(x)** по формуле

$$\mathbf{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}.$$

Свойства плотности распределения:

**1.** Плотность распределения неотрицательна, т. е.

$$\mathbf{f(x) \ge 0}.$$

**2.** Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от – ∞ до ∞ равен единице:

$$\mathbf{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1}.$$

**3.** Вероятность того, что непрерывная случайная величина **X** примет значение, принадлежащее интервалу **(a, b)**, определяется равенством

$$\mathbf{P\ (a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx}.$$

## Числовые характеристики случайных величин

Для решения многих практических задач совсем необязательно знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а достаточно указать отдельные числовые параметры, которые позволяют отразить существенные особенности случайной величины.

***Математическим ожиданием дискретной случайной величины*** называют сумму произведений всех её возможных значений на соответствующие им вероятности: $\mathbf{M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}$.

***Математическое ожидание непрерывной случайной величины***, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$\mathbf{M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}.$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

**1.** Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$\mathbf{M\,(C) = C}.$$

**2.** Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$\mathbf{M\,(CX) = CM(X)}.$$

**3.** Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин равно сумме (разности) математических ожиданий этих величин:

$$\mathbf{M(X \pm Y) = M(X) \pm M\,(Y)}.$$

**4.** Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$\mathbf{M\,(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)}.$$

***Дисперсией*** случайной величины **X** называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$\mathbf{D(X) = M(X - M(X))^2}.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$\mathbf{D(X) = M(X^2) - (M(X))^2}.$$

Если **X** является **дискретной** случайной величиной, то

$$\mathbf{D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i} \quad \text{или} \quad \mathbf{D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (M(X))^2}.$$

Для **непрерывной** случайной величины

$$\mathbf{D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx} \quad \text{или} \quad \mathbf{D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2}.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

**1.** Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$\mathbf{D\,(C) = 0}.$$

**2.** Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$\mathbf{D\,(CX) = C^2 D(X)}.$$

**3.** Дисперсия суммы или разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$\mathbf{D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)}.$$

***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины называют квадратный корень из дисперсии: $\mathbf{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$.

## ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

**Пример 1.** Независимые испытания производятся до тех пор, пока не появится событие А. Вероятность появления события А в каждом испытании 0,7. Максимальное число испытаний – 3. Составить ряд распределения числа произведенных испытаний. Найти числовые характеристики этой случайной величины. Какова вероятность, что произойдет не более двух испытаний?

**Решение.** Случайная величина **X** – число произведенных испытаний – может принимать следующие значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Случайная величина **X** примет значение $x_1=1$, когда событие А произойдет в первом испытании.

$$P(X=1)=P(A)=0{,}7.$$

Случайная величина **X** примет значение $x_2=2$, если событие А не произойдет в первом испытании, но произойдет во втором.

$$P(X=2)=P(\overline{A}\cdot A)=0{,}3\cdot 0{,}7=0{,}21.$$

Случайная величина **X** примет значение $x_3=3$, если событие А не появиться ни при первом, ни при втором испытании. Так как число испытаний не более трех, то не важно произойдет событие **А** в третьем испытании или нет.

$$P(X=3)=P(\overline{A}\cdot\overline{A})=0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}09.$$

Составим ряд распределения случайной величины **X**.

| X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,21 | 0,09 |

Проверим тождество $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Действительно, **0,7+0,21+0,09=1**.

Найдем числовые характеристики случайной величины **X**.

$$M(X)=1\cdot 0{,}7+2\cdot 0{,}21+3\cdot 0{,}09=1{,}39.$$

Для вычисления дисперсии применим формулу

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Составим ряд распределения случайной величины $X^2$:

| $X^2$ | 1 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,21 | 0,09 |

Найдем математическое ожидание случайной величины $X^2$:

$$M(X^2)=1\cdot 0{,}7+4\cdot 0{,}21+9\cdot 0{,}09=2{,}35.$$

$$D(X)=2{,}35-(1{,}39)^2=2{,}35-1{,}9321=0{,}4179.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}4179}\approx 0{,}646.$$

Пусть событие **B –** произойдет не более двух испытаний, т. е. произойдет или одно, или два испытания.

$$P(B)=P(X=1)+P(X=2)=0{,}7+0{,}21=0{,}91.$$

**Пример 2.** Производится два независимых опыта, в каждом из которых с вероятностью 0,2; 0,4 соответственно может появиться случайное событие А. Составить ряд распределения числа появлений события А. Найти числовые характеристики этой случайной величины. Чему равна вероятность того, что в результате проведения двух опытов событие А появится не менее одного раза?

**Решение.** Дискретная случайная величина **X** (число появлений события А) имеет следующие возможные значения:

$\mathbf{x_1=0}$ (событие А не появится ни разу),
$\mathbf{x_2=1}$ (событие А появится один раз),
$\mathbf{x_3=2}$ (событие А появится два раза).

Пусть $\mathbf{A_1}$ – событие А появится в первом опыте, $\mathbf{P(A_1)=0,2}$, $\mathbf{P(\overline{A_1})=0,8}$;

$\mathbf{A_2}$ – событие А появится во втором опыте, $\mathbf{P(A_2)=0,4}$, $\mathbf{P(\overline{A_2})=0,6}$.

События $\mathbf{A_1, A_2}$ - независимые.

Тогда

$$\mathbf{P(X=0)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=0,8\cdot 0,6=0,48},$$

$$\mathbf{P(X=1)=P(A_1\cdot\overline{A_2}+\overline{A_1}\cdot A_2)=0,2\cdot 0,6+0,8\cdot 0,4=0,44},$$

$$\mathbf{P(X=2)=P(A_1\cdot A_2)=0,2\cdot 0,4=0,08}.$$

Составим искомый ряд распределения.

| **X** | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|
| **P** | **0,48** | **0,44** | **0,08** |

Контроль: **0,48+0,44+0,08=1.**

Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений **X** на соответствующие вероятности:

$$\mathbf{M(X)=0\cdot 0,48+1\cdot 0,44+2\cdot 0,08=0,6}.$$

Напишем закон распределения $\mathbf{X^2}$:

| $\mathbf{X^2}$ | **0** | **1** | **4** |
|---|---|---|---|
| **P** | **0,48** | **0,44** | **0,08** |

Найдем $\mathbf{M(X^2)}$:

$$\mathbf{M(X^2)=0\cdot 0,48+1\cdot 0,44+4\cdot 0,08=0,76}.$$

Найдем дисперсию:

$$\mathbf{D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=0,6-(0,76)^2=0,0224}.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\mathbf{\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,0224}\approx 0,15}.$$

Пусть событие **B -** появление события А не менее одного раза, т. е. один или два раза, тогда

$$\mathbf{P(B)=P(X=1)+P(X=2)=0,44+0,08=0,52}.$$

**Пример 3.** В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить ряд распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти числовые характеристики. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей хотя бы одно будет стандартным?

**Решение.** Случайная величина **X** – число стандартных деталей среди отобранных деталей – имеет следующие возможные значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Найдем вероятности возможных значений **X** по формуле

$$P(X=k)=\frac{C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m},$$

где **N** – число деталей в партии, **n** – число стандартных деталей в партии, **m** – число отобранных деталей, **k** – число стандартных деталей среди отобранных.

$$P(X=0)=\frac{C_8^0\cdot C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45},$$

$$P(X=1)=\frac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45},$$

$$P(X=2)=\frac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}.$$

Составим искомый ряд распределения:

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{45}$ | $\frac{16}{45}$ | $\frac{28}{45}$ |

Контроль: $\frac{1}{45}+\frac{16}{45}+\frac{28}{45}=1.$

Найдем числовые характеристики случайной величины **X**.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot p_i=0\cdot\frac{1}{45}+1\cdot\frac{16}{45}+2\cdot\frac{28}{45}=\frac{8}{5}=1{,}6;$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2\cdot p_i-(M(X))^2=0^2\cdot\frac{1}{45}+1^2\cdot\frac{16}{45}+2^2\cdot\frac{28}{45}-\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{64}{225};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{64}{225}}=\frac{8}{15}.$$

Пусть событие **B -** среди отобранных деталей хотя бы одно будет стандартным. Рассмотрим событие $\overline{B}$, противоположное событию **B**:

$\overline{B}$ - среди отобранных деталей нет стандартных, $P(\overline{B})=P(X=0)=\frac{1}{45}$. Тогда

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}.$$

**Пример 4.** В рейс выделено 3 автобуса. Вероятность того, что во время рейса автобус будет работать без поломок, равна 0,9. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа автобусов, работающих без поломок в течение рейса. Найти числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что более одного автобуса будут работать безотказно?

**Решение.** Дискретная случайная величина **X** (число автобусов, работающих без поломок в течение рейса) имеет следующие возможные значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Автобусы работают независимо один от другого, вероятности безотказной работы каждого автобуса равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что, по условию, **n**=3, **p=0,9**, **q=1–p=0,1**, получим:

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0\cdot p^0\cdot q^3=(0{,}1)^3=0{,}001,$$

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1\cdot p^1\cdot q^2=3\cdot(0{,}9)^1\cdot(0{,}1)^2=0{,}027,$$

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2\cdot p^2\cdot q^1=3\cdot(0{,}9)^2\cdot(0{,}1)^1=0{,}243,$$

$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3\cdot p^3\cdot q^0=(0{,}9)^3=0{,}729.$$

Контроль: $0{,}001+0{,}027+0{,}243+0{,}729=1$.

Напишем искомый ряд распределения:

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,001 | 0,027 | 0,243 | 0,729 |

Найдем числовые характеристики случайной величины **X**.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot p_i=0\cdot 0{,}001+1\cdot 0{,}027+2\cdot 0{,}243+3\cdot 0{,}729=2{,}7;$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2\cdot p_i-(M(X))^2=$$

$$=0\cdot 0{,}001+1\cdot 0{,}027+4\cdot 0{,}243+9\cdot 0{,}729-(2{,}7)^2=0{,}27;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}27}\approx 0{,}52.$$

Пусть событие **B -** более одного автобуса будут работать безотказно, т. е. или два, или три автобуса.

$$P(B)=P(X=2)+P(X=3)=0{,}243+0{,}729=0{,}972.$$

**Пример 5.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -6 | -3 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,4 | 0,3 | p | 0,1 |

| Y | -2 | 8 |
|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,8 |

Найти:
1) р;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X-4Y.

**Решение.**

1) В результате опыта случайная величина **X** примет только одно из возможных значений $\mathbf{x_1=-6}$, $\mathbf{x_2=-3}$, $\mathbf{x_3=1}$, $\mathbf{x_4=2}$, т. е. произойдет только одно из полной группы событий. Поскольку сумма вероятностей полной группы попарно несовместных событий равна 1, то

$$\mathbf{0{,}4+0{,}3+p+0{,}1=1}.$$

Следовательно, **р=1-0,4-0,3-0,1=0,2**.

Таким образом, ряд распределения случайной величины **X** имеет вид

| X | -6 | -3 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

2) Найдем функцию распределения **F(X)**.

Если $\mathbf{x\le -6}$, то **F(x)=0**. Действительно, значений, меньших числа $\mathbf{-6}$, величина **X** не принимает. Следовательно, при $\mathbf{x\le -6}$ функция **F(x)=P(X<x)=0**.

Если $\mathbf{-6<x\le -3}$, то **F(x)=0,4**. Действительно, **X** может принимать значение $\mathbf{-6}$ с вероятностью **0,4**.

Если $\mathbf{-3<x\le 1}$, то **F(x)=0,7**. Действительно, **X** может принимать значение $\mathbf{-6}$ с вероятностью **0,4** и значение $\mathbf{-3}$ с вероятностью **0,3**; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, **X** может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью **0,4+0,3=0,7**.

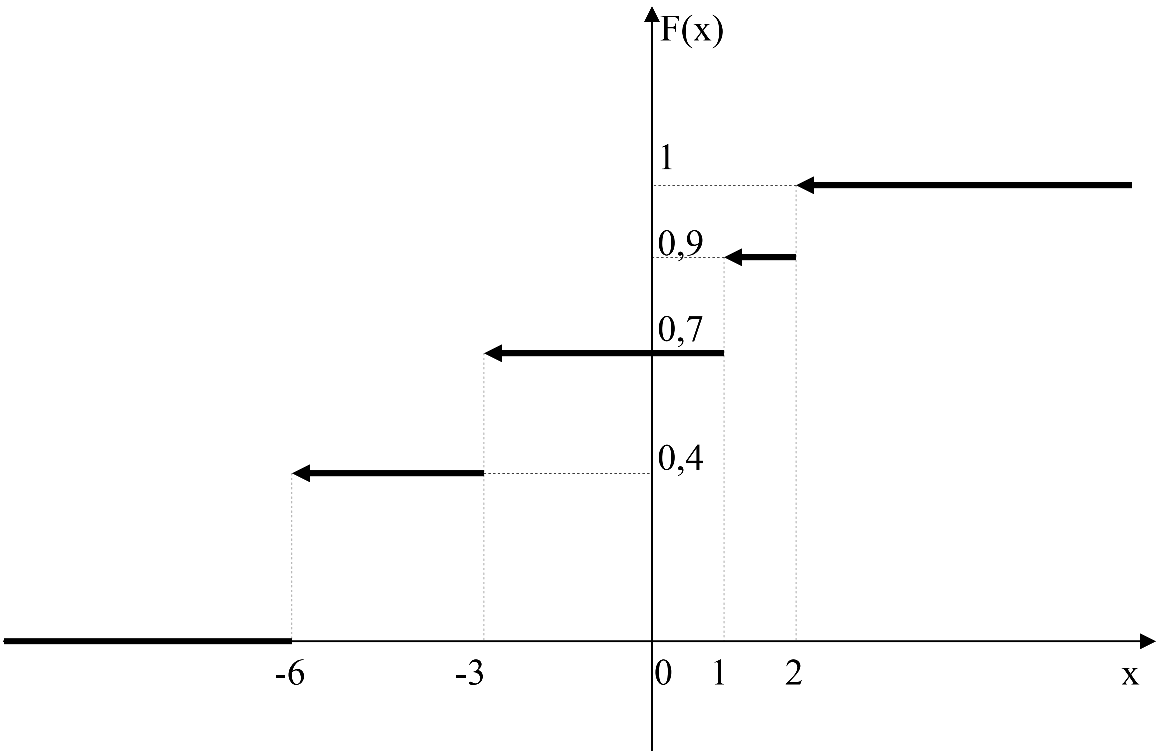
Если $\mathbf{1<x\le 2}$, то **F(x)=0,9**. Действительно, **X** может принимать значение $\mathbf{-6}$ с вероятностью **0,4**, значение $\mathbf{-3}$ с вероятностью **0,3,** значение **1** с вероятностью **0,2**; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, **X** может принять с вероятностью **0,4+0,3+0,2=0,9**.

Если $\mathbf{x>2}$, то **F(x)=1**. Действительно, событие $\mathbf{X\le 2}$ достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$\mathbf{F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -6, \\ 0{,}4 & \text{при} \quad -6<x\le -3, \\ 0{,}7 & \text{при} \quad -3<x\le 1, \\ 0{,}9 & \text{при} \quad 1<x\le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}}$$

График этой функции приведен на рисунке.




3) Найдем математическое ожидание случайных величин **X**, **Y**.

$$\mathbf{M(X) = (-6)\cdot 0{,}4 + (-3)\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}1 = -2{,}9};$$
$$\mathbf{M(Y) = (-2)\cdot 0{,}2 + 8\cdot 0{,}8 = 6}.$$

Используя свойства математического, получим

$$\mathbf{M(Z) = M(2X - 4Y) = 2M(X) - 4M(Y) = 2\cdot(-2{,}9) - 4\cdot 6 = -29{,}8}.$$

Найдем дисперсии случайных величин **X**, **Y**.

$$\mathbf{D(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - (M(X))^2 =}$$
$$\mathbf{=(-6)^2\cdot 0{,}4 + (-3)^2\cdot 0{,}3 + 1^2\cdot 0{,}2 + 2^2\cdot 0{,}1 - (-2{,}9)^2 = 138{,}89};$$
$$\mathbf{D(Y) =\sum_{i=1}^{2} y_i^2 p_i - (M(Y))^2 =(-2)^2\cdot 0{,}2 + (8)^2\cdot 0{,}8 - 6^2 = 16}.$$

Так как величины **X** и **Y** независимы, то независимы также и величины **2X** и **4Y**. Используя свойства дисперсии, получим

$$\mathbf{D(Z) = D(2X - 4Y) = 4D(X) + 16M(Y) = 4\cdot 138{,}89 + 16\cdot 16 = 811{,}56}.$$

# ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 5
# (Дискретные случайные величины)

## Вариант 1

**1.** Спортсмен должен последовательно преодолеть 2 препятствия, каждое из которых преодолевается им с вероятностью 0,9. Если спортсмен не преодолевает препятствие, то он выбывает из соревнований. Построить ряд распределения, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение числа препятствий, преодолённых спортсменом. Найти вероятность того, что спортсмен преодолеет не более одного препятствия.

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,5 | 0,2 | p |

| Y | 2 | 6 |
|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X+3Y.

## Вариант 2

**1.** Имеется три ключа, среди которых только один подходит к замку. Составьте ряд распределения числа попыток, которые потребуются для открывания двери. Найдите числовые характеристики. Какова вероятность того, что попыток будет не более одной?

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | 0,6 | p | 0,2 |

| Y | -2 | 2 |
|---|---|---|
| P | 0,3 | 0,7 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X-Y.

**Вариант 3**

**1.** Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить ряд распределения числа библиотек, которые посетит студент в поисках книги, если в городе три библиотеки имеют такую книгу. Найти числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что студент посетит не более двух библиотек?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -1 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | p | 0,2 | 0,5 |

| Y | 1 | 3 |
|---|---|---|
| P | 0,8 | 0,2 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=3X+2Y.

**Вариант 4**

**1.** Автоматизированную линию обслуживают три манипулятора. При плановом осмотре их поочередно проверяют. Если характеристики проверяемого манипулятора не удовлетворяют техническим условиям, вся линия останавливается для переналадки. Вероятность того, что при проверке характеристики манипулятора окажутся неудовлетворительными, равна 0,3. Построить ряд распределения, найти числовые характеристики числа манипуляторов, проверенных до остановки линии. Какова вероятность того, что проверят более одного манипулятора?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -2 | 1 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| P | p | 0,5 | 0,2 | 0,1 |

| Y | -1 | 3 |
|---|---|---|
| P | 0,4 | 0,6 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=3Y-2X.

**Вариант 5**

**1.** Экзаменатор задает студенту не более трех дополнительных вопросов. Вероятность того, что студент ответит на любой вопрос, равна 0,9. Преподаватель прекращает экзаменовать студента, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Составить ряд распределения случайной величины – числа дополнительных вопросов, заданных студенту. Найти ее числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что дополнительных вопросов будет не более двух?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -3 | -2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | p | 0,1 | 0,6 |

| Y | 1 | 4 |
|---|---|---|
| P | 0,9 | 0,1 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2Y-X.

**Вариант 6**

**1.** Имея три патрона, стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Составить ряд распределения числа произведенных выстрелов, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найти числовые характеристики этой случайной величины. Какова вероятность того, что стрелок сделает не более двух выстрелов?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -1 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,5 | 0,2 | p |

| Y | 1 | 5 |
|---|---|---|
| P | 0,8 | 0,2 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X-Y.

**Вариант 7**

**1.** Испытывают три прибора на надежность. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,6. Каждый следующий прибор испытывают только, если предыдущий выдержал испытание. Составьте ряд распределения числа испытанных приборов. Найдите числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что будет проверено не более двух приборов?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| P | 1/6 | 1/4 | 1/3 | p |

| Y | -2 | 1 |
|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=3Y-3X.

**Вариант 8**

**1.** Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,1. Для проверки на качество ОТК берет из партии не более трех деталей. При обнаружении нестандартной детали вся партия задерживается. Составить ряд распределения числа подвергшихся проверке деталей, найти числовые характеристики этой случайной величины. Какова вероятность того, что проверят не менее двух деталей?

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,1 | 0,4 | p |

| Y | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=3Y-4X.

**Вариант 9**

**1.** Для первого студента вероятность успешно сдать экзамен – 0,8, для второго – 0,2. Составьте ряд распределения числа студентов, успешно сдавших экзамен. Найдите числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что хотя бы один из студентов успешно сдаст экзамен?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -1 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,4 | 0,2 | p |

| Y | 2 | 5 |
|---|---|---|
| P | 0,8 | 0,2 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X-3Y.

**Вариант 10**

**1.** Некто владеет двумя акциями. Первая акция является доходной с вероятностью 0,2, вторая – с вероятностью 0,5. Составьте ряд распределения числа акций, приносящих доход. Найдите числовые характеристики. Какова вероятность того, что доходных акций не менее одной?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,4 | 0,2 | p | 0,3 |

| Y | 2 | 4 |
|---|---|---|
| P | 2/3 | 1/3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=4X+3Y.

**Вариант 11**

**1.** Вероятность повышения цен на сыр в текущем месяце равна 0,7; на молоко– 0,3. Составить закон распределения случайной величины - числа товаров, на которые будут повышены цены (из двух рассматриваемых), найти ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность того, что повышение цен будет для не более одного товара (из двух рассматриваемых).

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 2 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | p | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

| Y | 2 | 3 |
|---|---|---|
| P | 3/4 | 1/4 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X-4Y.

**Вариант 12**

**1.** При производстве детали вероятность брака составляет 0,2. В этом случае предприятие терпит убыток в 5000 рублей. При изготовлении качественной детали прибыль предприятия 12000 рублей. За день изготавливаются два детали. Составить закон распределения случайной величины - дневной прибыли предприятия. Найти ее числовые характеристики. Найти вероятность того, что прибыль будет не менее 7000 рублей.
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -2 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | p | 0,2 | 0,3 |

| Y | 1 | 2 |
|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=X+2Y.

**Вариант 13**

**1.** Среди 13 билетов 4 выигрышных. Составить закон распределения случайной величины - количества выигрышных билетов из двух взятых наугад. Найти ее числовые характеристики. Найдите вероятность того, что выигрышных билетов будет не менее одного.

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,5 | 0,2 | p |

| Y | 2 | 3 |
|---|---|---|
| P | 0,6 | 0,4 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X-Y.

**Вариант 14**

**1.** При производстве детали вероятность брака равна 0,1. За день изготавливаются две детали. Составить закон распределения случайной величины – количества изготовленных бракованных деталей. Найти числовые характеристики этой случайной величины. Какова вероятность того, что будет изготовлено не более одной бракованной детали?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 2 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,4 | 0,1 | 0,2 | p |

| Y | -1 | 3 |
|---|---|---|
| P | 4/5 | 1/5 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=X-5Y.

**Вариант 15**

**1.** В городе два коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10%. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года. Найдите числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что в течение года обанкротятся не более одного банка?

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -2 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,4 | 0,1 | p |

| Y | 2 | 6 |
|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=5X-Y.

**Вариант 16**

**1.** База снабжает два магазина. В течение дня от каждого из них с вероятностью 1/3 может поступить заявка. Построить ряд распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа заявок, поступивших на базу за день. Найти вероятность того, что их будет не менее одной.
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,1 | 0,2 | p |

| Y | 1 | 5 |
|---|---|---|
| P | 3/5 | 2/5 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=4X-Y.

**Вариант 17**

**1.** Хорошим считается руководитель, принимающий 70% правильных решений. Такому управляющему банком предстоит принять решения по двум важным вопросам банковской политики. Составьте ряд распределения возможного числа правильных решений управляющего и найдите числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что управляющий примет менее двух правильных решений?

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | p | 0,3 | 0,1 |

| Y | 2 | 4 |
|---|---|---|
| P | 1/4 | 3/4 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=X-4Y.

**Вариант 18**

**1.** При передаче сообщения вероятность искажения одного знака 0,1. Передано сообщение из трех знаков. Случайная величина X - число "искажений". Найти ряд распределения и числовые характеристики этой случайной величины. Чему равна вероятность того, что в сообщении будет не более одного искажения?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -2 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | 1/6 | p | 1/4 | 1/3 |

| Y | 2 | 6 |
|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X+3Y.

**Вариант 19**

**1.** В библиотеке есть только техническая и математическая литература. Вероятность взять техническую книгу - 0,8. Случайная величина X- число читателей, если всего читателей три, взявших математическую книгу. Найти ряд распределения и числовые характеристики этой случайной величины. Чему равна вероятность того, что читателей, взявших математическую книгу, будет не более двух?

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 2 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | p | 0,2 | 0,3 |

| Y | -1 | 1 |
|---|---|---|
| P | 1/3 | 2/3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X+Y.

**Вариант 20**

**1.** В ходе аудиторской проверки строительной компании аудитор случайным образом отбирает три счета. При условии, что 10% счетов содержат ошибки, составьте ряд распределения правильных счетов. Найдите числовые характеристики. Чему равна вероятность того, что хотя бы один счет будет с ошибкой?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -1 | 0 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,5 | 0,2 | p |

| Y | 1 | 4 |
|---|---|---|
| P | 0,9 | 0,1 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2Y-X.

**Вариант 21**

**1.** Торговый агент в среднем контактирует с двумя потенциальными покупателями в день. Из опыта ему известно, что вероятность того, что потенциальный покупатель совершит покупку, равна 0,3. Составьте ряд распределения ежедневного числа продаж для агента. Найдите числовые характеристики этого распределения. Чему равна вероятность того, что у агента будет хотя бы одна продажа в течение дня?

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -1 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P | p | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

| Y | -1 | 3 |
|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=3X-Y.

**Вариант 22**

**1.** TV– канал рекламирует новый вид детского питания. Вероятность того, что зритель увидит эту рекламу, оценивается в 0,2. В случайном порядке выбраны два телезрителя. Составьте ряд распределения числа лиц, видевших рекламу. Найдите числовые характеристики этого распределения. Чему равна вероятность того, что, по крайней мере, один телезритель этого канала видел рекламу нового детского питания?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -3 | -1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | p | 0,3 | 0,4 |

| Y | 2 | 4 |
|---|---|---|
| P | 0,8 | 0,2 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X-2Y.

**Вариант 23**

**1.** В магазине имеется 9 автомобилей определенной марки. Среди них – 7 черного цвета и 2 – белого. Представители фирмы обратились в магазин с предложением о продаже им двух автомобилей этой марки, безразлично какого цвета. Составьте ряд распределения числа проданных автомобилей черного цвета при условии, что автомобили отбирались случайно. Найдите числовые характеристики этого распределения. Какова вероятность того, что среди проданных фирме автомобилей, по крайней мере, один черного цвета?

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | p | 0,3 | 0,2 |

| Y | -1 | 1 |
|---|---|---|
| P | 0,6 | 0,4 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=X-3Y.

**Вариант 24**

**1.** Вратарю забивают в среднем 80% всех одиннадцатиметровых штрафных ударов. Составьте ряд распределения числа пропущенных после матчевых пенальти, если их было назначено два. Найдите числовые характеристики этого распределения. Чему равна вероятность того, что будет не более одного пропущенного мяча?
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 3 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| P | p | 1/6 | 1/3 | 1/4 |

| Y | -2 | 1 |
|---|---|---|
| P | 0,4 | 0,6 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X-Y.

**Вариант 25**

**1.** Одна треть юношей, поступивших в институт, имеет рост не ниже 175 см. В одной комнате общежития живут двое юношей. Составьте ряд распределения числа юношей этой комнаты, чей рост не менее 175 см. Найдите числовые характеристики этого распределения. Чему равна вероятность того, что рост, по крайней мере, одного из них не менее 175 см?

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -1 | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P | P | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

| Y | -3 | 1 |
|---|---|---|
| P | 0,1 | 0,9 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=X-4Y.

**Вариант 26**

**1.** Наблюдение за районом ведется двумя радиолокационными станциями (РЛС). В район наблюдений попал объект, который обнаруживается любой радиолокационной станцией с вероятностью 0,2. Построить ряд распределения, найти числовые характеристики числа РЛС, обнаруживших объект. Найти вероятность, что их будет не менее одной.
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -2 | -1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P | p | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

| Y | 1 | 3 |
|---|---|---|
| P | 0,8 | 0,2 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=3X-Y.

**Вариант 27**

**1.** Две трети всех секретарей большого стенографического бюро имеют права водителя автомобиля. Для участия в поездке случайным образом выбирают два секретаря. Составьте ряд распределения числа выбранных секретарей, которые имеют права. Найдите числовые характеристики этого распределения. Чему равна вероятность того, что среди выбранных секретарей не менее одного имеют права?

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,3 | 0,1 | 0,2 | p |

| Y | -1 | 3 |
|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=3X+2Y.

**Вариант 28**

**1.** В коробке имеются 7 карандашей, из которых 5 красных. Из этой коробки наудачу извлекаются два карандаша. Построить ряд распределения, найти числовые характеристики числа красных карандашей в выборке. Найти вероятность того, что в выборке будет хотя бы один красный карандаш.
**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -2 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,1 | 0,5 | 0,3 | p |

| Y | 2 | 6 |
|---|---|---|
| P | 0,7 | 0,3 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=X-3Y.

**Вариант 29**

**1.** Под руководством бригадира производственного участка работают 3 мужчины и 4 женщины. Бригадиру необходимо выбрать двух рабочих для специальной работы. Не желая оказывать кому-либо предпочтения, он решил выбрать двух рабочих случайно. Составьте ряд распределения числа женщин в выборке. Найдите числовые характеристики этого распределения. Какова вероятность того, что будет выбрано не более одной женщины?

**2.** Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | -1 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | p | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

| Y | 2 | 7 |
|---|---|---|
| P | 0,9 | 0,1 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=X+3Y.

**Вариант 30**

**1.** Вероятность того, что кредит размером до одного миллиона рублей не будет возвращен, равна 0,25. Для кредита размером свыше одного миллиона рублей эта вероятность равна 0,03. Банк выдал два кредита: 400 тысяч и 5 миллионов рублей. Составить закон распределения случайной величины - числа невозвращенных кредитов из этих выданных. Найти ее числовые характеристики. Какова вероятность того, что невозвращенных кредитов будет не более одного?
2. Независимые случайные дискретные величины X, Y заданы законами распределения.

| X | 1 | 4 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,3 | 0,4 | p | 0,1 |

| Y | 1 | 3 |
|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,8 |

Найти:
1) p;
2) функцию распределения случайной величины X и построить ее график;
3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X-Y.

## НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

**Пример 1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \frac{1}{4}x^2 & \text{при} \quad 0<x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(1<X<2)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**Решение.**

1) Воспользуемся формулой **P (a < X < b) = F (b) – F (a)**. По условию **a=1**, **b=2**. Следовательно, искомая вероятность

$$P(1<X<2)=F(2)-F(1)=\frac{1}{4}\cdot 2^2-\frac{1}{4}\cdot 1^2=\frac{3}{4}.$$

2) Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$\mathbf{f(x)=F'(x)=}\begin{cases}\mathbf{0} & \textbf{при}\quad \mathbf{x\le 0,}\\ \mathbf{\frac{1}{2}x} & \textbf{при}\quad \mathbf{0<x\le 2,}\\ \mathbf{0} & \textbf{при}\quad \mathbf{x>2.}\end{cases}$$

3) Вычислим числовые характеристики случайной величины X.

Математическое ожидание

$$\mathbf{M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=}\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0dx+\int_{0}^{2}x\cdot\frac{1}{2}xdx+\int_{2}^{\infty}x\cdot 0dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^2dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Дисперсия

$$\mathbf{D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2=}\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{2}x^2\cdot\frac{1}{2}xdx+\int_{2}^{\infty}x^2\cdot 0dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^3dx-\frac{16}{9}=\left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

**Пример 2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x\le -3,\\ A(x+3) & \text{при}\quad -3<x\le 0,\\ 0 & \text{при}\quad x>0.\end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(-4<X<-2)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Решение.**

1) Для нахождения параметра A воспользуемся свойством плотности распределения вероятностей: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(x)dx = 1}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-3} 0 \cdot dx + \int\limits_{-3}^{0} A(x+3)dx + \int\limits_{0}^{\infty} 0 \cdot dx = A(\frac{x^2}{2} + 3x)\Big|_{-3}^{0} = -A(\frac{9}{2} - 9) = \frac{9}{2}A = 1.$$

Отсюда находим $A = \frac{2}{9}$.

Тогда функцию плотности распределения можно записать следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -3, \\ \frac{2}{9}(x+3) & \text{при} \quad -3 < x \le 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

2) Воспользуемся формулой $\mathbf{P\ (a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx}$.

$$P(-4 < X < -2) = \int\limits_{-4}^{-2} f(x)dx = \int\limits_{-4}^{-3} 0 \cdot dx + \int\limits_{-3}^{-2} \frac{2}{9}(x+3)dx = \frac{1}{9}(x+3)^2\Big|_{-3}^{-2} = \frac{1}{9}.$$

3) Для нахождения функции распределения, используем формулу $\mathbf{F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt}$.

Если $x \le -3$, то f(x)=0, следовательно,

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0.$$

Если $-3 < x \le 0$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-3} 0 \cdot dt + \int\limits_{-3}^{x} \frac{2}{9}(t+3)dt = \frac{1}{9}(x+3)^2.$$

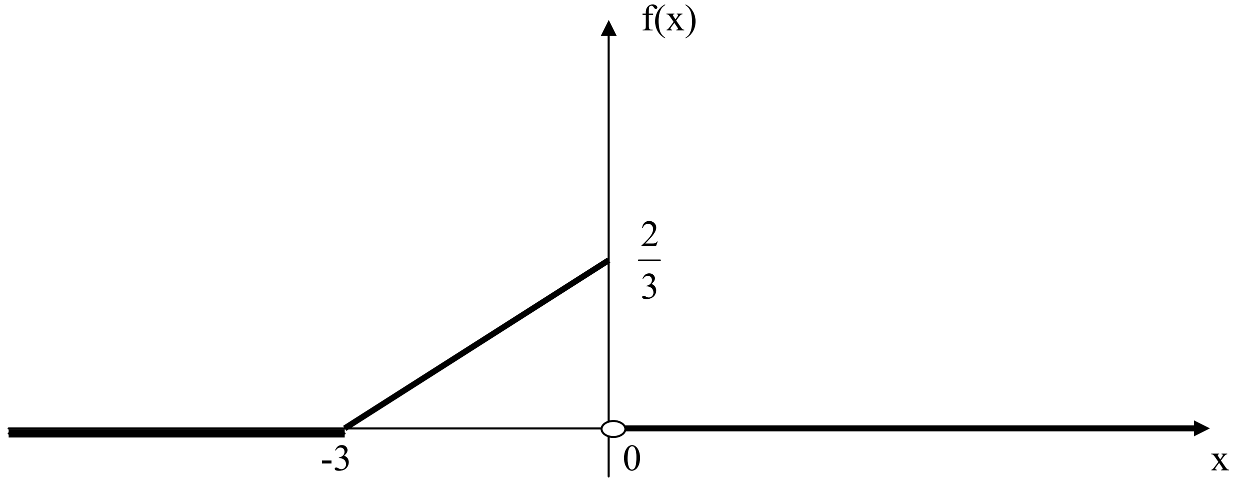
Если $x > 0$, то

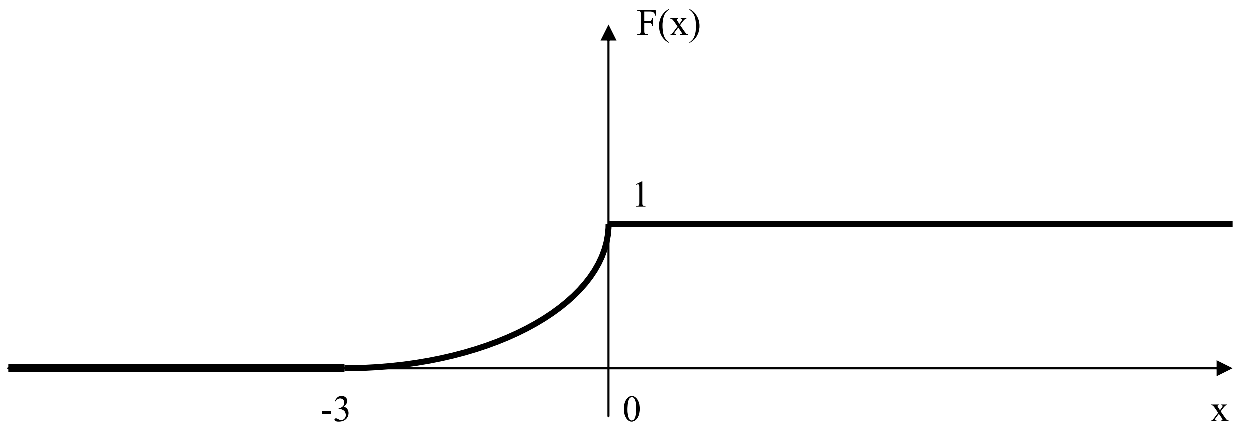
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-3} 0 \cdot dt + \int\limits_{-3}^{0} \frac{2}{9}(t+3)dt + \int\limits_{0}^{x} 0 \cdot dt = 1.$$

Итак, искомая функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -3, \\ \frac{1}{9}(x+3)^2 & \text{при} \quad -3 < x \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

4) Построим графики функций f(x) и F(x).




## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 6
## (Непрерывные случайные величины)

**Вариант 1**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -1, \\ \dfrac{1}{25}(x+1)^2 & \text{при} \quad -1 \le x \le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(1 < X < 2)$;

2) плотность вероятности f(x);

3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1,\\ \dfrac{A}{x^4} & \text{при} \quad x\ge 1.\end{cases}$$

1) Найти А;
2) Вычислить $P(2<X<3)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 2**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-1,\\ \dfrac{1}{4}(x+1)^2 & \text{при} \quad -1\le x\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0<X<1)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ A(4-x) & \text{при} \quad 0\le x\le 4,\\ 0 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$$

1) Найти А;
2) Вычислить $P(0<X<1)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 3**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{4}{5}x & \text{при} \quad 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(-1 < X < \frac{1}{2})$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ Ax^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 3, \\ 0 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(X < 2)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 4**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -\frac{1}{2}, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 & \text{при} \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найти:
1) вероятность $P(0 < X < 1)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1, \\ \frac{A}{x^3} & \text{при} \quad 1 \le x \le 4, \\ 0 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(3 < X < 5)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 5**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x & \text{при} \quad 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(\frac{1}{3}<X<2)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1,\\ \frac{A}{x} & \text{при} \quad 1\le x\le e,\\ 0 & \text{при} \quad x>e.\end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(\frac{e}{2}<X<\frac{3}{4}e)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 6**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-1,\\ \frac{1}{16}(x+1)^2 & \text{при} \quad -1\le x\le 3,\\ 1 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(1<X<2)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-1,\\ A(x+1) & \text{при} \quad -1\le x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(0 < X < 4)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 7**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(\frac{1}{2} < X < 1)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 2, \\ A(x-2) & \text{при} \quad 2 \le x \le 3, \\ 0 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(0 < X < 2{,}5)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 8**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < \frac{1}{4}, \\ \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 & \text{при} \quad \frac{1}{4} \le x \le \frac{5}{4}, \\ 1 & \text{при} \quad x > \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(-1 < X < \frac{1}{2})$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 1,\\ A(x-\frac{1}{2}) & \text{при} \quad 1 < x \le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x > 2.\end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(0 < X < 1{,}5)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 9**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x < 0,\\ \frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \text{при} \quad 0 \le x \le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x > 1.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(\frac{1}{3} < X < 1)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le -4,\\ A(x+4) & \text{при} \quad -4 < x \le 1,\\ 0 & \text{при} \quad x > 1.\end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(0 < X < 1)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 10**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x < -2,\\ \frac{1}{49}(x+2)^2 & \text{при} \quad -2 \le x \le 5,\\ 1 & \text{при} \quad x > 5.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(-1 < X < 0)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le \frac{1}{2}, \\ A(2x-1) & \text{при} \quad \frac{1}{2} < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(1 < X < 2)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 11**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{27}x^2 + \frac{2}{9}x & \text{при} \quad 0 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(1 < X < 2)$;
2) плотность вероятности f(x);
3)математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -\frac{3}{2}, \\ A(2x+3) & \text{при} \quad -\frac{3}{2} < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(0 < X < 1)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 12**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x & \text{при} \quad 0\le x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0<X<1)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le \frac{5}{2},\\ A(2x-5) & \text{при} \quad \frac{5}{2}<x\le 4,\\ 0 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(2<X<3)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 13**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<\frac{1}{5},\\ \left(x-\frac{1}{5}\right)^2 & \text{при} \quad \frac{1}{5}\le x\le \frac{6}{5},\\ 1 & \text{при} \quad x>\frac{6}{5}.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(\frac{2}{5}<X<1)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le -1,\\ A(3-2x) & \text{при} \quad -1<x\le \dfrac{3}{2},\\ 0 & \text{при} \quad x>\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(0<X<1)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 14**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{5}{6}x & \text{при} \quad 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0<X<\frac{1}{2})$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1,\\ \dfrac{A}{x^2} & \text{при} \quad x\ge 1.\end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(2<X<3)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 15**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-1,\\ \dfrac{1}{9}(x+1)^2 & \text{при} \quad -1\le x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0 < X < 1)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 3, \\ A(3-x) & \text{при} \quad 3 < x \le 5, \\ 0 & \text{при} \quad x > 5. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(4 < X < 6)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 16**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{7}x^2 + \frac{6}{7}x & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0 < X < \frac{1}{2})$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ \frac{A}{x^2} & \text{при} \quad 1 < x \le 4, \\ 0 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(2 < X < 3)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 17**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x & \text{при} \quad 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0<X<\frac{1}{3})$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 2,\\ \frac{A}{x^3} & \text{при} \quad 2<x\le 5,\\ 0 & \text{при} \quad x>5.\end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(1<X<3)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 18**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-2,\\ \frac{1}{16}(x+2)^2 & \text{при} \quad -2\le x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(-1<X<0)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le \frac{3}{2},\\ A(3-2x) & \text{при} \quad \frac{3}{2}<x\le 3,\\ 0 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(2 < X < 4)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 19**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(\frac{1}{2} < X < 1)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -\frac{1}{3}, \\ A(3x+1) & \text{при} \quad -\frac{1}{3} < x \le 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(-1 < X < -0{,}5)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 20**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -2, \\ \frac{1}{9}(x+2)^2 & \text{при} \quad -2 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(-1 < X < 0)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 5, \\ A(5 - x) & \text{при} \quad 5 < x \le 6, \\ 0 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(4 < X < 5{,}5)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

## Вариант 21

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(\frac{1}{2} < X < 1)$;

2)плотность вероятности f(x);

3)математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0{,}5, \\ A(0{,}5 - x) & \text{при} \quad 0{,}5 < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(1 < X < 2)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

## Вариант 22

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^3}{27} & \text{при} \quad 0 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0 < X < 1)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -0{,}25, \\ A(4x+1) & \text{при} \quad -0{,}25 < x \le 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(-1 < X < -0{,}5)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 23**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2}{16} & \text{при} \quad 0 \le x \le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0 < X < 2)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -4{,}5, \\ A(2x+9) & \text{при} \quad -4{,}5 < x \le 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(-2 < X < 0)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 24**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при} \quad 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0 < X < 1)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ Ax & \text{при} \quad 1 < x \le 4, \\ 0 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(0 < X < 2)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 25**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при} \quad 0 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0 < X < 2)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2{,}5, \\ A(2{,}5 - x) & \text{при} \quad 2{,}5 < x \le 4, \\ 0 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(1 < X < 3)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 26**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^3}{8} & \text{при} \quad 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(1 < X < 2)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ Ax^2 & \text{при} \quad -1 < x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(-0{,}5 < X < 0{,}5)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 27**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ x(2-x) & \text{при} \quad 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{при} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(0{,}5 < X < 1{,}5)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -\frac{3}{2}, \\ A(x+1{,}5) & \text{при} \quad -\frac{3}{2} < x \le 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(-1 < X < 1)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 28**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 2, \\ (x-2)^2 & \text{при} \quad 2 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(2{,}5 < X < 3{,}5)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -7, \\ A(x+7) & \text{при} \quad -7 < x \le 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(-2 < X < 1)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 29**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1, \\ \dfrac{x^2 - 1}{3} & \text{при} \quad 1 \le x < 2, \\ 1 & \text{при} \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(1{,}5 < X < 2{,}5)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 3{,}5, \\ A(2x-7) & \text{при} \quad 3{,}5 < x \le 5, \\ 0 & \text{при} \quad x > 5. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(-1 < X < 2)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

**Вариант 30**

**1.** Случайна величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ \dfrac{x^2 - x}{2} & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти:

1) вероятность $P(-1 < X < 0)$;
2) плотность вероятности f(x);
3) математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

**2.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -5, \\ A(x+5) & \text{при} \quad -5 < x \le 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

1) Найти A;
2) Вычислить $P(-2 < X < 0)$;
3) Найти функцию F(x) распределения вероятности;
4) Построить графики функций f(x) и F(x).

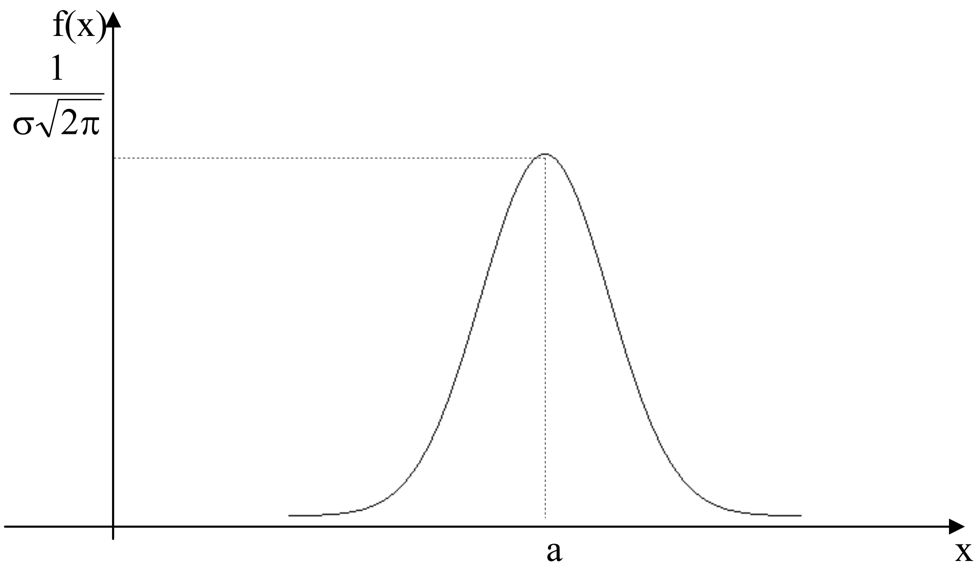
## НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Непрерывная случайная величина **X** распределена по ***нормальному закону***, если её плотность распределения вероятностей задается функцией

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}},$$

где $\mathbf{a = M(X)}$ – математическое ожидание, $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mathbf{D(X)}}$ – среднее квадратическое отклонение.

График функции $\mathbf{f(x)}$ называют нормальной кривой или кривой Гаусса.



Вероятность того, что случайная величина $\mathbf{X}$ примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha, \beta)$, равна

$$\mathbf{P}(\alpha < \mathbf{X} < \beta) = \mathbf{\Phi}\left(\frac{\beta - \mathbf{a}}{\sigma}\right) - \mathbf{\Phi}\left(\frac{\alpha - \mathbf{a}}{\sigma}\right),$$

где

$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x \mathbf{e}^{-t^2/2}\mathbf{dt}$ – функция Лапласа (таблицу значений см. в приложении). $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ – функция нечетная, т. е. $\mathbf{\Phi}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины $\mathbf{X}$ от своего математического ожидания будет меньше положительного числа $\delta > \mathbf{0}$, равна

$$\mathbf{P}(|\mathbf{X} - \mathbf{a}| < \delta) = \mathbf{2\Phi}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

**Пример 1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=8 и дисперсия D(X)=9. Написать плотность вероятности X. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (1, 6).

**Решение.** Так как случайная величина X имеет нормальное распределение, то её плотность имеет вид:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{M}(\mathbf{X}) = \mathbf{8}$, $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}(\mathbf{X})} = \sqrt{\mathbf{9}} = \mathbf{3}$.

Тогда

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-(x-8)^2/18}.$$

Вычислим вероятность того, что случайная величина $\mathbf{X}$ будет принимать значения из интервала (1, 6):

$$\mathrm{P}(1 < \mathrm{X} < 6) = \Phi\left(\frac{6-8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-8}{3}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{7}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = \Phi(2{,}33) - \Phi(0{,}67) = 0{,}4901 - 0{,}2486 = 0{,}2415.$$

**Пример 2.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=5 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 2.

**Решение.** Используем формулу

$$\mathbf{P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)}$$

$$\mathbf{P(|X-5|<2)=2\Phi\left(\frac{2}{2}\right)=2\Phi(1)=2\cdot 0{,}3413=0{,}6826}.$$

**Пример 3.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 10. Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (4, 16) равна 0,8664. Найдите среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

**Решение.** По условию задачи случайная величина **X** имеет математическое ожидание $\mathbf{a=10}$ и $\mathbf{P(4<X<16)=0{,}8664}$. Но, с другой стороны,

$$\mathbf{P(4<X<16)=\Phi\left(\frac{16-10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{4-10}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{6}{\sigma}\right)=}$$

$$\mathbf{=\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right)},$$

где $\sigma$ – среднее квадратическое отклонение случайной величины **X**.
Итак,

$$\mathbf{2\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right)=0{,}8664} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right)=0{,}4332}.$$

По таблице значений функции Лапласа находим $\mathbf{\frac{6}{\sigma}=1{,}5}$. Откуда $\mathbf{\sigma=4}$.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 7
## (Нормальный закон распределения)

### Вариант 1

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием M(X)=26 и дисперсией D(X)=1. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 1.
**2.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a = 3 и среднее квадратическое отклонение $\sigma$ = 2. Написать плотность вероятности X.

### Вариант 2

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=28 и дисперсия D(X)=49. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (24, 35).

**2.** Написать плотность вероятности нормально распределенной величины X, зная, что M(X) = 3, $\sigma(X) = 4$.

**Вариант 3**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=25 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 8$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 1.
**2.** Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**Вариант 4**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=21 и дисперсия D(X)=81. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (20, 30).
**2.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a = -2 и среднее квадратическое отклонение $\sigma$ = 1. Написать плотность вероятности X.

**Вариант 5**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=33 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 8$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 2.
**2.** Написать плотность вероятности нормально распределенной величины X, зная, что M(X) = 1, D(X) = 1.

**Вариант 6**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=20 и дисперсия D(X)=49. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (22, 27).

**2.** Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-3)^2}{8}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**Вариант 7**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием M(X)=32 и дисперсией D(X)=36. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 1,5.

**2.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a = -1 и среднее квадратическое отклонение $\sigma$ = 2. Написать плотность вероятности X.

**Вариант 8**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=19 и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 5$. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (19, 24).

**2.** Написать плотность вероятности нормально распределенной величины X, зная, что M(X) = 3, D(X) = 4.

**Вариант 9**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=40 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 6$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 1,5.

**2.** Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**Вариант 10**

**1.** Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5м. Случайные ошибки распределены нормально со средним квадратическим отклонением 75 м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м?

**2.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a = 5 и среднее квадратическое отклонение $\sigma$ = 2. Написать плотность вероятности X.

**Вариант 11**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=39 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 4$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 1.

**2.** Написать плотность вероятности нормально распределенной величины X, зная, что M(X) = 5, D(X) = 4.

**Вариант 12**

**1.** Среднее квадратическое отклонение ошибок измерения дальности радиолокатором равно 25 м, а систематическая ошибка отсутствует. Определить вероятность получения ошибки измерения дальности, по абсолютной величине, не превосходящей 20 м.
**2.** Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-1)^2}{2}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**Вариант 13**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием M(X)=25 и дисперсией D(X)=25. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 1.
**2.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a = 2 и среднее квадратическое отклонение $\sigma$ = 5. Написать плотность вероятности X.

**Вариант 14**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=27 и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=5$. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (26, 32).
**2.** Написать плотность вероятности нормально распределенной величины X, зная, что M(X) = 1, D(X) = 4.

**Вариант 15**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=38 и средним квадратическим отклонением $\sigma=2$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 0,1.

**2.** Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-6)^2}{32}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**Вариант 16**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=18 и дисперсия D(X)=9. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (19, 21).
**2.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a = 7 и среднее квадратическое отклонение $\sigma$ = 2. Написать плотность вероятности X.

**Вариант 17**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=31 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 4$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 1.
**2.** Написать плотность вероятности нормально распределенной величины X, зная, что M(X) = 8, D(X) = 4.

**Вариант 18**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=17 и дисперсия D(X)=64. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (20, 25).
**2.** Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-4)^2}{18}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**Вариант 19**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием M(X)=30 и дисперсией D(X)=4. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 0,5.
**2.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a = 1 и среднее квадратическое отклонение $\sigma$ = 3. Написать плотность вероятности X.

**Вариант 20**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=16 и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 6$. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (14, 22).

**2.** Написать плотность вероятности нормально распределенной величины X, зная, что M(X) = 2, D(X) = 9.

**Вариант 21**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=24 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 6$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 1,5.

**2.** Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-5)^2}{32}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**Вариант 22**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=15 и дисперсия D(X)=16. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (15, 19).

**2.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a = 4 и среднее квадратическое отклонение $\sigma$ = 2. Написать плотность вероятности X.

**Вариант 23**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=22 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 2.

**2.** Написать плотность вероятности нормально распределенной величины X, зная, что M(X) = 6, D(X) = 16.

**Вариант 24**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=14 и дисперсия D(X)=4. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (13, 16).

**2.** Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-8)^2}{32}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**Вариант 25**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=23 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 4$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 1.

**2.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a = 1 и среднее квадратическое отклонение $\sigma$ = 1. Написать плотность вероятности X.

**Вариант 26**

**1.** Производится измерение диаметра вала. Случайная ошибка измерения подчинена нормальному закону с параметрами (0, $\sigma$). Вероятность того, что измерения будут произведены с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 15 мм, равна 0,8664. Определить $\sigma$.

**2.** Написать плотность вероятности нормально распределенной величины X, зная, что M(X) = 4, D(X) = 9.

**Вариант 27**

**1.** Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=14 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет меньше 2.

**2.** Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-2)^2}{8}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**Вариант 28**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=12 и дисперсия D(X)=25. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (12, 17).

**2.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a = 0 и среднее квадратическое отклонение $\sigma$ = 2. Написать плотность вероятности X.

**Вариант 29**

**1.** Случайная ошибка измерения подчинена нормальному закону с параметрами (0, $\sigma$). Найти $\sigma$, если вероятность того, что ошибка измерения не превосходит по абсолютной величине 4 мм, равна 0,8.

**2.** Написать плотность вероятности нормально распределенной величины X, зная, что M(X) = 2, D(X) = 4.

**Вариант 30**

**1.** Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно M(X)=11 и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$=9. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (14, 15).

**2.** Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x+1)^2}{18}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$. Приложение

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,32 | 0,1255 | 0,64 | 0,2389 | 0,96 | 0,3315 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,33 | 0,1293 | 0,65 | 0,2422 | 0,97 | 0,3340 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,34 | 0,1331 | 0,66 | 0,2454 | 0,98 | 0,3365 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,35 | 0,1368 | 0,67 | 0,2486 | 0,99 | 0,3389 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,36 | 0,1406 | 0,68 | 0,2517 | 1,00 | 0,3413 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,37 | 0,1443 | 0,69 | 0,2549 | 1,01 | 0,3438 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,38 | 0,1480 | 0,70 | 0,2580 | 1,02 | 0,3461 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,39 | 0,1517 | 0,71 | 0,2611 | 1,03 | 0,3485 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,40 | 0,1554 | 0,72 | 0,2642 | 1,04 | 0,3508 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,41 | 0,1591 | 0,73 | 0,2673 | 1,05 | 0,3531 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,42 | 0,1628 | 0,74 | 0,2703 | 1,06 | 0,3554 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,43 | 0,1664 | 0,75 | 0,2734 | 1,07 | 0,3577 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,44 | 0,1700 | 0,76 | 0,2764 | 1,08 | 0,3599 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,45 | 0,1736 | 0,77 | 0,2794 | 1,09 | 0,3621 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,46 | 0,1772 | 0,78 | 0,2823 | 1,10 | 0,3643 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,47 | 0,1808 | 0,79 | 0,2852 | 1,11 | 0,3665 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,48 | 0,1844 | 0,80 | 0,2881 | 1,12 | 0,3686 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,49 | 0,1879 | 0,81 | 0,2910 | 1,13 | 0,3708 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,50 | 0,1915 | 0,82 | 0,2939 | 1,14 | 0,3729 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,51 | 0,1950 | 0,83 | 0,2967 | 1,15 | 0,3749 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,52 | 0,1985 | 0,84 | 0,2995 | 1,16 | 0,3770 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,53 | 0,2019 | 0,85 | 0,3023 | 1,17 | 0,3790 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,54 | 0,2054 | 0,86 | 0,3051 | 1,18 | 0,3810 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,55 | 0,2088 | 0,87 | 0,3078 | 1,19 | 0,3830 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,56 | 0,2123 | 0,88 | 0,3106 | 1,20 | 0,3849 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,57 | 0,2157 | 0,89 | 0,3133 | 1,21 | 0,3869 |
| 0,26 | 0,1026 | 0,58 | 0,2190 | 0,90 | 0,3159 | 1,22 | 0,3883 |
| 0,27 | 0,1064 | 0,59 | 0,2224 | 0,91 | 0,3186 | 1,23 | 0,3907 |
| 0,28 | 0,1103 | 0,60 | 0,2257 | 0,92 | 0,3212 | 1,24 | 0,3925 |
| 0,29 | 0,1141 | 0,61 | 0,2291 | 0,93 | 0,3238 | 1,25 | 0,3944 |
| 0,30 | 0,1179 | 0,62 | 0,2324 | 0,94 | 0,3264 | | |
| 0,31 | 0,1217 | 0,63 | 0,2357 | 0,95 | 0,3289 | | |

Окончание приложения

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,26 | 0,3962 | 1,59 | 0,4441 | 1,92 | 0,4726 | 2,50 | 0,4938 |
| 1,27 | 0,3980 | 1,60 | 0,4452 | 1,93 | 0,4732 | 2,52 | 0,4941 |
| 1,28 | 03997 | 1,61 | 0,4463 | 1,94 | 0,4738 | 2,54 | 0,4945 |
| 1,29 | 0,4015 | 1,62 | 0,4474 | 1,95 | 0,4744 | 2,56 | 0,4948 |
| 1,30 | 0,4032 | 1,63 | 0,4484 | 1,96 | 0,4750 | 2,58 | 0,4951 |
| 1,31 | 0,4049 | 1,64 | 0,4495 | 1,97 | 0,4756 | 2,60 | 0,4953 |
| 1,32 | 0,4066 | 1,65 | 0,4505 | 1,98 | 0,4761 | 2,62 | 0,4956 |
| 1,33 | 0,4082 | 1,66 | 0,4515 | 1,99 | 0,4767 | 2,64 | 0,4959 |
| 1,34 | 0,4099 | 1,67 | 0,4525 | 2,00 | 0,4772 | 2,66 | 0,4961 |
| 1,35 | 0,4115 | 1,68 | 0,4535 | 2,02 | 0,4783 | 2,68 | 0,4963 |
| 1,36 | 0,4131 | 1,69 | 0,4545 | 2,04 | 0,4793 | 2,70 | 0,4965 |
| 1,37 | 0,4147 | 1,70 | 0,4554 | 2,06 | 0,4803 | 2.72 | 0,4967 |
| 1,38 | 0,4162 | 1,71 | 0,4564 | 2,08 | 0,4812 | 2,74 | 0,4969 |
| 1,39 | 0,4177 | 1,72 | 0,4573 | 2,10 | 0,4821 | 2,76 | 0,4971 |
| 1,40 | 0,4192 | 1,73 | 0,4582 | 2,12 | 0,4830 | 2,78 | 0,4973 |
| 1,41 | 0,4207 | 1,74 | 0,4591 | 2,14 | 0,4838 | 2,80 | 0,4974 |
| 1,42 | 0,4222 | 1.75 | 0,4599 | 2,16 | 0,4846 | 2,82 | 0,4976 |
| 1,43 | 0,4236 | 1,76 | 0,4608 | 2,18 | 0,4854 | 2,84 | 0,4977 |
| 1,44 | 0,4251 | 1,77 | 0,4616 | 2,20 | 0,4861 | 2,86 | 0,4979 |
| 1,45 | 0,4265 | 1,78 | 0,4625 | 2,22 | 0,4868 | 2,88 | 0,4980 |
| 1,46 | 0,4279 | 1.79 | 0,4633 | 2,24 | 0,4875 | 2,90 | 0,4981 |
| 1.47 | 0,4292 | 1,80 | 0,4641 | 2,26 | 0,4881 | 2,92 | 0,4982 |
| 1.48 | 0,4306 | 1,81 | 0,4649 | 2,28 | 0,4887 | 2,94 | 0,4984 |
| 1,49 | 0,4319 | 1,82 | 0,4656 | 2,30 | 0,4893 | 2,96 | 0,4985 |
| 1,50 | 0,4332 | 1,83 | 0,4664 | 2,32 | 0,4898 | 2,98 | 0,4986 |
| 1.51 | 0,4345 | 1,84 | 0,4671 | 2,34 | 0,4904 | 3,00 | 0,49865 |
| 1,52 | 0,4357 | 1,85 | 0,4678 | 2.36 | 0,4909 | 3,20 | 0,49931 |
| 1,53 | 0,4370 | 1,86 | 0,4886 | 2,38 | 0,4913 | 3,40 | 0,49966 |
| 1,54 | 0,4382 | 1,87 | 0,4693 | 2,40 | 0,4918 | 3,60 | 0,499841 |
| 1,55 | 0,4394 | 1,88 | 0,4699 | 2.42 | 0,4922 | 3,80 | 0,499928 |
| 1,56 | 0,4406 | 1,89 | 0,4706 | 2,44 | 0,4927 | 4,00 | 0,499968 |
| 1,57 | 0,4418 | 1,90 | 0,4713 | 2,46 | 0,4931 | 4,50 | 0,499997 |
| 1,58 | 0,4429 | 1,91 | 0,4719 | 2,48 | 0,4934 | 5,00 | 0,499997 |

## Библиографический список


1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2014. – ЭБС «Юрайт».
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Электронный ресурс]: учебное пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2013. – ЭБС «Юрайт».


## Оглавление