AI61003 Linear Algebra for AI & ML
Assignment 02 - Problem 01

Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
For any $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

By definition, $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

$$\therefore \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 \quad - (1)$$

Note that (1) is trivially true for $x = 0$.

$$\therefore \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad - (2)$$

Consider $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
For $x \in \mathbb{R}^n$, $(Bx) \in \mathbb{R}^n$
$\therefore$ Eq$^{\underline{n}}$ (2) holds for $A \,(\in \mathbb{R}^{n \times n})$ and $Bx \,(\in \mathbb{R}^n)$.

$$\therefore \|ABx\|_2 \leq \|A\|_2 \|Bx\|_2$$

Using (2) again, $\|Bx\|_2 \leq \|B\|_2 \|x\|_2$

$$\therefore \|ABx\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2 \|x\|_2$$

for $x \neq 0$, $\frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2 \|B\|_2$

$$\therefore \max_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2 \|B\|_2$$

DATE
PAGE

So, $\|AB\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2}$ (by definit^{n})

$\therefore \|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$
Hence the sub-multiplicavity property of 2-norm is proved.

Yes this property holds true for Frobenius norm too.

Consider $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ where $C = AB$.

$$\|AB\|_F^2 = \|C\|_F^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (C_{ij})^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]^2$$

(Using Cauchy-Swartz inequality)

$$\|AB\|_F^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \right]$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \right)$$
$$= \|A\|_F^2 \, \|B\|_F^2$$

$\Rightarrow \|AB\|_F^2 \leq \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$
$\because \|\cdot\|_F$ is always non-negative
$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$