Ricerca Operativa
a.a. 2018-2019

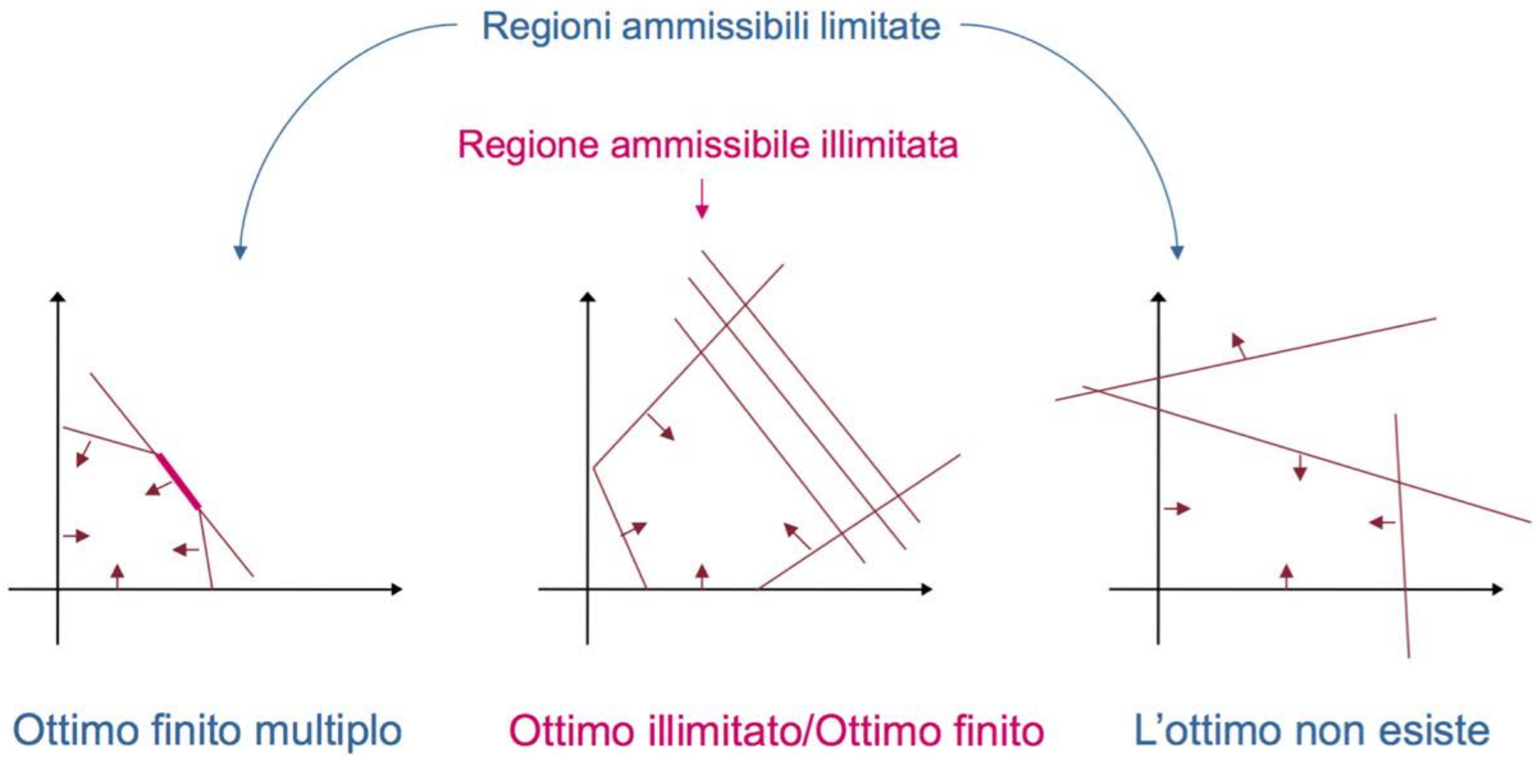
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione IV - 04 Marzo 2019

Metodo geometrico per la PL

Si possono avere situazioni diverse da quella di ottimo finito unico:

- Ottimo finito multiplo
- Ottimo illimitato
- L'ottimo non esiste (perchè il problema è non ammissibile)



Allocazione ottima di risorse

Problema di allocazione ottima di risorse (Facchinei, Lucidi, Roma, 2005-2006) Un colorificio produce due tipi di coloranti C1 e C2 utilizzando 3 preparati di base in polvere P1, P2 e P3, che vengono sciolti in acqua. La differente concentrazione dei preparati nell'acqua dà luogo ai due diversi coloranti. Le quantità dei preparati di base necessarie per produrre un litro di colorante per ciascuno dei due tipi è riportato nella tabella seguente insieme alle quantità giornaliere disponibili:

Coefficienti Tecnologici (in ettogrammi)	**C1**	**C2**	**Quantità giornaliera disponibile (in ettogrammi)**
P1	1	1	**750**
P2	1	2	**1000**
P3	-	1	**400**

Il prezzo di vendita:

C1 è di 7€ **al litro**

C2 10€ **al litro**.

Problema: determinare la strategia di produzione giornaliera che con le quantità disponibili di preparati massimizza il ricavo totale ottenuto dalla vendita dei coloranti.

Modello di PL per allocazione ottima di risorse

Formulazione del modello di PL:

funzione obiettivo $\rightarrow$ $\max\ 7x_1 + 10x_2$

vincoli di limitazione sulle risorse giornaliere

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &\le \ \ 750 \\ x_1 + 2x_2 &\le 1000 \\ x_2 &\le \ \ 400 \end{aligned} \qquad \text{(P2)}$$

vincoli di nonegatività $\rightarrow$ $x_1,\ x_2 \ge 0$

Soluzione ottima del modello:

$$x_1 = 500$$
$$x_2 = 250$$

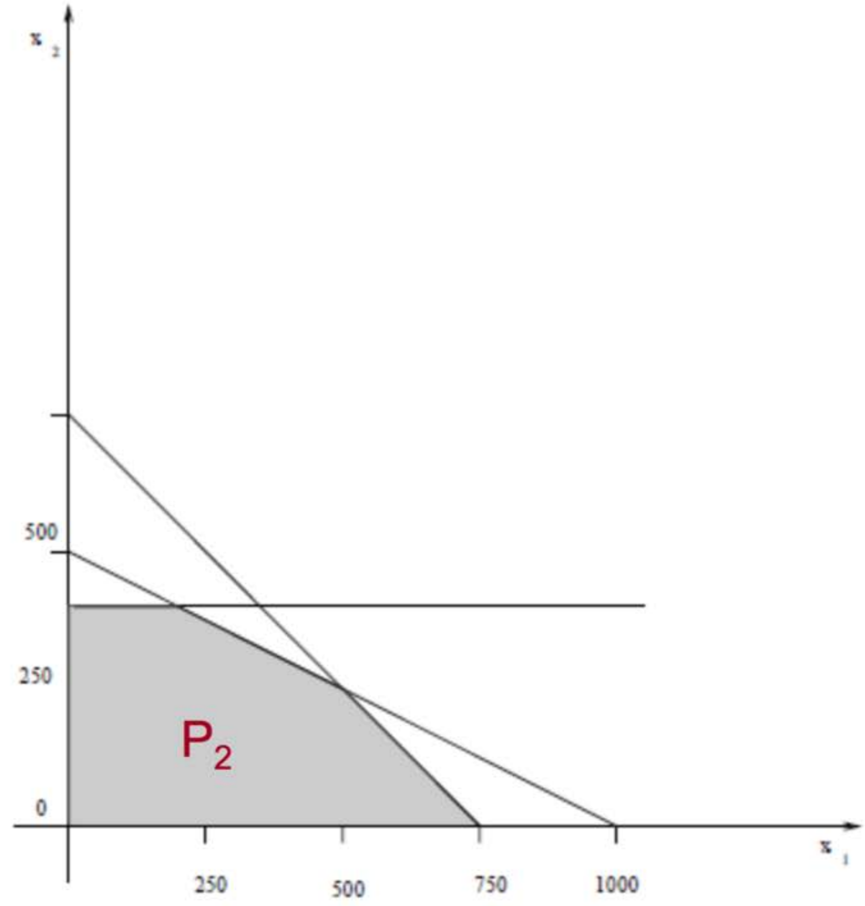
con un ricavoo totale giornaliero pari a

$$7x_1 + 10x_2 = 7 \cdot 500 + 10 \cdot 250 = 6000$$

Allocazione ottima di risorse: regione ammissibile

$$\max\ 7x_1 + 10x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 750$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 1000$$
$$x_2 \leq 400$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

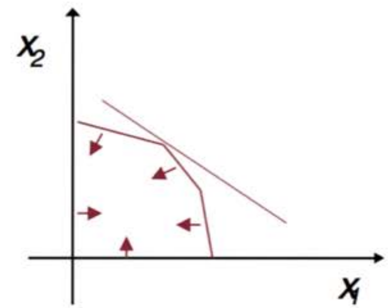
(P2)



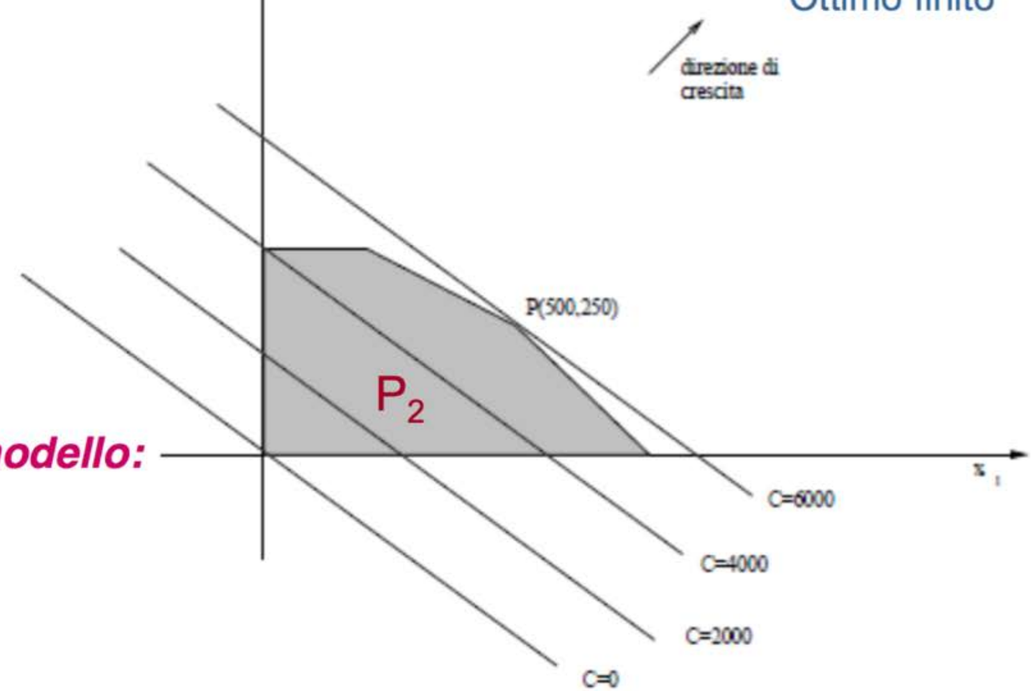
Allocazione ottima di risorse: soluzione ottima

$$\max\ 7x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 750 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\ x_2 &\leq 400 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(P2)}$$



Ottimo finito



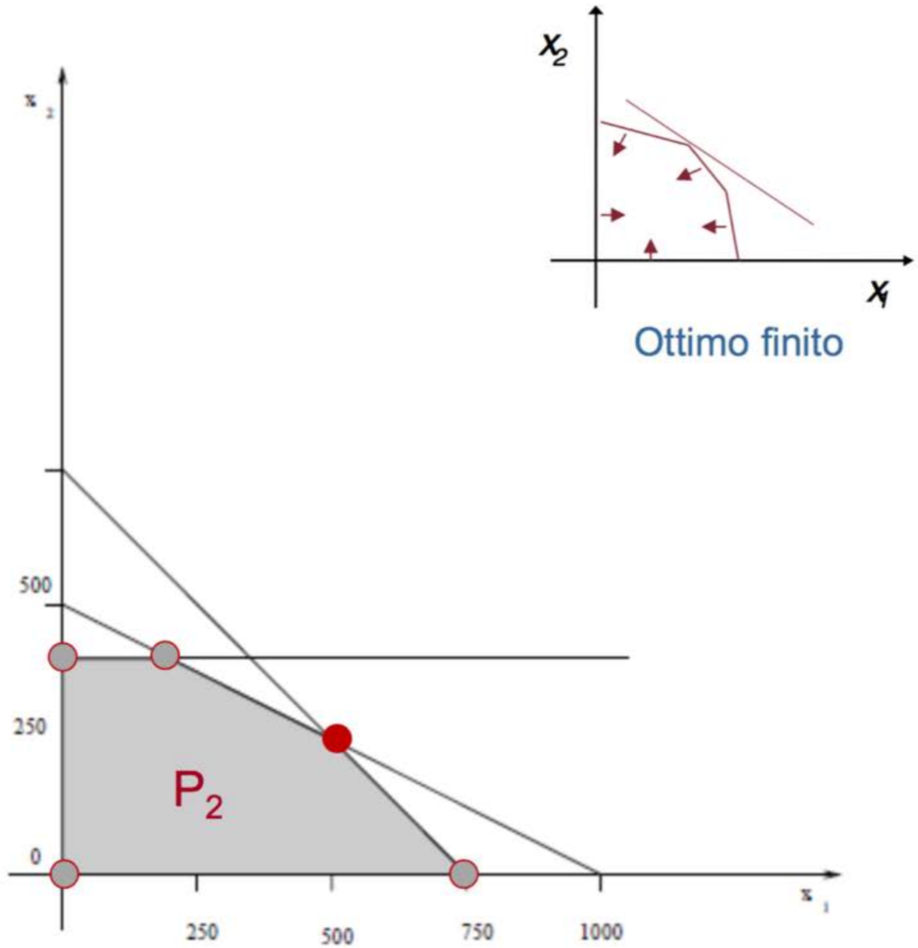
Soluzione ottima del modello:

$$x_1 = 500$$
$$x_2 = 250$$

Allocazione ottima di risorse: soluzione ottima

$$\max\ 7x_1 + 10x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 750$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 1000$$
$$x_2 \leq 400$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(P2)



Ottimo finito

Soluzione ottima del modello:

$$x_1 = 500$$
$$x_2 = 250$$

Problema di miscelazione

Una industria produce succhi di frutta mescolando polpa di frutta e dolcificante, ma garantendo nel prodotto finale alcuni requisiti relativi al contenuto di vitamina C, sali minerali, e zucchero. La tabella seguente mostra l'input del problema.

	Contenuto di nutriente in in 100 grammi di ingrediente di base		
	Polpa di frutta	**Dolcificante**	**Richieste minime**
Vitamina C (mg)	140	-	**70 mg**
Sali minerali (mg)	20	10	**30 mg**
Zucchero (gr)	25	50	**75 gr**
Costo (lire/etto)	400	600	

Problema: determinare le quantità di polpa di frutta e dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta in modo da minimizzare il costo totale per l'acquisto dei due ingredienti di base.

Problema di miscelazione: modello di PL

Formulazione del modello di PL:

Costo totale per l'acquisto degli ingredienti

vincoli di richiesta minima di nutrienti

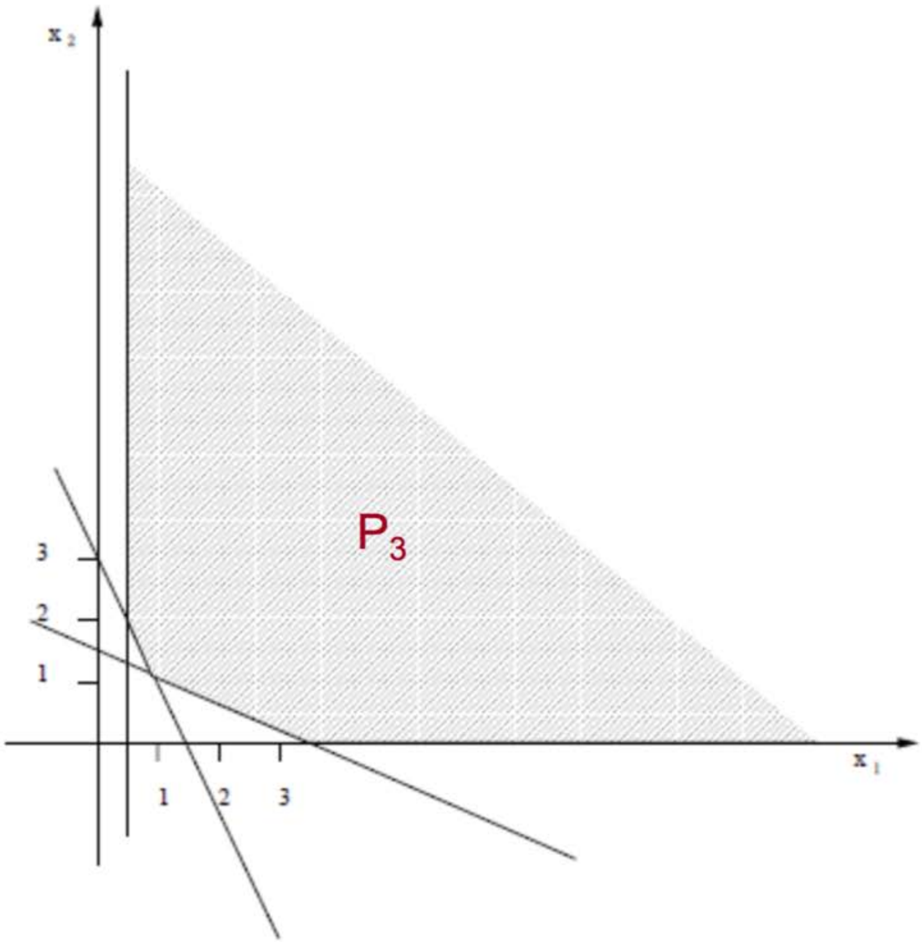
vincoli di nonegatività

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(P3)}$$

Problema di miscelazione: regione ammissibile

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

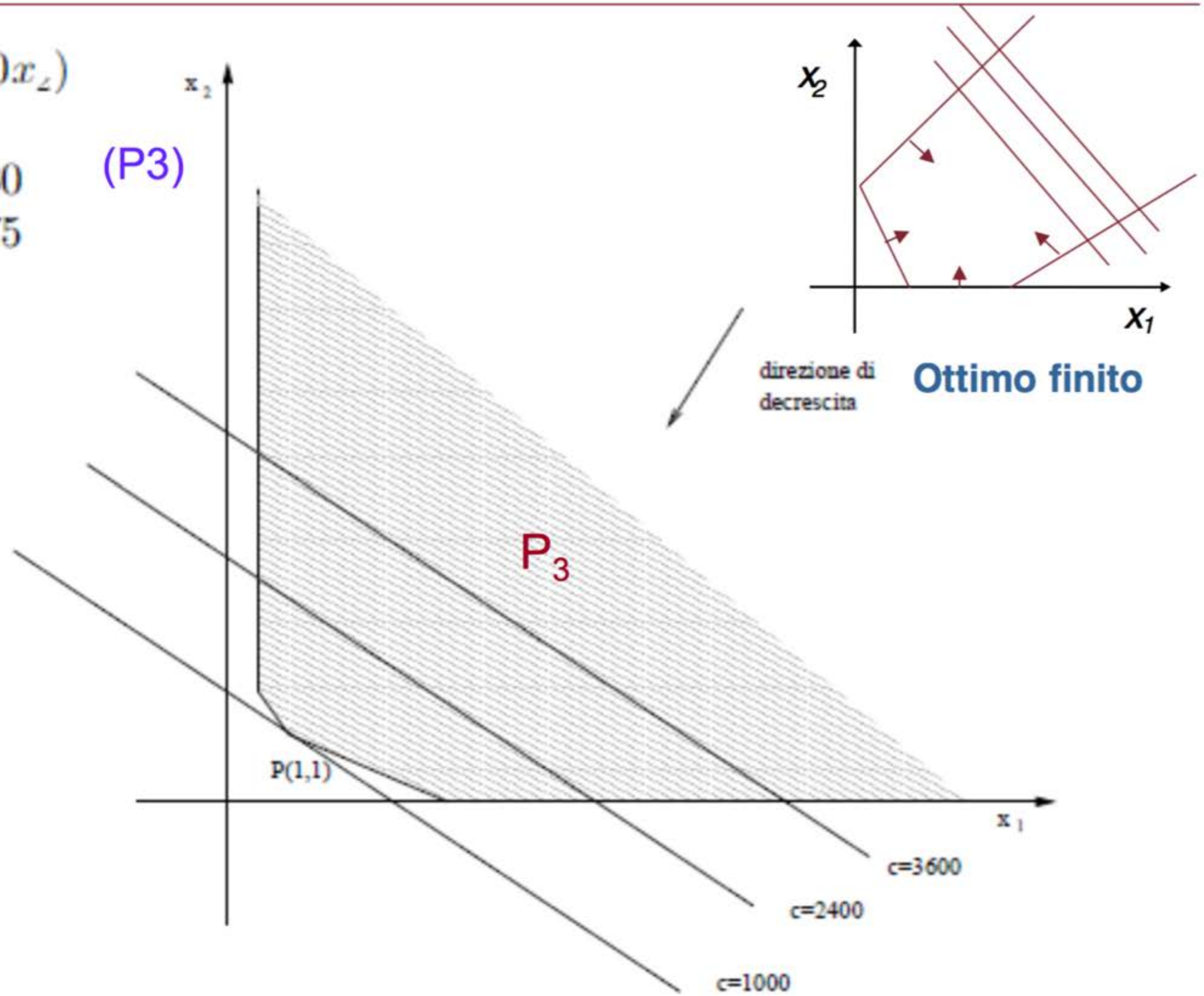
(P3)



Problema di miscelazione: soluzione ottima

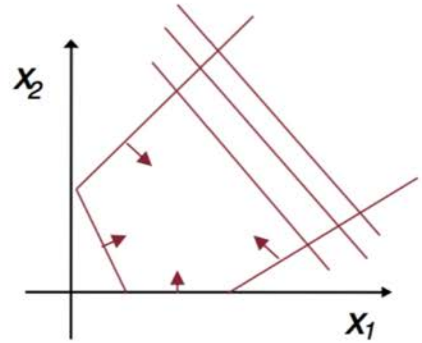
$$
\begin{cases}
\min(400x_1 + 600x_2) \\
140x_1 \geq 70 \\
20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\
25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

(P3)

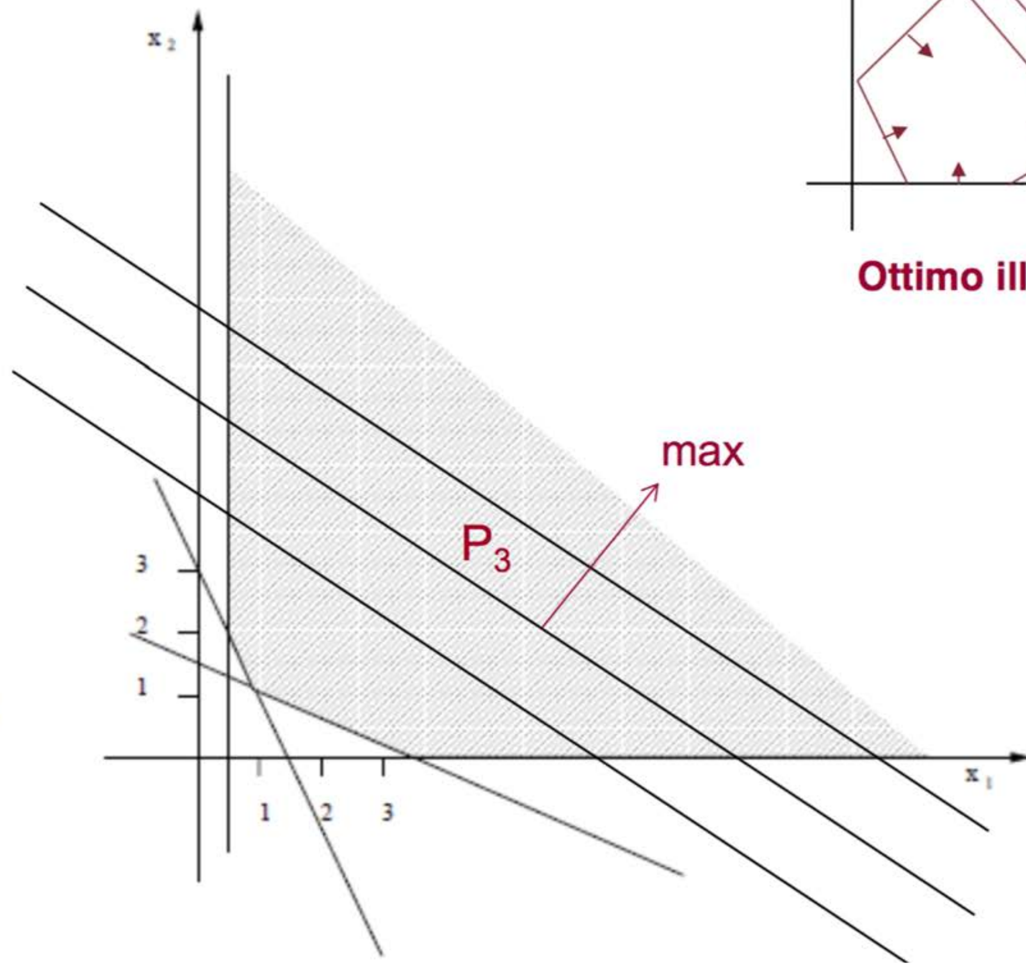


Ottimo illimitato

Supponiamo di sostituire in (P3) min con max.



Ottimo illimitato



$$
\text{(P3)} \begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ \cancel{140x_1 \geq 70} \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

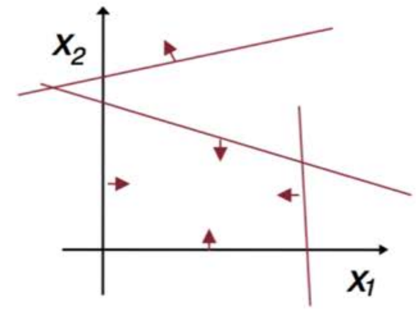
Regione ammissibile vuota

Supponiamo di sostituire in (P2) il vincolo

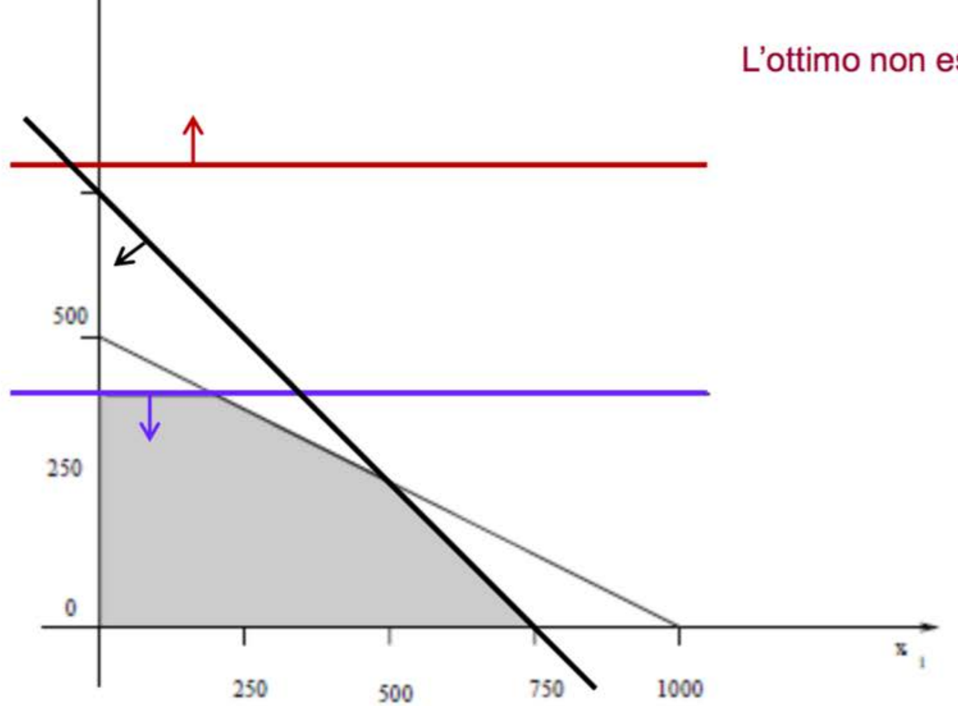
$$x_2 \leq 400$$

con

$$x_2 \geq 800$$



L'ottimo non esiste



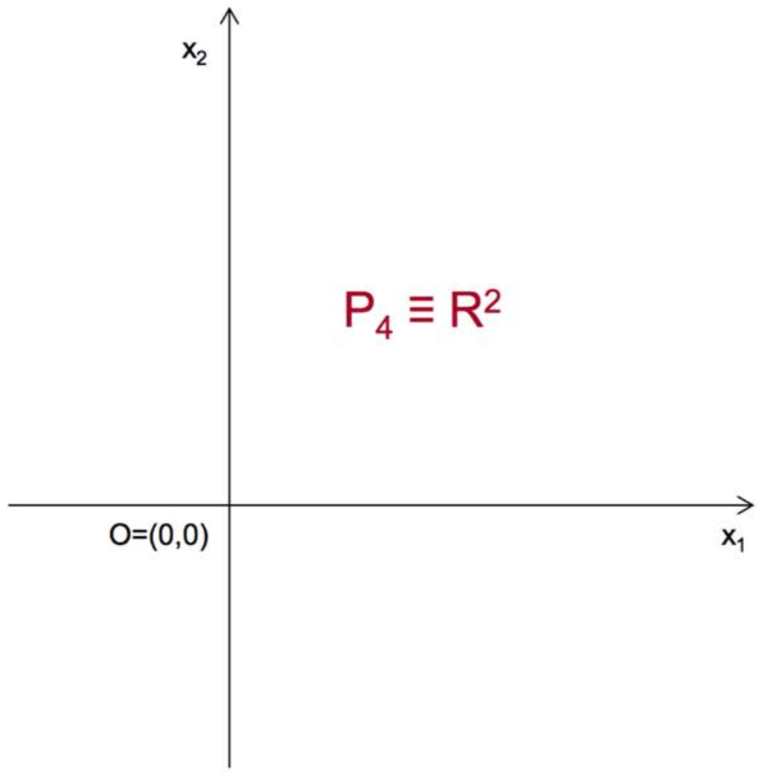
$$\max\ 7x_1 + 10x_2$$

$$\text{(P2)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 750 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\ x_2 &\leq 400 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La regione ammissibile è R^2 (problema non vincolato)

Esempio

$\max x_1 + x_2$ (P4)



Ottimo illimitato

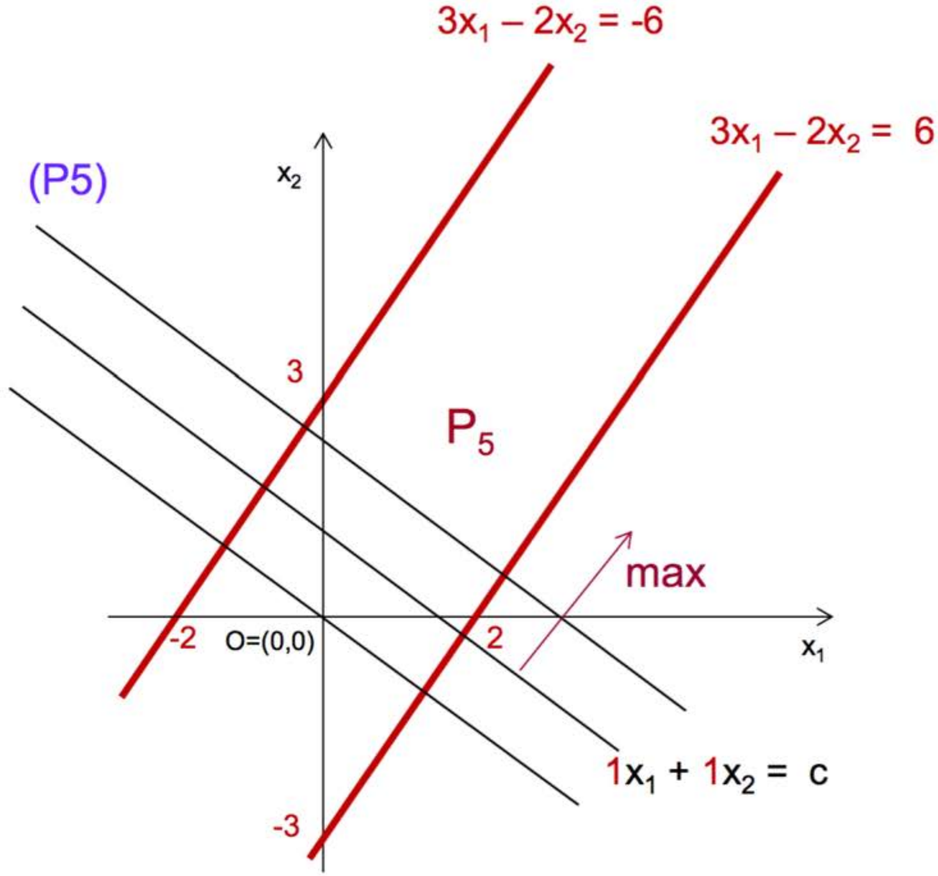
La regione ammissibile è una striscia di piano

Esempio 1

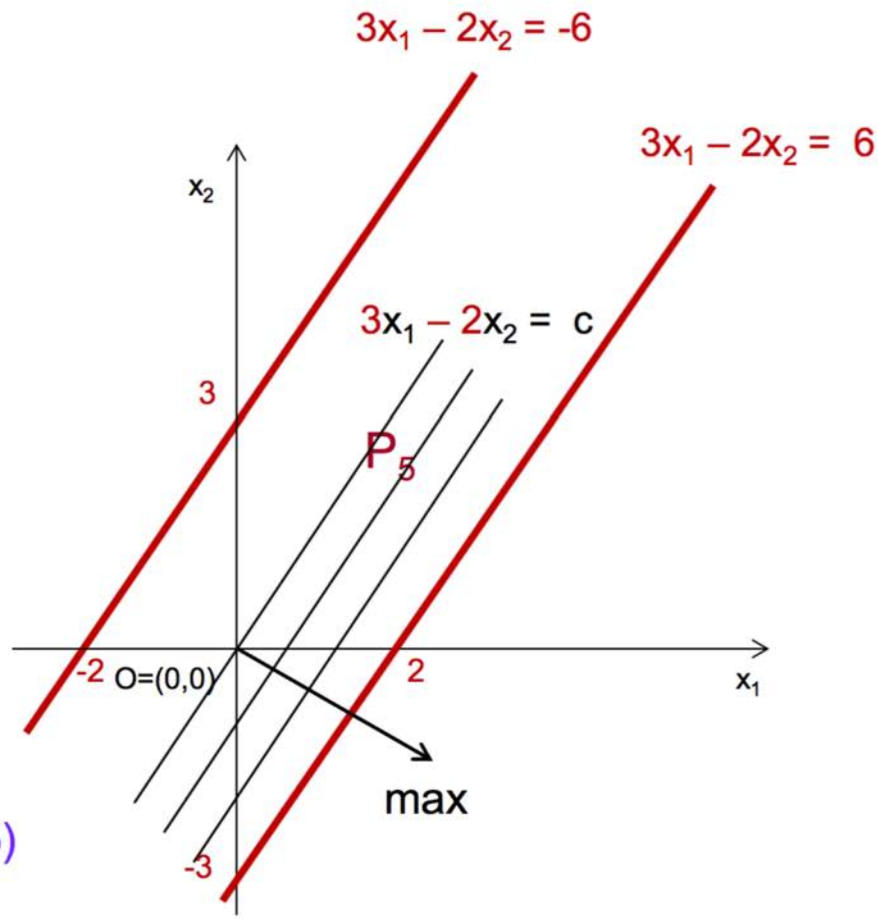
max $x_1 + x_2$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 6$$
$$3x_1 - 2x_2 \geq -6$$

Ottimo illimitato



La regione ammissibile è una striscia di piano



Esempio 2

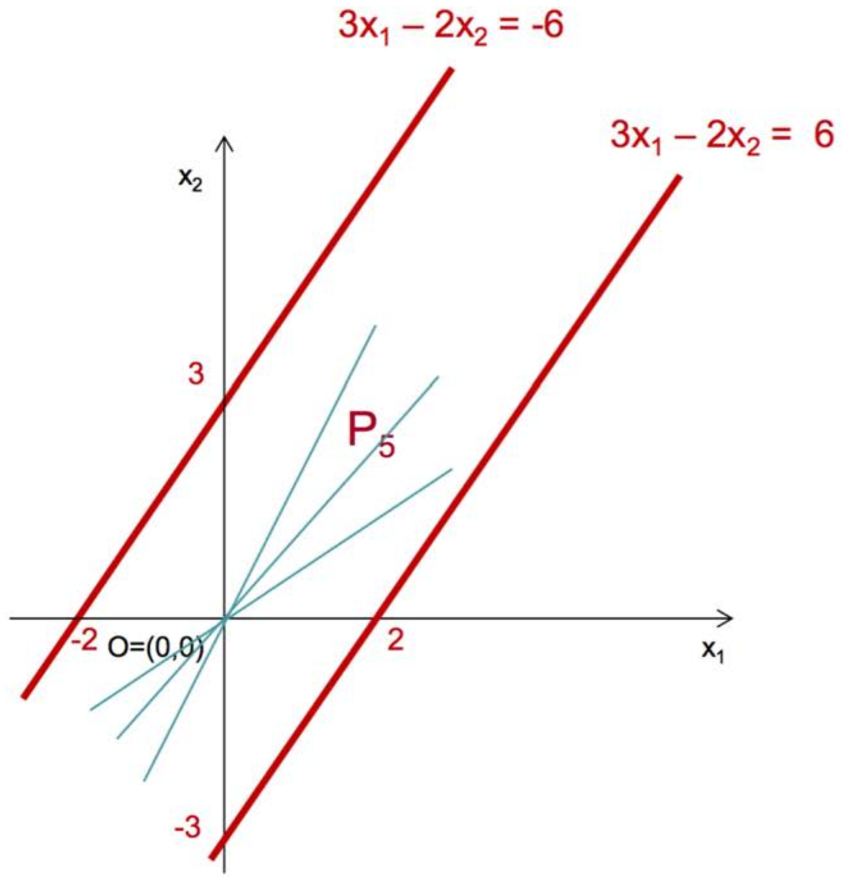
max/min $3x_1 - 2x_2$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 6$$
$$3x_1 - 2x_2 \geq -6$$

(P'5)

Ottimo finito

La regione ammissibile è una striscia di piano



max/min $c_1x_1 + c_2x_2$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 6$$
$$3x_1 - 2x_2 \geq -6$$

Ottimo illimitato

Intorni e chiusura

INTORNO di x

Sia x un punto di R^n e una distanza d (distanza euclidea), si definisce intorno di x di raggio $\varepsilon > 0$, l'insieme:

$$N_\varepsilon(x) = \{ y \text{ in } R^n : d(x,y) < \varepsilon \}$$

CHIUSURA DI S

Sia dato un insieme S in R^n. Il punto x appartiene alla chiusura di S, cl(S), se

$$S \cap N_\varepsilon(x) \neq \varnothing \textbf{ per ogni } \varepsilon > 0 .$$

INSIEME CHIUSO

Dato un insieme S in R^n, S si dice chiuso se

$$S = cl(S).$$

Punti interni e di frontiera

PUNTO INTERNO

Sia dato un insieme S in R^n. Il punto x appartiene all'interno di S, int(S), se

$N_\varepsilon(x)$ è contenuto in S **per qualche** $\varepsilon > 0$.

INSIEME APERTO

Se S = int(S), allora S si dice aperto.

PUNTO DI FRONTIERA

Sia dato un insieme S in R^n. Il punto x appartiene alla frontiera di S, ∂S, se **per ogni** $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$

$N_\varepsilon(x)$ contiene sia punti in S che punti fuori da S.

Semispazi e iperpiani in R^n

Disequazione lineare ≤ (≥)

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b$$

SEMISPAZIO

$S = \{ x \text{ in } R^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b \}$

oppure

$S = \{ x \text{ in } R^n : a^Tx \leq b \}$

Equazione lineare

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$$

IPERPIANO

$H = \{ x \text{ in } R^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \}$

oppure

$H = \{ x \text{ in } R^n : a^Tx = b \}$

Osservazioni

OSS. 1

Dato un iperpiano H in R^n, $H = \{ x \text{ in } R^n : a^T x = b\}$ esso genera in R^n due semispazi chiusi:

$$S_H^- = \{ x \text{ in } R^n : a^T x \leq b\} \quad \text{e} \quad S_H^+ = \{ x \text{ in } R^n : a^T x \geq b\}$$

OSS. 2

L'insieme vuoto $\varnothing$ può essere sempre visto come l'intersezione di un numero finito di semispazi, ad esempio, per fissati a e b:

$$\varnothing = \{ x \text{ in } R^n : a^T x \leq b - 1, a^T x \geq b \}$$

OSS. 3

L'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di PL può essere sempre visto come l'intersezione di un numero finito di semispazi, ad esempio:

$$P = \{ x \text{ in } R^n : a_i^T x \geq b_i \ i=1,2,...,m \}$$

Convessità in R^n

COMBINAZIONE CONVESSA DI DUE VETTORI

Dati x,y in R^n e un numero reale α, $0 \leq \alpha \leq 1$, la combinazione convessa di x e y è il vettore:

$$z = \alpha x + (1-\alpha)y$$

Definizione

Un vettore $b \in R^n$ è combinazione lineare dei vettori $a_1,\ldots,a_k$ in R^n se esistono k reali $\lambda_1,\ldots, \lambda_k$ tali che

$$b = \Sigma_{i=1,\ldots,k}\, \lambda_i\, a_i$$

Casi particolari:

- se $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ la combinazione si dice *affine*;
- se $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$ la combinazione si dice *conica*;
- se $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ e $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$ la combinazione si dice *convessa*.

Convessità in R^n

COMBINAZIONE CONVESSA DI DUE VETTORI

Dati x,y in R^n e un numero reale α, $0 \leq \alpha \leq 1$, la combinazione convessa di x e y è il vettore:

$$z = \alpha x + (1-\alpha)y$$

SEGMENTO

Dati x,y in R^n e il segmento di estremi x e y, [xy], è l'insieme dei punti z che sono combinazioni convesse di x e y, cioè:

$$[xy] = \{ z \text{ in } R^n : z = \alpha x + (1-\alpha)y,\ 0 \leq \alpha \leq 1 \}$$

INSIEME CONVESSO

Un insieme C in R^n è convesso se comunque presi x e y in C, si ha che:

$\alpha x + (1-\alpha)y$ appartiene a C per ogni $0 \leq \alpha \leq 1$
(oppure: [xy] è tutto contenuto in C)

Convessità in R^n

PROPOSIZIONE Un semispazio S in R^n è un insieme convesso.

Dim. Per qualsiasi x, y in $S = \{x \text{ in } R^n : a^T x \leq b\}$ e z in [xy], si ha:

$$\mathbf{a^T z} = a^T [\alpha x + (1-\alpha)y] = \alpha\, a^T x + (1-\alpha)\, a^T y \leq \alpha\, b + (1-\alpha)\, b = \mathbf{b} \qquad \blacksquare$$

PROPOSIZIONE Ogni intersezione di insiemi convessi è convessa.

Dim. Siano $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_k$ k insiemi convessi e siano x e y due vettori appartenenti alla loro intersezione. Siccome tutti gli insiemi $\mathcal{A}_i$, i=1,...,k, sono convessi, il segmento [xy] è interamente contenuto in ciascuno di essi e, dunque, nella loro intersezione. $\blacksquare$

Conseguenza ➡ L'insieme vuoto ∅ è convesso.

Poliedri in R^n

POLIEDRO (Def. 1)

Un insieme P in R^n si dice poliedro se esiste una matrice A_{mxn} reale e un vettore b_m reale tali che:

$$P = \{x \text{ in } R^n : A_{mxn}x \geq b_m\} = \{x \text{ in } R^n : a_i^T x \geq b_i \text{ , } i=1,\dots,m\}$$

POLIEDRO (Def. 2)

Un insieme P in R^n si dice poliedro se è l'intersezione di un numero finito di semispazi.

PROPRIETÀ

- L'insieme vuoto ∅ è un poliedro;
- R^n è un poliedro;
- L'iperpiano H e il semispazio S sono poliedri;
- Ogni poliedro è un insieme convesso.

POLIEDRO IN FORMA STANDARD

Data A_{mxn} reale, con $m \leq n$ e $R(A)=m$, un poliedro in Forma Standard è definito come segue:

$$P = \{x \text{ in } R^n : A_{mxn}x = b_m, x \geq 0\}.$$

Punti intermedi e punti estremi di un poliedro P

PUNTO INTERMEDIO

Sia x un punto di P in R^n. Il punto x si dice intermedio se esistono due punti y e w in P, $y \neq w$ ($\neq x$):

$$x = \alpha y + (1-\alpha)w \quad \textbf{per qualche} \quad \alpha \text{ in } (0,1)$$

PUNTO ESTREMO

Sia x un punto di P in R^n. Il punto x si dice punto estremo di P se non è punto intermedio di P.
In altre parole, se per due punti y e w in P, e α in (0,1) si ha sempre che:

$$x = \alpha y + (1-\alpha)w \quad \textbf{implica} \quad x = y = w$$

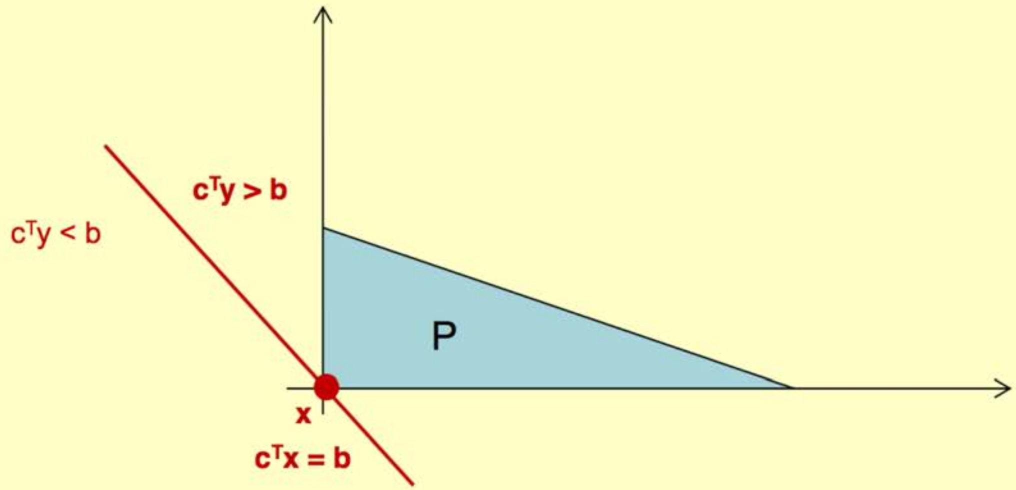
VERTICE

Un punto x del poliedro P in R^n è un vertice di P se esiste un vettore c in R^n tale che

$$c^T y > c^T x \quad \textbf{per ogni} \quad y \text{ in } P,\ y \neq x.$$

In altre parole, x è vertice di P se esiste un iperpiano H, che interseca P solo nel punto x, rispetto al quale P si trova tutto in S_H^+ (o in S_H^-).

Punti intermedi e punti estremi di un poliedro P



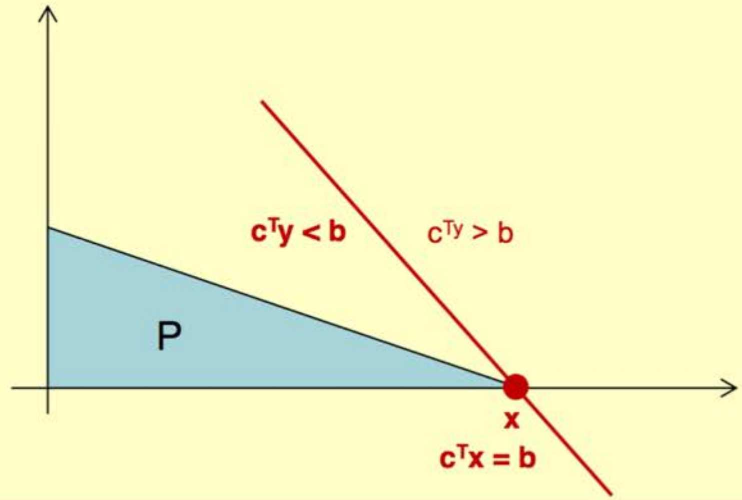
VERTICE

Un punto x del poliedro P in R^n è un vertice di P se esiste un vettore c in R^n tale che

$$c^T y > c^T x \quad \text{per ogni} \quad y \text{ in } P,\ y \neq x.$$

In altre parole, x è vertice di P se esiste un iperpiano H, che interseca P solo nel punto x, rispetto al quale P si trova tutto in S_H^{+} (o in S_H^{-}).

Punti intermedi e punti estremi di un poliedro P



VERTICE

Un punto x del poliedro P in R^n è un vertice di P se esiste un vettore c in R^n tale che

$$c^Ty < c^Tx \quad \text{per ogni} \quad y \text{ in } P,\ y \neq x.$$

In altre parole, x è vertice di P se esiste un iperpiano H, che interseca P solo nel punto x, rispetto al quale P si trova tutto in $S_H^{\,+}$ (o in $S_H^{\,-}$).

Rette e semirette, politopi

RETTE CONTENUTE IN P

Si dice che un poliedro P contiene una retta se esiste un punto x in P e un vettore $d \neq 0$ in R^n tali che:

$x + \lambda d$ appartiene a P per ogni λ reale.

SEMIRETTE CONTENUTE IN P

Si dice che un poliedro P contiene una semiretta se esiste un punto x in P e un vettore $d \neq 0$ in R^n tali che:

$x + \lambda d$ appartiene a P per ogni $\boldsymbol{\lambda \geq 0}$ reale.

INSIEME LIMITATO

Un insieme S in R^n è limitato se

esiste $M > 0$ tale che per ogni x in S si ha:

$$|x_i| < M \quad i=1,\dots,n$$

POLITOPO

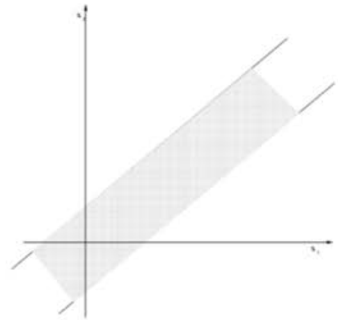
Un poliedro P in R^n si dice politopo se è **chiuso e limitato**.

Un politopo non contiene né rette né semirette.

Regione ammissibile e vertici

CASI 4 e 5

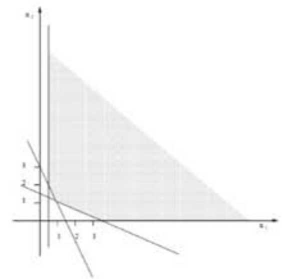
P_4 e $P_5 \neq \emptyset$



P_4 e P_5 non hanno vertici

CASO 3

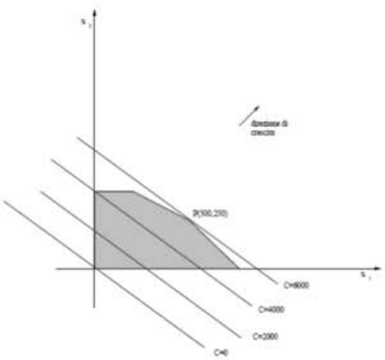
$P_3 \neq \emptyset$



P_3 ha almeno 1 vertice

CASO 2

$P_2 \neq \emptyset$

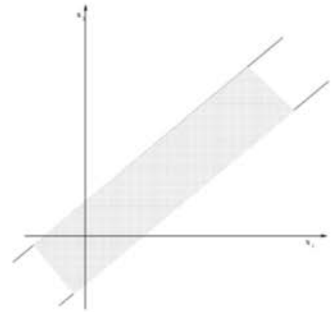


P_2 ha almeno 1 vertice ottimo

Regione ammissibile e vertici

CASI 4 e 5

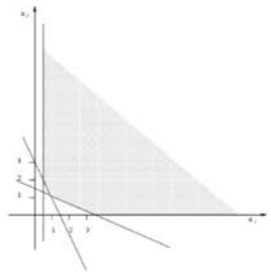
P_4 e $P_5 \neq \varnothing$
contengono **rette**



P_4 e P_5 non hanno vertici

CASO 3

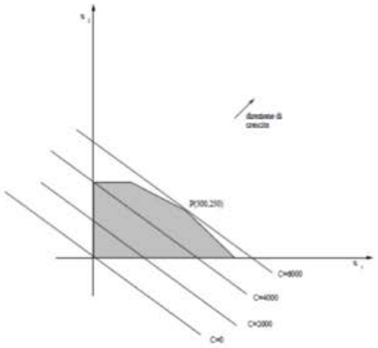
$P_3 \neq \varnothing$
non contiene rette
contiene **semirette**



P_3 ha almeno 1 vertice

CASO 2

$P_2 \neq \varnothing$
non contiene rette
non contiene semirette

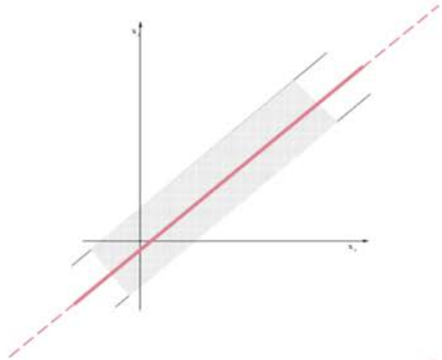


P_2 ha almeno 1 vertice ottimo

Regione ammissibile e vertici

CASI 4 e 5

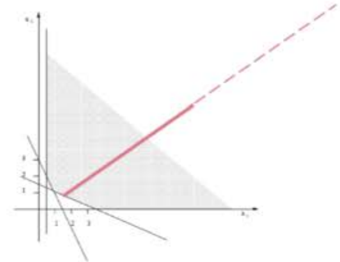
P_4 e $P_5 \neq \varnothing$
contengono rette



➡ P_4 e P_5 non hanno vertici

CASO 3

$P_3 \neq \varnothing$
non contiene rette
contiene semirette

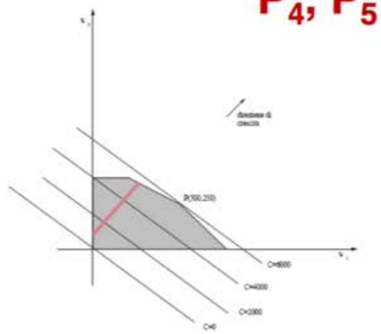


➡ P_3 ha almeno 1 vertice

P_4, P_5 e P_3 non sono limitati

CASO 2

$P_2 \neq \varnothing$
non contiene rette
non contiene semirette



➡ P_2 ha almeno 1 vertice ottimo

P_2 è un politopo

Rette e semirette in un poliedro P

DISEGUAGLIANZA VALIDA

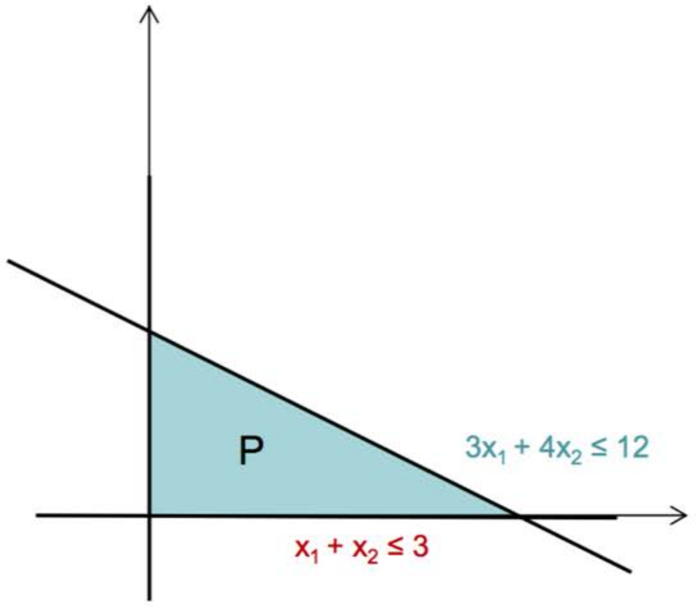
Una diseguaglianza $a^T x \leq b$ si dice valida per un poliedro $P \subseteq R^n$ se:

$$P \subseteq S = \{x \in R^n : a^T x \leq b\}.$$

ESEMPIO

Consideriamo il poliedro $P = \{ x \in R^n : x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

- Le tre disequazioni che definiscono P sono tutte valide.



Rette e semirette in un poliedro P

DISEGUAGLIANZA VALIDA

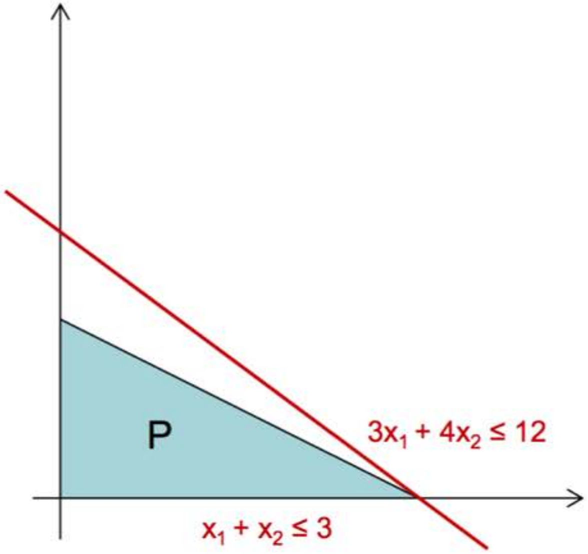
Una diseguaglianza $a^T x \leq b$ si dice valida per un poliedro $P \subseteq R^n$ se:

$$P \subseteq S = \{x \in R^n : a^T x \leq b\}.$$

ESEMPIO

Consideriamo il poliedro $P = \{ x \in R^n : x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

- Le tre disequazioni che definiscono P sono tutte valide.
- La diseguaglianza $3x_1 + 4x_2 \leq 12$
- è valida per P.



Rette e semirette in un poliedro P

DISEGUAGLIANZA VALIDA

Una diseguaglianza $a^T x \leq b$ si dice valida per un poliedro $P \subseteq R^n$ se:

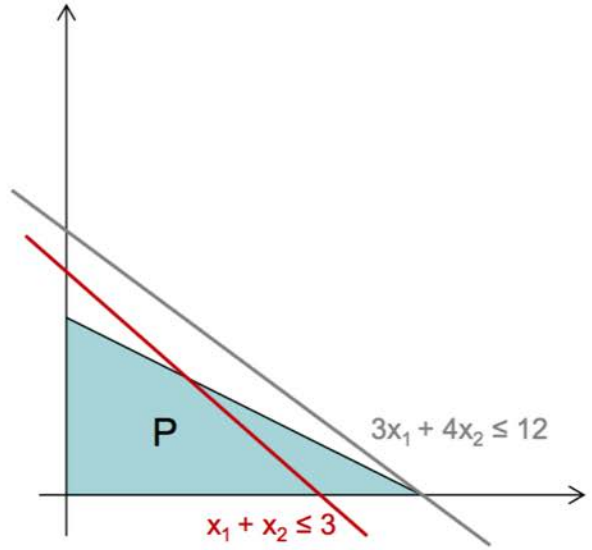
$$P \subseteq S = \{x \in R^n : a^T x \leq b\}.$$

ESEMPIO

Consideriamo il poliedro $P = \{ x \in R^n : x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

- Le tre disequazioni che definiscono P sono tutte valide.
- La diseguaglianza $3x_1 + 4x_2 \leq 12$
- è valida per P.
- La diseguaglianza $x_1 + x_2 \leq 3$ non è valida per P.

Se $a^T x \leq b$ è una diseguaglianza valida per il poliedro P e $S = \{x \in R^n : a^T x \leq b\}$, l'iperpiano $H = \{x \in R^n : a^T x = b\}$ ad essa associato si dice iperpiano di supporto di P.



Rette e semirette in un poliedro P

FACCIA Dato un poliedro $P \subseteq R^n$ e un suo iperpiano di supporto $H = \{x \in R^n : a^T x = b\}$, l'insieme

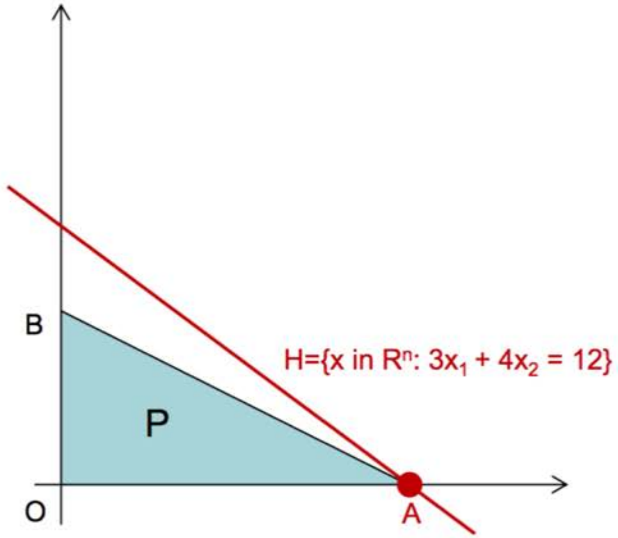
$$F = H \cap P$$

si dice faccia di P.

NOTA Una faccia di un poliedro è un poliedro.

Esempio 1

In questo caso la faccia individuata dall'iperpiano H corrisponde al vertice A di P di coordinate $x_1=4$, $x_2=0$ (unico punto in comune con P).



NOTA
Sia x* un vertice di P. Nella definizione di vertice data in precedenza è stato usato proprio l'iperpiano di supporto $H=\{x \in R^n : c^T x = c^T x^*\}$.

Rette e semirette in un poliedro P

FACCIA Dato un poliedro $P \subseteq R^n$ e un suo iperpiano di supporto $H = \{x \in R^n : a^T x = b\}$, l'insieme

$$F = H \cap P$$

VERTICE Un punto x del poliedro P in R^n è un vertice di P se esiste un vettore c in R^n tale che

$$c^T x < c^T y \quad \textbf{per ogni} \quad y \text{ in } P, y \neq x.$$

In altre parole, x è vertice di P se esiste un iperpiano H che interseca P solo nel punto x rispetto al quale P si trova tutto in $S_H^{\;+}$ (o in $S_H^{\;-}$).

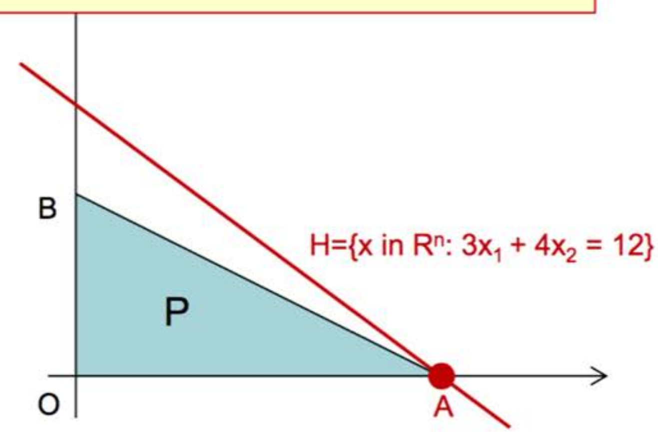
N

E

Ir

ir

corrisponde al vertice A di P di coordinate $x_1=4$, $x_2=0$ (unico punto in comune con P).



NOTA
Sia x* un vertice di P. Nella definizione di vertice data in precedenza è stato usato proprio l'iperpiano di supporto $H=\{x \in R^n : c^T x = c^T x^*\}$.

Rette e semirette in un poliedro P

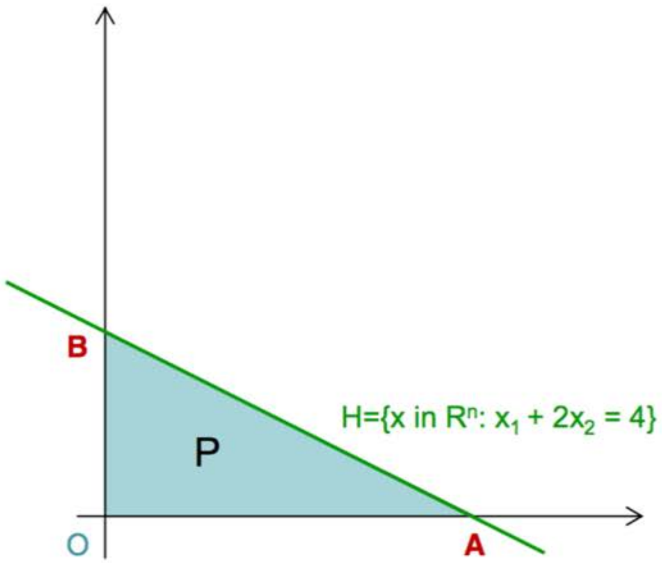
FACCIA Dato un poliedro $P \subseteq R^n$ e un suo iperpiano di supporto $H = \{x \in R^n : a^T x = b\}$, l'insieme

$$F = H \cap P$$

si dice faccia di P.

NOTA Una faccia di un poliedro è un poliedro.

Esempio 2
In questo caso la faccia individuata dall'iperpiano H corrisponde al segmento [AB].



Rette e semirette in un poliedro P

DIMENSIONE DELLA FACCIA

La dimensione di una faccia F di P $\subseteq R^n$ è unguale a

n – num. vinc. lin. indip. attivi per tutti gli x in F

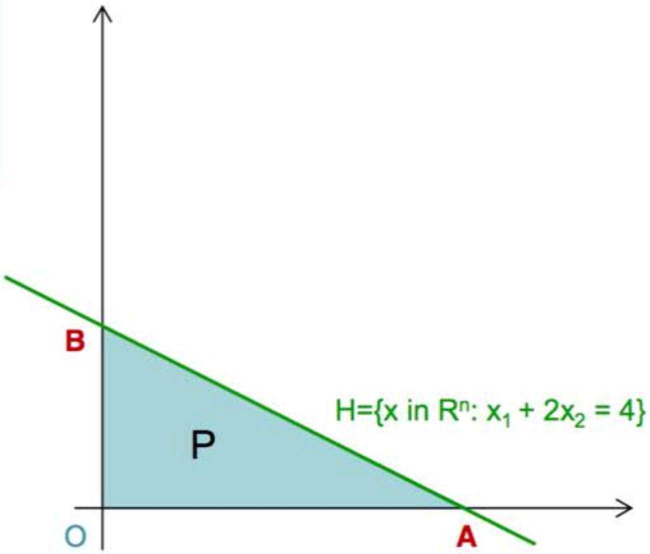
In un vertice sono attivi n vincoli l.i. ➡ Il vertice è una faccia di P di dimensione 0 = n - n

Se una faccia ha dimensione 1 può corrispondere a:

un segmento	ed è detta spigolo
una semiretta	ed è detta raggio estremo
una retta	ed è detta retta estrema

Se dim(F)=dim(P)-1 si dice che F è una faccia massimale di P

⇨ In R^2 il segmento [AB] è una faccia massimale di P.



Vincoli attivi in un punto

Vincolo attivo in un punto

Dato un vincolo $a_i^T x \geq b_i$, se per un vettore $\bar{x}$ in R^n si ha

$$a_i^T \bar{x} = b_i$$

allora si dice che il vincolo $a_i^T x \geq b_i$ è **attivo** in $\bar{x}$.

Dato un poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : A_{mxn}x \geq b_m\} = \{x \in R^n : a_i^T x \geq b_i\ ,\ i=1,...,m\}$ e punto $\bar{x}$ in P, indichiamo con $I(\bar{x})$ l'insieme dei vincoli attivi in $\bar{x}$, cioè:

$$I(\bar{x}) = \{\ i \in \{1,...,m\} : a_i^T \bar{x} = b_i\ \}$$

Si tratta di un sottoinsieme di indici di riga

Esempio

Dato il vettore $\bar{x} = (6, 24)$ e il poliedro P, si ha:

$$(P)\quad \begin{array}{ll} (1) & 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ (2) & 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ (3) & x_1 \geq 0 \\ (4) & x_2 \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 = 18 - 48 = -30 \mathbf{= -30} \\ 2x_1 - x_2 = 12 - 24 = -12 \mathbf{= -12} \\ x_1 = 6 > 0 \\ x_2 = 24 > 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad I(\bar{x}) = \{1,2\}$$

Un Lemma fondamentale

Lemma
Siano dati i vettori $a_1, \dots, a_k$ in R^n. Se il numero di vettori linearmente indipendenti tra $a_1, \dots, a_k$ è strettamente minore di n, allora esiste un vettore d in R^n, $d \neq 0$, tale che:

$$a_i^T d = 0 \quad i=1,\dots,k\,.$$

Dim. Siccome il numero di vettori linearmente indipendenti tra $a_1, \dots, a_k$ è strettamente minore di n, la matrice A_{kxn} che ha per righe i vettori $a_1, \dots, a_k$ ha **rango R(A) strettamente minore di n**.

Allora le n colonne di A, $a^1, \dots, a^n$, sono linearmente **dipendenti**, cioè esistono $d_1, \dots, d_n$, reali non tutti nulli, tali che:

$$a^1 d_1 + \dots + a^n d_n = \underline{0}_k$$

che, scrivendo il sistema **rispetto alle righe**, equivale a:

$$a_i^T d = 0 \quad i=1,\dots,k, \text{ con } d \neq 0 \qquad \blacksquare$$

Caratterizzazione dei vertici di P

Teorema (Caratterizzazione dei punti estremi/vertici di un poliedro P)
Siano dati un poliedro $P = \{x \text{ in } \mathbf{R}^n : A_{mxn}x \geq b_m\}$ e un punto **x in P**.
Il punto x è un punto estremo di P se e solo se esistono n righe a_i, i =1,...,n, tra le **m** della matrice A, tali che:

- i appartiene a **I(x)** (il vincolo i è attivo in x);
- a_i, i =1,...,n, sono **linearmente indipendenti**.

Dim. NECESSITÀ (Per Assurdo)
Hp: $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$ è un punto estremo di P $\rightarrow$ **Ts:** Ci sono n vincoli lin. indip in I(x)

Osservazione
Per semplicità in questo teorema assumiamo |I(x)|=n.

Più in generale si può avere |I(x)| **>** n.

Il risultato del teorema di caratterizzazione rimane valido anche in questo caso più generale.

Caratterizzazione dei vertici di P

Teorema (Caratterizzazione dei punti estremi/vertici di un poliedro P)
Siano dati un poliedro $P = \{x \text{ in } \mathbf{R}^n : A_{mxn}x \geq b_m\}$ e un punto **x in P**.
Il punto x è un punto estremo di P se e solo se esistono n righe a_i, i =1,...,n, tra le **m** della matrice A, tali che:

- i appartiene a **I(x)** (il vincolo i è attivo in x);
- a_i, i =1,...,n, sono **linearmente indipendenti**.

Dim. NECESSITÀ (Per Assurdo)
Hp: $\mathbf{x \in P}$ è un punto estremo di P $\rightarrow$ **Ts:** Ci sono n vincoli lin. indip in I(x)

Supponiamo PA che il numero k di vincoli linearmente indipendenti in I(x) sia k < n.

NOTA
In R^n **non può essere k > n**.

LEMMA

Esiste d in R^n, **d≠0**, tale che $a_i^T d = 0$ **i in I(x)**

Caratterizzazione dei vertici di P

Dim. NECESSITÀ (Per Assurdo)

Hp: $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$ è un punto estremo di P $\rightarrow$ **Ts:** Ci sono n vincoli lin. indip in I(x)

Consideriamo i due vettori y e z in R^n definiti come segue per $\varepsilon > 0$:

$$y = x - \varepsilon d$$
$$z = x + \varepsilon d$$

NOTA: $y \neq z$

Dimostriamo che, per un ε sufficientemente piccolo **y e z sono punti di P**, verificando prima i vincoli attivi in x e poi quelli non attivi in x.

Per ciascuno dei vincoli i in I(x) si ha:

$$a_i^T y = a_i^T(x - \varepsilon d) = a_i^T x - \varepsilon a_i^T d = a_i^T x = b_i$$
$$a_i^T z = a_i^T(x + \varepsilon d) = a_i^T x + \varepsilon a_i^T d = a_i^T x = b_i$$

Per ciascuno dei vincoli i **non** in I(x) per ε sufficientemente piccolo si ha:

$$a_i^T y = a_i^T(x - \varepsilon d) = a_i^T x - \varepsilon a_i^T d \geq b_i$$
$$a_i^T z = a_i^T(x + \varepsilon d) = a_i^T x + \varepsilon a_i^T d \geq b_i$$

Attenzione:
$\mathbf{a_i^T d \neq 0}$
$a_i^T x > b_i$

➡ y e z soddisfano $Ax \geq b$ e dunque appartengono a P.

Caratterizzazione dei vertici di P

Dim. NECESSITÀ (Per Assurdo)

Hp: **$x \in P$** è un punto estremo di P → **Ts:** Ci sono n vincoli lin. indip in I(x)

Verifichiamo ora che x è combinazione convessa di y e z. Si ha:

$$0.5y + 0.5z = 0.5\,(x - \varepsilon d) + 0.5\,(x + \varepsilon d) = x$$

e dunque risulta y, z in P, $y \neq z$ e:

$$x = 0.5y + 0.5z \quad \rightarrow \quad \text{x è punto intermedio di P}$$

✋**contraddizione:** perchè per Hp x è un punto estremo.

Allora i vincoli attivi in x linearmente indipendenti sono n.

Caratterizzazione dei vertici di P

Dim. (SUFFICIENZA) (Per Assurdo)
Hp: $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$ e ci sono n i vincoli lin. indip in I(x) → Ts: x è un punto estremo di P

Siano a_i^T, i in I(x), n righe linearmente indipendenti.
Supponiamo PA che x non sia un PE di P e quindi che sia un punto intermedio (esistono altri punti in P). In particolare devono esistere due punti y e z in P, $y \neq z \neq x$, tali che:

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z, \quad \lambda \text{ in } (0,1)$$

Siccome y e z sono in P ⟹

$$a_i^T y \geq b_i \quad i=1,\ldots,m$$
$$a_i^T z \geq b_i \quad i=1,\ldots,m$$

In particolare, però, per i in I(x) deve valere:

$$a_i^T y = b_i$$
$$a_i^T z = b_i$$

Caratterizzazione dei vertici di P

Dim. (SUFFICIENZA) (Per Assurdo)

Infatti, se così non fosse, per qualche i in I(x) avremmo:

$$\mathbf{a_i^T y > b_i} \quad \text{oppure} \quad a_i^T z > b_i$$

che implicherebbe

$$a_i^T x = a_i^T[\lambda y + (1-\lambda)z] = \lambda a_i^T y + (1-\lambda)\, a_i^T z > \lambda b_i + (1-\lambda) b_i = b_i$$

che ovviamente è impossibile perchè sappiamo per ipotesi che

$$\text{per ogni i in I(x) } a_i^T x = b_i$$

In particolare, però, per i in I(x)
deve valere:

$$a_i^T y = b_i$$
$$a_i^T z = b_i$$

Caratterizzazione dei vertici di P

Dim. (SUFFICIENZA) (Per Assurdo)
Hp: $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$ e ci sono n i vincoli lin. indip in I(x) → Ts: x è un punto estremo di P

Siano a_i^T, i in I(x), n righe linearmente indipendenti.
Supponiamo PA che x non sia un PE di P e quindi che sia un punto intermedio (esistono altri punti in P). In particolare devono esistere due punti y e z in P, $y \neq z \neq x$, tali che:

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z, \quad \lambda \text{ in } (0,1)$$

Siccome y e z sono in P →

$a_i^T y \geq b_i \quad i=1,\ldots,m$
$a_i^T z \geq b_i \quad i=1,\ldots,m$

In particolare, per i in I(x) deve valere:

$a_i^T y = b_i$
$a_i^T z = b_i$

→ Il sistema quadrato compatibile di **ordine n**:

$$a_i^T x = b_i, \quad i \text{ in } I(x)$$

ammette **tre** soluzioni $x \neq y \neq z$

contraddizione: perchè tale sistema ammette una unica soluzione.

→ **Allora x è un punto estremo di P.** ■

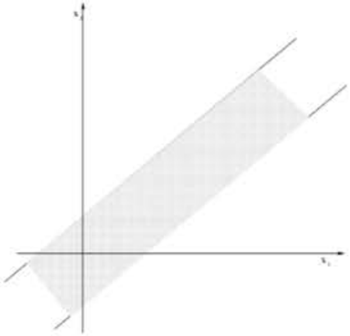
Conseguenze

Corollario 1

Sia dato un poliedro P = {x in R^n : $A_{mxn}x \geq b_m$}. Se la matrice A_{mxn} ha un numero di righe linearmente indipendenti **minore di n**, allora P non ha punti estremi/vertici.

Esempio 1

(P5)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 &\geq -6 \end{aligned}$$



In particolare, P non ha vertici se m<n (ricordiamo che m conta tutti i vincoli del sistema).

Conseguenze

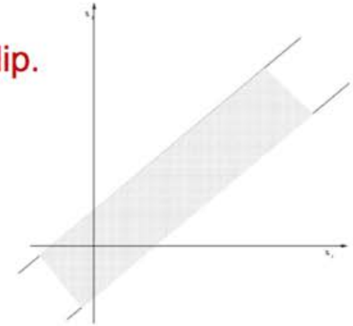
Corollario 1

Sia dato un poliedro P = {x in R^n : $A_{mxn}x \geq b_m$}. Se la matrice A_{mxn} ha un numero di righe linearmente indipendenti **minore di n**, allora P non ha punti estremi/vertici.

Esempio 1

Non ho 2 righe lin. Indip.

(P5) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 &\geq -6 \end{aligned}$$

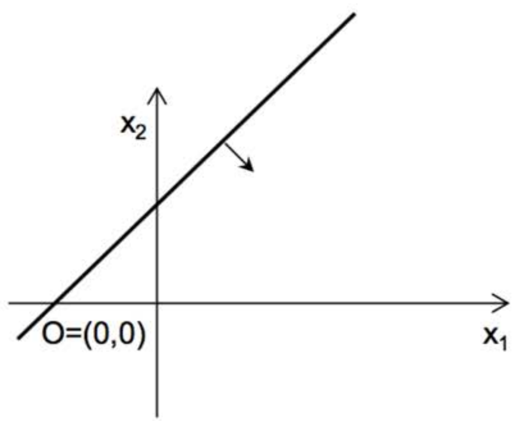


In particolare, P non ha vertici se m<n (ricordiamo che m conta tutti i vincoli del sistema).

Esempio 2

Non ho 2 righe!

(P6) $$3x_1 - 2x_2 \geq -6$$



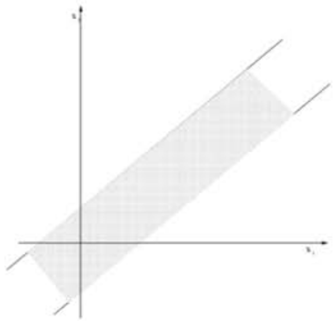
Conseguenze

Corollario 1

Sia dato un poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : A_{mxn}x \geq b_m\}$. Se la matrice A_{mxn} ha un numero di righe linearmente indipendenti **minore di n**, allora P non ha punti estremi/vertici.

Esempio 1

(P5)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 &\geq -6 \end{aligned}$$

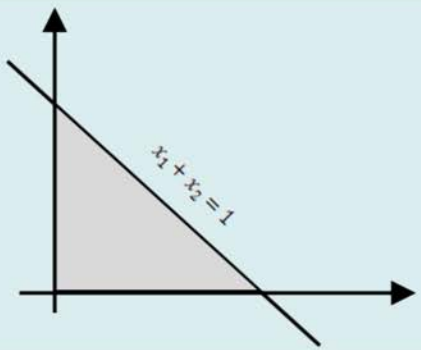


In particolare, P non ha vertici se m<n (ricordiamo che m conta tutti i vincoli del sistema).

Esempio 3

(P7)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Posso scegliere 2 righe lin. indip. in tre modi diversi



Conseguenze

Corollario 3

Un poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : A_{mxn}x \geq b_m\}$ ha al più un numero finito di punti estremi/vertici.

Se $m < n$ $\xrightarrow{\text{COROLLARIO 1}}$ P non ha vertici

Se $m \geq n$ $\xrightarrow{\text{COROLLARIO 2}}$ Per ogni vertice x di P, esistono in I(x) n righe di A linearmente indipendenti che determinano il sistema di cui x è sol. unica:

$$a_i^T x = b_i, \quad i \text{ in } I(x)$$

$$\Downarrow$$

P ha un numero di vertici al più pari a

$$\binom{m}{n}$$

Caratterizzazione dei vertici di P

Esempio

P ha al massimo 6 vertici:

$$(P)\quad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\geq -30 \\ 2x_1 - x_2 &\geq -12 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\binom{m}{n} = \binom{4}{2} = 6$$

Individuazione dei vertici di $P \in R^n$ in base al teorema di caratterizzazione (metodo enumerativo)

Per ogni scelta di n righe:

1. si verifica che le righe siano <u>linearmente indipendenti</u>;
2. si verifica che le righe corrispondano all'insieme $I(\bar{x})$ per qualche $\bar{x}$;
3. si verifica che $\bar{x}$ sia ammissibile (rispetto ai vincoli non attivi).

ATTENZIONE: Nell'enunciato del teorema di caratterizzazione si assume che x sia in P. Anche in questa procedura devo fare la **verifica dell'ammissibilità** di x.

Caratterizzazione dei vertici di P

Esempio

$$(P) \quad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\geq -30 \\ 2x_1 - x_2 &\geq -12 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo la coppia delle prime due righe, cioè:

$$I(x) = \{1,2\}$$

1. si verifica che le righe siano linearmente indipendenti:

   $a_1^T = (3, -2)$ e $a_2^T = (2, -1)$ sono linearmente indipendenti.

Caratterizzazione dei vertici di P

Esempio

$$(P)\quad \begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Consideriamo la coppia delle prime due righe, cioè:

$$I(x) = \{1,2\}$$

1. si verifica che le righe siano linearmente indipendenti;
2. si verifica che le righe corrispondano all'insieme $I(\overline{x})$ per qualche $\overline{x}$:

Per il Cor. 2, risolvendo il sistema $a_i^T x = b_i$, $i=1,2$, si ha:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -30 \\ 2x_1 - x_2 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \overline{x} = (6,24)$$

Caratterizzazione dei vertici di P

Esempio

$$(P)\quad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\geq -30 \\ 2x_1 - x_2 &\geq -12 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo la coppia delle prime due righe, cioè:

$$I(x) = \{1,2\}$$

1. si verifica che le righe siano linearmente indipendenti;
2. si verifica che le righe corrispondano all'insieme $I(\bar{x})$ per qualche $\bar{x}$;
3. si verifica che $\bar{x}$ sia ammissibile.

Il punto $\bar{x} = (6,24)$ è ammissibile, dato che soddisfa comunque **anche** i due vincoli non in $I(\bar{x})$.

$\Rightarrow$ $\bar{x} = (6,24)$ è un vertice di P

Caratterizzazione dei vertici di P

Esempio

$$(P)\quad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\geq -30 \\ 2x_1 - x_2 &\geq -12 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo la coppia della prima e terza riga, cioè:

$$I(x) = \{1,3\}$$

1. si verifica che le righe siano linearmente indipendenti:
   $a_1^T = (3, -2)$ e $a_3^T = (1, 0)$ sono linearmente indipendenti.

Caratterizzazione dei vertici di P

Esempio

$$(P)\quad \begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Consideriamo la coppia della prima e terza riga, cioè:

$$I(x) = \{1,3\}$$

1. si verifica che le righe siano linearmente indipendenti;
2. si verifica che le righe corrispondano all'insieme $I(\overline{x})$ per qualche $\overline{x}$:

Risolvendo il sistema $a_i^T x = b_i$, $i=1,3$, si ha:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -30 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \overline{x} = (0,15)$$

Caratterizzazione dei vertici di P

Esempio

$$(P)\quad \begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 & \geq & -30 \\ 2x_1 - \;\; x_2 & \geq & -12 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Consideriamo la coppia della prima e terza riga, cioè:

$$I(x) = \{1,3\}$$

1. si verifica che le righe siano linearmente indipendenti;
2. si verifica che le righe corrispondano all'insieme $I(\bar{x})$ per qualche $\bar{x}$;
3. si verifica che $\bar{x}$ sia ammissibile.

Il punto $\bar{x} = (0,15)$ **non** è ammissibile perchè **non soddisfa** il secondo vincolo dato che $0 - 15$ **<** $- 12$

$\Rightarrow$ $\bar{x} = (0,15)$ **non** è un vertice di P

Caratterizzazione dei vertici di P

Esempio

$$
(P) \quad
\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 &\geq -30 \\
2x_1 - x_2 &\geq -12 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Esercizio

Considerare le restanti coppie di righe:

{1,4} ; {2,3} ; {2,4} ; {3,4}

e verificare se corrispondono a vertici di P.

Individuazione dei vertici di $P \in R^n$ in base al teorema di caratterizzazione (metodo enumerativo)

Per ogni scelta di n righe:

1. si verifica che le righe siano <u>linearmente indipendenti</u>;
2. si verifica che le righe corrispondano all'insieme $I(\bar{x})$ per qualche $\bar{x}$;
3. si verifica che $\bar{x}$ sia ammissibile (rispetto ai vincoli non attivi).

Esercizi (dalle dispense prof. Lucidi)

Utilizzando il teorema di caratterizzazione dei vertici...

Esercizio 1

Dato il poliedro definito dalle disequazioni seguenti, verificare se i punti (0,0,0), (0,0,1/2) e (0,0,1) di P sono suoi vertici oppure no:

$$
(P) \quad
\begin{array}{ll}
(1) & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\
(2) & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\
(3) & x_1 \geq 0 \\
(4) & x_2 \geq 0 \\
(5) & x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Esercizio 2

Determinare i vertici del poliedro definito dalle disequazioni seguenti:

$$
(P) \quad
\begin{array}{rcrcrl}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq 3 \\
3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq 2 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 3 \\
4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq 4
\end{array}
\qquad
\binom{m}{n} = \binom{4}{3} = 4
$$