Ricerca Operativa
a.a. 2017-2018

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione VII - 11 Marzo 2019

Metodo del simplesso

P1: *Calcolo del vettore dei costi ridotti*

– Calcolare il vettore $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

P2: *Verifica del criterio di ottimalità*

– se per ogni $i \in \{1, \dots, n-m\}$, risulta $\gamma_i \geq 0$, allora la soluzione corrente $\bar{x}_B = B^{-1}b$, $\quad \bar{x}_N = 0_{n-m}$ è ottima. – STOP

P3: *Verifica del criterio di illimitatezza*

– se per qualche $i \in \{1, \dots, n-m\}$, tale che $\gamma_i < 0$ risulta $\pi_i \leq 0$ allora il problema è illimitato inferiormente. – STOP

Metodo del simplesso

P4: *Costruzione di una nuova base ammissibile*

- selezionare un indice $h \in \{1, \ldots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$; l'h-esima variabile fuori base, ovvero $x_{j_{m+h}}$, entra in base.
- calcolare l'indice k attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1,\ldots,m \\ \pi_{ih}>0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih})} \right\};$$

  la k-esima variabile in base, ovvero x_{j_k}, esce dalla base.
- costruire le matrici $\widetilde{B}$ e $\widetilde{N}$ a partire da B e N scambiando fra loro l'h-esima colonna di N, ovvero $a_{j_{m+h}}$ con la k-esima colonna di B, ovvero a_{j_k}.
- costruire i nuovi vettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$, $c_{\tilde{B}}$ e $c_{\tilde{N}}$.

P5: *Costruzione di una nuova forma canonica*

- calcolare le grandezze rilevanti, relative alla nuova base $\widetilde{B}$, ovvero $\widetilde{B}^{-1}b$ e $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ attraverso un'operazione di *pivot*, e definire la nuova forma canonica rispetto alla nuova base $\widetilde{B}$ ed effettuare una nuova iterazione.

Esempio

Esempio 5.5.19 *Risolvere applicando la fase II del metodo del simplesso il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\
& 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6.
\end{aligned}
$$

Il problema è in forma standard ed inoltre si dispone della base $B_0 = I$ data dalle colonne 4, 5, 6, quindi il problema è in forma canonica rispetto alle variabili x_4, x_5, x_6, ovvero:

$$
B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} \qquad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} N_0
$$

$$
x_{B_0} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \qquad x_{N_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

Esempio

Iterazione 0

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_0^T = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (4 \;\; 3 \;\; -3) = (-3 \;\; -1 \;\; 4)$$

Verifica del criterio di ottimalità:
Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:
Poiché non risulta $\pi_1 \leq 0$, o $\pi_2 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:
Variabile entrante: si sceglie l'indice h corrispondente al costo ridotto negativo minore ovvero $h = 1$ in quanto $\gamma_1 = -3 < -1 = \gamma_2$; quindi entra in base la prima variabile fuori base, ovvero x_1.

Esempio

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\ldots,3\\ \pi_{i1}>0}} \left\{ \frac{(B_0^{-1}b)_i}{\pi_{i1}} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{(B_0^{-1}b)_2}{\pi_{21}} = 1$$

si determina $k = 2$ e quindi la seconda variabile in base esce dalla base, ovvero x_5.

Nuova base:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix}, \qquad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:
si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_1 \;\; | \;\; e_2 \;\; \pi_2 \;\; \pi_3 \;\; | \;\; B_0^{-1}b)$$

ovvero

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{2} & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Esempio

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_1)_2 = 2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & | & -1/2 & 5/2 & 11/2 & | & 2 \\ 1 & | & 1/2 & -1/2 & -5/2 & | & 1 \\ 0 & | & -1/2 & 5/2 & 3/2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\left(e_2 \quad | \quad B_1^{-1} N_1 \quad | \quad B_1^{-1} b \right).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\min \quad (1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Esempio

Iterazione 1

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_1^T = (1\ \ 2\ \ 1) - (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 1) - (-1/2\ \ 9/2\ \ 9/2) = (3/2\ \ -5/2\ \ -7/2)$$

Verifica del criterio di ottimalità:
Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:
Poiché non risulta $\pi_2 \leq 0$, o $\pi_3 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:
Variabile entrante: si sceglie l'indice h corrispondente al costo ridotto negativo minore ovvero $h = 3$ in quanto $\gamma_3 = -7/2 < -5/2 = \gamma_2$; quindi entra in base la terza variabile fuori base, ovvero x_3.
Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,3 \\ \pi_{i3}>0}} \left\{ \frac{(B_1^{-1}b)_i}{\pi_{i3}} \right\} = \min\left\{ \frac{2}{11/2}, \frac{0}{3/2} \right\} = \frac{(B_1^{-1}b)_3}{\pi_{33}} = 0 \qquad (5.64)$$

si determina $k = 3$ e quindi la terza variabile in base esce dalla base, ovvero x_6.

Esempio

Nuova base:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:
si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\, \pi_3 \;\; | \;\; \pi_1 \;\; \pi_2 \;\; e_3 \;\; | \;\; B_1^{-1} b \,)$$

ovvero

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 11/2 & -1/2 & 5/2 & 0 & 2 \\ -5/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ \mathbf{3/2} & -1/2 & 5/2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_3)_3 = 3/2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 4/3 & -20/3 & -11/3 & 2 \\ 0 & -1/3 & 11/3 & 5/3 & 1 \\ 1 & -1/3 & 5/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right)$$

ovvero

$$(\, e_3 \;\; | \;\; B_2^{-1} N_2 \;\; | \;\; B_2^{-1} b \,).$$

Esempio

Quindi la nuova forma canonica è

$$
\begin{aligned}
&\min \quad (1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 \;\; 2 \;\; 1)\begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

Iterazione 2

Calcolo dei costi ridotti:

$$
\gamma_2^T = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (2/3 \;\; -4/3 \;\; -4/3) = (1/3 \;\; 10/3 \;\; 7/2)
$$

Verifica del criterio di ottimalità:
Poiché risulta $\gamma_2 > 0$ il criterio di ottimalità è soddisfatto e quindi la soluzione

$$
\bar{x}^\star = (1, 0, 0, 2, 0, 0)^T
$$

è soluzione ottima del problema ed è l'unica soluzione ottima poichè il vettore dei costi ridotti ha tutte le componenti positive. $\square$

Criterio del rapporto minimo

Teorema 5.5.11 *Data una matrice di base ammissibile B del problema 5.24. Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e sia $\bar{\rho}$ lo scalare dato da*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ \pi_{ih}>0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\}. \tag{5.33}$$

Allora, i punti $x(\rho)$ definiti dalla 5.32 con $\rho \in [0, \bar{\rho}]$, sono punti ammissibili per il problema 5.24.

Criterio del rapporto minimo

Teorema 5.5.13 *Data una matrice di base ammissibile* $B = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}, \ldots, a_{j_m})$ *del problema 5.24. Sia* γ *il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia* h *un indice tale che* $\gamma_h < 0$ *e siano* $\bar{\rho}$ *lo scalare e* k *l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1,\ldots,m \\ \pi_{ih}>0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\}. \tag{5.38}$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ *(con* $x(\rho)$ *definito da 5.32) è una soluzione di base ammissibile del problema 5.24 e la matrice di base ammissibile* $\tilde{B}$ *associata è data da:*

$$\tilde{B} = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \ldots, a_{j_m}). \tag{5.39}$$

Osservazioni

Osservazione Nel criterio del rapporto minimo 5.33 il minimo può essere raggiunto in corrispondenza a più di un indice, ovvero l'indice k può non essere univocamente determinato. In questo caso si può fare uscire dalla base una qualunque delle variabili in corrispondenza alle quali si è raggiunto il minimo. È facile verificare che in questo caso la nuova soluzione di base è degenere. Più precisamente saranno nulle tutte le componenti della soluzione di base corrispondenti agli indici per cui si è raggiunto il minimo nella 5.33 (oltre, ovviamente alle componenti non in base).

Osservazioni

Osservazione Dal criterio del rapporto minimo 5.33 si deduce che $\bar{\rho} = \dfrac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}}$ è nullo se e solo se $(B^{-1}b)_k = 0$. Di conseguenza, una *condizione necessaria* per avere $\bar{\rho} = 0$ è che risulti $(B^{-1}b)_i = 0$ per qualche indice i, ovvero che la soluzione $\bar{x}$ associata alla base B sia *degenere*.

Osservazioni

A questo punto sorge naturale chiedersi se la condizione $(B^{-1}b)_i = 0$ per qualche indice i, ovvero che la soluzione è degenere, è anche una *condizione sufficiente* affinché $\bar{\rho}$ sia nullo. La risposta è negativa: infatti è possibile che il valore $\bar{\rho}$ sia diverso da zero in corrispondenza ad una soluzione degenere. Dalla definizione di $\bar{\rho}$ data dalla 5.33 si deduce che tale situazione si verifica quando ad ogni componente nulla del vettore $B^{-1}b$, corrisponde una componente *non positiva* di π_h, ovvero $\pi_{ih} \leq 0$.

Dalla precedenti osservazioni segue il seguente corollario del Teorema 5.5.13

Conseguenza

Corollario 5.5.14 *Sia B una matrice di base ammissibile del problema 5.24 associata ad un vertice $\bar{x}$ non degenere. Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e siano $\bar{\rho}$ lo scalare e k l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ \pi_{ih}>0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\}.$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ (con $x(\rho)$ definito da 5.32) è una soluzione di base ammissibile del problema 5.24 tale che:

$$c^T\tilde{x} < c^T\bar{x}.$$

Convergenza del metodo del simplesso

Teorema 5.5.21 *Se nell'applicazione del metodo del simplesso non viene mai generata due volte la stessa base (cioè se nessuna base si ripete nella sequenza delle basi prodotte dal metodo), allora esiste un indice* $t \geq 1$ *tale che la base* B_t *nella sequenza prodotta dal metodo soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza.*

Prova. Come abbiamo più volte osservato, ad ogni iterazione, se i criteri di arresto e di illimitatezza non sono verificati, il metodo è in grado di generare una nuova base ammissibile differente da quella corrente. D'altra parte, siccome le basi sono in numero finito, e abbiamo fatto l'ipotesi che non ci siano ripetizioni, dopo un numero finito di passi (pari al più al numero di basi ammissibili distinte del problema) non potranno più essere generate basi diverse da tutte le precedenti. Dunque, necessariamente, o il criterio di ottimalià o quello di illimitatezza devono essere soddisfatti. □

Convergenza del metodo del simplesso

Corollario 5.5.22 *Se ogni soluzione di base ammissibile del problema (5.24) è non degenere allora, in un numero finito di passi, il metodo del simplesso converge alla soluzione ottima o conclude che il problema è illimitato inferiormente.*

Convergenza del metodo del simplesso in presenza di SBA degeneri

Se il problema lineare ammette SBA degeneri, è possibile che il metodo del simplesso generi una sequenza di basi ammissibili $\{B_1, \ldots, B_q\}$ $(q > 1)$ con $B_1 = B_q$. Ovviamente affinché ciò sia possibile è evidente che (visto che il valore della funzione obiettivo ad ogni cambio di fase non cresce) deve risultare che il valore della funzione obiettivo in ogni base $\{B_1, \ldots, B_q\}$ è costante. A sua volta, ciò è possibile solamente se ad ogni iterazione $\bar{\rho} = 0$. Questo vuol quindi dire che, nella situazione appena descritta, le basi $\{B_1, \ldots, B_q\}$

corrispondono tutte allo stesso vertice (degenere). In tale situazione, se usiamo un qualsiasi criterio deterministico per la scelta della variabile entrante e della variabile uscente, l'algoritmo genererà la stessa sequenza di basi ammissibili indefinitamente. Tale situazione viene detta di *ciclaggio*, ed è illustrata dal seguente esempio, dovuto a Beale.

Esempio (ciclaggio)

Esempio 5.5.23 Si consideri il problema

$$\begin{array}{llllllllll}
\min & & & \frac{3}{4}x_4 & +20x_5, & -\frac{1}{2}x_6 & +6x_7 & & \\
& x_1 & & +\frac{1}{4}x_4 & -8x_5 & -x_6 & +9x_7 & = 0 & \\
& & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & -12x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +3x_7 & = 0 & \\
& & x_3 & & & +x_6 & & = 1 & \\
& & & & & & x & \geq 0 &
\end{array} \qquad (5.65)$$

Esempio (ciclaggio)

Indicando con a_i, $i = 1, \dots, 7$, le colonne della matrice dei vincoli di uguaglianza del problema (5.65), la base ottima di questo problema è (a_1, a_4, a_6) (si lascia al lettore la verifica del test di ottimalità). Supponiamo ora di applicare il metodo del simplesso a partire dalla base ammissibile ovvia (a_1, a_2, a_3). Si tratta ovviamente di una base degenere in quanto $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Supponiamo ora di applicare il metodo del simplesso scegliendo ad ogni iterazione l'indice h della variabile entrante per il quale il coefficiente di costo ridotto è minimo e l'indice k della varibile uscente il più piccolo tra quelli possibili (ad ogni iterazione ci sono una o due scelte possibili per k). Il lettore può verificare che con queste scelte (molto naturali, e coerenti con le scelte usate in classe per la risoluzione degli esercizi) viene generata la seguente successione di basi

$$(a_1, a_2, a_3), \quad (a_4, a_2, a_3), \quad (a_4, a_5, a_3),$$

$$(a_6, a_5, a_3), \quad (a_6, a_7, a_3), \quad (a_1, a_7, a_3), \quad (a_1, a_2, a_3).$$

Esempio (ciclaggio)

Si tratta di una serie di basi degeneri tutte corrispondenti allo stesso vertice. La cosa importante da notare è che l'ultima base indicata coincide con la prima. Quindi è chiaro che (se non si cambiano i criteri di scelta di h e k) da questo punto in poi, il metodo non farà altro che ripetere indefinitivamente la stessa successione di basi senza mai raggiungere la base ottima.

Quindi, nel caso (più frequente nelle applicazioni) in cui esistano SBA degeneri, il Metodo del Simplesso, così come descritto prima, può non convergere, ovvero può produrre una sequenza infinita di basi ammissibili senza mai verificare uno dei due criteri di arresto.

Regola di Bland

Regola anti ciclaggio di Bland: *Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad entrare in base si sceglie quella con indice h più piccolo. Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad uscire dalla base si sceglie quella con indice k più piccolo.*

Vale il seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 5.5.24 *Supponiamo di applicare il metodo del simplesso con la regola di Bland per la scelta delle variabili entranti e delle variabili uscenti (cioè per la scelta di h e k). Allora non viene mai generata due volte la stessa base e quindi, per il Teorema 5.5.21, esiste un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza generata dal metodo del simplesso soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza e il metodo converge quindi in un numero finito di passi.*

Calcolo della prima forma canonica

Si considera, coma al solito, un problema di Programmazione Lineare in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n, \end{aligned} \tag{5.66}$$

in cui si richiede la seguente assunzione.
Assunzione: *Il vettore b dei vincoli di uguaglianza del problema 5.66 è tale che:*

$$b \geq 0_m.$$

Calcolo della prima forma canonica

A partire dal problema 5.66, si definisce il seguente problema in cui si introducono m nuove variabili $\alpha_1, \dots, \alpha_m$:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + M \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \\ & Ax + I_m \alpha = b \\ & x \geq 0_n, \alpha \geq 0_m \end{aligned} \tag{5.67}$$

con $M \in R$, $M > 0$ e con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$.

Assunzioni fatte per lo sviluppo dell'algoritmo del Simplesso

i) *l'insieme ammissibile del problema (5.24) è non vuoto;*

ii) $\text{rango}(A) = m$;

iii) *data una base ammissibile B, si hanno a disposizione la matrice $B^{-1}N$ ed il vettore $B^{-1}b$.*

Calcolo della prima forma canonica

Questo nuovo problema di Programmazione Lineare soddisfa tutte le ipotesi richieste per poter applicare il precedente metodo del simplesso, infatti:

– è facile verificare che il punto $(x, \alpha) = (0, b)$, avendo ipotizzato $b \geq 0_m$, soddisfa tutti i vincoli del problema ausiliario, quindi l'insieme ammissibile del problema 5.67 è non vuoto;

– la matrice dei vincoli $(A \quad I_m)$, contenendo la matrice identità $m \times m$, soddisfa alla richiesta che rango$(A \quad I_m) = m$;

– la matrice $\hat{B} = I_m$ è una base ammissibile per il problema 5.67 (poichè $\hat{B}^{-1}b = b \geq 0_m$) e si ha che $\hat{B}^{-1}\hat{N} = \hat{N} = A$ ed $\hat{B}^{-1}b = b$.

Calcolo della prima forma canonica

Teorema 5.5.25 *Esiste un valore $\bar{M}$ tale che, per ogni $M \geq \bar{M}$ si ha che:*

- *se il Problema 5.67 ha una soluzione ottima (x^*, α^*) allora:*
  - *se $\alpha^* = 0$ allora x^* è una soluzione ottima del Problema 5.66;*
  - *se $\alpha^* \neq 0$ allora il Problema 5.66 è non ammissibile;*
- *se il Problema 5.67 è illimitato inferiormente allora il il Problema 5.66 è illimitato inferiormente oppure non ammissibile.*

Esercizio

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare con il Metodo del Simplesso

$$\max 3x_1 + 5x_2$$
$$x_1 + x_2 <= 12$$
$$x_1 <= 10$$
$$x_2 <= 6$$
$$x_1 + 2x_2 <= 16$$
$$x_1, x_2 >= 0$$