Ricerca Operativa
a.a. 2018-2019

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione XI - 20 marzo 2019

MODELLI DI PL INTERA

Modelli di PLI

Molti problemi reali possono essere rappresentati con un modello di PLI, cioè con un modello in cui vincoli e funzione obiettivo sono funzioni lineari e le variabili assumono solo **valori interi**.

Modello a variabili intere

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$x_j \text{ intera} \qquad j = 1,2,\dots,n$$

(Q)

$$\max c^T x$$
$$x \in P_Q$$
$$x \in Z^n$$

Modello a variabili binarie 0/1

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

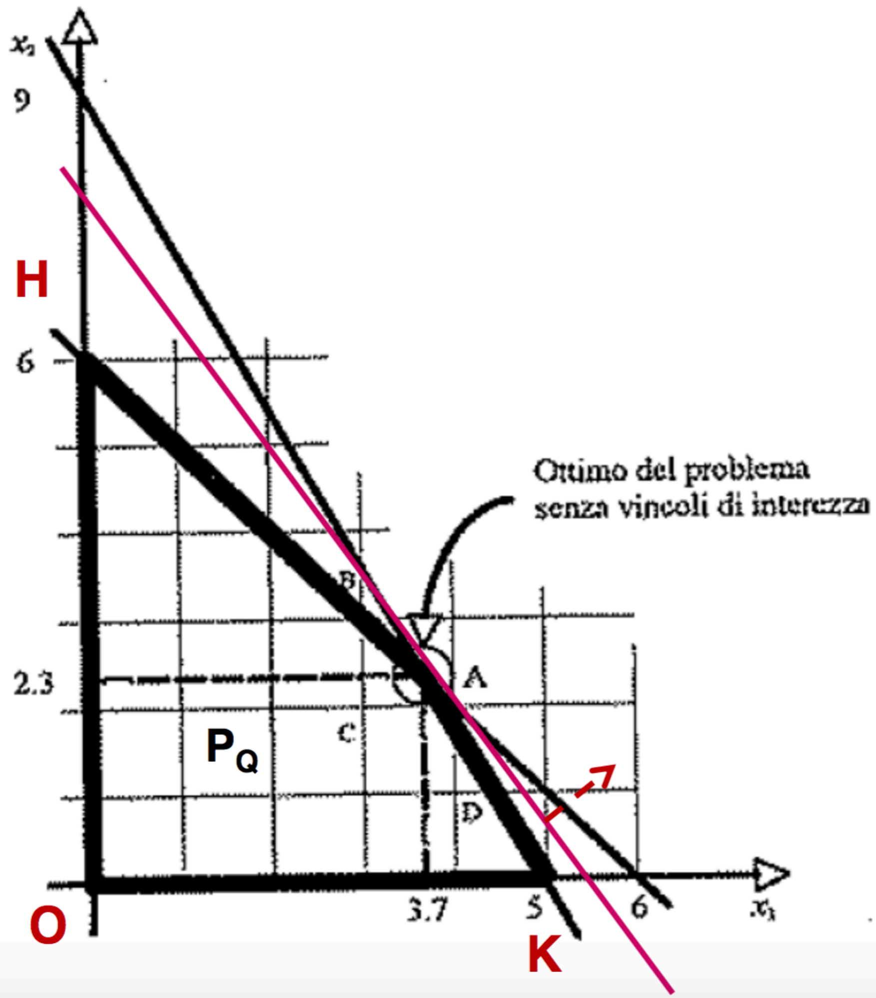
$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$\max c^T x$$
$$x \in P_Q$$
$$x \in B^n$$

Geometria della PLI: $x \in Z^n$

Esempio (Problema di produzione di tavoli e sedie, Winston, Albright, 2000)

$$
(Q) \quad
\begin{aligned}
\max\ & 8x_1 + 5x_2 \\
& x_1 + x_2 \le 6 \\
& 9x_1 + 5x_2 \le 45 \\
& x_1 ,\, x_2 \ge 0 \\
& x_1 ,\, x_2 \text{ intere}
\end{aligned}
$$



Vertici di P_Q

O = (0,0)

K = (5,0)

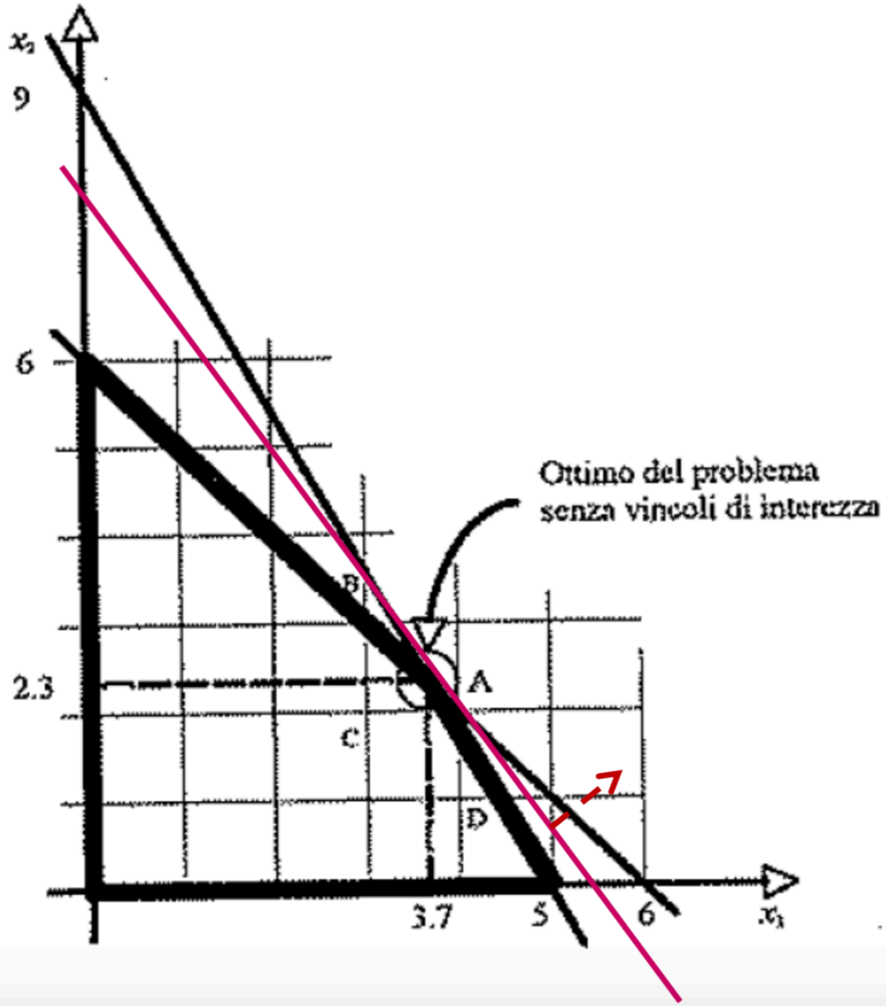
A = (3.7, 2.3)

H = (0,6)

Geometria della PLI: $x \in Z^n$

Esempio (Problema di produzione di tavoli e sedie, Winston, Albright, 2000)

$$
(Q) \quad \begin{aligned} \max\ & 8x_1 + 5x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 \le 45 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & x_1, x_2 \text{ intere} \end{aligned}
$$



Punti interi ammissibili **"vicini"** al punto A

B = (3,3)
C = (3,2)
D = (4,1)

Geometria della PLI: $x \in Z^n$

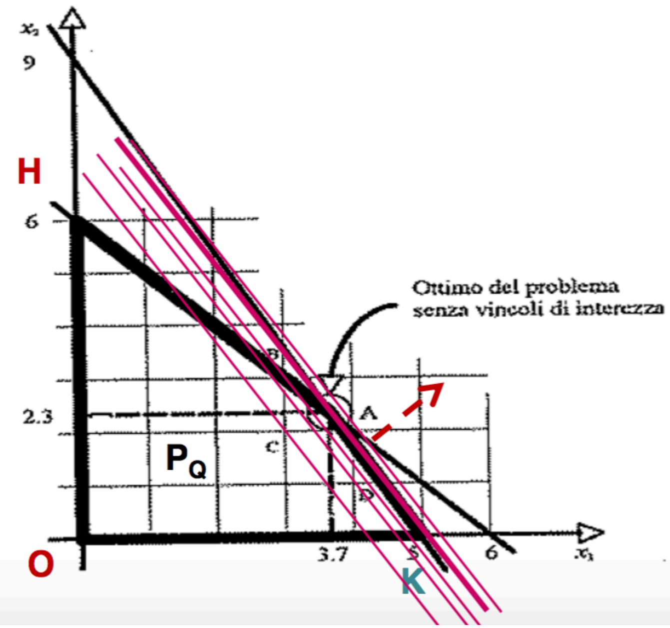
Esempio (Problema di produzione di tavoli e sedie, Winston, Albright, 2000)

Si ha:

C = (3,2) **D = (4,1)** **B = (3,3)** **K = (5,0)** **A = (3.7, 2.3)**

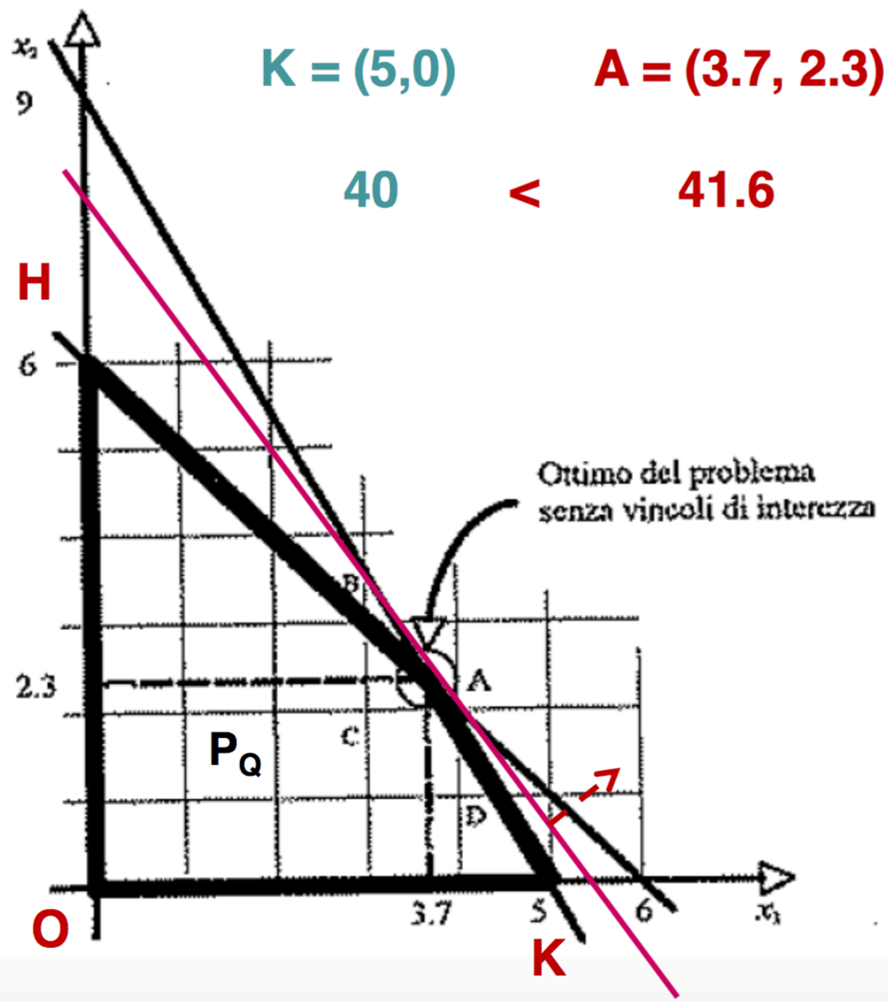
34 < 37 < 39 < 40 < 41.6

Il punto ottimo del problema intero è il punto **K = (5,0)**.



Geometria della PLI: $x \in Z^n$

Esempio (Problema di produzione di tavoli e sedie, Winston, Albright, 2000)



Il punto ottimo del problema intero è il punto **K = (5,0)**.

NOTA

K = (5,0) **non è** il punto intero 'più vicino' a A.

Le coordinate del punto K **non corrispondono** ad arrotondamenti di quelle del punto A.

Geometria della PLI: $x \in Z^n$

Esempio (Problema di produzione di tavoli e sedie, Winston, Albright, 2000)

Si ha:

C = (3,2) **D = (4,1)** **B = (3,3)** **K = (5,0)** **A = (3.7, 2.3)**

34 < 37 < 39 < 40 < 41.6

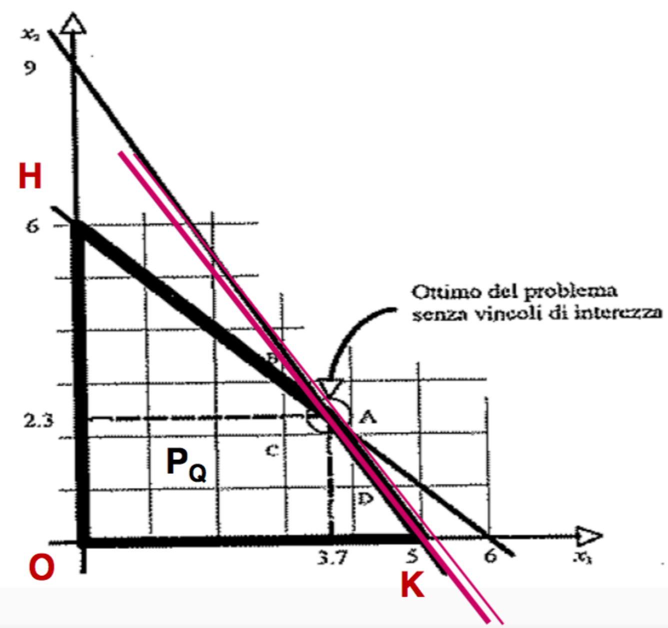
Indichiamo con **z** il valore ottimo del **problema intero** e con $\mathbf{z_L}$ il valore ottimo del problema in cui vengono **trascurati i vincoli di interezza** (problema di PL con regione ammissibile $\mathbf{P_Q}$).

Per un problema di massimo si ha

$$z_L \geq z.$$

Per un problema di minimo si ha

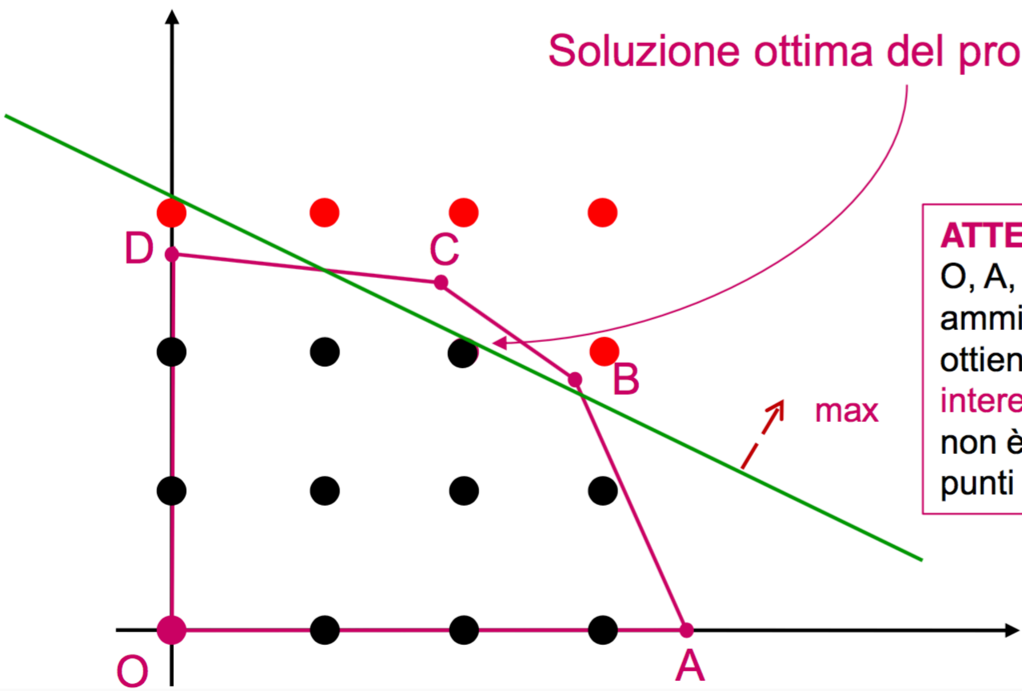
$$z_L \leq z.$$



Geometria della PLI: $x \in Z^n$

In generale, dal punto di vista geometrico, il vincolo di interezza sulle variabili definisce un reticolo di punti all'interno del poliedro $\mathbf{P_Q}$ descritto dagli altri vincoli (lineari) del problema.

Nel caso di due sole variabili, la regione ammissibile di un generico problema di PLI è del tipo seguente:

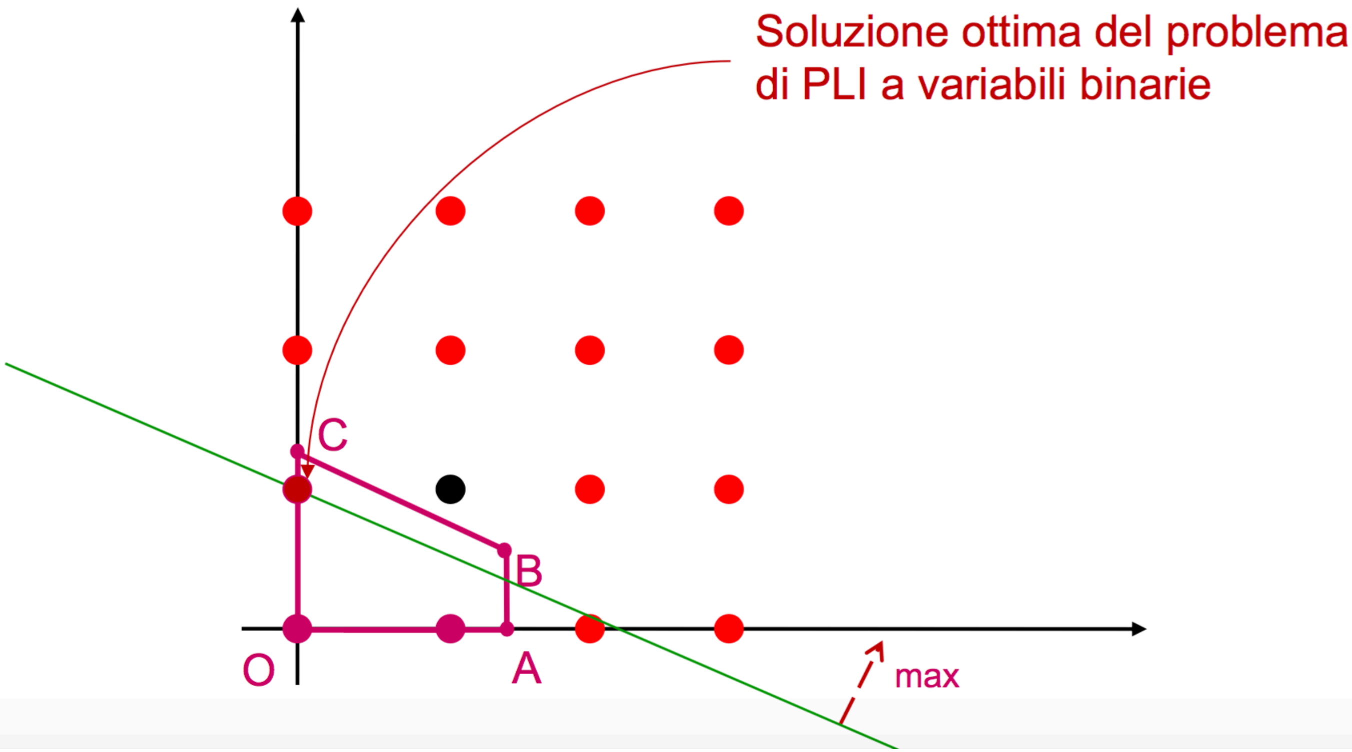


ATTENZIONE:
O, A, B, C, D sono vertici della regione ammissibile del problema di PL che si ottiene rimuovendo i vincoli di interezza sulle variabili, e, pertanto, non è detto che corrispondano tutti a punti a coordinate intere.

Geometria della PLI: $\mathbf{x} \in \mathbf{B}^n$

Nel caso di variabili binarie 0/1 i soli punti a coordinate intere da considerare sono quelli in $B^n = \{0,1\}^n$, cioè tutti i vettori di dimensione n con elementi uguali a 0 o a 1.

Per n = 2 si ha:



Soluzione di un problema di PLI

Purtroppo, a causa del vincolo di interezza sulle variabili, il problema di PLI perde tutte le “buone proprietà” che hanno i problemi di PL e perciò la sua soluzione non è altrettanto agevole.

In ogni caso, per risolvere un problema di PLI, **si sfrutta molto la teoria della PL**. In particolare si definisce un problema di PL associato al problema di PLI dato detto **rilasciamento o rilssamento continuo**.

Problema intero

$$z = \max \ cx$$
$$\boxed{\begin{array}{c} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{array}}$$
$$x \quad \text{intero}$$

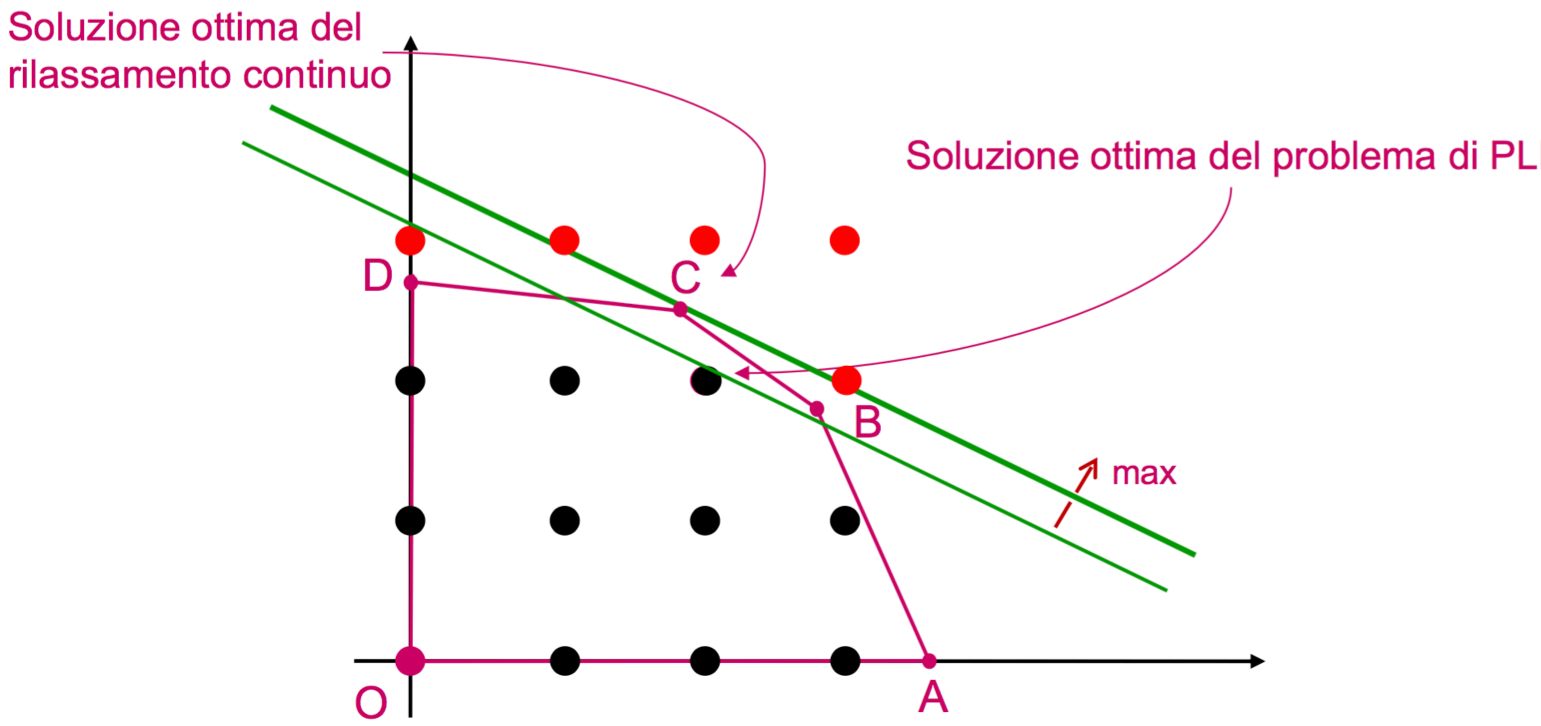
Rilassamento continuo

$$z_L = \max \ cx$$
$$\boxed{\begin{array}{c} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{array}}$$

x∈P_Q

NOTA La relazione tra ottimo del problema intero z e l’ottimo del rilassamento continuo z_L può essere sfruttata per la risoluzione del problema intero.

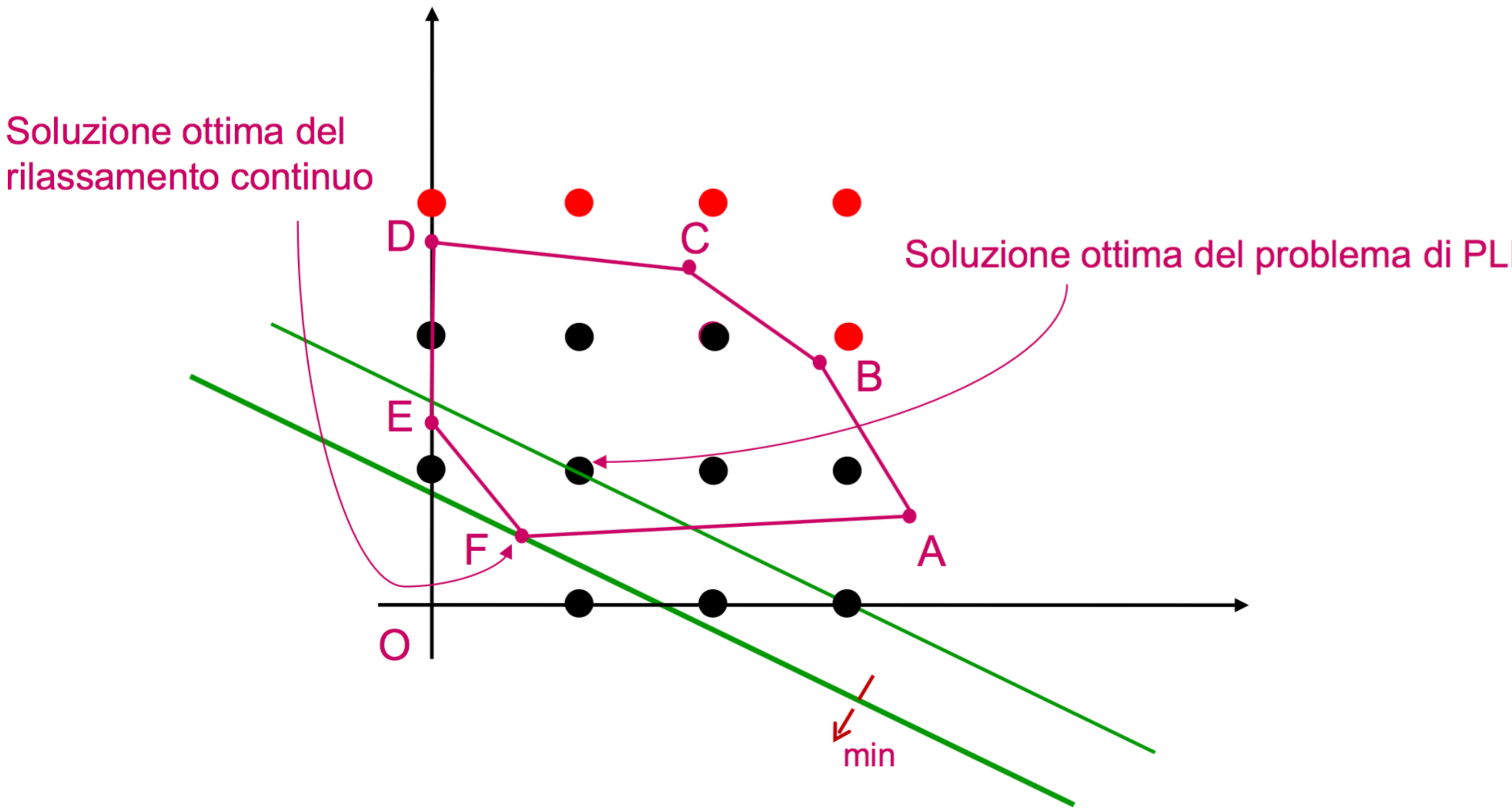
Soluzione di un problema di PLI



Per un problema di massimo si ha

$$z_L \geq z.$$

Soluzione di un problema di PLI



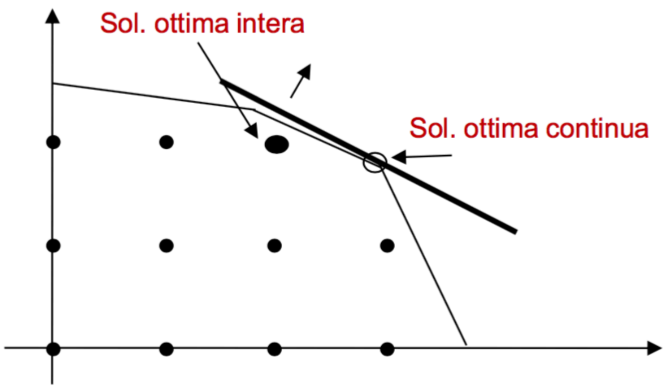
Per un problema di minimo si ha

$z_L \leq z.$

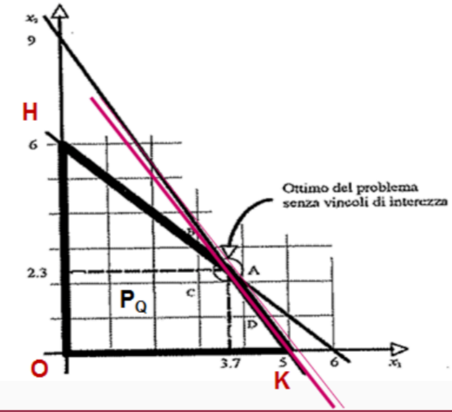
Arrotondamenti

ATTENZIONE: L'arrotondamento della soluzione ottima del rilasciamento continuo di un problema di PLI **non corrisponde** alla soluzione ottima del problema di PLI.

L'idea di ***arrotondare*** la soluzione ottima del problema rilasciato non è sempre buona! (e quindi **non è una regola valida in generale**)



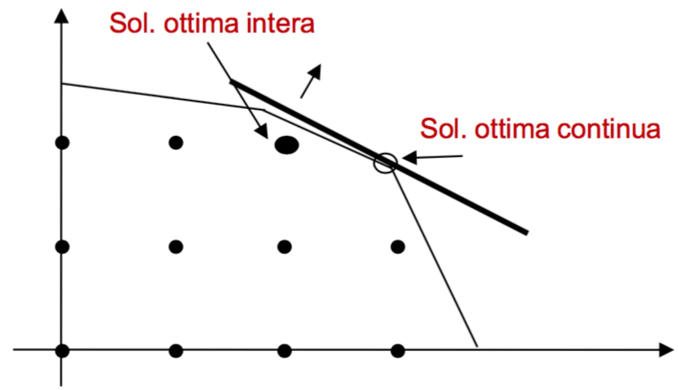
Nell'esempio visto prima la soluzione ottima era nel punto K. Esistevano però arrotondamenti di A con valori della f.o. 'vicini' a quello ottimo.



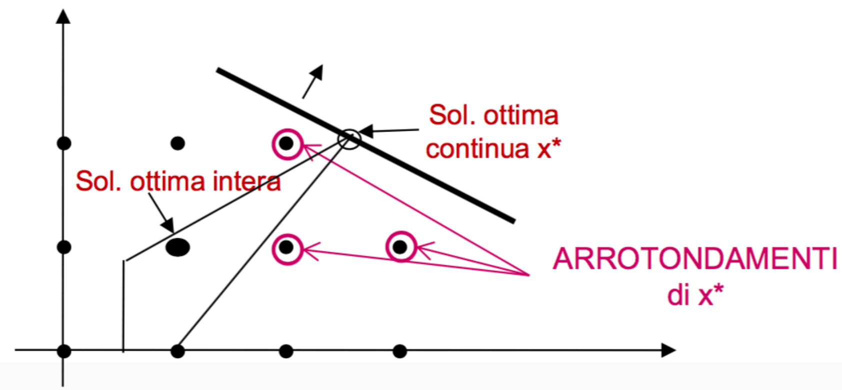
Arrotondamenti

ATTENZIONE: L'arrotondamento della soluzione ottima del rilasciamento continuo di un problema di PLI **non corrisponde** alla soluzione ottima del problema di PLI.

L'idea di ***arrotondare*** la soluzione ottima del problema rilasciato non è sempre buona! (e quindi **non è una regola valida in generale**)



Può addirittura capitare che **ogni arrotondamento** della soluzione ottima del rilassamento continuo sia una soluzione **non ammissibile** per il problema intero.



MODELLI “TUTTO O NIENTE”

Modelli “Tutto o niente”

PROBLEMA (Miscelazione di metalli, Rardin Cap. 11, pag. 555)

Una industria produttrice di **acciaio** deve miscelare i materiali in forni ad alte temperature per ottenere delle **leghe particolari**. La miscela per un carico della fornace (pari a 1000 kg) è composta da materiali di scarto (metalli di scarto, ferraglia) mescolati con metalli puri e deve contenere delle percentuali predefinite di diversi **elementi chimici**.

Percentuali minime di elementi chimici presenti in 1 kg di ogni materiale

		Composizione %				disponibilità max (in kg)	Costo per 1 kg
		Carbone	Nickel	Cromo	Molibdeno		
Materiali di scarto	**M1**	0.80	18	12	-	**75**	16
	M2	0.70	3.2	1.1	0.1	**250**	10
	M3	0.85	-	-	-	illimitata	8
	M4	0.40	-	-	-	illimitata	9
Metalli puri	**Nickel**	-	100	-	-	illimitata	48
	Cromo	-	-	100	-	illimitata	60
	Molibdeno	-	-	-	100	illimitata	53

Modelli “Tutto o niente”

Per la composizione della miscela da caricare nella fornace, per ciascun tipo di metallo puro, sono stabilite delle percentuali minime e massime che essa deve contenere per ogni elemento chimico.

Percentuali minime e massime di elementi chimici richieste per la miscela

	Carbone	Nickel	Cromo	Molibdeno
% min	0.65	3	1	1.1
% max	0.75	3.5	1.2	1.3

Ad esempio, **1000 kg** di miscela prodotta devono contenere una quantità di carbone che, in percentuale, sia compresa tra 0.65% e 0.75%, cioè:

0.0065 • 1000 ≤ quantità di **carbone** in 1000 kg di miscela ≤ 0.0075 • 1000

⇕

6.5 ≤ quantità di **carbone** in 1000 kg di miscela ≤ 7.5

Modelli “Tutto o niente”

Utilizzando un modello di PL, il problema di miscelazione di metalli è:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \overbrace{16x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 9x_4}^{\text{Materiali di scarto}} + \overbrace{48x_5 + 60x_6 + 53x_7}^{\text{Metalli puri}} & \text{(cost)} \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1000 & \text{(weight)} \\
 & 0.0080x_1 + 0.0070x_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 \geq 6.5 & \\
 & 0.0080x_1 + 0.0070x_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 \leq 7.5 & \boxed{\text{(carbon)}} \\
 & 0.180x_1 + 0.032x_2 + 1.0x_5 \geq 30 & \\
 & 0.180x_1 + 0.032x_2 + 1.0x_5 \leq 35 & \boxed{\text{(nickel)}} \\
 & 0.120x_1 + 0.011x_2 + 1.0x_6 \geq 10 & \\
 & 0.120x_1 + 0.011x_2 + 1.0x_6 \leq 12 & \boxed{\text{(chromium)}} \\
 & 0.001x_2 + 1.0x_7 \geq 11 & \\
 & 0.001x_2 + 1.0x_7 \leq 13 & \boxed{\text{(molybdenum)}} \\
 & x_1 \leq 75 & \\
 & x_2 \leq 250 & \boxed{\text{(availability)}} \\
 & x_1, \ldots, x_7 \geq 0 &
\end{array}
$$

carico = 1000 kg

Modelli “Tutto o niente”

Utilizzando un modello di PL, il problema di miscelazione di metalli è:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \underbrace{16x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 9x_4}_{\text{Materiali di scarto}} + \underbrace{48x_5 + 60x_6 + 53x_7}_{\text{Metalli puri}} & \text{(cost)} \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1000 & \text{(weight)} \leftarrow \text{carico = 1000 kg} \\
& 0.0080x_1 + 0.0070x_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 \geq 6.5 & \text{(carbon)} \\
& 0.0080x_1 + 0.0070x_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 \leq 7.5 & \\
& 0.180x_1 + 0.032x_2 + 1.0x_5 \geq 30 & \text{(nickel)} \\
& 0.180x_1 + 0.032x_2 + 1.0x_5 \leq 35 & \\
& 0.120x_1 + 0.011x_2 + 1.0x_6 \geq 10 & \text{(chromium)} \\
& 0.120x_1 + 0.011x_2 + 1.0x_6 \leq 12 & \\
& 0.001x_2 + 1.0x_7 \geq 11 & \text{(molybdenum)} \\
& 0.001x_2 + 1.0x_7 \leq 13 & \\
& x_1 \leq 75 & \\
& x_2 \leq 250 & \\
& x_1, \ldots, x_7 \geq 0 &
\end{array}
$$

Osservazione

Il modello di PL è valido sotto l’assunzione che si possa miscelare una qualsiasi quantità, tra 0 e il massimo disponibile, di ogni tipo di metallo (variabili continue).

Modelli “Tutto o niente”

Nelle applicazioni reali i problemi di miscelazione sono caratterizzati da un aspetto aggiuntivo che complica il problema: i materiali di scarto sono generalmente disponibili come **blocchi di materiale riciclato** che non possono essere frazionati, quindi per ogni blocco si deve decidere se **inserirlo tutto** nel mix del carico della fornace, oppure **non inserirlo affatto**.

Hp: Si supponga ora che nel problema illustrato sopra i materiali di scarto M1 e M2 abbiano questa caratteristica e pertanto M1 è disponibile in un **unico blocco da 75 kg** e M2 in un **unico blocco da 250 kg**.

Percentuali minime di elementi chimici presenti in 1 kg di ogni materiale

		Composizione %				disponibilità max (in kg)	Costo per 1 kg
		Carbone	Nickel	Cromo	Molibdeno		
Materiali di scarto	M1	0.80	18	12	-	75	16
	M2	0.70	3.2	1.1	0.1	250	10
	M3	0.85	-	-	-	illimitata	8
	M4	0.40	-	-	-	illimitata	9
Metalli puri	Nickel	-	100	-	-	illimitata	48
	Cromo	-	-	100	-	illimitata	60
	Molibdeno	-	-	-	100	illimitata	53

Modelli “Tutto o niente”

Nelle applicazioni reali i problemi di miscelazione sono caratterizzati da un aspetto aggiuntivo che complica il problema: i materiali di scarto sono generalmente disponibili come **blocchi di materiale riciclato** che non possono essere frazionati, quindi per ogni blocco si deve decidere se **inserirlo tutto** nel mix del carico della fornace, oppure **non inserirlo affatto**.

Hp: Si supponga ora che nel problema illustrato sopra i materiali di scarto M1 e M2 abbiano questa caratteristica e pertanto M1 è disponibile in un **unico blocco da 75 kg** e M2 in un **unico blocco da 250 kg**.

Per formalizzare correttamente il problema sotto questa nuova ipotesi è necessario **introdurre opportune variabili binarie** perchè le quantità di M1 e M2 **non sono frazionabili**. Infatti si dovrebbe poter scegliere (risp. per M1 e M2):

$x_1=0$ oppure $x_1=75$ e $x_2=0$ oppure $x_2=250$

Variabile binaria $y_1 \in \{0,1\}$:

$y_1=0 \leftrightarrow x_1=0$
$y_1=1 \leftrightarrow x_1=75$

$\blacktriangleright$ $x_1=75y_1$

Variabile binaria $y_2 \in \{0,1\}$:

$y_2=0 \leftrightarrow x_2=0$
$y_2=1 \leftrightarrow x_2=250$

$\blacktriangleright$ $x_2=250y_2$

Modelli "Tutto o niente"

Utilizzando le variabili a valori 0/1 y_1 e y_2, il problema di miscelazione di metalli con la condizione sui blocchi di materiali è:

$$
\begin{array}{lll}
\min & 16(75)y_1 + 10(250)y_2 + 8x_3 + 9x_4 + 48x_5 + 60x_6 + 53x_7 & \\
\text{s.t.} & 75y_1 + 250y_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & = 1000 \\
 & 0.0080(75)y_1 + 0.0070(250)y_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 & \geq 6.5 \\
 & 0.0080(75)y_1 + 0.0070(250)y_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 & \leq 7.5 \\
 & 0.180(75)y_1 + 0.032(250)y_2 + 1.0x_5 & \geq 30 \\
 & 0.180(75)y_1 + 0.032(250)y_2 + 1.0x_5 & \leq 35 \\
 & 0.120(75)y_1 + 0.011(250)y_2 + 1.0x_6 & \geq 10 \\
 & 0.120(75)y_1 + 0.011(250)y_2 + 1.0x_6 & \leq 12 \\
 & 0.001(250)y_2 + 1.0x_7 & \geq 11 \\
 & 0.001(250)y_2 + 1.0x_7 & \leq 13 \\
 & x_3, \ldots, x_7 \geq 0 & \\
 & y_1, y_2 = 0 \text{ or } 1 &
\end{array}
$$

In cosa differisce questo modello dal precedente?

Modelli “Tutto o niente”

Utilizzando le variabili a valori 0/1 y_1 e y_2, il problema di miscelazione di metalli con la condizione sui blocchi di materiali è:

$$
\begin{array}{lll}
\min & 16(75)y_1 + 10(250)y_2 + 8x_3 + 9x_4 + 48x_5 + 60x_6 + 53x_7 & \\
\text{s.t.} & 75y_1 + 250y_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & = 1000 \\
& 0.0080(75)y_1 + 0.0070(250)y_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 & \geq 6.5 \\
& 0.0080(75)y_1 + 0.0070(250)y_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 & \leq 7.5 \\
& 0.180(75)y_1 + 0.032(250)y_2 + 1.0x_5 & \geq 30 \\
& 0.180(75)y_1 + 0.032(250)y_2 + 1.0x_5 & \leq 35 \\
& 0.120(75)y_1 + 0.011(250)y_2 + 1.0x_6 & \geq 10 \\
& 0.120(75)y_1 + 0.011(250)y_2 + 1.0x_6 & \leq 12 \\
& 0.001(250)y_2 + 1.0x_7 & \geq 11 \\
& 0.001(250)y_2 + 1.0x_7 & \leq 13 \\
& x_3, \ldots, x_7 \geq 0 & \\
& y_1, y_2 = 0 \text{ or } 1 &
\end{array}
$$

In cosa differisce questo modello dal precedente?

- ✓ Sono state inserite le nuove variabili y_1 e y_2;
- ✓ x_1 e x_2 sono state sostituite dalle loro espressioni in y_1 e y_2 rispettivamente;
- ✓ sono stati rimossi i vincoli di upperbound su x_1 e x_2.

Modelli "Tutto o niente"

Utilizzando le variabili a valori 0/1 y_1 e y_2, il problema di miscelazione di metalli con la condizione sui blocchi di materiali è:

$$
\begin{array}{lll}
\min & 16(75)y_1 + 10(250)y_2 + 8x_3 + 9x_4 + 48x_5 + 60x_6 + 53x_7 & \\
\text{s.t.} & 75y_1 + 250y_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & = 1000 \\
& 0.0080(75)y_1 + 0.0070(250)y_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 & \geq 6.5 \\
& 0.0080(75)y_1 + 0.0070(250)y_2 + 0.0085x_3 + 0.0040x_4 & \leq 7.5 \\
& 0.180(75)y_1 + 0.032(250)y_2 + 1.0x_5 & \geq 30 \\
& 0.180(75)y_1 + 0.032(250)y_2 + 1.0x_5 & \leq 35 \\
& 0.120(75)y_1 + 0.011(250)y_2 + 1.0x_6 & \geq 10 \\
& 0.120(75)y_1 + 0.011(250)y_2 + 1.0x_6 & \leq 12 \\
& 0.001(250)y_2 + 1.0x_7 & \geq 11 \\
& 0.001(250)y_2 + 1.0x_7 & \leq 13 \\
& x_3, \ldots, x_7 \geq 0 & \\
& y_1, y_2 = 0 \text{ or } 1 &
\end{array}
$$

Sotto la nuova ipotesi per i materiali M1 e M2, si ha un modello di Programmazione Lineare con **variabili di tipo misto** (**Mixed Integer Linear Program – MILP**).

MODELLI DI KNAPSACK

Modelli di Knapsack (o dello zaino)

KNAPSACK = zaino, bisaccia

Si tratta di una classe di modelli a variabili intere (o binarie) molto importante perchè i modelli sono:

- concettualmente semplici;
- di vasta applicazione nei problemi reali.

Modelli di Knapsack (o dello zaino)

Un autostoppista deve riempire il suo zaino scegliendo quali tra n oggetti portare. Egli valuta sia il **peso a_i** che l'**utilità r_i** di ogni oggetto i.

Il problema dell'autostoppista è dunque quello di riempire lo zaino **massimizzando** l'utilità totale degli oggetti scelti, ma tenendo anche conto del fatto che non è in grado di sopportare un peso totale dello zaino (che dovrà trasportare) superiore ad un certo **peso massimo B**.

Oggetto	**Peso (gr.)**	**Utilità (punteggio da 1 a 10)**
Borraccia	500	**2**
Libro	200	**1**
Sciarpa	100	**5**
Spazzolino e dentifricio	50	**2**
Portafoglio	200	**10**
Giacca	700	**7**
Sacco a pelo	1500	**8**
Peso max	**1700**	

Modelli di Knapsack (o dello zaino)

Un autostoppista deve riempire il suo zaino scegliendo quali tra n oggetti portare. Egli valuta sia il **peso a_i** che l'**utilità r_i** di ogni oggetto i.

Il problema dell'autostoppista è dunque quello di riempire lo zaino **massimizzando** l'utilità totale degli oggetti scelti, ma tenendo anche conto del fatto che non è in grado di sopportare un peso totale dello zaino (che dovrà trasportare) superiore ad un certo **peso massimo B**.

Definiamo n **variabili binarie di scelta** x_i, i=1,2,...,n:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ viene scelto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello di Knapsack

f.o. (lineare) da massimizzare

$$\max \; 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 10x_5 + 7x_6 + 8x_7$$

un solo vincolo (limitazione della risorsa)

$$500x_1 + 200x_2 + 100x_3 + 50x_4 + 200x_5 + 700x_6 + 1500x_7 \le 1700$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,\dots,7$$

variabili binarie

Modelli di Knapsack (o dello zaino)

Il nome di modello di knapsack deriva dal problema appena illustrato, ma il modello può essere adottato in tutti i contesti in cui si ha il problema di "riempire in modo ottimo un contenitore" (nelle applicazioni: camion, container, magazzino, capitale) di dimensione limitata.

Consideriamo il caso generale di **n oggetti**, i=1,2,...,n, ciascuno caratterizzato dal suo **costo a_i** (peso, dimensione, ingombro) e da una **utilità r_i**, (valore, profitto, guadagno) e sia dato un **costo totale massimo B** (peso totale, spazio totale disponibile).

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad \leftarrow \text{utilità totale}$$

Modello di Knapsack
(knapsack **binario)**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B \quad \leftarrow \text{vincolo sul costo totale}$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,n$$

per ogni oggetto i, la decisione corrisponde a **inserire** l'oggetto i (**x_i=1**) oppure **non inserire** l'oggetto i (**x_i=0**)

Modelli di Knapsack (o dello zaino)

Il nome di modello di kna
modello può essere ado
"riempire in modo ottimo
magazzino, capitale) di c

Consideriamo il caso ge
caratterizzato dal suo **co**
utilità r_i, (valore, profitto
massimo B (peso totale

Oggetto	Peso (gr.)	Utilità (punteggio da 1 a 10)
Borraccia	500	2
Libro	200	1
Sciarpa	100	5
Spazzolino e dentifricio	50	2
Portafoglio	200	10
Giacca	700	7
Sacco a pelo	1500	8
Peso max	**1700**	

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$ ← utilità totale

Modello di Knapsack
(knapsack **binario)**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le B$$ ← vincolo sul costo totale

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,n$$

per ogni oggetto i, la decisione corrisponde a **inserire** l'oggetto i (**x_i=1**) oppure **non inserire** l'oggetto i (**x_i=0**)

Modello di Capital Budgeting

I modelli di knapsack sono molto utilizzati per formulare e risolvere problemi di scelta di investimenti. In questo caso il modello viene solitamente chiamato **Modello di Capital Budgeting**.

Problema:
Una società vuole investire su **pacchetti di titoli** di cui conosce i **rendimenti** r_i e i **costi** a_i, $i = 1,\dots,n$.

Con il suo **budget disponibile** pari a B=16 la società deve decidere quali pacchetti di titoli acquistare per massimizzare il rendimento totale.

i	1	2	3	4
r_i	8	11	1	8
a_i	8	10	6	8

Modello di Capital budgeting (knapsack **binario)**

$$\max\ 8x_1 + 11x_2 + x_3 + 8x_4 \qquad \leftarrow \textbf{rendimento} \text{ totale netto}$$

$$8x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 8x_4 \le 16 \qquad \leftarrow \text{vincolo di } \textbf{budget}$$

$$\boxed{x_1\ ,\ x_2\ , x_3\ ,\ x_4 \in \{0,1\}} \qquad \leftarrow \text{variabili di scelta dei pacchetti di titoli}$$

Modello di Capital Budgeting

I modelli di knapsack sono molto utilizzati per formulare e risolvere problemi di scelta di investimenti. In questo caso il modello viene solitamente chiamato **Modello di Capital Budgeting**.

NOTA: In questo modello si assume che i rendimenti r_i, i=1,2,…,n siano tra loro **indipendenti**, ma questa è una ipotesi poco attendibile per il mercato finanziario.

Il modello di knapsack binario si adatta meglio ai problemi di **Project Finincing** nei quali un ente finanziatore deve decidere **quali progetti finanziare** tra n progetti possibili, i=1,2,…,n, (indipendenti) sapendo che il **finanziamento richiesto per il progetto i è pari a a_i** e disponendo di una funzione di valutazione che assegna al progetto i un **punteggio** (o **score**) pari a **r_i**.

Modello di Capital budgeting (knapsack **binario**)

$$\max\ 8x_1 + 11x_2 + x_3 + 8x_4 \qquad \leftarrow \quad \textbf{rendimento} \text{ totale netto}$$

$$8x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 8x_4 \le 16 \qquad \leftarrow \quad \text{vincolo di } \textbf{budget}$$

$$\boxed{x_1\,,\ x_2\,, x_3\,,\ x_4 \in \{0,1\}} \qquad \leftarrow \quad \text{variabili di scelta dei pacchetti di titoli}$$

Modello di Knapsack binario

Consideriamo il caso generale di **n progetti**, i=1,2,...,n, ciascuno caratterizzato dal suo **costo a_i** e da un **punteggio r_i**, e un **budget totale B** (peso totale, spazio totale disponibile).

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad \leftarrow \text{ punteggio totale}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B \quad \leftarrow \text{ vincolo di budget}$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\ldots,n$$

Modello di Knapsack (Capital Budgeting)

per ogni progetto i, la decisione corrisponde a **selezionare** il progetto i (**x_i=1**) oppure **non selezionare** il progetto i (**x_i=0**)

$$\max \; 8x_1 + 11x_2 + x_3 + 8x_4 \quad \leftarrow \text{ rendimento totale netto}$$

$$8x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 8x_4 \leq 16 \quad \leftarrow \text{ vincolo di budget}$$

$$\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}} \quad \leftarrow \text{ variabili di scelta dei pacchetti di titoli}$$

Modello di Knapsack binario e frazionario

Il modello di knapsack binario viene generalmente risolto attraverso tecniche di “Branch-and-Bound” (B&B) per cui è utile conoscere come è fatto il suo rilassamento continuo:

Modello di Knapsack binario

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le B$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\ldots,n$$

Modello di knapsack frazionario
(<u>Rilassamento continuo</u> del knapsack binario)

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le B$$

$$0 \le x_i \le 1 \quad i = 1,\ldots,n$$

Varianti: Modello di Knapsack **intero**

Consideriamo il caso generale di **n oggetti**, i=1,2,...,n, ciascuno caratterizzato dal suo **costo a_i** (peso, dimensione, ingombro) e da una **utilità r_i**, (valore, profitto, guadagno) e sia dato un **costo totale massimo B** (peso totale, spazio totale disponibile).

Sono disponibili **più copie di ciascun oggetto i**, i=1,2,...,n. Per ciascun tipo di oggetto si possono selezionare più unità. Le n variabili di scelta x_i, i=1,2,...,n, sono:

$$x_i = \text{numero di unità dell' oggetto } i \text{ inserite}$$

Modello di Knapsack binario

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,n$$

Modello di Knapsack **intero**

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad \leftarrow \text{utilità totale}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B \quad \leftarrow \text{vincolo sul costo totale}$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{intera} \quad i = 1,\dots,n$$

è possibile inserire più oggetti dello stesso tipo

Varianti: Modello di Knapsack **limitato (bounded)**

Consideriamo il caso generale di **n oggetti**, i=1,2,...,n, ciascuno caratterizzato dal suo **costo a_i** (peso, dimensione, ingombro) e da una **utilità r_i**, (valore, profitto, guadagno) e sia dato un **costo totale massimo B** (peso totale, spazio totale disponibile).

Sono disponibili **u_i ($u_i > 0$) copie** di **ciascun oggetto i**, i=1,2,...,n. Per ciascun tipo di oggetto i si possono selezionare **al più u_i unità**. Le n variabili di scelta x_i, i=1,2,...,n, sono:

$$x_i = \text{numero di unità dell' oggetto } i \text{ inserite}$$

Modello di Knapsack binario

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,n$$

Modello di Knapsack **limitato**

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad \leftarrow \text{utilità totale}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B \quad \leftarrow \text{vincolo sul costo totale}$$

$$0 \leq x_i \leq u_i \quad \text{intera} \quad i = 1,\dots,n$$

è possibile inserire più oggetti del tipo i, **ma non più di u_i**

Varianti: Modello di Knapsack **multiplo** (multi-knapsack)

Consideriamo il caso generale di **n oggetti**, i=1,2,...,n, ciascuno caratterizzato dal suo **costo a_i** (peso, dimensione, ingombro) e da una **utilità r_i**, (valore, profitto, guadagno).

Supponiamo che ci siano **m "contenitori"** e sia dato **un costo totale massimo B_j** per ogni contenitore j=1,2,..,m.

Modello di Knapsack binario

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\ldots,n$$

Definiamo nm variabili **binarie** di scelta x_{ij}, i=1,2,...,n, j=1,2,...,m:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ viene inserito nel contenitore j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello di Knapsack **multiplo**

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i \boxed{\sum_{j=1}^{m} x_{ij}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq B_j \quad j = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \quad i = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m$$

VARIABILI E RELAZIONI LOGICHE

Variabili e relazioni logiche

Le variabili logiche sono variabili associate a delle proposizioni logiche e che possono assumere solo i valori "vero" o "falso". Ad esempio nei modelli di scelta degli investimenti:

a_j = << scelgo il progetto j >> ← Proposizione logica

$$x(a_j) = \begin{cases} \text{vero} & \text{se } a_j \text{ è vera} \\ \text{falso} & \text{se } a_j \text{ è falsa} \end{cases}$$

← Variabile logica

NOTA La variabile logica $x(a_j)$ è una variabile binaria.

Variabili e relazioni logiche

Consideriamo una qualsiasi proposizione logica a, allora è sempre possibile introdurre la corrispondente variabile logica (binaria) $x(a)$ tale che

$$x(a) = \begin{cases} \text{vero} & \text{se } a \text{ è vera} \\ \text{falso} & \text{se } a \text{ è falsa} \end{cases} \quad \leftarrow$$

Variabile binaria qualitativa

La variabile binaria $x(a)$ può essere equivalentemente sostituita dalla variabile booleana x_a :

$$x_a = \begin{cases} 1 & \text{se } a \text{ è vera} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \leftarrow$$

Variabile binaria **0/1**

$$\boxed{\begin{array}{lll} x_a = 1 & \leftrightarrow & x(a) = \text{vero} \\ x_a = 0 & \leftrightarrow & x(a) = \text{falso} \end{array}}$$

Variabili e relazioni logiche

Ad esempio nei modelli di scelta degli investimenti:

x_j = 1 significa che "è vero che scelgo il progetto *j*"

x_j = 0 significa che "non è vero che scelgo il progetto *j*"

Si tratta proprio della variabile binaria 0/1 corrispondente alla variabile logica x(a_j):

proposizioni logica: a_j = <<scelgo il progetto j>>

variabile logica: $$x(a_j) = \begin{cases} \text{vero} & \text{se } a_j \text{ è vera} \\ \text{falso} & \text{se } a_j \text{ è falsa} \end{cases}$$

variabile booleana: $$x_{a_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_j \text{ è vera} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili e relazioni logiche

a_j = << scelgo il progetto j >>

$$x(a_j) = \begin{cases} \text{vero} & \text{se } a_j \text{ è vera} \\ \text{falso} & \text{se } a_j \text{ è falsa} \end{cases} \qquad x_{a_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_j \text{ è vera} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Data la variabile logica $x(a)$, si definisce la variabile **negazione di $x(a)$** e si indica con $\bar{x}(a)$:

$$\bar{x}(a) = \begin{cases} \text{vero} & \text{se } a \text{ è falsa } (x(a) = \text{falso}) \\ \text{falso} & \text{se } a \text{ è vera } (x(a) = \text{vero}) \end{cases}$$

Solo una delle due può **essere vera**

Per definizione sono **mutuamente esclusive**

Per la corrispondente variabile booleana x_a, si definisce la variabile **complemento di x_a** come $1 - x_a$ e vale la proprietà:

Nota: si tratta di una **relazione lineare**

$$x_a + (1 - x_a) = 1$$

Solo una delle due può **assumere valore 1**

Variabili e relazioni logiche

È possibile rappresentare le relazioni logiche tra le variabili logiche tramite relazioni lineari tra le variabili booleane (vincoli logici).

Consideriamo anche la proposizione logica b e le corrispondenti variabili logica $x(b)$ e booleana x_b :

$$x(b) = \begin{cases} \text{vero} & \text{se } b \text{ è vera} \\ \text{falso} & \text{se } b \text{ è falsa} \end{cases} \qquad x_b = \begin{cases} 1 & \text{se } b \text{ è vera} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Consideriamo la seguente relazione logica tra *a* e *b*:

"a e b **non** possono essere entrambe vere":

$$\begin{cases} a \text{ vera} \rightarrow b \text{ falsa} \\ b \text{ vera} \rightarrow a \text{ falsa} \end{cases} \qquad \begin{cases} x(a) \rightarrow \bar{x}(b) \\ x(b) \rightarrow \bar{x}(a) \end{cases} \leftarrow$$

MUTUA ESCLUSIONE tra *a* e *b*

Variabili e relazioni logiche

Nei modelli di scelta degli investimenti:

$x_j = 1$ significa che "è vero che scelgo il progetto *j*"

$x_j = 0$ significa che "non è vero che scelgo il progetto *j*"

È possibile che le scelte dei progetti **non siano indipendenti**: in questo caso può essere necessario introdurre opportune relazioni logiche.

Può accadere ad esempio che, a causa di particolari condizioni imposte dal problema, "non sia possibile scegliere **simultaneamente** il progetto i e il progetto j", cioè, la scelta del progetto i ($x_i = 1$) **costringe** a scartare il progetto j ($x_j = 0$), e viceversa.

Mutua esclusione tra i e j:

$$x(i) \rightarrow \bar{x}(j)$$

$$x(j) \rightarrow \bar{x}(i)$$

Un vincolo di questo tipo descrive una dipendenza tra le scelte relative ai progetti i e j.

In questo caso specifico la dipendenza corrisponde alla **mutua esclusione tra i e j**.

Variabili e relazioni logiche

Relazione logica

"a e b **non** possono essere entrambe vere"

$$x(a) \rightarrow \bar{x}(b)$$

e

$$x(b) \rightarrow \bar{x}(a)$$

Vincolo lineare

$$x_a + x_b \leq 1$$

Deve essere scelta **al più una** fra le alternative a e b.

$$x(a) \rightarrow \bar{x}(b) \Leftrightarrow x_a \leq 1 - x_b$$

Se x_a=1 allora x_b=0

$$x(b) \rightarrow \bar{x}(a) \Leftrightarrow x_b \leq 1 - x_a$$

Se x_b=1 allora x_a=0

Vincolo di mutua esclusione **tra le due alternative di scelta a e b**

Variabili e relazioni logiche

Consideriamo ora il caso generale di k proposizioni logiche $a_1, a_2, \ldots, a_k$ a cui corrispondono k variabili binarie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ definite come segue:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i \text{ è vera} \\ 0 & \text{se } a_i \text{ è falsa} \end{cases}$$

Nel caso di modelli di scelta degli investimenti le *k* proposizioni logiche corrispondono alla possibilità di scelta relativa a k tra gli n progetti, e "a_i vera" significa scegliere il progetto i.

Vincolo di **mutua esclusione** tra k alternative di scelta

"Deve essere scelta al più una fra le alternative 1,2,...,k":

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{"al più una variabile = 1"} & x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq 1 \\ \text{"}\textbf{due o più}\text{ variabili = 1"} & x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq 1 \end{cases}$$

Variabili e relazioni logiche

Vincoli di **necessità di scelta** (tra k alternative di scelta)

"Deve essere scelta almeno una fra le alternative 1,2,…,k":

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq 1$ ⟺

- "almeno una variabile = 1" $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq 1$
- "**nessuna** variabile = 1" $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq 1$

NOTA Il vincolo logico deve corrispondere alla relazione logica, perciò deve:
i) **essere soddisfatto** quando la **relazione logica è vera**;
ii) **non essere soddisfatto** quando la **relazione logica è falsa**.

Vincoli di **scelta unica/esatta** (tra k alternative di scelta)

"Deve essere scelta esattamente una fra le alternative 1,2,…,k":

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 1$ ⟺

- "esattamente una variabile = 1" $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 1$
- "**due o più** variabili = 1" *oppure* "**nessuna** variabile = 1" $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 1$

Variabili e relazioni logiche

Vincoli di **necessità di scelta** (tra k alternative di scelta)

"Deve essere scelta almeno una fra le alternative 1,2,…,k":

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq 1 \Longleftrightarrow$
- "almeno una variabile = 1" $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq 1$
- "**nessuna** variabile = 1" $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq 1$

NOTA Il vincolo logico deve corrispondere alla relazione logica, perciò deve:
i) **essere soddisfatto** quando la **relazione logica è vera**;
ii) **non essere soddisfatto** quando la **relazione logica è falsa**.

Vincoli di **scelta unica/esatta** (tra k alternative di scelta)

"Deve essere scelta esattamente una fra le alternative 1,2,…,k":

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq 1 & \text{necessità di scelta} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq 1 & \text{mutua esclusione} \end{cases}$$

Variabili e relazioni logiche

Abbiamo già incontrato qualcuno di questi vincoli logici nei modelli visti?

Modello di Knapsack **multiplo**

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq B_j \quad j = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \quad i = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m$$

Vincolo di mutua esclusione: il vincolo impone che un oggetto i debba essere inserito in al più un contenitore j=1,...,m.

Vincoli logici

Consideriamo due proposizioni logiche a e b e le corrispondenti variabili logiche $x(a)$ e $x(b)$ e booleane x_a e x_b .

Abbiamo già visto il vincolo lineare:

$$x_a \leq (1 - x_b)$$

che può essere letto anche come segue: "se a è vera allora deve essere vera la negazione di b".

In generale, per due proposizioni logiche i e j, il vincolo lineare:

$$x_i \leq x_j$$

corrisponde alla condizione logica "se i è **vera** allora j deve essere **vera**", o, equivalentemente, alla condizione logica "se j è **falsa** allora i deve essere **falsa**" ('*switching constraints*' - *commutazione/condizionamento della scelta*).

Vincoli logici

Sfruttando le variabili booleane, è possibile descrivere molte relazioni logiche con vincoli lineari.

Consideriamo tre proposizioni logiche i, j e h e le corrispondenti variabili booleane x_i, x_j e x_h.

1. Analizziamo il seguente vincolo lineare:

$$x_i \leq x_j + x_h$$

NOTA

Se $x_i = 0$ le variabili x_j e x_h **non sono condizionate** ad assumere un valore preciso, ma possono assumere sia valore 0 che 1.

Il caso rilevante è $x_i = 1$.

$x_i = 1$		
x_j	x_h	$x_j + x_h$
1	1	**2**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Vincoli logici

Sfruttando le variabili booleane, è possibile descrivere molte relazioni logiche con vincoli lineari.

Consideriamo tre proposizioni logiche i, j e h e le corrispondenti variabili booleane x_i, x_j e x_h.

1. Analizziamo il seguente vincolo lineare:

$$x_i \leq x_j + x_h$$

NOTA

Se x_i = 0 le variabili x_j e x_h **non sono condizionate** ad assumere un valore preciso, ma possono assumere sia valore 0 che 1.

Il caso rilevante è x_i = 1.

$x_i = 1$		
x_j	x_h	$x_j + x_h$
1	1	**2**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

risulterebbe **1 ≤ 0**

Vincoli logici

Sfruttando le variabili booleane, è possibile descrivere molte relazioni logiche con vincoli lineari.

Consideriamo tre proposizioni logiche i, j e h e le corrispondenti variabili booleane x_i, x_j e x_h.

1. Analizziamo il seguente vincolo lineare:

$$x_i \leq x_j + x_h$$

Questo vincolo corrisponde all'implicazione logica "se i è vera allora deve essere **<u>necessariamente</u>** vera **almeno una** tra j e h", cioè:

$$x(i) \rightarrow \quad x(j) \underbrace{\text{ oppure }}_{\text{"or" logico}} x(h)$$

Scelta investimenti: "Il progetto i può essere scelto **<u>solo se</u>** viene scelto **almeno uno** tra i progetti j e h".

Vincoli logici

Sfruttando le variabili booleane, è possibile descrivere molte relazioni logiche con vincoli lineari.

Consideriamo tre proposizioni logiche i, j e h e le corrispondenti variabili booleane x_i, x_j e x_h.

2. Analizziamo il seguente vincolo lineare:

$$x_i + x_j \leq 2x_h$$

x_i	x_j	$x_i + x_j$
1	1	**2**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

$x_i + x_j > 0$

$x_i + x_j = 0$

$x_i + x_j > 0$	
x_h	$2x_h$
1	**2**
0	**0**

risulterebbe **1 ≤ 0** oppure **2 ≤ 0**

Affinché il vincolo risulti soddisfatto, quando $x_i + x_j > 0$, deve necessariamente valere anche $x_h > 0$ e, quindi, $x_h = 1$ (visto che x_h è binaria).

Vincoli logici

Sfruttando le variabili booleane, è possibile descrivere molte relazioni logiche con vincoli lineari.

Consideriamo tre proposizioni logiche i, j e h e le corrispondenti variabili booleane x_i, x_j e x_h.

2. Analizziamo il seguente vincolo lineare:

$$x_i + x_j \leq 2x_h$$

Questo vincolo corrisponde all'implicazione logica "se **almeno una** tra i e j è vera allora deve essere **necessariamente** vera anche h", cioè:

$$x(i) \quad \text{oppure} \quad x(j) \quad \rightarrow \quad x(h)$$

$\uparrow$

"or" logico

Scelta investimenti: "si può scegliere **uno dei progetti i o j (o entrambi) solo se** viene scelto il progetto h".

Vincoli logici

Sfruttando le variabili booleane, è possibile descrivere molte relazioni logiche con vincoli lineari.

Consideriamo tre proposizioni logiche i, j e h e le corrispondenti variabili booleane x_i, x_j e x_h.

3. Analizziamo il seguente vincolo lineare:

$$2x_i \leq x_j + x_h$$

NOTA

Se x_i = 0 la funzione $x_j + x_h$ **non è condizionata**, e quindi neanche x_j né x_h.

Il caso rilevante è x_i = 1.

x_i =1		
x_j	x_h	$x_j + x_h$
1	1	**2**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Vincoli logici

Sfruttando le variabili booleane, è possibile descrivere molte relazioni logiche con vincoli lineari.

Consideriamo tre proposizioni logiche i, j e h e le corrispondenti variabili booleane x_i, x_j e x_h.

3. Analizziamo il seguente vincolo lineare:

$$2x_i \leq x_j + x_h$$

NOTA

Se $x_i = 0$ la funzione $x_j + x_h$ **non è condizionata**, e quindi neanche x_j e x_h.

Il caso rilevante è $x_i = 1$.

$x_i = 1$		
x_j	x_h	$x_j + x_h$
1	1	**2**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

risulterebbe **2 ≤ 1** →

risulterebbe **2 ≤ 0** →

NOTA Il fattore **2 che premoltiplica x_i** "forza" al valore 1 sia x_j che x_h.

Vincoli logici

Sfruttando le variabili booleane, è possibile descrivere molte relazioni logiche con vincoli lineari.

Consideriamo tre proposizioni logiche i, j e h e le corrispondenti variabili booleane x_i, x_j e x_h.

3. Analizziamo il seguente vincolo lineare:

$$2x_i \leq x_j + x_h$$

Questo vincolo corrisponde all'implicazione logica "se i è vera, allora devono essere **<u>necessariamente</u>** vere **sia** j **che** h", cioè:

$$x(i) \rightarrow \qquad x(j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{“and” logico}}}{\text{ e }} x(h)$$

Scelta investimenti: "Il progetto i può essere scelto **<u>solo se</u>** vengono scelti **sia il progetto j che il progetto h**".

Vincoli logici

Sfruttando le variabili booleane, è possibile descrivere molte relazioni logiche con vincoli lineari.

Consideriamo tre proposizioni logiche i, j e h e le corrispondenti variabili booleane x_i, x_j e x_h.

4. Analizziamo il seguente vincolo lineare:

$$x_i + x_j - 1 \le x_h$$

x_i	x_j	$x_i + x_j - 1$	
1	1	**1**	$x_i + x_j - 1 > 0$
1	0	**0**	$x_i + x_j - 1 \le 0$
0	1	**0**	
0	0	**-1**	

$x_i + x_j - 1 > 0$
x_h
1
0

risulterebbe **1 ≤ 0**

Affinché il vincolo risulti soddisfatto, quando $x_i + x_j - 1 > 0$, deve necessariamente valere anche $x_h > 0$ e, quindi, $x_h = 1$ (visto che x_h è binaria).

Vincoli logici

Sfruttando le variabili booleane, è possibile descrivere molte relazioni logiche con vincoli lineari.

Consideriamo tre proposizioni logiche i, j e h e le corrispondenti variabili booleane x_i, x_j e x_h.

4. Analizziamo il seguente vincolo lineare:

$$x_i + x_j - 1 \leq x_h$$

Questo vincolo corrisponde all'implicazione logica "se sono vere **sia *i* che *j***, allora deve essere **<u>necessariamente</u>** vera anche h", cioè:

$$\underbrace{x(i) \quad \text{e} \quad x(j)}_{\text{“and” logico}} \qquad \rightarrow \quad x(h)$$

Scelta investimenti: "i progetti i e j possono essere scelti simultaneamente **<u>solo se</u>** viene scelto il progetto h".

APPLICAZIONE: Missioni NASA (Rardin, pag. 562)

L'agenzia spaziale statunitense (NASA) deve decidere come investire il budget (limitato) di cui disporrà nei prossimi 25 anni selezionando delle missioni da finanziare. Ciascuna missione ha dei **costi cadenzati su 5 periodi** successivi (ciascuno di 5 anni).

Per ciascuna missione finanziabile, la tabella che segue riporta:

- il costo in ognuno dei 5 periodi;
- il valore della missione.

Inoltre, nell'ultima riga della tabella è specificato il budget disponibile in ogni periodo.

Problema 1

La NASA deve decidere quali delle 14 missioni includere nel piano del periodo 2000-2024 utilizzando il budget disponibile in ogni periodo e **massimizzando il valore totale delle missioni finanziate**.

Si tratta di formulare un modello multiperiodo per risolvere il problema della selezione ottima delle missioni da finanziare.

APPLICAZIONE: Problema della NASA

TABLE 11.2 Proposed Missions in NASA Example

		Budget Requirements ($ billion)							
j	Mission	2000–2004	2005–2009	2010–2014	2015–2019	2020–2024	Value	Not With	Depends On
1	Communications satellite	6	—	—	—	—	200	—	—
2	Orbital microwave	2	3	—	—	—	3	—	—
3	Io lander	3	5	—	—	—	20	—	—
4	Uranus orbiter 2017	—	—	—	—	10	50	5	3
5	Uranus orbiter 2000	—	5	8	—	—	70	4	3
6	Mercury probe	—	—	1	8	4	20	—	3
7	Saturn probe	1	8	—	—	—	5	—	3
8	Infrared imaging	—	—	—	5	—	10	11	—
9	Ground-based SETI	4	5	—	—	—	200	14	—
10	Large orbital structures	—	8	4	—	—	150	—	—
11	Color imaging	—	—	2	7	—	18	8	2
12	Medical technology	5	7	—	—	—	8	—	—
13	Polar orbital platform	—	1	4	1	1	300	—	—
14	Geosynchronous SETI	—	4	5	3	3	185	9	—
	Budget	10	12	14	14	14			

costi

valori (utilità)

APPLICAZIONE: Problema della NASA

Il modello di PLI è il seguente:

Valore totale →

$$\max \; 200x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 70x_5 + 20x_6 + 5x_7 + 10x_8 + 200x_9 + 150x_{10} + 18x_{11} + 8x_{12} + 300x_{13} + 185x_{14}$$

(NASA1)

$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_7 + 4x_9 + 5x_{12} \le 10 \quad \leftarrow \textbf{(2000-2004)}$$

$$3x_2 + 5x_3 + 5x_5 + 8x_7 + 5x_9 + 8x_{10} + 7x_{12} + 1x_{13} + 4x_{14} \le 12 \quad \leftarrow \textbf{(2005-2009)}$$

$$8x_5 + 1x_6 + 4x_{10} + 2x_{11} + 4x_{13} + 5x_{14} \le 14 \quad \leftarrow \textbf{(2010-2014)}$$

$$8x_6 + 5x_8 + 7x_{11} + 1x_{13} + 3x_{14} \le 14 \quad \leftarrow \textbf{(2015-2019)}$$

$$10x_4 + 4x_6 + 1x_{13} + 3x_{14} \le 14 \quad \leftarrow \textbf{(2020-2024)}$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,\dots,14$$

Variabili binarie per la selezione delle missioni da finanziare

APPLICAZIONE: Problema della NASA

TABLE 11.2 Proposed Missions in NASA Example

mutua esclusione

condizionamento

j	Mission	2000–2004	2005–2009	2010–2014	2015–2019	2020–2024	Value	Not With	Depends On
		Budget Requirements ($ billion)							
1	Communications satellite	6	—	—	—	—	200	—	—
2	Orbital microwave	2	3	—	—	—	3	—	—
3	Io lander	3	5	—	—	—	20	—	—
4	Uranus orbiter 2017	—	—	—	—	10	50	5	3
5	Uranus orbiter 2000	—	5	8	—	—	70	4	3
6	Mercury probe	—	—	1	8	4	20	—	3
7	Saturn probe	1	8	—	—	—	5	—	3
8	Infrared imaging	—	—	—	5	—	10	11	—
9	Ground-based SETI	4	5	—	—	—	200	14	—
10	Large orbital structures	—	8	4	—	—	150	—	—
11	Color imaging	—	—	2	7	—	18	8	2
12	Medical technology	5	7	—	—	—	8	—	—
13	Polar orbital platform	—	1	4	1	1	300	—	—
14	Geosynchronous SETI	—	4	5	3	3	185	9	—
	Budget	10	12	14	14	14			

Le ultime due colonne della tabella forniscono informazioni aggiuntive relative alle **dipendenze tra i progetti**.

APPLICAZIONE: Problema della NASA

TABLE 11.2 Proposed Missions in NASA Example

mutua esclusione

		Budget Requirements ($ billion)							
j	Mission	2000–2004	2005–2009	2010–2014	2015–2019	2020–2024	Value	Not With	Depends On
1	Communications satellite	6	—	—	—	—	200	—	—
2	Orbital microwave	2	3	—	—	—	3	—	—
3	Io lander	3	5	—	—	—	20	—	—
4	Uranus orbiter 2017	—	—	—	—	10	50	5	3
5	Uranus orbiter 2000	—	5	8	—	—	70	4	3
6	Mercury probe	—	—	1	8	4	20	—	3
7	Saturn probe	1	8	—	—	—	5	—	3
8	Infrared imaging	—	—	—	5	—	10	11	—
9	Ground-based SETI	4	5	—	—	—	200	14	—
10	Large orbital structures	—	8	4	—	—	150	—	—
11	Color imaging	—	—	2	7	—	18	8	2
12	Medical technology	5	7	—	—	—	8	—	—
13	Polar orbital platform	—	1	4	1	1	300	—	—
14	Geosynchronous SETI	—	4	5	3	3	185	9	—

La colonna “Not with” indica incompatibilità (esclusione) tra progetti.

Ad esempio non è possibile finanziare simultaneamente le missioni 4 e 5 (la missione 4 non è compatibile con la missione 5 e viceversa).

APPLICAZIONE: Problema della NASA

condizionamento

TABLE 11.2 Proposed Missions in NASA Example

j	Mission	Budget Requirements ($ billion) 2000–2004	2005–2009	2010–2014	2015–2019	2020–2024	Value	Not With	Depends On
1	Communications satellite	6	—	—	—	—	200	—	—
2	Orbital microwave	2	3	—	—	—	3	—	—
3	Io lander	3	5	—	—	—	20	—	—
4	Uranus orbiter 2017	—	—	—	—	10	50	5	3
5	Uranus orbiter 2000	—	5	8	—	—	70	4	3
6	Mercury probe	—	—	1	8	4	20	—	3
7	Saturn probe	1	8	—	—	—	5	—	3
8	Infrared imaging	—	—	—	5	—	10	11	—
9	Ground-based SETI	4	5	—	—	—	200	14	—
10	Large orbital structures	—	8	4	—	—	150	—	—
11	Color imaging	—	—	2	7	—	18	8	2

La colonna "Depends on" indica condizionamento tra progetti.

Ad esempio la missione 11 può essere effettuata solo **a condizione che** venga effettuata anche la missione 2.

Pertanto la scelta della missione 11 implica **necessariamente** anche la scelta della missione 2 (altrimenti 11 non potrebbe essere scelta).

APPLICAZIONE: Problema della NASA

TABLE 11.2 Proposed Missions in NASA Example

j	Mission	Budget Requirements ($ billion) 2000–2004	2005–2009	2010–2014	2015–2019	2020–2024	Value	Not With	Depends On
1	Communications satellite	6	—	—	—	—	200	—	—
2	Orbital microwave	2	3	—	—	—	3	—	—
3	Io lander	3	5	—	—	—	20	—	—
4	Uranus orbiter 2017	—	—	—	—	10	50	5	3
5	Uranus orbiter 2000	—	5	8	—	—	70	4	3
6	Mercury probe	—	—	1	8	4	20	—	3
7	Saturn probe	1	8	—	—	—	5	—	3
8	Infrared imaging	—	—	—	5	—	10	11	—
9	Ground-based SETI	4	5	—	—	—	200	14	—
10	Large orbital structures	—	8	4	—	—	150	—	—
11	Color imaging	—	—	2	7	—	18	8	2
12	Medical technology	5	7	—	—	—	8	—	—
13	Polar orbital platform	—	1	4	1	1	300	—	—
14	Geosynchronous SETI	—	4	5	3	3	185	9	—

Problema 2

Riformulare il problema della NASA tenendo conto anche delle condizioni di incompatibilità e di condizionamento.

APPLICAZIONE: Problema della NASA

Il nuovo modello di PLI è il seguente:

(NASA2)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 200x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 70x_5 + 20x_6 + 5x_7 \\
& + 10x_8 + 200x_9 + 150x_{10} + 18x_{11} + 8x_{12} + 300x_{13} + 185x_{10} \\
& 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_7 + 4x_9 + 5x_{12} \le 10 \\
& 3x_2 + 5x_3 + 5x_5 + 8x_7 + 5x_9 + 8x_{10} + 7x_{12} + 1x_{13} + 4x_{14} \le 12 \\
& 8x_5 + 1x_6 + 4x_{10} + 2x_{11} + 4x_{13} + 5x_{14} \le 14 \\
& 8x_6 + 5x_8 + 7x_{11} + 1x_{13} + 3x_{14} \le 14 \\
& 10x_4 + 4x_6 + 1x_{13} + 3x_{14} \le 14 \\
& x_4 + x_5 \le 1 \\
& x_8 + x_{11} \le 1 \\
& x_9 + x_{14} \le 1 \\
& x_{11} \le x_2 \\
& x_4 \le x_3 \\
& x_5 \le x_3 \\
& x_6 \le x_3 \\
& x_7 \le x_3 \\
& x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,\ldots,14
\end{aligned}
$$

← **mutua esclusione**

← **condizionamento**

Le missioni 4,5,6 e 7 **dipendono** tutte dalla missione 3

APPLICAZIONE: Problema della NASA

Il nuovo modello di PLI è il seguente:

(NASA2)

$$\max \; 200x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 70x_5 + 20$$
$$+10x_8 + 200x_9 + 150x_{10} + 18x_{11} + 8x_{12}$$
$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_7 + 4x_9 + 5x_{12} \le 10$$
$$3x_2 + 5x_3 + 5x_5 + 8x_7 + 5x_9 + 8x_{10} + 7x$$
$$8x_5 + 1x_6 + 4x_{10} + 2x_{11} + 4x_{13} + 5x_{14} \le 1$$
$$8x_6 + 5x_8 + 7x_{11} + 1x_{13} + 3x_{14} \le 14$$
$$10x_4 + 4x_6 + 1x_{13} + 3x_{14} \le 14$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_4 + x_5 \le 1 \\ x_8 + x_{11} \le 1 \\ x_9 + x_{14} \le 1 \end{array}} \quad \leftarrow$$

mutua esclus

$$\boxed{\begin{array}{l} x_{11} \le x_2 \\ x_4 \le x_3 \\ x_5 \le x_3 \\ x_6 \le x_3 \\ x_7 \le x_3 \end{array}} \quad \leftarrow$$

condizioname

$$x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,\ldots,14$$

Le missioni 4,5,6 e 7 **dipendono** tutte dalla missione 3

condizionamento

Not With	Depends On
—	—
—	—
—	—
5	3
4	3
—	3
—	3
11	—
14	—
—	—
8	2
—	—
—	—
9	—