Ricerca Operativa
a.a. 2018-2019

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione I - 25 Febbraio 2019

Il corso

Denominazione del corso: Ricerca Operativa

ssd: MAT09   **cfu**: 9

Docente: Lavinia Amorosi (e-mail: lavinia.amorosi@uniroma1.it)

Chiarimenti: dopo la lezione del lunedì o per email.

Obiettivi del corso:

1. Sapere quando e come formulare problemi del mondo reale come problemi di ottimizzazione.

2. Conoscere le principali classi di problemi di ottimizzazione e le diverse tecniche risolutive.

3. Saper risolvere problemi di ottimizzazione mediante l'utilizzo del software ed interpretarne correttamente l'output.

Prova d'esame: 1 prova scritta contenente esercizi e domande di teoria.

Organizzazione del corso

Il corso si articola in 4 blocchi:

- Programmazione lineare;
- Programmazione lineare intera;
- Cenni alla programmazione non lineare;
- Cenni alla programmazione lineare multiobiettivo.

Software utlizzato: IBM Cplex.

Testi di riferimento:

D.Bertsimas, J.N Tsitsiklis, Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, (1997);

L.A. Wolsey (1998) *Integer Programming,* Wiley;

M. Conforti, G. Cornuéjols & G. Zambelli (2015) *Integer Programming,* Springer.

Introduzione

La Ricerca Operativa (Operations Research) nacque alla fine degli anni 30, prima dell'inizio della seconda guerra mondiale quando ingegneri, matematici e scienziati di diversa preparazione quantitativa vennero interpellati dall'esercito inglese per sviluppare metodi e tecniche per un uso più efficiente possibile delle scarse risorse militari.

Nel periodo postbellico si moltiplicarono, nel Regno Unito e negli altri paesi alleati, i gruppi di Ricerca Operativa con l'intenzione di sfruttare le tecniche neonate per favorire la ripresa economica dei paesi dopo la guerra.

Le principali applicazioni divennero la programmazione e pianificazione industriale.

Associazioni di Ricerca Operativa

U.K. (Operational Research Association), fondata nel 1948 (theorsociety.com);

INFORMS (Institute For Operations Research and Management Science) fondata nel 1952 (informs.org);

AIRO (Associazione Italiana di Ricerca Operativa) fondata nel 1961 (airo.org);

EURO (Association of European Operational Research Societies) fondata nel 1976 (euro-online.org);

AIROYoung (Sezione tematica di AIRO dedicata ai giovani ricercatori) fondata nel 2016 (airoyoung.org);

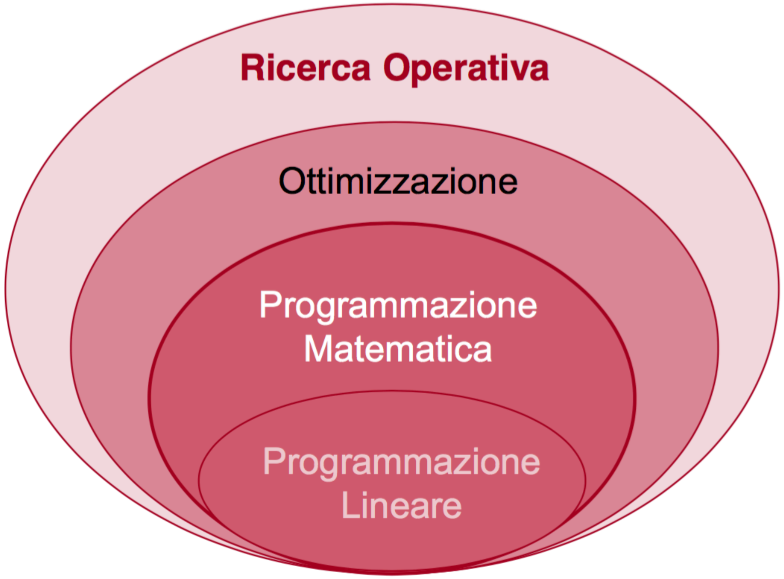
EUROYoung (Sezione tematica di EURO dedicata ai giovani ricercatori) fondata nel 2018 (https://euroyoung.github.io/index.html).

Nelle università degli Stati Uniti negli anni ‘50 iniziarono corsi regolari di Ricerca Operativa. Nelle università italiane l’ingresso di questa disciplina avvenne solo alla fine degli anni ‘60.

Ottimizzazione

Definizione (Informale)
L'ottimizzazione è una tecnica matematica per selezionare la migliore opzione da un insieme (possibilmente finito) di possibili alternative.

Definizione (Formale)
Ottimizzazione significa massimizzazione o minimizzazione di una funzione di un insieme di variabili, soggetta ad alcuni vincoli sui possibili valori che tali variabili possono assumere.



Programmazione Matematica (PM)

Classe di problemi	Vincoli/f.o.	Variabili
Programmazione Lineare (PL)	funzioni lineari	valori reali
Programmazione Lineare Intera (PLI)	funzioni lineari	valori interi
Programmazione Non Lineare (PNL)	funzioni non lineari	valori reali

Schema generale di analisi nella PM

Modelli matematici	⟺	**Rappresentazione formale** del problema
Algoritmi	⟺	Valutazione sistematica (efficiente) delle soluzioni possibili problema e individuazione della **soluzione ottima**.
Software applicativo	⟺	**Risoluzione pratica** dei problemi e tools di analisi delle soluzioni.

Il modello matematico

Il modello (matematico) è una descrizione, per mezzo di **relazioni di tipo logico-matematico**, del problema di interesse.

Il problema viene rappresentato attraverso un insieme di dati noti e variabili incognite che interagiscono in un unico sistema di relazioni.

Tipicamente, gli approcci sono due:

- **Massimizzazione dell'output** (prestazione) ottenibile da una prefissata quantità di input (risorsa). Esempio: Scelta di investimenti.

- **Minimizzazione dell'input** (risorsa) per realizzare un prefissato livello di output (prestazione). Esempio: Set Covering.

Il modello matematico

Il modello è una **astrazione matematica** del problema: esso deve includere tutti gli aspetti rilevanti (accurato) e trascurare quelli secondari (concettualmente semplice).

L'**obiettivo** è ottenere un buon compromesso tra rappresentatività e trattabilità del modello.

Osservazione 1
La validità delle soluzioni del modello matematico (astratto) deve essere interpretata sempre in relazione al livello di accuratezza con cui il modello descrive i meccanismi fondamentali del problema reale.

Osservazione 2
Le risposte del modello devono essere sempre considerate come 'guida' per il decisore ma non devono sostituire il decisore.

Formulazione

La costruzione del modello matematico rappresentativo di un problema di ottimizzazione reale è solitamente definita formulazione.

I principali passi nella formulazione di un problema sono:

- Identificazione delle **variabili decisionali** (le quantità su cui è possibile intervenire e che sono oggetto di decisione).

- Identificazione della **funzione obiettivo** (la quantità che si vorrebbe massimizzare o minimizzare espressa come funzione delle variabili).

- Identificazione dei **vincoli** (restrizioni sui valori che le variabili decisionali possono assumere).

Classi di modelli e contesti applicativi

CLASSI DI MODELLI

- Modelli di produzione
- Modelli di miscelazione
- Modelli di trasporto
- Modelli di scelta di investimenti
- Modelli di localizzazione di servizi
- Modelli di partizione e copertura
- ecc…

CONTESTI APPLICATIVI

- Industria
- Finanza
- Servizi
- Sicurezza

PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)

Assiomi alla base della PL

Nei modelli di programmazione lineare la relazione matematica è rappresentata da una **funzione lineare**

4 ASSIOMI ALLA BASE DELLA PL

- **CONTINUITÀ (DIVISIBILITÀ)**
- **CERTEZZA**
- **PROPORZIONALITÀ**
- **ADDITIVITÀ**

Assiomi alla base della PL

CONTINUITÀ (DIVISIBILITÀ)

Una variabile di decisione può assumere tutti i valori reali (nel suo intervallo di ammissibilità) e quindi le variabili possono avere valore frazionario.

NOTA
Una variabile può assumere un qualsiasi valore reale, quindi anche un valore intero (ma non necessariamente).

CERTEZZA

I valori dei parametri che definiscono un problema (input) sono considerati certi (veri) e quindi la significatività del modello e la sua soluzione sono strettamente legati ad essi.

NOTA
In uno stesso modello, valori differenti dei parametri generano una diversa realizzazione dello stesso problema (generalmente con soluzioni diverse).

Assiomi alla base della PL

PROPORZIONALITÀ

Il contributo di una variabile di decisione in ogni funzione è proporzionale secondo una costante moltiplicativa alla quantità rappresentata dalla variabile stessa.

ESEMPIO

Se il costo per trasportare una unità di prodotto di tipo 1 è pari a c_1, il costo per trasportare una quantità di prodotto di tipo 1 pari a x_1 unità è c_1x_1.

ADDITIVITÀ

Il contributo di più variabili di decisione in ogni funzione è dato dalla somma dei contributi di ogni singola variabile.

ESEMPIO

Se il costo per trasportare una una quantità x_1 di prodotto di tipo 1 è dato da c_1x_1 e il costo per trasportare una una quantità x_2 di prodotto di tipo 2 è dato da c_2x_2, allora il costo per trasportare sia x_1 che x_2 è pari a

$$c_1x_1 + c_2x_2.$$

Funzioni lineari

Definizione
Una funzione reale di n variabili reali si dice **lineare** se valgono le seguenti condizioni:

i) per ogni coppia di vettori reali x, y si ha:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ii) per ogni vettore reale x e ogni scalare λ si ha:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Proposizione
Una qualsiasi funzione lineare può essere scritta nella forma:

$f(x)=c_1x_1 +c_2x_2 +...+c_nx_n = c^Tx$

con c_1, c_2, ... , c_n costanti

Funzioni lineari

Dimostrazione $\Leftarrow$

Una funzione della forma $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ soddisfa sempre le condizioni i) e ii).

Dimostrazione $\Rightarrow$

Sia f(x) una funzione che soddisfa le condizioni i) e ii) e sia

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la **base canonica** dello spazio vettoriale R^n per cui, per ogni x in R^n si ha:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

Utilizzando le proprietà di linearità si può scrivere:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n) \\ &= f(x_1e_1) + f(x_2e_2) + \dots + f(x_ne_n) \\ &= x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \dots + x_nf(e_n) \\ &= x_1c_1 + x_2c_2 + \dots + x_nc_n \end{aligned}$$

■

Modello generale di PL: costruzione

1. Definizione delle variabili del modello (variabili decisionali) che sono le quantità incognite sulle quali si deve prendere la decisione. Se le variabili sono n, si indicano con:

$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$$

oppure, equivalentemente, con:

$$x_j, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

2. Formulazione dei vincoli del modello che sono funzioni (equazioni o disequazioni) delle variabili decisionali.

3. Formulazione della funzione obiettivo che è una funzione delle variabili decisionali. A seconda del tipo di problema, la funzione obiettivo dovrà essere ***massimizzata*** oppure ***minimizzata***.

Modello generale di PL

La funzione obiettivo è una **funzione lineare** (max o min)

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n} / \min \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

Tutti i vincoli sono **disequazioni o equazioni lineari** (≥ o ≤ o =)

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \begin{cases} \le b_1 \\ = b_1 \\ \ge b_1 \end{cases}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n \begin{cases} \le b_2 \\ = b_2 \\ \ge b_2 \end{cases}$$

$$\dots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \begin{cases} \le b_m \\ = b_m \\ \ge b_m \end{cases}$$

Vincoli di **non negatività** sulle variabili

$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$$

Modello generale di PL

min o max ?

L'operatore dipende dal tipo di funzione obiettivo.

≥ o ≤ o = ?

Possono esserci vincoli di tipo diverso formalizzati in modo diverso.

$$
\begin{aligned}
\min_{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n \\
& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\
& \dots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Modello generale di PL

min o max ? L'operatore dipende dal tipo di funzione obiettivo.

$\geq$ o $\leq$ o = ? Possono esserci vincoli di tipo diverso formalizzati in modo diverso.

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n \\
& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Modello generale di PL

$$
\begin{aligned}
\min_{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n \\
& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n \geq b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n \\
& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\
 & & & \ldots & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}
$$

Modello generale di PL

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n} c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$\min \begin{bmatrix} c_1, c_2, \dots, c_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Modello generale di PL

$$\max \begin{bmatrix} c_1, c_2, \ldots, c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n} c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n$$

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n &\le b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n &\le b_2 \\
&\ldots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n &\le b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ & & & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Modello generale di PL

min o max ? L'operatore dipende dal tipo di funzione obiettivo.

≥ o ≤ o = ? Possono esserci vincoli di tipo diverso formalizzati in modo diverso.

min $c^T x$

$Ax \geq b$

$x \geq 0$

$\Leftrightarrow$

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n} c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Modello generale di PL

min o max ? — L'operatore dipende dal tipo di funzione obiettivo.

$\geq$ o $\leq$ o = ? — Possono esserci vincoli di tipo diverso formalizzati in modo diverso.

$$\begin{aligned} &\max \ c^T x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} &\max_{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n} \ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n \\ &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ &a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\ &\ldots \\ &a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ &x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Modello generale di PL

Modelli di riferimento

$$\textbf{max } c^T x \quad Ax \le b \quad x \ge 0$$

$$\textbf{min } c^T x \quad Ax \ge b \quad x \ge 0$$

(1) $$\textbf{max } c^T x \quad Ax \le b \quad x \ge 0$$

Massimizzazione dell'output (*prestazione*) ottenibile da una *prefissata* quantità di input (*risorsa*) massima disponibile.

ESEMPIO: *modelli di produzione*.

(2) $$\textbf{min } c^T x \quad Ax \ge b \quad x \ge 0$$

Minimizzazione dell'input (*risorsa*) per realizzare un *prefissato* livello di output (*prestazione*) minimo richiesto.

ESEMPIO: *modelli di miscelazione*.

Modello generale di PL

MODELLO IN FORMA ARBITRARIA

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &D_{k,n} x = d \\ &E_{m,n} x \geq e \\ &H_{h,n} x \leq h \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Proposizione 1
Il problema può essere sempre ricondotto alla forma di riferimento (2):

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Dimostrazione

LHS (Left-Hand Side)

RHS (Right-Hand Side)

Vincoli =

$$Dx = d \iff \begin{cases} Dx \geq d \\ Dx \leq d \end{cases} \iff \begin{cases} Dx \geq d \\ -Dx \geq -d \end{cases}$$

Vincoli ≤

$$Hx \leq h \iff -Hx \geq -h$$

$$\Rightarrow \quad A_{2k+m+h,n} = \begin{pmatrix} D \\ -D \\ E \\ -H \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} d \\ -d \\ e \\ -h \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Modello generale di PL

MODELLO IN FORMA ARBITRARIA

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &D_{k,n}x = d \\ &E_{m,n}x \geq e \\ &H_{h,n}x \leq h \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Proposizione 2
Il problema può essere sempre ricondotto alla forma di riferimento (1):

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

NOTA: (1) e (2) possono essere considerate "forme di riferimento", nel senso che, grazie alle proposizioni 1 e 2, un problema di PL in forma arbitraria può essere sempre riscritto equivalentemente in una di queste due forme (dipende dalla f.o.).

$$A_{2k+m+h,n} = \begin{pmatrix} D \\ -D \\ -E \\ H \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} d \\ -d \\ -e \\ h \end{pmatrix}$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

NOTA: Nella forma (2) tutti i vincoli sono dello stesso tipo, anche quelli di non negatività (sono tutti disequazioni del tipo ≥).

Esercizi

Esercizio 1 Dimostrare la Proposizione 2.

MODELLO IN FORMA ARBITRARIA

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &D_{k,n} x = d \\ &E_{m,n} x \geq e \\ &H_{h,n} x \leq h \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Proposizione 2
Il problema può essere sempre ricondotto alla forma di riferimento (2):

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio 2 Verificare che il generico vincolo di non-negatività su una variabile x_j può essere scritto nella forma generale di vincolo lineare, cioè:

$$x_j \geq 0 \iff a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jj}x_j + \ldots + a_{jn}x_n \geq b_j$$

Assegnando opportuni valori ai coefficienti $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jj}, \ldots, a_{jn}$. Specificare questi valori per tutti gli *n* vincoli di non-negatività sulle *n* variabili del problema.

Importanza della PL

Vantaggi della PL

GENERALITÀ E FLESSIBILITÀ DEL MODELLO

I modelli di PL hanno carattere universale e si adattano a molte realtà applicative.

SEMPLICITÀ

Sono facilmente comprensibili e interpretabili.

EFFICIENZA DEGLI ALGORITMI PER LA PL

Gli algoritmi di PL disponibili permettono di risolvere rapidamente anche problemi di grandi dimensioni.

ANALISI POST-OTTIMIZZAZIONE

È possibile eseguire *analisi di sensibilità* per studiare come cambia la soluzione ottima del problema a seguito di variazioni marginali dei parametri.

Importanza della PL

Svantaggi della PL

Non sempre nelle applicazioni è possibile ricorrere a problemi di PL.

L'ipotesi che generalmente non è soddisfatta nei problemi reali è la continuità. ➡ PLI

Se le variabili sono tutte continue ma non tutte le funzioni sono lineari ➡ PNL

Esempio: pianificazione della produzione

Problema della pianificazione della produzione (Bertsimas, Freund 2000)
La compagnia GTC, che produce strumenti da lavoro (martelli, seghe, trivelle, pinze, chiavi inglesi), ha impianti in diverse parti del territorio degli Stati Uniti. Negli impianti di Winnipeg e del Canada l'impresa produce unicamente **pinze** e **chiavi** il cui processo di produzione richiede:

1. acciaio come materia prima
2. una fase di lavorazione dei singoli pezzi in acciaio (macchina per la lavorazione)
3. una fase di assemblaggio dei pezzi lavorati (macchina per l'assemblaggio)

RISORSE CONCORRENTI

Coefficienti Tecnologici	Quantità necessaria per una chiave	Quantità necessaria per una pinza	**Disponibilità** (giornaliera)
Acciaio (in libbre)	**1.5**	**1**	27000 libbre
Ore macchina lavorazione	**1**	**1**	21000 ore
Ore macchina assemblaggio	**0.3**	**0.5**	9000 ore

Esempio pianificazione della produzione

In più si conosce la domanda giornaliera (stimata) per i due prodotti e il **guadagno** che si ottiene dalla loro vendita.

	Chiavi	**Pinze**
Limite sulla domanda giornaliera (in unità di prodotto)	15000	16000
Guadagno per 1000 unità vendute	\$130	\$100

Cioè: **al massimo giornalmente si vendono 15000 unità di chiavi e 16000 unità di pinze** con un guadagno pari a \$130 per 1000 unità di chiavi vendute e pari a \$100 per 1000 unità di pinze vendute.

Esempio pianificazione della produzione

Problema della GTC: pianificare la produzione giornaliera di chiavi e pinze per l'impianto di Winnipeg in modo da massimizzare il guadagno totale che si ottiene dalla vendita degli strumenti prodotti in quell'impianto.

Formuliamo il modello di Programmazione Lineare.

incognite o variabili decisionali:

x_c	numero di chiavi da produrre in un giorno (**in migliaia**)
x_p	numero di pinze da produrre in un giorno (**in migliaia**)

funzione obiettivo:

$130x_c + 100x_p$ ricavo totale giornaliero (in dollari)

Esempio pianificazione della produzione

vincoli di limitazione delle risorse (scalati):

$$\underbrace{1.5x_c + x_p}_{\text{quantità di acciaio necessaria ogni giorno per produrre } x_c \text{ migliaia di chiavi e } x_p \text{ migliaia di pinze}} \leq \underbrace{27}_{\text{quantità di acciaio disponibile ogni giorno}}$$

acciaio

quantità di acciaio necessaria ogni giorno per produrre x_c migliaia di chiavi e x_p migliaia di pinze

quantità di acciaio disponibile ogni giorno

$$x_c + x_p \leq 21$$

macchina lavorazione

$$0.3x_c + 0.5x_p \leq 9$$

macchina assemblaggio

quantità di ore necessarie ogni giorno per produrre x_c migliaia di chiavi e x_p migliaia di pinze

numero di ore-macchina disponibili ogni giorno

Esempio pianificazione della produzione

vincoli di limitazione della domanda e di nonegatività:

$$x_c \leq 15$$

domanda di chiavi

$$x_p \leq 16$$

domamnda di pinze

quantità (in migliaia) di chiavi e di pinze prodotte

massima domanda giornaliera

$$x_c \; , \; x_p \geq 0$$

non-negatività delle variabili

le quantità, in migliaia, di chiavi e di pinze prodotte sono numeri non negativi.

Esempio pianificazione della produzione

Formulazione del modello di pianificazione della produzione:

funzione obiettivo

$$\max\ 130x_c + 100x_p$$

vincoli

$$1.5x_c + x_p \le 27$$

$$x_c + x_p \le 21$$

$$0.3x_c + 0.5x_p \le 9$$

vincoli di limitazione superiore

$$\left.\begin{array}{l} x_c \le 15 \\ x_p \le 16 \end{array}\right\}$$

vincoli aggiuntivi

vincoli di nonegatività

$$x_c,\ x_p \ge 0$$

(1)

$$\begin{array}{r} \max\ c^T x \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{array}$$

Soluzione ottima del modello:

$$x_c = 12$$

$$x_p = 9$$

con un guadagno totale giornaliero pari a

$$130x_c + 100x_p = 130 \cdot 12 + 100 \cdot 9 = 2460\ \$$$

Esempio pianificazione della produzione

PROPORZIONALITÀ

Le quantità di ogni risorsa necessarie per la produzione e i guadagni sono proporzionali alle quantità di chiavi e pinze da produrre.

$$\begin{aligned} \max\ & 130x_c + 100x_p \\ & 1.5x_c + x_p \le 27 \\ & x_c + x_p \le 21 \\ & 0.3x_c + 0.5x_p \le 9 \\ & x_c \le 15 \\ & x_p \le 16 \\ & x_c,\ x_p \ge 0 \end{aligned}$$

ADDITIVITÀ

Le quantità di una stessa risorsa necessarie per la produzione di chiavi e pinze e i guadagni sono additivi.

CONTINUITÀ (DIVISIBILITÀ)

Le due variabili del modello possono assumere tutti i valori reali nel loro intervallo di ammissibilità?
(in questo modello: frazioni con tre cifre decimali).

CERTEZZA

I valori forniti in tabella dei coefficienti tecnologici, il limite massimo sulla domanda e il guadagno giornaliero sono considerati come dati certi.

Esempio: pianificazione della produzione o allocazione ottima di risorse

Problema di produzione o di allocazione ottima di risorse (Facchinei, Lucidi, Roma, 2005-2006) Un colorificio produce due tipi di coloranti C1 e C2 utilizzando 3 preparati di base in polvere P1, P2 e P3, che vengono sciolti in acqua. La differente concentrazione dei preparati nell'acqua dà luogo ai due diversi coloranti. Le quantità dei preparati di base necessarie per produrre un litro di colorante per ciascuno dei due tipi è riportato nella tabella seguente insieme alle quantità giornaliere disponibili:

Coefficienti Tecnologici (in ettogrammi)	C1 (un litro)	C2 (un litro)	Quantità giornaliera disponibile (in ettogrammi)
P1	1	1	750
P2	1	2	1000
P3	-	1	400

Il prezzo di vendita:

C1 è di 7 **euro al litro**

C2 10 **euro al litro**.

Problema: determinare la strategia di produzione **giornaliera** che, con le quantità disponibili di preparati, **massimizza il ricavo totale ottenuto dalla vendita** dei coloranti.

Esempio: pianificazione della produzione o allocazione ottima di risorse

Formuliamo un modello di PL per descrivere il problema, tenendo conto delle le limitazioni imposte alla produzione effettivamente realizzabile dalla disponibilità limitata di risorse e con l'obiettivo di massimizzare il ricavo totale.

incognite o variabili decisionali:

x_1 quantità di colorante C1 prodotta (in litri)

x_2 quantità di colorante C2 prodotta (in litri)

funzione obiettivo:

$7x_1 + 10x_2$ **ricavo** totale giornaliero (in euro)

Esempio: pianificazione della produzione o allocazione ottima di risorse

Formulazione del modello di PL:

funzione obiettivo → $\max\ 7x_1 + 10x_2$

vincoli di limitazione sulle risorse giornaliere →

$$x_1 + x_2 \leq 750$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 1000$$
$$x_2 \leq 400$$

vincoli di nonegatività → $x_1, x_2 \geq 0$

$$(1)\quad \begin{aligned} \max\ & c^T x \\ Ax & \leq b \\ x & \geq 0 \end{aligned}$$

Soluzione ottima del modello:

$x_1 = 500$

$x_2 = 250$

con un ricavo totale giornaliero pari a

$$7x_1 + 10x_2 = 7 \cdot 500 + 10 \cdot 250 = 6000\ €$$

Esempio: pianificazione della produzione o allocazione ottima di risorse

PROPORZIONALITÀ

I consumi dei preparati di base e i ricavi ottenibili sono proporzionali ai quantitativi di coloranti prodotti.

ADDITIVITÀ

I consumi dei preparati di base e i ricavi rispettivamente associati alla produzione dei due coloranti sono additivi.

$$\max\ 7x_1 + 10x_2$$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 750 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\ x_2 &\leq 400 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

CONTINUITÀ (DIVISIBILITÀ)

Le due variabili del modello possono assumere tutti i valori reali nel loro intervallo di ammissibilità (anche frazioni di litro).

CERTEZZA

I valori forniti in tabella e i prezzi di vendita al litro dei coloranti sono considerati come dati certi.

Modelli di produzione con risorse concorrenti

Problema di produzione (Facchinei, Lucidi, Roma, 2005-2006) Un'azienda produce tre modelli di autovettura: uno economico, uno normale ed uno di lusso. Ogni autovettura viene lavorata da tre robot, A, B e C (i robot sono risorse **concorrenti**). I tempi unitari di lavorazione (in minuti) sono riportati nella tabella seguente insieme al profitto netto unitario per autovettura.

Coefficienti tecnologici (tempi unitari espressi in minuti)			
	Economica	**Normale**	**Lusso**
A	20	30	62
B	31	42	51
C	16	81	10
Profitto netto unitario (€)	1000	1500	2200

I robot A e B sono disponibili per 8 **ore** al giorno mentre il robot C è disponibile per 5 **ore** al giorno.

Inoltre, il numero di autovetture di lusso prodotte non deve superare il 20% della produzione complessiva, mentre il numero di autovetture economiche deve costituire almeno il 40% della produzione complessiva.

Problema: Supponendo che tutte le autovetture prodotte vengano vendute, formulare un problema di PL per decidere le quantità giornaliere da produrre per ciascun modello di auto in modo tale da massimizzare il profitto netto totale rispettando tutti i vincoli del problema.

Modelli di produzione con risorse concorrenti

Per poter scrivere i vincoli sulle risorse è necessario calcolare la disponibilità totale giornaliera di tempo di lavorazione sui robot A, B e C in minuti:

A	8 x 60 = 480
B	8 x 60 = 480
C	5 x 60 = 300

Variabili: $x_j \quad j = 1,2,3$

È necessario calcolare la limitazione inferiore per la produzione di autovetture economiche e la la limitazione superiore per la produzione di autovetture di lusso:

economiche	almeno 0.4 x prod. totale,	cioè:	almeno 0.4 $(x_1+x_2+x_3)$
di lusso	al più 0.2 x prod. totale,	cioè:	al più 0.2 $(x_1+x_2+x_3)$

Limitazioni:

$$x_1 \geq 0.4\,(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$x_3 \leq 0.2\,(x_1 + x_2 + x_3)$$

Modelli di produzione con risorse concorrenti

MODELLO DI PRODUZIONE DI AUTOVETTURE CON RISORSE CONCORRENTI

$$
\begin{cases}
\max\,(1000x_1 + 1500x_2 + 2200x_3) \\
20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480 \\
31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480 \\
16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300 \\
x_3 \leq 0.2\,(x_1 + x_2 + x_3) \\
x_1 \geq 0.4\,(x_1 + x_2 + x_3) \\
x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0.
\end{cases}
$$

Modelli di produzione con risorse alternative

Consideriamo la stessa azienda dell'esempio precedente, ma assumiamo ora che la **lavorazione completa** di una autovettura (di qualsiasi dei tre modelli) possa essere effettuata **alternativamente** da uno qualsiasi dei tre robot (in questo caso i robot sono **risorse alternative**).

Coefficienti tecnologici (tempi unitari espressi in minuti)			
	Economica	**Normale**	**Lusso**
A	20	30	62
B	31	42	51
C	16	81	10
Profitto netto unitario (€)	1000	1500	2200

In questo caso:

- i coefficienti tecnologici si riferiscono al tempo in minuti necessario per produrre un'autovettura di ciascun tipo con **ciascuno** dei tre robot (**separatamente/alternativamente**).
- il profitto netto unitario per autovettura venduta non dipende dal robot con cui è stata prodotta.

Modelli di produzione con risorse alternative

Per questo modello le variabili devono contenere un'informazione più dettagliata rispetto al precedente modello con risorse concorrenti, cioè è necessario misurare le quantità di auto prodotte per ciascun robot *i* e ciascun modello di autovettura *j*:

Variabili: $x_{ij} \quad i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3$

In totale abbiamo 9 variabili.

NOTA: le quantità totali di auto di ciascun modello (qualunque sia il robot che le ha prodotte) possono essere comunque *calcolate* come segue:

economico $x_1 = x_{11} + x_{21} + x_{31}$

normale $x_2 = x_{12} + x_{22} + x_{32}$

lusso $x_3 = x_{13} + x_{23} + x_{33}$

Modelli di produzione con risorse alternative

MODELLO DI PRODUZIONE DI AUTOVETTURE CON RISORSE ALTERNATIVE

$$
\begin{cases}
\max \left(1000\overbrace{\boxed{(x_{11} + x_{21} + x_{31})}}^{X_1} + 1500\overbrace{\boxed{(x_{12} + x_{22} + x_{32})}}^{X_2} + 2200\overbrace{\boxed{(x_{13} + x_{23} + x_{33})}}^{X_3}\right) \\
20x_{11} + 30x_{12} + 62x_{13} \leq 480 \\
31x_{21} + 42x_{22} + 51x_{23} \leq 480 \\
16x_{31} + 81x_{32} + 10x_{33} \leq 300 \\
\underbrace{\boxed{x_{13} + x_{23} + x_{33}}}_{X_3} \leq 0.2\left(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}\right) \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 0.4\left(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}\right) \\
x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, \qquad j = 1, 2, 3.
\end{cases}
$$

Produzione totale = Produzione del robot A + Produzione del robot B + Produzione del robot C

Modelli di produzione con risorse alternative

MODELLO DI PRODUZIONE DI AUTOVETTURE CON RISORSE ALTERNATIVE

Trascuriamo il vincoli sulle limitazioni della produzione per risalire alla struttura di base del modello di produzione.

$$\begin{cases} \max\left(1000(x_{11}+x_{21}+x_{31})+1500(x_{12}+x_{22}+x_{32})+2200(x_{13}+x_{23}+x_{33})\right) \\ 20x_{11}+30x_{12}+62x_{13}\leq 480 \\ 31x_{21}+42x_{22}+51x_{23}\leq 480 \\ 16x_{31}+81x_{32}+10x_{33}\leq 300 \\ \\ x_{ij}\geq 0 \qquad i=1,2,3, \qquad j=1,2,3. \end{cases}$$

$$(1)\qquad \begin{aligned} \max\ & c^T x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Modelli di produzione con risorse concorrenti e con risorse alternative

Formulazione generale (senza limitazioni di produzione)

n diversi prodotti $P_1, P_2, \ldots, P_n$ m risorse $R_1, R_2, \ldots, R_m$

a_{ij} $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ quantità della risorsa R_i necessaria per fabbricare una unità del prodotto P_j

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \mathbf{P_1} & \cdots & \mathbf{P_j} & \cdots & \mathbf{P_n} \\
\hline
\mathbf{R_1} & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{R_i} & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{R_m} & a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}$$

b_i $i = 1, \ldots, m$; quantità della risorsa R_i disponibile

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{R_1} & \mathbf{R_2} & \cdots & \mathbf{R_m} \\
b_1 & b_2 & \cdots & b_m
\end{array}$$

c_j $j = 1, \ldots, n$; profitto netto unitario per il prodotto P_j

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \cdots & \mathbf{P_n} \\
c_1 & c_2 & \cdots & c_n.
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{lr} & \textbf{max } c^T x \\ (1) & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}}$$

Modelli di produzione con risorse concorrenti

Formulazione generale (senza limitazioni di produzione)

Variabili non negative

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Funzione obiettivo

$$z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Vincoli sulle risorse

$$\begin{array}{cccc}
a_{11}x_1 + & \ldots & +a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + & \ldots & +a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
\vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + & \ldots & +a_{mn}x_n & \leq b_m.
\end{array}$$

MODELLO DI PRODUZIONE CON RISORSE CONCORRENTI

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Modelli di produzione con risorse alternative

Formulazione generale (senza limitazioni di produzione)

Variabili non negative

$$x_{ij} \geq 0, \; i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Funzione obiettivo

$$c_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1} + c_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \ldots + c_n \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

Vincoli sulle risorse

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_{11}+ & \ldots & +a_{1n}x_{1n} & \leq b_1 \\ a_{21}x_{21}+ & \ldots & +a_{2n}x_{2n} & \leq b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_{m1}+ & \ldots & +a_{mn}x_{mn} & \leq b_m. \end{array}$$

MODELLO DI PRODUZIONE CON RISORSE ALTERNATIVE

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

NOTA:
L'unica differenza tra le due formulazioni sta nella definizione del vettore delle variabili.