Ricerca Operativa
a.a. 2018-2019

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione II - 27 Febbraio 2019

Esempio: problema di miscelazione

Problema di miscelazione (Facchinei, Lucidi, Roma, 2005-2006) Una industria produce succhi di frutta mescolando due sostanze, polpa di frutta e dolcificante, ma dovendo garantire nel prodotto finale alcuni requisiti relativi al contenuto di **vitamina C**, **sali minerali**, e **zucchero**.

	Contenuto di nutriente in in 100 grammi di ingrediente di base		
	Polpa di frutta	**Dolcificante**	**Richieste minime**
Vitamina C (mg)	140	-	**70 mg**
Sali minerali (mg)	20	10	**30 mg**
Zucchero (gr)	25	50	**75 gr**
Costo (lire/etto)	400	600	

Problema: determinare le quantità di polpa di frutta e dolcificante da utilizzare nella miscelazione del succo di frutta in modo da minimizzare il costo totale per l'acquisto dei due ingredienti di base.

Modello generale di miscelazione

n sostanze: $S_1, \dots, S_j, \dots, S_n$

m componenti (contenuti nelle sostanze): $C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$

costo unitario sostanza j: c_j, j=1,…,n

quantità minima (fabbisogno) componente i: b_i, i=1,…,m

quantità di componente i presente in una unità di sostanza j: a_{ij}, i=1,…,m, j=1,…,n

Problema: Individuare la **miscela** più economica **delle sostanze** (variabili) in modo tale da garantire che siano soddisfatti tutti i requisiti minimi relativi ai componenti $C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$ (risorse).

$$
\begin{aligned}
&\min\ c^T x \\
&Ax \geq b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\boxed{
\begin{aligned}
&\min_{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n} \ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n \\
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\
&\dots \\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \\
&x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
\end{aligned}
}
$$

Modello generale di miscelazione

NOTA
In un modello di miscelazione possono essere presenti anche limitazioni superiori (upper bounds) sulle variabili.

$$x_j \le u_j, \;\; j = 1,2,\ldots,n$$

Per uno o più componenti C_i può essere richiesto anche che una miscela contenga una quantità non superiore a una certa quantità massima $\mathbf{d_i}$ (tolleranza massima sul componente i-esimo):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le d_i, \;\; i = 1,2,\ldots,m$$

$$(2) \quad \begin{array}{l} \textbf{min}\ c^T x \\ \quad Ax \ge b \\ \quad\;\; x \ge 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \textbf{min}\ c^T x \\ \quad b \le Ax \le d \\ \quad 0 \le x \le u \end{array}$$

Esempio problema di miscelazione

Formulazione del modello di PL:

Costo totale per l'acquisto degli ingredienti

vincoli di richiesta minima di nutrienti

vincoli di nonegatività

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problema del trasporto

Problema del trasporto di energia (Winston, Albright, 1997)

La società elettrica Power possiede 3 impianti di produzione di energia con i quali deve fornire l'energia necessaria a 4 città.

L'ammontare di energia (offerta) che ogni impianto (origine) produce (giornalmente) e il fabbisogno (giornaliero) di energia (domanda) di ogni città (destinazione) sono le seguenti:

Impianto	**Offerta di energia (in milioni di kw/h)**
Impianto 1	35
Impianto 2	50
Impianto 3	40

Città	**Domanda di energia (in milioni di kw/h)**
Città 1	45
Città 2	20
Città 3	30
Città 4	30

Problema del trasporto

Il costo per inviare un milione di kw/h per ciascuna delle possibili coppie *impianto/città*, espresso in dollari, è:

COSTI	Città 1	Città 2	Città 3	Città 4
Impianto 1	8	6	10	9
Impianto 2	9	12	13	7
Impianto 3	14	9	16	5

Problema della Power: stabilire un piano di rifornimento (trasporto) di energia alle città che soddisfi tutte le domande minimizzando il costo totale per l'invio dell'energia.

Problema del trasporto

IPOTESI DI ASSENZA DI GIACENZE (AG)

Per formulare il suo problema, la Power **assume** che non ci sia perdita di energia nel trasporto e impone che **tutta** l'energia prodotta in ciascun impianto venga inviata alle città (assenza di giacenza alle origini) e che ogni città riceva **esattamente** la quantità di energia richiesta (assenza di giacenza alle destinazioni).

NOTA:
Come vedremo, l'assunzione di assenza di giacenze (AG) potrà corrispondere alla realtà oppure no, a seconda della realizzazione numerica del problema di trasporto da risolvere.

Se AG non è realizzabile, è necessario cambiare le ipotesi di lavoro e costruire un diverso modello di programmazione matematica per il problema del trasporto.

Primo Modello di PL per il problema di trasporto

HP: AG

variabili

x_{ij}, $i = 1,2,3$ $j = 1,2,3,4$

quantità di energia che l'impianto *i* deve fornire alla città *j*, espresso in milioni di kw/h.

vincoli alle origini

L'ammontare di energia che ogni impianto (origine) invia alle città deve essere esattamente pari all'ammontare di energia che produce (offerta).

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 35$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40$$

vincoli alle destinazioni

Ogni città deve ricevere dalle origini una quantità di energia pari esattamente alla quantità domandata.

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$$

NOTA: Nel modello matematico le ipotesi sull'assenza di giacenze alle origini e alle destinazioni si traducono nell'esigenza di formulare i vincoli attraverso delle **equazioni**.

Primo Modello di PL per il problema di trasporto

funzione obiettivo

Il costo totale per fornire energia agli impianti deve essere minimizzato:

$$\begin{aligned} \min\ & 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + \\ & + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + \\ & + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} \end{aligned}$$

vincoli di nonegatività

Le quantità di energia inviate da una origine a una destinazione sono positive o nulle:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

Primo Modello di PL per il problema di trasporto

MODELLO M1

funzione obiettivo

$$\min 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + \\ + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + \\ + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$$

vincoli strutturali
(equazioni)

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 35$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$$

HP: AG

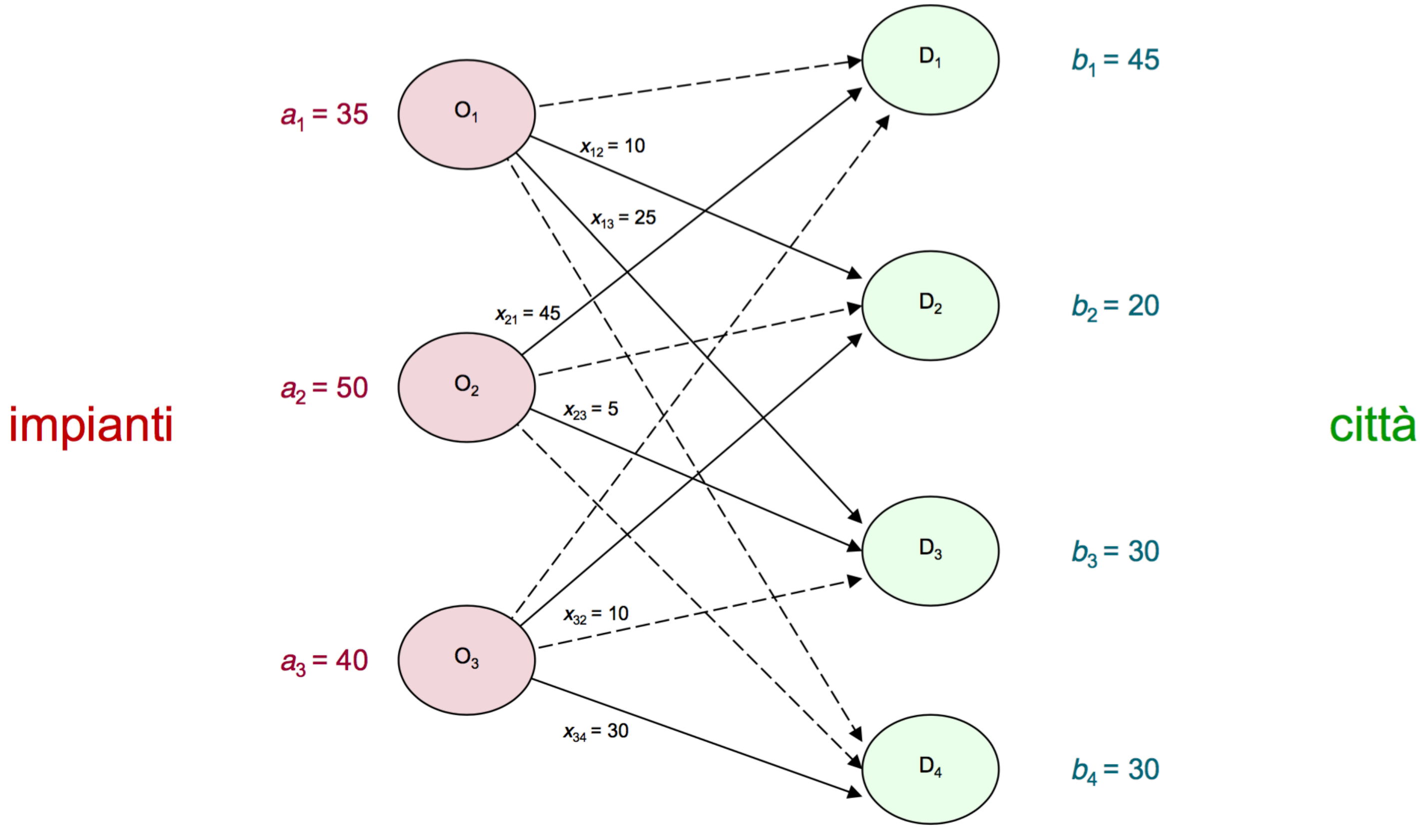
$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\textbf{min } c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

vincoli di nonegatività

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

Soluzione del problema di trasporto con M1

Lo "schema" mostra i tragitti *impianto/città* sui quali l'energia può essere inviata e la soluzione del problema del trasporto appena formulato.
Secondo la soluzione ottima, nei tragitti tratteggiati NON deve essere inviata energia, mentre per gli altri è indicato l'ammontare di energia da inviare.



Formulazione generale di M1 (con ipotesi AG)

Si consideri un problema generale di trasporto in cui ci sono *m* origini e *n* destinazioni.

Si indichi la quantità disponibile all'origine i con a_i e la quantità richiesta alla destinazione j con b_j.

Sia inoltre c_{ij} il costo unitario di trasporto dall'origine i alla destinazione j.

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

min $c^T x$

$Ax = b$

$x \geq 0$

⟺ (M1)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \;\; j = 1,2,\ldots n$$

Ipotesi di assenza di giacenze (AG)

NOTA: Dal momento che è stata individuata una soluzione ottima del modello, vuol dire che, nel caso della Power, l'ipotesi di assenza di giacenze era plausibile. Infatti, siccome la soluzione ottima del modello è anche ovviamente ammissibile, essa soddisfa tutti i vincoli del modello e, in particolare le equazioni che a tali ipotesi corrispondono.

Come avrebbe potuto la Power capire se il modello M1 aveva soluzioni (l'ipotesi AG plausibile) oppure no ancor prima di risolverlo?

TEOREMA

Il modello del trasporto M1 ammette soluzioni ammissibili se e solo se nella realizzazione del problema l'offerta totale eguaglia la domanda totale, nel qual caso il problema di trasporto si dice **bilanciato**.

Nel caso della Power il problema è **bilanciato**:

35+50+40 **= 125 =** 45+20+30+30

offerta totale **=** domanda totale

Problemi non bilanciati

Cosa succede se il problema è **NON bilanciato** (offerta totale ≠ domanda totale)?

.

I CASO: offerta totale **>** domanda totale

In questo caso c'è possibilità di soddisfare pienamente la domanda (il problema è **ammissibile**). Tuttavia, se la quantità di energia prodotta in eccesso non verrà inviata alle città, si verificheranno **giacenze** nelle origini, mentre, se tutta l'energia prodotta verrà inviata fuori dalle origini, la quantità in eccesso andrà persa perchè non verrà utilizzata dalle città. In questo caso si dice che si genereranno **giacenze** nelle destinazioni.

II CASO: offerta totale **<** domanda totale

In questo caso **NON c'è possibilità di soddisfare tutte le domande** delle città perchè nelle origini considerate non si produce energia a sufficienza. **La realizzazione del problema è non ammissibile**.

Caso generale: offerta totale ≥ domanda totale

È possibile formulare un modello di trasporto diverso da M1 (che chiameremo M2) in cui è prevista la possibilità di giacenze.

Nel nuovo modello M2 le variabili sono le stesse di M1.

M1 e M2 differiscono solo per la forma dei vincoli alle origini e alle destinazioni che in M1 sono equazioni, mentre in M2 sono disequazioni.

Il modello M2 è più generale di M1.

offerta totale ≥ domanda totale

MODELLO M2

funzione obiettivo

$$\min 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + \\ + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + \\ + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$$

vincoli strutturali (disequazioni)

$$\boxed{\begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30 \end{aligned}}$$

vincoli di nonegatività

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$$

offerta totale ≥ domanda totale

MODELLO M2

vincoli strutturali

NOTA: M2 è <u>più generale</u> di M1 e nel caso di problema bilanciato avrà la stessa soluzione ottima di M1. Perché?

Se domanda totale e offerta totale si eguagliano ogni unità offerta servirà per soddisfare la domanda di qualche destinazione.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$$

In questo caso, tutti i vincoli di domanda e di offerta di M2 risulteranno "attivi" in corrispondenza della soluzione ottima, cioè essi saranno soddisfatti con l'uguaglianza.

Nel caso di problema non bilanciato ma ammissibile (offerta totale > domanda totale) in corrispondenza della soluzione ottima qualche vincolo sarà necessariamente "non attivo" (giacenza).

II CASO: offerta totale < domanda totale

Nel **caso II** la realizzazione del problema è non ammissibile e non può essere programmato un piano di rifornimento di energia alle 4 città se non si riesce a individuare un modo per produrre più offerta di energia.

Cosa si può fare?

- aumentare la produzione di energia negli impianti disponibili;
- individuare un nuovo impianto che possa produrre la quantità di energia mancante.

NOTA: In ogni caso la realizzazione del problema cambia perché cambia l'offerta totale che nella nuova realizzazione deve risultare almeno pari alla domanda totale.

Formulazione generale di M2

Si consideri un problema generale di trasporto con m origini e n destinazioni.

Sia a_i la quantità disponibile all'origine i e b_j la quantità richiesta alla destinazione j.

Sia inoltre c_{ij} il costo unitario di trasporto dall'origine i alla destinazione j.

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

(M2)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,m \quad j = 1,2,\dots n$$

Bilanciamento

Riassumendo:

offerta totale < domanda totale — il problema è non ammissibile

offerta totale > domanda totale — c'è un eccesso di offerta

NOTA: Nel caso di offerta totale > domanda totale **il problema si può ricondurre a uno equivalente bilanciato** inserendo una destinazione fittizia alla quale viene associata una domanda pari alla differenza (offerta totale - domanda totale).

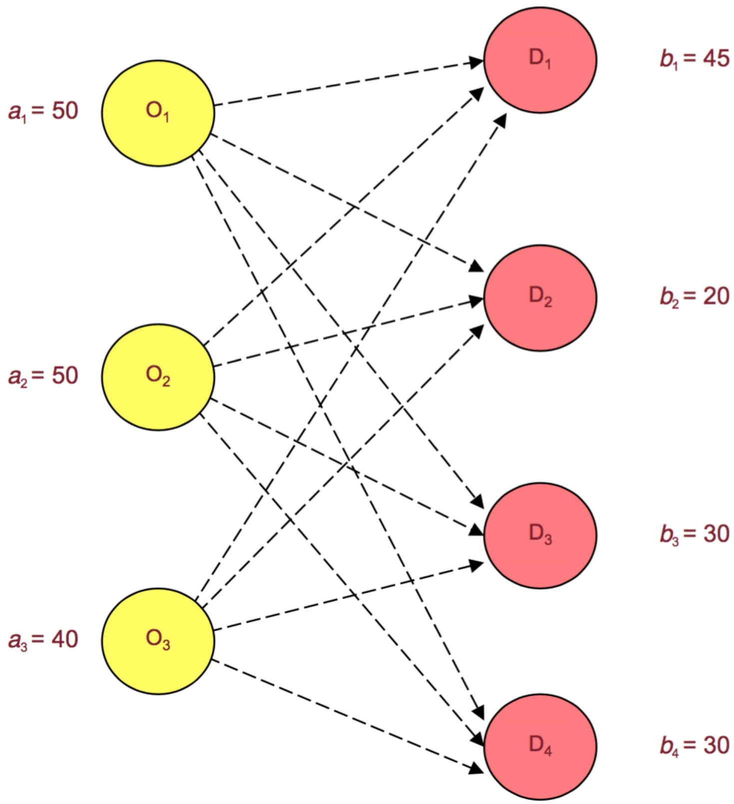
Bilanciamento

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots n$$



offerta totale = 50+50+40 = 140 **>** 125 = 45+20+30+30 = domanda totale

eccesso di offerta = 140 - 125 = 15

Bilanciamento

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i\,,\quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j\,,\quad j=1,2,\dots,n$$

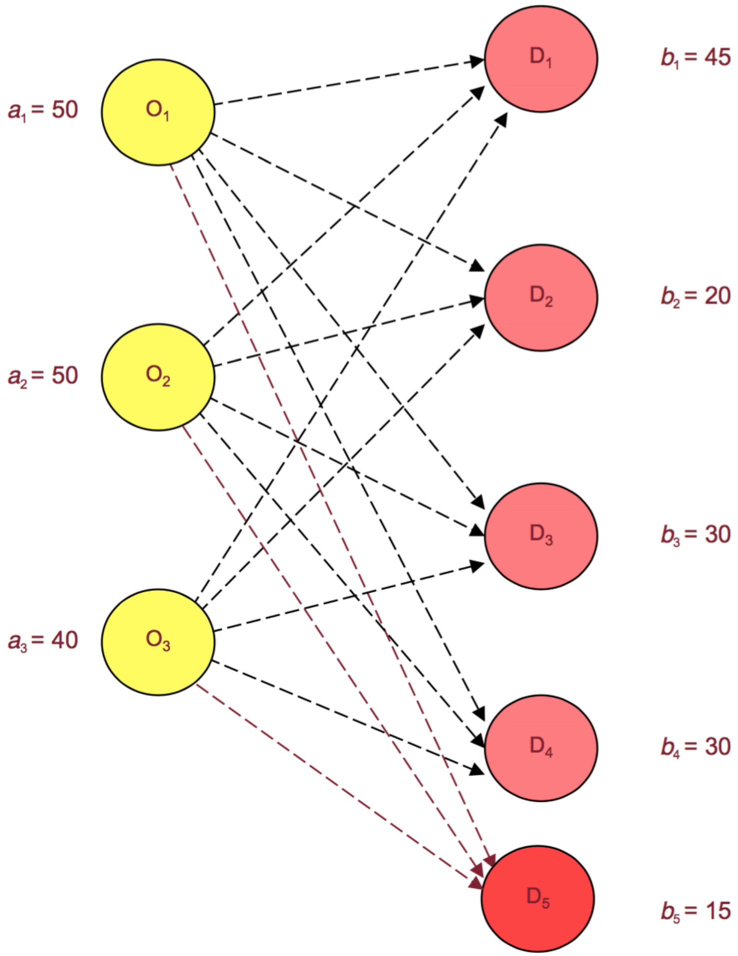
$$x_{ij} \ge 0,\quad i=1,2,\dots,m\quad j=1,2,\dots n$$

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i\,,\quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,,\quad j=1,2,\dots,n+1$$

$$x_{ij} \ge 0,\quad i=1,2,\dots,m\quad j=1,2,\dots n,n+1$$



Bilanciamento

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i\,,\quad i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j\,,\quad j=1,2,\ldots,n$$

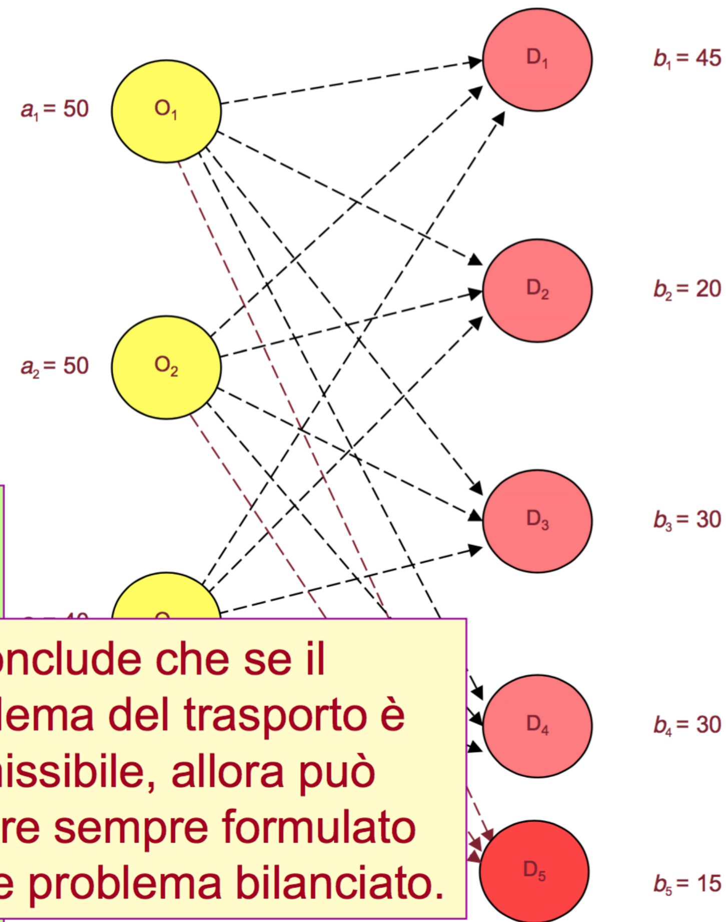
$$x_{ij} \ge 0,\quad i=1,2,\ldots,m \quad j=1,2,\ldots n$$

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i\,,\quad i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,,\quad j=1,2,\ldots,n+1$$

$$x_{ij} \ge 0,\quad i=1,2,\ldots,m \quad j=1,2,\ldots n,n+1$$



Si conclude che se il problema del trasporto è ammissibile, allora può essere sempre formulato come problema bilanciato.

ESERCIZIO

PROBLEMA DEL TRASPORTO DI GHIAIA

Una società produttrice di ghiaia ha stipulato un contratto di fornitura per due progetti di costruzione, rispettivamente nelle città di Brock e Wurst.
Per il progetto di Brock la fornitura prevede ogni mese la consegna di 60 autocarri di materiale, mentre per quello di Wurst la domanda mensile è di 90 autocarri.
La società ha tre diversi siti di produzione di ghiaia localizzati nelle tre città di Nova, Scova e Tova, ciascuno dei quali produce mensilmente una quantità di ghiaia pari al carico per 50 autocarri.

La tabella seguente mostra le distanze stradali (espresse in miglia) da ogni sito di produzione ad ogni sito consegna della ghiaia.

	Brock	Wurst
Nova	23	77
Scova	8	94
Tova	53	41

ESERCIZIO

Tenendo conto del fatto che quanto più lunghe sono le distanze percorse dai camion tanto più elevati sono i costi che la società deve sostenere, il problema della società è quello di stabilire un piano di consegna mensile della merce prodotta nei siti di Nova, Scova e Tova ai siti dei progetti localizzati a Brock e Wurst tale che la domanda mensile di ghiaia di ciascun progetto sia soddisfatta e la distanza totale percorsa dai camion che effettuano le consegne sia minima.

Quesiti

1) Formulare un Modello di Trasporto per risolvere il problema.

2) Per un errore di trascrizione la domanda di ghiaia del sito di Brock è stata comunicata alla società non correttamente. Quindi per l'ordinativo da consegnare viene ora aggiornato al valore corretto pari a 50 autocarri di materiale. In questo caso, esiste una soluzione ammissibile per il modello formulato in 1)?

3) Il modello di trasporto formulato al punto 1) è ancora utilizzabile per la programmazione mensile o deve essere modificato?

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI PROBLEMI DI PL

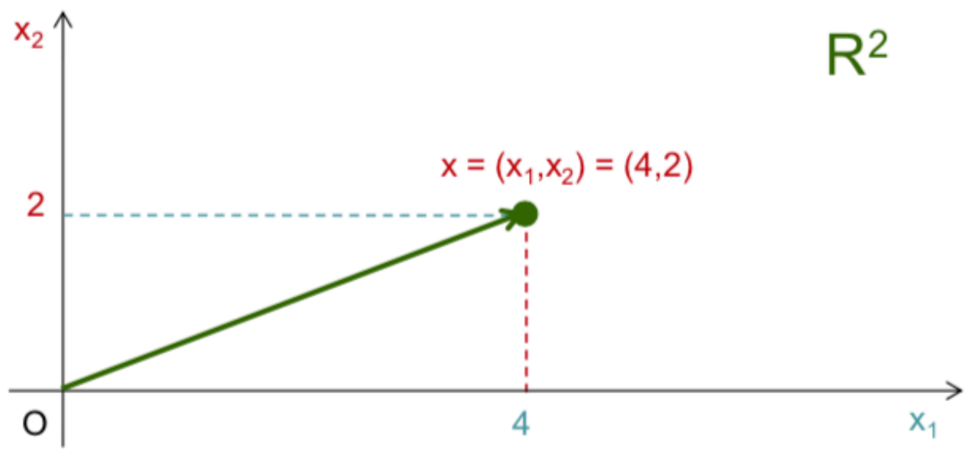
Rappresentazione di vettori

Consideriamo un vettore $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nello spazio R^n.

Esso può essere visto come:

- un **punto** in R^n di coordinate $(x_1, x_2, ..., x_n)$;
- uno **spostamento** in R^n: in questo caso le componenti $x_1, x_2, ..., x_n$ del vettore indicano gli spostamenti lungo le direzioni di ciascuna delle coordinate dello spazio di riferimento R^n quando si passa dal punto origine di coordinate $(0,...,0)$ al punto di coordinate $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

punto

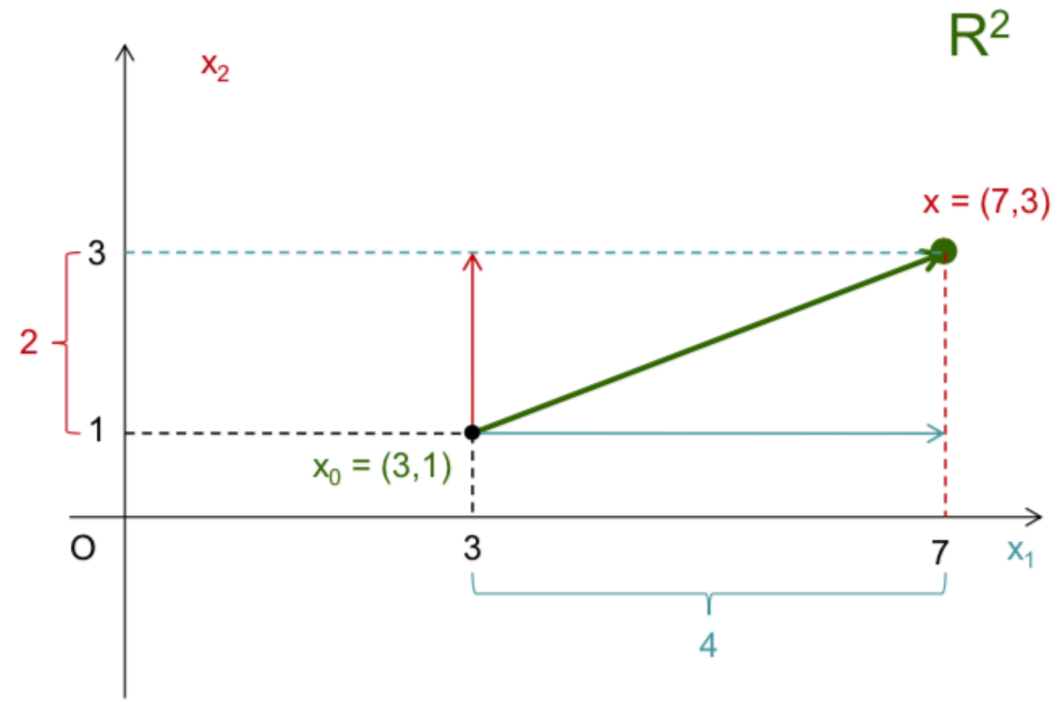


spostamento
(da O=(0,0) a x)

$x=(4,2) \quad \rightarrow \quad \Delta x = (x_1-0, x_2-0)$

Rappresentazione di vettori

Spostamento da (3,1) a (7,3): $x=(7,3) \rightarrow \Delta x = (7-3,3-1) = (4,2)$



La direzione dello spostamento è individuata dai due punti, uno di partenza (x_0) e uno di arrivo (x):

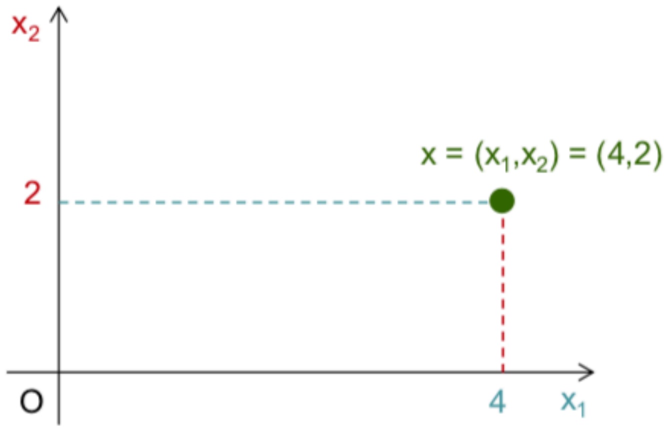
$\Delta x = x - x_0$ Direzione **nel punto x_0**

Rappresentazione di vettori

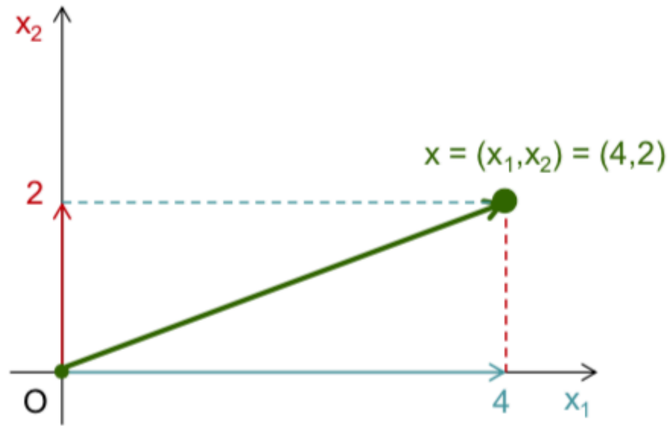
NOTA: Se lo spostamento è misurato a partire dall'origine $x_0=x_O=(0,0)$ degli assi allora il punto coincide con lo spostamento:

$$\boldsymbol{\Delta x} = x - x_0 = x - x_O = \mathbf{x}$$

R^2



punto



spostamento

Spazio vettoriale

Consideriamo un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e un punto x_0 nello spazio R^n, si ha:

- la direzione $\Delta x = x - x_0$ con punto di partenza x_0 (origine degli assi).
- la lunghezza (norma) di x, definita come segue:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

Esempio: Per x = (4, -3) si ha:

$$\|x\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Definizione Si definisce spazio vettoriale (o spazio lineare) di dimensione n (e si indica con S_n) un **insieme di vettori in R^n** chiuso rispetto alle operazioni di

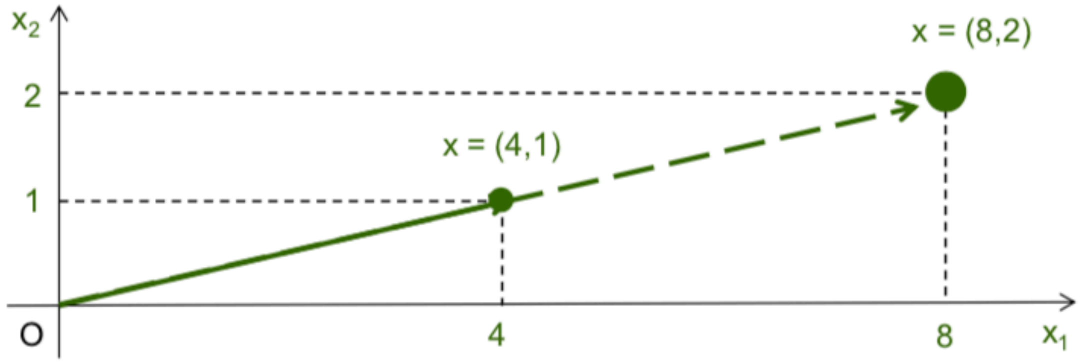
1. somma tra due vettori;
2. moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

Lo stesso R^n è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Operazioni tra vettori

La moltiplicazione per uno scalare di un vettore di R^n produce un nuovo vettore in R^n. Consideriamo lo scalare 2 e il vettore x = (4,1), si ha:

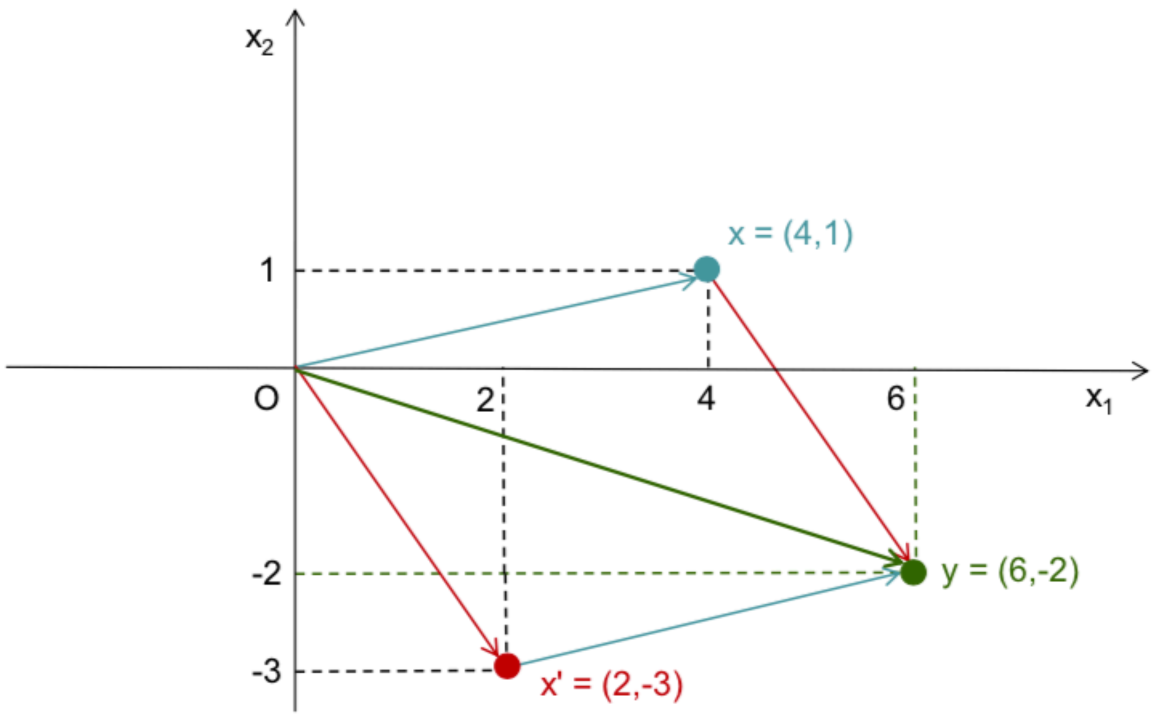
$$2x = (2 \cdot 4,\ 2 \cdot 1) = (8,\ 2)$$



Operazioni tra vettori

La somma algebrica tra due vettori di R^n produce un nuovo vettore in R^n.
Consideriamo due vettori $x' = (2,-3)$ e $x = (4,1)$, si ha:

$$y = x' + x = (2 + 4, -3 + 1) = (6, -2)$$

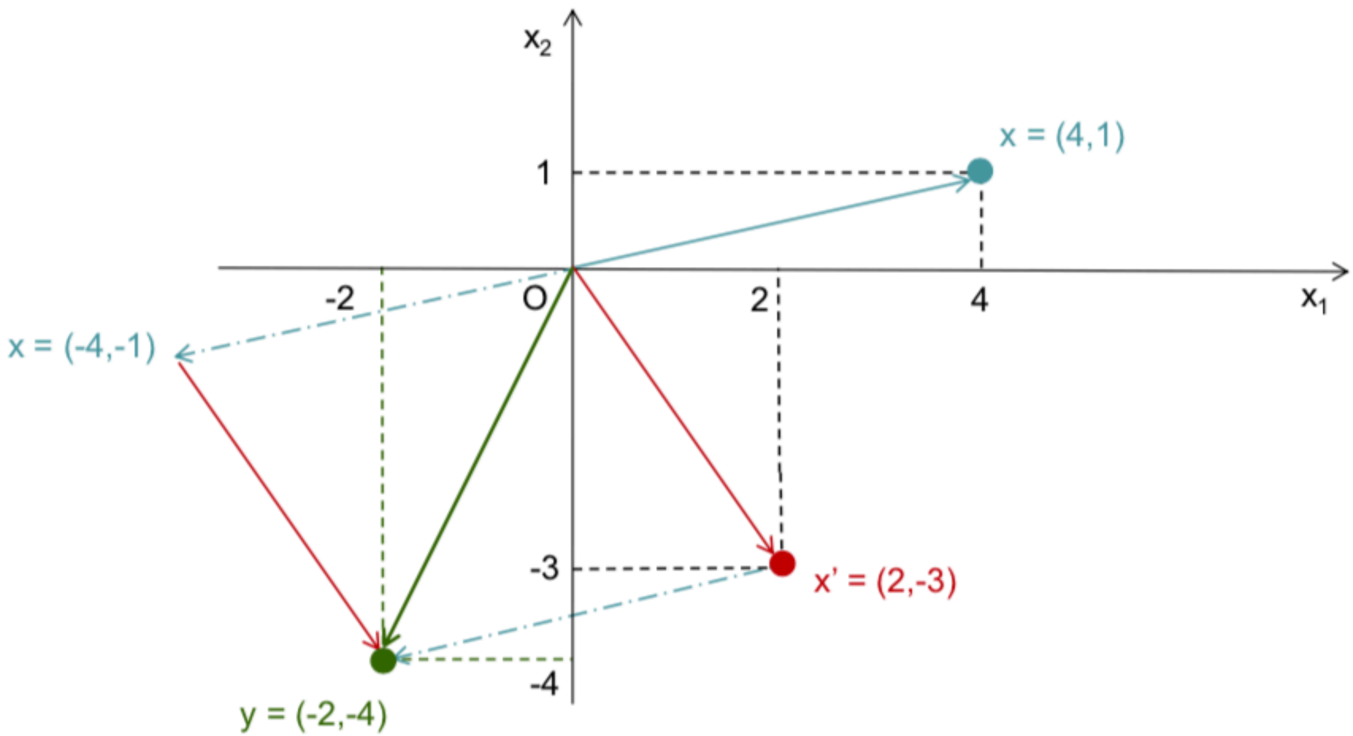


Operazioni tra vettori

La somma algebrica tra due vettori di R^n produce un nuovo vettore in R^n.

Consideriamo due vettori $x' = (2,-3)$ e $x = (4,1)$, si ha:

$$y = x' - x = x' + (-x) = (2-4, -3-1) = (-2, -4)$$

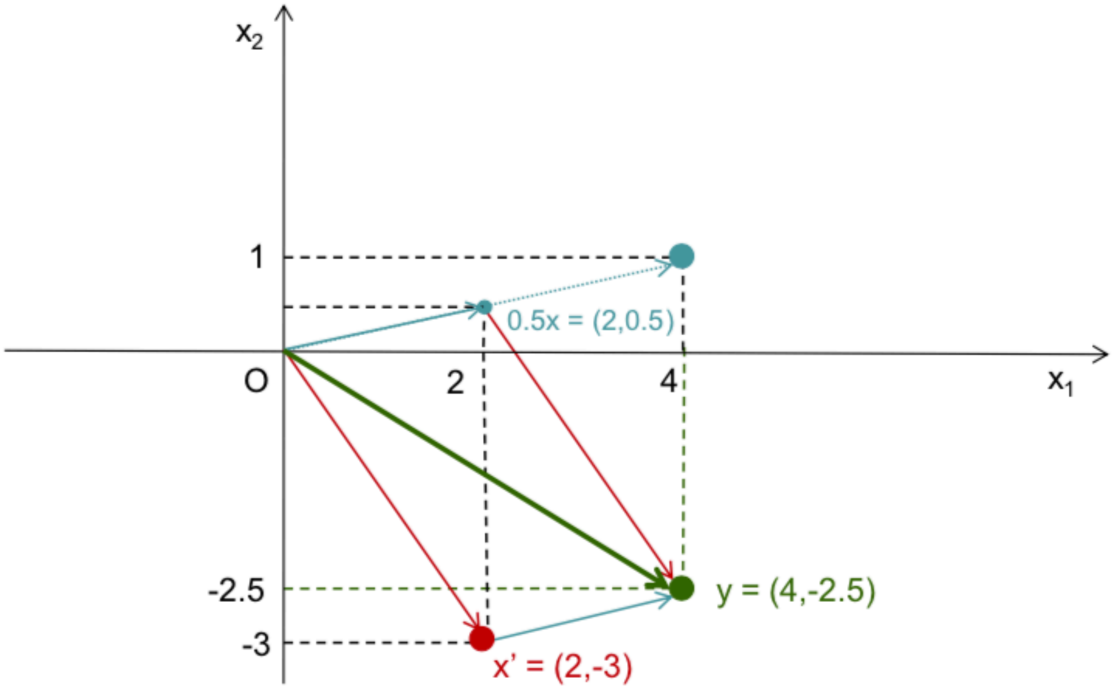


Operazioni tra vettori

Più in generale, la **combinazione lineare** di due vettori di R^n produce un nuovo vettore in R^n.

Consideriamo due vettori $x' = (2,-3)$ e $x = (4,1)$, si ha:

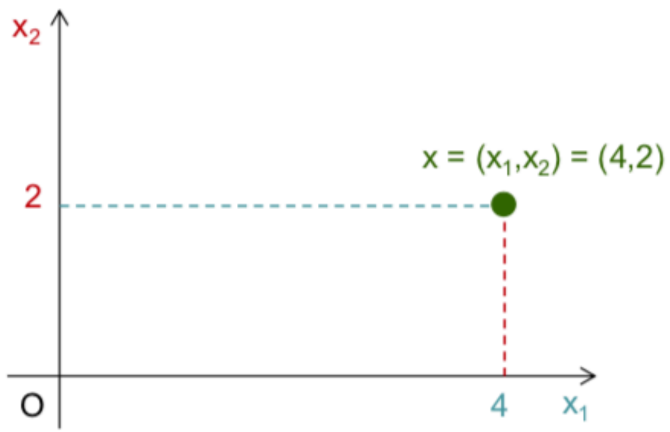
$$y = x' + 0.5x = (2 + 2, -3 + 0.5) = (4, -2.5)$$



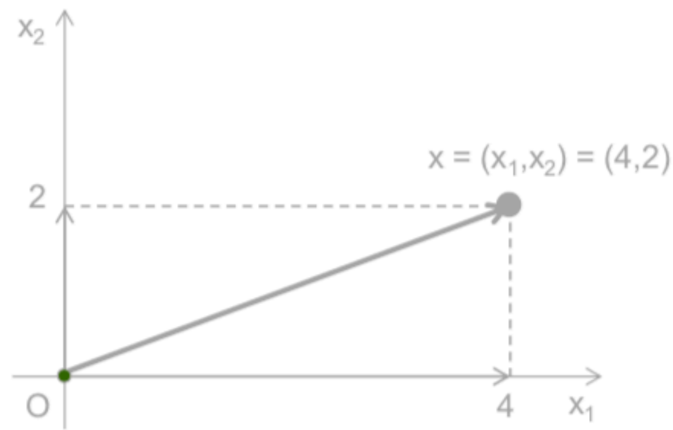
Rappresentazione geometrica modelli di PL

Per la rappresentazione e soluzione geometrica di un problema di PL, consideriamo i vettori $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ come **punti** nello spazio R^n.

R^2



punto



spostamento

METODO GEOMETRICO PER LA PL
IN DUE VARIABILI

Metodo geometrico per la PL

Considerando i vettori in R^2 come punti nello spazio bidimensionale. Un modello di PL in due variabili può essere risolto con il seguente metodo geometrico:

Passo 1. Si rappresentano le condizioni di non-negatività e i vincoli "strutturali" (come semipiani chiusi);

Passo 2. → si **individua** la regione ammissibile;

Passo 3. si rappresenta la f.o. (curve di isoprofitto/isocosto);

Passo 4. → si **individua** la soluzione ottima.

Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

Formulazione del modello di pianificazione della produzione:

funzione obiettivo (guadagno totale) → $\max 130x_c + 100x_p$

vincoli di limitazione delle risorse →

$$1.5x_c + x_p \le 27$$
$$x_c + x_p \le 21$$
$$0.3x_c + 0.5x_p \le 9$$

vincoli di limitazione superiore (produzione massima) →

$$x_c \le 15$$
$$x_p \le 16$$

vincoli di nonegatività → $x_c, x_p \ge 0$

Soluzione ottima del modello:

$$x_c = 12$$
$$x_p = 9$$

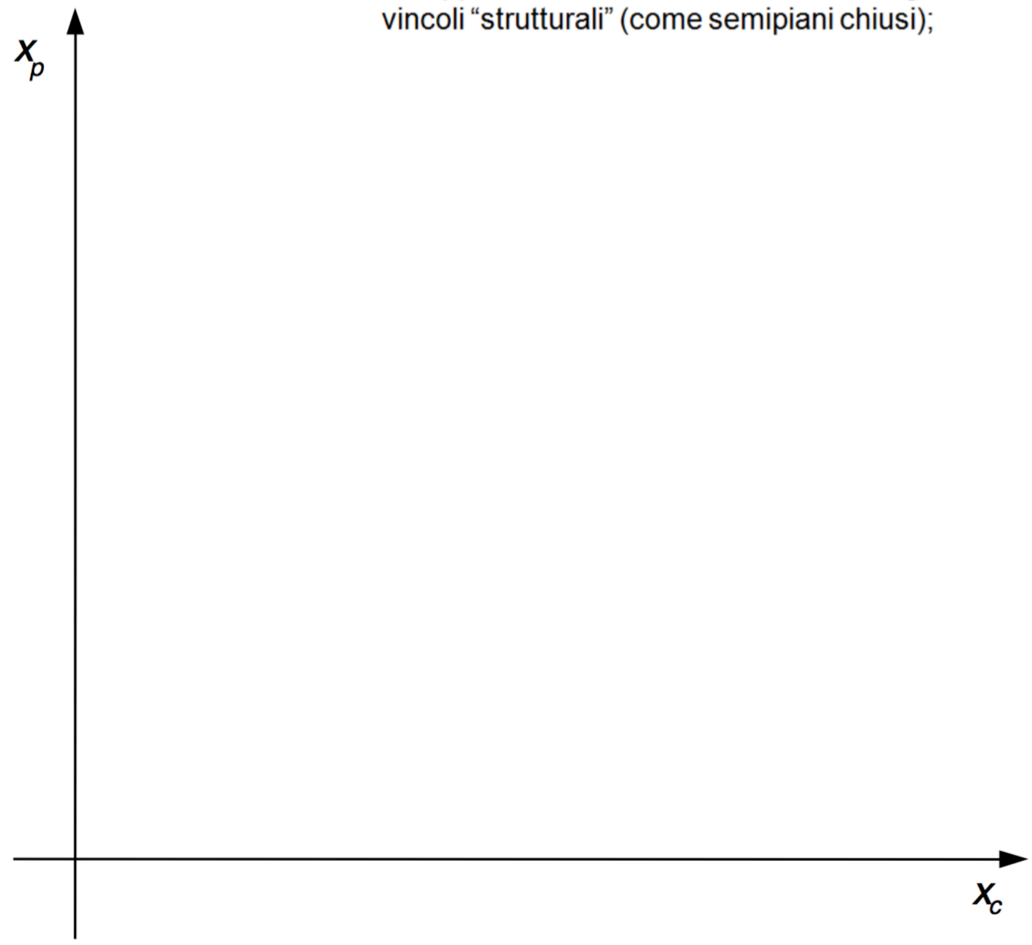
con un guadagno totale giornaliero pari a

$$130x_c + 100x_p = 130 \cdot 12 + 100 \cdot 9 = 2460 \ \$$$

Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

Passo 1. Si rappresentano le condizioni di non-negatività e i vincoli “strutturali” (come semipiani chiusi);

Piano cartesiano

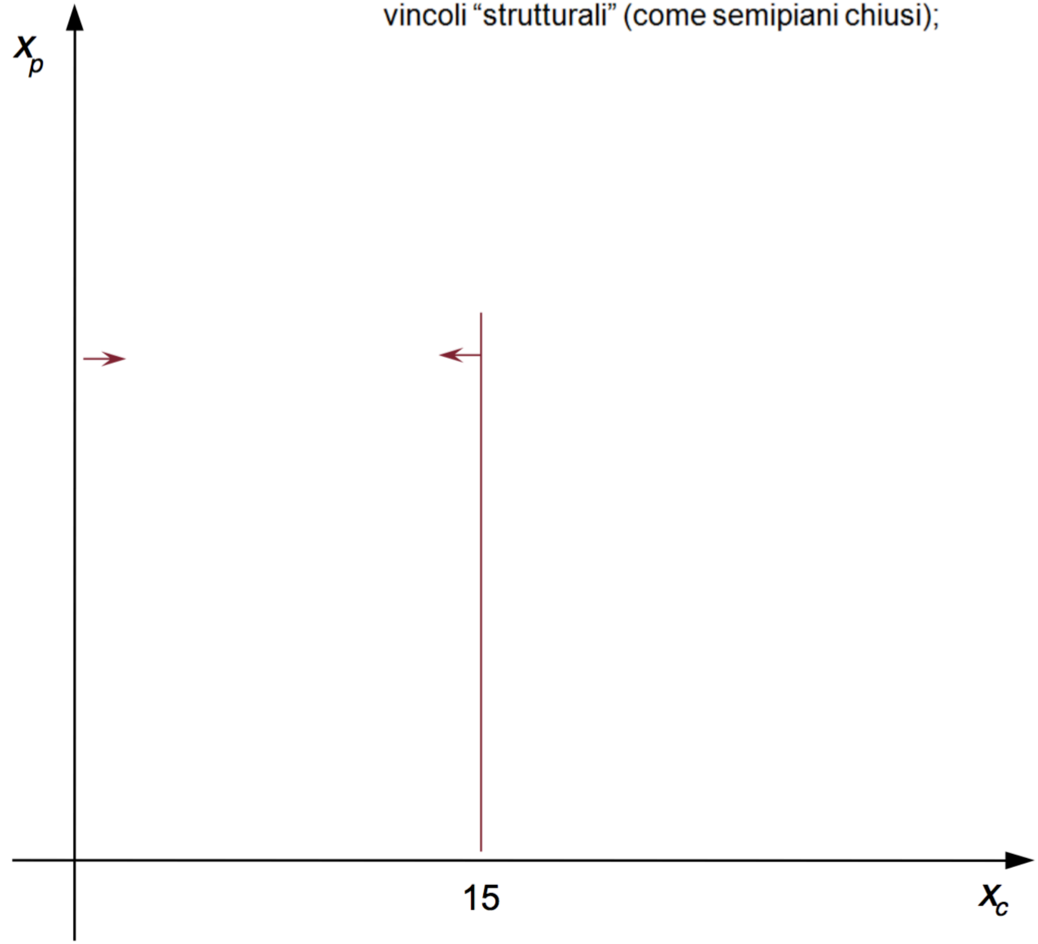


Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

Passo 1. Si rappresentano le condizioni di non-negatività e i vincoli "strutturali" (come semipiani chiusi);

$$x_c \leq 15$$

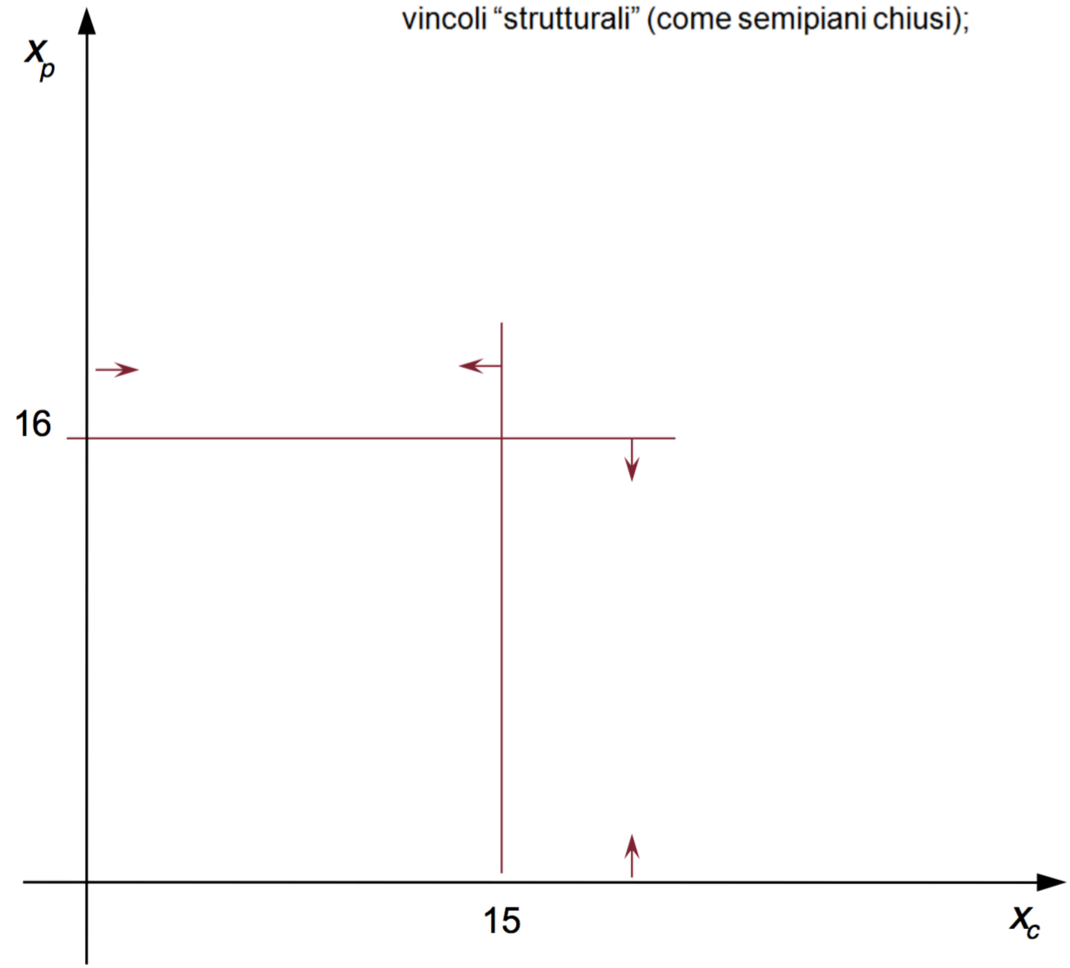
$$x_c \,, \qquad \geq 0$$



Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

Passo 1. Si rappresentano le condizioni di non-negatività e i vincoli "strutturali" (come semipiani chiusi);

$$x_c \leq 15$$
$$x_p \leq 16$$
$$x_c\,,\, x_p \geq 0$$

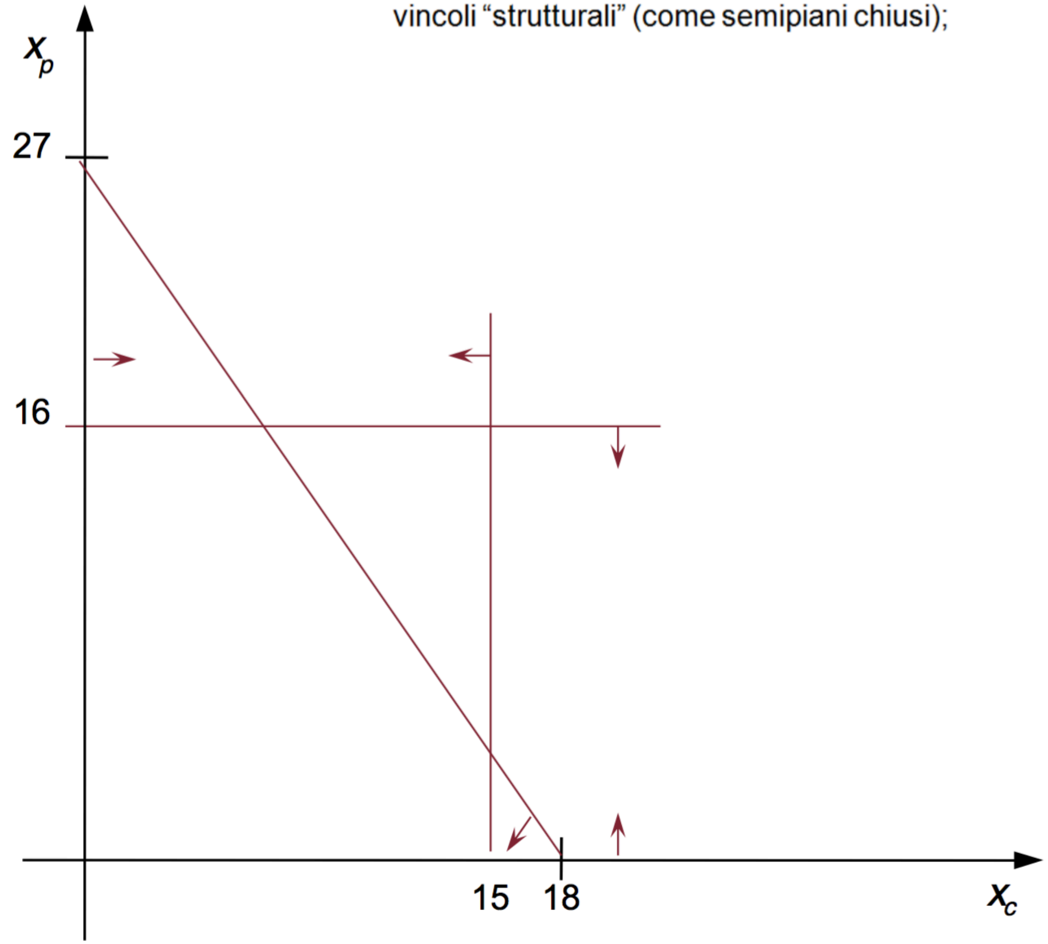


Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

$$1.5x_c + x_p \le 27$$

$$x_c \le 15$$
$$x_p \le 16$$
$$x_c, x_p \ge 0$$

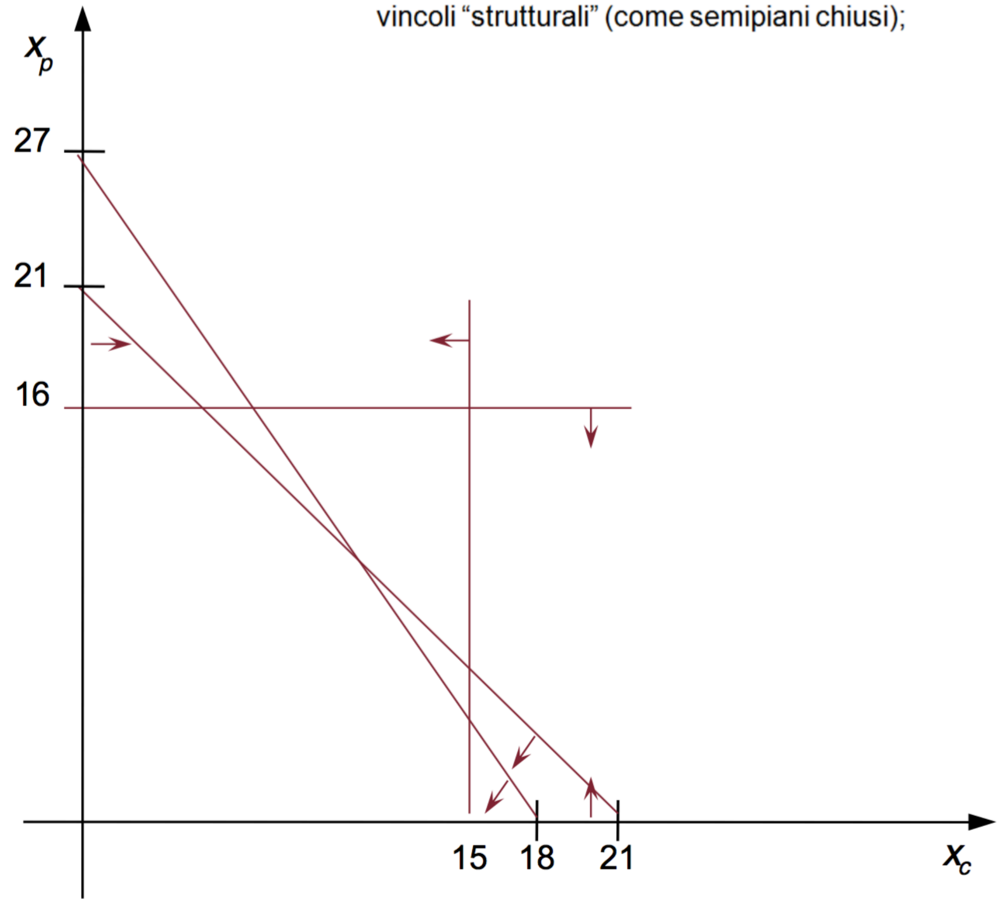
Passo 1. Si rappresentano le condizioni di non-negatività e i vincoli "strutturali" (come semipiani chiusi);



Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

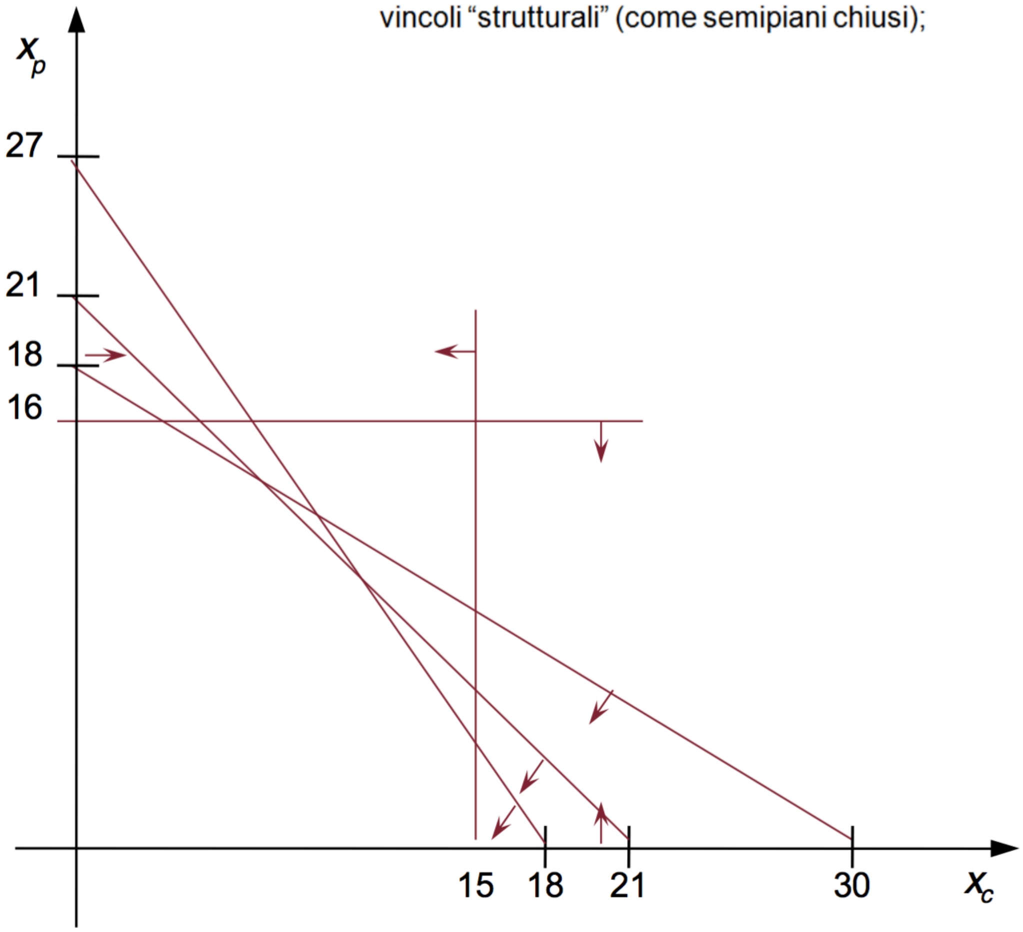
$$
\begin{aligned}
1.5x_c + x_p &\le 27 \\
x_c + x_p &\le 21 \\
\\
x_c &\le 15 \\
x_p &\le 16 \\
x_c,\, x_p &\ge 0
\end{aligned}
$$

Passo 1. Si rappresentano le condizioni di non-negatività e i vincoli "strutturali" (come semipiani chiusi);



Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

Passo 1. Si rappresentano le condizioni di non-negatività e i vincoli "strutturali" (come semipiani chiusi);

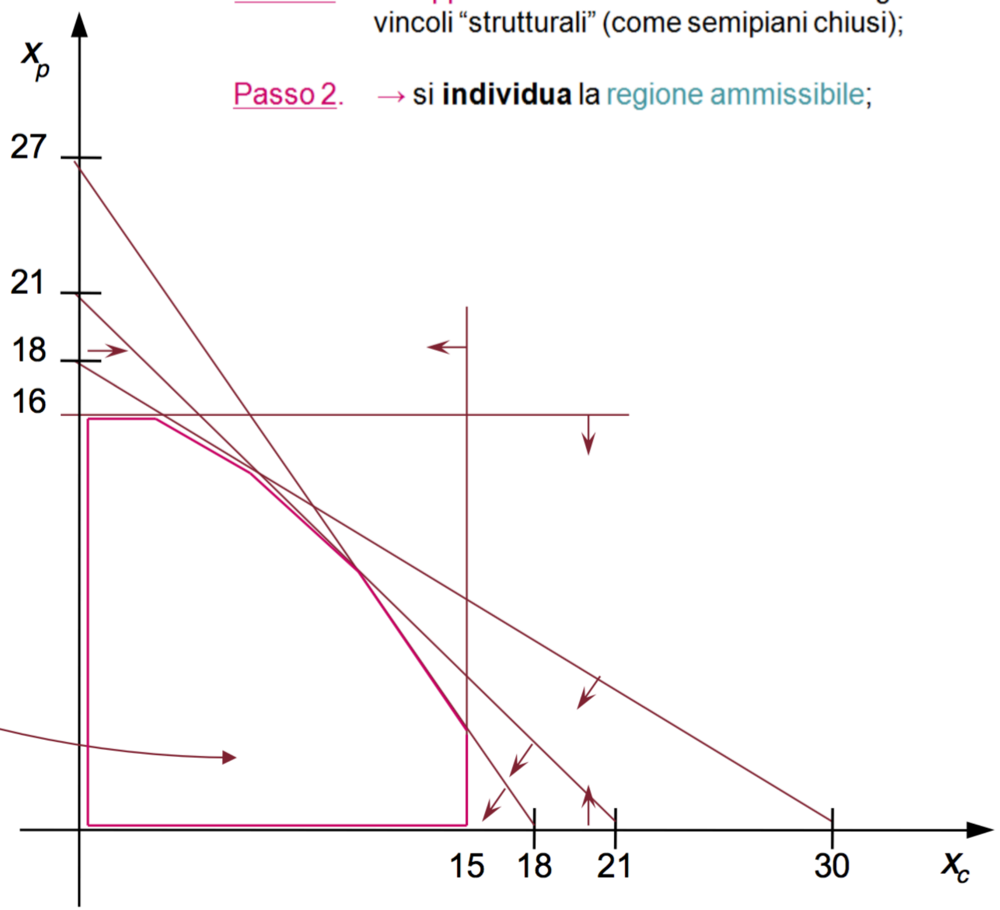


Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

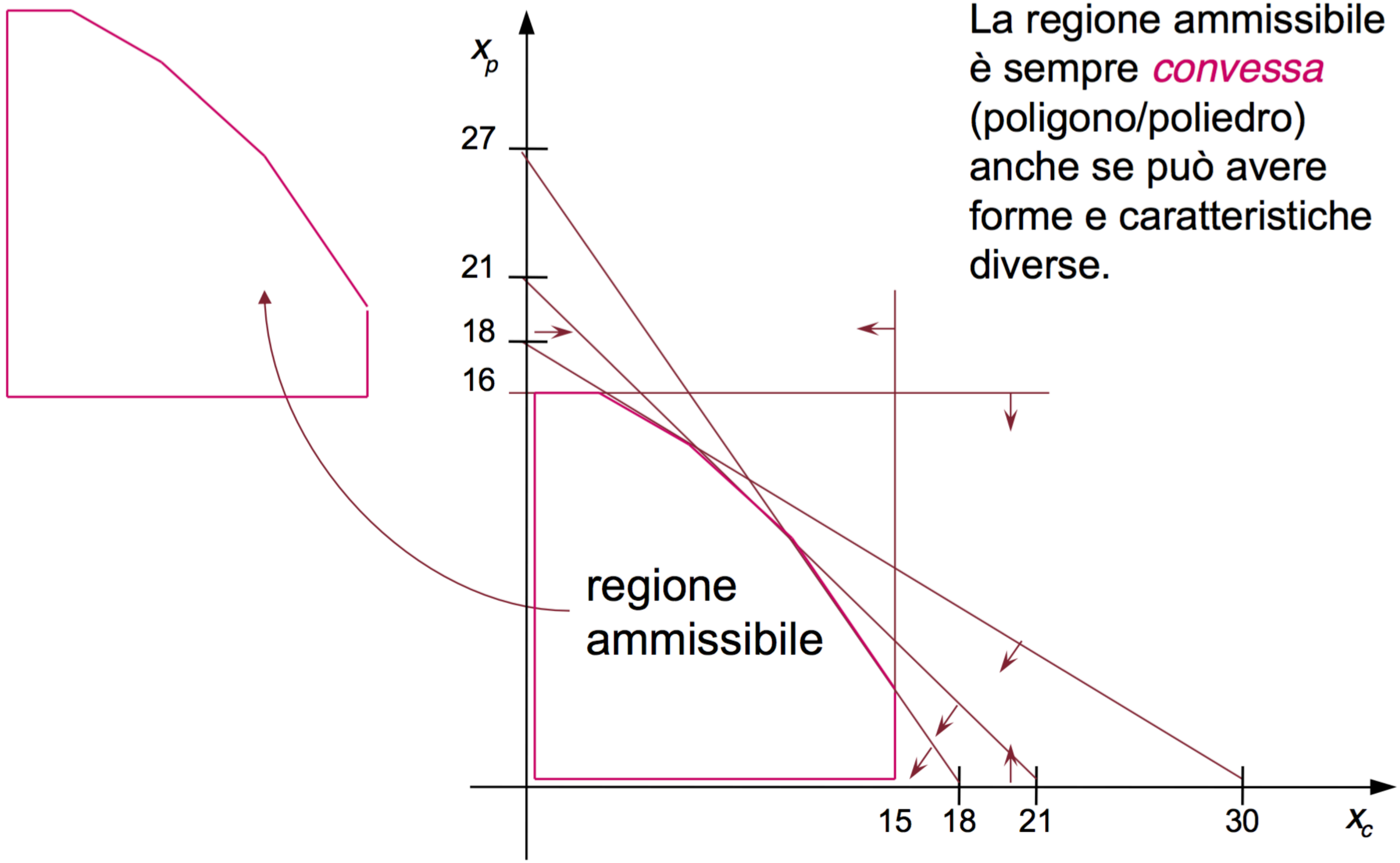
$$1.5x_c + x_p \le 27$$
$$x_c + x_p \le 21$$
$$0.3x_c + 0.5x_p \le 9$$
$$x_c \le 15$$
$$x_p \le 16$$
$$x_c, x_p \ge 0$$

Passo 1. Si rappresentano le condizioni di non-negatività e i vincoli “strutturali” (come semipiani chiusi);

Passo 2. → si **individua** la regione ammissibile;



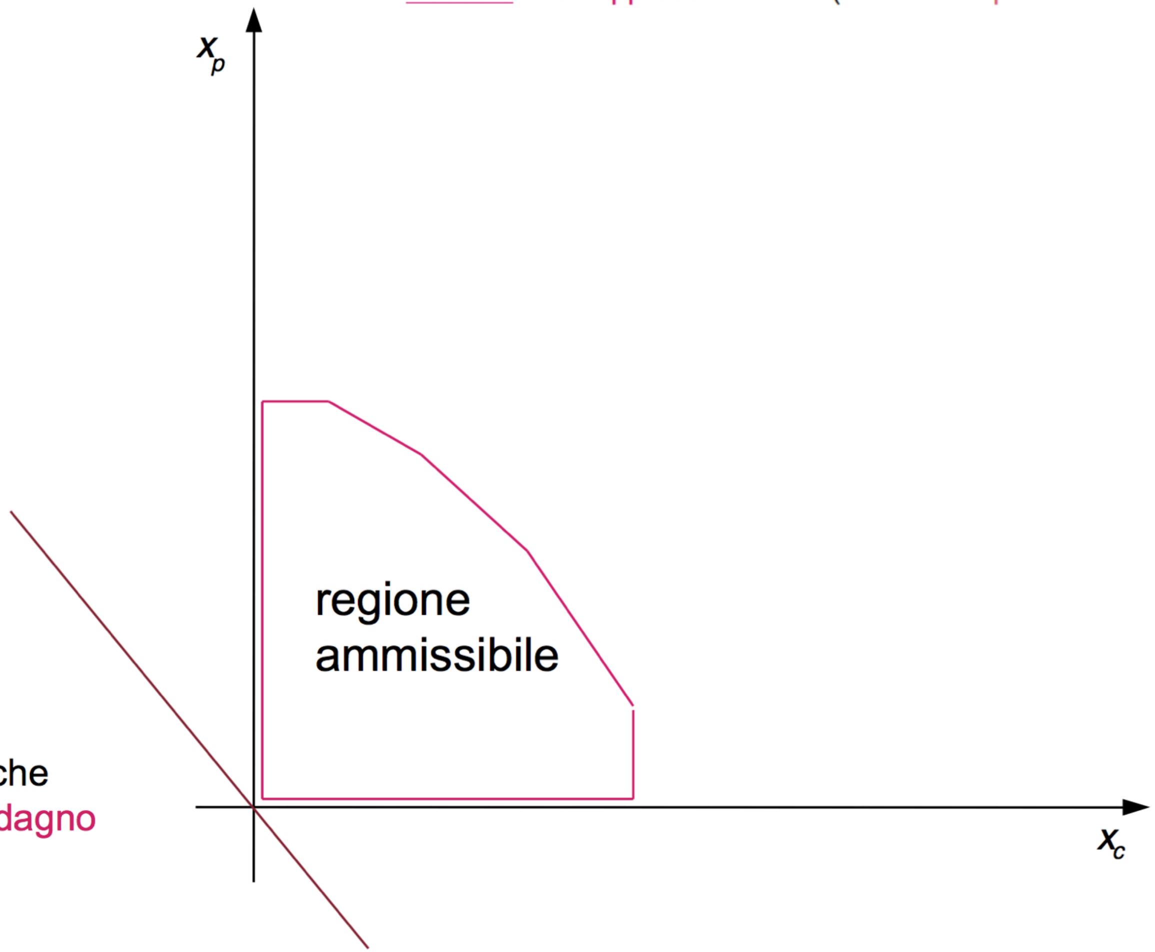
Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze



La regione ammissibile è sempre *convessa* (poligono/poliedro) anche se può avere forme e caratteristiche diverse.

Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

Passo 3. si rappresenta la f.o. (curve di isoprofitto/isocosto);



$130x_c + 100x_p = 0$

Insieme dei punti che forniscono un guadagno totale pari a 0

Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

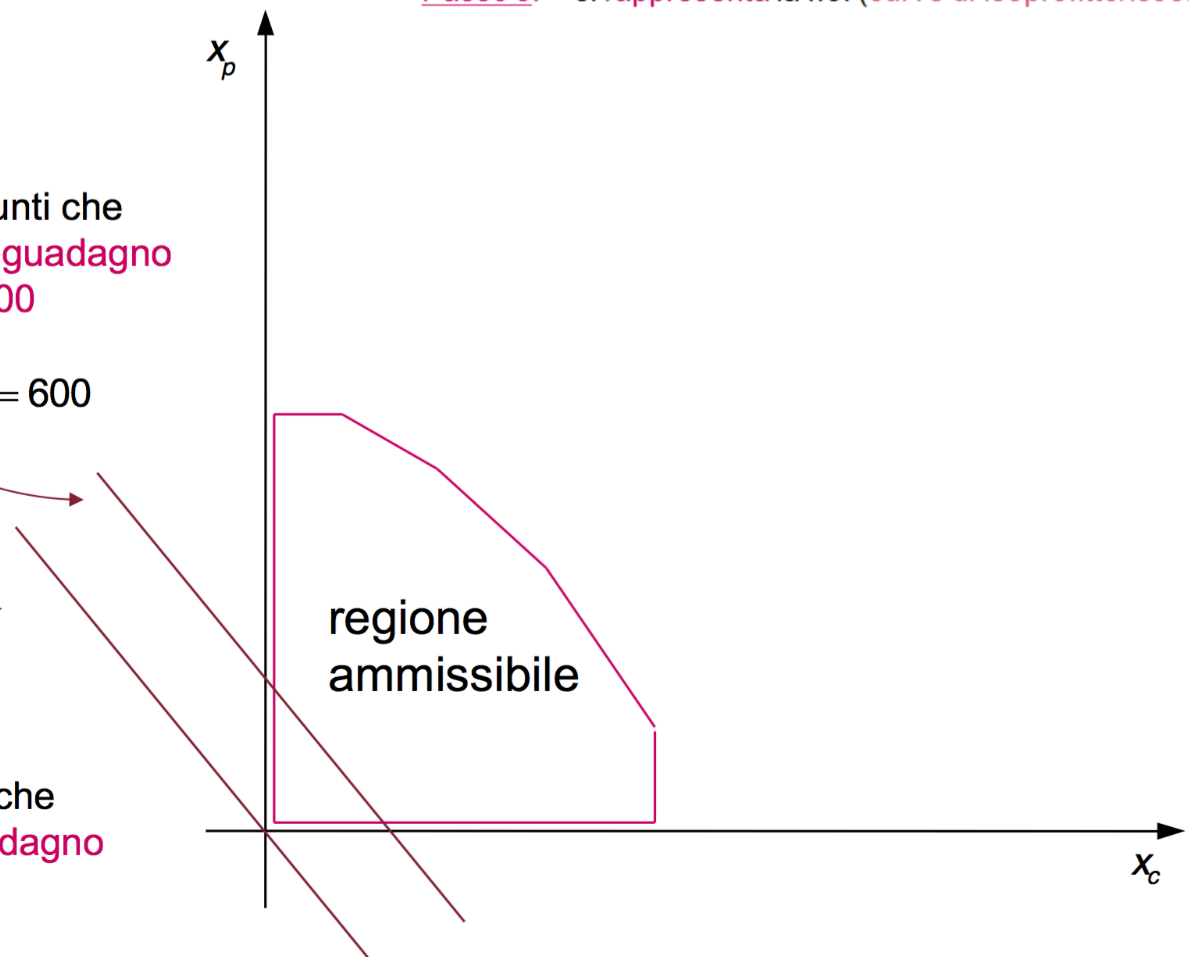
Passo 3. si rappresenta la f.o. (curve di isoprofitto/isocosto);

Insieme dei punti che forniscono un guadagno totale pari a 600

$$130x_c + 100x_p = 600$$

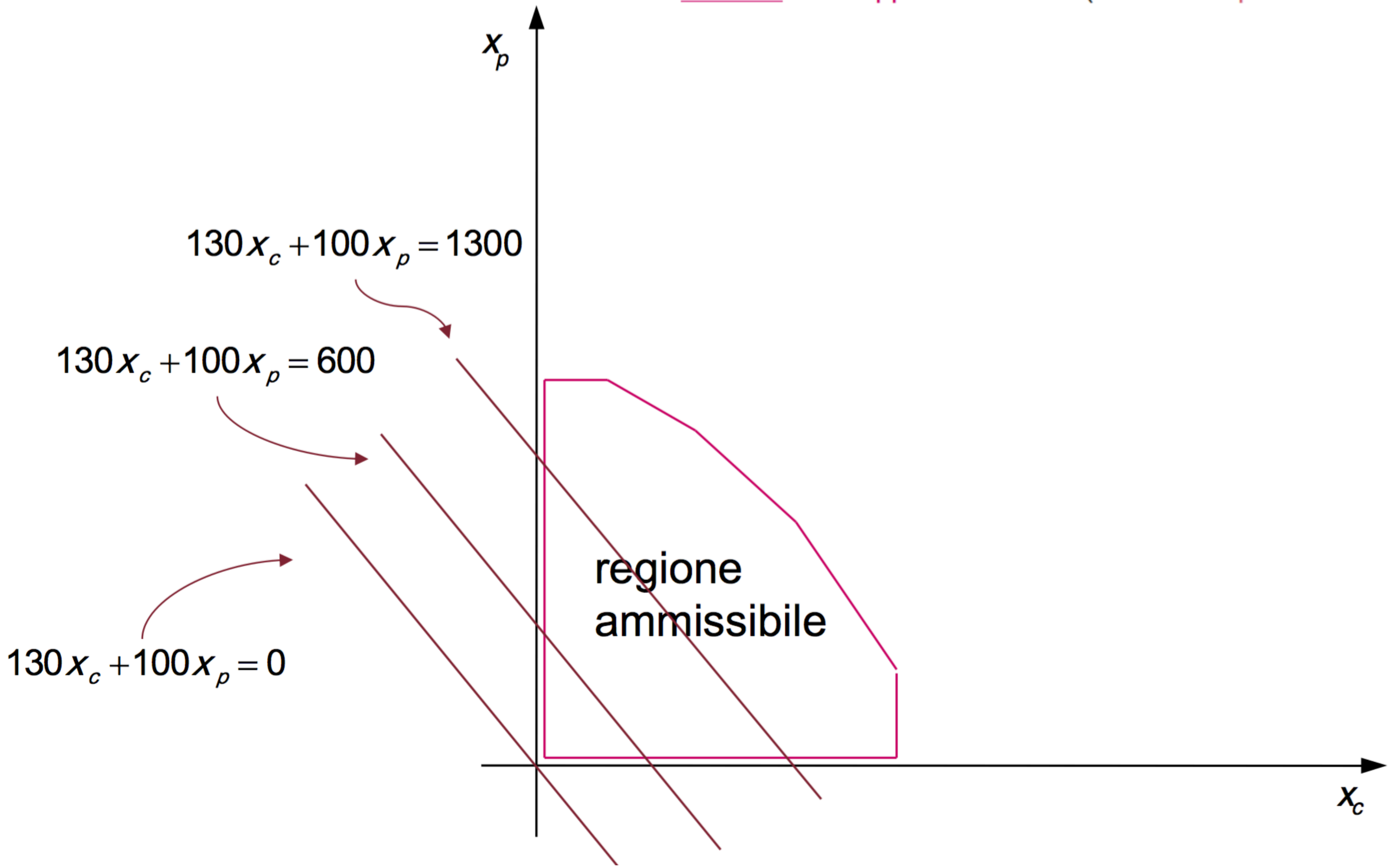
$$130x_c + 100x_p = 0$$

Insieme dei punti che forniscono un guadagno totale pari a 0



Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

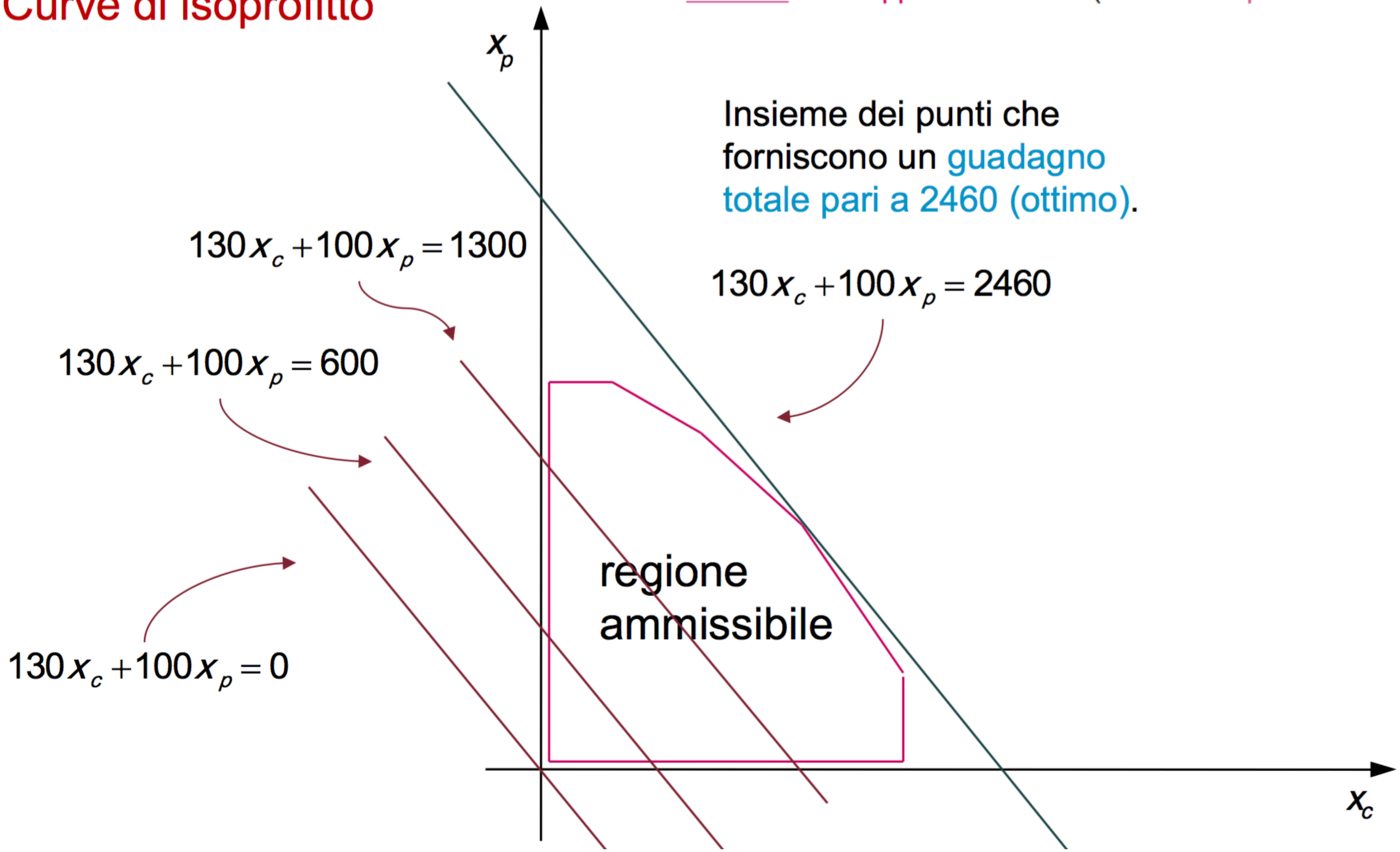
Passo 3. si rappresenta la f.o. (curve di isoprofitto/isocosto);



Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

Curve di isoprofitto

Passo 3. si rappresenta la f.o. (curve di isoprofitto/isocosto);

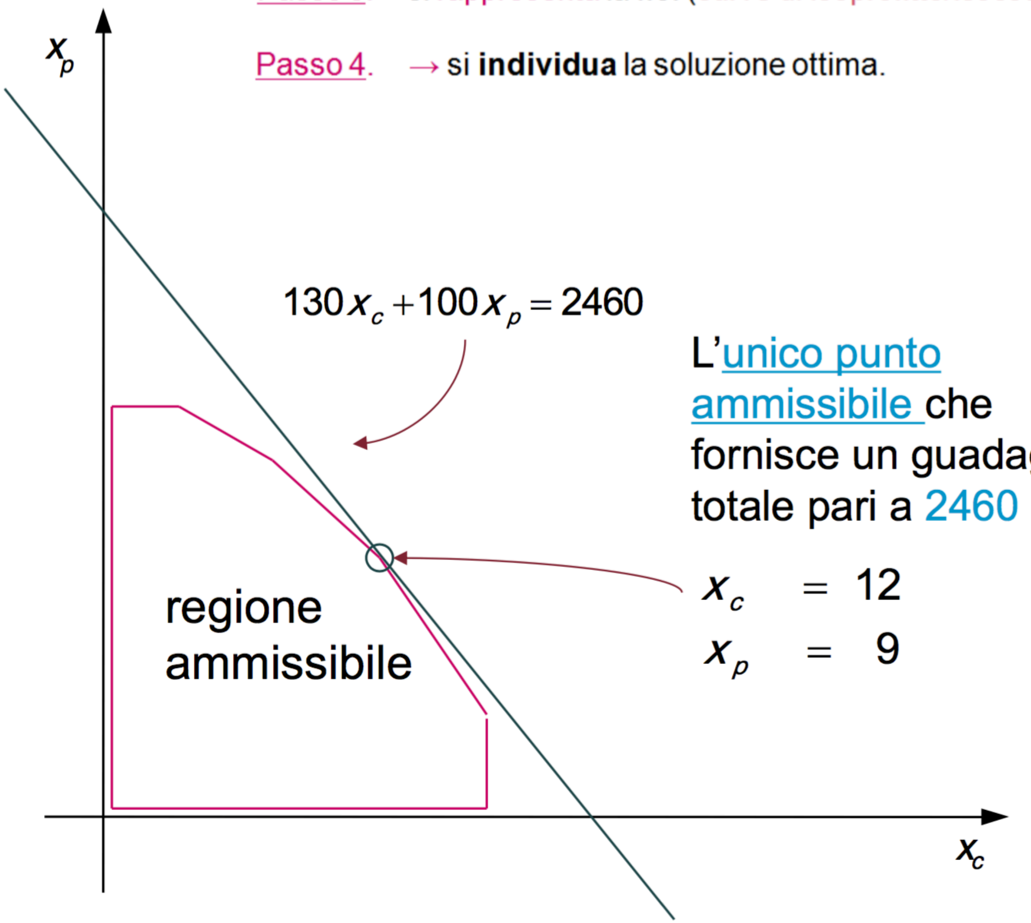


Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

Ottimo finito unico

Passo 3. si rappresenta la f.o. (curve di isoprofitto/isocosto);

Passo 4. → si **individua** la soluzione ottima.



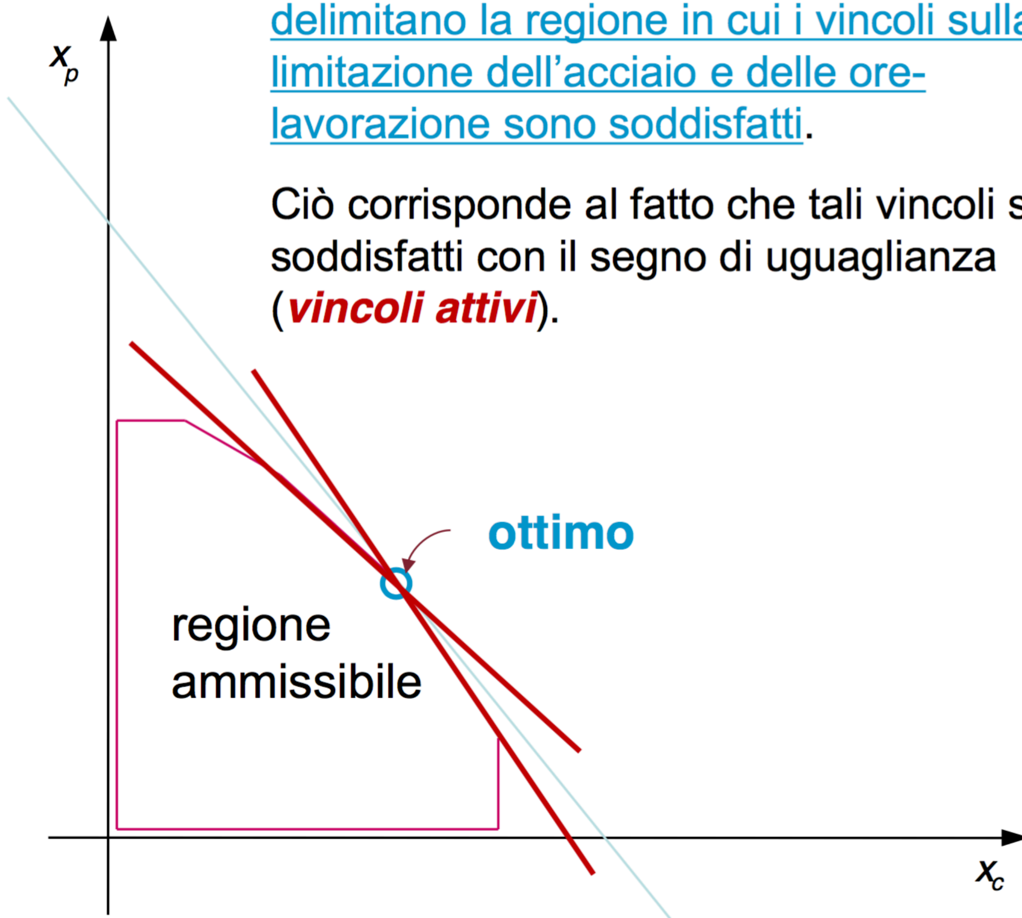
L'unico punto ammissibile che fornisce un guadagno totale pari a 2460 è

$$x_c = 12$$
$$x_p = 9$$

Esempio: Modello di produzione di chiavi e pinze

NOTA: il punto di ottimo si trova nell'intersezione delle due rette che delimitano la regione in cui i vincoli sulla limitazione dell'acciaio e delle ore-lavorazione sono soddisfatti.

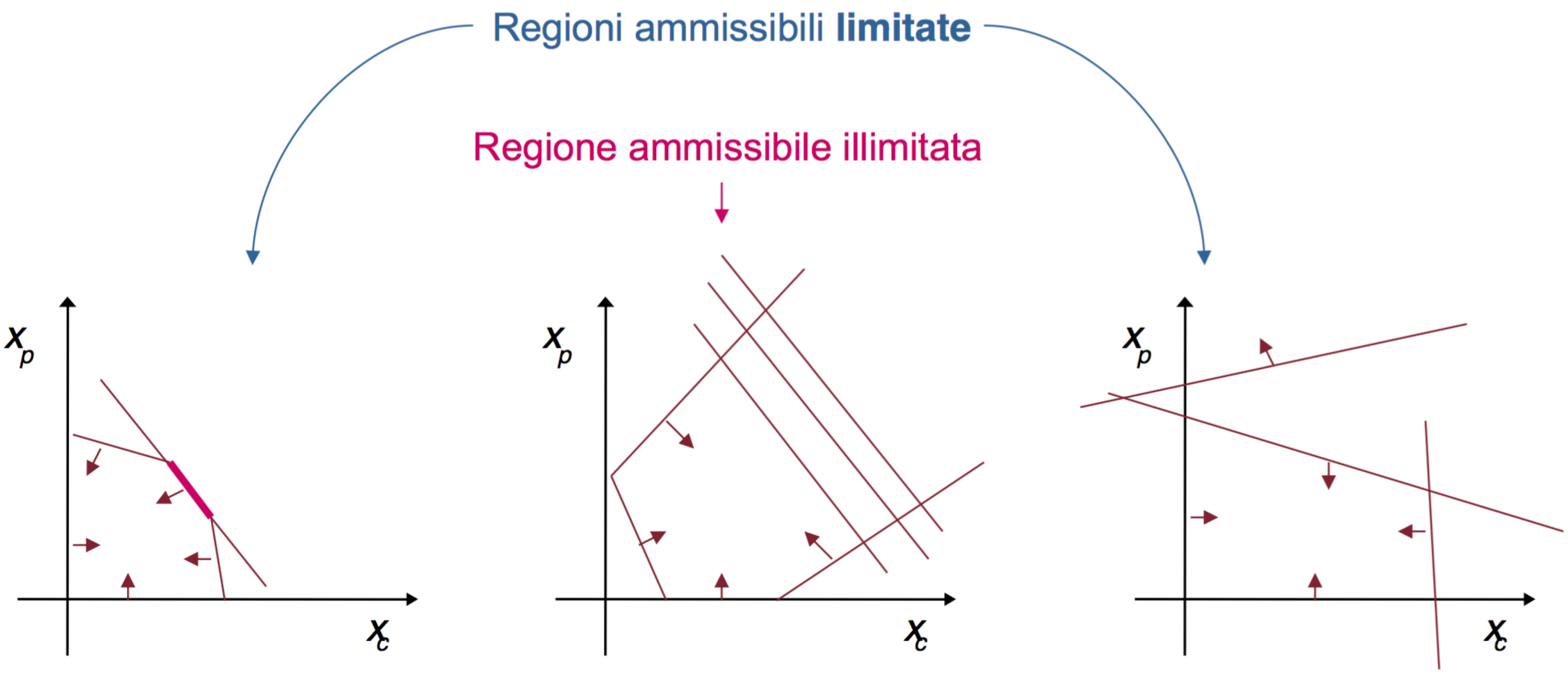
Ciò corrisponde al fatto che tali vincoli sono soddisfatti con il segno di uguaglianza (***vincoli attivi***).



Metodo geometrico per la PL

Si possono avere situazioni diverse da quella di ottimo finito unico:

- Ottimo finito multiplo
- Ottimo illimitato
- L’ottimo non esiste (perchè il problema è non ammissibile)



Ottimo finito multiplo — Ottimo illimitato/Ottimo finito — L’ottimo non esiste

Metodo geometrico per la PL

Considerando il seguente problema di PL:

$$\max\ 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 &\le 15 && (1)\\
5x_1 + 2x_2 &\le 10 && (2)\\
x_1 &\ge 0 && (3)\\
x_2 &\ge 0 && (4)
\end{aligned}$$

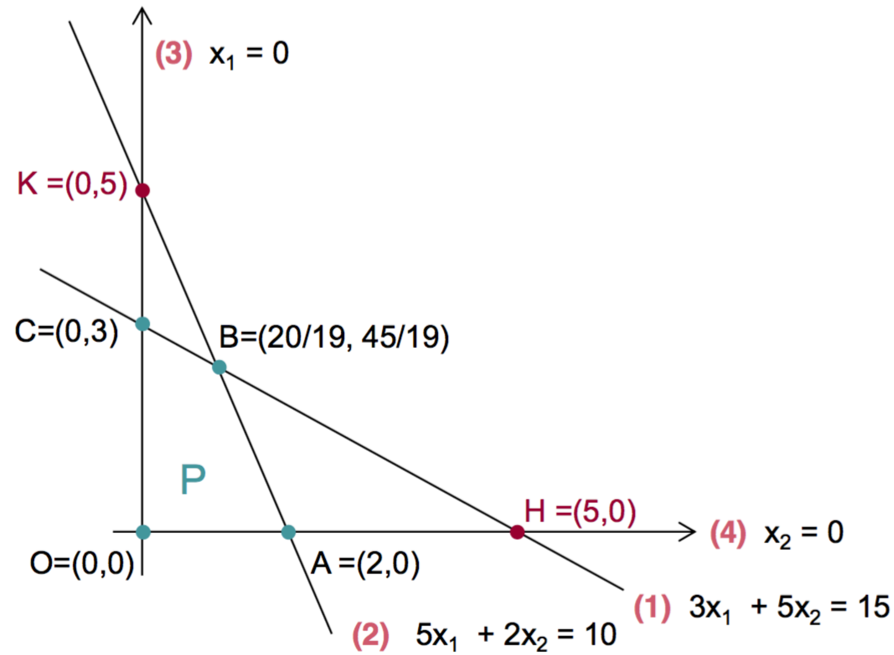
Passo 1. Si rappresentano le condizioni di non-negatività e i vincoli "strutturali" (come semipiani chiusi);

Passo 2. → si **individua** la regione ammissibile;

Metodo geometrico per la PL

max $5x_1 + 3x_2$

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$ (1)
$5x_1 + 2x_2 \leq 10$ (2)
$x_1 \geq 0$ (3)
$x_2 \geq 0$ (4)



$P=\{ x \in R^2 : 3x_1+5x_2 \leq 15,\ 5x_1+2x_2 \leq 10,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}$

Metodo geometrico per la PL

max $5x_1 + 3x_2$

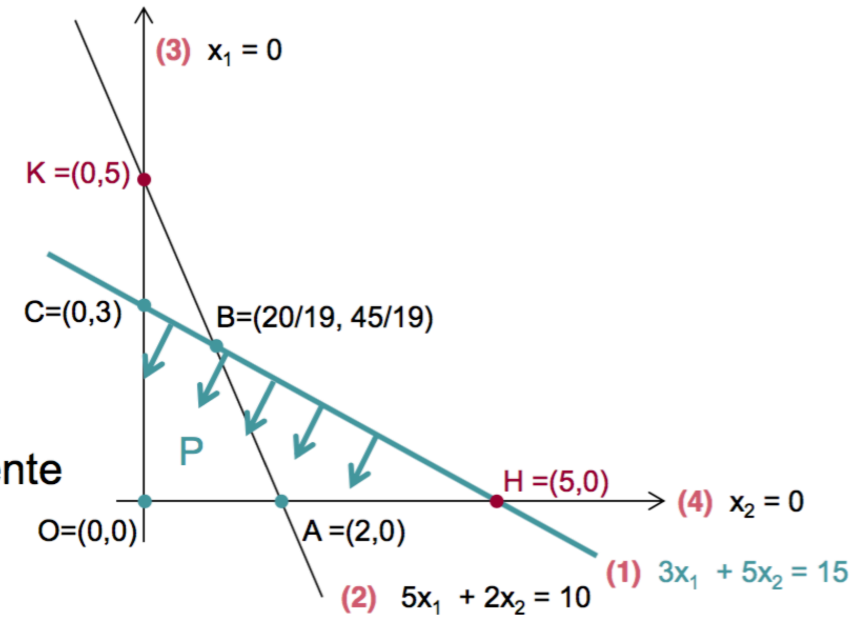
$$\begin{array}{lr} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 & (2) \\ x_1 \geq 0 & (3) \\ x_2 \geq 0 & (4) \end{array}$$

equazione associata al vincolo (1):

$$3x_1 + 5x_2 = 15$$

Individuazione della retta corrispondente tramite passaggio per due punti:

$$\mathbf{x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = 15/5 = 3}$$
$$\mathbf{x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 15/3 = 5}$$



Individuazione del semipiano di interesse con riferimento a un punto con collocazione nota:

O=(0,0): $3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 < 15$

→ O appartiene al semipiano di interesse rispetto al vincolo (1)

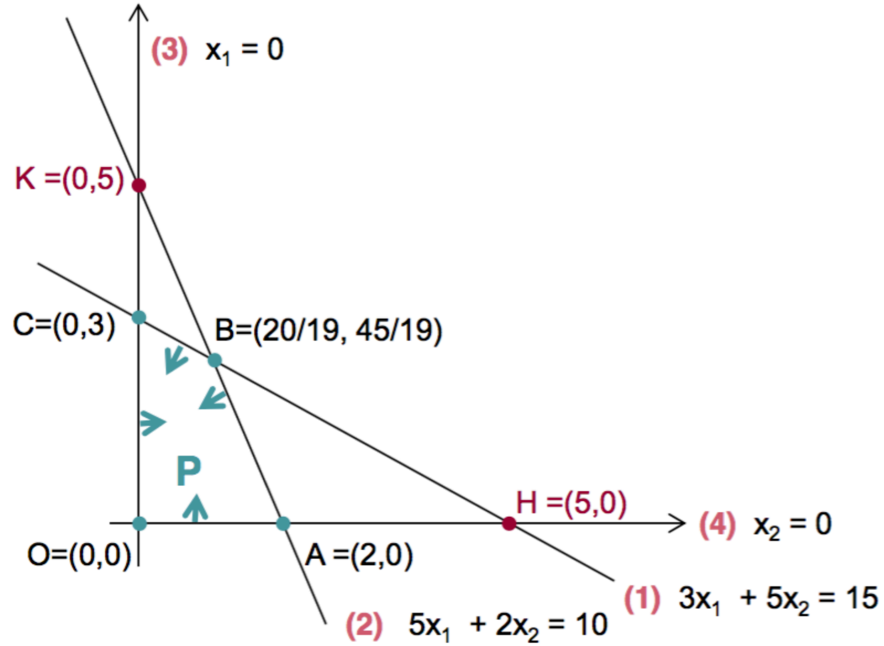
Metodo geometrico per la PL

$\max 5x_1 + 3x_2$

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$ (1)
$5x_1 + 2x_2 \leq 10$ (2)
$x_1 \geq 0$ (3)
$x_2 \geq 0$ (4)

f.o.: $f(x) = c^T x = 5x_1 + 3x_2$

- Teorema di Weirstrass (esistenza dell'ottimo)



$P=\{ x \in R^2 : 3x_1+5x_2 \leq 15,\ 5x_1+2x_2 \leq 10,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}$

P è chiuso e limitato

Metodo geometrico per la PL

Passo 3. si rappresenta la f.o. (curve di isoprofitto/isocosto);

Passo 4. → si **individua** la soluzione ottima.

max $5x_1 + 3x_2$

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$ (1)

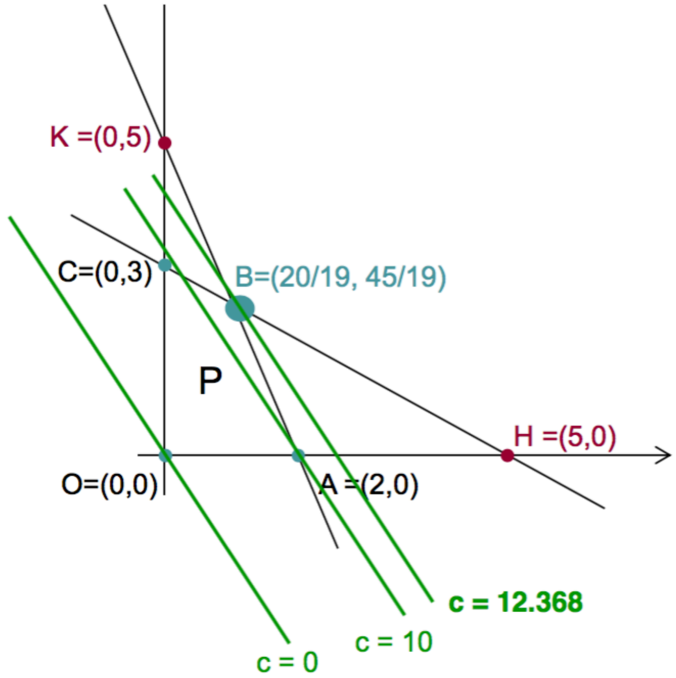
$5x_1 + 2x_2 \leq 10$ (2)

$x_1 \geq 0$ (3)

$x_2 \geq 0$ (4)

$5x_1 + 3x_2 = c$

c in R



soluzione ottima

$$x_1 = 20/19$$
$$x_2 = 45/19$$

valore ottimo

$$5x_1 + 3x_2 = 5 \cdot 20/19 + 3 \cdot 45/19 = 12.368$$

Metodo geometrico per la PL

Passo 3. si rappresenta la f.o. (curve di isoprofitto/isocosto);

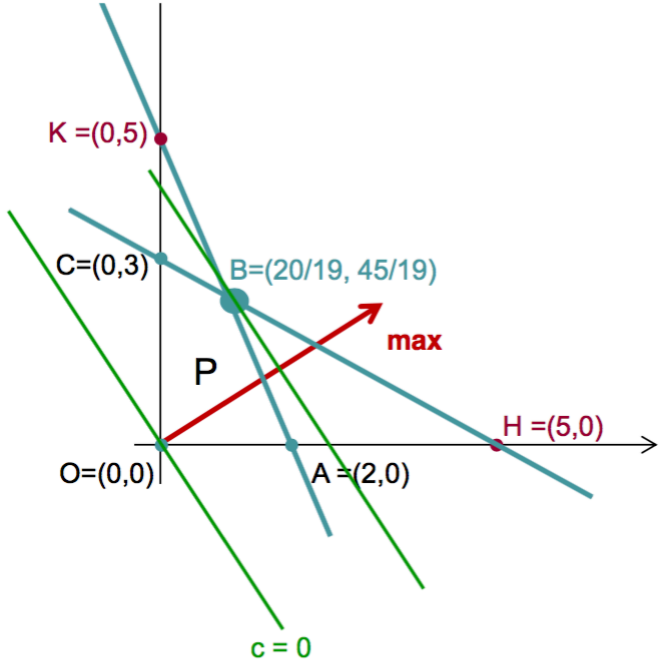
Passo 4. → si **individua** la soluzione ottima.

$$\max\ 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{ll} 3x_1 + 5x_2 \le 15 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \ge 0 & (3) \\ x_2 \ge 0 & (4) \end{array}$$

$5x_1 + 3x_2 = c$

c in R



soluzione ottima

$$x_1 = 20/19$$
$$x_2 = 45/19$$

valore ottimo

$$5x_1 + 3x_2 = 5 \cdot 20/19 + 3 \cdot 45/19 = 12.368$$

Geometria della PL

Lemma

Sia data la seguente famiglia di rette parallele

$$a_1x_1+a_2x_2 = c \quad \text{(equiv. } a^Tx = c\text{)}$$

con a_1 e a_2 reali fissati e c in R. Il vettore $a^T = (a_1, a_2)$ individua una direzione ortogonale alle rette della famiglia $a_1x_1+a_2x_2 = c$ ed è orientato dalla parte in cui si trovano le rette della famiglia ottenute per valori crescenti di c, cioè dalla parte in cui ci si sposta dalla retta $a_1x_1+a_2x_2 = c$ verso nel semipiano $a_1x_1+a_2x_2 \geq c$.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare:

1. Il vettore $a^T = (a_1,a_2)$ individua una direzione ortogonale alle rette $a^Tx = c$, $c \in R$.
2. Fissato c, il vettore $a^T = (a_1,a_2)$ è orientato da $a^Tx = c$ verso il semipiano $a^Tx \geq c$.

Geometria della PL

Dimostrazione (segue)

1. Il vettore $a^T = (a_1,a_2)$ individua una **direzione ortogonale alle rette $a^Tx = c$**.

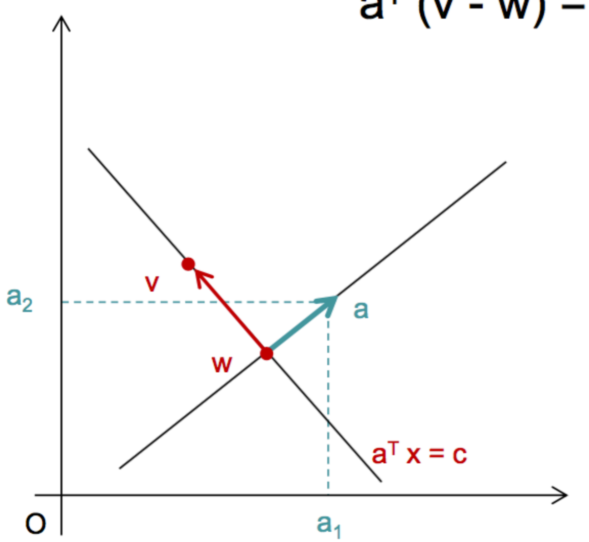
Consideriamo un valore c fissato e due punti v e w appartenenti alla retta $a^Tx = c$:

$$a^Tv = c \qquad e \qquad a^Tw = c$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$a^T (v - w) = 0$$

⇒ a è ortogonale al vettore $(v – w)$



Infatti si ha:

$a^T (v - w) = 0 \leftrightarrow \cos\theta = 0 \leftrightarrow \theta$ è **di 90°**

θ è l'angolo formato da a e (v-w)

Ricordiamo che, dati due vettori a e b, per l'angolo θ da essi formato si ha:

$$\cos\theta = a^Tb \,/\, ||a||\ ||b||\ .$$

Geometria della PL

Dimostrazione (segue)

2. Fissato c, il vettore $a^T = (a_1,a_2)$ è **orientato da $a^Tx = c$ verso $a^Tx \geq c$.**

Consideriamo un valore c fissato e un punto y tale che $a^Ty \geq c$. Si ha:

$$a^Ty \geq c \qquad \text{e} \qquad a^Tw = c$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene:

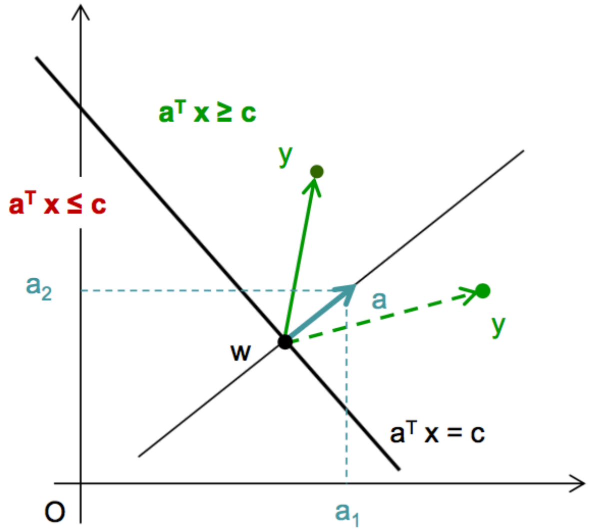
$$a^T(y - w) \geq 0 \quad \Rightarrow$$

a e (y – w) formano un angolo acuto

Infatti si ha:

$$a^T(y - w) \geq 0 \leftrightarrow \cos\theta \geq 0 \leftrightarrow \theta \text{ è } \leq 90°$$

θ è l'angolo formato da a e (v-w)



Geometria della PL

Dal Lemma

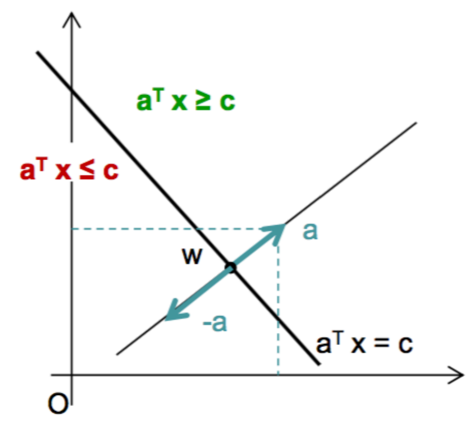
data la famiglia $a^T x = c$, $c \in R$, il vettore a individua due direzioni:

direzione $a = (a_1, a_2)$ [**gradiente** di $f(x)=a^T x$]

VINCOLO	$a^T y \geq c$
f.o. $a^T x = c$, $c \in R$	$\max a^T x$

direzione $-a = (-a_1, -a_2)$ [**antigradiente** di $f(x)=a^T x$]

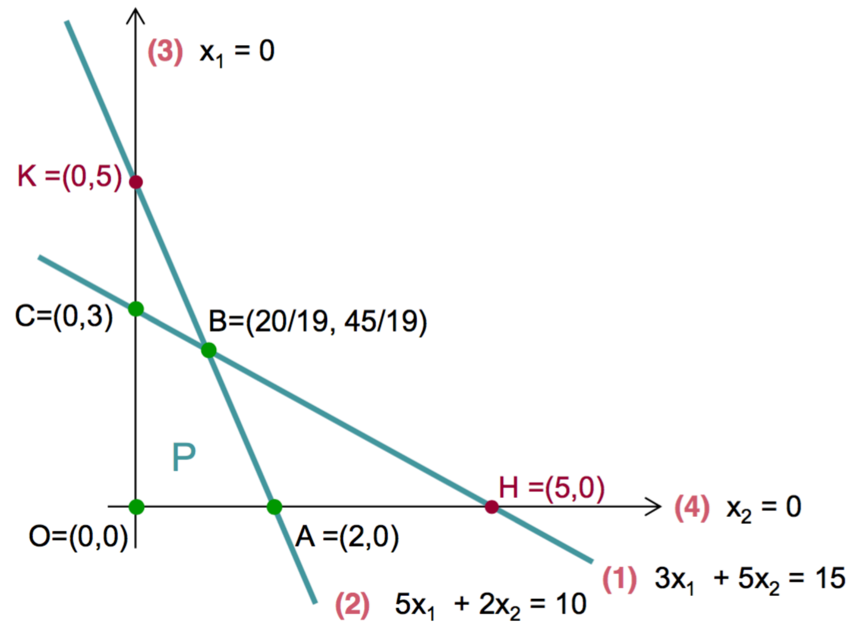
VINCOLO	$a^T y \leq c$
f.o. $a^T x = c$, $c \in R$	$\min a^T x$



Metodi per la ricerca della soluzione ottima

$\max 5x_1 + 3x_2$

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$ (1)
$5x_1 + 2x_2 \leq 10$ (2)
$x_1 \geq 0$ (3)
$x_2 \geq 0$ (4)



f.o.: $f(x) = c^T x = 5x_1 + 3x_2$

- Teorema di Weirstrass (esistenza dell'ottimo)

- Teorema Fondamentale della PL (caratterizzazione dell'ottimo)

  L'ottimo si consegue su uno dei vertici.

$P=\{ x \in R^2 : 3x_1+5x_2 \leq 15,\ 5x_1+2x_2 \leq 10,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}$

P è chiuso e limitato

I punti O, A, B e C sono "vertici" del poliedro P

Metodi per la ricerca della soluzione ottima

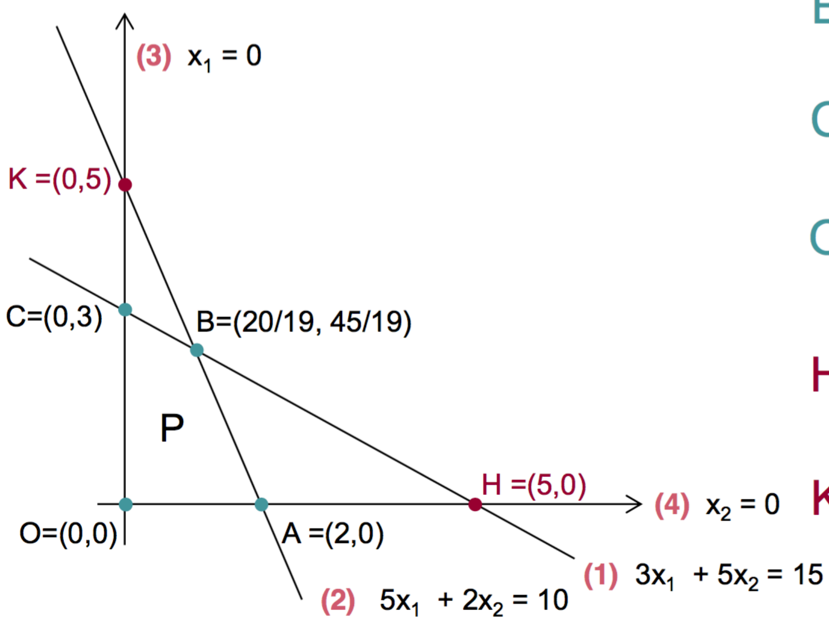
$\max\ 5x_1 + 3x_2$

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$ (1)

$5x_1 + 2x_2 \leq 10$ (2)

$x_1 \geq 0$ (3)

$x_2 \geq 0$ (4)



Metodo enumerativo 1: valutare la f.o. in tutti i punti di intersezione tra due rette per individuare poi quali sono vertici.

A: $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$ ☺

B: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$ ☺

C: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ ☺

O: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ ☺

H: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ ☹

K: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$ ☹

$P=\{ x \in R^2 : 3x_1+5x_2 \leq 15,\ 5x_1+2x_2 \leq 10,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}$

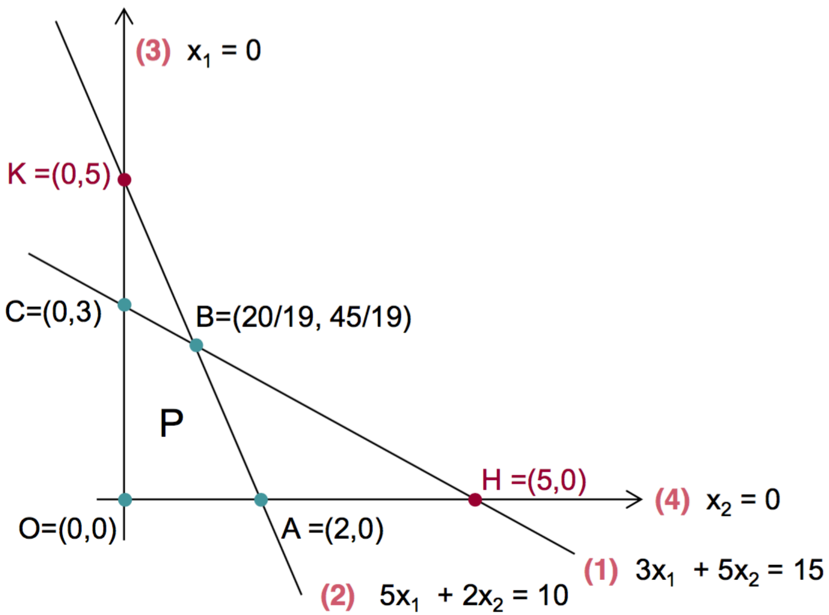
Metodi per la ricerca della soluzione ottima

$\max 5x_1 + 3x_2$

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$ (1)
$5x_1 + 2x_2 \leq 10$ (2)
$x_1 \geq 0$ (3)
$x_2 \geq 0$ (4)

Metodo enumerativo 1: valutare la f.o. in tutti i punti di intersezione tra due rette per individuare poi quali sono vertici.

Per ogni punto di intersezione si deve eseguire un **controllo** di appartenenza del punto alla regione ammissibile P.



$P=\{ x \in R^2 : 3x_1+5x_2 \leq 15,\ 5x_1+2x_2 \leq 10,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}$

Metodi per la ricerca della soluzione ottima

$\max 5x_1 + 3x_2$

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$ (1)

$5x_1 + 2x_2 \leq 10$ (2)

$x_1 \geq 0$ (3)

$x_2 \geq 0$ (4)

Teorema Fondamentale della PL

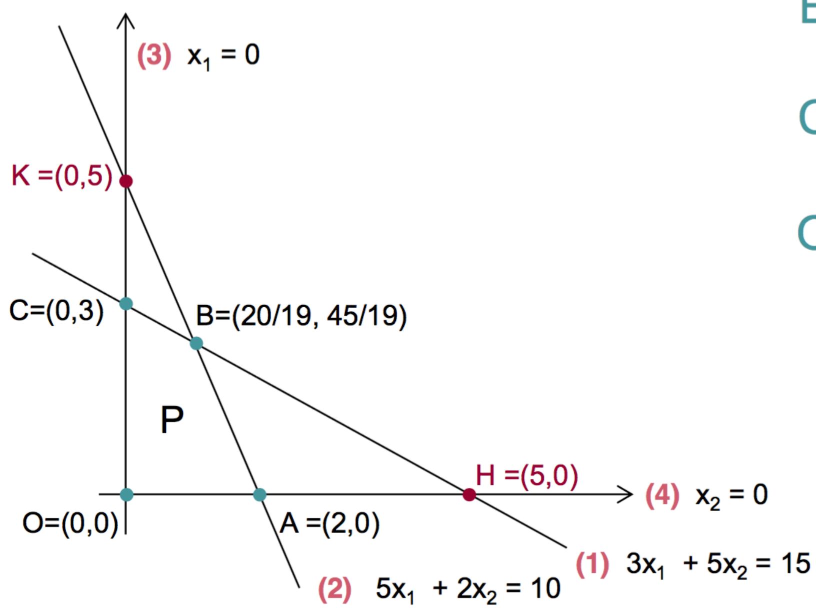
Metodo enumerativo 2: valutare la f.o. in tutti i vertici.

A: $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$ ☺

B: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$ ☺

C: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ ☺

O: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ ☺



$P=\{ x \in R^2 : 3x_1+5x_2 \leq 15,\ 5x_1+2x_2 \leq 10,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}$

Metodi per la ricerca della soluzione ottima

$\max 5x_1 + 3x_2$

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$ (1)

$5x_1 + 2x_2 \leq 10$ (2)

$x_1 \geq 0$ (3)

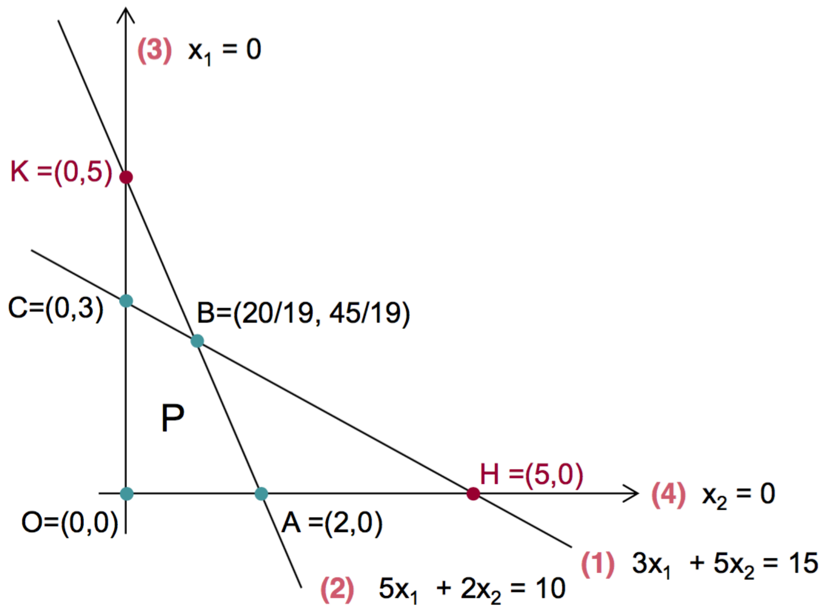
$x_2 \geq 0$ (4)

Teorema Fondamentale della PL

Metodo enumerativo 2: valutare la f.o. in tutti i vertici.

Bisogna saper riconoscere i vertici.

I vertici della regione ammissibile potrebbero essere comunque **troppi** per una enumerazione.



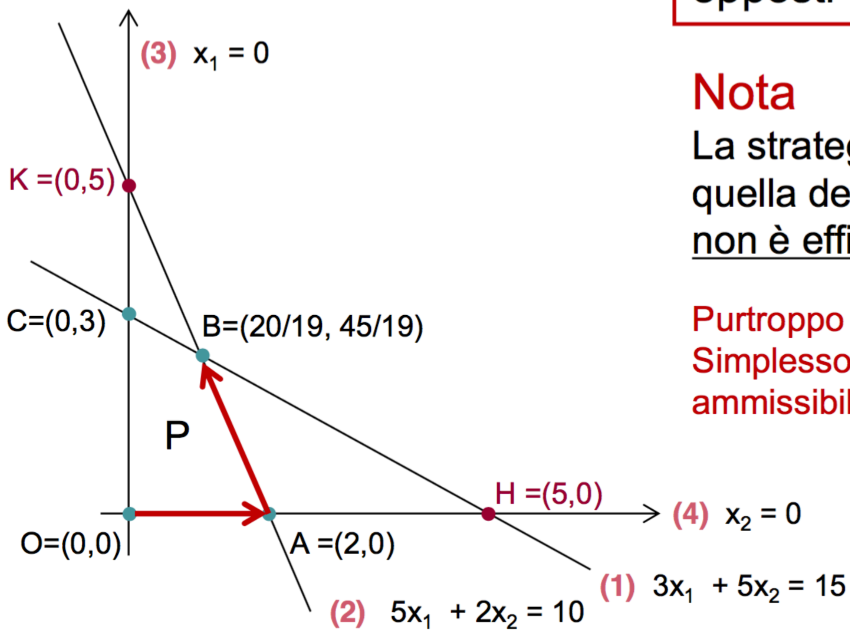
Occorre una **strategia** per una **valutazione sistematica** dei vertici della regione P (efficiente).

$P=\{ x \in R^2 : 3x_1+5x_2\leq 15,\ 5x_1+2x_2\leq 10,\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \}$

Metodi per la ricerca della soluzione ottima

$$\max\ 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 15 && (1)\\ 5x_1 + 2x_2 &\le 10 && (2)\\ x_1 &\ge 0 && (3)\\ x_2 &\ge 0 && (4) \end{aligned}$$



Strategia del metodo del Simplesso:

A partire da un vertice ammissibile, viene generata una **sequenza** di vertici ammissibili **adiacenti**, che corrispndono cioè a "estremi" opposti dello stesso "spigolo".

Nota

La strategia del metodo del Simplesso è migliore di quella del metodo enumerativo, ma anche essa <u>non è efficiente dal punto di vista **teorico**</u>.

Purtroppo esistono esempi patologici in cui l'algoritmo del Simplesso genera comunque TUTTI vertici di una regione ammissibile di un problema di PL con 2^n vertici.

È però efficiente nella pratica.

$P=\{\ x \in R^2 : 3x_1+5x_2 \le 15,\ 5x_1+2x_2 \le 10,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\ \}$

Esercizio 1: Allocazione ottima di risorse

Problema di produzione o di allocazione ottima di risorse (Facchinei, Lucidi, Roma, 2005-2006) Un colorificio produce due tipi di coloranti C1 e C2 utilizzando 3 preparati di base in polvere P1, P2 e P3, che vengono sciolti in acqua. La differente concentrazione dei preparati nell'acqua dà luogo ai due diversi coloranti. Le quantità dei preparati di base necessarie per produrre un litro di colorante per ciascuno dei due tipi è riportato nella tabella seguente insieme alle quantità giornaliere disponibili:

Coefficienti Tecnologici (in ettogrammi)	**C1 (un litro)**	**C2 (un litro)**	**Quantità giornaliera disponibile (in ettogrammi)**
P1	**1**	**1**	**750**
P2	**1**	**2**	**1000**
P3	**-**	**1**	**400**

Il prezzo di vendita:

C1 è di 7 **euro al litro**

C2 10 **euro al litro**.

Problema: determinare la strategia di produzione **giornaliera** che, con le quantità disponibili di preparati, **massimizza il ricavo totale ottenuto dalla vendita** dei coloranti.

Esercizio 1: Allocazione ottima di risorse

Formulazione del modello di PL:

funzione obiettivo → $\max\ 7x_1 + 10x_2$

vincoli di limitazione sulle risorse giornaliere →

$$x_1 + x_2 \leq 750$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 1000$$
$$x_2 \leq 400$$

vincoli di nonegatività → $x_1, x_2 \geq 0$

Soluzione ottima del modello:

$$x_1 = 500$$
$$x_2 = 250$$

con un ricavo totale giornaliero pari a

$$7x_1 + 10x_2 = 7 \cdot 500 + 10 \cdot 250 = 6000\ €$$

Esercizio:
Rappresentare geometricamente il problema e individuarne la soluzione ottima.

Esercizi

Rappresentare e risolvere geometricamente i seguenti problemi di PL.

Problema 1 [R: Ottimo finito]

$$\begin{aligned}
&\max \quad x_1 + 2x_2 \\
&x_1 + x_2 \le 6 \\
&x_1 \le 5 \\
&x_2 \le 4 \\
&x_1 \ge 0 \\
&x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Problema 2 [R: Ottimo finito]

$$\begin{aligned}
&\max \quad 3x_1 + x_2 \\
&-2x_1 + x_2 + 6 \ge 0 \\
&-x_1 + x_2 \le 4 \\
&x_1 \le 5 \\
&x_2 \le 6
\end{aligned}$$

Esercizi

Rappresentare e risolvere geometricamente i seguenti problemi di PL.

Problema 3 [R: Ottimo finito]

$$
\begin{aligned}
&\min \ 7x_1 + x_2 \\
&2x_1 + x_2 - 10 \leq 0 \\
&-x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
&x_1 \geq 2 \\
&x_2 \geq 4
\end{aligned}
$$

Modalità di svolgimento degli esercizi in classe

1) Per i primi 5 minuti non potete parlare né consultarvi con i compagni né fare domande;

2) dopo i primi 5 minuti, se avete necessità, potete parlare con il collega;

3) dopo 10 minuti, se il testo non è chiaro, potete fare domande al docente;

4) chi risolve l'esercizio lo segnala al docente alzando la mano;

5) dopo circa una ventina di segnalazioni la soluzione viene presentata e commentata dal docente.