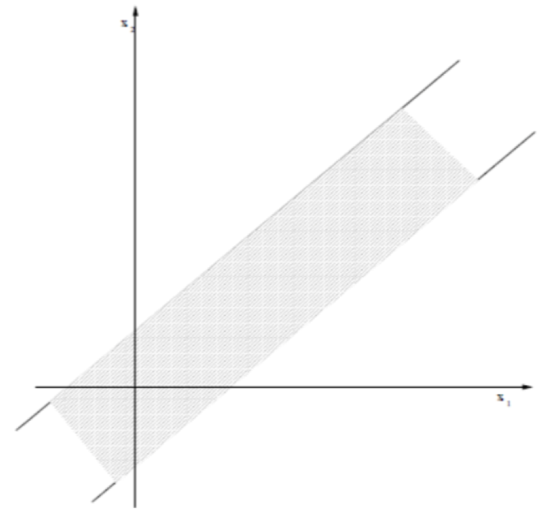
Ricerca Operativa
a.a. 2018-2019

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione V- 06 Marzo 2019

Rette e semirette, politopi

Abbiamo visto che non tutti i poliedri hanno vertici.



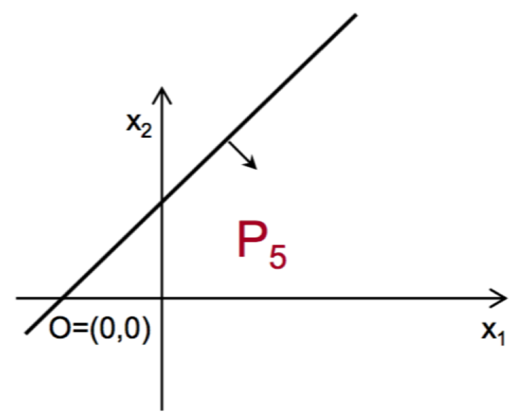
Esempio 1

(P5) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 &\geq -6 \end{aligned}$$

Ad esempio (Corollario 1) se $P = \{x \text{ in } R^n : A_{mxn}x \geq b_m\}$ e $m < n$, allora P non può avere vertici.

Esempio 2

(P6) $3x_1 - 2x_2 \geq -6$



Esistenza di vertici in P

Teorema 1 (regione ammissibile)

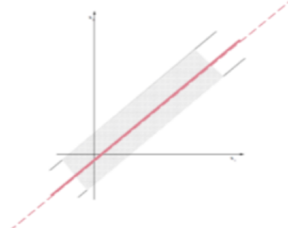
Si consideri un poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : A_{mxn}x \geq b_m\}$ con $m \geq n$ e $P \neq \varnothing$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) P non contiene rette;
2) P ha almeno un vertice;
3) esistono n vettori tra a_i^T, $i=1,\ldots,m$, linearmente indipendenti.

1) $\Longleftrightarrow$ 2)

CASI 4 e 5

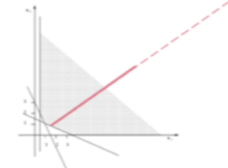
P_4 e $P_5 \neq \varnothing$ **contengono rette**



$\Rightarrow$ P_4 e P_5 non hanno vertici

CASO 3

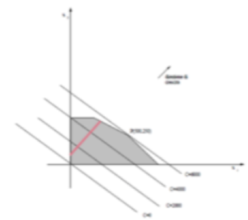
$P_3 \neq \varnothing$
non contiene rette
contiene semirette



$\Rightarrow$ P_3 ha almeno 1 vertice

CASO 2

$P_2 \neq \varnothing$
non contiene rette
non contiene semirette



$\Rightarrow$ P_2 ha almeno 1 vertice ottimo

Esistenza di vertici in P

Teorema 1 (regione ammissibile)
Si consideri un poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : A_{mxn}x \geq b_m\}$ con $m \geq n$ e $P \neq \emptyset$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) P non contiene rette;
2) P ha almeno un vertice;
3) esistono n vettori tra a_i^T, $i=1,\ldots,m$, linearmente indipendenti.

Dimostrazione 1) → 2)

Hp: 1) P non contiene rette → Ts: 2) P ha almeno un vertice

Siccome $P \neq \emptyset$, consideriamo un x^0 in P e il corrispondente $I(x^0)$.

2 CASI

a) Esistono n righe a_i con i in $I(x^0)$ linearmente indipendenti.

b) Il numero di righe a_i con i in $I(x^0)$ linearmente indipendenti è $k < n$.

Esistenza di vertici in P

Dimostrazione 1) → 2)

Hp: 1) P non contiene rette → Ts: 2) P ha almeno un vertice

a) Esistono n righe a_i con i in $I(x^0)$ linearmente indipendenti.

→ Per il teorema di caratterizzazione, x^0 è un vertice di P

b) Il numero di righe a_i con i in $I(x^0)$ linearmente indipendenti è $\mathbf{k < n}$.

→ Per il Lemma, esiste $d \neq 0$ in R^n tale che:

$$a_i^T d = 0 \quad i \text{ in } I(x^0)$$

Consideriamo allora la **retta $x^0+\lambda d$, λ in R** e sia $z = x^0+\lambda d$ un qualsiasi punto della retta, per ogni i in $I(x^0)$ si ha:

$$a_i^T z = a_i^T (x^0 + \lambda d) = a_i^T x^0 + \lambda a_i^T d = a_i^T x^0 = b_i$$

Cioè, tutti i vincoli attivi in x^0 rimangono attivi in tutti i punti z sulla retta.

Esistenza di vertici in P

Dimostrazione 1) → 2)

Hp: 1) P non contiene rette → Ts: 2) P ha almeno un vertice

Siccome per ipotesi P non contiene rette, deve esistere un riga a_j tra quelle non in $I(x^0)$ per cui il vincolo j è violato da qualche z lungo la direzione d.

Il vincolo $j \notin I(x^0)$ è un nuovo vincolo attivo nel nuovo punto z* e non attivo in x^0.

Esistono $j \notin I(x^0)$ e $\lambda^* \in R$ tali che:

$$\mathbf{a_j^T z^*} = a_j^T (x^0 + \lambda^* d) = \mathbf{b_j} \qquad (1)$$

Inoltre, possiamo dimostrare che la riga a_j **non può** essere ottenuta come combinazione lineare delle righe a_i con i in $I(x^0)$.
[cioè, a_i con i in $I(x^0)$ e a_j sono k+1 righe linearmente indipendenti]

Esistenza di vertici in P

Infatti, se **PA** così non fosse, avremmo:

$$a_j = \Sigma_{i \text{ in } I(x^0)} \mu_i a_i$$

con $\mu_i \in R$ per ogni i in $I(x^0)$.

Ma, post-moltiplicando per d a destra e sinistra della relazione sopra:

$$a_j^T d = \Sigma_{i \text{ in } I(x^0)} \mu_i \mathbf{a_i^T d} = 0$$

e ciò nella (1) comporterebbe che:

$$a_j^T z^* = a_j^T (x^0 + \lambda^* d) = a_j^T x^0 + \lambda^* a_j^T d = \mathbf{a_j^T x^0 = b_j}$$

che ovviamente è impossibile perchè sappiamo per ipotesi che il vincolo j non è attivo in x^0.

$$\mathbf{a_j^T z^*} = a_j^T (x^0 + \lambda^* d) \mathbf{= b_j} \qquad (1)$$

Inoltre, possiamo dimostrare che la riga a_j **non può** essere ottenuta come combinazione lineare delle righe a_i con i in $I(x^0)$.
[cioè, a_i con i in $I(x^0)$ e a_j sono k+1 righe linearmente indipendenti]

Esistenza di vertici in P

Dimostrazione 1) $\rightarrow$ 2)

Hp: 1) P non contiene rette $\rightarrow$ Ts: 2) P ha almeno un vertice

Siccome per ipotesi P non contiene rette, deve esistere un riga a_j tra quelle non in $I(x^0)$ per cui il vincolo j è violato da qualche z lungo la direzione d, cioè esiste λ^* reale fissato tale che:

$$z = x^0 + \lambda d \quad \text{per valori di } \lambda > \lambda^*$$
$$z^* = x^0 + \lambda^* d$$

Il vincolo $j \notin I(x^0)$ è un nuovo vincolo attivo nel nuovo punto z^* e non attivo in x^0.

Esistono $j \notin I(x^0)$ e $\lambda^* \in R$ tali che:

$$\mathbf{a_j^T z^*} = a_j^T (x^0 + \lambda^* d) = \mathbf{b_j}$$

Il vincolo j è linearmente indipendente rispetto agli altri vincoli in $I(x^0)$ che sono già attivi in z^*

Inoltre, possiamo dimostrare che la riga a_j **non può** essere ottenuta come combinazione lineare delle righe a_i con i in $I(x^0)$.
[cioè, a_i con i in $I(x^0)$ e a_j sono k+1 righe linearmente indipendenti]

Esistenza di vertici in P

Dimostrazione 1) → 2)

Hp: 1) P non contiene rette → Ts: 2) P ha almeno un vertice

Il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in z^* aumenta rispetto a quelli in x^0 e si ha:

$$| I(x^0) | = k < k+1 = | I(z^*) |$$

Spostandosi da x^0 al punto $z^* = x^0 + \lambda^* d$ si ha:

- i vincoli attivi in x^0 rimangono attivi in z^*;
- il vincolo j non attivo in x^0 è attivo in z^*;
- il vincolo j è lin. indip. rispetto ai vincoli in $I(x^0)$

Il vincolo $j \notin I(x^0)$ è un nuovo vincolo attivo nel nuovo punto z^* e non attivo in x^0.

Il vincolo j è linearmente indipendente rispetto agli altri vincoli in $I(x^0)$ che sono già attivi in z^*

Esistenza di vertici in P

Dimostrazione 1) → 2)

Hp: 1) P non contiene rette → Ts: 2) P ha almeno un vertice

Il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in z^* aumenta rispetto a quelli in x^0 e si ha:

$$|\, I(x^0) \,| = k < k+1 = |\, I(z^*) \,|$$

A questo punto, chiamando $\mathbf{x^1 = z^*}$, si ripresentano per x^1 gli stessi due casi visti in precedenza per x^0 :

2 CASI

a) $k+1 = n$

allora esistono n righe a_i in $I(x^1)$ lin. indipendenti e x^1 è un vertice di P

b) $k+1 < n$

Si ripete per x^1 lo stesso procedimento visto per x^0 per individuare un nuovo punto x^2 e un vincolo j non in $I(x^1)$, ma in $I(x^2)$ e lin. indip. da quelli in $I(x^1)$.

Esistenza di vertici in P

Dimostrazione 1) → 2)

Hp: 1) P non contiene rette → Ts: 2) P ha almeno un vertice

Dopo **al più n** passi si individua necessariamente un punto x^* con n vincoli in $I(x^*)$ linearmente indipendenti, cioè, per il teorema di caratterizzazione, un vertice di P.

→ **Allora P ha almeno un vertice** ■

Dimostrazione 2) → 3)

Hp: 2) P ha almeno un vertice → Ts: 3) Esistono n vettori a_i^T lin. ind.

Sia x il vertice di P. Sotto l'hp 2), per il teorema di caratterizzazione, esistono n vincoli attivi x che corrispondono a n righe linearmente indipendenti tra le m righe a_i^T, i=1,2,...,m della matrice A.

→ **Allora in A esistono n vettori a_i^T lin. ind.** ■

Esistenza di vertici in P

Dimostrazione 3) → 1)

Hp: 3) Esistono n vettori a_i^T lin. ind. → Ts: 1) P non contiene rette

S.P.I.G., siano $a_1, \ldots, a_n$ le prime n righe di A.

Supponiamo PA che P contenga una retta, cioè esiste un $x \in P$ e una direzione $d \in R^n$, $d \neq 0$, tali che:

$\mathbf{z} = x + \lambda d$ **appartiene a P <u>per ogni</u> λ reale**

⇔ $$a_i^T z = a_i^T (x + \lambda d) \geq b_i \qquad i = 1, \ldots, m \,,\ \lambda \in R$$

ma si deve anche avere: $a_i^T d = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$

Esistenza di vertici in P

Infatti, se **PA** così non fosse, avremmo:

$$a_i^T d \neq 0 \textbf{ per qualche i}$$

con la conseguenza che, in corrispondenza di questo a_i, per i punti sulla retta avremmo:

$$a_i^T z = a_i^T(x + \lambda d) = a_i^T x + \boldsymbol{\lambda} a_i^T d \qquad \forall\ \lambda \in R$$

e potremmo così sempre trovare un λ reale (positivo se $a_i^T d<0$, negativo se $a_i^T d>0$) per cui risulti $a_i^T z < b_i$, <u>violando così il vincolo i-esimo</u>.

Ciò è impossibile perché (sotto l'hp assurda) tutti i punti z della retta sono in P (ammissibili).

ma si deve anche avere: $a_i^T d = 0$ per ogni $i=1,\dots,m$

Esistenza di vertici in P

Dimostrazione 3) → 1)

Hp: 3) Esistono n vettori a_i^T lin. ind. → Ts: 1) P non contiene rette

S.P.I.G., siano $a_1,\dots, a_n$ le prime n righe di A.

Supponiamo PA che P contenga una retta, cioè esiste un $x \in P$ e una direzione $d \in R^n$, $d \neq 0$, tali che:

$$\mathbf{z} = x + \lambda d \quad \textbf{appartiene a P \underline{per ogni} } \boldsymbol{\lambda} \textbf{ reale}$$

⇔ $a_i^T z = a_i^T (x + \lambda d) \geq b_i \qquad i=1,\dots,m\ ,\ \lambda \in R$

ma si deve anche avere: $a_i^T d = 0$ per ogni $i=1,\dots,m$

⇒ In particolare si ha: $a_i^T d = 0$ per **i=1,...,n** , con d in R^n, $\mathbf{d \neq 0}$

contraddizione: perchè ciò vorrebbe dire che $a_1,\dots, a_n$ sono linearmente dipendenti.

⇒ **Allora P non può contenere rette** ■

Esistenza di vertici in P

Poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : A_{mxn}x \geq b_m\}$ con $m \geq n$.

CONSEGUENZA

Un poliedro nella forma $P = \{x \text{ in } R^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$ ammette sempre almeno un vertice.

Infatti i vincoli $x \geq 0$ implicano che il poliedro P sia contenuto tutto nel primo ortante di R^n ⇒ P non può contenere **rette**

NOTA Le n righe di A relative ai vincoli di non negatività corrispondono a n vettori linearmente indipendenti attivi in O= (0,...,0):

$$e_1=(1,0...0),\ ...,\ e_n=(0,0..,1)$$

⇒ Se O=(0,0,...,0) è ammissibile, allora è certamente un vertice di P.

Teorema fondamentale della PL

→ **Teorema 1 (regione ammissibile)**
Sia P un poliedro non vuoto ($P \neq \emptyset$). Allora P possiede almeno un vertice se e solo se non contiene rette **(1)↔(2)**.

Teorema 2 – Teorema fondamentale della PL (ottimalità)
Si consideri il problema di PL nella forma seguente (P1):

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq b$$

Supponiamo che il poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : Ax \geq b\}$ associato al problema (P1) non contenga rette (o, equivalentemente, abbia almeno un vertice).

Allora **una ed una sola** delle seguenti affermazioni **è vera**:

1) Il problema (P1) non è ammissibile (cioè $P = \emptyset$);
2) $P \neq \emptyset$ e il problema (P1) è illimitato inferiormente (OI);
3) $P \neq \emptyset$ e il problema (P1) ammette ottimo finito e almeno una delle soluzioni ottime di (P1) è un vertice di P.

Teorema fondamentale della PL

Corollario 4

Se il poliedro P è un **politopo** non vuoto, allora il problema di PL:

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

ha ottimo finito in un vertice.

OSSERVAZIONE

Se il il problema di PL è della forma seguente (P2):

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq l \\ & x \leq u \end{aligned}$$

con l e u vettori in R^n, allora il poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : Ax \geq b,\ x \geq l,\ x \leq u\}$ che corrisponde alla regione ammissibile è un politopo e, per il Corollario 4, il problema di (P2) ha ottimo finito in un vertice.

Ottimi di un problema di PL

Teorema 3

Sia dato un problema di PL nella forma (P1):

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq b$$

con regione ammissibile $P = \{x \text{ in } R^n : Ax \geq b\}$.

L'insieme delle **soluzioni ottime** di (P1) è un **poliedro** contenuto in P (che indichiamo con **Q**).

Dim.

Banalmente, se $P = \varnothing$ si ha $Q = \varnothing$.

Analogamente se P ha ottimo illimitato si ha $Q = \varnothing$.

Altrimenti, $\mathbf{P \neq \varnothing}$ e esiste almeno una soluzione ottima **x^* in Q** con valore ottimo finito $\mathbf{z^* = z(x^*) = c^T x^*}$.

Definiamo l'insieme $\mathbf{Q^* = \{ x \text{ in } R^n : c^T x = z^* \}}$.

Ottimi di un problema di PL

$Q^* = \{ x \text{ in } R^n: c^T x = z^* \}$

Per ogni soluzione ottima di (P1) y :	Per ogni soluzione ottima di (P1) y:
vale $z(y) = c^T y = z^* \rightarrow y \text{ in } Q^*$	y è ammissibile $\rightarrow y \text{ in } P$.

Allora le soluzioni ottime del problema (P1) sono tutte e sole quelle dell'insieme:

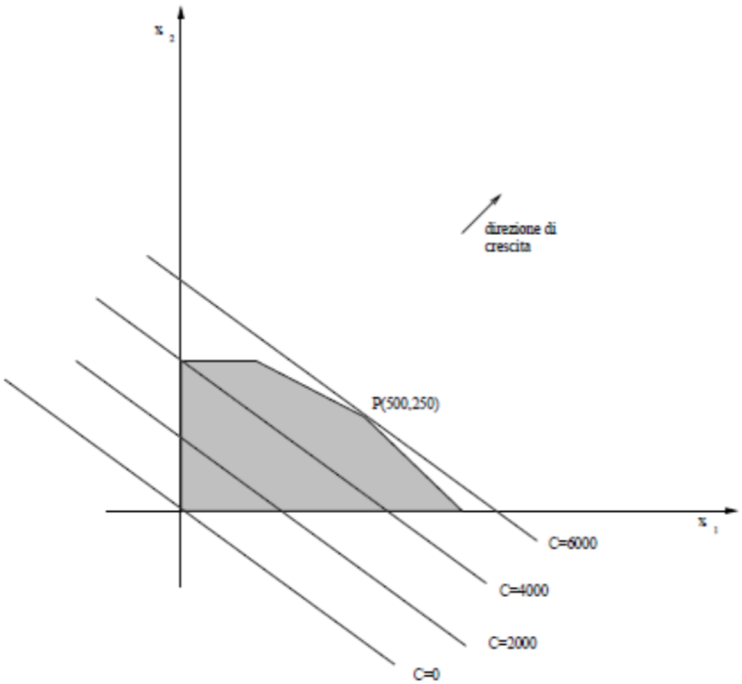
$$Q = \underbrace{P}_{\text{x ammissibili}} \cap \underbrace{Q^*}_{\text{x tali che } c^T x = z^*}$$

$Q^* = \{ x \text{ in } R^n: c^T x = z^* \}$
è un poliedro
P è un poliedro

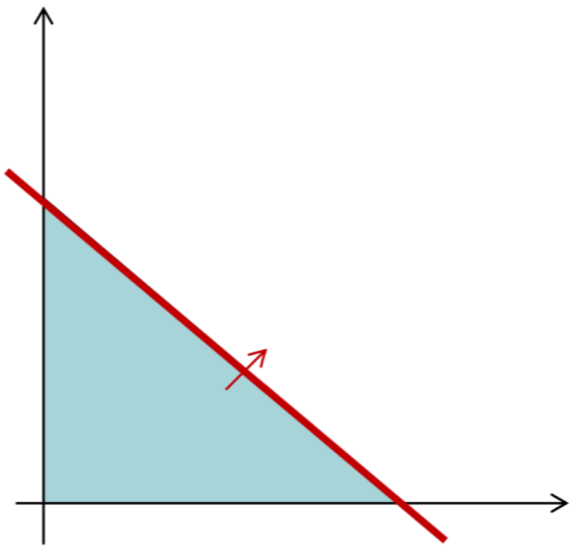
$Q = P \cap Q^* = \{ x \text{ in } P: c^T x = z^* \}$
è un poliedro contenuto in P

Ottimi di un problema di PL

ESEMPI



Q è un punto (vertice di P)



Q è un segmento
(faccia massimale di P)

A cosa corrisponde Q*?

Nei due casi Q* è ua retta e corrisponde a un **iperpiano di supporto di P**

Forma standard

Modelli di riferimento

$$\max\ c^T x \qquad\qquad \min\ c^T x$$

$$\boxed{Ax \leq b} \iff \boxed{Ax \geq b}$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad x \geq 0$$

Forma standard

Sistema lineare in Forma Standard

$$S = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Definizione Un sistema lineare si dice in **forma standard (FS)** se:

1. **tutte le variabili** sono soggette a vincoli di **non negatività**;
2. **tutte le altre relazioni** del sistema sono **equazioni**.

➡ Un problema di PL si dice in Forma Standard se il suo sistema di vincoli (lineare) è in forma standard.

Forma standard

PROPOSIZIONE Ogni problema di PL può essere ricondotto ad un problema equivalente in Forma Standard.

Dim. Consideriamo il sistema di vincoli di un problema di PL in forma arbitraria.

1. Possono essere presenti variabili libere ($\mathbf{x}_j$ è **libera** se non è sottoposta a vincolo di non-negatività);
2. Alcuni (o tutti) i vincoli possono non essere equazioni.

Forma standard

PROPOSIZIONE Ogni problema di PL può essere ricondotto ad un problema equivalente in Forma Standard.

Dim. Consideriamo il sistema di vincoli di un problema di PL in forma arbitraria:

1. Se una variabile x_j è libera allora esistono due variabili $\mathbf{y_j, z_j \geq 0}$ tali che:

$$x_j = y_j - z_j$$

dove:

$$x_j > 0 \iff y_j > z_j$$

$$x_j < 0 \iff y_j < z_j$$

$$x_j = 0 \iff y_j = z_j$$

2. una disequazione può essere riscritta in forma equivalente come **equazione**:

$$\Sigma_j a_{ij} x_j \leq b_i \quad \leftrightarrow \quad \Sigma_j a_{ij} x_j + s_i = b_i \, , \; s_i \geq 0$$

$$\Sigma_j a_{ij} x_j \geq b_i \quad \leftrightarrow \quad \Sigma_j a_{ij} x_j - s_i = b_i \, , \; s_i \geq 0$$

variabili **slack** non negative

Forma standard

Esempio

Consideriamo il seguente problema di PL in forma arbitraria:

$$\min 2x_1 - 5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -6 \\ x_1 - x_2 &\geq 1 \\ x_1 \geq 0 \quad & x_2 \text{ è “libera”} \end{aligned}$$

La Forma Standard equivalente è:

$$x_2 = y_2 - z_2$$

$$\min 2x_1 - 5y_2 + 5z_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2y_2 - 2z_2 + s_1 &= 5 \\ 4x_1 - 3y_2 + 3z_2 &= -6 \\ x_1 - y_2 + z_2 - s_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0$$

Esercizio 1

Ridurre in Forma Standard il seguente problema di PL:

$$\max x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 7 \\ x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_3 \geq 0, & \ x_2 \text{ libera} \end{aligned}$$

Forma standard

Osservazione

La FS riguarda solo la forma del sistema dei vincoli e non la funzione obiettivo.

In un problema di PL in forma standard la funzione obiettivo mantiene la sua forma originale. Infatti:

- la sostituzione di una variabile libera x_j con la coppia di variabili non negative y_j , z_j **non altera la f.o**.
- ogni variabile slack aggiunta ha **coefficiente nullo nella f.o.**

$$\min\ 2x_1 - 5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -6 \\ x_1 - x_2 &\geq 1 \\ x_1 \geq 0 \quad & x_2 \text{ è “libera”} \end{aligned}$$

$$\min\ 2x_1 - 5y_2 + 5z_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2y_2 - 2z_2 + s_1 &= 5 \\ 4x_1 - 3y_2 + 3z_2 &= -6 \\ x_1 - y_2 + z_2 - s_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0$$

Forma standard

Osservazione

La FS riguarda solo la forma del sistema dei vincoli e non la funzione obiettivo.

In un problema di PL in forma standard la funzione obiettivo mantiene la sua forma originale. Infatti:

- la sostituzione di una variabile libera x_j con la coppia di variabili non negative y_j , z_j **non altera la f.o.**
- ogni variabile slack aggiunta ha **coefficiente nullo nella f.o.**

Problemi di PL: forma di riferimento e forma standard

$$
\begin{array}{ll}
\min \Sigma_j c_j x_j & \\
\Sigma_j a_{ij} x_j \geq b_i & i=1,2,\ldots,m \\
x_j \geq 0 & j=1,2,\ldots,n
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\min \Sigma_j c_j x_j & \\
\Sigma_j a_{ij} x_j - s_i = b_i & i=1,2,\ldots,m \\
x_j \geq 0 & j=1,2,\ldots,n \\
s_i \geq 0 & i=1,2,\ldots,m
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max \Sigma_j c_j x_j & \\
\Sigma_j a_{ij} x_j \leq b_i & i=1,2,\ldots,m \\
x_j \geq 0 & j=1,2,\ldots,n
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max \Sigma_j c_j x_j & \\
\Sigma_j a_{ij} x_j + s_i = b_i & i=1,2,\ldots,m \\
x_j \geq 0 & j=1,2,\ldots,n \\
s_i \geq 0 & i=1,2,\ldots,m
\end{array}
$$

Forma standard

Per un problema di **minimo**:

$$\min \textstyle\sum_j c_j x_j \qquad\qquad \min \textstyle\sum_j c_j x_j$$

$$\textstyle\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \quad i=1,2,\dots,m \qquad \Leftrightarrow \qquad \textstyle\sum_j a_{ij} x_j - s_i = b_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n \qquad\qquad x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$s_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m$$

Forma matriciale

Matrice identità di ordine m

$$\min c_n^T x_n \qquad\qquad \min c_n^T x_n$$

$$A_{mxn} x_n \geq b_m \qquad \Leftrightarrow \qquad A_{mxn} x_n - I_{mxm}\, s_m = b_m$$

$$x_n \geq 0 \qquad\qquad x_n \geq 0$$

$$s_m \geq 0$$

anche (per righe):

$$\min c^T x \qquad\qquad \min c^T x$$

$$a_i^T x \geq b_i \quad i=1,2,\dots,m \qquad \Leftrightarrow \qquad a_i^T x - s_i = b_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad x \geq 0$$

$$s \geq 0$$

m vettori di dimensione n

Forma standard

Per un problema di **massimo**:

$$\max \textstyle\sum_j c_j x_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \max \textstyle\sum_j c_j x_j$$

$$\textstyle\sum_j a_{ij} x_j \le b_i \quad i=1,2,\dots,m \qquad \textstyle\sum_j a_{ij} x_j + s_i = b_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \quad j=1,2,\dots,n \qquad x_j \ge 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$s_i \ge 0 \quad i=1,2,\dots,m$$

Forma matriciale

Matrice identità di ordine m

$$\max c_n^T x_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \max c_n^T x_n$$

$$A_{mxn} x_n \le b_m \qquad A_{mxn} x_n + I_{mxm} s_m = b_m$$

$$x_n \ge 0 \qquad x_n \ge 0$$

$$s_m \ge 0$$

anche (per righe):

$$\max c^T x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \max c^T x$$

$$a_i^T x \le b_i \quad i=1,2,\dots,m \qquad a_i^T x + s_i = b_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x \ge 0 \qquad x \ge 0$$

$$s \ge 0$$

m vettori di dimensione n

Utilità della riduzione in forma standard

PROPRIETÀ In un problema di PL in forma standard è **immediato individuare i vincoli attivi** in corrispondenza di una data soluzione x.

Si consideri una soluzione **x** e il **vincolo i-esimo** del seguente problema di PL:

forma originale		forma standard
$\min c^T x$	$\Leftrightarrow$	$\min c^T x$
$a_i^T x \geq b_i \quad i=1,2,\ldots,m$		$a_i^T x - s_i = b_i \quad i=1,2,\ldots,m$
$x \geq 0$		$x \geq 0$
		$s \geq 0$

$a_i^T x = b_i$ $\Leftrightarrow$ $s_i = a_i^T x - b_i = 0$ $\Leftrightarrow$ $a_i^T x - \mathbf{s_i} = b_i$

vincolo originale $a_i^T x \geq b_i$ **SE** è **attivo in x**

variabile slack s_i **nulla**

vincolo FS **(sempre)** attivo in x
variabile slack $\mathbf{s_i = 0}$

$a_i^T x > b_i$ $\Leftrightarrow$ $s_i = a_i^T x - b_i > 0$ $\Leftrightarrow$ $a_i^T x - \mathbf{s_i} = b_i$

vincolo originale $a_i^T x \geq b_i$ **SE** è **non attivo in x**

variabile slack s_i **positiva**

vincolo FS **(sempre)** attivo in x
variabile slack $\mathbf{s_i > 0}$

Utilità della riduzione in forma standard

PROPRIETÀ In un problema di PL in forma standard è **immediato individuare i vincoli attivi** in corrispondenza di una data soluzione x.

Si consideri una soluzione x e il **vincolo i-esimo** del seguente problema di PL:

forma originale

$$\min c^T x$$
$$a_i^T x \geq b_i \quad i=1,2,\dots,m$$
$$x \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

forma standard

$$\min c^T x$$
$$a_i^T x - s_i = b_i \quad i=1,2,\dots,m$$
$$x \geq 0$$
$$s \geq 0$$

$a_i^T x = b_i$ $\Leftrightarrow$ $a_i^T x - s_i = b_i$

vincolo originale $a_i^T x \geq b_i$ **SE** è **attivo in x** $\Leftrightarrow$ vincolo FS **(sempre)** attivo in x, variabile slack $s_i = 0$

$a_i^T x > b_i$ $\Leftrightarrow$ $a_i^T x - s_i = b_i$

vincolo originale $a_i^T x \geq b_i$ **SE** è **non attivo in x** $\Leftrightarrow$ vincolo FS **(sempre)** attivo in x, variabile slack $s_i > 0$

Utilità della riduzione in forma standard

Esempio

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 10 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - s = 10 \\ s \geq 0 \end{cases}$$

1 vincolo nel problema di PL

2 vincoli corrispondenti nel problema in FS

Dato un punto $\bar{x}$, si ha:

$$2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 - \bar{x}_3 = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 - \bar{x}_3 - \bar{s} = 10 \\ \bar{s} = 0 \end{matrix}$$

vincolo **attivo in $\bar{x}$**

slack corrispondente **nulla**, cioè:
vincolo di non negatività di s attivo in $(\bar{x}, \bar{s})$

$$2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 - \bar{x}_3 > 10 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 - \bar{x}_3 - \bar{s} = 10 \\ \bar{s} > 0 \end{matrix}$$

vincolo **non attivo in $\bar{x}$**

slack corrispondente **positiva**, cioè:
vincolo di non negatività di s non attivo in $(\bar{x}, \bar{s})$

Utilità della riduzione in forma standard

VANTAGGI

La riduzione in forma standard del problema **non elimina alcuna disequazione**, ma:

- **CONVERTE** ogni disequazione (vincolo strutturale) in una equazione equivalente.
- **TRASFERISCE** l'informazione del vincolo i-esimo (attivo/non-attivo in x) sul vincolo di non negatività della variabile slack corrispondente s_i (attivo/non-attivo in (x,s)).

vincolo i-esimo
strutturale
attivo/non attivo in x

vincolo di non negatività
della variabile slack i-esima
attivo/non attivo in (x,s)

Utilità della riduzione in forma standard

Siccome i vincoli di non negatività delle variabili sono la forma più semplice di disequazione, la riduzione in forma standard **"semplifica il problema"** nel senso che nel corrispondente sistema di vincoli:

1. le **uniche disequazioni** sono i vincoli di non negatività e tutte le variabili del sistema sono soggette a un tale vincolo;
2. **Tutti i vincoli strutturali sono equazioni** (<u>sempre attivi per definizione</u>) e l'informazione relativa al fatto che l'originale vincolo i-esimo fosse attivo o non attivo nel punto (x,s) si legge direttamente dal vincolo di non negatività di s_i.

$$\begin{array}{rl} \max \sum_j c_j x_j & \\ \sum_j a_{ij} x_j \le b_i & i=1,2,\dots,m \\ x_j \ge 0 & j=1,2,\dots,n \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rl} \max \sum_j c_j x_j & \\ \sum_j a_{ij} x_j + s_i = b_i & i=1,2,\dots,m \\ \boxed{\begin{array}{r} x_j \ge 0 \\ s_i \ge 0 \end{array}} & \begin{array}{l} j=1,2,\dots,n \\ i=1,2,\dots,m \end{array} \end{array}$$

Svantaggi della riduzione in forma standard

SVANTAGGI

La riduzione in forma standard di un problema con variabili non negative AUMENTA il numero di variabili e il numero di vincoli:

- il numero di variabili AUMENTA (al massimo) di m: da **n** a **n+m**.
- il numero di vincoli AUMENTA (al massimo) di m: da **m+n** (m strutturali e n di non negatività) a **n+m+m** (si aggiungono i vincoli di non negatività sulle variabili slack).

S.P.I.G.:

$\max \sum_j c_j x_j$

$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,2,\ldots,m$

$x_j \geq 0 \quad j=1,2,\ldots,n$

$$\begin{array}{|c|}\hline A_{mxn} \\ \hline I_n \\ \hline \end{array} \iff \begin{array}{|c|c|}\hline A_{mxn} & I_m \\ \hline I_n & 0_{nxm} \\ \hline 0_{mxn} & I_m \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{a_{11} \; \cdots \; a_{1n}}}^{n} \\ \begin{array}{c} m \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ n \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mn} \\ 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \iff \begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{a_{11} \; \cdots \; a_{n1}}}^{n} \; \overbrace{\hphantom{1 \; \cdots \; 0}}^{m} \\ \begin{array}{c} m \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ n \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ m \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esempio

Esempio

Consideriamo il seguente problema di PL:

$$\max\ 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 1 \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (2)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (3)$$

2 variabili
1 vincolo strutturale
2 vincoli di non negatività

Forma standard

$$\max\ 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (2)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (3)$$

$$x_3 \geq 0 \qquad (1)$$

2 + 1 variabili
1 vincolo strutturale
2 + 1 vincoli di non negatività

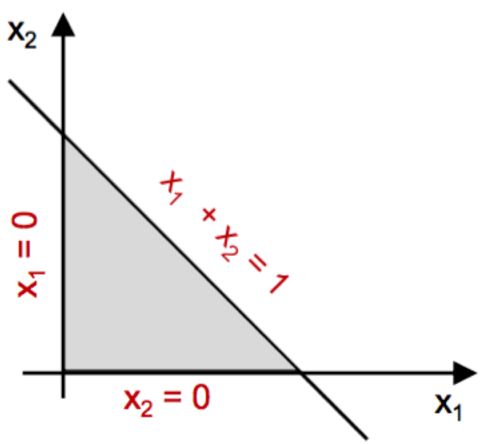
RAPPRESENTIAMO GEOMETRICAMENTE IL PROBLEMA IN FORMA STANDARD

Rappresentazione geometrica

Forma originale

$$\max\ 2x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

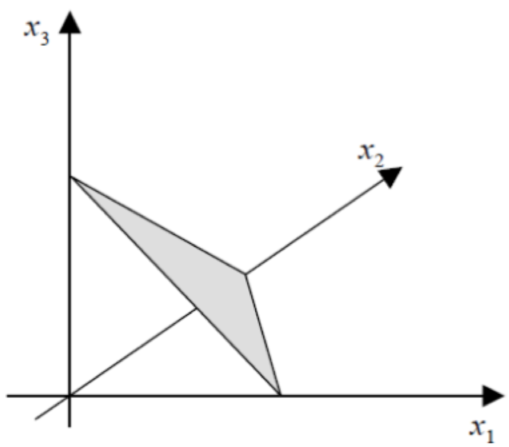
(Rappresentazione in R^2)



Forma standard

$$\max\ 2x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

(Rappresentazione in R^3)



Rappresentazione geometrica

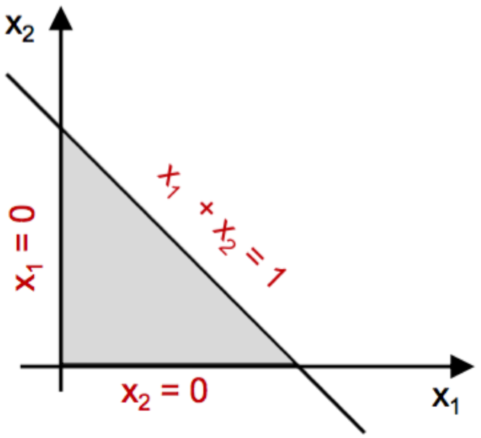
Forma originale

$$\max 2x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

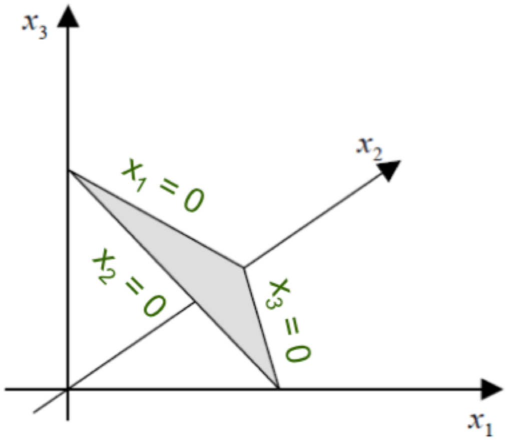
Forma standard

$$\max 2x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

(Rappresentazione in R^2)



(Rappresentazione in R^3)



Forma standard

PROPOSIZIONE Ogni problema di PL può essere ricondotto ad un problema equivalente in Forma Standard.

→ **S.P.I.G.**, possiamo sempre considerare il nostro problema di PL scritto (in maniera equivalente) in forma standard con n variabili (includendo tra queste sia quelle originali che le variabili slack eventualmente inserite rispetto alla forma d'origine del sistema di vincoli):

$$\min c_n^T x_n$$
$$A_{mxn} x_n = b_m \qquad (P)$$
$$\mathbf{x_n \geq 0}$$

In questo modo potremo sempre pensare le **soluzioni ammissibili** del nostro problema (P) come vettori a componenti non negative che sono **soluzioni non negative del sistema di equazioni lineari** in forma standard.

Soluzioni ammissibili di (P) ⟺ Soluzioni **non negative** del **sistema forma standard**:

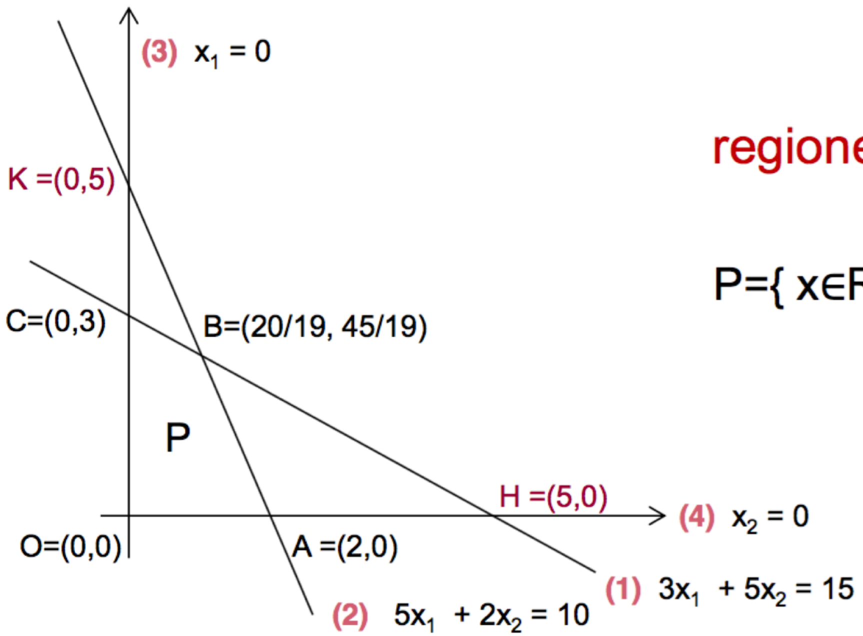
$$A_{mxn} x_n = b_m$$

Forma standard e forma canonica

Consideriamo il seguente problema di PL:

$$\max 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 && (1) \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 && (2) \\ x_1 &\geq 0 && (3) \\ x_2 &\geq 0 && (4) \end{aligned}$$



regione ammissibile

$P=\{ x \in R^2 : 3x_1+5x_2 \leq 15,\ 5x_1+2x_2 \leq 10,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}$

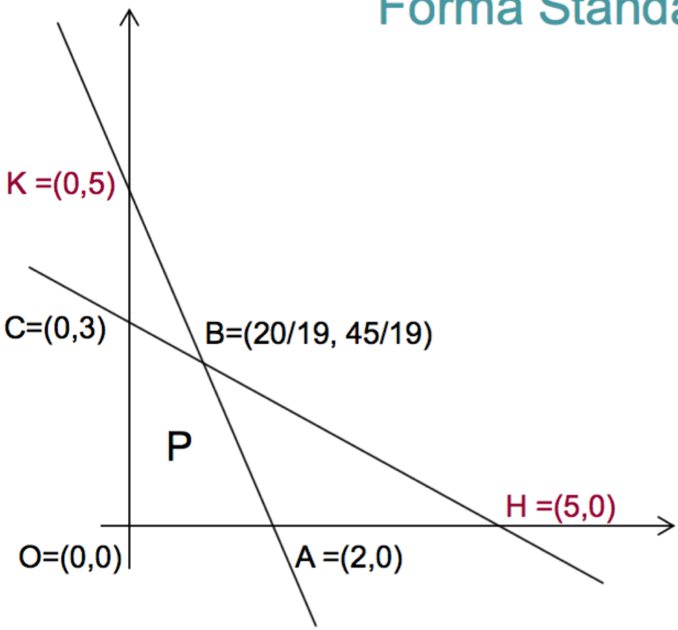
⇒ P è contenuto in R^2

Forma standard e forma canonica

Consideriamo il seguente problema di PL:

$$\max\ 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{ll} 3x_1 + 5x_2 \le 15 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \ge 0 & (3) \\ x_2 \ge 0 & (4) \end{array}$$



Forma Standard $\max\ 5x_1 + 3x_2$

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array} \right.$$

Sistema in Forma Standard

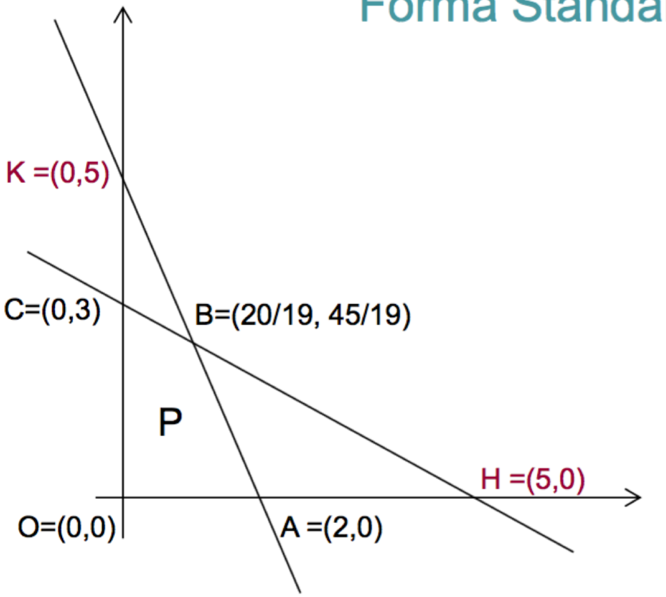
S è contenuto in R^4

S è anche in **Forma Canonica Ammissibile**

Forma standard e forma canonica

Def. Un sistema lineare con m equazioni e n variabili si dice in **Forma Canonica Ammissibile** se:

1. tutte le variabili sono soggette a vincoli di non negatività;
2. tutte le altre relazioni del sistema sono equazioni;
3. esiste un sottoinsieme di m variabili ciascuna **univocamente associata** a un vincolo (con coefficiente 1 in quel vincolo e 0 altrove);
4. tutti i termini noti sono non negativi.



Forma Standard

$$\max 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$S = \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Sistema in Forma Standard

S è contenuto in R^4

S è anche in <u>**Forma Canonica Ammissibile**</u>

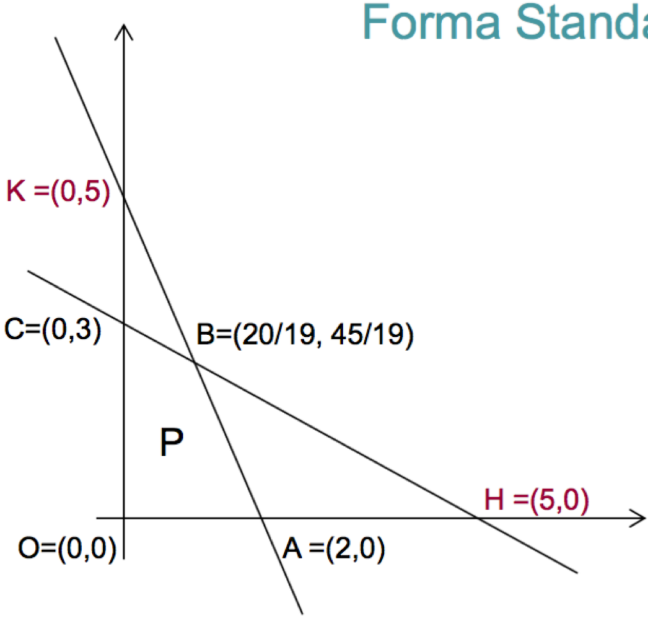
Forma standard e forma canonica

Def. Un sistema lineare con m equazioni e n variabili si dice in **Forma Canonica Ammissibile** se:

1. tutte le variabili sono soggette a vincoli di non negatività;
2. tutte le altre relazioni del sistema sono equazioni;

FS

3. esiste un sottoinsieme di m variabili ciascuna **univocamente associata** a un vincolo (con coefficiente 1 in quel vincolo e 0 altrove);
4. tutti i termini noti sono non negativi.



Forma Standard

$$\max 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \quad &= 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \quad + x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$S = \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Sistema in Forma Standard

S è contenuto in R^4

S è anche in **Forma Canonica Ammissibile**

Forma standard e forma canonica

Def. Un sistema lineare con m equazioni e n variabili si dice in **Forma Canonica Ammissibile** se:

1. tutte le variabili sono soggette a vincoli di non negatività;
2. tutte le altre relazioni del sistema sono equazioni;

FS

3. esiste un sottoinsieme di m variabili ciascuna **univocamente associata** a un vincolo (con coefficiente 1 in quel vincolo e 0 altrove);

4. tutti i termini noti sono non negativi.

La Forma Canonica Ammissibile (FCA) è strettamente legata alla Forma Standard.

Forma standard e forma canonica

Consideriamo il seguente problema di PL:

$$\max\ 5x_1 + 3x_2$$

FCA e FS coincidono quando i vincoli del problema (P) dato sono nella forma seguente (con b≥0):

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 15 && (1)\\ 5x_1 + 2x_2 &\le 10 && (2)\\ x_1 &\ge 0 && (3)\\ x_2 &\ge 0 && (4) \end{aligned}$$

$Ax \le b.$

$x \ge 0$

FS/FCA

$$\max\ 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 15\\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 &= 10\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

La Forma Canonica Ammissibile (FCA) è strettamente legata alla Forma Standard.

Forma standard e forma canonica

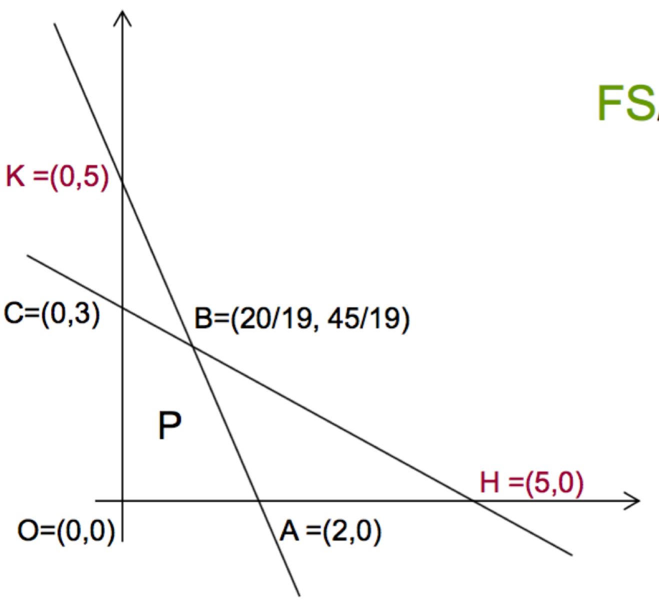
Consideriamo il seguente problema di PL:

$$\max\ 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{ll} 3x_1 + 5x_2 \le 15 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \ge 0 & (3) \\ x_2 \ge 0 & (4) \end{array}$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ FS/FCA $\Rightarrow$ $+ x_3 = 15$, $+ x_4 = 10$

$x_O = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 15,\ x_4 = 10)$



FS/FCA

$$\max\ 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

Se il problema è in FCA è facile trovare una sua soluzione ammissibile.

(Si tratta di trovare una **soluzione a componenti non negative del sistema di equazioni lineari**.)

Forma standard e forma canonica

Consideriamo il seguente problema di PL:

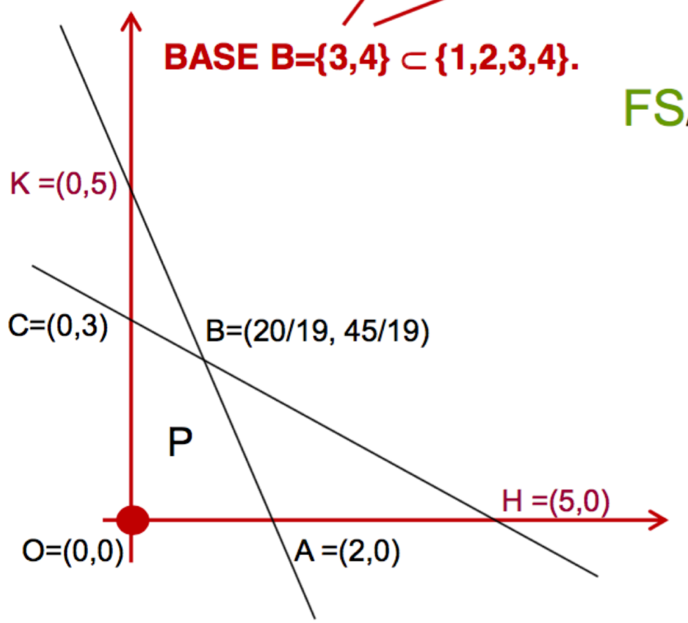
$$\max 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{ll} 3x_1 + 5x_2 \le 15 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 & (2) \\ x_1 \ge 0 & (3) \\ x_2 \ge 0 & (4) \end{array}$$

Soluzione Basica Ammissibile (SBA)

$x_O = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 15, x_4 = 10)$

BASE B={3,4} ⊂ {1,2,3,4}.



FS/FCA

$$\max 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

Considerando il problema in FS/FCA:

$$\max c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \ge 0$$

la base B è un sottoinsieme degli indici delle variabili tale che le colonne A_B formano una **base dello spazio vettoriale delle colonne di A**.

Forma standard e forma canonica

ATTENZIONE: Non sempre il problema in FS è anche in FCA.

$$\max 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 15 && (1) \\ 5x_1 + 2x_2 &\ge 10 && (2) \\ x_1 &\ge 0 && (3) \\ x_2 &\ge 0 && (4) \end{aligned}$$

Forma standard e forma canonica

Def. Un sistema lineare con m equazioni e n variabili si dice in **Forma Canonica Ammissibile** se:

1. tutte le variabili sono soggette a vincoli di non negatività;
2. tutte le altre relazioni del sistema sono equazioni;
3. **esiste un sottoinsieme di m variabili ciascuna univocamente associata a un vincolo (con coefficiente 1 in quel vincolo e 0 altrove);**
4. tutti i termini noti sono non negativi.

FS ~~FCA~~

$$\max 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \quad &= 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \quad - \mathbf{x_4} &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma standard e forma canonica

Def. Un sistema lineare con m equazioni e n variabili si dice in **Forma Canonica Ammissibile** se:

1. tutte le variabili sono soggette a vincoli di non negatività;
2. tutte le altre relazioni del sistema sono equazioni;
3. esiste un sottoinsieme di m variabili ciascuna univocamente associata a un vincolo (con coefficiente 1 in quel vincolo e 0 altrove);
4. **tutti i termini noti sono non negativi.**

FS ~~FCA~~

$$\begin{aligned} \max\ & 5x_1 + 3x_2 \\ & 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Updownarrow$

FS ~~FCA~~

$$\begin{aligned} \max\ & 5x_1 + 3x_2 \\ & 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ & -5x_1 - 2x_2 + x_4 = -10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma standard e forma canonica

Def. Un sistema lineare con m equazioni e n variabili si dice in **Forma Canonica Ammissibile** se:

1. tutte le variabili sono soggette a vincoli di non negatività;
2. tutte le altre relazioni del sistema sono equazioni;
3. esiste un sottoinsieme di m variabili ciascuna univocamente associata a un vincolo (con coefficiente 1 in quel vincolo e 0 altrove);
4. **tutti i termini noti sono non negativi.**

In generale, dunque, non è detto che la FCA coincida con la FS.

La FCA potrebbe anche **non esistere**.

Più precisamente, vale il seguente teorema:

Teorema

Dato un problema (P) in FS:

esiste FCA equivalente a (P) $\Longleftrightarrow$ esiste una soluzione di **FS** a **componenti non negative ($P \neq \emptyset$)**

Forma standard

S.P.I.G.

Possiamo sempre considerare un problema di PL in forma standard con n variabili (sia quelle originali che le variabili slack eventualmente inserite rispetto alla forma d'origine del sistema di vincoli):

$$\min c_n^T x_n \qquad\qquad \max c_n^T x_n$$

$$A_{mxn} x_n = b_m \qquad \text{oppure} \qquad A_{mxn} x_n = b_m$$

$$\mathbf{x_n \geq 0} \qquad\qquad \mathbf{x_n \geq 0}$$

In questo modo potremo sempre pensare le soluzioni ammissibili del problema (P) come **vettori a componenti non negative** che sono soluzioni del **sistema di equazioni lineari** in forma standard.

Soluzioni ammissibili di (P) ⟺ Soluzioni **non negative** del **sistema S in forma standard**:

$$A_{mxn} x_n = b_m$$

Forma standard

S.P.I.G.

Possiamo sempre considerare un problema di PL in forma standard con n variabili (sia quelle originali che le variabili slack eventualmente inserite rispetto alla forma d'origine del sistema di vincoli):

$$\begin{array}{ccc} \min c_n^T x_n & & \max c_n^T x_n \\ A_{mxn} x_n = b_m & \text{oppure} & A_{mxn} x_n = b_m \\ \mathbf{x_n \geq 0} & & \mathbf{x_n \geq 0} \end{array}$$

In questo modo potremo sempre pensare le soluzioni ammissibili del problema (P) come **vettori a componenti non negative** che sono soluzioni del **sistema di equazioni lineari** in forma standard.

S.P.I.G.

Per un problema di PL in FS ammissibile, possiamo sempre supporre che A_{mxn} sia larga (cioè m<n) e di rango pieno.

NOTA Il sistema è compatibile ma sottodeterminato.

Siccome $R(A)=m$, comunque si estraggano m colonne linearmente indipendenti da A_{mxn}, esse formano una base B dello spazio vettoriale S_m.

Punti estremi, vertici e SBA

Definizione

Sia $S = \{ x \text{ in } R^n: A_{mxn}x_n = b_m,\ x \geq 0 \}$, con $m < n$ e $R(A)=m$.

Un punto x è una SBA di S se e solo se, in corrispondenza di una scelta di indici B in {1,...,m}, A può essere decomposta in A_B e A_N in modo tale che $x = [x_B, x_N]$ con

$$x_B = A_B^{-1}b \quad e \quad x_N = 0$$

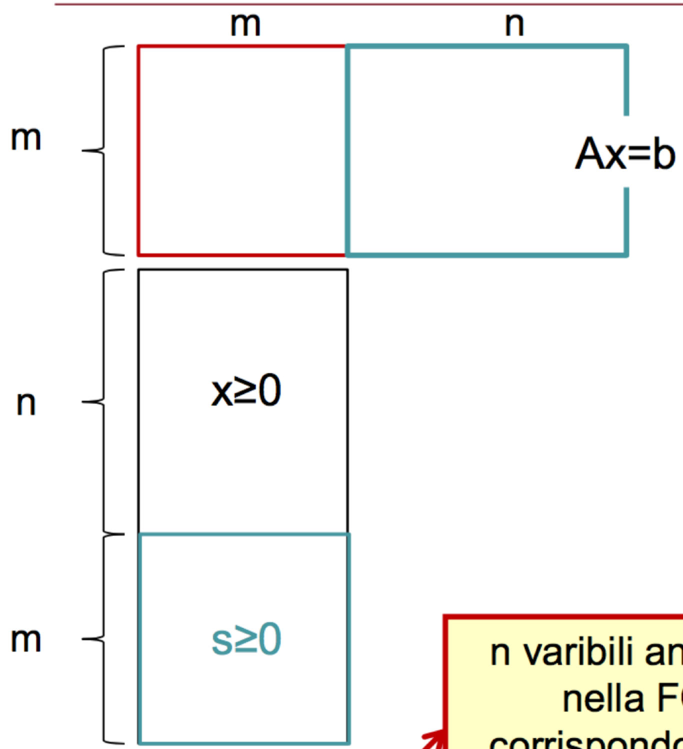
dove A_B^{-1} è una matrice quadrata di ordine m invertibile e tale che $A_B^{-1}b \geq 0$.

Teorema

Sia P un poliedro non vuoto. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. x è un vertice di P;
2. x è un punto estremo di P;
3. x è una SBA del sistema S in FS equivalente a P.

Caratterizzazione dei vertici



Annullare n variabili: si ottiene x_N

Scegliere m colonne linearmente indipendenti in A, A_B

n varibili annullate nella FCA corrispondono a **n vincoli di (P) attivi in x**

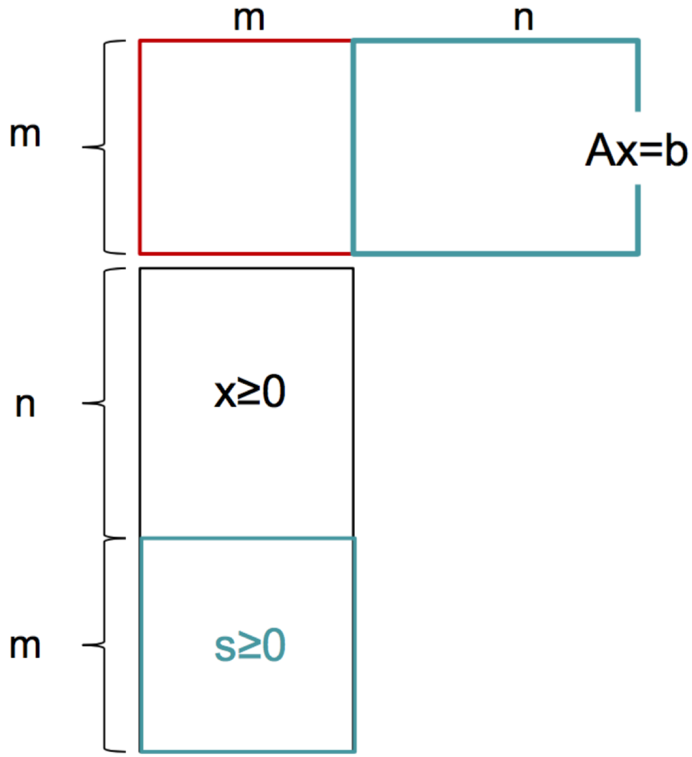
Si tratta di vincoli linearmente indipendenti

VERTICE di $P \in R^n$ (intersezione degli n iperpiani corrispondenti)

Matrice A_B estratta da A invertibile (sia le m righe che le m colonne sono lin.indip.)

SBA (x_B, x_N) (soluzione del sistema compatibile mxm estratto da Ax=b)

Caratterizzazione dei vertici



Dunque **vale sia per il problema (P) nello spazio originale R^n che per il problema nello spazio ampliato R^{n+m}**.

In R^n :

$P=\{Ax \leq b,\ x \geq 0\}$

VERTICE di $P \in R^n$

intersezione di **n** iperpiani corrispondenti a n vincoli attivi in x linearmente indipendenti

In R^{n+m} :

$P=\{\ [A\ I] \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b,\ (x,s) \geq 0\}$

VERTICE di $P \in R^{n+m}$

intersezione di **n+m iperpiani** corrispondenti a n+m vincoli attivi in x linearmente indipendenti

NOTA: dipende solo dalla dimensione dello spazio delle variabili.

Eempio

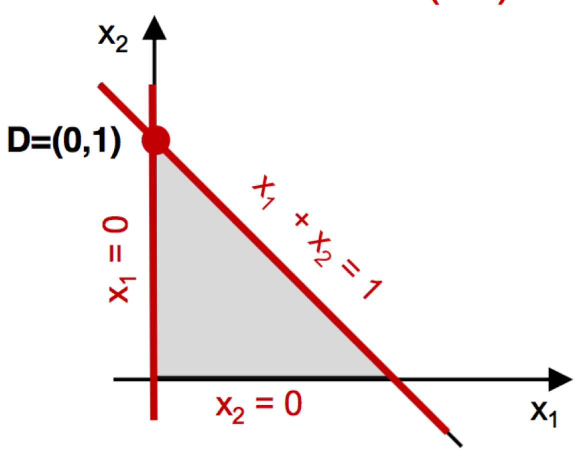
Forma originale

$$\max 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

n=2
vincoli attivi
in D=(0,1)
lin. indip.

(R^n)



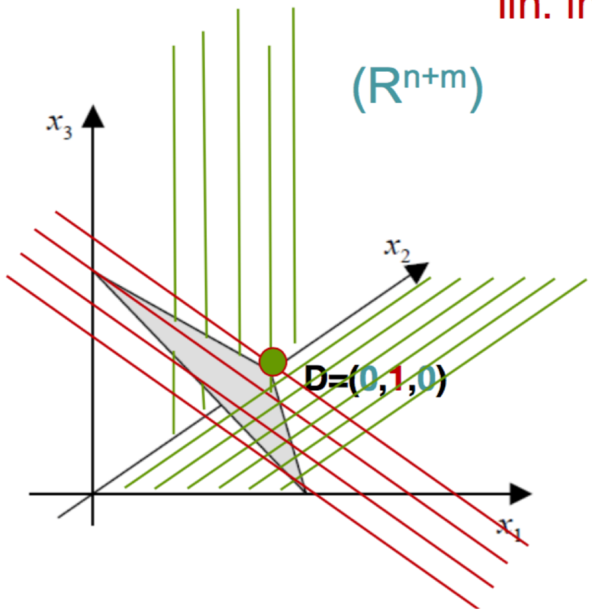
Forma standard

$$\max 2x_1 + x_2$$

$$\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 = 1}$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$\mathbf{x_3 \ge 0}$$

n+m=3
vincoli attivi
in D=(0,1,0)
lin. indip.

(R^{n+m})



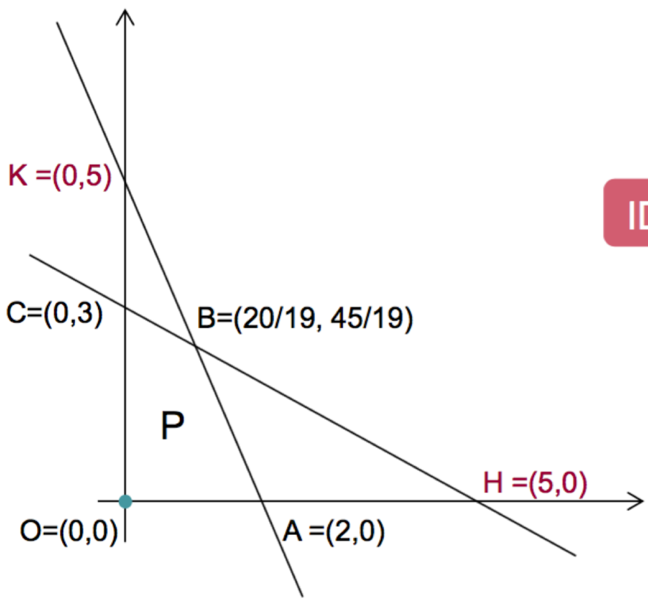
Forma standard e forma canonica

Per il Teorema Fondamentale della PL:

Se il problema in FCA ha ottimo finito, allora esiste almeno una SBA ottima.

$$\max 5x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15 \quad (1)$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad (2)$$
$$x_1 \geq 0 \quad (3)$$
$$x_2 \geq 0 \quad (4)$$



IDEA Un metodo possibile per risolvere il problema di PL è generare sistematicamente tutte le SBA e identificare la migliore.

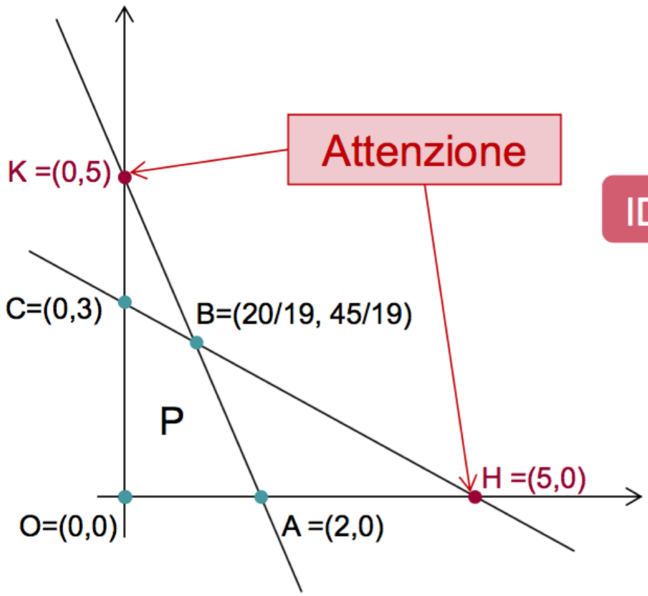
Forma standard e forma canonica

Per il Teorema Fondamentale della PL:

Se il problema in FCA ha ottimo finito, allora esiste almeno una SBA ottima.

$$\max\ 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{llr} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 & & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 & & (2) \\ x_1 \geq 0 & & (3) \\ x_2 \geq 0 & & (4) \end{array}$$



IDEA

Un metodo possibile per risolvere il problema di PL è generare sistematicamente tutte le SBA e identificare la migliore.

Più precisamente, risolvendo semplici sistemi di equazioni estratti dal sistema in FS (compatibili e determinati), si possono generare sistematicamente tutte le **SB**.

Per ciascuna occorre poi **verificare se è Ammissibile (SBA)**.

Forma standard e forma canonica

A partire dal sistema in FS/FCA:

$$A_{mxn}x_n = b_m \quad , \quad x_n \geq 0$$

e individuate m colonne linearmente indipendenti di A_{mxn}, (S.P.I.G., le prime m) si ha:

$$x_1a^1 + \ldots + x_ma^m + x_{m+1}a^{m+1} + \ldots + x_na^n = b$$

che, con $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-m} = 0$, diventa (sistema ridotto):

$$x_1a^1 + \ldots + x_ma^m = b$$

cioè

$$A_Bx_B = b$$

dove $A_B = [a^1, \ldots, a^m]$ (matrice di base) e B {1,2,

La soluzione basica
$x^* = (x_B^*, x_N^*) = (A_B^{-1}b, 0)$
è anche ammissibile se

$$x_B^* = A_B^{-1}b \geq 0$$

In corrispondenza della base B, una soluzione del sistema

$$A_{mxn}x_n = b_m$$

è data dalla soluzione del sistema ridotto:

$$A_Bx_B = b$$

e corrisponde alla soluzione basica $x^* = (x_B^*, x_N^*) = (A_B^{-1}b, 0)$ dove B = {1,2,...,m} e N = {m+1,...,n-m}.

x_2
$5x_2 \leq 15$ (1)
$2x_2 \leq 10$ (2)
(3)
(4)

roblema
ticamente tutte le
iore.
o semplici sistemi di
a in FS (compatibili e
erare
B.

rificare se è

Soluzione di problemi di PL in FS

Questo teorema suggerisce una procedura (semplice, ma non efficiente) per ottenere soluzioni basiche e SBA per un sistema in forma standard ammissibile (hp: $R(A)=m$ e $m<n$).

PROCEDURA

1. Si selezionano m colonne linearmente indipendenti di A (sia B l'insieme degli indici di tali colonne);
2. si pone $x_j=0$ per ogni j non in B;
3. si risolve il sistema ridotto $A_B x_B = b$.

- La soluzione così ottenuta è una soluzione basica associata alla base B e ha la forma $(x_B, x_N) = (\mathbf{A_B^{-1} b}, 0)$.
- Se (x_B, x_N) è **a componenti non negative**, allora è anche una soluzione basica ammissibile (SBA**).**

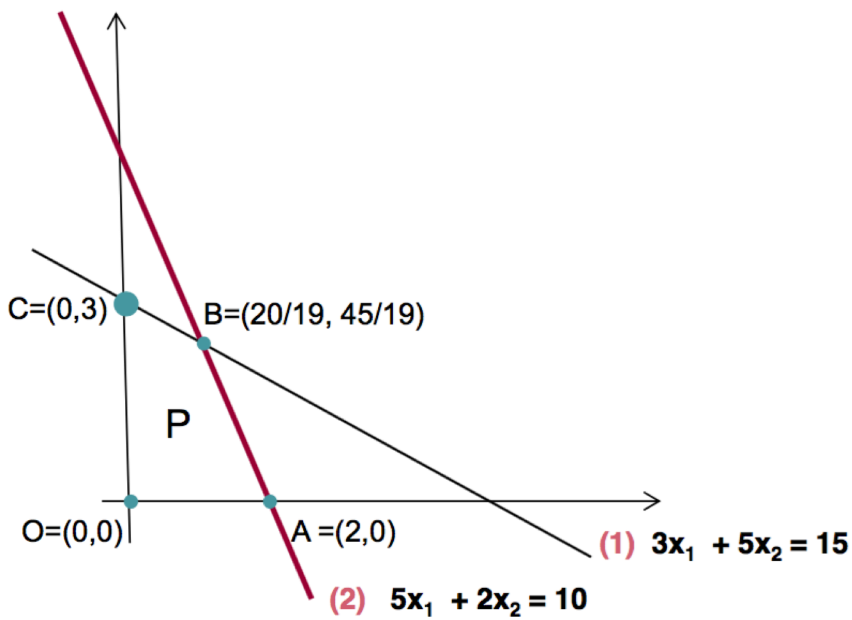
Soluzione di problemi di PL in FS

Geometricamente, ogni vertice è intersezione di due rette, ma **non è vero che** ogni intersezione di due rette corrisponde a un vertice.

Bisogna verificare che il punto sia ammissibile.

Consideriamo un punto di intersezione tra due rette (**C**); un vincolo j (**vincolo (2)**).

Sappiamo che il segno del valore x_j della variabile univocamente associata al vincolo j indica se tale vincolo è soddisfatto nel punto oppure no:



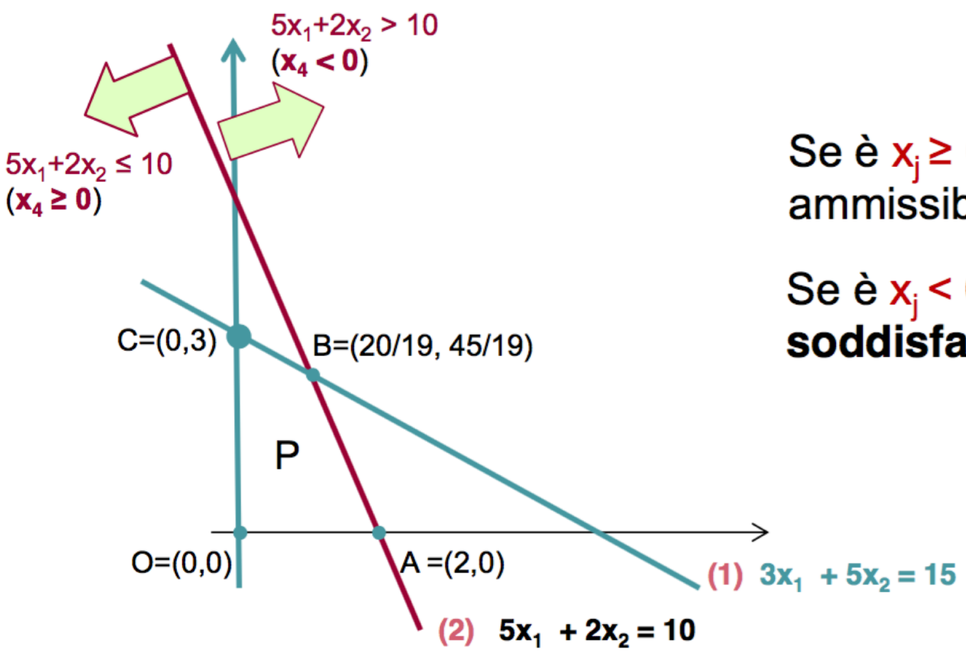
Soluzione di problemi di PL in FS

Geometricamente, ogni vertice è intersezione di due rette, ma **non è vero che** ogni intersezione di due rette corrisponde a un vertice.

Bisogna verificare che il punto sia ammissibile.

Consideriamo un punto di intersezione tra due rette (**C**); un vincolo j (**vincolo (2)**).

Sappiamo che il segno del valore x_j della variabile univocamente associata al vincolo j indica se tale vincolo è soddisfatto nel punto oppure no:



Se è $x_j \geq 0$, allora il punto è ammissibile rispetto a quel vincolo.

Se è $x_j < 0$, allora il punto **non soddisfa** quel vincolo

Un vertice deve ovviamente soddisfare tutti i vincoli.

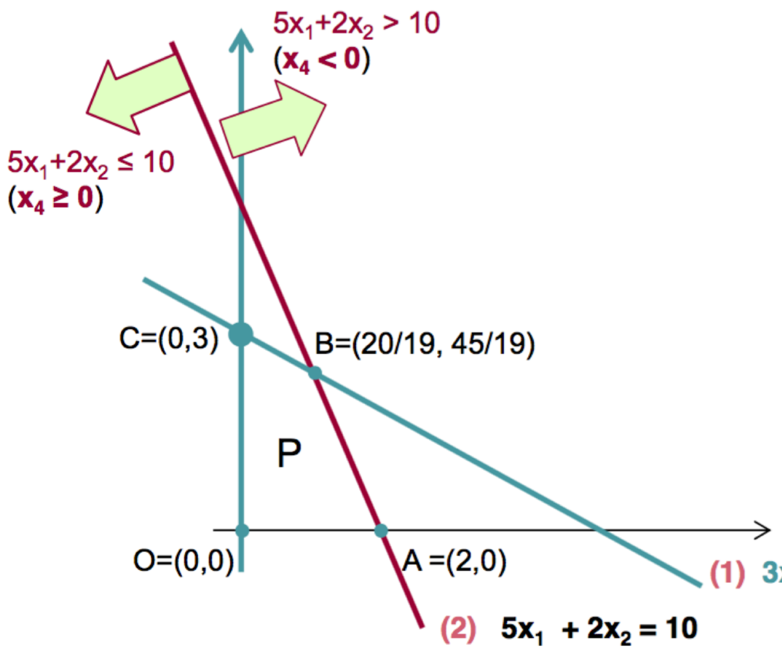
Soluzione di problemi di PL in FS

Geometricamente, ogni vertice è intersezione di due rette, ma **non è vero che** ogni intersezione di due rette corrisponde a un vertice.

Bisogna verificare che il punto sia ammissibile.

Consideriamo un punto di intersezione tra due rette (**C**); un vincolo j (**vincolo (2)**).

Sappiamo che il segno del valore x_j della variabile univocamente associata al vincolo j indica se tale vincolo è soddisfatto nel punto oppure no:



Nel punto **C=(0,3)** si ha:

	Il vincolo (1) è attivo	**x_3 è nulla**
$3x_1+5x_2 = 15$	⟺	$x_3 = 15 - 15 = 0$
$5x_1+2x_2 = 6 < 10$		$x_4 = 10 - 6 = 4 > 0$
	Il vincolo (2) non è attivo	x_4 è positiva

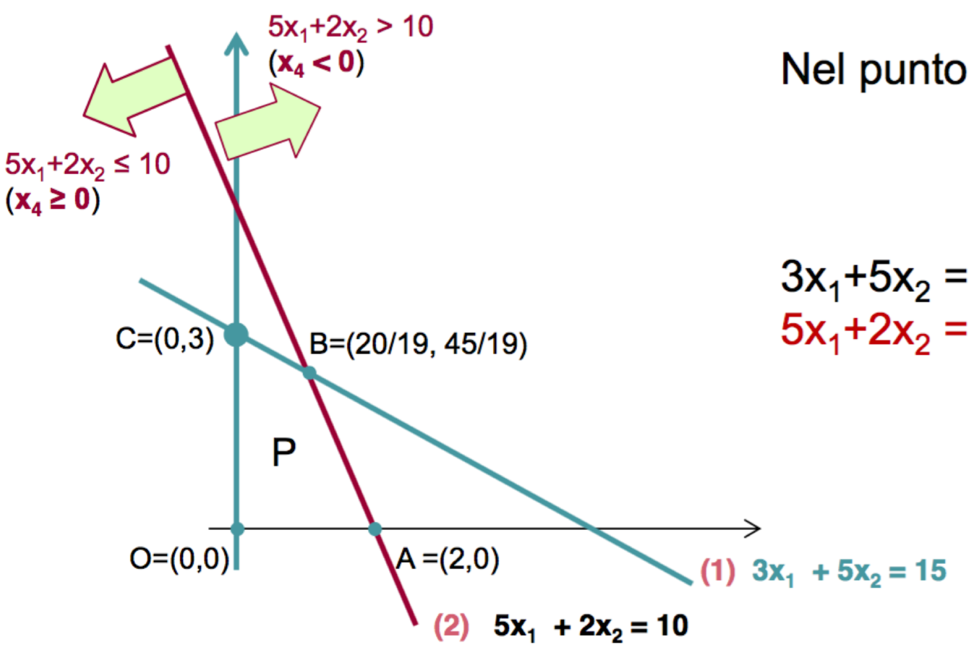
Soluzione di problemi di PL in FS

Geometricamente, ogni vertice è intersezione di due rette, ma **non è vero che** ogni intersezione di due rette corrisponde a un vertice.

Bisogna verificare che il punto sia ammissibile.

Consideriamo un punto di intersezione tra due rette (**C**); un vincolo j (**vincolo (2)**).

Sappiamo che il segno del valore x_j della variabile univocamente associata al vincolo j indica se tale vincolo è soddisfatto nel punto oppure no:



Nel punto **C=(0,3)** si ha:

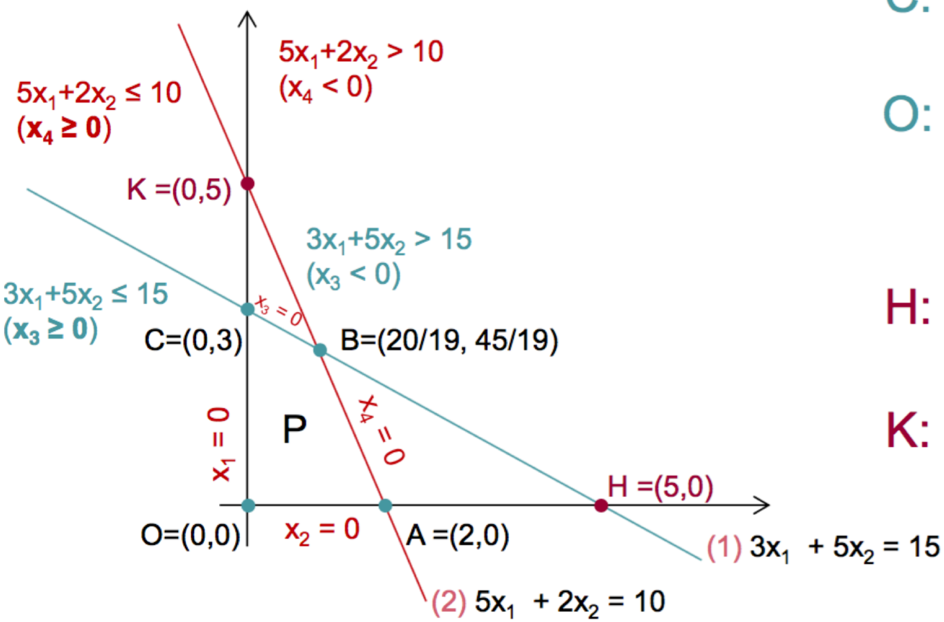
	Il vincolo (1) è attivo	**x_3 è nulla**
$3x_1+5x_2 = 15$	⟷	$x_3 = 15 – 15 = 0$
$5x_1+2x_2 = 6 < 10$		$x_4 = 10 – 6 = 4 > 0$
	Il vincolo (2) non è attivo	x_4 è positiva

Nota: i vincoli corrispondenti alle rette che si intersecano nel punto x sono **sicuramente attivi in x**.

Soluzione di problemi di PL in FS

$$\max 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \quad &= 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \quad + x_4 &= 10 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$



INTERSEZIONI

A: $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$ ☺

B: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$ ☺

C: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ ☺

O: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ ☺

S B A

H: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ ☹ $x_4 < 0$

K: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$ ☹ $x_3 < 0$

S B

Soluzione di problemi di PL in FS

Problema di PL in FS/FCA

$$\min c_n^T x_n$$
$$A_{mxn} x_n = b_m$$
$$x_n \geq 0$$

HP

Problema di PL in FS:
A_{mxn} larga e $R(A)=m$.

Soluzioni ammissibili ⟺ Soluzioni **non negative** del **sistema**:

$$A_{mxn} x_n = b_m$$

PROCEDURA

1. Si selezionano m colonne linearmente indipendenti di A (sia B l'insieme degli indici di tali colonne);
2. si pone $x_j=0$ per ogni j non in B;
3. si risolve il sistema ridotto $A_B x_B=b$ e si ottiene la SB associata alla base B: $(x_B, x_N) = (A_B^{-1}b, 0)$.
4. **Se $(x_B, x_N) \geq 0$, allora è una SBA.**