Ricerca Operativa
a.a. 2017-2018

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione VII - 11 Marzo 2019

Matrice di base di un poliedro in Forma Standard

$$P = \{x \in R^n : Ax = b,\ x \geq 0\}, \tag{5.14}$$

Definizione 5.4.6 *Sia* $A \in R^{m\times n}$ *la matrice dei coefficienti di un poliedro in forma standard (5.14), e siano* $\{a_1, \dots, a_n\}$ *l'insieme delle sue colonne. Una sottomatrice* $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m}) \in R^{m\times m}$ *di A non singolare è detta matrice di base di A.*

Definizione 5.4.7 *Data una matrice di base $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m})$ di A:*

- *la sottomatrice $N = (a_{j_{m+1}}, \dots, a_{j_n}) \in R^{m\times(n-m)}$ di A è detta matrice delle colonne fuori base di A;*

- *l'insieme $I_B = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ viene detto insieme degli indici di base;*
- *l'insieme $I_N = \{j_{m+1}, \dots, j_n\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ viene detto insieme degli indici fuori base;*
- *le componenti x_i, $i \in I_B$ vengono dette variabili di base;*
- *le componenti x_i, $i \in I_N$ vengono dette variabili fuori base;*
- *ogni vettore $x \in R^n$ può essere partizionato in due sottovettori*

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{j_m} \end{pmatrix} \in R^m, \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_{j_{m+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{j_n} \end{pmatrix} \in R^{n-m},$$

  detti vettore delle variabili di base (x_B) e vettore delle variabili fuori base (x_N).

Definizione 5.4.9 *Data una matrice di base B di A. Un vettore $\bar{x}$ è detto Soluzione di Base del sistema $Ax = b$ se i suoi sottovettori $\bar{x}_B$ e $\bar{x}_N$ sono tali che:*

$$\bar{x}_B = B^{-1}b,$$
$$\bar{x}_N = 0_{n-m}$$

Data una matrice di base B, anche il vettore c dei coefficienti della funzione obiettivo può essere decomposto nei due sottovettori:

$$c_B = \begin{pmatrix} c_{j_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{j_m} \end{pmatrix} \in R^m, \qquad c_N = \begin{pmatrix} c_{j_{m+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{j_n} \end{pmatrix} \in R^{n-m},$$

che rappresentano i coefficienti di costo delle variabili di base e quelli delle variabili fuori base.

Matrice di base ammissibile

Un problema in forma standard può quindi essere riscritto nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & B x_B + N x_N = b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned} \tag{5.22}$$

Definizione 5.4.10 *Dato un problema in forma standard 5.22, una matrice di base B di A è detta matrice di base ammissibile se risulta*

$$B^{-1} b \geq 0_m.$$

Punti estremi, vertici e SBA

Definizione

Sia $S = \{ x \text{ in } R^n: A_{mxn}x_n = b_m, x \geq 0 \}$, con $m < n$ e $R(A)=m$.

Un punto x è una SBA di S se e solo se, in corrispondenza di una scelta di indici B in {1,...,m}, A può essere decomposta in A_B e A_N in modo tale che $x = [x_B,x_N]$ con

$$x_B = A_B^{-1}b \quad \text{e} \quad x_N = 0$$

dove A_B^{-1} è una matrice quadrata di ordine m invertibile e tale che $A_B^{-1}b \geq 0$.

Teorema

Sia P un poliedro non vuoto. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. x è un vertice di P;
2. x è un punto estremo di P;
3. x è una SBA del sistema S in FS equivalente a P.

Teorema 5.4.14 *Il numero di SBA (cioè di vertici) è finito e pari, al più, a* $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$.

Notiamo che in effetti il numero di SBA può essere inferiore al limite massimo di $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ perché una volta fissate m colonne di A queste potrebbero non essere linearmente indipendenti o, anche nel caso lo fossero, la soluzione di base associata può non essere ammissibile.

Esempio 5.4.15 Si dato il seguente sistema.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & \frac{5}{2}x_4 & = & 4 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & = & 2 \\ & & & & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ($m = 2$) di colonne della matrice A. Applicando le definizioni di base, soluzione di base e soluzione di base ammissibile, otteniamo i risultati riportati qui di seguito.

Indici delle colonne	*Base*	*Soluzione di base*	*Ammissibile*
{1, 2}	Sì	$(2, 1, 0, 0)^T$	Sì
{1, 3}	No	–	–
{1, 4}	Sì	$(-1, 0, 0, 2)^T$	No
{2, 3}	Sì	$(0, 1, -1, 0)^T$	No
{2, 4}	Sì	$(0, 1/3, 0, 4/3)^T$	Sì
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1/2, 2)^T$	Sì

Come si vede su $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ possibili combinazioni abbiamo 5 basi di cui solo tre sono ammissibili. $\square$

Corollario 5.4.16 *Una soluzione $\bar{x} \neq 0_n$ appartenente a P è una SBA se e solo se le colonne di A corrispondenti alle componenti di $\bar{x}$ positive sono linearmenti indipendenti.*

Osservazione La corrispondenza tra basi ammissibili e soluzioni di base ammissibili non è biunivoca. Infatti, mentre a ciascuna base ammissibile B di A corrisponde una sola soluzione di base ammissibile $x = (B^{-1}b \;\; 0_{n-m})^T$, è possibile che una soluzione di base ammissibile sia associata a due basi ammissibili diverse.

Esempio 5.4.17 Sia dato il seguente sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & & & & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

Compiliamo una tabella analoga a quella dell'Esempio 5.4.15.

Indici delle colonne	*Base*	*Soluzione di base*	*Ammissibile*
{1, 2}	Sì	$(-1, 1, 0, 0)^T$	No
{1, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì
{1, 4}	No	–	–
{2, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì
{2, 4}	Sì	$(0, 1, 0, 1)^T$	Sì
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì

Si vede che abbiamo 4 basi ammissibili, ma solo 2 soluzioni di base ammissibili (ovvero solo due vertici). Infatti tre basi diverse, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, danno origine ad un'unica soluzione di base, $(0,0,1,0)^T$. $\square$

Degenerazione

Consideriamo ora un poliedro P in Forma Standard, cioè

$$P_{FS} = \{x \text{ in } R^n : A_{mxn}x_n = b_m, x_n \geq 0\}$$

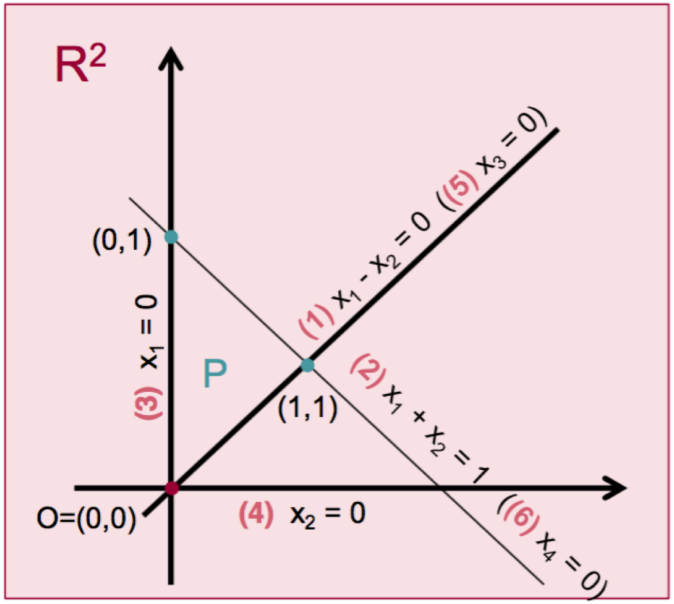
con A_{mxn} reale, $m \leq n$ e $R(A)=m$.

Def. Una **SBA** si dice **degenere** se **più di n-m variabili sono uguali a 0**. In pratica, oltre alle variabili x_N in una SBA degenere **sono nulle anche alcune delle variabili** $x_B = A_B^{-1}b \geq 0$.

A cosa corrisponde una SBA degenere geometricamente?

SBA degenere ⟷ vertice degenere

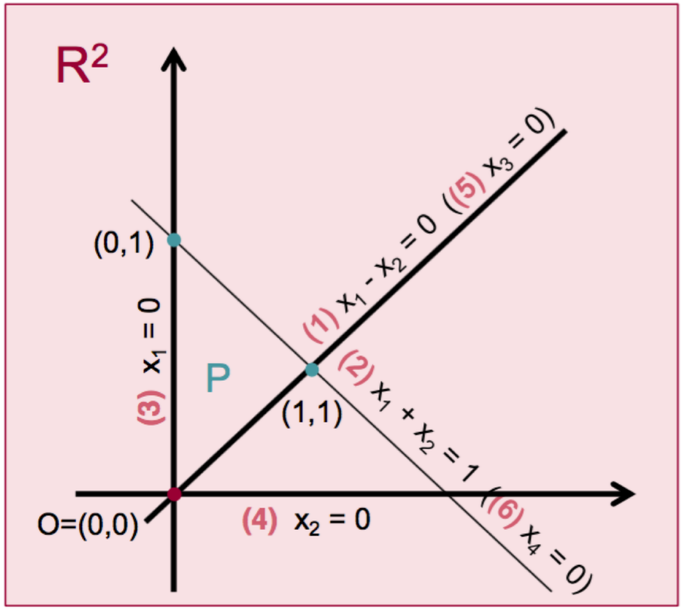
⇒ Nel vertice O degenere **ci sono 'troppi' vincoli attivi** (in questo caso 3 invece di 2).



Degenerazione: esempio

(P)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 0 \quad (1)\\ x_1 + x_2 &\le 1 \quad (2)\\ x_1 &\ge 0 \quad (3)\\ x_2 &\ge 0 \quad (4)\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



(P_{FS})
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \quad &= 0 \quad (1)\\ x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 1 \quad (2)\\ x_1 &\ge 0 \quad (3)\\ x_2 &\ge 0 \quad (4)\\ x_3 &\ge 0 \quad (5)\\ x_4 &\ge 0 \quad (6)\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R^4

Nel vertice O = (0,0) sono attivi più di 2 vincoli, cioè (1), (3) e **(4)**, perciò I(O)={1,3,4}.

I vincoli (1), (3) e (4) sono lin. dipendenti, ma a due a due linearmente indipendenti (ne bastano due per individuare x)

B={2,4} → **x = (0,0,0,1)**

SBA degenere:
sono nulle 3 > 4-2 = n – m variabili

Teorema 5.4.19 *Se una soluzione di base ammissibile* $\bar{x}$ è non degenere *allora esiste una ed una sola base ammissibile* B *tale che*

$$\bar{x}_B = B^{-1}b,$$
$$\bar{x}_N = 0_{n-m}.$$

Prova. Sia $\tilde{B}$ una base amissibile di A diversa da B e sia $\tilde{x}$ la soluzione di base associata a $\tilde{B}$ ovvero:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{\tilde{B}} &= \tilde{B}^{-1}b,\\ \tilde{x}_{\tilde{N}} &= 0_{n-m}.\end{aligned}$$

Poichè $\tilde{B} \neq B$ abbiamo che almeno una colonna di A, ad esempio l'i-esima, appartiene a B e non appartiene a $\tilde{B}$. Di conseguenza, $i \in I_{\tilde{N}}$ che implica $\tilde{x}_i = 0$; mentre $i \in I_B$ implica $\bar{x}_i > 0$ (poichè $\bar{x}$ è non degenere). Perciò $\tilde{x} \neq \bar{x}$. Abbiamo quindi che ogni base ammissibile diversa da B produce una soluzione di base ammissibile diversa da $\bar{x}$ ed il teorema segue. $\square$

Se una soluzione $\bar{x}$ è degenere, allora una o più componenti del vettore $\bar{x}_B = B^{-1}b$ sono nulle. In tal caso, basi ammissibili diverse possono produrre la stessa soluzione ammissibile di base $\bar{x}$.

Esempio 5.4.20 Con riferimento all' Esempio 5.4.17, completiamo la tabella, aggiungendo l'indicazione di soluzione degenere o meno.

Indici delle colonne	*Base*	*Soluzione di base*	*Ammissibile*	*Degenere*
{1, 2}	Sì	$(-1, 1, 0, 0)^T$	No	-
{1, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì
{1, 4}	No	–	–	–
{2, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì
{2, 4}	Sì	$(0, 1, 0, 1)^T$	Sì	No
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì

Teorema fondamentale della PL

→ Teorema 1 (regione ammissibile)

Sia P un poliedro non vuoto ($P \neq \emptyset$). Allora P possiede almeno un vertice se e solo se non contiene rette **(1)↔(2)**.

Teorema 2 – Teorema fondamentale della PL (ottimalità)

Si consideri il problema di PL nella forma seguente (P1):

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

Supponiamo che il poliedro $P = \{x \text{ in } R^n : Ax \geq b\}$ associato al problema (P1) non contenga rette (o, equivalentemente, abbia almeno un vertice).

Allora **una ed una sola** delle seguenti affermazioni **è vera**:

1) Il problema (P1) non è ammissibile (cioè $P = \emptyset$);
2) $P \neq \emptyset$ e il problema (P1) è illimitato inferiormente (OI);
3) $P \neq \emptyset$ e il problema (P1) ammette ottimo finito e almeno una delle soluzioni ottime di (P1) è un vertice di P.

Metodo del Simplesso

(S.P.I.G.) → Problema di PL in Forma Standard (**FS**)
Regione ammissibile $P=\{x \in R^n: Ax=b,\ x \geq 0\}$

Hp:

- Assumiamo che P sia non vuoto.
- Supponiamo di conoscere una soluzione $\mathbf{x^0} \in \mathbf{P}$.

In un problema di PL in FS tutte le variabili sono non negative

Se P è non vuoto → P è contenuto nel primo ortante di R^n e dunque non può contenere rette

P non contiene rette	⟺	P ammette almeno un vertice (SBA)

▶ Utilizzeremo il Teorema di caratterizzazione dei vertici per il poliedro P del problema in FS.

Metodo del Simplesso

Il Metodo del Simplesso permette di risolvere problemi di Programmazione Lineare in *forma standard*, cioè problemi di Programmazione Lineare della forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n, \end{aligned} \tag{5.24}$$

dove $x \in R^n$, $b \in R^m$ e $A \in R^{m \times n}$.

Elementi caratterizzanti

- la capacità di selezionare in maniera efficiente i vertici che visita;
- il fatto di passare da un vertice ad un'altro senza richiedere inversioni di matrici o soluzioni di sistemi di equazioni;
- l'uso di semplici criteri che permettono di individuare il vertice ottimo o di concludere che il problema di Programmazione Lineare non ammette soluzioni in quanto è illimitato inferiormente.

Assunzioni

i) *l'insieme ammissibile del problema (5.24) è non vuoto;*

ii) rango$(A) = m$;

iii) *data una base ammissibile* B, *si hanno a disposizione la matrice* $B^{-1}N$ *ed il vettore* $B^{-1}b$.

Riformulazione

$$\begin{aligned}\min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_B \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}.\end{aligned}$$

Soluzione di base

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Problema in forma canonica rispetto alla base B

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N \\
& x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\
& x_B \geq 0_m \\
& x_N \geq 0_{n-m},
\end{aligned}
$$

Vettore dei costi ridotti

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \in R^{n-m}.$$

Criterio di ottimalità

Teorema 5.5.1 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema 5.24. Se il vettore dei costi ridotti è non negativo, ovvero se:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m},$$

allora la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla base B (cioè il vettore che dato da $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$) è ottima per il problema 5.24.

Criterio di ottimalità

Prova. Si deve dimostrare che, se il vettore dei coefficienti ridotti è non negativo, allora per una qualunque vettore ammissibile x risulta

$$c^T x \geq c^T \bar{x}.$$

Sia x un qualsiasi punto ammissibile del problema 5.24 si ha:

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

e ricordando l'espressione (5.26) di x_B

$$c^T x = {c_B}^T B^{-1} b + \gamma^T x_N$$

D'altra parte, per ipotesi si ha $\gamma \geq 0$ e per l'ammissibilità di x si ha $x_N \geq 0$, da cui si ottiene:

$$c^T x \geq {c_B}^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T 0_{n-m} = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}.$$

Ma la precedente relazione mostra che la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla matrice di base B è ottima per il problema 5.24. $\square$

Conseguenza

Corollario 5.5.2 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema 5.24.* Se *il vettore dei costi ridotti è positivo, ovvero* se*:*

$$\gamma = c_N - \left(B^{-1}N\right)^T c_B > 0_{n-m},$$

allora la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla base B (cioè il vettore che dato da $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$) è l'unica soluzione ottima *del problema 5.24.*

Prova. Ripetendo gli stessi argomenti usati nella prova del Teorema 5.5.1, si ottiene che per ogni vettore x ammissibile

$$c^T x = {c_B}^T B^{-1} b + \gamma^T x_N > {c_B}^T B^{-1} b = c^T \bar{x}, \tag{5.28}$$

dove la stretta disuguaglianza segue dall'ipotesi che $\gamma > 0$ e dal fatto che ogni punto ammissibile x distinto da $\bar{x}$ deve avere $x_N \geq 0_{n-m}$ e $x_N \neq 0_{n-m}$. Dalla 5.28 segue che la soluzione di base ammissibile è l'unica soluzione ottima per il problema 5.24 $\square$

Esempio

Esempio 5.5.4 Consideriamo il seguente problema di PL.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcrcl}
\min & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & & & & = & 3 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 1 \\
 & & & & & & & & & & & x & \geq & 0.
\end{array}
$$

Esempio

Consideriamo la base formata dalle colonne 1, 3 e 4 ($I_B = \{1, 3, 4\}$ e $I_N = \{2, 5, 6\}$). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (1, 1, 1)^T, \quad c_N = (2, 1, 1)^T, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i coefficienti ridotti.

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (10/3, 1/3, 7/3).$$

Siccome i coefficienti ridotti sono tutti positivi abbiamo identificato una soluzione ottima che è anche l'unica. Tale soluzione ottima è data da

$$x_B = B^{-1} b = (1, 0, 2)^T, \quad x_N = 0_3,$$

per cui

$$x = (1, 0, 0, 2, 0, 0,)^T.$$

Esempio

Esempio 5.5.5 Consideriamo di nuovo il problema dell'Esempio 5.5.4, e consideriamo la base costituita dalle colonne 1, 4 e 6 ($I_B = \{1, 4, 6\}$ e $I_N = \{2, 3, 5\}$). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (1, 1, 1)^T, \quad c_N = (2, 1, 1)^T, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i coefficienti ridotti.

$$\gamma = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (-5/2, -7/2, 3/2).$$

Calcoliamo anche la soluzione di base associata.

$$x_B = B^{-1}b = (1, 2, 0)^T, \quad x_N = 0_3,$$

per cui

$$x = (1, 0, 0, 2, 0, 0,)^T.$$

Come si vede la soluzione di base trovata è la stessa trovata nell' Esempio 5.5.4, ed è quindi ottima (si tratta ovviamente di una SBA degenere). Come si vede il test impiegato non è stato capace, in questo caso, di determinare il fatto che la soluzione corrente è ottima. Questo perché il criterio impiegato è solo sufficiente, ma non necessario.

Vertici non degeneri e criterio di ottimalità

Il criterio di ottimalità è una condizione necessaria di ottimo in corrispondenza di vertici non degeneri come mostra il seguente risultato.

Teorema 5.5.6 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema 5.24. Se la soluzione di base ammissibile $x^\star$ associata alla base B (cioè il vettore che dato da $x^\star_B = B^{-1}b$ e $x^\star_N = 0_{n-m}$) è una soluzione ottima per il problema 5.24 e se è un vertice non degenere allora:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m}.$$

Criterio di illimitatezza

Il fallimento del criterio di ottimalità implica:

$$\{i \in \{1, \ldots, n-m\} : \gamma_i < 0\} \neq \emptyset.$$

In questa situazione si può considerare il seguente criterio sufficiente di illimitatezza

Teorema 5.5.7 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema 5.24. Se per qualche indice $i \in \{1, \ldots, n-m\}$ abbiamo che:*

(i) $\gamma_i < 0$

(ii) *la colonna i-esima della matrice $B^{-1}N$ è tutta non positiva, cioè $(B^{-1}N)_i \leq 0_m$,*

allora il problema 5.24 è illimitato inferiormente.

Esempio

Esempio 5.5.8 Consideriamo il problema di PL seguente.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & -x_1 & - & x_2 & & & & & & \\
 & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
 & & & & & & & x & \geq & 0.
\end{array}
$$

Esempio

Consideriamo la base formata dalle colonne 1 e 4 ($I_B = \{1, 4\}$ e $I_N = \{2, 3\}$). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (-1, 0)^T, \quad c_N = (-1, 0)^T, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice $B^{-1}N$ e i coefficienti ridotti

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (-2, 1).$$

Notiamo che in corrispondenza al coefficiente ridotto della prima variabile non in base (x_2), che è negativo, la prima colonna della matrice $B^{-1}N$ contiene solo elementi non positivi. Quindi possiamo concludere che il problema è illimitato inferiormente.

Nuova base ammissibile

Data una soluzione di base ammissibile per il problema in FS:

$$\bar{x} = \begin{cases} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0_{n-m} \end{cases}$$

Denotiamo nel modo seguente le colonne della matrice $B^{-1}N$:

$$B^{-1}N = (\pi_1, \ldots, \pi_{n-m}).$$

Nuova base ammissibile

Come già osservato se il criterio di ottimalità non è soddisfatto si ha:

$$\Big\{ i \in \{1, \dots, n-m\} : \gamma_i < 0 \Big\} \neq \emptyset. \tag{5.30}$$

Mentre se non è soddisfatto il criterio di illimitatezza, allora per ogni indice $h \in \{1, \dots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$ si ha:

$$\Big\{ k \in \{1, \dots, m\} : \pi_{kh} > 0 \Big\} \neq \emptyset. \tag{5.31}$$

Nuova base ammissibile

Falliti i due criteri, il metodo del simplesso cerca di costruire una nuova soluzione di base ammissibile del problema 5.24, cioè un punto

$$\tilde{x} = \begin{cases} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{cases}$$

Nuova base ammissibile

L'idea base del Metodo del Simplesso è quella di modificare *una sola componente del vettore* x_N, ad esempio l'h-esima (ricordando la definizione di x_N si ha $(x_N)_h = x_{j_{m+h}}$), portandola da zero ad un valore positivo ρ. Formalmente viene considerata la seguente semiretta di punti:

$$x(\rho) = \begin{cases} x_B(\rho) = B^{-1}b - \rho B^{-1}Ne_h \\ \\ x_N(\rho) = \rho e_h \end{cases} \tag{5.32}$$

dove ρ è un numero reale non-negativo, e_h è l'h-esimo vettore unitario con $n-m$ componenti e l'espressione del sottovettore $x_B(\rho)$ è data dalla 5.26 che nasce dalla necessità di soddisfare i vincoli di uguaglianza del problema originario.

Nuova base ammissibile

Dopo aver definito il generico punto $x(\rho)$ rimangono da risolvere le due seguenti questioni:

- quale variabile fuori base modificare, cioè come scegliere l'indice h;

- quanto variare la variabile fuori base scelta, cioè quale valore dare allo scalare ρ.

Scelta dell'indice h

Teorema 5.5.9 *Data una matrice di base ammissibile B del problema 5.24. Sia $\bar{x}$ la soluzione di base ammissibile associata e sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti. Se l'indice $h \in \{1, \ldots, n-m\}$ è tale che*

$$\gamma_h \leq 0,$$

allora, il punto $x(\rho)$ definito dalla 5.32 con $\rho \geq 0$, ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello di $\bar{x}$, cioè

$$c^T x(\rho) \leq c^T \bar{x}.$$

Prova. Utilizzando l'espressione di $x_B(\rho)$ e di $x_N(\rho)$ date dalla 5.32, si ha:

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \rho \gamma^T e_h,$$

ricordando che $\gamma^T e_h = \gamma_h$ e che, per ipotesi, $\gamma_h \leq 0$, si ottiene:

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \rho \gamma_h \leq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}$$

e quindi che il valore della funzione obiettivo in $x(\rho)$ è minore o uguale al valore della funzione obiettivo in $\bar{x}$. $\square$

Scelta dello scalare ρ

Teorema 5.5.11 *Data una matrice di base ammissibile B del problema 5.24. Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e sia $\bar{\rho}$ lo scalare dato da*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ \pi_{ih}>0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\}. \tag{5.33}$$

Allora, i punti $x(\rho)$ definiti dalla 5.32 con $\rho \in [0, \bar{\rho}]$, sono punti ammissibili per il problema 5.24.

Criterio del rapporto minimo

Teorema 5.5.13 *Data una matrice di base ammissibile* $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}, \dots, a_{j_m})$ *del problema 5.24. Sia* γ *il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia* h *un indice tale che* $\gamma_h < 0$ *e siano* $\bar{\rho}$ *lo scalare e* k *l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ \pi_{ih}>0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih}} \right\}. \tag{5.38}$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ *(con* $x(\rho)$ *definito da 5.32) è una soluzione di base ammissibile del problema 5.24 e la matrice di base ammissibile* $\tilde{B}$ *associata è data da:*

$$\tilde{B} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m}). \tag{5.39}$$

Calcolo della nuova forma canonica

$$\begin{aligned}
&\min \quad c^T x \\
&I_m x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\
&x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned}
&\min \quad c^T x \\
&I_m x_{\widetilde{B}} + \widetilde{B}^{-1} \widetilde{N} x_{\widetilde{N}} = \widetilde{B}^{-1} b \\
&x_{\widetilde{B}} \geq 0_m, \quad x_{\widetilde{N}} \geq 0_{n-m}.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Matrice di pivot

$$T = I_m + \frac{1}{\pi_{kh}} (e_k - \pi_h)\, e_k^T \tag{5.52}$$

oppure svolgendo i prodotti matriciali assume la forma:

$$T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\pi_{1h}/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\pi_{2h}/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{k-1h}/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{k+1h}/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{m-1h}/\pi_{kh} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\pi_{mh}/\pi_{kh} & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ k - \text{esima colonna} \end{array} \tag{5.53}$$

Matrice di pivot

Teorema 5.5.16 *Sia T la matrice data dalla 5.52 o dalla 5.53. Allora si ha:*

$$\widetilde{B}^{-1} = TB^{-1} \tag{5.57}$$

Teorema 5.5.17 *Sia T la matrice data dalla 5.52 o dalla 5.53. Allora si ha:*

$$\widetilde{B}^{-1}b = T(B^{-1}b) \tag{5.59}$$

$$\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N} = T(\pi_1, \ldots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \ldots, \pi_{n-m}). \tag{5.60}$$

Matrice di pivot

Corollario 5.5.18 *Sia T la matrice data dalla 5.52 o dalla 5.53. Allora si ha:*

$$\Big(e_k \;\Big|\; \widetilde{B}^{-1}\widetilde{N} \;\Big|\; \widetilde{B}^{-1}b\Big) = T\Big(\pi_h \;\Big|\; \pi_1 \;\cdots\; \pi_{h-1}\; e_k\; \pi_{h+1} \;\cdots\; \pi_{n-m} \;\Big|\; B^{-1}b\Big). \quad (5.63)$$

Il precedente corollario e la particolare struttura della matrice T mostrano che il vettore $\widetilde{B}^{-1}b$ e la matrice $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ possono essere ottenute effettuando alcune semplici operazioni sulle righe della matrice:

$$M = \Big(\pi_h \;\Big|\; \pi_1 \;\cdots\; \pi_{h-1}\; e_k\; \pi_{h+1} \;\cdots\; \pi_{n-m} \;\Big|\; B^{-1}b\Big).$$

Matrice di pivot

Infatti sia $\widetilde{M}$ la matrice data da:

$$\widetilde{M} = \left(e_k \;\mid\; \widetilde{B}^{-1}\widetilde{N} \;\mid\; \widetilde{B}^{-1}b\right),$$

e siano m_i, $\widetilde{m}_i$, t_i, con $i = 1, \dots, m$, i vettori costituiti dalla righe di M, $\widetilde{M}$ e T. Dal Corollario 5.5.18 si ha l'uguaglianza:

$$\widetilde{M} = TM$$

che, espressa per righe, è equivalente a:

$$\widetilde{m}_i^T = t_i^T \begin{pmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_k^T \\ \vdots \\ m_m^T \end{pmatrix} \qquad \text{per} \qquad i = 1, \dots, m.$$

Matrice di pivot

Tenendo conto della struttura di T si ottiene:

$$\widetilde{m}_i^T = \Big(0,\dots,0,1,0,\dots,0,-\frac{\pi_{ih}}{\pi_{kh}},0,\dots,0,\dots,0\Big)\begin{pmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_k^T \\ \vdots \\ m_m^T \end{pmatrix} \qquad \text{per} \qquad i<k$$

$\uparrow$

$i -$ esima componente

Matrice di pivot

$$\tilde{m}_k^T = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{\pi_{kh}}, 0, \ldots, 0\right) \begin{pmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_k^T \\ \vdots \\ m_m^T \end{pmatrix} \qquad \text{per} \qquad i = k$$

$$\tilde{m}_i^T = \left(0, \ldots, 0, -\frac{\pi_{ih}}{\pi_{kh}}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\right) \begin{pmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_k^T \\ \vdots \\ m_m^T \end{pmatrix} \qquad \text{per} \qquad i > k.$$

Effettuando i prodotti matriciali, le precedenti uguaglianze possono essere riassunte in

$$\tilde{m}_k^T = \frac{1}{\pi_{kh}} m_k^T$$

$$\tilde{m}_i^T = m_i^T - \pi_{ih} \tilde{m}_k^T \qquad \text{per} \qquad i \neq k.$$

Matrice di pivot

Riassumendo si parte dalla matrice M e si effettua la seguente *operazione di pivot*[5] sull'elemento π_{kh}:

(a) si divide la riga $k-$esima di M per π_{kh};

(b) si somma a ciascuna riga $i-$esima di M (con $i \neq k$), la riga $k-$esima ottenuta al precedente punto *(a)* moltiplicata per l'elemento $-\pi_{ih}$

Al termine di questa operazione si ottiene la matrice

$$\left(e_k \;\mid\; \widetilde{B}^{-1}\widetilde{N} \;\mid\; \widetilde{B}^{-1}b \right).$$

Metodo del simplesso

P1: *Calcolo del vettore dei costi ridotti*

– Calcolare il vettore $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

P2: *Verifica del criterio di ottimalità*

– se per ogni $i \in \{1, \dots, n-m\}$, risulta $\gamma_i \geq 0$, allora la soluzione corrente $\bar{x}_B = B^{-1}b$, $\bar{x}_N = 0_{n-m}$ è ottima. – STOP

P3: *Verifica del criterio di illimitatezza*

– se per qualche $i \in \{1, \dots, n-m\}$, tale che $\gamma_i < 0$ risulta $\pi_i \leq 0$ allora il problema è illimitato inferiormente. – STOP

Metodo del simplesso

P4: *Costruzione di una nuova base ammissibile*

- selezionare un indice $h \in \{1, \ldots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$;
  l'h-esima variabile fuori base, ovvero $x_{j_{m+h}}$, entra in base.
- calcolare l'indice k attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\frac{(B^{-1}b)_k}{\pi_{kh}} = \min_{\substack{i=1,\ldots,m \\ \pi_{ih}>0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\pi_{ih})} \right\};$$

  la k-esima variabile in base, ovvero x_{j_k}, esce dalla base.
- costruire le matrici $\widetilde{B}$ e $\widetilde{N}$ a partire da B e N scambiando fra loro l'h-esima colonna di N, ovvero $a_{j_{m+h}}$ con la k-esima colonna di B, ovvero a_{j_k}.
- costruire i nuovi vettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$, $c_{\tilde{B}}$ e $c_{\tilde{N}}$.

P5: *Costruzione di una nuova forma canonica*

- calcolare le grandezze rilevanti, relative alla nuova base $\widetilde{B}$, ovvero $\widetilde{B}^{-1}b$ e $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ attraverso un'operazione di *pivot*, e definire la nuova forma canonica rispetto alla nuova base $\widetilde{B}$ ed effettuare una nuova iterazione.

Esempio

Esempio 5.5.19 *Risolvere applicando la fase II del metodo del simplesso il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Il problema è in forma standard ed inoltre si dispone della base $B_0 = I$ data dalle colonne 4, 5, 6, quindi il problema è in forma canonica rispetto alle variabili x_4, x_5, x_6, ovvero:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} \qquad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} N_0$$

$$x_{B_0} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \qquad x_{N_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & (1 \;\; 1 \;\; 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \;\; 2 \;\; 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Esempio

Iterazione 0

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_0^T = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (4 \;\; 3 \;\; -3) = (-3 \;\; -1 \;\; 4)$$

Verifica del criterio di ottimalità:
Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:
Poiché non risulta $\pi_1 \leq 0$, o $\pi_2 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:
Variabile entrante: si sceglie l'indice h corrispondente al costo ridotto negativo minore ovvero $h = 1$ in quanto $\gamma_1 = -3 < -1 = \gamma_2$; quindi entra in base la prima variabile

fuori base, ovvero x_1.

Esempio

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\ldots,3\\ \pi_{i1}>0}} \left\{ \frac{(B_0^{-1}b)_i}{\pi_{i1}} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{(B_0^{-1}b)_2}{\pi_{21}} = 1$$

si determina $k = 2$ e quindi la seconda variabile in base esce dalla base, ovvero x_5.

Nuova base:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix}, \qquad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:
si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$\left(\pi_1 \;\middle|\; e_2 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \;\middle|\; B_0^{-1}b \right)$$

ovvero

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{2} & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Esempio

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_1)_2 = 2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & | & -1/2 & 5/2 & 11/2 & | & 2 \\ 1 & | & 1/2 & -1/2 & -5/2 & | & 1 \\ 0 & | & -1/2 & 5/2 & 3/2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\left(e_2 \quad | \quad B_1^{-1} N_1 \quad | \quad B_1^{-1} b \right).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{array}{l} \min \quad (1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Esempio

Iterazione 1

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_1^T = (1\ \ 2\ \ 1) - (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 1) - (-1/2\ \ 9/2\ \ 9/2) = (3/2\ \ -5/2\ \ -7/2)$$

Verifica del criterio di ottimalità:
Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:
Poiché non risulta $\pi_2 \le 0$, o $\pi_3 \le 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:
Variabile entrante: si sceglie l'indice h corrispondente al costo ridotto negativo minore ovvero $h = 3$ in quanto $\gamma_3 = -7/2 < -5/2 = \gamma_2$; quindi entra in base la terza variabile fuori base, ovvero x_3.
Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,3 \\ \pi_{i3}>0}} \left\{ \frac{(B_1^{-1}b)_i}{\pi_{i3}} \right\} = \min\left\{ \frac{2}{11/2}, \frac{0}{3/2} \right\} = \frac{(B_1^{-1}b)_3}{\pi_{33}} = 0 \qquad (5.64)$$

si determina $k = 3$ e quindi la terza variabile in base esce dalla base, ovvero x_6.

Esempio

Nuova base:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:
si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\pi_3 \mid \pi_1 \quad \pi_2 \quad e_3 \mid B_1^{-1}b)$$

ovvero

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 11/2 & -1/2 & 5/2 & 0 & 2 \\ -5/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ \mathbf{3/2} & -1/2 & 5/2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_3)_3 = 3/2$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 4/3 & -20/3 & -11/3 & 2 \\ 0 & -1/3 & 11/3 & 5/3 & 1 \\ 1 & -1/3 & 5/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right)$$

ovvero

$$(e_3 \mid B_2^{-1}N_2 \mid B_2^{-1}b).$$

Esempio

Quindi la nuova forma canonica è

$$\min \quad (1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Iterazione 2

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_2^T = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (2/3 \;\; -4/3 \;\; -4/3) = (1/3 \;\; 10/3 \;\; 7/2)$$

Verifica del criterio di ottimalità:
Poiché risulta $\gamma_2 > 0$ il criterio di ottimalità è soddisfatto e quindi la soluzione

$$\bar{x}^\star = (1, 0, 0, 2, 0, 0)^T$$

è soluzione ottima del problema ed è l'unica soluzione ottima poichè il vettore dei costi ridotti ha tutte le componenti positive. $\square$

Esercizio

Risolvere applicando la fase II del metodo del simplesso e utilizzando la costruzione esplicita della matrice di pivot T, il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 & x_1 - x_3 + 2x_4 = 5 \\
 & x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\
 & x \geq 0.
\end{array}
$$