Ricerca Operativa
a.a. 2018-2019

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lavinia Amorosi
Lezione X- 18 marzo 2019

DUALITA’ NELLA PL

Problema PRIMALE e problema DUALE

Dato un problema di PL (detto **PRIMALE**) esiste un altro problema di PL, univocamente associato al problema primale e detto problema **DUALE**.

Coppia PRIMALE-DUALE simmetrica o canonica

$\min c^T x$		$\max y^T b$
$Ax \geq b$	$\Longleftrightarrow$	$A^T y \leq c$
$x \geq 0$		$y \geq 0$
P		**D**

Problema PRIMALE e problema DUALE

Dato un problema di PL (detto **PRIMALE**) esiste un altro problema di PL, univocamente associato al problema primale e detto problema **DUALE**.

Coppia PRIMALE-DUALE simmetrica o canonica

P		**D**
$\min c^T x$	$\Longleftrightarrow$	$\max y^T b$
$Ax \geq b$		$A^T y \leq c$
$x \geq 0$		$y \geq 0$

I problemi P e D sono strettamente legati e si riferiscono allo stesso contesto decisionale.

- Dato P, il problema D è identificato univocamente.
- L'informazione ottenuta dalla soluzione di D complementa quella fornita dalla soluzione di P.
- Il **duale di D** è proprio **P** (Proprietà **involutoria** della dualità).

Problema PRIMALE e problema DUALE

Dato un problema di PL (detto **PRIMALE**) esiste un altro problema di PL, univocamente associato al problema primale e detto problema **DUALE**.

Problema PRIMALE		**Problema DUALE**
$\min c^T x$		$\max y^T b$
$Ax \geq b$	$\Leftrightarrow$	$A^T y \leq c$
$x \geq 0$		$y \geq 0$
Problema DUALE		**Problema PRIMALE**

Coppia P-D canonica

I problemi P e D sono strettamente legati e si riferiscono allo stesso contesto decisionale.

$\Rightarrow$

- Dato P, il problema D è identificato univocamente.
- L'informazione ottenuta dalla soluzione di D complementa quella fornita dalla soluzione di P.
- Il **duale di D** è proprio **P** (Proprietà **involutoria** della dualità).

Problema PRIMALE e problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\min c^T x \qquad\qquad \max y^T b \qquad \left[\max b^T y\right]$$
$$Ax \geq b \qquad\qquad A^T y \leq c \qquad \left[y^T A \leq c\right]$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0 \qquad \left[y \geq 0\right]$$

P $\Leftrightarrow$ **D**

$$\min_{x=(x_1,x_2,\dots,x_j,\dots,x_n)} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \max_{y=(y_1,y_2,\dots,y_j,\dots,y_m)} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1,2,\dots,m \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,n \qquad\qquad y_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,m$$

P (**n** variabili, **m** vincoli) $\Leftrightarrow$ **D** (**m** variabili, **n** vincoli)

dove $A_{mn} = \{a_{ij}\}$, $c^T = (c_1, \dots, c_n)$, $b^T = (b_1, \dots, b_m)$

Problema PRIMALE e problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\boxed{\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & y^T b \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

P **D**

ESEMPIO 1

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 8 \\ & 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & 8y_1 + 12y_2 \\ & 2y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ & 4y_1 + 6y_2 \leq 2 \\ & 6y_1 + 9y_2 \leq 3 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

P (**n=3** variabili, **m=2** vincoli)

D (**m=2** variabili, **n=3** vincoli)

Problema PRIMALE e problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & y^T b \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

P **D**

ESEMPIO 1

$$\begin{aligned} \min\ & 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 8 \\ & 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & 8y_1 + 12y_2 \\ & 2y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ & 4y_1 + 6y_2 \leq 2 \\ & 6y_1 + 9y_2 \leq 3 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

P (**n=3** variabili, **m=2** vincoli) **D** (**m=2** variabili, **n=3** vincoli)

Problema PRIMALE e problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\boxed{\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & y^T b \\ & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

P **D**

ESEMPIO 2

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \le 1 \\ & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \le 55 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \le 3 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ & y_1 + 5y_2 - y_3 \ge 4 \\ & -y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ & -y_1 + 3y_2 + 3y_3 \ge 5 \\ & 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \ge 3 \\ & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

P (**n=4** variabili, **m=3** vincoli)

D (**m=3** variabili, **n=4** vincoli)

Problema PRIMALE e problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\boxed{\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & y^T b \\ & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

P **D**

ESEMPIO 2

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ & 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 3x_4 \le 1 \\ & 5x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 8x_4 \le 55 \\ & -1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \le 3 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & 1y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ & 1y_1 + 5y_2 - 1y_3 \ge 4 \\ & -1y_1 + 1y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ & -1y_1 + 3y_2 + 3y_3 \ge 5 \\ & 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \ge 3 \\ & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

P (**n=4** variabili, **m=3** vincoli) **D** (**m=3** variabili, **n=4** vincoli)

Costruzione del problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\boxed{\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & y^T b \\ & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

P **D**

Dato un problema primale nella forma P, formulare il problema duale D significa cercare upper bound (**stime per eccesso**) del valore ottimo del primale $c^T x^*$, **senza risolvere** il problema P.

Proviamo a "costruire" un upper bound per $z^* = c^T x^* = \max c^T x$.

Consideriamo il problema P dell'**Esempio 2** e introduciamo dei moltiplicatori non negativi, uno per ciascuna disequazione di P:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \ge 0$$

$$\begin{array}{lrcl} & \max\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & & \\ y_1 \rightarrow & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 & \le & 1 \\ y_2 \rightarrow & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 & \le & 55 \\ y_3 \rightarrow & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 & \le & 3 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 & & \end{array}$$

Costruzione del problema DUALE

Moltiplicando la riga i-esima per $y_i \geq 0$, $i=1,2,3$:

- il verso delle disequazioni non cambia;
- le "nuove disequazioni" sono soddisfatte da ogni x ammissibile.

$$\begin{aligned} y_1 (\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) &\leq 1y_1 \\ y_2 (\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) &\leq 55y_2 \\ y_3 (- x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) &\leq 3y_3 \end{aligned}$$

Sommando le disequazioni così ottenute possiamo costruire la seguente disequazione "implicata" (quando $y \geq 0$):

$$y_1 (x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) + y_2 (5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) + y_3 (- x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4)$$

$$\leq 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Costruzione del problema DUALE

Moltiplicando la riga i-esima per $y_i \geq 0$, $i=1,2,3$:

- il verso delle disequazioni non cambia;
- le "nuove disequazioni" sono soddisfatte da ogni x ammissibile.

$$
\begin{aligned}
y_1\,(\; x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) &\leq 1y_1 \\
y_2\,(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) &\leq 55y_2 \\
y_3\,(- x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) &\leq 3y_3
\end{aligned}
$$

Sommando le disequazioni così ottenute possiamo costruire la seguente disequazione "implicata" (quando $y \geq 0$):

$$y_1\,(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) + y_2\,(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) + y_3\,(- x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4)$$

$$\leq 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Che può essere riscritta come segue:

$$\underbrace{(y_1+5y_2-y_3)}\,\mathbf{x_1} + \underbrace{(-y_1+y_2+2y_3)}\,\mathbf{x_2} + \underbrace{(-y_1+3y_2+3y_3)}\,\mathbf{x_3} + \underbrace{(3y_1+8y_2-5y_3)}\,\mathbf{x_4}$$

$$\leq 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

In questo modo abbiamo ottenuto dei coefficienti per x_j, $j=1,2,3,4$ in funzione dei moltiplicatori y.

Costruzione del problema DUALE

Moltiplicando la riga i-esima per $y_i \geq 0$, $i=1,2,3$:
- il verso delle disequazioni non cambia;
- le “nuove disequazioni” sono soddisfatte da ogni x ammissibile.

Sommando le disequazioni così ottenute possiamo costruire la seguente disequazione “implicata” (quando $y \geq 0$):

Funzione obiettivo di P:

$$\max 4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\begin{aligned} y_1 (\ \ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) &\leq 1y_1 \\ y_2 (\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) &\leq 55y_2 \\ y_3 (- x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) &\leq 3y_3 \end{aligned}$$

$$(y_1+5y_2-y_3)\, x_1 + (-y_1+y_2+2y_3)\, x_2 + (-y_1+3y_2+3y_3)\, x_3 + (3y_1+8y_2-5y_3)\, x_4 \leq 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Siccome vogliamo trovare **stime per eccesso** del valore ottimo della f.o. del problema P, $c^T x = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$, per ogni x ammissibile di P, possiamo costruire la seguente **disequazione sintetica (DS)**:

$$4\, x_1 + 1\, x_2 + 5\, x_3 + 3\, x_4 \leq$$

$$(y_1+5y_2-y_3)\, x_1 + (-y_1+y_2+2y_3)\, x_2 + (-y_1+3y_2+3y_3)\, x_3 + (3y_1+8y_2-5y_3)\, x_4 \leq 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Disequazione sintetica

Costruzione del problema DUALE

Moltiplicando la riga i-esima per $y_i \geq 0$, $i=1,2,3$:

- il verso delle disequazioni non cambia;
- le "nuove disequazioni" sono soddisfatte da ogni x ammissibile.

Funzione obiettivo di P:

$$\max 4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y_1}\,(\ \ x_1 - \ \ x_2 \ - \ \ x_3 + 3x_4) &\leq \ \ 1\mathbf{y_1} \\
\mathbf{y_2}\,(5x_1 + \ \ x_2 \ + 3x_3 + 8x_4) &\leq 55\mathbf{y_2} \\
\mathbf{y_3}\,(- x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) &\leq \ \ 3\mathbf{y_3}
\end{aligned}$$

La funzione più a destra nella disequazione sintetica **sarà un upper bound per la f.o.** $c^Tx= 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$, per ogni x ammissibile per il problema P **se** per ciascun x_i, il coefficiente di x_i nella f.o. risulta ≤ del corrispondente coefficiente nel termine intermedio della disequazione.

$$4\,x_1 \qquad + 1\,x_2 \qquad + 5\,x_3 \qquad + 3\,x_4 \leq$$

$$(y_1 + 5y_2 - y_3)\,x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)\,x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)\,x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)\,x_4$$

$$\leq \mathbf{1y_1 + 55y_2 + 3y_3}$$

Disequazione sintetica

Costruzione del problema DUALE

Moltiplicando la riga i-esima per $y_i \geq 0$, $i=1,2,3$:

- il verso delle disequazioni non cambia;
- le "nuove disequazioni" sono soddisfatte da ogni x ammissibile.

Funzione obiettivo di P:

$$\max 4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\begin{aligned}
y_1 (\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) &\leq 1y_1 \\
y_2 (\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) &\leq 55y_2 \\
y_3 (-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) &\leq 3y_3
\end{aligned}$$

La funzione più a destra nella disequazione sintetica **sarà un upper bound per la f.o.** $c^Tx = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$, per ogni x ammissibile per il problema P **se** per ciascun x_i, il coefficiente di x_i nella f.o. risulta ≤ del corrispondente coefficiente nel termine intermedio della disequazione.

$$\begin{aligned}
(\ y_1 + 5y_2 - y_3) &\geq 4 \\
(-y_1 + y_2 + 2y_3) &\geq 1 \\
(-y_1 + 3y_2 + 3y_3) &\geq 5 \\
(\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3) &\geq 3
\end{aligned}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

$$4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq$$

$$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4$$

$$\leq 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Disequazione sintetica

Costruzione del problema DUALE

Moltiplicando la riga i-esima per $y_i \geq 0$, $i=1,2,3$:

- il verso delle disequazioni non cambia;
- le "nuove disequazioni" sono soddisfatte da ogni x ammissibile.

Funzione obiettivo di P:

$$\max\ 4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$
\begin{aligned}
y_1\,(\ \ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) &\leq 1y_1\\
y_2\,(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) &\leq 55y_2\\
y_3\,(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) &\leq 3y_3
\end{aligned}
$$

Queste condizioni garantiscono un upper bound per c^Tx della forma $\mathbf{1y_1 + 55y_2 + 3y_3}$ per ogni x ammissibile e quindi anche per quella ottima.

$$
\left.
\begin{aligned}
(\ \ y_1 + 5y_2 - y_3) &\geq 4\\
(-y_1 + y_2 + 2y_3) &\geq 1\\
(-y_1 + 3y_2 + 3y_3) &\geq 5\\
(3y_1 + 8y_2 - 5y_3) &\geq 3\\
y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 &\geq 0
\end{aligned}
\right]
$$

La funzione più a destra nella disequazione sintetica **sarà un upper bound per la f.o.** $c^Tx = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$, per ogni x ammissibile per il problema P **se** per ciascun x_i, il coefficiente di x_i nella f.o. risulta ≤ del corrispondente coefficiente nel termine intermedio della disequazione.

$$
\begin{aligned}
&4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq\\
&(y_1 + 5y_2 - y_3)\,x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)\,x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)\,x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)\,x_4\\
&\leq 1y_1 + 55y_2 + 3y_3
\end{aligned}
$$

Disequazione sintetica

Costruzione del problema DUALE

Moltiplicando la riga i-esima per $y_i \geq 0$, $i=1,2,3$:
- il verso delle disequazioni non cambia;
- le "nuove disequazioni" sono soddisfatte da ogni x ammissibile.

Funzione obiettivo di P:
$\max\ 4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$

$$\begin{aligned}
y_1 (\ \ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) &\leq 1y_1 \\
y_2 (5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) &\leq 55y_2 \\
y_3 (-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) &\leq 3y_3
\end{aligned}$$

$\min\ 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$

$$\begin{aligned}
(\ \ y_1 + 5y_2 - y_3) &\geq 4 \\
(-y_1 + y_2 + 2y_3) &\geq 1 \\
(-y_1 + 3y_2 + 3y_3) &\geq 5 \\
(3y_1 + 8y_2 - 5y_3) &\geq 3
\end{aligned}$$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$

L'upper bound **più stretto** potrà essere individuato **minimizzando rispetto a y** il termine più a destra della disequazione sintetica.

$$4\,x_1 + 1\,x_2 + 5\,x_3 + 3\,x_4 \leq$$
$$(y_1 + 5y_2 - y_3)\,x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)\,x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)\,x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)\,x_4$$
$$\leq 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Disequazione sintetica

Costruzione del problema DUALE

Moltiplicando la riga i-esima per $y_i \geq 0$, $i=1,2,3$:

- il verso delle disequazioni non cambia;
- le "nuove disequazioni" sono soddisfatte da ogni x ammissibile.

Funzione obiettivo di P:

$$\max 4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\begin{aligned} y_1 (\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) &\leq 1y_1 \\ y_2 (\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) &\leq 55y_2 \\ y_3 (-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) &\leq 3y_3 \end{aligned}$$

$$\min 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

$$\begin{aligned} (\ y_1 + 5y_2 - y_3) &\geq 4 \\ (-y_1 + y_2 + 2y_3) &\geq 1 \\ (-y_1 + 3y_2 + 3y_3) &\geq 5 \\ (\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3) &\geq 3 \end{aligned}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

$$\min 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

$$\begin{aligned} (\ y_1 + 5y_2 - y_3) &\geq 4 \\ (-y_1 + y_2 + 2y_3) &\geq 1 \\ (-y_1 + 3y_2 + 3y_3) &\geq 5 \\ (\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3) &\geq 3 \end{aligned}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

Costruzione del problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\boxed{\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & y^T b \\ & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

P **D**

ESEMPIO 2

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ & 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 3x_4 \le 1 \\ & 5x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 8x_4 \le 55 \\ & -1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \le 3 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & 1y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ & (y_1 + 5y_2 - y_3) \ge 4 \\ & (-y_1 + y_2 + 2y_3) \ge 1 \\ & (-y_1 + 3y_2 + 3y_3) \ge 5 \\ & (3y_1 + 8y_2 - 5y_3) \ge 3 \\ & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

P **D**

Costruzione del problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\min_{x=(x_1,x_2,\dots,x_j,\dots,x_n)} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \max_{y=(y_1,y_2,\dots,y_j,\dots,y_m)} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i=1,2,\dots,m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,2,\dots,n \qquad\qquad y_i \geq 0 \qquad i=1,2,\dots,m$$

P (**n** variabili, **m** vincoli) — **D** (**m** variabili, **n** vincoli)

Proprietà

Le variabili di **D** e sono in **corrispondenza biunivoca** con i vincoli (eq. o diseq.) di P (si introduce un moltiplicatore $y_i \geq 0$ per ogni vincolo i=1,...,m di P).

Le variabili di **P** sono in **corrispondenza biunivoca** con i vincoli (eq. o diseq.) di D (ogni vincolo di D è la relazione tra il coefficiente di una variabile x_j di P e il corrispondente bound espresso in funzione delle y nella DS).

NOTA 1: Le **disequazioni** sono associate a **variabili non negative**.

Costruzione del problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\min_{x=(x_1,x_2,\dots,x_j,\dots,x_n)} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \max_{y=(y_1,y_2,\dots,y_j,\dots,y_m)} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

equazioni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i=1,2,\dots,m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$x_j \ge 0 \quad j=1,2,\dots,n \qquad\qquad y_i \text{ libera} \quad i=1,2,\dots,m$$

P (**n** variabili, **m** vincoli) **D** (**m** variabili, **n** vincoli)

Proprietà

Le variabili di **D** e sono in **corrispondenza biunivoca** con i vincoli (eq. o diseq.) di P (si introduce un moltiplicatore $y_i \geq 0$ per ogni vincolo i=1,…,m di P).

Le variabili di **P** sono in **corrispondenza biunivoca** con i vincoli (eq. o diseq.) di D (ogni vincolo di D è la relazione tra il coefficiente di una variabile x_j di P e il corrispondente bound espresso in funzione delle y nella DS).

NOTA 1: Le **disequazioni** sono associate a **variabili non negative**.

NOTA 2: **Le equazioni sono associate a variabili libere.**

Costruzione del problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\min_{x=(x_1,x_2,\dots,x_j,\dots,x_n)} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

equazioni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

P (**n** variabili, **m** vincoli)

$\Leftrightarrow$

$$\max_{y=(y_1,y_2,\dots,y_j,\dots,y_m)} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$y_i \ \text{libera} \qquad i = 1,2,\dots,m$$

D (**m** variabili, **n** vincoli)

Proprietà

Le variabili di **D** e

di P (si introduce

Le variabili di **P** s

D (ogni vincolo di

corrispondente b

NOTA 1: Le **dise**

NOTA 2: Le **equa**

Moltiplicando la riga i-esima per $y_i \geq 0$, i=1,2,3:

- il verso delle disequazioni non cambia;
- le "nuove disequazioni" sono soddisfatte da ogni x ammissibile.

Sommando le disequazioni così ottenute possiamo costruire la seguente disequazione "implicata" quando $y \geq 0$:

Nel caso di equazioni, non occorre imporre ai moltiplicatori y il vincolo di non negatività

$$\begin{aligned} y_1\,(\ \ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) &\leq 1y_1 \\ y_2\,(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) &\leq 55y_2 \\ y_3\,(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) &\leq 3y_3 \end{aligned}$$

$$y_1(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) + y_2(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) + y_3(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4)$$

$$\leq 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Costruzione del problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\min_{x=(x_1,x_2,\dots,x_j,\dots,x_n)} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,2,\dots,m$$

var. libere

$$x_j \ \text{libera} \qquad j = 1,2,\dots,n$$

P (**n** variabili, **m** vincoli)

$$\max_{y=(y_1,y_2,\dots,y_j,\dots,y_m)} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$y_i \ge 0 \qquad i = 1,2,\dots,m$$

D (**m** variabili, **n** vincoli)

Proprietà

Le variabili di **D** e sono in **corrispondenza biunivoca** con i vincoli (eq. o diseq.) di P (si introduce un moltiplicatore $y_i \geq 0$ per ogni vincolo i=1,…,m di P).

Le variabili di **P** sono in **corrispondenza biunivoca** con i vincoli (eq. o diseq.) di D (ogni vincolo di D corrisponde al coefficiente di una variabile x_j di P nel bound fornito dalla DS).

NOTA 1: Le **disequazioni** sono associate a **variabili non negative**.

NOTA 2: **Le equazioni sono associate a variabili libere.**

Costruzione del problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\min_{x=(x_1,x_2,\dots,x_j,\dots,x_n)} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,2,\dots,m$$

var. libere

x_j libera $\quad j =$

P (**n** variabili, **m** vinc

$$\max_{y=(y_1,y_2,\dots,y_j,\dots,y_m)} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad j = 1,2,\dots,n$$

Proprietà

Le variabili di **D** e sono in c
di P (si introduce un moltip

Le variabili di **P** sono in co
D (ogni vincolo di D corrisp
fornito dalla DS).

NOTA 1: Le **disequazioni**

NOTA 2: **Le equazioni so**

Moltiplicando la riga i-esima per $y_i \ge 0$, $i=1,2,3$:

- il verso delle disequazioni non cambia;

Funzione obiettivo di P:
$\max \mathbf{4}x_1 + \mathbf{1}x_2 + \mathbf{5}x_3 + \mathbf{3}x_4$

$x_3 + 3x_4) \le \quad 1\mathbf{y_1}$
$3x_3 + 8x_4) \le 55\mathbf{y_2}$
$3x_3 - 5x_4) \le \quad 3\mathbf{y_3}$

Nel caso di x_j non vincolata nel segno, la disequazione sintetica può essere garantita solo imponendo una equazione in corrispondenza del coefficiente di x_j

$\min 1y_1 + 55y_2 + 3y_3$

$(\ \ y_1 + 5y_2 - y_3) \ge 4$
$(-y_1 + y_2 + 2y_3) \ge 1$
$(-y_1 + 3y_2 + 3y_3) \ge 5$
$(3y_1 + 8y_2 - 5y_3) \ge 3$

$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$

L'**upper bound più stretto** potrà essere individuato **minimizzando rispetto a y≥0** il termine più a destra della disequazione sintetica.

$$\begin{aligned}&\mathbf{4}\,x_1 + \mathbf{1}\,x_2 + \mathbf{5}\,x_3 + \mathbf{3}\,x_4 \le \\ &(y_1 + 5y_2 - y_3)\,x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)\,x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)\,x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)\,x_4 \\ &\le \mathbf{1y_1 + 55y_2 + 3y_3}\end{aligned}$$

Costruzione del problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\min c^T x \quad Ax \geq b \quad x \geq 0$$

$$\max y^T b \quad A^T y \leq c \quad y \geq 0$$

	PRIMALE	DUALE	
	$\min c^T x$	$\max y^T b$	
VINCOLI	$= b_i \quad i \in \mathbf{I}$	y_i libera $i \in \mathbf{I}$	**VARIABILI**
	$\geq b_i \quad i \in \mathbf{J}$	$y_i \geq 0 \quad i \in \mathbf{J}$	
VARIABILI	$x_j \geq 0 \quad j \in \mathbf{K}$	$\leq c_i \quad j \in \mathbf{K}$	**VINCOLI**
	x_j libera $j \in \mathbf{H}$	$= c_i \quad j \in \mathbf{H}$	

Proprietà

Le variabili di **D** sono in corrispondenza biunivoca con i vincoli (eq. o diseq.) di P

Le variabili di **P** sono in corrispondenza biunivoca con i vincoli (eq. o diseq.) di D.

Le disequazioni sono associate a variabili non negative.

Le equazioni sono associate a variabili libere.

Costruzione del problema DUALE

Coppia P-D canonica

$$\min c^T x \quad Ax \geq b \quad x \geq 0$$

$$\max y^T b \quad A^T y \leq c \quad y \geq 0$$

	PRIMALE	DUALE	
	$\min c^T x$	$\max y^T b$	
VINCOLI	$= b_i \quad i \in \mathbf{I}$	y_i libera $i \in \mathbf{I}$	**VARIABILI**
	$\geq b_i \quad i \in \mathbf{J}$	$y_i \geq 0 \quad i \in \mathbf{J}$	
VARIABILI	$x_j \geq 0 \quad j \in \mathbf{K}$	$\leq c_i \quad j \in \mathbf{K}$	**VINCOLI**
	x_j libera $j \in \mathbf{H}$	$= c_i \quad j \in \mathbf{H}$	

Osservazioni

La costruzione vista illustra il forte legame che esiste tra i due problemi della coppia primale-duale canonica.

Questa relazione forte è alla base di importanti teoremi che conducono alla formulazione di **condizioni di ottimalità** per P e per D.

Costruzione del problema DUALE

ESEMPIO

Primale in forma arbitraria

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_1 - 5x_2 + x_3 & & \\
 & -x_1 + 4x_2 - 2x_3 & \geq & 1 \\
 & 2x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
 & x_2 + x_3 & = & 8 \\
 & x_1, x_3 \geq 0, & x_2 \text{ libera} &
\end{array}
$$

Coppia P-D canonica

P		D
$\min c^T x$	$\Leftrightarrow$	$\max y^T b$
$Ax \geq b$		$A^T y \leq c$
$x \geq 0$		$y \geq 0$

Per costruire il duale di un problema primale **in forma arbitraria**, occorre:

- **prima** ricondurre il primale alla forma equivalente P della coppia canonica;
- **successivamente** formulare il duale D della coppia canonica.

P

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_1 - 5x_2 + x_3 & & \\
 & -x_1 + 4x_2 - 2x_3 & \geq & 1 \\
 & -2x_1 - x_2 & \geq & -5 \\
 & x_2 + x_3 & = & 8 \\
 & x_1, x_3 \geq 0, & x_2 \text{ libera} &
\end{array}
$$

DUALE $\Rightarrow$

D

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & y_1 - 5y_2 + 8x_3 & & \\
 & -y_1 - 2y_2 & \leq & 2 \\
 & 4y_1 - y_2 + y_3 & = & -5 \\
 & -2y_1 + y_3 & \leq & 1 \\
 & y_3 \text{ libera}, & y_1, y_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Costruzione del problema DUALE

ESEMPIO

Primale in forma arbitraria

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 - 5x_2 + x_3 \\ & -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1, x_3 \geq 0,\ x_2 \text{ libera} \end{aligned}$$

Coppia P-D canonica

P		D
$\min c^T x$	$\Leftrightarrow$	$\max y^T b$
$Ax \geq b$		$A^T y \leq c$
$x \geq 0$		$y \geq 0$

Per costruire il duale di un problema primale **in forma arbitraria**, conviene:

- **prima** ricondurre il primale alla forma equivalente P della coppia canonica;
- **successivamente** formulare il duale D della coppia canonica.

P

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 - 5x_2 + x_3 \\ & -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ & -2x_1 - x_2 \geq -5 \\ & x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1, x_3 \geq 0,\ x_2 \text{ libera} \end{aligned}$$

D

$$\begin{aligned} \max\ & y_1 - 5y_2 + 8x_3 \\ & -y_1 - 2y_2 \leq 2 \\ & 4y_1 - y_2 + y_3 = -5 \\ & -2y_1 + y_3 \leq 1 \\ & y_3 \text{ libera},\ y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Teoria della dualità

Teorema (Dualità in forma debole)

S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D. Comunque prese due soluzioni x e y, rispettivamente ammissibili per P e per D, si ha:

$\min c^T x$	$\Leftrightarrow$	$\max y^T b$
$Ax \geq b$		$A^T y \leq c$
$x \geq 0$		$y \geq 0$

$$y^T b \leq c^T x$$

Dim. Consideriamo x e y ammissibili per P e per D (generiche).

x ammissibile per P	$\longrightarrow$	$Ax \geq b$, $x \geq 0$	$\mathbf{y}^T A x \geq \mathbf{y}^T b$
y ammissibile per D	$\longrightarrow$	$A^T y \leq c$, $y \geq 0$	$y^T A\, \mathbf{x} \leq c^T \mathbf{x}$

$$\Rightarrow \quad y^T b \leq y^T A\, x \leq c^T x$$

Teoria della dualità

Teorema (Dualità in forma debole)

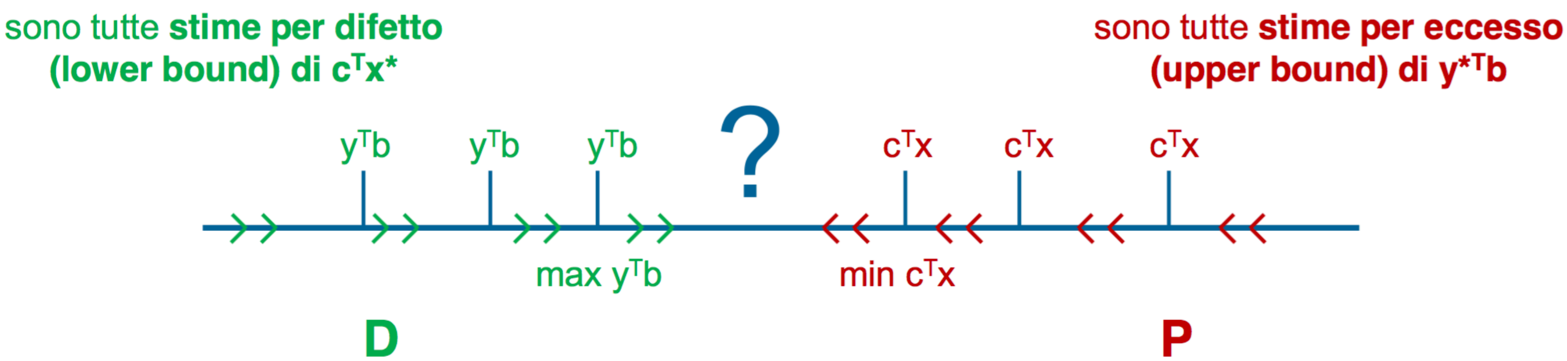
S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D. Comunque prese due soluzioni x e y, rispettivamente ammissibili per P e per D, si ha:

$$\begin{array}{lcl} \min c^Tx & & \max y^Tb \\ Ax \geq b & \Longleftrightarrow & A^Ty \leq c \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

$$y^Tb \leq c^Tx$$

Conseguenza

Una qualsiasi soluzione **ammissibile** y di D genera un **lower bound** (**finito**) $\mathbf{y^Tb}$ per la f.o. di P e, viceversa, una qualsiasi soluzione ammissibile x di P genera un **upper bound** (finito) $\mathbf{c^Tx}$ per la f.o. di D.



Teoria della dualità

Teorema (Dualità in forma debole)

S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D. Comunque prese due soluzioni x e y, rispettivamente ammissibili per P e per D, si ha:

$$\begin{array}{lcl} \min c^T x & \Longleftrightarrow & \max y^T b \\ Ax \geq b & & A^T y \leq c \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

$$y^T b \leq c^T x$$

Conseguenza
Una qualsiasi soluzione **ammissibile** y di D genera un **lower bound** (**finito**) $\mathbf{y^T b}$ per la f.o. di P e, viceversa, una qualsiasi soluzione ammissibile x di P genera un **upper bound** (finito) $\mathbf{c^T x}$ per la f.o. di D.

$\Rightarrow$ Corollario 1 e Corollario 2

Teoria della dualità

Corollario 1

i) Se P è illimitato allora il problema D è **non ammissibile**.

ii) Se D è illimitato, allora il problema P è **non ammissibile**.

Dualità in forma debole

$$y^T b \le c^T x$$

per ogni x amm. per P
y amm. per D

Dim. (P.A.) **i)** Supponiamo P illimitato e D ammissibile. Se y è una soluzione ammissibile di D, si ha:

$$\xrightarrow{\text{Dualità in forma debole}} \quad y^T b \le c^T x \quad \text{per ogni x ammissibile di P}$$

Pertanto $y^T b$ è un lower bound sul valore ottimo della f.o. di P che quindi risulta necessariamente limitato (contraddizione).

La dimostrazione del punto **ii)** è analoga.

Teoria della dualità

Corollario 1

i) Se P è illimitato allora il problema D è **non ammissibile**.

ii) Se D è illimitato, allora il problema P è **non ammissibile**.

Dualità in forma debole

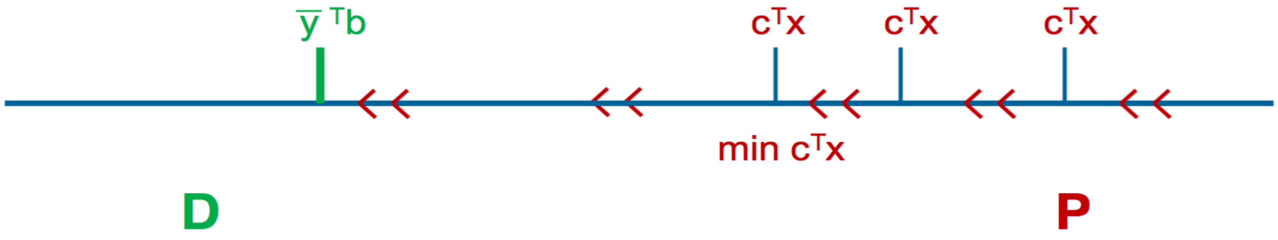
$y^T b \leq c^T x$

per ogni x amm. per P

y amm. per D

Sotto l'ipotesi assurda che D ammetta una soluzione ammissibile $\overline{y}$ si avrebbe un **valore finito** di $\overline{y}^T b$ che per il teorema di dualità debole costituirebbe un lower bound per $c^T x$.

sono tutte **stime per difetto (lower bound) di $c^T x^*$**



Teoria della dualità

Corollario 2 (Cond. suff. di ottimalità)

S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D.
Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per P e $\bar{y}$ una soluzione ammissibile per D.

Se $\bar{y}^T b = c^T \bar{x}$, allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime rispettivamente per P e per D.

$$\begin{array}{lcl} \min c^T x & & \max y^T b \\ Ax \geq b & \Longleftrightarrow & A^T y \leq c \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Dualità in forma debole

$y^T b \leq c^T x$
per ogni x amm. per P
e y amm. per D

Dim. Si ha:

$$\xrightarrow{\text{Dualità in forma debole}} \quad \bar{y}^T b \leq c^T x \quad \text{per ogni } x \text{ ammissibile di P}$$

cioè $\bar{y}^T b$ è un lower bound per il valore della f.o. di P.

⇒ Allora $\bar{x}$ è ottima per P perchè raggiunge il lower bound.

Teoria della dualità

Corollario 2 (Cond. suff. di ottimalità)

S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D.
Sia $\overline{x}$ una soluzione ammissibile per P e $\overline{y}$ una soluzione ammissibile per D.

Se $\overline{y}^Tb = c^T\overline{x}$, allora $\overline{x}$ e $\overline{y}$ sono ottime rispettivamente per P e per D.

$$\begin{array}{lcl} \min c^Tx & & \max y^Tb \\ Ax \geq b & \Leftrightarrow & A^Ty \leq c \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Dualità in forma debole

$y^Tb \leq c^Tx$
per ogni x amm. per P
e y amm. per D

Dim. Si ha:

$$\xrightarrow{\text{Dualità in forma debole}} \quad y^Tb \leq c^T\overline{x} \text{ per ogni } y \text{ ammissibile di D}$$

cioè $c^T\overline{x}$ è un upper bound per il valore della f.o. di D.

Allora $\overline{y}$ è ottima per D perchè raggiunge l'upper bound.

Teoria della dualità

Corollario 2 (Cond. suff. di ottimalità)

S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D.
Sia $\overline{x}$ una soluzione ammissibile per P e $\overline{y}$ una soluzione ammissibile per D.

Se $\overline{y}^T b = c^T \overline{x}$, allora $\overline{x}$ e $\overline{y}$ sono ottime rispettivamente per P e per D.

$$\begin{array}{lcl} \min c^T x & & \max y^T b \\ Ax \geq b & \Longleftrightarrow & A^T y \leq c \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Dualità in forma debole

$y^T b \leq c^T x$
per ogni x amm. per P
e y amm. per D

Dim. Si ha:

$\xrightarrow{\text{Dualità in forma debole}}$ $\overline{y}^T b \leq c^T x$ per ogni x ammissibile di P

$\xrightarrow{\text{Dualità in forma debole}}$ $y^T b \leq c^T \overline{x}$ per ogni y ammissibile di D

cioè $\overline{y}^T b$ è un lower bound per il valore della f.o. di P e $c^T \overline{x}$ è un upper bound per il valore della f.o. di D.

$\Rightarrow$ $\overline{x}$ e $\overline{y}$ sono ottime per P e D rispettivamente perchè, sotto le ipotesi del corollario, il valore delle f.o. corrispondenti risulta ottimo (min e max risp.).

Teoria della dualità

Teorema (Dualità in forma debole)

S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D. Comunque prese due soluzioni x e y, rispettivamente ammissibili per P e per D, si ha:

$$\begin{array}{lll} \min c^T x & \Leftrightarrow & \max y^T b \\ Ax \geq b & & A^T y \leq c \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

$$y^T b \leq c^T x$$

Corollario 1

i) Se P è illimitato allora il problema D è non ammissibile.

ii) Se D è illimitato, allora il problema P è non ammissibile.

Corollario 2 (Cond. suff. di ottimalità)

S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D.
Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per P e $\bar{y}$ una soluzione ammissibile per D.

Se $\bar{y}^T b = c^T \bar{x}$, **allora** $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime rispettivamente per P e per D.

Teoria della dualità

Teorema (D

S.P.I.G., con
duale canon
due soluzior
ammissibili p

		D	
		AMMISSIBILE	**NON AMMISSIBILE**
P	**AMMISSIBILE**	P e D ottimi finiti e **coincidenti**	P illimitato
	NON AMMISSIBILE	D illimitato	P e D non hanno soluzioni

Corollario 1

i) Se P è illimitato allora il problema D è non ammissibile.

ii) Se D è illimitato, allora il problema P è non ammissibile.

Corollario 2 (Cond. suff. di ottimalità)

S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D.
Sia $\overline{x}$ una soluzione ammissibile per P e $\overline{y}$ una soluzione ammissibile per D.

Se $\overline{y}^T b = c^T \overline{x}$, **allora** $\overline{x}$ e $\overline{y}$ sono ottime rispettivamente per P e per D.

Teoria della dualità

Teorema (Dualità in forma forte)

S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D e supponiamo che sia P che D siano ammissibili.

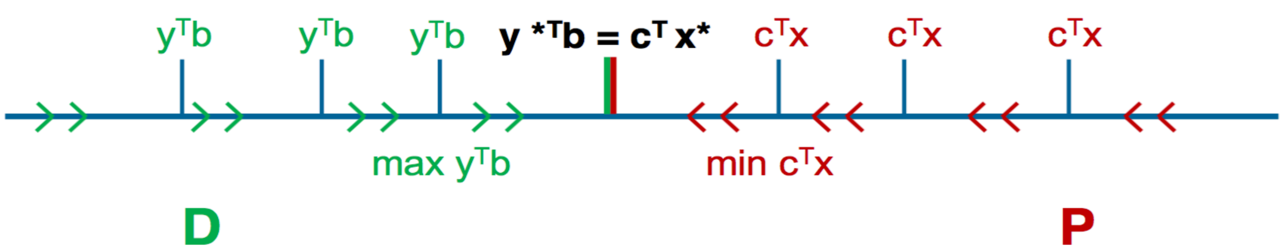
$$\min c^T x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \max y^T b$$
$$Ax \geq b \qquad\qquad\qquad A^T y \leq c$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad\qquad y \geq 0$$

Allora sia P che D hanno ottimo finito, x^* e y^*, e si ha:

$$y^{*T} b = c^T x^*$$

Osservazioni

- Si tratta di un risultato di importanza centrale nella PL che stabilisce una relazione forte tra P e D perchè, sotto le ipotesi del teorema, i valori ottimi di P e D coincidono.



Teoria della dualità

Teorema (Dualità in forma forte)

S.P.I.G., consideriamo la coppia primale duale canonica, P-D e supponiamo che sia P che D siano ammissibili.

$$\begin{array}{lcl} \min c^T x & & \max y^T b \\ Ax \geq b & \Leftrightarrow & A^T y \leq c \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Allora sia P che D hanno ottimo finito, x^* e y^*, e si ha:

$$y^{*T} b = c^T x^*$$

Osservazioni

- Si tratta di un risultato di importanza centrale nella PL che stabilisce una relazione forte tra P e D perchè, sotto le ipotesi del teorema, i valori ottimi di P e D coincidono.
- Il risultato del Teorema di dualità in forma forte permette di dimostrare condizioni di ottimalità per P e D che sono utili per la verifica dell'ottimalità di una soluzione e spesso utilizzate per definire condizioni di arresto in algoritmi di ottimizzazione per la PL.

Teoria della dualità

Teorema
(Condizioni degli *scarti complementari*, di *ortogonalità*, di *equilibrio*)

$$\min c^T x \qquad Ax \geq b \qquad x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \max y^T b \qquad A^T y \leq c \qquad y \geq 0$$

Sia x una soluzione ammissibile per P e y una soluzione ammissibile per D. Allora si ha:

Condizione di ortogonalità tra i vettori $y_{m,1}$ e $(Ax - b)_{m,1}$ e tra $x_{n,1}$ e $(c - A^T y)_{n,1}$

x è ottima per P e y è ottima per D $\Longleftrightarrow$

$$y^T(Ax - b) = 0$$
$$(c - A^T y)^T x = 0 \qquad \textbf{(CO)}$$

Teoria della dualità

Teorema
(Condizioni degli *scarti complementari*, di *ortogonalità*, di *equilibrio*)

$$\min c^T x \quad \Longleftrightarrow \quad \max y^T b$$
$$Ax \geq b \qquad\qquad A^T y \leq c$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

Sia x una soluzione ammissibile per P e y una soluzione ammissibile per D.
Allora si ha:

Condizione di ortogonalità tra i vettori $y_{m,1}$ e $(Ax - b)_{m,1}$ e tra $x_{n,1}$ e $(c - A^T y)_{n,1}$

x è ottima per P e y è ottima per D $\Longleftrightarrow$

$$y^T(Ax - b) = 0$$
$$(c - A^T y)^T x = 0$$

(CO)

$s_{m,1} = (Ax - b)_{m,1}$ è il vettore delle m variabili **slack** del problema P

Condizione degli scarti complementari

$t_{n,1} = (c - A^T y)_{n,1}$ è il vettore delle n variabili **slack** del problema D

Teoria della dualità

Teorema
Sia x una soluzione ammissibile per P e y una soluzione ammissibile per D. Allora:

$$\begin{array}{ll} \min c^T x & \\ Ax \geq b & \\ x \geq 0 & \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \max y^T b \\ A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{array}$$

x è ottima per P e y è ottima per D $\Leftrightarrow$ $y^T(Ax - b) = 0$, $(c - A^T y)^T x = 0$ **(CO)**

Dim. (sufficienza)
HP: valgono le (CO) $\longrightarrow$ **TS:** x ottima per P e y ottima per D

(CO) $y^T(Ax - b) = 0$, $(c - A^T y)^T x = 0$ $\Leftrightarrow$ $y^T A x = y^T b$, $c^T x = y^T A x$ $\rightarrow$ $y^T b = c^T x$

Cond. suff. di ottimalità $\rightarrow$ **x ottima per P e y ottima per D**

Teoria della dualità

Teorema
Sia x una soluzione ammissibile per P e y una soluzione ammissibile per D. Allora:

$$\min c^T x \quad Ax \geq b \quad x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \max y^T b \quad A^T y \leq c \quad y \geq 0$$

x è ottima per P e y è ottima per D $\Longleftrightarrow$

$$y^T(Ax - b) = 0$$
$$(c - A^T y)^T x = 0$$

(CO)

Dim. (necessità)

HP: x e y ottime $\longrightarrow$ **TS:** valgono le (CO)

x ottima per P
y ottima per D

Dualità forte $\longrightarrow$ $y^T b = c^T x$

Dualità debole $\longrightarrow$ $y^T b \leq y^T A x \leq c^T x$

$$\mathbf{y^T b} = y^T A x = \mathbf{c^T x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y^T(Ax - b) = 0 \\ (c - A^T y)^T x = 0 \end{array}}$$

(CO)

Teoria della dualità

Teorema

Sia x una soluzione ammissibile per P e y una soluzione ammissibile per D. Allora:

$$\begin{array}{l} \min c^T x \\ \quad Ax \geq b \\ \quad x \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \max y^T b \\ \quad A^T y \leq c \\ \quad y \geq 0 \end{array}$$

x è ottima per P e
y è ottima per D

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y^T(Ax - b) = 0 \\ (c - A^T y)^T x = 0 \end{array} \quad \textbf{(CO)}$$

$s_{m,1} = (Ax - b)_{m,1}$ è il vettore delle m variabili slack del problema P

$t_{n,1} = (c - A^T y)_{n,1}$ è il vettore delle n variabili slack del problema D

Teoria della dualità

Teorema
Sia x una soluzione ammissibile per P e y una soluzione ammissibile per D. Allora:

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & y^T b \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

x è ottima per P e y è ottima per D $\Leftrightarrow$

$$y^T(Ax - b) = 0$$
$$(c - A^T y)^T x = 0$$

(CO)

Formulazioni equivalenti

$s_{m,1} = (Ax - b)_{m,1}$
$t_{n,1} = (c - A^T y)_{n,1}$
Si ottiene una formulazione alternativa delle **2 condizioni** (CO): $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y^T s = 0 \\ t^T x = 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} y_1 s_1 + \ldots + y_i s_i + \ldots + y_m s_m = 0 \\ x_1 t_1 + \ldots + x_j t_j + \ldots + x_n t_n = 0 \end{cases}$$

(CO')

$s_{m,1} = (s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_m)$, $\quad s_i \geq 0\ \forall i$
$t_{n,1} = (t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_n)$, $\quad t_j \geq 0\ \forall j$
Si ottiene un'altra formulazione delle condizioni (CO), ma che consiste in **n+m condizioni**: $\Rightarrow$

$$y_i s_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$
$$t_j x_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

(CO'')

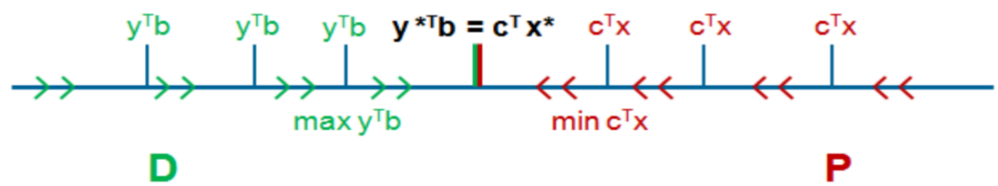
Teoria della dualità

Teorema
(PL e sistemi lineari)

$$\min c^T x \quad Ax \ge b \quad x \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \max y^T b \quad A^T y \le c \quad y \ge 0$$

Sia $\overline{x}$ ammissibile per P e $\overline{y}$ ammissibile per D e consideriamo il seguente sistema S:

$$\begin{cases} c^T x \le y^T b \\ Ax \ge b \\ x \ge 0 \\ A^T y \le c \\ y \ge 0 \end{cases} \qquad (S)$$



i) Se ($\overline{x}$, $\overline{y}$) è soluzione del sistema (S) $\longrightarrow$ $\overline{x}$ è ottima per P, $\overline{y}$ è ottima per D.

ii) Se $\overline{x}$ è una soluzione ottima di P e $\overline{y}$ è una soluzione ottima per D $\longrightarrow$ ($\overline{x}$, $\overline{y}$) è una soluzione di (S).

Teoria della dualità

Teorema
(PL e sistemi lineari)

Sia $\bar{x}$ ammissibile per P e $\bar{y}$ ammissibile per D e consideriamo il seguente sistema S:

$$
\begin{cases}
c^T x \leq y^T b \\
Ax \geq b \\
x \geq 0 \\
A^T y \leq c \\
y \geq 0
\end{cases}
\qquad (S)
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\min c^T x & & \max y^T b \\
Ax \geq b & \Longleftrightarrow & A^T y \leq c \\
x \geq 0 & & y \geq 0
\end{array}
$$

Dim. (sufficienza)

i) Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è soluzione del sistema (S), essa soddisfa in particolare la condizione $c^T \bar{x} \leq \bar{y}^T b$.

Inoltre, siccome x e y sono ammissibili, vale il terorema di dualità in forma debole $\bar{y}^T b \leq c^T \bar{x}$

$$\Rightarrow \bar{y}^T b = c^T \bar{x}$$

Cond. suff. di ottimalità $\rightarrow$ $\bar{x}$ è ottima per P, $\bar{y}$ è ottima per D. ■

Teoria della dualità

Teorema
(PL e sistemi lineari)

$$\min c^T x \quad Ax \geq b \quad x \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \max y^T b \quad A^T y \leq c \quad y \geq 0$$

Sia $\overline{x}$ ammissibile per P e $\overline{y}$ ammissibile per D e consideriamo il seguente sistema S:

$$\begin{cases} c^T x \leq y^T b \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (S)$$

Dim. (necessità)

ii) Se $\overline{x}$ è una soluzione ottima di P e $\overline{y}$ è una soluzione ottima per D,

esse sono ammissibili e quindi le condizioni rosse e verdi in (S) sono tutte soddisfatte.

Per il teorema di dualità in forma forte si ha $\overline{y}^T b = c^T \overline{x}$ e quindi anche la condizione blu è soddisfatta.

$\rightarrow$ ($\overline{x}$, $\overline{y}$) è una soluzione di (S). ∎