

Задачи на «отлично» для подготовки к экзамену

1. Используя свойства определителя доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a).$$

2. Вычислить определитель n -го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Показать, что для всякой обратимой матрицы A , перестановочной с матрицей B , обратная к A матрица будет так же перестановочна с матрицей B (т.е. показать, что из равенства $AB = BA$ следует равенство $A^{-1}B = BA^{-1}$).

4. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} ax_1 - 3bx_2 + cx_3 = 0 \\ 3ax_1 - 6bx_2 + 5cx_3 = 2abc \\ 5ax_1 - 4bx_2 + 2cx_3 = 3abc \end{cases}$$

5. Чему равен ранг матрицы при разных значениях параметра λ :

а) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \lambda \end{pmatrix}$

6. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 2+3i \\ i & 1 & 2 \\ 1-i & -1-i & 3-2i \\ 4 & -4i & 10+2i \end{pmatrix}$.

7. Выяснить, образуют ли строки матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

фундаментальную систему решений для системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

8. Исследовать на совместимость и найти общее решение системы, в зависимости от значения параметра λ :

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1 - \lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (1 - \lambda)x_3 = 1 \end{cases}$$

9. Смешанное произведение векторов. Доказать тождество:

$$(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) = 3\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

10. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.
11. Даны вершины треугольника $A(7, 1, 6)$, $B(1, -3, 4)$ и $C(9, -3, 5)$. Составить канонические и параметрические уравнения высоты, проведенной из вершины A .
12. Даны вершины треугольника $A(2, 3, -2)$, $B(4, -1, 4)$ и $C(2, -3, 2)$. Составить канонические уравнения высоты, проведенной из вершины A .
13. Даны вершины треугольника $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы, проведенной из вершины B .
14. При каком значении параметра λ плоскость $5x - 3y + \lambda z + 1 = 0$ будет параллельна прямой $\begin{cases} x - 4z - 1 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$
15. Выяснить взаимное расположение прямых:
- $$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{5}.$$
- Найти расстояние между данными прямыми, если они не пересекаются.
16. Выяснить взаимное расположение прямых l_1 и l_2 :
- $$l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2} \quad l_2: \begin{cases} x - y - z + 1 = 0, \\ x + y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$
- Найти расстояние между данными прямыми, если они не пересекаются.
17. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-3}$ на плоскость, заданную уравнением $2x - 3y + z - 4 = 0$.

18. Составить уравнения прямой, симметричной прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$ относительно плоскости $5x - y + z - 4 = 0$.
19. Определить угол между прямой $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2 \\ z = -t - 1 \end{cases}$ и осью OZ . Как расположена данная прямая относительно системы координат?
20. Дана гипербола: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$. Написать уравнение эллипса, вершины которого находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данной гиперболы. Сделать чертёж обеих кривых.
21. Составить уравнение гиперболы, фокусы и вершины которой находятся соответственно в вершинах и фокусах эллипса, заданного двумя своими вершинами: $A(-5; 0)$ и $B(0; 4)$. Изобразить обе кривые.