Гущина Елена Николаевна

# Линейные пространства

**Определение:** Множество элементов $V$ называется линейным векторным пространством, если выполняются следующие условия:

1) В $V$ введены две операции: сложение и умножение на скаляр – так, что $V$ замкнуто соответственно этих операций:
   1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V : \vec{x} + \vec{y} \in V$
   2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \alpha\vec{x} \in V$
2) Причем эти операции обладают следующими свойствами (Аксиомы)
   1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
   2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
   3. $\exists \vec{o} \in V : \forall \vec{x} \in V : \vec{x} + \vec{o} = \vec{x}$ (нулевой элемент)
   4. $\forall \vec{x} \in V \exists (-\vec{x}) \in V : \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{o}$ (противоположный элемент)
   5. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
   6. $\lambda \cdot (\mu \vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$
   7. $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
   8. $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$

## Линейная зависимость и независимость. Базис и размерность

**Определение линейной зависимости:** Система векторов $\{\vec{a}_1 ... \vec{a}_n\} \in V$ называется линейно зависимой, если найдутся такие числа $\lambda_1 ... \lambda_n$, не равные одновременно нулю и такие, что $\lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = 0$.

**Определение линейной независимости:** Система векторов $\{\vec{a}_1 ... \vec{a}_n\} \in V$ называется линейно независимой, если для любых чисел $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ линейная комбинация равна ноль-вектору: $\lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = 0$ тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю: $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

Система $\{\vec{e}_1 ... \vec{e}_n\}$ называется **полной**, если эта система:

1) линейно независимая и
2) $\forall \vec{x} \in V$ система $\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n, \vec{x}\}$ – линейно зависимая.

**Базис –** полная упорядоченная система векторов.

<u>Координаты произвольного вектора</u> $\vec{x} \in V$ <u>в базисе</u> $B = \{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$ – это разложение вектора по базисным векторам на коэффициенты $x = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n = (x_1 ... x_n)$.

<u>Размерность пространства</u> $\dim V$:

1) Максимально возможное количество линейно независимых векторов
   или
2) Количество векторов в базисе

Если $\dim V = n$, то любые $n$ линейно независимых векторов образуют базис пространства.

✔ Как проверить, что система из $n$ векторов в пространстве $V_n$ заданных своими координатами в каком-либо базисе образуют базис? <u>Ответ:</u> надо записать координаты в матрицу (по столбцам) и найти определитель:

1) $\det A \neq 0 \Rightarrow$ векторы ЛНЗ и образуют базис,
2) $\det A = 0 \Rightarrow$ векторы ЛЗ и не образуют базис.

## Матрица перехода от базиса $B_1$ к базису $B_2$

Пусть даны два базиса: $B_1$ и $B_2$. Матрицей перехода от базиса $B_1$ к базису $B_2$ называется матрица, столбцами которой являются координаты векторов базиса $B_2$ в базисе $B_1$:

$$P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} \text{"старые" координаты} \\ \text{"новых" базисных векторов} \\ \text{записываем по столбцам} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{координаты вектора} \\ B_2 \text{ в базисе } B_1 \\ \text{по столбцам} \end{pmatrix}.$$

**Формула связи координат вектора в разных базисах**. Если $\vec{x} = (x_1 \dots x_n)$ в базисе $B_1$, то координаты этого вектора $\vec{x} = (x'_1 \dots x'_n)$ в базисе $B_2$ выражаются по формуле:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{B_2} = P^{-1}_{B_1 \to B_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}_{B_1}.$$

## Линейные подпространства

**Определение:** Подмножество $L$ пространства $V_n$ называется линейным подпространством $V_n$, если $L$ само является пространством.

**Критерий**: Подмножество $L$ пространства $V_n$ является подпространством $\Leftrightarrow L$ замкнуто относительно сложения векторов и умножения их на число:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L : \vec{x} + \vec{y} \in L$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} :\ \alpha \vec{x} \in L$

**Линейная оболочка** системы векторов $\left\{\vec{a}_1 ... \vec{a}_n\right\}$ – это множество всех линейных комбинаций этих векторов:

$$L\{\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n\} = \{\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n;\ \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Линейная оболочка системы векторов $S \in V_n$ является подпространством $V_n$.

Размерность линейной оболочки = ранг системы векторов = ранг матрицы из координат этих векторов.

Линейной комбинацией системы векторов $\left\{\vec{a}_1 ... \vec{a}_n\right\} \in V_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ называется вектор:

$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n \in V_n$

### Примеры линейных векторных пространств:

$V_3$ – пространство геометрических векторов.

Канонический базис $V_3 : \left\{\vec{\mathrm{i}}, \vec{j}, \vec{k}\right\}; \dim V_3 = 3$.

Координаты произвольного вектора $\vec{x} \in V_3$ в каноническом базисе:

$\vec{x} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = (x, y, z)$. Координаты базисных векторов в этом же базисе:

$\vec{\imath} = 1 \cdot \vec{\imath} + 0 \cdot \vec{\jmath} + 0 \cdot \vec{k} = (1; 0; 0)$

$\vec{k} = 0 \cdot \vec{\imath} + 1 \cdot \vec{\jmath} + 0 \cdot \vec{k} = (0; 1; 0)$

$\vec{k} = 0 \cdot \vec{\imath} + 0 \cdot \vec{\jmath} + 1 \cdot \vec{k} = (0; 0; 1)$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1 \dots x_n); x \in \mathbb{R}\}$ арифметическое $n$-мерное пространство; состоит из упорядоченных наборов из $n$ чисел (так называемые энки). Пример:

1. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ – упорядоченные тройки. Канонический базис: $dim \mathbb{R}^3 = 3$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $\Rightarrow$ | $\vec{e}_1 = (1,0,0)$ |
| 0 | 1 | 0 | $\Rightarrow$ | $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ |
| 0 | 0 | 1 | $\Rightarrow$ | $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ |

Координаты произвольного вектора в каноническом базисе (разложение вектора по базисным):

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$

2. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$. Канонический базис (естественный)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | | $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $\Rightarrow$ | $\vec{e}_2 = (0,1,0,0)$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | | $\vec{e}_3 = (0,0,1,0)$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | | $\vec{e}_4 = (0,0,0,1)$ |

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 + x_4 \cdot \vec{e}_4$

$M_{n \times m}$ – пространство матриц размера $n$ на $m$;

$\dim M_{n \times m} = n \cdot m$. Пример:

$M_{2\times 2} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$,

$\dim M_{2 \times 2} = 2 \cdot 2 = 4$. Канонический базис:

| a | b | c | d | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\Rightarrow$ | $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,0,0)$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $\Rightarrow$ | $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,0,0)$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $\Rightarrow$ | $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,1,0)$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | $\Rightarrow$ | $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,0,1)$ |

Координаты произвольного вектора (матрицы) в каноническом базисе:

$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot E_1 + b \cdot E_2 + c \cdot E_3 + d \cdot E_4 = (a, b, c, d)$

$P_n$ -пространство многочленов степени не выше $n$. Пример:

$P_2 = \{at^2 + bt + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}; \dim P_n = n + 1$

Канонический базис:

| a | b | c | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $\Rightarrow$ | $e_1 = t^2 = (1,0,0)$ |
| 0 | 1 | 0 | $\Rightarrow$ | $e_2 = t = (0,1,0)$ |
| 0 | 0 | 1 | $\Rightarrow$ | $e_3 = 1 = (0,0,1)$ |

Координаты произвольного вектора (многочлена)

$P(\mathrm{t}) = \mathrm{at}^2 + bt + c = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2 + c \cdot \vec{e}_3 = (a, b, c)$

$P_3 = \left\{\mathrm{a}_3 \mathrm{t}^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0\right\}$