Лектор Гущина Елена Николаевна, кафедра Высшей математики 2.

Лекция № 6. Геометрические векторы.

Вектор как направленный отрезок. Сложение векторов и умножение вектора на число. Свойства линейных операций. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам той же плоскости. Разложение вектора пространства по трём некомпланарным векторам. Понятие базиса.

Все величины в математике делятся на скалярные и векторные.
Скаляр – величина, характеризуемая только числовым значением, например, длина, объём, масса, плотность.
Вектор – величина, характеризуемая не только числовым значением, но и направлением, например, сила, скорость.
Попросту: скаляр – число, вектор – число+направление.
Определение: Вектор – направленный отрезок, имеющий своим началом точку, из которой он выходит, и концом точку, в которую он приходит. **Длина вектора** – это длина отрезка, расстояние между начальной и конечной точками**. Длина вектора называется его модулем**.
Обозначения: $\overrightarrow{AB} - A -$ начало вектора, $\mathrm{B} -$ конец вектора, $\vec{a}, \vec{e}$. Модуль вектора: $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$.
Нулевой вектор: начало и конец совпадают: $\overrightarrow{AA},$ модуль ноль $-$ вектора равен нулю
$|\overrightarrow{AA}| = 0$.Обозначение ноль-вектора: $\vec{0}$.
Единичный вектор или **орт**. Вектор, длина (модуль) которого равна единице, называется единичным вектором или ортом: $\vec{e}, |\vec{e}| = 1$.
Определение: Векторы называются равными, если 1) равны их длины, 2) они параллельны,
3) направлены в одну сторону. Иными словами, *равные векторы получаются один из другого параллельным переносом в пространстве.*
Коллинеарные векторы – векторы, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых.
Компланарные векторы – векторы, лежащие на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Линейные операции над векторами: 1) сложение векторов; 2) умножение вектора на число

1) Сложение векторов.

Правило параллелограмма: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сносятся в общую точку, достраиваем до параллелограмма и суммой векторов является диагональ параллелограмма, выходящая из общего начала этих векторов.

Правило треугольника: суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, если вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.
Эти правило распространяется на любое количество векторов (правило ломаной).
Вычитание векторов: разность двух векторов $\vec{a}-\vec{b}$, совмещённых в общее начало, есть вектор, направленный из конца вычитаемого вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$.

2) Умножение вектора на число (на скаляр)

Вектор $\lambda\vec{a}$, где $\lambda \in R$ таков, что: 1) коллинеарен вектору $\vec{a}$, 2) длина вектора $\lambda\vec{a}$ $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$
3)при $\lambda > 0$ вектор $\lambda\vec{a}$ сонаправлен вектору $\vec{a}$, при $\lambda < 0$ вектор противоположно направлен вектору $\vec{a}$.

Свойства линейных операций

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (свойство коммутативности)
2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (свойство ассоциативности)
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (существование нулевого элемента)
4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (существование противоположного элемента)
5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$
6) $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$
7) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$
8) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$
9) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, где $\lambda,\mu \in R$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов)

Понятие базиса

1) Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор этой прямой.
2) Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости, взятых в определённом порядке. (упорядоченная пара неколлинеарных векторов)
3) Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных вектора, взятых в определённом порядке. (упорядоченная тройка некомпланарных векторов)

Определение. **Линейной комбинацией векторов** $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ с коэффициентами $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$ называется выражение вида $\alpha_1\overrightarrow{e_1}+\alpha_2\overrightarrow{e_2}+\alpha_3\overrightarrow{e_3}$.

Теорема. *Каждый вектор, параллельный какой либо прямой может быть разложен по базису на этой прямой.*
Каждый вектор, параллельный какой либо плоскости может быть разложен по базису на этой плоскости
Каждый вектор может быть разложен по базису в пространства.
При этом координаты вектора определяются однозначно.

Доказательство:
Первое утверждение означает, что для каждого вектора $\vec{a}$, коллинеарного ненулевому базисному вектору $\vec{e}$ (базис на прямой) существует число α такое, что $\vec{a} = \alpha\vec{e}$.Таким числом является либо $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}$, либо $-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}$, смотря по тому, направлены ли $\vec{a}$ и $\vec{e}$ одинаково или противоположно.
Второе утверждение означает, что для каждого вектора $\vec{a}$, компланарного с двумя неколлинеарными векторами $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ (базис на плоскости), найдутся числа α_1, α_2 , такие, что $\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2}$.
Поместим начала всех трех векторов в одну точку О, обозначим конец вектора $\vec{a}$ точкой А и проведем через точку А прямую AP, параллельную вектору $\overrightarrow{e_2}$. Тогда $\vec{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$, причем $\overrightarrow{OP}$ коллинеарен $\overrightarrow{e_1}$, а $\overrightarrow{PA}$ коллинеарен $\overrightarrow{e_2}$, а в силу первого утверждения теоремы, $\overrightarrow{OP} = \alpha_1\overrightarrow{e_1}$, а $\overrightarrow{PA} = \alpha_2\overrightarrow{e_2}$, следовательно
$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2}$.
Третье утверждение означает, что для каждого вектора $\vec{a}$ трёх некомпланарных векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ такие, что $\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}$. Для доказательства третьего утверждения поместим начала всех четырех векторов в одну точку О и проведем через конец вектора $\vec{a}$, точку А, прямую AP, параллельную $\overrightarrow{e_3}$. Тогда $\vec{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$, причем $\overrightarrow{PA}$ коллинеарен $\overrightarrow{e_3}$, а $\overrightarrow{OP}$ компланарен $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, тогда, в силу уже доказанных выше утверждений, $\overrightarrow{PA} = \alpha_3\overrightarrow{e_3}$, а $\overrightarrow{OP} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2}$. Отсюда прямо и вытекает третье утверждение.

Докажем, что **разложение по базису в пространстве единственное**. Представим себе, что некоторый вектор $\vec{a}$ разложен по базису в пространстве двумя способами $\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}$ и $\vec{a} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3}$.
Вычитая из первого выражения второе, мы получим
$(\alpha_1 - \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 - \beta_3)\overrightarrow{e_3} = \vec{0}$. Если хотя бы одна из разностей в скобках не равна нулю, мы можем разложить один из векторов базиса по остальным. Например, если $(\alpha_1 - \beta_1) \neq 0$, то

$\overrightarrow{e_1} = \frac{(\alpha_2 - \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_1)}\overrightarrow{e_2} + \frac{(\alpha_3 - \beta_3)}{(\alpha_1 - \beta_1)}\overrightarrow{e_3}$, что противоречит условию некомпланарности базисных векторов. Следовательно, разложение вектора по базису в пространстве единственно. Аналогично доказывается для прямой и плоскости.

Теорема доказана.

Определение.

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в пространстве и вектор $\vec{a}$ представлен в виде линейной комбинации базисных векторов: $\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3}$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются **компонентами** или **координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

Аналогично даются определения координат вектора на прямой и плоскости.

Свойства:

1) *Равные векторы имеют одинаковые координаты*, (только что доказали)
2) *При умножении вектора на число его координаты тоже умножаются на это число*.

Действительно, если $\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3}$, то $\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3}) = \lambda \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \lambda \alpha_3 \overrightarrow{e_3}$.

3) *при сложении векторов складываются их соответствующие координаты*.

$\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3}$ и $\vec{b} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + \beta_3 \overrightarrow{e_3}$, то

$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}$. Таким образом,

Все действия над векторами в координатном виде выполняются покоординатно.

Линейная зависимость и независимость векторов.

Определение: **Тривиальная** линейная комбинация векторов – все коэффициенты равны нулю.

Нетривиальная - если хотя бы один из коэффициентов не равен нулю.

Определение: Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots \overrightarrow{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если можно подобрать такие $\lambda_1, \lambda_1, \dots \lambda_1$, не равные нулю одновременно, что линейная комбинация этих векторов с этими коэффициентами равна нулю. Другими словами, существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная ноль-вектору.:

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$$

Определение: Если равенство выполняется только, если все коэффициенты равны нулю , то векторы называются **линейно независимыми.** Иными словами, векторы называются линейно независимыми, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна ноль-вектору.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов.

Свойство 1.*Если среди векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots \overrightarrow{a_n}$ есть нулевой, то они линейно зависимы.*

Действительно рассмотрим их линейную комбинацию, у которой при нулевом векторе коэффициент равен единице, а при остальных нули. Эта линейная комбинация нетривиальна и равна ноль-вектору.

Свойство 2. *Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима*.

Свойство 3. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов*.

Свойство 4. *Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые два линейно зависимых вектора коллинеарны*.
Действительно, пусть даны два коллинеарных вектора. Либо они оба нулевые, и тогда утверждение очевидно, либо один ненулевой и тогда второй по нему раскладывается. В обратную сторону, если линейно зависимы, то один раскладывается через другой в силу свойства 3, т.е. они коллинеарны.

Свойство 5. Любые три компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.
Доказательство: Пусть даны три компланарных вектора. Рассмотрим два из них, Если они коллинеарны, то линейно зависимы и сами по себе и с третьим вектором. Если же два неколлинеарны, то третий вектор по ним раскладывается и векторы линейно зависимы в силу свойства 3. Обратно, из трех линейно зависимых векторов один раскладывается через два других и следовательно, они компланарны.

Свойство 6. *Каждые четыре вектора линейно зависимы*.

Действительно, рассмотрим любые три из четырех векторов. Если они компланарны, то линейно зависимы и сами по себе и вместе с четвертым вектором. Если же они не компланарны, то четвертый вектор по ним раскладывается, откуда следует, что все они линейно зависимы.

Система координат. Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M.
Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус-вектором точки M. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке M можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты (координаты) ее радиус-вектора:

$$\overrightarrow{OM} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Определение. Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов называются **осями координат**.

1-я ось – ось **абсцисс OX**
2-я ось – ось **ординат OY**

3-я ось – ось **аппликат OZ**
Плоскости, проходящие через оси координат, называют координатными плоскостями.
Компоненты (координаты) радиус вектора точки М называют ***координатами*** *точки М в данной системе координат. 1-я - абсцисса, 2-я - ордината, 3-я - аппликата.*
Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Чтобы найти компоненты (координаты) вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.
На плоскости – две координанты, на прямой – одна.
В заданной системе координат координаты точки определены однозначно.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно перпендикулярны (ортогональны), а их длины (модули) равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат** (ПДСК).
Напомним, что в заданной системе координат все действия над векторами совершаются покоординатно.
Формула длины (модуля) вектора в прямоугольной декартовой системе координат: если $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z) \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Эту формулу легко доказать по теореме Пифагора.

Деление отрезка в данном отношении

Найдем координаты точки М на отрезке АВ, которая делит этот отрезок в отношении λ, т.е. $\dfrac{\left|\vec{AM}\right|}{\left|\vec{MB}\right|} = \lambda$ или $|AM| = \lambda|MB|$ $(*)$
Пусть координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, координаты M(x,y,z).
Тогда перепишем $(*)$ в координатной форме:
$(x - x_1) = \lambda(x_2 - x)$, $(y - y_1) = \lambda(y_2 - y)$, $(z - z_1) = \lambda(z_2 - z)$
Найдем координаты M(x,y,z):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Если λ>0, то точка М находится внутри отрезка АВ, если λ<0, то М находится на той же прямой, но вне отрезка АВ.
На плоскости задача решается так же, только базис состоит из двух векторов, поэтому остаются только первые две формулы.

Проекция вектора на ось.

Пусть даны вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось $\vec{l}$ (прямая с заданным на ней направлением).
Спроецируем начало и конец вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\vec{l}$: $\overrightarrow{A_1B_1}$. Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$

на ось $\vec{l}$ называется число, обозначаемое пр$_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$, равное $\pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$. Знак проекции определяется так:
Если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{l} \rightarrow$ пр$_{\vec{l}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| > 0$, а если
$\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{l} \rightarrow$ пр$_{\vec{l}}\overrightarrow{AB} = -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| < 0$

Свойства проекции

1) пр$_{\vec{l}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{l}}\right)$,
таким образом, знак проекции зависит от величины угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{l}$: если угол острый $0 < \widehat{\left(\vec{a},\vec{l}\right)} < \frac{\pi}{2}$, то проекция положительна, если угол тупой $\frac{\pi}{2} < \widehat{\left(\vec{a},\vec{l}\right)} < \pi$, то проекция отрицательна.
2) пр$_{\vec{l}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) =$ пр$_{\vec{l}}\vec{a} +$ пр$_{\vec{l}}\vec{b}$
3) пр$_{\vec{l}}\overrightarrow{\lambda a} = \lambda$пр$_{\vec{l}}\vec{a}$

Определение. *Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$*, таким образом орт вектора сонаправлен самому вектору и имеет единичную длину (модуль). Иными словами, орт вектора – это чистое направление.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно перпендикулярны (ортогональны), а их длины (модули) равны единице.
Значит, направляющие векторы ортонормированного базиса являются ортами.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат** (ПДСК).

Ориентация тройки векторов в пространстве

Ориентация векторов в пространстве вводится для некомпланарной упорядоченной (пронумерованной) тройки векторов.
Определение. *Три вектора называются правой тройкой, если при наблюдении из конца третьего вектора поворот от первого ко второму мы видим совершающимся против часовой стрелки (это соответствует пальцам на правой руке)*
Определение. *Левая тройка векторов - из конца третьего вектора поворот от первого ко второму видим совершающимся по часовой стрелке (пальцы левой руки)*
В физике это правило буравчика, правило винта.
В жизни – это правило штопора ☺ если залезть в бутылку, попросить товарищей заткнуть горлышко пробкой, а затем открыть бутылку штопором, то штопор будет надвигаться на вас именно против часовой стрелки! ☺
Традиционная прямоугольная декартова система координат: три взаимно перпендикулярные оси, начало координат точка О, направление на осях задано с /помощью правой тройки ортогональных ортов $\left\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right\}$.
Координаты произвольного вектора – его проекции на координатные оси.

Напомним, что в заданной системе координат все действия над векторами совершаются покоординатно.

Формула длины (модуля) вектора в прямоугольной декартовой системе координат: если $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z) \ \rightarrow \ |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Эту формулу легко доказать по теореме Пифагора.

Соответственно, расстояние между двумя точками по формуле:

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Условие коллинеарности двух векторов.

Два вектора коллинеарны $\vec{a} \| \vec{b} \ \leftrightarrow \ \exists \alpha \in R: \vec{b} = \alpha\vec{a} \leftrightarrow \ \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$,

то есть у коллинеарных векторов координаты пропорциональны.

Направляющие косинусы

Если вектор $\vec{e}$ имеет единичную длину, то есть является ортом, то его координатами являются косинусы углов, который этот вектор образует с координатными осями: $\vec{e}$: $|\vec{e}| = 1, \widehat{(\vec{e}, \vec{i})} = \alpha, \widehat{(\vec{e}, \vec{j})} = \beta, \widehat{(\vec{e}, \vec{k})} = \gamma \ \rightarrow$

$$\vec{e} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma = (\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma)$$

Координаты единичного вектора называются направляющими косинусами.

Направляющие косинусы связаны соотношением:

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

Для произвольного вектора $\vec{a} = (x, y, z)$: орт $\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.