Лекция №3. Обратная матрица.

Определитель произведения квадратных матриц.
Обратная матрица, определение, основные свойства. Критерий обратимости матрицы. Элементарные преобразования матриц. Нахождение обратных матриц с помощью элементарных преобразований. Решение матричных уравнений и систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Ещё раз обратим ваше внимание, что определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, где $A_{n\times n,}\ B_{n\times n}$.

Определение Пусть A — произвольная матрица. Матрица B называется обратной к A, если AB = BA = E, где E — единичная матрица. Если матрица, обратная к A, существует, то матрица A называется обратимой. Матрица, обратная к A, обозначается через A^{-1}.

В определении ничего не говорится о размерах матрицы A и обратной к ней матрицы, но зная свойства произведения матриц, мы с вами понимаем, что если матрица A обратима, то она является квадратной матрицей, а обратная к ней матрица является квадратной матрицей того же порядка, что и A.

Критерий обратимости матрицы

Теорема. Пусть A — квадратная матрица. Матрица, обратная к A, существует тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$. Если $|A| \neq 0$, то матрица, обратная к A, единственна и может быть вычислена по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, где A^* является транспонированной к матрице, состоящей из алгебраических дополнений матрицы A. Матрица A^* называется союзной или присоединённой к матрице A.

Доказательство. Предположим, что $|A| = 0$ и существует матрица B, обратная к A. Тогда $|AB| = |A||B| = 0$. С другой стороны, из определения обратной матрицы и вытекает, что $|AB| = |E| = 1$. Полученное противоречие показывает, что если матрица, обратная к A, существует, то $|A| \neq 0$.
Предположим теперь, что $|A| \neq 0$. Докажем, что в этом случае существует матрица, обратная к A. Обозначим порядок матрицы A через n и положим $B = \frac{1}{|A|}A^*$. Убедимся в том, что матрица B является обратной к A. В самом деле, рассмотрим произведение матриц A и B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots \\ A_{1n} A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если элемент матрицы $A \cdot B$ стоит на главной диагонали, скажем в i-й строке и i-м столбце, то он равен: $\frac{1}{|A|}(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}) = \frac{1}{|A|}|A| = 1$, поскольку в скобках записано разложение определителя $|A|$ по i-й строке.
Если же этот элемент стоит в i-й строке и j-м столбце, где $i \neq j$, то по свойству определителей он равен: $\frac{1}{|A|}\left(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}\right) = \frac{1}{|A|} \cdot 0 = 0$.
Мы проверили, что AB = E. Равенство BA = E проверяется аналогично. Следовательно, матрица B обратна к A.
Осталось проверить, что матрица, обратная к A, единственна.
Предположим, что существуют матрицы B_1 и B_2 такие, что
$AB_1 = B_1A = E,\ AB_2 = B_2A = E$. Тогда, с одной стороны,
$B_2(AB_1) = B_2E = B_2$, а с другой, $B_2(AB_1) = (B_2A)B_1 = EB_1 = B_1$.
Следовательно, $B_1 = B_2$.
Мы с вами полностью доказали теорему о существовании и единственности обратной матрицы.

Определение: Квадратная матрица, у которой определитель не равен нулю, называется невырожденной: $|A| \neq 0 \rightarrow A$ - невырожденная.

Матрица B, обратная к A, должна удовлетворять двум равенствам:
AB = E и BA = E, однако, на практике достаточно проверять одно из них.

Основные свойства обратной матрицы:
1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
4. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$

Порядок действий при нахождении обратной матрицы на примере матрицы порядка n=3:
1. Убедимся, что матрица A квадратная
2. Вычислим определитель и проверим, что $|A| \neq 0$, то есть матрица невырожденная.
3. Транспонируем матрицу A, затем запишем знаки алгебраических дополнений в пустой таблице, начнём вычислять миноры для транспонированной матрицы и расставлять их в союзную матрицу A^* с учётом знаков мест:
$$A \rightarrow A^T \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$
4. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$
5. Проверка: $AA^{-1} = E$. Проверку надо делать обязательно! (а то ошибку найдёт преподаватель и поставит минус за задачу!))

Для матрицы порядка n=2 нахождение обратной матрицы значительно упрощается:
Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow$ если $|A| = ad - bc \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ и всё. Но проверку найденной обратной матрицы всё же сделайте.

Элементарные преобразования матриц.

Элементарными преобразованиями строк матрицы $A_{n\times m}$ называются следующие действия:
1. Умножение какой-либо строки на число $\alpha \neq 0$
2. Перестановка двух строк.
3. Прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на число α.

Аналогичные преобразования можно совершать и со столбцами матрицы. Матрицы, получаемые друг из друга с помощью элементарных преобразований, называются эквивалентными и соединяются знаком $\sim$.

Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк.

Пусть A — невырожденная квадратная матрица порядка n, то есть предварительно проверили, что определитель матрицы не равен нулю. Запишем матрицу размера n × 2n, в которой в первых n столбцах стоит матрица A, а в последних n столбцах— единичная матрица. С помощью элементарных преобразований строк всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые n столбцов) к единичному виду, тогда в правой части (т. е. в последних n столбцах) полученной матрицы будет записана матрица A^{-1} . Совершать преобразования необходимо именно со всей широкой строкой этой сдвоенной матрицы: $(A|E) \sim (E|A^{-1})$.

Пример. Найдём обратную матрицу двумя способами: с помощью союзной матрицы и с помощью элементарных преобразований строк.

$$1)\ A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\4&2&-3\\-2&-1&1\end{pmatrix}\to|A|=\begin{vmatrix}2&0&-1\\4&2&-3\\-2&-1&1\end{vmatrix}=\{(3)+(1)\}=\begin{vmatrix}2&0&-1\\4&2&-3\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$=\{\text{разложим по третьей строке}\}=(-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\4&-3\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

$$\to \mathrm{A}-\text{невырожденная}\to\text{обратимая}\to \mathrm{A}=\frac{1}{|\mathrm{A}|}\mathrm{A}^*$$

Найдём союзную матрицу A^* :

$$\mathrm{A}\to\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&4&-2\\0&2&-1\\-1&-3&1\end{pmatrix}\to\mathrm{A}^*=\begin{pmatrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{pmatrix}$$

$=$ вычисляем девять миноров для A^{T} и расставляем в A^* с учётом знаков мест

$$\mathrm{M}_{11}=\begin{vmatrix}2&-1\\-3&1\end{vmatrix}=-1;\ \mathrm{M}_{12}=\begin{vmatrix}0&-1\\-1&1\end{vmatrix}=-1;\ \mathrm{M}_{13}=\begin{vmatrix}0&2\\-1&-3\end{vmatrix}=2;$$

$$\mathrm{M}_{21}=\begin{vmatrix}4&-2\\-3&1\end{vmatrix}=-2;\ \mathrm{M}_{22}=\begin{vmatrix}2&-2\\-1&1\end{vmatrix}=0;\ \mathrm{M}_{23}=\begin{vmatrix}2&4\\-1&-3\end{vmatrix}=-2;$$

$$\mathrm{M}_{31}=\begin{vmatrix}4&-2\\2&-1\end{vmatrix}=0;\ \mathrm{M}_{32}=\begin{vmatrix}2&-2\\0&-1\end{vmatrix}=-2;\ \mathrm{M}_{33}=\begin{vmatrix}2&4\\0&2\end{vmatrix}=4.$$

$$\mathrm{A}^*=\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&0&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&0&2\\0&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&-1\\-1&0&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$

Сделаем проверку. При этом удобно вынести дробный коэффициент за знак матрицы:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{-1}=-\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&-1\\4&2&-3\\-2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&0&2\\0&2&4\end{pmatrix}=-\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathrm{E}$$

Ура, верно!

1. С помощью элементарных преобразований:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-1&1&0&0\\4&2&-3&0&1&0\\-2&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\begin{Bmatrix}(2)-2\cdot(1)\\(3)+(1)\end{Bmatrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-1&1&0&0\\0&2&-1&-2&1&0\\0&-1&0&1&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\text{меняем местами 2} - \text{ю и 3} - \text{ю строки}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-1&1&0&0\\0&-1&0&1&0&1\\0&2&-1&-2&1&0\end{array}\right)\sim\{(3)+2\cdot(2)\}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-1&1&0&0\\0&-1&0&1&0&1\\0&0&-1&0&1&2\end{array}\right)\sim\{(1)-(3)\}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&-1&-2\\0&-1&0&1&0&1\\0&0&-1&0&1&2\end{array}\right)\sim\text{умножим 1}$$

$$-\text{ю строку на }\frac{1}{2},\text{ а 2} - \text{ю и 3} - \text{ю на }(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&-1/2&-1\\0&1&0&-1&0&-1\\0&0&1&0&-1&-2\end{array}\right)\to$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&-1\\-1&0&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$ Естественно, результаты совпали!

2) Найти обратную матрицу для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&1{,}5&-0{,}5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&1{,}5&-0{,}5\end{array}\right)$$

В предыдущих обозначениях,

$$x_{11}=-2,\qquad x_{12}=1,$$

$$x_{21}=1{,}5,\qquad x_{22}=-0{,}5.$$

Следовательно,

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$. Проверку сделайте самостоятельно!

Решение матричных уравнений и систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

С помощью обратных матриц можно решать некоторые матричные уравнения. К их числу относится уравнение вида $AX = B$, в котором A — невырожденная квадратная матрица, а значит существует обратная матрица A^{-1}. Умножая обе части равенства слева на A^{-1} и учитывая, что $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, получаем, что матричное уравнение имеет единственное решение: $X = A^{-1}B$.
Аналогичным образом решается уравнение вида $XA = B$, в котором A — невырожденная квадратная матрица. На этот раз обе части уравнения надо умножить на A^{-1} справа. Поскольку $(XA)A^{-1} = X(AA^{-1}) = XE = X$, мы получаем, что $X = BA^{-1}$.
Последний тип матричных уравнений, о котором мы упомянем, — это уравнения вида $AXB = C$, где A и B — невырожденные квадратные матрицы (возможно, различных порядков). Чтобы решить это уравнение, надо умножить обе его части на A^{-1} слева и на B^{-1} справа. Учитывая, что $A^{-1}(AXB)B^{-1} = (AA^{-1})X(BB^{-1}) = EXE = X$, мы получаем, что указанное уравнение решается по формуле $X = A^{-1}CB^{-1}$. Найденные решения обязательно проверять подстановкой в исходное уравнение!

Пример. Решить матричные уравнения $AX = C$ и $YA = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Найдём обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to$

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Y = CA^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверка: $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \to$ верно!

$$YA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \to \text{верно!}$$

Обращаем ваше внимание, что в этой задаче различный порядок сомножителей в исходных уравнениях привёл к различным результатам!

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Запишем квадратную систему линейных уравнений в матричном виде $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \to \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \to AX = B$

Получили матричное уравнение. При $|A| \neq 0$ матрица A невырожденная и существует обратная матрица A^{-1}. Умножая обе части равенства слева на A^{-1} и учитывая, что $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, получаем, что наша система имеет единственное решение, которое выражается формулой $X = A^{-1}B$.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases} \to \text{матричный вид системы} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Определитель системы $|A| = -3 \neq 0$

$\to$ система имеет единственное решение,
которое мы найдём с помощью обратной матрицы

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Проверка в матричном виде:

$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$ ура, верно!