<u>Лекция 8.</u> Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

<u>Определение :</u> Ненулевой вектор $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ называется собственным вектором линейного оператора $\hat{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda,$ если $\hat{A}\vec{a} = \lambda\vec{a}.$

<u>Замечание 1</u> Каждому собственному числу соответствуют свои собственные векторы, причем таких бесконечно много.

*<u>Замечание 2.</u>*Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное число.

*<u>Замечание 2</u>*В пространстве геометрических векторов собственные векторы линейного оператора, это векторы, которые под его воздействием переходят в себе коллинеарные.

<u>Примеры:</u>

Собственные значения и собственные векторы для линейных операторов¸ действующих в пространстве V_3:

1) Оператор проектирования на плоскость XOZ:
   $\hat{A}\left(\alpha\bar{i}\right) = \alpha\bar{i};\ \hat{A}\left(\alpha\bar{j}\right) = \bar{0} = 0\bar{j};\ \hat{A}\left(\alpha\bar{k}\right) = \alpha\bar{k}.$ Векторы, параллельные осям координат являются собственными с собственными значениями *1;0;1.*
2) Гомотетия с коэффициентом k.
   $\forall\bar{x} \in V_3;\hat{A}(\bar{x}) = k\bar{x}.;$ т.е. $\forall\bar{x} \in V_3$ является собственным с собственным значением $\lambda = k.$

<u>Теорема 12</u>Собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, соответствующие различным собственным значениям линейно независимы.

<u>Докажем для 2х векторов</u>: Пусть$\hat{A}\overrightarrow{x_1} = \lambda_1\overrightarrow{x_1};\hat{A}\overrightarrow{x_2} = \lambda_2\overrightarrow{x_2};\ \ \lambda_1 \neq \lambda_2;$ Рассмотрим

$\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2}=\bar{0}.$Подействуем $\hat{A}$ на эту линейную комбинацию.

$\hat{A}(\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2}) = \hat{A}\bar{0} = \bar{0};$ В то же время $\hat{A}(\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2}) = \alpha_1\hat{A}\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\hat{A}\overrightarrow{x_2}=$

$\alpha_1\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\lambda_2\overrightarrow{x_2}=\bar{0}$;

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2} = \bar{0} & (1) \\ \alpha_1\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\lambda_2\overrightarrow{x_2} = \bar{0} & (2) \end{cases}$$

Вычтем из 2го уравнения 1-е , умноженное на λ_1: $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{x_2}=\bar{0}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2; \overrightarrow{x_2} \neq \bar{0} => \alpha_2 = 0.$

Вычтем из 2го уравнения 1-е , умноженное на λ_2: $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{x_1}=\bar{0}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2; \overrightarrow{x_1} \neq \bar{0} => \alpha_1 = 0 => \alpha_1 = \alpha_2 = 0 => \overrightarrow{x_1}$ и $\overrightarrow{x_2}$ линейно независимы.

Для общего случая ($n \geq 2$ векторов) доказывается методом математической индукции.

СледствиеПусть$\hat{A}$- линейный оператор, действующий в линейном пространстве L, dimL=n, и имеет nразличных собственных значений $\lambda_1 \dots \lambda_n$. Тогда отвечающие им собственные векторы $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n$образуют базис в L.

Доказательство: Система векторов $\{\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n\}$ л.н.з., dimL=n =>$\{\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n\}$образует базис в L.

ОпределениеХарактеристическим многочленом матрицы называется следующий многочлен$\chi(\lambda)$ =det $(\mathrm{A} - \lambda E)$.

ОпределениеХарактеристическим уравнением матрицы называется следующее уравнение : det $(\mathrm{A} - \lambda E) = 0$. Его корни называются характеристическими числами матрицы.

ОпределениеХарактеристическим многочленом и характеристическим уравнением линейного оператора называются соответственно характеристический многочлен и характеристическое уравнение его матрицы в каком-либо базисе.

Теорема 13Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса;корни характеристического уравнение также не зависят от выбора базиса.

Доказательство: Пусть матрицы линейного оператора в первом базисе A; во втором A′; P-матрица перехода от первого базиса ко второму.

Тогда $\mathrm{A}' = P^{-1}AP$. Составим характеристическое уравнение:

det $(\mathrm{A}' - \lambda E) = \det\ (P^{-1}AP - \lambda E)$=

det $(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP)$= det $(P^{-1}(A - \lambda E)P)$=det$(P^{-1})\ det(A - \lambda E) detP$=det $(A - \lambda E)$

Теорема 14Для того, чтобы действительное число λ являлось собственным значением линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнем характеристического уравнения этого оператора.

Доказательство:

Необходимость; Пусть λ – собственное значение л.о. $\hat{A}$; $\overline{x}$– собственный вектор,ему отвечающий. $\hat{A}\overline{x} = \lambda\overline{x}$; ; $\overline{x} \neq \overline{0}$; $\hat{A}\overline{x} = \lambda\hat{I}\overline{x}$ =>$(\hat{A} - \lambda\hat{I})\overline{x} = \overline{0}$;

И в матричном виде:

(A-$\lambda E)\overline{x}$ =$\overline{0}$, Где A- матрица $\hat{A}$ в каком либо базисе;

(A-$\lambda E)\overline{x}$ =$\overline{0}$, однородная система линейных уравнений, которая имеет ненулевое решение $\overline{x} \neq \overline{0}$, так как $\overline{x} -$ собственный вектор $\hat{A}$ =>

λ удовлетворяет уравнению det (A-$\lambda E) = 0$

- ⇨ λ- корень характеристического уравнения.

Достаточность: Пустьλ −корень характерестического уравнения =>

det (A-$\lambda E) = 0$ =>однородная система уравнений (A-$\lambda E)\overline{x}$ =$\overline{0}$ имеет ненулевое решение $\overline{x}$ и для $\overline{x}$выполняется $(\hat{A} - \lambda\hat{I})\overline{x} = \overline{0}$ =>$\hat{A}\overline{x} = \lambda\overline{x}$ =>λ − собственный вектор отвечающий собственному значению λ.

Каждому собственному значению λлинейного оператора сопоставляют его кратность, полагая ее кратности корня λ характеристического уравнения.

<u>Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора.</u>

1) Выбрать базис в L и составить в нем матрицу A линейного оператора $\hat{A}$;
2) Составить характеристическое уравнение $\det(\mathrm{A} - \lambda E) = 0$ и найти все его действительные корни $\lambda_к$;
3) Для каждого $\lambda_к$ найти фундаментальную систему решений для однородной системы $(\mathrm{A}-\lambda_к \mathrm{E})\vec{x}=0$. Найденная ФСР состоит из искомых собственных векторов.

<u>Пример</u>Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей A.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(\mathrm{A} - \lambda E) = 0$.

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -6 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$. Разложим определитель по второму столбцу.

$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$

$(3-\lambda)\big((2-\lambda)(1-\lambda)-6\big)=0$; $(3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)=0$.

$\lambda_1=3$; $\lambda_2=4$;$\lambda_3=-1$-собственные значения.

1) Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям.

$\boldsymbol{\lambda_1}$**=3;** Решим систему $(\mathrm{A}-3\mathrm{E})\overline{X}=\overline{O}$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 0 & -6 \\ 1 & 3-3 & -2 \\ -1 & 0 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix}-1&0&-6\\1&0&-2\\-1&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&-6\\1&0&-2\\0&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&-6\\0&0&-8\\0&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&-6\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$rangA = 2;\ x_3 = 0;\ x_2 = c;\ x_1 = 0.$

$X^1=\begin{pmatrix}0\\c\\0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$- собственные векторы, соответствующие λ_1=3.

Выберем c=1; $\overline{f}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{\lambda_2}$**=4**; Решим систему (А-4Е)$\overline{X}=\overline{O}$

$\begin{pmatrix}-2&0&-6\\1&-1&-2\\-1&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix}-2&0&-6\\1&-1&-2\\-1&0&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&0&-3\\-2&0&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-1&-5\\0&-2&-10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$rangA = 2;\ x_3 = c;\ x_2 = -5c;\ x_1 = -3c.$

$X^2=c\begin{pmatrix}-3\\-5\\1\end{pmatrix}$- собственные векторы, соответствующие λ_2=4. При c=1

$\overline{f}_2=\begin{pmatrix}-3\\-5\\1\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{\lambda_3}$**= -1**; Решим систему (А+Е)$\overline{X}=\overline{O}$

$\begin{pmatrix}3&0&-6\\1&4&-2\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix}3&0&-6\\1&4&-2\\-1&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&-2\\-1&0&2\\3&0&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&-2\\0&4&0\\0&-12&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&-2\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$rangA = 2;\ x_2 = 0;\ x_3 = c;\ x_1 = 2c.$

$X^3=\begin{pmatrix}2c\\0\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$- собственные векторы, соответствующие λ_3= -1.

При

c =1 $\overline{f}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.