МИРЭА - РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. М. Аксененкова Т.Р. Игонина О.А. Малыгина
А.В. Татаринцев Н.С.Чекалкин

Редактор Н. С. Чекалкин

Теория функций комплексного переменного

4 семестр

Учебно-методическое пособие

Для студентов очной формы обучения

института ИРТС и Физико-технологического института

Москва

МИРЭА

2019

Утверждено редакционно-издательским советом «МИРЭА –Российский технологический университет» в качестве учебно-методического пособия для студентов

Подготовлено на кафедре Высшей математики -2

Рецензенты: Бобылева Т.Н., к.ф-м.н. ,
Приходько В.Ю., д.ф-м.н.

Редактор: Чекалкин Н.С.

Аксененкова И.М., Игонина Т.Р., Малыгина О.А., Татаринцев А.В., Чекалкин Н.С.

Теория функций комплексного переменного, 4 семестр: учебно-методическое пособие / Аксененкова И. М., Игонина Т.Р., Малыгина О.А., А.В. Татаринцев, Чекалкин Н.С. М.: МИРЭА, 2019, 87 с.

Пособие «Теория функций комплексного переменного» отражает содержание курса математического анализа (4-ый семестр) и предназначено для студентов очной формы обучения института ИРТС и Физико-технологического института. Пособие включает следующие разделы: аналитические функции комплексного переменного и их свойства; интегрирование функции комплексного переменного, теоремы Коши; ряды Тейлора и Лорана; классификация изолированных особых точек; теория вычетов и ее приложения; Гамма и Вета-функции и их свойства. Представленный материал можно использовать при изучении курсов дифференциальных уравнений, теории вероятностей, математической физики, основ теории цепей, квантовой физики и других специальных и общепрофессиональных дисциплин.

Введение

Настоящее учебно-методическое пособие разработано коллективом преподавателей кафедры высшей математики-2 «МИРЭА - Российский технологический университет» для студентов очной формы обучения Института радиотехнических и телекоммуникационных систем (ИРТС) и Физико-технологического института (ФТИ). Основное содержание курса математического анализа 4-го семестра составляет теория функций комплексного переменного (ТФКП). В программу включены следующие разделы: функции комплексного переменного, аналитические функции и их свойства; ряды Тейлора и Лорана; классификация изолированных особых точек (и. о. т.) функции; теория вычетов и ее приложения; интегралы, зависящие от параметра (Гамма и Вета – функции и их свойства). В пособии приведены типовые задания по основным темам курса математического анализа 4-го семестра, список теоретических вопросов для подготовки к сдаче экзамена (зачета), перечень рекомендуемой литературы. Представлены примерные варианты контрольных работ по курсу и образец экзаменационного (зачетного) билета.

Для усвоения программы курса математического анализа 4-го семестра (ТФКП) необходимы полноценно сформированные знания и умения по курсам математического анализа (в объеме первых трех семестров), алгебры и геометрии (в объеме 1 и 2 семестров), дифференциальных уравнений. Требуется владение математическими методами (дифференцирование, интегрирование, представление функции рядом, исследование ряда на сходимость и др.), способностью анализировать условие задачи и подбирать для ее решения адекватный математический аппарат.

Данное пособие имеет следующую структуру. Оно состоит из трех частей. ***Часть 1*** *– это основные типы задач для подготовки к сдаче контрольных работ и экзамена (зачета)*. Рекомендуется прорешать все задачи этой части пособия. ***Часть 2*** *- задачи типового расчета*. Студент выполняет только свой вариант каждого задания. Наличие выполненного типового расчета является обязательным условием при допуске студента на экзамен (зачет). ***Часть 3*** *- теоретический материал и примеры решения типовых задач курса*. Студент должен знать определения понятий курса, формулировки и доказательства основных теорем курса, уметь решать типовые задачи, владеть методами теории функций комплексного переменного и способностью применения таких методов в прикладных областях.

Методические указания

В течение 4-го семестра по курсу математического анализа проводятся две контрольные работы и выполняется типовой расчет. Приведем примерные варианты контрольных работ.

Контрольная работа №1.
Тема: *«Аналитические функции. Решение уравнений»*.

Примерный вариант контрольной работы №1

1) Вычислить:

а) $(-5+5i)^{100}$; б) $(3-i\sqrt{3})^{-2i}$.

2) Решить уравнения:

а) $z^3+27i=0$; б) $\sin 2z=2$.

Ответы изобразить на комплексной плоскости.

3) Проверить аналитичность следующих функций:

а) $f(z)=iz^2+27i+3\bar{z}$; б) $f(z)=e^{iz}+2i$.

4) Восстановить аналитическую функцию $f(z)$, если задана гармоническая функция $v=\operatorname{Im} f(z)=x^2-y^2+x$.

5) Изобразить на комплексной плоскости: $\operatorname{Re}(2/z)>1$.

Контрольная работа №2.
Тема: *«Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек (и.о.т). Вычеты»*.

Примерный вариант контрольной работы №2

1. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{2z+5}$ в ряд Лорана в области $|z|>5/2$.

2. Найти изолированные особые точки функции, указать их тип. Вычислить вычеты в этих точках:

а) $f(z)=(z-3)^3\cdot e^{\frac{7}{z-3}}$; б) $f(z)=\dfrac{e^{3z}-1}{z^2(z^2+4)}$.

3. Вычислить интегралы, используя основную теорему о вычетах:

а) $\displaystyle\int_L \frac{\cos 5z-1}{z^2(z^2+1)}dz$, $L: |z+i|=1{,}5$.

б) $\displaystyle\int_L \frac{z}{\sin z}dz$, $L: |z+2|=3$.

<u>Замечание</u>: по усмотрению преподавателя количество задач контрольных работ может быть изменено.

Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта. Студент подробно описывает решение каждой задачи, объясняет решения задач преподавателю, отвечает на вопросы. *Наличие выполненного типового расчета является обязательным условием допуска студента на экзамен или зачет.*

По итогам обучения *<u>на основе учебного плана</u>* проводится ***экзамен или зачет.***

<u>Примерный вариант экзаменационного (зачетного) билета</u>

1. Решить уравнение $\sin 4z = 3$. Ответы изобразить на комплексной плоскости.
2. Определение функции, аналитической в точке. Исследовать функцию $f(z) = |ie^{3z}|$ на аналитичность.
3. Классификация изолированных особых точек (и.о.т.) функции. Найти изолированные особые точки функции $f(z) = (\frac{5}{z-2} + z - 2) \cdot e^{\frac{6}{z-2}}$, указать их тип, вычислить вычеты в этих точках.
4. Вычислить интеграл, применяя основную теорему о вычетах: $\int_L \frac{\cos 9z - 1}{z^3(z^2-4)} dz$. $L: |z-i| = 2$.
5. Вычислить несобственный интеграл на основе теории вычетов: $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 5x}{x^2+4} dx$.
6. С помощью вычетов найти оригинал изображения $F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$.
7. Вычислить $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$.
8. Теоретический вопрос (из списка теоретических вопросов).

Экзаменационные (зачетные) билеты составляются на основе рабочей программы курса математического анализа 4-го семестра для ИРТС и ФТИ. В билеты включаются типовые задания и теоретические вопросы, представленные в настоящем пособии по основным темам курса.

Теоретические вопросы по курсу

1. Основные элементарные функции комплексного переменного, их свойства. Примеры.
2. Предел, непрерывность, дифференцируемость функции комплексного переменного.
3. Определение аналитической функции, ее свойства. Условия Коши-Римана. Примеры аналитических и неаналитических функций.
4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Конформное отображение. Примеры.
5. Определение интеграла функции комплексного переменного вдоль кусочно-гладкой кривой, свойства.
6. Теоремы Коши для односвязной и многосвязной области.
7. Степенной ряд, область его сходимости. Ряд Тейлора аналитической функции, основные разложения.
8. Ряд Лорана аналитической функции. Примеры разложения в ряд Лорана.
9. Изолированные особые точки (и.о.т.). Классификация и.о.т. по главной части ряда Лорана и на основе поведения функции в окрестности особой точки.
10. Нуль аналитической функции, его кратность. Связь полюса с нулем обратной функции. Примеры.
11. Вычет аналитической функции в и. о. т. Нахождение вычета по ряду Лорана. Примеры.
12. Формулы для вычисления вычета в простом и кратном полюсе. Примеры.
13. Основная теорема о вычетах. Примеры вычисления контурных интегралов с помощью вычетов.
14. Вычисление несобственных интегралов по прямой и полупрямой. Лемма Жордана. Примеры использования леммы Жордана.
15. Теорема Руше и ее применение.
16. Использование теории вычетов при решении задачи Коши операторным методом в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема о нахождении оригинала для заданного изображения с помощью вычетов). Примеры.
17. Интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Интегралы Эйлера.
18. Определение Гамма-функции, ее свойства.
19. Определение Бета-функция, ее свойства.
20. Взаимосвязь Гамма-функции и Бета-функции. Примеры применения этих функций к вычислению интегралов.

Литература

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ (в 2-х частях). – М.: URSS., 2015. – 800 с.

2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: URSS., 2015. – 440 с.

3. Аксененкова И.М., Малыгина О.А., Чекалкин Н.С., Шухов А.Г.

Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. М.: МИРЭА, 2015.-196 с.

4. Балдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Математический анализ. М: "ФЛИНТА"., 2015. - 361с.

5. Ефимов А.В., Поспелов А.С. Сборник задач по математике для втузов в 4-х частях. - М.: Альянс., 2018.- 800 с.

Дополнительная литература

6. Евграфов М.А. Аналитические функции. - М.: Физ.- мат. лит., 1991.- 448 с.

7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: URSS., 1987. – 688 с.

8. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Начало теории. Т.1. – М.: URSS., 2009. – 496 с.

9. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Дальнейшее построение теории. Т.2. – М.: URSS., 2009. – 624 с.

10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том III. Часть 2. – СПб., 2010. - 816с.

Интернет-ресурсы

11. Евграфов М.А. Аналитические функции. http://reslib.com/book/617

12. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. http://reslib.com/book/40561

13. Киселёв В.Ю., Пяртли А.С., Калугина Т.Ф. Высшая математика. Интерактивный компьютерный учебник. http://webmath.exponenta.ru/s/vm_1_index.html

Часть 1

Основные типы задач

для подготовки к контрольным работам и экзамену (зачету)

Часть 1 построена следующим образом. По каждой теме курса математического анализа 4-го семестра приведены типовые задачи. Для успешной подготовки к контрольным работам и сдаче экзамена (зачета) студенту рекомендуется выполнить все такие задачи.

Основные определения и теоремы сформулированы ***в части 3****. Там же описаны решения типовых задач курса.*

Задачи по теме «Комплексные числа. Области на комплексной области»

Задача №1.1 Заданы два комплексных числа z_1 и z_2 в алгебраической форме.

1) Представить комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.
2) Вычислить $(z_1/z_2)^{200}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

вариант№	z_1	z_2	вариант№	z_1	z_2
1	$2+2i$	$\sqrt{2}+i\sqrt{6}$	3	$-\sqrt{3}+i$	$-2+2i$
2	$2-2\sqrt{3}i$	$4i^{51}$	4	$-5-5i$	$5(\sqrt{3}-i)$

Задача №1.2. Вычислить значение выражения *A*, используя действия с комплексными числами. Представить полученное комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

вариант№	A	вариант№	A
1	$(2-2i)^7$	2	$\left(-\sqrt{3}-3i\right)^3$
3	$\left((-1+i)\left(-3+\sqrt{3}i\right)\right)^4$	4	$\left((1+i^3)(2-2^5i)\right)^{10}$
5	$\left(-i^7\left(2-2\sqrt{3}i\right)\right)^{11}$	6	$\left(i^{11}\left(-\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)\right)^{13}$
7	$\left(-\sqrt{3}-i\right)^9(1+i^{17})^7$	8	$\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$

В электротехнике при расчете электрических цепей широко применяются комплексные числа (метод комплексных амплитуд)
(задача №1.3).

Задача №1.3. Для участка электрической цепи, состоящего из последовательно соединенных сопротивления r и индуктивности L, найти комплексное сопротивление Z и комплексную проводимость Y. Ответ изобразить на комплексной плоскости. Отметим, что величина wL называется индуктивным сопротивлением.

Указание: воспользоваться формулами $Z = r + wL \cdot i$, $Z = \frac{1}{Y}$.

вариант№	r	wL	вариант№	r	wL
1	20	30	3	18	64
2	35	29	4	13	81

Задача №1.4. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством или системой неравенств.

вариант№		вариант№	
1	$\|z-2i\| \le 3$	2	$\|z-5+2i\| \ge 4$
3	$1 < \|z-5\| < 4$	4	$2 < \|z+3-3i\| < 5$
5	$\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$	6	$\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{2}$
7	$\begin{cases} \|z+i\| < 1 \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < 3 \\ -3 < \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 1 < z \cdot \overline{z} < 4 \\ \operatorname{Im} \overline{z} < 0 \end{cases}$	10	$\begin{cases} z \cdot \overline{z} < 9 \\ 0 < arg z < \frac{\pi}{3} \end{cases}$
11	$\left\|\frac{z-2}{z+2}\right\| < 1$	12	$\operatorname{Im}(z^2+2i) > 0$

Задачи по теме «Функции комплексного переменного, их свойства»

Задача №1.5. Вычислить все значения заданного выражения A.

вариант№	A	вариант№	A
1	$Ln(1+\sqrt{3}i)$	2	$(-\sqrt{3}+i)^{5i}$
3	$(-i)^{-5i-5}$	4	$e^{5+(-\frac{\pi i}{2})}$
5	$\sin(5i)$	6	$sh(-8i)$

Задача №1.6. Решить уравнение. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

вариант№	уравнение	вариант№	уравнение
1	$z^3-27=0$	3	$z^4+16=0$
2	$z^3-8i=0$	4	$z^8+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=0$
5	$e^z+3i-3=0$	6	$\cos^2 z-\sin^2 z=2$
7	$e^{2z}+3e^z-4=0$	8	$sin5z=2$
9	$cosz=-3$	10	$shz=-5$
11	$ch2z=6$	12	$\cos z-i\sin z=2$

Задача №1.7. Исследовать функцию $f(z)$ на аналитичность, используя условия Коши-Римана и свойства аналитических функций.

вариант№	$f(z)$	вариант№	$f(z)$
1	$4z^2+5z-2i$	2	$e^{6z}+3z$
3	$iz^2+3\bar{z}+4i$	4	$z\,\mathrm{Im}(6z+2)$
5	$ie^{5iz}+z$	6	$\cos 2z$
7	$\mathrm{Re}(z^2)+2z+5i$	8	$\lvert ie^{5iz}\rvert$

9	$\mathrm{Im}(e^{2iz})$	10	$i\,\lvert(1+i\sqrt{3})z^2\rvert$
11	$iz+\sin 2z$	12	$3iz+sh2z$
13	$3i\bar{z}+ch2z$	14	$iz^2+3e^{-z}+4i$

<u>Задача №1.8</u>. Исследовать функцию $f(z)$ на дифференцируемость и аналитичность. Указать область аналитичности функции. Найти производную функции в точке z_0.

вариант№	$f(z)$	z_0	вариант№	$f(z)$	z_0
1	$4\lvert z\rvert^2$	0	2	$\dfrac{2z+5}{z^2+4}$	i
3	$(z+1)\,\mathrm{Im}(iz)$	-1	4	$(z+2i)\,\mathrm{Re}(3z+i)$	$-2i$
5	$z\lvert z+i\rvert^2$	$-i$	6	$\dfrac{5i}{z^2+z+1}$	$-i$
7	$\dfrac{z}{e^z-1}$	πi	8	$\dfrac{z}{\sin 2z}$	i

<u>Задача №1.9</u>. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=f(z)$ в точке z_0.

вариант№	$f(z)$	z_0	вариант№	$f(z)$	z_0
1	$4z^2$	$1-i$	2	$2e^{iz}$	$\dfrac{-\pi}{4}$
3	ie^{4z}	$3\pi i$	4	z^3	$2+2i$

<u>Задача №1.10</u>. Показать, что заданные функции $u(x,y)$ или $v(x,y)$ являются гармоническими. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по ее действительной части $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$.

вариант №	заданные функции	$f(z_0)$

1	$u = \sin 3x ch3y$	$f(0) = 0$
2	$v = sin(2 - x)shy$	$f(2) = 1$
3	$u = cos\frac{y}{2}ch\frac{x}{2}$	$f(0) = 1$
4	$v = x^2 - y^2 + 2x$	$f(i) = -2 - i$
5	$u = e^{2x}cos(2y + 1)$	$f(-i/2) = 1$
6	$v = cos4xch4y$	$f(0) = i$

Задача №1.11. Задано отображение $w = f(z)$.

Указать:

1) часть плоскости, которая растягивается (сжимается) при заданном отображении $w = f(z)$;

2) множество точек, в которых коэффициент растяжения равен 1.

вариант№	$w = f(z)$
1	$w = \dfrac{1}{z-1}$
2	$w = e^{z-3}$
3	$w = (z+i)^2$

Задача №1.12. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)dz$.

вариант№	$f(z)$	L	вариант№	$f(z)$	L
1	$z^2 + 2\bar{z}$	Отрезок прямой от точки A(0;0) до B(1;-3)	2	$3z - \bar{z}$	$\begin{cases} \lvert z \rvert = 1, \\ -\pi/2 \le \arg z \le \pi/2 \end{cases}$
3	$z + 3\bar{z}$	$\lvert z-1 \rvert = 3$	4	$z^2 + z$	Часть параболы $y = x^2$ от точки A(0;0) до B(1;1)

Задачи по теме «Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Вычеты»

Задача №1.13. Получить все разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням ($z-z_0$).

вариант №	$f(z)$	z_0	вариант №	$f(z)$	z_0
1	$z^3 e^{\frac{4}{z^2}}$	0	2	$(z-1)^4\cos\left(\frac{4}{z-1}\right)$	1
3	$(z+2)\sin\left(\frac{5}{(z+2)^2}\right)$	-2	4	$(z+1)sh\left(\frac{2}{z+1}\right)$	-1
5	$(z^2+\frac{1}{z^2})e^{\frac{5}{z}}$	0	6	$\frac{z}{(z-2)(z+3)}$	0
7	$\frac{4z+5}{z^2+5z+6}$	-2	8	$\frac{z+2}{z^2(z+4)}$	0
9	$\frac{3iz+ch2z}{z^2}$	0	10	$\frac{z^4+z+1}{z^2+9}$	0

Задача №1.14. Получить разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в заданной области.

вариант№		$f(z)$	вариант№		$f(z)$
1	$\|z\|>2$	$\frac{z}{(z-1)(z+2)}$	2	$2<\|z\|<4$	$\frac{2z+1}{z^2+2z-8}$
3	$\|z-3\|>4$	$\frac{1}{(z+1)(z-2)}$	4	$1<\|z-2\|<3$	$\frac{4z+5}{z^2-6z+5}$

Задача №1.15. Найти изолированные особые точки функции $f(z)$, указать их тип, вычислить вычеты в этих точках.

вариант№	$f(z)$	вариант№	$f(z)$
1	$z^5\cdot e^{\frac{4}{z}}$	2	$(z+3)^6\sin\left(\frac{5}{z+3}\right)$

3	$\dfrac{e^{8z}}{z^2+9}$	4	$\dfrac{z+4}{z^3+3z^2}$
5	$\dfrac{\sin(\pi z)}{(z-2)(2z+1)}$	6	$\dfrac{e^z-1}{z^2(z+4i)}$
7	$z\cdot e^{\frac{1}{z+2}}$	8	$(2z^3+1)\cos(1/z)$
9	$\dfrac{\sin(z+1)}{(z+1)^6}$	10	$\dfrac{e^{z+1}-1}{(z+1)^2 z}$
11	$\dfrac{\sin^2(3\pi z)}{z^3(z-1)^2}$	12	$\dfrac{1+\cos(\pi z)}{(z-1)^3(z-5)^2}$
13	$\dfrac{e^z-1}{(z-2\pi i)^2 z}$	14	$\dfrac{4}{(z^2+1)^2}$

Задачи по теме «Применение теории вычетов»

<u>Задача №1.16</u>. Вычислить интеграл $\oint\limits_L f(z)dz$ с помощью основной теоремы о вычетах.

вариант №	$f(z)$	L	вариант №	$f(z)$	L
1	$(z+i)^4\sin\left(\dfrac{i}{z+i}\right)$	$\|z+i\|=2$	2	$(z-1)^5\cos\left(\dfrac{2}{z-1}\right)$	$\|z-1\|=\dfrac{1}{2}$
3	$(z^2+3z+5)e^{\frac{1}{z}}$	$\|z-i\|=2$	4	$\dfrac{iz^3+sh2z}{z^4}$	$\|z-i\|=2$
5	$\dfrac{\sin z}{z(z^2+9)}$	$\|z-i\|=3$	6	$\dfrac{1}{(z+2)(z^2-4)}$	$\|z+2\|=1$
7	$\dfrac{e^z}{z^2(z+2i)}$	$\|z+i\|=2$	8	$\dfrac{z}{\sin z}$	$\|z+2\|=3$
9	$\dfrac{z+2}{(z^2+4)^2}$	$\|z-i\|=2$	10	$\dfrac{z}{e^{2z}-1}$	$\|z-i\|=3$

11	$\dfrac{\sin^2 2z}{z^3(2z-\pi)}$	$\lvert z \rvert = 2$	12	$\dfrac{\sin \pi z}{z^3 - z^2}$	$\lvert z-1 \rvert = 2$
13	$\dfrac{\cos(\pi z)}{z^2(4z^2-1)}$	$\lvert 2z-1 \rvert = \dfrac{1}{2}$	14	$\dfrac{e^z}{z(z+2)^2}$	$\lvert z+1 \rvert = 2$

<u>Задача №1.17</u>. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(z)dz$ с помощью вычетов.

вариант№	$f(z)$	(a,b)	вариант№	$f(z)$	(a,b)
1	$\dfrac{x^2+1}{(x^2+9)(x^2+16)}$	$(0,+\infty)$	2	$\dfrac{x^2}{(x^2+9)^2}$	$(0,+\infty)$
3	$\dfrac{1}{x^2+6x+13}$	$(-\infty,+\infty)$	4	$\dfrac{1}{(x^2+4)^3}$	$(0,+\infty)$
5	$\dfrac{1}{(x^2-4x+13)^2}$	$(-\infty,+\infty)$	6	$\dfrac{x^2}{x^4+6x^2+5}$	$(0,+\infty)$
7	$\dfrac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}$	$(-\infty,+\infty)$	8	$\dfrac{x\sin 2x}{x^2+9}$	$(0,+\infty)$

<u>Задача №1.18</u>. С помощью теоремы Руше найти количество корней уравнения $f(z)=0$ в указанной области *Д*.

вариант№	$f(z)$	*Д*	вариант№	$f(z)$	*Д*
1	z^5-5z^2+2z+1	1< |Z|<2	2	$z^4-5z^3-z^2-1$	0,5< |Z|<1
3	$2z^3-7z^2+3z+1$	1< |Z|<4	4	$z^7-5z^5+2z^4+1$	1< |Z|<3

<u>Задача №1.19</u>. Решить задачу Коши операторным методом, используя теорию вычетов при нахождении оригинала по полученному изображению.

1) $y''+2y'-3y=1 \qquad y(0)=-1,\ \ y'(0)=2$

2) $y''-y'-2y=2x-1 \qquad y(0)=1,\ \ y'(0)=2$

3) $y'' + y = 1 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Задачи по теме «Интегралы Эйлера: Гамма и Вета - функции»

Задача №1.20. Вычислить интегралы с помощью
Гамма и Вета – функций

вариант№		вариант№	
1	$\int\limits_0^{+\infty} x^4 \cdot e^{-x^2} dx$	2	$\int\limits_0^1 \ln^5(\frac{1}{x}) dx$
3	$\int\limits_0^1 x^4 \cdot \sqrt[3]{1-x^3} dx$	4	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$
5	$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx$	6	$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{tgx} dx$
7	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$	8	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$
9*	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \cdot \ln x}{1+x^3} dx$	10*	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx$

ЧАСТЬ 2

Типовой расчет

Решение задач типового расчета позволяет успешно подготовиться к выполнению контрольных работ и к сдаче экзамена (зачета). Наличие выполненного типового расчета является необходимым условием допуска студента к сдаче экзамена (зачета) по курсу.

Весь теоретический материал, необходимый для выполнения типового расчета, представлен в части 3.

Задача №2.1. Решить уравнение. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

вариант №	уравнение	вариант №	уравнение
1	$z^6 - 4z^3 + 3 = 0$	16	$z^4 + 8iz^2 - 16 = 0$
2	$e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$	17	$\sin z = -3i$
3	$z^4 - 4z^2 + 8 = 0$	18	$z^4 + 2z^2 + 4 = 0$
4	$e^{4z} + 2e^{2z} + 4 = 0$	19	$\cos z = 2i$
5	$\mathrm{e}^{8\mathrm{z}} + 8ie^{4z} - 16 = 0$	20	$\mathrm{sh}\, z = -4i$
6	$e^{2z} + 3e^z - 4 = 0$	21	$z^8 + 32iz^4 - 256 = 0$
7	$z^6 + 16z^3 + 64 = 0$	22	$tg\, z = -2i$
8	$\sin z = 2$	23	$e^{6z} + 14ie^{3z} - 49 = 0$
9	$z^8 + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 0$	24	$\mathrm{th}\, z = 3$
10	$\cos\ z = -3$	25	$\mathrm{z}^4 - 2\mathrm{iz}^2 - 1 = 0$
11	$z^6 + i\frac{2+i}{1-2i} = 0$	26	$z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$
12	$\mathrm{sh}\, z = -5$	27	$\sin 3z \cos 3z = 4$
13	$z^4 - z^2 + 1 = 0$	28	$\cos^2 3z - \sin^2 3z = 2$
14	$chz - 6 = 0$	29	$sh^2 z + \mathrm{ch}^2 z = 3$
15	$\cos 8z = 2$	30	$ch9z = 6$

<u>Задача №2.2</u>. Исследовать заданную функцию $f(z)$ на аналитичность.

вариант №	$f(z)$	вариант №	$f(z)$
1	$f(z) = ie^{3z-i^2}$	2	$f(z) = z^2 + 5\overline{z} - 7i$
3	$f(z) = cos(iz - 1)$	4	$f(z) = cos(i\overline{z} - 1)$
5	$f(z) = sh2z + i$	6	$f(z) = \frac{i}{z} + z^2$
7	$f(z) = (iz)^2 + 5z + 3i$	8	$f(z) = \lvert z \rvert z + i$
9	$f(z) = ie^{(iz-1)}$	10	$f(z) = sin(zi + 2)$

11	$f(z) = ch3z - i$	12	$f(z) = z\overline{z} + z^2 + 4$
13	$f(z) = 3z^2 - 4z + 2i$	14	$f(z) = shiz + \mathrm{Re}z$
15	$f(z) = ie^{5z} + z$	16	$f(z) = i\lvert z\rvert - z^2$
17	$f(z) = iz \cdot \mathrm{Re}5z$	18	$f(z) = cosi(z + i)$
19	$f(z) = (z + 2) \cdot \mathrm{Im}3z$	20	$f(z) = \frac{\mathrm{Re}2z}{z}$
21	$f(z) = i(z + i)^2 - 4z$	22	$f(z) = cos(\overline{z} + i)$
23	$f(z) = ze^{-3z} - i$	24	$f(z) = \frac{4}{z} - \mathrm{Im}z$
25	$f(z) = ichiz$	26	$f(z) = (2z + 5i)\mathrm{Re}z$
27	$f(z) = cosiz - chz$	28	$f(z) = \frac{z}{\lvert z\rvert}i$
29	$f(z) = -iz^3 + 2i$	30	$f(z) = ie^z + (z + i)^2$

Задача №2.3*. Задана функция $\omega = f(z) = az^n + b$; $|z| \le R$; $\alpha_1 \le argz \le \alpha_2$. Определить область D_2 плоскости W, на которую отобразится область D_1 плоскости Z, заданной функцией $\omega = f(z)$.

Начертить D_1 и D_2.

(Задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

вариант №	n	a	b	R	α_1	α_2
1	2	$-1 + i$	i	2	$-\frac{\pi}{4}$	0
2	2	$1 + i$	$-i$	3	0	$\frac{\pi}{4}$
3	2	$1 - i$	$1 + 3i$	1	0	$\frac{\pi}{2}$

4	2	$1+i\sqrt{3}$	$5i$	5	0	$\frac{\pi}{6}$
5	2	$-1+i\sqrt{3}$	$2-i$	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
6	2	$\sqrt{3}+i$	$1+5i$	1	0	$\frac{\pi}{4}$
7	2	$-\sqrt{3}+i$	$-1-i$	2	0	$\frac{2\pi}{3}$
8	2	$-\sqrt{3}-i$	$2i$	3	0	$\frac{\pi}{6}$
9	2	$\sqrt{3}-i$	$-3i$	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
10	2	$2+2i$	$1+4i$	2	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
11	3	$2-2i$	$2-i$	3	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
12	3	$-1+i$	$5i$	1	0	$\frac{\pi}{2}$
13	3	$-1-i$	$3-i$	3	0	$\frac{\pi}{4}$
14	3	$-2+2i$	$5+i$	2	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
15	2	$1+i$	$-i$	2	0	$\frac{\pi}{4}$
16	2	$-1-i$	i	3	$-\frac{\pi}{4}$	0
17	2	$-1+i$	$-1-3i$	1	$-\frac{\pi}{6}$	0
18	2	$-1-i\sqrt{3}$	$-5i$	5	$-\frac{\pi}{3}$	0

19	2	$1-i\sqrt{3}$	$-2+2i$	1	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$
20	2	$-\sqrt{3}-i$	$-1-2i$	1	$-\frac{\pi}{12}$	0
21	2	$\sqrt{3}-i$	$1+i$	2	$-\frac{\pi}{3}$	0
22	2	$\sqrt{3}+i$	$-2i$	3	$-\frac{\pi}{6}$	0
23	2	$-\sqrt{3}+i$	$3i$	5	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
24	3	$-2-2i$	$-1-2i$	2	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
25	3	$-2+2i$	$-2+i$	3	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$

Задача №2.4. Получить все разложения $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$.
Если z_0 – особая точка, указать тип этой особой точки и найти $\underset{z=z_0}{res} f(z)$.

вариант №	z_0	$f(z)$
1	-1	$\frac{z-1}{z(z+1)}$
2	-2	$\frac{z^2+2z-4}{z^2(z-2)}$
3	2	$\frac{2z^2-5z+4}{z(z-2)^2}$
4	1	$\frac{sinz}{z-1}$
5	1	$\frac{z+2}{z^2-1}$

6	2	$\dfrac{z}{(z+2)(z+3)}$
7	-1	$\dfrac{3z-1}{z^2-2z-3}$
8	0	$\dfrac{z}{z^2+4}$
9	1	$\dfrac{2z^2-z+1}{z^3-z}$
10	0	$\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$
11	-2	$\dfrac{2z^2+z+2}{z^2(z+2)}$
12	-1	$\dfrac{z^3+3z^2+2z+1}{z^2(z+1)^2}$
13	1	$\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$
14	1	$\dfrac{3z^2-1}{z(z^2-1)}$
15	2	$\dfrac{z^2-3z+5}{(z+1)(z-2)^2}$
16	3	$\dfrac{1}{z^2-7z+12}$
17	0	$\dfrac{z^2+z+1}{z^3+z}$
18	-1	$\dfrac{2}{z^2-4z+3}$
19	-3	$\dfrac{2z^2+z+3}{z^2(z+3)}$
20	-1	$\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$

21	0	$\dfrac{2z^2+5z+4}{z^2(z+4)}$
22	0	$\dfrac{1}{z^2-5z+6}$
23	0	$\dfrac{3z^2-1}{z^2(z-1)}$
24	-1	$\dfrac{2z^2+4z+1}{z(z+1)^2}$
25	3	$\dfrac{9-2z}{z(3-\mathrm{z})^2}$
26	$-5i$	$(z+5i)^6\sin\left(\dfrac{2}{z+5i}\right)$
27	0	$\dfrac{z^2}{z^2+9}$
28	4	$(z-4)^5\cos\left(\dfrac{3}{z-4}\right)$
29	$-6i$	$(z+6i)^8 e^{\frac{5}{z+6i}}$
30	3	$\dfrac{z+4}{z^2-9}$

<u>**Задача №2.5.**</u> Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$, установить их тип и найти вычеты в этих точках.

вариант №	$f(z)$	вариант №	$f(z)$
1	$f(z)=\dfrac{z^3}{1+z^4}$	2	$f(z)=e^{\frac{1}{z-2}}$
3	$f(z)=\dfrac{sinz}{z^2}$	4	$f(z)=z^2\left(\dfrac{1}{z}-sin\dfrac{1}{z}\right)$

5	$f(z)=\dfrac{1-cosz}{z^3}$	6	$f(z)=\dfrac{1}{z+z^2}$
7	$f(z)=\dfrac{z+1}{z^4+16}$	8	$f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^3(z+2)^2}$
9	$f(z)=\dfrac{1}{z+2}e^{\frac{1}{z+2}}$	10	$f(z)=\dfrac{e^z}{1+z^2}$
11	$f(z)=\dfrac{sinz}{z(z^3+1)}$	12	$f(z)=\dfrac{1}{z^5-4z^3}$
13	$f(z)=\dfrac{sinz}{z^3(z-1)^3}$	14	$f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2(z+1)}$
15	$f(z)=\dfrac{cosz}{(z^3+1)z^2}$	16	$f(z)=\dfrac{z^3+1}{(z+3)^2(z+1)}$
17	$f(z)=\dfrac{z^2}{1-cosz}$	18	$f(z)=\dfrac{1-cos2z}{z^2(z+1)}$
19	$f(z)=\dfrac{1}{z^3}cos\dfrac{1}{z}$	20	$f(z)=\dfrac{1}{z(1-e^{2z})}$
21	$f(z)=\dfrac{e^z-1}{(z^2)(z-1)}$	22	$f(z)=\dfrac{1}{z^4-z^2}$
23	$f(z)=\dfrac{sin(z-3)}{(z-3)(z-4)^3}$	24	$f(z)=\dfrac{cos(z-5)-1}{(z-5)^3(z+3)}$
25	$f(z)=\dfrac{sin(z-1)}{(z-1)^3(z+4)^3}$	26	$f(z)=\dfrac{3}{z-2}e^{\frac{1}{z-2}}$
27	$f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{(z-1)^3}}$	28	$f(z)=\dfrac{1-e^{z-2}}{(z-2)(z+3)^3}$
29	$f(z)=z^2\left(\dfrac{1}{z}-cos\dfrac{1}{z}\right)$	30	$f(z)=\dfrac{z^2+3}{z^2-z-2}$

Задача №2.6. Вычислить интеграл по замкнутому контуру $\int_C f(z)dz$ с помощью основной теоремы о вычетах.

вариант №	$f(z)$	C

1	$\dfrac{\cos\pi z}{(2z-1)^2}$	$\lvert z\rvert = 1$
2	$\dfrac{z}{\mathrm{sh}^2\pi z}$	$\lvert z\rvert = \dfrac{1}{2}$
3	$\dfrac{sh\,\pi z}{(z+4)(z^2+4)}$	$\lvert z\rvert = 5$
4	$\dfrac{1}{z^4+16}$	$\lvert z-2\rvert = 2$
5	$\dfrac{z}{z^3+8}$	$\lvert z-2\rvert = 2\sqrt{2}$
6	$\dfrac{2z-1}{\cos^2\pi z}$	$\left\lvert z-\dfrac{1}{2}\right\rvert = \dfrac{1}{2}$
7	$\dfrac{e^z}{z(z^2+2z+5)}$	$\lvert z+1-2i\rvert = 1$
8	$\dfrac{\sin 2z}{z^2(z^2+4)}$	$\lvert z\rvert = 1$
9	$\dfrac{\sin z}{z^2(z-2)^2}$	$\lvert z\rvert = 1$
10	$\dfrac{z^3}{z^4-1}$	$\lvert z+1\rvert = 1$
11	$\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$	$\lvert z-2\rvert = \dfrac{1}{2}$
12	$\dfrac{\cos z}{z^3-z^2-2z}$	$\lvert z+1\rvert = 2$
13	$\dfrac{sh\,z}{z(z^2+2z+5)}$	$\lvert z+1+2i\rvert = 1$
14	$\dfrac{e^z}{z(z-1)^2(z-4)}$	$\lvert z\rvert = 2$
15	$\dfrac{\cos z}{z^2(z+1)}$	$\lvert z\rvert = \dfrac{1}{2}$

16	$\dfrac{e^z}{z^4+8z^2-9}$	$\lvert z\rvert=2$
17	$\dfrac{e^z}{z(z-\pi i)}$	$\lvert z-3i\rvert=1$
18	$\dfrac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}$	$\lvert z\rvert=2$
19	$\dfrac{e^z}{z^3(z-2)^2}$	$\lvert z-2\rvert=1$
20	$\dfrac{e^z}{(z-1)^2z}$	$\lvert z-2\rvert=\dfrac{3}{2}$
21	$\dfrac{z}{z^4+1}$	$(x-1)^2+\dfrac{y^2}{8}=1$
22	$\dfrac{1}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$\lvert z+2\rvert=1$
23	$\dfrac{z}{\cos z}$	$\left\lvert z-\dfrac{\pi}{2}\right\rvert=\dfrac{\pi}{2}$
24	$\dfrac{\mathrm{ch}^2 z}{z^2(z+2)(z-1)}$	$\lvert z+1\rvert=\dfrac{3}{2}$
25	$\dfrac{z^2+1}{\mathrm{sh}\, 2z}$	$\left\lvert z-\dfrac{\pi i}{2}\right\rvert=1$
26	$\dfrac{4}{\mathrm{ch}\, z}$	$\lvert z\rvert=2$
27	$\dfrac{1}{(z^2+4)^3}$	$\dfrac{(y-1)^2}{4}+x^2=1$
28	$\mathrm{ctg}\, 3z$	$\left\lvert z-\dfrac{\pi}{2}\right\rvert=1$
29	$\dfrac{3z}{\sin z}$	$\lvert z-\pi\rvert=5$
30	$\dfrac{e^{8z}-1}{6z^2(z^2+1)}$	$\lvert z+i\rvert=\dfrac{5}{2}$

<u>Задача №2.7</u>. Вычислить несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с помощью вычетов.

вариант №	$f(x)$	(a, b)
1	$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}$	$(0, +\infty)$
2	$\frac{(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2+9)}$	$(-\infty, +\infty)$
3	$\frac{x-3}{x^4+5x^2+4}$	$(-\infty, +\infty)$
4	$\frac{x+1}{(x^2+9)(x^2+4)}$	$(-\infty, +\infty)$
5	$\frac{x+2}{(x^2+16)(x^2+1)}$	$(-\infty, +\infty)$
6	$\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}$	$(-\infty, +\infty)$
7	$\frac{x-1}{x^4+37x^2+36}$	$(-\infty, +\infty)$
8	$\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$	$(-\infty, +\infty)$
9	$\frac{x^2+1}{x^4+1}$	$(0, +\infty)$
10	$\frac{x+3}{x^4+5x^2+4}$	$(-\infty, +\infty)$
11	$\frac{1}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$	$(-\infty, +\infty)$
12	$\frac{x+4}{(x^2+4)(x^2+1)}$	$(-\infty, +\infty)$
13	$\frac{1}{(x^2+1)^3}$	$(0, +\infty)$

14	$\dfrac{(x^2+1)}{(x^2+9)(x^2+16)}$	$(-\infty,+\infty)$
15	$\dfrac{x-5}{(\mathrm{x}^2+16)(\mathrm{x}^2+1)}$	$(-\infty,+\infty)$
16	$\dfrac{\mathrm{x}^2}{x^4+10x^2+9}$	$(0,+\infty)$
17	$\dfrac{x^2}{(x^2+4)^3}$	$(0,+\infty)$
18	$\dfrac{x^2+5}{x^4+26x^2+25}$	$(-\infty,+\infty)$
19	$\dfrac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}$	$(-\infty,+\infty)$
20	$\dfrac{1}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$	$(-\infty,+\infty)$
21	$\dfrac{x^2}{\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}^2+4}$	$(0,+\infty)$
22	$\dfrac{x^2}{x^4+29x^2+100}$	$(0,+\infty)$
23	$\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$	$(-\infty,+\infty)$
24	$\dfrac{x^2}{(x^2+25)(x^2+9)}$	$(-\infty,+\infty)$
25	$\dfrac{x+6}{(\mathrm{x}^2+4)(x^2+9)}$	$(-\infty,+\infty)$
26	$\dfrac{1}{(x^2+1)^4}$	$(-\infty,+\infty)$
27	$\dfrac{2x^2+13x}{x^4+13x^2+36}$	$(-\infty,+\infty)$
28	$\dfrac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}$	$(-\infty,+\infty)$

29	$\dfrac{6}{(x^2+9)(x^2+1)}$	$(0,+\infty)$
30	$\dfrac{x^2}{(x^2+81)(x^2+16)}$	$(0,+\infty)$

<u>Задача №2.8</u>. Вычислить несобственный интеграл $\int_a^b f\,(x)dx$ с помощью вычетов.

вариант №	$f(x)$	(a,b)
1 и 16	$\dfrac{(x+1)cos3x}{x^2+4x+104}$	$(-\infty,+\infty)$
2 и 17	$\dfrac{(x+1)sin2x}{x^2+2x+2}$	$(-\infty,+\infty)$
3 и 18	$\dfrac{(x-1)cosx}{x^2-4x+5}$	$(-\infty,+\infty)$
4 и 19	$\dfrac{x^3sinx}{x^4+5x^2+4}$	$(-\infty,+\infty)$
5 и 20	$\dfrac{xsinx}{x^2+2x+10}$	$(-\infty,+\infty)$
6 и 21	$\dfrac{xcosx}{x^2-2x+10}$	$(-\infty,+\infty)$
7 и 22	$\dfrac{(x^3+5x)sinx}{x^4+10x^2+9}$	$(0,+\infty)$
8 и 23	$\dfrac{xsinx}{x^2+9}$	$(0,+\infty)$
9 и 24	$\dfrac{cosx}{x^2+4}$	$(0,+\infty)$

10 и 25	$\frac{xsinx}{x^2+25}$	$(-\infty,+\infty)$
11 и 26	$\frac{xsinx}{(x^2+1)^2}$	$(0,+\infty)$
12 и 27	$\frac{cosx}{x^2+9}$	$(0,+\infty)$
13 и 28	$\frac{xsinx}{x^4+5x^2+4}$	$(-\infty,+\infty)$
14 и 29	$\frac{xcosx}{x^4+5x^2+6}$	$(-\infty,+\infty)$
15 и 30	$\frac{3cosx}{x^2+16}$	$(0,+\infty)$

Задача №2.9. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области *Д*.

вариант №	уравнение	область *Д*
1	$z^5-5z^2+2z+1=0$	$1<\|z\|<2$
2	$z^6-7z^5+3z^3-z-1=0$	$1<\|z\|<2$
3	$z^4-5z^3-z^2-1=0$	$\frac{1}{2}<\|z\|<1$
4	$2z^5-3z^3+2z^2-5=0$	$\frac{1}{2}<\|z\|<2$
5	$3z^4+2z^3-z^2-z+3=0$	$\frac{1}{2}<\|z\|<2$
6	$2z^3-7z^2+3z+1=0$	$1<\|z\|<4$

7	$2z^5 - 8z^4 + z^3 + 2z^2 + z - 1 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
8	$z^5 - 4z^3 - 10z^2 + 3 = 0$	$1 < \|z\| < 3$
9	$3z^6 - 4z^4 + 5z^2 - 15z - 1 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
10	$2z^4 + 4z^3 - 17z^2 + 3z - 7 = 0$	$1 < \|z\| < 5$
11	$5z^5 + 4z^4 - 3z^3 - 2z^2 - 17 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
12	$z^8 - 3z^5 + 2z^2 - 12z - 3 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
13	$5z^4 + 2z^3 - 13z^2 + 4z + 1 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
14	$2z^4 + 3z^3 - z^2 + 11z - 1 = 0$	$\frac{1}{2} < \|z\| < 3$
15	$2z^5 - 5z^4 + 5z - 1 = 0$	$2 < \|z\| < 3$
16	$z^6 - 10z^3 + 2z^2 + 3z - 1 = 0$	$2 < \|z\| < 3$
17	$z^7 - 5z^5 + 2z^4 + 1 = 0$	$1 < \|z\| < 3$
18	$3z^7 + z^6 - 9z^4 + 2z^2 - 2 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
19	$10z^4 - z^3 + 4z^2 - z - 3 = 0$	$\frac{1}{2} < \|z\| < 1$
20	$2z^3 - 3z^2 - 7z - 1 = 0$	$1 < \|z\| < 3$
21	$z^5 + 2z^4 - z^3 - 3z^2 + 13z - 5 = 0$	$1 < \|z\| < 4$

22	$z^5 - 2z^2 + 5z + 1 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
23	$z^4 - 6z^3 + z^2 - 10z + 1 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
24	$z^3 - 17z^2 + 25z - 5 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
25	$4z^3 + 10z^2 - 3z + 1 = 0$	$2 < \|z\| < 3$
26	$3z^3 + 9z^2 - 5z - 1 = 0$	$2 < \|z\| < 4$
27	$2z^4 - z^3 + 6z^2 - z - 1 = 0$	$\frac{1}{4} < \|z\| < 1$
28	$z^6 - 5z^3 + z^2 + 1 = 0$	$\frac{1}{2} < \|z\| < 1$
29	$z^5 - 10z = -3$	$1 < \|z\| < 2$
30	$z^4 - 3z^3 = 1$	$1 < \|z\| < 2$

Задача №2.10. Задано изображение $\boldsymbol{g(p)}$. С помощью вычетов найти его оригинал.

вариант №	$g(p)$	вариант №	$g(p)$
1	$\frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$	2	$\frac{p+1}{p^2(p-2)}$
3	$\frac{1}{(p-4)(p^2+9)}$	4	$\frac{p+1}{(p-1)(p+2)^2}$
5	$\frac{p-1}{(p+1)(p^2+1)}$	6	$\frac{1}{(p-1)(p^2-2p+2)}$

7	$\frac{p+1}{(p-1)(p+2)(p-3)}$	8	$\frac{1}{p^3+2p^2+p}$
9	$\frac{p-1}{(p^2+4)p^2}$	10	$\frac{p}{p^4-1}$
11	$\frac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}$	12	$\frac{1}{(p^2+4)(p+4)}$
13	$\frac{p}{(p^2+1)^2}$	14	$\frac{1}{(p^2-4p)^2}$
15	$\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$	16	$\frac{1}{p^2(p^2+1)}$
17	$\frac{1}{(p+3)(p+2)^2}$	18	$\frac{p}{(p^2+4)(p-1)}$
19	$\frac{1}{(p^2+9)p^2}$	20	$\frac{p+1}{p^3+4p^2+4p}$
21	$\frac{p}{(p-2)(p+4)(p+1)}$	22	$\frac{p}{(p^2-9)^2}$
23	$\frac{p}{(p^2-4)^2}$	24	$\frac{1}{(p^2+1)(p+1)^2}$
25	$\frac{p}{(p-1)(p+2)^2}$	26	$\frac{1}{(p+3)(p+4)^2}$
27	$\frac{1}{p^2(p-4)}$	28	$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+9)}$
29	$\frac{p}{p^4-81}$	30	$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4)}$

Задача №2.11. Вычислить заданный интеграл
с помощью Гамма и Вета - функций.

вариант №		вариант №	

1и 16	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2+2x} dx$	2 и 17	$\int_{0}^{\pi/2} \sin^2(2x) \cdot \cos^4 x dx$
3 и 18	$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(16+x)^2} dx$	4 и 19	$\int_{0}^{3} x \cdot \sqrt[3]{27-x^3} dx$
5 и 20	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^4}{(9+x^2)^3} dx$	6 и 21	$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[6]{64-x^6}}$
7 и 22	$\int_{0}^{\pi/2} \sin^4(2x) \cdot \cos^2 x dx$	8 и 23	$\int_{0}^{1} x^7 \cdot \sqrt[3]{1-x^3} dx$
9 и 24	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^4}{64+x^6} dx$	10 и 25	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2-4x} dx$
11 и 26	$\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt[4]{81-x^4}}$	12 и 27	$\int_{0}^{\pi/4} \sqrt[3]{tg\, 2x} dx$
13 и 28	$\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{125+x^3}$	14 и 29	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^3 dx}{729+x^6}$
15 и 30	$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{8+x^3}$		

ЧАСТЬ 3

Основные определения и теоремы курса, примеры решения задач

Содержание

§1. Комплексные числа и действия над ними

1.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 1.1. *Комплексным числом z называется выражение вида*

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая условием $i^2 = -1$.

Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Такое представление комплексного числа z называется алгебраической формой комплексного числа.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + iy$.

Определение 1.2. *Комплексные числа* $\boldsymbol{z_1 = x_1 + iy_1}$ *и* $\boldsymbol{z_2 = x_2 + iy_2}$ *считаются равными тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{x_1 = x_2,\ y_1 = y_2}$**.**

Пример 1.1.

Решить уравнение $(3 + 2i)x + (2 - i)y = -1 + 4i$.

Решение. Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$$(3x + 2y) + (2x - y)i = -1 + 4i.$$

Из определения равенства двух комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 1$, $y = -2$.

1.2 Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой M с координатами (x, y), либо вектором, начало которого находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$ (см. рис.1).

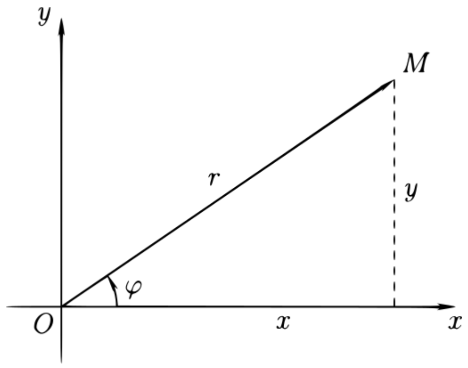


Рис. 1

Если $y = 0$, то $z = x + i \cdot 0 = x$, то есть получаем обычное действительное, расположенное на оси OX, число. Если $x = 0$, то $z = iy$. Такие числа называются чисто мнимыми. Они изображаются точками на оси OY.

Определение 1.3. *Длина вектора* $\boldsymbol{z}(\overline{\boldsymbol{OM}})$ *называется модулем комплексного числа и обозначается*

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.1}$$

Определение 1.4. *Угол, образованный вектором* $\overrightarrow{OM}$ *с положительным направлением оси* Ox, *называется аргументом комплексного числа* z *и обозначается* $Arg\ z$ *:*

$$Arg\ z = arg\ z + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

где $\varphi = arg\ z$ *- это главное значение* $Arg\ z$, *определяемое условиями*

$-\pi < \varphi \leq \pi$.

В зависимости от положения точки на комплексной плоскости,

аргумент комплексного числа можно находить, используя соотношения

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} . \tag{1.2}$$

Отметим, что аргумент числа $z = 0$ не определен.

<u>Пример 1.2.</u>

Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Решение. Модуль комплексного числа вычислим по формуле (1.1)

$$|z| = r = \left|-1 + \sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Для нахождения аргумента определим положение числа на комплексной плоскости: $z = -1 + \sqrt{3}i$ лежит в II четверти. Используя формулы (1.2)

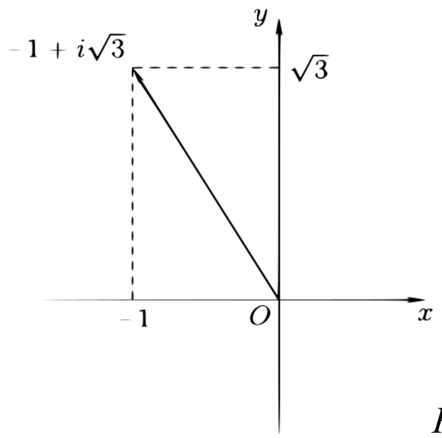


Рис. 2

найдем (см. рис. 2) $\varphi = argz = \frac{2\pi}{3}$.

Отметим, что

$$Arg\ z = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

<u>Пример 1.3.</u>

Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -5i$.

Решение. Число $z = -5i$ находится на мнимой оси: $x = 0$, $y = -5 < 0$. Модуль z по формуле (1.1) $|z| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$.

$arg\ z = -\frac{\pi}{2}$ из (1.2), при этом $Arg\ z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

1.3 Действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение и деление)

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Определение 1.5. *Суммой* $\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}$ *комплексных чисел* $\mathbf{z_1}$ *и* $\mathbf{z_2}$ *называется комплексное число*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Определение 1.6. *Разностью* $\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}$ *комплексных чисел* $\mathbf{z_1}$ *и* $\mathbf{z_2}$ *называется комплексное число*

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Определение 1.7. *Произведением* $z_1 z_2$ *комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *называется комплексное число*

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Определение 1.8. *Частным* $\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}}$ *от деления комплексного числа* $\boldsymbol{z_1}$ *на комплексное число* $\boldsymbol{z_2 \neq 0}$ *называется такое комплексное число* $\boldsymbol{z}$*, которое удовлетворяет уравнению* $\boldsymbol{z z_2 = z_1}$.

Для частного имеет место формула

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 1.4.

Вычислить $(3 - i)(2 + 5i)$.

Решение. Раскрывая скобки и учитывая $i^2 = -1$, получим

$$(3 - i)(2 + 5i) = 6 + 15i - 2i - 5i^2 = 6 + 5 + 13i = 11 + 13i.$$

Пример 1.5.

Вычислить $\frac{-2-3i}{1+4i}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю $1 - 4i$.

$$\frac{-2 - 3i}{1 + 4i} \cdot \frac{1 - 4i}{1 - 4i} = \frac{-2 - 12 - 3i + 8i}{1 + 16} = \frac{-14 + 5i}{17} = -\frac{14}{17} + \frac{5}{17}i.$$

Пример 1.6.

Вычислить i^{27}.

Решение. Поскольку $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, и т. д., имеем

$$i^{27} = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$$

1.4 Тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ можно записать в тригонометрической форме (см. рис. 1)

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi), \qquad (1.3)$$

где $r = |z|, \varphi -$ аргумент z.

Пример 1.7.

Записать в тригонометрической форме $z = -\sqrt{3} - i$.

Решение. Модуль z найдем по формуле (1.1)

$$|z| = r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$$

Для нахождения аргумента определим положение z на комплексной плоскости: z лежит в III четверти (см. рис.3), тогда по (1.2)

$$\varphi = arg\ z = -\frac{5\pi}{6}.$$

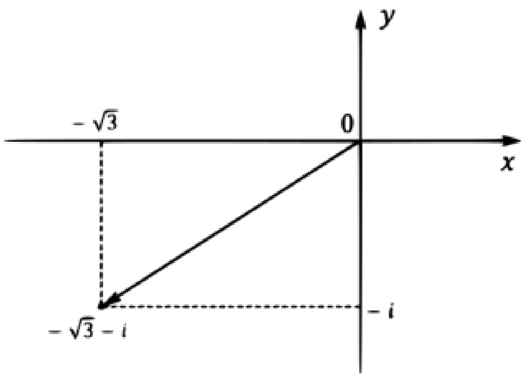


Рис. 3

Подставляя значения модуля и аргумента в формулу (1.3), получим

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left[cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

1.5 Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме

$z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1), z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$.

1. **Произведение** $z_1 z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 находится по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2. **Частное двух комплексных** чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

3. **Возведение** комплексного числа $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ **в натуральную степень n** производится по формуле

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + isin(n\varphi)), \tag{1.4}$$

Часто формулу (1.4) также называют формулой Муавра.

4. **Корень *n-й* степени из комплексного числа** $z \neq 0$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{1.5}$$

где $\varphi = argz, k = 0,1,2,\ldots,n-1.$

Пример 1.8.

Вычислить $(2-2i)^{10}$.

Решение. Представим число $z = 2 - 2i$ в тригонометрической форме (1.3):

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Применяя формулу (1.4), получим

$$(2-2i)^{10} = \left(2\sqrt{2}\right)^{10}\left[cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^{15}(cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - isin\left(\frac{5\pi}{2}\right)) = -2^{15}\cdot i.$$

Пример 1.9.

Вычислить $\sqrt[4]{-16}$.

Решение. Представим число $z = -16$ в тригонометрической форме. Число лежит на действительной оси: $x < 0, y = 0$.

Модуль $|-16| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16,$ аргумент $\varphi = \pi$.

По формуле (1.5)

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + isin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) =$$
$$= 2\left(cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + isin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3.$$

Полагая последовательно $k = 0,1,2,3$, выпишем все корни

$$k = 0: z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$k = 1: z_1 = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right),$$
$$k = 2: z_2 = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right),$$
$$k = 3: z_3 = 2\left(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right).$$

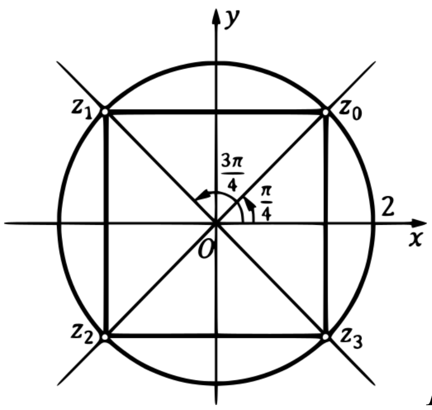


Рис.4

На плоскости корни располагаются на окружности радиуса 2 в вершинах правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (см. рис. 4)

<u>Пример 1.10.</u>

Решить уравнение $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Решение. Обозначим $t = z^2$. Уравнение примет вид $t^2 - 2t + 4 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $t_2 = 1 - \sqrt{3}i$, откуда $z_{1,2} = \sqrt{t_1}$, $z_{3,4} = \sqrt{t_2}$.

Пусть $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$. Находим модуль и аргумент комплексного числа

$\left|1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, \quad arg\left(1+\sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{3}$. Далее по формуле (1.5) получаем

$$z_{1,2} = \sqrt{1+\sqrt{3}i} = \sqrt{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2} + isin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right), \qquad k = 0{,}1.$$

Откуда $\quad z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6}\right)$

По аналогии находим $z = \sqrt{1-\sqrt{3}i}$,

т.е. $z_3 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $z_4 = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Все корни находятся на окружности радиуса $R = \sqrt{2}$ (см. рис.5).

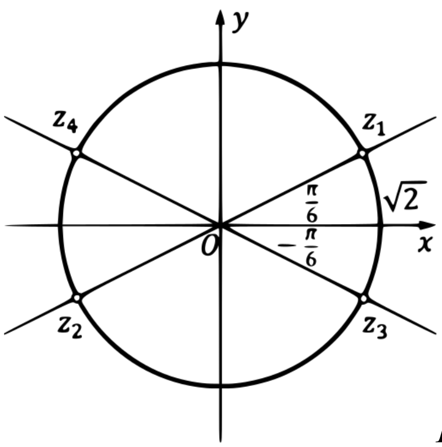


Рис. 5

1.6 Показательная форма записи комплексного числа

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi,$$

перепишем комплексное число в виде

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$, $\varphi -$ аргумент z.

Отметим, что

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

<u>Пример 1.11.</u> Записать комплексное число $z = -3-3i$ в тригонометрической и показательной форме.

Решение. Число z находится в III четверти. Найдем модуль и аргумент

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \qquad \varphi = arg\, z = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма записи z

$$z = 3\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

Показательная форма записи $z = 3\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

1.7 Изображение множеств на комплексной плоскости

Изобразить на комплексной плоскости линии и области, заданные уравнениями и неравенствами.

Пример 1.12. Изобразить $\mathrm{Re}\, z \le 3$.

Решение. $\mathrm{Re}\, z = x$, тогда неравенство можно переписать так: $x \le 3$. На плоскости xOy это определяет полуплоскость левее прямой $x = 3$ (см. рис. 6).

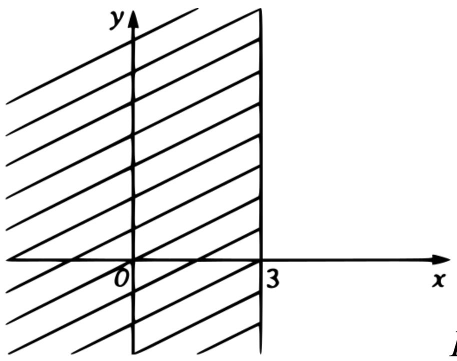


Рис. 6

Пример 1.13. Изобразить $|z| = 4$.

Решение. По определению, $|z|$ – это расстояние от начала координат до точки z, т.е. $|z| = 4$ – это геометрическое множество точек, равноудаленных от начала координат. Таким геометрическим местом является окружность с центром в начале координат радиуса $R = 4$.

Также можно вывести уравнение кривой алгебраическим способом. Из (1.1) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. уравнение переписывается в виде $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$, или $x^2 + y^2 = 4^2$ – это и есть уравнение окружности с центром в точке O и $R = 4$.

Пример 1.14. Изобразить $1 < |z - 1 + i| \le 2$.

Решение. $|z - 1 + i| = |z - (1 - i)| \le 2$

Это множество точек z, расстояние которых от точки $1-i$ не больше 2, то есть круг с центром в $1-i$ радиуса 2. Множество точек z таких, что

$1<|z-(1-i)|$ представляет собой внешность круга радиуса 1 с центром в точке $1-i$. Таким образом, исходное множество – кольцо с центром в точке $1-i$ (см. рис. 7).

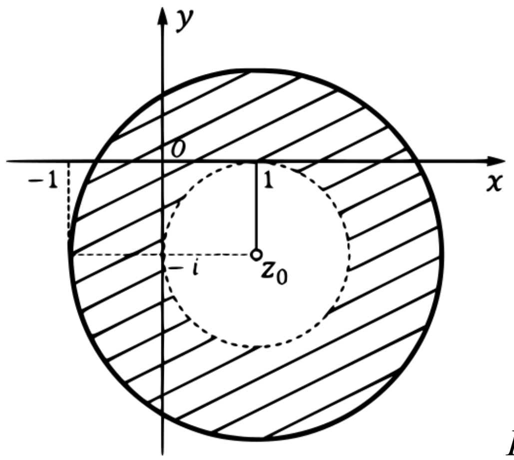


Рис. 7

<u>Пример 1.15.</u> Изобразить $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \geq 1.$

Решение: Пусть z не равно (-1). Умножим обе части неравенства на положительное число $|z+1|$, получим $|z-1| \geq |z+1|$.

Положим $z=x+iy$.

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \geq \sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

Возведем в квадрат:

$$(x-1)^2+y^2 \geq (x+1)^2+y^2.$$

Перенося в левую часть все слагаемые, получим $(x-1)^2-(x+1)^2 \geq 0$ или $-4x \geq 0$, или $x \leq 0$ – это левая полуплоскость вместе с границей $x=0$, причем выкалывается точка $z=-1$.

§ 2. Функции комплексного переменного

Сформулируем ряд основных определений, которые далее будут часто использоваться.

Определение 2.1. ***δ**-окрестностью точки* $\mathbf{z_0}$ *называется множество точек* $\mathbf{z}$*, лежащих внутри круга радиуса* $\boldsymbol{\delta}$ *с центром в точке* $\mathbf{z_0}$*, т. е.*

множество точек, удовлетворяющих неравенству $|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}| < \boldsymbol{\delta}$.

Определение 2.2. *Областью комплексной плоскости называется множество точек* $\boldsymbol{D}$, *обладающее следующими свойствами:*

1. *вместе с каждой точкой из D этому множеству принадлежит и некоторая окрестность этой точки, то есть некоторый круг без границы с центром в этой точке (свойство открытости);*
2. *две любые точки из D можно соединить ломаной, состоящей из точек D (свойство связности).*

Определение 2.3. *Область называется односвязной, если любую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.*

Определение 2.4. *Граничной точкой области* $\boldsymbol{D}$ *называют такую точку, которая сама не принадлежит* $\boldsymbol{D}$, *но в любой окрестности которой лежат точки этой области.*

Определение 2.5. *Совокупность граничных точек области* $\boldsymbol{D}$ *называют границей этой области Г(**D**).*

Определение 2.6. *Область* $\boldsymbol{D}$ *с присоединенной к ней границей Г(**D**) называется замкнутой областью и обозначается* $\overline{\boldsymbol{D}}$.

Определение 2.7. *Говорят, что в области* $\boldsymbol{D}$ *определена функция* $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ *с множеством значений E, если каждой точке* $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{D}$ *поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или целое множество (многозначная функция) значений* $\omega \in E$.

Например, $\omega = |z|$ – однозначная функция, $\omega = \sqrt[n]{z}$ – n-значная функция, т.к. имеет n корней, $\omega = Arg\, z$ – бесконечнозначная функция, т.к. слагаемое $2\pi k$, входящее в $Arg\, z$, принимает бесконечное число значений при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где $u(x,y) = \mathrm{Re} f(z)$ – действительная часть функции, $v(x,y) = \mathrm{Im} f(z)$ – мнимая часть функции.

Пример 2.1. Найти действительную и мнимую части функции

$$\omega = z^2 + i\bar{z}.$$

Решение. Положим $z = x + iy$, тогда $\omega = (x + iy)^2 + i(x - iy) = x^2 + 2xyi - y^2 + ix + y = (x^2 - y^2 + y) + i(2xy + x)$. Получаем

$u(x,y) = x^2 - y^2 + y$ – действительная часть функции,

$v(x,y) = 2xy + x$ – мнимая часть функции.

2.1 Элементарные функции комплексного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими формулами (здесь $z = x + iy$)

1. ***Дробно-рациональная функция***

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}.$$

В частности, рациональной функцией является многочлен $\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

2. ***Показательная функция*** $\boldsymbol{e^z}$ при $z=x+i\cdot y\in \mathbf{C}$ определяется равенством

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i\cdot \sin y).$$

В частности, при $z\in \mathbf{R}$ (т.е. при $y=0$) функция e^z совпадает с обычной экспонентой, а при $x=0$ получаем формулу Эйлера:

$$e^{i\cdot y} = \cos y + i\cdot \sin y.$$

Свойства показательной функции:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, где z_1, z_2 – комплексные числа,
в) $e^{z+2\pi k i} = e^z (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, т.е.

e^z – периодическая функция с периодом $2\pi i$.

3. ***Тригонометрические функции***

Из формулы Эйлера следует, что $\forall x\in \mathbf{R}$

$$\cos x = \frac{e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}}{2i}.$$

По аналогии с этими равенствами введем функции комплексного переменного cosz и sinz $\forall z\in \mathbf{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2i}. \qquad (2.1)$$

Функции $sinz$ и $cosz$ – периодические с периодом $T = 2\pi$. Справедливо основное тригонометрическое тождество: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Функции tgz и $ctgz$ определяются равенствами $tgz = \frac{sinz}{cosz}$, $ctgz = \frac{cosz}{sinz}$. Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. ***Гиперболические функции***

Гиперболические функции shz, chz, thz, $cthz$ определяются равенствами

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
$$thz = \frac{shz}{chz}, cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Основное гиперболическое тождество $ch^2 z - sh^2 z = 1$.

5. *Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями*

$$sinz = -ish(iz), cosz = ch(iz), tgz = -ith(iz),$$
$$ctgz = icth(iz), shz = -isin(iz), chz = \cos(iz),$$
$$thz = -itg(iz), cthz = ictg(iz).$$

6. ***Логарифмическая функция Ln z***, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\text{Ln}\, z = ln|z| + iArg\, z = ln|z| + i(arg\, z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.2}$$

Функция $\omega = \text{Ln}\, z$ является многозначной.

Главным значением Ln $\boldsymbol{z}$ *называется значение, получаемое при* $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$

$$lnz = ln|z| + iargz.$$

Свойства функции $Ln\, z$:

a) $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2$,

b) $\text{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Ln}\, z_1 - \text{Ln}\, z_2$.

7. ***Общая показательная функция*** определяется равенством

$$a^z = e^{z\text{Ln}a}, \tag{2.3}$$

где a – любое комплексное число, $a \neq 0$.

8. ***Общая степенная функция*** $w = z^a$, где a – любое комплексное число, $z \neq 0$

$$z^a = e^{a\text{Ln}z}. \tag{2.4}$$

Пример 2.2. Вычислить $sin(3 - i)$.

Решение. Используя формулы (2.1) получаем

$$sin(3-i)=\frac{1}{2i}\left[e^{i(3-i)}-e^{-i(3-i)}\right]=-\frac{i}{2}\left[e^{1+3i}-e^{-1-3i}\right]=$$

$$=-\frac{i}{2}\left[e(cos3+isin3)-e^{-1}(cos3-isin3)\right]=$$

$$=-i\left[cos3\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)+isin3\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)\right]=$$

$$=sin3ch1-icos3sh1.$$

<u>Пример 2.3.</u> Вычислить $\mathrm{Ln}(-1)$.

Решение. Из формулы (2.2) получаем

$$\mathrm{Ln}(-1)=ln|-1|+i(arg(-1)+2\pi k)=i(\pi+2\pi k)=$$

$$=(2k+1)\pi i, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

<u>Пример 2.4.</u> Вычислить i^{2i}.

Решение. Положим $a=i, z=2i$ и воспользуемся формулой (2.4)

$$i^{2i}=e^{2i\mathrm{Ln}i}.$$

Вычислим отдельно $\mathrm{Ln}(i)$. Используя формулу (2.2), получим:

$$\mathrm{Ln}(i)=ln|i|+i(argi+2\pi k)=i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),$$

$$|i|=\sqrt{0+1^2}=1, ln|i|=ln1=0, argi=\frac{\pi}{2},$$

$$i^{2i}=e^{2i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}=e^{-\pi-4\pi k}, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

<u>Пример 2.5.</u> Решить уравнение $sinz=3$, корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Решение. Используя формулу (2.1), уравнение можно переписать в виде $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=3$ или $e^{2iz}-6ie^{iz}-1=0$ – это квадратное уравнение относительно e^{iz}. Его корни

$$e^{iz}=3i\pm2\sqrt{2}i=i\left(3\pm2\sqrt{2}\right)$$

Прологарифмируем полученное равенство

$$iz=\mathrm{Ln}\left(i\left(3\pm2\sqrt{2}\right)\right)=ln\left|i\left(3\pm2\sqrt{2}\right)\right|+$$

$$+i\left(arg\left(i\left(3\pm2\sqrt{2}\right)\right)+2\pi k\right), k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Вычислим $\left|i\left(3\pm2\sqrt{2}\right)\right|=3\pm2\sqrt{2}$, $arg\left(i\left(3\pm2\sqrt{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$, получим

$$iz=ln\left(3\pm2\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),$$

отсюда вычислим

$$z=\frac{1}{i}ln\left(3\pm2\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}+2\pi k-iln\left(3\pm2\sqrt{2}\right).$$

Получили две серии корней

$$z_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k-iln\left(3+2\sqrt{2}\right), z_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k-iln\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Преобразуем z_2.

$$-ln\left(3-2\sqrt{2}\right)=ln\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=ln\left(3+2\sqrt{2}\right),$$

поэтому

$$z_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k+iln\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

Корни находятся на двух прямых, параллельных оси Ox и отстоящих от нее на расстояние $ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$ (см. рис. 8).

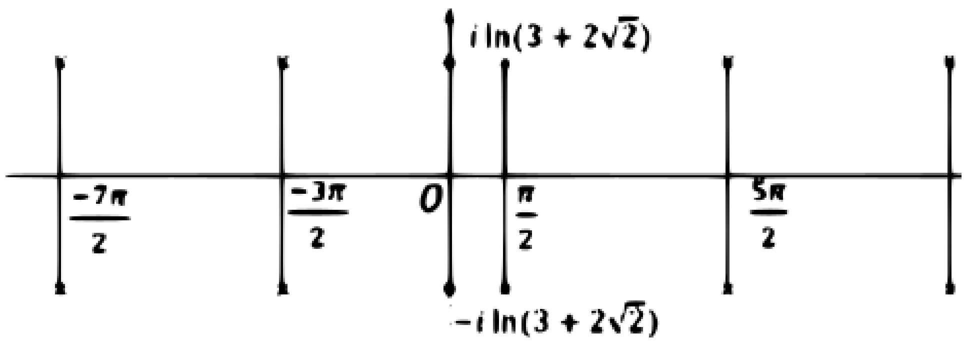


Рис. 8

2.2 Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть функция $f(z)$ определена и однозначна в некоторой окрестности точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0.

Определение 2.8. *Комплексное число A называется пределом однозначной функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех точек z, удовлетворяющих условию $0<|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$. В этом случае пишут* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \ \forall z, \text{такого что } 0<|z-z_0|<\delta,\Rightarrow$$

$|f(z)-A|<\varepsilon.$ z_0 *и* A *– конечные точки комплексной плоскости.*

Определение 2.9. *Однозначная функция $f(z)$, заданная в области D, называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f\,(z) = f(z_0)$.*

Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется непрерывной в этой области.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы функция комплексной переменной*

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$ по совокупности переменных x и y.

Таким образом, функция w = $f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x\ , y)$ непрерывны в этой же точке. Поэтому все свойства непрерывных функций двух действительных переменных переносятся без изменений на функции комплексного переменного.

Пример 2.6. Вычислить предел функции $\lim\limits_{z\to -2i} \frac{z^2+iz+2}{z+2i}$.

Решение. Непосредственная подстановка в числитель и знаменатель предельного значения аргумента $z = -2i$ обращает их в нуль и приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель на множители, сократим на $(z+2i)$, получим

$$\lim_{z\to -2i} \frac{z^2+iz+2}{z+2i} = \lim_{z\to -2i} \frac{(z+2i)(z-i)}{z+2i} = \lim_{z\to -2i}(z-i) = -3i.$$

2.3 Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D.

Обозначим

$$\Delta\omega = f(z+\Delta z) - f(z), \qquad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Определение 2.10. *Однозначная функция $\omega = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю. Этот предел называется производной функции $f(z)$ в данной точке z и обозначается $f'(z)$ или ω', т.е.*

$$\omega' = f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}.$$

Обычные правила дифференцирования функций действительного переменного остаются справедливыми для функций комплексного переменного.

Определение 2.11. *Однозначная функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если она дифференцируема в самой точке z_0 и в некоторой окрестности этой точки.*

Теорема 2.2. *Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x,y) и чтобы в этой точке имели место равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

называемые условиями Коши-Римана. При этом формулы для производной функции $f'(z)$ имеют вид:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

<u>Пример 2.7</u>. Исследовать функцию $f(z) = z^2$ на аналитичность.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции, подставив вместо $z = x + iy$:

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

т. е.

$$\mathrm{Re} f(z) = u(x,y) = x^2 - y^2, \mathrm{Im} f(z) = v(x,y) = 2xy.$$

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы во всех точках (x,y). Проверим выполнение теоремы 2.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Условия Коши-Римана выполнены во всех точках (x,y), т.е. выполнены условия теоремы 2.2, следовательно, $f(z) = z^2$ аналитическая функция на всей комплексной плоскости.

<u>Пример 2.8.</u> Исследовать функцию $f(z) = 3\overline{z} + 2$ на аналитичность.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции, подставим вместо $\overline{z} = x - iy$

$$f(z) = 3(x - iy) + 2 = (3x + 2) - 3yi,$$

т.е.

$$\mathrm{Re} f(z) = u(x,y) = 3x + 2, \mathrm{Im} f(z) = v(x,y) = -3y.$$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы во всех точках (x, y), проверим выполнение условий теоремы 2.2

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3, \frac{\partial v}{\partial y} = -3, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ - первое условие Коши-Римана не выполнено ни в одной точке комплексной плоскости. Значит, функция $\omega(z) = 3\bar{z} + 2$ нигде не дифференцируема, а следовательно, не является аналитической.

Свойства аналитических функций

Если $f_1(z)$, $f_2(z)$ аналитические функции в области D, то

1) $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$ – также аналитические функции в области D;

2) $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ - аналитическая функция во всех точках области D, где $f_2(z) \neq 0$.

При этом имеют место формулы

$$[f_1(z) \pm f_2(z)]' = f_1'(z) \pm f_2'(z),$$

$$[cf_1(z)]' = cf_1'(z), \left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \frac{f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)}{f_2^2(z)},$$

$$[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z).$$

2.4. Связь аналитических и гармонических функций

Определение 2.12. *Функция $\psi(x, y)$ называется гармонической в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Теорема 2.3. *Если функция*

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *аналитична в некоторой области D комплексной плоскости, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими функциями в соответствующей области плоскости (xy), т. е. $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Определение 2.13. *Две гармонические функции, связанные условиями Коши-Римана, называются сопряженными.*

Пример 2.9.

Показать, что функция $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ является гармонической. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по действительной части $u(x,y)$ и условию $f(0) = 2$.

Решение. Найдем частные производные функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Сложим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$. Получаем, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Функция $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ и искомая функция $v(x,y)$ должны удовлетворять условиям Коши-Римана. Используя одно из условий Коши-Римана, имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1$.

Интегрируем последнее уравнение по y (считая x постоянной), получаем

$$v(x,y) = \int (2x+1)\,dy + c(x) = (2x+1)y + c(x). \qquad (2.5)$$

Чтобы найти $c(x)$, используем второе условие Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Для этого дифференцируем $v(x,y)$ по переменной x и приравняем выражения: $2y + c'(x) = 2y$, т.е. $c'(x) = 0$. Отсюда находим $c(x) = c_1$, где c_1 – постоянная, т.е. $v(x,y) = (2x+1)y + c_1$. Следовательно,

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + x + i[(2x+1)y + c_1].$$

Тогда $f(z) = z^2 + z + ic_1$. Для нахождения c_1 воспользуемся условием $f(0) = 2$, $2 = ic_1$, т.е. $c_1 = -2i$,

окончательно $f(z) = z^2 + z + 2$.

2.5 Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Примеры конформных отображений

Рассмотрим функцию $\omega = f(z)$, аналитическую в точке z_0 , $f'(z_0) \neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $\omega = f(z)$ плоскости z на плоскость ω:

при $|f'(z_0)| > 1$ имеет место растяжение,

при $|f'(z_0)| < 1$ имеет место сжатие.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $\omega_0 = f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости ω при отображении $\omega = f(z)$.

Определение 2.14. *Отображение окрестности точки* z_0 *на окрестность точки* ω_0, *осуществляемое функцией* $\omega = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$ *и обладающее в точке* z_0 *свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений, называется конформным в точке* z_0.

Свойство сохранения углов означает: если при отображении $\omega = f(z)$ кривые γ_1 и γ_2 переходят соответственно в кривые Γ_1 и Γ_2, то угол φ между касательными k_1 и k_2 к кривым γ_1 и γ_2 в точке z_0 будет равен угла Φ между соответствующими касательными K_1 и K_2 к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке ω_0, т.е. $\Phi = \varphi$ (см. рис. 9).

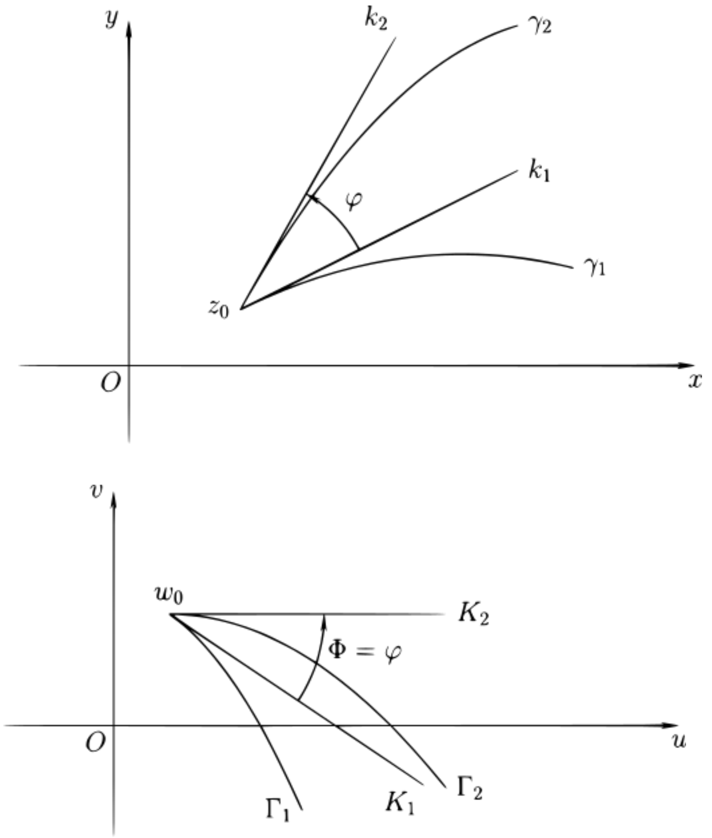


Рис. 4

Свойство постоянства растяжений: при отображении, осуществляемом аналитической функцией, $f'(z_0) \neq 0$ «малые элементы» в окрестности точки z_0 преобразуются подобным образом с коэффициентом $k = |f'(z_0)|$.

Рассмотрим примеры конформных отображений, осуществляемые линейной функцией $\omega = az + b$ и степенной $\omega = z^n$.

1. Линейная функция $\omega = az + b$, где a и b – постоянные комплексные числа $(a \neq 0)$. Пусть $a = re^{ia}$, $z = |z|e^{i\psi}$. Рассмотрим два преобразования, составляющие функцию ω:

$\omega_1 = az,$
$\omega = \omega_1 + b,$
$\omega_1 = re^{i\alpha} \cdot |z|e^{i\psi} = r|z|e^{i(\alpha+\psi)},$

т.е. $\omega_1 = r|z|$, $arg\omega_1 = \psi + \alpha$. Значит, функция ω_1 осуществляет преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом, равным r и поворот вокруг начала координат на угол α.

Преобразование $\omega = \omega_1 + b$ – параллельный перенос на вектор, соответствующего комплексному числу b.

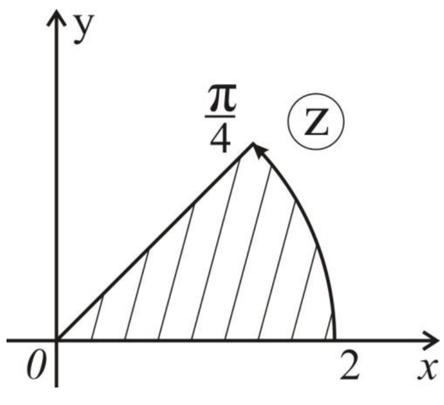
Таким образом, при отображении $\omega = az + b$ нужно вектор z повернуть на угол $\alpha = arga$, изменить его длину в $r = |a|$ раз и параллельно перенести на вектор b.

Пример 2.10. Определить область D_2 плоскости ω, на которую отобразится область D_1 плоскости z функцией $\omega = (1-i)z + \omega_1$.

Область D_1: $|z| \leq 2$, $0 \leq argz \leq \frac{\pi}{4}$.

Решение. Представим функцию $\omega = (1-i)z + 2i = \omega_1 + 2i$, где $\omega_1 = (1-i)z$. Коэффициент $a = 1 - i$, $|a| = \sqrt{2}$, $arga = -\frac{\pi}{4}$, т.е. ω_1 осуществляет поворот области D_1 на угол $-\frac{\pi}{4}$ (поворот по часовой стрелке на $\frac{\pi}{4}$) и растяжение с коэффициентом $|a| = \sqrt{2}$.

В результате получаем, что область D_1 перешла в область D. Заключительный шаг: $\omega_2 = \omega_1 + 2i$ – это параллельный перенос полученной области D на вектор $b = 2i$ (все этапы показаны на рис. 10).



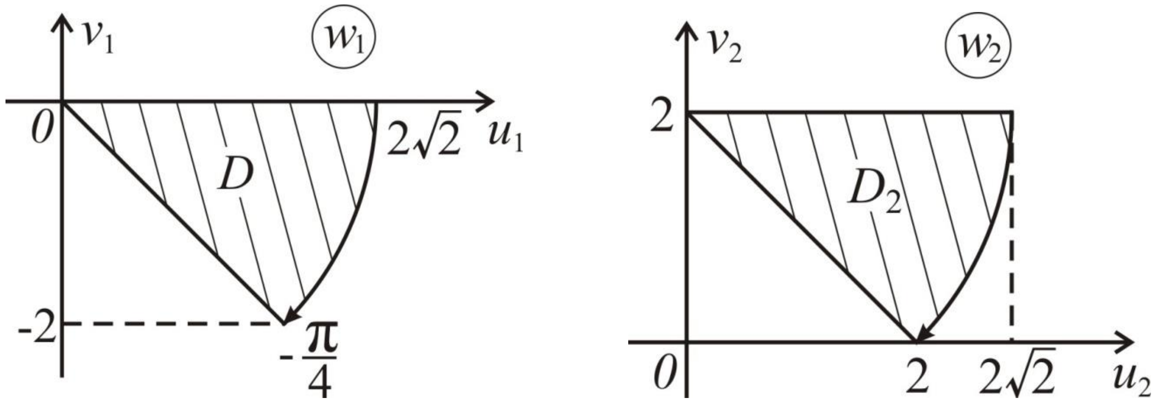


Рис. 10

2. <u>Степенная функция</u> $\omega = z^n$, $n \geq 2$ – целое положительное число.

Отображает взаимно-однозначно и конформно внутренность угла с вершиной в начале координат, раствор которого θ не превосходит $\frac{2\pi}{n}$ на внутренность угла с вершиной в начале координат раствора $n\theta$.

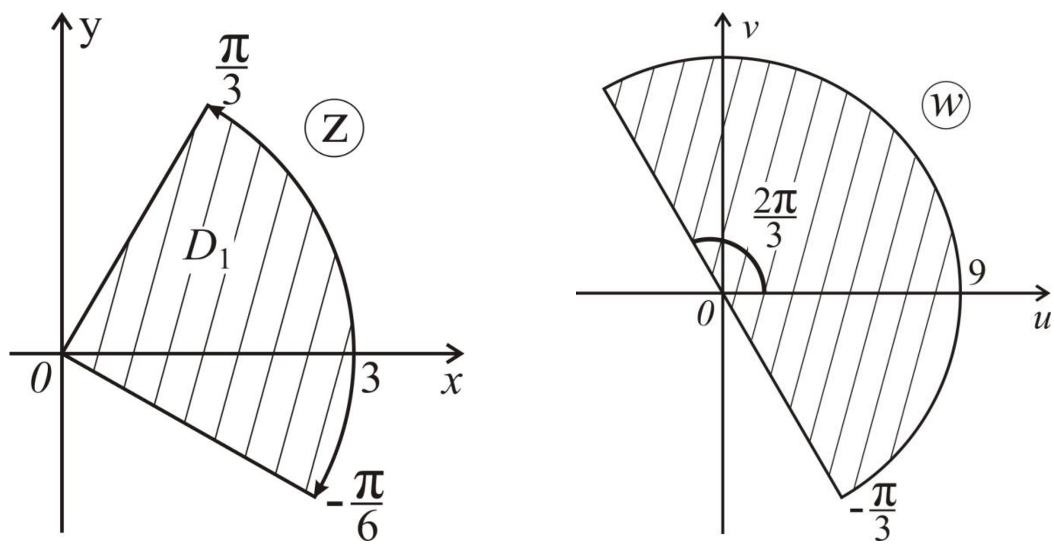
<u>Пример 2.11.</u> Определить область D_2 плоскости ω, на которую отобразится область D_1 плоскости z функцией $\omega = z^2$. Область D_1:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{6} \leq argz \leq \dfrac{\pi}{3}, \\ |z| \leq 3. \end{cases}$$

Решение. При отображении $\omega = z^2$ луч $argz = -\frac{\pi}{6}$ перейдет в луч $arg\omega = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$, луч $argz = \frac{\pi}{3}$ перейдет в луч $argz = \frac{2\pi}{3}$.

$|\omega| = |z|^2 = 9$, т. е. получим область D_2 (все этапы показаны на рис. 11):

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{3} \leq arg\omega \leq \dfrac{2\pi}{3}, \\ |z| \leq 9. \end{cases}$$



(область D_2)

Рис. 11

§3. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D. Рассмотрим кусочно-гладкую ориентированную кривую L, лежащую в D, т.е. будем предполагать, что на L задано направление от начальной точки z_0 к конечной точке z.

Введем *определение интеграла от функции комплексного переменного.*

Разобьем кривую L произвольным образом на n элементарных частей $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ точками $z_0, z_1, \ldots, z_n = z$. Составим интегральную сумму $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta z_k$, где $\xi_k \in \gamma_k$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Предел интегральной суммы σ_n при $\lambda = \max_k |\Delta z_k| \to 0$, если он существует и конечен, называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой (вдоль кривой) L :

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta z_k .$$

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ – действительные функции переменных x и y. Тогда можно показать, что интеграл от функции $f(z)$ равен сумме двух криволинейных интегралов, а именно

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy +$$

$$+i\int_L u(x,y)dy + v(x,y)dx.$$

Интеграл от функции комплексного переменного обладает следующими *свойствами.*

1. Свойство линейности.

$$\int_L [c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)]\,dz = c_1\int_L f_1(z)dz \pm c_2\int_L f_2(z)dz,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

2. Свойство аддитивности.

$$\int_{L_1 \bigcup L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz,$$

где $L_1 \bigcup L_2$ – кривая, составленная из кривых L_1 и L_2,

3. $\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz,$

где L^- – кривая, совпадающая с L, но проходимая в противоположном направлении.

4. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\,\Big|_{z_0}^{z_1},$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

5. Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$x = x(t), y = y(t)$

начальная и конечная точки дуги L соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)]z'(t)dt,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Пример 3.1. Вычислить интеграл $\int_L (2\overline{z} - i)\,dz$ по параболе $y = x^2$, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

Решение. Перепишем подынтегральную функцию в виде $2\overline{z} - i = 2x - 2yi - i = 2x - i(2y + 1)$, т.е. $u(x, y) = 2x, v(x, y) = -(1 + 2y)$.

Используем для вычисления интеграла формулу $\int_L (2\overline{z} - i)\,dz = \int_L 2\,xdx + (1 + 2y)dy + i\int_L 2\,xdy - (1 + 2y)dx$.

Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2xdx$ $(0 \le x \le 1)$. Тогда

$$\int_L (2\overline{z} - i)\,dz = \int_0^1 [2x + (1 + 2x^2)2x]\,dx +$$

$$+i\int_0^1 [2x \cdot 2x - (1 + 2x^2)]\,dx =$$

$$= \left(\frac{4x^2}{2} + \frac{4x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + i\left(\frac{2x^3}{3} - x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 3 + i\left(\frac{2}{3} - 1\right) = 3 - \frac{1}{3}i.$$

Пример 3.2. Вычислить интеграл $\int_i^{2i} (3z^2 + 1)\,dz$.

Решение. Подынтегральная функция аналитическая всюду (достаточно проверить все условия теоремы 2.2), можно применить формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_i^{2i} (3z^2 + 1)\,dz = (z^3 + z)\,\Big|_i^{2i} = (2i)^3 + 2i - i^3 - i =$$

$$= -8i + 2i + i - i = -6i.$$

Теорема 3.1. *(теорема Коши для односвязной области).*

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, а контур C – замкнутый контур, принадлежащий области D, то интеграл

$$\oint_C f\,(z)dz = 0.$$

Отметим, что линия называется связной, если из любой ее точки можно пройти по этой линии в любую другую ее точку.

Порядком связности ограниченной области D называется число n связных частей, на которое разбивается ее граница.

Выше было приведено определение односвязной области. Например, круг $|z| \le 3$ – односвязная область. Встречаются *n-связные* (многосвязные, $n>1$) области, например, кольцо $1 \le |z| \le 3$ – двусвязная область ($n=2$).

Теорема 3.2. *(теорема Коши для многосвязной области).*

Пусть D - n-связная область ($n>1$) и ее граница состоит из n замкнутых кусочно-гладких линий $L_0, L_1, \dots, L_n$, причем контур L_0 охватывает $L_1, \dots, L_n$, а каждый из $L_1, \dots, L_n$ расположен вне остальных. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда интеграл от $f(z)$ по внешнему контуру L_0 равен сумме интегралов по внутренним контурам при условии, что обход всех контуров совершается в одном направлении

$$\int_{L_0} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \ldots + \int_{L_n} f(z)dz. \tag{3.5}$$

§ 4. Ряды с комплексными членами. Ряды Тейлора и Лорана

4.1 Числовые ряды с комплексными членами

Определение 4.1. *Последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, называется сходящейся, если сходятся соответствующие последовательности действительной части $\{x_n\}$ и мнимой части $\{y_n\}$.*

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Составленное из членов этой последовательности выражение $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *числовым рядом с комплексными членами*, z_n - общий член ряда.

Сумма $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ называется n-ой *частичной суммой* ряда. Частичные суммы образуют новую числовую последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$.

Определение 4.2. *Числовой ряд с комплексными членами называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда.*

Числовой ряд называется расходящимся, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Исследование ряда с комплексными членами сводится к исследованию двух вещественных рядов на основании следующего утверждения.

Сходимость ряда с комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ к сумме $S = A + iB$ равносильна сходимости двух вещественных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ соответственно к суммам A и B.

Определение 4.3. *Ряд с комплексными членами называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |(x_n + iy_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n{}^2 + y_n{}^2}\ .$$

Теорема4.1. *Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам ряд с комплексными членами.*

4.2 Степенные ряды с комплексными членами. Ряд Тейлора

Пусть дана последовательность функций комплексной переменной

$$u_1(z),\ u_2(z),\ ...,\ u_n(z),\ ...\ ,$$

определенных на некотором множестве D комплексной плоскости: $D \subset C$. Выражение вида

$$u_1(z) + u_2(z) + ... + u_n(z) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

называется *функциональным* рядом с комплексными членами.

Определение 4.4. *Множество значений переменной* z, *при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда.*

Определение 4.5. *Степенным рядом с комплексными членами* *называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

Здесь z - комплексная переменная, c_n и z_0 - комплексные числа. При $z_0 = 0$ степенной ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

Теорема 4.2. (теорема Абеля)*. Пусть степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$. *Тогда этот ряд абсолютно сходится в круге* $|z-z_0| < |z_1 - z_0| = R$.

Следствие. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ расходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то этот ряд расходится в области $|z-z_0| > |z_1 - z_0| = R$, т.е. вне круга $|z-z_0| \leq |z_1 - z_0| = R$.

Следствие. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ существует число R, $0 \leq R \leq \infty$, называемое *радиусом сходимости* степенного ряда, такое, что внутри круга $|z-z_0| < R$ ряд сходится, а вне этого круга, т.е. в области $|z-z_0| > R$, ряд расходится.

Если R - радиус сходимости, то область $|z-z_0| < R$ называется *кругом сходимости* степенного ряда. В точках границы $|z-z_0| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае требуется дополнительное исследование.

Теорема 4.3. *Функция* $f(z)$, *аналитическая в круге* $|z-z_0| < R$, *представляется в нем единственным образом в виде сходящегося к ней степенного ряда – ряда Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого c_n *вычисляются по формулам*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Здесь L *– окружность с центром* z_0, *целиком лежащая в круге сходимости* $|z-z_0|<R$.

Предполагается, что окружность проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Имеют место следующие разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ R_{\text{сх}} = \infty, \quad (4.1)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (4.2)$$
$$R_{\text{сх}} = \infty,$$

$$cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (4.3)$$
$$R_{\text{сх}} = \infty,$$

$$ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},\ R_{\text{сх}} = 1,$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \ldots,$$
$$R_{\text{сх}} = 1$$

при $\alpha = -1$,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad (4.4)$$
$$R_{\text{сх}} = 1,$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ R_{\text{сх}} = 1.$$

<u>Пример 4.1.</u> Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{7-2z}$

по степеням $(z-2)$.

Решение. Введем новую переменную $t = z - 2$, выразим $z = t + 2$ и подставим в функцию $f(z)$

$$f(t) = \frac{1}{7 - 2(t+2)} = \frac{1}{3 - 2t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}t}$$

Воспользуемся формулой (4.4), подставляя вместо $z \to \frac{2}{3}t$:

$$f(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}t} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}t + \left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}t\right)^n + \ldots\right).$$

Сделаем обратную замену

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3}(z-2) + \frac{2^2}{3^2}(z-2)^2 + \ldots + \frac{2^n}{3^n}(z-2)^n + \ldots\right].$$

Этот ряд сходится при условии $\left|\frac{2}{3}(z-2)\right| < 1$, или $|z-2| < \frac{3}{2}$.

4.3 Ряд Лорана

Определение 4.6. *Рядом Лорана называется ряд вида*

$$\ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} +$$
$$+ c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где z_0, c_n *– комплексные постоянные,* z *– комплексная переменная.*

Определение 4.7. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots$$

называется главной частью ряда Лорана.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

называется правильной частью ряда Лорана.

Ряд Лорана сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots \text{ и}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

Областью сходимости первого из этих рядов является внешность круга $|z-z_0| > r$. Областью сходимости второго ряда является внутренность круга $|z-z_0| < R$.

Если $r < R$, то ряд Лорана сходится в кольце $r < |z-z_0| < R$. Здесь $r \geq 0,\ 0 < R < +\infty$.

Теорема 4.4. *Функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в кольце $r < |z-z_0| < R$ (не исключаются случаи $r = 0$ и $R = +\infty$) представляется в этом кольце единственным образом в виде ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Здесь L – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащей внутри данного кольца.

4.4 Примеры разложений функции в ряд Лорана

Пример 4.2. Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z) = (z-3)^4 cos\frac{1}{z-3}$ по степеням *(z-3).*

Решение. Сделаем замену $t = \frac{1}{z-3}$, получим $f(t) = \frac{1}{t^4}cost$. Используя разложение (4.3), получим

$$cos\frac{1}{z-3} = 1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \ldots,$$

тогда

$$f(z) = (z-3)^4\left(1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \right.$$

$$+\ldots) = (z-3)^4 - \frac{(z-3)^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!\,(z-3)^2} + \ldots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 3$. В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z = 3$. что можно записать так: $0 < |z-3| < +\infty$. Здесь $r = 0$, $R = +\infty$. В указанной области $f(z)$ – аналитическая.

Пример 4.3. Получить все разложения функции $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$ в ряд по степеням z.

Решение. Приравняем знаменатель дроби к нулю $z^2 + 3z + 2 = (z+2)(z+1) = 0$, отсюда $z_1 = -2$, $z_2 = -1$. Изобразим на комплексной плоскости возможные области. Для этого проведем окружности с центром в $z_0 = 0$ через точки $z_1 = -2$ и $z_2 = -1$. Получим три «кольца» с центром в точке $z_0 = 0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

1) круг $|z| < 1$,

2) кольцо $1 < |z| < 2$,

3) $2 < |z| < +\infty$ – внешность круга $|z| \leq 2$ (см. рис. 12)

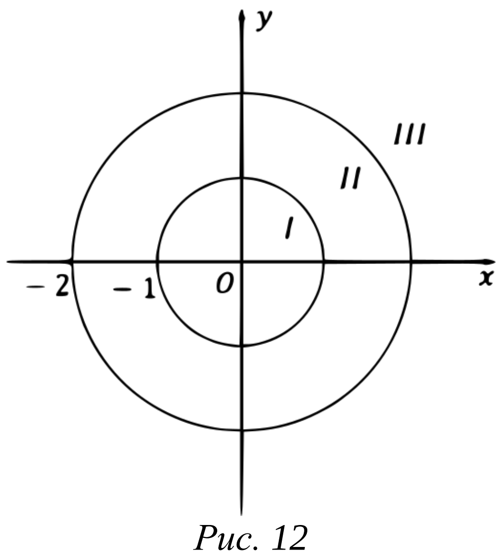


Рис. 12

Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждой из этих областей. Для этого представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}.$$

A и B нашли методом неопределенных коэффициентов.

1) Рассмотрим круг $|z|<1$. Преобразуем $f(z)$:

$$f(z)=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}.$$

Используя формулу (4.4), получим

$$f(z)=(1-z+z^2-z^3+\ldots)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}z+\frac{5}{4}z^2-\frac{9}{8}z^3+\ldots$$

Это разложение является рядом Тейлора функции $f(z)$, т.к. в этой области функция является аналитической. При этом ряд для функции $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots$ сходится при $|z|<1$,

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots$$

сходится при $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ или $|z|<2$, т.е. внутри круга $|z|<1$ оба ряда сходятся.

2) Рассмотрим кольцо $1<|z|<2$. Ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ остается сходящимся в этом кольце, т.е. $|z|<2$, а ряд для функции $\frac{1}{1+z}$ расходится при $|z|>1$. Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}.$$

Применяя формулу (4.4), получаем

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^2}{16}+\ldots+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\ldots$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т.е. при $|z| > 1$ и при $|z| < 2$.

3) Рассмотрим $|z| > 2$. Ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ при $|z| > 2$ расходится, а ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{1}{z}}$ сходится, если $|z| > 2$, то условие $|z| > 1$ выполняется. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}}.$$

Используя формулу (4.4), получим

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \ldots\right) + \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\left(2 - \frac{3}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{9}{z^3}\right) = \frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{9}{z^4} + \ldots$$

Таким образом, в разных областях функция $f(z)$ представима разными рядами.

<u>Пример 4.4.</u> Разложить функцию $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z-1| < 3$.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

Введем новую переменную $z - 1 = t$, т.е. $z = t + 1$ и перепишем функцию $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{t+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$. Используя разложение (4.4), получим

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-1}{3}+\frac{(z-1)^2}{9}-\frac{(z-1)^3}{27}+\ldots\right]$$

Область сходимости этого ряда $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$ или $|z-1|<3$. Таким образом, разложение в ряд Лорана в кольце $0<|z-1|<3$ имеет вид

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}-\frac{z-1}{9}+\frac{(z-1)^2}{27}-\frac{(z-1)^3}{81}+\ldots$$

Слагаемое $\frac{1}{z-1}$ является степенью $(z-1)^{-1}$ и поэтому не требует дальнейшего разложения. Оно образует *главную часть ряда Лорана*.

§ 5. Теория вычетов функций

5.1 Нули аналитической функции

Определение 5.1. *Точка* z_0 *называется нулем n-го порядка аналитической в окрестности* z_0 *функции* $f(z)$, *если*

$$f(z_0)=0, f'^{(z_0)}=0,\ldots,f^{(n-1)}(z_0)=0,$$
$$f^{(n)}(z_0)\quad\neq 0.$$

Если $n=1$, *то точка* z_0 *называется простым нулем.*

Теорема 5.1. *Точка* z_0 *является нулем n-го порядка функции* $f(z)$, *аналитической в точке* z_0, *тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$$

где $\varphi(z)$ *аналитическая в точке* z_0 *и* $\varphi(z_0)\neq 0$.

Пример 5.1. Найти нули функции $f(z)=cosz-1$, определить порядок нуля.

Решение. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $cosz=1$, откуда

$z_n=2\pi n\ \ (n=0,\pm 1,\ldots)$ – нули данной функции.

Найдем

$$f'(z)\,|_{z=z_n}=-sinz\,|_{z=2\pi n}=0,$$

$$f''(z)\,|_{z=z_n}=-cosz\,|_{z=2\pi n}=-1\neq 0.$$

Согласно определению (5.1), $z_n=2\pi n$ являются нулями второго порядка.

Пример 5.2. Найти нули функции $f(z)=z^8-9z^7$,

определить порядок нуля.

Решение. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $z^7(z-9)=0$, $z_1=0$, $z_2=9$. Можно воспользоваться определением (5.1), однако проще использовать теорему 5.1. Функция $f(z)$ представима в виде

$f(z)=z^7(z-9)$, но тогда $z=0$ является нулем порядка 7, функцией $\varphi(z)$ является сомножитель $\varphi(z)=z-9, \varphi(0)=-9\neq 0; z=9$, является нулем порядка 1, функцией $\varphi(z)$ в данном случае является $\varphi(z)=z^7, \varphi(9)=9^7\neq 0$.

5.2 Изолированные особые точки

Определение 5.2. *Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции$f(z)$, если $f(z)$ аналитическая в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0, а в точке z_0 функция не определена или не дифференцируема.*

Определение 5.3. *Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=C.$$

Пример 5.3. Найти особые точки функции $f(z)=\frac{1-e^{3z}}{z}$ и установить их тип.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ - это $z_0=0$. Вычислим

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{3z}}{z}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{-3z}{z}=-3.$$

т.е. $z_0=0$ – устранимая особая точка.

Определение 5.4. *Точка z_0 называется полюсом функции $f(z)$, если* $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Теорема 5.2. *Для того, чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.*

Теорема 5.3. *Пусть $f(z)$ является аналитической в окрестности точки z_0 . Если точка z_0 – нуль порядка* n *для $f(z)$, то точка z_0 – полюс порядка* n *для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Замечание. Если точка z_0 – полюс порядка n для $f(z)$, то точка z_0 – нуль порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ при условии $\frac{1}{f(z_0)} = 0$.

Отметим, что без последнего условия $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ утверждение становится неверным. В самом деле, если $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, то z=0 – полюс первого порядка. Однако функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z^2}{\sin z}$ не определена при z=0.

Теорема 5.4. *Если функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитическая функция в точке z_0 и*

$\varphi(z_0) \neq 0$, то точка z_0 является полюсом порядка n *функции $f(z)$.*

Замечание. Теорема остается справедливой, если z_0 – устранимая особая точка функции $\varphi(z)$ и существует $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) \neq 0$.

Например, если $\varphi(z) = \frac{sinz}{z}$, а $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z}$, то z_0=0 – полюс первого порядка функции $f(z)$.

<u>Пример 5.4.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{2z+1}{z^4-2z^3}$ и установить их тип.

Решение. Найдем нули функции $\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2-2z^3}{2z+1}$. Поскольку

$z^4 - 2z^3 = z^3(z-2)$, то для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка $z = 0$ – это нуль третьего порядка согласно теореме 5.1, а $z = 2$ – нуль первого порядка. Пользуясь теоремой 5.2, имеем: $z = 0$ – это полюс третьего порядка функции $f(z)$, а $z = 2$ – полюс первого порядка.

Теорема 5.5. *Если функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ и точка z_0 является нулем порядка m для функции $P(z)$ и нулем порядка l для функции $Q(z)$, тогда*

1. если $m \geq l \geq 1$, то точка z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$;

2. если $m < l$, то точка z_0 будет полюсом порядка $n = m - l$

функции $f(z)$.

Пример 5.5. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2 z^4}$ и установить их тип.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = 3$ и

$z_2 = 0$. В точке $z_1 = 3$ числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в нуль. Для числителя $P(z) = e^{z-3} - 1$ число $z = 3$ является нулем 1 порядка, так как $P'(z)\,|_{z=3} = e^{z-3}\,|_{z=3} = 1$, то $z = 3$ – нуль 1-го порядка, т.е. в теореме 5.5 $m = 1$. Знаменатель $Q(z) = (z-3)^2 z^4$ по теореме 5.1 в точке $z = 3$ имеет нуль 2-го порядка, т. е. $l = 2$. Следовательно по теореме 5.5 $l - m = 1$ – порядок полюса функции $f(z)$.

В точке $z = 0$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^4}$, где $\varphi(z) = \frac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2}$ – аналитическая функция в точке $z = 0$,

$\varphi(0) = \frac{e^{-3}-1}{9} \neq 0$. По теореме 5.4 $z = 0$ – полюс 4-го порядка. Окончательно, $z = 3$ – полюс первого порядка, $z = 0$ – полюс 4-го порядка.

Определение 5.5. *Точка* z_0 *называется* *<u>существенно особой</u> точкой, если в этой точке не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции* $f(z)$ *при* $z \to z_0$.

5.3 Классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана

Теорема 5.6. *Точка* z_0 *является устранимой особой точкой, если в разложении* $f(z)$ *в ряд Лорана в окрестности точки* z_0 *отсутствует главная часть, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n.$$

Теорема 5.7. *Точка* z_0 *является полюсом* n*-го порядка функции* $f(z)$*, если главная часть ряда Лорана для* $f(z)$ *в окрестности точки* z_0 *содержит конечное число слагаемых, т.е.*

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z - z_0)^k \text{, где } c_{-n} \neq 0.$$

Теорема 5.8. *Точка z_0 является существенно особой точкой для функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности z_0 содержит бесконечное количество членов.*

Пример 5.6. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{sin3z}{z}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ $z_0 = 0$. Используя разложение в ряд Тейлора для функции $sinz$ (4.2) в окрестности точки $z_0 = 0$, получим разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[(3z) - \frac{(3z)^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{(3z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] =$$

$$= 3 - \frac{9z^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{(3z)^{2n} \cdot 3}{(2n+1)!} + \ldots$$

Это разложение не содержит главной части. Поэтому точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

Пример 5.7. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Используя разложение в ряд Тейлора для функции e^z (4.1) в окрестности точки $z_0 = 0$, получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{z^5}\left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3 2!} + \frac{1}{z^2 3!} + \frac{1}{z 4!} + \frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} + \ldots$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является полюсом четвертого порядка, т. к. наибольший показатель степени z, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равен четырем.

Пример 5.8. Найти особые точки функции $f(z) = (z-2)^2 e^{\frac{1}{z-2}}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Используем разложение (4.1)

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$$

Полагая $t = \frac{1}{z-2}$, получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$

$$f(z) = (z-2)^2\left[1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4!(z-2)^4} + \ldots\right] = (z-2)^2 + (z-2) + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!(z-2)} +$$

$$+ \frac{1}{4!(z-2)^2} + \ldots$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z-2)$. Следовательно, точка $z_0 = 2$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

5.4 Вычеты функций

Определение 5.6. *Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, обозначаемое символом $resf(z_0)$ и определяемое равенством*

$$resf(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz,$$

где C – любой контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, содержащий внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

Предполагается, что контур C проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Теорема 5.9. *Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 является коэффициент c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0.*

Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$.

1. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$,

то $resf(z_0) = 0$.

2. Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$res f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z - z_0)^n].$$

В частности, если z_0 – простой полюс, т.е. полюс первого порядка $(n = 1)$, то

$$res f(z_0) = \lim_{z \to z_0} [f(z)(z - z_0)\ ]\ .$$

3. Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения вычета нужно найти коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана: $res f(z_0) = c_{-1}$.

Пример 5.9. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{cosz - 1}{z^2(z - \pi)}$ в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$.

В точке $z = 0$

$$\lim_{z \to 0} f\,(z) = \lim_{z \to 0} \frac{cosz - 1}{z^2(z - \pi)} = \lim_{z \to 0} \frac{-z^2}{2z^2(z - \pi)} = \frac{1}{2\pi}.$$

Следовательно, $z = 0$ – устранимая особая точка и $res\ f(0) = 0$.

Точка $z = \pi$ - это полюс первого порядка. Тогда

$$res\ f(\pi) = \lim_{z \to \pi} \frac{(cosz - 1)(z - \pi)}{z^2(z - \pi)} = \frac{-1 - 1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}.$$

Пример 5.10. Найти вычет функции $f(z) = z^2 sin\frac{1}{z}$ в особой точке.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ - точка $z = 0$. Выпишем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z, используя формулу (4.4)

$$f(z) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \frac{1}{7!\,z^7} + \ldots\right) =$$

$$= z - \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{5!\,z^3} - \frac{1}{7!\,z^5} + \ldots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, поэтому точка $z = 0$ - существенно особая точка функции $f(z)$. Вычет функции в точке $z = 0$ есть коэффициент $c_{-1} = -\frac{1}{3!}$, т.е. $res\ f(0) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$, (теорема 5.9).

Пример 5.11. Найти вычет функции $f(z) = \frac{1}{z^5 + 4z^3}$ в ее особых точках.

Решение. Особые точки функции находятся из решения

уравнения $z^5 + 4z^3 = 0$, т.е. $z^3(z + 2i)(z - 2i) = 0$. Получаем,

$z_1 = 0$ – полюс третьего порядка,

$z_{2,3} = \pm 2i$ – полюсы первого порядка.

Используя приведенные выше формулы для вычисления вычетов, найдем вычеты в точках $z_2,\ z_3$:

$$res\, f(2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(2i)^3 4i} = \frac{1}{32},$$

$$res\, f(-2i) = \lim_{z\to -2i} \frac{(z+2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(-2i)^3(-4i)} = \frac{1}{32}.$$

Найдем вычет в точке z_1:

$$res\, f(0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1\cdot z^3}{z^3(z^2+4)}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= -\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z^2+4)^2} = -\lim_{z\to 0} \frac{-3z^2+4}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}.$$

§ 6. Приложения теории вычетов

6.1. Основная теорема о вычетах

Теорема 6.1. *Если функция $f(z)$ является аналитической всюду внутри области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих внутри кусочно-гладкой замкнутой кривой Г, Г⊂D, тогда*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Контур *Г* проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Пример 6.1. Вычислить интеграл $\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$.

Решение. Находим особые точки подынтегральной функции:

$z_1 = -2$ – полюс второго порядка,

$z_{2,3} = \pm i$ – полюсы первого порядка.

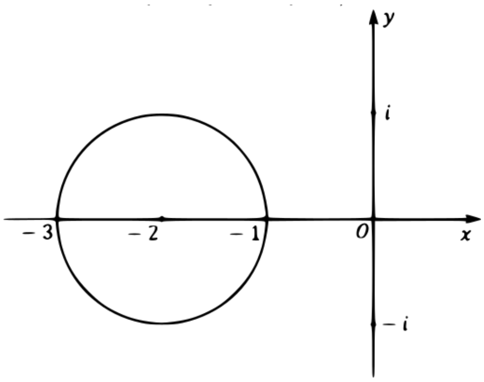


Рис. 13

Нарисуем контур $|z+2|=1$. Внутри контура лежит только одна особая точка $z_1 = -2$ (см. рис. 13).

По основной теореме о вычетах получаем

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \cdot resf(-2).$$

Найдем $res\, f(-2)$:

$$\operatorname{res} f(-2) = \lim_{z\to -2} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+2)^2(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to -2} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{4}{25}.$$

Далее получим

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = \frac{8\pi i}{25}.$$

<u>Пример 6.2.</u> Вычислить интеграл $\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$.

Решение. В области D: $|z-i| < 2$ функция $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ имеет одну особую точку $z = 0$. Разложение в ряд Лорана для заданной функции имеет вид (используем формулу (4.1))

$$f(z) = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots\right) =$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, поэтому $z = 0$ — существенно особая точка. Вычет в этой точке равен коэффициенту $c_{-1} = \frac{1}{3!}$, т.е. $res\, f(0) = \frac{1}{3!}$. По теореме 6.1 получаем ответ:

$$\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot res\, f(0) = \frac{2\pi i}{3!} = \frac{\pi i}{3}.$$

6.2 Вычисление несобственных интегралов

6.2.1 Интегралы от рациональных функций

Теорема 6.2. *Если $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены, причем многочлен $Q(x)$ не имеет действительных корней и степень $Q(x)$ «m» хотя бы на две единицы больше степени $P(x)$ «n» $(m - n \geq 2)$, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, F(z_k),$$

где $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ и z_k – полюсы функции $F(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Пример 6.3. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad (a > 0).$$

Решение. Подынтегральная функция

$$F(x) = \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

является четной. Поэтому

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

Введем функцию $F(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$. Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1 = ai$, $z_2 = -ai$ – это полюсы второго порядка. В верхней полуплоскости находится точка $z = ai$, $a > 0$. Условия теоремы 6.2 для функции $F(z)$ выполнены. Вычислим $resF(ai)$:

$$res\,F(ai) = \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}[F(z)(z-ai)^2] =$$

$$= \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z-ai)^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right] = \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+ai)^2} =$$

$$= \lim_{z\to ai} \frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{2(ai)^2}{(2ai)^3} = \frac{1}{4ai}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot res\,F(ai) = \frac{\pi i}{4ai} = \frac{\pi}{4a}.$$

6.2.2 Вычисление интегралов с тригонометрическими функциями

Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет следующим *двум условиям (6.1):*

1) $f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости и на действительной оси, кроме конечного числа полюсов, лежащих в верхней полуплоскости;

2) при $z \to \infty$ в верхней полуплоскости и на действительной оси

$z\cdot f(z) \to 0$ *равномерно по аргументу z,* т.е. $\max\limits_{z\in C_R} |z\cdot f(z)| \to 0$ при $R\to\infty$, контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости.

При этом справедливо равенство

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} resf(z_k). \qquad (6.2)$$

Здесь $\sum_{k=1}^{n} res f(z_k)$ – сумма вычетов $f(z)$ относительно полюсов, лежащих в верхней полуплоскости. Разобьем интервал (−R, R) на части (−R, 0) и (0, R) и заменим в первом из интегралов x на $(-x)$. В результате получим $\lim_{R\to+\infty}\int_0^R [f(x)+f(-x)]dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res f(z_k)$. Следовательно,

$$\int_0^{+\infty}[f(x)+f(-x)]dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res f(z_k). \tag{6.3}$$

Используем полученный результат в частном случае, когда подынтегральная функция $f(z)$ имеет вид: $f(z) = F(z)\cdot e^{iaz}$, $a>0$, где функция $F(z)$ удовлетворяет двум условиям (6.1). Тогда этим же условиям будет удовлетворять и функция $f(z)$. Таким образом, если $F(z)$ удовлетворяет двум условиям (6.1), то

$$\int_0^{+\infty}[F(x)\cdot e^{iax}+F(-x)\cdot e^{-iax}]dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}]. \tag{6.4}$$

Пусть $F(z)$ − *четная* функция, т. е. $F(-z) = F(z)$. Тогда из (6.4) получаем

$$\int_0^{+\infty}F(x)\cdot\cos(ax)dx = \pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}]. \tag{6.5}$$

Аналогично, если $F(z)$ − *нечетная* функция, т. е. $F(-z) = -F(z)$, то

$$\int_0^{+\infty}F(x)\cdot\sin(ax)dx = \pi\cdot\sum_{k=1}^{n} res[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}] \tag{6.6}$$

Замечание. Отметим, что формулу (6.2) нельзя, вообще говоря, писать в виде

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res f(z_k)$. В формуле (6.2) интеграл рассматривается в смысле главного значения [см. 6]. Но если из каких-либо соображений известно, что этот интеграл существует как обычный несобственный интеграл, то в этом случае интеграл в смысле главного значения совпадает с обычным несобственным интегралом.

Следующая лемма позволяет ослабить условия (6.1), наложенные на функцию $F(z)$. При этом формулы (6.5) и (6.6) сохраняются.

Лемма Жордана. *Если* $F(z)$ *в верхней полуплоскости и на действительной оси удовлетворяет условию:* $F(z) \to 0$ *равномерно при* $z \to \infty$ *и* $a>0$, то

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} F(z)\cdot e^{iaz}dz = 0\,.$$

Здесь контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости (рис. 14).

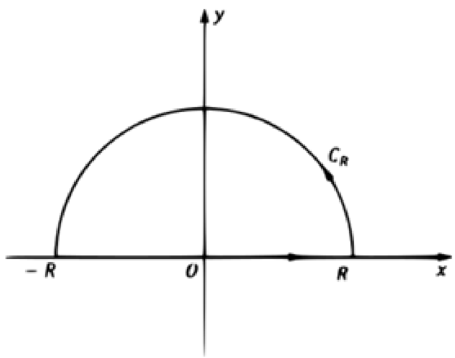


Рис. 14

Пользуясь леммой Жордана, можно доказать справедливость формул (6.5) и (6.6) при более слабых предположениях относительно функции $F(z)$. Вместо второго условия (6.1) достаточно потребовать, чтобы $F(z) \to 0$ равномерно при $z \to\infty$. Требование четности (нечетности) функции $F(z)$ сохраняется.

Если $F(z)= R(z)$ – рациональная функция, то справедливо следующее утверждение [см. 1].

Теорема 6.3. *Пусть* $R(z)$ *– рациональная функция, у которой степень числителя меньше степени знаменателя,* $R(z)$ не имеет полюсов на действительной оси, *и в верхней полуплоскости имеет полюса* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*; при* $z=x$ *функция* $R(x)$ *действительна при действительных* x*. Тогда для любого* $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\cdot R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\left[R(z_k)\cdot e^{i\alpha z}\right].$$

Следствие. Воспользовавшись формулой Эйлера: $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\alpha x\, dx = Im\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\big(R(z_k)e^{i\alpha z}\big)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) cos\, \alpha x\, dx = Re\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\big(R(z_k)e^{i\alpha z}\big)\right]$$

$$(Im\, z_k > 0).$$

Отметим, что в теореме 6.3 не требуется четность (нечетность) функции $F(z)$.

Пример 6.4. Вычислить

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 9} dx$$

Решение. Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+3^2}$. Если $z = x$, то $Im\, F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{x \sin 2x}{x^2+9}$. Поскольку подынтегральная функция $f(x)$ четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 9} dx$$

Функция $F(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+3^2}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2 + 9} dx = 2\pi i \cdot res\, F(3i).$$

$z = 3i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является простым полюсом.

$z = -3i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = 3i$

$$res\, F(3i) = \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z^2 + 9}(z - 3i) =$$

$$= \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z + 3i} = \frac{3ie^{-6}}{6i} = \frac{1}{2e^6}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\cdot Im\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot Im\left[2\pi i \cdot res_{z=3i}\frac{\left(ze^{i2z}\right)}{z^2+9}\right] = \frac{1}{2}\cdot Im\left[2\pi i\frac{1}{2e^6}\right] = \frac{\pi}{2e^6}.$$

6.3. Теорема Руше

Теорема 6.4. (Руше) *Если функции $f(z)$ и $g(z)$, аналитичные в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром* Γ, *во всех точках этого контура удовлетворяют неравенству*

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

то их сумма $F(z) = f(z) + g(z)$ и функция $f(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей (с учетом их кратности).

Заметим, что в силу условий теоремы на границе Г $|f(z)| > 0$, $|F(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$, значит функции $F(z)$ и $f(z)$ не имеют нулей на Г.

Пример 6.5. Определить число корней уравнения $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ внутри круга $|z| < 2$.

Решение. Положим $f(z) = -3z^3$, $g(z) = z^4 - 1$, $F(z) = f(z) + g(z) = z^4 - 3z^4 - 1$.

На окружности $|z| = 2$:

$$|f(z)|_{z=2} = |-3z^3|_{z=2} = 3\cdot 8 = 24,$$

$$|g(z)|_{z=2} \leq |z^4|_{z=2} + 1 = 16 + 1 = 17,$$

т.е. во всех точках окружности $|z| = 2$ выполняется условие $|f(z)| > |g(z)|$. Функция $f(z) = -3z^3$ внутри круга $|z| < 2$ имеет нуль кратности 3, следовательно, по теореме Руше, и функция $F(z) = z^4 - 3z^3 - 1$ имеет три нуля внутри круга $|z| < 2$, т.е. заданное уравнение

$z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ имеет три корня внутри круга $|z| = 2$.

Пример 6.6. Сколько корней уравнения

$$z^5 - 10z + 3 = 0$$

находится в кольце $1 < |z| < 2$.

Решение. Обозначим через N – число корней заданного уравнения в кольце $1 < |z| < 2$, N_1 – число корней этого же уравнения

в круге $|z| < 2$, N_2 – число корней уравнения в круге $|z| < 1$.

Найдем N_1. Рассмотрим окружность $|z| = 2$. Положим $f(z) = z^5$,

$g(z) = -10z + 3$. Заданное уравнение можно переписать в виде $F(z) = f(z) + g(z) = 0$.

На окружности $|z| = 2$ имеем:

$|f(z)|_{|z|=2} = |z^5|_{|z|=2} = 32$, $|g(z)| = |-10z + 3| \leq |10z| + 3$, т.е. $|g(z)|_{|z|=2} \leq |10z|_{|z|=2} + 3 = 23$, следовательно

$|f(z)|_{|z|=2} > |g(z)|_{|z|=2}$. Функция $f(z) = z^5$ в круге $|z| < 2$ имеет нуль кратности 5, значит по теореме Руше $N_1 = 5$.

Найдем N_2. Рассмотрим окружность $|z| = 1$.

Положим $f(z) = -10z$, $g(z) = z^5 + 3$. На окружности $|z| = 1$ имеем $|f(z)|_{|z|=1} > |g(z)|_{|z|=1}$, так как

$|f(z)|_{|z|=1} = |-10z|_{|z|=1} = 10$,

$|g(z)|_{|z|=1} = |z^5 + 3|_{|z|=1} \leq |z^5|_{|z|=1} + 3 = 4$.

Значит функция $F(z)$ не имеют нулей на окружности $|z| = 1$.

Тогда $N = N_1 - N_2$.

Функция $f(z) = -10z$ в области $|z| < 1$ имеет один нуль, следовательно по теореме Руше $F(z) = f(z) + g(z)$ имеет в области $|z| < 1$ один нуль,

т.е. $N_2 = 1$. Ответ: число корней заданного уравнения в кольце

$1 < |z| < 2$ будет равно $N = 5 - 1 = 4$.

6.4. Приложение вычетов к вычислению преобразования Лапласа

Определение 6.1. *Оригиналом называется комплекснозначная функция $f(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) при $t<0$ $f(t) \equiv 0$,

2) при $t \geq 0$ $f(t)$ *непрерывна либо имеет на любом конечном отрезке оси* t *не более, чем конечное число точек разрыва первого рода,*

3) существуют действительные числа M>0 и s *(показатель роста* $f(t)$*) такие, что* $|f(t)| \leq Me^{st}$

Определение 6.2. *Преобразованием Лапласа называется интегральное* *преобразование, ставящее в соответствие оригиналу $f(t)$ функцию $F(p)$ комплексной переменной p.*

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt, Re\, p > s \quad .$$

Обозначается $f(t) \risingdotseq F(p)$. $F(p)$ называется изображением оригинала $f(t)$.

Теорема 6.5. (следствие из теоремы обращения). *Если изображение $F(p)$ является правильной дробно-рациональной функцией, т.е.*

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

где $A(p)$ и $B(p)$ – многочлены, причем степень знаменателя больше степени числителя, и знаменатель имеет корни $p_1, p_2, \dots, p_n$, кратности $r_1, r_2, \dots, r_n$, то соответствующий оригинал

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \sum_{k=1}^{n} res_{p_k} \left[\frac{A(p)}{B(p)} e^{pt}\right]. \qquad (6.7)$$

В частном случае,

1) когда все корни знаменателя простые, т.е. $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \qquad (6.8)$$

2) если корни знаменателя сопряженные комплексные числа $p_1 = \alpha + i\beta, p_2 = \alpha - i\beta$.

Тогда

$$res_{(\alpha+i\beta)} F(p) e^{pt} + res_{\alpha-i\beta} F(p) e^{pt} =$$
$$= 2Re\, res_{\alpha+i\beta} F(p) e^{pt}. \qquad (6.9)$$

Пример 6.7. Задано изображение $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+9)(p-2)}$. Найти оригинал, используя теорию вычетов.

Решение. Функция $F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p_1 = 3i, p_2 = -3i$, $p_3 = 2$. По формуле (6.7)

$$f(t) = res_{p=3i}(F(p)e^{pt}) + res_{p=-3i}(F(p)e^{pt}) + res_{p=2}(F(p)e^{pt}),$$

так как $p_1 = 3i$ и $p_2 = -3i$ комплексно сопряженные, то

$$f(t) = 2Re\, res_{p=3i}(F(p)e^{pt}) + res_{p=2}(F(p)e^{pt}),$$

но $p_1 = 3i$ и $p_3 = 2$ – простые, поэтому применим формулу (6.8), обозначив

$A(p) = p^2$, $B(p) = (p^2+9)(p-2) = p^3 - 2p^2 + 9p - 18$,

$B'(p) = 3p^2 - 4p + 9$.

Получим, используя формулу (6.9)

$$f(t) = 2Re\frac{(3i)^2e^{3ti}}{3(3i)^2-4(3i)+9} + \frac{4e^{2t}}{3\cdot 4-4\cdot 2+9} = 2Re\frac{3e^{3ti}}{6+4i} + \frac{4e^{2t}}{13} =$$

$$= Re\left[\frac{3}{13}(3-2i)(\cos 3t + i\sin 3t)\right] + \frac{4}{13}e^{2t} =$$

$$= \frac{3}{13}Re[(3\cos 3t + 2\sin 3t) + i(3\sin 3t - 2\cos 3t)] + \frac{4}{13}e^{2t} =$$

$$= \frac{3}{13}(3\cos 3t + 2\sin 3t) + \frac{4}{13}e^{2t}.$$

Таким образом, получен оригинал $f(t) = \frac{3}{13}(3\cos 3t + 2\sin 3t) + \frac{4}{13}e^{2t}$.

6.5 Вычисление интегралов Эйлера

Определение 6.3. *Гамма-функцией называется* $\Gamma(p)$, *определяемая равенством*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx,$$

где p *– любое комплексное число,* $Re\, p > 0$.

<u>*Основные свойства* $\Gamma(p)$:</u>

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ – формула приведения
3. $\Gamma(n+1) = n!$
4. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ – формула дополнения, $0 < p < 1$
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Определение 6.4. *Бета-функция определяется формулой (для* $p > 0, q > 0$*)*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

<u>*Свойства* $B(p,q)$:</u>

1. $B(p,q) = B(q,p)$
2. $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$

3. $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Пример 6.8.

Вычислить $I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx,\ a>\ 0$.

Решение. Сделаем замену $\frac{x^2}{a^2}=t$, т.е. $x=a\sqrt{t}$, $dx=\frac{a\,dt}{2\sqrt{t}}$, пределы интегрирования изменятся $x=0\Rightarrow t=0$, $x=a\Rightarrow t=1$. Подставляя в интеграл, получим

$$I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^1\frac{a^2t\sqrt{a^2-a^2t}}{2\sqrt{t}}a\,dt=\frac{a^4}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt.$$

Это есть Бета-функция. Найдем p и q, используя определение 6.4: $p-1=\frac{1}{2}\Rightarrow p=\frac{3}{2}, q-1=\frac{1}{2}\Rightarrow q=\frac{3}{2}$.

$$I=\frac{a^4}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)},$$

заметим $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(3)=2!$. Тогда получаем

$$I=\frac{a^4}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{2!}=\frac{a^4}{2}\frac{1}{4}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi a^4}{16}.$$

Пример 6.9. Вычислить интеграл $I=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{20}dx$

Решение. Сделаем замену переменной $t=\ln\frac{1}{x}\Rightarrow x=e^{-t}$, $dx=-e^{-t}dt$, пределы интегрирования также изменятся

при $x\to 0^-$ $t\to+\infty$,

при $x=1$ $t=0$.

Интеграл примет вид

$$I=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{20}dx=-\int_\infty^0 t^{20}e^{-t}dt=\Gamma(21).$$

Вычислим $\Gamma(21)=20!$ (по свойству Г-функции), т.е. $I=20!$.

Пример 6.10.

Вычислить интеграл $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 x\cos^4 x\,dx$ с помощью $\Gamma-$, $\mathrm{B}-$функций

Решение. Сделаем замену $t = \sin^2 x$, тогда $dx = \frac{dt}{2\sin x \cos x}$, пределы интегрирования изменятся так:

$x = 0 \Rightarrow t = 0,$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

Интеграл примет вид

$$I = \int_0^1 \frac{t^4(1-t)^2 dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{4-\frac{1}{2}}(1-t)^{2-\frac{1}{2}}dt.$$

Найдем p и q в формуле, используя определение 6.4:

$p - 1 = 4 - \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{9}{2},$

$q - 1 = 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{5}{2}.$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}B\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}+\frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(7)}.$$

Вычислим, используя свойства Г-функции

$\Gamma(7) = 6!,$

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi},$

$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) =$

$= \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{7\cdot5\cdot3}{2^4}\sqrt{\pi}.$

Окончательно получаем,

$$I = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\cdot5\cdot3}{2^4}\sqrt{\pi} \cdot \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = \frac{7\pi}{2^{11}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория функций комплексного переменного (ТФКП) имеет широкое применение в различных дисциплинах, используются при решении прикладных задач. ТФКП – один из важнейших разделов математического анализа, тесно связанный с теорией рядов. В настоящем пособии рассмотрены вопросы применения теории вычетов к вычислению контурных и несобственных интегралов. Идеи курса применяются при рассмотрении вопросов нахождения числа корней алгебраического уравнения, при восстановлении оригинала по его изображению, при изучении четырехполюсников и т.д.

В целом настоящее пособие обеспечивает полноценное формирование компетенций бакалавра по различным направлениям подготовки ИРТС и ФТИ. Материал пособия может быть полезен и при реализации некоторых программ магистратуры.

СОДЕРЖАНИЕ