Лекция №2. Определители

> *Миноры и алгебраические дополнения. Рекуррентное определение определителя n-го порядка. Соответствие между общим определением и правилом Саррюса при n=3.*
> *Основные свойства определителей.*
> *Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.*

Существует два вида миноров:

1. Для квадратной матрицы: минор элемента a_{ij};
2. Для матрицы произвольного размера: минор матрицы.

В этой лекции мы с вами познакомимся с минорами элементов квадратных матриц.

Определение: Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы называется определитель порядка, на единицу меньшего, получаемый из данной матрицы вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Обозначение: M_{ij} – минор элемента a_{ij}. Обращаем ваше внимание, что в вычислении минора какого-либо элемента матрицы сам этот элемент не участвует!

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ минор элемента } a_{23} = 6 \text{ равен}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 0 \cdot (-5) = -3$$

Очевидно, что для квадратной матрицы порядка n=3 вычисляется девять миноров.

Определение: Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется минор, домноженный на $(-1)^{k+l}$, т.е. $(-1)^{\text{№строки+ №столбца}}$.

Обозначение A_{ij}: $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -(-9) = 9.$

Т.е. ***Алгебраическое дополнение = минор со знаком***

Теперь дадим рекуррентное определение определителя, позволяющее свести вычисление определителя n-го порядка к нахождению определителей $(n-1)$-го порядка.

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Пример:

Для определителя третьего порядка по первой строке

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{12}A_{12} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{1k}$$

Знаки алгебраических дополнений определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Пример:

Определитель второго порядка по первой строке

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$
$$= \text{исходный определитель}$$

Пример:

Определитель второго порядка по второму столбцу

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} = a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}a_{11} = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11} =$ исходный определитель.

Пример:

Определитель третьего порядка по первой строке

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-7) + 5 \cdot (-10) + 1 \cdot 9 = -20$$

Для определителя матрицы размером $n \times n$

$$detA = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}A_{kl}$$

для любого $k = 1,2, \dots, n$.

Свойства определителей

Сформулируем свойства определителей на примере определителей третьего порядка, но все эти свойства справедливы для определителей любого порядка.

1. Определитель не меняется при замене строк столбцами.

Следовательно, строки и столбцы «равноправны» (!), и все свойства определителя для строк верны и для столбцов.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Напомним, что процесс замены строк столбцами называется ***транспонированием***. Итак: Определитель не меняется при транспонировании.

2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

Пример:

В определителе третьего порядка поменяем местами первую и третью строки: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{13}a_{22}a_{13} - a_{31}a_{23}a_{12} - a_{32}a_{21}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12} - a_{33}a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Обращаем ваше внимание, что мы вычислили определитель разложением по первой строке.

3. Если две строки (столбца) равны, то определитель равен нулю. Это свойство очевидно следует из предыдущего утверждения.
4. Общий множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \beta\cdot a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & \beta\cdot a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & \beta\cdot a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \beta\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}, \forall\beta\in R.$$

Другая формулировка: если все элементы какой-либо строки (или столбца) умножены на какое-либо число, значит весь определитель умножен на это число.

5. Если все элементы строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
6. Это следует из предыдущего свойства при общем множителе $\beta = 0$.
7. Если все элементы строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю. Проще говоря, если две строки (столбца) пропорциональны, то определитель равен нулю. Действительно, пропорциональность двух строк означает, что элементы этих строк отличаются друг от друга на общий множитель, следовательно мы можем вынести этот множитель за знак определителя, и в определителе образуется две одинаковые строки, а такой определитель равен нулю!
8. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) равен сумме двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в одном из которых в той же строке (столбце) стоит первое слагаемое, а в другом – второе слагаемое.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13}\\ a_{21} & a_{22} & b_{23}\\ a_{31} & a_{32} & b_{33}\end{vmatrix}.$$

9. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на любой общий множитель.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+\beta\cdot a_{31} & a_{22}+\beta\cdot a_{32} & a_{23}+\beta\cdot a_{33}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

10. Здесь мы прибавили ко второй строке третью, умноженную на произвольное число $\beta\in R$.
11. Сумма произведений элементов одной строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равно нулю, так как при этом мы вычисляем определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами).
12. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$\det(A\cdot B) = detA\cdot detB$, где матрицы А и В – квадратные, одного порядка.

Примеры:

Вычисление определителей любого порядка с помощью свойств:

1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} (2)-4\cdot(1)\\ (3)-7\cdot(1)\end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -6 & -12\end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -3 & -6\end{vmatrix} = 0$$

2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix} = \{(4)-(3)\} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -3\\ -1 & 1 & 4\end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 4\cdot(4+3) = 28$$

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Напомним, что системы линейных уравнений – это системы уравнений первой степени относительно всех неизвестных.

Решим в общем виде систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \to \text{пусть } \ a_{11} \neq 0 \to x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$$

$$\to \text{подставим во второе уравнение вместо } x_1 \ \to$$

$$\frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} \cdot a_{21} + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \to \text{приведём подобные слагаемые} \to x_2 \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

Настала пора найти x_2, причём единственное значение переменной x_2 определяется только в случае ненулевого значения скобки.

Вот так и появилось понятие определителя – выражение из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений, определяющее наличие решения системы.

Будем считать, что $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \to x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$. Подставим в выражение для нахождения x_1, приведём подобные слагаемые и после всех преобразований получим:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Логика получения знаменателя: запишем коэффициенты при неизвестных в виде таблицы и получим уже известный нам определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Числители дробей в формулах для нахождения x_1 и x_2 обозначим Δ_1 и Δ_2. Логика получение этих выражений такова: в определителе из коэффициентов при неизвестных заменяем столбец коэффициентов при соответствующей переменной на столбец свободных коэффициентов и вычисляем определитель:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2\,, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Итак, мы с вами вывели формулы для нахождения решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, естественно имеющие смысл при $\Delta \neq 0$.
Это и есть формулы Крамера.

Швейцарский математик Габриэль Крамер, живший в XVIII веке, предложил метод для решения квадратных систем линейных уравнений. Произошло это в 1750 году, термина «определитель» тогда ещё не существовало (его ввёл Гаусс в 1801 году), но Крамер дал точный алгоритм для вычисления определителей любого порядка и вывел формулы для решения квадратных систем линейных уравнений. Позже эти формулы были названы его именем.

Формулы Крамера.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_n \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Определитель n-го порядка $\Delta = |A| = |a_{ij}|$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы. В зависимости от определителя системы различают следующие случаи:

1. Если определитель системы Δ отличен от нуля, то система (1) имеет, и при том единственное, решение, которое может быть определено по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots , x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где определитель n-го порядка Δ_i получается из Δ путём замены i-го столбца столбцом свободных членов $b_1, b_2, \dots , b_n$;
2. Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из $\Delta_i \neq 0$, то система (1) не имеет решений (несовместна);
3. Если $\Delta = 0$ и все $\Delta_i = 0$ $(i = 1,2, \dots, n)$, то система либо несовместна (не имеет решений), либо имеет бесконечное множество решений.

Пример:

Решить систему

$$\begin{cases} 2x - z = 1 \\ 4x + 2y - 3x = -1 \\ -2x - y + z = 4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \{(2) + 2 \cdot (3)\} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \ \Delta_x$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10,$$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 14$, так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет только одно решение. Находим его по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6}{-2} = -3, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{10}{-2} = -5, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{14}{-2} = -7.$$

Сделаем проверку. Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Подставим полученное столбец-решение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 7 \\ -12 - 10 + 21 \\ 6 + 5 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Ура, верно!}$$