Лекция 7. Линейные действия над операторами. Обратный оператор. Ядро и образ линейного оператора.Критерий обратимости линейного оператора в терминах его образа и ядра.

1. ***Действия над линейными операторами***

Пусть L-линейное пространство. $\widehat{A}$ и $\hat{B}$ линейные операторы: $L\rightarrow L, \alpha \epsilon \mathbb{R}$.

Определение :

- Суммой $\widehat{A} + \hat{B}$называется оператор, действующий по правилу:
  $(\widehat{A} + \hat{B})\vec{x}=\widehat{A}\vec{x} +\hat{B}\vec{x}$;
- Произведением $\widehat{A} \cdot \hat{B}$называется оператор, действующий по правилу:
  $(\widehat{A} \cdot \hat{B})\vec{x} = \widehat{A(\hat{B}\vec{x}})$;
- Произведением $\alpha\widehat{A}$называется оператор, действующий по правилу:
  $(\alpha\widehat{A})\,\vec{x} = \alpha(\widehat{A}\vec{x})$.

Теорема 4. Определенные таким образом операторы $\widehat{A}+ \hat{B}$; $\widehat{A} \cdot \hat{B}$, $\alpha\widehat{A}$ являются линейными операторами.

Докажем для $\widehat{A} \cdot \hat{B} = \hat{C}$;

$\hat{C}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})=\widehat{A} \cdot \hat{B}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})=\widehat{A}(\hat{B}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}))=$

$\widehat{A}(\alpha\hat{B}\vec{x} + \beta\hat{B}\vec{y})=\alpha\widehat{A}\hat{B}\vec{x} + \beta\widehat{A}\hat{B}\vec{y}$;

$$\widehat{A}(\alpha\hat{B}\vec{x} + \beta\hat{B}\vec{y})=\alpha\widehat{A}\hat{B}\vec{x} + \beta\widehat{A}\hat{B}\vec{y} = \alpha\,\widehat{C}\vec{x} + \beta\,\widehat{C}\,\hat{}\;\vec{y} \Rightarrow$$

$$\widehat{A} \cdot \hat{B} - \text{линейный оператор.}$$

Теорема 5. Пусть линейные операторы $\widehat{A}$ и $\hat{B}$ в конечномерном линейном пространстве L в базисе S имеют матрицы A и B соответственно. Тогда линейные операторы $\widehat{A} + \hat{B}$;$\widehat{A} \cdot \hat{B}$, $\alpha\widehat{A}$ имеют матрицы A+B, AB, αA соответственно.

Докажем для $\widehat{A} \cdot \hat{B} = \hat{C}$: Пусть $\overline{z}=\widehat{A} \cdot \hat{B}\vec{x}$; $\overline{y}= \hat{B}\vec{x}$; :$\overline{z}=\widehat{A}\overline{y}$; Тогда

$\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$; где $\overline{y}$=B$\vec{x}$; =>

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = A \cdot \left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = AB\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

линейный оператор $\widehat{A} \cdot \hat{B}$ имеет матрицу AB.

Задача. Вычислить: $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}^n$

Решение. Рассмотрим матрицу$\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$ как матрицу линейного оператора – поворот на угол φ против часовой стрелки. Тогда $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}^n$ - это матрица оператора поворота на угол φ против часовой стрелки n раз, то есть поворота на угол (n φ), а она равна $\begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & cos(n\varphi) \end{pmatrix}$.

2. ***<u>Обратный оператор. Матрица обратного оператора и критерий существования.</u>***

<u>Определение .</u> Оператор $\hat{A}^{-1}$ ***называется обратным*** к линейному оператору $\hat{A}$, действующему в пространстве L, если $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \vec{I}$,
где $\vec{I}$-тождественный оператор ($\vec{I}\vec{x} = \vec{x}$).
Таким образом,$\hat{A}(\hat{A}^{-1}\vec{x}) = \hat{A}^{-1}(\hat{A}\vec{x}) = \vec{x}$.

<u>Теорема 6.</u> Если $\widehat{A}$ линейный оператор: $L \to L$ и $\widehat{A}^{-1}$ существует, то $\widehat{A}^{-1}$-линейный оператор и имеет матрицу A^{-1}.

<u>Доказательство: </u>1. Пусть $\overline{y}_1 = \hat{A}\overline{x}_1$; $\overline{y}_2 = \hat{A}\overline{x}_2$; и так как $\widehat{A}^{-1}\exists$; $\overline{x_1} = \hat{A}^{-1}\overline{y}_1$; $\overline{x_2} = \hat{A}^{-1}\overline{y}_2$; $\hat{A}(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = \alpha\hat{A}(\overline{x}_1) + \beta\hat{A}(\overline{x}_2) = \alpha\overline{y}_1 + \beta\overline{y}_2$;
Рассмотрим $\hat{A}^{-1}(\alpha\overline{y}_1 + \beta\overline{y}_2) = \alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 = \alpha\hat{A}^{-1}(\overline{y}_1) + \beta\hat{A}^{-1}(\overline{y}_2)$=>$\hat{A}^{-1}$-линейный оператор

2. $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \overline{I}$=>$AA' = E$ – единичная матрица; где A'- матрица обратного оператора=>$A' = A^{-1}$

<u>Теорема 7 (критерий существования обратного оператора)</u>
Пусть $\widehat{A}$ линейный оператор: $L \to L$, $\hat{A}^{-1}$существует ⇔detA$\neq 0$

<u>Определение .</u>Оператор, у которого существует обратный, называется обратимым.

Очевидно, что линейный оператор обратимый тогда и только тогда, когда он взаимно однозначный.

<u>Примеры :</u> В V_2 и V_3

1) Обратимый оператор: поворот на угол φ против часовой стрелки.
   Обратный оператор: поворот на φ по часовой стрелки.
2) Оператор проектирование на ось OX не имеет обратного.

1. ***<u>Ядро и образ линейного оператора, их свойства. Критерий обратимости линейного оператора в терминах его образа и ядра</u>.***

<u>Определение .</u>***Образом линейного оператора*** $\widehat{\boldsymbol{A}}$ называется множество **Im**$\widehat{\boldsymbol{A}}$ всех векторов L , таких что, для любого $\vec{y}$ ∈Im$\hat{A}\exists\vec{x}$:
$\hat{A}(\vec{x}$)=$\vec{y}$.

<u>Определение </u>.***Ядром линейного оператора*** $\widehat{\boldsymbol{A}}$ называется множество **Ker**$\widehat{\boldsymbol{A}}$ всех векторов L , таких что, для любого $\vec{x}$ ∈Ker$\hat{A}$, $\hat{A}(\vec{x}$)=$\vec{0}$.

Пусть A-матрица линейного оператора $\hat{A}$ в некотором базисе. Тогда Ker$\hat{A}$ является решением однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Теорема 8.</u> Ядро и образ линейного оператора, действующего в L, являются линейными подпространствами пространства L.

<u>Докажем для Ker</u>$\widehat{A}$: Проверим замкнутость <u>Ker</u>$\widehat{A}$. Пусть $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ $\in$<u>Ker</u>$\widehat{A}$;=>$\widehat{A}\overline{x}_1 = \overline{0}$; $\widehat{A}\overline{x}_2 = \overline{0}$=>$\widehat{A}(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = \alpha\widehat{A}\overline{x}_1 + \beta\widehat{A}\overline{x}_2 = \overline{0}$ => $\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 \epsilon$Ker$\widehat{A}$, =>Ker$\widehat{A}$ замкнуто относительно операций сложения и умножения на число =>Ker$\widehat{A}$- подпространство в L.

<u>Определение .</u>Ранг оператора $\hat{A}$, Rang($\hat{A}$) = dim (Im$\hat{A}$).
<u>Определение .</u>Дефект оператора $\hat{A}$, Defect($\hat{A}$) = dim(Ker$\hat{A}$).

<u>Теорема 9.</u> Ранг линейного оператора, действующего в л.п. Lсовпадает с рангом его матрицы в каком либобазисе.

<u>Доказательство</u>: Пусть в L задан базис S={$\overline{e}_1; \dots \overline{e}_n$}; запишем образы базисных векторов в матрицу A. r=RgA равен числу л.н.з. столбцов, которое равно числу л.н.з. векторов из $\{\hat{A}\overline{e}_1, \dots \hat{A}\overline{e}_n\}$, которые и образуют базис Im$\hat{A}$:$\{\hat{A}\overline{e}_1, \dots \hat{A}\overline{e}_r\}$=>dim (Im$\hat{A}$) =Rang($\hat{A}$).

<u>Утверждение.</u>Ранг и дефект линейного оператора не зависят от выбора базиса.

<u>Теорема 10</u>(бездоказательства) Для$\forall$ линейного оператора $\hat{A}: L \to L$Rang($\hat{A}$) +Defect($\hat{A}$) = dim L.

<u>Теорема 11</u>. ***(критерии обратимости линейного оператора)***

1) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его матрица в каком-либо базисе невырожденная (detA$\neq 0$).
2) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его образ совпадает со всем пространством L.Im$\hat{A} = L$
3) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его ядро тривиально, т.е. Ker$\hat{A} = \{\vec{0}\}$.

<u>Примеры:</u>

1) В V_3 поворот на угол φ: Ker$\hat{A} = \{\vec{0}\}$; Im$\hat{A} = L$; обратим

2) В V_3 оператор проектирование на ось OX: Ker$\hat{A} = \left\{\alpha\vec{j} + \beta\vec{k}\right\}$; Im$\hat{A} = \{\gamma\vec{i}\}$; нет обратного оператора.

3) $\hat{A}\vec{x}$=($x_1 - 5x_2$+$3x_3$,$-2x_1 + 3x_2 - x_3$, $x_2 + 2x_3$): $R^3 \to R^3$

матрица линейного оператора A: $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

DetA= -19$\neq$ 0 =>$\hat{A}^{-1}$ существует. Его матрицей будет матрица, обратная к матрице линейного оператора $\hat{A}$, т.е. $A^{-1} = \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} 7 & 13 & -4 \\ 4 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$.

Найдем ядро линейного оператора $\hat{A}$. Решим систему $A\overline{x} = \overline{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix};$$

$x_3 = 0; x_2 = 0; x_1 = 0$.Ker$\hat{A}$={(0,0,0)}={$\overline{0}$}. Подтверждает вывод о том, что оператор обратим.

4)$\hat{A}(p(t)) =$ *(t+3)p''(t)-2p'(t)* в пространстве P_2 многочленов степени не выше 2.

Найдем матрицу $\hat{A}$ в каноническом базисе:

$\hat{A}\overline{e}_0 = (t + 3) \cdot (1)'' - 2 \cdot 1' = 0 = (0,0,0)$;

$\hat{A}\overline{e}_1 = (t + 3) \cdot (t)'' - 2 \cdot t' = -2 = (-2,0,0)$;

$\hat{A}\overline{e}_2 = (t + 3) \cdot (t^2)'' - 2 \cdot (t^2)' = -2t + 6 = (6, -2,0)$;

A=$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Чтобы найти ядро $\hat{A}$, решим однородную систему уравнений:

AX=O; $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; rang A=2; c=b=0; a −любое; X=(a,0,0)=a; => Ker$\hat{A} = \{p(t) = a\}$

detA=0 =>$\hat{A}^{-1}$ не существует.