Лекция №1. Алгебра матриц.

> *Прямоугольные и квадратные матрицы. Треугольные и диагональные матрицы. Транспонирование матриц.*
> *Сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц. Основные свойства этих операций.*
> *Определители 2-го и 3-го порядков.*

Определение: **Матрица** – таблица из $n \cdot m$ чисел и/или буквенных выражений, расположенных в n строк и m столбцов. Размер матрицы – это количество строк и столбцов: $(n \times m)$, где сначала указывается количество строк, а затем количество столбцов.

Соответственно размеру, матрицы бывают **прямоугольными** – количество строк и столбцов различны, и **квадратными** – количества строк и столбцов совпадают и тогда количество строк-столбцов квадратной матрицы называется её размером. Элемент, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце обозначается с двойной нумерацией: a_{ij}. Главной диагональю матрицы называется совокупность элементов с совпадающими номерами строки и столбца: (a_{ii}).
Замечание: в матрице не должно быть пропусков и пустых мест.

Примеры:
$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ – прямоугольная матрица размера (2×3),
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ – прямоугольная матрица размера $(3 \times 1) -$ так называемый столбец или вектор-столбец,
$(3 \quad 2)$ – прямоугольная матрица размера (1×2) – это строка или вектор-строка,
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица размера (3×3), или попросту квадратная матрица размера 3, причём это так называемая **диагональная** матрица: квадратная матрица, все внедиагональные элементы которой равны нулю.

Виды квадратных матриц:

- **диагональная:** все внедиагональные элементы равны нулю.
- **треугольная**: все элементы, расположенные выше (нижнетреугольная) или ниже (верхнетреугольная) главной диагонали, равны нулю.

Необычная операция над матрицей: **операция транспонирования**. При этом строки и столбцы меняются местами: элемент, стоявший в i-ой строке и j-ом столбце, не меняя своего значения, «переезжает» в j-ую строку и i-ый столбец. Если над матрицей A совершается операция транспонирования, то транспонированная матрица обозначается A^{T}. При транспонировании матрица меняет свой размер с $(n \times m)$ на $(m \times n)$.

Пример:
$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, транспонируем матрицу A и получим $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Очевидно, что элементы главной диагонали при транспонировании остаются на своих местах.

Операция транспонирования позволяет получить квадратные матрицы специальных видов:
Симметрическая матрица – матрица, не меняющаяся при транспонировании: $S = S^T$. Можно доказать, что в симметрической матрице элементы, стоящие симметрично относительно главной диагонали, равны: $a_{ij} = a_{ji}, i \neq j$.

Пример:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Кососимметрическая матрица – при транспонировании меняет свой знак на противоположный: $K = -K^T$. Можно доказать, что кососимметрическая матрица имеет вид: на главной диагонали стоят нули, а элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, отличаются знаком: $a_{ii} = 0, a_{ij} = -a_{ji}, i \neq j$.

Пример:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операции над матрицами.

Сложение матриц одного размера производится поэлементно: $A_{n\times m} + B_{n\times m} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$.

Умножение матрицы на число осуществляется так же поэлементно: $\alpha \cdot A_{n\times m} = \left(\alpha \cdot a_{ij}\right)$, где $\alpha \in R$. Очевидно, что две матрицы одного размера являются равными, если равны их элементы с одинаковыми номерами, то есть равенство матриц определяется так же поэлементно.

Свойства этих операций (складываются матрицы одного размера):

1. A+B=B+A
2. (A+B)+C=A+(B+C)
3. $\alpha \cdot (\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha\mathrm{A} + \alpha\mathrm{B}$
4. $(\alpha + \beta)\mathrm{A} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{A}$
5. $\alpha(\beta\mathrm{A}) = (\alpha\beta)\mathrm{A}$.

Для матриц данного размера существует так называемая нулевая матрица, все элементы которой равны нулю. Очевидно, что $\forall \mathrm{A}_{n\times m}$: $A_{n\times m} + 0_{n\times m} = A_{n\times m}$.

Для любой матрицы $A_{n\times m} = \left(a_{ij}\right)$ можно определить противоположную матрицу $(-A_{n\times m}) = \left(-a_{ij}\right)$ такого же размера и такую, что $A_{n\times\times m} + (-A_{n\times m}) = 0_{n\times m}$.

Умножение матриц. Матрицы умножаются следующим образом: строка на столбец. То есть элементы строки первой матрицы умножаются на соответствующие элементы столбца второй матрицы и результаты складываются. Попросту говоря, первый на первый, плюс второй на второй, плюс третий на третий и так далее, пока не исчерпаем элементы строки первого сомножителя и столбца второго сомножителя. Очевидно возникает ограничение на размеры матриц, которые можно перемножать: длина строки первого сомножителя должна быть равна высоте столбца второго сомножителя, а значит размеры матриц связаны соотношением: $A_{m\times n} \cdot B_{n\times s} = C_{m\times s}$, то есть количество столбцов первого сомножителя равно количеству строк второго.

Пусть даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

(число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы). Матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

называется *произведением матриц* A *и* B (обозначение: $C = A \cdot B$), если ее элементы вычислены по формуле:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \quad 1 \le i \le m, \; 1 \le k \le s.$$

Для того чтобы получить элемент в i-ой строке и k-ом столбце матрицы $C = AB$ следует элементы i-ой строки матрицы A умножить на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Пример:

Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти все возможные произведения этих матриц.

Решение:

Определим размеры этих матриц: $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 1}, C_{1\times 3}$. Таким образом можно найти произведения матриц $A \cdot B = (2\times 3)\cdot(3\times 1) = (2\times 1)$, $B\cdot C = (3\times 1)\cdot(1\times 3) = (3\times 3)$, $C\cdot B = (1\times 3)\cdot(3\times 1) = (1\times 1)$ - матрица размера 1×1 - это число.

Итак, найдём произведения матриц:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 3 \\ (-2)\cdot(-1)+0\cdot 2+(-1)\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\cdot 0 & -1\cdot(-3) & -1\cdot 4 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot(-3) & 2\cdot 4 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & -9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=0\cdot(-1)+(-3)\cdot 2+4\cdot 3=6$$

Важно помнить, что **произведение матриц, вообще говоря, неперестановочно,** то есть не всегда можно менять порядок сомножителей, да и если можно, то результаты могут получиться различными.

В связи с этим, вводится понятие перестановочных матриц: Матрицы A и B называются перестановочными, если $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$.

Задача:

Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

Обозначим искомую матрицу $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\mathrm{b} & \mathrm{a} \\ -\mathrm{d} & \mathrm{c} \end{pmatrix}$$

Приравняем полученные матрицы поэлементно и получим простую систему:

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} c=-b \\ d=a \\ -a=-d \\ -b=c \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} d=a \\ c=-b \end{cases}$$

Таким образом, матрицы, перестановочные с данной матрицей, имеют вид:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in R$$

Свойства операции умножения матриц.

Ещё раз напомним, что произведение матриц, вообще говоря, неперестановочно, то есть надо внимательно проверять размеры матриц, которые вы собрались перемножать! Длина первого сомножителя (количество столбцов) должна совпадать с высотой второго сомножителя (количество строк).

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, размеры матриц таковы: $(m \times n), (n \times k), (k \times l)$.
2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, размеры матриц: A и B $(m \times n)$, C $(n \times k)$
3. Единичная матрица: только для квадратных матриц существует так называемая единичная матрица Е размера $(n \times n)$ – квадратная диагональная, на главной диагонали стоят единицы, внедиагональные элементы – нули, причём для любой квадратной матрицы А порядка $(n \times n)$ выполняется: $A \cdot E = E \cdot A = A$.
4. Для квадратных матриц одного размера $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
5. $(\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\alpha \cdot B), \forall \alpha \in R$
6. $0 \cdot A = 0$, где 0 – нулевая матрица соответствующего порядка.
7. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц. $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$. Понятие определителя сейчас будет дано.

Определители квадратных матриц.

Понятие определителя мы введём сначала для матриц квадратных матриц второго и третьего порядков, а затем обобщим для произвольных квадратных матриц.

Определителем матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется число $(ad - bc)$. Обозначения определителя: $detA = |A| = \Delta A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. То есть, чтобы вычислить определитель матрицы второго порядка, надо от произведения элементов на главной диагонали отнять произведение элементов так называемой побочной диагонали.

Определители матриц третьего порядка вычисляются несколькими способами.

Первый – это сведение к вычислению определителей второго порядка В дальнейшем мы сформулируем теорему о разложении определителя по строке или столбцу – теорема о понижение порядка определителя.

Итак, определитель третьего порядка:

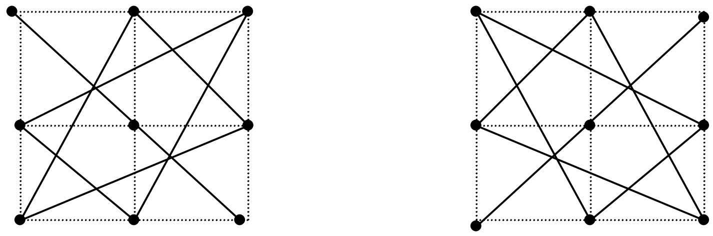
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Обратите внимание, что в этой формуле каждый элемент первой строки умножается на определитель второго порядка, полученный после вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент первой строки. Данный способ вычисления называется разложением определителя по первой строке. Далее раскрываем определители второго порядка и получим окончательный результат: три слагаемых со знаком плюс и три со знаком минус.

Следующий способ – правило Саррюса: приписываем справа от определителя первые два столбца и выписываем три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и на диагоналях, параллельных главной, со знаком плюс, а три произведения элементов, расположенных на побочной диагонали и на диагоналях, параллельных побочной, со знаком минус:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ещё один способ раскрытия определителя третьего порядка – правило треугольника:



$+$ $\qquad\qquad\qquad$ $-$

Вершины треугольников на левом рисунке показывают расположение элементов матрицы A, произведения которых берутся со знаком $''+''$, а на левом рисунке – со знаком $''-''$.
Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно разобраться в этом способе. Определители порядков четыре и выше вычисляют путём разложения по строке (или столбцу), то есть понижая порядок определителя. Этот основной способ мы разберём в следующей лекции.

Примеры:

1. $\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 24 - 15 = 9.$
2. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-3) \cdot 5 = 15$
3. $\begin{vmatrix} x & x - \frac{1}{2} \\ 2 & x \end{vmatrix} = x^2 - 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
4. $\begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix} = cos^2x + sin^2x = 1$
5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -60.$ Определитель мы вычислили с помощью разложения по первой строке.