Лекция №4. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.

Понятие ранга матрицы как максимального размера ненулевых миноров. Сохранение ранга матрицы при элементарных преобразованиях. Основные понятия теории систем линейных уравнений (однородная и неоднородная системы, совместность и несовместность). Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Понятие ранга матрицы часто возникает и играет важную роль в линейной алгебре и ее приложениях. В частности, оно оказывается очень полезным при исследовании систем линейных уравнений. Одним из проявлений этого является критерий совместности системы линейных уравнений, который формулируется на языке рангов основной и расширенной матриц системы.

В лекции про определители мы с вами познакомились с понятием минора элемента квадратной матрицы. А теперь дадим определение минора матрицы произвольного размера.

Определение.
Минором k-ого порядка матрицы $A_{n\times m}$ называется определитель квадратной матрицы порядка $k \times k$, составленной из элементов матрицы A, которые находятся в заранее выбранных k строках и k столбцах, причём расположение элементов матрицы A сохраняется.

Другими словами, если в матрице $A_{n\times m}$вычеркнуть строк $(n-k)$ и $(m-k)$ столбцов, а из оставшихся элементов составить матрицу, сохраняя расположение элементов матрицы A, то определитель полученной матрицы и есть минор порядка k матрицы A.
Максимальный порядок минора для матрицы размера $(n \times m)$ определяется неравенством $k \leq min(n, m)$.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ определяется шесть миноров первого порядка – это сами элементы матрицы, и три минора второго порядка:
$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$, $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$.

Определение.
Ранг матрицы – это наивысший порядок минора матрицы, отличного от нуля.

Обозначение: ранг матрицы обозначают Rank(A), Rang(A), или просто r(A).

Из определения ранга матрицы и минора матрицы понятно, что ранг нулевой матрицы равен нулю, а ранг ненулевой матрицы не меньше единицы.

Ранг матрицы в нашем примере равен двум – среди трёх миноров порядка два один минор равен нулю, но есть и ненулевые миноры.

Определение ранга матрицы путём нахождения ненулевого минора максимального порядка достаточно громоздко (хотя существует чёткий алгоритм окаймляющих миноров, но и этот алгоритм труден, так как требует вычисления большого количества определителей).
На практике более удобным является нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований матрицы основано на утверждении: ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях.
То есть если матрица B получена из матрицы A с помощью конечного числа элементарных преобразований, ранги этих матриц равны: r(A)=r(B).

Справедливость этого утверждения следует из свойств определителя матрицы:
■ При перестановке строк (или столбцов) матрицы её определитель меняет знак. Если он равен нулю, то при перестановке строк (столбцов) он остаётся равным нулю.
■ При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на произвольное число $k \neq 0$, определитель полученной матрицы равен определителю исходной матрицы, умноженному на k. Если определитель исходной матрицы равен нулю, то после умножения всех элементов какой-либо строки или столбца на число k определитель полученной матрицы также будет равен нулю.
■ Прибавление к элементам некоторой строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца) матрицы, умноженных на некоторое число k, не изменяет её определителя.

Суть метода элементарных преобразований заключается в приведении матрицы, ранг которой нам требуется найти, к ступенчатому виду (или трапециевидной матрице, или верхней треугольной) с помощью элементарных преобразований. Ранг матриц такого вида равен количеству строк, содержащих хотя бы один ненулевой элемент. А так как ранг матрицы при проведении элементарных преобразований не изменяется, то полученное значение и будет рангом исходной матрицы.
При приведении матрицы к ступенчатому виду для удобства вычислений необходимо в верхнем левом углу матрицы получить единицу, то есть с помощью элементарных преобразований строк получить элемент $a_{11} = 1$, затем обнулить элементы под ним, так же получить элемент $a_{22} = 1$ и обнулить элементы под ним и так далее. Поясним на примере:
Найдём ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \{(3) - 3(2)\} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix} \sim \{(2) - (1)\} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix} \sim \{(2) - (1)\} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & 5 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$\sim \{(3) + (2)\} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to r(A) = 2$, так как в ступенчатой матрице две ненулевые строки.

Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.
Мы с вами уже умеем решать квадратные системы линейных уравнений двумя способами: по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы.
Теперь мы научимся исследовать и решать системы линейных уравнений с любым количеством уравнений и неизвестных, то есть прямоугольные системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система с m уравнениями относительно n неизвестных.
Основные понятия теории систем линейных уравнений:
■ **Однородная система** – все свободные коэффициенты равны нулю:
$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$
■ **Неоднородная система** – хотя бы один свободный коэффициент не равен нулю
■ **Основная матрица** системы – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных. Чаще всего обозначается A.
■ **Расширенная матрица** системы – основная матрица, дополненная столбцом свободных коэффициентов. Обозначается $(A|B)$.
■ **Определитель системы** – для квадратных систем – определитель основной матрицы.
■ **Решение** системы относительно n неизвестных – упорядоченный набор из n чисел, при подстановке которого в каждое уравнение системы вместо неизвестных получаем верные равенства. Таким образом, слово «решение» имеет два значения: действие и результат. Иногда решение системы – упорядоченный набор – называют вектор-решением.
■ **Совместность и несовместность** систем:
система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.

система называется **несовместной**, если она не имеет решений вообще.

■ **Эквивалентные системы** – системы, у которых совпадают множества решений.

Однородная система линейных уравнений **ОСЛУ:** $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Неоднородная система линейных уравнений НСЛУ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$,

где $b_1 \neq 0$, или $b_2 \neq 0, \ldots$ или $b_m \neq 0$

Очевидно, что расширенную матрицу разумно выписывать только для неоднородной системы. Относительно количества решений систем линейных уравнений возможны три случая: единственное решение, бесконечное множество решений (совместные системы) и отсутствие решений (несовместные системы).

Исторически первый точный метод решения систем линейных уравнений – метод последовательного исключения неизвестных - нам известен как **метод Гаусса**.

Полезно знать: **Карл Фридрих Гаусс** - величайший немецкий математик (1777-1855гг.), **«король математики»**. С именем Гаусса связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики, а так же в механике, астрономии, физике и геодезии.

Решение неоднородных систем линейных уравнений (НСЛУ)

Выписываем расширенную матрицу системы, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу к ступенчатому виду. При этом возможны три случая. Опишем их - для простоты восприятия и наглядности - для квадратной системы с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \sim$$

Итак, элементарными преобразованиями строк, и только строк, приводим матрицу к ступенчатому виду. Это так называемый прямой ход метода Гаусса – получение нулей под главной диагональю матрицы (для системы это равносильно исключению неизвестных).

Возможные три случая окончательного ступенчатого вида:

1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & b'_3 \end{array}\right) \rightarrow$ теперь получим нули над главной диагональю

(обратный ход метода Гаусса), тогда слева получится единичная матрица, а справа – столбец решений. Схематично это выглядит так $(A|B) \sim (E|X)$. Это случай единственного решения системы. (Система совместна). Заметим, что в этом случае ранги основной и расширенной матриц равны и равны количеству неизвестных: $r(A) = r(A|B) = n$, где n – количество неизвестных в системе.

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & b'_3 \end{array}\right)$, где $b'_3 \neq 0$. Понятно, что такая система не имеет решений (Система несовместна).

Действительно, ведь каждая строка матрицы – это коэффициенты уравнения, а последняя строка даёт уравнение, не имеющее решений:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = b_3 \neq 0$$

Ранги основной и расширенной матриц не равны друг другу: $r(A) < r(A|B)$

3. $\begin{pmatrix}1 & a'_{12} & a'_{13} & \big| b'_1\\ 0 & 1 & a'_{23} & \big| b'_2\\ 0 & 0 & 0 & \big| 0\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}1 & a'_{12} & a'_{13} & \big| b'_1\\ 0 & 0 & 0 & \big| 0\\ 0 & 0 & 0 & \big| 0\end{pmatrix}$. В этих случаях система имеет бесконечное множество решений – нам придётся одни неизвестные выражать через другие, таким образом, множество векторов-решений системы будет параметризовано. В этом случае ранги основной и расширенной матриц и количество неизвестных связаны соотношением: $r(A) = r(A|B) < n$.

Рассмотрим пример решения НСЛУ методом Гаусса:

1)

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 - x_3 = 2,\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5,\\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3.\end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и приведём её у ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 5\\ 4 & -2 & -2 & -3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{array}\right).$$

Система несовместна, так как получилось уравнение $0\cdot x + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = -7$.

Ответ: $\varnothing$.

2) Решить неоднородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1,\\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1,\\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1.\end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & -1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c}2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & -2\end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c}2 & -1 & 3 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1,\\ \qquad\qquad -x_3 + 5x_4 - x_5 = -1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x_2 + 3x_3 = 1 - 2x_1 + 2x_4 - 4x_5,\\ \qquad\qquad x_3 = 1 - x_5 + 5x_4.\end{cases}$$

Здесь мы выразили переменную x_3(назовём её главной или зависимой переменной) через переменные $x_{4,}x_5$ - назовём их свободные (независимые) переменные:

$$x_1 = c_1,\quad x_4 = c_2,\quad x_5 = c_3.$$

Обратная подстановка

$$x_3 = 1 + 5c_2 - c_3,$$

$$x_2 = -1 + 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1 + 2c_1 + 3(1 + 5c_2 - c_3) - 2c_2 + 4c_3 = 2 + 2c_1 + 13c_2 + c_3.$$

Таким образом, главные (зависимые) переменные x_2 и x_3, а свободные (независимые) x_1, x_4, x_5. Тогда общее решение системы можно записать в виде столбца:

Ответ: $X = \begin{pmatrix}c_1\\ 2c_1 + 13c_2 + c_3 + 2\\ 5c_2 - c_3 + 1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in R$