Линейные операторы

Определение: Отображение $\hat{A}$ пространства V_n называется линейным оператором в этом пространстве, если:

1) Отображение $\hat{A}$ переводит пространство V_n в себя: $\forall \vec{x} \in V_n : \hat{A}\vec{x} \in V_n$ (вектор в вектор)
2) Линейность:
   a. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n : \hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$ (образ суммы равен сумме образов)
   b. $\forall \vec{x} \in V_n$ и $\forall \alpha \in R : \hat{A}(\alpha \vec{x}) = \alpha \cdot \hat{A}\vec{x}$ (постоянный множитель можно вынести за знак линейного оператора)

Свойства линейного оператора:

1) Всякий линейный оператор переводит ноль-вектор в ноль-вектор.
2) Под действием линейного оператора любая линейная комбинация системы векторов отображается в линейную комбинацию образов этих векторов.
3) Линейный оператор переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую систему. То есть всякий линейный оператор сохраняет линейную зависимость. Но линейно независимая система не обязательно отображается в линейно независимую систему.

Способы задания линейного оператора:

1) Словесное описание действия линейного оператора
2) При помощи матрицы линейного оператора в фиксированном базисе

Матрица линейного оператора в базисе состоит из координат образов базисных векторов в этом же базисе, записанных по столбцам.

✔ Как написать матрицу A линейного оператора $\hat{A}$?

1) Фиксируем базис
2) Находим образы базисных векторов под действием линейного оператора (в векторном виде)
3) Находим координаты образов базисных векторов в этом же базисе
4) Записываем координаты образов в матрицу по столбцам

✔ Для чего нужна матрица линейного оператора? Ответ: Для нахождения образа произвольного вектора в координатном виде. Если $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$, то $\hat{A}\vec{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, где y_1, y_2, y_3 – координаты образа вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

✔ Как связаны матрицы линейного оператора в разных базисах? Формула связи: $A_{\vec{b}_2} = P^{-1} \cdot A_{\vec{b}_1} \cdot P$, где $P = P_{\vec{b}_1 \to \vec{b}_2}$

✔ Что такое матрица перехода от базиса к базису?

$$P_{\vec{b}_1 \to \vec{b}_2} = \begin{pmatrix} \text{координаты векторов} \\ \text{второго базиса в} \\ \text{первом базисе (по столбцам)} \end{pmatrix}$$

Собственные значения (СЗ) и собственные векторы (СВ) линейного оператора.

Определение: Ненулевой вектор $\vec{a}(\vec{a} \neq \vec{0})$ называется собственным вектором линейного оператора $\hat{A}$, отвечающим собственному значению λ, если $\hat{A}\vec{a} = \lambda \vec{a}$

Замечания:

1) Собственный вектор не может быть нулевым, собственное значение может быть равно нулю
2) Собственный вектор пропорционален своему образу. Коэффициент пропорциональности и есть собственное значение.

✔ Как найти СЗ и СВ? Ответ:

СЗ находятся с помощью характеристического уравнения: $|A - \lambda E| = 0$.

СВ для СЗ λ_k -это решение однородной системы линейных уравнений с матрицей ($A - \lambda E$).

Оператор простого типа

Определение: Оператор $\hat{A}$ называется оператором простого типа, если его собственные векторы образуют базис в пространстве V_n. Т.е. собственных векторов ровно n-штук и они линейно независимы.

Ядро и образ линейного оператора

Определение: Ядро линейного оператора – это множество всех векторов, переходящих в ноль-вектор.

$\ker \hat{A} = \left\{ \vec{x} \in V_n : \hat{A}\vec{x} = \vec{0} \right\}$ Ядро оператора образует линейное пространство.

Определение: Образ линейного оператора – это множество всех векторов, для которых есть прообразы:

$\operatorname{Im} \hat{A} = \left\{ \vec{y} \in V_n : \exists \vec{x} \in V_n : \hat{A}\vec{x} = \vec{y} \right\}$. Образ линейного оператора образует линейное пространство.

- Чтобы найти ядро линейного оператора, надо решить ОСЛУ с матрицей $A \Rightarrow \dim \ker A = n - rA$,
  где n – размерность всего пространства.
- Чтобы найти образ линейного оператора, надо матрицу линейного оператора умножить на произвольный вектор.

$$dimV_n = dim(kerA) + dim\,(ImA)$$

Обратимость линейного оператора

Определение: Оператор $\hat{A}^{-1}$ называется обратным для $\hat{A}$, если $\forall x \in V_n : (\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1})(\vec{x}) = (\hat{A}^{-1} \cdot \hat{A})(\vec{x}) = \vec{x}$

Критерий обратимости линейного оператора в терминах его матрицы:

Оператор $\hat{A}$ обратим $\Leftrightarrow$ обратима его матрица A $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Матрицей обратного линейного оператора $\hat{A}^{-1}$ будет A^{-1}.

✔ Схема нахождения обратной матрицей:

1) $|A| \neq 0 \Rightarrow A - \textit{невырожденная},\ \textit{обратима}$
2) $A \to A^T = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \Leftrightarrow M_{ij} \Leftrightarrow A^* = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$
3) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A^*$

Связь обратимости линейного оператора $\hat{A}$ с ядром и образом линейного оператора:

1) Критерий обратимости в терминах его ядра:
   линейный оператор $\hat{A}$ - обратим $\Leftrightarrow \ker \hat{A}\left\{\vec{0}\right\}$ ***(ядро нулевое),*** $rA = \dim V_n$
2) Критерий обратимости в терминах его образа:
   линейный оператор $\hat{A}$ - обратим $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \hat{A} = V_n$ ***(образ совпадает со всем пространством)***

Размерность ядра: $\dim\ \ker \hat{A} = \dim V_n - rA$

Размерность образа: $\dim\ \operatorname{Im}\hat{A} = rA$

Диагонализуемость матрицы

Матрица линейного оператора $\hat{A}$ диагонализируема $\Leftrightarrow$ оператор $\hat{A}$ -простого типа, т.е. имеет базис из собственных векторов. В собственном базисе матрица линейного оператора будет диагональной, по главной диагонали стоят собственные значения линейного оператора:

$$A_{соб.базис} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Чтобы привести матрицу оператора к диагональному виду, надо найти собственные значения (с помощью хар.ур-я), найти собственные векторы, убедиться, что они образуют базис и вычислить матрицу оператора в собст.базисе с помощью формулы связи матриц в разных базисах.