Лекция №5. Системы линейных уравнений. (Продолжение)

Основная и расширенная матрица системы. Критерий совместности системы (теорема Кронекера-Капелли). Условия единственности и не единственности решения .
Однородная система линейных уравнений. Условия существование ненулевого решения. Общее решение, фундаментальная система решений ОСЛУ.
Общая структура решения неоднородной системы линейных уравнений.

Итак, в предыдущей лекции мы с вами рассмотрели основные понятия и термины теории систем линейных уравнений.

Сформулируем **Критерий совместности неоднородной системы линейных уравнений** (критерий Кронекера-Капелли) :

Неоднородная система линейных уравнении совместна тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матриц системы равны, то есть $r(A) = r(A|B)$.

Рассмотрим различные случаи рангов основной и расширенной матриц и связь количества решений НСЛУ с этими рангами:

1) НСЛУ имеет **единственное решение** при совпадении рангов основной и расширенной матриц с количеством неизвестных в системе:
$$\mathbf{r(A) = r(A|B) = n}.$$
2) НСЛУ имеет **бесконечное множество решений**, если ранги основной и расширенной матриц равны, но меньше количества неизвестный системы:
$$\mathbf{r(A) = r(A|B)} < n$$
3) НСЛУ **не имеет решений** (несовместна), если ранги основной и расширенной матриц не равны (точнее, ранг основной матрицы меньше ранга расширенной):
$$\mathbf{r(A)} < r\mathbf{(A|B)}$$

Однородная система линейных уравнений

В силу того, что все свободные коэффициенты уравнений ОСЛУ равны нулю,
однородная система всегда совместна, так как имеет нулевое решение (тривиальное решение). Количество решений и существование ненулевых решений зависит от ранга матрицы системы:

1) ОСЛУ имеет **единственное (нулевое) решение** ↔ ранг матрицы совпадает с количеством неизвестных: $\mathbf{r(A) = n}$.
2) ОСЛУ имеет **бесконечное множество решений** (ненулевых) ↔ ранг матрицы меньше количества неизвестных: $\mathbf{r(A)} < n$

Приведём удобную пошаговую схему решения ОСЛУ:
-Выписать матрицу системы, привести её к ступенчатому виду, таким образом определив ранг матрицы. Если ранг равен количеству неизвестных $\mathbf{r(A) = n}$, то делаем вывод, что система имеет единственное (нулевое) решение и задача решена.

Если ранг матрицы меньше количества неизвестных : $\mathbf{r(A)} < n$
то определяем количество независимых переменных по формуле $\mathbf{k = n - r(A)}$.
Далее делаем четыре шага к получению ответа (для лучшего запоминания назовём эти шаги «четыре галочки»)):
∨ Восстанавливаем систему по последней (ступенчатой) матрице
∨ Выражаем одни переменные (зависимые) через другие (независимые)
∨ Записываем переменные по порядку
∨ Выписываем общее решение системы в векторном виде.
При выписывании общего решения мы выделим столбцы коэффициентов при независимых переменных – эти столбцы называются фундаментальной системой решений ОСЛУ.

Рассмотрим пример решения однородной системы по этой схеме:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=0 \end{cases}$$

(сразу обратите внимание, что количество уравнений меньше количества переменных, а значит ранг матрицы меньше количества переменных и система имеет бесконечное множество решений!)

Выпишем матрицу из коэффициентов и приведём её к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}\sim\text{поменяем местами вторую и первую строки}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$r(A)=2<n=5\rightarrow\rightarrow\text{ решений бесконечно много, количество независимых переменных}$$
$$\text{и количество решений в ФСР}$$
$$k=n-r=5-2=3$$

Далее схема «четыре галочки»

∨ восстановим систему по последней матрице:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 3x_2-3x_3-3x_4+5x_5=0 \end{cases}$$

∨ выразим из последнего уравнения переменную x_5 через переменные x_2, x_3, x_4 - будем считать эти переменные независимыми.

(Выбор переменных для выражения друг через друга, в принципе, ничем не ограничен)

$x_5=-\frac{3}{5}x_2+\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{5}x_4$, подставим в первое уравнение и выразим переменную x_1

$$x_1=x_2-x_3-x_4+2x_5=x_2-x_3-x_4+2\cdot\left(-\frac{3}{5}x_2+\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{5}x_4\right)=$$

$=-\frac{1}{5}x_2+\frac{1}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4$.

∨ Запишем переменные по порядку:

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{5}x_2+\frac{1}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4 \\ x_2=x_2 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \\ x_5=-\frac{3}{5}x_2+\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{5}x_4 \end{cases}$$

(переобозначим переменные на произвольные константы в самом конце решения)

∨ запишем решение в векторном виде (в виде столбца), выделяя столбцы коэффициентов при независимых неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} -1/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

Полученные столбцы являются основными (базисными) решениями исходной однородной системы и образуют так называемую Фундаментальную Систему Решений (ФСР ОСЛУ).
Необходимо сделать проверку в матричном виде: умножить матрицу системы на каждый из базисных столбцов-решений, при этом должен получиться нулевой столбец.
Обозначим независимые переменные произвольными постоянными и запишем общее решение однородной системы X_{OO}, где индекс означает: **О**бщее решение **О**днородной системы.

Ответ: $X_{OO} = C_1\begin{pmatrix} -{}^{1}/_{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -{}^{3}/_{5} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} {}^{1}/_{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ {}^{3}/_{5} \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} {}^{1}/_{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ {}^{3}/_{5} \end{pmatrix}, C_1, C_2, C_3 \in R$

Общая структура решения неоднородной системы линейных уравнений

Каждой неоднородной системе соответствует однородная, в которой левые части уравнений такие же, как и в неоднородной, а свободные коэффициенты равны нулям.

Общее решение неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей однородной системы и какого-либо частного решения неоднородной системы. В виде формулы это выглядит так: $\boldsymbol{X}_{\text{ОН}} = \boldsymbol{X}_{\text{ОО}} + \boldsymbol{x}_{\text{чн}}$.

Задача. (типовой расчёт, задача №1)
Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений, выписать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы и частое решение неоднородной системы. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы, приведём её к ступенчатому виду, найдём ранги расширенной и основной матриц и проверим критерий Кронекера-Капелли.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to r(A) = r(A|B) = 2 < n = 4 \to$ неоднородная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Соответствующая однородная система имеет бесконечное множество решений, причём ФСР содержит два решения.
Схема «четыре галочки»
$\vee$ восстановим систему $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

$\vee$ выразим из последнего уравнения переменную x_4 через переменные x_2, x_3 , и отныне будем считать их независимыми переменными, а переменные x_1, x_4 зависимыми.

$$x_4 = -x_2 - 2x_3 - 3$$

Выразим из первого уравнения x_1 и подставим x_4:

$$x_1 = x_2 + x_3 - x_4 = x_2 + x_3 - (-x_2 - 2x_3 - 3) = 2x_2 + 3x_3 + 3$$

$\vee$ Запишем переменные по порядку:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 3x_3 + 3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -x_2 - 2x_3 - 3 \end{cases}$$

$\vee$ в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Последний столбец – это и есть частное решение неоднородной системы.

Итак, ФСР однородной системы – вектор-столбцы:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Частное решение неоднородной системы: $x_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Сделаем проверку в матричном виде – умножим основную матрицу системы на полученные столбцы:

$A \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ столбец a_1 является решением однородной системы. Ура, верно!

$A \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ столбец a_2 является решением однородной системы. Ура, верно!

$A \cdot x_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow$ столбец $x_{\text{чн}}$ является решением неоднородной системы. Ура, верно!

Ответ: $X_{\text{0Н}}=C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in R$