МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МИРЭА – Российский технологический университет»
РТУ МИРЭА

ЛЕКЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия (1 семестр)
(наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом)

Уровень	бакалавриат *(бакалавриат, магистратура, специалитет)*
Форма обучения	очная *(очная, очно-заочная, заочная)*
Направление(-я) подготовки	09.03.01 «Информатика и вычислительная техника (Вычислительные машины, комплексы, системы и сети)» *(код(-ы) и наименование(-я))*
Институт	Институт информационных технологий (ИИТ) *(полное и краткое наименование)*
Кафедра	Высшей математики-2 (ВМ-2) *(полное и краткое наименование кафедры, реализующей дисциплину (модуль))*
Лектор	Гущина Елена Николаевна *(сокращенно – ученая степень, ученое звание; полностью – ФИО)*

Используются в данной редакции с учебного года 2019/20
(учебный год цифрами)

Проверено и согласовано «24» 08 2020 г. Р.В. Шамин
(подпись директора Института/Филиала с расшифровкой)

Согласовано 28.08.2020

Москва 2020 г.

Лекция №1. Алгебра матриц.

Определение: **Матрица** – таблица из $n \cdot m$ чисел и/или буквенных выражений, расположенных в n строк и m столбцов. Размер матрицы – это количество строк и столбцов: $(n \times m)$, где сначала указывается количество строк, а затем количество столбцов.
Соответственно размеру, матрицы бывают **прямоугольными** – количество строк и столбцов различны, и **квадратными** – количество строк равно количеству столбцов, и тогда количество строк-столбцов квадратной матрицы называется её размером. Элемент, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце обозначается с двойной нумерацией: a_{ij}.
Главной диагональю матрицы называется совокупность элементов с совпадающими номерами строки и столбца: (a_{ii}).
Замечание: в матрице не должно быть пропусков и пустых мест.
Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается *O*.
Матрица размером $(1 \times m)$ называется *вектор-строкой*.
Матрица размером $(n \times 1)$ называется *вектор-столбцом.*
Примеры:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ прямоугольная матрица размера } (2 \times 3),$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} -$ прямоугольная матрица размера $(3 \times 1) -$ вектор $-$ столбец. Число элементов в столбце называется *высотой* столбца.
$(3 \quad 2) -$ прямоугольная матрица размера $(1 \times 2) -$ это вектор $-$ строка. Число элементов в строке называется *длиной* строки.
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} -$ квадратная матрица размером (3×3), или попросту квадратная матрица размера 3, причём это так называемая **диагональная** матрица: квадратная матрица, все внедиагональные элементы которой равны нулю.

Виды квадратных матриц: $A = (a_{ij}), 1 \le i \le n, 1 \le j \le n.$
- **диагональная:** все внедиагональные элементы равны нулю,

квадратная диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, называется единичной и обозначается символами *E* или *I*. Элементы единичной матрицы обозначаются δ_{ij} (символ Кронекера), так что $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \ne j \end{cases}$ и $E = (\delta_{ij})$.
- **треугольная**: все элементы, расположенные выше (нижнетреугольная) или ниже (верхнетреугольная) главной диагонали, равны нулю.

Матрица $A = (a_{ij}), 1 \le i \le n, 1 \le j \le m$ называется **верхней (правой) ступенчатой** матрицей, если она обладает следующими свойствами:
1) если i-я строка нулевая, то и $(i+1)$-я строка также нулевая;
2) если первые ненулевые элементы i-ой и $(i+1)$-ой строк расположены в столбцах с номерами k_i и k_{i+1}, то $k_i < k_{i+1}$.
Если в определении верхней ступенчатой матрицы поменять ролями строки и столбцы, то получим определение нижней (левой) ступенчатой матрицы.
Пример:
Верхние ступенчатые матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нижние ступенчатые матрицы

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что не всякая треугольная матрица имеет ступенчатую форму. Например, треугольная матрица $\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ не является ступенчатой.

Ступенчатая матрица, у которой $k_i = i$, называется **трапециевидной.**

Пример.

Верхние трапециевидные матрицы:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Нижние трапециевидные матрицы:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Операция транспонирования.

Необычная операция над матрицей: **операция транспонирования**. При этом строки и столбцы меняются местами: элемент, стоявший в i-ой строке и j-ом столбце, не меняя своего значения, «переезжает» в j-ую строку и i-ый столбец. Если над матрицей A совершается операция транспонирования, то транспонированная матрица обозначается A^{T}. При транспонировании матрица меняет свой размер с $(n \times m)$ на $(m \times n)$ и элементы матриц A и A^{T} связаны равенством $a_{ij} = a^t_{ji}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$.

Пример: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}-2&1&3\\5&0&-4\end{pmatrix}$, транспонируем матрицу A и получим $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}-2&5\\1&0\\3&-4\end{pmatrix}$.

Операция транспонирования позволяет получить квадратные матрицы специальных видов:

Симметрическая матрица – матрица, не меняющаяся при транспонировании: $S = S^T$. Можно доказать, что в симметрической матрице элементы, стоящие симметрично относительно главной диагонали, равны: $a_{ij} = a_{ji}, i \neq j$. Пример: $S = \begin{pmatrix}3&-2&1\\-2&0&-4\\1&-4&5\end{pmatrix}$.

Кососимметрическая матрица – при транспонировании меняет свой знак на противоположный: $K = -K^T$. Можно доказать, что кососимметрическая матрица имеет вид: на главной диагонали стоят нули, а элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, отличаются знаком: $a_{ii} = 0, a_{ij} = -a_{ji}, i \neq j$.

Пример: $K = \begin{pmatrix}0&-2&1\\2&0&-4\\-1&4&0\end{pmatrix}$.

Операции над матрицами.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $n \times m$ называются **равными**, если

$$a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}.$$

Обозначение $A = B$.

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $n \times m$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $n \times m$, элементы которой определены равенством $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, , i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$.

Обозначение $C = A + B$.

Иными словами, **с**ложение матриц одного размера производится поэлементно: $A_{n\times m} + B_{n\times m} = (a_{ij} + b_{ij})$.

Умножение матрицы на число осуществляется так же поэлементно: $\alpha \cdot A_{n\times m} = (\alpha \cdot a_{ij})$, где $\alpha \in R$.

Свойства операций над матрицами.

(складываются матрицы одного размера):

Теорема.

1. A+B=B+A
2. (A+B)+C=A+(B+C)
3. $\alpha \cdot (\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha\mathrm{A} + \alpha\mathrm{B}$
4. $(\alpha + \beta)\mathrm{A} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{A}$
5. $\alpha(\beta\mathrm{A}) = (\alpha\beta)\mathrm{A}$.

Теорема. (Свойства операции транспонирования).

Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \alpha \in \mathbb{R}$,
3. $(AB)^T = B^T A^T$,
4. $(A^T)^T = A$,

выполненными для всех матриц A и B, для которых имеют смысл левые части равенств.

Для матриц любого размера существует так называемая нулевая матрица, все элементы которой равны нулю. Очевидно, что $\forall \mathrm{A}_{n\times m}$: $A_{n\times m} + 0_{n\times m} = A_{n\times m}$.

Для любой матрицы $A_{n\times m} = (a_{ij})$ можно определить противоположную матрицу $(-A_{n\times m}) = (-a_{ij})$ такого же размера и такую, что $A_{n\times m} + (-A_{n\times m}) = 0_{n\times m}$.

Умножение матриц.

Пусть даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

(число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы). Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

называется ***произведением*** *матриц* A *и* B (обозначение: $C = A \cdot B$), если ее элементы вычислены по формуле:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \quad 1 \le i \le m, \ 1 \le k \le s.$$

Для того чтобы получить элемент в i-ой строке и k-ом столбце матрицы $C = AB$ следует элементы i-ой строки матрицы A умножить на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Иными словами, матрицы умножаются следующим образом: строка на столбец. То есть элементы строки первой матрицы умножаются на соответствующие элементы столбца второй матрицы и результаты складываются. Попросту говоря, первый на первый, плюс второй на второй, плюс третий на третий и так далее, пока не исчерпаем элементы строки первого сомножителя и столбца второго сомножителя. Очевидно возникает ограничение на размеры матриц, которые можно перемножать: длина строки (количество столбцов) первого сомножителя должна быть равна высоте столбца (количество строк) второго сомножителя, а значит размеры матриц связаны соотношением:

$A_{m\times n} \cdot B_{n\times s} = C_{m\times s}$, то есть количество столбцов первого сомножителя равно количеству строк второго.

Пример: Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти все возможные произведения этих матриц.

Решение. Определим размеры этих матриц:$A_{2\times 3}$, $B_{3\times 1}$, $C_{1\times 3}$. Таким образом можно найти произведения матриц $A \cdot B$: $(2 \times 3) \cdot (3 \times 1) = (2 \times 1)$, $B \cdot C$: $(3 \times 1) \cdot (1 \times 3) = (3 \times 3)$, $C \cdot B$: $(1 \times 3) \cdot (3 \times 1) = (1 \times 1)$ - матрица размера 1×1 - это число.

Итак, найдём произведения матриц:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 & -1 \cdot (-3) & -1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & -9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 6$$

Важно помнить, что **произведение матриц, вообще говоря, неперестановочно,** то есть не всегда можно менять порядок сомножителей, да и если можно, то результаты могут получиться различными. В связи с этим, вводится понятие перестановочных матриц:

Матрицы А и В называются **перестановочными**, если $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$.

Задача: Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: Обозначим искомую матрицу $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

Приравняем полученные матрицы поэлементно и получим простую систему:

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} c=-b \\ d=a \\ -a=-d \\ -b=c \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} d=a \\ c=-b \end{cases}$$

Таким образом, матрицы, перестановочные с данной матрицей, имеют вид:

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a,b\in R$$

Свойства операции умножения матриц:

Ещё раз напомним, что произведение матриц, вообще говоря, неперестановочно, то есть надо внимательно проверять размеры матриц, которые вы собрались перемножать! «Длина» первого сомножителя (количество столбцов) должна совпадать с «высотой» второго сомножителя (количество строк).

1.$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$, размеры матриц таковы: $(m\times n),(n\times k),(k\times l)$.

2.$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$, размеры матриц: A и $B(m\times n)$, $C(n\times k)$

3. Единичная матрица: только для квадратных матриц существует так называемая единичная матрица Е размера $(n\times n)$ – квадратная диагональная, на главной диагонали стоят единицы, внедиагональные элементы – нули, причём для любой квадратной матрицы А порядка $(n\times n)$ выполняется : $A\cdot E=E\cdot A=A$.

4. Для квадратных матриц одного размера $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

5.$(\alpha\cdot A)\cdot B=\alpha\cdot(A\cdot B)=A\cdot(\alpha\cdot B),\forall\alpha\in R$

6. О$\cdot A=0$, где $0-$ нулевая матрица соответствующего размера.

Определители квадратных матриц.

Понятие определителя мы введём сначала для квадратных матриц первого, второго и третьего порядков, а затем обобщим для произвольных квадратных матриц.

Определение. Определителем квадратной матрицы первого порядка, то есть числа, называется само это число.

Определение. Определителем квадратной матрицы второго порядка $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется число $(ad-bc)$.

Обозначения определителя: $detA=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$

То есть, чтобы вычислить определитель матрицы второго порядка, надо от произведения элементов на главной диагонали отнять произведение элементов так называемой побочной диагонали.

Определение. Определителем квадратной матрицы третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число

$$detA=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33.}$$

Сформулируем несколько правил, удобных для запоминания процесса вычисления определителя матрицы третьего порядка.

Сведение к вычислению определителей второго порядка. В дальнейшем мы сформулируем теорему о разложении определителя по строке или столбцу – теорема о понижение порядка определителя.
Итак, определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

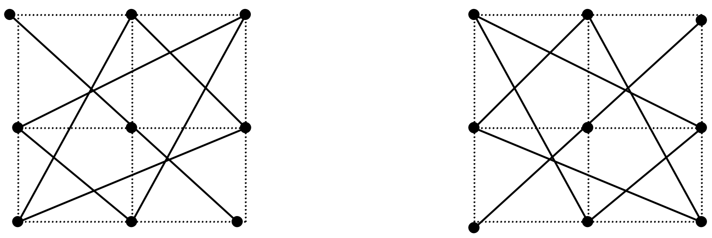
Данный способ вычисления называется разложением определителя по первой строке.
Обратите внимание, что в этой формуле каждый элемент первой строки умножается на определитель второго порядка, полученный после вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент первой строки. Далее раскрываем определители второго порядка и получим окончательный результат: три слагаемых со знаком плюс и три со знаком минус.

Правило Саррюса: приписываем справа от определителя первые два столбца и выписываем три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и на диагоналях, параллельных главной, со знаком плюс, а три произведения элементов, расположенных на побочной диагонали и на диагоналях, параллельных побочной, со знаком минус:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ещё один способ раскрытия определителя третьего порядка: правило треугольника.



$+$ $\qquad\qquad$ $-$

Вершины треугольников на левом рисунке показывают расположение элементов матрицы A, произведения которых берутся со знаком $"+"$, а на левом рисунке – со знаком $"-"$.

Предоставляем возможность самостоятельно разобраться в этом способе.

Замечание. При вычислении определителя третьего порядка с помощью любого из представленных правил получается одно и то же значение (число).
Забегая вперёд, скажем, что определители порядков четыре и выше вычисляют путём разложения по строке (или столбцу), то есть понижая порядок определителя. Этот основной способ мы разберём в следующей лекции.

А сейчас примеры вычисления определителей:
1). $\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 24 - 15 = 9.$

2). $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-3) \cdot 5 = 15$

3). $\begin{vmatrix} x & x-\frac{1}{2} \\ 2 & x \end{vmatrix} = x^2 - 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

4). $\begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix} = cos^2x + sin^2x = 1$

5). $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -60.$ Определитель мы вычислили с помощью разложения по первой строке.

Перестановки.

Определение. Упорядоченная совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, в которой 1)$\alpha_i \in \{1,2,\dots,n\}, i = \overline{1,n}$; 2)$\alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j$, называется перестановкой из чисел 1,2,…, n.
Перестановка 1,2,…, n называется *натуральной*.
Аналогично рассматриваются перестановки из n произвольных символов, достаточно перенумеровать эти символы и иметь дело с их номерами 1,2,…, n.
Преобразование перестановки, при котором два её числа α_i и α_j с номерами $i \neq j$ меняются местами, называется *транспозицией*.
Говорят, что два числа α_i и α_j в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ образуют *инверсию (беспорядок),* если большее из них предшествует меньшему, то есть если
$\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$, и *порядок* – в противном случае, т.е. если $\alpha_i < \alpha_j$ при $i < j$.
Перестановка называется *чётной*, если общее число инверсий в ней чётно, и *нечётной*, если нечётно. Общее число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ обозначается символами $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ или $\sigma(\alpha)$.

Пример. Найдём общее число инверсий в перестановке 4,3,5,1,2.
Решение. Число 4 образует три инверсии с числами 3,1 и 2, число 3 – две инверсии с числами 1 и 2 (пара 4,3) уже была рассмотрена); число 5 – две инверсии с числами 1 и 2; пара (1,2) не образует инверсию Таким образом, $\sigma(4,3,5,1,2) = 3 + 2 + 2 = 7$.
Таким образом, данная перестановка нечётная.
Принято оформлять решение такой задачи следующим образом. Запишем количество инверсий, которые образуют каждое число в перестановке с последующим, под этим числом:

$$\begin{array}{ccccc} 4, & 3, & 5, & 1, & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \Rightarrow \sigma(4,3,5,1,2) 3 + 2 + 2 + +0 + 0 = 7. \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Вообще-то, под последним элементом в перестановке количество инверсий, очевидно, 0, и чаще всего это не указывают. Но мы обратили на это внимание.

Теорема. Число всевозможных перестановок из n чисел равно $n!$.
Доказательство очевидно методом математической индукции. Доказать самостоятельно.

Теорема. Каждая транспозиция меняет чётность перестановки. (Без доказательства).

Теорема. Все $n!$ перестановок из n чисел могут быть упорядочены так, чтобы каждая последующая отличалась от предыдущей на одну транспозицию, причём начинать это упорядочение можно с любой перестановки. (Без доказательства).

Следствие 1. При $n \geq 2$ число чётных перестановок равно числу нечётных.

Следствие 2. От каждой перестановки из n чисел можно перейти к любой другой перестановке из этих же чисел при помощи конечного числа транспозиций.

Теорема. Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - перестановка из первых n натуральных чисел с числом инверсий s, то после преобразования её в натуральную перестановку индексные номера 1,2,…, n образуют новую перестановку с тем же числом инверсий s.

Проиллюстрируем утверждение теоремы на примере перестановки 4,3,5,1,2. В этой перестановке $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 5, \alpha_4 = 1, \alpha_5 = 2$. После преобразования перестановки в натуральную получим перестановку 1,2,3,4,5, т.е $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$, при этом перестановка из индексных номеров будет иметь вид 4,5,2,1,3. Осталось проверить, что $\sigma(4,3,5,1,2) = 7$ и $\sigma(4,5,2,1,3) = 7$. (самостоятельно).

Лекция №2. Определители.

Дадим два определения определителя.

Определение 1. Определителем (детерминантом) квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ $n -$го порядка называется сумма всевозможных произведений $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причём если сомножители в этом произведении упорядочены в порядке возрастания номеров строк, то оно берётся со знаком $(-1)^{\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$, где $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - общее число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
Напомним, что обозначения определителя приняты символы $detA = |A|$. Итак,

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

где суммирование ведётся по всевозможным перестановкам $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из чисел 1,2,…, n.
Каждое произведение в этой сумме называется членом определителя, а число $(-1)^{\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$ - его знаком.
Из свойств перестановки следует, что число всевозможных членов определителя $n -$го порядка равно $n!$ и что при $n \geq 2$ число положительных членов равно числу отрицательных и равно $n!/2$.
Пример. Показать, что определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.
Решение. Рассмотрим случай верхней треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Переберём все возможные нетривиальные члены $detA$. Из первого столбца в такой член может войти только a_{11}, так как остальные элементы 1-го столбца равны нулю. Вместе с a_{11} может быть взят только член a_{22}. Теперь уже вместе с $a_{11}a_{22}$ не может войти в одно произведение ни один элемент первых двух строк, так что из третьего столбца вместе с $a_{11}a_{22}$ может быть взят только a_{33} и так далее. Таким образом,

$$|A| = (-1)^{\sigma(1,2,\dots,n)} a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \Rightarrow |A| = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Что и требовалось показать.

Рекуррентное определение определителя.

Определение 2. Определителем квадратной матрицы $n-$го порядка называется число, вычисленное по рекуррентной формуле:

1) Определителем квадратной матрицы первого порядка называется единственный элемент этой матрицы.
2) Определителем квадратной матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ порядка $n>1$ называется число $detA$
$$detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{1j},$$
где M_{1j} - определитель квадратной матрицы порядка $(n-1)$, полученной из матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ вычёркиванием первой строки и $j-$го столбца.

Миноры и алгебраические дополнения.

Существует два вида миноров:
1) для квадратной матрицы: минор элемента a_{ij};
2) для матрицы произвольного размера: минор матрицы.
В этой лекции мы с вами познакомимся с минорами элементов квадратных матриц.

Определение: Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы называется определитель матрицы, получаемой из данной матрицы вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.
Обозначение: M_{ij} – минор элемента a_{ij}. Иногда минор элемента называют *дополнительным минором*. Обращаем внимание, что при вычислении минора какого-либо элемента матрицы сам этот элемент не участвует!

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ минор элемента $a_{23}=6$ равен
$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-0\cdot(-5)=-3.$
Минором первого порядка может быть любой элемент матрицы.
Очевидно, что для квадратной матрицы порядка n=3 вычисляется девять миноров второго порядка. Определитель данной матрицы является минором третьего порядка.

Определение: Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется минор, домноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. $(-1)^{\text{№строки+№столбца}}$.
Обозначение A_{ij}.
Для матрицы из предыдущего примера $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=-(-9)=9.$

Важно: ***Алгебраическое дополнение = минор со знаком.***

Теорема (о разложении определителя по строке или столбцу)
Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:
для каждой матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ порядка n при произвольном $i(1\le i\le n)$ имеет место формула

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}$$

и при любом $j (1 \le j \le n)$ – формула

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}.$$

Эти формулы называются *формулами разложения определителя* соответственно по строке и по столбцу. (Теорема без доказательства)

Доказательство равносильности определения определителя, данного выше (с помощью понятия перестановки) и рекуррентного определения не входит в рамки нашего курса и предоставляется для самостоятельного разбора.

Отметим здесь, что определение определителя с помощью понятия перестановки позволяет непосредственно выразить детерминант через элементы матрицы. Однако этот способ вычисления неудобен тем, что число слагаемых в нём очень велико для сравнительно небольших n, например при $n = 6$ оно равно 6!=720. По этой причине для вычисления определителей чаще используют разложение по строке или столбцу.

Пример: разложение определителя третьего порядка по первой строке

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{1k}$$

Знаки алгебраических дополнений определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Пример: определитель второго порядка по первой строке

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример: определитель второго порядка по второму столбцу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} = a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}a_{11} = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}.$$

Отметим, что результаты совпали.

Пример: определитель третьего порядка по первой строке

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-7) + 5 \cdot (-10) + 1 \cdot 9 = -20$$

Действия со строками и столбцами.

Многие предложения о детерминантах (определителях) касаются того, как меняется детерминант при определённых преобразованиях матрицы. Часто приходиться прибавлять к каждому элементу какого-либо столбца матрицы соответствующие элементы другого её столбца, умножать все элементы некоторого столбца на одно и то же число и проделывать те же операции со строками.

Напомним, что число элементов в столбце называется высотой столбца, а число элементов в строке – её длиной.

Два столбца называются равными, если они одной высоты и равны элементы, имеющие одинаковые номера. Аналогично определяется равенство строк.

Определение. *Суммой* двух *столбцов* одной и той же высоты называется столбец, элементы которого равны суммам соответствующих элементов данных столбцов.
Аналогично *суммой* двух *строк* одной и той же длины называется строка, элементы которой равны суммам соответствующих элементов данных строк.
Определение. *Произведением столбца на число* называется столбец, каждый элемент которого равен соответствующему элементу данного столбца, умноженного на это число.
Аналогично *умножение строки на число* определяется как умножение на это число каждого её элемента.

Определение. Линейной комбинацией столбцов $P_k = \begin{pmatrix} p_{1k} \\ \vdots \\ p_{nk} \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq m$ одной и той же высоты n с коэффициентами $\alpha_k, \alpha_k \in \mathbb{R}$ называется столбец

$$Q = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k P_k = \alpha_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_m \begin{pmatrix} p_{1m} \\ \vdots \\ p_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 p_{11} + \dots + \alpha_m p_{1m} \\ \vdots \\ \alpha_1 p_{n1} + \dots + \alpha_m p_{nm} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется линейная комбинация строк.

Свойства определителей.
Сформулируем свойства определителей на примере определителей третьего порядка, но все эти свойства справедливы для определителей любого порядка.

1. Определитель не меняется при замене строк столбцами. Иными словами, определитель квадратной матрицы не меняется при её транспонировании.

Доказательство. Докажем это утверждение по индукции. Для матриц первого порядка оно очевидно. Предположив, что предложение верно для матриц порядка $n-1$, докажем его для матриц порядка n. Пусть U_j - матрица, получаемая из данной матрицы A вычёркиванием первой строки и j-го столбца, а V_j - матрица, получаемая из A^{T} вычёркиванием j-строки и первого столбца. Легко видеть, что $V_j = U_j^T$. Поэтому из предложения индукции следует, что $detV_j = detU_j^T = detU_j$, то есть минор элемента a_{1j} в матрице A равен минору элемента b_{j1} в матрице A^{T}. Кроме того, $a_{1j} = b_{j1}$, и разложение $det\mathrm{A}$ по первой строке совпадает с разложением $det\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ по первому столбцу. Что и требовалось доказать.

Следовательно, строки и столбцы «равноправны»(!), и все свойства определителя для строк, верны и для столбцов.

Пример

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Напомним, что процесс замены строк столбцами называется ***транспонированием***. Итак: *определитель не меняется при транспонировании*.

2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

Доказательство. Докажем по индукции. Непосредственно легко убедиться, что детерминант матрицы второго порядка меняет свой знак при перестановке столбцов. Определитель матрицы порядка n разложим по любому столбцу, отличному от переставляемых столбцов. Переставляемые столбцы входят в каждый дополнительный минор, и если предложение справедливо для матриц порядка $n-1$, при перестановке столбцов каждый минор меняет свой знак. Отсюда вытекает, что знак изменится и у определителя данной матрицы порядка n.

Пример: В определителе третьего порядка поменяем местами первую и третью строки: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} =$

$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{13}a_{22}a_{13} - a_{31}a_{23}a_{12} - a_{32}a_{21}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12} -$$

$$-a_{33}a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Обращаем ваше внимание, что мы вычислили определитель разложением по первой строке

3. Если две строки (столбца) равны, то определитель равен нулю. Это свойство очевидно следует из предыдущего утверждения.
4. Общий множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Продемонстрируем это свойство на примере:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \beta \cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \beta \cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \beta \cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \beta \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \forall \beta \in R.$$

Другая формулировка: если все элементы какой-либо строки (или столбца) умножаются на какое-либо число, значит весь определитель умножается на это число.

5. Если все элементы строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю. Это следует из предыдущего свойства при множителе $\beta = 0$.
6. Если все элементы строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю. Проще говоря, если две строки (столбца) пропорциональны, то определитель равен нулю. Действительно, пропорциональность двух строк означает, что элементы этих строк отличаются друг от друга на общий множитель, следовательно мы можем вынести этот множитель за знак определителя, и в определителе образуется две одинаковые строки, а такой определитель равен нулю!
7. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) равен сумме двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в одном из которых в той же строке (столбце) стоит первое слагаемое, а в другом – второе слагаемое.

Доказательство. Пусть $i-$ й столбец матрицы $A\ n-$ го порядка есть сумма двух столбцов, то есть каждый элемент $a_{ki} = \alpha p_k + \beta q_k$, $1 \le k \le n$. Подставляя эти равенства в разложение $detA$ по $i-$ му столбцу, получим

$$detA = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ki}M_{ki} = \alpha\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}p_kM_{ki} + \beta\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}q_kM_{ki},$$

Что и требовалось доказать.

Сформулированное свойство носит название *линейности определителя* по столбцу(строке). Здесь мы доказали и свойство 4.

Пример: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$

8. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число.

Пример: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\beta \cdot a_{31} & a_{22}+\beta \cdot a_{32} & a_{23}+\beta \cdot a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Здесь мы прибавили ко второй строке третью, умноженную на произвольное число $\beta \in R$.

9. Сумма произведений элементов одной строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Это очевидно, так как при этом мы вычисляем определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами).

Это следует из свойства 3.

10. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:
$\det(A \cdot B) = detA \cdot detB$, где матрицы А и В – квадратные, одного порядка.
Без доказательства.

Вычисление определителей любого порядка с помощью свойств:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} (2) - 4 \cdot (1) \\ (3) - 7 \cdot (1) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \{(4) - (3)\} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (4+3) = 28$$

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Напомним, что системы линейных уравнений – это системы уравнений первой степени относительно всех неизвестных.

Решим в общем виде систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \to \text{пусть } a_{11} \neq 0 \to x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$$

$\to$ подставим во второе уравнение вместо x_1 $\to$

$\frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} \cdot a_{21} + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \to$ приведём подобные слагаемые $\to x_2 \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$.

Найдём x_2, причём единственное значение переменной x_2 определяется только в случае ненулевого значения скобки. Вот так и появилось понятие определителя – выражение из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений, определяющее наличие решения системы.

Будем считать, что $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \to x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$. Подставим в выражение для нахождения x_1, приведём подобные слагаемые и после всех преобразований получим:
$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$. Логика получения знаменателя: запишем коэффициенты при неизвестных в виде таблицы и получим уже известный нам определитель второго порядка:$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Числители дробей в формулах для нахождения x_1 и x_2 обозначимΔ_1и Δ_2. Логика получение этих выражений такова: в определителе из коэффициентов при неизвестных заменяем столбец коэффициентов при соответствующей переменной на столбец свободных коэффициентов и вычисляем определитель:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 , \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Итак, мы с вами вывели формулы для нахождения решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными:$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, естественно имеющие смысл при $\Delta \neq 0$.

Это и есть формулы Крамера.

Швейцарский математик Габриэль Крамер, живший в XVIIIвеке, предложил метод для решения квадратных систем линейных уравнений. Произошло это в 1750 году, термина «определитель» тогда ещё не существовало (его ввёл Гаусс в 1801 году), но Крамер дал точный алгоритм для вычисления определителей любого порядка и вывел формулы для решения квадратных систем линейных уравнений. Позже эти формулы были названы его именем.

Формулы Крамера.

Пусть дана система линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ (1)

Определитель n-го порядка $\Delta = |A| = |a_{ij}|$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы. В зависимости от определителя системы различают следующие случаи:

1) Если определитель системы Δ отличен от нуля, то система (1)имеет, и при том единственное, решение, которое может быть определено по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots\ , x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где определитель n-го порядка Δ_i получается из Δ путём замены i-го столбца столбцом свободных членов $b_1, b_2, \dots\ , b_n$;
2) если $\Delta = 0$, но хотя бы один из $\Delta_i \neq 0$, то система (1) не имеет решений (несовместна);
3) если $\Delta = 0$ и все $\Delta_i = 0\ (i = 1,2,\dots,n)$, то система либо несовместна (не имеет решений), либо имеет бесконечное множество решений.

   Пример:

Решить систему $\begin{cases} 2x - z = 1 \\ 4x + 2y - 3z = -1 \\ -2x - y + z = 4 \end{cases} \to \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \{(2) + 2\cdot(3)\} =$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6,$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10,$$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 14$,так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет только одно решение. Находим его по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6}{-2} = -3, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{10}{-2} = -5, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{14}{-2} = -7.$$

Сделаем проверку.

$\begin{cases} 2(-3) - (-7) = 1 \\ 4(-3) + 2(-5) - 3(-7) = -1 \\ -2(-3) - (-5) + (-7) = 4 \end{cases} \to$ Ура, верно!

Задача. Вычислить определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение: Используя свойства определителя, в какой-либо строке или в каком-либо столбце обратим в нуль все элементы, кроме одного. Выберем последний столбец. Прибавим к первой строки четвертую, умноженную на 2, и вычтем из третьей строки четвертую:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по четвертому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далее добьемся максимального количества нулей во второй строке: к первому столбцу прибавим второй, умноженный на 5, к третьему столбцу прибавим второй, умноженный на 4, затем разложим определитель третьего порядка по второй строке, затем посчитаем получившийся определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 12 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 12 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-8 \cdot 11 - 1 \cdot 12) = 88 + 12 = 100.$$

Лекция №3 Обратная матрица.

Ещё раз обратим ваше внимание, что определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, где $A_{n\times n}, B_{n\times n}$.

Определение. Пусть А — произвольная матрица. Матрица B называется обратной к А, если AB = BA = E, где E — единичная матрица. Если матрица, обратная к А, существует, то матрица А называется обратимой. Матрица, обратная к А, обозначается через A^{-1}.

В определении ничего не говорится о размерах матрицы А и обратной к ней матрицы, но зная свойства произведения матриц, мы с вами понимаем, что если матрица А обратима, то она является квадратной матрицей, обратная к ней матрица является квадратной матрицей того же порядка, что и А.

Важно: не каждая квадратная матрица обратима.

Критерий обратимости матрицы

Теорема. (о существовании и единственности матрицы, обратной к данной).

Пусть А — квадратная матрица. Матрица, обратная к А, существует тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$. Если $|A| \neq 0$, то матрица, обратная к А, единственна и может быть вычислена по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, где A^*является транспонированной к матрице, состоящей из алгебраических дополнений элементов матрицы А. Матрица A^* называется союзной или присоединённой к матрице А.

Доказательство. Предположим, что $|A| = 0$ и существует матрица В, обратная к А. Тогда $|AB| = |A||B| = 0$. С другой стороны, из определения обратной матрицы вытекает, что $|AB| = |E| = 1$. Полученное противоречие показывает, что если матрица, обратная к А, существует, то$|A| \neq 0$.
Предположим теперь, что $|A| \neq 0$. Докажем, что в этом случае существует матрица, обратная к А. Обозначим порядок матрицы А через n и положим $B = \frac{1}{|A|}A^*$. Убедимся в том, что матрица В является обратной к А. В самом деле, рассмотрим произведение матриц А и В:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots \\ A_{1n}A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если элемент матрицы $A \cdot B$ стоит на главной диагонали, скажем в i-й строке и i-м столбце, то он равен:$\frac{1}{|A|}(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}) = \frac{1}{|A|}|A| = 1$, поскольку в скобках записано разложение определителя $|A|$ по i-й строке.
Если же этот элемент стоит в i-й строке и j-м столбце, где $i \neq j$, то по свойству определителей он равен: $\frac{1}{|A|}\left(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}\right) = \frac{1}{|A|} \cdot 0 = 0$.
Мы проверили, что АВ = Е. Равенство ВА = Е проверяется аналогично. Следовательно, матрица В обратна к А.
Осталось проверить, что матрица, обратная к А, единственна.
Предположим, что существуют матрицы B_1 и B_2 такие, что
$AB_1 = B_1A = E,\ AB_2 = B_2A = E$. Тогда, с одной стороны,
$B_2(AB_1) = B_2E = B_2$, а с другой, $B_2(AB_1) = (B_2A)B_1 = EB_1 = B_1$.
Следовательно, $B_1 = B_2$.
Мы с вами полностью доказали теорему о существовании и единственности обратной матрицы.
Определение: Квадратная матрица, у которой определитель не равен нулю, называется невырожденной: $|A| \neq 0 \to A$ - невырожденная.

Матрица В, обратная к А, должна удовлетворять двум равенствам:
АВ = Е и ВА = Е, однако, на практике достаточно проверять одно из них, в силу доказанной теоремы о существовании и единственности обратной матрицы.

Основные свойства обратной матрицы:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$

Порядок действий при нахождении обратной матрицы на примере матрицы порядка n=3:

1. Убедимся, что матрица А квадратная
2. Вычислим определитель и проверим, что $|A| \neq 0$, то есть матрица невырожденная.
3. Транспонируем матрицу А, затем запишем знаки алгебраических дополнений в пустой таблице, начнём вычислять миноры элементов транспонированной матрицы и расставлять их в союзную матрицу A^*с учётом знаков алгебраических дополнений:

$$A \to A^T \to A^* = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

4. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$
5. Проверка: $AA^{-1} = E$. Проверку надо делать обязательно!

(а то ошибку найдёт преподаватель и поставит минус за задачу!))

Для матрицы порядка n=2 нахождение обратной матрицы значительно упрощается:
Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to$ если $|A| = ad - bc \neq 0 \to A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ и всё. (Проверить справедливость этой формулы самостоятельно.)
Проверка найденной обратной матрицы обязательна!

Элементарные преобразования матриц.

Элементарными преобразованиями строк матрицы $A_{n\times m}$ называются следующие действия:

1. Умножение какой-либо строки на число $\alpha \neq 0$
2. Перестановка двух строк.
3. Прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на число α.

Аналогичные преобразования можно совершать и со столбцами матрицы. Матрицы, получаемые друг из друга с помощью элементарных преобразований, называются эквивалентными, этот факт обозначается знаком $\sim$.

Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк.

Пусть A — невырожденная квадратная матрица порядка n, то есть предварительно проверили, что определитель матрицы не равен нулю. Запишем матрицу размера n × 2n, в которой в первых n столбцах стоит матрица A, а в последних n столбцах— единичная матрица. С помощью элементарных преобразований строк всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые n столбцов) к единичному виду, тогда в правой части (т. е. в последних n столбцах) полученной матрицы будет записана матрица A^{-1}. Совершать преобразования необходимо именно со всей широкой строкой этой сдвоенной матрицы: $(A|E) \sim (E|A^{-1})$.

Пример. Найдём обратную матрицу двумя способами: с помощью союзной матрицы и с помощью элементарных преобразований строк.

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \{(3)+(1)\} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \{\text{разложим по третьей строке}\} = (-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\to \mathrm{A} - \text{невырожденная} \to \text{обратимая} \to \mathrm{A} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\mathrm{A}^*$$

Найдём союзную матрицу A^* :

$$\mathrm{A} \to \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$= $ вычисляем девять миноров элементов A^{T} и расставляем в A^* с учётом знаков мест

$$\mathrm{M}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ \mathrm{M}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ \mathrm{M}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$\mathrm{M}_{21} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ \mathrm{M}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \mathrm{M}_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\mathrm{M}_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ \mathrm{M}_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2;\ \mathrm{M}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку. При этом удобно вынести дробный коэффициент за знак матрицы:

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Ура, верно!

1. С помощью элементарных преобразований:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{matrix} (2) - 2\cdot(1) \\ (3) + (1) \end{matrix}\right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\text{меняем местами } 2-\text{ю и } 3-\text{ю строки} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \{(3) + 2\cdot(2)\} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \{(1) - (3)\} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \text{умножим } 1-\text{ю строку на } \frac{1}{2}, \text{а } 2-\text{ю и } 3-\text{ю на } (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \to$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Естественно, результаты совпали!

2) Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & -0{,}5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & -0{,}5 \end{array}\right)$$

Следовательно,

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$. Проверку сделайте самостоятельно!

Решение матричных уравнений и систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

С помощью обратных матриц можно решать некоторые матричные уравнения. К их числу относится уравнение вида $AX = B$, в котором A — невырожденная квадратная матрица, а значит существует обратная матрица A^{-1}. Умножая обе части равенства слева на A^{-1} и учитывая, что $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, получаем, что матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение: $X = A^{-1}B$.

Аналогичным образом решается уравнение вида $XA = B$, в котором A — невырожденная квадратная матрица. На этот раз обе части уравнения надо умножить на A^{-1} справа. Поскольку $(XA)A^{-1} = X(AA^{-1}) = XE = X$, мы получаем, что $X = BA^{-1}$.

Последний тип матричных уравнений, о котором мы упомянем, — это уравнения вида $AXB = C$, где A и B — невырожденные квадратные матрицы (возможно, различных порядков). Чтобы решить это уравнение, надо умножить обе его части на A^{-1} слева и на B^{-1}справа. Учитывая, что $A^{-1}(AXB)B^{-1} = (AA^{-1})X(BB^{-1}) = EXE = X$, мы получаем, что указанное уравнение решается по формуле $X = A^{-1}CB^{-1}$. Найденные решения обязательно проверять подстановкой в исходное уравнение!

Пример. Решить матричные уравнения $AX = C$ и $YA = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Найдём обратную матрицу$A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$X = A^{-1}C = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Y = CA^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверка: $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$ верно!

$$YA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \text{верно!}$$

Обращаем ваше внимание, что в этой задаче различный порядок сомножителей в исходных уравнениях привёл к различным результатам!

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Запишем квадратную систему линейных уравнений в матричном виде $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow AX = B.$

Такая запись системы линейных уравнений возможна в силу определения операций над матрицами и их свойств.

Получили матричное уравнение. При $|A| \neq 0$ матрица A невырожденная и существует обратная матрица A^{-1}. Умножая обе части равенства слева на A^{-1} и учитывая, что $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, получаем, что наша система имеет единственное решение, которое выражается формулой $X = A^{-1}B$.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases} \rightarrow \text{матричный вид системы} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Определитель системы $|A| = -3 \neq 0$

$\rightarrow$ система имеет единственное решение,

которое мы найдём с помощью обратной матрицы

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Проверка в матричном виде:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ ура, верно!}$$

<u>Задача.</u> а) Решить матричное уравнение *AX*=*B*. Сделать проверку.

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -17 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

<u>Решение:</u>

$X = A^{-1} \cdot B.$ Найдем матрицу, обратную к матрице A.

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - 3 \cdot (-4) = 10. \qquad A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$

$X = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -17 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 50 & 10 & 0 \\ 30 & 20 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Проверка: $A \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -17 & -2 & -1 \end{pmatrix} = B$ – верно.

b) Решить матричное уравнение *XA*=*B*. Сделать проверку.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 15 & -20 \\ 5 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}.$

$X = B \cdot A^{-1}.$ Найдем матрицу, обратную к матрице A.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-1) = -5. \qquad A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

$X = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & -20 \\ 5 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -25 \\ -20 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Проверка: $X \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -20 \\ 5 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} = B$ – верно.

Лекция №4. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.

Понятие ранга матрицы часто возникает и играет важную роль в линейной алгебре и ее приложениях. В частности, оно оказывается очень полезным при исследовании систем линейных уравнений. Одним из проявлений этого является критерий совместности системы линейных уравнений, который формулируется на языке рангов основной и расширенной матриц системы.

В лекции про определители мы с вами познакомились с понятием минора элемента квадратной матрицы. А теперь дадим определение минора матрицы произвольного размера.

Определение.

Минором k-ого порядка матрицы $A_{n \times m}$называется определитель квадратной матрицы порядка $k \times k$, составленной из элементов матрицы A, которые находятся в заранее выбранных k строках и k столбцах, причём расположение элементов матрицы A сохраняется.

Другими словами, если в матрице $A_{n\times m}$ вычеркнуть $(n-k)$ строк и $(m-k)$ столбцов, а из оставшихся элементов составить матрицу, сохраняя расположение элементов матрицы А, то определитель полученной матрицы и есть минор порядка k матрицы А.

Максимальный порядок минора для матрицы размера $(n\times m)$ определяется неравенством $k\leq min(n,m)$.

Пример. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ определяется шесть миноров первого порядка – это сами элементы матрицы, и три минора второго порядка:

$$\begin{vmatrix}4 & -2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6,\qquad \begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

Определение.
Ранг матрицы – это наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы.
Минор наивысшего порядка, отличный от нуля называется базисным минором матрицы.

Обозначение: ранг матрицы обозначают Rank(A), Rang(A), или просто r(A).

Из определения ранга матрицы и минора матрицы понятно, что ранг нулевой матрицы равен нулю, а ранг ненулевой матрицы не меньше единицы.

Ранг матрицы в нашем примере равен двум – среди трёх миноров порядка два один минор равен нулю, но есть и ненулевые миноры.

Понятие линейной зависимости и линейной независимости.

Определение. Система из m столбцов одной и той же высоты $P_k=\begin{pmatrix}p_{1k}\\ \vdots\\ p_{nk}\end{pmatrix}, 1\leq k\leq m$ называется *линейно независимой*, если из равенства

$$\alpha_1\begin{pmatrix}p_{11}\\ \vdots\\ p_{n1}\end{pmatrix}+\cdots+\alpha_m\begin{pmatrix}p_{1m}\\ \vdots\\ p_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

следует, что $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=0$.

Определение. Система из m столбцов одной и той же высоты $P_k=\begin{pmatrix}p_{1k}\\ \vdots\\ p_{nk}\end{pmatrix}, 1\leq k\leq m$ называется *линейно зависимой*, если существуют m чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_m$, одновременно не равных нулю и таких, что

$$\alpha_1\begin{pmatrix}p_{11}\\ \vdots\\ p_{n1}\end{pmatrix}+\cdots+\alpha_m\begin{pmatrix}p_{1m}\\ \vdots\\ p_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Определения линейно зависимой и линейно независимой системы строк формулируются дословно так же.
Линейная комбинация, все коэффициенты которой равны нулю, называется *тривиальной.*
С помощью этого термина определения линейно независимой и линейной зависимой систем столбцов (строк) можно сформулировать так.
Система столбцов (строк) называется линейно независимой, если только тривиальная линейная комбинация равна нулевому столбцу (строке). Система столбцов (строк) линейно зависима, если существует равная ноль-вектору нетривиальная линейная комбинация этих столбцов (строк).

Свойства.

1. Система столбцов (строк) линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из столбцов (строк) есть линейная комбинация остальных.
2. Если в систему входит нулевой вектор, то такая система линейно зависима.
3. Если некоторые из столбцов (строк) системы составляют линейно зависимую систему (так называемая подсистема), то и вся система линейно зависима.
4. Любые столбцы (строки), входящие в линейно независимую систему, сами по себе образуют линейно независимую систему.

Теорема. (Теорема о базисном миноре). В произвольной матрице A каждый столбец является линейной комбинацией столбцов, в которых расположен базисный минор.
Доказательство. Обозначим через $a_{ki}(k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n)$ элементы матрицы A и через $P_1, \dots, P_n$- её столбцы. Пусть базисный минор расположен в столбцах $P_{i_1}, \dots, P_{i_r}$ и в строках с номерами $k_1, \dots, k_r$. Нам нужно доказать, что для любого $j, 1 \le j \le n,$ существуют такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{r,}$ что

$$P_j = \alpha_1 P_{i_1} + \alpha_2 P_{i_2} + \dots + \alpha_r P_{i_r}.$$

Складывая столбцы поэлементно, получим

$$a_{kj} = \alpha_1 a_{ki_1} + \alpha_2 a_{ki_2} + \dots + \alpha_r a_{ki_r}, \text{для любого } k, 1 \le k \le m. \quad (1)$$

Если столбец $P_j -$ один из столбцов $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots P_{i_r}$, например $j = i_1$, то утверждение очевидно. Достаточно взять соответствующий коэффициент (в нашем случае α_1) равным 1, а остальные коэффициенты равными нулю.
Рассмотрим теперь столбец P_j, отличный от столбцов базисного минора, и составим матрицу

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{ki_1} \dots a_{ki_r} a_{kj} \\ a_{k_1 i_1} \dots a_{k_1 i_r} a_{k_1 j} \\ \dots \\ a_{k_r i_1} \dots a_{k_r i_r} a_{k_r j} \end{pmatrix}$$

из элементов, стоящих на пересечении строк с номерами $k, k_1, \dots, k_r$ и столбцов с номерами $i_1, \dots, i_r, j$. Определитель этой матрицы равен нулю. Действительно, если k равно одному из $k_1, \dots, k_r$, то в A_k есть две одинаковые строки. В противном случае все строки различны, но тогда, переставив строки и столбцы, мы заметим, что определитель A_k не больше, чем знаком, отличается от минора порядка $r + 1$ матрицы A. Разложим детерминант A_k по первой строке

$$0 = a_{ki_1} M_{ki_1} + (-1)^{r-1} a_{ki_r} M_{ki_r} + (-1)^r a_{kj} M_{kj}. \quad (2)$$

Здесь буквой M с индексами обозначены дополнительные миноры соответствующих элементов в матрице A_k. Заметим – и это важная часть доказательства, - что указанные дополнительные миноры не зависят от номера k. Действительно, они расположены в строках с номерами $k_1, \dots, k_r$, общих для всех матриц A_k. Поскольку M_{kj} - базисный минор матрицы A, мы имеем $M_{kj} \ne 0$ и можем переписать равенство (2) в виде

$$a_{kj} = (-1)^{r+1} a_{ki_1} \frac{M_{ki_1}}{M_{kj}} + \dots + a_{ki_r} \frac{M_{ki_r}}{M_{kj}}.$$

Это и есть нужное нам равенство вида (1). Теорема доказана.

Следствие. Каждая строка матрицы есть линейная комбинация строк, в которых расположен базисный минор.

Теорема. (теорема о ранге матрицы). Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов (строк) в этой матрице. (Доказательство самостоятельно).

Определение ранга матрицы путём нахождения ненулевого минора максимального порядка достаточно громоздко (хотя существует чёткий алгоритм окаймляющих миноров, но и этот алгоритм труден, так как требует вычисления большого количества определителей).
На практике более удобным является нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований матрицы основано на утверждении: **ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях**.
То есть если матрица B получена из матрицы A с помощью конечного числа элементарных преобразований, ранги этих матриц равны: r(A)=r(B).

Справедливость этого утверждения следует из свойств определителя матрицы:
■ При перестановке строк (или столбцов) матрицы её определитель меняет знак. Если он равен нулю, то при перестановке строк (столбцов) он остаётся равным нулю.
■ При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на произвольное число $k \neq 0$, определитель полученной матрицы равен определителю исходной матрицы, умноженному на k. Если определитель исходной матрицы равен нулю, то после умножения всех элементов какой-либо строки или столбца на число k определитель полученной матрицы также будет равен нулю.
■ Прибавление к элементам некоторой строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца) матрицы, умноженных на некоторое число k, не изменяет её определителя.

Суть метода элементарных преобразований заключается в приведении матрицы, ранг которой нам требуется найти, к ступенчатому виду (или трапециевидной матрице, или верхней треугольной) с помощью элементарных преобразований. Ранг матриц такого вида равен количеству строк, содержащих хотя бы один ненулевой элемент. А так как ранг матрицы при проведении элементарных преобразований не изменяется, то полученное значение и будет рангом исходной матрицы.
При приведении матрицы к ступенчатому виду для удобства вычислений необходимо в верхнем левом углу матрицы получить единицу, то есть с помощью элементарных преобразований строк получить элемент $a_{11} = 1$, затем обнулить элементы под ним, так же получить элемент $a_{22} = 1$ и обнулить элементы под ним и так далее.
Примеры.
Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \{(3) - 3(2)\} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix} \sim \{(2) - (1)\} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix} \sim \{(2) - 2(1)\} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & 5 \\ 0 & -11 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$\sim \{(3) + (2)\} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to r(A) = 2$, так как в ступенчатой матрице две ненулевые строки.

Метод окаймляющих миноров.

1) Найти какой-нибудь минор $M_1 \neq 0$ первого порядка матрицы *А* (т. е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица *А* нулевая и $r(A) = 0$.

2) Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (окаймляющие M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geq 2$и т.д.

…

k) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$,

и процесс продолжается.

Пример. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение: Матрица A имеет ненулевые элементы, следовательно $r(A) \geq 1$.

Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует).

Таким минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Значит, $r(A) \geq 2$.

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3{}^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0; M_3{}^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2 равны нулю, тогда$r(A) = 2$.

Одним из базисных миноров является $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.

Мы с вами уже умеем решать квадратные системы линейных уравнений двумя способами: по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы.

Теперь мы научимся исследовать и решать системы линейных уравнений с любым количеством уравнений и неизвестных, то есть прямоугольные системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система с m уравнениями относительно n неизвестных.

Основные понятия теории систем линейных уравнений:

■ Числа, стоящие в правых частях уравнений, называются свободными членами уравнений и образуют столбец B, называемый *столбцом свободных членов.*

■*Однородная система* – все свободные члены равны нулю:

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$$

■*Неоднородная система* – хотя бы один свободный член не равен нулю

■*Основная матрица* системы – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных. Чаще всего обозначается A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

■*Расширенная матрица* системы – основная матрица, дополненная столбцом свободных членов. Обозначается $(A|B)$.

■*Определитель системы* – для квадратных систем – определитель основной матрицы.

■*Решение* системы относительно n неизвестных – упорядоченный набор из n чисел, при подстановке которого в каждое уравнение системы вместо неизвестных получаем верные равенства. Таким образом, слово «решение» имеет два значения: действие и результат. Иногда решение системы – упорядоченный набор – называют вектор-решением.

■*Совместность и несовместность* систем:

система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

система называется *несовместной,* если она не имеет решений вообще.

■*Эквивалентные системы*–системы, у которых совпадают множества решений.

Однородная система линейных уравнений *ОСЛУ:* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Неоднородная система линейных уравнений НСЛУ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$,

где $b_1 \neq 0$, или $b_2 \neq 0, \dots$. или $b_m \neq 0$.

Очевидно, что расширенную матрицу разумно выписывать только для неоднородной системы.

Относительно количества решений систем линейных уравнений возможны три случая: единственное решение, бесконечное множество решений (совместные системы) и отсутствие решений (несовместные системы).

Исторически первый точный метод решения систем линейных уравнений – метод последовательного исключения неизвестных -нам известен как **метод Гаусса**.

Полезно знать: **Карл Фридрих Гаусс** - величайший немецкий математик (1777-1855гг.), **«король математики»**. С именем Гаусса связаны фундаментальные исследования почти во всех основных областях математики, а так же в механике, астрономии, физике и геодезии.

Решение неоднородных систем линейных уравнений (НСЛУ)

Выписываем расширенную матрицу системы, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу к ступенчатому виду. При этом возможны три случая. Опишем их - для простоты восприятия и наглядности - для квадратной системы с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \sim$$

Итак, элементарными преобразованиями строк, и только строк, приводим матрицу к ступенчатому виду. Это так называемый прямой ход метода Гаусса – получение нулей под главной диагональю матрицы (для системы это равносильно исключению неизвестных).

Возможные три случая окончательного ступенчатого вида:

1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & b'_3 \end{array}\right)$ → теперь получим нули над главной диагональю (обратный ход метода Гаусса), тогда слева получится единичная матрица, а справа – столбец решений. Схематично это выглядит так $(A|B) \sim (E|X)$. Это случай единственного решения системы. (Система совместна). Заметим, что в этом случае ранги основной и расширенной матриц равны и равны количеству неизвестных: $r(A) = r(A|B) = n$, где n – количество неизвестных в системе.

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & b'_3 \end{array}\right)$, где $b'_3 \neq 0$. Понятно, что такая система не имеет решений (Система несовместна). Действительно, ведь каждая строка матрицы – это коэффициенты уравнения, а последняя строка даёт уравнение, не имеющее решений:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = b_3 \neq 0$$

Ранги основной и расширенной матриц не равны друг другу: $r(A) < r(A|B)$

3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ или $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. В этих случаях система имеет бесконечное множество решений – нам придётся одни неизвестные выражать через другие, таким образом, множество векторов-решений системы будет параметризовано. В этом случае ранги основной и расширенной матриц и количество неизвестных связаны соотношением: $r(A) = r(A|B) < n$.

Рассмотрим пример решения НСЛУ методом Гаусса:

1)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и приведём её у ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

Система несовместна, так как получилось уравнение $0 \cdot x + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -7$.

Ответ: $\varnothing$.

2)Решить неоднородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ \qquad - x_3 + 5x_4 - x_5 = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 1 - 2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ \qquad x_3 = 1 - x_5 + 5x_4. \end{cases}$$

Здесь мы выразили переменную x_3 (назовём её главной или зависимой переменной) через переменные $x_{4,}x_5$ - назовём их свободные (независимые) переменные:

$$x_1 = c_1, \quad x_4 = c_2, \quad x_5 = c_3.$$

Обратная подстановка

$$x_3 = 1 + 5c_2 - c_3,$$
$$x_2 = -1 + 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1 + 2c_1 + 3(1 + 5c_2 - c_3) - 2c_2 + 4c_3 = 2 + 2c_1 + 13c_2 + c_3.$$

Таким образом, главные (зависимые) переменные x_2 и x_3, а свободные (независимые) x_1, x_4, x_5. Тогда все решения системы можно записать в виде столбца:

Ответ: $X = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 + 13c_2 + c_3 + 2 \\ 5c_2 - c_3 + 1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in R$

<u>Задача</u>. Проверить совместность системы уравнений и, в случае совместности, решить ее двумя методами:

а) по формулам Крамера;

b) с помощью обратной матрицы (при нахождении обратной матрицы проверка обязательна).

<u>Решение:</u>

$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 12 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 14 \end{cases}$. Число неизвестных равно числу уравнений.

а) Найдем определитель системы с помощью правила Саррюса.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-5) + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 \cdot 3 —$$
$$(-4) \cdot (-1) \cdot (-2) — (-5) \cdot 2 \cdot 3 — (-1) \cdot 3 \cdot 2 = -5 - 8 - 36 + 8 + 30 + 6 = -5$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система совместна и имеет единственное решение

Составим определитель Δ_1, заменив в Δ первый столбец на столбец правых частей системы уравнений, и вычислим его разложением по элементам первой строки:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 14 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$= 12 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 14 & -5 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 12 \cdot (5 - 6) - 2 \cdot (5 - 28) - 4 \cdot (-3 + 14) = -12 + 46 - 44 = -10$$

$\Delta_1 = -10.$

Составим определитель Δ_2, заменив в Δ второй столбец на столбец правых частей системы уравнений, и вычислим его разложением по элементам третьего столбца:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 12 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 14 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 14\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 12\\ -2 & 14\end{vmatrix} + (-5)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 12\\ 3 & -1\end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot(42-2) - 2\cdot(-14+24) - 5\cdot(1-36) = -160 - 20 + 175 = -5$$

$\Delta_2 = -5.$

Составим определитель Δ_3, заменив в Δ третий столбец на столбец правых частей системы уравнений, и вычислим его разложением по элементам второй строки:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}-1 & 2 & 12\\ 3 & -1 & -1\\ -2 & 3 & 14\end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 12\\ 3 & 14\end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 12\\ -2 & 14\end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot(28-36) - 1\cdot(-14+24) + 1\cdot(-3+4) = 24 - 10 + 1 = 15$$

$\Delta_3 = 15$.

<u>Замечание.</u> Определители можно вычислять любым удобным способом: по правилу Саррюса, разложением по любой строке или столбцу, а также использовать свойства определителя.

Вычислим значения неизвестных x_1, x_2, x_3 по формулам Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

$x_1 = \frac{-10}{-5} = 2;\ x_2 = \frac{-5}{-5} = 1;\ x_3 = \frac{15}{-5} = -3.$

Проверка: подставим полученные неизвестные в исходную систему:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2 + 2 + 12 = 12\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 - 1 - 6 = -1\\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -4 + 3 + 15 = 14\end{cases} \text{ – верно.}$$

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = -3.$

b) Запишем исходную систему в матричной форме: $AX=B$, где

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -4\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & 3 & -5\end{pmatrix};X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};B = \begin{pmatrix}12\\ -1\\ 14\end{pmatrix};\ \ detA = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{существует } A^{-1}.$$

Вычислим матрицу, обратную к матрице A: $A^{-1} = \frac{1}{detA}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$–алгебраическое дополнение к элементу матрицы a_{ij}, i–номер строки,

j – номер столбца, M_{ij}–минор.

Запишем алгебраические дополнения для матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & -5\end{vmatrix} = -10 + 12 = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & 2\end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & -5\end{vmatrix} = 15 - 4 = 11$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -2 & -5\end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 11 & -3 & -10 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{11}{5} & \frac{3}{5} & 2 \\ -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 11 & -3 & -10 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – верно.

$X = A^{-1} \cdot B$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 11 & -3 & -10 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Проверка: $AX=B$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}$ – верно.

Ответ совпадает с решением, найденным по формулам Крамера.

Лекция №5. Системы линейных уравнений. (Продолжение)

Итак, в предыдущей лекции мы с вами рассмотрели основные понятия и термины теории систем линейных уравнений.

Сформулируем **Критерий совместности неоднородной системы линейных уравнений**

Теорема. (критерий Кронекера-Капелли).

Неоднородная система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матриц системы равны, то есть $r(A) = r(A|B)$.

Доказательство. Пусть дана система $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Перепишем её, пользуясь определением операций над столбцами в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

1. Если существует решение, то эта запись означает, что столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы системы. Значит, добавление этого

столбца не увеличивает общего числа линейно независимых столбцов и $r(A) = r(A|B)$.

2. Пусть $r(A) = r(A|B)$. В этом случае базисный минор матрицы A является базисным и в матрице $(A|B)$. Это означает, что столбец свободных членов есть линейная комбинация тех столбцов матрицы A, в которых расположен базисный минор, следовательно, столбец свободных членов есть линейная комбинация всех столбцов матрицы A (недостающие столбцы можно добавить в линейную комбинацию с нулевыми коэффициентами). Коэффициенты этой линейной комбинации представляют собой решение данной системы.

Теорема доказана.

Схема исследования совместной системы.

Пусть система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r+1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_r \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mr}x_r + a_{m,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

совместна и $rA = r(A|B) = r$.

1. Выбирается базисный минор матрицы A. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что базисный минор матрицы A находится в левом верхнем углу, так что
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$
2. Рассматривается укороченная система из первых r уравнений системы, т.е. из уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r+1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_r. \end{cases}$$
Нетрудно доказать, что укороченная система эквивалентна исходной системе.
3. Если $r = n$, то исходная система имеет единственное решение, как квадратная с невырожденной матрицей.
4. Пусть $r < n$. Неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются главными (базисными), а остальные неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$ - свободными.

Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя значения главных неизвестных из укороченной системы, можно получить все решения этой системы.

Общее решение системы и частное решение системы.

Чтобы описать множество всех решений неоднородной совместной системы, можно решить укороченную систему относительно главных неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases}, \qquad (1)$$

где $f_1, \dots, f_r$ – некоторые однозначно (в силу единственности решения квадратной системы с невырожденной матрицей) определяемые функции.

Соотношения (1) при произвольных $x_{r+1}, \dots, x_n$ описывают множество всех решений системы и называются *общим решением системы.* В отличие от общего, конкретное решение $x = (c_1, \dots, c_n)^T$, где $c_i, i = \overline{1,n}$ - известные числа, называется *частным решением.*

Однородная система линейных уравнений

В силу того, что все свободные члены уравнений однородной системы линейных уравнений равны нулю,

однородная система всегда совместна, так как имеет нулевое решение (тривиальное решение).

Свойства решений однородной системы.

Теорема. Если однородная система имеет два решения $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$, то любая их линейная комбинация $(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1, \dots, \alpha_n x_n + \beta_n y_n)$ также является решением системы. (Доказать самостоятельно).

Теорема. Если ранг матрицы однородной системы равен r, то система имеет $n - r$ линейно независимых решений.

Доказательство. Для доказательства придадим свободным неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_n$ следующие $n - r$ значений:

1) $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0;$
2) $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, x_{r+3} = 0, \dots, x_n = 0;$

……………………………………………...

$n - r$) $x_{r+1} = 0, \dots, x_{n-1} = 0, x_n = 1.$

Для каждого набора значений свободных неизвестных найдём соответствующие значения главных (базисных) неизвестных. Полученные решения запишем в виде столбцов

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \dots \\ x_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ \dots \\ x_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{1,n-r} \\ \dots \\ x_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти решения линейно независимы, так как матрица, составленная из этих столбцов, имеет минор порядка $n - r$, равный единице (в последних $n - r$ строках), поэтому её ранг равен $n - r$ и все столбцы линейно независимы. Теорема доказана.

Важное понятие. Совокупность из любых $n - r$ линейно независимых решений называется *фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений*. Для работы часто используется аббревиатура ФСР ОСЛУ.

Теорема. Пусть $X_1, \dots, X_{n-r}$ - произвольная фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Тогда любое решение системы представляет линейную комбинацию решений $X_1, \dots, X_{n-r}$.

Справедливость этого утверждения следует из теоремы о базисном миноре. (Доказать самостоятельно).

Пусть $X_1, \dots, X_{n-r} -$ ФСР ОСЛУ. Рассмотрим столбец $X = C_1 X_1 + \dots + C_{n-r} X_{n-r}$, где $C_1, \dots, C_{n-r} \in R$.

Известно, что линейная комбинация любого числа решений однородной системы также является решением. Следовательно, каковы бы ни были числа $C_1, \dots, C_{n-r} \in R$, столбец

$X = C_1X_1 + \cdots + C_{n-r}X_{n-r}$, является решением рассматриваемой системы. Наоборот, для каждого решения однородной системы существуют такие числа $C_1, \dots, C_{n-r}$, при которых оно имеет вид $X = C_1X_1 + \cdots + C_{n-r}X_{n-r}$.

Выражение $C_1X_1 + \cdots + C_{n-r}X_{n-r}$, где $C_1, \dots, C_{n-r} \in R$, называется *общим решением* однородной системы линейных уравнений. При решении задач общее решение однородной системы обозначается X_{OO}.

Проверить самостоятельно, что нет совокупности из $s < n - r$ решений, такой, что каждое решение однородной системы линейных уравнений есть линейная комбинация решений из данной совокупности.

Пример решения однородной системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$$

(сразу обратите внимание, что количество уравнений меньше количества переменных, а значит ранг матрицы меньше количества переменных и система имеет бесконечное множество решений!)

Выпишем матрицу из коэффициентов и приведём её к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 - 2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \sim \text{поменяем местами вторую и первую строки} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 - 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 - 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 - 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies r(A) = 2 < n = 5 \to$

$\to$ решений бесконечно много, количество независимых переменных $k = n - r = 5 - 2 = 3$.

Базисный минор расположен в первом и втором столбцах, поэтому выберем свободными неизвестные x_3, x_4, x_5 и выразим через них остальные неизвестные, решая относительно них уравнения системы, начиная с последнего.

Восстановим укороченную систему по последней матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

выразим из последнего уравнения переменную x_2 через переменные x_3, x_4, x_5 - будем считать эти переменные независимыми.

$x_2 = x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5$, подставим в первое уравнение и выразим переменную x_1

$x_1 = x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5 - x_3 - x_4 + 2x_5 = \frac{1}{3}x_5$.

Запишем переменные по порядку:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}x_5 \\ x_2 = x_3 + x_4 - \dfrac{5}{3}x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

Итак, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3}x_5 \\ x_3 + x_4 - \dfrac{5}{3}x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Выпишем фундаментальную систему решений данной однородной системы линейных уравнений:

$$x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0 \Longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0 \Longrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 \Longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной подстановкой в исходную систему уравнений убеждаемся, что данные решения превращают каждое уравнение в тождество. (Проверку сделать самостоятельно).

Итак,

$$X_{OO} = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Общая структура решения неоднородной системы линейных уравнений

Каждой неоднородной системе соответствует однородная, в которой левые части уравнений такие же, как и в неоднородной, а свободные коэффициенты равны нулям.

Теорема. Общее решение неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей однородной системы и какого-либо частного решения неоднородной системы. (Без доказательства).

В виде формулы это выглядит так: $\boldsymbol{X}_{0\text{Н}} = \boldsymbol{X}_{00} + \boldsymbol{x}_{\text{чн}}$,
где $\boldsymbol{X}_{0\text{Н}} -$ обозначение общего решения неоднородной системы уравнений, $\boldsymbol{X}_{00} -$ обозначение общего решения соответствующей обнородной системы уравнений,
$\boldsymbol{x}_{\text{чн}}$-какое-либо частное решение неоднородной системы уравнений.

Задача. (типовой расчёт, задача №1)
Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений, выписать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы и частое решение неоднородной системы. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы, приведём её к ступенчатому виду, найдём ранги расширенной и основной матриц и проверим критерий Кронекера-Капелли.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to r(A) = r(A|B) = 2 < n = 4 \to$ неоднородная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Соответствующая однородная система имеет бесконечное множество решений, причём ФСР содержит два решения.

Восстановим систему $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$,

выразим из последнего уравнения переменную x_4 через переменные x_2, x_3 , и отныне будем считать их свободными (независимыми) переменными, а переменные x_1, x_4 зависимыми.

$$x_4 = -x_2 - 2x_3 - 3$$

Выразим из первого уравнения x_1 и подставим x_4:

$$x_1 = x_2 + x_3 - x_4 = x_2 + x_3 - (-x_2 - 2x_3 - 3) = 2x_2 + 3x_3 + 3.$$

Запишем переменные по порядку:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 3x_3 + 3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -x_2 - 2x_3 - 3 \end{cases}$$

в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Последний столбец – это и есть частное решение неоднородной системы.
Итак, ФСР однородной системы – вектор-столбцы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Частное решение неоднородной системы: $x_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Сделаем проверку в матричном виде – умножим основную матрицу системы на полученные столбцы:

$A\cdot X_1=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\ 3\\ -3 & 2 & 1{-}4\\ 0 & 1 & 2\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\to$ столбец X_1 являетсярешением однородной системы. Ура, верно!

$A\cdot X_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\ 3\\ -3 & 2 & 1{-}4\\ 0 & 1 & 2\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\to$ столбец X_2 является решением однородной системы. Ура, верно!

$A\cdot x_{\text{чн}}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\ 3\\ -3 & 2 & 1{-}4\\ 0 & 1 & 2\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix}\to$ столбец $x_{\text{чн}}$ является решением неоднородной системы. Ура, верно!

Ответ: $X_{\text{ОН}}=\mathrm{C}_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+\mathrm{C}_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, C_1, C_2\in R$

Задача. Решить неоднородную систему линейных уравнений методом Гаусса. Выделить общее решение однородной системы и частное решение неоднородной системы. Сделать проверку.

$$\begin{cases}3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8\\ 6x_1-2x_2+3x_3+\ 4x_4\ =\ 5\\ -3x_1\ +x_2\ \ -2x_3-6x_4=1\end{cases}$$

Решение:

m-число уравнений (m=3); n- число неизвестных (n=4);

Запишем систему в матричном виде: $\mathrm{AX}=B$; где

А$=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\ 14\\ 6 & -2 & 3\ \ 4\\ -3 & 1 & -2{-}6\end{pmatrix}$; В$=\begin{pmatrix}-8\\5\\1\end{pmatrix}$; Х$=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$;

Метод Гаусса – метод последовательного исключения неизвестных. Выпишем расширенную матрицу системы $(A|B)$и приведём ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3 & -1 & 3 & 14 & -8\\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5\\ -3 & 1 & -2 & -6 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3 & -1 & 3 & 14 & -8\\ 0 & 0 & -3 & -24 & 21\\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7\end{array}\right):3\sim$$

[на 1-м шаге из 2-ой строки вычтем 1-ю, умноженную на 2; к 3-й строке прибавим 1-ю; на 2-м шаге 2-ю строку поделим на 3]

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3 & -1 & 3 & 14 & -8\\ 0 & 0 & -1 & -8 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3 & -1 & 3 & 14 & -8\\ 0 & 0 & -1 & -8 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

[на третьем шаге к 3-й строке прибавим 2-ю]. В результате выполненных преобразований матрица приведена к ступенчатому виду, 3-я строка обнулилась.

Ранг расширенной матрицы $\mathrm{Rg}(A|B)=2$ - числу ненулевых строк.

$\mathrm{Rg}(A|B)<n$ (числа неизвестных) $\Rightarrow$ система имеет бесконечно много решений.

Выберем базисный минор- минор 2-го порядка (т.к. ранг $\mathrm{Rg}(A|B)=2$), не равный нулю. Пусть это будет минор , состоящий из элементов приведенной к ступенчатому виду матрицы, стоящих в 1 и 2 строке и 1 и 3 столбце.

$M_б = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$; Таким образом, базисные строки – 1-я и 2-я, базисные столбцы- 1-й и 3-й. Базисным столбцам соответствуют базисные переменные: x_1 и x_3 ; тогда x_2 и x_4- свободные переменные.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Присвоим свободным переменным значения констант:

$x_2 = C_1$; $x_4 = C_2$.

Перепишем систему: $\begin{cases} 3x_1 - C_1 + 3x_3 + 14C_2 = -8 \\ \qquad\qquad -x_3 \ - 8C_2 \ = \ 7 \end{cases}$;

Далее базисные переменные выражаем через свободные, начиная с последнего уравнения:

Из второго уравнения: $x_3 = -8C_2 - 7$;

Из первого: $x_1 =(-8 + C_1 - 3x_3 - 14C_2)/3$;

Подставляя во второе уравнение $x_3 = -7 - 8C_2$, получим:

$x_1 = (-8 + C_1 - 3(-8C_2 - 7) \quad - 14C_2)/3$;

$x_1 = \frac{1}{3}C_1 + \frac{10}{3}C_2 + \frac{13}{3}$;

Запишем общее решение неоднородной системы:

$$X_{он} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}C_1 + \frac{10}{3}C_2 + \frac{13}{3} \\ C_1 \\ -8C_2 - 7 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix};$$

где $X_{оо} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ - общее решение соответствующей однородной системы $AX = 0$, состоящее из двух линейно-независимых базисных решений, и $X_ч = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$- частное решение исходной неоднородной системы $AX = B$; т.е. $X_{он} = X_{оо} + X_ч$.

Проверка:

Выполним проверку в матричном виде:

Базисные решения из ФСР должны удовлетворять однородной системе $AX = O$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Частное решение должно удовлетворять исходной неоднородной системе $AX = B$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Найденное решение верно!

Примечание: Можно было в качестве базисных столбцов выбрать 2-й и 3-й, тогда базисными переменными были бы x_2 и x_3.

Лекция №6. Геометрические векторы

Вектор как направленный отрезок

Все величины в математике делятся на скалярные и векторные.

Скаляр – величина, характеризуемая только числовым значением, например, длина, объём, масса, плотность.

Вектор – величина, характеризуемая не только числовым значением, но и направлением, например, сила, скорость.

Попросту: скаляр – *число*, вектор – *число+направление*.

Определение. Вектор – направленный отрезок, определяемый упорядоченной парой точек, одна из которых называется началом вектора, другая – его концом.

Длина вектора – это длина отрезка, расстояние между начальной и конечной точками.

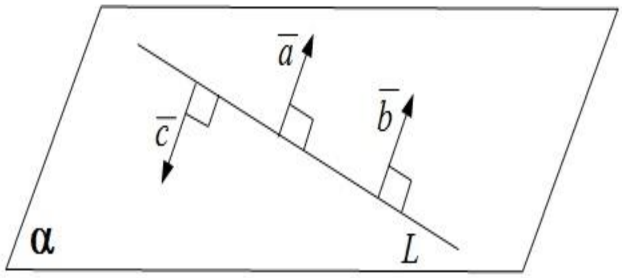
Длина вектора называется его **модулем**.

Обозначения: $\overrightarrow{AB} - A -$ начало вектора, $\mathrm{B} -$ конец вектора, $\vec{a}, \vec{e}$.

Модуль вектора: $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$.

Нулевой вектор: начало и конец совпадают: $\overrightarrow{AA}$, длина нулевого вектора равна нулю: $|\overrightarrow{AA}| = 0$. Обозначение нулевого вектора: $\vec{0}$.

Единичный вектор или **орт**. Вектор, длина (модуль) которого равна единице, называется **единичным вектором** или **ортом**: $\vec{e}, |\vec{e}| = 1$.



Коллинеарные векторы – векторы, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых.

Компланарные векторы – векторы, лежащие на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Определение. Векторы называются равными, если:

1) равны их длины;
2) они коллинеарны,
3) направлены в одну сторону.

Иными словами, равные векторы получаются один из другого параллельным переносом в пространстве.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору, так как он не имеет определённого направления.

Определение. Множество всех равных друг другу векторов называется *свободным вектором.*

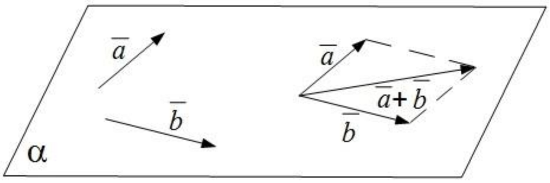
Линейные операции над векторами. Свойства линейных операций

Линейные операции над векторами:

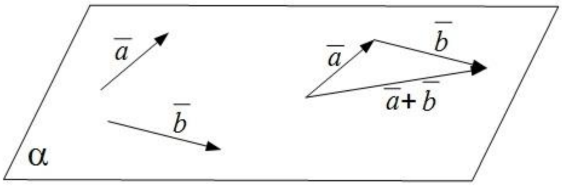
1) сложение и вычитание векторов;
2) умножение вектора на число.

1) *Сложение векторов.*

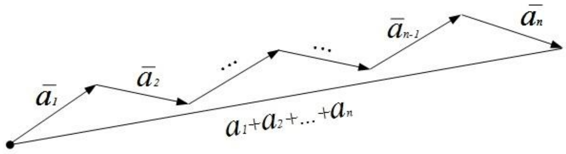
Сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется так: от произвольной точки A откладывается вектор $\vec{a}$, пусть B - конец этого вектора, т.е. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Затем от точки B откладывается вектор $\vec{b}$, пусть $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, порожденный направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$.



Правило параллелограмма: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ переносим в общую точку, достраиваем до параллелограмма и суммой векторов является диагональ параллелограмма, выходящая из общего начала этих векторов.



Правило треугольника: суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, если вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.



Правило ломаной: суммой векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, является вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}_1$ в конец вектора $\vec{a}_n$, каждый из векторов $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ приложен к концу предыдущего вектора.

Вычитание векторов: разность двух векторов $\vec{a} - \vec{b}$, совмещённых в общее начало, есть вектор, направленный из конца вычитаемого вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$.

2) Умножение вектора на число (на скаляр).

Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \in R$ называется такой вектор $\vec{b}$ что:

✓ $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

✓длина вектора $\vec{b}$ равна $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$.

При этом:

если $\lambda > 0$, то вектор $\vec{b}$ сонаправлен вектору $\vec{a}$;
если $\lambda < 0$, то вектор $\vec{b}$ противоположно направлен вектору $\vec{a}$;
если $\lambda = 0$, то вектор $\vec{b} = \vec{0}$.

Обозначение: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Свойства линейных операций над векторами

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (свойство коммутативности)
2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (свойство ассоциативности)
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (существование нейтрального или нулевого вектора)
4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ (существование противоположного вектора)
5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
6) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
7) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
8) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

9) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, где $\lambda, \mu \in R$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов)

Линейная комбинация системы векторов

Определение. Линейная комбинация системы векторов $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ с коэффициентами $\lambda_1, \dots \lambda_n$ это вектор $\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$.

Тривиальная линейная комбинация векторов - все коэффициенты равны друг другу и равны нулю: $0 \cdot \vec{a}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$.

Нетривиальная линейная комбинация - если хотя бы один из коэффициентов не равен нулю, то есть ${\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + \dots + {\lambda_n}^2 \neq 0$.

Линейно независимая и линейно зависимая системы векторов

Определение. Система векторов называется *линейно независимой*, если только тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору, то есть

$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ – линейно независимая $<=>$ $\forall\lambda_1, \dots \lambda_n \in R$:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Обратим внимание, что движение по этой логической цепочке возможно в обе стороны: очевидно, если все коэффициенты в линейной комбинации равны нулю, то такая линейная комбинация равна нулевому вектору.

Определение. Система векторов называется *линейно зависимой*, если найдется нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная ненулевому вектору, то есть

$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ – линейно зависима $<=>$ $\exists\lambda_1, \dots \lambda_n \in R$:

${\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + \dots + {\lambda_n}^2 \neq 0$ и $\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Свойство 1. Если среди векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots \overrightarrow{a_n}$, есть нулевой вектор, то они линейно зависимы.

Действительно, рассмотрим их линейную комбинацию, у которой при нулевом векторе коэффициент равен 1, а при остальных нули. Эта линейная комбинация нетривиальна и равна нулю.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Действительно, если система линейно зависима, значит существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, не равная нулевому вектору, значит можно выразить вектор с ненулевым коэффициентом через остальные векторы системы.

С другой стороны, если вектор системы можно представить в виде линейной комбинации других векторов системы, то, перенеся этот вектор к другим слагаемым, мы получим нетривиальную линейную комбинацию векторов системы, равную нулевому вектору: ведь коэффициент при таком векторе будет равен единице, а значит ненулевой. Утверждение доказано.

Свойство 4. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые два линейно зависимые вектора - коллинеарны.

Действительно, пусть даны два коллинеарных вектора $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Либо они оба нулевые, и тогда утверждение очевидно, либо один ненулевой и тогда второй отличается от него на числовой множитель: $\vec{b} = \alpha\vec{a} \to 1\vec{b} - \alpha\vec{a} = \vec{0}$, и мы имеем нетривиальную линейную комбинацию, равную ноль-вектору.

В обратную сторону, если два вектора линейно зависимы, то один линейно выражается через другой в силу свойства 3, т.е. они коллинеарны.

Свойство 5. Любые три компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые три линейно зависимые векторы компланарны.

Действительно, пусть даны три компланарных вектора. Рассмотрим два из них.

1). Если они коллинеарны, то линейно зависимы и сами по себе и с третьим вектором.

2). Если же два вектора не коллинеарны, то третий вектор линейно выражается через них и векторы линейно зависимы в силу свойства 3.

Обратно, из трех линейно зависимых векторов, один линейно выражается через два других и следовательно, они компланарны. (Доказать самостоятельно).

Свойство 6. Каждые четыре вектора линейно зависимы.

Действительно, рассмотрим любые три из четырех векторов.

1). Если они компланарны, то линейно зависимы и сами по себе и вместе с четвертым вектором.

2). Если же они не компланарны, то четвертый вектор линейно выражается через них, откуда следует, что все они линейно зависимы.

Понятие базиса.

1) Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор на этой прямой.

2) Базисом на плоскости называются любые два ненулевых, неколлинеарных упорядоченных вектора этой плоскости.

3) Базисом в пространстве векторов называются любые три ненулевых, некомпланарных, упорядоченных вектора, взятые в этом пространстве.

Теорема.

1. Каждый вектор, параллельный какой-либо прямой может быть разложен по базису на этой прямой.
2. Каждый вектор, параллельный какой-либо плоскости может быть разложен по базису на этой плоскости.
3. Каждый вектор может быть разложен по базису пространства.

Доказательство.

1. Первое утверждение означает, что для каждого вектора $\vec{a}$, коллинеарного ненулевому базисному вектору $\vec{e}$ (базис на прямой) существует число α такое, что $\vec{a} = \alpha\vec{e}$. Таким числом является либо $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}$, либо $-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}$, смотря по тому, направлены ли $\vec{a}$ и $\vec{e}$, одинаково или противоположно.■

2. Второе утверждение означает, что для каждого вектора $\vec{a}$, компланарного с двумя неколлинеарными векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (базис на плоскости), найдутся числа α и β , такие, что $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$.

Поместим начала всех трех векторов в одну точку O, и проведем через конец вектора $\vec{a}$ -точку A, прямую AP, параллельную $\vec{e}_2$. Тогда

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA},$$

Причём $\overrightarrow{OP}$ коллинеарен $\vec{e}_1$, а $\overrightarrow{PA}$, коллинеарен $\vec{e}_2$, а в силу первого утверждения теоремы $\overrightarrow{OP} = \alpha\vec{e}_1$, а $\overrightarrow{PA} = \beta\vec{e}_2$, следовательно

$$\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2.■$$

3. Третье утверждение означает, что для каждого вектора $\vec{a}$,и некомпланарных векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ найдутся числа α ,β и γ такие, что

$$\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3.$$

Для доказательства третьего утверждения поместим начала всех четырех векторов в одну точку O и проведем через конец вектора $\vec{a}$, точку A, прямую AP, параллельную $\overrightarrow{e_3}$. Тогда

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA},$$

причем $\overrightarrow{PA}$, коллинеарен $\vec{e}_3$, а $\overrightarrow{OP}$ компланарен $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1$, т.е. , в силу уже доказанных выше утверждений

$$\overrightarrow{PA} = \gamma\vec{e}_3, \text{ а } \overrightarrow{OP} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2.$$

Отсюда прямо и вытекает третье утверждение. ■

Теорема.

Коэффициенты разложения вектора по базисным векторам определяются однозначно (разложение по базису в пространстве единственное).

Доказательство.

Представим себе, что некоторый вектор $\vec{a}$ разложен по базису в пространстве двумя способами

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \beta_1\vec{e}_2 + \gamma_1\vec{e}_3 \text{и } \vec{a} = \alpha_2\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \gamma_2\vec{e}_3.$$

Вычитая из первого выражения второе, мы получим

$$\vec{a} = (\alpha_1 - \alpha_2)\vec{e}_1 + (\beta_1 - \beta_2)\vec{e}_2 + (\gamma_1 - \gamma_2)\vec{e}_3 = 0.$$

Если хотя бы одна из разностей в скобках не равна нулю, мы можем разложить один из векторов базиса по остальным.

Например, если $(\alpha_1 - \alpha_2) \neq 0$то $\vec{e}_1 = -\frac{(\beta_1 - \beta_2)\vec{e}_2}{\alpha_1 - \alpha_2} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)\vec{e}_3}{\alpha_1 - \alpha_2}$, что противоречит условию некомпланарности базисных векторов. Следовательно, разложение вектора по базису в пространстве единственно. ■

Аналогично доказывается для прямой и плоскости.

Координатами вектора в базисе называются коэффициенты разложения вектора по базисным векторам.

Представление вектора в виде линейной комбинации базисных векторов – единственно.

В связи с этим можно записать следующие свойства.

Свойства:

1) равные векторы имеют одинаковые координаты;

2) при умножении вектора на число его координаты тоже умножаются на это число:

Пусть $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$, тогда $\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3) = (\lambda\alpha)\vec{e}_1 + (\lambda\beta)\vec{e}_2 + (\lambda\gamma)\vec{e}_3$.

3) при сложении векторов складываются их соответствующие координаты:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \beta_1\vec{e}_2 + \gamma_1\vec{e}_3, \vec{b} = \alpha_2\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \gamma_2\vec{e}_3$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{e}_1 + (\beta_1 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\vec{e}_3.$$

Условие коллинеарности двух векторов.

Пусть два вектора разложены по базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \beta_1\vec{e}_2 + \gamma_1\vec{e}_3, \vec{b} = \alpha_2\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \gamma_2\vec{e}_3.$$

Доказано, что два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, т.е. $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = \vec{0}$, где хотя бы одно из чисел λ_1 и λ_2 отлично от нуля.

Пусть для определённости $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{b}$, откуда

$$\alpha_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\alpha_2, \qquad \beta_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\beta_2, \qquad \gamma_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\gamma_2,$$

или

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Следовательно, *необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является пропорциональность их координат в данном базисе.*

Прямоугольная декартова система координат.

Фиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M.

Радиус-вектором точки M по отношению к точке O называется вектор $\overrightarrow{OM}$. Если в пространстве, кроме точки O, выбран некоторый базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, то точке M можно сопоставить упорядоченную тройку чисел – компоненты её радиус-вектора, то есть коэффициенты разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ по базисным векторам:

$\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$

Определение. Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка носит название *начало координат*; прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *осями координат*. Первая называется ось *абсцисс*, вторая – ось *ординат*, третья – ось *аппликат*. Плоскости, проходящие через оси координат, называются *координатными плоскостями*.

Определение. Компоненты радиус-вектора точки M по отношению к началу координат называются координатами точки M в рассматриваемой системе координат.

Первая координата называется *абсциссой*,

вторая – *ординатой*,

третья – *аппликатой*.

Аналогично определяется декартова система координат на плоскости. Разумеется, точка на плоскости имеет только две координаты – абсциссу и ординату.

Уже доказано, что координаты вектора в базисе определяются однозначно.

Ортогональные векторы.

Под углом между векторами мы понимаем угол между векторами, равными данным и имеющими общее начало. Иногда указывают, от какого вектора и в каком направлении угол отсчитывается (так называемый направленный угол). Если такого указания нет, то углом между векторами считается тот, который не превосходит π.

Определение. Векторы называются *ортогональными*, если угол между ними прямой (равен $\frac{\pi}{2}$).

Ортонормированный базис.

Определение. *Ортонормированный* базис – это базис из попарно ортогональных векторов, длина которых равна единице.

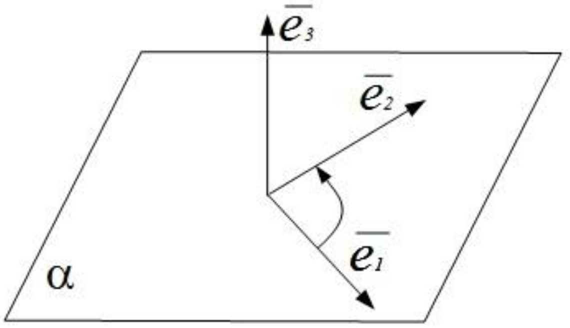
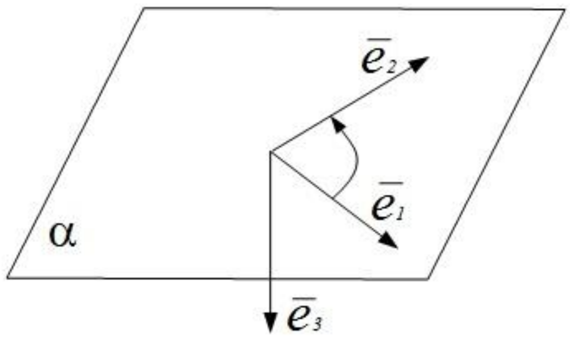
Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется *прямоугольной декартовой системой координат*.

Векторы ортонормированного базиса являются ортами и обозначаются $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$:

$\vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{j} \perp \vec{k},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$

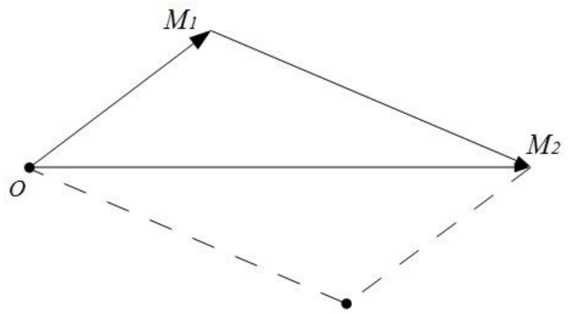
Для любого вектора $\vec{a}$ пространства : $\exists\, !\, x, y, z \in \mathbb{R} :\ \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x; y; z)$.

Ориентации тройки векторов

Правая тройка векторов	***Левая тройка векторов***
Векторы расположены таким образом, что из конца третьего вектора поворот от первого вектора ко второму вектору совершается ***против часовой стрелки***	Векторы расположены таким образом, что из конца третьего вектора поворот от первого вектора ко второму вектору совершается ***по часовой стрелки***
	

Векторы ортонормированного базиса $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ по определению образуют правую тройку векторов.

Нахождение координат вектора по координатам его начала и конца.



Возьмем в прямоугольной декартовой системе координат точку М.

Координаты ее радиус-вектора
$$\overrightarrow{OM}=(x,y,z).$$

Пусть $M_1=(x_1,y_1,z_1)=\overrightarrow{OM}_1$, $M_2=(x_2,y_2,z_2)=\overrightarrow{OM}_2$.

$$\overrightarrow{M_1M}_2=\overrightarrow{M_1O}+\overrightarrow{OM}_2=-\overrightarrow{OM}_1+\overrightarrow{OM}_2=\overrightarrow{OM}_2-\overrightarrow{OM}_1.$$

$$\overrightarrow{M_1M}_2=(M_2-M_1)=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$$

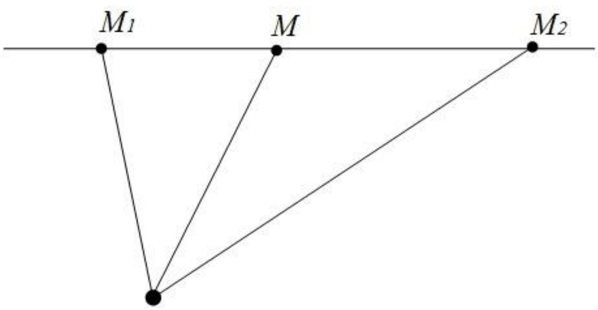
Чтобы найти координаты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Формула расстояния между двумя точками

$$\rho(M_1,M_2)=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

где $\rho(M_1,M_2)$ расстояние между точками M_1и M_2.

Деление отрезка в данном отношении



Пусть координаты точек $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$,М(x,y,z).

Тогда
$$\overrightarrow{M_1M}=(M-M_1)=$$

$$= (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1)$$

$$\overrightarrow{MM_2} = (M_2 - M) =$$
$$= (x_2 - x;\ y_2 - y;\ z_2 - z)$$

Возьмем такую точку М на отрезке M_1M_2, которая делит этот отрезок в отношении λ:

$$\frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|} = \lambda, \lambda > 0. \qquad (1)$$

или

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2} \qquad (2)$$

Тогда перепишем (2) в координатной форме:

$$(x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1) = \lambda \cdot\ (x_2 - x;\ y_2 - y;\ z_2 - z).$$

Перемножим правую часть покоординатно на λ и приравняем соответствующие координаты, получим:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda \cdot\ (x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda \cdot\ (y_2 - y)\ , \\ z - z_1 = \lambda \cdot\ (z_2 - z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y\ , \\ z - z_1 = \lambda z_2 - \lambda z \end{cases}$$

по условию $\lambda > 0$, а значит $\lambda \neq -1$, тогда имеем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{\lambda + 1}; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{\lambda + 1}. \quad (3)$$

Таким образом, координаты точки $\mathrm{M}(x, y, z)$ находятся по формулам (3).

Обобщим задачу для различных случаев расположения точек и различных значений коэффициента λ.

Очевидно, что:

если $\lambda > 0$, то точка М находится на той же прямой и внутри отрезка M_1M_2;

если $\lambda < 0$, то М находится на той же прямой, но вне отрезка M_1M_2;

если λ = 1, то М середина отрезка M_1M_2;

если λ = -1, то $\overrightarrow{M_1M} = -\overrightarrow{MM_2}$, значит $M_1 = M_2$.

Найдем координаты точки, являющейся серединой отрезка.

$$M = \frac{M_1 + M_2}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right). \qquad (4)$$

На плоскости задача решается так же, только базис состоит из двух векторов, и точки имеют две координаты, поэтому остаются только первые две формулы.

Проекция вектора на прямую.

Пусть дана некоторая прямая и точка A вне её. Проекцией точки A на данную прямую называется основание A_1 перпендикуляра, опущенного из точки A на данную прямую. Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую называется вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, началом которого является проекция начала, а концом – проекция конца вектора $\overrightarrow{AB}$.

Проекция вектора на ось.

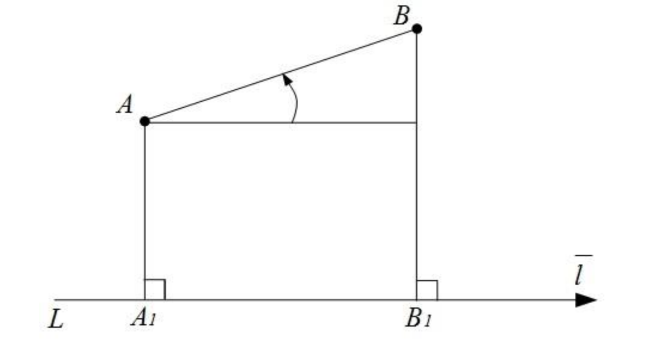
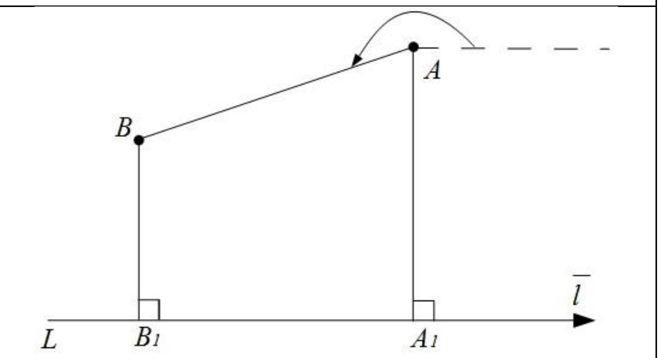
Осью называется прямая с заданным на ней направлением.

Пусть L– ось, $\vec{l}$ – направление на этой оси, $|\vec{l}\,| = 1$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$, опустим из его концов перпендикуляры на ось L, получим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось L называется число $\pm|\overrightarrow{A_1B_1}\,|$.

Проекция $\overrightarrow{AB}$ на L обозначается: $\text{пр}_L\overrightarrow{AB}$.

Выбор знака зависит от того, совпадает ли направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ с направлением оси.

Ставим $\oplus$, если угол между векторами меньше 90^0	Ставим $\ominus$, если угол между векторами больше 90^0
	

Свойства проекции вектора на ось.

1). $\text{пр}_L\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{l})$;

2). $\text{пр}_L(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_L\vec{a} + \text{пр}_L\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{l}) + |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{b}, \vec{l})$;

3). $\text{пр}_L(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{l})$.

(Доказать самостоятельно).

В базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, вектор $\vec{a}(x, y, z) = (\text{пр}_i\vec{a},\ \text{пр}_j\vec{a},\ \text{пр}_k\vec{a})$.

Направляющие косинусы

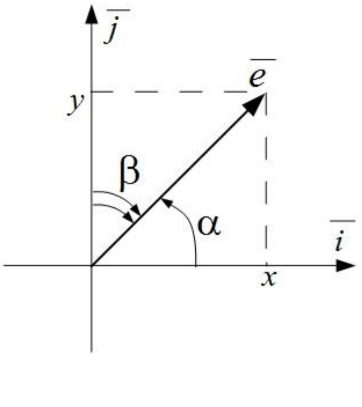
Напомним, что единичный вектор называется *ортом*.

Пусть $\vec{e}$ – орт : $|\vec{e}| = 1$, $(\widehat{\vec{e}, \vec{\imath}}) = \alpha$, $(\widehat{\vec{e}, \vec{\jmath}}) = \beta$, $(\widehat{\vec{e}, \vec{k}}) = \gamma$.

$$x = \text{пр}_{\vec{\imath}}\vec{e} = \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{\imath}}) = \cos\alpha$$
$$y = \text{пр}_{\vec{\jmath}}\vec{e} = \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{\jmath}}) = \cos\beta$$
$$z = \text{пр}_{\vec{k}}\vec{e} = \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{k}}) = \cos\gamma$$

$|\vec{e}| = 1 \Rightarrow \vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \Rightarrow |\vec{e}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$.

Для наглядности изобразим на плоскости:



Пусть дан вектор $\vec{a}(x, y, z)$ своим координатами в базисе $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ; \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Направляющие косинусы

$$\cos(\widehat{a,\vec{i}}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+ y^2+z^2}}; \cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}}) = \frac{y}{\sqrt{x^2+ y^2+z^2}}; \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{k}}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2+ y^2+z^2}}.$$

Лекция №7. Скалярное произведение векторов.

Скалярное произведение

Скалярное произведение двух векторов- это число (скаляр).

Геометрическое приложение – нахождение углов между векторами и длин векторов.

Определение. Скалярное произведение двух векторов- это число:

$$\underbrace{(\vec{a}\ ;\ \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}}_{\text{обозначение}} \overset{\text{определение}}{\triangleq} |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a};\vec{b}).$$

Свойства скалярного произведения

1). $(\vec{a};\vec{b}) = (\vec{b};\vec{a})$.

2). $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

3). $(\lambda\vec{a};\vec{b}) = \lambda(\vec{a};\vec{b})$.

4). Если $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a};\vec{b}) = 0$ (условие ортогональности двух ненулевых векторов).

Докажем свойство 4).

1) Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \perp \vec{b}$, то есть угол между этими ненулевыми векторами равен 90°. По определению скалярного произведения:

$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90° = 0$.

2) Теперь пусть скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю $(\vec{a},\vec{b}) = 0$. Так как векторы ненулевые, значит, их модули тоже не равны нулю, значит, скалярное произведение обнуляется за счёт косинуса угла между этими векторами, а значит, угол между векторами равен 90°, то есть векторы ортогональны. Доказано.

Модуль вектора.

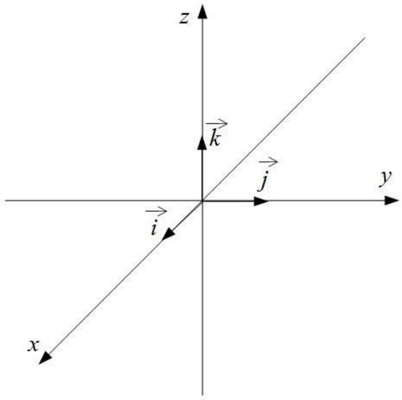
Вычислим скалярный квадрат произвольного вектора:

$$(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0° = |\vec{a}|^2, \text{следовательно } (\vec{a},\vec{a}) \geq 0 .$$

Модуль вектора равен $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

Таблица скалярного произведения базисных векторов

Для составления таблицы скалярного произведения векторов найдём попарные произведения базисных векторов $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, с учётом того, что эти векторы образуют ортонормированную систему, то есть взаимно перпендикулярны и имеют единичные модули. Тогда их разноимённые произведения равны нулю, а одноимённые равны единице.



Одноименные произведения равны:

$$(\vec{\imath},\vec{\imath}) = |\vec{\imath}||\vec{\imath}|\cos(\widehat{\vec{\imath};\vec{\imath}}) = |\vec{\imath}||\vec{\imath}|\cos 0° = 1.$$

Аналогично, все одноименные произведения равны 1, то есть

$$(\vec{\imath},\vec{\imath}) = (\vec{\jmath},\vec{\jmath}) = \left(\vec{k},\vec{k}\right) = 1.$$

Разноименные попарные произведения базисных векторов:

$$(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = |\vec{\imath}||\vec{\jmath}|\cos(\widehat{\vec{\imath};\vec{\jmath}}) = |\vec{\imath}||\vec{\imath}|\cos 90° = 0.$$

Аналогично, все разноименные попарные произведения равны 0, то есть $(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = \left(\vec{\jmath},\vec{k}\right) =$

$$\left(\vec{\imath},\vec{k}\right) = (\vec{\jmath},\vec{\imath}) = \left(\vec{\jmath},\vec{k}\right) = \left(\vec{k},\vec{\imath}\right) = \left(\vec{k},\vec{\jmath}\right) = 0.$$

Оформим полученные результаты в виде таблицы.

(·)	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\vec{\imath}$	1	0	0
$\vec{\jmath}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Видим, что матрица, составленная из попарных скалярных произведений векторов ортонормированного базиса, является единичной матрицей.

Координатная форма скалярного произведения

$$\vec{a} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$$

$$\vec{b} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Эта формула очевидным образом получается с применением свойств скалярного произведения и таблицы скалярного умножения базисных векторов $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$.

Ещё раз о важном – словами:

С***калярное произведение в ортонормированном базисе*** *равно сумме произведений одноимённых координат:* $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Тогда формула для длины (модуля) вектора в ортонормированном базисе:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Косинус угла между векторами

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \arccos\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|};$$

в координатном виде

$$\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Связь скалярного произведения с проекцией

$$\left(\vec{a}\,;\,\vec{b}\right) \overset{\text{определение}}{\cong} |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right),$$

$$\left(\vec{a}\,;\,\vec{b}\right) = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b},$$

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|}.$$

Механический смысл скалярного произведения.

Скалярное произведение силы $\overrightarrow{F}$ на вектор пути $\vec{s}$ равно работе W этой силы при перемещении материальной точки по вектору $\vec{s}$: $W = \left(\vec{F},\vec{s}\right)$.

Задача. Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$:

$\overline{a}=\overline{i}-2\overline{j}$+4$\overline{k}$; $\overline{b}$ = 3$\overline{i}$-6$\overline{j}$+12$\overline{k}$; $\overline{c} = -2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$

1) Среди векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ выделить пары коллинеарных векторов, ортогональных векторов.

<u>Решение:</u> два вектора коллинеарны <=> их соответствующие координаты пропорциональны. ($\overline{a}\parallel\overline{b}$<=>$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$, где $\overline{a}=(x_a, y_a, z_a)$, $\overline{b}=(x_b, y_b, z_b)$)

Координаты векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в ортонормированном базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$:

$\overline{a} = (1,-2,4)$, $\overline{b} = (3,-6,12)$, $\overline{c} = (-2,1,1)$. Как мы видим, соответствующие координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ пропорциональны :$\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{4}{12} => \overline{a}\parallel\overline{b}$; координаты векторов $\overline{a}$, $\overline{c}$ непропорциональны: $\frac{1}{-2} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{4}{1} => \overline{a}$ не коллинеарен $\overline{c}$ ($\overline{a}\nparallel\overline{c}$), следовательно, $\overline{b}$ не коллинеарен $\overline{c}$($\overline{b}\nparallel\overline{c}$) , т.к. $\overline{a}\parallel\overline{b}$.

Проверим векторы $\overline{a}$, $\overline{c}$ и $\overline{b}$, $\overline{c}$ на ортогональность. Известно, что векторы ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е. тогда и только тогда, когда сумма произведений их соответствующих координат равна нулю.

$x_a x_c + y_a y_c + z_a z_c = 1\cdot(-2)+(-2)\cdot1+4\cdot1=0$ $=> \overline{a}$ ортогонален $\overline{c}$ ($\overline{a}\perp\overline{c}$).

Ортогональность $\overline{b}$ и $\overline{c}$ сразу следует из того, что $\overline{a}\perp\overline{c}$ и $\overline{a}\parallel\overline{b}$.

Лекция №8. Векторное и смешанное произведения векторов.

Векторное произведение определено для двух векторов и равно вектору.

Определение. Векторным произведением двух векторов называется третий вектор:

$$\underbrace{[\vec{a},\vec{b}]}_{\text{обозначение}} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}.$$

такой, что:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2) $\{\vec{a};\ \vec{b}; \vec{c}\}$ – правая тройка (если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ не коллинеарны);
3) $|\vec{c}| \overset{\text{определение}}{=} |\vec{a}||\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

Механический смысл векторного произведения

Если $\vec{F}$ - сила, приложенная к точке M, то момент силы относительно точки A:

$$m_A(\vec{F}) = [\overrightarrow{AM}, \vec{F}].$$

Момент силы относительно начала координат: $m_O(\vec{F}) = [\vec{r}, \vec{F}]$, где $\vec{r}$- радиус-вектор точки приложения силы.

Свойства векторного произведения.

1. Модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.
$$\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = S_{\text{параллелограмма}}\{\vec{a},\vec{b}\}.$$
2. Векторное произведение равно нулевому вектору, если хотя бы один из перемножаемых векторов нулевой, или эти векторы коллинеарны.
3. Векторное произведение антиперестановочно, т.е.
$$[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}\,].$$
4. Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения:
$$[\alpha\vec{a},\beta\,\vec{b}] = \alpha\beta[\vec{a},\vec{b}].$$
Доказательство. Легко проверить, что векторы $[\alpha\vec{a},\beta\,\vec{b}]$ и $\alpha\beta[\vec{a},\vec{b}]$ направлены одинаково. Вычислим их модули: $\left|[\alpha\vec{a},\beta\,\vec{b}]\right| = S_{\{\alpha\vec{a},\beta\,\vec{b}\}} = |\alpha\vec{a}||\beta\,\vec{b}| \sin(\widehat{\alpha\vec{a},\beta\,\vec{b}}) =$
$= |\alpha||\beta||\vec{a}||\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = |\alpha||\beta|\, S_{\{\vec{a},\vec{b}\}} = |\alpha||\beta|\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$.
5. $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
(Без доказательства.)

Векторные произведения векторов ортонормированного базиса.

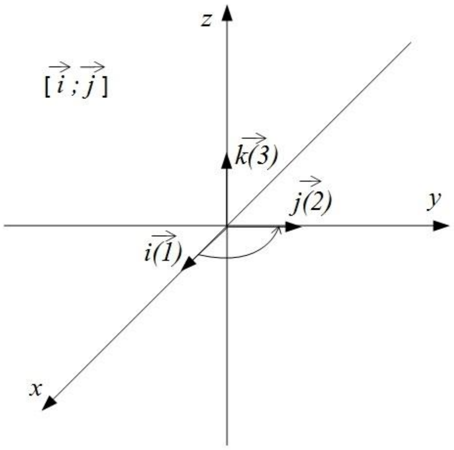
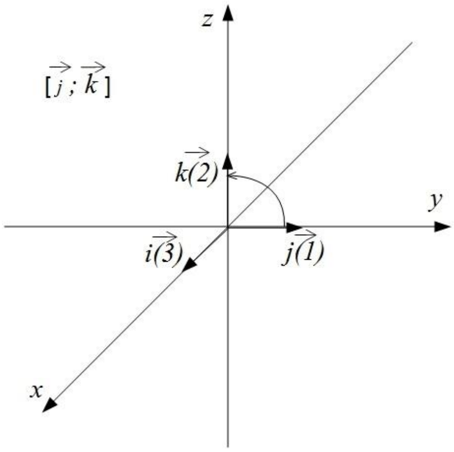
Найдём попарные векторные произведения векторов ортонормированного базиса $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Понятно, что длины (модули) этих векторных произведений будут равны единице, как площади квадратиков, построенных на базисных векторах.

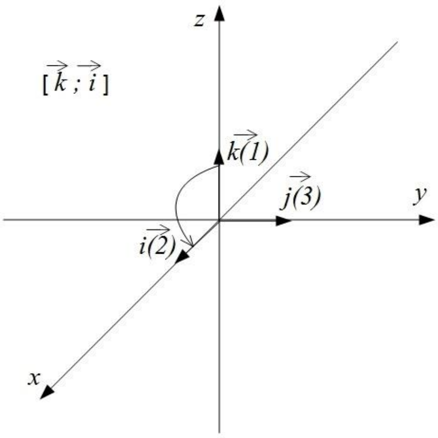
! Помните, что вектор-результат образует с парой перемножаемых векторов правую тройку.

Определим одноименные векторные произведения базисных векторов: $|[\vec{i}\,;\vec{i}]| = |\vec{i}||\vec{i}| \sin(\widehat{\vec{i};\vec{i}}) = |\vec{i}||\vec{i}| \sin 0° = 0$, следовательно $[\vec{i}\,;\vec{i}] = \vec{0}$.

Аналогично, все одноименные векторные произведения равны ноль-вектору, т.е. $[\vec{i}\,;\vec{i}] = [\vec{j}\,;\vec{j}] = [\vec{k}\,;\vec{k}] = \vec{0}$.

Определим разноименные попарные векторные произведения базисных векторов.

	Векторы $\{\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$ - правая тройка. $\lvert[\vec{i}\,;\ \vec{j}]\rvert =$ $= \lvert\vec{i}\rvert\lvert\vec{j}\rvert \sin(\widehat{\vec{i};\vec{j}}) = \lvert\vec{i}\rvert\lvert\vec{i}\rvert \sin 90° = 1,$ следовательно$[\vec{i}\,;\ \vec{j}] = \vec{k}$. Учитывая свойство векторного произведения $[\vec{i}\,;\ \vec{j}] = -[\vec{j}\,;\ \vec{i}]$ получим$[\vec{j}\,;\ \vec{i}] = -\bar{k}$.
	Векторы $\{\vec{j};\ \vec{k}\,;\vec{i}\}$ - правая тройка. $\left\lvert[\vec{j}\,;\ \vec{k}]\right\rvert =$ $= \lvert\vec{j}\rvert\left\lvert\vec{k}\right\rvert \sin\left(\widehat{\vec{j};\vec{k}}\right) = \lvert\vec{j}\rvert\left\lvert\vec{k}\right\rvert \sin 90° = 1,$ следовательно$\left[\vec{j}\,;\ \vec{k}\right] = \vec{i}$. Учитывая свойство векторного произведения получим $\left[\vec{k}\,;\ \vec{j}\right] = -\vec{i}$.

	Векторы $\{\vec{k}\,;\vec{i}\,;\ \vec{j};\}$ - правая тройка. $\left\lvert[\vec{k}\,;\ \vec{i}]\right\rvert =$ $= \left\lvert\vec{k}\right\rvert \lvert\vec{i}\rvert \sin\left(\widehat{\vec{k};\vec{i}}\right) = \left\lvert\vec{k}\right\rvert \lvert\vec{i}\rvert \sin 90° = 1$ следовательно$\left[\vec{k}\,;\ \vec{i}\right] = \vec{j}$. Учитывая свойство векторного произведения получим: $\left[\vec{i}\,;\ \vec{k}\right] = -\vec{j}$.

Оформим результаты векторных произведений базисных векторов в виде таблицы (для наглядности).

Таблица векторного умножения базисных векторов.

[x]	$\vec{\boldsymbol{i}}$	$\vec{\boldsymbol{j}}$	$\vec{\boldsymbol{k}}$
$\vec{\boldsymbol{i}}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{\boldsymbol{j}}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{\boldsymbol{k}}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Координатная форма векторного произведения.

Пусть два вектора заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1, y_1, z_1),$$
$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2, y_2, z_2).$$

Найдем векторное произведение этих векторов, учитывая при раскрытии скобок, что одноимённые векторные произведения равны ноль-вектору и не влияют на результат

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \times \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$
$$= x_1y_2\vec{i} \times \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \times \vec{k} + y_1x_2\vec{j} \times \vec{i} + y_1z_2\vec{j} \times \vec{k} + z_1x_2\vec{k} \times \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \times \vec{j} =$$
$$= x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i}.$$

Полученное произведение сгруппируем по базисным векторам

$$\vec{i}(y_1z_2 - z_1y_2) - \vec{j}(x_1z_2 - z_1x_2) + \vec{k}(x_1y_2 - y_1x_2).$$

Заметим, что получили разложение определителя 3-го порядка, в котором, в первой строке записаны базисные векторы, а во второй и третьей строках – координаты данных векторов:

$$\vec{i}(y_1z_2 - z_1y_2) = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$
$$\vec{j}(x_1z_2 - z_1x_2) = \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$$
$$\vec{k}(x_1y_2 - y_1x_2) = \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Получаем формулу векторного произведения по координатам:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Геометрические приложения векторного произведения

Площади

1). $S_{\text{параллелограмма}}\{\vec{a},\vec{b}\} = \left|[\vec{a};\vec{b}]\right|$.

2). $S_{\text{треугольника}}ABC = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]\right|$.

3). Длина высоты треугольника ABC:

$$CH = \frac{\left|[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}.$$

Смешанное произведение

Определение. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \overset{\text{опр}}{=} \underbrace{\underbrace{[\vec{a},\vec{b}]}_{\text{векторное произведение}} \cdot \vec{c}}_{\text{скалярное произведение}} = \text{число}.$

Связь знаков смешанного произведения с ориентацией тройки векторов.

Пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – ненулевые, некомпланарные векторы, тогда:

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка векторов, если $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0$;

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – левая тройка векторов, если $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) < 0$.

Условие компланарности векторов.

Теорема. *Ненулевые* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарные векторы, тогда и только тогда, когда $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$.

Доказательство: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = [\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c} = \left|[\vec{a},\vec{b}]\right|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 90^0 = \left|[\vec{a},\vec{b}]\right|\cdot|\vec{c}|\cdot 0 = 0.$

Если же векторы $\vec{a},\vec{b}$ коллинеарны, то $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = 0$, значит $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Теорема. Для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ выполнено равенство

$$([\vec{a};\vec{b}],\vec{c}) = (\vec{a},[\vec{b};\vec{c}]).$$

Следствие 1. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}).$

Следствие 2. Смешанное произведение равно нулю, если два сомножителя равны.

Следствие 3. *Смешанное произведение линейно по каждому из сомножителей*.

(Доказательства самостоятельно.)

Координатная форма смешанного произведения в ортонормированном базисе.

Смешанное произведение базисных векторов ортонормированного базиса $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

$$(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) = [\vec{i},\vec{j}]\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{k} = |\vec{k}|\cdot|\vec{k}|\cdot\underbrace{\cos\left(\underbrace{\widehat{\vec{k};\vec{k}}}_{0}\right)}_{1} = 1.$$

Пусть заданы векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ своими разложениями по векторам ортонормированного базиса $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1,y_1,z_1),$$
$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2,y_2,z_2),$$
$$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k} = (x_3,y_3,z_3).$$

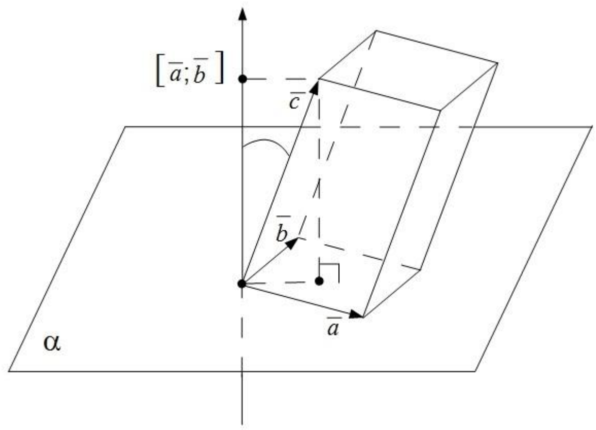
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Обоснуем это.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = [\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c} =$$

$$= \left(\vec{i}(y_1z_2 - z_1y_2) - \vec{j}(x_1z_2 - z_1x_2) + \vec{k}(x_1y_2 - y_1x_2)\right)\left(x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}\right) =$$
$$= x_3(y_1z_2 - z_1y_2) - y_3(x_1z_2 - z_1x_2) + z_3(x_1y_2 - y_1x_2) =$$
$$= x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Геометрическое приложение смешанного произведения



Модуль смешанного произведения $\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right| = V_{\text{параллелепипед}}$$

Докажем это.

Отложим векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ от общей точки O

Если все четыре точки O, A, B, C лежат в одной плоскости (векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются в этом случае компланарными), то смешанное произведение $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = 0$. Это следует из того, что вектор $[\vec{a},\vec{b}]$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a},\vec{b}$, а значит, и вектору $\vec{c}$.

Если же точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости (векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны), построим на ребрах OA, OB и OC параллелепипед с нижней гранью OADB.

По определению векторного произведения имеем $[\vec{a},\vec{b}] = S\vec{e}$,
где S - площадь параллелограмма OADB, а $\vec{e}$ - единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a},\vec{b}$ и такой, что тройка $\vec{a},\vec{b},\ \vec{e}$- правая, т. е. векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{e}$ расположены соответственно как большой, указательный и средний пальцы правой руки.
Умножая обе части последнего равенства справа скалярно на вектор $\vec{c}$,
получаем
$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,) = ([\vec{a},\vec{b}]\,,\vec{c}\,) = S(\vec{e},\vec{c}\,) = S\text{пр}_{\vec{e}}\vec{c}$
Число $\text{пр}_{\vec{e}}\vec{c}$ равно высоте h построенного параллелепипеда, взятого со знаком (+), если угол между векторами $\vec{e}$ и $\vec{c}$ острый (тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - правая),
и со знаком (-), если угол между векторами $\vec{e}$ и $\vec{c}$ тупой (тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - левая), так что
$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \pm Sh = \pm V$.
Тем самым, смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равно объему V параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах, если тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - правая, и -V, если тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - левая.

Исходя из геометрического смысла смешанного произведения, можно заключить, что, перемножая те же векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ в любом другом порядке, мы всегда будем получать либо + V, либо -V. Знак проведения будет зависеть лишь от того, какую тройку образуют перемножаемые векторы - правую или левую. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку, то правыми будут также тройки $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ и $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$. В то же время все три тройки $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$; $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ и $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ - левые. Тем самым,

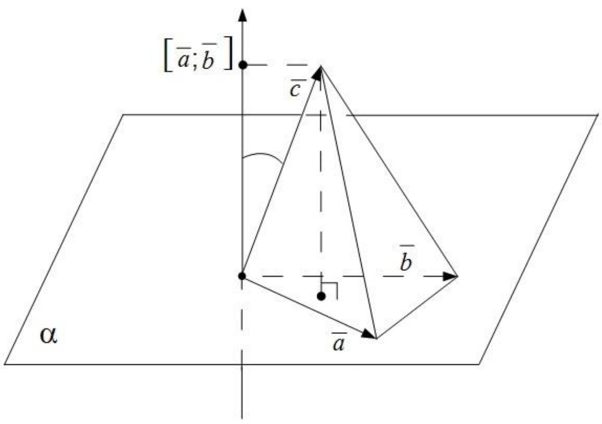
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}\ \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$.

Еще раз подчеркнем, что смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны:

{ ненулевые $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны} $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) = 0$.

Итак, координатная форма объема параллелепипеда, построенного на трёх данных векторах

$$V_{\text{параллелепипед}} = \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix} \right\|.$$



Объем тетраэдра равен шестой части объема параллелепипеда $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right| = \frac{1}{6}V_{\text{параллелепипед}}$$

$$\left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right| = \frac{1}{6}V_{\text{параллелепипед}}$$

Длина высоты параллелепипеда равна высоте тетраэдра.

$$H = \frac{\left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|}{\left|[\vec{a}; \vec{b}]\right|}.$$

Задача. Проверить будут ли компланарны три вектора:

a) $\overline{a}=\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k}$; $\overline{b} = 3\overline{i}-6\overline{j}+12\overline{k}$;$\overline{c} = -2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$

b) $\overline{l}= 2\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$;$\overline{m} = 2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$;$\overline{n} = \overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$

Критерий компланарности трех векторов: три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Если тройка векторов содержит пару коллинеарных векторов, то они компланарны.

а) Вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, т.к. $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Критерий компланарности также выполняется.

$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, т.к. две строки определителя пропорциональны.

b) Найдем смешанное произведение векторов $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$.

$$(\bar{l},\overline{m},\overline{n}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ =-2+3+6+3-2-6=2

$(\bar{l},\overline{m},\overline{n}) \neq 0 \;\; => \;$ векторы $\bar{l},\overline{m},\overline{n}$ - не компланарны.

Задача. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти:

1) внутренний угол при вершине *A* треугольника *ABC*;
2) площадь треугольника *ABC*;
3) объём пирамиды *ABCD*;
4) длину высоты, опущенную из вершины *D*, пирамиды *ABCD*.

Решение:

$A(2;3;1) \quad B(4;1;-2) \quad C(6;3;7) \quad D(-5;-4;8).$

1). Внутренний угол A треугольника *ABC*: $\angle BAC$– это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдём косинус угла $\angle BAC$ с помощью скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Вычислим координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB} = (2;-2;-3)$; $\overrightarrow{AC} = (4;0;6)$.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Найдём скалярное произведение и длины векторов:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 2\cdot4+(-2)\cdot0+(-3)\cdot6 = -10,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2+0^2+6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{-10}{\sqrt{17}\cdot2\sqrt{13}} = \frac{-5}{\sqrt{221}} = -\frac{5\cdot\sqrt{221}}{221} \Longrightarrow$$

$$\angle BAC = arccos\frac{-5\cdot\sqrt{221}}{221} = \frac{\pi}{2} - arccos\frac{5\cdot\sqrt{221}}{221}.$$

2). Площадь треугольника *ABC* вычислим с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]\right|.$$

Сначала надо вычислить векторное произведение векторов (вспомним, что это вектор), а затем найдём модуль этого вектора.

$$[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}(-12-0) - \vec{\jmath}(12-(-12)) + \vec{k}(0-(-8)) = -12\vec{\imath} - 24\vec{\jmath} + 8\vec{k} =$$

$$= (-12;-24;8).$$

$$\left|[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]\right| = \sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2} = 28$$

Итак, площадь треугольника равна$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 28 = 14.$

3). Объём пирамиды *ABCD* вычислим с помощью смешанного произведения трёх векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $V_{\text{пир } ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD})\right|$

$\overrightarrow{AD} = (-7;-7;7)$.

Смешанное произведение равно определителю, составленному из координат векторов, записанных по строкам:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{прибавим к первой строке третью, умноженную на } (-2)) =$$

$$= 14 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\text{раскроем определитель по второму столбцу}) =$$

$$=14 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14 \cdot 22 = 308.$$

Заметим, что смешанное произведение оказалось положительным числом, значит тройка векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ - правая.

Итак

$$V_{\text{пир } ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{154}{3}.$$

4). Длина высоты из вершины D пирамиды $ABCD$.

Вычислим по формуле:

$$h_D = \frac{\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|}{\left|[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]\right|}$$

Воспользуемся результатами пунктов 2) и 3). Тогда $h_D = \frac{14 \cdot 22}{28} = 11$.

Задача. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$равно 2, точка K центр грани ABB_1A_1. Найти расстояние $\rho(C_1, DK)$ от точки C_1 до прямой DK.

Решение. Из определения векторного произведения следует, что

$$\rho(C_1, DK) = \frac{\left|[\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC_1}]\right|}{\left|\overrightarrow{DK}\right|}.$$

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC_1}$ в ортонормированном базисе

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}, \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}, \vec{e}_3 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Имеем: $\overrightarrow{DK} = (-1,1,-2), \overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = (-2,2,0)$. Отсюда

$$[\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC_1}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4, -4, 0),$$

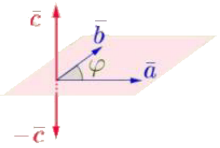
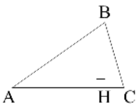
$$\left|[\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC_1}]\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\left|\overrightarrow{DK}\right| = \sqrt{6}.$$

Следовательно,

$$\rho(C_1, DK) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

<u>Произведения векторов</u>. Сводная таблица.

Название, обозначение	Определение	Свойства	Координатная форма	Геометрические приложения
<u>**Скалярное произведение**</u> двух векторов = число (скаляр). $\vec a\cdot\vec b = \vec a\vec b = (\vec a;\vec b)$	$\vec a\cdot\vec b = \lvert\vec a\rvert\cdot\lvert\vec b\rvert\cos(\widehat{\vec a\vec b})$ число	1) $\vec a\cdot\vec b=\vec b\cdot\vec a$ 2) $\vec a\cdot(\vec b+\vec c)=\vec a\vec b+\vec a\vec c$ 3) $(\lambda\vec a)\cdot\vec b=\lambda(\vec a\cdot\vec b)$ 4) $\begin{matrix}\vec a\\ \vec b\end{matrix}\neq\vec 0;\ \vec a\perp\vec b\Leftrightarrow\vec a\cdot\vec b=0$ Условие ортогональности (перпендикулярности) 2-х ненулевых векторов	$\vec a=x_1\vec i+y_1\vec j+z_1\vec k$ $\vec b=x_2\vec i+y_2\vec j+z_2\vec k$ $\vec a\cdot\vec b=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ $\vec a\cdot\vec a=\vec a^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$	<u>Угол и длина</u> 1) Косинус угла между векторами $\cos(\widehat{\vec a\vec b})=\frac{\vec a\cdot\vec b}{\lvert\vec a\rvert\cdot\lvert\vec b\rvert}=$ $=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ 2) Длина вектора (модуль) $\lvert\vec a\rvert=\sqrt{\vec a\cdot\vec a}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
<u>**Векторное произведение**</u> двух векторов = вектор. $\vec a\times\vec b=[\vec a;\vec b]=\vec c$ 	$\vec a\times\vec b=[\vec a;\vec b]=\vec c$ 1) $\vec c\perp\vec a,\ \vec c\perp\vec b$ 2) $\{\vec a,\vec b,\vec c\}$ – правая тройка 3) Длинна (модуль) вектора $\lvert\vec c\rvert=\lvert\vec a\times\vec b\rvert=S_{пар}$ $=\lvert\vec a\rvert\cdot\lvert\vec b\rvert\sin(\widehat{\vec a\vec b})$ S – площадь параллелограмма, образованного $\vec a$ и $\vec b$	1) $\vec a\times\vec b=-\vec b\times\vec a$ 2) $\vec a\times(\vec b+\vec c)=\vec a\times\vec b+\vec a\times\vec c$ 3) $[\lambda\vec a;\vec b]=\lambda[\vec a;\vec b]$ 4) $\begin{matrix}\vec a\\ \vec b\end{matrix}\neq\vec 0;\ \vec a\parallel\vec b\Leftrightarrow\vec a\times\vec b=0$ Условие коллинеарности 2-х ненулевых векторов	$\vec a=x_1\vec i+y_1\vec j+z_1\vec k$ $\vec b=x_2\vec i+y_2\vec j+z_2\vec k$ $\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$	<u>Площадь</u> $S_{пар}=\lvert\vec a\times\vec b\rvert=\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\rvert$ $S_{\Delta ABC}=\frac12\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\rvert$ $\lvert BH\rvert=\frac{\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}$ 
<u>**Смешенное произведение**</u> трех векторов = число (скаляр) $(\vec a;\vec b;\vec c)=\vec a\vec b\vec c$	$(\vec a;\vec b;\vec c)=[\vec a;\vec b]\cdot\vec c$	1) $\vec a\vec b\vec c=-\vec b\vec a\vec c$ 2) Если $\vec a,\ \vec b,\ \vec c$ – ненулевые, то $\vec a\vec b\vec c>0\Leftrightarrow\vec a\vec b\vec c$ – правая тройка, $\vec a\vec b\vec c<0\Leftrightarrow\vec a\vec b\vec c$ – левая тройка 3) *Ненулевые* $\vec a,\vec b,\vec c$ - компланарны $\Leftrightarrow\vec a\vec b\vec c=0$ 4) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов	$\vec a=x_1\vec i+y_1\vec j+z_1\vec k$ $\vec b=x_2\vec i+y_2\vec j+z_2\vec k$ $\vec c=x_3\vec i+y_3\vec j+z_3\vec k$ $\vec a\vec b\vec c=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$	<u>Объем</u> $V_{пар-да}=\lvert\vec a\vec b\vec c\rvert$ $V_{тетр}=V_{пир}=\frac16V_{пар-да}$ $=\frac16\lvert(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})\rvert$ $\lvert\overrightarrow{DH}\rvert=\frac{\lvert(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD})\rvert}{\lvert[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}]\rvert}$

.

Лекция № 9

Прямая на плоскости

<u>Теорема</u>. В декартовой прямоугольной системе координат xOy прямая определяется уравнением первой степени $Ax+By+C=0, A^2+B^2\neq0$ и каждое уравнение первой степени определяет прямую линию.

Доказательство. Напишем уравнение прямой L. Пусть точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$ и $\vec n$ ненулевой вектор, перпендикулярный прямой L:

$\vec n\perp L$. Тогда для любой точки плоскости $M(x,y,)\in L$ вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec n$. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов является равенство нулю их скалярного произведения: $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec n\leftrightarrow(\overrightarrow{M_0M},\vec n)$=0 $(*)$

Пусть вектор $\vec n$ имеет в базисе $\{\vec i,\vec j,\}$ координаты (A,B)=$\vec n$. Тогда, в силу того, что

$\overrightarrow{M_0M}=[M-M_0]=(x-x_0,y-y_0)\to$ уравнение $(*)$ в координатной форме запишется так:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\leftrightarrow$$
$$Ax+By+(-Ax_0-By_0)=0$$

или

$$Ax+By+C=0,$$

где $\quad C=-Ax_0-By_0.$

Первая часть теоремы доказана.
2) Дано уравнение первого порядка $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$. Пусть x_0, y_0, - какое-нибудь решение этого уравнения. Тогда, подставив x_0, y_0 вместо x, y,
Получим $Ax_0 + By_0 + C = 0 \leftrightarrow C = -Ax_0 - By_0$.
Подставим это выражение в уравнение $(**)$ вместо свободного коэффициента и получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
или, в векторной форме $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$.
Отсюда следует, что все точки прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (и только они), удовлетворяют уравнению
$Ax + By + C = 0$ и, следовательно, оно является уравнением прямой.
Теорема доказана.

Вектор $\boldsymbol{\vec{n}}$, перпендикулярный прямой, называется ***нормальным вектором*** прямой или ***нормалью*** прямой. Уравнение $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$ называется ***общим уравнением*** прямой.
Геометрический смысл коэффициентов при x, y в общем уравнении прямой (A,B) - это координаты нормального вектора этой плоскости в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

1. Общее уравнение прямой

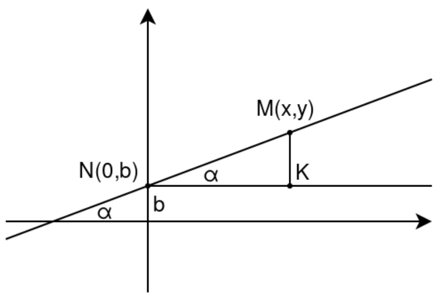
$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}, A^2 + B^2 \neq 0.$

Частные случаи:

1. $A = 0$; $y = -\frac{C}{B}$, прямая $\parallel OX$;
2. $B = 0$; $y = -\frac{C}{A}$, прямая $\parallel OY$;
3. $C = 0$; $Ax + By = 0$; прямая, проходящая через точку $O(0{,}0)$;
4. $A = C = 0$; $y = 0$ – прямая совпадает с осью OX;
5. $B = C = 0$; $x = 0$ – совпадает с осью OY.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая $L \nparallel OY$. Её положение на плоскости определяется однозначно ординатой b точки $N(0, b)$ пересечения с осью OY и углом α между прямой и положительным направлением оси OX.



$0 \leq \alpha < 180$; $NK \parallel OX$

$M(x, y) \in L$ (любая точка, принадлежащая прямой)

из ΔMKN $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y-b}{x}$

$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$; $k = \operatorname{tg} \alpha$ (угловой коэффициент прямой)

$\boldsymbol{y = kx + b}$ **– уравнение прямой с угловым коэффициентом.**

Этому уравнению удовлетворяют координаты $\forall$ точки $\in L$ и не удовлетворяют точки $\notin L$.

Если прямая проходит через начало координат ($b = 0$), то ее уравнение $y = kx$

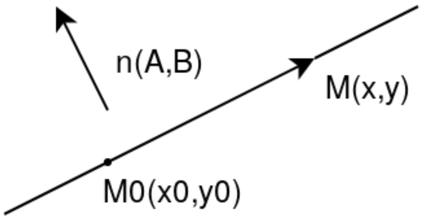
Если прямая $\parallel OY$, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $k \to \infty$; уравнение: $x = a$.

3. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k

$$\boldsymbol{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

Это уравнение получается, если в $y = kx + b$ подставить координаты точки $y_0 = kx_0 + b$, $b = y_0 - kx_0$.

4. Уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, перпендикулярно вектору $\boldsymbol{\vec{n}(A, B)}$



Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка $\in L$; $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$

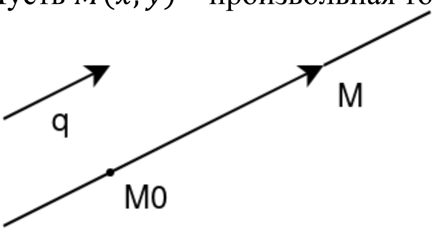
$\vec{n} \perp M_0M \Leftrightarrow (\vec{n}, \overline{M_0M}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$

Это общее уравнение прямой, где $C = -Ax_0 - By_o$.

5. Каноническое уравнение прямой

Найдем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ и ∥ данному вектору $\vec{q}(l, m)$; $\vec{q}$ называется направляющим вектором.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка $\in L$.

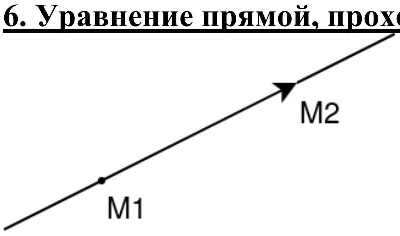


$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \vec{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}}$$

Если $m = 0$, то $L \parallel OX$; $y = y_0$

Если $l = 0$, то $L \parallel OY$; $x = x_0$

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$ и $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2)}$



$$\vec{q} = \overline{M_1M_2}$$
$$\boldsymbol{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

7. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ и параллельно $\boldsymbol{\vec{q}(l, m)}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + lt} \\ \boldsymbol{y = y_0 + mt} \end{cases}; \ \boldsymbol{t} \in (-\infty; +\infty) \textbf{ – параметр}$$

8. Угол между двумя прямыми

Угол между двумя прямыми равен острому углу между нормалями к этим прямым или острому углу между направляющими векторами.

Если прямые заданы общими уравнениями $\begin{matrix} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{matrix}$, то $\vec{n}_1(A_1, B_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2)$;

Тогда $\boldsymbol{\cos\varphi} = \frac{|(\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2)|}{|\vec{\boldsymbol{n}}_1| \cdot |\vec{\boldsymbol{n}}_2|} = \frac{|\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2}|}{\sqrt{\boldsymbol{A_1^2 + B_1^2}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{A_2^2 + B_2^2}}}$

Если прямые заданы каноническими (или параметрическими) уравнениями, то мы знаем их направляющие векторы $\overrightarrow{q_1}(l_1, m_1)$ и $\overrightarrow{q_2}(l_2, m_2)$ и

$$\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{|(\overrightarrow{\boldsymbol{q_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q_2}})|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{q_1}}| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{q_2}}|} = \frac{|\boldsymbol{l_1l_2 + m_1m_2}|}{\sqrt{\boldsymbol{l_1^2 + m_1^2}}\sqrt{\boldsymbol{l_2^2 + m_2^2}}}$$

<u>9. Условие параллельности двух прямых</u>

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{q_1} \parallel \overrightarrow{q_2} \Leftrightarrow \frac{l_1}{m_1} = \frac{l_2}{m_2}$$

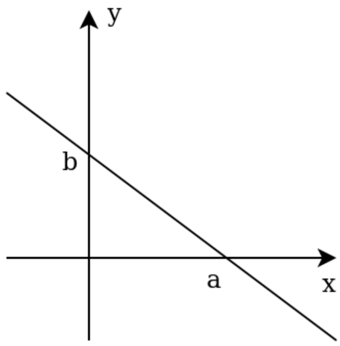
<u>10. Условие перпендикулярности двух прямых</u>

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = 0$$

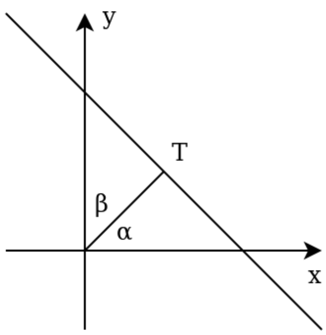
$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{q_1} \perp \overrightarrow{q_2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}) = 0$$

<u>11. Уравнение прямой в отрезках:</u>

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} = \mathbf{1}$$



<u>12. Нормальное уравнение прямой: $\boldsymbol{x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0}$</u>



$|OT| = p = \rho(L, O)$ – расстояние от начала координат до прямой;
$\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора нормали $\vec{n}$.

Чтобы получить нормальное уравнение прямой, достаточно умножить обе части её общего уравнения $Ax + By + C = 0$ на множитель $M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Этот множитель называется *нормирующим*.

13. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$

$$\boldsymbol{\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ произвольная точка плоскости. Если эта точка принадлежит прямой $L: Ax + By + C = 0$, то её координаты удовлетворяют уравнению прямой. Если же точка не принадлежит прямой, то выражение $Ax_1 + By_1 + C$ не равно нулю:

$$\begin{cases} \text{если } M_1(x_1, y_1) \in L, \text{то } Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ \text{если } M_1(x_1, y_1) \notin L, \text{то } Ax_1 + By_1 + C \neq 0 \end{cases}.$$

Пусть $M_1(x_1, y_1) \notin L$. Опустим из точки M_1 перпендикуляр на прямую. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ - основание перпендикуляра. Условием принадлежности точки M_0 прямой L является равенство $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

Найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{n}$ – нормаль к прямой.

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M_1}\right) = |\vec{n}|\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| \cos\left(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{M_0M_1}}\right) = \pm|\vec{n}|\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|$$

Здесь $\cos\left(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{M_0M_1}}\right) = \pm 1$ (в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{n}$).

Так как расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой равно длине перпендикуляра $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|$, то с учётом модуля нормали $|\vec{n}|$:

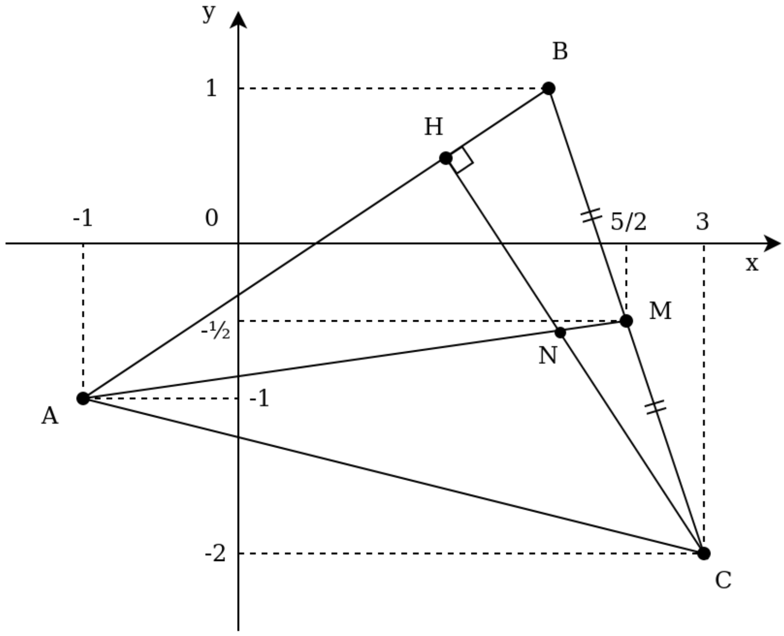
$$\boldsymbol{\rho(M_1, P) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Это **Формула расстояния от точки до прямой.**

<u>Задача</u> Даны вершины треугольника $A(-1; -1)$, $B(2; 1)$, $C(3; -2)$ на плоскости. Найти:

1) каноническое уравнение прямой *AB*;
2) параметрические уравнения медианы *AM*;
3) уравнение высоты *CH* (общее и с угловым коэффициентом);
4) координаты точки *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;
5) длину высоты *CH*;
6) координаты точки *K* пересечения медиан треугольника *ABC*.

<u>Решение:</u>



1) Каноническое уравнение прямой AB, проходящей через две данные точки находим по формуле: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-(-1)}{1-(-1)} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{2}.$$

2) Найдём координаты точки M - середины стороны BC:

$$M=\left[\frac{B+C}{2}\right]=\left(\frac{2+3}{2};\frac{1-2}{2}\right)=\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

Направляющий вектор медианы AM:

$$\overline{AM}=[M-A]=\left(\frac{5}{2}-(-1);-\frac{1}{2}-(-1)\right)=\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Для удобства возьмём в качестве направляющего вектора медианы $\bar{l}=2\overline{AM}=(7;1)$. Начальная точка $A(-1;-1)$.

Параметрические уравнения медианы $AM \begin{cases} \boldsymbol{x=x_0+lt} \\ \boldsymbol{y=y_0+mt} \end{cases}$; $\boldsymbol{t}\in(-\infty;+\infty)$

$$(AM): \begin{cases} x=7t-1 \\ y=t-1 \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

3) Для общего уравнения высоты CH к стороне AB необходимы координаты нормали к CH – это собственно вектор $\overline{AB}$:

$\bar{n} = \overline{AB}=[B-A]=(3;2) \Rightarrow \forall M(x,y)\in CH \Leftrightarrow \overline{CM}\perp\overline{AB} \Leftrightarrow (\overline{CM},\overline{AB})=0$, где $M(x,y)$ - произвольная точка высоты CH.

Так как $\overline{CM}=(x-3;y+2)$, общее уравнение высоты CH найдем по формуле $n_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x-x_0})+n_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y-y_0})=\boldsymbol{0}$; $3(x-3)+2(y+2)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-5=0.$

Чтобы получить уравнение с угловым коэффициентом, выразим yчерез x:

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}, \qquad \text{угловой коэффициент } k=-\frac{3}{2}.$$

4) Координаты точки N пересечения медианы AM и высоты CH

Воспользуемся параметрическими уравнениями медианы AM, подставим

$x = 7t - 1$ и $y = t - 1$ в общее уравнение высоты CH и найдём значение параметра t для точки пересечения N :

$$3(7t-1) + 2(t-1) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{23}$$

Подставим найденное значение t в параметрические уравнения AM

$$N: \begin{cases} x = 7 \cdot \frac{10}{23} - 1 \\ y = \frac{10}{23} - 1 \end{cases} \Rightarrow N(\frac{47}{23}; -\frac{13}{23})$$

5) Для нахождения длины высоты CH необязательно находить основание высоты *H*. Очевидно, что длина высоты равна расстоянию от точки *C* до стороны *AB*. Воспользуемся формулой расстояния от $M_0(x_0, y_0)$ точки до прямой L, заданной своим общим уравнением $L: Ax + By + C = 0$

$$\rho(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

В пункте 1) мы получили каноническое уравнение прямой *AB*. Получим общее уравнение этой прямой:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x - 3y - 1 = 0$$

Тогда

$$|CH| = \rho(C, AB) = \frac{|2 \cdot 3 - 3(-2) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{11}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}.$$

6) Точка *K* пересечения медиан треугольника *ABC*.

1 способ:

Известно, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.

Тогда $\overline{AK} = 2\overline{KM}$. Пусть $K(x, y) \Rightarrow \overline{AK} = (x+1; y+1)$,

$$\overline{KM} = (\frac{5}{2} - x; -\frac{1}{2} - y)$$

$$(x+1; y+1) = 2\left(\frac{5}{2} - x; -\frac{1}{2} - y\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 5 - 2x \\ y + 1 = -1 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow K(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$$

2 способ: Нетрудно доказать, что координаты точки пересечения медиан треугольника являются средним арифметическим соответствующих координат вершин треугольника *(доказать самостоятельно)*. Тогда $K(\frac{-1+2+3}{3}; \frac{-1+1-2}{3}) = K(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$

Лекция №10.
Плоскость в пространстве.

Поверхность в пространстве задаётся уравнением n-ой степени и называется соответственно поверхностью n-ого порядка.
Уравнение первого порядка определяет в пространстве плоскость. Докажем теорему:
Теорема об общем уравнении плоскости.
Всякая плоскость в пространстве имеет своим уравнением в декартовых координатах уравнение первой степени вида $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, $A, B, C, D \in R$.
И обратно, если постоянные A, B, C одновременно не равны нулю, то существует плоскость, уравнением которой является уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$.
Доказательство.
1) Напишем уравнение плоскости P. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$ и $\vec{n}$ ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости:
$\vec{n} \perp P$. Тогда для любой точки плоскости $M(x, y, z) \in P$ вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов является равенство нулю их скалярного произведения: $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \vec{n})$=0 $(*)$
Пусть вектор $\vec{n}$ имеет в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ координаты (A,B,C)=$\vec{n}$. Тогда, в силу того, что $\overrightarrow{M_0M} = [M - M_0] = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rightarrow$ уравнение $(*)$ в координатной форме запишется так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$
$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (**)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.
Первая часть теоремы доказана.
2) Дано уравнение первого порядка $Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Пусть x_0, y_0, z_0 - какое-нибудь решение этого уравнения. Тогда, подставив x_0, y_0, z_0 вместо x, y, z ,
Получим $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \leftrightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.
Подставим это выражение в уравнение $(**)$ вместо свободного коэффициента и получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
или, в векторной форме $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n})$ = 0.
Отсюда следует, что все точки плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (и только они), удовлетворяют уравнению
$Ax + by + Cz + D = 0$ и, следовательно, оно является уравнением плоскости.
Теорема доказана.

Вектор $\boldsymbol{\vec{n}}$, перпендикулярный плоскости, называется ***нормальным вектором*** плоскости или ***нормалью*** плоскости. Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ называется ***общим уравнением*** плоскости.
Геометрический смысл коэффициентов при x, y, z в общем уравнении плоскости (A,B,C) - это координаты нормального вектора этой плоскости в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Расположение плоскости относительно системы координат

Было доказано, что общее уравнение плоскости $\boldsymbol{P}$ имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Рассмотрим частные случаи, когда некоторые коэффициенты уравнения первой степени равны нулю, и выясним особенности расположение плоскости относительно системы координат.

1. Пусть свободный коэффициент в уравнении равен нулю ($D = 0$). Тогда уравнение примет вид:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

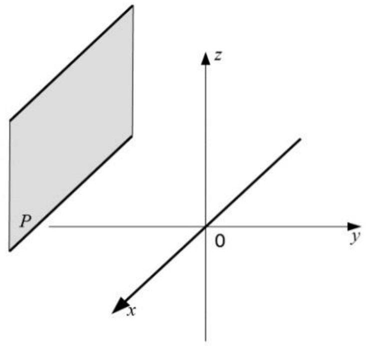
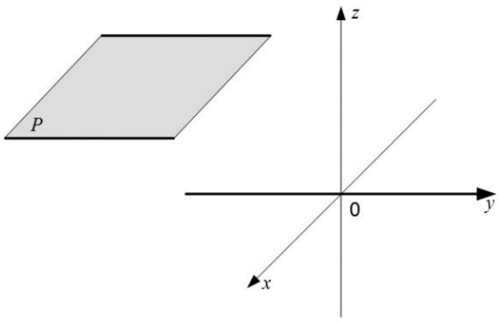
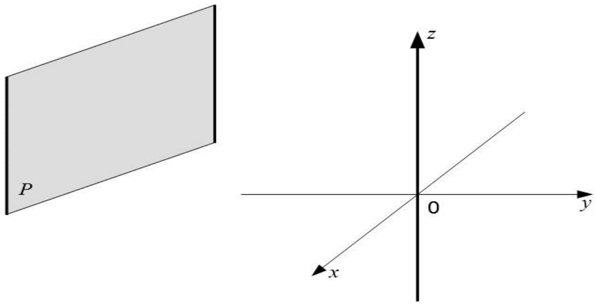
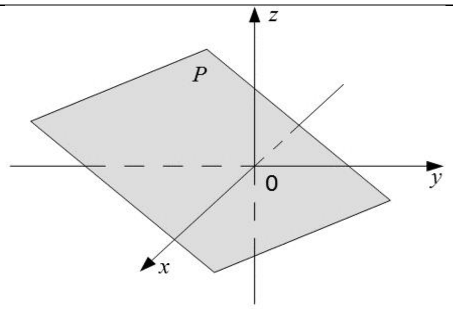
Такое уравнение определяет плоскость, проходящую через начало координат - точку с нулевыми координатами O(0,0,0) ($x = 0, y = 0, z = 0$ удовлетворяют уравнению плоскости).

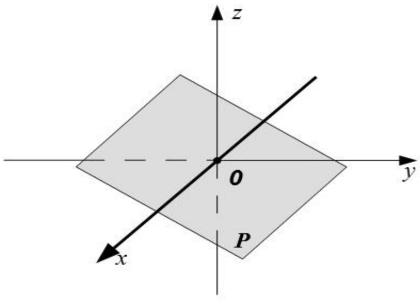
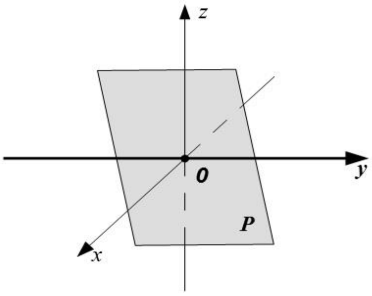
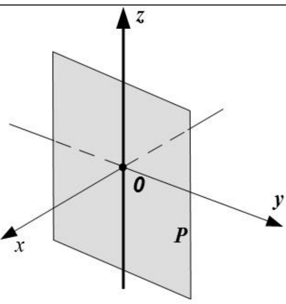
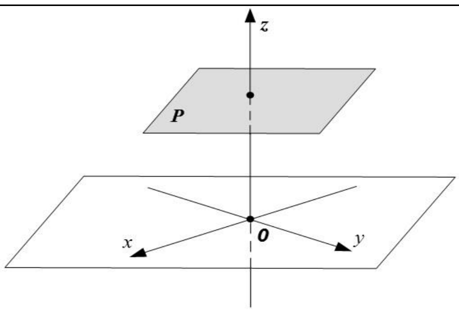
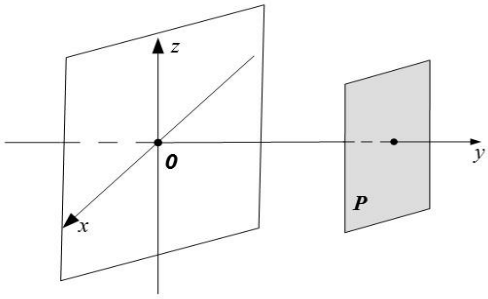
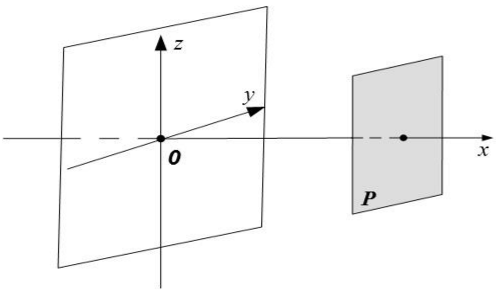
2. Если $A = 0$, то уравнение примет вид:

$$By + Cz + D = 0.$$

Нормальный вектор плоскости, определяемой этим уравнением, имеет координаты $\vec{\boldsymbol{n}}(0, B, C)$ и перпендикулярен вектору $\vec{\iota}(1,0,0)$:
$(\vec{\iota}, \vec{\mathrm{n}}) = 0$, значит плоскость параллельна оси OX.

Все случаи опишем коротко:

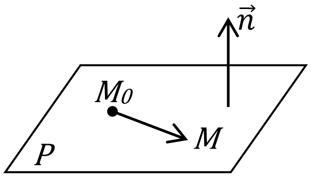
$A = 0 => P \parallel OX$ $P : By + Cz + D = 0$	
	$B = 0 => P \parallel OY$ $P : Ax + Cz + D = 0$
$C = 0 => P \parallel OZ$ $P : Ax + By + D = 0$	
	$D = 0 => O \in P$ $P: Ax + By + Cz = 0$

<table>
<tr>
<td>$A = D = 0 \Rightarrow OX \subset P$
$P : By + Cz = 0$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$B = D = 0 \Rightarrow OY \subset P$
$P : Ax + Cz = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$C = D = 0 \Rightarrow OZ \subset P$
$P: Ax + By = 0$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$A = B = 0 \Rightarrow P \parallel XOY$
$P: Cz + D = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$A = C = 0 \Rightarrow P \parallel XOZ$
$P: By + D = 0$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$B = C = 0 \Rightarrow P \parallel YOZ$
$P: Ax + D = 0$

Для наглядности повернем тройку векторов системы, сохраняя при этом «правую» ориентацию векторов.</td>
</tr>
</table>

Уравнения координатных плоскостей

XOY: ***z=0***	*XOZ:* ***y=0***	*YOZ:* ***x=0***



Различные постановки задач, приводящие к общему уравнению плоскости.

1. **Уравнение плоскости через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.**

Пусть заданы точка, принадлежащая плоскости,
$M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$, и нормаль к плоскости $\vec{n}(A, B, C) \perp P$. Тогда

$$\forall M(x, y, z) \in P:$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \perp \vec{n}(A, B, C) \Leftrightarrow \left(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0$$

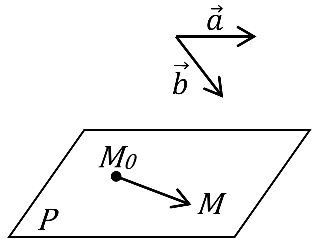
$$\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

Это уравнение плоскости через данную точку перпендикулярно данному вектору.
Раскрыв скобки и вычислив свободный коэффициент, мы получим общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$.

2. **Уравнение плоскости через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.**

Пусть даны начальная точка плоскости $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$ и два неколлинеарных вектора: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3), \vec{a}$ неколлинеарен $\vec{b}$. Тогда $\forall M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow$ векторы $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \vec{a}, \vec{b}$ компланарны $\Leftrightarrow$ их смешанное произведение равно нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow$$



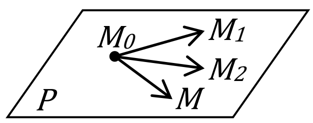
$$\begin{vmatrix} \mathbf{x - x_0} & \mathbf{y - y_0} & \mathbf{z - z_0} \\ \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \mathbf{b_3} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Это и есть **уравнение плоскости через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам**. Раскрыв этот определитель по первой строке и приведя подобные слагаемые, снова получим общее уравнение плоскости.

3. **Уравнение плоскости через три заданные точки, не лежащие на одной прямой.**

Пусть даны три точки, не принадлежащие одной прямой: $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$. Составим уравнение плоскости , для этого сведём задачу к предыдущей: возьмём в качестве начальной точки M_0, а неколлиненарные векторы, параллельные плоскости, это
$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$.
Тогда $\forall M(x, y, z) \in P \leftrightarrow$ три вектора компланарны:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \text{ и}$$
$$\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0),$$



а значит их смешанное произведение равно нулю. В координатной форме:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x - x_0} & \mathbf{y - y_0} & \mathbf{z - z_0} \\ \mathbf{x_1 - x_0} & \mathbf{y_1 - y_0} & \mathbf{z_1 - z_0} \\ \mathbf{x_2 - x_0} & \mathbf{y_2 - y_0} & \mathbf{z_2 - z_0} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Это и есть **уравнение плоскости через три заданные точки, не лежащие на одной прямой.**

Раскрыв этот определитель по первой строке, получим общее уравнение плоскости.

Специальные виды уравнения плоскости.

1. *Уравнение плоскости в отрезках.*

Пусть задана плоскость P своим общим уравнением: $P: Ax + By + Cz + D = 0$. Если все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, то уравнение можно привести к специальному виду. Перенесём свободный член D в правую часть уравнения и разделим обе части уравнения на $-D$:

$$Ax + By + Cz = -D, \qquad \frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1.$$

Обозначим $-\frac{D}{A} = \alpha, -\frac{D}{B} = \beta, -\frac{D}{C} = \gamma$ и получим уравнение плоскости в виде:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1.$$

Числа α, β, γ с точностью до знака равны отрезкам, отсекаемым плоскостью на осях координат, т.е. являются координатами точек пересечения плоскости с соответствующими координатными осями. Действительно, с осью OX(y=0, z=0) плоскость пересекается в точке A$(\alpha, 0,0)$, с осью OY(x=0, z=0) в точке B$(0, \beta, 0)$, с осью OZ(x=0, y=0) в точке C$(0,0, \gamma)$.

Уравнение $\boldsymbol{\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1}$ называется ***уравнением плоскости в отрезках.***

2. *Нормальное уравнение плоскости.*

Пусть плоскость задана своим общим уравнением $P: Ax + By + Cz + D = 0$. Мы знаем координаты нормального вектора к этой плоскости $\vec{n}(A, B, C) \perp P$. Вычислим модуль вектора $\vec{n}$ и разделим обе части уравнения на этот модуль:

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$$

В этом уравнении коэффициенты при переменных x,y,z являются координатами единичного вектора, сонаправленного с нормалью, т.е это орт вектора нормали, а его координатами являются направляющие косинусы:

$\vec{e}_{\vec{n}} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$=$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Свободный коэффициент $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ с точностью до знака есть расстояние от начала координат O(0,0,0) до данной плоскости: $\rho(O, P) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Для того, чтобы получить нормальную форму уравнения плоскости, достаточно умножить его на нормирующий множитель

$$M = \pm\frac{1}{|\vec{n}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Сумма квадратов коэффициентов при неизвестных в нормальном уравнении плоскости равна единице, так как эти коэффициенты представляют собой косинусы углов, которые нормальный вектор образует с базисными векторами.

Формула расстояния от точки до плоскости.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ произвольная точка пространства. Если эта точка принадлежит плоскости $P: Ax + By + Cz + D = 0$, то её координаты удовлетворяют уравнению плоскости. Если же точка не принадлежит плоскости, то выражение $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ не равно нулю:

$$\begin{cases} \text{если} M_1(x_1, y_1, z_1) \in P, \text{то } Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ \text{если} M_1(x_1, y_1, z_1) \notin P, \text{то } Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0 \end{cases}.$$

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin P$. Опустим из точки M_1 перпендикуляр на плоскость. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - основание перпендикуляра. Условием принадлежности точки M_0 плоскости P является равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{n}$ – нормаль к плоскости.

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M_1}\right) = |\vec{n}|\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| \cos\left(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{M_0M_1}}\right) = \pm|\vec{n}|\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|$$

Здесь $\cos\left(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{M_0M_1}}\right) = \pm 1$ (в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{n}$).

Так как расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости равно длине перпендикуляра $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|$, то с учётом модуля нормали $|\vec{n}|$:

$$\boldsymbol{\rho(M_1, P) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Это и есть **Формула расстояния от точки до плоскости.**

Взаимное расположение двух плоскостей.

Пусть даны две плоскости:

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Нормальные векторы этих плоскостей:

$$\overrightarrow{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$$
$$\overrightarrow{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$$

Выясним условия параллельности и перпендикулярности этих плоскостей и найдём формулу угла между плоскостями.

1. Плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их нормали коллинеарны, а значит, координаты нормалей пропорциональны:
$$P_1 \parallel P_2 \leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \vec{n}_2 \leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$
2. Плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормали перпендикулярны, а значит их скалярное произведение равно нулю:
$$P_1 \perp P_2 \leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$
3. Угол между нормалями $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ совпадает с одним из углов, образуемых плоскостями. Известно, что углом между плоскостями считается меньший угол, а значит косинус угла между плоскостями P_1 и P_2 равен модулю косинуса угла между нормалями:

$$\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \left|\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})\right| = \left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|.$$

Расстояние между двумя параллельными плоскостями.

Расстояние между параллельными плоскостями равно расстоянию от произвольной точки, лежащей на одной плоскости, до второй плоскости.

Чтобы найти точку, лежащую на плоскости P_1, положим две координаты равными нулю, тогда третью найдём из уравнения: например $y = z = 0 \rightarrow A_1x + D_1 = 0 \rightarrow$ найдём x.

Итак, формула расстояния между параллельными плоскостями:

$$\rho(P_1, P_2) = \rho(M_1, P_2) = \left|\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|, \text{ где } M_1(x_1, y_1, z_1) \in P_1 .$$

Взаимное расположение трёх плоскостей.

Три плоскости либо пересекаются в одной точке, либо параллельны одной прямой, в частности, проходят через прямую.

Исследование взаимного расположение трёх плоскостей равносильно исследованию совместности неоднородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

Критерий Кронекера-Капелли нам в помощь ☺

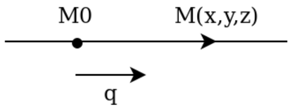
В частности, если определитель этой системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, а значит, три плоскости пересекаются в одной точке, координаты которой и есть решение этой системы.

Лекция 11

Прямая в пространстве

1. <u>Канонические уравнения.</u>

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно направляющему вектору $\vec{q}(l, m, n)$.



L: ; точка $M(x, y, z) \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{q} \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}}$$

2. <u>Параметрические уравнения.</u>

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + lt}, \\ \boldsymbol{y = y_0 + mt}, t \in \mathbb{R}. \\ \boldsymbol{z = z_0 + nt}, \end{cases}$$

Параметрические уравнения легко получаются из канонических с помощью введения коэффициента пропорциональности для координат коллинеарных векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{q}$:
$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t;\ t \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow$
$x = x_0 + lt;\ y = y_0 + mt;\ z = z_0 + nt.$

В качестве примера приведём уравнения координатных осей.

Ось OX: $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ канонические уравнения $\begin{cases} x = t \\ y = 0, t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ параметрические уравнения	**Ось OY**: $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ канонические уравнения $\begin{cases} x = 0 \\ y = t, t \in \mathbb{R} - \\ z = 0 \end{cases}$ параметрические уравнения	**Ось OZ**: $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ канонические уравнения, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ параметрические уравнения

Обратите внимание на то, что в качестве направляющих векторов взяты базисные векторы $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ соответственно, а в качестве точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – – центр системы координат $\mathrm{O}(0,0,0)$.

3. <u>Общие уравнения прямой</u>, как линии пересечения 2-х плоскостей

$\begin{cases} \boldsymbol{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0} \\ \boldsymbol{A_2x + B_2t + C_2z + D_2 = 0} \end{cases}$, где $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1) \nparallel \overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$

4. <u>Чтобы перейти от общих уравнений к каноническим,</u>

необходимо: найти направляющий вектор прямой

$$\vec{q} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

и любую точку $M_0 \in L$. Для этого одну координату выбираем произвольно, например $x = x_0$, подставляем в общие уравнения и, решив систему, находим y_0 и z_0. Зная $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{q}$, составляем канонические уравнения прямой.

5. **<u>Угол между прямыми</u>** – это острый угол между направляющими векторами этих прямых.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы своими каноническими уравнениями, где $\boldsymbol{\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}}$ - направляющие векторы этих прямых

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}; \; L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

$$\boldsymbol{\cos(\widehat{L_1, L_2}) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}})| = \frac{|(\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2})|}{|\overrightarrow{q_1}| \cdot |\overrightarrow{q_2}|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве.

6. **<u>Прямые параллельны</u>**

$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{q_1}} \parallel \boldsymbol{\overrightarrow{q_2}} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (*)$,

то есть прямые параллельны тогда и только тогда, когда пропорциональны координаты их направляющих векторов.

7. **<u>Прямые совпадают</u>**, если $\overrightarrow{M_1 M_2} \parallel \boldsymbol{\overrightarrow{q_1}} \parallel \boldsymbol{\overrightarrow{q_2}}$ т.е. к условию (*) добавляется:

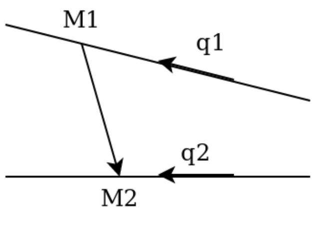
$$\frac{x_2 - x_1}{l_1} = \frac{y_2 - y_1}{m_1} = \frac{z_2 - z_1}{n_1}$$

<u>8. Прямые перпендикулярны</u> $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{q_1} \perp \overrightarrow{q_2} \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

<u>9. Прямые пересекаются</u>, если

$\overrightarrow{q_1} \nparallel \overrightarrow{q_2}$ (т.е. условие (*) не выполняется!) и прямые лежат в одной плоскости,



т.е. $\overrightarrow{M_1 M_2}$, $\overrightarrow{q_1}$ и $\overrightarrow{q_2}$ компланарны $\Leftrightarrow (\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (**)$$

<u>10.Точка пересечения прямых</u>. Чтобы найти точку пересечения прямых в случае (9), надо

1) уравнение прямой L_1 представить в параметрическом виде: $x = x_1 + l_1 t$, $y = y_1 + m_1 t$, $z = z_1 + n_1 t$;

2) подставить эти уравнения в L_2: $\frac{x_1 + l_1 t - x_2}{l_2} = \frac{y_1 + m_1 t - y_2}{m_2} = \frac{z_1 + n_1 t - z_2}{n_2}$;

3) найти t_0 – решение, удовлетворяющее всем трем уравнениям;

4) подставить t_0 в L_1 и получить $x_0 = x_1 + l_1 t_0$, $y_0 = y_1 + m_1 t_0$ и $z_0 = z_1 + n_1 t_0$ – координаты $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точки пересечения.

<u>11. Прямые скрещиваются</u> (не лежат в одной плоскости) $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$,

т.е. (**) не выполняется.

Задача 1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2,0.-3)$ параллельно:

1) вектору $\vec{a}=(2,-3,5)$;
2) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$;
3) оси Ox;
4) оси Oy;
5) оси Oz.

Решение.

1) Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору: $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$;
2) Искомая и данная прямые параллельны, значит у них общий направляющий вектор. Выпишем координаты направляющего вектора данной прямой: (5:2;-1).

Канонические уравнения искомой прямой: $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$;

3) Направляющим вектором оси Ox является вектор $\vec{i}=(1,0,0)$. Тогда канонические уравнения искомой прямой: $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$;
4) Направляющим вектором оси Oy является вектор $\vec{j}=(0,1,0)$. Тогда канонические уравнения искомой прямой: $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$;
5) Направляющим вектором оси Oz является вектор $\vec{k}=(0,0,1)$. Тогда канонические уравнения искомой прямой: $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$.

Задача 2. Составить канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

Решение. Найдём направляющий вектор искомой прямой как векторное произведение нормалей данных плоскостей:

$$\vec{l}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-5\vec{i}+12\vec{j}+13\vec{k}=(-5,12,13).$$

Координаты точки на прямой найдём, например, такими: $(0,y,z)$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y+z=0 \\ 3y-2z+5=0. \end{cases}$$

Решением этой системы будет упорядоченная пара

$$\begin{cases} y=-1 \\ z=1. \end{cases}$$

Тогда координаты точки, принадлежащей данной прямой: (0,-1,1).

Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору: $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$.

Задача 3. Пересекаются ли прямые

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{4},\ \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{5}?$$

Найти угол между этими прямыми. Если прямые пересекаются, найти точку их пересечения.

Решение. Выпишем координаты точек на данных прямых и их направляющие векторы: $M_1(2,-3,-2), \vec{l}_1(3,1,4)$, $M_2(3,2,4), \vec{l}_1(2,3,5)$.

Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} 3-2 & 2-(-3) & 4-(-2) \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

Равенство нулю этого определителя означает, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{l}_1, \vec{l}_2$ - компланарны, таким образом, данные прямые лежат в одной плоскости.

Поскольку координаты направляющих векторов $\vec{l}_1(3,1,4)$ и $\vec{l}_1(2,3,5)$ не пропорциональны, эти прямые пересекаются.

Найдём угол между данными прямыми:

$$\cos\left(\widehat{L_1, L_2}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\vec{l}_1, \vec{l}_2}\right)\right| = \frac{|3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{29}{\sqrt{26}\sqrt{38}} \Longrightarrow$$

$$\widehat{L_1, L_2} = arccos\frac{29\sqrt{247}}{494}.$$

Найдём точку пересечения данных прямых. Перейдём к параметрическим уравнениям первой прямой:

$$L_1 \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t - 3 \\ z = 4t - 2 \end{cases}$$

и подставим канонические уравнения второй прямой

$\frac{3t+2-3}{2} = \frac{t-3-2}{3} = \frac{4t-2-4}{5} \Longrightarrow$

$t = -1.$

Подставим найденное значение в параметрические уравнения первой прямой и найдём координаты точки пересечения:

$$\begin{cases} x = 3(-1) + 2 = -1, \\ y = -1 - 3 = -4, \\ z = 4(-1) - 2 = -6. \end{cases}$$

Итак, точка пересечения имеет координаты (-1,-4,-6).

Задача:

Исследовать взаимное расположение 2-х прямых. Если они пересекаются, то найти точку их пересечения.

а) $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}$; $L_2: \frac{x+1}{4} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+5}{3}$.

Ответ: Скрещиваются.

б) $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{-3}$; $L_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$.

Ответ: $M_0(0,3,5)$.

в) $L_1: \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$; $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

Ответ: $L_1 \parallel L_2$.

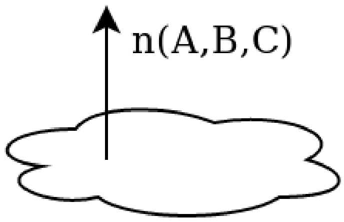
Лекция 12

Прямая и плоскость. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Решение задач.

Пусть заданы прямая (своими каноническими уравнениями) и плоскость (свои общим уравнением).

Прямая $L: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}, M_1(x_1, y_1, z_1) \epsilon L, \vec{q}(l, m, n) \parallel L.$

Плоскость $P: Ax + By + Cz + D = 0, \vec{n}(A, B, C) \perp P.$

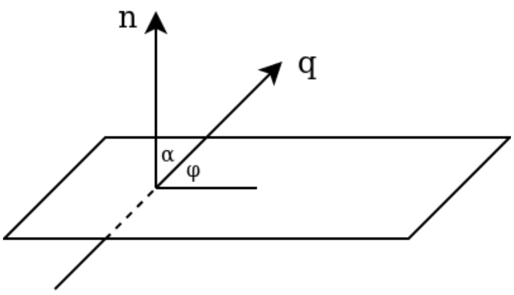


1. $\boldsymbol{L \parallel P \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{q} \Leftrightarrow (\vec{n}, \vec{q}) = 0 \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0}$

2. $\boldsymbol{L \perp P \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{q} \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}}$

3. <u>Угол между прямой и плоскостью</u> - это угол между прямой и её проекцией на плоскость. $\sin\varphi = |\cos\alpha|$

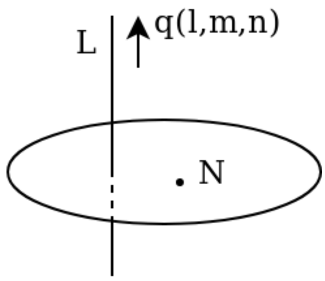
$$\boldsymbol{\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{(n, q)}\right|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}}$$



4. **<u>Уравнение плоскости, проходящей через точку $\boldsymbol{N(x_0, y_0, z_0)}$, перпендикулярно прямой $\boldsymbol{L}$</u>:**

$$\boldsymbol{l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0}$$

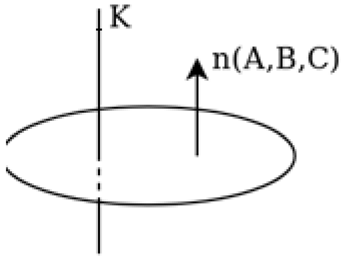
$\vec{q}(l, m, n) \parallel L$ - направляющий вектор прямой является нормалью для плоскости.



4. <u>Уравнения прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{K(x_k, y_k, z_k)}$, перпендикулярно плоскости $\boldsymbol{P: Ax + By + Cz + D = 0, \vec{n}(A, B, C) \perp P}$.</u>

$$\boldsymbol{\frac{x - x_k}{A} = \frac{y - y_k}{B} = \frac{z - z_k}{C}}$$

Нормаль к плоскости является направляющим вектором прямой.



5. **Точка пересечения прямой и плоскости:**

Для того, чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) уравнение прямой представляем в параметрическом виде;

2) подставляем зависимости переменных x, y, z в уравнение плоскости;

3) находим значение параметра t_0, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости;

4) подставляем значение t_0 в параметрические уравнения прямой и находим (x_0, y_0, z_0) - координаты точки пересечения.

Задача. Найти точку пересечения прямой L и плоскости P

$$L: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$$

$$P: Ax + By + Cz + D = 0$$

Решение.

Перейдём к параметрическим уравнениям прямой:

$$L: \begin{cases} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0, t \in \mathbb{R}. \\ z = rt + z_0 \end{cases}$$

Подставим эти зависимости переменных x, y, z в уравнение плоскости, получив, таким образом, уравнение с одним неизвестным:

$$A(pt + x_0) + B(qt + y_0) + C(rt + z_0) + D = 0.$$

Решив это уравнение, мы найдём значение параметра точки пересечения t_1. Далее, возвращаемся к параметрическим уравнениям прямой L. Подставляем найденное значение t_1 и получаем координаты точки пересечения прямой и плоскости: $L \cap P = M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Задача. Найти точку, симметричную данной точке $M(1,-1,2)$ относительно плоскости:

$$P: -x + 2y + z + 7 = 0.$$

Решение.

Сначала найдём проекцию данной точки на плоскость. Для этого составим параметрические уравнения прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости. Эта прямая параллельна нормали плоскости $\vec{n}(-1,2,1)$.

Тогда параметрические уравнения перпендикуляра имеют вид:

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t - 1. \\ z = t + 2 \end{cases}$$

Подставив эти выражения $x,\ y$ и z в уравнение плоскости, получим

$$-(-t + 1) + 2(2t - 1) + (t + 2) + 7 = 0$$

$$6t + 6 = 0$$

$$t = -1$$

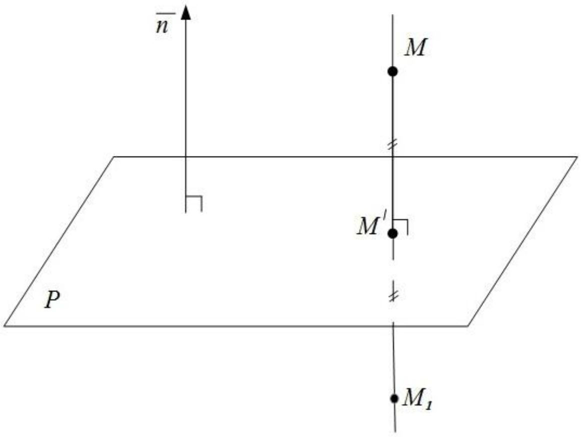
$t = -1$ – значение параметра точки пересечения.

Отсюда координаты точки M' пересечения перпендикуляра с плоскостью будут

$$\begin{cases} x' = 2 \\ y' = -3. \\ z' = 1 \end{cases}$$

Итак, мы нашли проекцию точки на плоскость.

Теперь найдём точку M_1, симметричную данной точке относительно плоскости – эта точка такова, что проекция является серединой отрезка с концами в данной точке и симметричной ей (см.рис.).



Вспомним, что координаты M′ середины отрезка MM_1 равны полусумме координат концов (здесь имеются ввиду радиус-векторы точек):

$$M' = \left[\frac{M + M_1}{2}\right].$$

Тогда координаты конца отрезка найдём так:

$$M_1 = [2M' - M].$$

Отсюда координаты точки, симметричной данной точке относительно данной плоскости: $M_1 = [(2;-3;1) - (1;-1;2)] = (3;-5;0)$.

Задача. Найти точку, симметричную данной точке относительно данной прямой.
Дана точка $M(3;7;1)$ и прямая L.

$$L: \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{3}.$$

Решение.

Найдем проекцию данной точки на данную прямую. Для этого составим уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой. Нормалью этой плоскости будет направляющий вектор прямой

$$\vec{l} = (2;-3;3).$$

Тогда плоскость определяется уравнением

$$2(x-3) - 3(y-7) + 3(z-1) = 0$$
$$2x - 3y + 3z + 12 = 0.$$

Теперь найдём точку пересечения прямой и перпендикулярной ей плоскости. Запишем параметрические уравнения прямой:

$$L: \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -3t + 2. \\ z = 3t \end{cases}$$

Значения x, y и z из параметрических уравнений прямой подставим в уравнение плоскости, получим значение параметра тоски пересечения:

$$2(2t-3) - 3(-3t+2) + 3(3t) + 12 = 0$$
$$t = 0.$$

Тогда, $M' -$ точка пересечения - и есть проекция точки M на данную прямую:

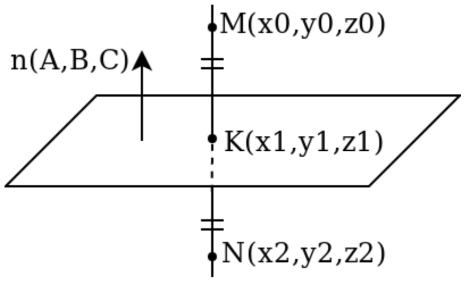
$$M': \begin{cases} x = -3 \\ y = 2\ . \\ z = 0 \end{cases}$$

Найдём координаты точки M_1, симметричной точке M относительно прямой L. Конец отрезка, для которого M' является серединой:

$$M_1 = [2M' - M].$$

$M_1 = 2(-3;2;0) - (3;7;1) = (-9;-3;-1).$

Задача: Дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и вне её точка $M(x_0, y_0, z_0)$. Найти проекцию точки M на плоскость и точку, симметричную точке M относительно плоскости.

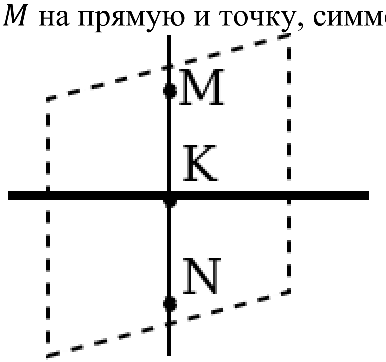


Решение: 1) Проведем через точку M прямую $\perp$ плоскости: $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$;

2) Найдём точку $K(x_1, y_1, z_1)$ – точку пересечения плоскости и построенной прямой – проекцию точки M на плоскость;

3) Найдём координаты точки N – точки, симметричной точке M относительно плоскости. Точка K является серединой отрезка MN. Воспользуемся формулами $x_1 = \frac{x_0+x_2}{2}$; $y_1 = \frac{y_0+y_2}{2}$; $z_1 = \frac{z_0+z_2}{2}$; выразим координаты точки N: $x_2 = 2x_1 - x_0$; $y_2 = 2y_1 - y_0$; $z_2 = 2z_1 - z_0 \Rightarrow N(x_2, y_2, z_2)$.

Задача: Дана прямая $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и вне её точка $M(x_1, y_1, z_1)$. Найти проекцию точки M на прямую и точку, симметричную точке M относительно прямой.



Решение: 1) Построим плоскость, проходящую через точку M, $\perp$ данной прямой:

$l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0$;

2) Найдём проекцию точки M на прямую – точку K, как точку пересечения данной прямой и построенной плоскости;

3) Найдём координаты точки N, симметричной точке M относительно прямой, используя формулы для координат середины отрезка (аналогично п. 3 предыдущей задачи).

Задача.

Для точек *A*, *B*, *C*, *D*: $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$ составить уравнения:

1) плоскости *ABC;*
2) канонические уравнения высоты, опущенной из вершины *D* пирамиды *ABCD*;
3) плоскости, проходящей через точку *D*, перпендикулярно прямой *AB.*
4) синус угла между прямой *AD* и плоскостью *ABC*;
5) косинус угла между плоскостью *ABC* и координатной плоскостью *XOY*;
6) косинус угла между прямыми *AB* и *AD.*

Решение:

1) Уравнение плоскости *ABC* через три точки.

Найдём координаты векторов, компланарных этой плоскости (в данном случае – лежащих на плоскости):

$\overline{AB} = [B - A] = (2, -2, -3)$; $\quad \overline{AC} = [C - A] = (4,0,6)$

Тогда $\forall M \in (ABC) \Leftrightarrow$ векторы $\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}$ компланарны $\Leftrightarrow$ смешанное произведение этих векторов равно нулю, $\quad (\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0$

Напомним: координатная форма смешанного произведения трёх векторов в ортонормированном базисе – определитель из координат векторов в этом базисе. Найдём координаты произвольного вектора этой плоскости

$$\overline{AM} = (x - 2, y - 3, z - 1)$$

Тогда $\quad (\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\text{раскроем определитель по первой строке}$$
$$\Leftrightarrow -12(x-2) - 24(\,y-3) + 8(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6y - 2z - 22 = 0$$

Это общее уравнение плоскости *ABC*.

Нормаль плоскости $\bar{n} \perp (ABC)$: $\bar{n} = (3{,}6,-2)$.

2) Канонические уравнения высоты из вершины *D*.

Направляющим вектором высоты к грани *ABC* является нормаль к этой плоскости $\bar{n}$, начальная точка *D*. Тогда канонические уравнения высоты DH: $\frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-8}{-2}$

3) Обозначим P – плоскость, проходящая через точку *D*, перпендикулярно прямой AB. Тогда нормалью к плоскости P является вектор $\overline{AB} = \bar{n} = (2,-2,-3)$. Общее уравнение плоскости *P*:

$2(x+5) - 2(y+4) - 3(z-8) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - 3z + 26 = 0.$

4) $\sin\left(\widehat{AD, ABC}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overline{AD},\bar{n}}\right)\right| = \left|\frac{(\overline{AD},\bar{n})}{|\overline{AD}||\bar{n}|}\right|$, где $\bar{n}$ - нормаль плоскости *ABC*.

$$(\overline{AD},\bar{n}) = (-7,\quad -7,\quad 7)\begin{pmatrix}3\\6\\-2\end{pmatrix} = -21 - 42 - 14 = -77;$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + 7^2} = 7\sqrt{3}; \qquad |\bar{n}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

$$\sin\left(\widehat{AD, ABC}\right) = \left|\frac{-77}{7\sqrt{37}}\right| = \frac{11\sqrt{3}}{21}$$

Мы взяли модуль, так как угол между прямой и плоскостью по определению острый, следовательно синус такого угла не может быть отрицательным.

5) $\cos\left(\widehat{ABC, XOY}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\bar{n},\bar{k}}\right)\right|$, где $\bar{n}$ - нормаль плоскости ABC,

$\bar{k} = (0{,}0{,}1)$- базисный вектор, нормаль плоскости XOY.

$$\left(\bar{n},\bar{k}\right) = (3 \quad 6 \quad -2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -2; \qquad |\bar{n}| = 7, \left|\bar{k}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{ABC, XOY}\right) = \frac{\left|\left(\bar{n},\bar{k}\right)\right|}{|\bar{n}|\left|\bar{k}\right|} = \frac{|-2|}{7} = \frac{2}{7}.$$

6) $\cos\left(\widehat{AB, AD}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AD}}\right)\right| = \frac{|(\overline{AB},\overline{AD})|}{|\overline{AB}||\overline{AD}|} =$

$$= \frac{\left|(2 \quad -2 \quad -3)\begin{pmatrix}-7\\-7\\7\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2}\sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + 7^2}} = \frac{|-14 + 14 - 21|}{\sqrt{17}\cdot 7\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{17}}.$$

Лекция 13

Линии второго порядка на плоскости

<u>Определение</u>: Линиями второго порядка на плоскости называются линии, определяемые уравнениями 2-й степени:

$$\boldsymbol{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,}$$

где коэффициенты – действительные числа и, по крайней мере, одно из $\boldsymbol{A, B, C \neq 0}$.

Основные линии второго порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

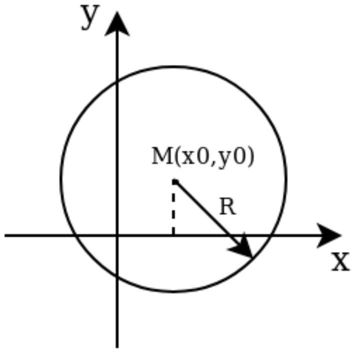
1. Окружность

<u>Определение</u>: Окружность с центром в точке $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ и радиусом $\boldsymbol{R}$ – это множество всех точек $\boldsymbol{M}$ плоскости, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{|M_0M| = R}$, т.е. равноудалённых от точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ на расстояние $\boldsymbol{R}$.

Используем формулу расстояния между двумя точками:

$|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Точка $M(x, y)$ принадлежит окружности с центром $M_0(x_0, y_0)$ и радиуса R тогда и только тогда, когда её координаты удовлетворяют условию:

$\boldsymbol{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2}$ **– каноническое уравнение окружности с центром в точке $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$.**



2.Эллипс

<u>Определение</u>: Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до 2-х данных точек этой плоскости – фокусов – есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

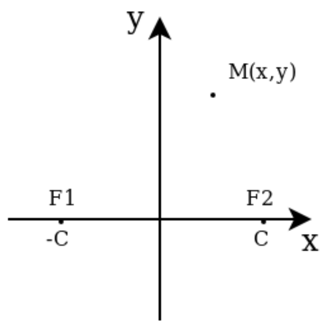
Расстояние между фокусами эллипса называется фокальным расстоянием.

Выведем уравнение:

Введём на плоскости каноническую систему координат эллипса. Для этот примем за начало координат O середину отрезка F_1F_2, фокусы располагаются на оси OX, симметрично относительно начала координат. Координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипса, начало координат – его центром симметрии.

$F_1(-c, 0)$
$F_2(c, 0)$ $|F_1F_2| = 2c$

$|MF_1| + |MF_2| = 2a$, пусть $M(x, y)$ – произвольная точка, принадлежащая эллипсу.



$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

После преобразований получим

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

$a > c \Rightarrow$ обозначим $a^2 - c^2 = b^2 > 0$.

Получим

$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$**– каноническое уравнение эллипса.**

Числа a и b $(a \geq b > 0)$ называются большой и малой полуосями эллипса.

Все точки эллипса лежат в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$. Точки $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$ называются вершинами эллипса.

Если фокусы выбрать на оси OY, получаем другой тип эллипса (см. сводную таблицу).

Окружность – частный случай эллипса при $a = b$.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса. Из определения следует, что

$$0 \leq \varepsilon < 1,$$

при этом $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$.

Эксцентриситет окружности равен нулю.

Директрисы эллипса.

Для каждого фокуса эллипса, не являющегося окружностью, можно указать такую прямую, расположенную в той же полуплоскости (и называемую директрисой), что отношение расстояния от точек эллипса до фокуса к расстоянию до директрисы (отвечающей этому фокусу) есть величина постоянная.

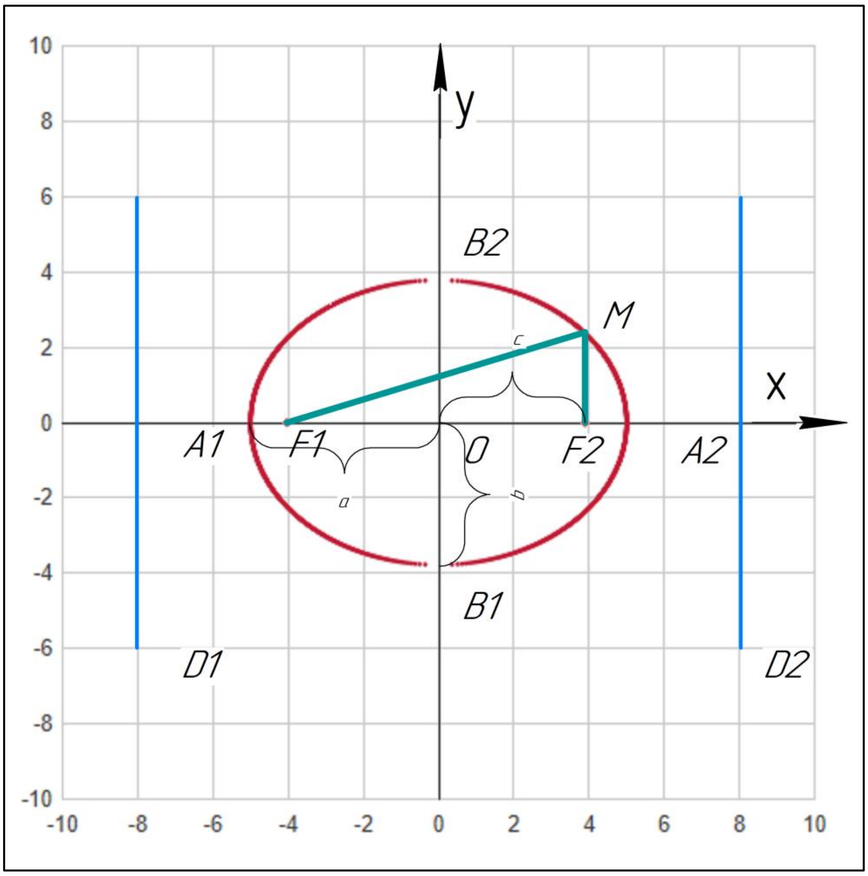
Директрисы эллипса, не являющегося окружностью, имеют уравнения в канонической системе координат данного эллипса:

$d_1 \colon x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $d_2 \colon x = \frac{a}{\varepsilon}$.

Директриса d_i называется соответствующей фокусу $F_i, i = 1{,}2$.

Если центр эллипса смещен в точку O' с координатами $(x_0;y_0)$, а его главные оси параллельны координатным осям, то уравнение эллипса будет выглядеть следующим образом:

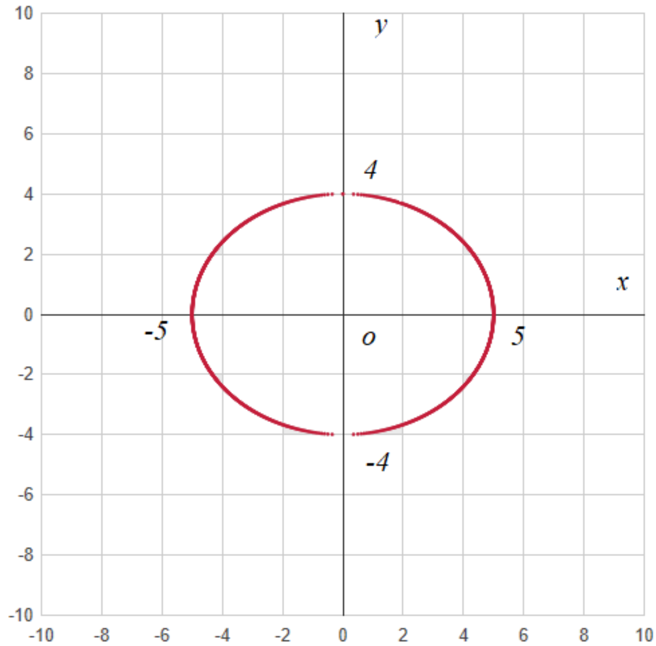
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$



Задача№1.

Составить каноническое уравнение эллипса и сделать чертеж, найти координаты фокусов, если известно, что его центр находится в начале координат, фокусы расположены на оси Ox, а малая и большая полуоси равны 4 и 5 соответственно.

<u>Решение</u> : Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$



Найдем фокальное расстояние:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3, \text{тогда } F_1(-3; 0); F_2(3; 0).$$

Задача №2.

Составить каноническое уравнение эллипса и сделать чертеж, если F_1 (2;-3); F_2(2;5), а меньшая полуось b=3.

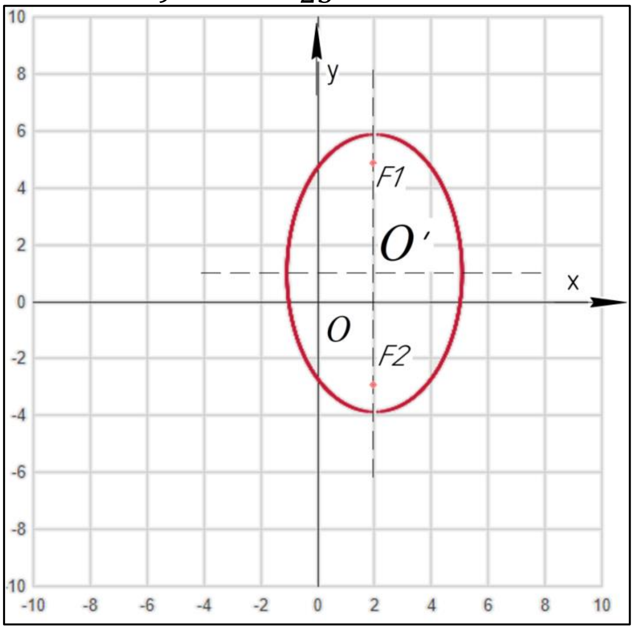
Решение: $|F_1F_2| = 8$, в то же время $|F_1F_2| = 2c$ — удвоенное фокальное расстояние. Следовательно, c = 4.

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5.$$

Середина отрезка F_1F_2 точка O′(2;1) — центр эллипса.

С учетом того, что фокусы эллипса лежат на бoльших полуосях, напишем уравнение:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$



3.Гипербола

Определение: Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек этой плоскости, называемых *фокусами* гиперболы, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Расстояние между фокусами гиперболы называется фокальным расстоянием.

Выведем уравнение: введём на плоскости каноническую систему координат гиперболы: за начало координат O примем середину отрезка F_1F_2, фокусы располагаются на оси OX, симметрично относительно начала координат: $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$; $|F_1F_2| = 2c$.

$|MF_1 - MF_2| = 2a$, где $M(x, y)$ – произвольная точка на гиперболе,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

После преобразований получим

$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ **– каноническое уравнение гиперболы**, где $b^2 = c^2 - a^2$. (1)

Если в каноническом уравнении $a = b$, то такая гипербола называется равносторонней.

Координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии гиперболы, начало координат – её центром симметрии. Ось OX, называемая вещественной (действительной) осью гиперболы, пересекает гиперболу в точках $A_1(-a,0), A_2(a,0)$ - действительных вершинах гиперболы, Ось OY не пересекает гиперболу и называется её мнимой осью, точки $B_1(0,-b), B_2(0,b)$ на мнимой оси называются мнимыми вершинами гиперболы. Начало координат называется центром гиперболы, числа $a > 0, b > 0$ - вещественной (действительной) и мнимой полуосями гиперболы.

Все точки гиперболы лежат вне полосы, определяемой прямыми $x = \pm a$. Две кривые, на которые распадается гипербола, называются её ветвями.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы при $x \to \infty$.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса. Из определения следует, что

$$\varepsilon > 1,$$

при этом $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$.

Директрисы гиперболы.

Для каждого фокуса гиперболы можно указать такую прямую, расположенную в той же полуплоскости (и называемую директрисой), что отношение расстояния от точек гиперболы до фокуса к расстоянию до директрисы (отвечающей этому фокусу) есть величина постоянная.

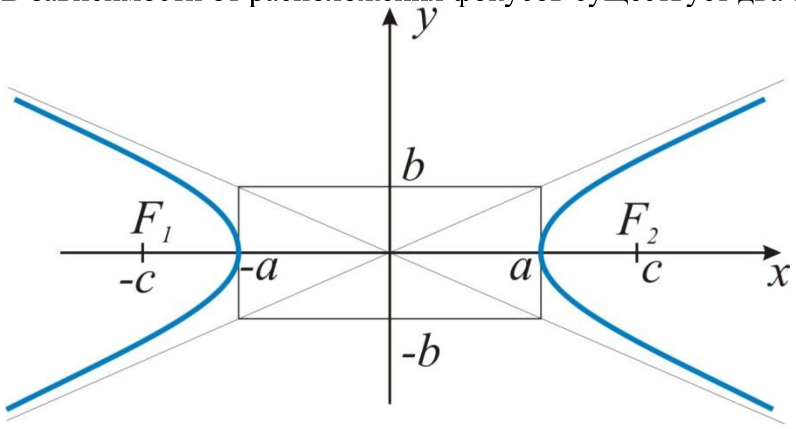
Прямые d_1 и d_2 , заданные уравнениями в канонической системе координат данной гиперболы:

$d_1: x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $d_2: x = \frac{a}{\varepsilon}$,

являются директрисами гиперболы.

Директриса d_i называется соответствующей фокусу $F_i, i = 1,2$.

В зависимости от расположения фокусов существует два типа гипербол.

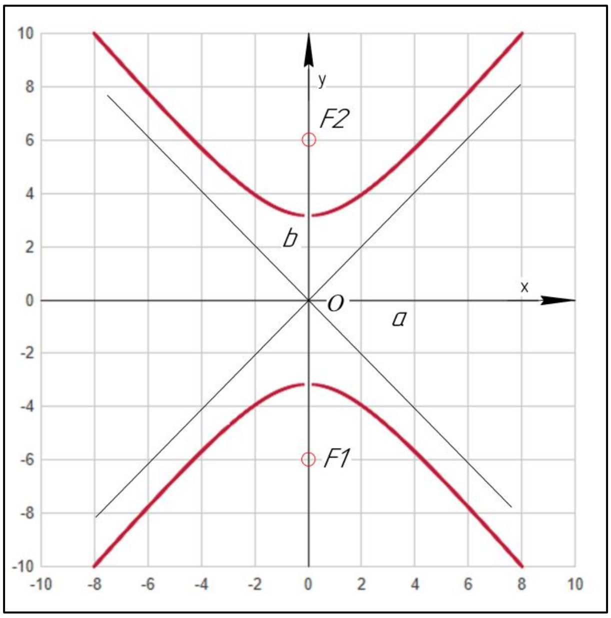


При параллельном переносе на вектор $\bar{d} = \{x_0, y_0\}$ центр кривой смещается в точку $O'(x_0;y_0)$, а уравнение гиперболы принимает вид :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Гипербола, удовлетворяющая уравнению (3) называется сопряженной к гиперболе, задаваемой уравнением (1).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (3)$$



чертеж сопряженной гиперболы

Асимптоты сопряженной гиперболы имеют уравнения $y = \pm\frac{b}{a}x$;

фокусы имеют координаты: $F_1(0; -c), F_2(0; c)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

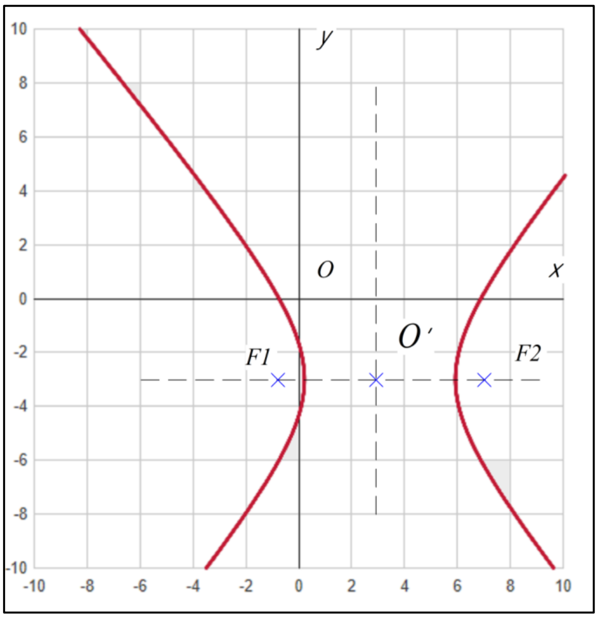
Задача №3.

Составить каноническое уравнение гиперболы, если заданы её фокусы F_1(-1;-3) и F_2(7;-3), а мнимая полуось b=3. Сделать чертёж.

Решение. $|F_1F_2| = 8 \Rightarrow c = \frac{1}{2}|F_1F_2|, c = 4.$

Из равенства $c^2 = a^2 + b^2$ следует, что $a^2 = 4^2 - 3^2 = 7$. Середина отрезка F_1F_2 точка O'(3;-3) — центр гиперболы. Тогда уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x-3)^2}{7} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

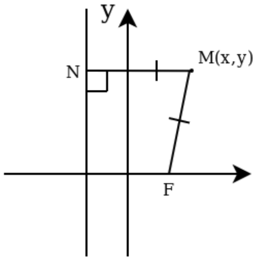


4.Парабола

Определение: Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом и данной прямой, называемой директрисой.

Расстояние от фокуса F до директрисы d называется параметром (фокальным параметром) параболы и обозначается $p; p > 0$. Число $r = \rho(F, M)$ называется фокальным радиусом точки M.

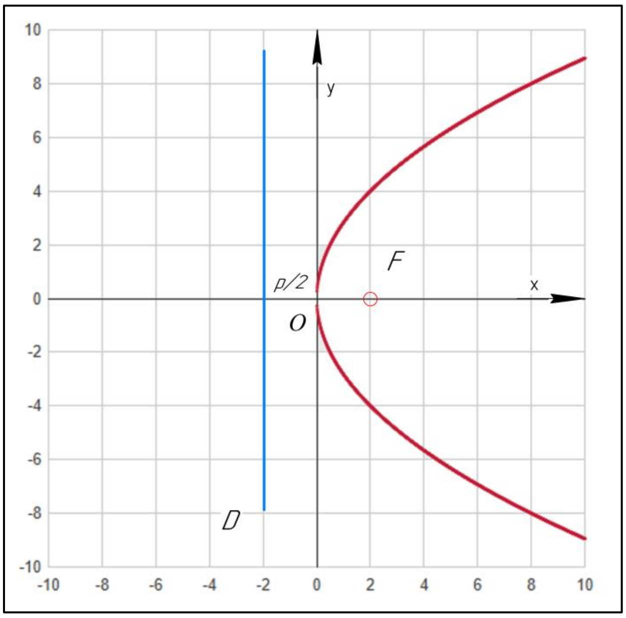
Введём на плоскости каноническую систему координат для данной параболы. Примем за ось OX прямую, проходящую через точку F перпендикулярно прямой d так, что начало системы координат O - середина отрезка FD, где D - точка пересечения оси OX с прямой d. Тогда $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и директриса $x = -\frac{p}{2}$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка, принадлежащая параболе; $|MF| = |MN|$, где точка $N(-\frac{p}{2}, y)$. Тогда



$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} \Rightarrow$$

после преобразований имеем

$\boldsymbol{y^2 = 2px}$ **– каноническое уравнение параболы**.



Ось OX канонической системы координат является осью симметрии параболы. Она называется осью параболы. Начало координат называется вершиной параболы. Все точки параболы расположены в правой полуплоскости от оси OY.

Эксцентриситет параболы по определению считается равным единице.

Если вершина параболы смещена в точку $O'(x_0, y_0)$, то уравнение примет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Задача №4.

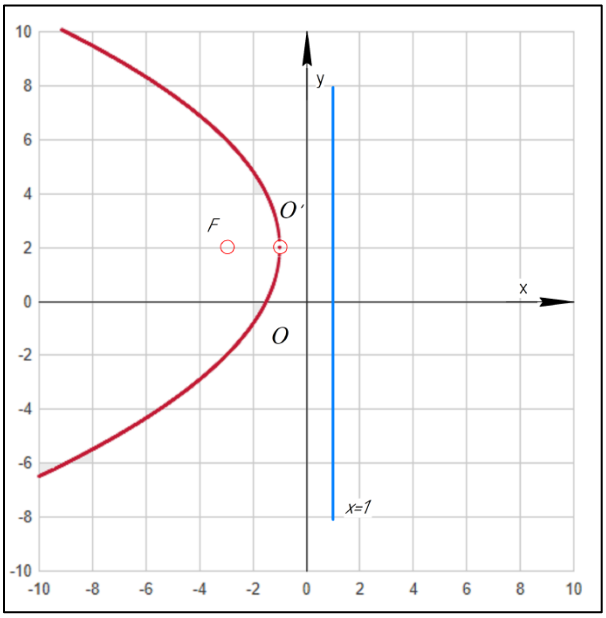
Составить уравнение параболы, если ее центр O'(-1;2), а директриса D: x=1.

Решение

Расстояние от точки O' до директрисы равно $\frac{p}{2} = 2$, следовательно параметр p= 4. Тогда координаты фокуса F (-3;2), а ветви параболы направлены влево. С учетом смещения центра в точку $O'(x_0y_0)$ уравнение примет вид:

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

Тогда $(y - 2)^2 = -8(x + 1)$— искомое уравнение.



Кривые второго порядка. Сводная таблица.

<table>
<tr><th colspan="2">Кривые второго порядка</th></tr>
<tr><td rowspan="2">

Эллипс – множество точек, сумма расстояний которых до 2-х данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная 2a>0

Расстояние между фокусами: $|F_1F_2| = 2c > 0$

$|F_1M| + |F_2M| = 2a$ - эллипс

<u>Каноническое уравнение эллипса с центром O(0;0)</u>

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ или $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

<u>Характеристики эллипса:</u>

- a – большая полуось $a > b$ Всегда!
- b – малая полуось $b^2 = a^2 - c^2$
- c – половина расстояния между фокусами $c^2 = a^2 - b^2$
- Ɛ - эксцентриситет (степень вытянутости эллипса) Ɛ=c/a
- $A_{1,2}$ $B_{1,2}$ - вершины эллипса
- Основной прямоугольник

</td><td>

<u>Горизонтальное расположение: фокусы на OX</u>

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (большая полуось под x)

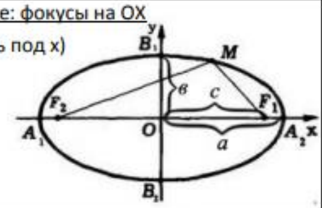
Фокусы на OX: $F_1(c;0)F_2(-c;0)$

Полуоси: $a=OA_2$ – большая

$b = OB_1$ – малая

Вершины: $A_{1,2}(\pm a;0)$

$B_{1,2}(0;\pm b)$



</td></tr>
<tr><td>

<u>Вертикальное расположение: фокусы на OY</u>

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ (большая полуось под y)

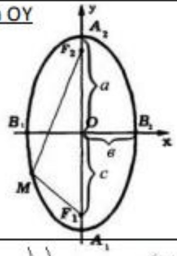
Фокусы на OY: $F_1(0;-c)F_2(0;c)$

Полуоси: $a=OA_2$ – большая

$b = OB_1$ – малая

Вершины: $A_{1,2}(0;\pm a)$

$B_{1,2}(\pm b;0)$



</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

Гипербола – множество точек, модуль разности расстояния которых до 2-х данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, обозначаемая 2a.

Расстояние между фокусами: $|F_1F_2| = 2c$

$\left||F_1M| - |F_2M|\right| = 2a$ - гипербола

<u>Каноническое уравнение гиперболы с центром O(0;0)</u>

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ или $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

<u>Характеристики гиперболы:</u>

- a – действительная полуось
- b – мнимая полуось $b^2 = c^2 - a^2$
- c – расстояние от центра гиперболы до фокуса: $c^2 = a^2 + b^2$
- Ɛ - эксцентриситет (степень вытянутости гиперболы) Ɛ=c/a
- $A_{1,2}$ - действительные вершины $B_{1,2}$ - мнимые вершины
- Основной прямоугольник
- Асимптоты гиперболы

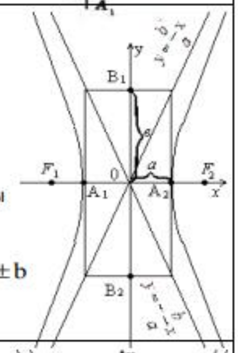
</td><td>

<u>Фокусы на OX</u>

$F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

<u>Характеристики гиперболы:</u>

- a – действительная полуось $a = OA_2$
- b – мнимая полуось $b = OB_2$
- $A_{1,2}(\pm a;0)$ - действительные вершины
- $B_{1,2}(0;\pm b)$ - мнимые вершины
- Основной прямоугольник $x = \pm a$; $y = \pm b$
- Асимптоты $y = \pm\frac{b}{a}x$



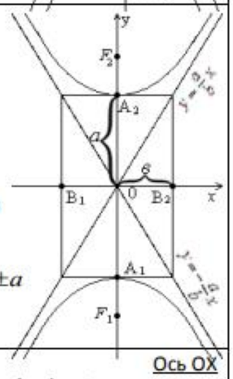
</td></tr>
<tr><td>

<u>Фокусы на OY</u>

$F_1(0;-c)$; $F_2(0;c)$ $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

<u>Характеристики гиперболы:</u>

- a – действительная полуось $a = OA_2$
- b – мнимая полуось $b = OB_2$
- $A_{1,2}(0;\pm a)$ - действительные вершины
- $B_{1,2}(\pm b;0)$ - мнимые вершины
- Основной прямоугольник $x = \pm b$; $y = \pm a$
- Асимптоты $y = \pm\frac{a}{b}x$



</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

Парабола – множество точек, равноудаленной от данной точки (фокуса) и от данной прямой, не проходящей через эту точку (директриса) $|FM| = \rho(M,d)$

<u>Каноническое уравнение параболы с центром O(0;0)</u>

$y^2 = 2px$ $p > 0$

<u>Характеристики параболы:</u>

- p – параметр параболы, расстояние от фокуса до директрисы
- Фокус параболы
- Директриса
- Вершина – равноудалена от фокуса и директрисы
- Ось симметрии параболы
- Эксцентриситет параболы Ɛ=1

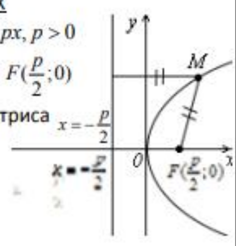
</td><td>

<u>Ось OX</u>

$y^2 = 2px, p > 0$

Фокус $F(\frac{p}{2};0)$

Директриса $x = -\frac{p}{2}$



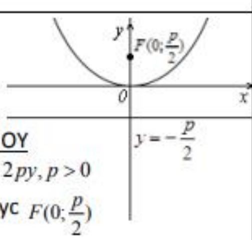
<u>Ось OX</u>

$y^2 = -2px, p > 0$

Фокус $F(-\frac{p}{2};0)$

Директриса $x = \frac{p}{2}$

</td></tr>
<tr><td>



<u>Ось OY</u>

$x^2 = 2py, p > 0$

Фокус $F(0;\frac{p}{2})$

Директриса $y = -\frac{p}{2}$

<u>Ось OY</u>

$x^2 = -2py, p > 0$

Фокус $F(0;-\frac{p}{2})$

Директриса $y = \frac{p}{2}$

</td></tr>
</table>

Лекция 14
Поверхности второго порядка. Обзор поверхностей второго порядка.

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением второй степени:
$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$,

где не все коэффициенты при членах второго порядка равны нулю.

Можно доказать, что величины

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

являются инвариантами (неизменяемыми величинами) уравнения поверхности второго порядка относительно преобразований декартовой системы координат. (Без доказательства.)

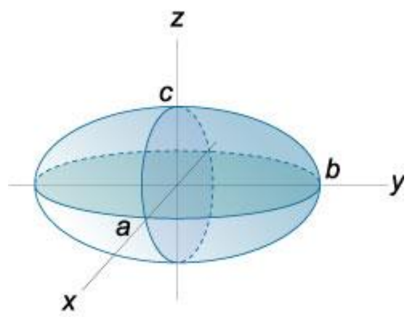
Для каждого уравнения можно указать такую систему координат, в которой уравнение поверхности имеет канонический вид.

Все действительные невырожденные поверхности второго порядка разделяются на следующие пять классов: 1) эллипсоиды, 2) гиперболоиды, 3) параболоиды, 4) цилиндры, 5) конусы.

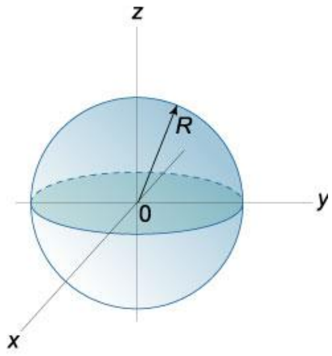
Рассмотрим подробнее эти поверхности.

<u>Классификация поверхностей второго порядка:</u>

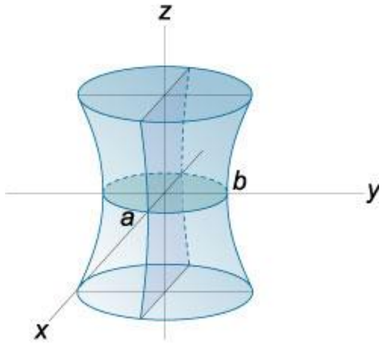
1) Эллипсоид *:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



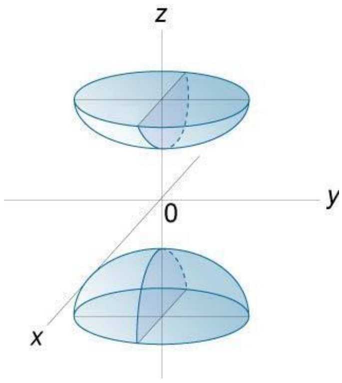
2)Сфера (является частным случаем эллипсоида):$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



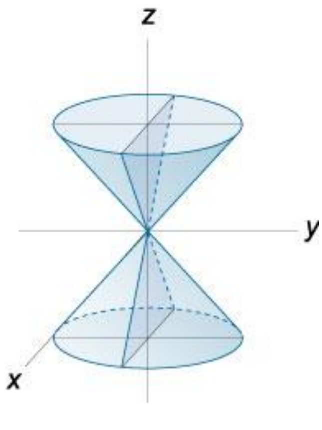
3)Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



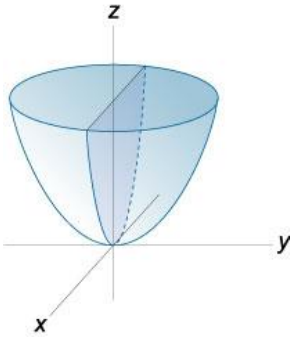
4) Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



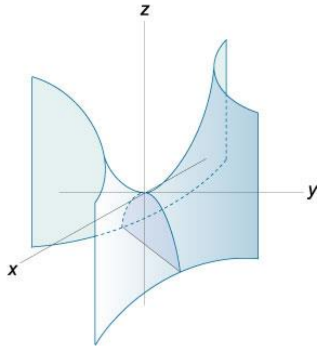
5) Конус второго порядка:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



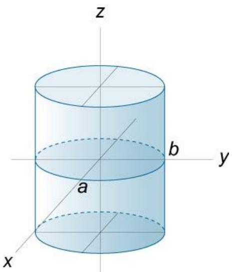
6) Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$



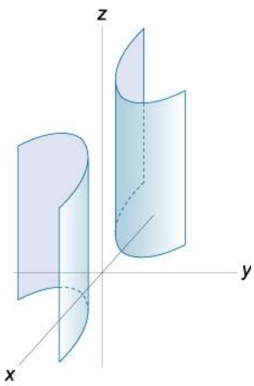
7) Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$



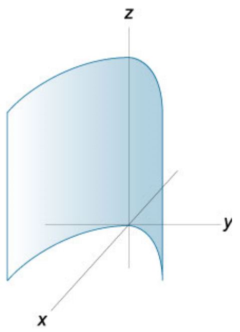
8) Эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



9) Гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



10) Параболический цилиндр: $y^2=2px$



Определение формы поверхности методом сечения координатными плоскостями.

Метод сечения – исследование поверхности путем изучения линий пересечения данной поверхности с координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Рассмотрим на примере двуполостного гиперболоида. Исследуем его форму методом сечений.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

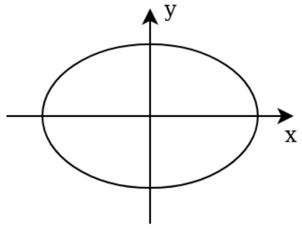
Исследуем поверхность сечениями следующими плоскостями:

1) $z=h$: $\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$.

Если $|h|<c$ плоскости $z=h$ не пересекают поверхность.

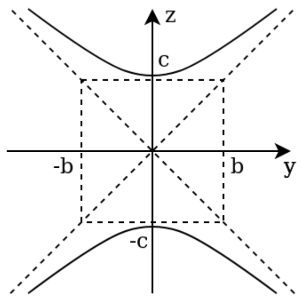
Если $|h|=c$, $\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; плоскость $z=\pm h$ касается поверхности в точках $A_1(0,0,c)$ и $A_2(0,0,-c)$.

Если $|h|>c$ получаем в пересечении эллипсы $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1$; чем больше h, тем больше оси эллипса.

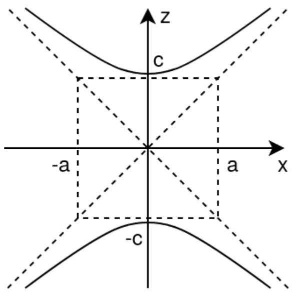


Как вытянут эллипс, по оси OX или OY, зависит от конкретных чисел a и b.

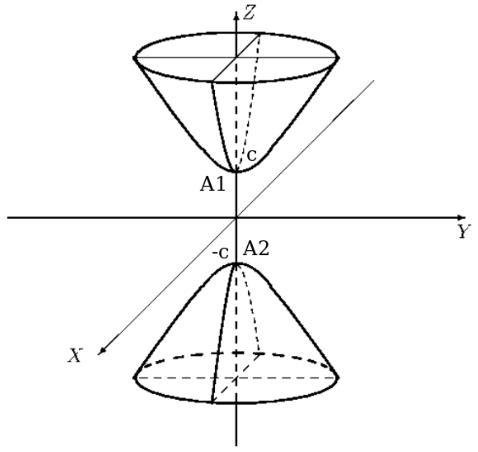
2) $x=0$ - эта плоскость пересекает поверхность по гиперболе $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



3) $y=0$; в пересечении получаем гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.



По виду полученных кривых можно определить форму поверхности и построить чертёж:



Теперь рассмотрим эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ и исследуем его методом сечений.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $z=h$;

При $h<0$ пересечение пустое.

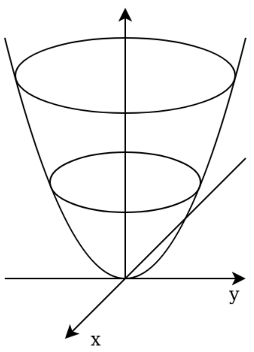
При $h=0$ пересечение совпадает с началом координат $O(0,0,0)$.

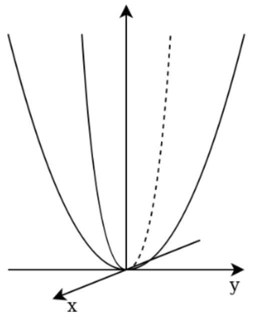
При $h>0$ в пересечении получаем эллипс $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{2h}\right)^2}+\frac{b^2}{\left(b\sqrt{2h}\right)^2}=1$; с ростом h оси эллипса увеличиваются.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $x=h$ и $y=h$; Пересечения этих плоскостей с поверхностью представляют собой параболы.

$$\frac{y^2}{b^2}=2z-\frac{h^2}{a^2};\quad \frac{x^2}{a^2}=2z-\frac{h^2}{b^2}$$

Если $h=0$: $x^2=2a^2z$; $y^2=2b^2z$





Полученные кривые позволяют определить форму поверхности.

<u>Пример</u>: Определить тип поверхности; сделать чертеж

$$x^2-y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$$

По каждой переменной выделяем полный квадрат:

$$(x-1)^2-(y-2)^2+(z-1)^2=1.$$

Получили уравнение смещённого однополостного гиперболоида с центром в точке $O'(1,2,1)$ и полуосями $a=b=c=1$.

Каноническое уравнение получается путём параллельного переноса системы координат $x'=x-1$; $y'=y-2$; $z'=z-1$ и имеет вид

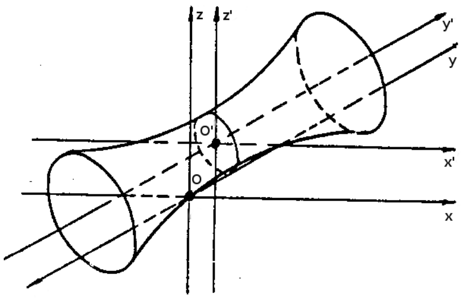
$$(x')^2-(y')^2+(z')^2=1.$$

Сечения:

1) $y'=0$; $y=2$; окружно:сть $(x')^2+(z')^2=1$

2) $x'=0$; $x=1$; гипербола $(z')^2-(y')^2=1$

3) $z'=0$; $z=1$; гипербола $(x')^2-(y')^2=1$



Существуют еще, так называемые, вырожденные поверхности:

мнимый эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$,

мнимый конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$,

мнимый эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

пара мнимых пересекающихся плоскостей: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$,

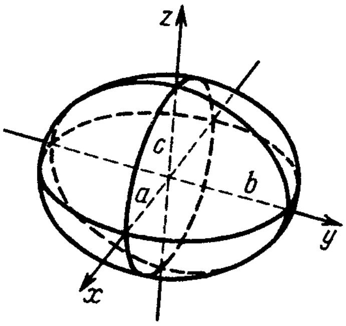
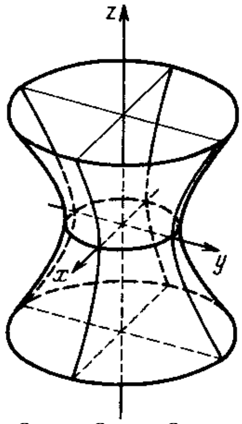
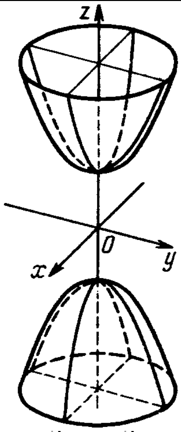
пара пересекающихся плоскостей: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$,

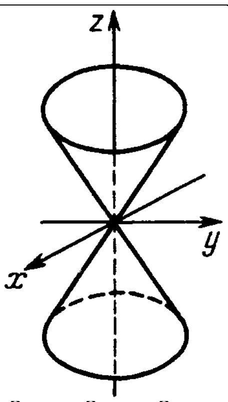
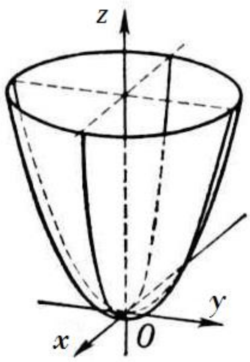
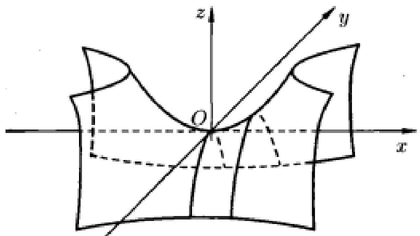
пара параллельных плоскостей: $x^2-a^2=0$,

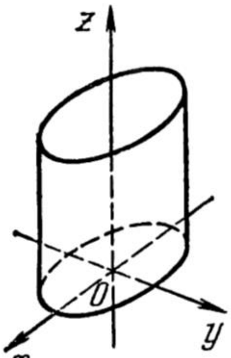
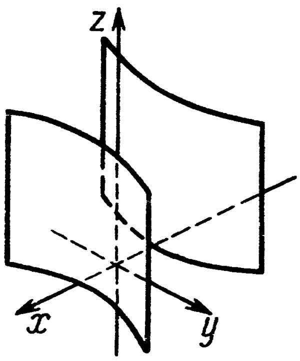
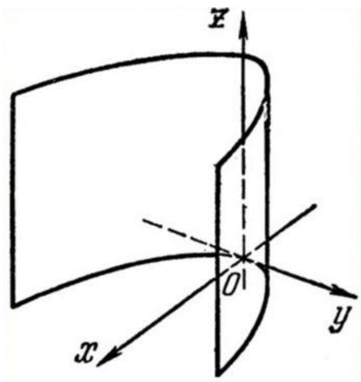
пара мнимых параллельных плоскостей: $x^2+a^2=0$,

пара совпавших плоскостей: $x^2=0$.

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Эллипсоид	Гиперболоиды	
	однополостный	двуполостный
 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$	 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$	 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Конус второго порядка	Параболоиды	
	эллиптический	гиперболический
 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$	 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$	 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

Цилиндр второго порядка		
эллиптический	гиперболический	параболический
 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$	 $y^2=2px, \qquad p>0$

<u>Задача:</u>

Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением:

$$25x^2 - 50x - 100y^2 - 4z^2 - 75 = 0$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду. Сделать чертеж. Найти сечения поверхности плоскостями:

а) $y = 0$;

б) $x = 7$.

<u>Решение:</u>

Приведем уравнение поверхности к каноническому виду. Для этого выделим полный квадрат по переменной x:

$$25x^2 - 50x - 100y^2 - 4z^2 - 75 = 0,$$

$$25(x^2 - 2x + 1) - 100y^2 - 4z^2 - 100 = 0,$$

$$25(x-1)^2 - 100y^2 - 4z^2 = 100.$$

Разделив обе части уравнения на свободный член, получим уравнение двуполостного гиперболоида:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{25} = 1$$

Найдем координаты вершин. Заметим, что $y^2 + \frac{z^2}{25} = \frac{(x-1)^2}{4} - 1$, следовательно, при $y = z = 0$, $\frac{(x-1)^2}{4} - 1 = 0 => \left[\begin{matrix} x=3 \\ x=-1 \end{matrix}\right.$, то есть вершины гиперболоида имеют координаты: (3;0;0) и (–1;0;0).

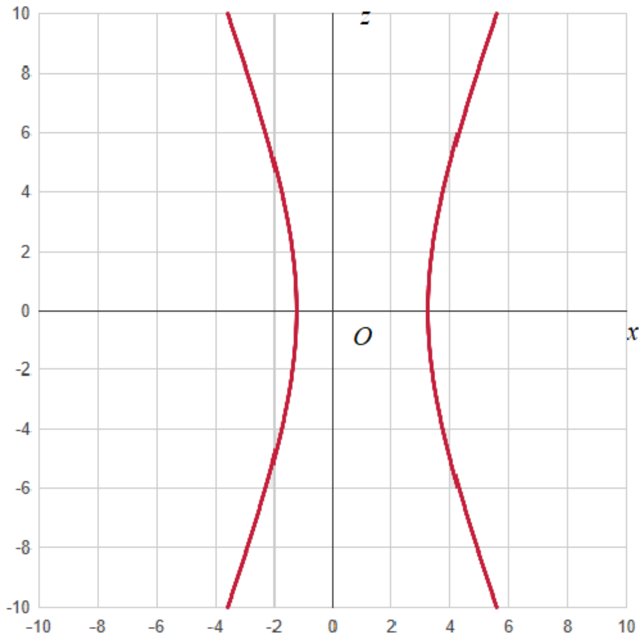
Для того чтобы построить чертеж поверхности, сначала надо построить сечения.

а) $y=0$, тогда исходное уравнение примет вид:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 1.$$

Значит, плоскость $y=0$ пересекает гиперболоид, и линией пересечения является гипербола в плоскости XOZ с центром в точке $x_0=1$ и $z_0=0$ и полуосями $a=2$ и $b=5$; асимптоты гиперболы: $z = \pm\frac{5}{2}(x-1)$.

Сделаем чертеж гиперболы:



б) пересечение поверхности с плоскостью x=7 определяется уравнением:

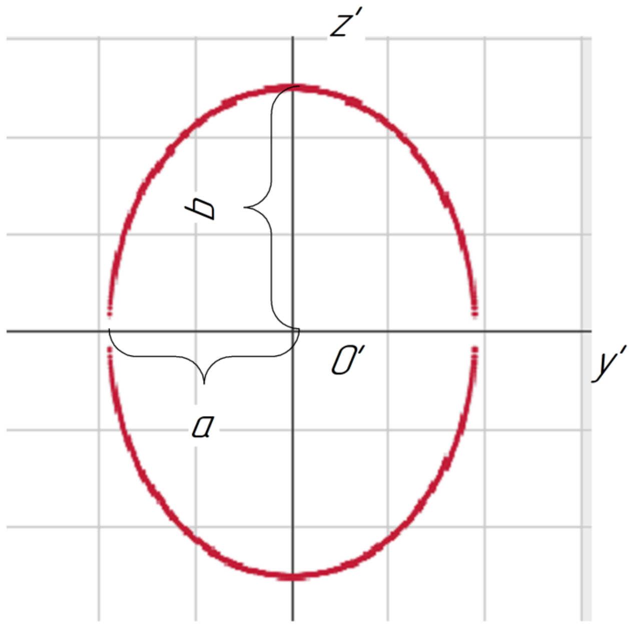
$$y^2 + \frac{z^2}{25} = 8,$$

что равносильно уравнению эллипса

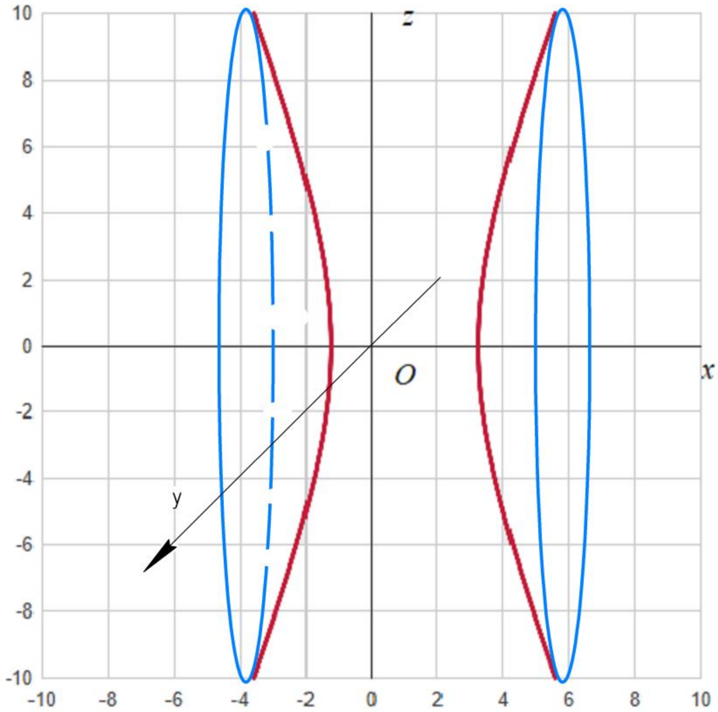
$$\frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{200} = 1$$

с полуосями $a = 2\sqrt{2}$ и $b = 10\sqrt{2}$ и центром в точке *(7;0;0)* на плоскости, параллельной *YOZ* .

Проведем в плоскости x=7 оси $O'Y'$ и $O''Z'$ параллельно осям *OY* и *OZ* и построим эллипс:



Теперь сделаем чертеж поверхности:



Важное замечание: На чертеже изображена левоориентированная система координат. Ориентация базисных векторов не влияет на изображение поверхности.

Лекция 15.
Комплексные числа

МНОЖЕСТВО КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Множество всевозможных упорядоченных пар (x, y) вещественных чисел, на котором операции сложения и умножения определены по формулам

$$\begin{gathered}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\end{gathered} \tag{1}$$

называется *множеством комплексных чисел* и обозначается **C**. Равенство $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ означает, что $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Для комплексного числа $z = (x, y)$ вещественное число x называют *вещественной частью*, а число y – *мнимой частью*. Обозначения: $x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$.

Комплексное число $(x, 0)$ отождествляют с вещественным числом x:

$$(x, 0) = x.$$

В частности, $(0, 0) = 0$.

Операции сложения и умножения, заданные формулами (1), переводят вещественные числа в вещественные (действительно, если $y_1 = y_2 = 0$, то $y_1 + y_2 = 0$ и $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$). Таким образом, **R** $\subset$ **C.**

Для произвольного $z \in$ **C** полагают $z^2 = z \cdot z$, $z^3 = z^2 \cdot z$ и, вообще, $z^n = z^{n-1} \cdot z$, где $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

Комплексное число (0,1) обозначается i и называется *мнимой единицей*. Имеем

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Для произвольного комплексного числа $z = (x, y)$ справедливы равенства

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0,1)(y, 0).$$

Значит,

$$z = x + iy. \tag{2}$$

Формулу (2) называют *алгебраической формой* комплексного числа z. В этой формуле $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Формулы (1) представимы в виде

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда видно, что для умножения двух комплексных чисел достаточно раскрыть скобки по обычным правилам и заменить i^2 на –1.

Неотрицательное число

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется *модулем* комплексного числа z. Очевидно,

$$\operatorname{Re} z \leq |z|, \quad \operatorname{Im} z \leq |z|. \tag{4}$$

Число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряжённым* числу $z = x + iy$. Из (2) и (3) имеем

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \tag{5}$$

Вычитание комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению. *Разностью* $z_1 - z_2$ двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется число z, обладающее свойством $z_2 + z = z_1$. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Деление на комплексное число, отличное от нуля, определяется как операция, обратная умножению. *Частным* z_1 / z_2 двух комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2 \neq 0$, называют число z, обладающее свойством: $z_2 \cdot z = z_1$.

Для нахождения частного выполняют преобразования:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|z_2|^2} + i \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{|z_2|^2}.$$

Пример 1. Для комплексных чисел $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 3 - 4i$ имеем

$$z_1 + z_2 = 4 - 2i,$$
$$z_1 - z_2 = -2 + 6i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (3 - 4i) = 3 + 8 + i(6 - 4) = 11 + 2i,$$
$$\overline{z_1} = 1 - 2i, \ |z_1| = \sqrt{5},$$
$$|z_2| = \sqrt{9 + 16} = 5,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{3 - 8 + i(6 + 4)}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} i.$$

Предложение 1. *Для любых комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *справедливы неравенства*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{и} \quad |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

$\lhd$ В силу (4) и (5) очевидно имеем

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

и

$$z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$$

Отсюда

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

и, следовательно,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Кроме того,

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

то есть $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$. $\triangleright$

Так как комплексное число $z=x+iy$ является упорядоченной парой (x,y) действительных чисел, а множество всевозможных пар (x,y) действительных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с координатной плоскостью, то каждую точку (x,y) можно принять за изображение комплексного числа $z=x+iy$. При таком соглашении действительную плоскость называют *комплексной плоскостью* (обозначение: **C**) и $z=x+iy$ считают точкой этой плоскости.

Ось x называется *вещественной осью*, а ось iy называется *мнимой осью* комплексной плоскости. Их уравнения $\mathrm{Im}\ z = 0$ и $\mathrm{Re}\ z = 0$ соответственно. Отметим, что *операция комплексного сопряжения* (переход от z к $\bar{z}$) геометрически сводится к отражению плоскости **C** относительно вещественной оси.

Положение точки z на плоскости **C** однозначно определяется не только парой $x = \mathrm{Re}\ z$, $y = \mathrm{Im}\ z$, но также и парой (r, φ), где $r=|z|$, φ - угол между положительным направлением оси x и направлением из начала координат на z (предполагается, что $r > 0$).

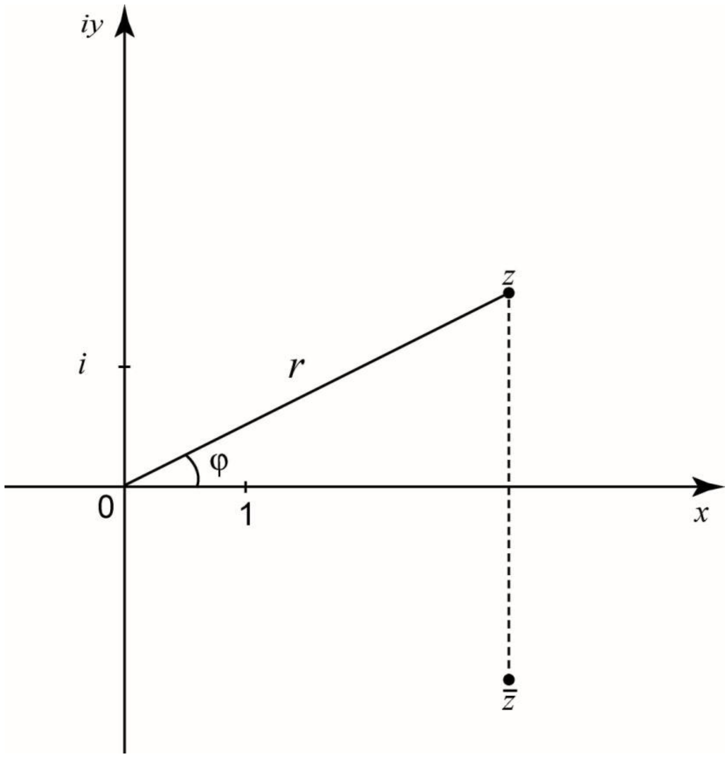


Рис. 1.

Угол φ называется *аргументом* числа z. Для любого $z \neq 0$ аргумент определен с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Значение аргумента числа z, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \le \pi$, называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$.

Если x = Re z, y = Im z, r=|z|, $\varphi = \arg z$, то $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Отсюда получается тригонометрическая форма записи комплексного числа z:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (6)$$

Примеры тригонометрической формы записи комплексных чисел:

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \qquad 1 = \cos 0 + i\sin 0,$$

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi), \qquad 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

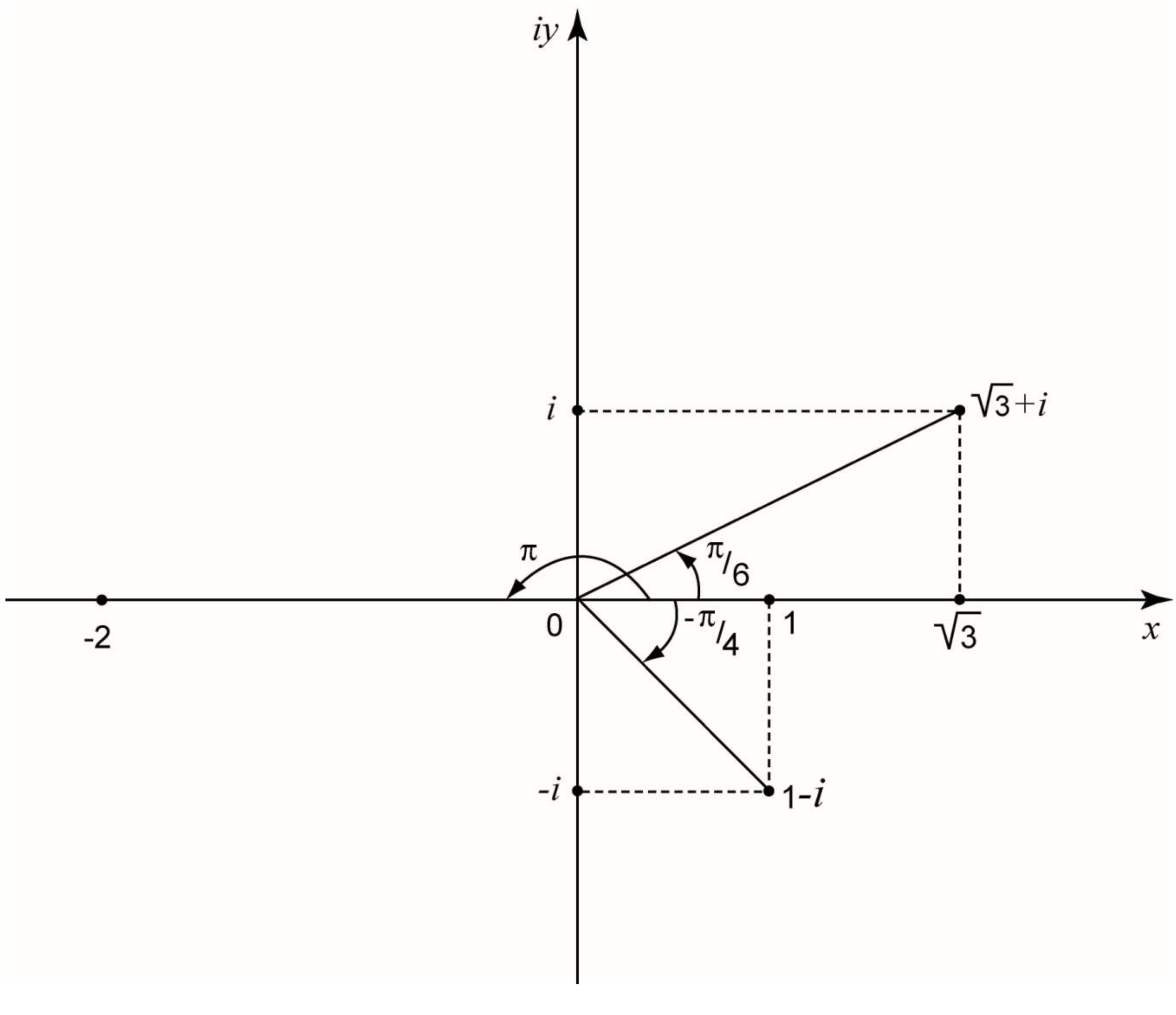


Рис. 2

Операция сложения комплексных чисел z_1 и z_2 может быть выполнена по правилу параллелограмма, то есть по правилу сложения направленных отрезков (векторов), выходящих из начала координат и оканчивающихся в точках z_1 и z_2.

Расстояние между точками z_1 и z_2 совпадает с модулем их разности:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Неравенство $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ геометрически означает, что длина стороны треугольника не превосходит суммы двух других сторон.

Запишем числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

После преобразований с применением тригонометрической формулы сложения, получим

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{7}$$

Таким образом, модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент произведения – сумме аргументов множителей. Из формулы (7) выводится *формула Муавра*:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\quad n \in \mathbf{N}. \tag{8}$$

Пример 2. Если $z = \sqrt{3} + i$, то $r = 2,\ \varphi = \pi/6$. Следовательно,

$$(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = -64.$$

КОРНИ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть $a \in \mathbf{C}$. *Корнями n-й степени из числа a* называются все те комплексные числа z, которые удовлетворяют уравнению $z^n = a$.

Если $a = 0$, то уравнение $z^n = a$ имеет единственное решение: $z = 0$.

Пусть $a \neq 0$. Запишем z и a в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\qquad a = |a|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

где $r = |z|, \varphi = \arg z, \theta = \arg a$. По формуле Муавра

$$z^n = a \Leftrightarrow r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

что равносильно системе:

$$\begin{cases} r^n = |a|, \\ n\varphi = \theta + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Все корни n-й степени из числа a находятся по формуле*

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad (9)$$

где $\sqrt[n]{|a|}$ *– арифметический корень степени* n *из положительного числа* $|a|$.

На комплексной плоскости точки $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r = \sqrt[n]{|a|}$ с центром в начале кординат.

Пример 3. Для уравнения $z^4 = -1$ имеем $n = 4$, $a = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$. По формуле (9)

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Точки z_0, z_1, z_2, z_3 находятся в вершинах квадрата:

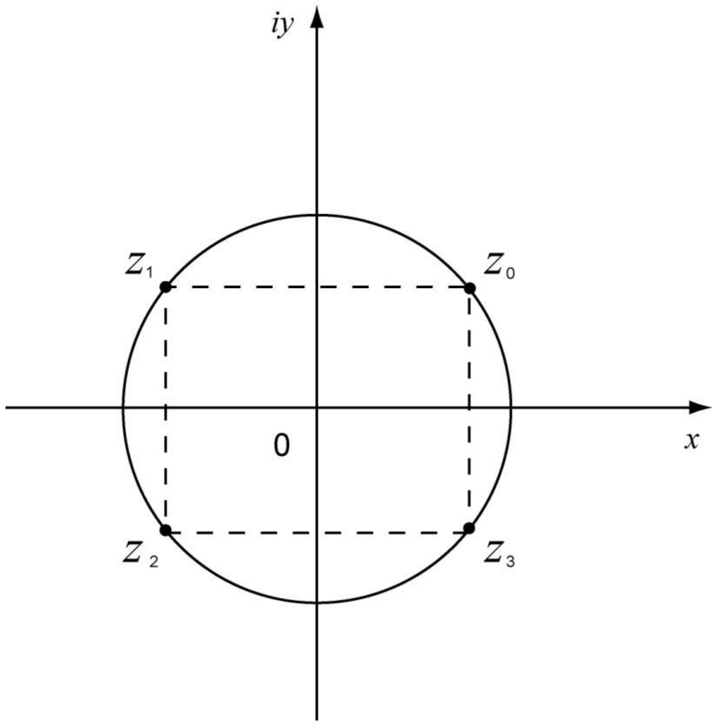


Рис. 3

Множество корней данного уравнения:

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

По предложению 2 числа

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad (10)$$

являются корнями n-й степени из 1. На комплексной плоскости точки $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ расположены на окружности единичного радиуса в вершинах правильного n-угольника. Одной из вершин этого многоугольника является точка $\varepsilon_0 = 1$.

В силу (10) и формулы Муавра значение ε_k есть k-я степень ε_1:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1^k \quad (k = 0,\ 1,\ ...,\ n-1).$$

Квадратный корень из единицы имеет два значения: 1 и –1, корень четвертой степени из единицы – четыре значения: 1 , –1, i и – i. При n = 3 кроме значения $\varepsilon_0 = 1$ получаются значения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \varepsilon_2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Сравнивая (9) и (10), замечаем, что все значения корня n-й степени из комплексного числа a можно получить умножением одного из этих значений на все корни n-й степени из единицы. (Убедиться в этом самостоятельно,)

Упражнения.

1. Вывести формулы, выражающие $\sin n\varphi,\ \cos n\varphi\ \ (n \ge 2, n \in N)$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

2. Показать, что при $x \ne 0$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = e^{inx/2}\,\frac{\sin[(n+1)x/2]}{\sin(x/2)}.$$

3. Доказать формулы

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \cos(nx/2)\,\frac{\sin[(n+1)x/2]}{\sin(x/2)};$$

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sin(nx/2)\,\frac{\sin[(n+1)x/2]}{\sin(x/2)}.$$

Изложим метод вычисления квадратного корня из комплексного числа a без применения формулы (9) (при n = 2). Пусть $\alpha = \operatorname{Re} a,\ \beta = \operatorname{Im} a$. Найдем вещественные числа x и y так, чтобы $(x+iy)^2 = \alpha + i\beta$. Так как

$$(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

то имеем систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha, \\ 2xy = \beta. \end{cases}$$

Учитывая, что $\left|x+iy\right|^2=\left|\alpha+i\beta\right|$, имеем также, что $x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Таким образом, x и y находятся из системы:

$$\begin{cases} x^2=\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\big/2, \\ y^2=\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\big/2, \\ xy=\beta/2. \end{cases} \tag{12}$$

В результате получатся два значения: $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ $\left(z_2=-z_1\right)$.

Пример 4. Для уравнения $z^2=-3+4i$ имеем $\alpha=-3$, $\beta=4$, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=5$ и система (12) принимает вид:

$$\begin{cases} x^2=1, \\ y^2=4, \\ xy=2. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_1=1,\ y_1=2$ и $x_2=-1,\ y_2=-2$. Значит, $z_1=1+2i$, $z_2=-1-2i$.

Решение квадратных уравнений

Для любых комплексных чисел p и q имеем:

$$x^2+px+q=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{D}}{4},$$

где $\mathrm{D}=p^2-4q$. Если один из корней уравнения $z^2=\mathrm{D}$ обозначить $\sqrt{\mathrm{D}}$, то второй будет $\left(-\sqrt{\mathrm{D}}\right)$ и получается формула:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2}. \tag{13}$$

Если D $\geq$ 0, то $\sqrt{\mathrm{D}}$ есть арифметический квадратный корень из числа D. Если D < 0, то в (13) можно принять: $\sqrt{\mathrm{D}}=i\sqrt{|\,\mathrm{D}\,|}$.

Из формулы (13) следуют *формулы Виета*:

$$x_1+x_2=-p, \quad x_1\cdot x_2=q.$$

Пример 5. Решим уравнение $x^2-3x+(3-i)=0$.

Для данного уравнения $p = -3$, $q = 3 - i$, $D = 9 - 4(3 - i) = -3+4i$. Согласно предыдущему примеру, можно выбрать $\sqrt{D} = 1+2i$. По формуле (13)

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm (1+2i)}{2},\ x_1 = 2 + i,\ x_2 = 1 - i.$$

Пример 6. *Решим уравнение* $x^2 + 4x + 5 = 0.$

Решение: Имеем $D = 16 - 20 = -4$, $\sqrt{D} = i\sqrt{|-4|} = 2i$. *Значит,*

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2},\ x_1 = -2 + i,\ x_2 = -2 - i.$$

Лекция 16.
Многочлены и их корни

Определение. *Многочленом степени* n ($n \in \mathbb{N}$) называется всякое выражение вида:

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$

где $a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_n -$ *старший коэффициент*, $a_0 -$ *свободный член.*

Обычно многочлен n-ой степени обозначается $P_n(z)$. Тогда, например, выражение

$P_2(z) = az^2 + bz + c$ – многочлен второй степени, $P_1(z) = az + b$– многочлен первой степени, а всякое, отличное от нуля, вещественное число a принято считать многочленом нулевой степени.

Действия над многочленами.

1) Равенство многочленов.
   Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их степени и равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной.
   $$P_n(z) = Q_m(z) \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ a_k = b_k, k = n, n-1, \ldots 1, 0. \end{cases}$$
2) Многочлены можно складывать почленно, приводя подобные слагаемые, при этом коэффициенты при одинаковых степенях z складываются.

Пример сложения многочленов одинаковых степеней:

$$P_n(z) + Q_n(z) = (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0) + (b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0) =$$

$$= (a_n + b_n) z^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) z^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1) z + (a_0 + b_0)$$

3) Умножение многочленов осуществляется с помощью почленного перемножения скобок и приведения подобных слагаемых.

Пример:

$$p(z)\cdot q(z) = (3z^3-5z^2+1)\cdot(4z^2-z-7) =$$
$$= 12z^5-3z^4-21z^3-20z^4+5z^3+35z^2+4z^2-z-7 =$$
$$= 12z^5-23z^4-16z^3+39z^2-z-7.$$

4) Деление многочленов.

Если даны два многочлена $P_n(z)$и $Q_m(z)$ такие, что их степени $m \le n$, то можно подобрать многочлены $T_{n-m}(z)$и $r(z)$, что

$$P_n(z) = Q_m(z)T_{n-m}(z) + r(z)$$

При этом многочлен $T_{n-m}(z)$ - частное от деления $P_n(z)$ *на* $Q_m(z)$, а многочлен $r(z)$ – остаток от деления $P_n(z)$ *на* $Q_m(z)$. Степень остатка меньше степени многочлена-делителя.

Способы деления: «столбиком» («уголком») и по схеме Горнера.

Пример: деление многочленов «уголком»:

$$\begin{array}{l|l}
_\,x^5-1 & \underline{x-1\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{x^5-x^4} & x^4+x^3+x^2+x+1 \\
\quad_\,x^4 & \\
\quad\underline{x^4-x^3} & \\
\qquad_\,x^3 & \\
\qquad\underline{x^3-x^2} & \\
\qquad\quad_\,x^2 & \\
\qquad\quad\underline{x^2-x} & \\
\qquad\qquad_\,x-1 & \\
\qquad\qquad\underline{x-1} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Способ «уголок» («столбик») применяется для деления многочлена n-ой степени на многочлен m-ой степени, где $m \le n$.

Деление по схеме Горнера мы рассмотрим чуть позже. Это очень удобный способ, но его использование ограничено: степень многочлена-делителя только первая, то есть делитель имеет вид $(z-z_0)$.

Корни многочлена и их кратность.

Определение: Число z_0 называют *корнем многочлена* $P(z)$, если $P(z_0) = 0$.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на двучлен $(z-z_0)$ равен $\mathrm{P_n(z_0)}$

Доказательство: Для любого многочлена $P_n(z)$ найдется такой многочлен степени $n-1$

$Q_{n-1}(z)$, что справедливо равенство:

$$P_n(z)=(z-z_0)Q_{n-1}(z)+r.$$

подставим z_0 в это равенство:

$P_n(z_0)=(z_0-z_0)Q_{n-1}(z_0)+\ r \Rightarrow$ *остаток* $r=P_n(z_0)$. Что и требовалось доказать.

Следствие: Если z_0 корень многочлена $P(z)$, то $P(z)$ делится на $(z-z_0)$ без остатка:

$$P_n(z)=(z-z_0)Q_{n-1}(z).$$

Схема Горнера.

Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(z)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$b_{n-1}=a_n,$$

$$b_{n-2}=z_0\cdot b_{n-1}+a_{n-1},$$

$$b_{n-3}=z_0b_{n-2}+a_{n-2},\dots$$

$$b_{k-1}=z_0b_k+a_k,\dots$$

$$\dots b_1=z_0b_2+a_2, b_0=z_0b_1+a_1, P(z_0)=z_0b_0+a_0.$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(z)$ удобно записывать в специальную таблицу, называемую ***схемой Горнера***:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{i+1}	a_i	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
z_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_i	b_{i-1}	$\cdots$	b_1	b_0	$P(z_0)$

Понятно, что если z_0– корень многочлена $P(z)$, то $P(z_0)=0$ и, следовательно,

$P(z)=(z-z_0)\cdot Q(z)$ *(следствие из теоремы Безу).*

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число z_0 корнем многочлена $P(z)$, нужно заполнить схему Горнера. Если $P(z_0)$ окажется равным 0, *то* z_0 – корень. В противном случае – z_0 не корень $P(z)$.

Кратность корня.

Число z_0 называется корнем кратности k многочлена $P(z)$, если

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z), \qquad \text{причём } Q(z_0) \neq 0.$$

Если кратность корня равна единице ($k = 1$), то корень называется простым корнем.

Важное замечание.

Все рациональные корни многочлена (если они есть)

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_n = 1,$$

с целыми коэффициентами являются целыми и являются делителями свободного члена a_0.

(без доказательства)

Пример. Найти целые корни уравнения $z^4 + 3z^3 + z^2 - 3z - 2 = 0$.

Решение. Целые корни ищем среди делителей свободного члена: ± 1, ± 2. Проверяем по схеме Горнера каждое из этих чисел.

	1	3	1	–3	–2	
1	1	4	5	2	0	Корень
1	1	5	10	12		не корень
–1	1	3	2	0		Корень
–1	1	2	0			корень (кратности 2)
–2	1	0				Корень

Данное уравнение имеет 3 корня: 1; –1; –2, причем –1 – корень кратности 2, а корни -1 и 1 – простые корни. Следовательно,

$$z^4 + 3z^3 + z^2 - 3z - 2 = (z-1)(z+1)(z+2)^2.$$

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен, отличный от константы, в комплексной области имеет по крайней мере один комплексный корень.

(Без доказательства)

Если корни$P_n(z)$ многочлена равны:
$z_1, z_2, \dots z_m$, а их кратности, соответственно, $k_1, k_2, \dots k_m$, то данный многочлен можно разложить на множители следующим образом:

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}, \qquad \text{где } k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

Теорема Гаусса: Всякий многочлен *n-степени* имеет в комплексной области ровно *n* корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Комплексные корни многочленов с вещественными (действительными) коэффициентами.

Теорема. Если комплексное число z является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то корнем этого многочлена обязательно будет и число$\bar{z}$, т. е. комплексные корни многочлена с вещественными коэффициентами всегда попарно сопряженные.

Доказательство: Пусть $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ - многочлен с действительными коэффициентами: $a_k \in \mathbb{R}$, и z_0 его корень$\Longrightarrow$ $P_n(z_0) = 0$.Используем операцию комплексного сопряжения и её свойства:

$\overline{P_n(z_0)} = \bar{0} = 0.$

$\overline{P_n(z_0)} = \overline{a_n z_0{}^n + a_{n-1} z_0{}^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = a_n(\overline{z_0})^n + a_{n-1}(\overline{z_0})^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0$.

Таким образом, z_0 также корень данного многочлена.

Что и требовалось доказать.

Отсюда вытекает, что многочлен с вещественными (действительными) коэффициентами всегда имеет чётное число невещественных (комплексных) корней, то есть комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда ходят парами ☺.

Важное следствие

Любой многочлен *нечётной* степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Если комплексное число z является корнем кратности k, то и сопряжённый корень $\bar{z}$ тоже имеет кратность k.

Следствие. Если многочлен $\mathrm{P(z)}$ имеет комплексный корень $\mathrm{z_0 = x_0 + iy_0}$,
то он делится без остатка на квадратный трёхчлен $z^2 + pz + q$,

где $p = 2Rez_0 = 2x_0 \in \mathbb{R}, q = |z_0|^2 = (x_0{}^2 + y_0{}^2) \in \mathbb{R}$.

Доказательство: По условию комплексный корень $z_0 = x_0 + iy_0$ многочлена $P(z)$с действительными коэффициентами ⇒ сопряжённое число

$\overline{z_0} = \overline{x_0 + \imath y_0} = x_0 - iy_0$ так же корень $P(z)$. Значит $P(z)$ делится без остатка на многочлен

$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - z(z_0 + \overline{z_0}) + z_0\overline{z_0} = z^2 - (2Rez_0)z + |z_0|^2$.

Здесь были использованы свойства комплексно сопряжённых чисел:

$$z_0 + \overline{z_0} = x_0 + iy_0 + x_0 - iy_0 = 2x_0 = 2Rez_0 \in \mathbb{R}$$

$$z_0\overline{z_0} = (x_0 + iy_0)(x_0 - iy_0\,) = x_0{}^2 + y_0{}^2 = |z_0|^2 \in \mathbb{R}.$$

Утверждение доказано.

Обозначение: тот факт, что многочлен $P_n(x)$ делится без остатка (нацело) на многочлен $Q_m(z)$ для краткости обозначается значком ⋮.

То есть, если $z_0 = x_0 + iy_0$ – комплексный корень многочлена $P(z)$с действительными коэффициентами ⇒ сопряжённое число $\overline{z_0} = \overline{x_0 + iy_0} = x_0 - iy_0$ так же корень $P(z)$. Значит

$$P(z) \vdots (z - z_0)(z - \overline{z_0}) \Longrightarrow P(z) \vdots (z^2 - (2Rez_0)z + |z_0|^2).$$

Ещё раз обратим внимание, что этот квадратный трёхчлен – многочлен с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом (не имеет действительных корней).

Следствие. Каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен на множители следующим образом:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{s_l},$$

$$\text{где } k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2s_1 + \dots + 2s_l = n.$$

Причём дискриминанты квадратных трёхчленов отрицательные, то есть они не имеют действительных корней и не раскладываются на линейные множители с действительными коэффициентами.

Примеры.

1. $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 2(x - 1)(x + 2)(x - \frac{3}{2})$

2 .$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 4z + 2 = (z + 1)^2(z^2 + 2)$.

Вы обратили внимание, что мы обозначаем переменные многочленов то x, то z ? Традиционно принято применять букву z, при этом считается, что мы рассматриваем многочлен над множеством комплексных чисел: коэффициенты и корни многочлена – комплексные числа.

При разложении многочлена на множители удобно применять формулы сокращённого умножения.

Задача. Разложить многочлен на

1) линейные множители,
2) множители линейные и квадратичные с действительными коэффициентами,

если известен один его комплексный корень.

$$P(z) = z^4 + 3z^3 + 7z^2 - 21z - 26, \qquad z_0 = -2 - 3i.$$

Решение: комплексный корень $z_0 = -2 - 3i \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow Rez_0 = -2, \qquad Imz_0 = -3 \Longrightarrow |z_0|^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 13$$

Тогда данный многочлен $P(z) \vdots (z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2(-2)z + 13 = z^2 + 4z + 13$.

Делим «уголком»:

$$\begin{array}{l|l}
z^4 + 3z^3 + 7z^2 - 21z - 26 & \underline{z^2 + 4z + 13} \\
\underline{z^4 + 4z^3 + 13z^2} & z^2 - z - 2 \\
\qquad -z^3 - 6z^2 - 21z & \\
\qquad \underline{-z^3 - 4z^2 - 13z} & \\
\qquad\qquad -2z^2 - 8z - 26 & \\
\qquad\qquad \underline{-2z^2 - 8z - 26} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Найдём нули полученного частного:

$z^2 - z - 2 \Longrightarrow$ дискриминант $D = 9 > 0 \Longrightarrow$ корни действительные: $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9} = \left[\begin{array}{l}-1\\2\end{array}\right.$.

Разложим на множители соответственно требованиям задачи:

1) линейные множители: $P(z) = (z + 1)(z - 2)\big(z - (-2 - 3i)\big)\big(z - (-2 + 3i)\big)$,
2) линейные и квадратичные с действительными коэффициентами:

$$P(z) = (z + 1)(z - 2)(z^2 + 4z + 13).$$

Теорема о рациональном корне. Если многочлен с целыми коэффициентами

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \;\; a_k \in \mathbb{Z}$$

имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, то числительp является делителем свободного коэффициента a_0, а знаменатель q - делителем старшего коэффициента a_n.

Список литературы

1 семестр

1.Краснов М.Л., Киселёв А.И., и др., Вся высшая математика., т. 1, М: URSS, 2014 г-366 с.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Аналитическая геометрия, М: Физматлит, 2017-224 с.

3. Канатников А.Н. Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2016-392 с. (электронное издание)

4. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Проспект, 2015-320 с.

5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : Учебник для вузов. — СПб.: Лань, 2018. — 448 с