МИРЭА- РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математический анализ

1 семестр

Учебное пособие

Для студентов очной формы обучения
институтов РТС, ИТ, ФТИ

Москва
МИРЭА
2019

Составители: И.М. Аксененкова, О.А. Евсеева, Т.Р. Игонина, Е.Ю. Кузнецова, О.А. Малыгина, Н.С.Чекалкин

Редактор Н.С.Чекалкин

Пособие содержит теоретический материал, практические задания и типовой расчет по математическому анализу (1 семестр) по разделам «Теория пределов», «Непрерывная функция», «Дифференциальное исчисление и его приложения». В пособии приведены типовые варианты контрольных работ и экзаменационных билетов по курсу.

Изложение теоретической части соответствует программе курса математического анализа (1 семестр), который читается преподавателями кафедры высшей математики 2 для студентов очной формы институтов РТС, ИТ, ФТИ.

Рецензенты: Т.Н.Бобылева,
А.В.Татаринцев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1 семестр

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Определение предела последовательности. Подпоследовательность, частичный предел.
2. Критерий Коши. Свойства сходящихся последовательностей. Теорема о пределе промежуточной последовательности.
3. Определение предела функции. Теорема о пределе промежуточной функции. Первый замечательный предел.
4. Бесконечно малые функции. Теорема о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.
5. Теорема о пределе произведения бесконечно малой и ограниченной функций.
6. Второй замечательный предел. Раскрытие неопределенностей $0^0, \infty^0, 1^\infty$.
7. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентность бесконечно малых. Основные эквивалентности.
8. Теорема о разности эквивалентных бесконечно малых. Теорема о замене эквивалентности в пределе отношения.
9. Непрерывность функции в точке. Теорема о непрерывности арифметических действий, о непрерывности сложной функции.

10. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
11. Точки разрыва и их классификация.
12. Производная, ее геометрический и механический смысл.
13. Теорема о связи непрерывности и дифференцируемости.
14. Арифметические действия с производными.
15. Таблица производных.
16. Производные сложной и обратной функций.
17. Дифференциал, его связь с производной, геометрический смысл, инвариантность.
18. Теорема Ролля, ее геометрический смысл.
19. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл. Теорема Коши.
20. Правило Лопиталя.
21. Многочлен Тейлора, формула Тейлора.
22. Остаточный член формулы Тейлора в формах Пеано и Лагранжа.
23. Локальный экстремум функции одного переменного. Необходимое и достаточное условия экстремума.
24. Геометрический смысл второй производной. Точки перегиба.
25. Асимптоты графика функции. Существование наклонной асимптоты.
26. Частные производные функции нескольких переменных. Теорема о равенстве смешанных производных.
27. Дифференцируемостъ функции нескольких переменных. Дифференциал.

28. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума.

Вопросы к экзамену (зачету) могут быть уточнены и дополнены лектором потока.

ВВЕДЕНИЕ

Данный материал излагается студентам на лекциях и практических занятиях. От студента требуется успешное усвоение материала по указанным темам, т. е. необходимо знать определения понятий, формулировки и доказательства основных теорем курса. Студент также должен продемонстрировать умение решать типовые задачи данного курса.

В течение семестра по курсу математического анализа проводятся две контрольные работы и выполняется типовой расчет. Контрольная работа №1 проводится примерно на 6-й неделе обучения, контрольная работа №2 проводится примерно на 11-й неделе, а сдача типового расчета - в конце семестра.

Контрольная работа №1

Тема. „Предел функции. Непрерывность и точки разрыва“.

Цель. Проверить усвоение основных приемов вычисления предела; проверить умения устанавливать непрерывность функции и определять характер точек разрыва.

Содержание. В контрольную работу входят задачи, идентичные задачам 1 – 8 данного пособия.63

Контрольная работа №2

Тема. „Производная. Правило Лопиталя и формула Тейлора“.

Цель. Проверить усвоение основных приемов дифференцирования; проверить умение вычислять предел функции с помощью правила Лопиталя и формулы Тейлора.

Содержание. В контрольную работу №2 входят задачи, идентичные задачам 9 – 18.

Типовой расчет

Тема. „Исследование функции одной переменной и построение графиков. Функции нескольких переменных“.

Цель. Проверить умение исследовать функции, строить графики решать прикладные задачи.

Содержание. В типовой расчет входят задачи 19 – 26.

Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта. Студент объясняет решения задач преподавателю, отвечает на вопросы. Типовой расчет также предъявляется в начале экзамена (зачета).

По итогам обучения проводится экзамен (зачет).

Примерный вариант экзаменационного билета

1. Определение предела функции. Основные теоремы о пределах (арифметические операции).

2. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+16x+9}}{(x+5)^2-x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+x}{3+x}\right)^{x-4}$

3. Вычислить производную:

а)$y=\sqrt{1+tg5x}$ б)$y=\frac{xarcsin2x}{lnx}$

4. Написать уравнение касательной к кривой

$\begin{cases} x = tcost \\ y = tsint \end{cases}$ в точке $t=\frac{\pi}{4}$

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot e^{x-1}\right)}{e^{sin(1-x)}-1}$

6. Провести исследование и построить график функции:

$y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Ч. 1: Учебник для бакалавров / - Люберцы: Юрайт, 2016.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Ч. 2: Учебник для бакалавров / - Люберцы: Юрайт, 2016.

3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальная геометрия.Т.2. - URSS. - 2017.

Практические задания

Задача 1*. С помощью определения предела последовательности показать, что данная последовательность u_n, при $n \to \infty$ имеет своим пределом число А. Найти целое значение N, начиная с которого $|u_n - A| < \varepsilon$.

№	u_n	A	ε	№	u_n	A	ε
1	$\frac{7n-1}{n+1}$	7	10^{-2}	2	$\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$	$\frac{4}{3}$	10^{-2}
3	$\frac{9-n^3}{1+2n^3}$	$-\frac{1}{2}$	10^{-2}	4	$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	0	10^{-3}
5	$1+\frac{(-1)^n}{2n+1}$	1	10^{-2}	6	$\frac{4n-3}{2n+1}$	2	10^{-3}
7	$\frac{1-2n^2}{2+4n^2}$	$-\frac{1}{2}$	10^{-2}	8	$\frac{2n+(-1)^n}{n}$	2	10^{-2}
9	$-\frac{5n}{n+1}$	-5	10^{-2}	10	$\frac{1}{ln(n+1)}$	0	$\frac{1}{3}$

11	$\frac{n+1}{1-2n}$	$-\frac{1}{2}$	10^{-2}	12	$\frac{2n+1}{3n-5}$	$\frac{2}{3}$	10^{-2}
13	$\frac{1-2n^2}{n^2+3}$	-2	10^{-2}	14	$\frac{3n^2}{2-n^2}$	-3	10^{-2}
15	$\frac{n}{3n-1}$	$\frac{1}{3}$	10^{-2}	16	$\frac{2n}{1+n^2}$	0	10^{-1}
17	$\frac{3n^3}{n^3-2}$	3	10^{-2}	18	$\frac{4+2n}{1-3n}$	$-\frac{2}{3}$	10^{-2}
19	$\frac{5n+15}{6+n}$	5	10^{-2}	20	$\frac{3-n^2}{1+2n^2}$	$-\frac{1}{2}$	10^{-2}
21	$\frac{7-n}{n+3}$	-1	10^{-2}	22	$\frac{3n^2+4}{2-n^2}$	-3	10^{-2}
23	$-\frac{5+4n^3}{3+2n^3}$	-2	10^{-2}	24	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	0	10^{-3}
25	$3-\frac{(-1)^n}{n+5}$	3	10^{-2}	26	$\frac{9n+7}{2n-3}$	$\frac{9}{2}$	10^{-2}
27	$\frac{2+n^2}{4+2n^2}$	$\frac{1}{2}$	10^{-2}	28	$\frac{-5n+(-1)^n}{2n+3}$	$-\frac{5}{2}$	10^{-2}
29	$\frac{2}{ln(3n+4)}$	0	$\frac{1}{4}$	30	$\left(-\frac{2}{7}\right)^n$	0	10^{-3}

Задача 2. Вычислить пределы последовательностей.

1	$\frac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$
2	$\frac{(2-n)^2-(1+n)^2}{(3+n)^2-(4-n)^2}$
3	$\frac{3}{n+2}-\frac{5}{2n+1}$

4	$\frac{2n^2+5}{4n+1}-\frac{n^2+4}{2n+3}$
5	$\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{27n^6+1}}$
6	$\frac{10n^3-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$
7	$\frac{\sqrt[3]{n^2}sin(n^2)}{n+1}$
8	$\frac{3ncos(n!)}{\sqrt[3]{n^4+5n-9}}$
9	$\frac{3^n+1000}{3^n+1}$
10	$\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$
11	$\frac{4^n+2\cdot 5^{n+1}}{3^n+3\cdot 5^{n-1}+sinn}$
12	$\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)^{8n}$
13	$\left(\frac{1-n}{3-n}\right)^{2n-1}$
14	$\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n}$
15	$\sqrt{n^2+n}-n$
16	$\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-7n+3}$
17	$\sqrt[3]{(1+n)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}$

18	$\sqrt[3]{n^3-4n^2}-n$
19	$n^{3/2}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-2}\right)$
20	$\dfrac{(n+3)!+4\cdot n!}{(2n+4)\big((n+2)!+7\cdot n!\big)}$
21	$\dfrac{\big((2n+1)!+(2n+2)!\big)(7n+5)}{(2n+3)!}$
22	$\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\cdot(n-1)}$
23	$\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n-n^2+3}$
24	$\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$
25	$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$
26	$\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{125}-\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{5^n}$
27	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[9]{2}\cdot\sqrt[27]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{2}$
28	$\sqrt{n^2-5n+6}-\sqrt{n^2-2n+9}$
29	$\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$
30	$\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$

Задача 3. Используя логическую символику, сформулировать определение указанного предела. Дать геометрическую интерпретацию.

1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	2	$\lim\limits_{x\to-1-0} f(x) = +\infty$
3	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$	4	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
5	$\lim\limits_{x\to0-} f(x) = -3$	6	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
7	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	8	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$
9	$\lim\limits_{x\to-2+0} f(x) = -\infty$	10	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
11	$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$	12	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
13	$\lim\limits_{x\to-3+0} f(x) = -3$	14	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
15	$\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$	16	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
17	$\lim\limits_{x\to0+} f(x) = -\infty$	18	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
19	$\lim\limits_{x\to-4} f(x) = -\infty$	20	$\lim\limits_{x\to0} f(x) = -8$
21	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$	22	$\lim\limits_{x\to-3-0} f(x) = -\infty$
23	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$	24	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
25	$\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 0$	26	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -5$
27	$\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$	28	$\lim\limits_{x\to3+0} f(x) = +\infty$
29	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	30	$\lim\limits_{x\to2-0} f(x) = \infty$

Задача 4. Используя различные приемы преобразования выражений, вычислить пределы.

1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+7)^3(x-2x^2)^2}{(27x^5+4x+1)(2-4x)^2}$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x+1)^3-(3x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5+16x^2}}{\sqrt[4]{16x^2+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
4	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt[6]{x}+\sqrt[5]{35x^{10}+1}}{\left(x+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{x^3-1}}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x-1}{\sqrt[3]{27x^6+1}-1}$
6	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+5x}{\sqrt[3]{x^3+1}+sinx}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+7}+\sqrt[3]{x^2+2x}}{17x+4cos7x}$
8	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5^x+6^x}{5^x-6^x}$
9	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3}$
10	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$
11	$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$
12	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-7x+6}{x^4-1}$
13	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

14	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-2}-\sqrt{8}}{x^2-4}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{3x^2-x^4}$
16	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}$
17	$\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$
18	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$
19	$\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$
20	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x}}{x-\sqrt{2x}}$
21	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$
22	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2x-1}{5x+7}-\frac{1+2x^2}{2+5x^2}\right)$
23	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right)$
24	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2-1}\right)$
25	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$
26	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-\sqrt[3]{4-x^3}\right)$

27	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$
28	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)$
29	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)$
30	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+3}-x\right)$

Задача 5. Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые.

1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2 3x}{1-cosx}$	2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos4x-1}{xarctgx}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+tgx)^{10}-1}{arcsin5x}$	4	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{sin(x-2)}{x^3-8}$
5	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{arctg(x-5)}{arcsin(x^2-25)}$	6	$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)ctg\dfrac{x-2}{5}$
7	$\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tgx$	8	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-cos(x-3)}{(x-3)tg\dfrac{x-3}{2}}$
9	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{cos2x}{4x-\pi}$	10	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{sin3\pi x}{sin8\pi x}$
11	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg5x}{sin3x}$	12	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{sin6\pi x}{sin\pi x}$

13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-sin2x}{x^3}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos5x-cos3x}{arctgx^2}$
15	$\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{1-2cosx}{sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{arcsinx}-1}{3^{arctgx}-1}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{ln(1+3sinx)}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x^2}-e^{x^2}}{ln(1+3arcsin^2x)}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{4x^2}-4^{x^2}}{ln(cosx)}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin(x/(x+1))}{ln(1-2\,x/(3+x^2))}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+arctg^2x}-1}{sin^2 3x}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(5-2x)-ln5}{arcsin3x}$
23	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ln(3-x)-ln2}{sin(x-1)}$	24	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{3-x}-4}{\sqrt[3]{2-x}-1}$
25	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7^{x-1}-7}{5^{3-x}-5}$	26	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{\sqrt{x}-1}$
27	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{sin(1/x)}{tg(\pi/x)}$	28	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+6/x^2}-1}{cos(3/x)-1}$
29	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ln\big(cos(1/x)\big)}{arctg3xtg^2(1/x)}$	30	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(2^{-x}+1)\big(2^{1/x}-1\big)}{(3^{-x}+2)(3^{1/x}-1)}$

Задача 6. Вычислить пределы, используя, где это возможно, второй замечательный предел, предварительно обосновав возможность его применения.

1a	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2}{3x+4}\right)^{x}$
1b	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-2}{3x+4}\right)^{x}$
1c	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{2x+3}\right)^{x}$
2a	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+3}\right)^{3/(x+1)}$
2b	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+3}\right)^{x+1}$
2c	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x^2+3}\right)^{3x/(x+1)}$
3a	$\lim\limits_{x\to0}\left(6-\frac{5}{cos^2x}\right)^{x^2}$
3b	$\lim\limits_{x\to0}\left(6-\frac{5}{cos^2x}\right)^{1/x^2}$
3c	$\lim\limits_{x\to0}\left(6-\frac{11}{2cos^2x}\right)^{1/x^2}$
4a	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-cos2x}{2x^2}\right)^{1/x^2}$
4b	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-cos2x}{x^2}\right)^{1/x^2}$
4c	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-cos2x}{2x^2}\right)^{1/(x^2+1)}$

5a	$\lim\limits_{x\to 0}(1+sinx+x^2)^{1/x^2}$
5b	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x+x^2)^{1/(1+x)}$
5c	$\lim\limits_{x\to 0}(1+cosx+x^2)^{-1/x^2}$
6a	$\lim\limits_{x\to 0}\left(cos\dfrac{\pi x}{3}\right)^{1/(x^2+1)}$
6b	$\lim\limits_{x\to 0}\left(cos\dfrac{\pi x}{3}\right)^{1/x^2}$
6c	$\lim\limits_{x\to 0}\left(sin\dfrac{\pi x}{3}\right)^{2/(x^2+2)}$
7a	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+5x}{3+2x}\right)^{1/sinx}$
7b	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+5x}{3+2x}\right)^{-x^2}$
7c	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+5x^2}{3+2x^2}\right)^{-1/x^2}$
8a	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{1+3^x}\right)^{1/x}$
8b	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{1+3^x}\right)^{(2x+3)/(2x+1)}$
8c	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{1+3^x}\right)^{1/x^2}$

9a	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sin2x}{x}\right)^{-1/x^2}$
9b	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^{-1/x^2}$
9c	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^{(2x+3)/(x+1)}$
10a	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(2-2^{-x^2}\right)^{-x^2}$
10b	$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-2^{-x^2}\right)^{1/x^2}$
10c	$\lim\limits_{x\to 1}\left(2-2^{-x^2}\right)^{1/(x-1)^2}$
11a	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2-cos\frac{1}{x}\right)^{x^2arctgx}$
11b	$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2-cos\frac{1}{x}\right)^{x^2arctgx}$
11c	$\lim\limits_{x\to 0}(2-cosx)^{1/arctg^2x}$
12a	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4-x}{2}\right)^{arctg^2(1/(x-2))}$
12b	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4-x}{2}\right)^{1/arctg(x-2)}$
12c	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{5-x}{2}\right)^{arctg^2(x-2)}$

13a	$\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{-1/\left(\sqrt[3]{x}-2\right)^2}$
13b	$\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{1/\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}$
13c	$\lim\limits_{x\to 8}\left(cos(x-8)\right)^{sin(x-8)/(x-8)}$
14a	$\lim\limits_{x\to 0}\left(tg\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right)^{1/x^2}$
14b	$\lim\limits_{x\to 0}\left(tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{(e^x-1)/x^2}$
14c	$\lim\limits_{x\to 0}(tgx)^{(2x+3)/(-2x+3)}$
15a	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(tg\frac{x}{3}\right)^{1/cos^2x}$
15b	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{1/cosx}$
15c	$\lim\limits_{x\to \pi/2}(tgx)^{\pi/(2x)}$
16a	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+2sinx}{x}\right)^{1/x}$
16b	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2x+sinx}{x}\right)^{-1/x^2}$
16c	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2sinx}{x}\right)^{1/x^2}$

17a	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-arctgx}{2x+arctgx}\right)^{3x}$
17b	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x-arctgx}{2x+arctgx}\right)^{2x+2}$
17c	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2-arctgx}{2+arctgx}\right)^{-3/(x-2)^2}$
18a	$\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2x)^{1/lncos2x}$
18b	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+arctg^2x)^{-ln^2x}$
18c	$\lim\limits_{x\to 0}(1+arctg^2x)^{lncos2x}$
19a	$\lim\limits_{x\to 0}(4-4^x)^{(3x+sinx)/x}$
19b	$\lim\limits_{x\to 0}(2-2^x)^{3x/sin^2x}$
19c	$\lim\limits_{x\to -\infty}(2-2^x)^{(3x^2+sinx)/x}$
20a	$\lim\limits_{x\to\pi}\left(3-3^{sin^2x}\right)^{5/(tg5xsin2x)}$
20b	$\lim\limits_{x\to 0}\left(3-3^{sinx}\right)^{3x^2/tg^2x}$
20c	$\lim\limits_{x\to 1}\left(3-3^{sin^2\pi x}\right)^{-1/(x-1)^2}$

Задача 7. Вычислить пределы, используя второй замечательный предел.

1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{x}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x+1}\right)^{2x}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3+5x}{3+2x}\right)^{1/sinx}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x+x^2)^{1/(2x)}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}(2-cosx)^{1/x^2}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}(1-sin3x)^{1/tg5x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{cos^2x}\right)^{1/x^2}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2x)^{1/lncos2x}$

11	$\lim\limits_{x\to 0}(cos2x)^{1/tg^2 3x}$
12	$\lim\limits_{x\to 2\pi}(cosx)^{1/sin^2 2x}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x}{1+3^x}\right)^{1/sinx}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}(1-xsin3x)^{1/lncosx}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x^2+2}\right)^{1/sin3x}$
16	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^{\sqrt{x^2+3}}$
17	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{1/(\sqrt{x}-1)}$
18	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sin2x}{tg2x}\right)^{1/(1-cosx)}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\left(tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{(e^x-1)/x^2}$
20	$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/(1-cos\pi x)}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}(2-2^x)^{3x/sin^2 x}$

22	$\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-2)}$
23	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{1/cosx}$
24	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{sinx}{sin1}\right)^{1/ln(2-x)}$
25	$\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{(x-1)^2}-1\right)^{\pi^2/lnsin(\pi x/2)}$
26	$\lim\limits_{x\to \pi}\left(2-2^{sin^2x}\right)^{5/(tg5xsin2x)}$
27	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4-x}{2}\right)^{2/arctg(x-2)}$
28	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2-cos\,\frac{1}{x}\right)^{x^2arctgx}$
29	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{ln(3+2x)/ln(3-2x)}$
30	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(2-\frac{x-1}{x}\right)^{sin(\pi/(2x))ln(2-(x-1)/x)}$

Задача 8. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и указать характер точек разрыва.

№	$f(x)$	№	$f(x)$

1	$\frac{\lvert x+3\rvert}{x+3}\cdot x+4$	2	$\frac{x+2}{\lvert x+2\rvert}\cdot x^2$
3	$e^{1/(x+4)}$	4	$\frac{1}{(x+3)(x-5)}$
5	$\frac{3x^2+x-4}{3x^2-x-2}$	6	$\frac{5x^2-x-6}{2x^2-x-3}$
7	$arctg\,\frac{1}{1-x}$	8	$sin\,\frac{\pi}{x}$
9	$xsin\,\frac{\pi}{x}$	10	$\frac{\sqrt{13+x}-4}{x^2-9}$
11	$\frac{sin(1/x)}{x-\pi}$	12	$\frac{sin(1/x)}{\pi x-1}$
13	$1-(x+2)sin\,\frac{1}{x+2}$	14	$(x+2)arctg\,\frac{1}{x}$
15	$\frac{\lvert x+5\rvert}{arctg(x+5)}$	16	$\frac{sin(1/x)}{ln\lvert x\rvert}$
17	$\left(cos^2\frac{1}{x}\right)^{-1}$	18	$\frac{1}{e^{1/x}-1}$
19	$\frac{6-\sqrt{32+x}}{x^2-16}$	20	$tg\,\frac{1}{x}$
21	$\frac{1}{1-3^{x/(1-x)}}$	22	$\frac{x}{sinx}$
23	$\left(cos^2\sqrt{x}\right)^{1/x}$	24	$e^{x^2/(16-x^2)}$
25	$\frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$	26	$\frac{x}{e^{x(x+1)}-1}$
27	$\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x-3}}$	28	$\frac{1}{x}e^{-1/x^2}$

29	$\frac{1}{x}e^{1/x}$	30	$xln^2\lvert x\rvert$

Задача 9. Вычислить производную $y'(x)$.

№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$ln\left(cos\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$	2	$x\cdot sin\left(lnx-\frac{\pi}{4}\right)$
3	$arctg\left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$	4	$\frac{x}{ln^2x}$
5	$ln\big(ln(3-2x^3)\big)$	6	$2^{ctg(1/x)}$
7	$\sqrt{e^{sin^2x}}$	8	$\sqrt{cos^2x-2sin^2x}$
9	$\sqrt{3sin^2x+5cos^2x}$	10	$\frac{cos^3x}{15}\cdot(3cos^2x-5)$
11	$\frac{x^2}{lnx}$	12	$\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$
13	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+lnx)^4}$	14	$\frac{1}{3}\cdot arctg(3tgx)$
15	$e^{tg^2(3x)}$	16	$arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$
17	$arctg(e^x+e^{-x})$	18	$arcsin\sqrt{x-1}$
19	$arctg\sqrt{\frac{x-1}{2}}$	20	$tg^2\sqrt{3x}$
21	$\frac{tg^2x}{2}+ln(cosx)$	22	$ln(sinx)+\frac{ctg^2x}{2}-\frac{ctg^4x}{4}$
23	$\frac{2}{3}\cdot(lnx-5)\sqrt{1+lnx}$	24	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

25	$ln^3\left(2x+\sqrt{3}\right)$	26	$\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$
27	$\dfrac{1+cos2x}{1-cos2x}$	28	$ln(sinx)+\dfrac{1}{2}ctg^2x$
29	$\dfrac{tg^5x}{5}+\dfrac{tg^7x}{7}$	30	$\dfrac{1}{2}\cdot arcsin\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}$

Задача 10. Вычислить производную $y'(x)$.

№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\dfrac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}$	2	$\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3}(x^2-2)$
3	$\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3x^3}(2x^2-1)$	4	$arctg\left(\dfrac{x}{2}+\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+x-1}\right)$
5	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}ln\left(\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right)$	6	$\dfrac{2}{35}(1+x)^{5/2}(5x-2)$
7	$(1+2x^2)^{5/2}\cdot\dfrac{5x^2-1}{70}$	8	$\dfrac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}}$
9	$\ln\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$	10	$\dfrac{2}{15}(3x-4)(2+x)^{3/2}$
11	$\dfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)\right)$	12	$ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$
13	$\dfrac{3x-9}{10}\sqrt[3]{(x+2)^2}$	14	$\dfrac{20x+32}{45}(x-2)\sqrt[4]{x-2}$
15	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}$	16	$\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}(x^2-3)$
17	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}ln\dfrac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+2x}+\sqrt{2-x}}$	18	$\dfrac{1}{3}arctg\left(\dfrac{5tgx+4}{3}\right)$

19	$\frac{1}{2}arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}$	20	$ln\sqrt[3]{\frac{x+2}{cos^2x}}$
21	$ln\sqrt{\frac{1+x}{tgx}}$	22	$arctg^2\frac{1}{\sqrt{2x}}$
23	$ln\sqrt[4]{\frac{1+4x}{sin^3x}}$	24	$arcsin\frac{x-1}{\sqrt{x}}$
25	$ln5(1+3tgx)$	26	$ln\left(\frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}\right)$
27	$\frac{2(10+3x)}{9\sqrt{5+3x}}$	28	$\frac{4}{21}(3e^x-4)(e^x+1)^{3/4}$
29	$2\sqrt{x+1}(ln(x+1)-2)$	30	$\frac{1}{24}ln\frac{x^3}{x^3+8}$

Задача 11. Вычислить логарифмическую производную $y'(x)$.

№	$y(x)$	№	$y(x)$
1	$\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}\sqrt[4]{x^4+1}}$	2	$x^5\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x^2+1)(2x+3)}}$
3	$\frac{(x-1)\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x(2-x)}}$	4	x^{cosx}
5	$(sinx)^{1/x}$	6	x^{tgx}
7	$(tgx)^{cosx}$	8	$(arcsinx)^{x^2}$
9	$(1+x^2)^{x^2}$	10	$(cosx)^x$
11	$(arctgx)^x$	12	$(sin3x)^x$
13	$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$	14	$\frac{(x-2)^3}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$

15	$\sqrt{\dfrac{x\sqrt[3]{x-1}}{x^2-2}}$	16	$(tgx)^{e^x}$
17	$(ln sin 3x)^x$	18	$(1+x^3)^{x^3}$
19	$(cosx)^{sinx}$	20	$x^{\sqrt{x}}$
21	$x^{1/x}$	22	$\sqrt{cosx}\cdot 2^{\sqrt{cosx}}$
23	$(arctgx)^{lnx}$	24	$(sinx)^{lnx}$
25	$(1+x^2)^{arccosx}$	26	$\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x+1}}}$
27	$\dfrac{\sqrt[4]{x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}\sqrt{7x+1}}$	28	$(x^2+1)^{\sqrt{x}}$
29	$\dfrac{x^6(x^2+1)^{10}(x^3+1)}{(2x^2+5)^2}$	30	$\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}\sqrt{x^2+1}$

Задача 12. Вычислить производную $y'(x)$ функции, заданной параметрически.

№	$x(t), y(t)$	№	$x(t), y(t)$
1	$\begin{cases} x = \dfrac{2sint}{1+3cost} \\ y = \dfrac{5cost}{1+3cost} \end{cases}$	2	$\begin{cases} x = ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = e^{-t^2} \\ y = arctg(2t+1) \end{cases}$	4	$\begin{cases} x = 4tg^2\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ y = 2sint + 3cost \end{cases}$

5	$\begin{cases} x = arcsin(t^2 - 1) \\ y = arccos2t \end{cases}$	6	$\begin{cases} x = 5(cost + tsint) \\ y = 5(sint - tcost) \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$	8	$\begin{cases} x = lntg\left(\dfrac{t}{2}\right) + cost \\ y = tsint + cost \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 - lnt^2 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t+1} \\ y = \dfrac{t^2}{t+1} \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t^2+1}{t+2} \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = \dfrac{6t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{6t^2}{1+t^3} \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = e^t \\ y = arcsint \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = 2cos^2t \\ y = 3sin^2t \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = lnt \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$
17	$\begin{cases} x = \dfrac{6t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

19	$\begin{cases} x = arcsint \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 5cos^3t \\ y = 4sin^3t \end{cases}$
21	$\begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = \dfrac{cos^3t}{\sqrt{cos2t}} \\ y = \dfrac{sin^3t}{\sqrt{cos2t}} \end{cases}$
23	$\begin{cases} x = \dfrac{t^3+2}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^3}{t^2+1} \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = t^2e^{-t} \\ y = t^2e^{-2t} \end{cases}$
25	$\begin{cases} x = 2\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \\ y = t+\dfrac{3}{t}+\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = lnt \\ y = sin^2t \end{cases}$
27	$\begin{cases} x = e^tcost \\ y = e^tsint \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$
29	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{t}{t+1} \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = t + lncost \\ y = t - lnsint \end{cases}$

Задача 13. Вычислить производную $y'(x)$ функции, заданной неявно.

№	$F(x, y)$

1	$lnx + e^{-y/x} + 5$
2	$x^{2/3} + y^{2/3} - 10$
3	$y - \sqrt{4x - x^2 + 10y - 4} + 3$
4	$e^x - e^y + x - y - 6$
5	$x - \sqrt[3]{2x^2y^2 + 5x + y - 5} + 9$
6	$\frac{3}{\sqrt{xy}} - \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} - 8$
7	$arctg\frac{y}{x} - ln\sqrt{x^2 + y^2} + 2$
8	$e^x - e^y - xy$
9	$y - \sqrt{2x - x^2 - 5xy - y}$
10	$2cos^2(x + y) + xy - 9$
11	$3arctg\frac{y}{x} - \sqrt{x^2 + y^2} + 5$
12	$ln5y + \frac{x}{y} + 7$
13	$x - arctg(x + y) + 1$
14	$y - \sqrt[3]{\frac{2y - 1}{x}} + 12$

15	$e^x siny - e^{-y} cosx$
16	$x - \sqrt[3]{y^3 + x} - 4$
17	$y^3 - \frac{x - y}{x + y} - 6$
18	$ye^{x-1} - e^y + 9$
19	$y^2 - x - ln\frac{y}{x} - 4$
20	$x + y - 3\sqrt[3]{x - y} + 11$
21	$y - \sqrt[3]{x + 10y - 6 + \frac{4y + 5}{x}}$
22	$x - \sqrt{2y^3 - \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x} - 3}$
23	$x - \sqrt{1 + 2xy + y^2 - 8y^3} + 3$
24	$\frac{x}{y} - \frac{sinx}{siny} + 3$
25	$\sqrt{x + y} - y\sqrt{x - y} - 7$
26	$ln(x + y) - \frac{8}{\sqrt{x + y^2}}$
27	$sin(y - x^2) - ln(y^2 - x)$
28	$e^x + e^y - 2^{xy} - 2$

29	$x^{y^2} + y^2 lnx - 4$
30	$x^2 siny + y^3 cosx - 2x$

Задача 14. Написать уравнения касательной и нормали к кривым в заданных точках.

1	$y = x^4 - 6x^2 + 8x$	$M_1(0; 0)$	$M_2(1; 3)$
2	$y = arcsin(2x - 3)$	$M_1\left(\frac{3}{2}; 0\right)$	$M_2\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$
3	$y = \sqrt[3]{5x - 3}$	$M_1(-1; -2)$	$M_2\left(\frac{3}{5}; 0\right)$
4	$y = \sqrt[3]{x(x-2)^2}$	$M_1(1; 1)$	$M_2(0; 0)$
5	$y = \sqrt[3]{1 - x^2}$	$M_1(3; -2)$	$M_2(1; 0)$
6	$y = \sqrt{x^2 - 2x}$	$M_1(-1; \sqrt{3})$	$M_2(2; 0)$
7	$y = \sqrt{sinx}$	$M_1\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$M_2(\pi; 0)$
8	$y = xe^{1/(x-2)}$	$M_1(3; 3e)$	$M_2(\pi; 0)$
9	$y = xlnx$	$M_1(1; 0)$	$M_2(0 + 0; 0)$
10	$y = x^2 lnx$	$M_1(1; 0)$	$M_2(0 + 0; 0)$
11	$y = x^x$	$M_1(1; 1)$	$M_2(0 + 0; 1)$
12	$y = \frac{sinx}{x}$	$M_1\left(\frac{\pi}{4}; \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)$	$M_2(0 + 0; 1)$

13	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$	$M_1\left(2;\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$	$M_2(4;0)$
14	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$	$M_1\left(5;\frac{9}{4}\right)$	$M_2(4;0)$
15	$3y^2=x(x-3)^2$	$M_1(3;0)$	$M_2(0;0)$
16	$2ylny=x$	$M_1(0;1)$	$M_2\left(-\frac{2}{e};\frac{1}{e}\right)$
17	$x^{2/3}+y^{2/3}=1$	$M_1\left(\frac{1}{8};\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$	$M_2(0;1)$
18	$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$	$M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$	$M_2(\sqrt{2};0)$
19	$\begin{cases}x=2t-t^2\\y=3t-t^3\end{cases}$	$t_1=0$	$t_2=-1$
20	$\begin{cases}x=te^{3t}\\y=te^{-2t}\end{cases}$	$t_1=0$	$t_2=-\frac{1}{3}$
21	$\begin{cases}x=t-sint\\y=1-cost\end{cases}$	$t_1=\frac{\pi}{6}$	$t_2=0$
22	$\begin{cases}x=cos^3t\\y=sin^3t\end{cases}$	$t_1=\frac{\pi}{4}$	$t_2=\frac{\pi}{2}$
23	$\begin{cases}x=\frac{1+t}{t^3}\\y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}\end{cases}$	$t_1=1$	$t_2=-\frac{3}{2}$
24	$\begin{cases}x=ln(1+t^2)\\y=t-arctgt\end{cases}$	$t_1=2$	$t_2=0$
25	$\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2}\\y=arcsint\end{cases}$	$t_1=-1$	$t_2=0$
26	$r=\phi$	$\phi_1=\frac{\pi}{2}$	$\phi_2=0$

27	$r = cos2\phi$	$\phi_1 = \frac{\pi}{4}$	$\phi_2 = 0$
28	$r = \sqrt{cos\phi}$	$\phi_1 = \frac{\pi}{3}$	$\phi_2 = 0$
29	$r = 1 - cos\phi$	$\phi_1 = \frac{\pi}{3}$	$\phi_2 = \pi$
30	$r = 1 + cos\phi$	$\phi_1 = \frac{\pi}{3}$	$\phi_2 = 0$

Задача 15. Указать тип неопределенности. Свести к неопределенности типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Вычислить предел, используя правило Лопиталя.

1	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x}$	2	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ln(x^2+3)}{x^4+x^2+1}$
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(1+3^x)}{ln(1+2^x)}$	4	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{ln(1+3^x)}{ln(1+2^x)}$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x^2+e^x)}{ln(x^4+e^{2x})}$	6	$\lim\limits_{x\to0+} \frac{lnctgx}{lnx}$
7	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(1+x^2)}{ln\left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)}$	8	$\lim\limits_{x\to0+} \frac{lnx}{1+2lnsinx}$
9	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\pi/x}{ctg(\pi x/2)}$	10	$\lim\limits_{x\to\pi} \frac{lncos2x}{sin^2x}$
11	$\lim\limits_{x\to2} \frac{2^x - x^2}{2-x}$	12	$\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$
13	$\lim\limits_{x\to1} \frac{tg\pi x}{4^x - 4}$	14	$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(lnx - \sqrt{x}\right)$

15	$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x^2)$	16	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{lntgx}{\frac{\pi}{4} - x}$
17	$\lim\limits_{x\to1+0} lnx \cdot ln(x-1)$	18	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{ln\left(\sqrt{1+4x} - 2\right)}{x-2}$
19	$\lim\limits_{x\to2-0}(2-x)\cdot lnln(2-x)$	20	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{lntgx}{1-ctgx}$
21	$\lim\limits_{x\to0+} xln^2x$	22	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}$
23	$\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$	24	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x2^x}{3^x}$
25	$\lim\limits_{x\to\pi-0} cos\dfrac{x}{2}\cdot ln(\pi - x)$	26	$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{sinx} - \dfrac{1}{x}\right)$
27	$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{lnx}\right)$	28	$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{tgx} - \dfrac{1}{sinx}\right)$
29	$\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{ctgx} - \dfrac{\pi}{2cosx}\right)$	30	$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$

Задача 16. Вычислить предел, используя правило Лопиталя.

1	$\lim\limits_{x\to1-0}(1-x)^{cos(\pi x/2)}$	2	$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{tg(\pi x/2)}$
3	$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\pi}arccosx\right)^{1/x}$	4	$\lim\limits_{x\to0+} x^{sinx}$
5	$\lim\limits_{x\to\pi/2}(tgx)^{2x-\pi}$	6	$\lim\limits_{x\to+\infty}(lnx)^{1/ln2x}$

7	$\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\,\frac{\pi x}{4}\right)^{tg(\pi x/2)}$	8	$\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{1/x}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}arccos3x\right)^{1/x}$	10	$\lim\limits_{x\to +\infty}(lnx)^{1/x}$
11	$\lim\limits_{x\to \pi-0}(\pi-x)^{cos(x/2)}$	12	$\lim\limits_{x\to 0+}(ctgx)^{1/lnx}$
13	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0+}(tgx)^{sinx}$
15	$\lim\limits_{x\to 0+}x^{1/ln(e^x-1)}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}arccosx\right)^{1/arcsinx}$
17	$\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{arcsinx}$	18	$\lim\limits_{x\to 1}\left(ctg\,\frac{\pi x}{4}\right)^{tg(\pi x/2)}$
19	$\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2arctgx)^{1/x}$	20	$\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{tg(\pi x/6)}$
21	$\lim\limits_{x\to 0+}(ctgx)^{sinx}$	22	$\lim\limits_{x\to 0+}\left(ln\frac{1}{x}\right)^{x}$
23	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}arccosx\right)^{1/sin2x}$	24	$\lim\limits_{x\to \pi/4}(tgx)^{tg2x}$
25	$\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$
27	$\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{2}{\pi}arctg\,\frac{1}{x}\right)^{1/sinx}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}(xctgx)^{-1/x^2}$
29	$\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\frac{x}{2}\right)^{tg(\pi x/4)}$	30	$\lim\limits_{x\to +\infty}(ln2x)^{1/lnx}$

Задача 17.

1. Периметр треугольника равен 20, а длина одной из сторон равна 5. Найти длины других сторон треугольника, при

которых его площадь будет наибольшей. Найти эту наибольшую площадь.

2. В равнобедренный треугольник с длинами сторон 15, 15 и 18 вписан параллелограмм так, что угол при основании у них общий. Каковы должны быть стороны параллелограмма, чтобы его площадь была наибольшей? Найти эту наибольшую площадь.

3. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 и углом 60° вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Найти большую из сторон прямоугольника.

4. В равнобочной трапеции меньшее основание и боковая сторона равны 4. При какой длине большего основания площадь трапеции будет наибольшей?

5. Площадь сферы равна 27π.Найти высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в эту сферу.

6. Найти, какую максимальную длину может иметь высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, если длина медианы, проведенной к одному из катетов, равна 12.

7. В конус вписан цилиндр наибольшего объема так, что одно из оснований цилиндра лежит на основании конуса, а окружность другого основания лежит на боковой поверхности конуса. Найти отношение объема конуса к объему цилиндра.

8. Основанием четырехугольной пирамиды служит квадрат. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания. Какую длину должна иметь высота пирамиды, чтобы радиус шара, описанного около пирамиды, был наименьшим, если объем пирамиды равен 72?

9. Среди всех правильных треугольных пирамид, описанных около шара радиуса 2.5, найти ту, которая имеет наименьший объем. В ответе записать длину высоты этой пирамиды.

10. Среди всех правильных четырехугольных пирамид, описанных около шара радиуса 6, найти ту, которая имеет наименьший объем. В ответе записать длину высоты пирамиды.

11. Найти высоту цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, вписанного в шар, площадь поверхности которого равна 2π.

12. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды имеет постоянную заданную площадь и наклонена к плоскости основания под углом α. При каком значенииαобъем пирамиды является наибольшим?

13. Найти высоту прямого конуса с наименьшим объемом, описанного около шара данного радиуса.

14. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением имеет наибольшую вместимость? Полная поверхность ванны дана.

15. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$.Какой длины должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращение этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

16. Найти наибольший объем конуса с длиной образующей l.

17. Правильная четырехугольная призма и правильная четырехугольная пирамида расположены так, что одно из оснований призмы лежит в основании пирамиды, а вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды. Какой наименьший объем может иметь пирамида, если сторона основания призмы равна a,а боковое ребро равно $2a$?

18. Найти длины сторон прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R так, что одна из его сторон лежит на диаметре окружности.

19. При каком соотношении радиуса основания и высоты объем цилиндра будет наибольшим, если дана его полная поверхность?

20. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном, объем которого равен V,такого, чтобы на облицовку стен и дна пошло наименьшее количество материала. В ответе записать отношение стороны квадрата (дна бассейна) к глубине бассейна.

21. Сумма двух сторон треугольника равна 2, а угол между ними равен 30°. Какую наибольшую площадь может иметь такой треугольник?

22. В шар радиуса Rвписан цилиндр наибольшего объема. Найти его радиус.

23. Среди всех конусов, периметр осевого сечения которых равен 8, найти конус с наибольшим объемом и вычислить этот объем.

24. Определить высоту конуса, вписанного в шар радиуса R,и имеющего наибольшую площадь поверхности.

25. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. Какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь это тело, если его объем равен V?

26. Среди всех правильных треугольных пирамид, вписанных в шар радиуса 3, найти ту, которая имеет наибольший объем. В ответе записать длину высоты этой пирамиды.

27. Среди всех правильных четырехугольных пирамид, вписанных в шар радиуса 3, найти ту, которая имеет наибольший объем. В ответе записать длину высоты этой пирамиды.

28. Среди всех правильных шестиугольных пирамид, вписанных в шар радиуса 3, найти ту, которая имеет наибольший объем. В ответе записать длину высоты этой пирамиды.

29. Среди всех правильных шестиугольных пирамид, описанных около шара радиуса 5, найти ту, которая имеет наименьший объем. В ответе записать длину высоты пирамиды.

30. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 (куб.ед.), причем стороны основания относились бы как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

Задача 18. Функцию $y = f(x)$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x - x_0)^n)$.

№	$f(x)$	x_0	n	№	$f(x)$	x_0	n
1	$\dfrac{2x+3}{4x-5}$	2	4	2	$(x+2)ln(3x-7)$	3	4
3	$sin^2(2x+1)$	-1	5	4	$(x-2)cos(x-3)$	2	5
5	$\sqrt[3]{3x+5}$	1	4	6	$(2x+5)e^{2x+3}$	-2	4
7	$\dfrac{3x-4}{x-5}$	2	4	8	$(x^2+x)ln(2x+1)$	0	5
9	$sin(4x-3)$	1	5	10	$cos^2(x+2)$	-1	5
11	$\sqrt[4]{4x+12}$	1	4	12	$(x+2)e^{x^2+x}$	-1	4
13	$\dfrac{x^2-4}{2x+1}$	2	4	14	$xln\sqrt[3]{5-2x}$	2	4

15	$(2x-3)sin(x+3)$	-2	5	16	$cos^2(2x+6)$	-4	5
17	$(x+2)\sqrt{3x+4}$	4	4	18	$(x-7)e^{4x-2}$	1	5
19	$\frac{3x+2}{x-6}$	5	4	20	$(2x-9)ln(4x+1)$	1	4
21	$sin^2(3x-2)$	2	5	22	$(3x+4)cos(2x-1)$	3	5
23	$\sqrt[3]{2x-5}$	16	4	24	$(2x^2+5)e^{3x-2}$	1	5
25	$\frac{x^2-4}{2x+1}$	-1	4	26	$(x^2+7x)ln(4x+3)$	1	4
27	$(x+2)sin(x+2)$	2	5	28	$(2x+1)cos(3x-5)$	2	5
29	$\sqrt[4]{x+12}$	4	4	30	$(-x+4)e^{x+3}$	-2	5

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Задача 19. Вычислить предел, используя формулу Тейлора.

1а	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+tg5x-cosx}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt[5]{1+x}}$
1б	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{x^2}-sinx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}-ln(2+x)+ln2}$
2а	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1-2x)+sin3x}{2-e^{4x}-\sqrt[3]{1+x}}$

2б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-cosx+\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1+2x}}{ln(2+x)-ln(2+x^2)-\frac{1}{2}sinx}$
3а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-ln(1-x)}{cos2x-\sqrt{1-x^2}}$
3б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+2x}+ln(3+2x)-ln3}{cos2x-cos3x}$
4а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-sinx^2-cos3x}{x\left(\sqrt[4]{1+x}-e^{2x}\right)}$
4б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx+sinx^2+ln(1-x)}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4+x^2}-ln(4+x)+ln4}$
5а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x)-x\sqrt{1-x}+\frac{5}{8}x^2}{tgx-x-\frac{x^2}{3}}$
5б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cosx-e^x+ln(1+x)}{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8+x^2}+ln12}$
6а	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right)$
6б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos2x-\sqrt{1+2x}+sinx}{e^{2x}-\sqrt[3]{1+3x}-sinx}$
7а	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2cos\dfrac{1}{x}-\sqrt[4]{x^2+1}\right)$

7б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{200}-(1+x)^{100}-ln(1+100x)}{\sqrt{1+200x}-\sqrt{1+100x}-ln(1+50x)}$
8а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin4x^2-ln(1-3x^2)}{1-cos(x/2)}$
8б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{100}-\sqrt{1+200x}}{ln(1+10x)-sin10x}$
9а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xtg3x-sin^2x}{x^2e^{x/4}+cos5x-1}$
9б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+9x}-cosx-ln(1+3x)}{\sqrt[4]{1+16x}-cos2x-ln(1+4x)}$
10а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+sin2x}{ln(1-3x)+xe^x}$
10б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+\sqrt{1+x^2}}{x+cos3x-cos2x-cosx+\sqrt{1-2x}}$
11а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-sin3x}{e^x-\sqrt{1-x}}$
11б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cosx-e^{3x}+arctg3x}{xsinx+ln(1-2x)+arctg2x}$
12а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-cos2x}{sinx-ln(1+x)}$

12б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[100]{1+100x}+sinx-arctg2x-cosx}{\left(1+\frac{x}{100}\right)^{100}+arctgx-sin2x-cos\frac{x}{10}}$
13а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-cosx}{ln(1-x)-ln(1+x)}$
13б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt[5]{1+20x}+sin3x}{e^{3x}-\sqrt[4]{1+12x}+ln(1-5x^2)}$
14а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{sin3x+ln(1-x)}$
14б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx+arcsinx+\sqrt[3]{1-6x}-cos3x}{sinx-arcsinx-\sqrt[3]{1-6x}+e^{-2x}}$
15а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xcosx-sin2x}{1-\sqrt[4]{1+2x}}$
15б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin2x+cos3x-arcsinx-\sqrt[17]{1+17x}}{sin2x-cos3x-arcsinx+\sqrt[15]{1-15x}}$
16а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-cosx-e^{x^2}}{x-ln(1+x)}$
16б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{2x}-2cosx-3sinx}{\sqrt{1+2x}+\sqrt[3]{1-3x}-2cosx}$
17а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-\sqrt{1+2x}}{e^x-\sqrt{1-2x}}$

17б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin2x+\sqrt[4]{1-8x}-cos3x}{arctg2x+\sqrt[5]{1-10x}-cos5x}$
18а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\sqrt{1+2x}}{e^{-x}-\sqrt{1-2x}}$
18б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(2+x)-ln2-\sqrt{1+x}+cos2x}{ln(3+x)-ln3-\sqrt[3]{1+x}+cos3x}$
19а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{5}-\sqrt{1+10x}}{ln(1+7x)-sin7x}$
19б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+2x)-sinx-e^{x}+cos3x}{ln(1+5x)-sin2x-e^{3x}+cos6x}$
20а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-cosx-ln(1+x)}{e^{2x}-(1+x)^{2}}$
20б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+3x)-arctgx-e^{2x}+cos2x}{ln(1+5x)-arcsin2x-e^{3x}+cos6x}$
21а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+8x)-sinx}{cosx+x-1}$
21б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+cos2x+sin2x-cos5x-sin5x}{e^{2x}-e^{5x}-ln(1+2x)-ln(1+5x)}$
22а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{10}-(1+x)^{9}}{1+sin2x-e^{x}}$

22б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{10}-\sqrt[10]{1+10x}-ln(1+9x)}{cos2x-sin10x-e^{-10x}}$
23а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-cosx-sinx}{x-ln(1+x)}$
23б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x-\sqrt{1+6x}+ln(1+x)+cos2x}{arcsin3x-\sqrt[3]{1+6x}+ln(1-x)+cosx}$
24а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1-x)+ln(1+x)}{e^{x}-\sqrt{1+2x}}$
24б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-\sqrt[3]{1+9x}+ln(1-2x^{2})}{e^{4x}-\sqrt[4]{1+16x}+ln(1-9x^{2})}$
25а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{2}-\sqrt{1+4x}}{cosx-e^{x^{2}}}$
25б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin2x+cos3x-e^{4x}-ln(1-2x)}{arctg4x+\sqrt{1+4x}-e^{6x}}$
26а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+25x-(1+x)^{24}}{ln(1-x)+sin2x}$
26б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsinx+sin2x+ln(1-3x)}{arctgx+cos2x-e^{x}}$
27а	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-sinx-1}{ln(1+x)+ln(1-x)}$

27б	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}+ln(1-x^2)}{cos2x-cos3x+e^{2x^2}-e^{3x^2}}$
28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-cosx+ln(1-2x)}{\sqrt{4+x}-2cosx-sin\frac{x}{4}}$
29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+9x}-e^x-ln(1+2x)}{cos2x+sin3x-e^{3x}}$
30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsinx+\sqrt[4]{1+16x}-e^{5x}}{arctgx+\sqrt[3]{1+9x}-e^{4x}}$

Задача 20. Построить график функции

$$y=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+px+q}.$$

№	a	b	c	d	p	q
1	1	1	0	−1	0	−1
2	1	2	0	−2	0	−1
3	1	1	0	−4	0	−4
4	1	1	−3	2	−3	2
5	1	1	−1	−2	−1	−2
6	−1	0	0	0	2	1
7	1	−2	0	0	−2	1
8	−1	0	0	0	2	1
9	1	−1	0	0	2	1

10	1	3	3	1	−2	1
11	−1	2	0	−6	0	−3
12	−2	2	0	−6	0	−3
13	2	−1	0	2	0	−2
14	−3	2	0	−6	0	−3
15	3	−2	0	2	0	−1
16	2	−1	−1	6	1	−6
17	−2	1	−1	−2	−1	−1
18	3	3	−3	−6	−1	−2
19	−3	−4	−4	24	1	−6
20	1	1	1	−2	1	−2
21	−1	2	2	−4	1	−2
22	−1	−1	−3	−2	3	2
23	2	−1	3	−2	−3	2
24	2	1	−4	3	−4	3
25	−2	−1	2	3	−2	−3
26	−2	−4	−8	12	2	−3
27	−2	−3	−12	−9	4	3
28	−2	−2	10	−12	−5	6
29	3	4	−4	−24	−1	−6
30	1	3	15	18	5	6

Задача 21. Построить график функции:

для вариантов 1-10: $y = C\sqrt[\alpha]{(x^2 - a)^\beta} + b$;

для вариантов 11-20: $y = C\sqrt[\alpha]{|x^2 - a|^\beta} + b$;

для вариантов 21-30: $y = Cx^\beta \sqrt[\alpha]{(x - a)^2} + b$.

№	α	β	a	b	c	№	α	β	a	b	c
1	3	2	1	0	1	2	3	2	9	1	-1
3	3	2	1	1	-3	4	5	4	4	-2	1
5	5	4	3	0	-2	6	4	3	1	2	-1
7	4	3	4	0	2	8	3	4	2	0	-1
9	3	2	4	-2	2	10	3	2	9	-1	-2
11	4	3	4	1	2	12	4	3	1	0	-1
13	6	5	4	0	1	14	2	1	9	-2	-1
15	2	1	4	1	3	16	4	3	1	0	1
17	4	3	9	0	-1	18	2	1	1	0	2
19	6	5	1	-1	-2	20	6	5	9	0	-1
21	3	1	-2	1	-1	22	3	-1	-4	1	1
23	3	2	-1	1	-2	24	3	-2	5	-1	2
25	5	1	-1	2	-1	26	5	-1	2	-3	2
27	5	2	-1	-1	3	28	5	-2	-3	0	1
29	3	-3	4	0	-2	30	5	3	-2	0	1

Задача 22. Построить график функции.

1	$y = (2x + 3)e^{-2x-2}$	2	$y = \sqrt[3]{x^2}e^{-x}$

3	$y = xe^{-x^2}$	4	$y = \sqrt{x^3}lnx$
5	$y = \dfrac{x}{lnx}$	6	$y = xe^{-x}$
7	$y = e^{1/x} - x$	8	$y = x^2 - ln\|x\|$
9	$y = e^{1/(x^2-4x+4)}$	10	$y = (1+x)e^{1/x}$
11	$y = e^{-x}sinx$	12	$y = 3ln\dfrac{x}{x-3} - 1$
13	$y = \dfrac{e^{2-x}}{2-x}$	14	$y = 3 - 3ln\dfrac{x}{x+4}$
15	$y = xe^{1/(x-1)}$	16	$y = e^{x}cosx$
17	$y = \dfrac{e^{2x+2}}{2x+2}$	18	$y = \dfrac{lnx}{\sqrt{x}}$
19	$y = (3-x)e^{x-2}$	20	$y = ln\dfrac{1+x}{1-x}$
21	$y = e^{1/x^2}$	22	$y = xe^{1/(2-x)}$
23	$y = (2x+5)e^{-2x-4}$	24	$y = 2ln\left(1 - \dfrac{4}{x}\right) - 3$
25	$y = 4ln\dfrac{x}{x+2} + 1$	26	$y = x(2 - lnx)^2$
27	$y = x^3e^{-x}$	28	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{lnx}$

29	$y = 2ln\dfrac{x+3}{x} - 3$	30	$y = \dfrac{e^{x-3}}{2x+7}$

Задача 23. Построить линию, заданную уравнением $\rho = f(\phi)$в полярных координатах ($\rho \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi$).

№	$f(\phi)$	№	$f(\phi)$	№	$f(\phi)$
1	$cos(3\phi + \pi/4)$	2	$1 + cos\phi$	3	$2 + sin\phi$
4	$4tg(\phi/2)$	5	$2cos3\phi$	6	$3\sqrt{cos2\phi}$
7	$1 + cos^2 2\phi$	8	$5(1 - cos2\phi)$	9	$2(1 + sin3\phi)$
10	$sin^2 2\phi$	11	$\sqrt{cos(\pi + \phi)}$	12	$7(1 + sin\phi)$
13	$4cos2\phi$	14	$sin(\phi/2)$	15	$2sin3\phi$
16	$3(2 - sin\phi)$	17	$2 + sin^2 2\phi$	18	$1 - sin2\phi$
19	$\sqrt{4cos\phi}$	20	$5(1 + cos3\phi)$	21	$4(1 - cos4\phi)$
22	$2 + cos\phi$	23	$2sin\phi$	24	$cos(\phi/2)$
25	$5(2 - cos\phi)$	26	$\sqrt{sin(-2\phi)}$	27	$2tg\phi$
28	$3cos^2 2\phi$	29	$3 + 2cos\phi$	30	$4sin^2 3\phi$

Задача 24. Вычислить частные производные первого порядка.

№	$z = f(x, y)$	№	$z = f(x, y)$
1	$z = x^3 + y^3 + 3\,x/y$	2	$z = \sqrt{x^2 - y^2}$
3	$z = arctg\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$	4	$z = sin(x + cosy)$
5	$z = x^2 ln(x + y)$	6	$z = e^{x/y}$

7	$z = lncos(y/x)$	8	$z = lntg(x-y)$
9	$z = e^{(x^3+y^2)^2}$	10	$z = x^3 + 4x^2y^2 - y^4$
11	$z = xsin(2x+3y)$	12	$z = cos\,(x^2)/y$
13	$z = ln(x^2+y)$	14	$z = xy + y/x$
15	$z = x^2sin^4y$	16	$z = ln(1 + x/y)$
17	$z = cos(y + sinx)$	18	$z = lntg(y/x)$
19	$z = xysin(xy)$	20	$z = x^4cos^2y$
21	$z = e^{sin(y/x)}$	22	$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
23	$z = xcos(x+y)$	24	$z = e^xcosy$
25	$z = x^3 + 2y^2 - 2y^3x^2$	26	$z = y^x$
27	$z = lntg(x/y)$	28	$z = x^3siny + y^3cosx$
29	$z = tg(y^2/x)$	30	$z = yln(x^2 - y^2)$

Задача 25. Вычислить смешанные производные второго порядка и проверить, что они равны.

№	$z = f(x,y)$	№	$z = f(x,y)$

1	$z = e^{xy(x^2+y^2)}$	2	$z = arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
3	$z = (x^2+y^2)\cdot e^{x+y}$	4	$z = xln(x^3y^2)$
5	$z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$	6	$z = arctg\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)$
7	$z = \dfrac{xy}{x+y}$	8	$z = e^x(xsiny+y^2)$
9	$z = \dfrac{x+y}{x-y}$	10	$z = arctg(x/y^2)$
11	$z = sin\,(x^2)/y$	12	$z = xarctg\left(\dfrac{y}{y-x}\right)$
13	$z = tg(x^2/y)$	14	$z = arctg\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$
15	$z = ln\sqrt{x^2+y^2}$	16	$z = 2x^2y+3xy^2+x^3$
17	$z = x^2/y^2-y/x$	18	$z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
19	$z = \sqrt{2xy+y^2}$	20	$z = yln(x^2-y^2)$
21	$z = arctg(y/x)+arcctg(x/y)$	22	$z = e^x(cosy+xsiny)$
23	$z = x^y$	24	$z = xln(y/x)$
25	$z = e^{x+y}(xcosy+ysinx)$	26	$z = ln(x^2+xy+y^2)$
27	$z = sin(x^2-y^3)$	28	$z = e^{3x^2+2y^2-xy}$

29	$z = xy + x/y$	30	$z = xysin(x - y^2)$

Задача 26. Найти и исследовать точки экстремума.

1	$u = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3x + 4y + 2z$
2	$u = x^2 + 3y^2 + z^2 - xz - 2x + 3y$
3	$u = -9x^2 - 6y^2 - 11z^2 + 3xy + 5xz - 8yz$
4	$u = -4x^2 - 3y^2 - z^2 - 2xy + yz$
5	$u = x^2 + y^2 + 2z^2 + yz + 2z - 3y$
6	$u = 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 + z^2 - xy + 2xz + yz - y + 2z$
7	$u = -5x^2 - y^2 - 3z^2 + xz + yz - 2xy + 6z$
8	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + xy + xz - 4x - 2y + z$
9	$u = x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 2z^2 + xy + xz - 4x - 2y + z$
10	$u = -x^2 - y^2 - 5z^2 + \frac{1}{2}xy + xz - 2x + 4y$
11	$u = 2x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 - xz + 2xy + yz - 3y$
12	$u = 5x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - xz - \frac{1}{2}yz - 10x$
13	$u = 5x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - xz - yz - 4x + 2y$

14	$u = -4x^2 - y^2 - 5z^2 + xy + xz - 2yz - 2y$
15	$u = -2x^2 - y^2 - z^2 + xy - 2z + x - 4y$
16	$u = -x^2 - 3y^2 - z^2 + xz + x - 6y + z$
17	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2x - 4y$
18	$u = -3x^2 - 4y^2 - 5z^2 + 2yz - 2xy + 6x$
19	$u = x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy - xz - yz - 10y$
20	$u = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + xy + 4yz - 4z$
21	$u = -2x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 2xz + 4yz - 2xy - 4x$
22	$u = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz - 8z$
23	$u = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2yz - 8y$
24	$u = 4x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 2xz - 2yz + 10z$
25	$u = 9x^2 + 6y^2 + 11z^2 - 3xy - 5xz + 8yz$
26	$u = x^2 + 17y^2 + 3z^2 + 2xy - xz - 7yz$
27	$u = -x^2 - 17y^2 - 3z^2 + xz + 7yz - 2xy$
28	$u = -9x^2 - 6y^2 - 11z^2 + 3xy + 5xz - 8yz$

29	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + xy + xz - 4x - 2y + z$
30	$u = 5x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz - \frac{1}{2}yz - 10x$

ПРИЛОЖЕНИЕ

В данном приложении излагается теория и методика решения типовых задач по следующим темам, указанным ниже. Изучение материала этого Приложения необходимо для успешного выполнения контрольных работ и типового расчета, для подготовки к экзамену (зачету).

Тема №1. Теория пределов.

1.1. Определение предела функции.

1.2. Основные теоремы о пределах.

1.3. Элементарные методы вычисления предела.

1.4. Первый и второй замечательные пределы.

1.5. Бесконечно малые функции.

1.6. Эквивалентные бесконечно малые функции.

1.7. Применение эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов.

Тема №2. Непрерывность функции.

2.1. Непрерывность функции.

2.2. Односторонние пределы.

2.3. Точки разрыва.

Тема №3. Дифференцирование функции одной переменной.

3.1. Производная функции.

3.2. Таблица производных.

3.3. Дифференцирование сложной функции.

3.4. Вычисление логарифмической производной.

3.5. Вычисление производной функции, заданной параметрически.

3.6. Вычисление производной функции, заданной неявно.

3.7. Производные высших порядков.

3.8. Дифференциал функции.

Тема №4. Приложения производной.

4.1. Уравнение касательной и нормали к кривой.

4.2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

4.3. Прикладные задачи на использование производной.

4.4. Правило Лопиталя.

Тема №5. Исследование функции: возрастание, убывание, экстремумы.

5.1. Признаки возрастания и убывания функции на интервале.

5.2. Экстремумы функции.

Тема №6. Исследование функции: выпуклость и вогнутость, асимптоты.

6.1. Выпуклость и вогнутость графика функции.

6.2. Точки перегиба.

6.3. Асимптоты графика функции.

Тема №7. Общая схема исследования функции и построение графика.

Тема №8. Формула Тейлора.

8.1. Многочлен Тейлора.

8.2. Остаточный член в формуле Тейлора.

8.3. Формула Тейлора для некоторых элементарных функций.

8.4. Применение формулы Тейлора.

Изучение тем 1,2 помогает при подготовке к контрольной работе №1. Содержание тем 3,4 и 8 можно рассматривать в качестве основы при подготовке к контрольной работе №2. Теоретический материал тем 5-7 полезен при выполнении типового расчета.

1. Теория пределов

1.1. Определение предела функции

Обозначения, используемые в приложении:

$\forall$ – «для любого», «для каждого»;

$\exists$ – «существует», «найдется»;

$\overline{\exists}$ – «не существует»;

$x \in A$ – xпринадлежит A;

$x \notin A$ – xне принадлежит A;

$B \subset A$ – B является подмножеством A;

$\Rightarrow$ – «следовательно»;

$\Leftrightarrow$ – «тогда и только тогда»;

: – «такой, что»;

$x \to a$ – x стремится к a.

Определение 1.1 *Число* b *называется пределом функции* $y = f(x)$ *при* x *стремящемся к* a, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta = \delta(\varepsilon > 0)$, *что при* $0 < |x - a| < \delta$ *выполняется неравенство* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Для обозначения предела функции используют следующую символику

$$\lim_{x \to a} f\,(x) = b$$

Используя введенные выше обозначения, определение 1.1 можно переписать в виде:

$$b = \lim_{x \to a} f\,(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

<u>*Замечание*</u>. При определении предела не существенно, как ведет себя функция в самой точке a. В частности, значение $f(a)$ может быть не определено.

Определение 1.2

$$\lim_{x \to a} f\,(x) = \infty \Leftrightarrow \forall k > 0 \exists \delta = \delta(k) > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > k$$

Определение 1.3

$$\lim_{x \to +\infty} f\,(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon) > 0 : \forall x > k(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Задача. Сформулировать следующие определения

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, **3.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$,

4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, **5.** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

1.2. Основные теоремы о пределах

Приводимые ниже теоремы справедливы для случаев, когда a – число и когда $a = \pm\infty$.

Теорема 1.1 $\lim\limits_{x\to a} C = C$, *где C – постоянная (C – const)*

Теорема 1.2 $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 1.3 $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 1.4 $\lim\limits_{x\to a}[C \cdot f(x)] = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$, *где C – постоянная*

Теорема 1.5 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, *если* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 1.6 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

Теорема 1.7 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$,*если* $|f(x)| < C, \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

Теорема 1.8 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Теорема 1.9 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)$, *если* $f(x)$ *– элементарная функция и* a *принадлежит области определения функции f*

Теорема 1.10 Пусть $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b, \lim\limits_{y\to b} f(x) = f(b)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(b)$

1.3. Элементарные методы вычисления предела

Пример 1.1. Вычисление предела функции подстановкой (если соответствующая подстановка не приводит к неопределенности):

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x+1}{3x+2}=\frac{5\cdot 2+1}{3\cdot 2+2}=\frac{11}{8}.$$

Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Пример 1.2. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

Решение: Непосредственная подстановка в числитель и знаменатель предельного значения аргумента $x=2$ обращает их в 0 и приводит к неопределенному выражению вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Разложим числитель и знаменатель на множители (при этом выделяется множитель $(x-2)$):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)x}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}$$

В результате непосредственной подстановки в полученное выражение предельного значения аргумента получаем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=-\frac{1}{2}$$

Пример 1.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4}$.

Решение: Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x^2+9}-5\right)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5}=\frac{4+4}{5+5}=\frac{4}{5}$$

Пример 1.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2}$.

Решение: В данном примере имеем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Умножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы, то есть на $\left(\sqrt[3]{1+3x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+3x^2}+1$. В результате получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x^2-1}{\left[\left(\sqrt[3]{1+3x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+3x^2}+1\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\left(\sqrt[3]{1+3x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+3x^2}+1}=1$$

Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Пример 1.5. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x^2+7}$.

Решение: Делим числитель и знаменатель на наибольшую степень x

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}}=\frac{1-0+0}{3+0}=\frac{1}{3}$$

Здесь используются теоремы об арифметических свойствах предела и теорема 7, из которой следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}=0.$$

Раскрытие неопределенностей вида $(\infty - \infty)$

Пример 1.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)$.

Решение: Имеем неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Умножим и поделим на сопряженное выражение

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x+1}+x\right)}=$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$ =[делим числитель и знаменатель на старшую степень знаменателя]=

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}$$

1.4. Первый и второй замечательные пределы

Первый замечательный предел.

$$\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}=1$$

Пример 1.7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin5x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{sin5x}{5x}\cdot\frac{5x}{3x}=1\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$

Пример 1.8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin\alpha x}{tg\beta x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{sin\alpha x}{sin\beta x}\cdot cos\beta x=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{sin\beta x}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}\cdot cos\beta x=\frac{1}{1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot1=\frac{\alpha}{\beta}$$

Второй замечательный предел (неопределенность вида 1^{∞}).

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e,\ \text{где } e\approx2.718,$$

или, эквивалентно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

При раскрытии неопределенностей вида 1^{∞} (т. е. если предел основания равен 1, а показатель стремится к бесконечности) нужно записать основание в виде $1+\alpha(x)$, а в показателе выделить множитель $\frac{1}{\alpha(x)}$.

Пример 1.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^{5}=e^{5}$

Пример 1.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^{x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=e^{2}.$$

Замечание. Здесь используется теорема 8:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

Пример 1.11. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1-2x)^{-1/(2x)}\right)^{-2}=e^{-2}$

1.5. Бесконечно малые функции

Определение 1.4 *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.*

Пример 1.12. $\alpha(x)=sinx$ – бесконечно малая при $x\to 0$.

Пример 1.13.$\alpha(x) = (x-5)^2$ – бесконечно малая при $x \to 5$.

Пример 1.14. $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ – бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Определение 1.5 *Функция $f(x)$ называется ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки a, если $\exists M > 0$ такое, что при некотором $\delta > 0$ для всех $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, т. е. удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \beta$, выполняется неравенство $|f(x)| < M$.*

Основные свойства бесконечно малых функций

1. Сумма (или разность) бесконечно малых функций – бесконечно малая функция.

2. Произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Теорема 1.11 *Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C \neq 0$ и $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a, \alpha(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \infty$.*

Теорема 1.12 *Если $|f(x)| < M$, то есть $f(x)$ – ограниченная функция, $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, то произведение $f(x)\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.*

1.6. Эквивалентные бесконечно малые функции

Определение 1.6 *Бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

(предполагается, что $\beta(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a).

Для обозначения эквивалентных бесконечно малых функций используют следующую символику $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

Пример 1.15. $sinx \sim x$ при $x \to 0$ (первый замечательный предел).

Пример 1.16. $5x^2 + 2x \sim 2x$ при $x \to 0$. Это следует из того, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 + 2x}{2x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{5}{2} \cdot x + 1 \right) = 1$$

Пример 1.17. $\frac{1}{\sqrt{25x^2+3x+1}} \sim \frac{1}{5x}$ при $x \to +\infty$ (проверить самостоятельно).

При вычислении пределов полезны следующие теоремы о замене бесконечно малой функции на эквивалентную в произведении и частном.

Теорема 1.13 *Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$ и $f(x)$ – произвольная функция, определенная в некоторой проколотой окрестности точки a. Тогда $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x)\alpha(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} \big(f(x)\beta(x)\big)$.*

Теорема 1.14 *Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если их заменить на эквивалентные функции.*

Пример 1.18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin5x}{sin3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$

Удобно ввести следующее определение.

Определение 1.7 *Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.*

Теорема 1.15 *Функция $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to a \Leftrightarrow$ $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.*

Основные эквивалентности (при $x \to 0$)

1	$sinx \sim x$	2	$tgx \sim x$
3	$arcsinx \sim x$	4	$arctgx \sim x$
5	$1 - cosx \sim \frac{x^2}{2}$	6	$e^x - 1 \sim x$
7	$a^x - 1 \sim xlna$	8	$ln(1 + x) \sim x$
9	$log_a(1 + x) \sim \frac{x}{lna}$	10	$(1 + x)^a - 1 \sim ax$

Таблицу основных эквивалентностей удобно переписать в более общем виде.

Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$. Тогда имеют место следующие эквивалентности при $x \to a$.

1	$sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	2	$tg(\alpha(x)) \sim (\alpha(x))$
3	$arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	4	$arctg(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5	$1 - cos(\alpha(x)) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$	6	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
7	$b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)lnb$	8	$ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
9	$log_b(1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{lnb}$	10	$(1 + \alpha(x))^b - 1 \sim b\alpha(x)$

<u>Пример 1.19.</u> $sin\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \to \infty$

<u>Пример 1.20.</u> $tg(x - 2) \sim x - 2$ при $x \to 2$

1.7. Применение таблицы эквивалентностей к вычислению пределов

Приведем примеры использования теорем о замене бесконечно малой функции на эквивалентную в произведении и частном при вычислении пределов.

В следующих примерах вычислим пределы функций, используя таблицу основных эквивалентностей.

Пример 1.21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\frac{7x}{4}}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{7x}{4}}{2x}=\frac{7}{8}$
(т. к. $arctg\,\frac{7x}{4}\sim\frac{7x}{4}, e^{2x}-1\sim 2x$ при $x\to 0$).

Пример 1.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{ln^2(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{(2x)^2}=\frac{9}{4}$
(т. к. $sin3x\sim 3x, ln(1+2x)\sim 2x$ при $x\to 0$).

Пример 1.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^{tg3x}-1}{arcsinx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(3x)\cdot ln5}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot ln5}{x}=3ln5$$

Пример 1.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{ln(1-3x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{(2x)^2}{2}}{-3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x^2}{3x^2}=-\frac{2}{3}$

Пример 1.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{sin\alpha x-sin\beta x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}(e^{(\alpha-\beta)x}-1)}{2\sin\frac{(\alpha-\beta)x}{2}\cdot\cos\frac{(\alpha+\beta)x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot(\alpha-\beta)x}{2\cdot\frac{(\alpha-\beta)x}{2}\cdot 1}=1$$

Пример 1.26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(cosx)}{(1+x^2)^3-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln[1-(1-cosx)]}{(1+x^2)^3-1}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1-2sin^2\frac{x}{2}\right)}{(1+x^2)^3-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-2sin^2\frac{x}{2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

Пример 1.27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos4x-cos2x}{arctg^2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2sin3x\cdot sinx}{arctg^2x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot 3x\cdot x}{x^2}=-6$$

Пример 1.28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+7x^4}}{ln(1+5x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{5x}=\frac{1}{5}$, так как $x^3+7x^4\sim x^3, ln(1+5x)\sim 5x$ при $x\to 0$.

Пример 1.29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-7x^6+sin5x}{10x-2x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{10x}=\frac{1}{2}$. Здесь используем то, что имеют место эквивалентности $2x^3-7x^6+sin5x\sim 5x, 10x-2x^4\sim 10x$ при $x\to 0$ (проверить самостоятельно).

2. Непрерывность функции

2.1. Определение непрерывности функции. Свойства непрерывных функций

Определение 2.1 *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и - $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.*

Определение 2.2 *Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Теорема 2.1 *Все элементарные функции непрерывны в области определения.*

Теорема 2.2 *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные в точке x_0 функции. Тогда $f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x)$ – также непрерывные в точке x_0 функции. Если $g(x_0)\neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ – непрерывная в точке x_0 функция.*

Теорема 2.3 *Если функция $u = g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f\big(g(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.*

2.2. Односторонние пределы

Определение 2.3 *Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к a справа и обозначается*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \text{ (или } \lim_{x\to a+} f(x) = b\text{)},$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$,что при $a < x < a + \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел $f(x)$ при $x \to a$ слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$ (с заменой неравенства $a < x < a + \delta$ на неравенство $a - \delta < x < a$).

Теорема 2.4 *Предел $f(x)$ при $x \to a$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела и они равны между собой. При этом*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x)$$

Замечание. Основные теоремы, которые используются для вычисления пределов, справедливы и для односторонних пределов.

2.3. Точки разрыва

Определение 2.4 *Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, но при этом функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a, то точка a называется точкой устранимого разрыва.*

Здесь возможны две ситуации:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, если $f(a)$ определено;
2. $f(a)$ не определено, а $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует.

Пример 2.1. $f(x) = \begin{cases} x, x \neq 0 \\ 1, x = 0. \end{cases}$ Здесь $x = 0$ – точка устранимого разрыва.

Пример 2.2. $f(x) = \frac{sinx}{x}$ (не определено при $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$).

Если a – точка устранимого разрыва функции $f(x)$, то функцию можно доопределить до непрерывной, полагая $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пример 2.3. Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0. \end{cases}$ является непрерывной.

Определение 2.5 *Точка a называется точкой разрыва первого рода, если существуют оба односторонних предела (конечных), но они не равны друг другу.*

Пример 2.4. $f(x) = \frac{(x-1)}{|x-1|} \cdot x^2$. Здесь $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 1$. Следовательно, $x = 1$ – точка разрыва первого рода.

Определение 2.6 *Точка a называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов не существует, или равен бесконечности (равен $+\infty$ или $-\infty$).*

Пример 2.5. $f(x) = \frac{1}{x}$. Здесь $x = 0$ – точка разрыва второго рода.

<u>Пример 2.6.</u> Указать точки разрыва функции $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2} \cdot x - 3$ и охарактеризовать их тип.

<u>Решение</u>: Функция является непрерывной всюду, кроме точки $x = -2$. Рассмотрим односторонние пределы.

Предел справа $\lim\limits_{x \to -2+0} \left(\frac{|x+2|}{x+2} \cdot x - 3\right) =$

$$= \lim_{x \to -2+0} \left(\frac{x+2}{x+2} \cdot x - 3\right) = \lim_{x \to -2+0} (x - 3) = -1$$

Предел слева $\lim\limits_{x \to -2-0} \left(\frac{|x+2|}{x+2} \cdot x - 3\right) =$

$$= \lim_{x \to -2-0} \left(-\frac{x+2}{x+2} \cdot x - 3\right) = \lim_{x \to -2-0} (-x - 3) = -5$$

Оба односторонних предела существуют, но не равны между собой, следовательно, $x = -2$ – точка разрыва первого рода.

<u>Пример 2.7.</u> Указать точки разрыва функции $f(x) = e^{1/(x-1)}$ и охарактеризовать их тип.

<u>Решение</u>: Функция является непрерывной всюду, кроме точки $x = 1$. Рассмотрим односторонние пределы.

Предел справа $\lim\limits_{x \to 1+0} e^{1/(x-1)} = +\infty$. Предел слева $\lim\limits_{x \to 1-0} e^{1/(x-1)} = 0$.

В этом случае $x = 1$ является точкой разрыва второго рода.

<u>Пример 2.8.</u> Указать точки разрыва функции $f(x) = \frac{tgx}{x}$ и охарактеризовать их тип.

<u>Решение</u>: Точки разрыва: $x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$ где k – целое.

Поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$ (по таблице эквивалентностей), то $x = 0$ – точка устранимого разрыва. В этом случае функцию можно доопределить до непрерывной функции при $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{tgx}{x}, x \neq 0, \\ 1, x = 0. \end{cases}$$

Точки разрыва $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k – целое, являются точками разрыва второго рода (рассмотреть самостоятельно).

3. Дифференцирование функции одной переменной

3.1. Производная функции

Определение 3.1 Производной *функции* $f(x)$ *в точке* a *называется предел (если он существует) отношения приращения функции к приращению аргумента:*

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Правила дифференцирования

Пусть функции $u(x), v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда 1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, 2. $(uv)' = u'v + uv'$, 3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

3.2 Таблица производных

1	$(c)' = 0, c$ – постоянная
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$
3	$(sinx)' = cosx$
4	$(cosx)' = -sinx$
5	$(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$
6	$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2x}$
7	$(e^x)' = e^x$
8	$(a^x)' = a^x lna$
9	$(lnx)' = \frac{1}{x}$

10	$(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$
11	$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \|x\| < 1$
12	$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \|x\| < 1$
13	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
14	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

В следующих примерах рассматривается вычисление производной y' заданной функции y.

<u>Пример 3.1.</u> $y = x^4 - 6x^2 + 8$

На основании правила дифференцирования суммы, разности и таблицы производных имеем $y' = (x^4 - 6x^2 + 8)' =$

$$= (x^4)' - 6(x^2)' + (8)' = 4x^3 - 6 \cdot 2x + 0 = 4x^3 - 12x$$

<u>Пример 3.2.</u> $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}$

По формуле дифференцирования степенной функции имеем $y' = \left(2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}\right)' = 2\left(x^{1/3}\right)' + 3(x^{-2})' = \frac{2}{3}x^{-2/3} - 6x^{-3} =$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$$

<u>Пример 3.3.</u> $y = x^2 sinx$

Используем правило дифференцирования произведения: $y' = (x^2 sinx)' = (x^2)' sinx + x^2(sinx)' = 2xsinx + x^2 cosx$

<u>Пример 3.4.</u> $y = \frac{cosx}{1+4x^3}$

Используем правило дифференцирования дробей:

$$y' = \left(\frac{cosx}{1+4x^3}\right)' = \frac{(cosx)'(1+4x^3) - cosx \cdot (1+4x^3)'}{(1+4x^3)^2} =$$
$$= \frac{-sinx \cdot (1+4x^3) - 12x^2 cosx}{(1+4x^3)^2}$$

3.3. Дифференцирование сложной функции

Теорема 3.1 *Пусть функция* $u = g(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *функция* $y = f(u)$ *дифференцируема в точке* $u_0 = g(x_0)$. *Тогда сложная функция* $y = f\big(g(x)\big)$ *дифференцируема в точке* x_0, *причем* $\big[f\big(g(x)\big)\big]'_{x_0} = f'(u_0) \cdot g'(x_0)$.

В следующих примерах рассматривается вычисление производной y' заданной функции y.

Пример 3.5. $y = sin6x$

Данная функция является сложной, она состоит из двух «звеньев»: $u = 6x, y = sinu$. По теореме о дифференцировании сложной функции имеем: $y' = (sin6x)' = cos6x \cdot (6x)' = 6cos6x$.

Пример 3.6. $y = (tg7x)^5$

Эта функция сложная: $u = 7x, a = tgu, y = a^5$. Здесь три «звена».

Тогда $y' = [(tg7x)^5]' = 5(tg7x)^4 \cdot \frac{1}{cos^2 7x} \cdot 7$

Пример 3.7. $y = ln\big[ln\big(1 + 2\sqrt{x}\big)\big]$

$$y' = \frac{1}{ln\big(1+2\sqrt{x}\big)} \cdot \frac{1}{1+2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Пример 3.8. $y = cos^5(arcsin8x)$

$$y' = 5cos^4(arcsin8x) \cdot \big(-sin(arcsin8x)\big) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-64x^2}} \cdot 8$$

Пример 3.9. $y = \frac{e^{-5x} arctg7x}{ln4x + cos^3 x}$

В данной задаче сначала используем правило дифференцирования дробей, затем дифференцируем сложные функции и пользуемся правилами дифференцирования произведения и суммы.

$$y' = \left(\frac{e^{-5x}arctg7x}{ln4x + cos^3x}\right)' =$$

$$= \frac{(e^{-5x}arctg7x)' \cdot (ln4x + cos^3x)}{(ln4x + cos^3x)^2} -$$

$$- \frac{(e^{-5x}arctg7x) \cdot (ln4x + cos^3x)'}{(ln4x + cos^3x)^2} =$$

$$= \frac{\left(-5e^{-5x}arctg7x + e^{-5x}\frac{7}{1+49x^2}\right) \cdot (ln4x + cos^3x)}{(ln4x + cos^3x)^2} -$$

$$= \frac{(e^{-5x}arctg7x) \cdot \left(\frac{1}{4x} + 3cos^2x(-sinx)\right)}{(ln4x + cos^3x)^2}$$

3.4. Вычисление логарифмической производной

Пример 3.10. Вычислить производную функции $y = x^x$

I способ. Представим функцию x^x в виде $x^x = e^{lnx^x} = e^{xlnx}$. Используем дифференцирование сложной функции

$$y' = (x^x)' = (e^{xlnx})' = e^{xlnx}(xlnx)' = e^{xlnx}(lnx + 1)$$
$$= x^x(lnx + 1)$$

II способ. Прологарифмируем функцию $y = x^x$

$$lny = lnx^x$$

По свойству логарифмов имеем $lny = xlnx$. Продифференцируем полученное выражение $(lny)' = (xlnx)'$. Поскольку $y = y(x)$, то $(lny)' = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{y'}{y} = lnx + 1$. Выразим из этого равенства y' и подставим $y = x^x$: $y' = y(lnx + 1) = x^x(lnx + 1)$.

3.5. Вычисление производной функции, заданной параметрически

Пусть функция $y(x)$ задана следующим образом

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

причем $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемые функции аргумента t, $x'(t) \neq 0$. Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 3.11. Найти производную функции $\begin{cases} x = sin3t, \\ y = te^{2t}. \end{cases}$

Решение: Найдем отдельно производные функций $x(t)$ и $y(t)$

$x'(t) = (sin3t)' = 3cos3t, y'(t) = (te^{2t})' = e^{2t} + 2te^{2t}$

По формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ имеем $y'_x = \frac{e^{2t}+2te^{2t}}{3cos3t}$

3.6. Вычисление производной функции, заданной неявно

Если $y = y(x)$ задана с помощью соотношения $F(x, y) = 0$, то говорят, что функция $y = y(x)$ задана неявно. В этом случае производная может быть найдена следующим образом:

1. находим производную от выражения $F(x, y)$ (рассматривая y как функцию от x), приравниваем её к нулю;
2. из полученного уравнения выражаем $y'(x)$.

Пример 3.12. Найти производную функции $y(x)$, заданной неявно $x^3y^4 + 5xy + 4y + 5 = 0$.

Решение: В данном случае $F(x,y) = x^3y^4 + 5xy + 4y + 5$. Находим производную

$$(x^3y^4 + 5xy + 4y + 5)'_x = 3x^2y^4 + x^3 \cdot 4y^3y' + 5y + 5xy' + 4y'$$

Далее, приравняем найденную производную к нулю и выразим из полученного соотношения y'

$$3x^2y^4 + x^3 \cdot 4y^3y' + 5y + 5xy' + 4y' = 0$$
$$3x^2y^4 + y'(4x^3y^3 + 5x + 4) + 5y = 0$$
$$y' = -\frac{3x^2y^4 + 5y}{4x^3y^3 + 5x + 4}$$

3.7. Производные высших порядков

Определение 3.2 *Производной n-ого порядка от функции* $y = y(x)$ *называют производную от её* $(n-1)$*-ой производной*

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$$

Пример 3.13. Найти вторую производную функции $y = tgx$.

Решение: Находим первую производную

$$y' = (tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$$

От полученного выражения снова вычисляем производную

$$y'' = (tgx)'' = \left(\frac{1}{cos^2x}\right)' = (cos^{-2}x)' =$$
$$= -2(cos^{-3}x)(-sinx) = \frac{2sinx}{cos^3x}$$

Пример 3.14. Найти $y'''(x)$, если $y(x) = (x+4)^5$.

Решение: Находим первую производную $y' = 5(x+4)^4$, затем вторую $y'' = 5 \cdot 4(x+4)^3 = 20(x+4)^3$ и, наконец, третью $y''' = 60(x+4)^2$.

3.8. Дифференциал функции

Определение 3.3 *Дифференциалом* dy *функции* $y = f(x)$ *называется линейная часть приращения* Δy:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Дифференциал независимой переменной dx по определению равен приращению независимой переменной Δx, т. е.

$$dx = \Delta x.$$

Таким образом, дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной

$$dy = f'(x)dx.$$

Отсюда вытекает представление производной функции в виде частного двух дифференциалов

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Основные теоремы о дифференциалах

Теорема 3.2 $d(c) = 0$, *где c – const.*

Теорема 3.3 $d(u \pm v) = du \pm dv$.

Теорема 3.4 $d(c \cdot u) = c \cdot du$, *где c – const.*

Теорема 3.5 $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$.

Теорема 3.6 $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Теорема 3.7 *Пусть* $y = f(u), u = u(x)$. *Тогда дифференциал сложной функции*

$$dy = f'\big(u(x)\big) \cdot u'(x)dx = f(u)du.$$

(инвариантность формы первого дифференциала).

Дифференциалы высших порядков определяются рекуррентной формулой

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Отсюда получаем формулу

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

Пример 3.15. Найти дифференциал функции $y = sinx + x^3 + 1$.

$$dy = (sinx + x^3 + 1)'dx = (cosx + 3x^2)dx$$

Пример 3.16. Найти дифференциал функции $y = ln(tg6x)$.

$$dy = \frac{1}{tg6x} \cdot \frac{1}{cos^2 6x} \cdot 6dx$$

Пример 3.17. Найти d^2y, если $y = tg3x$.

Вычислим сначала первую и вторую производные

$$y' = \frac{1}{cos^2 3x} \cdot 3, y'' = \left(\frac{3}{cos^2 3x}\right)' = 3(cos^{-2}3x) =$$

$$= -6(cos^{-3}3x) \cdot (-sin3x) \cdot 3 = 18\frac{sin3x}{cos^3 3x}$$

Следовательно,

$$d^2y = 18\frac{sin3x}{cos^3 3x}(dx)^2$$

4. Приложения производной

4.1. Уравнение касательной и нормали к кривой

Касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 называется прямая M_0N, являющаяся предельным положением секущих при условии, что точка M_1 приближается к точке касания M_0.

Уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

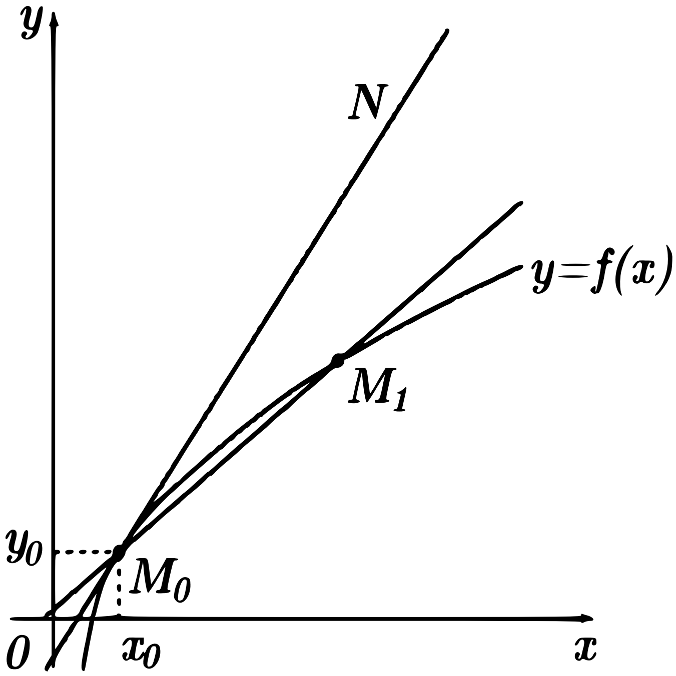

Рис. 1

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет бесконечную производную в этой точке, то касательной к графику является вертикальная прямая $x = x_0$. Например, для функции $y = \sqrt[3]{x^2}$

касательной в точке $(0,0)$ является ось OY (вертикальная прямая $x = 0$).

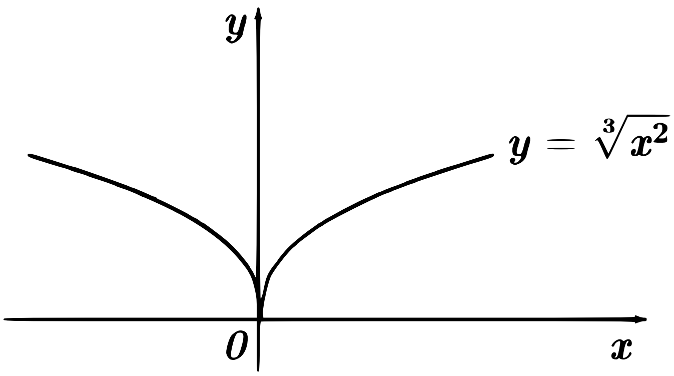

Рис. 21

Пусть в точке (x_0, y_0) к кривой $y = f(x)$ проведена касательная. Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой $y = f(x)$.

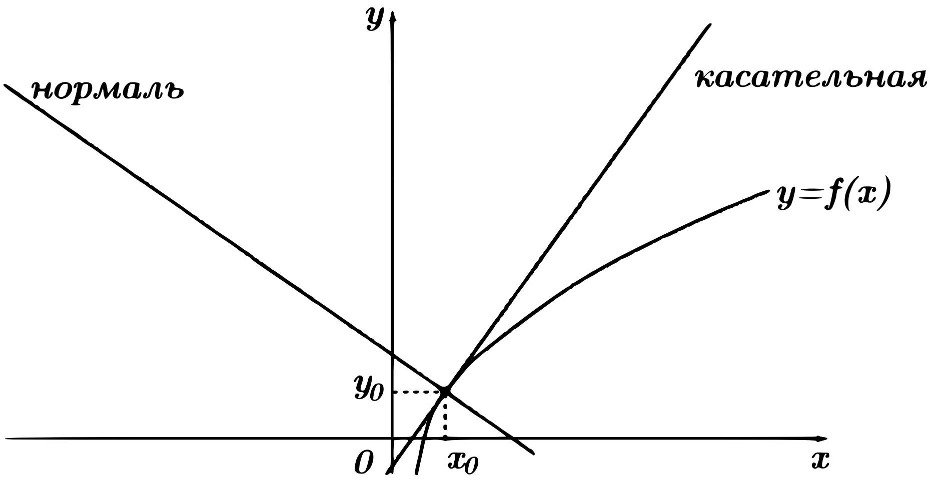

Рис. 32

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Здесь предполагается, что $f'(x_0) \neq 0$. Если $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали имеет вид: $x = x_0$.

Пример 4.1. Записать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$ в точке $x_0 = 2$.

Решение: Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ имеет вид: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем значение функции в точке $x_0 = 2$: $f(x_0) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3$. Для определения углового коэффициента касательной находим производную от заданной функции: $f'(x) = 2x - 3$. Значение производной в точке $x_0 = 2$ и дает искомый угловой коэффициент: $f'(x_0) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. Таким образом, записываем уравнение касательной: $y = 3 + 1 \cdot (x - 2)$ или $y = x + 1$. Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ имеет вид: $y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. В нашем случае: $y = 3 - \frac{1}{1}(x - 2)$ или $y = -x + 5$.

Ответ: уравнение касательной $y = x + 1$; уравнение нормали $y = -x + 5$.

Пример 4.2. Найти уравнение касательной и нормали к кривой, заданной параметрически: $\begin{cases} x = e^t + 1, \\ y = e^{2t} - 1. \end{cases}$ при $t = 0$

Решение: Найдем сначала производные от x и y по переменной t: $x'_t = e^t, y'_t = e^{2t} \cdot 2 = 2e^{2t}$.

Затем найдем y'_x по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

В данном случае $y'_x = \frac{2e^{2t}}{e^t} = 2e^t$.

При $t = 0$ производная $y'_x = 2$. Этому значению параметра соответствует точка $x_0 = 2, y_0 = 0$.

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0): $y = 2(x - 2)$.

Уравнение нормали в точке (x_0, y_0): $y = -\frac{1}{2}(x - 2)$.

Пример 4.3. Найти уравнение касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ в точках: а) $M_1\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$; б) $M_2(3{,}0)$.

Решение: Преобразуем уравнение эллипса к виду$4x^2+9y^2=36$.
Воспользуемся правилом дифференцирования функции, заданной неявно: $8x+18y\cdot y'=0$. Отсюда найдем производную $y'_x=\frac{-4x}{9y}$.
Значение производной в точке M_1: $y'(M_1)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.
Уравнение касательной в точке M_1: $y=\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)$.
Уравнение нормали в точке M_1: $y=\sqrt{3}+\frac{9}{2\sqrt{3}}\left(x-\frac{3}{2}\right)$.
Значение производной в точке M_2: $y'(M_2)=\infty$.
Уравнение касательной в точке M_2: $x=3$.
Уравнение нормали в точке M_2: $y=0$.

Замечание. Другой способ решения этой задачи основан на использовании параметрического задания эллипса

$$\begin{cases} x=3cost, \\ y=2sint. \end{cases}$$

Точке $M_1\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$ соответствует значение параметра $t=\frac{\pi}{3}$. Точке $M_2(3{,}0)$ соответствует значение параметра $t=\frac{\pi}{2}$. Найти уравнение касательной и нормали самостоятельно.

4.2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0,

$$\Delta y=dy+\alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Здесь $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – приращение функции.

При малых Δx имеем приближенное равенство $\Delta y \approx dy$,т. е.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

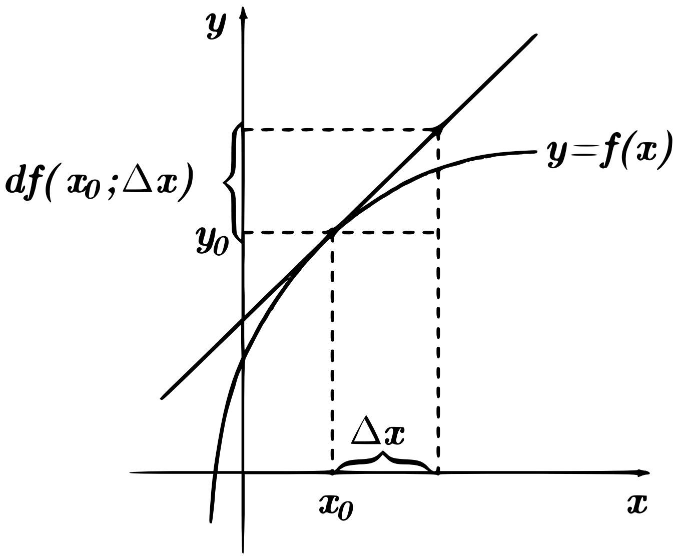

Рис. 3

Пример 4.4. Вычислить приближенно $\sqrt{3{,}996}$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{x_0 + \Delta x}, f(x_0) = \sqrt{x_0}, f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Приближенное равенство

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

в данном случае примет вид

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x (x_0 > 0)$$

Число $3{,}996$ можно представить в виде $3{,}996 = 4 + (-0{,}004)$. В этом случае $x_0 = 4, \Delta x = -0{,}004$. Тогда

$$\sqrt{3{,}996} = \sqrt{4 + (-0{,}004)} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (-0{,}004) = 1{,}999$$

Вопросы точности вычислений будут рассмотрены позднее.

4.3. Прикладные задачи на использование производной

4.3.1. Мгновенная скорость при прямолинейном движении

Пусть материальная точка M движется по прямой и её расстояние в момент времени t от некоторой фиксированной точки O на этой прямой равно $s = s(t)$. *Средняя скорость* точки за произвольный промежуток времени Δt, за который точка перемещается из положения $s(t)$ в положение $s(t + \Delta t)$, определяется как отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ где } \Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Мгновенная скорость точки в момент t определяется как предел средней скорости за промежуток времени Δt при условии $\Delta t \to 0$. Таким образом, получаем

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t),$$

т. е. мгновенная скорость есть первая производная от перемещения.

Ускорение движущейся точки в момент времени t – это первая производная от скорости $v(t)$, т. е. $a(t) = v'(t)$. Таким образом, ускорение есть вторая производная от перемещения $s(t)$: $a(t) = s''(t)$.

Пример 4.5. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^2$. Найти её скорость и ускорение в момент времени $t = 3$. Путь измеряется в метрах, время – в секундах.

Решение: Скорость $v(t) = s'(t) = 2t$. Тогда при $t = 3\text{с}$ $v(t) = 6\text{м/с}$. Ускорение $a(t) = s''(t) = 2\text{м/с}^2$.

Можно рассмотреть обратную задачу – по известной скорости (или ускорению) найти пройденный путь.

Пример 4.6. Материальная точка массы m свободно падает под действием силы тяжести $F = mg$. Найти закон движения точки (без учета сопротивления воздуха).

Решение: В данном случае ускорение $g = a(t) = s''(t)$. Таким образом, задача сводится к нахождению функции по заданной второй производной. Можно проверить, что решением является функция $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$, где C_1, C_2 – некоторые произвольные постоянные. Эти постоянные имеют следующий физический смысл: $C_2 = s(0)$ – положение точки в начальный момент времени, $C_1 = s'(0) = v(0)$ – начальная скорость.

Уравнение вида $s''(t) = g$ является дифференциальным уравнением второго порядка. Методы решения таких уравнений будут изучаться позднее.

4.3.2. Мощность и напряжение

Пусть через участок электрической цепи проходит электрический заряд. Скорость поступления в цепь электрической энергии $W(t)$ в момент времени t представляет собой *мгновенную мощность*

$$P(t) = W'(t).$$

Пример 4.7. Найти мгновенную мощность, если известна энергия, поступающая в приемник

$$W(t) = (A\cos\phi)t + \frac{A}{2\omega}\sin(2\omega t - \phi) + \frac{A}{2\omega}\sin\phi,$$

где A – амплитуда, ϕ – фаза, ω – частота, которые предполагаются постоянными.

<u>Решение</u>: Мгновенная мощность – это производная энергии $W(t)$ по времени:

$$P(t) = W'(t) = Acos\phi + \frac{A}{2\omega}cos(2\omega t - \phi)2\omega =$$
$$= Acos\phi + Acos(2\omega t - \phi).$$

Напряжение на элементе электрической цепи – индуктивности – определяется по следующей формуле $U_L = L\frac{di}{dt}$, где i – ток в цепи, L – индуктивность.

<u>Пример 4.8.</u> найти напряжение на индуктивности, если ток $i(t) = e^{-at}$, где a – постоянная.

<u>Решение</u>: $U_L = L\frac{di}{dt} = -aLe^{-at}$.

4.3.3. Переходный процесс в линейной электрической цепи

<u>Пример 4.9.</u> Пусть линейная электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных элементов – сопротивления R и индуктивности L – присоединяется к источнику э.д.с. $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Описать переходный процесс.

<u>Решение</u>:

Переходный процесс в данной электрической цепи на основании второго закона Кирхгофа описывается уравнением

$$U_R + U_L = \varepsilon.$$

Поскольку $U_R = R \cdot i$, а $U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$, получаем уравнение

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = \varepsilon.$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению первого порядка. Методы решения таких уравнений будут изучаться позднее. Приведем ответ в случае постоянной э.д.с. $\varepsilon(t) = E$.

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}exp\left(-\frac{Rt}{L}\right).$$

Данный пример наряду с приведенными выше примерами иллюстрирует важность использования понятия производной при решении прикладных задач.

4.4. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя – это способ раскрытия неопределенностей, т. е. вычисления пределов отношений двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин.

Правило Лопиталя для отношения бесконечно малых (неопределенности вида $\frac{0}{0}$)

Пусть функции$f(x)$и$g(x)$определены в некоторой проколотой окрестности $O(x_0)$ точки x_0, $g(x) \neq 0$ при x из $O(x_0)$, и

$$\lim_{x \to x_0} f\,(x) = \lim_{x \to x_0} g\,(x) = 0.$$

Предположим, что при $x \neq x_0$ функции $f(x)$и$g(x)$ имеют производные, $g'(x) \neq 0$ при x из $O(x_0)$, и существует предел отношения этих производных:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда при $x \to x_0$ существует предел отношения самих функций и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Правило Лопиталя справедливо и для односторонних пределов

$$x \to x_0-, x \to x_0+$$

и для случаев, когда

$$x \to \infty, x \to -\infty, x \to +\infty.$$

Пример 4.10. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{lnx}$, используя правило Лопиталя.

Решение: Подстановка предельного значения $x = 1$ приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, так как $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-1) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 1} ln\,x = 0$.Предел отношения производных существует:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)'}{(lnx)'} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = 3,$$

поэтому

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{lnx} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)'}{(lnx)'} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = 3$$

Пример 4.11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{sin^2x}$.

Решение: Подстановка предельного значения $x = 0$ при водит к неопределенности вида$\frac{0}{0}$.Вычисление предела можно упростить, заменив знаменатель sin^2x на эквивалентную бесконечно малую $sin^2x \sim x^2$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{sin^2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

Мы снова имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Этот предел можно вычислить по правилу Лопиталя, либо, заменив числитель на эквивалентную бесконечно малую: $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Правило Лопиталя для отношения бесконечно больших (неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$)

Пусть функции $f(x)$и$g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 и

$$\lim_{x\to x_0} f\,(x) = \lim_{x\to x_0} g\,(x) = \infty.$$

Предположим, что при $x \neq x_0$ функции $f(x)$и$g(x)$ имеют производные, $g'(x) \neq 0$ при x из $O(x_0)$, и существует предел отношения этих производных:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда при $x \to x_0$ существует предел отношения самих функций и

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

<u>*Замечание*</u>. При раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ правило Лопиталя справедливо и для односторонних пределов

$$x \to x_0-, x \to x_0 +$$

и для случаев, когда

$$x \to \infty, x \to -\infty, x \to +\infty.$$

<u>Пример 4.12.</u> Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^2}$.

<u>Решение</u>: Подстановка предельного значения $x = +\infty$ приводит к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(lnx)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Равенство

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^2} = 0.$$

означает, что квадратичная функция при $x \to +\infty$ растет быстрее логарифмической.

Раскрытие неопределенностей других видов

$(0 \cdot \infty; 0^0; 1^\infty; \infty^0; \infty - \infty)$

1. *Неопределенность вида* $0 \cdot \infty$. Пусть функции $f(x)$и$g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Задача сведена к неопределенности $\frac{0}{0}$, рассмотренной ранее. Или

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Задача сведена к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, рассмотренной ранее.

2. *Неопределенности вида* $0^0; 1^\infty; \infty^0$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $O(x_0)$ точки $x_0, f(x) > 0$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) ln f(x)}.$$

и задача сводится к раскрытию неопределенности соответственно вида $0 \cdot \infty; \infty \cdot 0$.

3. *Неопределенности вида* $\infty - \infty$. Пусть функции $f(x)$и$g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Тогда вычисление предела

$$\lim_{x\to x_0}\{f(x)-g(x)\}$$

элементарными преобразованиями сводится к предыдущим случаям.

Пример 4.13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-3x}$.

Решение: В данном случае неопределенность вида $0\cdot\infty$. Запишем функцию под знаком предела в виде $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{3x}}$. Возникает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. По правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3e^{3x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{9e^{3x}}=0.$$

Отсюда вытекает, что экспонента растет быстрее, чем квадратичная функция. Доказать самостоятельно, что экспонента растет быстрее, чем любой многочлен.

Пример 4.14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение: В данном случае неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведем функцию под знаком предела к общему знаменателю

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}.$$

Возникает неопределенность вида $\frac{0}{0}$.По правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

5. Исследование функции: возрастание, убывание, экстремумы

5.1. Признаки возрастания и убывания функции на интервале

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a, b). Говорят, что функция *не убывает (не возрастает) на* (a, b), если из того, что $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)\big(f(x_1) \geq f(x_2)\big)$. Неубывающие и невозрастающие функции называются *монотонными*. Если из того, что $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)\big(f(x_1) > f(x_2)\big)$, то говорят, что функция $f(x)$ *возрастает (убывает)*. Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*.

Возрастание и убывание дифференцируемой функции связано со знаком её производной.

Теорема 5.1 *Для того, чтобы дифференцируемая функция* $f(x)$ *в интервале* (a, b) *была неубывающей (невозрастающей), необходимо и достаточно*$f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0)$*для любого* x *из*(a, b).

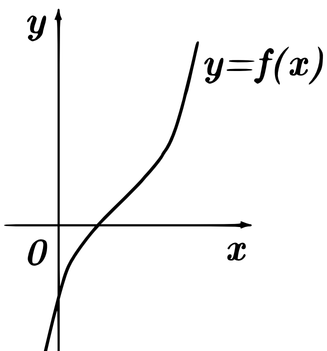

Рис. 5: Возрастающая функция

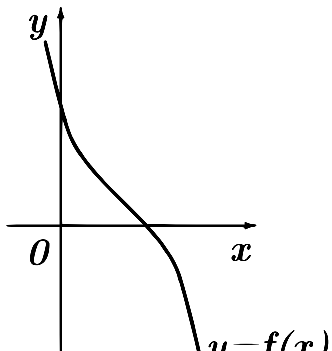

Рис. 4: Убывающая функция

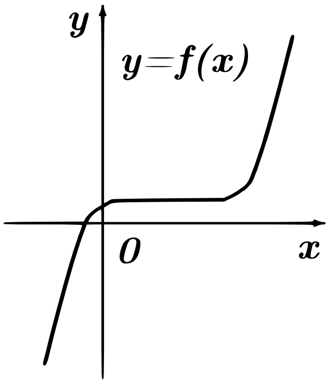

Рис. 5: Неубывающая функция

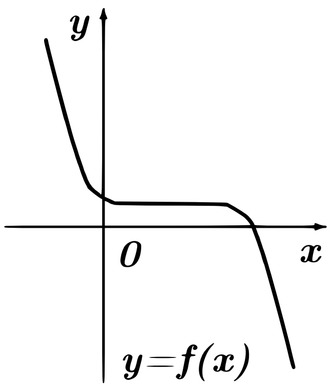

Рис. 6: Невозрастающая функция

5.2. Экстремумы функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве D. Назовем точку $x_0 \in D$ *точкой (локального) максимума* функции $f(x)$, если существует такая -окрестность точки x_0, что при всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0)$$

и, соответственно, *точкой (локального) минимума*, если

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Точкаx_0,являющаяся либо точкой максимума, либо точкой минимума, называется *точкой (локального) экстремума*. Сформулируем необходимое условие локального экстремума функции $f(x)$.

Необходимые условия локального экстремума

Теорема 5.2 *Если точка x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$, и существует производная в этой точке $f'(x_0)$, то* $f'(x_0) = 0$.

Иначе говоря, если функция имеет локальный экстремум в точке x_0, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0) = \infty$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Следующие примеры иллюстрируют описанные случаи. В примерах $x_0 = 0$.

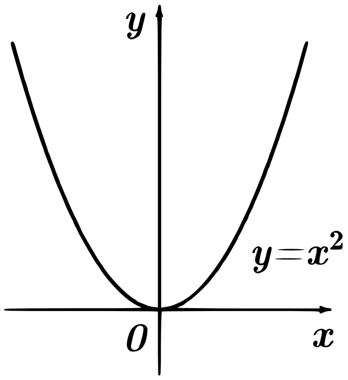

Рис. 7 $f'(x_0) = 0$

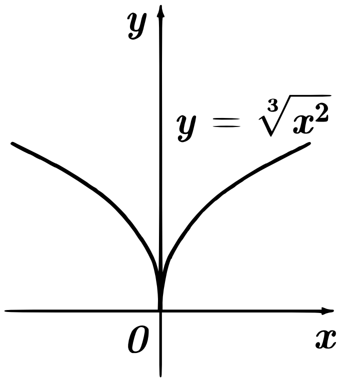

Рис. 8: $f'(x_0) = \infty$

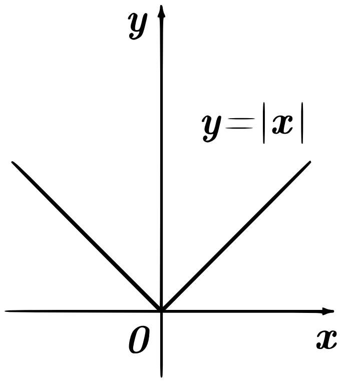

Рис. 9: $\nexists f'(x_0)$

Определение 5.1 *Точка x_0 называется критической точкой 1-го рода функции $f(x)$, если $f(x)$ определена и непрерывна в этой точке и либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует (в частности, $f'(x_0) = \infty$).*

Если $f'(x_0) = 0$, точка x_0 называется также *стационарной точкой* функции $f(x)$.

Замечание. Формально случай $f'(x_0) = \infty$ можно трактовать как частный случай того, что $f'(x_0)$ не существует. Однако геометрически эти два случая удобно разделять, поскольку в первом случае можно говорить о вертикальной касательной, а во втором касательной не существует (хотя могут существовать односторонние касательные).

Достаточные условия локального экстремума

Теорема 5.3 *Пусть x_0 – критическая точка 1-го рода непрерывной функции $f(x)$ и существует производная $f'(x)$ в некоторой проколотой окрестности $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. Если при переходе через критическую точку (слева направо) производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка локального минимума, с плюса на минус – точка локального максимума.*

Замечание 1. Если производная не меняет знак, то точка x_0 не является точкой локального экстремума.

Замечание 2. Условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 является существенным. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x \le 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

В точке $x_0 = 0$ производная $f'(x)$ не существует (функция даже не является непрерывной в этой точке). При переходе через точку $x_0 = 0$ производная меняет знак, но в этой точке экстремума нет. Таким образом, утверждение теоремы без предположения о непрерывности функции $f(x)$ перестает быть верным.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$. По теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

Пусть требуется отыскать максимальное и минимальное значения функции $f(x)$, непрерывной на замкнутом отрезке $[a, b]$. Если точка экстремума является внутренней точкой отрезка, то эта точка – критическая. Следовательно, точка экстремума на $[a, b]$ – это либо критическая точка, либо один из концов отрезка.

Пример 5.1. Определить экстремальные значения, указать интервалы монотонность функции

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 5.$$

Решение: Рассматриваемая функция определена и дифференцируема при всех x. Для нахождения экстремумов функции, найдем критические точки I рода, т. е. точки, в которых первая производная равна нулю или не существует. В данном случае речь идет о нахождении стационарных точек. Вычислим производную:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4 = 2(x^2 + x - 2) = 2(x-1)(x+2).$$

Стационарные точки $x_1 = 1$и$x_2 = -2$. Для исследования поведения функции составим таблицу.

	$f'(x)$	$f(x)$
$x \in (-\infty; -2)$	$+$	возрастает
$x = -2$	0	точка максимума $f(-2) = 7\frac{2}{3}$
$x \in (-2; 1)$	$-$	убывает
$x = 1$	0	точка минимума $f(1) = 4\frac{2}{3}$
$x \in (1; +\infty)$	$+$	возрастает

Ответ: На промежутках $(-\infty; -2)$и$(1; +\infty)$ функция возрастает; на промежутке $(-2; 1)$ функция убывает; точка $\left(-2; 7\frac{2}{3}\right)$ – точка максимума; точка $\left(1l4\frac{2}{3}\right)$ – точка минимума.

Пример 5.2. Определить экстремальные значения, указать интервалы монотонности функции $f(x) = x^3 e^x$.

Решение: Вычислим производную заданной функции:

$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

Стационарные точки $x_1 = 0$ и $x_2 = -3$.

	$f'(x)$	$f(x)$
$x \in (-\infty; -3)$	$-$	убывает
$x = -3$	0	точка минимума $f(-3) = 27e^{-3}$
$x \in (-3; 0)$	$+$	возрастает
$x = 0$	0	не является точкой локального экстремума
$x \in (0; +\infty)$	$+$	возрастает

Ответ: При $x \in (-\infty; -3)$ функция убывает; при $x \in (-3; +\infty)$ функция возрастает; точка $(-3; -27e^{-3})$ – точка минимума. Поведение функции можно проиллюстрировать следующим графиком.

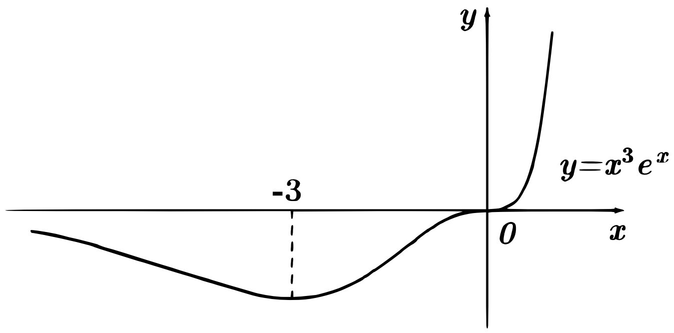

Рис. 10

Пример 5.3. Определить экстремальные значения, указать интервалы монотонности функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение: Функция непрерывна при $x \in R$. Рассматриваемая функция определена и дифференцируема при всех $x \neq 0$. Для нахождения экстремумов функции, найдем критические точки I рода, т. е. точки, в которых первая производная равна нулю или не существует. В точке $x = 0$ производная не существует, точнее $f'(0) = \infty$. Вычислим производную при $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Значит, единственная критическая точка функции – это $x = 0$.

	$f'(x)$	$f(x)$
$x \in (-\infty; 0)$	$-$	убывает
$x = 0$	∞	точка минимума $f(0) = 0$
$x \in (0; +\infty)$	$+$	возрастает

Ответ: При функция убывает; при $x \in (0; +\infty)$ функция возрастает; точка $(0; 0)$ – точка минимума. Поведение функции можно проиллюстрировать следующим графиком.

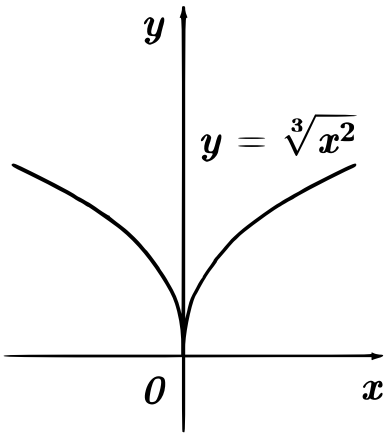

Рис. 11

Пример 5.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 5$ на отрезке $[0; 5]$.

Решение: Рассматриваемая функция определена и дифференцируема при всех x. Для нахождения экстремумов функции, найдем критические точки I рода. В данном случае речь идет о нахождении стационарных точек. Вычислим производную:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4 = 2(x^2 + x - 2) = 2(x - 1)(x + 2).$$

Стационарные точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$. Рассматриваемому отрезку принадлежит только точка $x_1 = 1$. Следовательно, надо сравнивать значение функции в точках $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 5$.

Поскольку $f(0) = 5, f(1) = 4\frac{2}{3}, f(5) = 103\frac{1}{3}$, то $\max\limits_{x\in[0;5]} f(x) =$

$$f(5) = 103\frac{1}{3}, \min\limits_{x\in[0;5]} f(x) = f(1) = 4\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\max\limits_{x\in[0;5]} f(x) = f(5) = 103\frac{1}{3}, \min\limits_{x\in[0;5]} f(x) = f(1) = 4\frac{2}{3}$.

Пример 5.5. Какой из прямоугольных треугольников с заданным периметром p имеет наибольшую площадь? Найти эту площадь.

Решение: Обозначим катеты треугольника a и b, а гипотенузу c. Запишем, используя теорему Пифагора и условие задачи:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a + b + c = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ c = p - a - b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (p - a - b)^2 \Rightarrow b = \frac{p(2a - p)}{2(a - p)}$$

Площадь прямоугольного треугольника может быть вычислена по формуле: $S = \frac{ab}{2}$. Подставим в нее значение для b:

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{ap(2a - p)}{4(a - p)}$$

Мы получили функцию, зависящую от a. Величина p является параметром. Для нахождения максимального значения функции найдем критические точки I рода, т. е. точки, в которых первая производная равна нулю или не существует:

$$S'(a) = \frac{p}{4} \cdot \left(\frac{a(2a - p)}{a - p}\right)'_a = \frac{p}{4} \cdot \frac{4a(a - p) - a(2a - p)}{(a - p)^2} =$$

$$= \frac{p}{4} \cdot \frac{2a^2 - 4ap + p^2}{(a - p)^2}$$

$S'(a) = 0$при$a_{1,2} = p\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$и не существует при $a_3 = p. S'(a) > 0$при $a < p\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ и $S'(a) < 0$ при $a > p\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, следовательно,

$a_1 = p\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ – точка локального максимума. В точке $a_3 = p$ производная $S'(a)$ не меняет знак, следовательно, $a_3 = p$ не является точкой локального экстремума. $S'(a) < 0$ при $a < p\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ и $S'(a) > 0$ при $a > p\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $a_2 = p\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ – точка локального минимума. Найдем длину второго катета b при $a = p\frac{2-\sqrt{2}}{2}$: $b = \frac{p(2a-p)}{2(a-p)} = p\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, искомый треугольник – равнобедренный. Его площадь

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{p^2}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

Ответ: из всех прямоугольных треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник с длиной катетов $a = b = p\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Искомая площадь равна $S = \frac{p^2}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.

6. Исследование функции: выпуклость и вогнутость, асимптоты

6.1. Выпуклость и вогнутость графика функции

Определение 6.1. *Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз (или просто выпуклой) на интервале (a, b), если график функции $y = f(x)$ идет не выше хорды, соединяющей любые две точки графика $\left(x_0, f(x_0)\right)$ и $\left(x_1, f(x_1)\right)$ при $x_0, x_1 \in (a, b)$.*
Аналогично, функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (или вогнутой) на интервале (a, b), если график функции идет не ниже хорды, соединяющей любые две точки графика.

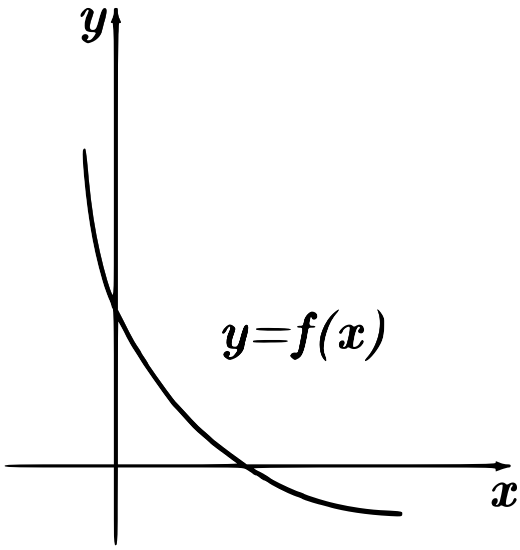

Рис. 12: Выпуклая функция

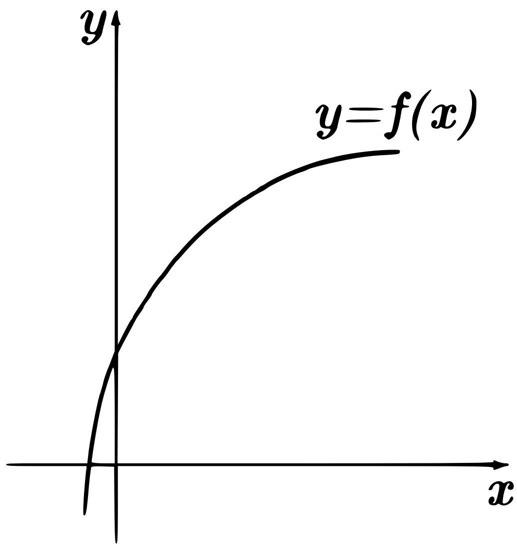

Рис. 13: Вогнутая функция

Теорема 6.1 *Пусть на интервале* (a, b) *функция* $y = f(x)$ *имеет вторую производную* $f''(x)$. *Функция выпукла на* (a, b) *тогда и только тогда, когда* $f''(x) \geq 0$ *при всех* $x \in (a, b)$, *и вогнута тогда и только тогда, когда* $f''(x) \leq 0$ *при всех* $x \in (a, b)$.

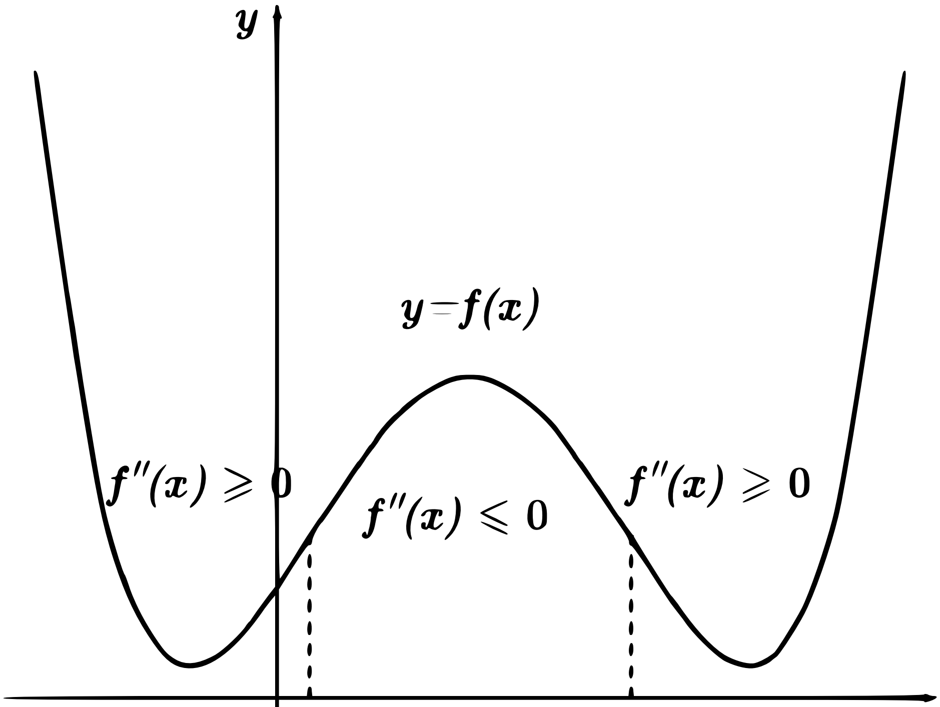

Рис. 14

6.2. Точки перегиба

Определение 6.2 *Точкой перегиба функции* $f(x)$ *называется такая точка* $x_0 \in (a, b)$, *в которой выпуклость сменяется на вогнутость. Другими словами, точка перегиба* $x_0 \in (a, b)$ *разделяет некоторую* -окрестность *точки на два интервала* $(x_0 - \delta, x_0)$ *и* $(x_0, x_0 + \delta)$, *на одном из которых функция выпукла, а на другом – вогнута.*

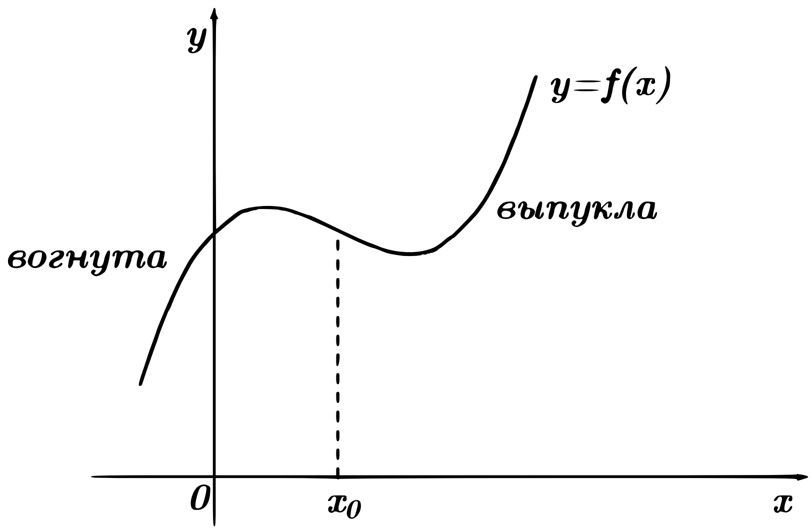

Рис. 15

Необходимое условие точки перегиба

Теорема 6.2 *Пусть* $x_0 \in (a, b)$ *– точка перегиба функции* $f(x)$ *и существует* $f''(x_0)$. *Тогда* $f''(x_0) = 0$.

Таким образом, если $x_0 \in (a, b)$ – точка перегиба, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует (в частности, $f''(x_0) = \infty$).

Приведем примеры.

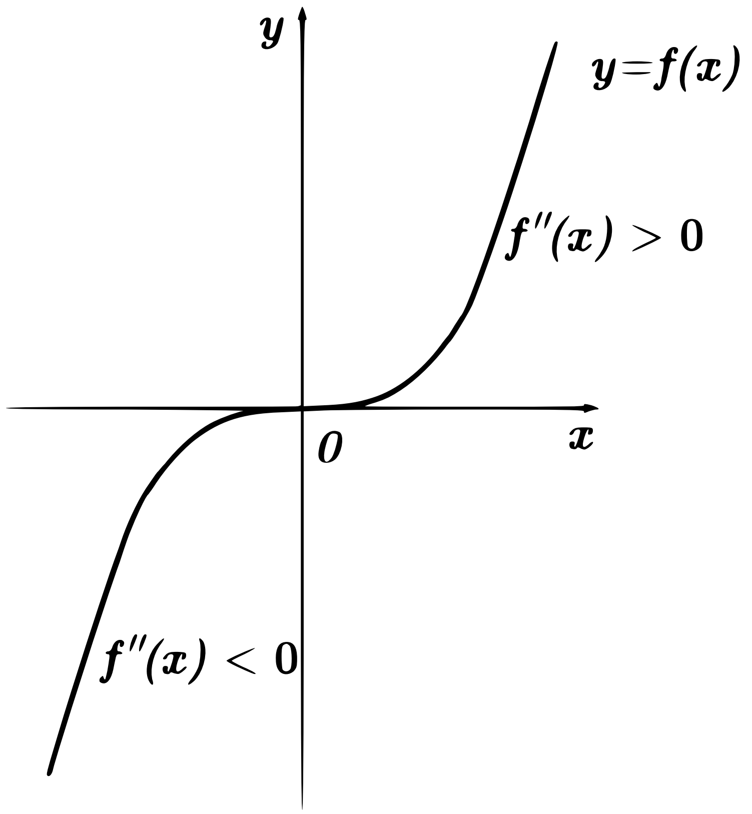

Рис. 16

Точка 0 – точка перегиба функции $f(x) = x^3$. Здесь $f''(0) = 0$.

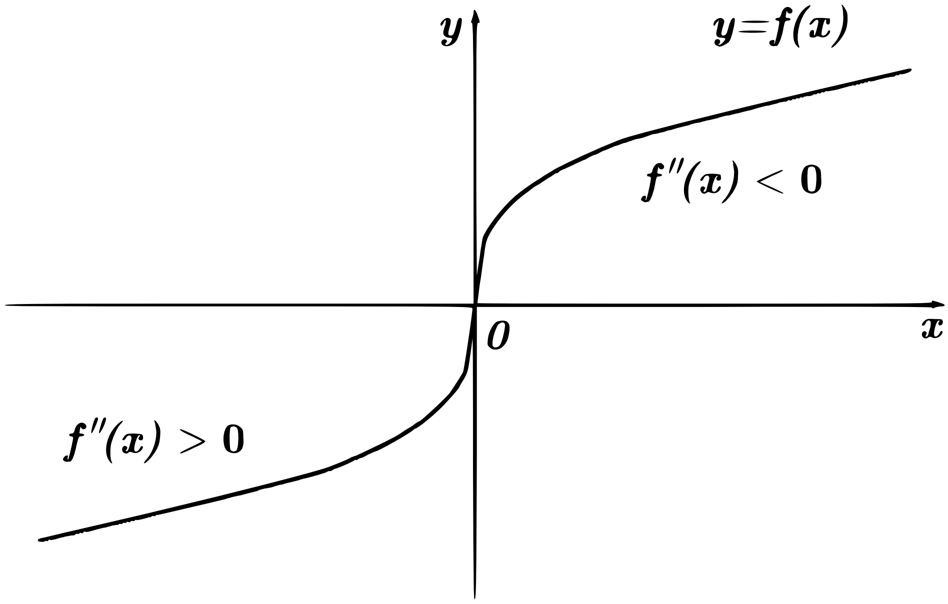

Рис. 17

Точка 0 – точка перегиба функции$f(x) = \sqrt[3]{x}$.Здесь $f''(0) = \infty$.

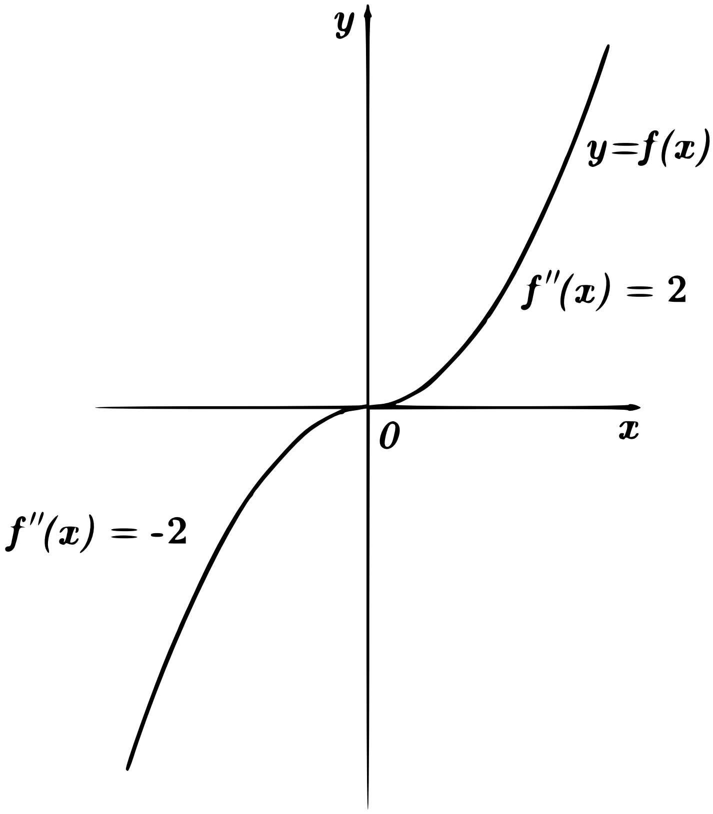

Рис. 18

Точка 0 – точка перегиба функции $f(x) = x^2 signx$. Здесь $f'(x) = 2|x|$, и, следовательно, $f''(0)$ не существует. Напомним, что

$$signx = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, \ x = 0 \\ 1, \ x > 0 \end{cases}$$

Достаточное условие точки перегиба

Теорема 6.3 *Пусть $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, непрерывную в этой точке. Если $f''(x_0) = 0$ и при переходе через точкуx_0вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$.*

Пример 6.1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции $f(x) = x^4 - 2x^2$. Указать точки перегиба.

<u>Решение</u>: Вторая производная $f''(x) = 12x^2 - 4$. $f''(x)$ равна нулю в точках

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Чтобы найти интервалы выпуклости, решим неравенство $f''(x) > 0$. Решением является объединение интервалов

$$x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right).$$

Для нахождения интервала вогнутости нужно решить неравенство $f''(x) < 0$. Решением является

$$x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Полученные данные заносим в таблицу. На основании изменения знака второй производной делаем вывод, что точки

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

являются точками перегиба.

	$f''(x)$	$f(x)$
$x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$+$	выпукла (вниз)
$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	точка перегиба
$x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-$	вогнута (выпукла вверх)
$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	точка перегиба

	$f''(x)$	$f(x)$
$x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$	+	выпукла (вниз)

Поведение функции можно проиллюстрировать следующим графиком.

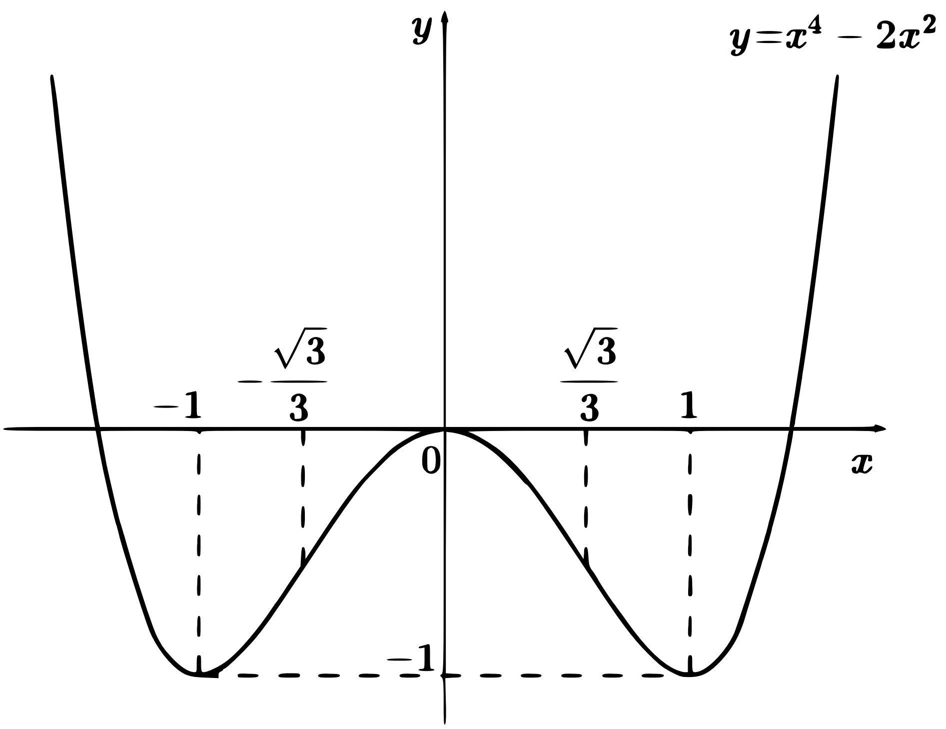

Рис. 19

6.3. Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой. В зависимости от поведения аргумента при этом, различаются два вида асимптот: вертикальные и наклонные. Для удобства сформулируем отдельно определения вертикальной и горизонтальной асимптот.

Определение 6.3 *Вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *называется прямая* $x = a$, *если* $f(x) \to +\infty$ *или* $f(x) \to -\infty$ *при каком-либо из условий:* $x \to a+, x \to a-, x \to a$.

Определение 6.4 *Наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ *называется прямая* $y = kx + b$, *если*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Таким образом, существование наклонной асимптоты $y = kx + b$ у кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ означает, что данная функция при $x \to +\infty$ ведет себя почти как линейная функция, т. е. отличается от линейной функции $y = kx + b$ на бесконечно малую при $x \to +\infty$.

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$.

В случае, если $k = 0$, наклонная асимптота называется *горизонтальной*. Таким образом, прямая $y = b$ – горизонтальная асимптота при $x \to +\infty (x \to -\infty)$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f\,(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f\,(x) = b$ соответственно.

Теорема 6.4 *Прямая* $y = kx + b$ *является наклонной асимптотой для графика* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$$

соответственно при $x \to -\infty$, *когда*

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx].$$

Для нахождения наклонной асимптоты нужно сначала найти k, т. е. вычислить первый из указанных пределов. Если этот предел не существует, то наклонной асимптоты у графика нет. Если предел существует ($k < \infty$), то затем вычисляетсяb. Если какой-либо из этих двух пределов не существует, то нет и наклонной асимптоты.

Пример 6.2. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Решение: График $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = 1$, поскольку $\lim\limits_{x\to 1} f\,(x) = \infty$, и горизонтальную асимптоту $y = 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty} f\,(x) = 0$.

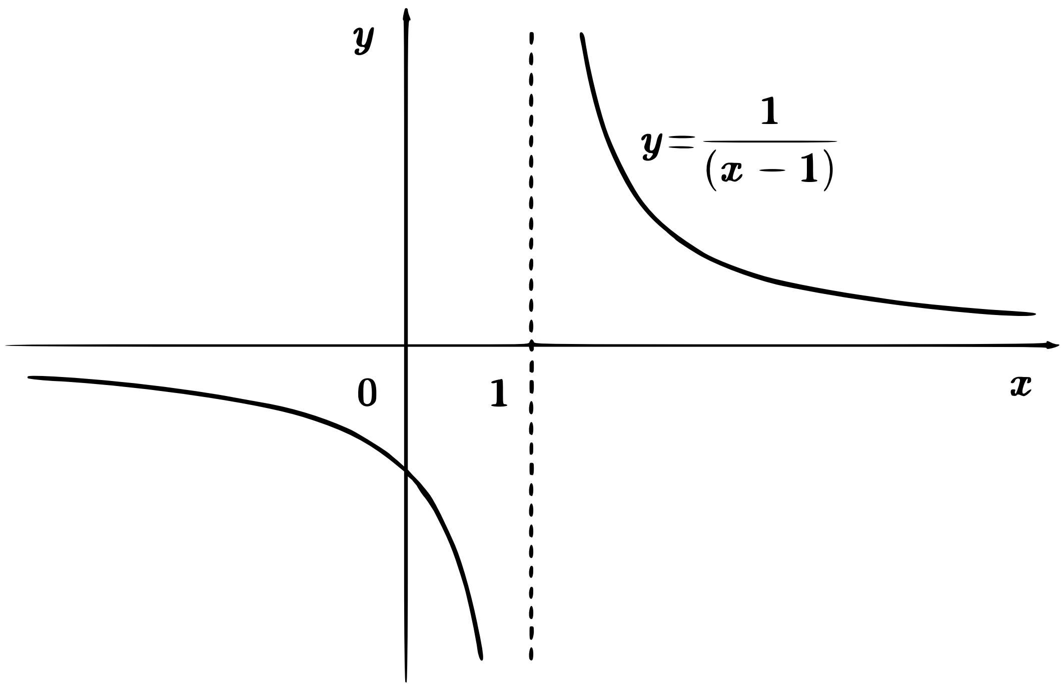

Рис. 20

Пример 6.3. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Решение: График этой функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0+} f\,(x) = +\infty$,и наклонную асимптоту $y = \frac{x}{2}$ при $x \to +\infty$ (вычислить коэффициенты k и b самостоятельно).

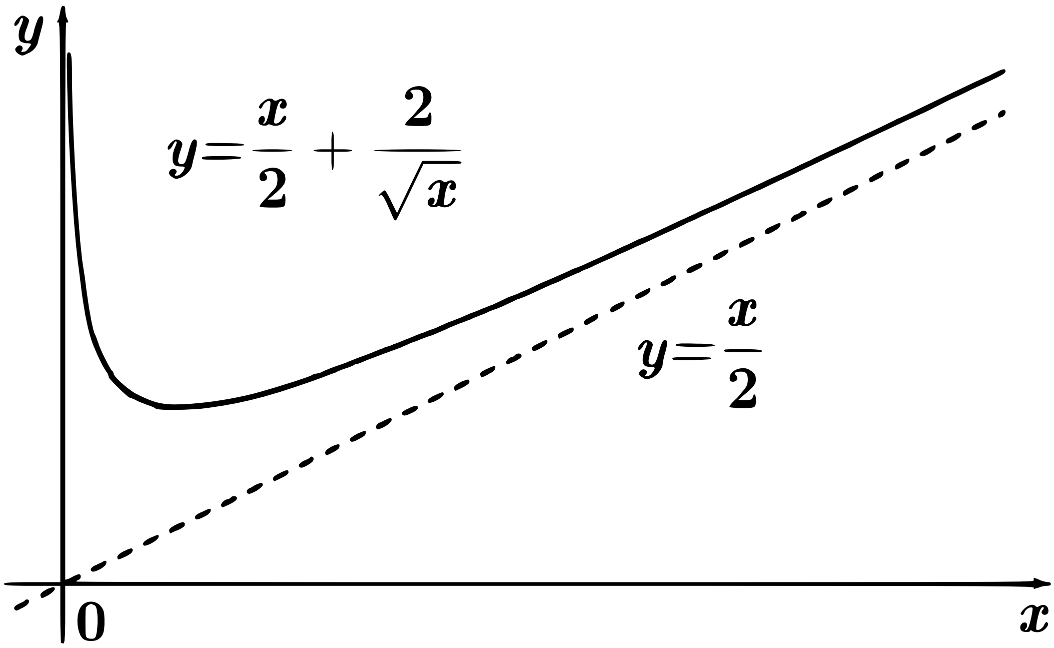

Рис. 21

7. Общая схема исследования функции и построение графиков

Общая схема исследования функции состоит из трех этапов. Эта схема даст нам практический способ построения графика функции, отражающего основные черты её поведения.

Первый этап – элементарное исследование функции.

Пусть дана функция $f(x)$. Её элементарное исследование включает следующие процедуры.

1. Найти её область определения $D(f)$.
2. Выяснить общие свойства функции, которые помогут в определении её поведения:
   - является ли функция чётной либо нечетной,
   - является ли функция периодической.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти точки разрыва функции и выяснить поведение функции в окрестности этих точек.

5. Выяснить поведение функции в окрестности граничных точек, включая и несобственные точки $-\infty$ и $+\infty$.
6. Найти асимптоты.

Результатом элементарного исследования является построение эскиза графика функции.

Второй этап – исследование функции с помощью первой производной.

1. Найти первую производную заданной функции $f(x)$.
2. Найти критические точки первого рода.
3. Найти участки возрастания и убывания функции.
4. Определить локальные экстремумы.

Третий этап – исследование функции с помощью второй производной.

1. Найти вторую производную заданной функции $f(x)$.
2. Найти точки, где вторая производная равна нулю или не существует.
3. Найти участки выпуклости и вогнутости графика функции.
4. Найти точки перегиба.

Полученные в каждом пункте результаты последовательно фиксируем на рисунке в качестве элементов искомого графика и в итоге получаем график функции.

Пример 7.1. Исследовать функцию и построить её график.

Решение: *Первый этап – элементарное исследование функции.*

1. Область определения функции: $x \neq 2$.
2. Функция не является ни четной, ни нечетной; не является периодической; не является знакопостоянной.
3. Пересечение с осью Ox: $x = -1; y = 0$; с осью Oy: $x = 0$; $y = \frac{1}{4}$.
4. Точка разрыва функции $x = 2$.
5. Поведение функции в окрестности граничных точек, включая и несобственные точки $-\infty$и $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f\,(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f\,(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2+} f\,(x) = \lim_{x \to 2+} \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2-} f\,(x) = \lim_{x \to 2-} \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2} = +\infty$$

6. Прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота; горизонтальных асимптот не существует, поскольку $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f\,(x) = \pm\infty$. Найдем правую наклонную асимптоту:

$$k_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, b_+ = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 7.$$

Таким образом, правая наклонная асимптота: $y = x + 7$. Найдем левую наклонную асимптоту:

$$k_- = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, b_- = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 7.$$

Таким образом, левая наклонная асимптота совпадает с правой: $y = x + 7$.

Второй этап – исследование функции с помощью первой производной.

1. Найдем первую производную заданной функции $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{3(x+1)^2(x-2)^2 - (x+1)^3 2(x-2)}{(x-2)^4} =$$
$$= \frac{(x+1)^2(x-8)}{(x-2)^3}$$

2. Найдем критические точки I рода, т. е. те точки, в которых $f(x)$ определена и непрерывна, а первая производная равна нулю $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует. Первая производная $f'(x_0) = 0$ при $x = -1 и x = 8$. В точке $x = 2$ функция $f(x)$ не определена.

3. Найдем участки возрастания и убывания функции и экстремумы. Для описания поведения функции составим следующую таблицу:

	$f'(x)$	$f(x)$
$x \in (-\infty; -1)$	$+$	возрастает
$x = -1$	0	
$x \in (-1; 2)$	$+$	возрастает
$x = 2$	$\nexists$	точка разрыва
$x \in (2; 8)$	$-$	убывает
$x = 8$	0	точка локального минимума $f_{min} = \frac{81}{4}$
$x \in (8; +\infty)$	$+$	возрастает

Третий этап – исследование функции с помощью второй производной.

1. Найдем вторую производную заданной функции:

$$f''(x) = \frac{54(x+1)}{(x-2)^4}$$

2. Вторая производная равна нулю при $x = -1$.
3. Участки выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба определяются на основании следующей таблицы.

	$f''(x)$	$f(x)$
$x \in (-\infty; -1)$	$-$	выпукла вверх
$x = -1$	0	точка перегиба
$x \in (-1; 2)$	$+$	выпукла вниз
$x = 2$	$\nexists$	точка разрыва
$x \in (2; +\infty)$	$+$	выпукла вниз

По результатам исследования строим график.

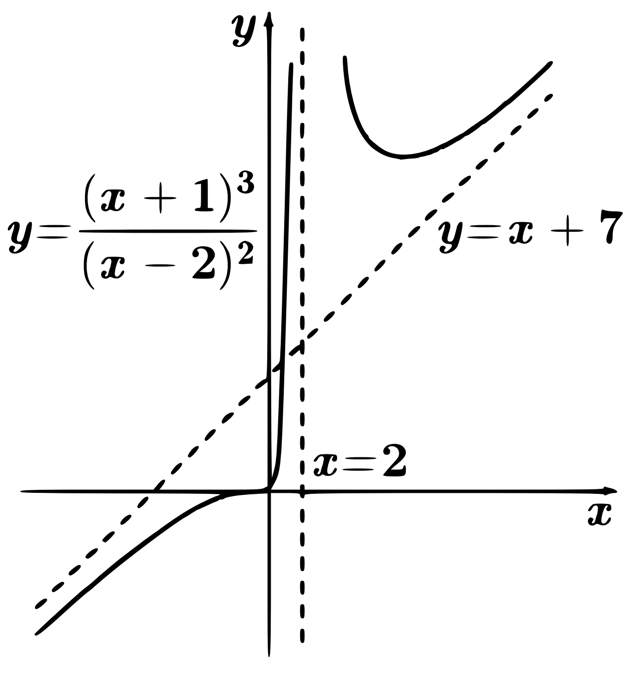

Рис. 22

Пример 7.2. Исследовать функцию $y = xe^x$ и построить её график.

Решение: Исследование функции будем проводить по схеме, описанной в предыдущем примере.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной; не является периодической; при $x > 0 f(x) > 0$, при $x < 0 f(x) < 0$.

3. График пересекает оси координат в точке $(0; 0)$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$. Таким образом, $y = 0$ – левая горизонтальная асимптота. Вертикальных асимптот нет.

5. Найдем правую наклонную асимптоту:

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Таким образом, наклонных асимптот нет.

6. В данном случае функция бесконечно дифференцируемая. Для определения точек локального экстремума найдем стационарные точки, т. е. точки, в которых первая производная равна нулю. $f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$, $f'(x) = 0$ при $x = -1$. Это и есть стационарная точка. Производная $f'(x) < 0$ при $x < -1$ и $f'(x) > 0$ при $x > -1$, следовательно, $x = -1$ – точка локального минимума.

7. Для определения промежутков выпуклости и вогнутости найдем точки, в которых вторая производная равна нулю.

$$f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f''(x) = (x+2)e^x, f''(x) = 0$$

при $x = -2$.

Результаты исследований занесем в таблицу.

	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$
$x \in (-\infty; -2)$	$-$	$-$	убывает выпукла вверх
$x = -2$	$-$	0	точка перегиба
$x \in (-2; -1)$	$-$	$+$	убывает выпукла вниз
$x = -1$	0	$+$	локальный минимум $f_{min} = -e^{-1}$
$x \in (-1; +\infty)$	$+$	$+$	возрастает выпукла вниз

По результатам исследования строим график.

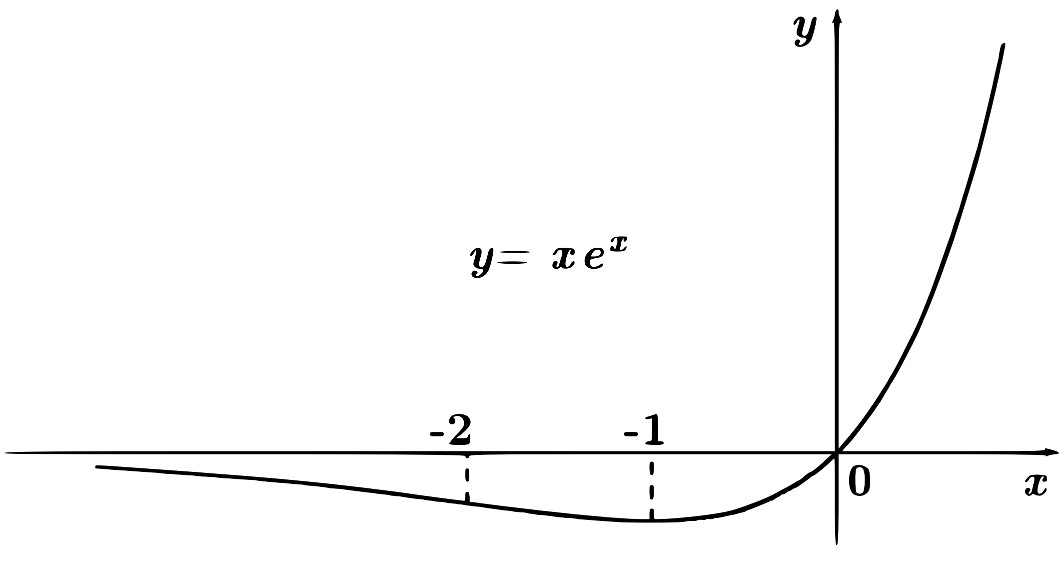

Рис. 23

<u>Пример 7.3.</u> Исследовать функцию $y = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$ и

построить её график.

Решение:

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной; не является периодической.

3. Пересечение с осями: график пересекает ось Oy в точке $x = 0, y = 5$. Для нахождения пересечений графика с осью Ox следует решить уравнение $2x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$. Решением данного уравнения является единственный корень $x_0 \approx -0{,}919$.

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, следовательно, наклонных асимптот нет. Вертикальных асимптот нет (почему?).

Дальнейшее исследование и построение графика предлагается провести самостоятельно. Для проверки решения приведем ответ.

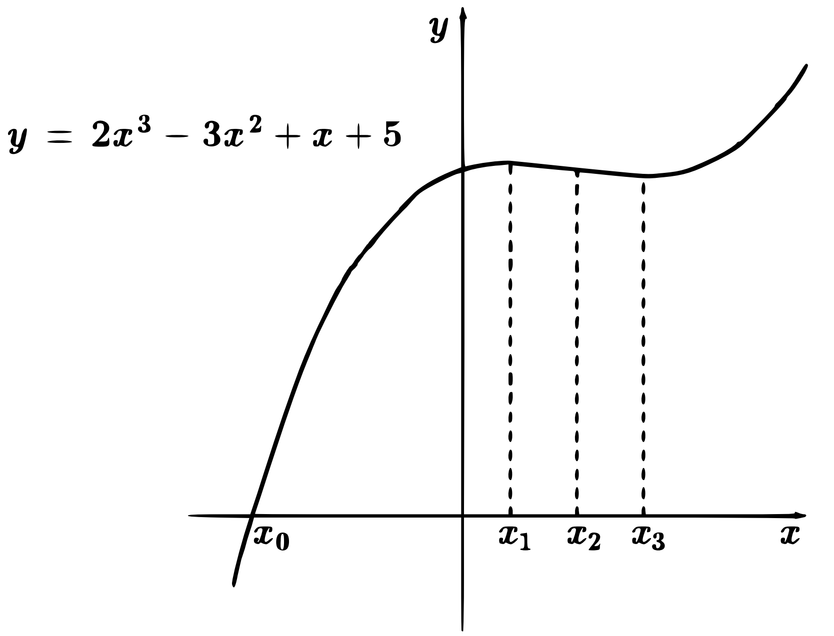

Рис. 24

Здесь $x_0 \approx -0{,}919, x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}211$ – точка локального максимума, $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}789$ – точка локального минимума, точка $x_2 = \frac{1}{2}$ – точка перегиба.

8. Формула Тейлора

8.1. Многочлен Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ некоторой точки $x_0 \in R$ и имеет всюду в этой окрестности производные $f^{(k)}(x)$ при $k = 1,2,\dots,n$. *Многочленом Тейлора* степени n в точке x_0 называется многочлен $P(x)$ степени n такой, что его значение и значение всех его производных, вычисленные в точкеx_0,равны соответствующим значениям функции$f(x)$и её производных$f^{(k)}(x)$до порядка n:

$$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0);\, k = 0,1,2,\dots,n.$$

Многочлен Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

8.2. Остаточный член в формуле Тейлора

Разность $R_n(x) = f(x) - P(x)$ между функцией $f(x)$ и её многочленом Тейлора называется n-м *остаточным членом.*

Формула

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0.

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную $(n + 1)$-ю производную. Тогда $R_n(x) = f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$.

Напомним, что через $o((x - x_0)^n)$ обозначается функция, имеющая более высокий порядок малости, чем $(x - x_0)^n$, т. е. такая функция, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

В этом случае формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Это равенство называется формулой Тейлора с остаточным членом в *форме Пеано*.

Пусть при всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ существует $(n + 1)$-я производная $f^{(n+1)}(x)$. Тогда для любого x существует точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая, что

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Используя это представление остаточного члена, получаем формулу Тейлора с остаточным членом в *форме Лагранжа*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Из формулы Тейлора при $x \to x_0$ получается приближённая формула

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

которая дает возможность приближённого нахождения значений функции $f(x)$ для значений x близких к x_0.

Пусть известно, что $(n+1)$-я производная ограничена: $\left|f^{(n+1)}(x)\right| < M$.

Тогда из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем оценку погрешности

$$|f(x) - P(x)| < \frac{M}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

8.3. Формула Тейлора для некоторых элементарных функций

Рассмотрим некоторые элементарные функции и найдем для них многочлены Тейлора при $x_0 = 0$.

1. $f(x) = e^x$. Все производные этой функции совпадают с ней: $f^{(k)}(x) = e^x$, следовательно, коэффициенты Тейлора в точке $x_0 = 0$ равны

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{e^0}{k!} = \frac{1}{k!}, k = 0,1,2, \ldots, n.$$

Поэтому формула Тейлора для экспоненты такова:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

2. $f(x) = sinx$. Её производные чередуются в таком порядке:

$$f'(x) = cosx, f''(x) = -sinx, f'''(x) = -cosx, f^{(4)}(x) = sinx,$$

а затем цикл повторяется. Поэтому при $x_0 = 0$ также возникает повторение:

$$f(0) = sin0 = 0, f'(0) = cos0 = 1, f''(0) = -sin0 = 0,$$
$$f'''(0) = -cos0 = -1, f^{(4)}(0) = sin0 = 0,$$

и, следовательно, все производные с чётными номерами равны 0, а производные с нечётными номерами равны 1.

Получаем формулу Тейлора для синуса:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x).$$

Заметим, что можно записать остаточный член$R_{2k}(x)$вместо$R_{2k-1}(x)$,поскольку слагаемое порядка$2k$равно 0.

Аналогичным образом выводятся разложения по формуле Тейлора других элементарных функций. Приведем часто используемую таблицу основных разложений.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x)$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x)$$

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + R_n(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x)$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x)$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x)$$

Отметим, что формулу *Тейлора* при $x_0 = 0$ часто называют формулой *Маклорена*.

8.4. Применение формулы Тейлора

Рассмотрим основные типы задач, связанные с формулой Тейлора.

8.4.1. Разложение функций по формуле Тейлора в окрестности точки x_0

Пример 8.1. Разложить функцию $f(x) = xe^{x^2}$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Решение: Напишем разложение для экспоненты

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + R_n(z)$$

и положим в нём $z = x^2$:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + R_n(x^2).$$

Умножим левую и правую части этой формулы на x:

$$xe^{x^2} = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{n!} + R_{2n+2}(x).$$

Пример 8.2. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{7x+2}$ в окрестности точки $x_0 = 1$.

Решение: Проведем вспомогательные преобразования заданной функции с целью выделения степени разложения $(x - 1)$

$$f(x) = \frac{1}{7x+2} = \frac{1}{7(x-1)+9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{7}{9}(x-1)+1}.$$

Далее, используя разложение функции

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x),$$

получаем

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{7}{9}(x-1)+1} = \frac{1}{9} \cdot \left\{1 - \frac{7}{9}(x-1) + \left[\frac{7}{9}(x-1)\right]^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \left[\frac{7}{9}(x-1)\right]^n \right\} + R_n(x-1).$$

8.4.2. Вычисление пределов (раскрытие неопределенностей)

Разберём теперь пример того, как полученные разложения элементарных функций можно использовать для раскрытия некоторых неопределенностей.

Пример 8.3. Вычислить $\lim\limits_{xtowart0} \frac{sinx - x}{x^3}$.

Решение: Запишем формулу Тейлора для $f(x) = sinx$:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left[-\frac{1}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^3}\right]$$

$$= -\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

8.4.3 Приближенные вычисления

Задачи, связанные с приближенными вычислениями уже были рассмотрены в разделе 4.2. Формула Тейлора дает возможность оценить погрешность в таких вычислениях. Это связано с оценкой остаточного члена.

Пример 8.4. Оценить точность приближенного вычисления $\sqrt{3{,}996}$ в разделе 4.2.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}$. Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

где ξ – некоторая точка, лежащая между $x_0=4$ и x. Следовательно, погрешность в приближенном равенстве

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

не превосходит

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\xi\sqrt{\xi}}\cdot(\Delta x)^2<\frac{1}{8}\cdot\frac{0{,}004^2}{3{,}99\sqrt{3{,}99}}<$$

$$<\frac{1}{8}\cdot\frac{0{,}004^2}{3{,}99\cdot 1{,}9}<0{,}0000003.$$

Таким образом, имеем

$$\sqrt{3{,}996}=\sqrt{4-0{,}004}\approx\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}=1{,}999\pm 0{,}0000003.$$

СОДЕРЖАНИЕ