Procesos evolutivos

> La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias es una de las herramientas básicas de la ciencia matemática. Esta teoría hace posible el estudio de todos los procesos evolutivos que son deterministas, finito-dimensionales y diferenciables. — V.I. Arnold

Un proceso evolutivo:

(a) es finito-dimensional cuando el conjunto de posibles estados del proceso, denominado *espacio de fase*, está identificado con una variedad diferenciable finito-dimensional;

(b) es determinista cuando los estados futuro y pasado están completamente determinados por el estado presente del proceso, y además dependen continuamente respecto al estado presente;

(c) es diferenciable si la dependencia de un estado respecto al tiempo es diferenciable.

La identificación de los estados de un sistema con puntos del espacio de fase (los puntos de fase), permite la geometrización de cualquier proceso evolutivo. Si el espacio de fase es U, el espacio de fase ampliado es $\Omega = I \times U$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo (el dominio temporal).

Definición 1 *Un proceso evolutivo con espacio de fase ampliado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y dominio $D \subset \mathbb{R} \times \Omega$ es una aplicación continua*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (t; t_0, x_0) & \longrightarrow & \Phi(t; t_0, x_0) \end{array}$$

tal que:

(a) *D es abierto y, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$, $I(t_0, x_0) = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, t_0, x_0) \in D\}$ es un intervalo abierto (el intervalo temporal de la evolución con condición inicial (t_0, x_0));*

(b) *Para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$, $t_1 \in I(t_0, x_0)$:*

  (b.1) *$t_0 \in I(t_0, x_0)$ y $\Phi(t_0; t_0, x_0) = x_0$;*

  (b.2) *$t_2 \in I(t_1, \Phi(t_1; t_0, x_0))$ si, y sólo si, $t_2 \in I(t_0, x_0)$, y $\Phi(t_2; t_1, \Phi(t_1; t_0, x_0)) = \Phi(t_2; t_0, x_0)$.*

(c) *Φ es derivable respecto a t, y la derivada parcial $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.*

El campo vectorial de velocidades de fase del proceso evolutivo es la apliación continua

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (t, x) & \longrightarrow & \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t; t, x). \end{array}$$

La ley del proceso evolutivo es la ecuación diferencial definida en Ω, $\dot{x} = f(t, x)$. Tal ecuación codifica la relación entre la velocidad del proceso y el estado del mismo en cada instante.

Proposición 1 *Sea $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$ un proceso evolutivo con dominio $D \subset \mathbb{R} \times \Omega$, y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ el campo vectorial de velocidades de fase en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$, $\Phi(\cdot; t_0, x_0) : I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$ es solución del problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.*

Dem.: Obviamente, se satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$, pues $\Phi(t_0; t_0, x_0) = x_0$. Por otro lado, para todo $t \in I(t_0, x_0)$,

$$\begin{aligned} f(t, \Phi(t; t_0, x_0)) &= \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t; t, \Phi(t; t_0, x_0)) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\Phi(t + h; t, \Phi(t; t_0, x_0)) - \Phi(t; t, \Phi(t; t_0, x_0))) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\Phi(t + h; t_0, x_0) - \Phi(t; t_0, x_0)) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t; t_0, x_0), \end{aligned}$$

por lo que $\Phi(\cdot; t_0, x_0)$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$. $\square$

Hipótesis de Picard

El problema fundamental de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias es construir el proceso evolutivo asociado a una ecuación diferencial. Consideraremos tal problema en el caso que el campo vectorial de velocidades de fase no sólo es continuo, sino que satisfsace condiciones de tipo Lipschitz.

Definición 2 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de velocidades de fase en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se dice que f satisface la hipótesis de Picard si f es localmententente Lipschitz respecto a x en Ω, esto es, para todo $(t_*, x_*) \in \Omega$ existen $a, b > 0$ tal que $\bar{I}_a(t_*) \times \bar{B}_b(x_*) \subset \Omega$ y existe $L \geq 0$ tal que:*

$$t \in \bar{I}_a(t_*), x_1, x_2 \in \bar{B}_b(x_*) \Longrightarrow |f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq L|x_2 - x_1|.$$

Observamos que la hipótesis de Picard indica que f es Lipschitz respecto a x en un entorno compacto suficientemente pequeño de cualquier punto. Veamos que realmente no importa cuan pequeño es el entorno.

Proposición 2 (Locamente Lipschitz es equivalente a Lipschitz sobre compactos) *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente Lipschitz respecto a x en el abierto Ω. Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Entonces, $f_{|K}$ es Lipschitz respecto a x.*

Dem.: Recubrimos K con un número finito de cilindros $I_1 \times B_{r_1}(\bar{x}_1), \dots, I_m \times B_{r_m}(\bar{x}_m) \subset \Omega$, de modo que f sea Lipschitz respecto a x en cada uno de los cilindros $\bar{I}_1 \times \bar{B}_{2r_1}(\bar{x}_1), \dots, \bar{I}_m \times \bar{B}_{2r_m}(\bar{x}_m) \subset \Omega$, con constantes de Lipschitz $L_1, \dots, L_m$, respectivamente. Sea $r = \text{mín}(r_1, \dots, r_m)$. Sobre el compacto $\hat{K}_r = \{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid (t, x_1) \in K, (t, x_2) \in K, |x_1 - x_2| \geq r\}$, la función

$$(t, x_1, x_2) \longmapsto \frac{|f(t, x_2) - f(t, x_1)|}{|x_2 - x_1|}$$

es continua, y está acotada superiormente por un cierto $\hat{L}$. Entonces, para todo $(t, x_1), (t, x_2) \in K$:

- Si $|x_2 - x_1| \geq r$, entonces $|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq \hat{L}|x_2 - x_1|$;
- Si $|x_2 - x_1| < r$, entonces existe algún $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $(t, x_1) \in I_i \times B_{r_i}(\bar{x}_i)$, de modo que $|x_2 - \bar{x}_i| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - \bar{x}_i| < r + r_i \leq 2r_i$ y, por tanto, como $(t, x_1), (t, x_2) \in I_i \times B_{2r_i}(\bar{x}_i)$, se tiene $|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq L_i|x_2 - x_1|$.

Así, pues, $f_{|K}$ es Lipschitz respecto a x con constante $L = \text{máx}(L_1, \dots, L_m, \hat{L})$. □

Una clase de funciones que satisfacen la hipótesis de Picard es la de las funciones de clase C^1 respecto a x.

Proposición 3 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y de clase C^1 respecto a x en el abierto Ω. Entonces, f es continua y localmente Lipschitz respecto a x.*

Dem.: La función f es diferenciable con continuidad respecto a x, por lo que la aplicación diferencial respecto a x, $\mathrm{D}_x f : \Omega \to \mathbb{R}^{n \times n}$, es continua. Dado $(t_*, x_*) \in \Omega$ cualquiera, sean $a, b > 0$ suficientemente pequeños tal que $\bar{I}_a(t_*) \times \bar{B}_b(x_*) \subset \Omega$. Sea

$$L = \max_{(t,x) \in \bar{I}_a(t_*) \times \bar{B}_b(x_*)} |\mathrm{D}_x f(t, x)|,$$

que existe por el teorema de Weierstrass. Entonces, para todo $t \in \bar{I}_a(t_*), x_1, x_2 \in \bar{B}_b(x_*)$, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(t, x_2) - f(t, x_1)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(f(t, sx_2 + (1-s)x_1) \right) \, ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 \mathrm{D}_x f(t, sx_2 + (1-s)x_1)(x_2 - x_1) \, ds \right| \leq L|x_2 - x_1|, \end{aligned}$$

demostrando, pues, que f es Lipschitz respecto a x en $\bar{I}_a(t_*) \times \bar{B}_b(x_*)$. □

Teorema fundamental

Teorema 1 *Sea $\dot{x} = f(t,x)$ una ecuación diferencial definida en $\bar{I}_a(t_*)\times\bar{B}_b(x_*)$, con $(t_*,x_*)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y $a,b>0$, tal que $f:\bar{I}_a(t_*)\times\bar{B}_b(x_*)\to\mathbb{R}^n$ es continua, y Lipschitz respecto a x. Sea $M\geq 0$ tal que, para todo $(t,x)\in\bar{I}_a(t_*)\times\bar{B}_b(x_*)$, $|f(t,x)|\leq M$. Sean α,α_0,β tales que $0<\alpha\leq a$, $0\leq\alpha_0\leq\alpha$, $0\leq\beta\leq b$ y $(\alpha+\alpha_0)M+\beta\leq b$. Entonces, existe una única función continua*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_*: & \bar{I}_\alpha(t_*)\times\bar{I}_{\alpha_0}(t_*)\times\bar{B}_\beta(x_*) & \longrightarrow & \bar{B}_b(x_*) \\ & (t;t_0,x_0) & \longrightarrow & \Phi_*(t;t_0,x_0), \end{array}$$

y diferenciable respecto a t, tal que, para todo $(t;t_0,x_0)\in\bar{I}_\alpha(t_*)\times\bar{I}_{\alpha_0}(t_*)\times\bar{B}_\beta(x_*)$,

$$\frac{\partial\Phi_*}{\partial t}(t;t_0,x_0) = f(t,\Phi_*(t;t_0,x_0)),\ \ \Phi_*(t_0;t_0,x_0)=x_0.$$

Dem.: Sea L una constante de Lipschitz de f respecto a x. Consideremos en el espacio vectorial

$$X=\mathcal{C}^0(\bar{I}_\alpha(t_*)\times\bar{I}_{\alpha_0}(t_*)\times\bar{B}_\beta(x_*),\mathbb{R}^n)=\{\Phi:\bar{I}_\alpha(t_*)\times\bar{I}_{\alpha_0}(t_*)\times\bar{B}_\beta(x_*)\longrightarrow\mathbb{R}^n,\text{ continua }\},$$

la norma de Bielecki

$$\|\Phi\|_{\infty,L}=\sup\{e^{-L|t-t_0|}|\Phi(t;t_0,x_0)|\mid(t;t_0,x_0)\in\bar{I}_\alpha(t_*)\times\bar{I}_{\alpha_0}(t_*)\times\bar{B}_\beta(x_*)\}.$$

Tal norma es equivalente a la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$, pues $e^{-L(\alpha+\alpha_0)}\|\Phi\|_\infty\leq\|\Phi\|_{\infty,L}\leq\|\Phi\|_\infty$, por lo que $(X,\|\cdot\|_{\infty,L})$ es un espacio de Banach (un espacio vectorial normado y completo). En X, consideramos el subconjunto cerrado (y, por tanto, espacio métrico completo)

$$X_b=\mathcal{C}^0(\bar{I}_\alpha(t_*)\times\bar{I}_{\alpha_0}(t_*)\times\bar{B}_\beta(x_*),\bar{B}_b(x_*))=\{\Phi:\bar{I}_\alpha(t_*)\times\bar{I}_{\alpha_0}(t_*)\times\bar{B}_\beta(x_*)\longrightarrow\bar{B}_b(x_*),\text{ continua }\}.$$

Definimos la aplicación $\Gamma:X_b\to X_b$, denominada *operador de Picard*, mediante

$$\Gamma\Phi(t;t_0,x_0)=x_0+\int_{t_0}^t f(s,\Phi(s;t_0,x_0))\,ds,$$

donde $\Phi\in X_b$. Observemos que, obviamente, $\Gamma\Phi\in X$. Pero, además, $\Gamma\Phi\in X_b$, pues para todo $(t;t_0,x_0)\in\bar{I}_\alpha(t_*)\times\bar{I}_{\alpha_0}(t_*)\times\bar{B}_\beta(x_*)$,

$$|\Gamma\Phi(t;t_0,x_0)-x_*|\leq\left|\int_{t_0}^t|f(s,\Phi(s;t_0,x_0))|\,ds\right|+|x_0-x_*|\leq M(\alpha+\alpha_0)+\beta\leq b.$$

Veamos ahora que el operador de Picard es contractivo. Dadas $\Phi,\Psi\in X_b$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\|\Gamma\Psi-\Gamma\Phi\|_{\infty,L}&\leq\sup_{t,t_0,x_0}e^{-L|t-t_0|}\left|\int_{t_0}^t|f(s,\Psi(s;t_0,x_0))-f(s,\Phi(s;t_0,x_0))|\,ds\right|\\ &\leq\sup_{t,t_0,x_0}e^{-L|t-t_0|}\left|\int_{t_0}^t L|\Psi(s;t_0,x_0)-\Phi(s;t_0,x_0)|e^{-L|s-t_0|}e^{L|s-t_0|}\,ds\right|\\ &\leq\left(\sup_{t,t_0,x_0}\left(1-e^{-L|t-t_0|}\right)\right)\|\Psi-\Phi\|_{\infty,L}\\ &\leq\left(1-e^{-L(\alpha+\alpha_0)}\right)\|\Psi-\Phi\|_{\infty,L},\end{aligned}$$

donde los supremos son tomados respecto a $(t;t_0,x_0)\in\bar{I}_\alpha(t_*)\times\bar{I}_{\alpha_0}(t_*)\times\bar{B}_\beta(x_*)$. Por tanto, el factor de contracción de Γ es $\left(1-e^{-L(\alpha+\alpha_0)}\right)<1$.

El teorema del punto fijo de Banach implica, pues, que existe una única $\Phi_*\in X_b$ tal que $\Gamma\Phi_*=\Phi_*$. Este hecho es equivalente a la tesis del teorema, por la equivalencia entre la ecuación integral de Volterra y el problema de Cauchy correspondiente. $\square$

Existencia y unicidad de soluciones maximales

Consideraremos soluciones particulares de una edo. Un corolario del Teorema Fundamental es el siguiente teorema de existencia y unicidad local de solución de un problema de Cauchy.

Teorema 2 (Teorema de Picard)
Sea $\dot{x} = f(t,x)$ una ecuación diferencial, donde $f : \bar{I}_a(t_*) \times \bar{B}_b(x_*) \to \mathbb{R}^n$ es continua, y Lipschitz respecto a x. Sea $M = \max\{|f(t,x)| \mid (t,x) \in \bar{I}_a(t_*) \times \bar{B}_b(x_*)\}$. Sea $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$. Entonces, existe una única función diferenciable $\varphi : \bar{I}_\alpha(t_*) \to \bar{B}_b(x_*)$ solución del problema de Cauchy con c.i. $x(t_*) = x_*$. Además, φ es C^1.

Dem.: Basta aplicar el Teorema fundamental con $\alpha_0 = 0$, $\beta = 0$, y $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$. □

Observación 1 *Bajo la hipótesis de continuidad de f, se puede demostrar la existencia (pero no la unicidad) de solución del problema de Cauchy. Este resultado se conoce como* **Teorema de Peano**.

Del resultado de existencia y unicidad local de solución se deduce un resultado de unicidad global.

Teorema 3 (Unicidad global de soluciones)
Sea $\dot{x} = f(t,x)$ una ecuación diferencial, donde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz respecto a x en el abierto Ω. Sea $(t_0, x_0) \in \Omega$. Entonces, dadas dos soluciones $\varphi_i : I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, del problema de Cauchy con c.i. $x(t_0) = x_0$, se tiene que, para todo $t \in I_1 \cap I_2$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.

Dem.: Supongamos que existe $t \in I_1 \cap I_2$ tal que $\varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)$. Supongamos que $t > t_0$ (el caso $t < t_0$ se hace igual). Definimos

$$t_* = \inf\{t \geq t_0 \mid t \in I_1 \cap I_2,\ \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\},\ x_* = \varphi_1(t_*) = \varphi_2(t_*).$$

Se tiene que para todo $t \in [t_0, t_*]$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Como $(t_*, x_*) \in \Omega$, tomamos $a, b > 0$ de modo que $\bar{C}_{a,b}(t_*, x_*) := \bar{I}_a(t_*) \times \bar{B}_b(x_*) \subset \Omega$ y f sea Lipschitz respecto a x en tal cilindro. Sea $M = \max\{|f(t,x)| \mid (t,x) \in \bar{C}_{a,b}(t_*, x_*)\}$. Como, para $i = 1, 2$, $\lim_{t \to t_*} \varphi_i(t) = x_*$, sabemos que existe $\alpha > 0$ tal que, para $i = 1, 2$ y para todo $t \in \bar{I}_\alpha(t_*)$, $|\varphi_i(t) - x_*| \leq b$. Podemos suponer que, además, $\alpha M \leq b$.

Por el Teorema de Picard, existe una única función $\varphi : \bar{I}_\alpha(t_*) \to \bar{B}_b(x_*)$ solución del problema de Cauchy $x(t_*) = x_*$. Como $\varphi_{1|\bar{I}_\alpha(t_*)}$ y $\varphi_{2|\bar{I}_\alpha(t_*)}$ toman valores en $\bar{B}_b(x_*)$ y son solución del mismo problema de Cauchy, obtenemos que, para todo $t \in \bar{I}_\alpha(t_*)$, $\varphi_1(t) = \varphi(t) = \varphi_2(t)$, en contradicción con la definición de t_*. □

Pasamos ahora a considerar las soluciones que "no se pueden prolongar más", denominadas soluciones maximales.

Definición 3 *Se dice que una solución $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ de una edo $\dot{x} = f(t,x)$ es* maximal *si para toda solución $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ con $I \subset J$ y $\psi_{|I} = \varphi$ se tiene que $I = J$ (y, por tanto, $\psi = \varphi$).*

Teorema 4 (Existencia y unicidad de soluciones maximales)
Sea $\dot{x} = f(t,x)$ una ecuación diferencial, donde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz respecto a x en el abierto Ω. Sea $(t_0, x_0) \in \Omega$. Entonces, existe una única solución maximal del problema de Cauchy con c.i. $x(t_0) = x_0$, $\varphi : I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$. Además, el intervalo de definición de la solución maximal es abierto. Escribiremos $I(t_0, x_0) =]t_-(t_0, x_0), t_+(t_0, x_0)[$.

Dem.: Consideremos el conjunto de soluciones del problema de Cauchy con c.i. $x(t_0) = x_0$,

$$\mathcal{S}(t_0, x_0) = \{\psi : I_\psi \to \mathbb{R}^n \mid \psi \text{ es solución de } \dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0\},$$

que, obviamente, es no vacío. Definimos

$$I(t_0, x_0) = \bigcup_{\psi \in \mathcal{S}(t_0, x_0)} I_\psi$$

y $\varphi : I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$ mediante $\varphi(t) = \psi(t)$ si $\psi \in S(t_0, x_0)$ y $t \in I_\psi$. Observamos que la definición de $\varphi(t)$ no depende de la solución ψ escogida (con $t \in I_\psi$), por unicidad global de soluciones. Obviamente, φ es solución maximal del problema de Cauchy con c.i. $x(t_0) = x_0$, y no puede haber dos por unicidad global.

El intervalo de definición de la solución maximal, $I(t_0, x_0)$, tiene que ser abierto. Si fuera cerrado por alguno de los extremos, por ejemplo si $I(t_0, x_0) =]t_-, t_+]$, entonces, como $(t_+, x_+ = \varphi(t_+)) \in \Omega$, podríamos construir una solución con c.i. (t_+, x_+) que prolongaría a φ por la derecha, en contradicción con el hecho que φ es solución maximal. $\square$

El resultado siguiente nos indica que las soluciones se pueden prolongar hasta la frontera del dominio de definición de la ecuación diferencial.

Teorema 5 (Teorema de aproximación a la frontera)
Sea $\dot{x} = f(t, x)$ una ecuación diferencial, donde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz respecto a x en el abierto Ω. Sea $(t_0, x_0) \in \Omega$, y $\varphi :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ la correspondiente solución maximal. Entonces, $(t, \varphi(t)) \xrightarrow{t \to t_\pm} \partial\Omega$, esto es:

$$\forall K \subset \Omega \textit{ compacto, } \exists [a_-, a_+] \subset]t_-, t_+[\mid \forall t \in]t_-, t_+[\setminus [a_-, a_+], (t, \varphi(t)) \notin K.$$

Dem.: Demostraremos que $(t, \varphi(t)) \xrightarrow{t \to t_+} \partial\Omega$, pues el otro caso es análogo. Si $t_+ = +\infty$ el resultado es obvio. Supongamos, pues, que $t_+ < +\infty$, y que la tesis es falsa. Así,

$$\exists K \subset \Omega \text{ compacto} \mid \forall a_+ \in]t_-, t_+[, \exists t \in]a_+, t_+[\mid (t, \varphi(t)) \in K.$$

Por tanto, existe una sucesión de tiempos $(t_n)_n$ estrictamente creciente y convergente a t_+ tal que, para todo n, $(t_n, \varphi(t_n)) \in K \subset \Omega$. Como K es compacto, y tomando parciales si es necesario, podemos suponer que la sucesión $(t_n, \varphi(t_n))_n$ es convergente a un punto $(t_+, x_+) \in K \subset \Omega$.

Sean $a, b > 0$ tal que $\bar{C}_{a,b}(t_+, x_+) := \bar{I}_a(t_+) \times \bar{B}_b(x_+) \subset \Omega$ y f sea Lipschitz respecto a x en tal cilindro. Sea $M = \max\{|f(t, x)| \mid (t, x) \in \bar{C}_{a,b}(t_+, x_+)\}$. Tomamos $0 < \alpha_0 = \alpha \leq a$ y $\beta > 0$ tal que $2\alpha M + \beta \leq b$, de modo que podemos aplicar el Teorema Fundamental para encontrar $\Phi_+ : \bar{C}_{\alpha,\alpha,\beta}(t_+; t_+, x_+) \to \bar{B}_b(x_+)$ tal que, para todo $(t_0, x_0) \in \bar{C}_{\alpha,\beta}(t_+, x_+)$, $\Phi_+(\cdot; t_0, x_0) : \bar{I}_\alpha(t_+) \to \bar{B}_b(x_+)$ es solución (local) del problema de Cauchy con c.i. $x(t_0) = x_0$.

Como $(t_n, \varphi(t_n)) \to (t_+, x_+)$, existe un $n_0 > 0$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $(t_n, \varphi(t_n)) \in \bar{C}_{\alpha,\beta}(t_+, x_+)$. En particular, la solución (local) $\Phi_+(t; t_{n_0}, \varphi(t_{n_0}))$ con c.i. $x(t_{n_0}) = \varphi(t_{n_0})$ está definida en el intervalo $I_\alpha(t_+)$. Obviamente, la solución maximal $\varphi(t)$ también satisface la c.i., pero está definida hasta t_+. Esto está en contradicción con el hecho de ser solución maximal, porque hemos visto que la podemos prolongar hasta $t_+ + \alpha$. $\square$

Corolario 1 (Teorema de extensión hasta la frontera de un compacto)
Sea $\dot{x} = f(t, x)$ una ecuación diferencial, donde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz respecto a x en el abierto Ω. Sea $(t_0, x_0) \in \Omega$, y $\varphi :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ la correspondiente solución maximal. Entonces, para todo $K \subset \Omega$ entorno compacto de (t_0, x_0) existe $[t_-^K, t_+^K] \subset]t_-, t_+[$ tal que para todo $t \in [t_-^K, t_+^K]$, $(t, \varphi(t)) \in K$, y $(t_\pm^K, \varphi(t_\pm^K)) \in \partial K$. Escribiremos $\bar{I}_K(t_0, x_0) = [t_-^K(t_0, x_0), t_+^K(t_0, x_0)]$.

Dem.: Basta definir $t_+^K = \inf\{t \in]t_0, t_+[\mid (t, \varphi(t)) \notin K\}$ y $t_-^K = \sup\{t \in]t_-, t_0[\mid (t, \varphi(t)) \notin K\}$, que están bien definidos por el teorema de aproximación a la frontera. $\square$

Continuidad y Lipschitzianidad respecto a condiciones iniciales

Para estudiar la continuidad y Lipschitzianidad respecto a condiciones iniciales, se ha de comparar la distancia entre soluciones por distintas condiciones iniales. Para realizar tales estimaciones es fundamental la resolución de desigualdades integrales.

Lema 1 (Lema de Gronwall)
Sea $u : I \to \mathbb{R}$ una función continua y no-negativa en un intervalo I, y $t_0 \in I$. Supongamos que, para todo $t \in I$, se tiene

$$u(t) \leq A + L\left|\int_{t_0}^{t} u(s)\ ds\right|,$$

donde A, L son constantes no negativas. Entonces, para todo $t \in I$,

$$u(t) \leq e^{L|t-t_0|}A.$$

Dem. lema: Sea $t \in I$ cualquiera, y $U_t = \max_{\bar{t}\in[t_0,t]} u(\bar{t})$. Iterando n veces la desigualdad, y acotando u por U_t en $[t_0, t]$, obtenemos que

$$\begin{aligned} u(t) &\leq A\sum_{k=0}^{n-1} L^k \left|\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{k-1}} 1\ dt_k \cdots dt_2\ dt_1\right| + U_t L^n \left|\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} 1\ dt_n \cdots dt_2\ dt_1\right| \\ &\leq A\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L^k}{k!}|t-t_0|^k + U_t\frac{L^n}{n!}|t-t_0|^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{L|t-t_0|}A, \end{aligned}$$

demostrando el lema. □lema

En lo siguiente, consideramos el conjunto de todas las soluciones maximales de una ecuación diferencial, y sus propiedades de continuidad, que derivan en la contrucción del proceso evolutivo asociado.

Teorema 6 (Proceso evolutivo asociado a una edo, localmente Lipschitz)
Sea $\dot{x} = f(t, x)$ una ecuación diferencial, donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz respecto a x en el abierto Ω. Para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$, sea $\Phi(\cdot; t_0, x_0) : I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$ la solución maximal del problema de Cauchy con c.i. $x(t_0) = x_0$. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D\subset\mathbb{R}\times\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (t;t_0,x_0) & \longrightarrow & \Phi(t;t_0,x_0) \end{array}$$

donde $D = \{(t; t_0, x_0) \mid (t_0, x_0) \in \Omega, t \in I(t_0, x_0)\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Entonces, Φ es un proceso evolutivo con dominio en D, cuya ley es la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$. Además, Φ es localmente Lipschitz respecto a $(t; t_0, x_0)$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ es localmente Lipschitz respecto a (t_0, x_0).

Dem.: Las leyes deterministas (b) son consecuencia de la unicidad de solución maximal en un problema de Cauchy. Basta observar que tanto $\Phi(t; t_1, \Phi(t_1; t_0, x_0))$ como $\Phi(t; t_0, x_0)$ son soluciones maximales del problema de Cauchy con c.i. $x(t_1) = \Phi(t_1; t_0, x_0)$.

Los lemas siguientes permitirán demostrar (a), esto es que D es abierto, y que Φ es continua, de hecho localmente Lipschitz. Como consecuencia de la relación $\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t; t_0, x_0) = f(t, \Phi(t; t_0, x_0))$ para todo $(t, t_0, x_0)) \in D$ se siguirá entonces (c), que $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ es continua. Además veremos que tal derivada parcial es localmente Lipschitz respecto a (t_0, x_0).

Lema 2 *Dado $(t_*, x_*) \in \Omega$ y $[a_1, a_2] \subset I(t_*, x_*)$, sea $r > 0$ suficientemente pequeño tal que*

$$\bar{\Delta}_r := \{(t, x) \mid t \in [a_1, a_2], |x - \Phi(t; t_*, x_*)| \leq r\} \subset \Omega.$$

Entonces, existe $\rho > 0$ tal que para todo $(t_0, x_0) \in \bar{\Delta}_\rho$, $[a_1, a_2] \subset I(t_0, x_0)$, y para todo $t \in [a_1, a_2]$, $|\Phi(t; t_0, x_0) - \Phi(t; t_*, x_*)| \leq r$, esto es, $(t, \Phi(t; t_0, x_0)) \in \bar{\Delta}_r$. En consecuencia, $[a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_\rho \subset D$.

Dem. lema: Sea $0 < \rho < r$, cualquiera (a fijar más adelante). Dado $(t_0, x_0) \in \bar{\Delta}_\rho$, sea $[t_-^r, t_+^r] = \bar{I}_{\bar{\Delta}_r}(t_0, x_0)$ el intervalo temporal en el que el grafo de la solución por (t_0, x_0) está en $\bar{\Delta}_r$, dado por el teorema de extensión hasta la frontera de un compacto. Además, $(t_\pm^r, \Phi(t_\pm^r; t_0, x_0)) \in \partial\bar{\Delta}_r$, donde

$$\partial\bar{\Delta}_r = \{(a_i, x) \mid i \in \{1,2\}, |x - \Phi(a_i; t_*, x_*)| \le r\} \cup \{(t, x) \mid t \in [a_1, a_2], |x - \Phi(t; t_*, x_*)| = r\}.$$

Sea L una constante de Lipschitz de f en el compacto $\bar{\Delta}_r$. Así, para todo $t \in [t_-^r, t_+^r]$:

$$\begin{aligned}|\Phi(t; t_0, x_0) - \Phi(t; t_*, x_*)| &= |\Phi(t; t_0, x_0) - x_0 + x_0 - \Phi(t_0; t_*, x_*) + \Phi(t_0; t_*, x_*) - \Phi(t; t_*, x_*)| \\ &\le |x_0 - \Phi(t_0; t_*, x_*)| + \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, \Phi(s, t_0, x_0)) - f(s, \Phi(s; t_*, x_*)))\ ds \right| \\ &\le |x_0 - \Phi(t_0; t_*, x_*)| + L \left| \int_{t_0}^{t} |\Phi(s, t_0, x_0) - \Phi(s; t_*, x_*)|\ ds \right|\end{aligned}$$

y, aplicando el lema de Gronwall,

$$|\Phi(t; t_0, x_0) - \Phi(t; t_*, x_*)| \le e^{L|t-t_0|}|x_0 - \Phi(t_0; t_*, x_*)| \le e^{L|a_2-a_1|}\rho < r,$$

donde al final tomamos $\rho < e^{-L(a_2-a_1)}r$. Con tal elección, $t_-^r = a_1$ y $t_+^r = a_2$. □lema

Del lema anterior se sigue que D es abierto, pues dado $(t, t_*, x_*) \in D$ cualquiera, tomamos $[a_1, a_2] \subset I(t_*, x_*)$ tal que $t, t_* \in]a_1, a_2[$, y se obtiene que el entorno $[a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_\rho$ de (t, t_*, x_*) está incluido en D. Demostremos ahora que Φ es Lipschitz en tal entorno.

Lema 3 *En las hipótesis (y consecuencias) del lema anterior, Φ es Lipschitz en $[a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_\rho$. Además, $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ es Lipschitz respecto a (t_0, x_0) en $[a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_\rho$.*

Dem. lema: Sea $M = \max\limits_{(t,x)\in\bar{\Delta}_r} |f(t, x)|$. Sean $(t_1; t_0, x_0), (t_1'; t_0', x_0') \in [a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_\rho$ cualesquiera. Aplicando la ley de composición del proceso evolutivo Φ, obtenemos

$$|\Phi(t_1'; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0, x_0)| \le |\Phi(t_1'; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0', x_0')| + |\Phi(t_1; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0, x_0)|.$$

El primer término de la derecha es

$$\left| \int_{t_1}^{t_1'} f(s, \Phi(s; t_0', x_0'))\ ds \right| \le M|t_1' - t_1|.$$

Para acotar el segundo término usamos los mismos argumentos del lema anterior, y en particular el lema de Gronwall, de modo que

$$\begin{aligned}|\Phi(t_1; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0, x_0)| &\le e^{L|t_1-t_0'|}|x_0' - \Phi(t_0'; t_0, x_0)| \\ &\le e^{L(a_2-a_1)} (|x_0' - x_0| + |x_0 - \Phi(t_0'; t_0, x_0)|) \\ &\le e^{L(a_2-a_1)} (|x_0' - x_0| + M|t_0' - t_0|) .\end{aligned}$$

Por tanto,

$$|\Phi(t_1'; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0, x_0)| \le M|t_1' - t_1| + e^{L(a_2-a_1)}|x_0' - x_0| + Me^{L(a_2-a_1)}|t_0' - t_0|,$$

demostrando que Φ es Lipschitz en $[a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_\rho$.

Finalmente, para demostrar que $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ es Lipschitz respecto a (t_0, x_0) en $[a_1, a_2] \times \bar{\Delta}_\rho$, vemos que

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_1; t_0', x_0') - \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_1; t_0, x_0) \right| &= |f(t_1, \Phi(t_1; t_0', x_0')) - f(t_1, \Phi(t_1; t_0, x_0))| \\ &\le L|\Phi(t_1; t_0', x_0') - \Phi(t_1; t_0, x_0)| \\ &\le Le^{L(a_2-a_1)} (|x_0' - x_0| + M|t_0' - t_0|) ,\end{aligned}$$

obteniendo la condición de Lipschitz deseada. □lema

Con este lema acabamos la demostración del teorema. □

Regularidad respecto a condiciones iniciales y parámetros

A una familia de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$, donde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz respecto a x en el abierto Ω, le asociamos la familia de procesos evolutivos

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & D \subset \mathbb{R} \times \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (t; t_0, x_0, \lambda) & \longrightarrow & \Phi(t; t_0, x_0, \lambda) \end{array}$$

donde, para cada (t_0, x_0, λ), $\Phi(\cdot; t_0, x_0, \lambda) : I(t_0, x_0, \lambda) \to \mathbb{R}^n$ es la solución maximal del problema de Cauchy con c.i. $x(t_0) = x_0$ correspondiente al parámetro λ, y

$$D = \{(t; t_0, x_0, \lambda) \mid (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, t \in I(t_0, x_0, \lambda)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p.$$

Teorema 7 (Continuidad y Lipschitzianidad respecto a condiciones iniciales y parámetros) *Sea $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ una familia de ecuaciones diferenciales, donde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz respecto a x en el abierto Ω. Sea $\Phi : D \subset \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la familia de procesos evolutivos correspondiente. Entonces:*

a) *D es abierto, y Φ es continua y localmente Lipschitz respecto a $(t; t_0, x_0)$.*

b) *Si f es localmente Lipschitz respecto a λ, entonces Φ es localmente Lipschitz respecto a $(t; t_0, x_0, \lambda)$.*

Dem.: (Esquema) Los resultados desarrollados hasta este momento se pueden generalizar involucrando parámetros, obteniendo versiones paramétricas del Teorema Fundamental y del lema de existencia de dominios rectificables.

Si f es localmente Lipschitz respecto a λ, se pueden usar los argumentos basados en el lema de Gronwall utilizados en la demostración de la Lipschitzianidad respecto a $(t; t_0, x_0)$ para ver la Lipschitzianidad respecto a λ. $\square$

Teorema 8 (Diferenciabilidad respecto a condiciones iniciales y parámetros) *Sea $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ una familia de ecuaciones diferenciales, donde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ es continua y de clase C^1 respecto a x en el abierto Ω. Sea $\Phi : D \subset \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la familia de procesos evolutivos correspondiente. Entonces:*

a) *Φ es continua y C^1 respecto a $(t; t_0, x_0)$.*

b) *Si f es C^1 respecto a λ, entonces Φ es C^1 respecto a $(t; t_0, x_0, \lambda)$.*

Dem.: Ya sabemos que Φ es C^1 respecto a t.

Diferenciabilidad respecto a x_0. Para ver que Φ es C^1 respecto a x_0, diferenciamos *formalmente* respecto a x_0 el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t; t_0, x_0, \lambda) = f(t, \Phi(t; t_0, x_0, \lambda), \lambda), \\ \Phi(t_0; t_0, x_0, \lambda) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

para obtener la *ecuación variacional respecto a x_0*, que es la edo lineal para $J(t; t_0, x_0, \lambda)$ que ha de satisfacer la diferencial $\mathrm{D}_{x_0}\Phi(t; t_0, x_0, \lambda)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial t}(t; t_0, x_0, \lambda) = \mathrm{D}_x f(t, \Phi(t; t_0, x_0, \lambda), \lambda) J(t; t_0, x_0, \lambda), \\ J(t_0; t_0, x_0, \lambda) = I. \end{cases}$$

Es decir, $J(t; t_0, x_0, \lambda)$ es la matriz fundamental principal en t_0 de la edo lineal homogénea con matriz $A(t; t_0, x_0, \lambda) = \mathrm{D}_x f(t, \Phi(t; t_0, x_0, \lambda), \lambda)$. Observamos que (t_0, x_0) juegan el papel de parámetros, y que la matriz $A(t;t_0,x_0,\lambda)$ es, pues, continua respecto a t y respecto a los parámetros (t_0,x_0), a parte del parámetro λ. Por tanto, para cada $(t_0,x_0,\lambda)\in\Omega$, la matriz fundamental $J(t;t_0,x_0,\lambda)$ está definida para $t\in I(t_0,x_0,\lambda)$, y la dependencia en (t_0,x_0,λ) es continua.

Para ver que $J(t;t_0,x_0,\lambda)$ es realmente la diferencial, tenemos que ver primero que su acción sobre un vector $v_0\in\mathbb{R}^n$ da la derivada direccional correspondiente. Así, pues, tenemos que ver que, para todo $v_0\in\mathbb{R}^n$,

$$J(t;t_0,x_0,\lambda)v_0 = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\Phi(t;t_0,x_0+hv_0,\lambda)-\Phi(t;t_0,x_0,\lambda)\right).$$

Definimos, entonces,

$$J(t;t_0,x_0,\lambda,v_0,h)=\begin{cases}\dfrac{1}{h}\left(\Phi(t;t_0,x_0+hv_0,\lambda)-\Phi(t;t_0,x_0,\lambda)\right) & \text{si } h\neq 0\\ J(t;t_0,x_0,\lambda)v_0 & \text{si } h=0.\end{cases}$$

Observamos que, para $h\neq 0$, el cociente incremental satisface también una edo lineal:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial t}(t;t_0,x_0,\lambda,v_0,h) &= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t;t_0,x_0+hv_0,\lambda)-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t;t_0,x_0,\lambda)\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(f(t,\Phi(t;t_0,x_0+hv_0,\lambda),\lambda)-f(t,\Phi(t;t_0,x_0,\lambda),\lambda)\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_0^1\frac{d}{ds}\left(f(t,s\Phi(t;t_0,x_0+hv_0,\lambda)+(1-s)\Phi(t;t_0,x_0,\lambda),\lambda)\right)\,ds\\ &= \int_0^1 \mathrm{D}_x f(t,s\Phi(t;t_0,x_0+hv_0,\lambda)+(1-s)\Phi(t;t_0,x_0,\lambda),\lambda)\,ds\; J(t;t_0,x_0,\lambda,v_0,h).\end{aligned}$$

Además, $J(t_0;t_0,x_0,\lambda,v_0,h)=v_0$. En resumen, $J(t;t_0,x_0,\lambda,v_0,h)$ es la solución de la edo lineal (dependiente de parámetros $(t_0,x_0,\lambda)\in\Omega$, $v_0\in\mathbb{R}^n$ y $h\in\mathbb{R}$ suficientemente pequeña para permanecer dentro de un dominio rectificable),

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J}{\partial t}(t;t_0,x_0,\lambda,v_0,h)=A(t;t_0,x_0,\lambda,v_0,h)J(t;t_0,x_0,\lambda,v_0,h),\\ J(t_0;t_0,x_0,\lambda,v_0,h)=v_0,\end{cases}$$

donde la matriz del sistema es

$$A(t;t_0,x_0,\lambda,v_0,h)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{D}_x f(t,s\Phi(t;t_0,x_0+hv_0,\lambda)+(1-s)\Phi(t;t_0,x_0,\lambda),\lambda)\,ds & \text{si } h\neq 0\\ \mathrm{D}_x f(t,\Phi(t;t_0,x_0,\lambda),\lambda) & \text{si } h=0.\end{cases}$$

La dependencia en todos los parámetros, incluido h, es continua. Por tanto,

$$\lim_{h\to 0} J(t;t_0,x_0,\lambda,v_0,h)=J(t;t_0,x_0,\lambda,v_0,0)=J(t;t_0,x_0,\lambda)v_0,$$

que es la identidad que queríamos demostrar. Como las derivadas direccionales son continuas en x_0, entonces $\mathrm{D}_{x_0}\Phi(t;t_0,x_0,\lambda)=J(t;t_0,x_0,\lambda)$, que además es continua respecto a $(t;t_0,x_0,\lambda)$.

Diferenciabilidad respecto a t_0. Procediendo como en el caso anterior, diferenciamos *formalmente* respecto a t_0 el problema de Cauchy (1) para obtener la *ecuación variacional respecto a* t_0, que es la edo lineal para $J_{t_0}(t;t_0,x_0,\lambda)$ que ha de satisfacer $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t_0}(t;t_0,x_0,\lambda)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J_{t_0}}{\partial t}(t;t_0,x_0,\lambda)=\mathrm{D}_x f(t,\Phi(t;t_0,x_0,\lambda),\lambda)J_{t_0}(t;t_0,x_0,\lambda),\\ J_{t_0}(t_0;t_0,x_0,\lambda)=-f(t_0,x_0,\lambda).\end{cases}$$

La condición inicial proviene de la identidad

$$0 = \frac{\partial}{\partial t_0}(\Phi(t_0; t_0, x_0, \lambda)) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0; t_0, x_0, \lambda) + \frac{\partial \Phi}{\partial t_0}(t_0; t_0, x_0, \lambda) = f(t_0, x_0, \lambda) + \frac{\partial \Phi}{\partial t_0}(t_0; t_0, x_0, \lambda),$$

que tendría que satisfacer $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t_0}(t; t_0, x_0, \lambda)$ en $t = t_0$. Observamos, pues, que

$$J_{t_0}(t; t_0, x_0, \lambda) = -J(t; t_0, x_0, \lambda) f(t_0, x_0, \lambda).$$

Para ver que

$$J_{t_0}(t; t_0, x_0, \lambda) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\Phi(t; t_0 + h, x_0, \lambda) - \Phi(t; t_0, x_0, \lambda) \right),$$

definimos

$$J_{t_0}(t; t_0, x_0, \lambda, h) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} \left(\Phi(t; t_0 + h, x_0, \lambda) - \Phi(t; t_0, x_0, \lambda) \right) & \text{si } h \neq 0 \\ J_{t_0}(t; t_0, x_0, \lambda) & \text{si } h = 0, \end{cases}$$

que satisface la edo lineal (dependiente de los parámetros $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$, y $h \in \mathbb{R}$, pequeña),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J_{t_0}}{\partial t}(t; t_0, x_0, \lambda, h) = A(t; t_0, x_0, \lambda, h) J_{t_0}(t; t_0, x_0, \lambda, h), \\ J(t_0; t_0, x_0, \lambda, h) = -f(t_0, x_0, \lambda, h), \end{cases}$$

donde la matriz del sistema es en este caso

$$A(t; t_0, x_0, \lambda, h) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{D}_x f(t, s\Phi(t; t_0 + h, x_0, \lambda) + (1 - s)\Phi(t; t_0, x_0, \lambda), \lambda)\, ds & \text{si } h \neq 0 \\ \mathrm{D}_x f(t, \Phi(t; t_0, x_0, \lambda), \lambda) & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

y el término independiente es

$$f(t_0, x_0, \lambda, h) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} \left(x_0 - \Phi(t_0; t_0 + h, x_0, \lambda) \right) & \text{si } h \neq 0 \\ f(t_0, x_0, \lambda) & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Por un lado,

$$\lim_{h \to 0} A(t; t_0, x_0, \lambda, h) = A(t; t_0, x_0, \lambda, 0),$$

y por otro, como para $h \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} f(t_0, x_0, \lambda, h) &= \frac{1}{h} \left(x_0 - \Phi(t_0; t_0 + h, x_0, \lambda) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\Phi(t_0 + h; t_0 + h, x_0, \lambda) - \Phi(t_0; t_0 + h, x_0, \lambda) \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(\Phi(t_0 + sh; t_0 + h, x_0, \lambda) \right)\, ds \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0 + sh; t_0 + h, x_0, \lambda)\, ds \\ &= \int_0^1 f(t_0 + sh, \Phi(t_0 + sh; t_0 + h, x_0, \lambda), \lambda)\, ds, \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{h \to 0} f(t_0, x_0, \lambda, h) = f(t_0, x_0, \lambda).$$

Por continuidad de la edo lineal y de la condición inicial respecto al parámetro h, obtenemos que la derivada respecto a t_0 es

$$\lim_{h \to 0} J_{t_0}(t; t_0, x_0, \lambda, h) = J_{t_0}(t; t_0, x_0, \lambda, 0) = -J(t; t_0, x_0, \lambda) f(t_0, x_0, \lambda),$$

que es continua respecto a $(t; t_0, x_0, \lambda)$.

Diferenciabilidad respecto a λ. Supongamos ahora que f también es C^1 respecto a λ, y veamos que $\Phi(t; t_0, x_0, \lambda)$ es C^1 respecto a λ. En este caso, podemos ampliar la edo a

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda), \\ \dot{\lambda} = 0. \end{cases}$$

De este modo, tanto x como λ son variables dependientes, y, aplicando la primera parte del resultado, sobre diferenciabilidad respecto a condiciones iniciales, se obtiene la regularidad C^1 respecto a λ. □

Aunque la diferenciablidad respecto a parámetros la hemos obtenido usando la diferenciabilidad respecto a condiciones iniciales, es conveniente obtener directamente la ecuación variacional correspondiente. De nuevo, basta diferenciar respecto a λ el problema de Cauchy (1), obteniendo la *ecuación variacional respecto a* λ, que es la edo lineal para $J_\lambda(t; t_0, x_0, \lambda)$, que a posteriori *es* la diferencial respecto a λ, $\mathrm{D}_\lambda \Phi(t; t_0, x_0, \lambda)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J_\lambda}{\partial t}(t; t_0, x_0, \lambda) = \mathrm{D}_x f(t, \Phi(t; t_0, x_0, \lambda), \lambda) J_\lambda(t; t_0, x_0, \lambda) + \mathrm{D}_\lambda f(t, \Phi(t; t_0, x_0, \lambda), \lambda). \\ J_\lambda(t_0; t_0, x_0, \lambda) = O. \end{cases}$$

Podemos resolver esta edo lineal no homogénea usando la fórmula de variación de las constantes. Se puede demostrar también la diferenciabilidad respecto a parámetros siguiendo argumentos similares a los utilizados para demostrar la diferenciabilidad respecto a condiciones iniciales.

En resumen, si $J(t; t_0, x_0, \lambda)$ es la matriz fundamental principal, solución de la ecuación variacional

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial t}(t; t_0, x_0, \lambda) = \mathrm{D}_x f(t, \Phi(t; t_0, x_0, \lambda), \lambda) J(t; t_0, x_0, \lambda), \\ J(t_0; t_0, x_0, \lambda) = I, \end{cases}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{x_0} \Phi(t; t_0, x_0, \lambda) &= J(t; t_0, x_0, \lambda), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t_0}(t; t_0, x_0, \lambda) &= -J(t; t_0, x_0, \lambda)\ f(t_0, x_0, \lambda), \\ \mathrm{D}_\lambda \Phi(t; t_0, x_0, \lambda) &= J(t; t_0, x_0, \lambda) \int_{t_0}^{t} J(s; t_0, x_0, \lambda)^{-1} \mathrm{D}_\lambda f(s, \Phi(s; t_0, x_0, \lambda), \lambda)\ ds. \end{aligned}$$