Kapitel 1

Hilfsrechnungen

Betrachte

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \frac{x^a y^b}{(xy+x+y)^2}.$$

Es gilt:

$a+b$	≥ 2	1	0
$f \in$	L^∞	$L^{2-\epsilon}$	$L^{1-\epsilon}$

Entsprechend ist für die Funktion

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \frac{x^a y^b}{(xy+x+y)^3}$$

die Zuordnung

$a+b$	≥ 3	2	1
$f \in$	L^∞	$L^{2-\epsilon}$	$L^{1-\epsilon}$

zu finden.
Analog gilt für

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \frac{x^a y^b}{(x^2y^2+x^2+y^2)^2}$$

die Einteilung:

$a+b$	≥ 4	3	2
$f \in$	L^∞	$L^{2-\epsilon}$	$L^{1-\epsilon}$

Analog gilt für

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \frac{x^a y^b}{(x^2y^2+x^2+y^2)^3}$$

die Einteilung:

$a+b$	≥ 6	5	4
$f \in$	L^∞	$L^{2-\epsilon}$	$L^{1-\epsilon}$

Kapitel 2

Minimalbeispiele

Hier Minimalbeispiel beschreiben mit Γ_1 auf x-Achse und Γ_2 auf y-Achse

2.1 Kontaktordnung 0

Wir wählen

$$\begin{aligned} w &= xy \\ w_1 &= x \\ w_2 &= y. \end{aligned}$$

2.1.1 Ribbons und Normale konsistent

Einfachste Annahme ist, dass b und $r_1 = r_2 = r$ konstant sind. Damit folgt für die ABC-Fläche

$$f(x,y) = \frac{bxy + rx + ry}{xy + x + y}.$$

Diese Funktion ist offensichtlich beschränkt.

Betrachte nun die partiellen Ableitungen.

$$\partial_x f(x,y) = \frac{(b-r)\, y^2}{(xy + x + y)^2} \in L^\infty$$

Zweite Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_x f(x,y) &= \frac{-2\,(b-r)\, y^2 (y+1)}{(xy + x + y)^3} \in L^{2-\epsilon} \\ \partial_y \partial_x f(x,y) &= \frac{2\,(b-r)\, xy}{(xy + x + y)^3} \in L^{2-\epsilon} \end{aligned}$$

2.1.2 Ribbons konsistent aber Normale nicht

Nehme an, b ist konstant und $r_1 \circ \kappa_1 = y + c$ und $r_2 \circ \kappa_2 = x + c$. Für die ABC-Fläche gilt dann

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{bxy + (y+c)\,x + (x+c)\,y}{xy + x + y} \\ &= \frac{(b+2)\,xy + cx + cy}{xy + x + y}. \end{aligned}$$

Die Betrachtung ist also analog zu vorigem Fall.

2.2 Kontaktordnung 1

Wir wählen

$$\begin{aligned} w &= x^2 y^2 \\ w_1 &= x^2 \\ w_2 &= y^2. \end{aligned}$$

2.2.1 Ribbons und Normale konsistent

Einfachste Annahme ist, dass b und $r_1 = r_2 = r$ konstant sind. Damit folgt für die ABC-Fläche

$$f(x, y) = \frac{bx^2y^2 + rx^2 + ry^2}{x^2y^2 + x^2 + y^2}.$$

Diese Funktion ist offensichtlich beschränkt.

Betrachte nun die partiellen Ableitungen.

$$\partial_x f(x, y) = \frac{(2b - 2r)\, xy^4}{\left(x^2y^2 + x^2 + y^2\right)^2} \in L^\infty$$

Zweite Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_x \partial_x f(x, y) &= \frac{(2b - 2r)\, y^4 \left(y^2 - 3x^2y^2 - 3x^2\right)}{\left(x^2y^2 + x^2 + y^2\right)^3} \in L^\infty \\
\partial_y \partial_x f(x, y) &= \frac{(8b - 8r)\, x^3y^3}{\left(x^2y^2 + x^2 + y^2\right)^3} \in L^\infty
\end{aligned}$$

2.2.2 Ribbons konsistent aber Normale nicht

Nehme an, b ist konstant und $r_1 \circ \kappa_1 = y + c$ und $r_2 \circ \kappa_2 = x + c$. Für die ABC-Fläche gilt dann

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{bx^2y^2 + (y + c)\, x^2 + (x + c)\, y^2}{x^2y^2 + x^2 + y^2} \\
&= \frac{bx^2y^2 + cx^2 + cy^2}{x^2y^2 + x^2 + y^2} + \frac{yx^2 + xy^2}{x^2y^2 + x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Nur der rechte Summand ist interessant, da er die Abweichung vom vorigen Fall beschreibt.

$$g(x, y) = \frac{yx^2 + xy^2}{x^2y^2 + x^2 + y^2}$$

Betrachte Ableitungen von g.

$$\partial_x g(x, y) = \frac{2xy^3 + x^2y^4 + x^2y^2 + y^4}{\left(x^2y^2 + x^2 + y^2\right)^2} \in L^\infty$$

Zweite Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_x \partial_x g(x, y) &= \frac{2y^5 - 6x\left(y^6 + y^4\right) - 6x^2\left(y^5 + y^3\right) + 2x^3\left(y^4 + 2y^4 + y^2\right)}{\left(x^2y^2 + x^2 + y^2\right)^3} \in L^{2-\epsilon} \\
\partial_y \partial_x g(x, y) &= \frac{6\left(x^2y^3 + x^3y^2\right) - 2\left(x^4y^3 + x^4y + x^3y^4 + xy^4\right)}{\left(x^2y^2 + x^2 + y^2\right)^3} \in L^{2-\epsilon}
\end{aligned}$$