Kapitel 1

Beispiel

Gewichte

$$\begin{aligned} w_0 &= y^2 \\ w_1 &= x^n \\ w &= x^n y^2 \end{aligned}$$

Bases und Ribbons (jeweils nur z-Komponente (Höhenfunktion))

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ r_0 &= 0 \\ r_1 &= x^k \end{aligned}$$

Damit folgt für die ABC-Fläche

$$a = \frac{x^k x^n}{x^n y^2 + x^n + y^2}$$

Betrachte partielle Ableitungen

$$a_x = \frac{(k+n)\, x^{n+k-1} \left(x^n y^2 + x^n + y^2\right) - x^{n+k} n x^{n-1} \left(y^2 + 1\right)}{\left(x^n y^2 + x^n + y^2\right)^2}$$

Für $k \geq 1$ ist $a_x \in L^\infty$ klar. Dagegen liegt

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{-x^{n+k} 2y \left(x^n + 1\right)}{\left(x^n y^2 + x^n + y^2\right)^2} \\ &= \frac{-2y x^{2n+k}}{\left(x^n y^2 + x^n + y^2\right)^2} - \frac{2y x^{n+k}}{\left(x^n y^2 + x^n + y^2\right)^2} \end{aligned}$$

für beliebiges p nicht in L^p, wenn n groß genug gewählt wird. Dies lässt sich wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned} &\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \left(\frac{y x^{n+k}}{\left(x^n y^2 + x^n + y^2\right)^2} \right)^p \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ \geq{}& C \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \frac{y^p x^{p(n+k)}}{\left(x^{2n} + y^4\right)^p} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ \geq{}& C \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^{\frac{n}{2}}} \frac{y^p x^{p(n+k)}}{\left(x^{2n} + y^4\right)^p} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ \geq{}& C' \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^{\frac{n}{2}}} \frac{y^p x^{p(n+k)}}{x^{2np}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ ={}& C' \int_{x=0}^{1} \frac{x^{kp}}{x^{np}} \int_{y=0}^{x^{\frac{n}{2}}} y^p \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ ={}& C'' \int_{x=0}^{1} \frac{x^{kp}}{x^{np}} \left[y^{p+1}\right]_0^{x^{\frac{n}{2}}} \mathrm{d}x \\ ={}& C'' \int_{x=0}^{1} \frac{1}{x^{(n-k)p}} x^{\frac{n}{2}(p+1)} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Das Integral divergiert für den Fall

$$p\,(n-k) \geq \frac{n}{2}\,(p+1)+1$$
$$n \geq \frac{2\,(1+pk)}{p-1}$$

Bei der Untersuchung auf Quadratintegrabilität ($p = 2$) können die Ribbons bis zu beliebiger Ordnung k übereinstimmen und dennoch liegt a_y für hinreichend großes $n \geq 4k+2$ nicht in L^2.