Ecken ABC-Flächen

Ludwig Paul Lind

6. Mai 2022

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

kurze Vorstellung ABC-Flächen. CAD-Systeme usw. Meine Untersuchung Ecken blablabla Einteilung der Kapitel

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

Grundsätzlich Thema DGL Beispiel für DGL -u" = f Grundlagen finite Elemente. Vorraussetzungen Sobolev-spaces/schwache Ableitungen usw.

Kapitel 3

ABC-Flächen

Motivation Arbeit von Uli im wesentlichen zusammentragen. G0 und G1 Bedingung herausstellen. Mit mehr Bildern als im Paper. Anwendung nicht so wichtig.

Besonderheiten in rechtwinkligen Geometrien Setup erklären w = w0w1q und solche Dinge erläutern und zeigen

Kapitel 4

Fragestellung

In ihrer Arbeit beschreiben Martin und Reif Bedingungen, um Stetigkeit, Normalenstetigkeit und Krümmungsstetigkeit in den Ecken garantieren zu können. Außerhalb der Ecken ist die Glattheit trivial.

In dieser Arbeit soll im wesentlichen darauf eingegangen werden unter welchen Bedingungen auf den ABC-Flächen welcher Differentialgleichungstyp lösbar ist. Für Differentialgleichungen erster Ordnung ist die G1-Bedingung genügend, weil die partiellen Ableitungen in diesem Fall beschränkt sind. Es stellt sich nun die Frage, ob bereits weniger scharfe Bedingungen Lösbarkeit auf der ABC-Fläche ermöglichen oder gar implizieren.

Inspiration woher, für diese Annahme?

Betrachte zunächst als Motivation ein relativ simples Beispiel, das die G0-Bedingung erfüllt.

Beispiel 4.1. *Es wird eine Ecke einer ABC-Fläche betrachtet, die über einem rechtwinkligen Definitionsgebiet definiert ist. Es sei $\Gamma = [0, \alpha]^2$ das Definitionsgebiet, in dem die Umgebung der im Ursprung liegenden Ecke untersucht werden soll. Die beiden Kanten des Definitionsgebiets Γ werden entsprechend Abbildung* **??** *mit Γ_0 und Γ_1 bezeichnet.*

Bild

Die Gewichte seien von der Gestalt

$$\begin{aligned} w_0(x,y) &= y \cdot p(x,y) \\ w_1(x,y) &= x \cdot q(x,y) \\ w_j(x,y) &= xy \cdot s_j(x,y) \quad \forall j \neq 0,1 \\ w(x,y) &= xy \cdot t(x,y). \end{aligned}$$

*Dabei seien p, q, s_j, t Funktionen, die hinreichend glatt sowie beschränkt sind und im Ursprung positiven Wert haben. Hier genauer werden, mit Landausymbolen und so Außerdem darauf eingehen, dass damit auch sinx = x * sinx/x gemeint sein kann Weiterhin muss die Bedingung der Kontaktordnung überprüft werden*

Zur Vereinfachung der Notation wird der Ausdruck

$$\bar{w}(x,y) = w(x,y) + \sum_{j \neq 0,1} w_j(x,y) = xy \cdot r(x,y)$$

verwendet, wobei die Funktion $r = \sum_{j \neq 0,1} s_j + t$ die Eigenschaften von s_j und t erbt.

Damit ist die ABC-Fläche

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}w + \sum_{j \neq 0,1} \bar{\mathbf{r}}_j w_j + \bar{\mathbf{r}}_0 w_0 + \bar{\mathbf{r}}_1 w_1}{\bar{w} + w_0 + w_1}$$

für noch festzulegende Bases und Ribbons definiert. Es lässt sich nun zeigen, dass, sofern diese die G0 Bedingung erfüllen, das heißt, dass die Ribbons in der Ecke konsistent im Sinne $\bar{r}_0(0,0) = \bar{r}_1(0,0)$ sind, die partiellen Ableitungen von $\mathbf{a}$ beschränkt sind.

Betrachte die offensichtlich beschränkte Funktion

$$\varphi(x,y) = \frac{w(x,y)}{\bar{w}(x,y) + w_0(x,y) + w_1(x,y)} = \frac{xy \cdot t(x,y)}{xy \cdot r(x,y) + x \cdot q(x,y) + y \cdot p(x,y)}$$

Als partielle Ableitung ergibt sich

$$\varphi_x = \frac{x^2y^2(t_x r - t r_x) + x^2 y(t_x q - t q_x) + xy^2(t_x p - t p_x) + y^2 t p}{(xyr + xq + yp)^2}.$$

Zur besseren Lesbarkeit sind die Variablen nicht mit notiert und die partielle Ableitung ∂_x wird durch den Index kenntlich gemacht. Die Ableitung φ_x ist im Ursprung nicht stetig fortsetzbar. So ist

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

während

$$\lim_{y\to 0} \varphi(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{t}{p} = \frac{t}{p} \neq 0,$$

nicht verschwindet. Die Funktion φ_x ist mit beliebiger Fortsetzung im Ursprung aber fast überall beschränkt und es gilt somit

$$\varphi_x \in L^\infty.$$

Aus der Symmetrie folgt

$$\varphi_y \in L^\infty.$$

Für die Funktionen

$$\varphi_j(x,y) = \frac{w_j(x,y)}{\bar{w}(x,y) + w_0(x,y) + w_1(x,y)}$$

folgt analog in den Fällen $j \neq 0,1$, dass

$$\varphi_{jx}, \varphi_{jy} \in L^\infty$$

gilt. Hieraus folgt wegen

$$\varphi_0 + \varphi_1 = \frac{w_0 + w_1}{\bar{w} + w_0 + w_1} = 1 - \frac{w + \sum_{j\neq 0,1} w_j}{\bar{w} + w_0 + w_1}$$

sofort, dass

$$\varphi_{0x} + \varphi_{1x}, \varphi_{0y} + \varphi_{1y} \in L^\infty$$

gilt.

Nun wird die gesamten ABC-Fläche $\mathbf{b}\varphi + \sum_{j\neq 0,1} \bar{\mathbf{r}}_j\varphi_j + \bar{\mathbf{r}}_0\varphi_0 + \bar{\mathbf{r}}_1\varphi_1$ untersucht und ihre partiellen Ableitungen betrachtet.

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{b}_x\varphi + \mathbf{b}\varphi_x + \sum_{j\neq 0,1} \bar{\mathbf{r}}_{jx}\varphi_j + \sum_{j\neq 0,1} \bar{\mathbf{r}}_j\varphi_{jx} + \bar{\mathbf{r}}_{0x}\varphi_0\bar{\mathbf{r}}_0\varphi_{0x} + \bar{\mathbf{r}}_{1x}\varphi_1 + \bar{\mathbf{r}}_1\varphi_{1x}$$

Mit der Glattheit der Base und der Ribbons und den bisher gezeigten Eigenschaften liegt dieser bis auf zwei Summanden in L^∞. Der zu untersuchende Rest lautet

$$g := \bar{\mathbf{r}}_0\varphi_{0x} + \bar{\mathbf{r}}_1\varphi_{1x}$$

Aufgrund der Konsistenz der Ribbons gilt $\mathbf{r}_0(\tau) = \mathbf{r}_1(0,0) + \mathcal{O}(|\tau|)$. Damit ist

$$g = \bar{\mathbf{r}}_1(\varphi_{0x} + \varphi_{1x}) + \varphi_{0x} \cdot \mathcal{O}(|\tau|).$$

Mit

$$\varphi_{0x} = \frac{xy^2(p_x r - p r_x) + xy(p_x q - p q_y x) - y^2 pr - ypq}{(xyr + xq + yp)^2}$$

ist direkt ersichtlich, dass jeder Summand der Ausdrücke $x \cdot \varphi_{0x}$ und $y \cdot \varphi_{0x}$ in der Umgebung des Ursprungs mit beliebiger Fortsetzung im Ursprung fast überall beschränkt ist. Somit ist gezeigt, dass $g \in L^\infty$ gilt, woraus direkt

$$\mathbf{a} \in W^{1,\infty}$$

folgt.

Beispiel **??** zeigt, dass bei geschickter Wahl der Gewichte die Lösbarkeit von Differentialgleichungen zweiter Ordnung bereits unter den G0-Bedingungen erreicht werden kann. Dass diese Bedingungen alleine aber nicht genügen zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 4.2. *In analoger Weise zu obigem Beispiel wird wieder eine im Ursprung befindliche rechtwinklige Ecke einer ABC-Fläche betrachtet. Diesmal seien die Gewichte zu*

$$\begin{aligned} w0 &= y^3 \\ w1 &= x \\ w &= xy^3 \end{aligned}$$

gewählt.

Durchrechnen mit n und m allgemein

Restriktion an Ribbons alleine nicht genügend. Besser Gewichte limitieren

Genügt Kontaktorder 2 für Integrierbarkeit? Wichtige Frage Nein, ganz unabhängig von Ribbons

Es stellt sich nun die Frage unter welchen Bed

Untersuchung unabhängig von Ribbons und Normalenkonsitenz und so Schwerpunkt auf die Gewichte Und deren Einfluss isnbesondere auch die Differenzen zwischen den Kontaktordnungen

Kapitel 5

Allgemeinere Fassung

Immer noch rechtwinkliges Problem

allgemeiner fassen

Mit w = w0w1 q und wj = w0 w1 p lässt sich schon einiges zeigen

kritischer Teil nur O(tau) * phi0

Grenzen untersuchen

Kapitel 6

Betrachtung einer rechtwinkligen Ecke

Abbildung graphisch darstellen.

Es wird die Abbildung $\mathbf{a}$: $[0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ betrachtet, deren Funktionsvorschrift

$$a(u,v) = \frac{\mathbf{b}w + \mathbf{r}_1 w_1 + \mathbf{r}_2 w_2}{w + w_1 + w_2}$$

lautet.

Betrachte Ecke einer ABC-Fläche mit Definitionsgebiet $[0,1]^2$. G0 Bedingung erfüllt

Betrachte w1, w2, w. wj erfüllt Voraussetzungen von w außerhalb der Ecke. Deshalb nicht zu berücksichtigen.

Wir wissen, dass für $\sigma = \gamma_1(u) = (u,0)$ der Zusammenhang

$$\frac{w(\sigma+\tau)}{w_1(\sigma+\tau)} \in \mathcal{O}(|\tau|)$$

gilt. Wegen des Spezialfalls $\tau = (0,v)^\top$ muss somit

$$\frac{w(u,v)}{w_1(u,v)} \in \mathcal{O}(v)$$

gelten. Es folgt

$$q(u,v) \coloneqq \frac{w(u,v)}{v \cdot w_1(u,v)} \in \mathcal{O}(1).$$

Die Funktion ist somit beschränkt in einer Umgebung U um den Ursprung. Aus der geforderten Glattheit der Gewichte, folgt somit, dass die Funktion q außer in der Ecke glatt ist auf U. Es lässt sich also schreiben:

$$w(u,v) = v w_1(u,v)\, q(u,v)$$

mit $q \in C^\infty(U)$.

Analog lässt sich der Zusammenhang

$$w(u,v) = u w_0(u,v)\, p(u,v)$$

mit $p \in C^\infty(U)$ finden.

Im folgenden soll nun die Funktion

$$h(u,v) = \frac{w}{w + w_0 + w_1}$$

untersucht werden.

$$\begin{aligned} \partial_u h &= \frac{\partial_u w\,(w + w_0 + w_1) - w\,(\partial_u w + \partial_u w_0 + \partial_u w_1)}{(w + w_0 + w_1)^2} \\ &= \frac{\partial_u w w_0 + \partial_u w w_1 - w \partial_u w_0 - w \partial_u w_1}{(w + w_0 + w_1)^2} \end{aligned}$$

Mit den obigen Umschreibungen der Funktion w und deren Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_u w w_0 - w \partial_u w_0 &= (w_0 q + u \partial_u w_0 q + u w_0 \partial_u q)\, w_0 - u w_0 q \partial_u w_0 \\ &= w_0^2 (q + u \partial_u q) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\partial_u w w_1 - w \partial_u w_1 &= \left(v \partial_u w_1 p + v w_1 \partial_u p\right) w_1 - v w_1 p \partial_u w_1 \\ &= w_1^2 v \partial_u p\end{aligned}$$

Die Beschränkheit von $\partial_u h$ ist somit gezeigt, während die Beschränkheit von $\partial_v h$ analog folgt. Damit ist klar, dass

$$h \in W^{1,\infty} \supset H^1$$

gilt.

Für die Funktion

$$h' = 1 - h = \frac{w_0 + w_1}{w + w_0 + w_1}$$

folgt auch direkt die Zugehörigkeit zum Sobolevraum $W^{1,\infty}$

Die Funktion

$$\varphi_0 = \frac{w_0}{w + w_0 + w_1}$$

ist beschränkt und bis auf ihm Ursprung stetig. Mit Satz ??? folgt somit, dass die Funktionen $u \partial_u \varphi_0 \left(u, v\right)$ und $v \partial_u \varphi_0 \left(u, v\right)$ beschränkt in dem Sinne sind, dass sie in L^∞ liegen.

Zusammentragen, dass a in W1, inf liegt

Am Ende Resultate zusammentragen und Frage aufwerfen, ob dies verallgemeinerbar ist

Kapitel 7

Verallgemeinerung

Existenz des Diffeomorphismuses Erhalt der Eigenschaften als ABC-Fläche bei Verkettung mit Diffeomorphismus Folgerung der Verallgemeinerung

Kapitel 8

Bedeutung der Resultate

WIP Bilder Und auch Bedeutung für Krümmung

Insbesondere auf physikalische Bedeutung der lösbaren DGLs eingehen. Welche DGL Typen sind dann lösbar

Kapitel 9

Fazit

Kapitel 10

Anhang

Rechnungen bezüglich Minimalbeispiel und Integrabilität bis $L^{2-\epsilon}$ zB