# VORLESUNG DIFFERENTIALGEOMETRIE
# VIERSTÜNDIG IM WS 17/18

KARSTEN GROSSE-BRAUCKMANN

## Inhaltsverzeichnis

## Literatur

Die klassische Kurven- und Flächentheorie ist das Thema folgender Bücher:

[B] Bär: Elementare Differentialgeometrie, de Gruyter 2001/2010
(Detailliert und gut lesbar. Das am besten zur Vorlesung passende Buch.)

[DC] Do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg 83, engl.: Prentice Hall 76 (das klassische Standardwerk)

[EJ] Eschenburg, Jost: Differentialgeometrie und Minimalflächen, Springer 2007
(detailliert, viele Bemerkungen und Aufgaben, schöner Schwerpunkt)

[MR] Montiel, Ros: Curves and surfaces, AMS 2005
(geschrieben von Experten der Flächentheorie, ebenso modern wie eigenständig)

[Kü] Kühnel: Differentialgeometrie, Vieweg 1999/2010 (englisch bei der AMS)

[O] Oprea: Differential Geometry and its applications, Prentice Hall 1997
(eher elementare Darstellung, Kapitel über die Programmierung in Maple)

[Sp] Spivak: Differential Geometry, 5 vols. (Die klassische Flächentheorie findet sich in Band 2 in einer an der Geschichte orientierten Darstellung.)

[T] Taimanov: Lectures on Differential Geometry, EMS 2008 (knapp, direkt, klar)

Literatur zu weiteren speziellen Fragestellungen:

[Ba] Ballmann: Einführung in die Geometrie und Topologie, Birkhäuser 2015.
(Sie finden hier den Jordanschen Kurvensatz für diskrete Kurven.)

[Be] Berger: Geometry I,II, Spinger Universitext, 1980
(wunderschönes Nachschlagewerk, schwer zu lesen)

[GHL] Gallot, Hulot, Lafontaine: Riemannian Geometry

[GP] Guillemin, Pollack: Differential Topology, Prentice Hall 1974
(Anhang 2 enthält den Beweis, dass jede 1-Mannigfaltigkeit homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ oder zum offenen Intervall ist.)

[HT] Hildebrandt, Tromba: Kugel, Kreis und Seifenblasen, Birkhäuser 1996
(schönes populärwissenschaftliches Buch, insbesondere für Variations-Aspekte der Differentialgeometrie wie Geodätische und Minimalflächen, hübsch bebildert)

[MC] McCleary: Geometry from a differentiable viewpoint, 1995/2013
(Enthält verschiedene Themen der Vorlesung in etwas einfacherer Form. Teil A behandelt ausführlich und mit Zitaten die Geschichte des Parallelenaxioms.)

[M] Munkres: Topology, Prentice Hall
(topologischer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes)

[Spa] Spallek: Kurven und Karten, 2. Auflage, BI-Verlag 1994 (interessante Anwendungen der Kurventheorie: Zahnräder, Wankelmotor, Stabilität von Schiffen, etc.)

## Einführung

Mit der klassischen Differentialgeometrie von Kurven und Flächen wendet sich die vorliegende Vorlesung an Mathematik-Studenten ab dem 4. Semester, und darüber hinaus an Studierende der Physik und Mechanik. Die Vorlesung stellt die einführende Veranstaltung in die Thematik unserer Arbeitsgruppe *Geometrie und Approximation* dar.

Der entscheidende differentialgeometrische Begriff für Kurven wie für Flächen ist die Krümmung. Ziel der Vorlesung ist die Beherrschung des mathematischen Formalismus zusammen mit der Entwicklung der geometrischen Intuition. Wie üblich definieren wir die Krümmung von Flächen mithilfe der sogenannten äußeren Geometrie. Die Gauß-Krümmung ist allerdings bereits eine Größe der inneren Geometrie. Diese Erkenntnis hat sich als weiterführend herausgestellt, Riemannsche Geometrie und Relativitätstheorie beruhen darauf.

In den beiden letzten Kapiteln geht es um globale Differentialgeometrie, zuerst für Kurven und dann für Flächen, wobei der Satz von Gauß-Bonnet das Ziel ist.

Im Gegensatz zu anderen Darstellungen habe ich mich entschieden, stets mit Parametrisierungen zu arbeiten, also mit Immersionen und nicht speziell mit Einbettungen. Die nötige Übersetzung von Eigenschaften ins Urbild einer Parametrisierung ist ein gewisser Aufwand, der sich aber lohnt, weil Flächen meist parametrisch gegeben sind, und auch weil Mannigfaltigkeiten genauso behandelt werden müssen. Weiterhin habe ich versucht, sauber zu unterscheiden zwischen Parametrisierungen und ihren Äquivalenzklassen unter Umparametrisierung; dies grenzt die Differentialgeometrie von der Analysis ab. Schließlich versuche ich, mich nicht auf spezielle Dimensionsannahmen zu stützen; tatsächlich denke ich, dass etwa die Präsentation der Flächentheorie in beliebiger Dimension (also für Hyperflächen) den Blick besser auf die grundsätzlichen Gesichtspunkte lenkt.

In die vorliegende Fassung sind Vorschläge und Anregungen von Matthias Bergner, Ulrich Reif, Roland Gunesch und vielen Hörern eingegangen. Ich bedanke mich für die Unterstützung.

Darmstadt, Februar 2018 Karsten Große-Brauckmann

# Teil 1. Kurven

Kurven sind das einfachste Objekt der Differentialgeometrie. Sie werden auch bei der Beschreibung von Flächen hilfreich sein. Länge und Krümmung sind die entscheidenden geometrischen Begriffe für Kurven. Diese Begriffe lassen sich mit dem überschaubaren Instrumentarium der Analysis einer Veränderlichen behandeln.

## 1. Kurven und ihre Länge

1.1. **Parametrisierungen.** Im Folgenden steht $I$ jeweils für ein beliebiges Intervall, also für eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$.

**Definition.** $(i)$ Eine *parametrisierte Kurve [parametric curve]* ist eine Abbildung $c \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$, wobei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Ihr Bild $c(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Spur [trace]*.
$(ii)$ Die parametrisierte Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist *regulär*, wenn der *Tangentialvektor* $c'(t)$ für kein $t \in I$ verschwindet.
$(iii)$ Eine parametrisierte Kurve $c$ heißt $P$*-periodisch*, falls $I = \mathbb{R}$ ist und $c(t+P) = c(t)$ gilt für eine Zahl $P > 0$ und alle $t$. Man nennt $c$ dann *geschlossen [closed]*.
Wir bezeichnen auch $c\colon [a, a+P] \to \mathbb{R}^n$ als geschlossen, wenn $c$ Einschränkung einer $P$-periodischen Kurve ist.

Die Differenzierbarkeitsstufe $k$ interessiert uns nur am Rande: Sie können gern ausschließlich den glatten Fall $k = \infty$ betrachten.

*Beispiele.* 1. $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (\cos t, \sin t)$ hat als Spur den *Kreis*

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}.$$

Die Einschränkung $\tilde{c}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{c} := c$, liefert die gleiche Spur.

2. Die Spur von $c(t) := (\sin t, \sin 2t)$ ist die *Figur acht* oder *Lemniskate*. Sie ist $2\pi$-periodisch. Auch jedes $P = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist Periode. Man kann die Lemniskate mechanisch erzeugen. Das kann genutzt werden, um eine Kreisbewegung in eine annähernd geradlinige Bewegung umzuwandeln, denn in der Nähe des Doppelpunkts 0 ist die Lemniskate sehr gerade (siehe *Lemniskatenlenker* bzw. die Verallgemeinerung *Wattgestänge [Watt's linkage]*, z.B. Wikipedia).

3. Bei den folgenden beiden Kurven ist die Regularitätsbedingung im Punkt $t = 0$ verletzt:
- Die *Neilsche Parabel* $c(t) := (t^2, t^3)$,
- die Parametrisierung der Diagonalen $c(t) := (t^3, t^3)$.

Die Neilsche Parabel belegt die Bedeutung der Regularitätsannahme: Sie sichert, dass die Kurve keine Ecken oder Spitzen hat.

In der Physik beschreibt eine parametrisierte Kurve $c$ eine Bewegung: $t$ ist Zeit, $c(t)$ ist der Ort eines bewegten Objekts (Massepunkt), $c'(t)$ sein Geschwindigkeitsvektor *[velocity]*. Physikalische Kurven sind oft als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung gegeben, z.B. die Bewegung eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld.

### 1.2. Umparametrisierungen, Äquivalenzklassen, geometrische Begriffe.

**Definition.** Eine *Parametertransformation [change of variable]* einer $C^k$-Kurve ist ein $C^k$-Diffeomorphismus $\varphi\colon \tilde{I} \to I$ von Intervallen, d.h. $\varphi$ und $\varphi^{-1}$ sind $C^k$. Dabei sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Man nennt dann $\tilde{c} := c \circ \varphi$ eine *Umparametrisierung [reparameterization]* von $c$. Ist $\varphi' > 0$, so nennt man die Umparametrisierung *orientierungserhaltend [orientation preserving]*.

Die Übereinstimmung regulärer Kurven nach Umparametrisierung definiert eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der regulären Kurven (wieso?). Orientierungserhaltende Umparametrisierungen erhalten den Durchlaufsinn; sie induzieren eine speziellere Äquivalenzrelation (überprüfen Sie auch hier die drei Eigenschaften!).

**Definition.** $(i)$ Eine *$C^k$-Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von regulären $C^k$-Kurven unter der Relation Umparametrisierung. Wir schreiben für eine Klasse $[c]$.
$(ii)$ Eine *orientierte $C^k$-Kurve* ist entsprechend eine Äquivalenzklasse regulärer $C^k$-Kurven, wobei orientierungserhaltende Umparametrisierungen als Äquivalenzrelation verwendet werden. Wir schreiben für eine Klasse $\langle c \rangle$.

*Beispiel.* Die in verschiedenem Sinn durchlaufenen Kreise $(\cos t, \sin t)$ und $(\cos t, -\sin t)$ repräsentieren zwar dieselbe Kurve, jedoch verschiedene orientierte Kurven.

Eine *einfache Kurve [simple curve]* ist eine Kurve mit injektivem Repräsentanten. In der Menge der einfachen regulären Kurven kann man $[c]$ mit der Spur $c(I)$ identifizieren.

Sinngemäß kann man *geschlossene Kurven* und ihre Einfachheit definieren. Wir lassen dies als Übung.

Die Differentialgeometrie benutzt die Sprache der Analysis, ihr Gegenstand sind aber folgende Begriffsbildungen:

**Definition.** Ein *geometrischer Begriff* ist eine Eigenschaft eines parametrisierten Objekts in $\mathbb{R}^n$, die parametrisierungs- und bewegungsunabhängig ist. Grössen, die hierunter invariant sind bezeichnen wir als *geometrische Größen*.

Unter *Bewegungen [motion]* verstehen wir hierbei affin-lineare Abbildungen der Form $x \mapsto Ax + b$, wobei $A \in \mathsf{O}(n)$ als Drehspiegelung wirkt und $b \in \mathbb{R}^n$ als Translation. Dies sind gerade die abstandserhaltenden Abbildungen, die sogenannten *Isometrien* von $\mathbb{R}^n$, siehe Aufgaben. In manchen Fällen ist eine Invarianz nur bezüglich orientierungserhaltender

Isometrien gegeben, d.h. man darf nur *orientierungstreue* (oder: *eigentliche*, *starre [proper, rigid]*) *Bewegungen* $A \in \mathsf{SO}(n)$ zulassen.

Betreibt man Differentialgeometrie in anderen Räumen, z.B. auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ oder im hyperbolischen Raum $\mathbb{H}^n$, so fordert man entsprechend die Invarianz unter der jeweiligen Isometriegruppe von abstandserhaltenden Abbildungen.

1.3. **Länge.** Bei konstanter Geschwindigkeit ist der zurückgelegte Weg Geschwindigkeit mal Zeit. Im Falle variabler Geschwindigkeit haben wir entsprechend:

**Definition.** Eine parametrisierte Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ hat die *Länge*

$$L(c) := \int_I |c'(t)|\, dt \qquad \in [0, \infty]. \tag{1}$$

Bei geschlossenen Kurven wählt man $I = [0, P)$.

Falls $I$ kompakt ist, gilt $L(c) < \infty$ (warum?). Anderenfalls ist $L(c)$ uneigentliches Riemann- oder Lebesgue-Integral und möglicherweise $L(c) = \infty$. Man kann das Längenintegral auch noch im Falle von stückweise $C^1$-Kurven definieren; bei endlich vielen Ausnahmepunkten hat man dann eine endliche Summe über die $C^1$-Stücke zu bilden.

*Beispiele.* 1. Eine *Helix* mit *Ganghöhe [pitch]* $2\pi h \in \mathbb{R}$ und Radius $r > 0$ wird durch

$$c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3, \qquad c(t) = \big(r \cos t, r \sin t, ht\big),$$

parametrisiert. Wegen $c'(t) = (-r \sin t, r \cos t, h)$ hat sie die Länge

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{r^2 + h^2}\, dt = (b - a)\sqrt{r^2 + h^2}\,.$$

2. Die *Ellipse* mit Halbachsen $a, b > 0$,

$$c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = \big(a \cos t, b \sin t\big)$$

hat die Geschwindigkeit $|c'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$. Ihre Länge bzw. ihr Umfang ist

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt.$$

Dies ist ein sogenanntes *elliptisches Integral*, welches für $a \neq b$ nicht elementar integrierbar ist. (Warum ist der Flächeninhalt aber stets explizit?)

Die Länge ist ein geometrischer Begriff. Sicher ist sie bewegungsunabhängig (warum?) und weiter gilt $L = L([c])$, denn die Längenintegrale (1) von $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ und jeder Umparametrisierung $\tilde{c} = c \circ \varphi\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ stimmen überein:

$$L(\tilde{c}) = \int_{\tilde{I}} \big|(c \circ \varphi)'(t)\big|\, dt \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\tilde{I}} \big|c'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\big|\, dt \overset{\text{Substitution}}{=} \int_I \big|c'(s)\big|\, ds = L(c)$$

(Warum ist der Betrag bei der Substitution richtig behandelt?)

**Definition.** Die Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt *nach Bogenlänge parametrisiert [parameterized by arc-length]*, wenn gilt $|\tilde{c}'| \equiv 1$.

Ein Kreis vom Radius $r > 0$ ist durch $c(t) = (r\cos(t/r), r\sin(t/r))$ nach Bogenlänge parametrisiert.

Jede orientierte Kurve $\langle c \rangle$ hat stets einen nach Bogenlänge parametrisierten Repräsentanten $\tilde{c}$:

**Satz 1.** *Es sei $c \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ regulär, $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein Intervall $\tilde{I}$ und einen orientierungserhaltenden $C^k$-Diffeomorphismus $\varphi\colon \tilde{I} \to I$, so dass $\tilde{c} := c \circ \varphi\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.*

Ein typischer Fall ist $I = [a, b]$ und $\tilde{I} = [0, L(c)]$; er ergibt sich durch Wahl von $t_0 := a$ im folgenden Beweis.

*Beweis.* Wir wählen $t_0 \in I$ und betrachten die Bogenlängenfunktion

$$\ell\colon I \to \mathbb{R}, \qquad \ell(s) := \int_{t_0}^{s} |c'(\sigma)|\, d\sigma. \tag{2}$$

In Physiker-Sprechweise: Um die gesuchte Parametrisierung nach der "Bogenlänge $\ell$" anzugeben, müssen wir nur die "Umkehrfunktion $s(\ell)$" in $c$ einsetzen.

Tatsächlich existiert die Umkehrfunktion $\varphi := \ell^{-1}$, definiert auf $\tilde{I} := \varphi(I)$, denn wegen der angenommenen Regularität verschwindet die Ableitung von (2) nicht: $\ell'(s) = |c'(s)| > 0$. Weiter gilt

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\ell'(\varphi(t))} = \frac{1}{|c'(\varphi(t))|} > 0$$

und daraus folgt wie gewünscht $\left|\tilde{c}'(t)\right| = \left|(c \circ \varphi)'(t)\right| = \left|c'\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\right| = 1.$ □

*Bemerkungen.* 1. Zwar ist der Beweis konstruktiv, dennoch lässt sich zumeist die Bogenlängen-Parametrisierung nicht explizit angeben, weil das Integral (2) keine explizite Lösung hat. Für Ellipsen haben wir das schon gesehen.

2. Im orientierten Fall ist die Parametrisierung auf Bogenlänge eindeutig bis auf Verschiebung des Intervalls $\tilde{I}$; die analoge Aussage gilt für zwei Parametrierungen (vorwärts und rückwärts) im Fall einer unorientierten Kurve. Wann immer wir eine Parametrisierung nach Bogenlänge benutzen, wird nichts vom Wert dieser Verschiebung abhängen, da wir stets differentiell definierte Größen betrachten.

`2. Vorlesung, 19.10.17` ________________________________________

## 2. Lokale Theorie ebener Kurven

Mit der Krümmung kommen wir zum entscheidenden Begriff der Differentialgeometrie. Man sagt gern, dass die Krümmung in einem Kurvenpunkt gerade $1/r$ ist, wenn ein Kreis vom Radius $r$ die Kurve im betrachteten Punkt am besten approximiert. Wir werden die Krümmung viel direkter definieren, und zwar als Kipp- oder Winkelgeschwindigkeit der Einheitstangente, und die genannte Eigenschaft erst in Abschnitt 4.2 nachweisen.

2.1. **Krümmung.** Wir benötigen die Normale an eine Kurve. Dazu definieren wir zuerst die orientierte 90-*Grad-Drehung* als die lineare Abbildung

$$J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Unter der Identifikation $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist $J$ die Multiplikation mit $i$. Entsprechend gilt auch die Identität $J^2 = -\operatorname{id}$.

**Definition.** Die orientierte (*Einheits-*)*Normale* einer regulären ebenen Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ ist definiert durch

$$N \in C^0(I, \mathbb{S}^1), \qquad N := J \cdot \frac{c'}{|c'|}. \tag{3}$$

Die Normale ist also dadurch bestimmt, dass $(T, N)$ mit $T := c'/|c'|$ in jedem Punkt der Kurve eine positiv orientierte Orthonormalbasis ist.

Eine mit konstanter Geschwindigkeit $|c'| = \text{const}$ parametrisierte Kurve hat einen Beschleunigungsvektor $c''$, der parallel zur Normale ist – einfache, aber wichtige Rechnung:

$$\langle c'', c' \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle c', c' \rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c'' \perp c' \quad \Leftrightarrow \quad c'' \parallel N$$

Im Falle von Bogenlängen-Parametrisierung ist $c'' = \frac{d}{dt}c'$ auch die Kippgeschwindigkeit der Einheits-Tangente, und wir können definieren:

**Definition.** Für eine orientierte reguläre Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ ist die *(orientierte) Krümmung* $\kappa \in C^0(I, \mathbb{R})$ wie folgt erklärt:
$(i)$ Ist $c$ nach Bogenlänge parametrisiert, so ist $\kappa$ bestimmt durch

$$c'' = \kappa N \qquad \Longleftrightarrow \qquad \kappa = \langle N, c'' \rangle = \langle Jc', c'' \rangle. \tag{4}$$

$(ii)$ Für allgemeines $c$ sei $\tilde{c}$ eine Umparametrisierung auf Bogenlänge, also

$$\tilde{c} = c \circ \varphi \quad \text{mit} \quad \varphi' > 0 \text{ und } |\tilde{c}'| \equiv 1. \tag{5}$$

Ist $\tilde{\kappa}$ die Krümmung von $\tilde{c}$ gemäß $(i)$, so erklären wir die Krümmung $\kappa$ von $c$ durch

$$\kappa \circ \varphi = \tilde{\kappa}. \tag{6}$$

Dies definiert $\kappa$ eindeutig auf der Klasse $\langle c\rangle$. Auf die gleiche Weise kann man im Allgemeinen geometrische Begriffe von einer speziellen Parametrisierung auf die ganze Klasse ausdehnen.

Die Krümmung $\kappa$ hat ein positives Vorzeichen, wenn sich die Kurve in Richtung der Normalen $N$ krümmt, d.h. in Linkskurven. Wenn wir die Orientierung wechseln, also statt $c$ die Kurve $\tilde{c}(t) := c(-t)$ betrachten, so wechselt die Krümmung ihr Vorzeichen. Sie ist daher nicht auf $[c]$ definiert, und entsprechend daher haben wir uns in (5) auf den orientierungserhaltenden Fall beschränkt.

*Beispiele.* 1. Für die Gerade $c(t) = tv + b$ mit $v \in \mathbb{S}^1$, $b \in \mathbb{R}^2$, gilt $c'' \equiv 0$, also auch $\kappa \equiv 0$.

2. Es sei $r > 0$. Dann parametrisiert

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \qquad c(t) := re^{it/r} = r\left(\cos\frac{t}{r}, \sin\frac{t}{r}\right)$$

einen Kreis vom Radius $r$. Wir bestätigen die Parametrisierung nach Bogenlänge und zeigen, dass unsere Parametrisierung auf die innere Normale führt:

$$c'(t) = ie^{it/r} \quad\Rightarrow\quad N(t) = Jc'(t) = ic'(t) = -e^{it/r} = -\frac{1}{r}c(t) \tag{7}$$

Weiter ist

$$c''(t) = -\frac{1}{r}e^{it/r} = \frac{1}{r}N(t),$$

und somit $\kappa \equiv \frac{1}{r}$. Für den im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis $c(t) := re^{-it/r}$ ergibt sich entsprechend $\kappa \equiv -\frac{1}{r}$. (Warum bevorzugen Mathematiker den Gegenuhrzeigersinn?)

Weil sich Kurven nur selten explizit nach Bogenlänge parametrisieren lassen, wollen wir die Krümmung im allgemeinen Fall angeben.

**Satz 2.** *Für eine reguläre Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ ist*

$$\kappa = \frac{1}{|c'|^3}\langle Jc', c''\rangle = \frac{1}{|c'|^3}\det(c', c''). \tag{8}$$

Man kann (8) auch als Vektorprodukt schreiben. Um sich die Nennerpotenz zu merken, betrachtet man am besten das Transformationsverhalten unter einer Parametertransformation $t \mapsto at$ (für $a > 0$). Ferner sieht man erneut, dass $\kappa$ nicht orientierungsinvariant ist, denn nur $c'$ wechselt unter $t \mapsto -t$ das Vorzeichen, $c''$ nicht.

*Beweis.* Für jedes $t \in I$ gilt nach Ketten- und Produktregel

$$\tilde{c}' = (c' \circ \varphi)\,\varphi', \qquad \tilde{c}'' = (c'' \circ \varphi)\,{\varphi'}^2 + (c' \circ \varphi)\,\varphi''. \tag{9}$$

Um $\kappa$ zu bestimmen, setzen wir dies ein in die Definition (4) und beachten $\langle Jc', c'\rangle = 0$:

$$\kappa \circ \varphi \overset{(6)}{=} \tilde{\kappa} \overset{\text{Def}}{=} \big\langle J\tilde{c}',\, \tilde{c}''\big\rangle = \big\langle Jc' \circ \varphi,\, c'' \circ \varphi\big\rangle {\varphi'}^3 = \big\langle Jc' \circ \varphi,\, c'' \circ \varphi\big\rangle \frac{1}{|c' \circ \varphi|^3}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus $1 = |\tilde{c}'| = |c' \circ \varphi|\, \varphi'$ und $\varphi' > 0$. Weil $\varphi$ Diffeomorphismus ist, folgt der erste Ausdruck von (8).

Es bleibt noch die zweite Formel zu zeigen. Für jedes Paar von Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt aber

$$\langle Jv, w\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \det(v, w).$$

Die Parametrisierungsinvarianz ist per Definition klar, die Invarianz unter orientierungserhaltenden Bewegungen folgt aus (8): Ersetze $c$ durch $Ac$ für $A \in \mathsf{SO}(2)$. □

Die Orthonormalbasis $(T := c'/|c'|, N)(t)$ wird auch als *begleitender* oder *Frenet-Rahmen* der regulären Kurve $c$ bezeichnet. In Hinblick auf höherdimensionale Verallgemeinerungen der Krümmung wollen wir ein Differentialgleichungssystem für den Rahmen festhalten:

**Satz 3** (Frenet-Gleichungen ebener Kurven)**.** *Eine Parametrisierung nach Bogenlänge $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ mit Normale $N$ repräsentiere die ebene orientierte Kurve $\langle c\rangle$. Dann gilt das System von Differentialgleichungen*

$$c'' = \kappa N, \qquad N' = -\kappa c', \tag{10}$$

*d.h. die Orthonormalbasis $(T = c',\ N)$, geschrieben als Matrix von Spaltenvektoren, erfüllt*

$$\big(T', N'\big) = \big(T, N\big) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

*Beweis.* Differenzieren von $N = Jc'$ liefert

$$N' = (Jc')' = Jc'' = \kappa JN = \kappa J^2 c' = -\kappa c'.$$

□

2.2. **Liftungslemma und Tangentenwinkel.** Erklärt man den Polarwinkel von Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$ im Intervall $[0, 2\pi)$, so ist er zwar eindeutig, aber unstetig (z.B. als Funktion $x \mapsto \langle x, v\rangle$ für gegebenes $v \neq 0$). Um einen stetigen Polarwinkel zu erhalten, muss man den Winkel als reelle Zahl auffassen, auf Kosten der Eindeutigkeit. Es hängt davon ab, welche Teilmengen von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ man betrachtet, ob eine stetige Wahl des Winkels möglich ist. Längs einer Kurve ist das aber immer der Fall:

**Lemma 4.** *Ist $\gamma \in C^k([a, b], \mathbb{S}^1)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, so gibt es eine Funktion $\vartheta \in C^k([a, b], \mathbb{R})$ mit*

$$\gamma(t) = \big(\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)\big). \tag{12}$$

*Jede andere solche Funktion unterscheidet sich von $\vartheta$ nur um Addition eines ganzzahligen Vielfachen von $2\pi$.*

Diese Aussage werden wir auf die Einheitstangente einer Kurve, also auf $\gamma := T$, anwenden. In der Topologie bezeichnet man $\vartheta$ als den *Lift* oder die *Hochhebung* von $\gamma$ in die *Überlagerung* $\mathbb{R}$ von $\mathbb{S}^1$.

*Beweis.* Wir zeigen die Existenz eines Liftes sukzessive in drei Fällen:
1. $\gamma$ hat Werte im rechten Halbkreis $\mathbb{S}^1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$.
2. $\gamma$ hat Werte in einem festen Halbkreis $\mathbb{S}^1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, v\rangle > 0\}$ für $v \neq 0$.
3. Allgemeiner Fall.

1. Ist $v \in \mathbb{S}^1$ ein Vektor mit $v_1 > 0$, so gilt:

$$v = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \quad\iff\quad \tan\vartheta = \frac{v_2}{v_1} \quad\iff\quad \exists n \in \mathbb{Z} : \vartheta = \arctan\frac{v_2}{v_1} + 2\pi n.$$

Für die zweite Äquivalenz muss man beachten, dass tan die Periode $\pi$ hat; allerdings gilt $v_1 = \cos\vartheta > 0 \Leftrightarrow \vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2\pi\mathbb{Z}$. Wir können also setzen

$$\vartheta(t) := \arctan\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} + 2\pi n(t) \tag{13}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$. Unter der Voraussetzung $\gamma$ stetig gilt: $\vartheta$ stetig $\Leftrightarrow$ $n$ konstant.

2. Nach Drehung um einen Winkel $-\vartheta_0 = -\arg v$ liegt das Bild von $\gamma$ im rechten Halbkreis. Man bestimmt $\vartheta - \vartheta_0$ dann wieder durch die rechte Seite von (13).

3. Die Idee ist, den Definitionsbereich in überlappende Intervalle aufzuteilen, auf denen das Bild der Kurve jeweils in Halbkreisen liegt; dann dehnt man den stetigen Winkel von 2. eindeutig von einem Intervall zum nächsten aus.

Die Funktion $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon = \sqrt{2}$ gibt es daher ein $\delta > 0$, so dass aus $|s-t| < \delta$ folgt $\big|\gamma(s) - \gamma(t)\big| < \sqrt{2}$. Also liegt das Bild jedes Intervalls $(t-\delta, t+\delta)$ in einem Halbkreis. Wir zerlegen nun $[a,b]$ in endlich viele nicht-leere Intervalle

$$I_k := \big(a + (k-1)\delta,\ a + (k+1)\delta\big) \cap [a,b] \qquad \text{mit } k = 0, \dots, k_0.$$

Wir wollen Induktion benutzen. Auf $I_0$ liefert Schritt 2 einen Lift; dabei ist $n \in \mathbb{Z}$ frei wählbar. Hat man auf $I_k$ schon einen Lift gewählt, so ist durch Schritt 2 eine eindeutige stetige Fortsetzung nach $I_{k+1}$ bestimmt. □

*Aufgabe.* Dieselbe Aussage gilt auf beliebigem Intervall $I$ anstelle von $[a,b]$.

`3. Vorlesung, 24.10.17` ______________________________

2.3. **Hauptsatz für ebene Kurven.** Wir möchten speziell für eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $c$ die Tangentenabbildung $c'$ in der Form

$$c' = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \tag{14}$$

mit einer Funktion $\vartheta\colon I \to \mathbb{R}$ schreiben. Natürlich können wir die Existenz einer stetigen Funktion $\vartheta$ aus dem Lemma 4 ablesen, und zwar für jede $C^1$-Kurve $c$. Hier wollen wir jedoch $\vartheta$ direkt durch Integration der Krümmung gewinnen.

Nehmen wir dazu zusätzlich an dass $c$ zweimal differenzierbar ist, $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$. Dann kann man (14) differenzieren, $c'' = \vartheta'\big(-\sin\vartheta, \cos\vartheta\big) = \vartheta' Jc' = \vartheta' N$, und der Vergleich mit (4) ergibt

$$\vartheta'(t) = \kappa(t). \tag{15}$$

Dies ist eine Charakterisierung der Krümmung als *Rotations-* oder *Winkelgeschwindigkeit der Einheitstangente* an die Kurve.

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (14)(15) kann man für gegebenes $\kappa \in C^0(I, \mathbb{R})$ aufintegrieren. Seien dazu Anfangswerte $t_0 \in I$, $\vartheta(t_0) = \vartheta_0 \in \mathbb{R}$, $p = c(t_0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Dann erhalten wir Funktionen

$$\begin{aligned} &\vartheta \in C^1(I, \mathbb{R}), && \vartheta(s) := \vartheta_0 + \int_{t_0}^{s} \kappa(\sigma)\, d\sigma, \\ &c \in C^2(I, \mathbb{R}^2), && c(t) := p + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \cos\vartheta(s) \\ \sin\vartheta(s) \end{pmatrix} ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Damit können wir zu vorgegebener Krümmung $\kappa$ eine Kurve $c$ finden:

**Satz 5** (Hauptsatz für ebene Kurven)**.** *Zu gegebener Funktion $\kappa \in C^0(I, \mathbb{R})$ existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ mit Krümmung $\kappa$. Sie wird eindeutig durch $t_0 \in I$ und die beiden Anfangswerte $c(t_0) = p \in \mathbb{R}^2$, $c'(t_0) = v \in \mathbb{S}^1$ bestimmt.*

*Beispiel.* Gerade und Kreis sind die einzigen ebenen Kurven mit konstanter Krümmung.

*Beweis.* Wir definieren $(\vartheta, c)$ durch (16). Es ist dann $c(t_0) = p$. Um auch $c'$ den gewünschten Anfangswert zu geben, wählen wir für (16) irgendein $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, so dass $v = (\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0)$ gilt. Insbesondere gilt dann (14) und (15); und aus (14) folgt $c'' = \kappa N$, d.h. $c$ hat die Krümmung $\kappa$.

Die Eindeutigkeit lässt sich zwar ähnlich zeigen, allerdings muss man dabei die Uneindeutigkeit von $\vartheta$ berücksichtigen. Deshalb ist es einfacher, die Eindeutigkeit aus den Frenet-Gleichungen, Satz 3, zu folgern, ohne auf $\vartheta$ zurückzugreifen: Das lineare Differentialgleichungssystem (11) hat nach dem Satz von Picard-Lindelöf für gegebenes $\kappa \in C^0(I, \mathbb{R})$ und zu vorgegebenen Anfangswerten $\big(v, Jv\big)$ eine eindeutig bestimmte $C^1$-Lösung $(c', N)$. Zusammen mit dem Anfangswert $c(t_0)$ bestimmt diese Lösung auch $c(t) := c(t_0) + \int_{t_0}^{t} c'(s)\, ds$ eindeutig. $\square$

*Bemerkung.* Eine ebene Straße kann man als ebene Kurve $c$ modellieren. Fährt man sie exakt ab, so entspricht die Krümmung dem Lenkradeinschlag. Bis in die 1930'er Jahre wurden Straßen als $C^1$-Kurven aus Strecken und Kreisbögen zusammengesetzt, so dass $\kappa$ und damit der Lenkradeinschlag unstetig ist. Soll die Krümmung stetig sein, d.h. wünscht man $C^2$-Kurven, so kann man kubische Parabeln benutzen, wie man es bereits seit dem 19. Jahrhundert im Eisenbau macht. Im Straßenbau wählt man dagegen $\kappa$ als stückweise lineare Funktion. Für die Übergangsstücke zwischen Strecken und Kreisen benötigt man eine Kurve $c(t)$, die eine lineare Krümmungsfunktion $\kappa(t) = at$ besitzt. Sie existiert nach Satz 5, ist aber nicht elementar integrierbar (siehe Aufgaben). Die entsprechende Kurve, die sich auf ganz $\mathbb{R}$ definieren lässt, hat keine Selbstschnitte und heißt *Klothoide*, *Euler-* oder *Cornu-Spirale*. (Siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Klothoide`)

## 3. Lokale Kurventheorie in höherer Dimension

Im Raum $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ ist der Normalraum $(c'(t))^\perp$ einer Kurve mehrdimensional, so dass sich die Frage nach einem ausgezeichneten Normalenvektor oder allgemeiner nach einer ausgezeichneten Basis des Normalenraumes stellt. Wir werden zwei verschiedene Wahlen angeben. Um sie vorzubereiten, befassen wir uns zuerst ganz allgemein mit Orthonormalbasen längs Kurven.

3.1. **Rahmen für Kurven.** Wir wollen den Frenet-Rahmen $F(t) := (T, N)(t)$ einer ebenen Kurve $c(t)$ auf beliebige Dimension verallgemeinern. Man kann $n$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ mit den Spalten einer Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ identifizieren. Wir werden uns ausschließlich mit dem Fall befassen, dass die Vektoren eine orientierte Orthonormalbasis bilden. In diesem Fall entspricht dem Rahmen eine *spezielle orthogonale Matrix* in

$$\mathsf{SO}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T A = E, \det A = 1\}.$$

Wir betrachten zuerst allgemeine Rahmen, die für jeden Punkt einer Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ definiert sind, und werden sie erst später mit der Geometrie der Kurve in Verbindung bringen:

**Definition.** Ein (*orthonormaler positiv orientierter*) *Rahmen [frame]* ist eine Abbildung

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n) \in C^1\big(I, \mathsf{SO}(n)\big), \quad n \geq 2.$$

In Dimension 2 erfüllt der Frenet-Rahmen $F = (T, N)$ einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve die Frenet-Gleichungen $F' = F\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Um in beliebiger Dimension die Ableitung $F'$ ebenfalls als Matrixprodukt $FA$ zu schreiben, beachten wir, dass man $F_j'$ als Linearkombination der Orthonormalbasis $F$ darstellen kann,

$$F_j' = \sum_{i=1}^n a_{ij} F_i,$$

d.h. man muss $F$ mit der $j$-ten Spalte der Matrix $A = (a_{ij})$ multiplizieren. Wir benutzen die Sprechweise:

**Definition.** Die Matrixabbildung $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ mit $F' = FA$ heißt *Ableitungsmatrix* des Rahmens $F$.

Aus der Orthonormalität des Rahmens $F$ folgt unmittelbar

$$0 = \langle F_j, F_k\rangle' = \langle F_j', F_k\rangle + \langle F_j, F_k'\rangle = a_{kj} + a_{jk}, \qquad 1 \le j, k \le n,$$

und wir erhalten:

**Lemma 6.** *Die Ableitungsmatrix $A$ ist schiefsymmetrisch [skew-symmetric], $A^T = -A$.*

Wir bezeichnen die schiefsymmetrischen Matrizen mit

$$\mathsf{so}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = -A\}.$$

Mit den Bezeichnungen $\mathsf{SO}(n)$ und $\mathsf{so}(n)$ folgen wir der üblichen Notation für Lie-Gruppen und -Algebren.

Für den Frenet-Rahmen in Dimension 2 ist die schiefsymmetrische Ableitungsmatrix $A$ durch nur einen Eintrag bestimmt, und zwar die Krümmung $\kappa$, während in Dimension $n = 3$ die schiefsymmetrische Ableitungsmatrix drei unabhängige Einträge besitzt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dots & -\dots \\ \langle F_1', F_2\rangle & 0 & -\dots \\ \langle F_1', F_3\rangle & \langle F_2', F_3\rangle & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Gibt es noch weitere Einschränkungen, damit eine solche Matrix die Ableitungsmatrix eines Rahmens $F$ sein kann? Das ist nicht der Fall:

**Satz 7.** *Es sei eine Ableitungsmatrix $A \in C^0(I, \mathsf{so}(n))$ gegeben, und ein Anfangswert $F(t_0) \in \mathsf{SO}(n)$ für $t_0 \in I$. Dann existiert genau ein Rahmen $F \in C^1(I, \mathsf{SO}(n))$ mit Ableitungsmatrix $A$ und Anfangswert $F(t_0)$.*

Der Beweis folgt aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, genauer von linearen, nicht-autonomen, homogenen Systemen. Wir zitieren dazu:

**Satz 8.** *Sei $B \in C^0(I, \mathbb{R}^{m\times m})$, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann besitzt das System von Differentialgleichungen $y'(t) = y(t)B(t)$ genau eine Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ mit Anfangswert $y(t_0) = y_0$.*

Tatsächlich ist der Satz von Picard-Lindelöf auf $f(t,x) := xB(t)$ anwendbar, denn

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |(x_1 - x_2)B(t)| \leq |B(t)||x_1 - x_2|$$

zeigt die lokale Lipschitz-Stetigkeit in $x$: Es gibt beispielsweise eine Umgebung von $t_0$, so dass die Lipschitz-Konstante $|B(t)|$ durch $2|B(t_0)|$ beschränkt wird. Das liefert die lokale und eindeutige Existenz einer Lösung. Dass die Lösung sogar global, also auf $I$, existiert, folgt aus dem Lemma von Gronwall.

*Beweis von Satz 7.* Sehen wir die gesuchte Matrix $F(t)$ als Vektor in $\mathbb{R}^{n^2}$ an, so können wir Satz 8 auf unser Gleichungssystem $F'_{ij} = \sum_k F_{ik}A_{kj}(t)$ anwenden und erhalten eine Lösung $F \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$. Wir behaupten $F(t) \in \mathsf{O}(n)$. Wegen $A(t) \in \mathsf{so}(n)$ gilt

$$(FF^T)' = F'F^T + FF'^T = FAF^T + FA^TF^T = F(A + A^T)F^T = 0.$$

Diese Differentialgleichung für $FF^T$ hat zu gegebenem Anfangswert $(FF^T)(t_0) = E_n$ die Konstante $FF^T \equiv E_n$ als eindeutige Lösung. Das zeigt die Behauptung. Weiterhin folgt aus $t \mapsto \det F(t)$ stetig mit Werten in $\pm 1$ und $\det F(t_0) = +1$, dass $F(t) \in \mathsf{SO}(n)$. $\square$

Nun betrachten wir Rahmen, die auf eine Kurve $c$ bezogen sind:

**Definition.** Ist $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ nach Bogenlänge parametrisiert, so heißt ein Rahmen $F \in C^1(I, \mathsf{SO}(n))$ mit $F_1 = c'$ auch *Kurvenrahmen [curve frame]*. Man bezeichnet dann $(c, F)$ als *gerahmte Kurve [framed curve]*.

Ist umgekehrt ein Kurvenrahmen $F$ gegeben, so erhält man daraus eine Kurve $c$, indem man den ersten Rahmenvektor aufintegriert, $c(t) := c(t_0) + \int_{t_0}^t F_1(s)\,ds$. Dies ergibt:

**Satz 9.** *Zu gegebenem Rahmen $F$ existiert genau eine gerahmte Kurve $(c, F)$ mit Kurvenrahmen $F$, eindeutig zu gegebenem Anfangswert $c(t_0) = p \in \mathbb{R}^n$; dabei ist $c$ nach Bogenlänge parametrisiert.*

Für $n = 3$ hat die Ableitungsmatrix (17) drei verschiedene Einträge. Wir werden uns nun mit zwei Wahlen von Kurvenrahmen befassen, bei denen die Matrix jeweils nur zwei unabhängige Einträge besitzt. Beide Wahlen verallgemeinern sich auf den $n$-dimensionalen Fall: Dann hat eine Ableitungsmatrix nur $(n-1)$ unabhängige Einträge anstelle von $n(n-1)/2$ mögliche Einträgen.

`4. Vorlesung, 26.10.17` ______________________________

3.2. **Frenet-Theorie für Raumkurven: Normale, Krümmung, Torsion.** Bei einer mit konstanter Geschwindigkeit, $|c'| \equiv \text{const}$, parametrisierten Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ gilt, wie im ebenen Fall,

$$0 = \frac{d}{dt}|c'|^2 = 2\langle c', c''\rangle \qquad \text{bzw.} \qquad c'' \perp c'.$$

Wir benutzen dies zur Definition einer Normalen:

**Definition.** Es sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$, nach Bogenlänge parametrisiert.
($i$) Die (Frenet-)*Krümmung* von $c$ ist

$$\kappa \colon I \to [0, \infty), \qquad \kappa(t) := |c''(t)|.$$

Wir bezeichnen $c''(t)$ auch als *Krümmungsvektor.*
($ii$) Falls $c''(t) \neq 0$ (bzw. $\kappa(t) > 0$) definieren wir als *Normale*

$$N(t) := \frac{c''(t)}{|c''(t)|}.$$

*Beispiel.* Die reguläre Kurve $c(t) := (t, t^3, 0)$ hat $c''(0) = 0$. In $t = 0$ existieren noch die einseitigen Grenzwerte der Normalenvektoren $\lim_{t\to\pm 0} N(t)$, sie sind jedoch verschieden. Das gleiche gilt allgemeiner für $c(t) = \big(t, t^3, f(t)\big)$, sofern $f''(0) = 0$.

*Bemerkungen.* 1. Frenet-Krümmung und Normale sind auf der Klasse $[c]$ wohldefiniert. (Wie, und warum nicht nur auf $\langle c\rangle$?). In den Aufgaben leiten wir die Formel für die Frenet-Krümmung bei beliebiger Parametrisierung her.
2. Anders als bei ebenen Kurven gilt stets $\kappa \geq 0$, d.h. der Krümmungsbegriff für nicht-ebene Kurven ist unorientiert. In der Tat kann man in $\mathbb{R}^n$ zwischen Links- und Rechtskurven nicht unterscheiden. Ist eine Kurve in einer Ebene des $\mathbb{R}^n$ enthalten, so ergibt der Betrag der Krümmung als ebene Kurve die Krümmung als nicht-ebene Kurve (warum?).

In Dimension $n = 3$ wird ein Kurvenrahmen $F$ bereits durch einen der beiden Vektoren $F_2$ oder $F_3$ festgelegt. Daher bestimmt die Wahl $F_2 := N$ bereits einen Rahmen für $n = 3$:

**Definition.** ($i$) Eine *Frenet-Kurve* ist eine reguläre Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$, deren Krümmung $\kappa$ für kein $t \in I$ verschwindet.
($ii$) Für eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ ist der *Frenet-Rahmen [Frenet-Serret frame]* $F = (T, N, B)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, gegeben durch

$$T(t) = c', \qquad N(t) = \frac{c''}{|c''|}, \qquad B(t) := T(t) \times N(t), \qquad \text{für } t \in I.$$

Dabei heißt $B$ die *Binormale* von $c$.

Wir können nun festhalten:

**Satz 10** (Frenet-Gleichungen einer Raumkurve *[Frenet-Serret formulas]*)**.**
*Sei $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve, also $c'' \neq 0$. Dann erfüllt der Frenet-Rahmen $F := (T, N, B)$ das Differentialgleichungssystem*

$$\big(T', N', B'\big) = \big(T, N, B\big) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

*Dabei ist $\kappa > 0$ die Frenet-Krümmung und $\tau$ die* Torsion

$$\tau \colon I \to \mathbb{R}, \qquad \tau(t) := \big\langle N'(t), B(t) \big\rangle. \tag{19}$$

*Beweis.* Um die erste Spalte der Ableitungsmatrix zu verifizieren, müssen wir $c'' = \kappa N$ bestätigen. Diese Gleichung folgt direkt aus der Definition von $N$ und $\kappa$. Weiter ist (19) genau die für den Eintrag $a_{32}$ der Ableitungsmatrix maßgebende Funktion, siehe (17). Nach Lemma 6 reicht das, um zu bestätigen, dass die Ableitungsmatrix die in (18) angegebene Form besitzt. □

Die Torsion (19), manchmal auch *Windung* genannt, misst, wie stark die Kurve von einer ebenen Kurve abweicht, d.h. wie stark $N$ um $T = c'$ dreht. Man sagt auch, die Torsion ist die Drehgeschwindigkeit der *Schmiegebene* $\operatorname{span}\{T(t), N(t)\}$.

*Beispiele.* 1. Für einen Kreis im Raum zeigt die Normale zum Kreismittelpunkt, die Binormale ist eine der Normalen auf der Kreisebene (welche?), die Torsion verschwindet.
2. Für Geraden sind Normale, Frenet-Rahmen und Torsion nicht definiert.
3. Jede Helix $t \mapsto (r \cos t, r \sin t, ht)$, $r > 0$, $h \in \mathbb{R}$, hat konstante Krümmung und Torsion, siehe Aufgaben. Dies folgt auch sofort daraus, dass diese Begriffe invariant unter Bewegungen sind, und Schraubbewegungen transitiv auf der Helix operieren.

Die Torsion verschwindet genau dann, wenn die Kurve eben ist (siehe Aufgaben). Unsere Definition durch Wahl eines Bogenlängen-parametrisierten Repräsentanten erklärt Binormale und Torsion sicherlich auf orientierten Frenet-Kurven $\langle c \rangle$ – entscheiden Sie, ob diese Größen auch auf $[c]$ erklärt sind (vergleiche Aufgaben). Visualisierungen finden Sie bei Wikipedia unter dem Eintrag *Frenet-Serret formulas.*

Die Spezialisierung von Satz 7 und 9 auf den Frenet-Rahmen ergibt:

**Satz 11** (Hauptsatz für Raumkurven)**.** *Zu gegebenen Krümmungs- und Torsionsfunktionen $\kappa \in C^1\big(I, (0, \infty)\big)$ und $\tau \in C^0(I, \mathbb{R})$ existiert genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ zu gegebenen Anfangswerten von $c$, $T = c'$, $N$ in $t_0 \in I$ (dabei sei $T(t_0) \perp N(t_0)$).*

Beispielsweise sind Helices, einschließlich dem Spezialfall von Kreisen, die einzigen Frenet-Kurven, deren Krümmung (ungleich 0!) und Torsion konstant ist.

Die Frenet-Theorie verallgemeinert sich auf den Fall $n \geq 3$. Dazu benötigt man allerdings die ziemlich unnatürliche Voraussetzung, dass die ersten $n-1$ Ableitungen von $c$ in jedem $t \in I$ linear unabhängig sind. Dann definiert man den positiv orientierten orthonormalen $F = (F_1, \dots, F_n)$ iterativ durch die Eigenschaft

$$\operatorname{span}\{F_1(t), \dots, F_k(t)\} = \operatorname{span}\{c'(t), \dots, c^{(k)}(t)\} \qquad \text{für alle } 1 \leq k \leq n-1.$$

In Verallgemeinerung von $\kappa, \tau$ definiert der Rahmen $F$ dann $n-1$ Krümmungsfunktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ die auf den Nebendiagonalen der schiefsymmetrischen Ableitungsmatrix stehen. Man verlangt dabei $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$ durch geeignete Vorzeichenwahl der $F_i$; dadurch wird $F$ zum eindeutig bestimmten *Frenet-Rahmen.*

3.3. **Paralleler Rahmen.** Der Frenet-Rahmen in $\mathbb{R}^3$ ist nur definiert, wo $c''$ nicht 0 ist. Er benötigt die dritten Ableitungen der Kurve $c$ und reagiert entsprechend sensibel auf kleine Änderungen der Kurve. Ein robusterer und zugleich physikalisch sinnvoller Rahmen ist der parallele Rahmen, dessen definierende Eigenschaft es ist, *möglichst wenig um $F_1 = c'$ zu rotieren.* Diese Eigenschaft kann man bereits für ein einziges Vektorfeld formulieren. Dies führt auf den nicht offensichtlichen Begriff der Parallelverschiebung eines Vektorfeldes, dessen Verallgemeinerung auf Flächen sich als zentral für die Differentialgeometrie herausgestellt hat.

Für eine Gerade $c$ ist ein konstantes Vektorfeld $X$, senkrecht zur Tangente $c' = T$, offenbar im genannten Sinne parallel. Sucht man allerdings für eine allgemeine Kurve $c$ ein auf $c' = T$ senkrechtes Vektorfeld längs der Kurve, so muss man $X$ an die Kurve $c$ anpassen. Man verlangt, dass $X$ nicht (unnötig) um $T$ rotiert. Um $X$ so nachzuführen, dass es senkrecht auf $c'$ bleibt, reicht es aus, $X$ allein in Richtung $c'$ abzuändern:

**Definition.** Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ regulär.
($i$) Wir bezeichnen $N \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ als ein *Normalenfeld*, wenn $N \perp c'$ gilt.
($ii$) Ein Normalenfeld $N$ heißt *parallel* bzw. *parallel verschoben längs c*, wenn gilt

$$N'(t) \parallel c'(t) \qquad \text{für alle } t \in I. \tag{20}$$

*Beispiele.* 1. Längs einer Geraden ist ein konstantes Normalenfeld parallel.
2. Liegt eine Raumkurve $c$ in einer Ebene $E = v^\perp$, so ist $v$ ein paralleles Normalenfeld.

Eine interessante Eigenschaft paralleler Felder ist, dass Längen und Winkel erhalten bleiben:

**Lemma 12.** *Sind $X, Y$ parallele Normalenfelder längs c, so ist $\langle X, Y\rangle$ konstant. Insbesondere bleiben $|X|, |Y|$ und (falls definiert) der Winkel von $X$ und $Y$ konstant.*

*Beweis.* Aus Normalität und Parallelitätsbedingung folgt:

$$\langle X, Y\rangle' = \langle X', Y\rangle + \langle X, Y'\rangle = 0.$$

□

Man kann dieses Lemma benutzen, um die Definition der Parallelität auf nicht unbedingt normale Vektorfelder längs nach Bogenlänge parametrisierter Kurven auszudehnen: Jedes Vektorfeld $X$ vom Typ $X = aT + N$ mit $a \in \mathbb{R}$, $T = c'$ und $N$ parallelem Normalenfeld nennen wir *parallel*. Das Lemma, ebenso wie der nächste Satz, gilt dann sogar für beliebige parallele Vektorfelder.

Die Lösung einer Differentialgleichung für $N$ liefert einen Existenzsatz:

**Satz 13.** *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ nach Bogenlänge parametrisiert und $t_0 \in I$. Dann existiert ein paralleles Normalenfeld $N \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, eindeutig zu jedem Anfangswert $N(t_0) \perp c'(t_0)$.*

*Beweis.* Aus der Normalitätsbedingung $\langle N, c'\rangle = 0$ folgt einerseits $\langle N', c'\rangle = -\langle N, c''\rangle$. Aus der Parallelitätsbedingung $N' \parallel c'$ und $|c'| = 1$ ergibt sich andererseits $N' = \langle N', c'\rangle c'$. Es folgt die lineare Differentialgleichung für $N$,

$$N' = -\langle N, c''\rangle c'. \tag{21}$$

Dieses System hat nach Satz 8 eine Lösung $N \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Offenbar erfüllt $N$ die Parallelitätsbedingung. Weiter erfüllt $N$ wegen $|c'| \equiv 1$

$$\langle N, c'\rangle' = \langle N', c'\rangle + \langle N, c''\rangle \overset{(21)}{=} -\big\langle \langle N, c''\rangle c', c'\big\rangle + \langle N, c''\rangle = 0.$$

Wegen der Anfangsbedingung $\langle N, c'\rangle(t_0) = 0$ folgt daraus die Normalitätsbedingung $\langle N, c'\rangle = 0$ für alle $t$. □

`5. Vorlesung, 2.11.17` ___

Als *parallelen Rahmen* bezeichnen wir einen Kurvenrahmen $F = (T, N_1, \ldots, N_{n-1})$ mit parallelen Feldern $N_i$. Der Existenzsatz für Normalenfelder ergibt die Existenz eines parallelen Rahmens längs jeder Kurve:

**Satz 14.** *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ nach Bogenlänge parametrisiert und $t_0 \in I$.*
*(i) Dann existiert ein paralleler Kurvenrahmen $F \in C^1(I, \mathsf{SO}(n))$, eindeutig bestimmt durch $F(t_0) \in \mathsf{SO}(n)$ (mit $F_1(t_0) = c'$).*
*(ii) Die Ableitungsmatrix $A(t) \in \mathsf{so}(n)$ ist von der Form*

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_1 & \cdots & -k_{n-1} \\ k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } k_1, \ldots, k_{n-1} \in C^0(I, \mathbb{R}). \tag{22}$$

Die Funktionen $k_i$ heißen *parallele Krümmungen*; dies sind geometrische Begriffe.

*Beweis.* (*i*) Nach Satz 13 kann man die Felder $(N_1, \ldots, N_{n-1})(t_0)$ als parallele $C^1$-Normalenfelder fortsetzen und erhält einen parallelen Rahmen $F = (T, N_1, \ldots, N_{n-1})$. Nach Lemma 12 ist $F(t) \in O(n)$ und ein Stetigkeitsargument für die Determinante des Kurvenrahmens liefert $F(t) \in \mathsf{SO}(n)$ für alle $t$.

(*ii*) Nach Definition ist $N_i' \parallel T$ und nach dem Lemma ist $(T, N_1, \ldots, N_{n-1})$ Orthonormalbasis. Daher folgt $\langle N_i', N_j \rangle = 0$ für alle $i, j$ und $t$. □

Ein Rahmen $F$ mit Ableitungsmatrix wie in (22) ist offenbar parallel. Daher erhalten wir analog zum Hauptsatz im Frenet-Fall durch die Spezialisierung von Satz 7 und 9 folgende Aussage:

**Satz 15.** *Sei $A \in C^0(I, \mathsf{so}(n))$ eine gegebene Matrix der Form* (22). *Dann gibt es zu Anfangswerten $t_0 \in I$, $F(t_0) \in \mathsf{SO}(n)$, $c(t_0) \in \mathbb{R}^n$ genau eine gerahmte Kurve $(c, F)$ mit Ableitungsmatrix $A$.*

*Beispiele.* 1. Die Helix besitzt eine transitive Symmetriegruppe, so dass paralleler und Frenet-Rahmen gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit rotieren. Es reicht also, die Geschwindigkeit in einem Punkt festzustellen. Seien dazu $N, B$ die Frenet-Normale und -Binormale, sowie $N_1$ eine parallele Normale entlang der nach Bogenlänge parametrisierten Helix. Wir nehmen $N(t_0) = N_1(t_0)$ zu einer Zeit $t_0$ an und vergleichen in $t_0$ die Differentialgleichungen (21) bzw. (18):

$$N'(t_0) = -\kappa c'(t_0) + \tau B(t_0) \qquad \text{bzw.} \qquad N_1'(t_0) = -\langle N_1(t_0), c''(t_0) \rangle c' = -\kappa c'(t_0).$$

Also rotiert $N$ gegenüber $N_1$ um $\tau$, insbesondere gilt $N \equiv N_1$ nur für Ganghöhe 0.

2. Schläuche liefern ein Alltagsbeispiel für parallele Rahmen. Dabei denken wir an schwer verdrillbare Schläuche: Gartenschläuche erzielen dies oft durch diagonales Gewebe. Dadurch nehmen Schläuche eine parallele Lage ein, d.h. ein in Längslage des Schlauches angebrachter gerader Markierungsstrich beschreibt bei gekrümmter Lage des Schlauches die Bahn eines parallelen Vektorfeldes. Als Übung können Sie das bekannte Phänomen erklären, dass ein Schlauch bei seitlicher Entnahme von einer Spule sein Ende verdreht (wieviel mal?).

*Bemerkungen.* 1. Längs einer geschlossenen Kurve ist der parallele Rahmen im Allgemeinen nicht periodisch, er "schließt" sich nicht.

2. Es ist interessant, einen parallelen Rahmen mit dem Frenet-Rahmen zu vergleichen. In

Dimension $n = 3$ haben wir

$$(T', N_1', N_2') = (T, N_1, N_2) \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & -k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

mit Funktionen $k_1, k_2 \in C^0(I, \mathbb{R})$. Für $C^3$-Kurven kann man daraus eine Relation von $\kappa, \tau$ zu $k_1, k_2$ berechnen (Übung).

## 4. Charakterisierungen der Krümmung

Wir wollen den Krümmungsbegriff besser verstehen, indem wir vier Eigenschaften von Kurven behandeln, für die die Krümmung entscheidend ist.

4.1. **Graphen und lokale Normalform.** Der Graph einer Funktion $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ läßt sich als parametrisierte ebene Kurve $c(t) := \big(t, f(t)\big)$ auffassen. Dieser Orientierung entspricht die obere Normale an den Graphen $N := Jc'/|Jc'|$, so dass nach (8) die Krümmung von $c$ lautet:

$$\kappa = \frac{1}{|c'|^3}\langle Jc', c''\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}^3}\left\langle \begin{pmatrix} -f' \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}^3} \tag{24}$$

Also ist genau bei horizontaler Tangente die Krümmung die zweite Ableitung,

$$f'(t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa(t_0) = f''(t_0) \tag{25}$$

*Beispiele.* 1. Die Parabel $c(t) := (t, t^2)$ hat in 0 eine horizontale Tangente und daher die Krümmung $\kappa(0) = (t^2)''|_{t=0} = 2$.
2. Was ergibt (24) für den Kreisbogen $c(t) := (t, \sqrt{1-t^2})$?

Bezüglich eines Punktes $P \in \mathbb{R}^2$ und einer positiv orientierten Orthonormalbasis $(T, N)$ betrachten wir den Graphen

$$c(t) = P + tT + f(t)N \qquad \text{mit } f \in C^2(I, \mathbb{R}). \tag{26}$$

Wegen der Bewegungsinvarianz der Krümmung Auch dafür gilt (24), und es gilt auch (25).

Wir wollen nun eine beliebige Kurve lokal als Graph über einer Tangentialgeraden schreiben. Die Krümmung taucht dann als zweiter Term einer geometrischen Taylorreihe auf:

**Satz 16** (Lokale Normalform). *Es sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ eine reguläre Kurve mit $t_0 \in I$ und*

$$P := c(t_0), \quad T := \frac{c'(t_0)}{|c'(t_0)|}, \quad N := JT, \quad \kappa := \kappa(t_0).$$

*Dann gibt es eine orientierungserhaltende Parametertransformation*

$$\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to I \quad \text{mit} \quad \varphi(0) = t_0, \ \ \varphi' > 0, \tag{27}$$

*so dass* $\tilde{c} := c \circ \varphi$ *in sogenannter* lokaler Normalform *vorliegt:*

(28) $$\tilde{c}(t) = P + tT + \frac{1}{2}\kappa t^2 N + o(t^2)N \qquad \text{für } -\varepsilon < t < \varepsilon$$

*Beweis.* Um eine Umparametrisierung zu finden, die (26) genügt, betrachten wir die Komponente von $\tilde{c}(t) - P$ in Richtung $T$. Dafür soll gelten

(29) $$\langle \tilde{c}(t) - P, T \rangle = t.$$

Setzen wir $s(\tau) := \big\langle c(\tau) - P, T \big\rangle$, so ist (29) äquivalent zu $s(\varphi(t)) = t$. Gesucht ist also die lokale Umkehrfunktion $\varphi$ zu $s$. In $t_0$ gilt aber $s'(t_0) = \langle c'(t_0), T \rangle = |c'(t_0)| > 0$. Daher existiert tatsächlich $\varphi$ wie in (27) mit $\varphi'(0) > 0$, so dass (29) gilt.

Nun definieren wir die $C^2$-Funktion $f$ als Komponente von $\tilde{c} - P$ in Richtung $N$, also

(30) $$f(t) := \big\langle \tilde{c}(t) - P, N \big\rangle.$$

Weil $(T, N)$ Orthonormalbasis ist, folgt die Darstellung als allgemeiner Graph

(31) $$\tilde{c}(t) - P = \langle \tilde{c}(t) - P, T \rangle T + \langle \tilde{c}(t) - P, N \rangle N = tT + f(t)N, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon.$$

Daraus leiten wir nun die Normalform her. Aus (30) ergibt sich:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \big\langle c'(\varphi(0))\varphi'(0),\, N \big\rangle = \big\langle c'(t_0)\varphi'(0),\, N \big\rangle = 0 \quad \text{und} \quad f''(0) \overset{(25)}{=} \kappa.$$

Indem wir dies in die sogenannte qualitative Taylorreihe von $f$ einsetzen, erhalten wir

$$f(t) = f(0) + f'(0)\,t + \frac{1}{2}f''(0)\,t^2 + o(t^2) = \frac{1}{2}\kappa t^2 + o(t^2).$$

Einsetzen in (31) ergibt (28). □

Ist $\kappa(t_0) \neq 0$, so kann man $\varepsilon$ so klein wählen, dass der Term $\frac{1}{2}\kappa t^2$ das Restglied $o(t^2)$ majorisiert, sofern $|t| < \varepsilon$. Dann erhält man aus (28):

**Korollar 17** (Lokale Konvexität)**.** *Eine reguläre Kurve* $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ *mit* $\kappa(t_0) \neq 0$ *liegt in einer Umgebung von* $c(t_0)$ *auf einer Seite ihres Tangentialraums* $\{c(t_0) + sc'(t_0) : s \in \mathbb{R}\}$*. D.h. es gibt* $\varepsilon > 0$*, so dass entweder* $\big\langle c(t) - c(t_0), N(t_0) \big\rangle > 0$ *oder* $< 0$ *für alle* $t$ *mit* $0 < |t - t_0| < \varepsilon$ *gilt.*

In Satz 7 werden wir sogar die *globale Konvexität* für eingebettete geschlossene Kurven mit $\kappa \geq 0$ nachweisen.

*Bemerkung.* Für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c$ in $\mathbb{R}^n$ gibt es eine entsprechende Normalform. Setzt man $T := c'(t_0)$, so findet man wie zuvor eine Umparametrisierung mit

(32) $$\tilde{c}(t) = P + tT + \frac{1}{2}\kappa t^2 N + X(t) \qquad \text{mit } |X(t)| = o(t^2),$$

Dabei ist $N := c''(t_0)/|c''(t_0)|$ im Falle $\kappa \neq 0$ (sonst beliebig).

`6. Vorlesung, 7.11.17` ______________________________

4.2. **Krümmungs- oder Schmiegkreise.** Wir kommen nun zur anschaulichen Deutung der Krümmung als inverser Radius des am besten approximierenden Kreises.

**Lemma 18.** *Ist $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ eine reguläre Kurve mit $\kappa(t_0) \neq 0$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes Tripel $a < t_0 < b$ in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ liegen die drei Punkte $c(a), c(t_0), c(b)$ auf einem Kreis.*

*Beweis.* • Die lokale Konvexität (Korollar 17) bestimmt $\varepsilon$, so dass $c(a), c(b)$ auf derselben Seite der Tangentengerade an $c(t_0)$ liegen.
• $c(a)$ und $c(b)$ liegen zu zwei verschiedenen Seiten der Normalengeraden durch $c(t_0)$, was man z.B. von der Taylorreihe $c(t) = c(t_0) + (t - t_0)c'(t_0) + O(t^2)$ abliest.

Also schneidet die Gerade durch $c(a)$ und $c(b)$ die Tangentengerade nicht in $c(t_0)$ und die drei Punkte liegen nicht auf einer Geraden. Es ist elementar, dass sie dann auf einem gemeinsamen Kreis liegen. □

Unter den Voraussetzungen des Lemmas sei $K(a, t_0, b)$ der Kreis durch die Punkte $c(a)$, $c(t_0)$, $c(b)$; wir benötigen auch seinen Mittelpunkt $m(a, t_0, b)$. Wir wollen den am besten approximierenden Kreis nun als Grenzwert dieser Kreise definieren; dabei wollen wir sagen, dass eine Folge von Kreisen konvergiert, wenn ihre Mittelpunkte und Radien konvergieren.

**Satz 19** (Existenz eines Krümmungskreises)**.** *Es sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ regulär mit $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann existiert der* Krümmungskreis *[osculating circle] von $c$ in $t_0$*

$$K(t_0) = \lim_{a \uparrow t_0,\, b \downarrow t_0} K(a, t_0, b).$$

*Er hat den Mittelpunkt*

$$m(t_0) := \lim_{a \uparrow t_0,\, b \downarrow t_0} m(a, t_0, b) \; = \; c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} N(t_0)$$

*und damit den Radius $1/|\kappa(t_0)|$.*

*Beweis.* Wir können Bogenlängen-Parametrisierung von $c$ annehmen. Dann gilt $c'' = \kappa N$ und $|\kappa| = |c''|$, so dass zu zeigen ist: $m(t_0) := c(t_0) + \frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|^2}$. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung dient in der Analysis dazu, eine Aussage vom Differenzenquotient auf den Grenzwert zu übertragen. Diesen Satz wenden wir auch hier an, um vom approximierenden Tripel auf den Grenzwert $c''$ zu kommen.

Wir wählen $\varepsilon$ wie in Lemma 18. Seien zunächst $a, b$ fest mit $t_0 - \varepsilon < a < t_0 < b < t_0 + \varepsilon$. Wir betrachten die Funktion

$$h\colon (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}, \qquad h(t) := \frac{1}{2}\big|c(t) - m(a, t_0, b)\big|^2$$

Sie erfüllt $h(a) = h(t_0) = h(b)$, weil die betreffenden Punkte auf dem Kreis liegen. Daher liefert der Mittelwertsatz die Existenz von $\xi_1 \in (a, t_0)$ und $\xi_2 \in (t_0, b)$ mit

$$0 = h'(\xi_i) = \big\langle c'(\xi_i),\, c(\xi_i) - m(a, t_0, b)\big\rangle \qquad \text{für } i = 1, 2.$$

Anwendung des Mittelwertsatzes auf $h'$ liefert ein $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$, so dass

$$0 = h''(\eta) = \big\langle c''(\eta),\, c(\eta) - m(a, t_0, b)\big\rangle + \underbrace{|c'(\eta)|^2}_{=1}.$$

Wir betrachten nun den Grenzwert $a, b \to t_0$ mit ebenfalls $\xi_i, \eta \to t_0$. Falls dann $m$ konvergiert, ergeben die letzten beiden Gleichungen

$$\Big\langle c'(t_0),\, c(t_0) - \lim_{a,b\to t_0} m(a, t_0, b)\Big\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \Big\langle c''(t_0),\, c(t_0) - \lim_{a,b\to t_0} m(a, t_0, b)\Big\rangle = -1.$$

Weil $c'(t_0)$ und $c''(t_0)$ linear unabhängig sind, bestimmen die letzten beiden Gleichungen tatsächlich einen Grenzwert $m(t_0)$. Weil $c''(t_0)$ senkrecht auf $c'(t_0)$ steht, folgt, wie gewünscht, $c(t_0) - m(t_0) = -\frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|^2}$. ☐

*Bemerkungen.* 1. Im Falle $\kappa(t_0) = 0$ erhält man entsprechend eine Grenzgerade.

2. Man kann auch Raumkurven durch einen Krümmungskreis im Raum approximieren. Dazu muss man die Normalform (32) benutzen.

3. Die klassische Bezeichnung für den Krümmungskreis ist *Schmiegkreis*.

4.3. **Variation der Länge.** Kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten sind Strecken:

**Satz 20.** *Eine kürzeste Kurve $c \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n)$ zwischen zwei Punkten $p \neq q \in \mathbb{R}^n$ ist monotone Umparametrisierung der auf $[0,1]$ parametrisierten Geraden $(1-t)p + tq$ von $p$ nach $q$.*

*Beweis.* Wegen der Bewegungsinvarianz der Länge reicht es, dies für $C^1$-Kurven $c$ mit Endpunkten $p = c(0) = 0$ and $q = c(1) = (d, 0, \ldots, 0)$ mit $d > 0$ zu zeigen. Der Satz folgt nun daraus, dass in der Abschätzung

$$L(c) = \int_0^1 |c'(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{\sum (c_i'(t))^2}\, dt \geq \int_0^1 |c_1'(t)|\, dt \geq \int_0^1 c_1'(t)\, dt = c_1(1) - c_1(0) = d$$

Gleichheit genau dann gilt, wenn $c_2 \equiv \cdots \equiv c_n \equiv 0$ ist und $c_1' \geq 0$. ☐

Interessant ist ein quantitatives Verständnis davon, wie sich die Länge verändert, wenn man die Kurve leicht abändert. Wir werden sehen, dass dies von der Krümmung abhängt. Um die Situation zu präzisieren, definieren wir zuerst eine Familie von Nachbarkurven:

**Definition.** $(i)$ Eine *Variation* einer Kurve $c \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ ist eine Abbildung

$$h \in C^2\big(-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b],\mathbb{R}^n\big), \quad h_s(t) = h(s,t) \quad \text{mit} \quad h_0(t) = c(t).$$

$(ii)$ Das Vektorfeld $V := \frac{\partial h_s}{\partial s}\big|_{s=0} \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ heißt *Variationsfeld.* Das Variationsfeld $V$ bzw. die Variation $h_s$ nennt man *eigentlich*, wenn $V(a) = 0 = V(b)$ gilt.

Das Variationsfeld $V$ beschreibt die Variation in erster Ordnung,

$$h_s(t) = c(t) + sV(t) + O(s^2), \qquad s \sim 0,$$

und nur dadurch geht $h_s$ in die Längenänderung ein:

**Lemma 21** (1. Variation der Bogenlänge)**.** *Sei $c \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ eine Kurve mit $|c'| =$ const $\neq 0$ und $h_s$ eine Variation mit Variationsfeld $V$. Dann gilt:*

$$\frac{d}{ds}L(h_s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{|c'|}\big\langle V(t), c'(t)\big\rangle\Big|_a^b - \frac{1}{|c'|}\int_a^b \big\langle V(t),\, c''(t)\big\rangle\, dt. \tag{33}$$

*Beweis.* Wir differenzieren das Längenintegral $L(h_s) = \int_a^b \sqrt{\big\langle \frac{\partial}{\partial t}h_s,\, \frac{\partial}{\partial t}h_s\big\rangle}\, dt$ nach dem Variationsparameter $s$, wenden den Satz von Schwarz an, und integrieren partiell:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}L(h_s)\Big|_{s=0} &= \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{\langle .,.\rangle}\big|_{s=0}} 2\Big\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}h_s,\, \frac{\partial}{\partial t}h_s\Big\rangle\Big|_{(s=0)}\, dt \\
&\overset{\text{Satz von Schwarz}}{=} \frac{1}{|c'|}\int_a^b \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}h_s,\, \frac{\partial}{\partial t}h_s\Big\rangle\Big|_{(s=0)}\, dt \\
&= \frac{1}{|c'|}\int_a^b \Big[\frac{d}{dt}\Big\langle \frac{\partial}{\partial s}h_s,\, \frac{\partial}{\partial t}h_s\Big\rangle - \Big\langle \frac{\partial}{\partial s}h_s,\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}h_s\Big\rangle\Big]_{(s=0)}\, dt \\
&= \frac{1}{|c'|}\big\langle V, c'\big\rangle\Big|_a^b - \frac{1}{|c'|}\int_a^b \big\langle V, c''\big\rangle\, dt
\end{aligned}$$

□

Wir wollen die beiden Terme von (33) verstehen:

• Der Integralterm mit negativem Vorzeichen sagt, dass die Kurve am meisten verkürzt wird, wenn man sie unter allen möglichen Richtungen $V$ genau in Richtung $c''$ ihres Krümmungsvektors abändert. Beispielsweise verkürzt man einen Kreisbogen, indem man seine Endpunkte mit Kreisbögen von größerem Radius verbindet; dann ist $\langle V, c''\rangle$ positiv.

• Der erste Term gibt an, wie durch Abänderung der Endpunkte eine Längenänderung bewirkt wird. Ist z.B. $V(b) = c'(b)$, so werden die Kurven länger, während die Länge sich für $V'(b) \perp c'(b)$ in erster Ordnung nicht ändert. Ist $h_s$ eigentlich, also $V(a) = V(b) = 0$, so verschwindet der Summand.

Auch mit (33) kann man Satz 20 beweisen. Wir wollen dies nur für reguläre $C^2$-Kurven $c$ tun. Zwar ist unser Beweis umständlicher als der bereits gegebene Beweis, jedoch überträgt sich die Argumentation auf den später zu behandelnden Fall von Kurven in Flächen.

*Beweis.* Wir zeigen, dass eine kürzeste reguläre Kurve $c$ von $p$ nach $q$ so umparametrisiert werden kann, dass $c'' \equiv 0$ gilt.

Wir wählen eine Umparametrisierung nach Bogenlänge. Weil $c$ kürzeste Kurve ist, muss $\frac{d}{ds}L(h_s)|_{s=0}$ für alle eigentlichen Variationsfelder $V$ verschwinden. Wir wählen eine Funktion $\varphi \in C^\infty\big([a,b],[0,\infty)\big)$ mit $\varphi(t) > 0$ für $t \in (a,b)$ und $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ und setzen $V(t) := \varphi(t)c''(t)$ und $h_s(t) := c(t) + sV(t)$. Wegen der Randwerte von $V$ ergibt die erste Variation (33)

$$0 = \frac{d}{ds}L(h_s)\Big|_{s=0} = -\int_a^b \varphi(t)|c''(t)|^2\,dt.$$

Im offenen Intervall $(a,b)$ folgt aus $\varphi(t) > 0$ dann $c''(t) = 0$. Wegen $c \in C^2$ gilt sogar $c''(t) = 0$ in $[a,b]$. $\square$

# Teil 2. Extrinsische Geometrie von Hyperflächen

`7. Vorlesung, 9.11.17`

Wir wenden uns der Geometrie von Flächen zu. Wie bei Kurven studieren wir hier als Erstes die sogenannte *lokale Geometrie*, insbesondere den Krümmungsbegriff. Wir benötigen hierfür die Analysis mehrerer Veränderlicher ebenso wie lineare Algebra.

Wir wollen die *extrinsische Geometrie* der Fläche untersuchen, also die Frage, wie eine Fläche im umgebenden Raum liegt. Wir werden die Gleichung der Kurvenkrümmung, $\nu' = -\kappa c'$, auf Flächen verallgemeinern und dazu die Ableitung ihrer Normalenabbildung, die sogenannte Weingarten-Abbildung, studieren. Dies wird verschiedene Krümmungsbegriffe liefern: Hauptkrümmungen, Gauß- und mittlere Krümmung.

Erst im nächsten Kapitel werden wir die sogenannte *intrinsische Geometrie* untersuchen. Hierzu zählen nur diejenigen Eigenschaften, die durch Längenmessung von Kurven innerhalb einer Fläche zugänglich sind.

## 1. Parametrisierte Flächen

1.1. **Bezeichnungen.** Wir verwenden den Buchstaben $U$ im Allgemeinen für Gebiete des $\mathbb{R}^n$, d.h. für offene (weg-)zusammenhängende Teilmengen. Dabei soll stets $n \geq 2$ sein; wenn wir die Dimension betonen wollen, schreiben wir $U^n$. In Beispielen betrachten wir allerdings auch nicht-offene Definitionsbereiche $U$; dann soll es aber immer ein Gebiet $V \supset U$ geben, so dass die betrachteten Funktionen sich mit gleicher Differenzierbarkeitsordnung nach $V$ fortsetzen lassen.

Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ sei $e_1, \ldots, e_n$. Wir können daher für jeden Vektor schreiben

$$X = \left(X^1, \ldots, X^n\right) = \sum_{i=1}^{n} X^i e_i. \tag{1}$$

Wir geben Koordinaten obere Indizes und numerieren Vektoren mit unteren Indizes. Das entspricht der Einteilung in *Vektoren eines Vektorraumes* (untere Indices) gegenüber *Kovektoren des Dualraums* (obere Indices). Es wird meist über Paare von oberen und unteren Indices summiert; wer damit vertraut ist, mag gern die Summenkonvention verwenden und in diesem Fall das Summenzeichen weglassen.

Eine differenzierbare Abbildung $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(x)$, besitzt partielle Ableitungen nach der $i$-ten Variablen,

$$\partial_i f(p) := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

und eine *Richtungsableitung* in Richtung eines Vektors $X \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_X f(p) := \frac{d}{dt} f(p+tX)\Big|_{t=0}. \tag{2}$$

Das *Differential* $df_p$ ist diejenige lineare Abbildung, die $f$ im Punkt $p$ am besten approximiert. Es wird durch die *Jacobimatrix* $Df(p) := (\partial_j f^i(p))_{ij}$ dargestellt. Bei Differential und Jacobimatrix lassen wir oft den sogenannten *Fußpunkt* $p \in U$ weg.

Für diese Vorlesung ist es kein Problem, jede auftretende lineare Abbildung als Matrix zu verstehen. Ich bevorzuge aber lineare Abbildungen, weil es für die Zwecke der globalen Geometrie richtig ist, an global definierte lineare Abbildungen zu denken, die nur lokal, also in Parametrisierungen bzw. Karten, durch wohlbestimmte Matrizen dargestellt werden.

Die *Kettenregel* sagt, dass $f = h \circ y$ das Differential $df_x = dh_{y(x)} \circ dy_x$ besitzt, d.h. die Linearisierung einer zusammengesetzten Abbildung ist die Komposition ihrer Linearisierungen. In Koordinaten wird das Matrizenprodukt $Df = (Dh \circ y)\, Dy$ dargestellt durch

$$\partial_i f^k(x) = \sum_j \partial_j h^k\big(y(x)\big)\, \partial_i y^j(x). \tag{3}$$

In gängiger Schreibweise lautet diese Formel

$$\frac{\partial f^k}{\partial x^i}(x) = \sum_j \frac{\partial h^k}{\partial y^j}(y(x)) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x). \tag{4}$$

Diese Schreibweise ist als gedachte Erweiterung eines Bruches leicht merkbar. Aus rigoroser mathematischer Sicht ist sie aber problematisch, weil $y$ in zwei verschiedenen Rollen auftritt: Als Variable in $\frac{\partial h^k}{\partial y^j}$ und als Funktion in $y(x)$ und $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$. Daher verwende ich (3).

Mit der Kettenregel stellen wir fest, dass die Richtungsableitung (2) durch

$$\partial_X f(p) = df_p(X) = \sum_j X^j \partial_j f(p)$$

gegeben ist. Statt $df(X)$ schreiben wir oft auch $df\,X$, genauso wie wir es für das Matrixprodukt $Df\,X$ tun würden. Genauso verfahren wir auch mit anderen linearen Abbildungen. Speziell für die partielle Ableitung erhalten wir als äquivalente Schreibweisen:

$$\partial_i f(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = df_p(e_i) = \partial_{e_i} f(p)$$

*Bemerkung für Physiker und Mechaniker:* In den beiden Schreibweisen (3) und (4) äußern sich unterschiedliche Funktionsbegriffe.

Für die Mathematik, speziell die Analysis, sind Abbildungen formale Zuordnungsvorschriften. Variablen braucht man zwar, um sie zu definieren, die Namen der Variablen sind aber unwichtig. Beispielsweise beschreiben $(x^1, x^2) \mapsto f(x^1, x^2)$ und $(x, y) \mapsto f(x, y)$ dieselbe Abbildung $f$. Die

Verwendung von Differentiationssymbolen wie $\partial_i f$ in dieser Vorlesung trägt dem Rechnung; sie verallgemeinert Newtons Schreibweise $f'$, die ebenfalls ohne Benennung der Variablen auskommt.

In allen anderen Wissenschaften sind die Variablen Größen mit einer Bedeutung. Oft weiß man weder, von welchen dieser Größen eine Funktion tatsächlich abhängt, noch haben sie eine natürliche Reihenfolge. Beispielsweise könnten Impuls $p$, Zeit $t$ und Temperatur $T$ die physikalisch sinnvolle Abhängigkeitsbeziehung $E(t,p) = E(p,t) = E(p,t,T)$ erfüllen. Ein weiteres Problem ist, dass bei Schreibweisen wie $E(t,x,\dot{x})$ die verketteten Funktionen nicht explizit benannt werden. In jedem Fall ist die Voraussetzung zur Anwendung der Kettenregel aber, sich die mathematische Zuordnungsvorschrift zu vergegenwärtigen.

1.2. **Flächen.** Bei Kurven hat es der Begriff der Regularität erlaubt, geometrische Größen wie Tangentenvektor oder Krümmung in jedem Punkt zu definieren. Entsprechendes müssen wir für Flächen verlangen, um sie differentialgeometrisch zu behandeln.

**Definition.** ($i$) Eine Abbildung $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, heißt *Immersion* (oder auch *reguläre Fläche*), wenn für jedes $p \in U$ das Differential $df_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ den Rang $n$ hat (so dass $m \geq n \geq 2$).
($ii$) Eine *parametrisierte Fläche* ist eine Immersion $f \in C^k(U^n, \mathbb{R}^m)$.
($iii$) Ein parametrisiertes Flächenstück $\tilde{f} \in C^k(\tilde{U}^n, \mathbb{R}^m)$ heißt *Umparametrisierung* von $f \in C^k(U^n, \mathbb{R}^m)$, sofern $\tilde{f} = f \circ \varphi$ durch einen Diffeomorphismus $\varphi \in C^k(\tilde{U}, U)$ erfüllt wird (d.h. $\varphi$ ist invertierbar und auch $\varphi^{-1}$ ist $C^k$).
($iv$) Eine *Fläche* $[f]$ ist eine Äquivalenzklasse parametrisierter Flächen unter der Relation Umparametrisierung. Eine *orientierte Fläche* $\langle f \rangle$ ist entsprechend eine Äquivalenzklasse parametrisierter Flächen unter der Relation orientierungstreue Umparametrisierung ($\det d\varphi > 0$).

Beachten Sie, dass wir Selbstschnitte zulassen.

**Definition.** Der *Tangentialraum* an $f$ in $p$ ist die Menge

$$T_p f := \operatorname{im} df_p = \{df_p(X) : X \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Die Elemente $df_p(X)$ bezeichnen wir als *Tangentialvektoren*.

Nach Standardresultaten der linearen Algebra folgern wir aus der Immersionseigenschaft:

**Lemma 1.** *Für jedes $p \in U$ gilt: $T_p f$ ist $n$-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$, das Differential $df_p \colon \mathbb{R}^n \to T_p f$ ist Vektorraumisomorphismus, und die Vektoren $(\partial_1 f, \dots, \partial_n f)(p)$ bilden eine Basis von $T_p f$.*

Wir stellen uns den Tangentialraum meist als den affinen Unterraum $p + T_pf$ vor.

Es dient der Unterscheidung von verschiedenen Tangentialräumen in Doppelpunkten, dass wir als Index jeweils einen Punkt des Parametergebiets $U$ nehmen: Ist $f(p) = f(q)$, so können wir $T_pf$ von $T_qf$ unterscheiden. Nur wenn die Immersion $f$ eine *Einbettung* ist, also ein Homöomorphismus auf das Bild, d.h. im Falle einer Untermannigfaltigkeit, kann man die Punkte $p$ und $f(p)$ identifizieren und jedem Bildpunkt $P := f(p) \in \mathbb{R}^m$ einen eindeutigen Tangentialraum zuordnen.

*Beispiel.* Das *Helikoid* oder die *Wendelfläche* ist die parametrisierte Fläche

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x\sin y, -x\cos y, y). \tag{5}$$

Für jedes feste $y$ sind die Parameterlinien $x \mapsto f(x,y)$ Geraden, für festes $x$ sind die Parameterlinien $y \mapsto f(x,y)$ Helices vom Radius $x$ mit Ganghöhe $2\pi$. Wir berechnen

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin y \\ -\cos y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x\sin y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Wie sieht derselbe Tangentialvektor in zwei verschiedenen Parametrisierungen aus?

$$\tilde f = f \circ \varphi, \;\; p = \varphi(\tilde p), \;\; X = d\varphi_{\tilde p}(\tilde X) \quad \Rightarrow \quad df_p(X) = df_{\varphi(\tilde p)}\big(d\varphi_{\tilde p}(\tilde X)\big) \overset{\text{Kettenr.}}{=} d\tilde f_{\tilde p}(\tilde X) \tag{7}$$

Tangentialvektoren transformieren sich also mit dem Differential der Parametertransformation bzw. mit deren Jacobimatrix.

1.3. **Erste Fundamentalform.** Wie wir noch zeigen werden, ist es unumgänglich, im Flächenfall mit verzerrenden, das heißt nicht längentreuen, Parametrisierungen zu arbeiten. Wir wollen die Längenverhältnisse in $T_pf$ als eine Eigenschaft des Parameterbereiches ansehen:

**Definition.** Sei $f \in C^k(U^n, \mathbb{R}^m)$ parametrisierte Fläche und $p \in U$. Die *erste Fundamentalform* ist die Abbildung

$$g\colon U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad g_p(X,Y) := \big\langle df_p(X), df_p(Y)\big\rangle.$$

Wir bezeichnen $\|X\|_p := |df_p(X)| = \sqrt{g_p(X,X)}$ als *(Riemannsche) Länge* von $X$.

Die erste Fundamentalform ist bilinear und symmetrisch in $(X,Y)$. Sie ist positiv definit, $g_p(X,X) = \big|df_p(X)\big|^2 > 0$ für $X \neq 0$, falls $f$ Immersion ist. Die erste Fundamentalform ist damit ein Skalarprodukt, das stetig vom Fußpunkt $p$ abhängt.

Meist berechnet man $g$ in der Matrixdarstellung $G = (g_{ij})$ mit

$$g_{ij}(p) := g_p(e_i, e_j) = \big\langle \partial_i f(p), \partial_j f(p)\big\rangle, \quad 1 \le i,j \le n, \quad \text{also} \quad G = G(p) := (Df_p)^T Df_p.$$

Die $n \times n$-Matrix $G$ ist symmetrisch. Sie ist positiv definit und daher invertierbar: Liegt $X$ im Kern, also $GX = 0$, so folgt $X^T GX = g(X,X) = 0$, also $X = 0$.

*Beispiel.* Für das Helikoid folgt aus (6)

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $g_{11}$ ist die quadrierte Länge des Tangentialvektors der Geraden $x \mapsto f(x,y)$. Weil diese Geraden nach Bogenlänge parametrisiert sind, ist $g_{11}$ konstant. Die Funktion $g_{22}$ gibt die quadrierte Länge des Tangentialvektors der Helices $y \mapsto f(x,y)$ an, die mit $|x|$ wächst. Schließlich zeigt $0 = g_{12} = g_{21}$, dass die Parameterlinien senkrecht aufeinander stehen.

Es seien nun zwei *Vektorfelder* $X, Y \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Basisdarstellungen wie in (1) für $X$ und $Y$ liefern

$$g(X,Y) = g\big(\textstyle\sum_i X^i e_i, \sum_j Y^j e_j\big) \overset{g \text{ bilinear}}{=} \displaystyle\sum_{i,j=1}^n X^i Y^j g(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i Y^j,$$

bzw. $g(X,Y) = X^T G\, Y = X^T Df^T Df\, Y$ in Matrixnotation.

*Beispiel.* Der Graph $f(x) := \big(x, u(x)\big)$ einer Funktion $u \in C^k(U^n, \mathbb{R})$ ergibt

$$g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} e_i \\ \partial_i u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_j \\ \partial_j u \end{pmatrix} \right\rangle = \delta_{ij} + \partial_i u\, \partial_j u,$$

wobei $\delta_{ij} := 1$ für $i = j$ und $0$ in allen anderen Fällen ist. Daher hat $X$ die quadrierte Länge

$$\|X\|^2 = |df(X)|^2 = \sum_{i,j} (\delta_{ij} + \partial_i u\, \partial_j u) X^i X^j = |X|^2 + \langle \nabla u, X \rangle^2 \quad \Big(\geq |X|^2\Big).$$

In der Tat: Senkrecht zu $\nabla u$ ist $u$ in erster Ordnung konstant, so dass Vektoren $Y \perp \nabla u$ im Graphen gleich lange Bilder haben, $\|Y\| = |Y|$; die zu $\nabla u$ parallelen Vektoren werden am meisten im Graphen verlängert.

`8. Vorlesung, 14.11.17` ______________________________

Unter Umparametrisierung transformiert sich $g$ wie folgt, wenn wir die Bezeichnungen entsprechend zu (7) verwenden:

$$\tilde g_{\tilde p}(\tilde X, \tilde Y) := \big\langle d\tilde f_{\tilde p}(\tilde X), d\tilde f_{\tilde p}(\tilde Y) \big\rangle = \big\langle df_p(d\varphi_{\tilde p}(\tilde X)),\, df_p(d\varphi_{\tilde p}(\tilde Y)) \big\rangle = g_p\big(X, Y\big).$$

Die erste Fundamentalform enthält die Information über Längen, Winkel und Inhalte von parametrisierten Flächen. Beispielsweise erfüllt ist der (Riemannsche) *Winkel* $\angle(X,Y)$

zweier Tangentialvektoren

$$\cos \angle(X, Y) = \frac{g(X, Y)}{\|X\| \|Y\|}.$$

Aus der Integrations-Vorlesung ist bekannt, dass die Verzerrung des Volumenelements einer Fläche durch die *Gramsche Determinante* $\sqrt{\det g}$ gegeben ist. Daraus ergibt sich z.B. das Oberflächenintegral

$$\text{area}\big(f(U)\big) := \int_U \sqrt{\det G(x)}\, dx. \tag{8}$$

Die Transformationsformel zeigt, dass dieser Ausdruck parametrisierungsinvariant ist. Offensichtlich ist er auch bewegungsinvariant, d.h. area ist eine geometrische Größe.

*Bemerkung.* Das Standard-Skalarprodukt auf $U$ spielt für uns keine Rolle. Wenn wir Begriffe wie "senkrecht" oder "Orthonormalbasis" für $U$ bzw. für Vektoren des $\mathbb{R}^n$ verwenden, so meinen wir dies immer bezüglich $g$. Insbesondere betrachten wir $e_1, \dots, e_n$ nur als Basis. Benötigen wir eine $g_p$-Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ des $\mathbb{R}^n$, so können wir sie nach Gram-Schmidt durch Orthonormalisierung aus $e_1, \dots, e_n$ gewinnen.

1.4. **Längentreue.** Eine Kurve der Form $c := f \circ \gamma$ mit $\gamma\colon I \to U$ bezeichnen wir als *Flächenkurve*. Jeden Tangentialvektor $df_p(X)$ an eine Fläche kann man als den Tangentialvektor einer Flächenkurve schreiben: Für $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ mit $\gamma(t) := p + tX$, gilt

$$c'(0) = df_{\gamma(0)}\big(\gamma'(0)\big) = df_p(X).$$

Die Länge einer Flächenkurve $c := f \circ \gamma$ ist

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)|\, dt = \int_a^b |df_{\gamma(t)}\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t), \gamma'(t)\big)}\, dt. \tag{9}$$

Wir integrieren also im Parameterbereich unter Berücksichtigung der Längenverzerrung der Parametrisierung.

**Definition.** Zwei parametrisierte Flächen $f_1, f_2 \in C^1(U^n, \mathbb{R}^m)$ heißen *isometrisch*, wenn $L(f_1 \circ \gamma) = L(f_2 \circ \gamma)$ für alle Kurven $\gamma \in C^1([a, b], U)$ gilt.

Flächen sind isometrisch, genau wenn sie dieselbe erste Fundamentalform besitzen:

**Satz 2.** *Zwei Parametrisierungen $f_1, f_2 \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ sind genau dann isometrisch, wenn ihre erste Fundamentalformen für jeden Punkt $p \in U$ übereinstimmen, $g_1(p) = g_2(p)$.*

*Beweis.* "$\Leftarrow$": Gilt $g_1 = g_2$ in jedem Punkt $p \in U$, so folgt dies sofort aus (9).

"$\Rightarrow$": Nehmen wir, indirekt, an, dass für längentreue Parametrisierungen die ersten Fundamentalformen nicht übereinstimmen würden. Wegen der Polarisierungsidentität

$2g(X,Y) = g(X+Y,X+Y) - g(X,X) - g(Y,Y)$ dürfen wir dann Folgendes annehmen: Es existiert ein $p \in U$ und ein $X \neq 0$, so dass $g_{1,p}(X,X) \neq g_{2,p}(X,X)$. Ohne Einschränkungen dürfen wir weiter annehmen, dass diese Ungleichung mit "$<$" gilt.

Wir betrachten nun den Weg $\gamma(t) = p+tX$ in $U$ für $t \in I := [-\varepsilon, \varepsilon]$. Aus Stetigkeitsgründen gilt, gegebenenfalls nach Verkleinerung von $\varepsilon$, dann $g_{1,\gamma(t)}(X,X) < g_{2,\gamma(t)}(X,X)$ für alle $t \in I$. Nach (9) folgt $L(f_1 \circ \gamma) < L(f_2 \circ \gamma)$, Widerspruch. $\square$

**Definition.** Eine Parametrisierung $f \in C^1(U^n, \mathbb{R}^m)$ heißt *längentreu*, wenn sie zur Identität isometrisch ist, d.h. $L(f \circ \gamma) = L(\gamma)$ gilt für jedes $\gamma$.

Laut Satz ist dies äquivalent dazu, dass $g$ mit der Standardmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ übereinstimmt.

*Bemerkungen.* 1. *Intrinsische Größen* sind solche, die allein durch Längenbestimmung innerhalb einer Fläche definierbar sind. Nach dem Satz gehören die durch die erste Fundamentalform bestimmbaren Größen dazu.

2. Die Flächentheorie ist aus folgendem Grund deutlich technischer als die Kurventheorie. In Dimension $n = 1$ ist eine Parametrisierung nach Bogenlänge immer möglich ($g_{11} = 1$), intrinsisch sind also Kurven (lokal) trivial. Flächen dagegen lassen sich im Allgemeinen nicht längentreu parametrisieren. Diesen aus der Kartographie bekannten Tatbestand werden wir mit dem *theorema egregium* (Satz 13) noch beweisen.

3. In Dimension $n = 2$ ist die Situation allerdings besser als in höheren Dimensionen: Es gibt stets lokal eine *konforme Parametrisierung* mit $g_{ij}(p) = \lambda(p)\delta_{ij}$, so dass man mit einer skalarwertigen Funktion $\lambda\colon U \to (0, \infty)$ auskommt, anstelle der drei verschiedenen Einträge $g_{11}, g_{12}, g_{22}$.

## 2. Die Normalen-Abbildung von Hyperflächen und ihre Ableitungen

2.1. **Gauß-Abbildung.** Wir betrachten den *Normalraum*

$$N_p f := (T_p f)^\perp \subset \mathbb{R}^m \qquad \text{für } p \in U;$$

es gilt also $\mathbb{R}^m = T_p f \oplus N_p f$.

Wir spezialisieren von nun an auf den Fall von Kodimension 1, also $m = n+1$. Flächen $f \in C^k(U^n, \mathbb{R}^{n+1})$ heißen auch *Hyperflächen*. Für Hyperflächen ist $N_p f$ eindimensional und wird durch Einheitsvektoren aufgespannt:

**Definition.** Sei $f \in C^1(U^n, \mathbb{R}^{n+1})$ parametrisierte Hyperfläche. Eine stetige Abbildung $\nu\colon U \to \mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ mit

$$\big\langle \nu(p), df_p(X) \big\rangle = 0 \qquad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^n \text{ und } p \in U$$

heißt *Gauß-Abbildung* oder Normalen-Abbildung.

*Beispiel.* Für einen Graphen $f(x) = \big(x, u(x)\big)$ eine stetige Wahl ist die obere Normale

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla u \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Sie hat offenbar Länge 1 und steht senkrecht auf $\partial_i f = (e_i, \partial_i u)$ für alle $i$.

**Satz 3.** *Zu jeder parametrisierten Hyperfläche $f \in C^k(U^n, \mathbb{R}^{n+1})$ existiert eine Gauß-Abbildung $\nu \in C^{k-1}(U^n, \mathbb{S}^n)$.*

*Beweis.* Das Vektorprodukt $v \times w = \big(v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_2\big)$ erlaubt uns, im Falle $n = 2$ zu definieren:

$$\nu(p) := \frac{\partial_1 f(p) \times \partial_2 f(p)}{\big|\partial_1 f(p) \times \partial_2 f(p)\big|}.$$

In beliebiger Dimension $n \geq 2$ kann man eine Gauß-Abbildung ebenfalls durch eine Formel erklären: $\nu$ ist der normalisierte Vektor $\sum_{i=1}^{n+1} \det(\partial_1 f, \ldots, \partial_n f, e_i)\, e_i$, siehe Übungen. $\square$

Eine *orientierte Normale* ist diejenige Normale $\nu$, für die $\big(df(e_1), \ldots, df(e_n), \nu\big)$ positiv orientiert ist. Sie ist wohldefiniert auf der orientierten Äquivalenzklasse $\langle f \rangle$ durch $\tilde{\nu} = \nu \circ \varphi$, dabei sei $\tilde{f} = f \circ \varphi$ für $\varphi$ orientierungstreu. Die obere Graphen-Normale ist orientiert (Übung), und auch der Satz liefert eine orientierte Normale. Es ist aber meist eher sinnvoll, umgekehrt anzunehmen, dass die Wahl der Normale $\nu$ eine Orientierung definiert. Wir schreiben daher auch $(f, \nu)$ für eine Hyperfläche mit gewählter Normale.

2.2. **Weingarten-Abbildung.** Wenn wir im Hyperflächenfall längs einer Kurve $\gamma(t)$ in $U$ laufen, wie ändert sich dann die Flächennormale $\nu \circ \gamma$? Auf jeden Fall ist $d\nu_\gamma(\gamma')$ tangential:

**Lemma 4.** *Sei $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^{n+1})$ parametrisierte Fläche. Dann gilt $d\nu_p(X) \in T_p f$ für alle $p \in U$, $X \in \mathbb{R}^n$, d.h. die lineare Abbildung $d\nu_p$ bildet den Raum $\mathbb{R}^n$ auf $T_p f$ ab,*

*Beweis.* Wir berechnen $d\nu_p(X)$, indem wir $\nu$ auf eine Kurve $\gamma$ in $U$ einschränken, die $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = X$ erfüllt. Wegen $|\nu|^2 = 1$ folgt

$$0 = \langle \nu \circ \gamma, \nu \circ \gamma \rangle' = 2\langle d\nu_\gamma(\gamma'), \nu \circ \gamma \rangle.$$

In $t = 0$ gilt daher $0 = \langle d\nu_p(X), \nu(p) \rangle$, d.h. $d\nu_p(X) \perp \nu(p)$. $\square$

Wir wollen den Effekt von $d\nu$ auf dem parametrisierenden Gebiet $U$ messen. Nach Lemma 1 gibt es für jedes $X \in \mathbb{R}^n$ genau ein $Y \in \mathbb{R}^n$, das die Gleichung $d\nu_p(X) = df_p(Y)$ erfüllt. Geometrisch bedeutet diese Gleichung: Geht man in Richtung $X$ im Parametergebiet, also in Richtung $df(X)$ auf der Fläche $f$, so ändert sich die Gauß-Abbildung von $f$ in Richtung $df(Y)$. Die Abbildung $X \mapsto Y$ wird für unsere Krümmungsdefinition entscheidend werden, und wir geben ihr einen Namen:

**Definition.** Die *Weingartenabbildung [shape operator]* einer Hyperfläche $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^{n+1})$ bezüglich $\nu$ ist die Abbildung

$$S\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad df_p(S_pX) = -d\nu_p(X),$$

die nach Lemma 1 and 4 eindeutig bestimmt ist.

`9. Vorlesung, 16.11.17` ______________________________

Wir schreiben meist $SX$ anstelle von $S(X)$. Zur Begründung des Vorzeichens von $S$ siehe (16) weiter unten.

Die Weingartenabbildung hat folgende Eigenschaften:

1. Erst wenn wir sowohl $df_p$ wie $d\nu_p$ als Abbildungen in den Unterraum $\mathbb{R}^n \to T_pf \subset \mathbb{R}^m$ verstehen, dürfen wir schreiben $S_pX = -(df_p)^{-1}(d\nu_p(X))$. (Als Matrizengleichung ließe sich das erst nach Wahl einer Basis von $T_pf$ schreiben.)

2. $X \mapsto S_pX$ ist eine lineare Abbildung für jedes $p \in U$, und damit insbesondere durch die Werte auf einer Basis $(Se_i)$ bestimmt.

3. $S$ ändert sein Vorzeichen mit $\nu$, d.h. $S$ ist für $(f, \nu)$ erklärt.

*Beispiele.* 1. Für den Einheits*zylinder*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (\cos x, \sin x, y) \tag{11}$$

wählen wir die innere Normale $\nu(x,y) := (-\cos x, -\sin x, 0)$. Also hat man

$$d\nu(e_1) = (\sin x, -\cos x, 0) = -df(e_1) \quad \Rightarrow \quad Se_1 = e_1,$$

d.h. entlang der $x$-Koordinatenlinien kippt die Normale in Richtung dieser Linien, während

$$d\nu(e_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad Se_2 = 0$$

bedeutet, dass sie in Richtung der $y$-Koordinatenlinien konstant bleibt.

2. Für eine Ebene $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x,y,0)$ ist $\nu \equiv (0,0,1)$ eine Normale. Also gilt $d\nu = 0$ und die Weingartenabbildung bildet $\mathbb{R}^2$ auf $0$ ab, d.h. $S \equiv 0$.

3. Das *hyperbolische Paraboloid* ist der Graph

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x, y, xy). \tag{12}$$

Wir berechnen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1,0,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (0,1,x), \qquad \nu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(-y,-x,1)$$

Speziell für den Punkt $p = (0,0)$ gilt

$$df\left(S_{(0,0)}e_1\right) = -d\nu_{(0,0)}(e_1) = -\frac{\partial \nu}{\partial x}(0,0) = (0,1,0) = df_{(0,0)}(e_2),$$

d.h. entlang der $e_1$-Richtung führt die Normale eine Drehung aus, $S_{(0,0)}e_1 = e_2$. Ebenso gilt $S_{(0,0)}e_2 = e_1$.

Die Weingartenabbildung hat folgendes Transformationsverhalten:

**Lemma 5.** $(i)$ Parametertransformation: *$(f,\nu)$ und $(\tilde f := f\circ\varphi,\ \tilde\nu := \nu\circ\varphi)$ haben ähnliche Weingartenabbildungen.*
$(ii)$ Bewegungsinvarianz: *$(f,\nu)$ und $(Af+b, A\nu)$ haben für alle $A \in \mathsf{SO}(n+1)$, $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ die gleiche Weingartenabbildung.*

*Beweis.* $(i)$ Wir verstehen $df_p, d\nu_p$ als Abbildungen von $\mathbb{R}^n \to T_pf$, so dass $df_p^{-1}\colon T_pf \to \mathbb{R}^n$ definiert ist; entsprechend für $d\tilde f_{\tilde p}, d\tilde\nu_{\tilde p}$ mit $p = \varphi(\tilde p)$. Dann ergibt die Kettenregel:

$$\tilde S_{\tilde p} := -(d\tilde f_{\tilde p})^{-1}\circ d\tilde\nu_{\tilde p} = -\big((d\varphi_{\tilde p})^{-1}\circ(df_p)^{-1}\big)\circ\big(d\nu_p\circ d\varphi_{\tilde p}\big) = (d\varphi_{\tilde p})^{-1}\circ S_p\circ d\varphi_{\tilde p} \tag{13}$$

$(ii)$ Übung. □

Schreibt man eine orientierte Normale vor, so sagt das Lemma, wie die Weingartenabbildung auf orientierten Hyperflächen $\langle f\rangle$ definierbar ist.

2.3. **Zweite Fundamentalform.** Um die Weingartenabbildung näher zu untersuchen, ist es nützlich, eine Bilinearform zu definieren, die rechnerisch vorteilhaft ist.

**Definition.** Die *zweite Fundamentalform* einer Hyperfläche $f \in C^2(U^n,\mathbb{R}^{n+1})$ mit Gauß-Abbildung $\nu$ ist die fußpunktabhängige Bilinearform

$$b_p(X,Y) := \big\langle d^2f_p(X,Y), \nu(p)\big\rangle, \qquad X,Y\in\mathbb{R}^n,\ \ p\in U. \tag{14}$$

Darin ist $d^2f(X,Y)$ die *Hesse-Form*, die wir (wie in der Taylor-Entwicklung) als Matrix $(\partial_{ij}f)$ auffassen können. Da $f$ vektorwertig ist, sind die Einträge allerdings Vektoren. Daher bevorzugen wir die Summenschreibweise

$$d^2f(X,Y) = d^2f\Big(\textstyle\sum_i X^ie_i, \sum_j Y^je_j\Big) = \sum_{i,j} X^iY^j\,\partial_{ij}f. \tag{15}$$

Geometrisch kann man dies als zweite Richtungsableitung $\partial_X\partial_Yf = d^2f(X,Y)$ verstehen.

Um eine Beziehung zwischen $b$ und $S$ herzuleiten, wenden wir auf $0 = \langle df(X),\nu\rangle$ die Richtungsableitung $\partial_Y = \sum_i Y^i\partial_i$ an:

$$0 = \partial_Y\big\langle df(X),\ \nu\big\rangle = \big\langle d^2f(X,Y),\nu\big\rangle + \big\langle df(X), d\nu(Y)\big\rangle = b(X,Y) - g(X,SY).$$

Wir erhalten

$$b_p(X,Y) = g_p(X,S_pY) \qquad \text{für alle } X,Y\in\mathbb{R}^n,\ p\in U, \tag{16}$$

was das Vorzeichen von $S$ begründet. Aus der Beziehung folgern wir eine Eigenschaft der Weingartenabbildung, die entscheidend für unsere Krümmungsdefinition werden wird:

**Satz 6.** *Die Weingartenabbildung $S_p$ ist selbstadjungiert bezüglich des Skalarprodukts $g_p$:*

$$g_p(S_pX, Y) = g_p(X, S_pY) \qquad \text{für alle } X, Y \in \mathbb{R}^n, \;\; p \in U$$

*Beweis.* Nach dem Satz von Schwarz vertauschen zweite partielle Ableitungen. Daher ist die Hesse-Form $d^2f(X,Y)$ symmetrisch in $X, Y$ und genauso ist es die Bilinearform $b(X,Y)$. Damit ist die linke Seite von (16) symmetrisch, also auch die rechte. □

Wir kommen nun zu Matrixdarstellungen von $b$ und $S$ bezüglich der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$.
• Die zweite Fundamentalform hat die symmetrische Matrix $B = (b_{ij})$ mit

$$b_{ij} := b(e_i, e_j) = \big\langle \partial_{ij} f, \nu \big\rangle = -\big\langle \partial_j f,\, \partial_i \nu \big\rangle \tag{17}$$

oder in Matrixnotation $B = -(Df)^T\, D\nu$.
• Die Weingartenabbildung ist ein Endomorphismus, also ist ihre Matrix $S = (S^i_{\;j})$ durch $S(e_j) = \sum_{i=1}^n S^i_{\;j} e_i$ gegeben, so dass wir erhalten:

$$b_{kj} \overset{(16)}{=} g\big(e_k, S(e_j)\big) = g\big(e_k,\, \textstyle\sum_i S^i_{\;j} e_i\big) = \displaystyle\sum_i g(e_k, e_i) S^i_{\;j} = \sum_i g_{ki} S^i_{\;j},$$

bzw. als Matrizengleichung $B = GS$. Durch Multiplikation mit der zu $G$ inversen Matrix $G^{-1} =: (g^{ij})$ ergibt sich $S = G^{-1}B$ oder

$$S^i_{\;j} = \sum_k g^{ik} b_{kj}. \tag{18}$$

Dabei ist $S^i_{\;j}$ im Allgemeinen nicht symmetrisch.

*Beispiel.* Ein Graph $f(x) = \big(x, u(x)\big)$ mit $\partial_i f = \big(e_i, \partial_i u\big)$ hat die zweite Fundamentalform

$$b_{ij} = \langle \partial_{ij} f, \nu \rangle \overset{(10)}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{ij} u \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla u \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\partial_{ij} u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}. \tag{19}$$

Speziell für Punkte $x$ mit horizontaler Tangentialebene gilt $\nabla u(x) = 0$, so dass $b_x(X,Y) = d^2 u_x(X,Y)$ bzw. $b_{ij}(x) = \partial_{ij} u(x)$. Wegen $(g_{ij})_x = \delta_{ij}$ ist die Matrix von $S$ in solchen Punkten dann ebenfalls durch $\partial_{ij} u$ gegeben.

*Bemerkung.* Im klassischen zweidimensionalen Fall wird für erste und zweite Fundamentalform gern die Notation von Gauß benutzt:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

2.4. **Normalkrümmung von Flächenkurven.** Für eine allgemeine Fläche $f\colon U^n \to \mathbb{R}^m$ sind für jeden Punkt $p \in U$ orthogonale *Normal-* und *Tangentialprojektionen*

$$\perp = \perp_p\colon \mathbb{R}^m \to N_p f, \qquad \Pi = \Pi_p\colon \mathbb{R}^m \to T_p f$$

definiert. Im Hyperflächenfall $m = n+1$ gilt $\perp(X) = \langle X, \nu\rangle \nu$.

Sei $\gamma\colon I \to U$ eine Kurve, so dass die Flächenkurve $c := f \circ \gamma$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. $\|\gamma'\| \equiv 1$. Um festzustellen, wie sich die Raumkurve $c$ relativ zur Fläche $(f, \nu)$ krümmt, zerlegen wir den Krümmungsvektor $c''$ in seinen normalen und tangentialen Anteil:

$$c'' = \perp(c'') + \Pi(c'') \quad \in N_\gamma f \oplus T_\gamma f \tag{20}$$

Es ist sinnvoll, skalare Krümmungsbegriffe für die beiden Komponenten des Krümmungsvektors einzuführen.

Im Hyperflächenfall ist die *Normalkrümmung [normal curvature]* die vorzeichenbehaftete Länge von $\perp c''$,

$$\kappa_{\mathrm{norm}}\colon I \to \mathbb{R}, \qquad \kappa_{\mathrm{norm}} := \langle c'', \nu \circ \gamma\rangle = -\big\langle c', d\nu_\gamma(\gamma')\big\rangle, \tag{21}$$

wobei wir für die Gleichheit $\langle c', \nu\rangle = 0$ benutzt haben. Die Normalkrümmung einer allgemeinen Flächenkurve ergibt sich wieder durch Umparametrisierung auf Bogenlänge.

*Beispiele.* 1. Für einen Großkreis in $\mathbb{S}^n$ stimmen Normalkrümmung und Kurvenkrümmung überein, weil der Krümmungsvektor normal steht.
2. Verschwindende Normalkrümmung haben der Berührkreis eines Rotationstorus mit einer Ebene oder jede Kurve in einer Ebene von $\mathbb{R}^3$.

Die Normalkrümmung kann man durch die Krümmungsbegriffe $S$ oder $b$ ausdrücken:

**Satz 7** (Meusnier 1776)**.** *Eine Hyperfläche $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^{n+1})$ mit Gauß-Abbildung $\nu$ enthalte eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c = f \circ \gamma$. Ihre Normalkrümmung* (21) *ist bereits durch die Tangentenrichtung $\gamma'$ und die Daten $g$, $S$ der Fläche $f$ bestimmt:*

$$\kappa_{norm} = g(\gamma', S\gamma') = b(\gamma', \gamma') \qquad (\textit{für } \|\gamma'\| = 1). \tag{22}$$

*Beweis.* Aus (21) erhalten wir $\kappa_{\mathrm{norm}} = -\big\langle df(\gamma'), d\nu(\gamma')\big\rangle = g(\gamma', S\gamma')$. Der Ausdruck mit $b$ folgt dann aus (16). Alternativ ergibt er sich durch direktes Nachrechnen unter Benutzung von $df(\gamma'') \perp \nu$, denn $\big\langle (f \circ \gamma)'', \nu \circ \gamma\big\rangle = \big\langle d^2 f(\gamma', \gamma'), \nu \circ \gamma\big\rangle = b(\gamma', \gamma')$. □

Für eine gegebene Fläche ist die Normalkrümmung also in jedem Punkt als quadratische Form $q(X) := b(X, X)$ gegeben, die auf Einheitsvektoren $X \in T_p f$ auszuwerten ist, also $\kappa_{\mathrm{norm}}(t) := q(\gamma'(t))$.

*Beispiel.* Für den wie in (11) parametrisierten Zylinder ist $(e_1, e_2)$ eine $g$-Orthonormalbasis und Für einen Einheitsvektor ergibt sich die Darstellung $\gamma'(t) = \cos\alpha(t)\, e_1 + \sin\alpha(t)\, e_2$. Wegen $Se_1 = e_1$ und $Se_2 = 0$ ergibt das

$$\kappa_{\text{norm}} = g(\gamma', S\gamma') = g\big(\cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2,\, S(\cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2)\big) \overset{Se_1=e_1,\, Se_2=0}{=} \cos^2\alpha.$$

Insbesondere ist $0 \leq \kappa_{\text{norm}} \leq 1$.

*Bemerkung.* Den Betrag der Tangentialkomponente $\Pi(c'')$ des Krümmungsvektors $\kappa_{\text{geod}}(t) := |\Pi(c''(t))|$ bezeichnet man als *geodätische Krümmung [geodesic curvature]*. Während die Normalkrümmung zur extrinsischen Geometrie gehört, werden wir im nächsten Kapitel sehen, dass die geodätische Krümmung ein intrinsischer Begriff ist. Analog zur Situation bei Kurvenkrümmungen wird die geodätische Krümmung im Flächenfall $n = 2$ üblicherweise mit einem Vorzeichen versehen. In jedem Fall ergibt der Satz des Pythagoras wegen der Orthogonalität von $\perp(c'')$ und $\Pi(c'')$, dass

$$\kappa^2 = \kappa_{\text{norm}}^2 + \kappa_{\text{geod}}^2.$$

Beispielsweise besitzen Breitenkreise auf der Sphäre eine nicht-verschwindende geodätische Krümmung, sofern sie nicht Großkreis sind.

## 3. Krümmungsbegriffe für Hyperflächen

3.1. **Hauptkrümmungen.** Wir führen einen Krümmungsbegriff ein, der für jeden Fußpunkt $p \in U$ durch ein Standardproblem der linearen Algebra erklärt ist:

**Definition.** Jeder Eigenvektor $v(p) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von $S_p$ heißt *Hauptkrümmungsrichtung* in $p$ *[principal curvature direction]*, der zugehörige Eigenwert $\kappa(p)$ eine *Hauptkrümmung [principal curvature]*.

Nach (18) sind die Hauptkrümmungsrichtungen daher die Eigenvektoren der Matrix

$$S = G^{-1}B = \Big(\sum_k g^{ik} b_{kj}\Big)_{1\leq i,j\leq n} \tag{23}$$

und die Hauptkrümmungen sind ihre Eigenwerte.

Geometrisch kann man die Eigenwertgleichung wie folgt verstehen: Längs einer Hauptkrümmungsrichtung $v$ gilt $d\nu(v) = -df(Sv) = -df(\kappa v) = -\kappa\, df(v)$, so dass die Normale mit Geschwindigkeit $-\kappa$ kippt; sie rotiert nicht zur Seite. Also ist das Vorzeichen der Hauptkrümmung $\kappa$ positiv, wenn sich die Fläche in der Hauptkrümmungsrichtung zur Normalen $\nu$ hin krümmt.

`10. Vorlesung, 21.11.17` ______________________________

*Beispiele.* 1. Auf dem Zylinder (11) mit $Se_1 = e_1$ bzw. $Se_2 = 0$ sind beide Koordinatenrichtungen Hauptkrümmungsrichtungen, und zwar zu den Hauptkrümmungen 1 bzw. 0.

2. Im Punkt $(0,0)$ des hyperbolischen Paraboloids (12) gilt $S_{(0,0)}e_1 = e_2$ und $S_{(0,0)}e_2 = e_1$. Es folgt $S(e_1 \pm e_2) = \pm(e_1 \pm e_2)$. Also sind die beiden Diagonalen $e_1 \pm e_2$ die Hauptkrümmungsrichtungen im Punkt $(0,0)$, und $\pm 1$ sind die Hauptkrümmungen.

3. Die Fälle $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bzw. $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind degeneriert: Hier ist jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung mit Hauptkrümmung 0 bzw. $\frac{1}{r}$ (vgle. Aufgaben).

**Satz 8.** *[Existenz von Hauptkrümmungen/Hauptkrümmungsrichtungen]*
*Sei $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^{n+1})$ parametrisierte Hyperfläche.*
$(i)$ *Dann existiert für jedes $p \in U$ eine $g$-Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren für $S_p$ mit Eigenwerten $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$.*
$(ii)$ *Die Hauptkrümmungen sind geometrische Größen (unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen); sie wechseln das Vorzeichen bei Normalenwechsel.*

*Beweis.* $(i)$ Durch das Skalarprodukt $g_p$ wird $\mathbb{R}^n$ zu einem euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, g_p)$. Der Endomorphismus $S_p$ ist bezüglich des Skalarproduktes selbstadjungiert, wie wir in Satz 6 gezeigt haben. Es ist ein Kernresultat der linearen Algebra, dass $S_p$ dann diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ ist (siehe auch Aufgaben).

$(ii)$ Nach Lemma 5$(ii)$ ist $S$ bewegungsinvariant, also sind es auch die Eigenwerte und -räume von $S$. Weiter sind laut (13) zwei Darstellungen $S$ und $\tilde{S} = d\varphi^{-1} \circ S \circ d\varphi$ ähnlich, so dass die Eigenwerte übereinstimmen. $\square$

Unter Parametertransformation transformieren sich die Hauptkrümmungsrichtungen wie in (7). Tatsächlich folgt aus $Sv = \lambda v$ sofort $\tilde{S}(d\varphi^{-1}v) = d\varphi^{-1}Sv = \lambda(d\varphi^{-1}v)$.

Statt des Eigenwertproblems für die Weingartenabbildung $S_p$ kann man auch mit der zweiten Fundamentalform $b_p$ arbeiten. Dann würde man die Hauptkrümmungsrichtungen $v_1, \ldots, v_n$ aus der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ durch eine *Hauptachsentransformation* der Bilinearform $b_p(.,.)$ gewinnen.

*Bemerkung.* Folgende allgemeine Tatsachen der linearen Algebra formulieren wir mit geometrischen Begriffen. Dabei sei $p \in U$ fixiert.

1. *Zwei Hauptkrümmungsrichtungen $v_1, v_2$ zu verschiedenen Hauptkrümmungen $\kappa_1 \neq \kappa_2$ stehen aufeinander senkrecht bezüglich $g$.* In der Tat folgt aus

$$\kappa_1 g(v_1, v_2) = g(Sv_1, v_2) = g(v_1, Sv_2) = \kappa_2 g(v_1, v_2),$$

dass $g(v_1, v_2) = 0$.

2. Nehmen wir an, $X$ ist ein kritischer Punkt der quadratischen Form $X \mapsto g_p(SX, X) =: q(X)$ unter der Nebenbedingung, dass $X$ in der $g$-Einheitssphäre $\{Y \in \mathbb{R}^n : \ell(Y) := \|Y\|_p^2 = 1\}$ liegt.

Nach dem Satz von Lagrange ist $X$ genau dann kritisch, wenn $\operatorname{grad} q(X) = \lambda \operatorname{grad} \ell(X)$. Komponentenweise gilt also $dq_X(e_i) = \lambda\, d\ell_X(e_i)$ für alle $i$. Durch Ausrechnen folgt

$$dq_X(e_i) = \frac{d}{dt} g\big(S(X+te_i), X+te_i\big)\Big|_{t=0} = g\big(SX, e_i\big) + g\big(Se_i, X\big) = g\big(2SX, e_i\big),$$

und ebenso $d\ell_X(e_i) = \frac{d}{dt} g(X+te_i, X+te_i)\big|_{t=0} = g(2X, e_i)$. Weil diese beiden Gleichungen für alle $i = 1, \dots, n$ gelten, folgt daraus die Eigenwertgleichung $SX = \lambda X$. Wir erhalten so: *Die kritischen Punkte der Normalkrümmung $X \mapsto \kappa_{norm}(X)$ auf der $g$-Einheitssphäre sind genau die Hauptkrümmungsrichtungen.* Insbesondere sind minimale und maximale Normalkrümmung gerade Hauptkrümmungen.

Aus den Bemerkungen folgt:

**Satz 9.** *Auf Flächen ($n = 2$) wird die Normalkrümmung in einer Hauptkrümmungsrichtung minimal und in einer darauf senkrechten Hauptkrümmungsrichtung maximal.*

Wir geben zusätzlich einen direkten Beweis:

*Beweis.* Für zwei Einheits-Hauptkrümmungsrichtungen $v_1 \perp_g v_2$ setzen wir $v_\alpha := \cos\alpha\, v_1 + \sin\alpha\, v_2$. Die Normalkrümmung $\kappa_{\mathrm{norm}}(v_\alpha)$ wird dann durch die *Euler-Formel* gegeben:

$$g(Sv_\alpha, v_\alpha) = g(\kappa_1 \cos\alpha\, v_1 + \kappa_2 \sin\alpha\, v_2,\ \cos\alpha\, v_1 + \sin\alpha\, v_2) = \kappa_1 \cos^2\alpha + \kappa_2 \sin^2\alpha \tag{24}$$

Als Funktion von $\alpha$ hat die Normalkrümmung also Maximum und Minimum gerade in den Richtungen $\pm v_1$ und $\pm v_2$. $\square$

**Definition.** Eine reguläre Flächenkurve $c = f \circ \gamma$ heißt
($i$) *Krümmungslinie*, wenn $\gamma'$ Hauptkrümmungsrichtung ist für alle $t$, bzw.
($ii$) *Asymptotenlinie*, wenn für alle $t$ die Normalenkrümmung verschwindet, $g(S\gamma', \gamma') = 0$.

*Beispiele.* 1. Auf dem Zylinder sind Kreise und Geraden Krümmungslinien.
2. Eine Gerade in einer Hyperfläche ist stets Asymptotenlinie, denn $S\gamma' \perp_g \gamma'$.
3. (Degenerierter Fall:) Auf $\mathbb{S}^n$ oder $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist jede Kurve Krümmungslinie.
4. Auf $\mathbb{S}^n$ gibt es keine Asymptotenlinien, in $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ ist jede Kurve Asymptotenlinie.

*Bemerkung.* Im Falle von Kurven ist die Formel $\nu' = -\kappa c'$ eine gute Krümmungsdefinition, weil sie sogar bei beliebiger Parametriserung gilt. In vollständiger Analogie steht die Flächenkrümmung in einer Hauptkrümmungsrichtung, $Sv = \kappa v \Leftrightarrow d\nu(v) = -\kappa df(v)$.

### 3.2. **Gauß- und mittlere Krümmung.**

**Definition.** Es sei $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^{n+1})$ ein parametrisierte Hyperfläche mit Hauptkrümmungen $\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)$ in $p \in U$. Die *Gauß-Krümmung* $K$ ist das Produkt der Hauptkrümmungen, die *mittlere Krümmung [mean curvature]* $H$ ihr Mittelwert,

$$K(p) := \det S_p = \kappa_1(p) \cdots \kappa_n(p), \qquad H(p) := \frac{1}{n} \operatorname{spur} S_p = \frac{1}{n}\big(\kappa_1(p) + \cdots + \kappa_n(p)\big).$$

Nach (23) haben Gauß- und mittlere Krümmung die Matrix-Darstellungen

$$K = \det(G^{-1}B) = \det G^{-1} \det B = \frac{\det B}{\det G}, \qquad H = \frac{1}{n}\operatorname{spur}(G^{-1}B) = \frac{1}{n}\sum_{1\le i,j\le n} g^{ij} b_{ij}.$$

Speziell für $n = 2$ ist $G^{-1} = \frac{1}{\det G}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11}\end{pmatrix}$ und daher

$$H = \frac{1}{2\det G}\big(g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} + g_{11}b_{22}\big).$$

*Bemerkungen.* 1. $H, K$ sind geometrische Größen:

- Unter Umparametrisierung bleibt $S$ ähnlich, und damit sind die unter Ähnlichkeiten invarianten Ausdrücke $\det S$ und $\operatorname{spur} S$ ebenfalls parametrisierungsunabhängig.
- Unter Bewegungen ändert sich $S$ ohnehin nicht.

2. In zwei Dimensionen wird sich $K$ im *theorema egregium* sogar als invariant unter längentreuen Abbildungen herausstellen.

3. Bei Orientierungswechsel $\nu \leftrightarrow -\nu$ ändert $H$ sein Vorzeichen. Das Vorzeichen von $K$ ändert sich nur in ungerader Dimension, z.B. bleibt $K$ im Flächenfall $n = 2$ invariant.

*Beispiele.* (vgl. Abschnitt 3.1): 1. Der Zylinder (11) mit innerer Normaler hat konstante Hauptkrümmungen 0 und 1. Also gilt $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2}$.

2. Auf dem hyperbolischen Paraboloid (12) ist $\kappa_{1,2}(0,0) = \pm 1$. Daher ist $K(0,0) = -1$, $H(0,0) = 0$.

3. Für $\mathbb{S}^n_r$ mit innerer Normaler gilt $K \equiv (\frac{1}{r})^n$, $H \equiv \frac{1}{r}$; für $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ ist $K \equiv 0$, $H \equiv 0$.

4. Auf einem Graphen $f(x) = \big(x, u(x)\big)$ betrachten wir Punkte $x$ mit horizontaler Tangentialebene, also $\nabla u(x) = 0$. Es gilt dann $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ und die zweite Fundamentalform wird zur Hessematrix, d.h. $b_{ij}(x) = \partial_{ij}u(x)$, siehe (19). Für solche $x$ erhalten wir daher

$$K(x) = \det d^2u(x), \qquad H(x) = \frac{1}{n}\operatorname{spur} d^2u(x) = \frac{1}{n}\Delta u(x).$$

Sind die Koordinatenrichtungen bereits Hauptkrümmungsrichtungen, so wird $d^2u$ diagonal, und $K$ ist gerade das Produkt $\prod_i \partial_{ii}u(x)$. Diese Voraussetzung lässt sich durch Drehung stets erfüllen.

*Bemerkung.* Auf Flächen ($n = 2$) nennt man Punkte $p$ mit $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ *Nabelpunkte [umbilics]*. Beispielsweise sind sämtliche Punkte von $\mathbb{S}^2$ oder $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ Nabelpunkte. Um diesen Begriff ranken sich interessante offene Probleme. Eine Vermutung von Caratheodory sagt, dass jede konvexe Einbettung von $\mathbb{S}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ mindestens zwei Nabelpunkte besitzt. Eine Vermutung von Loewner sagt, dass isolierte Nabelpunkte von Flächen in $\mathbb{R}^3$ stets einen Index $\le 1$ haben; der Index isolierter Nabelpunkte gibt an, wie oft das Krümmungslinienfeld um einen Nabelpunkt dreht (siehe [H], S.109). Diese Vermutungen sind bewiesen für den Fall, dass die Fläche analytisch ist, aber Beweise, die für geringere Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gegeben worden sind, scheinen nicht richtig zu sein.

`11. Vorlesung, 23.11.17`

3.3. **Rotationsflächen.** Es sei $(r,h) \in C^2(I, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ eine reguläre Kurve. Wir legen die Bildebene in die $(x,z)$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ und rotieren sie um die $z$-Achse. Das Ergebnis ist die *Rotationsfläche [surface of revolution]*

$$f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad f(t,\varphi) := \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen an diesem Beispiel, wie man alle Krümmungsgrößen berechnet.

*Erste Fundamentalform*: Wegen

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi \\ r'\sin\varphi \\ h' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_2 f = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

ist $g$ diagonal mit

$$g_{11} = r'^2 + h'^2, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{12} = g_{21} = 0.$$

*Normale*: Die Kurvensenkrechte $J\binom{r'}{h'} = \binom{-h'}{r'}$, normiert und um die $z$-Achse gedreht, ergibt die Flächennormale

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + h'^2}} \begin{pmatrix} -h'\cos\varphi \\ -h'\sin\varphi \\ r' \end{pmatrix}.$$

*Zweite Fundamentalform*: Die zweiten Ableitungen sind

$$\partial_{11} f = \begin{pmatrix} r''\cos\varphi \\ r''\sin\varphi \\ h'' \end{pmatrix}, \quad \partial_{22} f = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{12} f = \partial_{21} f = \begin{pmatrix} -r'\sin\varphi \\ r'\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

so dass

$$b_{11} = \langle \partial_{11} f, \nu \rangle = \frac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{r'^2 + h'^2}}, \qquad b_{22} = \langle \partial_{22} f, \nu \rangle = \frac{rh'}{\sqrt{r'^2 + h'^2}}, \qquad b_{12} = \langle \partial_{12} f, \nu \rangle = 0.$$

*Hauptkrümmungen*: Weil sowohl $G$ wie $B$ diagonal sind, ist auch $S = G^{-1}B$ diagonal. Insbesondere sind die beiden Koordinatenrichtungen Hauptkrümmungsrichtungen, mit

$$\kappa_1 = g^{11} b_{11} = \frac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{r'^2 + h'^2}^{\,3}}, \qquad \kappa_2 = g^{22} b_{22} = \frac{1}{r} \frac{h'}{\sqrt{r'^2 + h'^2}}. \tag{25}$$

Bezüglich der Basis $v_1 = \binom{1}{0}$ und $v_2 = \binom{0}{1}$ hat die Weingartenabbildung also die Matrixdarstellung $S = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$

*Gauß- und mittlere Krümmung*: Um $K$ und $H$ zu berechnen, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Kurve $(r,h)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Aus $r'^2+h'^2=1$ folgt $r'r''+h'h''=0$ und daher gilt

$$K=\frac{r'h'h''-h'^2r''}{r}=\frac{-r'^2r''-h'^2r''}{r}=-\frac{r''}{r}\qquad\text{und}\qquad 2H=r'h''-h'r''+\frac{1}{r}h'.$$

*Beispiele.* 1. Ein *Rotationstorus* wird erzeugt durch den nach Bogenlänge parametrisierten Kreis

$$\big(r,h\big)(t)=\Big(R+\rho\cos\frac{t}{\rho},\ \rho\sin\frac{t}{\rho}\Big)\qquad\text{für } 0<\rho<R.$$

Wegen $r'=-\sin\frac{t}{\rho}$ und $r''=-\frac{1}{\rho}\cos\frac{t}{\rho}$ folgt

$$K(t)=\frac{\frac{1}{\rho}\cos\frac{t}{\rho}}{R+\rho\cos\frac{t}{\rho}}\,.$$

Es gilt $K(t)=0$ genau für $\frac{t}{\rho}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$. Für alle anderen Punkte gilt: Auf der „Außenseite“ des Torus ist $K>0$, auf der „Innenseite“ ist $K<0$.

2. Wir ermitteln alle rotationssymmetrischen Flächen mit verschwindender Gauß-Krümmung $K\equiv 0$. Aus $r''(t)=0$ folgt $r(t)=at+b$ mit $a,b\in\mathbb{R}$, wobei $t$ so zu wählen ist, dass $r>0$. Wegen der Bogenlängenparametrisierung $r'^2+h'^2=1$ gilt weiter $|a|\le 1$ und $h'=\pm\sqrt{1-a^2}$, so dass $h(t)=c\pm\sqrt{1-a^2}\,t$ mit $c\in\mathbb{R}$. Es ergibt sich also die Geradengleichung

$$t\mapsto\begin{pmatrix}r\\h\end{pmatrix}(t)=\begin{pmatrix}a\\\pm\sqrt{1-a^2}\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}.$$

• Im Fall $a=0$ ist dies eine Gerade parallel zur Rotationsachse, und die Fläche ist ein Zylinder mit Radius $b$.
• Im Fall $a=\pm1$ steht die Gerade senkrecht auf der Rotationsachse, und die Fläche ist eine Ebene (der Achsenpunkt fehlt).
• Im allgemeinen Fall $0<|a|<1$ erzeugt die Gerade einen Kegel (ohne Spitze).

Wir wollen abschließend erneut die Hauptkrümmungen einer Rotationsfläche bestimmen, diesmal durch anschauliche geometrische Überlegungen. Wir betrachten dazu die

$$\textit{Meridiankurven } t\mapsto f(t,\varphi)=:m_\varphi(t)\quad\text{und}\quad\textit{Breitenkreise } \varphi\mapsto f(t,\varphi)=:b_t(\varphi).$$

Diese beiden Kurven schneiden sich stets senkrecht, so dass die drei Vektoren $(m'_\varphi,b'_t,\nu)$ eine orthogonale Basis bilden.

• Für die Hauptkrümmungsrichtungen benutzen wir ein Symmetrieargument: Jeder Meridian liegt in der vertikalen Ebene $E_\varphi$. Eine Spiegelung an $E_\varphi$ erhält die Rotationsfläche und ihre Flächennormalen $t\mapsto\nu(t,\varphi)$. Also muss $\nu(t,\varphi)\in E_\varphi$ für alle $t$ gelten, daher auch $\frac{\partial\nu}{\partial t}\in E_\varphi$. Damit steht $\frac{\partial\nu}{\partial t}=\partial_1\nu$ senkrecht auf $b'_t$ und –ohnehin– auf $\nu$. Es folgt $\frac{\partial\nu}{\partial t}\parallel m'_\varphi=\partial_1 f$, d.h. $\binom{1}{0}$ ist Hauptkrümmungsrichtung und jeder Meridian $m_\varphi$ ist

Krümmungslinie. Weil die Breitenkreise $b_t$ senkrecht auf den Meridianen stehen, müssen auch sie Krümmungslinien sein (wie sieht man dies direkt?).

• Die Hauptkrümmungen bestimmen wir nun als Normalkrümmungen. Weil beide Krümmungen nicht von $\varphi$ abhängen, dürfen wir uns jeweils auf $\varphi = 0$ zurückziehen. Die Meridiankurve $m_0(t)$ liegt zusammen mit ihrer Normalen in der Ebene $E_0$, so dass ihre Normalkrümmung der Kurvenkrümmung in $E_0$ entspricht. Daher gilt

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \text{Normalkrümmung}\big(t \mapsto m_0(t)\big) = \text{Kurvenkrümmung}\big(t \mapsto \big(r(t), h(t)\big)\big) \\ &\overset{\text{Satz } I,3}{=} \frac{1}{|(r',h')|^3} \det\left(\begin{pmatrix} r' \\ h' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r'' \\ h'' \end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

und die erste Identität von (25) ist bestätigt. Für $\varphi = 0$ liegt der Krümmungsvektor der Breitenkreise in der Ebene $E_0$ und lautet $(-\frac{1}{r(t)}, 0) \in E_0$. Nach Definition ist die Normalkrümmung die Komponente dieses Krümmungsvektors in Richtung der Normalen $\nu \in E_0$. Dadurch bestätigen wir die zweite Identität:

$$\kappa_2 = \text{Normalkrümmung}\big(\varphi \mapsto b_t(\varphi)\big) = \left\langle \begin{pmatrix} -1/r \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{r'^2 + h'^2}} \begin{pmatrix} -h' \\ r' \end{pmatrix} \right\rangle$$

Unsere geometrische Argumentation macht sofort klar:
1. Es gilt $\kappa_2 = \frac{1}{r}$ genau für Punkte mit vertikaler Tangentialebene, also für $r' = 0$, und
2. es gilt $\kappa_2 = 0$ genau für Punkte mit horizontaler Tangentialebene, also für $h' = 0$.

## 4. Lokale Normalform und ein globaler Satz für Flächen

4.1. **Lokale Normalform: Hauptkrümmungen als Koeffizienten der Taylorreihe.** Wir verallgemeinern zuerst die Darstellung I(31) von Kurven, um eine Fläche lokal als Graph über ihrer Tangentialebene schreiben. Wie bei Kurven erreicht man dies durch die Anwendung des Umkehrsatzes auf die Projektion einer Fläche auf ihre Tangentialebene.

**Lemma 10** (Lokaler Graph)**.** *Es sei $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n+1})$ Hyperfläche ($k \geq 2$). Ferner sei $p \in U$, $P := f(p)$, $N := \nu(p)$.*
*Dann gibt es ein Gebiet $V \subset T_pf$ mit $0 \in V$ und eine Parametertransformation $\varphi\colon V \to \varphi(V) \subset U$, mit $\varphi(0) = p$, so dass $\tilde{f} := f \circ \varphi$ erfüllt*

$$\tilde{f}(X) = P + X + u(X)N \quad \textit{für alle } X \in V \subset T_pf. \tag{26}$$

*Hierbei ist $u \in C^k(V, \mathbb{R})$ mit $u(0) = 0$ und $du_0 = 0$.*

*Beweis.* Wir benutzen die orthogonale Projektion $\Pi_p\colon \mathbb{R}^{n+1} \to T_pf$, um die Abbildung $f - P$ auf den festen Tangentialraum $T_pf$ zu projizieren: Es sei

$$\psi := \Pi_p \circ \big(f - P\big) \in C^2(U, T_pf).$$

Die gesuchte Funktion, die $f$ durch die Projektion nach $T_pf$ parametrisiert, ist offenbar $f \circ \psi^{-1}$. Wir konstruieren nun $\psi^{-1}$ als Umkehrfunktion. In $p$ gilt

$$\psi(p) = 0, \qquad d\psi_p = d\Pi_p \circ df_p \overset{\Pi_p \text{ linear}}{=} \Pi_p \circ df_p \overset{df_p(\mathbb{R}^n)=T_pf}{=} df_p. \tag{27}$$

Nach Lemma 1 ist $df_p\colon \mathbb{R}^n \to T_pf$ ein Isomorphismus; also gilt dies auch für $d\psi_p$. Der Umkehrsatz, angewendet auf $\psi$ in $p$, ergibt daher eine Umgebung $V$ von 0 in $T_pf$ und eine lokale Umkehrabbildung $\varphi \in C^2(V, U \subset \mathbb{R}^n)$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$.

Es gilt also $X = (\psi \circ \varphi)(X) = \Pi_p\big((f \circ \varphi)(X) - P\big)$. Definieren wir $\tilde f := f \circ \varphi\colon V \to \mathbb{R}^{n+1}$, so können wir deshalb mit folgender orthogonalen Zerlegung eine Normalkomponente $u \in C^2(V, \mathbb{R})$ definieren:

$$\tilde f(X) - P = X + u(X)N \quad \in T_pf \oplus N_pf.$$

Das liefert (26). Klarerweise gilt $u(0) = 0$. Wir zeigen abschließend $du_0 = 0$. Aus der letzten Gleichung folgt durch Linearisieren $d\tilde f_0 = \mathrm{id} + N\,du_0$. Andererseits ergibt $\tilde f = f \circ \varphi$

$$d\tilde f_0 = df_p \circ d\varphi_0 = df_p \circ (d\psi_p)^{-1} \overset{(27)}{=} \mathrm{id}\,. \tag{28}$$

Insgesamt folgt $N\,du_0 = 0$ und damit $du_0 = 0$. □

`12. Vorlesung, 28.11.17` ______________________________________________

Aus (28) folgern wir noch, dass $\tilde g_0(\cdot,\cdot) = \langle d\tilde f_0\,\cdot, d\tilde f_0\,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$. Eine $\tilde g_0$-Orthonormalbasis von $T_pf$ ist daher auch orthonormal bezüglich $\langle .,. \rangle$.

Wir setzen nun die Taylorreihe von $u$ ein, und verallgemeinern so die Darstellung I(28) von Kurven auf Flächen.

**Satz 11** (Lokale Normalform)**.** *Es sei $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^{n+1})$ Hyperfläche und $\tilde f$, $P$, $N$ wie im Lemma. Bezüglich einer Orthonormalbasis $(V_1, \dots, V_n)$ von $T_pf = T_0\tilde f$ aus Hauptkrümmungsrichtungen mit Hauptkrümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ hat man folgende Darstellung:*

$$\tilde f(X) = P + X + \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \kappa_i X^i X^i + o(|X|^2)\Big)N \qquad \text{für alle} \quad X = \textstyle\sum_{i=1}^n X^i V_i \in V. \tag{29}$$

*Beweis.* Wir benutzen die qualitative Taylorformel für $u$ in 0:

$$u(X) = \underbrace{u(0)}_{=0} + \underbrace{du_0}_{=0}(X) + \frac{1}{2}d^2u_0(X,X) + o(|X|^2)$$

Wir wollen nun die Hesseform $d^2u_0$ durch die Hauptkrümmungen ausdrücken. Die zweite Ableitung von (26) ergibt $d^2\tilde f_0(X,Y) = d^2u_0(X,Y)N$. Durch Bildung des Skalarprodukts mit $N = \tilde\nu(0)$ folgt

$$\begin{aligned} d^2u_0(X,X) &= \Big\langle d^2\tilde f_0(X,X),\, \tilde\nu(0)\Big\rangle \overset{(14)}{=} \tilde g_0(\tilde S X, X) \\ &= \tilde g_0\Big(\textstyle\sum_i X^i\kappa_i V_i,\, \sum_j X^j V_j\Big) \overset{V_k \text{ ONB}}{=} \displaystyle\sum_i \kappa_i X^i X^i. \end{aligned}$$

Daraus folgt (29). □

So wie es Schmiegkreise für Kurven tun, wird daher eine Hyperfläche bis zur zweiten Ordnung durch das das *Schmiegparaboloid [osculating paraboloid]* von $f$ in $p$,

$$\Big\{ f(p) + X + \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \kappa_i(p) X^i X^i\Big)\nu(p) : X = \textstyle\sum_i X^i v_i \in T_p f\Big\},$$

beschrieben.

Speziell im Fall von Dimension $n = 2$ heißt $p \in U$ *elliptischer Punkt*, falls die Gauß-Krümmung $K(p) > 0$ erfüllt, bzw. *hyperbolischer Punkt* falls $K(p) < 0$. Wir folgern aus der Normalform:

**Satz 12.** *Es sei $f \in C^2(U^2, \mathbb{R}^3)$ eine Fläche und $p \in U$.*
*$(i)$ Jeder hyperbolische Punkt $p$ ist Sattelpunkt von $f$, d.h. in jeder Umgebung von $p$ findet man Punktepaare, deren Bilder auf zwei verschiedenen Seiten (Zusammenhangskomponenten) von $f(p) + T_p f$ liegen.*
*$(ii)$ In der Umgebung jedes elliptischen Punktes ist $f$ lokal konvex, d.h. es gibt eine Umgebung $V$ von $p$, so dass für alle $q \in V$ die Punkte $f(q)$ die eine Seite von $f(p) + T_p f$ nicht treffen.*

Der Satz gibt keine Äquivalenz an: Im Fall eines *parabolischen Punktes* mit $K(p) = 0$ kann jeder der beiden Fälle eintreten (Beispiele?). Man hat also nur die Verneinung beider Aussagen des Satzes, z.B. folgt aus der lokalen Konvexität von $f$ in $p$ nur $K(p) \geq 0$.

*Beweis.* $(i)$ Bei verschiedenen Vorzeichen von $\kappa_1$ und $\kappa_2$ liegen für kleines $t \neq 0$ nach (29) die Punkte $\tilde f(tV_1)$ und $\tilde f(tV_2)$ strikt auf verschiedenen Seiten von $f(p) + T_p f$.

$(ii)$ Nun sind $\kappa_1$ und $\kappa_2$ positiv (oder beide negativ). Der quadratische Term von (29) dominiert dann den $o(|X|^2)$-Term in einer Umgebung von 0. Daher liegen alle Bilder einer solchen Umgebung zu einer Seite des Tangentialraums. □

*Beispiel.* Ein Torus hat genau in den beiden Kreisen, in denen ihn Ebenen berühren, eine Hauptkrümmung, die verschwindet. Entfernen wir diese beiden Kreise, so erhalten wir zwei Zusammenhangskomponenten. Auf der Außenseite gilt $K > 0$ und der Torus ist lokal konvex, auf der Innenseite gilt $K < 0$ und der Torus besteht aus Sattelpunkten.

4.2. **Die Gauß-Krümmung kompakter Hyperflächen.** Als eine Anwendung der lokalen Normalform diskutieren wir einen Satz der globalen Flächentheorie.

Eine (globale) *Fläche* ist eine Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$, wobei $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$. Im einfachsten Fall ist eine Untermannigfaltigkeit die Nullstellenmenge von nur einer Funktion $\Phi\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$, also $M = \Phi^{-1}(0)$, wobei das Differential von $\Phi$ in Punkten aus $M$ den Rang $k$ haben muss. In der Analysis-Vorlesung wird gezeigt, dass $M$ jeweils lokal parametrisch beschrieben werden kann, d.h. es gibt eingebettete parametrisierte Flächen $f_j\colon U_j^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, auch *Parametrisierungen* genannt, die $M$ *überdecken*, $\bigcup_{j\in J} f_j(U_j) = M$. Jeder Punkt $P \in M$ liegt also im Bild einer Parametrisierung $f_j(U_j)$. Dabei ist die Indexmenge $J$ beliebig; für $M$ kompakt kann man $J$ endlich annehmen.

Wir befassen uns mit dem Spezialfall, dass $M$ Hyperfläche ist, also $k = 1$. Aus der bereits gezeigten Parametrisierungsinvarianz folgt, dass für jedes $P \in M$ ein eindeutiger Tangentialraum $T_PM$ existiert, und dass die Hauptkrümmungen $\kappa_i(P) := \kappa_i(p_j)$ bereits eindeutig durch die Wahl einer Normalen $N = N(P)$ bestimmt sind. Zwar kann man $N$ nur dann global wählen, wenn $M$ orientierbar ist, für den folgenden Satz brauchen wir $N$ aber nur für genau eine Parametrisierung $(f_j, \nu_j)$, welche $P = f_j(p_j)$ enthält.

**Satz 13.** *Es sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine kompakte $C^2$-Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es einen Punkt $P \in M$ mit Normale $N(P) = -P/|P|$, so dass alle Hauptkrümmungen positiv sind; insbesondere ist die Gauß-Krümmung $K(P)$ positiv.*

Der Punkt $P$ im Satz hängt von der Wahl des Ursprungs des $\mathbb{R}^m$ ab. Die Normale $N(P)$ wird sich im Beweis als innere Normale herausstellen, weil der Strahl $\{P - tN(P) : t > 0\}$ in $N$ entgegengesetzter Richtung die Fläche $M$ nicht mehr schneidet. Im Falle gerader Dimension, insbesondere für $n = 2$, gilt das Ergebnis für das Vorzeichen der Gauß-Krümmung natürlich genauso für die Wahl $N(P) = P/|P|$.

*Beweis.* Auf der kompakten Menge $M$ nimmt die stetige Funktion $|.|$ ein Maximum $R$ an, d.h.

$$\exists\, P \in M : |P| = R, \qquad \text{so dass} \qquad M \subset \overline{B_R} := \big\{Q \in \mathbb{R}^{n+1} : |Q| \leq R\big\}.$$

Im Punkt $P$ hat die Sphäre $\partial B_R$ den Tangentialraum $P^\perp$. Wir behaupten, dass $P^\perp$ auch der Tangentialraum von $M$ in $P$ ist. Dazu sei $f$ eine Parametrisierung von $M$ um den Punkt $P = f(p)$. Dann stimmen der Tangentialraum $T_PM$ der Untermannigfaltigkeit und der Tangentialraum $T_pf$ der Parametrisierung überein. Wäre $T_PM \neq P^\perp$, so gäbe es ein $X \in T_PM$ mit $\langle X, P\rangle \neq 0$; ersetzen wir dabei gegebenenfalls $X$ durch $-X$, so folgt $\langle X, P\rangle > 0$.

Sei nun $\tilde{f}$ die Normalform (29) von $f$. Die für kleine $t$ gültige Darstellung

$$\tilde{f}(tX) = P + tX + O(t^2)N \quad \Rightarrow \quad |\tilde{f}(tX)|^2 = R^2 + 2t\langle P, X\rangle + O(t^2)$$

ergibt für $t > 0$

$$0 \overset{M\subset\overline{B_R}}{\leq} \frac{R^2 - |\tilde{f}(tX)|^2}{t} = -2\langle P, X\rangle + O(t).$$

Die rechte Seite ist aber negativ für kleine $t > 0$. Dieser Widerspruch zeigt $T_PM = T_P(\partial B_R) = P^\perp$.

Im Punkt $P$ wählen wir die innere Normale $N := -\frac{P}{|P|}$ für $M$ und $\partial B_R$. Wir vergleichen nun auf einer geeignet kleinen Umgebung $V \subset T_PM = T_P\partial B_R = P^\perp$ die Normalform $\tilde{f}$ mit der Normalform $\tilde{s}$ der Sphäre $\partial B_R$:

$$0 \overset{M\subset\overline{B_R}}{\leq} \big\langle \tilde{f} - \tilde{s},\, N\big\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\kappa_i - \frac{1}{R}\Big)X^iX^i + o\big(|X|^2\big) \qquad \text{für alle } X = \textstyle\sum_i X^i v_i \in V.$$

Daraus folgt $\kappa_i \geq \frac{1}{R}$ für jedes $1 \leq i \leq n$ und insbesondere $K \geq \frac{1}{R^n} > 0$. □

*Übung:* Formulieren und beweisen Sie einen entsprechenden Satz für Kurven.

*Bemerkung.* Im Satz haben wir $M$ als Untermannigfaltigkeit vorausgesetzt. Tatsächlich zeigt der Beweis, dass der Satz auch noch für immersierte Untermannigfaltigkeiten gültig bleibt, d.h. $M$ darf das Bild einer Immersion einer kompakten Mannigfaltigkeit sein.

Eine *Minimalfläche [minimal surface]* ist definiert als eine Hyperfläche mit $H \equiv 0$; das ist wohldefiniert, auch ohne eine Normale zu spezifizieren. Man kann zeigen, dass jede Fläche mit vorgegebenem Rand, die den Inhalt minimiert, $H \equiv 0$ erfüllt; diese (nicht äquivalente!) Eigenschaft hat zur Bezeichnung geführt. Tatsächlich muss eine beschränkte Minimalfläche auch Rand haben:

**Korollar 14.** *Eine Minimalfläche $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kann nicht kompakt sein.*

Dies folgt aus dem Satz, weil nicht alle Hauptkrümmungen einer Minimalfläche dasselbe Vorzeichen haben können.

# Teil 3. Intrinsische Geometrie

`16. Vorlesung, 12.12.17 (Beginn Differentialgeometrie II)`
`Achtung: Kapitel 2 gehört noch zu Differentialgeometrie I`

Die *intrinsische Geometrie* einer Fläche besteht aus denjenigen Größen, die innerhalb der Fläche bestimmbar sind. Dies sind die durch Längenmessung bestimmten Größen, insbesondere die erste Fundamentalform $g$ und ihre Ableitungen. Wenn es keinen umgebenden Raum gibt, wie im Falle der Parametrisierung offener Mengen, oder anschaulich im Falle des uns umgebenden Weltalls, dann kann die Geometrie nur noch intrinsisch sein.

Andererseits sind alle relativ zur Lage einer Fläche in einem umgebenden Raum bestimmten Größen (wenigstens zunächst) extrinsisch. Für Hyperflächen sind dies die Größen $\nu, S, b, \kappa_i, H, K$, die sich aus der Normalen und ihren Ableitungen berechnen; bei höherer Kodimension entsprechend durch den ganzen Normalenraum.

Für Kurven gehört lediglich die Bogenlänge zur intrinsischen Geometrie, nicht aber die Krümmung. Für Flächen werden wir sehen, dass erstaunlicherweise auch gewisse Krümmungen intrinsisch definiert sind. Dabei beschränken wir uns im vorliegenden Teil auf die lokale Geometrie.

## 1. Geodätische

Als einen neuen Begriff der intrinsischen Geometrie behandeln wir zuerst spezielle Kurven auf Flächen, sogenannte Geodätische. Sie verallgemeinern das Konzept der kürzesten Verbindungskurve zwischen zwei gegebenen Punkten vom euklidischen Raum auf Flächen.

1.1. **Definition.** Es sei $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^m)$ parametrisierte Fläche mit beliebiger Kodimension $m - n \geq 0$. Es ist eine Grundidee der Differentialgeometrie, einen Vektor $V \in \mathbb{R}^m$ zu zerlegen gemäß der für jedes $p \in U$ definierten orthogonalen Summe

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &= \; T_p f \;\oplus\; N_p f, \\ V &= \Pi(V) + \perp(V). \end{aligned}$$

Für den Krümmungsvektor einer nach Bogenlänge parametrisierten Flächenkurve $c = f \circ \gamma$ ergibt dies die Zerlegung in Tangential- und Normalanteil $c'' = \Pi(c'') + \perp(c'')$. In II(20) hatten wir das bereits im Spezialfall von Hyperflächen getan und die Normalkomponente durch $\perp(c'') = g(S\gamma', \gamma')\nu$ ausgedrückt.

Nun befassen wir uns mit der Tangentialkomponente.

**Definition.** Sei $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^m)$ parametrisierte Fläche und $\gamma \in C^2(I, U)$ eine Kurve. Dann heißt die Flächenkurve $c = f \circ \gamma$ *Geodätische [geodesic]*, wenn für ihre Tangentialprojektion gilt

$$\Pi_{\gamma(t)}(c''(t)) = 0 \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Man beachte, dass wir keine Annahme an die Parametrisierung gemacht haben.

*Beispiele.* 1. Sind $v \perp w$ Vektoren aus $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so ist der parametrisierte Großkreis $c(t) = v\cos t + w \sin t$ geodätisch: Wegen $c''(t) \parallel \nu\big(c(t)\big)$ gilt $\Pi(c'') \equiv 0$, und die Geodätischen-Bedingung ist erfüllt. Alle anderen Breitenkreise sind jedoch nicht geodätisch.

2. Jede konstante Kurve $c(t) \equiv p$ ist Geodätische. In der Literatur kann das anders sein.

3. Für jede Kurve $c$ in $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ($k = 0$ zugelassen!) gilt $\perp(c'') \equiv 0$. Also ist $c$ Geodätische genau dann, wenn $c'' \equiv 0$ gilt. Nach zweifacher Integration ergibt sich $c(t) = at + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$, d.h. Geodätische sind linear parametrisierte Geraden (oder konstant).

Man kann sich Geodätische folgendermaßen physikalisch veranschaulichen. Bewegt sich ein Massepunkt auf einer Fläche längs einer Kurve $c$, so hält die Normalbeschleunigung $\perp(c'')$ den Massepunkt auf der Fläche; sie könnte beispielsweise aus Gravitation resultieren. Betrachtet man den Kontakt als starr, so kann man auch behaupten, dass eine *Zwangsbedingung* den Massepunkt auf der Fläche hält. Daher ist die verbleibende Bedingung $\Pi(c'') \equiv 0$ äquivalent dazu, dass die Bewegung innerhalb der Fläche beschleunigungslos ist, also der Massepunkt sich seiner Trägheit folgend möglichst geradlinig bewegt. Ebensosehr würde ein geradeaus gesteuertes Fahrzeug (keine Seitenbeschleunigung!) einer Geodätischen folgen.

Gemäß dem physikalischen Modell steht der Beschleunigungsvektor $c''$ einer Geodätischen normal, und daher sollte sich der tangentiale Geschwindigkeitsvektor im Betrag nicht ändern. In der Tat:

**Lemma 1.** *Ist $c = f \circ \gamma$ Geodätische, so ist $|c'|$ konstant.*

*Beweis.* Wegen $c'$ tangential und $c''$ normal gilt $\frac{d}{dt}|c'|^2 = 2\langle c', c''\rangle = 2\langle c', \Pi(c'')\rangle = 0$. $\square$

Wir haben Geodätische als parametrisierte Objekte definiert. Wir wollen sie nun mit geometrischen Größen beschreiben.

**Definition.** Sei $c = f \circ \gamma$ nach Bogenlänge parametrisierte Flächenkurve. Dann heißt $\Pi(c'')$ *geodätischer Krümmungsvektor* und

$$\kappa_{\text{geod}} \colon I \to [0, \infty), \qquad \kappa_{\text{geod}} := \big|\Pi(\tilde{c}'')\big|,$$

*geodätische Krümmung* von $c$. Für $c$ regulär sei wieder $\kappa_{\text{geod}}$ durch Umparametrisierung bestimmt, und für $c$ konstant setzen wir noch $\kappa_{\text{geod}} \equiv 0$.

Hat eine Kurve $c$ konstante Geschwindigkeit $|c'| = a > 0$, so ist $\tilde{c}(t) := c(t/a)$ eine Umparametrisierung auf Bogenlänge, denn $|\tilde{c}'| = |c'|/a = 1$. Wegen $\tilde{c}'' = c''/a^2$ gilt dann für die geodätische Krümmung von $c$:

$$\kappa_{\text{geod}} = |\Pi(\tilde{c}'')| = \frac{1}{a^2}|\Pi(c'')| \tag{1}$$

Daher können wir Geodätische durch die geodätische Krümmung charakterisieren:

**Satz 2.** *Eine Kurve c ist Geodätische genau dann, wenn sie mit konstanter Geschwindigkeit $|c'|$ parametrisiert ist und ihre geodätische Krümmung $\kappa_{geod}$ verschwindet.*

*Beweis.* Ist $c$ selbst konstant, so gilt die Äquivalenz nach Definition. Anderenfalls ist für "$\Rightarrow$" laut dem Lemma $|c'| = a > 0$ konstant, und aus (1) folgt $\kappa_{\text{geod}} \equiv 0$. Für "$\Leftarrow$" ist nach Voraussetzung $|c'| = a > 0$ konstant, und umgekehrt folgt aus (1) nun $|\Pi(c'')| \equiv 0$. □

Um das Verschwinden der geodätischen Krümmung zu veranschaulichen, legen wir einen schmalen (geraden) Papier- oder Klebebandstreifen bündig auf eine Fläche auf. Der Streifen kann keine seitliche Krümmung besitzen, er zeigt überall "geradeaus". Wenn man ihn z.B. nach der Länge parametrisiert, beschreibt seine Lage eine Geodätische der Fläche. Umgekehrt kann man sich mit dieser Methode die geodätische Krümmung einer Kurve veranschaulichen: Man legt einen schmalen Streifen auf die Spur $c(I)$ und wickelt dann die Kurve in die Ebene ab; die Krümmung als ebene Kurve ist dann die ursprüngliche geodätische Krümmung (das Vorzeichen muss passend gewählt werden).

*Bemerkung.* Ohne Rückgriff auf die Parametrisierung kann man alternativ auch Geodätische als Äquivalenzklassen regulärer Kurven definieren, deren geodätische Krümmung verschwindet. Dadurch wird „Geodätische“ zu einem geometrischer Begriff. Beide Betrachtungsweisen sind sinnvoll, wie das physikalische und das geometrische Modell belegen. Entsprechend gibt es unterschiedliche Verallgemeinerungen des Geodätischen-Begriffs für den Flächenfall: einerseits harmonische Abbildungen (mit Parametrisierung), andererseits Minimalflächen (parametrisierungsinvariant).

1.2. **Christoffel-Symbole und Differentialgleichung für Geodätische.** Um einen besser handhabbaren Ausdruck für das Verschwinden des Krümmungsvektors $\Pi(c'') = 0$ zu erhalten, benötigen wir einen neuen Begriff. Wir zerlegen die zweiten Ableitungen einer Fläche:

**Definition.** Die *Christoffel-Symbole* eines Flächenstücks $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^m)$ sind die Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in C^0(U, \mathbb{R})$ für $1 \le i, j, k \le n$, definiert durch

$$\Pi(\partial_{ij} f) = \partial_{ij} f - \perp(\partial_{ij} f) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \, \partial_k f. \tag{2}$$

*Bemerkungen.* 1. Da $(\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$ eine Basis des Tangentialraumes $T_p f$ ist, sind die Christoffel-Symbole definiert und eindeutig.
2. Nach dem Satz von Schwarz ist $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, weitere Symmetrien siehe Übungen.
3. In Lemma 8 werden wir nachrechnen, dass die Christoffel-Symbole durch die erste Fundamentalform bestimmt sind.
4. Will man Summenzeichen und Indizes vermeiden, so kann man die bilineare Abbildung $\Gamma \colon U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ betrachten, $\Gamma(X, Y) := \Pi(\partial_X \partial_Y f) = \sum_k (\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k X^i Y^j) \partial_k f$. Das ist allerdings wenig üblich, weil sich diese Abbildung unter Parametertransformation nicht vernünftig (tensoriell) verhält.

*Beispiele.* 1. Ist $f$ linear und damit das Bild ein Unterraum (z.B. Ebene), so verschwinden die Christoffel-Symbole. Verbiegen wir den so parametrisierten Unterraum isometrisch, so ändert sich allein der Normalanteil von $\partial_{ij} f$. Also verschwinden auch dann noch die Christoffel-Symbole. Zur Veranschaulichung betrachten Sie ein gebogenes Stück karierten Papiers, dessen Linien Sie als Parameterlinien ansehen.
2. Wählt man jedoch eine nichtlineare (gekrümmte) Parametrisierung der Ebene $\mathbb{R}^2$ wie etwa $(x, y) \mapsto \big(\sinh x, y(y^2 + 1)\big)$, so verschwinden die Christoffelsymbole nicht. Die Christoffel-Symbole hängen also stark von der gewählten Parametrisierung ab.

Die Christoffel-Symbole erlauben uns, die geometrische Gleichung $\Pi(c'') \equiv 0$ mit Methoden der Analysis zu handhaben:

**Satz 3** (Differentialgleichung für Geodätische)**.**
*Eine Kurve $c = f \circ \gamma \colon I \to \mathbb{R}^m$ ist geodätisch genau dann, wenn für alle $t \in I$ gilt*

$$\gamma''^k(t) + \sum_{1 \le i,j \le n} \Gamma_{ij}^k\big(\gamma(t)\big) \gamma'^i(t) \gamma'^j(t) = 0 \qquad \textit{für } k = 1, \dots, n. \tag{3}$$

*Beweis.* Zunächst ist

$$c' = (f \circ \gamma)' = \sum_i (\partial_i f \circ \gamma)\, \gamma'^i \quad \text{und} \quad c'' = \sum_{i,j} (\partial_{ij} f \circ \gamma)\, \gamma'^i \gamma'^j + \sum_k (\partial_k f \circ \gamma)\, \gamma''^k.$$

Die Tangentialkomponente der zweiten Gleichung liefert die Linearkombination

$$\Pi(c'') = \sum_k \Big( \gamma''^k + \sum_{i,j} \gamma'^i \gamma'^j (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \Big) \partial_k f.$$

Also ist $\Pi(c'') = 0$ genau dann, wenn die Linearkombination auf der rechten Seite verschwindet. Wegen der linearen Unabhängigkeit der $n$ Vektoren $\partial_k f \in T_p f \subset \mathbb{R}^m$ verschwindet sie genau dann, wenn alle Koeffizienten verschwinden, d.h. wenn (3) gilt. $\square$

*Beispiele.* 1. Im Trivialfall $n = m$, $f = \mathrm{id}$ und $c = \gamma$ verschwinden die Christoffel-Symbole, $\Gamma \equiv 0$, und (3) lautet $\gamma'' \equiv 0$. Also ist $\gamma$ linear parametrisierte Gerade, $\gamma(t) = at + b$. Natürlich sieht man das schon direkt aus $c'' \equiv 0$.

2. Ist $f$ lineare Abbildung und hat die Fläche somit Werte in einem linear parametrisierten Unterraum, so ist wie zuvor $\gamma$ linear parametrisierte Gerade, und $c = f \circ \gamma$ ihr Bild.

3. Eine globale Fläche (Untermannigfaltigkeit) $M^n$ heißt *abwickelbar [developable]* nach $\mathbb{R}^n$, wenn jeder Punkt $P \in M$ eine Umgebung hat, die sich längentreu durch $f\colon U^n \to \mathbb{R}^m$ parametrisieren lässt. Zylinder und Kegel (ohne Spitze) sind Beispiele, wobei die Parametrisierungen so gegeben wären, wie sie durch das Verbiegen eines Blattes Karopapier realisiert werden. Nach Satz II.2 ist eine parametrisierte Fläche $f$ genau dann abwickelbar, wenn gilt $g \equiv \delta$. Insbesondere verschwinden dann alle Christoffel-Symbole und wie in 2. folgt: Die nicht-konstanten Geodätischen einer abwickelbaren Fläche sind genau die Bilder von Geraden. Experimentieren Sie mit einem Blatt Papier, um zu sehen, was das z.B. für Zylinder und Kegel bedeutet.

Die lokale Existenz von Geodätischen folgt nun aus der Lösungstheorie für nicht-lineare Differentialgleichungssysteme:

**Satz 4** (Lokale Existenz Geodätischer)**.** *Es sei $f \in C^3(U^n, \mathbb{R}^m)$, $p \in U$, $X \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Geodätische*

$$\gamma = \gamma_{p,X}\colon (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to U$$

*mit $\gamma(t_0) = p$ und $\gamma'(t_0) = X$.*

*Beweis.* Das System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung (3) für $\gamma$ erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung, denn die Christoffelsymbole sind $C^1$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert daher genau eine Lösung $\gamma(t)$ zu Anfangswerten $\gamma(t_0) = p$ und $\gamma'(t_0) = X$, definiert in einer Umgebung von $t_0$. Für $c := f \circ \gamma$ bedeutet das $\Pi(c'') = 0$. $\square$

Überlegen Sie sich zur Übung, wie Sie die Lipschitz-Eigenschaft nachweisen.

Ein schwierigeres Thema sind Sätze über die globale Existenz von Geodätischen, also die Existenz für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$. Der Satz von Hopf-Rinow sagt, dass man in vollständigen Untermannigfaltigkeiten, insbesondere in kompakten, die globale Existenz erhält.

`17. Vorlesung, 14.12.17` ———

1.3. **Kritische Punkte der Bogenlänge.** Wir wollen in einer Fläche $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine kürzeste Kurve $c$ zwischen zwei gegebenen Punkten $P = f(p)$ und $Q = f(q)$ bestimmen. Wir suchen also

$$(4) \quad c = f \circ \gamma, \quad \gamma\colon [a,b] \to U, \quad c(a) = P, \quad c(b) = Q \qquad \text{mit } L(c) = \int_a^b |c'|\,dt \to \min .$$

Um sicherzustellen, dass die Variationen der Kurve die Fläche $f$ nicht verlassen, schreiben wir sie als Variation $h$ im Parametergebiet (siehe Definition in I.4.3). In der Fläche $f$ ist dann $\tilde h := f \circ h$ eine Variation von $c := f \circ \gamma$ mit Variationsfeld

$$\tilde V := \frac{d}{ds}(f \circ h)\Big|_{s=0} = df(V).$$

Wir setzen dann $\tilde h$ bzw. $\tilde V$ in die Formel der ersten Variation I.(33) ein und erhalten:

**Lemma 5** (1. Variation der Bogenlänge)**.** *Es sei $c = f \circ \gamma$ eine Flächenkurve mit $|c'| =$* const $\neq 0$ *und $h_s$ eine Variation von $\gamma$ mit Variationsfeld $V$. Dann gilt*

$$(5) \qquad \delta_V L(c) := \frac{d}{ds} L(f \circ h_s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{|c'|} g\big(V(t), \gamma'(t)\big)\Big|_a^b - \frac{1}{|c'|}\int_a^b \big\langle df_{\gamma(t)}(V(t)),\, c''(t)\big\rangle\, dt.$$

Um Geodätische variationell zu charakterisieren, führen wir als Begriff ein:

**Definition.** Wir sagen $c = f \circ \gamma$ ist *kritisch für die Bogenlänge*, wenn für jede eigentliche Variation $h_s$ von $\gamma$ die differenzierbare Abbildung $s \mapsto L(f \circ h_s)$ in $s = 0$ einen kritischen Punkt hat,

$$(6) \qquad \frac{d}{ds} L(f \circ h_s)|_{s=0} = 0.$$

Falls (5) anwendbar ist, muss also der Integralterm für alle eigentlichen $V$ verschwinden. In Verallgemeinerung von Satz I.20 können wir nun kritische Punkte der Bogenlänge als Geodätische erkennen:

**Satz 6** (Johann Bernoulli 1698, Euler 1728)**.** *Eine $C^3$-Kurve $c = f \circ \gamma$ ist genau dann geodätisch, wenn sie proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist und kritisch für die Bogenlänge ist.*

*Beweis.* "$\Rightarrow$": Es sei $c$ geodätisch. Nach Lemma 1 ist $|c'|$ konstant. Ist $|c'| \equiv 0$, so gilt $L(c) = 0$, und wegen $L(h_s) \geq 0$ folgt dann (6).

Nehmen wir also $|c'| \equiv \text{const} \neq 0$ an. Dann gilt (5). Die Tangentialität von $df(V)$ und die Geodätischen-Eigenschaft ergeben

$$\langle df(V), c''\rangle = \langle df(V), \Pi(c'')\rangle = 0,$$

und es folgt $\delta_L(c) = 0$.

"$\Leftarrow$": Verschwindet die Bogenlänge, so ist $c$ konstant und insbesondere geodätisch. Andernfalls ergibt die Parametrisierungsvoraussetzung $|c'| = L(c)/(b-a) = \text{const} \neq 0$ und (5) gilt. Wir müssen nun aus

$$0 = \frac{1}{|c'|}\int_a^b \big\langle df_{\gamma(t)}V(t), c''(t)\big\rangle\,dt = \frac{1}{|c'|}\int_a^b \big\langle df_{\gamma(t)}V(t), \Pi(c''(t))\big\rangle\,dt \qquad \forall\, V \text{ eigentlich,}$$

die Bedingung $\Pi(c'') = 0$ folgern. Weil $df\colon \mathbb{R}^n \to T_pf$ Isomorphismus ist, können wir $\Pi(c''(t)) = df_{\gamma(t)}(W(t))$ schreiben mit $W \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. (Im Fall $|c'| \equiv 1$ ist $W$ gerade der ins Urbild transportierte geodätische Krümmungsvektor von $c$.) Es ist $W \equiv 0$ zu zeigen.

Nach Voraussetzung gilt

$$0 = \int_a^b \big\langle df(V), \Pi(c'')\big\rangle\,dt = \int_a^b g(V,W)\,dt \qquad \forall\, V \text{ eigentlich.}$$

Betachten wir zuerst den Fall, dass der geodätische Krümmungsvektor $\Pi(c'')$ in den Endpunkten verschwindet. Dann ist $W$ eigentlich, und wir dürfen $V := W$ setzen, d.h. wir variieren die Kurve in Richtung des Krümmungsvektors. Das ergibt $0 = \int \|W\|^2\,dt$. Aus $\|W\| \geq 0$ und der Stetigkeit von $\|W\|$ folgt $\|W\| \equiv 0$, also $\Pi(c'') = 0$ auf $[a,b]$.

Im allgemeinen Fall sei $\varphi\colon C^0\big([a,b],[0,\infty)\big)$ irgendeine Funktion mit $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ und $\varphi(t) > 0$ für $t \in (a,b)$. Dann ist $V := \varphi W$ eigentlich und daher muss gelten

$$0 = \int_a^b g\big(\varphi(t)W(t),\, W(t)\big)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\|W(t)\|^2\,dt.$$

Wiederum ist $\varphi\|W\|^2 \geq 0$ und diese Funktion ist stetig. Also folgt $\varphi\|W\| \equiv 0$ auf $[a,b]$. Auf $(a,b)$ gilt wegen $\varphi \neq 0$ auch $W(t) = 0$. Wegen der Stetigkeit von $W$ gilt dies sodann für alle $t \in [a,b]$. Wie gewünscht ist also $0 = df(W) = \Pi(c'')$. □

*Bemerkungen.* 1. Wir haben hier $\Pi(c'') = 0$ als Euler(-Lagrange)-Gleichung des Bogenlängen-Funktionals $L(c) = \int |c'|$ hergeleitet.

2. Die (mathematische) *Energie* $E(c) := \int |c'|^2 dt$ ist in folgender Hinsicht besser als die Bogenlänge $L$: Für $E$ ist eine Kurve $c$ kritisch genau dann, wenn $c$ geodätisch ist, d.h. kritische Punkte von $E$ sind automatisch proportional zur Bogenlänge parametrisiert (siehe Aufgaben).

3. Die Kapitelüberschrift bezieht sich darauf, eine Kurve $c$ als einen Punkt in einem geeigneten Funktionenraum $\mathcal{F}$ aufzufassen, z.B. $\mathcal{F} = C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ oder $\mathcal{F} := H^{1,2}([a,b],\mathbb{R})$. Ein Vektorfeld $W = df(V)$ längs $c$ ist dann ein Tangentialvektor an $c$, also $W \in T_c\mathcal{F}$, und die erste Variation $\delta_W L$ ist Richtungsableitung des Längenfunktionals in $\mathcal{F}$.

1.4. **Kürzeste.** Wir definieren nun kürzeste Kurven, wobei wir keine spezielle Parametrisierung verlangen.

**Definition.** Sei $\gamma \in C^2([a,b],U)$. Dann heißt $c = f \circ \gamma$ eine *Kürzeste*, wenn jede andere Kurve $\tilde{\gamma} \in C^2([a,b],U)$ mit denselben Endpunkten erfüllt $L(\tilde{\gamma}) \geq L(\gamma)$.

*Beispiel.* In $\mathbb{R}^n$ ist jede (gerade) Strecke Kürzeste, das folgt aus Satz I.20. Für $\mathbb{S}^n$ kann man zeigen: jeder Großkreisbogen mit Länge in $(0,\pi]$ ist Kürzeste.

Insbesondere haben Variationskurven $\tilde{\gamma} := h_s$ von Kürzesten Länge mindestens $L(f \circ \gamma)$ und daher folgt auch $\frac{d}{dt}L(f \circ h_s)|_{s=0} = 0$. Kürzeste sind also Minima der Bogenlänge. Aus Satz 6 folgt daher:

**Satz 7.** *Jede proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kürzeste ist geodätisch.*

Insbesondere erfüllen solche Kürzeste die Differentialgleichung für Geodätische.

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht: Hat man in der Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ zwei Punkte $P \neq Q$, die nicht antipodal sind, so enthält der eindeutig durch sie bestimmte Großkreis einen längeren ($> \pi$) und einen kürzeren Bogen ($< \pi$). Beide Bögen sind geodätisch (passend parametrisiert), aber nur der kürzere Bogen ist Kürzeste.

Nehmen wir an, eine reellwertige Funktion $f$ habe einen kritischen Punkt $x$, d.h. es gilt $f'(x) = 0$. Dann ist $f''(x) > 0$ ein hinreichendes Kriterium dafür, dass $x$ ein (lokales) Minimum ist. Entsprechend gibt es ein hinreichendes Kriterium dafür, dass eine Geodätische kürzer als jede nah benachbarte Kurve ist, d.h. ein lokales Minimum der Bogenlänge: Dies gilt, wenn die zweite Variation, $\frac{d^2}{ds^2}L(f \circ h_s)|_{s=0}$ positiv ist.

Interessant ist das Existenzproblem für Kürzeste, also die Frage: Wird das Infimum der Bogenlänge unter den Kurven, die $p$ und $q$ verbinden, angenommen? Dies trifft im allgemeinen nicht zu:

*Beispiel.* Im Gebiet $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ werden zwei Punkte $p \neq 0$ und $-p$ nicht durch eine Kürzeste verbunden (nicht einmal durch eine Geodätische), da in der Ebene nur Geraden geodätisch sind.

Um eine positive Antwort auf die Existenzfrage zu erhalten, muss man die *Vollständigkeit* des Bildes $f(U)$ voraussetzen. Dies bedeutet, dass jede Cauchyfolge in $f(U)$ konvergiert. Dies ist eine globale Eigenschaft, die man sinnvollerweise im Kontext Riemannscher Mannigfaltigkeiten behandelt.

`13. Vorlesung, 30.11.17`

## 2. Hyperflächengleichungen und Integrabilitätsbedingungen

Wir werden ein erstaunliches Ergebnis erzielen: Für zweidimensionale Flächen gehört ist die Gauß-Krümmung $K$ intrinsisch. Weil wir uns für Eigenschaften interessieren, die unabhängig von der Normalen sind, lassen wir weiterhin Immersionen $f \in C^3(U^n, \mathbb{R}^m)$ mit beliebiger Kodimension $m - n \geq 0$ zu.

2.1. **Christoffelsymbole als Ableitungen der ersten Fundamentalform.** Geodätische sind kritisch für die Bogenlänge und intrinsische Objekte. Um dies von ihrer Differentialgleichung (3) abzulesen, wollen wir nun zeigen, wie man die Christoffel-Symbole aus der ersten Fundamentalform $g$ und ihrer ersten Ableitung berechnen kann:

**Lemma 8.** *Die Christoffel-Symbole $\Gamma_{ij}^k$ sind durch die erste Fundamentalform bestimmt:*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \Big( \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \Big) \qquad \text{für } 1 \leq i, j, k \leq n \tag{7}$$

*Dabei sind $g_{ij}$ die Einträge von $G$ und $g^{ij}$ die Einträge der Inversen $G^{-1}$.*

*Beweis.* Wir berechnen die Terme der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jl} &= \partial_i \langle \partial_j f, \partial_l f \rangle = \langle \partial_{ij} f, \partial_l f \rangle + \langle \partial_j f, \partial_{il} f \rangle \\ \partial_j g_{li} &= \qquad\qquad\quad\; \langle \partial_{jl} f, \partial_i f \rangle + \langle \partial_l f, \partial_{ji} f \rangle \\ -\partial_l g_{ij} &= -\langle \partial_{li} f, \partial_j f \rangle - \langle \partial_i f, \partial_{lj} f \rangle \end{aligned}$$

Als Summe erhalten wir (mit dem Satz von Schwarz)

$$\frac{1}{2} \big( \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \big) = \langle \partial_{ij} f, \partial_l f \rangle \overset{\partial_l f \in Tf}{=} \big\langle \Pi(\partial_{ij} f), \partial_l f \big\rangle = \big\langle \textstyle\sum_\mu \Gamma_{ij}^\mu \partial_\mu f, \partial_l f \big\rangle = \displaystyle\sum_\mu \Gamma_{ij}^\mu g_{\mu l}.$$

Es folgt

$$\sum_l \frac{1}{2} \big( \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_k g_{ij} \big) g^{lk} = \sum_{l,\mu} \Gamma_{ij}^\mu g_{\mu l} g^{lk} = \sum_\mu \Gamma_{ij}^\mu \delta_\mu^k = \Gamma_{ij}^k.$$

□

2.2. **Hyperflächengleichungen.** Betrachten wir zunächst eine Kurve $c$ in der Ebene, die wir als eine Hyperfläche der geringsten sinnvollen Dimension $n = 1$ verstehen. Ist $c$ auf Bogenlänge parametrisiert, so erfüllen Tangente und Normale $(T, N)$ ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, die Frenet-Gleichungen I(11), in denen die Krümmung $\kappa$ als Koeffizienten auftritt. Der Hauptsatz der Kurventheorie I.5 besagt, dass die Frenet-Gleichungen für gegebene Anfangsbedingungen eindeutig lösbar sind. Allgemeiner wird eine reguläre ebene Kurve durch ihre skalare Geschwindigkeit $|c'|$ und ihre Krümmung $\kappa$ festgelegt.

Ist $f$ ein Hyperflächenstück mit Normale $\nu$, so entsprechen $|c'|, \kappa$ die folgenden Ausdrücke:
• Die erste Fundamentalform $g$. Die ersten Ableitungen von $g$ definieren Christoffel-Symbole $\Gamma$ gemäß (7).
• Die zweite Fundamentalform $b$. Wenn wir $g$ schon kennen, ist es äquivalent, $b$ oder die Weingartenabbildung $S = G^{-1}B$ zu benutzen.

So wie für Kurven geben wir nun für Hyperflächen ein System von Differentialgleichungen für $f, \nu$ an –diesmal partiell–, dessen Koeffizienten die (gegebenen) Fundamentalformen $g, b$ von sind:

**Satz 9** (Hyperflächengleichungen)**.** *Sei $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^{n+1})$ ein parametrisiertes Hyperflächenstück mit Normale $\nu$, und*

$$g_{ij} := \langle \partial_i f, \partial_j f\rangle, \qquad b_{ij} := \langle \partial_{ij} f, \nu\rangle \qquad \textit{für } 1 \leq i, j \leq n;$$

*weiterhin sei $\Gamma_{ij}^k := \sum_l \frac{1}{2} g^{kl}\big(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\big)$. Dann erfüllt $(f, \nu)$ auf $U$ das folgende System von partiellen Differentialgleichungen:*
$(i)$ *Die* Gauß-Formel *[Gauss formula]*

$$\text{(GF)} \qquad \partial_{ij} f = \sum_k \Gamma_{ij}^k \, \partial_k f + b_{ij} \nu \qquad \textit{für } 1 \leq i, j \leq n,$$

$(ii)$ *und die* Weingartenformel

$$\text{(WF)} \qquad \partial_j \nu = -\sum_{i,k} g^{ik} b_{kj} \partial_i f \qquad \textit{für } 1 \leq j \leq n.$$

*Beweis.* $(i)$ Durch Orthogonalzerlegung $\partial_{ij} f = \Pi(\partial_{ij} f) + \langle \partial_{ij} f, \nu\rangle \nu = \sum_k \Gamma_{ij}^k \, \partial_k f + b_{ij} \nu$ folgt die Gauß-Formel sofort aus den Definitionen (2) von $\Gamma$ und II(14) von $b$.

$(ii)$ Aus $\partial_j \nu = d\nu(e_j) = -df(S(e_j)) = -df(\sum_i S_j^i e_i) = -df(\sum_{i,k} g^{ik} b_{kj} e_i)$ folgt die Weingartenformel. Dabei haben wir neben der definierenden Gleichung für $S$ noch die Formel $S = G^{-1}B$ in der Basisschreibweise II(18) verwendet. □

Sind $g$ und $b$ gegeben, so kann man nach der Lösbarkeit der Hyperflächengleichungen fragen. Im einzelnen werden wir diskutieren:
• Eindeutigkeit: Ist die Lösung $(f, \nu)$ eindeutig zu gegebenen Anfangsbedingungen, d.h. haben wir mit $g, b$ alle Invarianten von parametrisierten Flächenstücken gefunden?
• Existenz: Gibt es stets eine Lösung oder sind $g, b$ noch durch weitere notwendige Bedingungen verknüpft?

Ein Eindeutigkeitssatz beantwortet die erste Frage:

**Satz 10.** *Es seien gegeben ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ sowie matrixwertige Funktionen $G \in C^2(U, \mathbb{R}^{n\times n})$, $B \in C^1(U, \mathbb{R}^{n\times n})$. Wenn die Hyperflächengleichungen* (GF) (WF) *eine*

*Lösung* $f \in C^3(U, \mathbb{R}^{n+1})$, $\nu \in C^2(U, \mathbb{S}^n)$ *besitzen, so ist diese eindeutig durch ihre Anfangswerte* $f(p)$, $df_p$, $\nu(p)$ *in einem Punkt* $p \in U$ *bestimmt.*

Natürlich kann es nur dann eine Lösung geben, wenn die vorgegebenen Daten $G$ und $B$ konsistent sind, z.B. müssen $G, B$ symmetrisch sein und $G$ positiv definit. Weiterhin ist die Vorgabe der Anfangswerte sicher notwendig für die Eindeutigkeit, denn die Hyperflächengleichungen sind invariant gegenüber Bewegungen von $\mathbb{R}^m$ (Übung): Hat man eine Lösung $(f, \nu)$ der Hyperflächengleichungen gegeben, so ist auch $(Af+b, A\nu)$ mit $A \in \mathsf{O}(m)$, $b \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung.

*Beweis.* Es sei $q \in U$ beliebig. Da $U$ ein Gebiet ist, können wir eine glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \to U$ fixieren, die von $\gamma(0) = p$ nach $\gamma(1) = q$ läuft. Weiterhin sei ein parametrisiertes Flächenstück $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\nu\colon U \to \mathbb{S}^n$ mit Daten $g, b$ (und damit auch $\Gamma$) gegeben.

Die Einschränkungen auf die Kurve $\gamma$

$$F(t) := f\big(\gamma(t)\big), \qquad X_i(t) := \partial_i f\big(\gamma(t)\big), \qquad N(t) := \nu\big(\gamma(t)\big),$$

erfüllen wegen der Hyperflächengleichungen für $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
&F' = (f \circ \gamma)' = \sum_i X_i\, {\gamma'}^i, \\
(8)\qquad &X_i' = \sum_j \Big(\partial_{ij} f \circ \gamma\Big)\, {\gamma'}^j \overset{\text{(GF)}}{=} \sum_j \Big(\textstyle\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k + b_{ij} N\Big) {\gamma'}^j \qquad \text{für } i = 1, \dots, n, \\
&N' = \sum_j \Big(\partial_j \nu \circ \gamma\Big)\, {\gamma'}^j \overset{\text{(WF)}}{=} -\sum_{i,j,k} g^{ik} b_{kj} (\partial_i f \circ \gamma)\, {\gamma'}^j = -\sum_{i,j,k} g^{ik} b_{kj} X_i\, {\gamma'}^j.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir kurz $g, b, \Gamma$ an Stelle von $g \circ \gamma$, $b \circ \gamma$, $\Gamma \circ \gamma$ geschrieben.

Wir haben also ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für $(F, X, N)$ erhalten mit $C^1$-Koeffizienten $g \circ \gamma$, $b \circ \gamma$, $\Gamma \circ \gamma$ und $\gamma'$.

Nach dem Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf wird jede Lösung $t \mapsto (F, X, N)(t)$ des Systems (8) auf dem Intervall $[0,1]$ eindeutig durch ihre Anfangswerte in $t = 0$ bestimmt, d.h. durch $F(0) = f(p)$, $X(0) = df_p$, $N(0) = \nu(p)$. Insbesondere ist $f(q) = F(1)$, $\nu(q) = N(1)$ die einzige Lösung der Hyperflächengleichungen im Punkt $q$. □

2.3. **Integrabilitätsbedingungen und Hauptsatz der Flächentheorie.** Wir beantworten nun die im vorigen Abschnitt gestellte Existenzfrage. Tatsächlich erhält man die Existenz von Hyperflächenstücken $(f, \nu)$ nur dann, wenn zusätzlich zu (GF) (WF) noch weitere Gleichungen erfüllt sind.

Zur Motivation erinnere ich an zwei analoge Probleme:

• Das Potentialproblem ist die Frage, ob zu jedem Vektorfeld $X$ ein Potential $\Phi$ existiert, d.h. $\Phi$ mit $\nabla\Phi = X$ ist gesucht. Der Satz von Schwarz ergibt die notwendige Bedingung $\partial_i X_j = \partial_{ij}\Phi = \partial_{ji}\Phi = \partial_j X_i$ oder, in physikalischer Sprechweise, $\operatorname{rot} X = 0$. Ist sie erfüllt, kann man das Potential konstruieren als Kurvenintegral: Für fest gewähltes $p \in U$ und $U$ einfach zusammenhängend ist $\Phi(q) := \int_p^q X \cdot ds$ unabhängig vom gewählten Weg definiert, und liefert so das gesuchte Potential.

• In der Funktionentheorie möchte man eine Stammfunktion $F$ von $f\colon U \to \mathbb{C}$ bestimmen. Hier sind die notwendigen Bedingungen gerade die Cauchy-Riemann-Gleichungen für $f$: Sie garantieren, dass das Kurvenintegral $F(z) := \int_p^z f(\zeta)\, d\zeta$ wegunabhängig ist.

`14. Vorlesung, 5.12.17` ———

Um im vorliegenden Fall die Fläche durch Integration des Differentialgleichungssystems (8) für $(F, X, N)$ längs Kurven zu gewinnen, ist es sinnvoll, das System zu entkoppeln: Für den Rahmen $(X_1, \dots, X_n, \nu)$ ergeben Gauß- und Weingartenformel zuerst das System

$$\partial_i X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k + b_{ij}\nu, \qquad \partial_j \nu = -\sum_{j,k} g^{ik} b_{kj} X_i. \tag{9}$$

Hat man es gelöst, dann ist $f$ die Lösung des Differentialgleichungssystems, $\partial_j f = X_j$.

Für das System (9) ergibt der Satz von Schwarz eine notwendige Bedingung, die nicht aus (9) folgt: Jedes Feld $X_k$ muss $\partial_{ij} X_k = \partial_{ji} X_k$ erfüllen, bzw. mithilfe von $X_k = \partial_k f$ für $f$ formuliert:

$$\partial_{ijk} f = \partial_{jik} f \qquad \text{für alle } 1 \le i, j, k \le n. \tag{10}$$

Wir geben nun eine Umformulierung der Bedingung (10) an, die die Fundamentalformen $g, b$ erfüllen müssen, um Daten einer Fläche $f$ sein zu können:

**Satz 11.** *Für jede Lösung* $(f, \nu)$ *der Hyperflächengleichungen* (GF)(WF) *gelten* Gauß-Gleichung

$$\partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \sum_{r=1}^n \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s = \sum_{r=1}^n \big(b_{jk} b_{ir} - b_{ik} b_{jr}\big) g^{rs} \quad \textit{für } 1 \le i, j, k, s \le n, \tag{GG}$$

*und* (Mainardi-)Codazzi-Gleichung

$$0 = \partial_i b_{jk} - \partial_j b_{ik} + \sum_{s=1}^n \Gamma_{jk}^s b_{is} - \Gamma_{ik}^s b_{js} \qquad \textit{für } 1 \le i, j, k \le n. \tag{CG}$$

In der Gauß-Gleichung haben wir die Terme so angeordnet, dass die extrinsischen Terme rechts stehen, während die linke Seite, die wir mit $R_{ijk}^s$ abkürzen, vollständig intrinsisch ist, also nur von $g$ abhängt. Damit verknüpft die Gauß-Gleichung intrinsische und extrinsische Geometrie.

*Beweis.* Wir zerlegen zuerst $\partial_{ijk}f$ in tangentiale und normale Komponente:

$$\begin{aligned}
\partial_{ijk}f &\overset{\text{(GF)}}{=} \partial_i\Big(\sum_s \Gamma^s_{jk}\,\partial_s f + b_{jk}\nu\Big) \\
&= \sum_s \Big(\partial_i\Gamma^s_{jk}\,\partial_s f + \Gamma^s_{jk}\partial_{is}f\Big) + \partial_i b_{jk}\,\nu + b_{jk}\partial_i\nu \\
&\overset{\text{(GF)(WF)}}{=} \sum_s \partial_i\Gamma^s_{jk}\,\partial_s f + \sum_s \Gamma^s_{jk}\Big(\textstyle\sum_r \Gamma^r_{is}\partial_r f + b_{is}\nu\Big) + \partial_i b_{jk}\,\nu - \displaystyle\sum_{r,s} b_{jk}\big(g^{sr}b_{ri}\partial_s f\big) \\
&\overset{\text{sortieren}}{=} \sum_s \Big(\partial_i\Gamma^s_{jk} + \textstyle\sum_r\big(\Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir} - b_{jk}b_{ir}g^{rs}\big)\Big)\partial_s f + \Big(\textstyle\sum_s \Gamma^s_{jk}b_{is} + \partial_i b_{jk}\Big)\nu
\end{aligned}$$

Um den entsprechenden Ausdruck für $\partial_{jik}f$ zu erhalten, müssen wir nur $i$ und $j$ vertauschen. Dies ergibt $0 = \partial_{ijk}f - \partial_{jik}f$ als eine Linearkombination der Basisvektoren $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f, \nu$. Also verschwinden die Koeffizienten:

- Für jedes $s$ verschwinden der Koeffizient von $\partial_s f$; das liefert die Gauß-Gleichung.
- Der Koeffizient von $\nu$ liefert die Codazzi-Gleichung. □

Wir halten also fest: die Gauß-Gleichung ist die Tangentialkomponente eines Kommutators von dritten Ableitungen von $f$, während die Codazzi-Gleichung die Normalkomponente darstellt.

Die Vertauschbarkeit vierter und höherer Ableitungen von $f$ liefert keine neuen Bedingungen, denn sie lässt sich durch Ableiten der Gleichungen von Gauß und Codazzi erhalten. Das gleiche gilt für die Vertauschbarkeit höherer Ableitungen der Normalen, wie z.B. $\partial_{ij}\nu = \partial_{ji}\nu$. Daher sind allein die Gleichungen von Gauß und Codazzi Integrabilitätsbedingungen, die die Existenz einer Lösung garantieren:

**Satz 12** (Hauptsatz der Flächentheorie, Bonnet 1867)**.** *Es seien gegeben:*

- *Ein einfach zusammenhängendes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 2$) und ein Punkt $p \in U$,*
- *Symmetrische Matrizenfunktionen $G \in C^2(U, \mathbb{R}^{n\times n})$, $B \in C^1(U, \mathbb{R}^{n\times n})$, wobei $G$ zusätzlich positiv definit sei. Sie sollen den Gleichungen von Gauß* (GG) *und Codazzi* (CG) *genügen.*
- *Anfangsdaten: $P \in \mathbb{R}^{n+1}$, linear unabhängige Vektoren $V_1, \ldots, V_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, $N \in \mathbb{S}^n$, mit*

$$\langle V_i, N\rangle = 0 \quad \textit{und} \quad \langle V_i, V_j\rangle = g_{ij}(p) \quad \textit{für } \ i,j = 1,\ldots,n.$$

*Dann existert genau eine Lösung $f \in C^3(U, \mathbb{R}^{n+1})$, $\nu \in C^2(U, \mathbb{S}^n)$ der Hyperflächengleichungen* (GF) *und* (WF)*, mit den Fundamentalformen $G$ und $B$ und Anfangswerten $f(p) = P$, $\partial_i f(p) = V_i$, $\nu(p) = N$.*

Wir geben nur die Idee des Beweises an, der grundsätzlich dem Beweis des Hauptsatzes der Kurventheorie ähnelt. Detaillierte Beweise finden Sie in [dC,Kü], die allerdings auch

den Satz von Frobenius nur zitieren:
1. Das System (9) integriert man von einem festen Punkt $p = \gamma(0)$ aus durch Kurvenintegrale, wie im Beweis des Eindeutigkeitssatzes. Dadurch erhält man die Vektoren $(X_1, \ldots, X_n, \nu)$ im Punkt $q = \gamma(1)$.
2. Die Gauß- und Codazzi-Gleichungen (GG) (CG), sind *Integrabilitätsbedingungen* der Differentialgleichung, d.h. sie sichern, dass das Kurvenintegral für $f(q)$ unabhängig von der gewählten Kurve ist. Dies sagt der Satz von Frobenius bei Anwendung auf unsere Situation. Für eine detaillierte Erklärung siehe [Sp], Band I. (Formuliert man die Flächentheorie im Differentialformenkalkül, so nimmt der Satz von Frobenius und der Beweis des Hauptsatzes eine konzeptionell elegantere Form an, siehe z.B. [AF], 5.3).
3. Man zeigt, dass $q \mapsto (X, \nu)(q)$ folgende Eigenschaften hat: $|\nu|^2 = 1$, $\langle \nu, X_i \rangle = 0$ und $\langle X_i, X_j \rangle = g_{ij}$ für alle $i, j$. Für diese $1 + n + n^2$ Gleichungen gewinnt man aus (9) ein Gleichungssystem, das vom Vektor der rechten Seiten $(1, 0, G)$ eindeutig zu den gegebenen Anfangswerten gelöst wird. (Vergleichen Sie die Verifikation von $F(t) \in \mathsf{SO}(n)$ beim Hauptsatz der Kurventheorie.)
4. Nun bestimmt man die Lösung $f$ des zweiten Systems $X_i = \partial_i f$. Die Bedingung $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$, also die Gleichung $\partial_j X_i = \partial_i X_j$ ist bereits erfüllt. Dies folgt aus (9): Dabei benutzt man die angenommene Symmetrie von $B$ und $G$, wobei sie für $G$ durch die Christoffel-Symbol-Formel (7) eingeht. Wiederum liefert der Satz von Frobenius (oder direkt das Kurvenintegral und Potentialtheorie) die eindeutige Existenz von $f$ zu gegebenen Anfangswerten.

2.4. **Theorema egregium.** Dieser (wörtlich:) herausragende Satz ist die Aussage, dass die Gauß-Krümmung einer zweidimensionalen Fläche, wenn sie auch als Produkt der beiden Hauptkrümmungen definiert ist, auch eine intrinsische Definition besitzt. Im Gegensatz dazu gilt beispielsweise für die mittlere Krümmung: Zylinder bzw. Ebene sind innergeometrisch nicht zu unterscheiden, jedoch haben sie $H = \frac{1}{2}$ bzw. $H = 0$.

Das Theorema egregium ist als Aussage erstaunlich: Das einzige Indiz für seine Gültigkeit, das ich an dieser Stelle angeben kann, ist, dass $K$ im Falle zweidimensionaler Flächen von der Wahl der Normalen $\pm\nu$ unabhängig ist. Unser Beweis erklärt die Aussage leider nicht; er folgt aber unmittelbar aus der für Satz 11 geleisteten Arbeit.

**Satz 13** (Theorema egregium, Gauß 1827)**.** *Die Gauß-Krümmung $K$ eines parametrisierten Flächenstücks $f \in C^3(U^2, \mathbb{R}^3)$ hängt nur von seiner ersten Fundamentalform und ihren ersten beiden Ableitungen ab.*

*Beweis.* Es sei $R^s_{ijk}$ die linke Seite der Gauß-Gleichung (GG). Um die inversen Matrixkomponenten $G^{-1}$ von der rechten auf die linke Seite zu bewegen, multiplizieren wir die

Gleichung mit $G$. Dann stehen alle von $G$ abhängigen intrinsischen Terme links, und rechts nur Ausdrücke in $B$:

(11) $$R_{ijkt} := \sum_s g_{st} R^s_{ijk} \overset{\text{(GG)}}{=} \sum_{sr} g^{rs} g_{st}(b_{jk}b_{ir} - b_{ik}b_{jr}) = b_{jk}b_{it} - b_{ik}b_{jt}.$$

Die Idee ist nun, für $n = 2$ die Indizes so zu wählen, dass die rechte Seite von (11) zur Determinante von $B$ wird. Dies ist z.B. für $i = t = 1$ und $j = k = 2$ der Fall: Dann erhalten wir tatsächlich

(12) $$K = \frac{\det b}{\det g} = \frac{R_{1221}}{\det g}.$$

Laut Gauß-Gleichung (GG) hängt $R_{1221}$ allein von $g$, $\Gamma$ und ersten Ableitungen $\partial\Gamma$ ab. Zusammen mit Lemma 8 bedeutet das, dass die rechte Seite von (12) nur von $g$, $\partial g$, $\partial^2 g$ abhängt, also eine intrinsische Größe ist. □

`15. Vorlesung, 7.12.17` ———————————————

Die Gaußsche Krümmung ist damit eine *Biegeinvariante*: Sie bleibt unter allen Verbiegungen einer unelastischen Fläche erhalten. Im Gegensatz zu Flächen besitzen Kurven keine Biegeinvarianten, denn die Bogenlängenfunktion bildet sie stets längentreu nach $\mathbb{R}$ ab.

*Beispiele.* 1. Eine abwickelbare Fläche gilt hat lokal eine erste Fundamentalform $g \equiv \delta$. Nach dem theorema egregium folgt hieraus $K \equiv 0$. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung: Jede Fläche mit $K \equiv 0$ ist abwickelbar.

2. Die 2-Sphäre hat $K \equiv 1$. Wäre eine offene Teilmenge das längentreue Bild eines Gebietes der Ebene, so müßte wie im ersten Beispiel $K \equiv 0$ sein. Daraus folgt die bekannte Tatsache: Es gibt keine verzerrungstreue Erdkarte.

3. Katenoid und Helikoid haben in geeigneten Parametrisierungen $f, \tilde f \colon U \to \mathbb{R}^3$ dieselben ersten Fundamentalformen $g = \tilde g$ (siehe Übungen). Deshalb stimmen ihre Gauß-Krümmungen in den entsprechenden Punkten überein, $K(p) = \tilde K(p)$; dies ist eine Identität nichtkonstanter Funktionen.

Das theorema egregium erlaubt es uns, die Definition der Gauß-Krümmung auf beliebige Kodimension folgendermaßen zu erweitern:

**Definition.** Es sei $f \in C^3(U^2, \mathbb{R}^m)$ mit $m \geq 3$. Es sei $g$ die erste Fundamentalform von $f$ und die Christoffel-Symbole $\Gamma$ seien durch (7) erklärt. Dann definieren wir als Gauß-Krümmung von $f$:

(13) $$K := \frac{1}{\det g} \sum_{s=1}^{2} g_{s1}\Big(\partial_1 \Gamma^s_{22} - \partial_2 \Gamma^s_{12} + \sum_{r=1}^{2} \Gamma^r_{22}\Gamma^s_{1r} - \Gamma^r_{12}\Gamma^s_{2r}\Big).$$

Laut theorema egregium steht diese Definition für $m = 3$ im Einklang mit der Definition von $K$ über Hauptkrümmungen, und sie ist eine Isometrieinvariante in folgendem Sinne:

**Korollar 14.** *Es seien $f \in C^3(U^2, \mathbb{R}^m)$ bzw. $\tilde{f} \in C^3(U^2, \mathbb{R}^3)$ isometrische Flächen mit Gauß-Krümmung $K$ wie in* (13) *bzw. $\tilde{K} = \det \tilde{b} / \det \tilde{g}$. Dann gilt $K = \tilde{K}$.*

*Bemerkung.* Unsere erweiterte Definition von $K$ wird in der Riemannschen Geometrie benutzt, um auch für höhere Dimension $n \geq 3$ einen Krümmungsbegriff einzuführen. Dabei ordnet man jedem zweidimensionalen Unterraum des Tangentialraums eine sogenannte *Schnittkrümmung* zu, die durch (13) bzw. den sogenannten Riemannschen Krümmungstensor $R_{ijkl}$ erklärt ist.

2.5. **Gauß-Krümmung als intrinsische Größe.** Wenn die Gauß-Krümmung eine intrinsische Größe von Flächen ($n = 2$) ist, so muss es dafür auch entsprechende Deutungen geben. Wir geben einige an:

1. Wir betrachten einen *Riemannschen Kreis* $S_r(p)$ vom Radius $r \geq 0$ um $p \in U^2$, d.h. die Menge der Endpunkte von Geodätischen der Länge $r$ mit Anfangspunkt $p$:

$$S_r(p) := \{q \in \mathbb{R}^n : \exists \text{ Geodätische } c = f \circ \gamma \text{ mit } |c'| \equiv 1,\ c(0) = p,\ c(r) = q\}.$$

Nach dem Satz von Bertrand/Puiseux (1848) hat der Kreis die Länge

$$L\big(S_r(p)\big) = 2\pi r\Big(1 - \frac{K(p)}{6} r^2 + O(r^3)\Big), \qquad r \sim 0.$$

Im Beispiel $\mathbb{S}^2$ gilt tatsächlich $L\big(S_r(p)\big) = 2\pi \sin r = 2\pi\big(r - \frac{1}{6}r^3 + O(r^5)\big)$.

2. Nach einem Satz von Gauß gilt für ein von drei Geodätischen berandetes *Dreieck* $\Delta \subset U$ mit (Riemannschen) Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$

$$\int_\Delta K \, dS = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \tag{14}$$

Insbesondere ist die Winkelsumme bei positiver Gauß-Krümmung größer als $\pi$, bei negativer Gauß-Krümmung kleiner. Das Integral der Gaußkrümmung misst also den sogenannten *Winkelexzess* des Dreiecks; dabei bezieht sich der Begriff auf den Vergleich mit der der flachen Situation ($K \equiv 0$), für den die rechte Seite verschwindet. Wählt man eine Folge kleiner werdender Dreiecke, die gegen einen Punkt konvergieren, so kann man mit dieser Formel die Gauss-Krümmung am Punkt intrinsisch ermitteln.

3. Eng zusammen mit dem Winkelexzess hängt der folgende intrinsische Vergleich von Gauß-Krümmungen. Betrachten wir geodätische Dreiecke mit denselben Seitenlängen in Flächen mit verschiedenen Krümmungen. Verglichen mit euklidischen Dreiecken sind z.B. die Winkel in $\mathbb{S}^2$ größer ("fette Dreiecke"), während sie bei negativer Krümmung, etwa auf der Pseudosphäre mit $K \equiv -1$, kleiner sind ("schlanke Dreiecke"). Wenn nun alle

hinreichend kleinen Dreiecke mit gleichen Seitenlängen in einer Fläche stets größere Winkel als auf einer Vergleichsfläche, kann man sagen, dass die erste Fläche die größere Gauß-Krümmung haben muss.

Ein verwandtes Konzept funktioniert sogar noch in metrischen Räumen: Vergleicht man wieder kleine Dreiecke mit drei gleichlangen Seiten und betrachtet statt der Winkel nun den Abstand eines Punktes auf einer Seite zur gegenüberliegenden Ecke, so charakterisiert ein stets größerer Abstand die größere Krümmung. Auf diese Weise kann man immer noch "Krümmungen" vergleichen, auch wenn nur Abstände definiert sind. Z.B. hat der Würfel größere Krümmung als die Ebene.

`18. Vorlesung, 19.12.17` ______________________________

## 3. Parallelität und kovariante Ableitung

Der Begriff der Parallelität hat, angestoßen durch Euklids axiomatische Geometrie, die Geometer für über 2000 Jahre beschäftigt. Er hat schließlich, im 19. Jahrhundert, zur Entdeckung neuartiger Geometrien wie der hyperbolischen geführt. Auch in der Differential- und Riemannschen Geometrie hat sich dieser Begriff als entscheidend herausgestellt, um Konzepte wie Ableitung und Krümmung intrinsisch einzuführen.

Die Winkelsumme in einem ebenen Dreieck kann man durch Mitführen eines konstanten Rahmens begründen: Im Vergleich zum Rahmen muss die Tangente um $2\pi$ drehen, wenn man das Dreieck abfährt; sie dreht natürlich nur in den Ecken, so dass man als Summe der Außenwinkel $2\pi$ erhält. Es stellt sich die Frage, warum sich dieses Argument nicht auf sphärische Dreiecke überträgt. Der vorliegende Abschnitt gibt die Antwort: Es liegt daran, dass eine Parallelverschiebung des Rahmens beim Umrunden des Dreiecks nicht in die Ausgangslage zurückkehrt.

3.1. **Parallele Vektorfelder längs Kurven.** Wir hatten bereits parallele Normalenfelder $N$ längs Kurven betrachtet; dies sind Felder, deren Änderung $N'$ allein dazu dient, die Bedingung der Normalität zu erhalten, so dass $N' \parallel c'$ oder $\perp(N') = 0$.

Für Zwecke der intrinsischen Geometrie wollen wir nun an eine Fläche tangentiale Vektorfelder $Y = df X$ betrachten. Die Felder sollen längs Kurven $c = f \circ \gamma$ definiert sein, also $Y(t) = df_{\gamma(t)} X(t)$ mit $Y(t) \in T_{\gamma(t)} f$. Diesmal wollen wir verlangen, dass die Änderung $Y'$ allein dazu dient, die Bedingung der Tangentialität zu erhalten. Das heißt, dass $Y'$ keinen Tangentialanteil haben soll, $\Pi(Y') = 0$ oder $Y'(t) \in N_{\gamma(t)} f$; speziell im Hyperflächen-Fall könnte man die letzte Bedingung auch als $Y' \parallel \nu \circ \gamma$ schreiben.

**Definition.** Sei $f \in C^2(U^n, \mathbb{R}^m)$ parametrisierte Fläche und $c = f \circ \gamma \in C^0(I, \mathbb{R}^m)$ eine Flächenkurve. Dann heißt ein Vektorfeld $X \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ oder auch das tangentiale Bildfeld $Y := df(X)$ *parallel* (*längs* $\gamma$), wenn die Ableitung keine Tangentialkomponente hat, also

$$\Pi_{\gamma(t)}\big(Y'(t)\big) = \Pi_{\gamma(t)}\big((df_{\gamma(t)}X)'(t)\big) = 0 \qquad \text{für alle } t \in I. \tag{15}$$

Für $t, t_0 \in I$ nennen wir $X(t)$ auch eine *Parallelverschiebung* von $X(t_0)$, ebenso für $Y$.

Die Eindeutigkeit der Parallelverschiebung werden wir in Satz 18 nachweisen.

*Beispiele.* 1. Im euklidischen Fall $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit $f = (\mathrm{id}, 0)$ hat ein tangentiales Vektorfeld $Y = df X$ ohnehin keine Komponente in $\mathbb{R}^k$. Also ist $X$ genau dann parallel längs jeder beliebigen Flächenkurve, wenn gilt $Y' = (df X)' \equiv 0$, d.h. wenn $Y = df X$ konstant ist.

2. Ein Vektorfeld $Y = df X$, das
- tangential an eine Fläche,
- aber konstant im umgebenden Raum ist,

ist offenbar ebenfalls parallel. Sei speziell $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch $f$ parametrisiert und die Flächenkurve $c$ parametrisiere den Äquator. Dann ist z.B. das konstante Vektorfeld in Nord-Südrichtung $Y(t) = (0, 0, 1)$ parallel.

3. Wir betrachten einen mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierten Großkreis $c$ in $\mathbb{S}^n$. Das Feld $Y(t) := c'(t)$ ist nicht konstant, aber parallel, denn $Y'(t) = c''(t) \parallel c(t) = \nu(t)$, also $\Pi(Y') = 0$. Längs eines mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierten Großkreises ist also der Tangentialvektor parallel.

Man kann den Parallelitätsbegriff folgendermaßen motivieren.

- Physikalisch: Wir betrachten ein *(Foucaultsches) Pendel*. Wir stellen uns dazu das Gravitationsfeld der Erde als fest vor, und sehen als einzigen Effekt der Erdrotation, dass das Pendel zur Zeit $t$ längs eines Breitenkreises $t \mapsto c(t)$ verschoben wird. Die Pendelebene denken wir uns aufgespannt vom Normalenvektor $\nu(t)$ an die Erdoberfläche und einem normierten Tangentialvektor $Y(t)$. Weil die Gravitation nur in Normalenrichtung auf das Pendel einwirkt, es aber in Tangentialrichtung aber kräftefrei beläßt, muss (15) gelten, und daher wird $Y(t)$ parallel verschoben längs $c$. Siehe auch den Wikipedia-Eintrag `Foucault_pendulum`.
- Geometrisch: Nehmen wir an, dass wir die Kurve $c$ in einer Fläche durch einen schmalen Papierstreifen realisieren. Legen wir den Streifen in die Ebene, d.h. wir wickeln ihn ab, so ist er nur für Geodätische $c$ gerade. Im allgemeinen hat der abgewickelte Papierstreifen eine Krümmung, die der geodätischen Krümmung von $c$ entspricht. Ein in der Ebene längs der Kurve eingetragenes Vektorfeld ist konstant genau dann, wenn sein Bild auf der Fläche parallel ist (warum?).

Wir halten einen wichtigen Spezialfall fest, vergleiche Beispiel 3: Betrachten wir speziell den Tangentialvektor $Y = c' = df(\gamma')$ einer Flächenkurve $c = f \circ \gamma$. Dann gilt

$$\Pi\big(Y'(t)\big) = \Pi\big(c''(t)\big),$$

und wir erkennen unmittelbar:

**Satz 15.** *Eine Flächenkurve $c = f \circ \gamma$ ist Geodätische genau dann, wenn $\gamma'$ bzw. der Tangentialvektor $c'$ parallel ist.*

3.2. **Eigenschaften paralleler Vektorfelder.** Beim folgenden Satz denken wir an einen Kegel bzw. Zylinder, der eine Sphäre $\mathbb{S}^2$ längs eines Breitenkreises oder des Äquators (tangential) berührt, oder an einen Papierstreifen der eine andere Fläche entlang einer gegebenen Kurve berührt:

**Satz 16.** *Es seien $f_1, f_2 \colon U \to \mathbb{R}^m$ zwei Flächen, die eine Flächenkurve $c = f_1 \circ \gamma_1 = f_2 \circ \gamma_2$ gemeinsam haben. Stimmen die Tangentialräume von $f_1$ und $f_2$ für jeden Punkt aus $c$ überein, so stimmt auch die Parallelverschiebung längs $c$ für beide Flächen überein.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung stimmen die beiden Tangentialprojektionen $\Pi$ bzgl. $f_1$ und $f_2$ für die Punkte $\gamma_1$ und $\gamma_2$ überein. Also ist die Bedingung $\Pi(Y') \equiv 0$ für beide Flächen äquivalent. □

Die folgende Aussage haben wir bereits für parallele Normalenfelder von Kurven kennengelernt; der Beweis für parallele Tangentialfelder ist analog.

**Lemma 17.** *Sind $X_1, X_2 \colon I \to \mathbb{R}^n$ parallel längs $c = f \circ \gamma$, so bleibt $g(X_1, X_2)$ konstant. Insbesondere bleibt konstant: Die Längen $\|X_1\|$, $\|X_2\|$ und der für $X_1, X_2 \neq 0$ definierte Winkel $\alpha$ mit $\cos\alpha = \frac{g(X_1,X_2)}{\|X_1\|\|X_2\|}$.*

*Beweis.* Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} g(X_1, X_2) &= \Big\langle \frac{d}{dt} df(X_1),\, df(X_2) \Big\rangle + \Big\langle df(X_1)\, \frac{d}{dt} df(X_2) \Big\rangle \\ &= \Big\langle \underbrace{\Pi\big(\frac{d}{dt} df(X_1)\big)}_{=0},\, df(X_2) \Big\rangle + \Big\langle df(X_1),\, \underbrace{\Pi\big(\frac{d}{dt} df(X_2)\big)}_{=0} \Big\rangle = 0\end{aligned}$$

□

Wir im Falle von Geodätischen wollen wir nun parallele Vektorfelder als Lösung einer Differentialgleichung konstruieren. Sei dazu $X(t) = \sum_{i=1}^n X^i(t) e_i$ ein Vektorfeld längs einer Kurve $\gamma$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\big(df_\gamma(X)\big) = \frac{d}{dt}\Big(\sum_i X^i\,(\partial_i f \circ \gamma)\Big) = \sum_i \Big(X'^{\,i}\,(\partial_i f \circ \gamma) + \sum_j (\partial_{ij} f \circ \gamma)\,\gamma'^j X^i\Big),$$

und die Tangentialkomponente lautet

$$\Pi\Big(\frac{d}{dt}\big(df_\gamma(X)\big)\Big) = \sum_k \Big({X'}^{\,k} + \sum_{i,j}(\Gamma^k_{ij}\circ\gamma)\,{\gamma'}^j X^i\Big)\,(\partial_k f\circ\gamma).$$

Weil $(\partial_k f)$ eine Basis des Tangentialraums ist, folgt daraus:

$$(16)\qquad X(t) \text{ parallel} \qquad\Longleftrightarrow\qquad {X'}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma^k_{ij}\big(\gamma(t)\big){\gamma'}^i(t)X^j(t) = 0 \quad \text{für } k = 1,\dots,n$$

Dies ist ein System gewöhnlicher homogener linearer Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten. Daher hat es eine globale, auf ganz $I$ definierte, Lösung zu gegebenem Anfangswertr:

**Satz 18.** *Für ein Flächenstück $f \in C^3(U,\mathbb{R}^m)$ seien eine Kurve $\gamma \in C^1(I,U)$ gegeben, sowie $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Parallelverschiebung von $X$ längs $c$ mit Anfangswert $X(t_0) = X_0$.*

Anders als im euklidischen Raum hängt das Ergebnis einer Parallelverschiebung von $P$ nach $Q$ normalerweise vom gewählten Weg von $P$ nach $Q$ ab (*Holonomie*):

*Beispiel.* In $\mathbb{S}^2$ seien am Nordpol zwei Tangentialvektoren $v \perp w$ gegeben. Wir betrachten zwei Geodätische $\gamma_v$, $\gamma_w$ der Länge 90° mit Startrichtungen $v, w$ und Endpunkten $p_v$, $p_w$ auf dem Äquator. Wir verlängern $\gamma_v$ durch ein ein 90-Grad-Stück auf dem Äquator und betrachten die Parallelverschiebung von $v$ nach $p_w$ auf beiden Wegen. Die Tangente von $\gamma_v'$ ist Parallelverschiebung von $v$ längs $\gamma_v$. Im Äquatorpunkt $p_v$ zeigt sie nach Süden, und die Südrichtung ist längs des Äquators parallel. Damit ist die Südrichtung in $p_w$ das Ergebnis der Parallelverschiebung von $v$. Andererseits steht $v$ im Nordpol senkrecht auf der Tangente $\gamma_w'$, also bleibt die Parallelverschiebung von $v$ längs $\gamma_w$ senkrecht auf $\gamma_w'$. Am Endpunkt $p_w$ zeigt sie daher in Richtung des Äquators statt in Südrichtung.

*Bemerkung.* Für Flächen, $n = 2$, garantiert die Bedingung $K \equiv 0$ die lokale Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung, weil dann die Fläche abwickelbar in die Ebene ist. In höherer Dimension ist das Verschwinden des Riemannschen Krümmungstensors äquivalent zur lokalen Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung.

3.3. **Kovariante Ableitung längs Kurven.** Der Vektor $\Pi(\frac{d}{dt}(df X))$ ist der Änderungsvektor gegenüber paralleler Fortsetzung. Da er tangential ist, können wir ihn im Urbild $U$ betrachten, d.h. in der Form $df(\cdot)$ schreiben:

**Definition.** Sei $f \in C^3(U^n,\mathbb{R}^m)$ Flächenstück, $\gamma \in C^1(I,U)$ Kurve, und $X = \sum_{k=1}^n X^k e_k \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Die *kovariante Ableitung von $X$ längs $\gamma$* ist das eindeutig bestimmte Vektorfeld $\nabla_{\gamma'}X\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit

$$(17)\quad df_{\gamma(t)}\big(\nabla_{\gamma'}X\big)(t) = \Pi\Big(\frac{d}{dt}df_{\gamma(t)}(X(t))\Big) \quad\Leftrightarrow\quad \nabla_{\gamma'}X = \sum_{k=1}^{n}\Big({X'}^{\,k} + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\,{\gamma'}^{\,i}X^j\Big)e_k.$$

Die Notation soll andeuten, dass man $\nabla_{\gamma'}X$ als eine Richtungsableitung von $X$ in Richtung $\gamma'$ verstehen kann. Eine andere gebräuchliche Notation ist $\frac{D}{dt}X$.

Die Basisdarstellung (17) von $\nabla_{\gamma'}X$ zeigt, dass die kovariante Ableitung intrinsisch ist: Sie hängt nur von der ersten Fundamentalform $g$ ab, ist also invariant unter Isometrien. Das gleiche gilt natürlich für die Parallelverschiebung.

*Beispiele.* 1. In einer Hyperfläche $f\colon U^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist die Tangentialprojektion gegeben durch $\Pi(Y) = Y - \langle Y, \nu\rangle\,\nu$, d.h. es gilt

$$df\big(\nabla_{\gamma'}X\big) = \frac{d}{dt}\big(df(X)\big) - \Big\langle\frac{d}{dt}\big(df(X)\big),\, \nu\Big\rangle\nu.$$

2. $c = f\circ\gamma$ geodätisch $\iff 0 = \Pi(c'') = \Pi\big(\frac{d}{dt}(df(\gamma'))\big) = df(\nabla_{\gamma'}\gamma') \iff 0 = \nabla_{\gamma'}\gamma'$.

3. Man kann $\nabla_{\gamma'}\gamma'$ verstehen als tangentialen Beschleunigungsvektor der Kurve $c = f\circ\gamma$, gesehen im Urbild. Bei Bogenlängenparametrisierung ist dies der geodätische Krümmungsvektor und es gilt

$$\kappa_{\text{geod}} = \|\nabla_{\gamma'}\gamma'\|.$$

4. Wir haben die kovariante Ableitung bereits benutzt, als wir im Beweis von Satz 6 das Feld $W$ in die 1. Variation eingesetzt haben. Dabei war $df(W(t)) := \Pi(c''(t))$, also $W = \nabla_{\gamma'}\gamma'$. Damit kann man die erste Variation für eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte (nicht-konstante) Kurve $\gamma$ vollständig intrinsisch schreiben:

$$(18)\qquad \delta_V L(c) = \frac{1}{\|\gamma'\|}g\big(V,\gamma'\big)\Big|_a^b - \frac{1}{\|\gamma'\|}\int_a^b g\big(V,\,\nabla_{\gamma'}\gamma'\big)\,dt.$$

Die Bedeutung der kovarianten Ableitung kann man schwer überschätzen: Sie ist der zentrale Begriff der Riemannschen Geometrie, der z.B. die Einführung des Krümmungsbegriffes erlaubt (Riemannscher Krümmungstensor).

`19. Vorlesung, 21.12.17` ________________________________

3.4. **Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit einer Karte.** Intrinsische Eigenschaften von parametrisierten Flächen sind durch die erste Fundamentalform $g$ bestimmt:

• Längen von Kurven, Geodätische und parallele Vektorfelder

• und allgemeiner die kovariante Ableitung von Vektorfeldern längs Kurven, insbesondere geodätischer Krümmungsvektor und geodätische Krümmung,

• für $n = 2$ die Gauß-Krümmung,

Extrinsische Eigenschaften sind die nur für Hyperflächen erklärten Begriffe Normale, Weingartenabbildung, zweite Fundamentalform, Hauptkrümmungen, mittlere Krümmung, auch Krümmungs- und Asymptotenlinien; natürlich auch die Hyperflächengleichungen.

Die zuerst genannten intrinsischen Begriffe sind bereits in folgender Situation erklärt:

**Definition.** Eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit [Riemannian manifold] mit einer Karte [chart]* $(U, g)$ ist ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ zusammen mit einer Abbildung

$$g \colon U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (p, X, Y) \mapsto g_p(X, Y),$$

genannt *Riemannsche Metrik [Riemannian metric]*, so dass $(X, Y) \mapsto g_p(X, Y)$ für jedes $p$ ein Skalarprodukt ist (positiv definite symmetrische Bilinearform).

*Beispiele.* 1. Jede auf $U$ parametrisierte Fläche $f$ ist ein Beispiel. Jedoch muss umgekehrt nicht unbedingt eine Hyperfläche $f \colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ existieren, deren erste Fundamentalform $g$ ist.

2. Ein Spezialfall ist eine *konforme Metrik*,

$$g_p(X, Y) = \lambda^2(p)\langle X, Y\rangle \quad \text{für } \lambda \colon U \to (0, \infty).$$

Für eine konforme Metrik stimmen offenbar Winkel mit $\mathbb{R}^n$ überein, während Längen mit $\lambda(p)$ skalieren, $\|X\|_p = \lambda(p)|X|$, auch Inhalte sind definiert.

Eine gute Vorstellung einer konformen Metrik ist es, $(U, g)$ als inhomogenes Medium zu verstehen mit einer Dichtefunktion $\lambda$. Das physikalische Modell von Lichtstrahlen in Medien mit variabler Dichte ist hilfreich: Die Lichtgeschwindigkeit reduziert sich mit zunehmender Dichte. Fermat hat die Lichtbrechung dadurch erklärt, dass Lichtstrahlen den (zeitlich) kürzesten Weg nehmen. Entsprechend wollen Geodätische in Richtung kleiner Werte von $g$ verlaufen. Der allgemeine, nicht unbedingt konforme Fall entspricht würde einer richtungsabhängigen Dichtefunktion $X \mapsto \|X\|_p$ für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ entsprechen; ich weiß nicht, ob er physikalisch realisierbar ist.

Die folgenden Größen sind durch eine Riemannsche Metrik erklärt:
- Die *Länge* $L(\gamma) := \int \sqrt{g(\gamma', \gamma')}\, dt$ einer Kurve $\gamma \colon I \to U$.
- *Christoffelsymbole*

$$\text{(19)} \qquad \Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \Big(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\Big) \qquad \text{für } 1 \le i, j, k \le n.$$

- Die *kovariante Ableitung von* $X = \sum_k X^k e_k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *längs* $\gamma$

$$\nabla_{\gamma'} X := \sum_{k=1}^n \Big(X'^{\,k} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k\, \gamma'^{\,i} X^j\Big) e_k.$$

• *Geodätisch* ist eine Kurve $\gamma\colon I \to U$ wenn für alle $t \in I$ gilt

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma''^k(t) + \sum_{1\le i,j\le n} \Gamma_{ij}^k\big(\gamma(t)\big)\gamma'^i(t)\gamma'^j(t) = 0 \qquad \text{für } k = 1,\dots,n.$$

Die intrinsisch formulierte erste Variation (18) zeigt, dass eine Kurve $\gamma$ genau dann geodätisch ist, wenn $\|\gamma'\|$ konstant ist und die erste Variation verschwindet.

• Für $n = 2$ die Gauß-Krümmung

$$K\colon U \to \mathbb{R}, \qquad K := \frac{1}{\det g}\sum_{s=1}^{2} g_{s1}\Big(\partial_1\Gamma_{22}^s - \partial_2\Gamma_{12}^s + \sum_{r=1}^{2}\Gamma_{22}^r\Gamma_{1r}^s - \Gamma_{12}^r\Gamma_{2r}^s\Big). \tag{20}$$

Speziell im konformen Fall zeigt eine Rechnung (siehe Übungen oder Korollar V.4):

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\Delta(\log\lambda) \tag{21}$$

Im Hinblick auf Standardräume stellt sich die Frage: Gibt es Riemannsche Flächen $(U^2, g)$, so dass $K$ konstant ist? Tatsächlich reicht es, die drei Fälle $K = -1, 0, 1$ zu betrachten:

**Lemma 19.** *Hat $g$ die Gauß-Krümmung $K$, so hat $g^\mu := \mu g$ mit $\mu > 0$ die Gauß-Krümmung $K^\mu = K/\mu$.*

*Beweis.* Offenbar bleiben die Christoffel-Symbole (19) gleich. In (20) ergibt sich daher als alleinige Änderungen $\det g^\mu = \mu^2 \det g$ und $g_{s1}^\mu = \mu g_{s1}$, woraus die Behauptung folgt. □

Eine Riemannsche Metrik mit $K \equiv 0$ ist natürlich durch $g := \langle\cdot,\cdot\rangle$ gegeben. Den Fall $K \equiv -1$ kann man wie folgt realisieren:

**Satz 20** (Hyperbolische Halbebene)**.** *Die Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Karte*

$$H^2 := \Big(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},\ \ g_{(x,y)}(\cdot,\cdot) := \frac{1}{y^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\Big)$$

*hat die Krümmung $K \equiv -1$. Geodätische sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und haben als Spur Strahlen oder Halbkreise, die auf $\mathbb{R}\times\{0\}$ senkrecht stehen.*

Alle Geodätischen haben also unendliche Länge. Insbesondere wird $y = 0$ nicht in endlicher Zeit erreicht: Dafür sorgt der Konformfaktor $1/y^2$, der für $y \to 0$ explodiert.

*Beweis.* Nach (21) gilt

$$K(x,y) = -y^2\Delta\Big(\log\frac{1}{y}\Big) = y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log y = y^2\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{y}\Big) = -1.$$

Die Aussage über Geodätische bleibt als Übung. □

Wir erwähnen noch folgende Eigenschaften der hyperbolischen Ebene:

1. Es ist ein Satz von Hilbert, dass es keine isometrische Immersion $f\colon H^2 \to \mathbb{R}^3$ gibt, d.h. es gibt keine Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Gauß-Krümmung $-1$, in der Geodätische (in beiden Richtungen) unendlich lang sind.

2. Die Rotationsfläche der Traktrix, auch *Pseudosphäre* genannt, hat ebenfalls Gauß-Krümmung $-1$. Die beiden Flächen sind also (lokal) isometrisch. Jedoch hat die Pseudosphäre einen Randkreis, über den sie nicht fortsetzbar ist. In diesem Randkreis wird die Fläche nur bezüglich der extrinsischen Geometrie singulär, die intrinsische Geometrie ändert sich nicht.

3. Während $\mathbb{S}^2$ nur von 5 verschiedenen regulären Polygonen gepflastert wird (entsprechend den platonischen Polyedern), gibt es für $H^2$ abzählbar viele Pflasterungen, wie man mit Hilfe von hyperbolischer Trigonometrie nachrechnen kann.

4. Die Isometriegruppe des hyperbolischen Raums $H^2$ ist durch Möbiustransformationen der Form $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ gegeben, wobei die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ liegt.

Zwar kennen wir mit $\mathbb{S}^2$ eine zweidimensionale Fläche mit $K \equiv 1$, es ist jedoch instruktiv, dennoch eine Beschreibung analog zum hyperbolischen Raum zu betrachten.

**Satz 21** (Sphärische Metrik)**.** *Die Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Karte*

$$S^2 := \Big(\mathbb{R}^2,\ \ g_{(x,y)}(\cdot,\cdot) := \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle\Big)$$

*hat die Krümmung $K \equiv 1$. Alle Geodätischen haben die Länge $2\pi$ und sind Ursprungsgeraden oder Kreise, die $\mathbb{S}^1$ senkrecht schneiden.*

*Beweis.* Wiederum rechnen wir nur die Gauß-Krümmung nach:

$$\begin{aligned}
K(x,y) &= -\frac{1}{4}\big(1+x^2+y^2\big)^2\,\Delta\Big(\log\frac{2}{1+x^2+y^2}\Big)\\
&= \frac{1}{4}\big(1+x^2+y^2\big)^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\big(\log\left(1+x^2+y^2\right)\big)\\
&= \frac{1}{4}\big(1+x^2+y^2\big)^2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{1+x^2+y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{2y}{1+x^2+y^2}\Big)\\
&= \frac{1}{4}\big(1+x^2+y^2\big)^2\Big(\frac{4}{1+x^2+y^2}-\frac{4x^2}{(1+x^2+y^2)^2}-\frac{4y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\Big)\\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Tatsächlich kann man zeigen, dass dies die Metrik ist, die entsteht, wenn man $\mathbb{S}^2$ ohne den Nordpol stereographisch vom Nordpol aus in die Ebene projiziert. Die Abbildung ist dann Isometrie. Dem entspricht, dass $\lambda$ rasch gegen 0 fällt für $x, y \to \infty$.

Nehmen wir als Konformfaktor jedoch $\lambda^2(x,y) := 4/(1-x^2-y^2)^2$, und wählen dazu passend $U$ als offene Einheitskreisscheibe so zeigt eine Inspektion der gegebenen Rechnung, dass sich die Krümmung $-1$ ergibt. Es handelt sich hier um das sogenannte Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes; wiederum sind Geodätische Kreise oder Ursprungsgeraden, die auf $\mathbb{S}^1$ senkrecht stehen. Es war Riemann, der 1854 in seinem Habilitationsvortrag die sphärische Metrik und das Poincaré-Modell eingeführt hat (sogar in beliebiger Dimension).

# Teil 4. Globale Kurventheorie

`20. Vorlesung, 9.1.18` ______

Krümmung und Torsion sind *lokale* Eigenschaften einer orientierten Kurve: Sie sind in jedem Punkt durch das Verhalten der Kurve in beliebig kleinen Umgebungen bestimmt. *Globale* Aussagen sind dagegen Aussagen, die die Kenntnis der ganzen Kurve voraussetzen; sie betreffen in der Regel geschlossene Kurven.

Tatsächlich gibt es, intrinsisch betrachtet, nur zwei topologische Typen von Kurven:

**Satz.** *Jede zusammenhängende (Unter-)Mannigfaltigkeit der Dimension* 1 *ist entweder homöomorph zu* $\mathbb{S}^1$ *oder zu einem offenen Intervall.*

Man sagt auch: Jede 1-Mannigfaltigkeit ist entweder geschlossene oder *offene* Kurve. Einen Beweis finden Sie z.B. im Anhang von [GP].

## 1. Umlaufsatz

1.1. **Umlaufzahl und Totalkrümmung.** Wir erinnern an den stetigen Tangentenwinkel $\vartheta$ einer regulären ebenen Kurve $c \in C^k(I, \mathbb{R}^2)$, $k \in \mathbb{N}$: Laut Lemma I.4 existiert

$$\vartheta \in C^{k-1}(I, \mathbb{R}), \qquad \frac{c'(t)}{|c'(t)|} = \big(\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)\big),$$

und ist bis auf Addition einer Konstanten $2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt.

Der Tangentenwinkel $\vartheta$ eines parametrisierten Kreises wächst bei jedem Umlauf um $2\pi$. Wird der Kreis $k$-mal umlaufen, so können wir die Zahl $k$ anhand des Zuwachses des Tangentenwinkels $2\pi k$ feststellen. Genauso stellen wir fest, wie oft beliebige geschlossene Kurven “umlaufen”.

**Definition.** Die *Umlaufzahl [rotation index, turning number]* einer regulären $P$-periodischen Kurve $c \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ ist

$$\operatorname{ind}(c) := \frac{1}{2\pi}\big(\vartheta(P) - \vartheta(0)\big) \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Klarer wäre es vielleicht, *Tangentendrehzahl* zu sagen. Offensichtlich ist die Umlaufzahl unabhängig von der Wahl von $\vartheta$; sie stimmt auch mit $\big(\vartheta(t_0 + P) - \vartheta(t_0)\big)/2\pi$ überein.

*Beispiele.* 1. Es sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann hat der $k$-fach durchlaufene Kreis $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := e^{ikt}$, die Umlaufzahl $k$.
2. Die *Lemniskate* $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) := (\sin t, \sin 2t)$ hat Umlaufzahl 0.
3. Betrachten Sie Ihren Weg von zu Hause zur Uni und zurück – mit welcher Umlaufzahl legen Sie ihn zurück?

Die Umlaufzahl ist ein geometrischer Begriff (Übung):
• Sie invariant unter orientierungstreuer Bewegung (warum?).
• Sie ist auch invariant unter orientierungstreuer Umparametrisierung, wie aus Satz 1 folgen wird.
Wie verhält sie sich in den orientierungsvertauschenden Fällen?

Wir wollen das Integral der Krümmung einer Kurve betrachten, um es im Falle von ebenen Kurven als Umlaufzahl zu erkennen. Im Falle einer nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\tilde{c} \in C^2([0,L],\mathbb{R}^n)$ betrachten wir also $\int_0^L \tilde{\kappa}(t)\,dt$. Ist $c \in C^2([0,P],\mathbb{R}^n)$ nur regulär so sei $c = \tilde{c} \circ \varphi$ durch orientierungserhaltende Umparametrisierung einer auf Bogenlänge parametrisierten Kurve $\tilde{c}$ dargestellt, es gilt also $|c'| = \varphi' > 0$. Wenn $c$ Länge $L$ hat, gilt $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(P) = L$. Wegen $\kappa = \tilde{\kappa} \circ \varphi$ ergibt sich als zu definierender Ausdruck

$$\int_0^L \tilde{\kappa}(\tau)\,d\tau \overset{\text{Subst.}}{=} \int_0^P \tilde{\kappa}\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \int_0^P \kappa(t)\big|c'(t)\big|\,dt.$$

Also können wir definieren:

**Definition.** Die *Totalkrümmung [total curvature]* einer regulären Kurve $c \in C^2([0,P],\mathbb{R}^n)$ ist das Kurvenintegral

$$k(c) := \int_c \kappa(s)\,ds := \int_0^P \kappa(t)|c'(t)|\,dt.$$

Dabei sei $\kappa$ für $n = 2$ die orientierte Krümmung und für $n \geq 3$ die unorientierte Krümmung.

Für ebene $C^2$-Kurven stimmen Umlaufzahl und Totalkrümmung praktisch überein:

**Satz 1.** *Sei $c \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ geschlossen und regulär. Dann gilt*

$$k(c) = 2\pi\,\mathrm{ind}(c).$$

*Beweis.* Ist wieder $\tilde{c}$ die Umparametrisierung von $c$ auf Bogenlänge, so gilt $\vartheta' = \tilde{\kappa}$ nach Teil I, also

$$(2) \qquad 2\pi\,\mathrm{ind}(c) = \vartheta(L) - \vartheta(0) \overset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_0^L \vartheta'(\tau)\,d\tau \overset{\text{I(15)}}{=} \int_0^L \tilde{\kappa}(\tau)\,d\tau = k(\tilde{c}).$$ □

Im $C^2$-Fall haben wir damit auch gezeigt, dass die Umlaufzahl einer orientierten geschlossenen Kurve invariant unter orientierungstreuer Umparametrisierung bleibt, also auf $\langle c\rangle$ definiert ist. Ebenso sieht man aus (2) sofort, wie sich Umlaufzahl oder Totalkrümmung unter orientierungsvertauschenden Bewegungen und Umparametrisierungen verhalten.

Die Totalkrümmung von ebenen Kurven stellt sich als invariant unter Deformationen der Kurve heraus, welche die Regularität erhalten:

**Definition.** Seien $c_0, c_1 \in C^2([0,P],\mathbb{R}^n)$ reguläre $P$-periodische Kurven. Eine *reguläre Homotopie* ist eine Abbildung $F\colon C^2(\mathbb{R}\times[0,1],\mathbb{R}^2)$ mit $F(t,0)=c_0$ und $F(t,1)=c_1$, so dass für jedes $s\in[0,1]$ die Abbildung $t\mapsto c_s(t):=F(t,s)$ eine reguläre Kurve ist.

Beispielsweise definieren die Ränder zweier beliebiger kompakter sternförmiger Gebiete isotope Kurven.

Andererseits sind Lemniskate und Einheitskreis nicht isotop, wie der folgende Satz zeigt:

**Satz 2.** *Sind $c_0$ und $c_1$ regulär homotop, so gilt* $\operatorname{ind}(c_0)=\operatorname{ind}(c_1)$.

*Beweis.* Offenbar ergibt $s\mapsto \operatorname{ind}(c_s)$ eine stetige Funktion $[0,1]\to\mathbb{Z}$. Also ist sie konstant. □

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung: Nach dem Satz von Whitney-Grauenstein sind zwei Kurven $c_0$ und $c_1$ mit $\operatorname{ind}(c_0)=\operatorname{ind}(c_1)$ auch regulär homotop.

*Bemerkungen.* 1. Eine reguläre geschlossene ebene Kurve $c$ besitzt Parallelkurven

$$c_d(t):=c(t)+dN(t).$$

Für $d$ mit $|d|$ klein ist $c_d$ ebenfalls regulär und es gilt $c_d'=(1-d\kappa)c'$ (Übung), so dass sich ergibt $L(c_d)=L(c)-2\pi d\operatorname{ind}(c)$. Die Parallelkurven der Lemniskate sind also gleich lang wie die Lemniskate.

2. In der Funktionentheorie definiert man die Windungszahl einer geschlossenen $C^1$-Kurve $c$ um $p\notin\operatorname{Spur}c$ durch $n(p,c):=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z-p}\,dz$. Die Umlaufzahl einer regulären $C^2$-Kurve ist die Windungszahl von $c'$ um 0, man könnte also definieren $\operatorname{ind}(c)=n(0,c')$.

3. Es ist interessant, dass sich der Satz nicht auf Flächen in $\mathbb{R}^3$ verallgemeinert. In Verallgemeinerung regulärer Kurven betrachtet man sinnvollerweise immersierte Flächen in $\mathbb{R}^3$. Dann kann man z.B. die Sphäre auf stetige Weise und durch Immersionen so deformieren, dass Innen- und Aussenseite vertauscht werden (Smale 1959). Sehen Sie sich im Internet den Film *Outside In* über diese sogenannte Sphären-Eversion *[sphere eversion]* an.

1.2. **Hopfscher Umlaufsatz für einfache Kurven.** Wir präzisieren für geschlossene Kurven:

**Definition.** Eine geschlossene $P$-periodische Kurve heißt *einfach [simple]*, wenn sie auf dem Intervall $[0,P)$ injektiv ist.

Man nennt einfach geschlossene Kurven auch *Jordan-Kurven.* Wie bereits erwähnt, kann man einfache Kurven mit ihrem geometrischen Bild, der Spur, identifizieren. Eine fundamentale Aussage über Jordan-Kurven in der Ebene lautet:

**Satz** (Jordanscher Kurvensatz)**.** *Die Spur jeder einfach geschlossenen Kurve* $c \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ *zerlegt die Ebene* $\mathbb{R}^2$ *in zwei nicht-leere Zusammenhangskomponenten, von denen genau eine, das* Innengebiet*, beschränkt ist.*

Der Beweis dieses topologischen Satzes ist tiefliegend. Im differenzierbaren Fall wird er etwas einfacher, nimmt aber immer noch einigen Aufwand in Anspruch. Selbst der polygonale Fall ist nicht trivial.

`21. Vorlesung, 11.1.18` ______________________________

Der simpelste Fall einer Jordankurve ist ein Dreieck. Der simpelste Satz über ein Dreieck ist, dass die Summe der Winkel 180 Grad beträgt. Äquivalent ist zu sagen, dass die Summe der drei (orientierten) Außenwinkel genau $\pm 2\pi$ ist. Der einleuchtende Beweis hierfür verschiebt zwei Außenwinkel parallel und ergänzt damit den dritten Winkelwinkel zum Vollwinkel. Alternativ kann man sich auch vorstellen, dass man das Dreieck "abläuft" und feststellt, um welche Winkelsumme man sich bei einem Umlauf gedreht hat. Also hat das Dreieck Umlaufzahl $\pm 1$, und das gleiche gilt für jedes Jordan-Polygon (daraus folgt auch für Polygone die Aussage über die Summe der Innenwinkel). Wir bemerken, dass die Messung des Winkels beim "Ablaufen" allerdings gerade auf dem Begriff der Parallelverschiebung beruht, welcher längs der ganzen Kurve einen Vergleichswinkel definiert.

Wir ersetzen nun das Dreieck oder Jordan-Polygon durch eine $C^1$-Jordan-Kurve, und treffen die gleiche, ebenso offensichtlich erscheinende Aussage:

**Satz 3** (Hopfscher Umlaufsatz, 1935)**.** *Eine einfache geschlossene reguläre Kurve* $c \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ *hat eine Umlaufzahl* $\operatorname{ind}(c) \in \{\pm 1\}$.

Erst wenn wir die Verallgemeinerung dieser Aussage in gekrümmten Räumen (den Satz von Gauß-Bonnet) behandelt haben werden, wird klar sein, dass diese Aussage nicht selbstverständlich ist.

Zum Beweis des Umlaufsatzes benötigen wir eine Verallgemeinerung des Liftungslemmas I.4. Weiterhin erinnern wir an einen Begriff, der in der Funktionentheorie gern verwendet wird: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* wenn es einen Punkt $p \in A$ gibt, so dass für jedes $x \in A$ auch die Strecke

$$\overline{px} = \{(1-t)p + tx : t \in [0,1]\} \subset A$$

in $A$ enthalten ist. Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig.

**Lemma 4** (Liftung)**.** *Für* $A \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und sternförmig sei* $\gamma\colon A \to \mathbb{S}^1$ *ein stetiges Einheitsvektorfeld. Dann gibt es eine stetige Funktion*

$$\vartheta\colon A \to \mathbb{R} \qquad \textit{mit} \qquad \gamma(p) = \big(\cos\vartheta(p), \sin\vartheta(p)\big). \tag{3}$$

*Je zwei solche Funktionen haben als Differenz ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$.*

*Bemerkung.* Das Lemma gilt allgemeiner für *einfach zusammenhängende* Gebiete (Gebiete ohne Loch), siehe Aufgaben.

*Gegenbeispiel.* Der Kreisring $A_{1,2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \le |x| \le 2\}$ ist nicht sternförmig. Auf $A_{1,2}$ ist $\gamma(x) := \frac{x}{|x|}$ eine Funktion, die keinen Lift wie in (3) besitzt (warum?).

*Beweis.* OBdA sei $A$ sternförmig bezüglich 0. Wir legen $\vartheta(0)$ willkürlich fest, so dass (3) gilt; wegen der Unbestimmtheit von Winkeln entspricht dies der Wahl einer Zahl $k \in \mathbb{Z}$. Nach Lemma 4 können wir auf jedem Strahl durch 0 zu einer stetigen Funktion $\vartheta$ fortsetzen, die (3) genügt. Dies definiert eine Funktion $\vartheta$ auf ganz $A$, von der wir die Stetigkeit auf $A$ nachweisen müssen.

Da das Vektorfeld $\gamma$ auf dem Kompaktum $A$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, unabhängig von $p \in A$, so dass $\gamma$ auf $B_\delta(p)$ Werte in einem Halbkreis symmetrisch zu $\gamma(p)$ annimmt:

$$\gamma\big(B_\delta(p)\big) \subset \{q \in \mathbb{S}^1 : \langle q, \gamma(p)\rangle > 0\}.$$

Es sei nun $x \in A$ und $y \in B_\delta(x)$. Wegen der Sternförmigkeit von $A$ können wir folgende Hilfsfunktion definieren:

$$h\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad h(s) := \vartheta(sx) - \vartheta(sy)$$

Nach Wahl von $\vartheta$ ist $h$ stetig und es gilt $h(0) = 0$. Wir behaupten $h(s) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Nehmen wir an, es gibt ein $s$ mit $|h(s)| \ge \frac{\pi}{2}$. Wegen der Stetigkeit von $h$ auf Strahlen existiert dann ein $\sigma \in (0,1]$ mit $|h(\sigma)| = \frac{\pi}{2}$ (Zwischenwertsatz). Aber einerseits ist $|\sigma x - \sigma y| = \sigma|x-y| < \delta$, d.h. der Punkt $\sigma y$ liegt im $\delta$-Ball um $\sigma x$. Andererseits liegt $\gamma(\sigma y)$ nicht im Halbkreis um $\gamma(\sigma x)$. Widerspruch.

Auf jedem Ball $B_\delta$ nimmt das Vektorfeld $\gamma$ also Werte in einem Halbkreis an und erfüllt dort (3). Aber auf einem Halbkreis ist (3) umkehrbar, und dann $\vartheta$ eine stetige Funktion von $\gamma$ (die mithilfe des Arcus-Tangens des Quotienten der Komponenten von $\gamma$ dargestellt werden kann, siehe (13)). Daher ist $\vartheta$ stetig. □

*Beweis des Umlaufsatzes.* Wir nehmen eine Parametrisierung von $c$ nach Bogenlänge an. Weil $c$ stetig ist und $[0, L]$ kompakt, existiert das Minimum der $y$-Werte $y_0 := \min\{c^2(t)\}$. Es gilt also $c(t_0) = (x_0, y_0)$ für ein $t_0$ und $c^2(t) \ge y_0$ für alle $t$. Eine Translation der Kurve um $-(x_0, y_0)$ und die Umparametrisierung der Form $t \mapsto t - t_0$ ändern die Umlaufzahl nicht. Wir können also annehmen:

$$c(0) = 0, \quad c^2(t) \ge 0 \text{ für alle } t. \tag{4}$$

Es sind dann nur die beiden Fälle $c'(0) = (\pm 1, 0)$ möglich (wegen Bogenlängenparametrisierung und lokaler Normalform).

Wir betrachten das abgeschlossene Dreieck $A := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le s \le t \le L\}$. Dass $c$ einfach ist, bedeutet $c(s) \neq c(t)$ für $s \neq t$, abgesehen von $(s,t) = (0,L)$. Daher definiert die Sekantenrichtung bzw. die Tangente eine Funktion

$$\gamma\colon A \to \mathbb{S}^1, \qquad \gamma(s,t) := \begin{cases} \frac{c(t)-c(s)}{|c(t)-c(s)|} & \text{für } s < t \text{ und } (s,t) \neq (0,L), \\ c'(t) & \text{für } s = t, \\ -c'(0) & \text{für } (s,t) = (0,L). \end{cases}$$

Siehe `www.mathematik.com/Hopf` für eine Animation dieser Abbildung. Um die Stetigkeit von $\gamma$ nachzuweisen, müssen wir den Grenzwert $(s,t) \to (r,r)$ betrachten, wobei $0 < s < t$ ist. Die Differenzierbarkeit von $c$ liefert $c(t) = c(r) + (t-r)c'(r) + o(t-r)$, bzw. die gleiche Aussage für $s$. Wir erhalten $c(t) - c(s) = (t-s)c'(r) + o(t-r) - o(s-r)$. Division durch $t - s > 0$ ergibt

$$\frac{c(t)-c(s)}{t-s} \to c'(r) \quad \text{und daher} \quad \frac{|c(t)-c(s)|}{t-s} = \left|\frac{c(t)-c(s)}{t-s}\right| \to \left|c'(r)\right| = 1.$$

Der Quotient dieser beiden Differenzenquotienten zeigt, dass $\gamma$ in $(r,r)$ stetig ist. Entsprechendes gilt für $(s,t) \to (0,L)$.

Also ist $\gamma$ ein stetiges Einheitsvektorfeld auf der sternförmigen Menge $A$. Das Liftungslemma liefert wir einen stetigen Winkel $\vartheta\colon A \to \mathbb{R}$ mit (3). Auf der Hypothenuse des Dreiecks $A$ stimmt $t \mapsto \vartheta(t,t)$ mit dem Tangentenwinkel von $c$ überein, so dass die Umlaufzahl erfüllt

$$2\pi \operatorname{ind}(c) = \vartheta(L,L) - \vartheta(0,0) = \big(\vartheta(L,L) - \vartheta(0,L)\big) + \big(\vartheta(0,L) - \vartheta(0,0)\big).$$

Die rechte Seite werden wir mit Hilfe der Annahme (4) ausrechnen: Die Summanden sind entweder beide $\pi$ oder beide $-\pi$, woraus sich $\operatorname{ind}(c) = \pm 1$ ergibt. Die Summanden berechnen wir über die Katheten des Dreiecks: Die erste Kurve $t \mapsto \vartheta(0,t)$ bewegt den ersten Sekantenpunkt $c(t)$ einmal um die ganze Kurve herum, die zweite $s \mapsto \vartheta(s,L)$ führt dann den zweiten Sekantenpunkt $c(s)$ hinterher.

Im Fall $c'(0) = (1,0)$ legen wir fest $\vartheta(0,0) = 0$, im Einklang mit (3).
• Es ist $\vartheta(0,t)$ der Winkel des Vektors $c(t)$ mit der $x$-Achse. Aus $c^2(t) \ge 0$ folgern wir $\vartheta(0,t) \bmod 2\pi \in [0,\pi]$, Anfangswert und Stetigkeit ergeben $\vartheta(0,t) \in [0,\pi]$. Wegen $\vartheta(0,L) = \pi \bmod 2\pi$ gilt dann $\vartheta(0,L) = \pi$.
• Wir argumentieren genauso für die Funktion $s \mapsto \vartheta(s,L)$, die den Winkel von $-c(s)$ mit der $x$-Achse beschreibt: Aus $\vartheta(0,L) = \pi$ und $\vartheta(s,L) \bmod 2\pi \in [\pi, 2\pi]$ folgt wie gewünscht $\vartheta(L,L) = 2\pi$.

Im Fall $c'(0) = (-1,0)$ setzt man $\vartheta(0,0) = \pi$ und erhält dann $-\pi$ für jeden Summanden, also $\operatorname{ind}(c) = -1$. Alternativ spiegelt man $c$ an der $y$-Achse und benutzt den ersten Fall. □

*Übung.* 1. Was geht schief, wenn man den gegebenen Beweis auf die Lemniskate anwendet? 2. Warum kann man die Tangentenrotation $\vartheta(L,L)-\vartheta(0,0)$ nicht direkt entlang der Hypothenuse von $A$ ausrechnen?

`22. Vorlesung, 16.1.18` ______________________________

1.3. **Der Umlaufsatz für stückweise differenzierbare Kurven.** Bei der Behandlung von Kurvenintegralen, beispielsweise in der Funktionentheorie, stellt sich das Problem, dass man differenzierbare Kurven hintereinanderhängen möchte. Dadurch entstehen Nicht-Differenzierbarkeitsstellen; man behandelt sie zweckmäßig, indem man überhaupt in der Klasse stückweise differenzierbarer Kurven arbeitet. Ein anderer Grund, nicht-differenzierbare Kurven zu behandeln, ist man z.B. Dreiecke als Kurven behandeln möchte.

Vermutlich kennen Sie folgende Definition:

**Definition.** $(i)$ Eine *Zerlegung [partition]* eines Intervalles $I := [0, P]$ ist eine Vereinigung $I = I(0)\cup\cdots\cup I(\ell)$ wobei $I(i) := [t_i, t_{i+1}]$ für $i = 0,\ldots,\ell$ mit $0 = t_0 < \cdots < t_\ell < t_{\ell+1} = P$.
$(ii)$ Eine Kurve $c \in C^0(I,\mathbb{R}^n)$ heißt *stückweise [piecewise]* $C^k$ mit $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, wenn es eine Zerlegung $Z$ gibt, so dass $c|_{I(i)}$ in $C^k(I(i),\mathbb{R}^n)$ liegt. Wir schreiben dann $c \in PC^k(I,\mathbb{R}^n)$.

Wir nennen $c(t_i)$ eine *Ecke [vertex]* von $c$, und $c|_{I(i)}$ eine *Kante [edge]*. Die Bogenlänge wird erklärt durch $L(c) := \sum_{i=0}^{\ell} L(c|_{I(i)})$. Eine Kurve $c \in PC^1$ heißt *regulär*, wenn jede Kante regulär ist. Reguläre $PC^k$-Kurven können nach Bogenlänge parametrisiert werden, indem sukzessive die Kanten nach Bogenlänge parametrisiert werden.

Einseitige Ableitungen in $t_i$ geben wir durch die Notation $t_i^\pm$ wieder. Z.B. erhalten wir Tangenten $T_i^- := c'(t_i^-)$, $T_i^+ := c'(t_i^+)$. Für geschlossene Kurven setzen wir dabei $T_0^\pm := T_{\ell+1}^\pm$, so dass wir $\ell$ Tangentenpaare betrachten können.

In den Ecken $c(t_i)$ wollen wir nun Außenwinkel $\angle(T_i^-, T_i^+)$ von $T_i^-$ nach $T_i^+$ definieren. Dabei betrachten wir hier nur den Fall $n = 2$, der durch die Orientierung eine Wahl in einem $2\pi$-Intervall erlaubt. Wir haben den Umlaufsatz im Blick und verstehen eine Ecke als Grenzwert einfacher $C^1$-Kurven, deren Tangentenwinkeldifferenz in einer Umgebung der Ecke den Außenwinkel approximieren soll.

**Definition.** Der *Außenwinkel [exterior angle]* $\delta_i \in [-\pi,\pi]$ einer einfachen regulären Kurve $c \in PC^1(I,\mathbb{R}^2)$ in einer Ecke $c(t_i)$ ist wie folgt definiert: Es sei $\delta_i := \angle(T_i^-, T_i^+)$, falls dieser Winkel nicht $\pm\pi$ ist. Anderenfalls, d.h. im Fall einer *Spitze [cusp]*, definieren wir $\delta_i \in \{\pm\pi\}$ als Grenzwert von Sekantenwinkeln.

Bei Bogenlängen-Parametrisierung hat man Einheitstangenten $T_i^\pm$ und es gilt $T_i^+ = (\cos\delta_i)T_i^- + (\sin\delta_i)JT_i^-$. Der Fall einer Spitze entspricht dann $T_i^+ = -T_i^-$.

*Beispiel.* Eine Herzkurve, links herum parametrisiert, hat in der Spitze $\delta_0 = +\pi$ und im Einschnitt $\delta_1 = -\pi$. Dies entspricht der bei einer Abrundung ohne Selbstschnitte entstehenden jeweiligen Tangentenwinkeldifferenz.

Im Falle von Spitzen müssen bleibt die Grenzwertdefinition zu präzisieren. Wir behaupten, dass Kreise mit kleinem Radius $0 < r < r_0$ um eine beliebige Ecke $E = c(t_i)$ die Kurve in genau zwei Punkten $P(r) \neq Q(r)$ (wegen Einfachheit) schneiden, die in der Reihenfolge $P(r)$, $E$, $Q(r)$ durchlaufen werden. In der Ecke $E$ besitzt das Dreieck $P(r), E, Q(r)$ dann einen wohldefinierten orientierten Außenwinkel $\delta_i(r) \in (-\pi, \pi)$. Man erhält also eine stetige Funktion $r \mapsto \delta_i(r)$ mit Werten in $(-\pi, \pi)$. Die gesuchte Definition, die insbesondere $\pi$ von $-\pi$ in einer Spitze unterscheiden kann, lautet nun

$$\delta_i := \lim_{r \searrow 0} \delta_i(r) = \lim_{r \searrow 0} \angle\bigl(-(P(r) - E),\, Q(r) - E\bigr). \tag{5}$$

Diese Formel gilt bei beliebigem Winkel $\delta_i$.

Um die Behauptung zu verifizieren, betrachten wir eine von einer Ecke ausgehende $C^1$-Kante. Dafür gilt die lokale Graphendarstellung I(31) mit einer auf $[0, \varepsilon)$ definierten $C^1$-Funktion $f$. Sie erfüllt $f(0) = f'(0) = 0$, denn die dafür in I(31) angegebenen Formeln sind im $C^1$-Fall gültig. Für einen solchen Graphen $(t, f(t))$ ist der Nachweis der Behauptung elementar (Übung).

Der Umlaufsatz von Hopf verallgemeinert sich auf stückweise differenzierbare Kurven, indem man in Ecken den Außenwinkel addiert:

**Satz 5.** *Es sei $c \in PC^2([0, P], \mathbb{R}^2)$ eine einfache geschlossene reguläre Jordankurve mit orientierter Krümmung $\kappa$ längs der Kanten und Außenwinkeln $\delta_i \in [-\pi, \pi]$ in den Ecken. Dann gilt (mit Vorzeichen je nach Durchlaufrichtung)*

$$\int_c \kappa(s)\, ds + \sum_{i=0}^{\ell} \delta_i \;=\; \pm 2\pi. \tag{6}$$

Dabei spielt es keine Rolle, dass $\kappa = \vartheta'$ in den Punkten $t_i$ zweideutig definiert ist.

Der Beweis des Umlaufsatzes zeigt, dass das Vorzeichen der rechten Seite $+2\pi$ ist, wenn es einen Punkt $c(t)$ im Inneren einer Kante gibt, so dass die ganze Kurve auf der Seite von $Jc'(t)$ der Tangentengeraden in $t$ liegt. Der folgende Beweis zeigt, dass dies ebensosehr gilt, wenn es eine Ecke $c(t_i)$ und eine Gerade durch diese Ecke gibt, so dass die Kurve auf der Seite von $T_i^+$ der Geraden liegt; dies kann nur im Fall $\delta_i \geq 0$ vorkommen.

*Beweis.* Die Idee ist die $PC^2$-Kurve zunächst durch $C^1$-Kurven $c_r$ zu approximieren, indem man „die Ecken ausrundet". Falls die Ecke $\delta = 0$ hat, ist nichts zu tun. Anderenfalls benutzt man zum Ausrunden einen beliebig gewählten (kleinen) Kreis, der in der Kreisscheibe vom Radius $r < r_0$ um die Ecke $c(t_i)$ enthalten ist und tangential an die anliegenden Kanten in Punkten $c(t_i^-(r))$ und $c(t_i^+(r))$ ist; dabei ist $t_i^-(r) < t_i < t_i^+(r)$ mit $t_i^\pm(r) \to t_i$ für $r \to 0$. Der tangentiale Kreis liegt links von der Kurve für $\delta \in (0, \pi]$, rechts davon für $\delta \in [-\pi, 0)$.

Ersetzt man $c$ zwischen den beiden Punkten durch das passende Kreissegment, so erhält man eine $C^1$-Kurve $c_r$. Dieses Segment habe einen orientierten Winkel $\alpha_i(r)$, der nicht unbedingt stetig in $r$ sein muss. Allerdings sind für eine $PC^1$-Kurve die Tangentenwinkel in $P(r), Q(r)$ stetige Funktionen von $r$, und daher gilt $\alpha_i(r) \to \delta_i$ für $r \to 0$. Insbesondere ist $\alpha_i(r)$ die Tangentenwinkeldifferenz entlang des Kreissegements, und der Hopfsche Umlaufsatz ergibt daher für die $C^1$-Kurve $c_r$:

$$\sum \bigl(\vartheta(t_{i+1}^-(r)) - \vartheta(t_i^+(r))\bigr) + \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i(r) = \pm 2\pi$$

Wir betrachten $r \to 0$: Die bereits erwähnten Grenzwerte von $t_i^\pm(r)$ und $\alpha_i(r)$ liefern

$$\sum_{i=0}^{\ell} \bigl(\vartheta(t_{i+1}^-) - \vartheta(t_i^+)\bigr) + \sum_{i=0}^{\ell} \delta_i = \pm 2\pi.$$

Die Identität $\vartheta(t_{i+1}^-) - \vartheta(t_i^+) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa(t)\,dt$ mit anschließendem Summieren liefert (6). □

## 2. Konvexe Kurven und Totalkrümmung

2.1. **Konvexität.** Konvexe Mengen $M$ sind durch die Eigenschaft definiert, dass für jedes Paar von Punkten $p, q \in M$ auch die Verbindungsstrecke $\overline{pq}$ in $M$ liegt. Entsprechend könnte man eine geschlossene Kurve konvex nennen, wenn das von ihr berandete Gebiet konvex ist. Vielleicht haben Sie bei dieser Formulierung gar nicht bemerkt, dass sie den Jordanschen Kurvensatz unterstellt. Wir wollen den Satz an dieser Stelle nicht verwenden, und definieren statt dessen:

**Definition.** Eine einfach geschlossene reguläre Kurve $c \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ heißt *konvex*, falls für alle $t \in [0, P)$ gilt: $c$ liegt ganz zu einer Seite der Tangentengerade

$$T_t c := \{c(t) + s c'(t) : s \in \mathbb{R}\}.$$

*Zu einer Seite* heißt dabei, dass eine der beiden offenen Halbebenen, welche als Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus T_t c$ definiert sind, die Kurve nicht schneidet.

Es scheint offensichtlich zu sein, dass dies zur folgenden Bedingung äquivalent ist:

**Lemma 6.** *Ist $c$ konvex, so gilt*

$$\textit{entweder } \bigl\langle c(s) - c(t), N(t)\bigr\rangle \geq 0 \;\textit{ für alle } s, t, \;\textit{ oder } \bigl\langle c(s) - c(t), N(t)\bigr\rangle \leq 0 \;\textit{ für alle } s, t.$$

Die Aussage ist also, dass die Kurve stets auf derselben Seite der Tangente liegt, wenn man mit der Tangentengerade die Kurve umrundet. Dies zeigt ein Stetigkeitsargument:

*Beweis.* Nehmen wir an, die erste Bedingung wäre in $t_+ \in \mathbb{R}$, die zweite in $t_- \in \mathbb{R}$ erfüllt. Für jede der beiden Bedingungen die Menge der Parameter $t \in \mathbb{R}$, für die sie gilt, abgeschlossen ist, folgt: Es existiert $\tau$ zwischen $t_-$ und $t_+$, für das beide Bedingungen zugleich gelten. Also muss $c$ in der Gerade $T_\tau c$ enthalten sein, was wegen der Kompaktheit von $c([0,P])$ und Regularität von $c$ der Geschlossenheit widerspricht. $\square$

Wir wollen konvexe Kurven durch ihre Krümmung charakterisieren; die lokale Variante hatten wir schon in Korollar 1.17 angegeben.

**Satz 7.** *Eine einfache geschlossene reguläre Kurve $c \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ ist genau dann konvex, wenn $\kappa$ nur ein Vorzeichen besitzt.*

Es gilt also entweder $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t$, oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t$. Der Satz wird interessant, wenn man sich vergegenwärtigt, dass er ohne die vorausgesetzte Einfachheit falsch wird: Dazu genügt bereits ein Doppelpunkt und Umlaufzahl $\operatorname{ind}(c) = 2$.

*Beweis.* "$\Rightarrow$" Nach Umparametrisierung liefert die lokale Normalform I(28) von $c(s)$ für $s$ nahe bei $t$

$$\big\langle c(s) - c(t), N(t)\big\rangle = \frac{1}{2}\kappa(t)(s-t)^2 + o((s-t)^2).$$

Nach dem Lemma hat die linke Seite für alle $s,t$ dasselbe Vorzeichen. Also hat $\kappa$ stets dasselbe Vorzeichen.

"$\Leftarrow$" Indirekt, wir führen folgende Aussage zum Widerspruch: $\kappa$ hat ein Vorzeichen und es gibt es einen Kurvenpunkt $c(t_0)$, für den die Kurve zu beiden Seiten der Tangente $T_{t_0}c$ liegt.

Wir parametrisieren die Kurve auf Bogenlänge um und verwenden eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$, so dass gilt $c(t_0) = 0$ und $c'(t_0) = (\pm 1, 0)$. Schreiben wir $c(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, so nimmt nach Annahme $y$ beide Vorzeichen an und wir können, wegen der Kompaktheit von $[0,L]$, Extrema $t_\pm \in [0,L)$ für beide Vorzeichen finden. Dann gilt $y(t_-) \leq y(t) \leq y(t_+)$ für alle $t$ und insbesondere $y(t_-) < y(t_0) < y(t_+)$.

Aus der Extremalität der $y$-Werte, zusammen mit der Bogenlängenparametrisierung, folgt $c'(s_\pm) = (\pm 1, 0)$. Also muss der Tangentenvektor $c'$ für zwei der drei Zeiten $t_0, t_-, t_+$ übereinstimmen. Bezeichnen wir diese beiden Zeiten als $a < b$ in $[0,L)$, so gilt

$$c'(a) = c'(b) = (\pm 1, 0), \quad \text{aber} \quad y(a) \neq y(b). \tag{7}$$

Andererseits betrachten wir den Lift $\vartheta \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ von $\kappa$. Offenbar gilt $\vartheta(a) = \vartheta(b) \bmod 2\pi$. Wegen der Einfachheit von $c$ ist der Hopfsche Umlaufsatz anwendbar, und daher nimmt $\vartheta$ auf $[0,L]$ Werte in einem Intervall der Länge $2\pi$ an. Also gilt $\vartheta(a) = \vartheta(b)$. Nach Annahme hat $\kappa = \vartheta'$ nur ein Vorzeichen. Also ist $\vartheta$ monoton, so dass insgesamt $\vartheta|_{[a,b]} = \text{const}$ gelten muss. Wegen (7) ist diese Konstante entweder 0 oder $\pi$, und damit $y$ auf $[a,b]$ konstant. Aber das bedeutet $y(a) = y(b)$ im Widerspruch zu (7). $\square$

`23. Vorlesung, 18.1.18` ______________________________

Im Falle $n = 2$ kann man neben der Totalkrümmung $k(c)$ einer regulären Kurve $c \in C^2([0,P],\mathbb{R}^2)$ auch die *totale Absolutkrümmung*

$$\int_c |\kappa(s)|\,ds := \int_0^P |\kappa(t)||c'(t)|\,dt$$

betrachten. Offenbar gilt

$$\int_c |\kappa(s)|\,ds \;\geq\; \left|\int_c \kappa(s)\,ds\right| = |k(c)|.$$

Unter den Voraussetzungen des Hopfschen Umlaufsatzes ist $|k(c)| = 2\pi$. Weiterhin hat $\kappa$ nach dem Satz genau dann nur ein Vorzeichen, wenn $c$ konvex ist. Also können wir folgern:

**Korollar 8.** *Bei einer einfachen geschlossenen regulären ebenen Kurve $c \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ erfüllt die totale Absolutkrümmung $\int_c |\kappa(s)|\,ds \geq 2\pi$ mit Gleichheit genau dann, wenn $c$ konvex ist.*

2.2. **Totalkrümmung von Raumkurven.** Es ist eine viel stärkere Aussage, dass auch für Raumkurven die Totalkrümmung die im Korollar formulierte Eigenschaft der totalen Absolutkrümmung ebener Kurven hat:

**Satz 9** (Fenchel 1929)**.** *Für eine einfache geschlossene reguläre Raumkurve $c \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 3$ gilt*

$$\int_c \kappa(s)\,ds \geq 2\pi. \tag{8}$$

*Gleichheit gilt genau dann, wenn* Spur $c$ *in einer Ebene enthalten ist und $c$ darin konvex ist.*

*Beweis.* Wir dürfen annehmen, dass $c$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Wir betrachten dann die (nicht unbedingt reguläre) sphärische Kurve $T := c' \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{S}^{n-1})$. Ihre Länge ist gerade die Totalkrümmung von $c$:

$$L(T) = \int_0^L |T'|\,dt = \int_0^L |c''|\,dt = \int_0^L \kappa\,dt$$

Wäre dies nun $< 2\pi$, so zeigt Aussage $(i)$ des folgenden Lemmas, dass Spur $T$ in einer offenen Hemisphäre von $\mathbb{S}^{n-1}$ liegt. Nach Drehung von $c$ (und damit von $T$) dürfen wir annehmen, dass diese Hemisphäre die nördliche Hemisphäre ist, so dass $T^n(t) > 0$. Dann ergibt aber Integration,

$$0 = c^n(L) - c^n(0) = \int_0^L T^n(t)\,dt > 0, \tag{9}$$

einen Widerspruch, was (8) beweist.

Wir führen die Gleichheitsdiskussion. Aussage $(ii)$ des Lemmas ergibt, dass $\operatorname{Spur} T$ in einer abgeschlossenen Hemisphäre liegt. Wiederum können wir annehmen, dass dies die Hemisphäre $\{x \in \mathbb{S}^{n-1} : x^n \geq 0\}$ ist, so dass nun $T^n(t) \geq 0$. Gleichheit in (9) zeigt aber $T^n \equiv 0$, d.h. $\operatorname{Spur} T$ liegt im Äquator $A := \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : x^n = 0\}$ Also liegt $\operatorname{Spur} c$ im $(n-1)$-dimensionalen Unterraum $\{x^n = 0\}$. Im Fall $n = 3$ ist das bereits die Behauptung. Im Falle $n > 3$ benutzen wir, dass $A$ eine $n-2$-dimensionale Sphäre ist, so dass man das Lemma erneut anwenden kann: Nach Drehung liegt daher $\operatorname{Spur} c$ im Unterraum $\{x^{n-1} = x^n = 0\}$. Durch Induktion ergibt sich die Behauptung.

Um auch die Konvexität im Gleichheitsfall zu zeigen, berücksichtigen wir, dass für eine Kurve in $\mathbb{R}^3$, deren Spur in einer Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ liegt, die Krümmung der Raumkurve mit der Absolutkrümmung als ebene Kurve in $E$ übereinstimmt. Daher zeigt Korollar 8 die Konvexität. $\square$

**Lemma 10.** *Für eine geschlossene Kurve $c \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{S}^{n-1})$, $n \geq 3$, gilt:*
*$(i)$ Ist $L(c) < 2\pi$, so liegt* $\operatorname{Spur} c$ *in einer offenen Hemisphäre von $\mathbb{S}^{n-1}$.*
*$(ii)$ Ist $L(c) = 2\pi$, so liegt* $\operatorname{Spur} c$ *in einer abgeschlossenen Hemisphäre von $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Da die Regularität von $c$ nicht vorausgesetzt ist, schließt die Behauptung auch den Fall ein, dass die Spur ein Polygon aus Großkreisbögen ist.

*Beweis.* Wir wählen zwei Punkte $p, q \in \operatorname{Spur} c$, die $c$ in zwei gleich lange Kurvenstücke $c_1, c_2$ unterteilen, d.h. $L(c_1) = L(c_2) = L(c)/2$. Wir verbinden $p$ und $q$ durch einen Großkreisbogen $\gamma$ mit Endpunkten $p$ und $q$ von der Länge höchstens $\pi$. Wir rotieren $c$, so dass der Mittelpunkt von $\gamma$ gerade der Nordpol $N$ ist. Bezeichnen wir mit $H$ die offene nördliche Hemisphäre, so liegen $\gamma$ und insbesondere $p, q$ in der abgeschlossen Hemisphäre $\overline{H}$.

Wir verwenden nun die Tatsache: *Jede differenzierbare Kurve in $\mathbb{S}^{n-1}$, deren Endpunkte zwei Antipodenpunkte $x$, $-x$ sind, hat mindestens Länge $\pi$, und Länge $> \pi$, wenn die Kurve kein Großkreisbogen ist.* Diese Behauptung folgt bei Verwendung von sphärischen Polarkoordinaten durch Integralabschätzung wie in Satz I.20 (Übungen oder Vorlesung Riemannsche Geometrie).

$(i)$ Aus der angegebenen Tatsache folgern wir zuerst, dass $p, q$ nicht antipodal sind: In diesem Fall wäre $L(c) = L(c_1) + L(c_2) \geq 2\pi$. Also liegen $p, q$ in der offenen nördlichen Hemisphäre $H$.

Wir behaupten $\operatorname{Spur} c_1 \subset H$. Um das zu zeigen, sei $R$ eine 180°-Drehung um den Nordpol, d.h. um die $x^n$-Achse, also $R(x) = (-x^1, \ldots, -x^{n-1}, x^n)$. Nach Annahme gilt $R(p) = q$, so dass die gedrehte Kurve $R(c_1)$ ebenfalls Endpunkte $q, p$ hat. Also stellt $c_1 \cup R(c_1)$ eine geschlossene Kurve $\tilde{c}$ dar mit Länge $L(\tilde{c}) = 2L(c_1) = L(c)$.

Nun argumentieren wir indirekt. Im Fall $\operatorname{Spur} c_1 \not\subset H$ existiert ein Punkt $x \in \operatorname{Spur} c_1$ im Äquator $\partial H$ (Stetigkeit und Zwischenwertsatz). Dann enthält aber $\tilde{c}$ das Paar von Antipodenpunkten $(x, -x)$. Diese Punkte zerlegen die geschlossene Kurve $\tilde{c}$ in ein Paar gleichlanger Kurven, die ebenfalls Bilder voneinander unter der Rotation $R$ sind. Jede dieser beiden Kurven hat Endpunkte $x, -x$, und ist gemäß der Tatsache mindestens $\pi$ lang. Also ist auch $\tilde{c} = c_1 \cup Rc_1$ mindestens $2\pi$ lang, im Widerspruch zur Annahme. Dies zeigt $\operatorname{Spur} c_1 \subset H$. Die gleiche Argumentation auf $c_2$ angewendet zeigt, dass insgesamt gilt $\operatorname{Spur} c \subset H$.

(*ii*) Nun beweisen wir den Gleichheitsfall $L(c) = 2\pi$ durch Fallunterscheidung:
• Falls die Punkte $p, q$ nicht antipodal sind, liegen sie wiederum in einer offenen Hemisphäre $H$. Wir argumentieren dann fast wie zuvor. Wiederum bildet man die geschlossene Kurve $\tilde{c}$, diesmal mit Länge $2\pi$. Man zerlegt sie in zwei Teilkurven zwischen Antipodenpunkten $x, -x$, die laut Tatsache nun Großkreisbögen der Länge $\pi$ sein müssen. Weil sie aber wenigstens einen Punkt aus $H$ enthalten, und zwar $p$ bzw. $q$, müssen sie ganz in $\overline{H}$ enthalten sein. Das zeigt $\tilde{c} \subset \overline{H}$, und wie zuvor gilt dann insgesamt $c \subset \overline{H}$.
• Sind $p, q$ antipodal, so haben die beiden Kurven $c_1$, $c_2$ jeweils Länge $\pi$. Laut Tatsache müssen $c_1$ und $c_2$ Großkreisbögen sein. Die Vereinigung zweier Großkreisbögen mit demselben antipodalen Endpunktepaar liegt aber immer in einer abgeschlossenen Hemisphäre. □

Eine weitere Aussage über die Totalkrümmung geschlossener Raumkurven ist der Satz von Fary-Milnor. Eine geschlossene Kurve $c \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ heißt *verknotet*, wenn sie nur unter Selbstdurchdringung stetig auf einen Kreis deformierbar ist. Für diesen Fall sagt der Satz

$$k(c) = \int_c \kappa(s)\, ds \geq 4\pi.$$

Siehe z.B. [Sp III].

# Teil 5. Satz von Gauß-Bonnet

24. Vorlesung, 23.1.18

Der Satz von Gauß-Bonnet ist das wichtigste Einzelergebnis der Differentialgeometrie von zweidimensionalen Flächen. In seiner globalen Variante, die unser Ziel ist, verknüpft der Satz die differentialgeometrische Größe $\int K\,dA$ mit topologischer Information. In seinem lesenswerten Artikel *All the way with Gauss-Bonnet and the sociology of mathematics* hält D.H. Gottlieb diesen Satz für "what may be the most widely known non-obvious theorem of mathematics".

In diesem Kapitel betrachten wir stets Flächen ($n = 2$) in $\mathbb{R}^m$ mit $m \geq 3$. Die Gauß-Krümmung $K$ ist dann intrinsisch durch III.(13) definiert. Dies stimmt im klassischen Fall $m = 3$ mit der durch Hauptkrümmungen definierten Krümmung $K = \kappa_1\kappa_2$ überein.

## 1. Lokale Version

Die lokale Variante verallgemeinert den Hopfschen Umlaufsatz auf gekrümmte Flächen $S$ mit Rand $\partial S$, die einfach zusammenhängend sind. Die Aussage lautet dann

$$\int_{\partial S} \kappa_{\mathrm{geod}}\, ds + \int_S K\, dA = 2\pi;$$

dabei ist $dA$ das Flächenelment, und $ds$ das Längenelement. Gegenüber dem Satz von Hopf muss man also die Totalkrümmung des Randes $\partial S$ um einen Term korrigieren, der durch die totale Gauß-Krümmung des berandeten Gebietes $S$ gegeben ist. Auf positiv gekrümmten Flächen ist also die Totalkrümmung von $\partial S$ kleiner als $2\pi$, auf negativ gekrümmten größer.

*Beispiel.* Sei $S(r) \subset S^2$ eine sphärische Kappe vom Radius $0 < r < \pi$. Der Breitenkreis $\partial S(r)$ hat die Länge $L(\partial S(r)) = 2\pi \sin r$ (Trigonometrie!) und die geodätische Krümmung $\kappa_{\mathrm{geod}} = \cot r$. Ihr Randintegral $\int_{\partial S(r)} \kappa_{\mathrm{geod}}\, ds = 2\pi \sin r \cot r = 2\pi \cos r$ ist damit stets kleiner als $2\pi$, es verschwindet für den Äquator mit $r = \pi/2$. Tatsächlich stimmt die Differenz zu $2\pi$ überein mit dem Korrekturterm $\int_{S(r)} K\, dA = A(S(r)) = 2\pi(1 - \cos r)$ (Übung).

1.1. **Geodätische Krümmung für Flächen und ihr Lift.** Wir erinnern uns an die Definition der Krümmung für eine reguläre Kurve $c$ in $\mathbb{R}^n$, gegeben in Bogenlängen-Parametrisierung:
- Für $n \geq 3$ ist die Krümmung $\kappa := |c''| \geq 0$.
- Speziell für $n = 2$ kann man die Krümmung mit einem Vorzeichen ausstatten durch $\kappa := \langle Jc', c''\rangle$. Dabei ist $J$ die durch die Orientierung von $\mathbb{R}^2$ gegebene positive 90°-Drehung.

Entsprechend wollen wir auch der geodätischen Krümmung im Fall $n = 2$ ein Vorzeichen geben. Dazu brauchen wir eine 90-Grad-Drehung auf Flächen:

**Definition.** Für ein orientiertes Flächenstück $f \in C^1(U^2, \mathbb{R}^m)$ ist die *$90^\circ$-Drehung* die stetige Abbildung $(p, v) \mapsto J_p v$ für $p \in U$ und $v \in T_p f$ mit folgenden Eigenschaften:

$$v \mapsto J_p v \text{ linear}, \qquad |J_p v|_p = |v|_p, \qquad \langle J_p v, v\rangle = 0 \quad \text{und} \quad (v, J_p v) \text{ positiv orientiert.}$$

Wir betrachten eine Parametrisierung immer als orientierungserhaltend, so dass die positive Orientierung von $v = df(u)$ und $Jv = df(w)$ definiert ist durch $(u, w)$ positiv orientiert in $\mathbb{R}^2$. Im Hyperflächenfall $m = 3$ wird die Orientierung auch oft durch eine Flächennormale $\nu$ definiert (also ohne Rückgriff auf das Parametergebiet), indem man verlangt dass für jedes $v \in T_p f \setminus \{0\}$ die Vektoren $(v, Jv, \nu)$ in $\mathbb{R}^3$ positiv orientiert sind.

Wir werden $J$ auf zweierlei Weisen einsetzen:
- Ist $c$ Kurve, so ist $Jc'$ ein Tangentialvektor der Fläche, der normal auf der Kurve $c$ steht.
- Ist $E$ ein Einheitsvektorfeld auf dem Bild der Fläche, so liefert $(E, JE)$ einen orientierten orthonormalen Rahmen.

Sei $c = f \circ \gamma$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Flächenkurve. Ableiten der Bedingung $|c'| \equiv 1$ ergibt dann, wie für ebene Kurven,

$$(1) \qquad 0 = \frac{d}{dt}|c'|^2 = 2\langle c'', c'\rangle \quad \Leftrightarrow \quad c'' \perp c' \quad \Leftrightarrow \quad \Pi(c'') \parallel Jc'.$$

Wir können daher wie für ebene Kurven definieren:

**Definition.** Sei $f \in C^2(U^2, \mathbb{R}^m)$ zweidimensionales Flächenstück. Dann hat eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c = f \circ \gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^m)$ die *(orientierte) geodätische Krümmung*

$$\kappa_{\text{geod}} \colon I \to \mathbb{R}, \qquad \kappa_{\text{geod}}(t) := \big\langle J_{\gamma(t)} c'(t), c''(t)\big\rangle = \big\langle J_{\gamma(t)} c'(t), \Pi_{\gamma(t)}(c''(t))\big\rangle.$$

Der Betrag der so im Spezialfall $n = 2$ definierten orientierten geodätischen Krümmung stimmt mit der zuvor definierten (unorientierten) geodätischen Krümmung $|\Pi(c'')|$ überein: In der Tat ist laut (1) die Komponente von $c''$ in Richtung $Jc'$ gerade $\Pi(c'')$, so dass $|\kappa_{\text{geod}}| = |\langle Jc', \Pi(c'')\rangle| = |Jc'||\Pi(c'')| = |\Pi(c'')|$. Weiterhin verallgemeinert sich die für reguläre ebene Kurven gegebene Krümmungsformel I(8) wörtlich (Übung).

Für nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurven hatten wir den Tangentialvektor in der Form $c' = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ geschrieben, um für die orientierte Krümmung $\kappa = \vartheta'$ zu erhalten. Wir imitieren das nun für Flächenkurven:

**Lemma 1.** *Sei $f \in C^2(U^2, \mathbb{R}^m)$ parametrisierte Fläche, $c = f \circ \gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Flächenkurve, und $E \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ mit $E(t) \in T_{\gamma(t)} f$ ein Einheitsvektorfeld längs $c$.*
*(i) Dann gibt es eine stetige Funktion $\vartheta_E \in C^0(I, \mathbb{R})$, so dass*

$$c' = \cos\vartheta_E\, E + \sin\vartheta_E\, JE. \tag{2}$$

*(ii) Für $c \in C^2(I, \mathbb{R}^m)$ gilt weiter*

$$\kappa_{geod} = \vartheta_E' + \langle JE, E' \rangle. \tag{3}$$

*Beweis.* (*i*) Weil $(E, JE)$ Basis ist, gilt $c' = aE + b\,JE$ mit Funktionen $a, b \in C^0(I, \mathbb{R})$. Wegen $|c'|^2 = |aE + bJE|^2$ folgt aus der Orthonormalität der Basis dann $1 = a^2 + b^2$, d.h. $(a, b)\colon I \to \mathbb{S}^1$. Das Liftungslemma I.4 liefert eine Darstellung $(a, b) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ der gewünschten Form.

(*ii*) Um $\langle Jc', c'' \rangle$ zu berechnen, beachten wir zunächst $Jc' = \cos\vartheta_E\, JE - \sin\vartheta_E\, E$ und

$$c'' = \frac{d}{dt}\big(\cos\vartheta_E\, E + \sin\vartheta_E\, JE\big) \;=\; \vartheta_E' Jc' \;+\; \cos\vartheta_E\, E' + \sin\vartheta_E\, (JE)'.$$

Dies ergibt

$$\kappa_{\text{geod}} = \big\langle Jc', c'' \big\rangle = \vartheta_E' + \big\langle -\sin\vartheta_E\, E + \cos\vartheta_E\, JE,\; \cos\vartheta_E\, E' + \sin\vartheta_E\, (JE)' \big\rangle.$$

Wir benutzen nun $|E| = |JE| \equiv 1$ und $\langle E, JE \rangle \equiv 0$. Ableiten ergibt:

$$\langle E, E' \rangle = \langle JE, (JE)' \rangle = 0, \qquad \langle E, (JE)' \rangle = -\langle E', JE \rangle$$

Daraus folgt $\kappa_{\text{geod}} = \vartheta_E' - \sin^2\vartheta_E\, \langle E, (JE)' \rangle + \cos^2\vartheta_E\, \langle JE, E' \rangle = \vartheta_E' + \langle JE, E' \rangle$, also (3). □

Ist speziell ein Feld $Z$ parallel längs $c$, so gilt $\langle JZ, Z' \rangle = \langle JZ, \Pi Z' \rangle = 0$ und (3) reduziert sich auf

$$\kappa_{\text{geod}} = \vartheta_Z', \tag{4}$$

genau wie für ebene Kurven. Um das Integral von (3) längs $c$ berechnen zu können, betrachten wir eine spezielle Parametrisierung:

**Definition.** Ein Flächenstück $f \in C^1(U^n, \mathbb{R}^m)$ heißt *orthogonale Parametrisierung*, wenn $G$ diagonal ist.

Beispiele orthogonaler Koordinaten, sind Polar- und Kugelkoordinaten außerhalb der Pole. Beachten Sie, dass die Orthogonalität nicht bedeutet, dass die Parametrisierung konform (winkelerhaltend) ist: Nur die Koordinatenlinien stehen rechtwinklig aufeinander.

Im Spezialfall $n = 2$ bedeutet die Orthogonalität $g_{12} = g_{21} \equiv 0$. Wir ermitteln nun den Tangentenwinkel $\vartheta$ der Kurve $c$ relativ zu einer Koordinatenrichtung einer orthogonalen Parametrisierung:

**Lemma 2.** *Es sei $f \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$ orthogonale Parametrisierung und $c = f \circ \gamma$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Flächenkurve. Bezüglich des Einheitsvektorfeldes in der ersten Koordinatenrichtung,*

$$E(t) := \frac{\partial_1 f\big(\gamma(t)\big)}{\sqrt{g_{11}(\gamma(t))}}$$

*sei $\vartheta_E(t)$ der in (2) definierte Tangentenwinkel von $c$. Dann gilt für alle $t \in I$*

$$\kappa_{geod} = \vartheta_E' + \frac{1}{2\sqrt{\det g}}\big(\gamma'^2 \partial_1 g_{22} - \gamma'^1 \partial_2 g_{11}\big) = \vartheta_E' + \big\langle N, X\big\rangle, \tag{5}$$

*wobei in der zweiten Schreibweise $N := J\gamma' = (-\gamma'^2, \gamma'^1)$ die Kurvennormale an $\gamma$ ist und*

$$X \in C^1(U, \mathbb{R}^2), \qquad X := \frac{-1}{2\sqrt{\det g}} \begin{pmatrix} \partial_1 g_{22} \\ \partial_2 g_{11} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

*Dabei sind in (5) die Aussdrücke $\det g$, $\partial g$, $X$ jeweils in $\gamma$ auszuwerten.*

Die Schreibweise der rechten Seite von (5) wird es uns ermöglichen, den Divergenzsatz im Parametergebiet anzuwenden.

*Beweis.* Um das Ergebnis aus (3) zu folgern, müssen wir $\langle JE, E'\rangle$ berechnen. Wegen der Orthogonalität der Parametrisierung ist $JE = \partial_2 f/\sqrt{g_{22}}$. Wir erhalten

$$\langle JE, E'\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\,\partial_2 f,\ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\,\big(\partial_{11} f\,\gamma'^1 + \partial_{12} f\,\gamma'^2\big) + \Big(\frac{1}{\sqrt{g_{11}\circ\gamma}}\Big)'\,\partial_1 f \right\rangle,$$

wobei wir die Abhängigkeit von $\gamma$ an den meisten Stellen unterdrückt haben.

Wegen der Orthogonalität kann man den letzten Summanden streichen. Um die verbleibenden Terme auszumultiplizieren, stellen wir als Konsequenz der Orthogonalität fest:

$$0 = \partial_1 g_{12} = \partial_1\langle \partial_1 f, \partial_2 f\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \partial_2 f, \partial_{11} f\rangle = -\langle \partial_{21} f, \partial_1 f\rangle = -\frac{1}{2}\partial_2 g_{11}$$

Weiter ergibt sich $\partial_1 g_{22} = \partial_1\langle \partial_2 f, \partial_2 f\rangle = 2\langle \partial_2 f, \partial_{12} f\rangle$. Einsetzen in (3) liefert wegen $\det g = g_{11} g_{22}$ die Behauptung. □

*Bemerkung.* Alle bisher gemachten Betrachtungen gehören zur inneren Geometrie. Um sich das klar zu machen, definiert man auch die Riemannsche 90-Grad-Drehung $J^U$ auf dem Urbild durch $Jdf(v) = df(J^U v)$. Als intrinsische Größe lautet die geodätische Krümmung einer Fläche dann

$$\kappa_{\text{geod}} = \big\langle Jc', \Pi(c'')\big\rangle = g\big(J^U\gamma',\, \nabla_{\gamma'}\gamma'\big).$$

Weiter definiert man sich im Urbild das $g$-Einheitsvektorfeld $e$ mit $df(e) = E$, so dass $\gamma' = \cos\vartheta\, e + \sin\vartheta\, J^U e$ und $\langle JE, E'\rangle = \big\langle JE, \Pi(E')\big\rangle = g\big(J^U e, \nabla_{\gamma'} e\big)$.

`25. Vorlesung, 25.1.18` ___

### 1.2. Gauß-Krümmung für orthogonale Koordinaten.

**Satz 3.** *Für eine orthogonale Parametrisierung $f \in C^3(U^2, \mathbb{R}^m)$ gilt auf $U$*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{\det g}}\left(\partial_1\Big(\frac{\partial_1 g_{22}}{\sqrt{\det g}}\Big) + \partial_2\Big(\frac{\partial_2 g_{11}}{\sqrt{\det g}}\Big)\right) = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\operatorname{div} X, \tag{7}$$

*wobei $X$ in* (6) *definiert ist.*

Damit haben wir für die Anwendung des Divergenzsatzes die passende Form von $K$ erhalten.

*Beweis.* Wir wollen $K$ aus Christoffel-Symbolen ausrechnen. Weil mit $G$ auch die inverse Matrix $G^{-1} = \begin{pmatrix} 1/g_{11} & 0 \\ 0 & 1/g_{22} \end{pmatrix}$ diagonal ist, entfällt in der Formel für die Christoffel-Symbole jeweils einer der beiden Summanden:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kk}\big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\big).$$

Also erhalten wir

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11}\partial_1 g_{11}, \qquad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} g^{22}\partial_2 g_{11}, \qquad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11}\partial_2 g_{11},$$

und weiter, durch Vertauschen der Indizes $(1 \leftrightarrow 2)$,

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22}\partial_2 g_{22}, \qquad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} g^{11}\partial_1 g_{22}, \qquad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22}\partial_1 g_{22}.$$

Die Gauß-Gleichung, in der Form von III(13), lautet für eine orthogonale Parametrisierung

$$g^{11} K \det g = \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1.$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} g^{11} K \det g = &-\frac{1}{2}\partial_1 g^{11}\,\partial_1 g_{22} - \frac{1}{2} g^{11}\partial_{11} g_{22} - \frac{1}{2}\partial_2 g^{11}\,\partial_2 g_{11} - \frac{1}{2} g^{11}\partial_{22} g_{11} \\ &- \frac{1}{4} g^{11}\partial_1 g_{22}\, g^{11}\partial_1 g_{11} - \frac{1}{4} g^{11}\partial_2 g_{11}\, g^{11}\partial_2 g_{11} + \frac{1}{4} g^{22}\partial_2 g_{22}\, g^{11}\partial_2 g_{11} + \frac{1}{4} g^{22}\partial_1 g_{22}\, g^{11}\partial_1 g_{22}. \end{aligned}$$

Wir beachten $\partial_i g^{11} = \partial_i(1/g_{11}) = -\partial_i g_{11}/g_{11}^2 = -(g^{11})^2 \partial_i g_{11}$ und erhalten daher nach Kürzen von $g^{11}$:

$$\begin{aligned} K \det g &= \frac{1}{2} g^{11}\partial_1 g_{11}\partial_1 g_{22} - \frac{1}{2}\partial_{11} g_{22} + \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{11})^2 - \frac{1}{2}\partial_{22} g_{11} \\ &\qquad - \frac{1}{4} g^{11}\partial_1 g_{22}\partial_1 g_{11} - \frac{1}{4} g^{11}(\partial_2 g_{11})^2 + \frac{1}{4} g^{22}\partial_2 g_{22}\partial_2 g_{11} + \frac{1}{4} g^{22}(\partial_1 g_{22})^2 \\ &= \underline{\frac{1}{4} g^{11}\partial_1 g_{11}\partial_1 g_{22}} - \underline{\frac{1}{2}\partial_{11} g_{22}} + \frac{1}{4} g^{11}(\partial_2 g_{11})^2 - \frac{1}{2}\partial_{22} g_{11} + \frac{1}{4} g^{22}\partial_2 g_{22}\partial_2 g_{11} + \underline{\frac{1}{4} g^{22}(\partial_1 g_{22})^2} \end{aligned}$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen haben wir den ersten und fünften, sowie den dritten und sechsten Term zusammengefasst.

Andererseits berechnen wir den ersten Summanden der Behauptung:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\sqrt{\det g}}\partial_1\Big(\frac{\partial_1 g_{22}}{\sqrt{\det g}}\Big) &= -\frac{1}{2\sqrt{\det g}}\frac{\partial_{11}g_{22}\sqrt{\det g}-\frac{1}{2}\frac{\partial_1(\det g)}{\sqrt{\det g}}\partial_1 g_{22}}{\det g} \\
&= -\frac{1}{2\det g}\partial_{11}g_{22}+\frac{1}{4\det^2 g}\big((\partial_1 g_{11})g_{22}+g_{11}\partial_1 g_{22}\big)\partial_1 g_{22}
\end{aligned}
$$

Wir erkennen hierin genau die drei in der vorletzten Formel unterstrichenen Terme wieder, jedenfalls, wenn wir dabei z.B. $g_{11}/\det g = 1/g_{22} = g^{22}$ beachten. Der andere Summand der Behauptung ensteht aus dem Ergebnis durch die Index-Vertauschung $1 \leftrightarrow 2$. Weil die drei nicht unterstrichenen Terme sich ebenfalls durch Index-Vertauschung aus den unterstrichenen ergeben, ist damit (7) gezeigt. □

**Korollar 4.** *Es sei $f \in C^3(U^2,\mathbb{R}^m)$ konform parametrisiert, d.h. es sei $g = \lambda^2\delta$ mit $\lambda \in C^2(U^2,(0,\infty))$. Dann gilt*

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\Delta(\log\lambda).$$

*Beweis.* Wegen

$$-\frac{1}{\lambda^2}\partial_{11}(\log\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\partial_1\big(\frac{1}{\lambda}\partial_1\lambda\big) = -\frac{1}{\lambda^2}\partial_1\Big(\frac{1}{2\lambda^2}\partial_1(\lambda^2)\Big) = -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\,\partial_1\Big(\frac{1}{2\sqrt{\det g}}\partial_1 g_{22}\Big)$$

und analog mit vertauschten Indices folgt die Behauptung aus (7). □

1.3. **Satz von Bonnet.** Wir haben alle Formeln beisammen, um die erste Variante des Satzes von Gauß-Bonnet mit Hilfe des Divergenzsatzes zu beweisen.

**Satz 5** (Bonnet)**.** *Sei $f \in C^3(U^2,\mathbb{R}^m)$ ein Flächenstück in orthogonaler Parametrisierung, d.h. $g_{12}\equiv 0$. Es sei $S \subset U$ eine einfach zusammenhängende kompakte Menge, deren Rand durch eine geschlossene reguläre Kurve $\gamma \in C^2(\mathbb{R},U)$ in positivem Sinne parametrisiert wird. Dann gilt*

$$\int_S K\,dA = 2\pi - \int_{\partial S}\kappa_{geod}\,ds.$$

Dabei soll der *positive Sinn* von $\gamma$ bedeuten, dass der Vektor $N := (-\gamma'^2,\gamma'^1)/|\gamma'|$ eine innere Normale an $S$ ist, d.h. dass

für alle $t$ und für alle kleinen $s>0$ gilt $t\mapsto c(t)-sN(t)\in S$.

*Beweis.* Bezüglich der Parametrisierung lautet das Flächenelement $dA = \sqrt{\det g}\,dxdy$. und die innere Normale $N$ an $\gamma$. Anwendung des Divergenzsatzes bei (*) auf das Vektorfeld $X$

ergibt

$$
(8) \qquad \begin{aligned}
\int_S K\, dA &= \int_S K \sqrt{\det g}\, dxdy \overset{(7)}{=} \int_S \operatorname{div} X\, dxdy \\
&\overset{(*)}{=} \int_{\partial S} \langle X, -N \rangle\, ds \overset{(5)}{=} \int_0^L \vartheta_E'(t)\, dt - \int_0^L \kappa_{\text{geod}}(t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Es bleibt zu zeigen $\int_0^L \vartheta_E'(t)\, dt = 2\pi$. Falls $g$ die Standardmetrik $\delta$ ist, ist das genau die Aussage des Hopfschen Umlaufsatzes, wobei wir den positiven Durchlaufsinn beachten. Im allgemeinen Fall vergleichen wir den Riemannschen Tangentenwinkel $\vartheta$ von $\gamma$ (also den Winkel von $c$) mit dem Tangentenwinkel $\vartheta_\delta$, den $\gamma$ in $U$ macht. Die Behauptung folgt dann aus folgenden Tatsachen:

- Es gilt $\vartheta_\delta(L) - \vartheta_\delta(0) = 2\pi$ (Hopf).
- Es ist $\vartheta_E(L) - \vartheta_E(0)$ kongruent 0 modulo $2\pi$, denn $\gamma$ ist geschlossen.
- Es ist $|\vartheta_E - \vartheta_\delta| < \pi/2$ für eine orthogonale erste Fundamentalform $g$.

In der Tat folgt daraus $\int_0^P \vartheta_E' = \int_0^P \vartheta_\delta' = 2\pi$. □

*Bemerkungen.* 1. Wie immer im zweidimensionalen Fall kann man statt des Gaußschen Satzes genausogut den Greenschen Satz auf das Vektorfeld $(-X_2, X_1)$ anwenden. 2. Die Orientierung des gewählten Flächenstücks geht durch die gewählte Parametrisierung ein (welche Konsequenz hat die Ersetzung von $f(x, y)$ durch $f(x, -y)$?).

Wir wollen den Satz von Bonnet als eine Aussage über Parallelverschiebung deuten. Dazu sei $f \in C^2(U^2, \mathbb{R}^m)$ beliebige Parametrisierung und $c = f \circ \gamma \colon I \to \mathbb{R}^m$ eine Kurve in Bogenlängen-Parametrisierung. Weiterhin sei $E$ ein auf der ganzen parametrisierten Fläche $f$ definiertes Einheitsfeld, und $Z$ ein paralleles Feld entlang von $c$, d.h. $Z(t) \in T_{\gamma(t)} f$. Längs $c$ ist der orientierten Winkel von $E$ zum Parallelfeld $Z$ auf $I$ erklärt. So wie in (2) können wir diesen Winkel liften; das Ergebnis sei $\angle(E, Z) \colon I \to \mathbb{R}$. Für eine geschlossene Kurve der Periode $P$ erhalten wir eine charakteristische Größe, wenn wir einem Umlauf betrachten. In dieser Situation verwenden wir den folgenden Begriff:

**Definition.** Die *Holonomie* von $c$ ist die Zahl

$$
(9) \qquad \operatorname{Hol}(c) := \angle(E, Z)(P) - \angle(E, Z)(0).
$$

Natürlich kann man statt eines Einheitsvektorfeldes $E$ auch jedes beliebige Vektorfeld $V$ ohne Nullstelle wählen und $E = V/|V|$ setzen, bzw. den Winkel direkt gegen $V$ messen.

*Beispiele.* 1. Für kleine Breitenkreise in $\mathbb{S}^2$ ist die Holonomie fast 0. Sie erreicht $\pm 2\pi$ für den Äquator (blicken Sie von oben auf die obere Halbkugel!). Dabei hängt das Vorzeichen von der angenommenen Orientierung ab.

2. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist $Z$ konstant. Wählt man auch $E$ konstant, so sieht man $\operatorname{Hol}(c) = 0$

für jede geschlossene Kurve. Wegen der Unabhängigkeit von $\mathrm{Hol}(c)$ von $E$, die wir gleich noch zeigen, gilt das für jedes Einheitsfeld $E$.

3. Für einen Kreisring $A \subset \mathbb{R}^2$ hängt die Holonomie von der Wahl von $E$ ab: Ein konstantes Feld liefert $\mathrm{Hol}(c) = 0$, das Feld $E(x) = x/|x|$ liefert $\mathrm{Hol}(c) = -2\pi$.

Wir kommen zur angekündigten Deutung des Satzes von Bonnet als einer Aussage über Holonomie. Die Aussage ist zugleich Kern der Charakterisierung des Krümmungsbegriffs in höherer Dimension:

**Korollar 6.** *Berandet eine Kurve $c$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet $S$ in einer orthogonal parametrisierten Fläche, so erfüllt ihre Holonomie*

$$\mathrm{Hol}(c) = \int_S K\, dA. \tag{10}$$

Insbesondere hängt $\mathrm{Hol}(c)$ nicht von $Z$ und $E$ ab.

*Beweis.* Mit passenden stetigen Liftungen der orientierten Winkel zwischen den drei Vektoren $E, c', Z$ gilt

$$\angle(E, Z) = \angle(E, c') + \angle(c', Z) = \angle(E, c') - \angle(Z, c') = \vartheta_E - \vartheta_Z.$$

Bei Bogenlängen-Parametrisierung ist nach (4) die Ableitung der rechten Seite gerade $\vartheta_E' - \kappa_{\mathrm{geod}}$. Integration ergibt

$$\mathrm{Hol}(c) = \int_0^L (\angle(E, Z))'\, dt = \int_0^L (\vartheta_E' - \kappa_{\mathrm{geod}})\, dt \overset{(8)}{=} \int_S K\, dA.$$

□

`26. Vorlesung, 30.1.18` ___

Es bleibt noch nachzuweisen, dass die gestellte Bedingung einer orthogonalen Parametrierung stets erfüllt werden kann, jedenfalls lokal:

**Satz 7.** *Sei $f \in C^2(U^2, \mathbb{R}^m)$ Flächenstück und $p \in U$. Dann gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von $p$ und einen Diffeomorphismus $\varphi\colon \tilde{V}^2 \to V$, so dass $\tilde{f} := f \circ \varphi \in C^2(\tilde{V}^2, \mathbb{R}^m)$ orthogonal parametrisiert ist.*

Jeder Punkt einer Fläche besitzt also eine Umgebung, auf der der Satz von Bonnet gilt.

*Beweis.* `gegenüber Vorlesung vereinfacht`
Wir suchen zwei Familien paarweise orthogonaler Kurven. Als eine Familie wählen wir die $x$-Linien der Parametrisierung $f$. Darauf senkrechte Kurven konstruieren wir nun als Integralkurven. Orthogonal auf $\partial_1 f = df(e_1)$ steht $J(\partial_1 f)$; insbesondere sind diese beiden Felder linear unabhängig. Weil $f$ Immersion ist, können wir $J(\partial_1 f) = df(X)$ schreiben. In $U$ sind dann die $g$-orthogonalen Felder $e_1, X$ linear unabhängig, d.h. $X^2 \neq 0$.

Integralkurven von $X$ zu Anfangswerten $(x,0)$ stehen senkrecht auf den $x$-Linien. Damit aber für jedes $y$ die Familie dieser Kurven eine $x$-Linie parametrisiert, skalieren wir das Feld $X$ um. Wir betrachten $Y := X/X^2 = (X^1/X^2, 1)$ und erhalten für $|t|$ klein eine Lösung $t \mapsto \varphi(x,t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) = Y(\varphi(x,t)) \quad \text{mit} \quad \varphi(x,0) = (x,0) \qquad \text{für } (x,0) \in U.$$

Für die zweite Komponente von $\varphi$ gilt offenbar $(\varphi^2)' = Y^2 = 1$, wegen des Anfangswertes folgt $\varphi^2(x,y) = y$; insbesondere gilt $\partial_1\varphi^2 = 0$. Daher folgt für $\tilde{f}(x,y) = f(\varphi(x,y))$

$$\partial_1\tilde{f} = \partial_1 f\; \partial_1\varphi^1 \parallel \partial_1 f$$

und weiterhin

$$\partial_2\tilde{f} = df(\partial_2\varphi) = df(Y) = \frac{1}{X^2}df(X) = \frac{1}{X^2}J(\partial_1 f).$$

Also ist $\tilde{f}$ orthogonal.

Die Abbildung $\varphi(x,y)$ ist in einer Umgebung von $p = 0$ definiert. Sie ist ein lokaler Diffeomorphismus: Die Bijektivität folgt aus der Eindeutigkeit von Integralkurven, die Differenzierbarkeit von der differenzierbaren Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen vom Parameter $x$. Weil die Umkehrabbildung als Lösung der Differentialgleichung für $-Y$ entsteht, ist sie ebenfalls differenzierbar. □

Im Spezialfall, dass $f$ ein Flächenstück in $\mathbb{R}^3$ ist und $p$ kein Nabelpunkt (d.h. es gilt $\kappa_1 \neq \kappa_2$), gibt es genau zwei orthogonale Krümmungslinien durch jeden Punkt und man kann wie im Beweis vorgehen. Tatsächlich erhält man dann eine orthogonale Parametrisierung sogar auf dem ganzen einfach zusammenhängenden nabelpunktfreien Gebiet.

*Bemerkung.* Wir haben orthogonale Koordinaten eingesetzt, um die Formel (7) für die Gauß-Krümmung zu gewinnen. Der Beweis der Formel durch Auswertung der Gauß-Gleichung ist mühsam. Zudem erfordert unser Zugang den Beweis des lokalen Existenzsatzes 7 für orthogonale Koordinaten auf Flächen, der ebenfalls nicht elegant ist. Tatsächlich kann man sich diese beiden Schritte sparen, wenn man konzeptionell etwas aufwendiger arbeitet, indem man Differentialformen benutzt.

Dazu betrachtet man sogenannte bewegte orthogonale Rahmen *[moving frame]*. Sie existieren im Falle beliebiger Dimension, wie der Satz von Gram-Schmidt zeigt. Analog zu den Gauß- und Codazzi-Gleichungen ergeben sich für einen solchen Rahmen die sogenannten Strukturgleichungen von Maurer-Cartan als Gleichungen von Differentialformen. Speziell für Flächen kann man dann den Stokeschen Satz für Differentialformen anstelle des Divergenzsatzes einsetzen, um analog zu (8) den Satz von Bonnet zu beweisen. Siehe z.B. die Darstellung bei [Kü] oder meine Vorlesung Riemannsche Geometrie (Komplettversion).

## 2. Globale Version

Die globale Version des Satzes bezieht sich auf kompakte Flächen. Sie werden trianguliert, und der Satz von Bonnet wird auf jedes Dreieck angewendet. Da ein Dreieck Ecken besitzt, benötigen wir hierfür eine Verallgemeinerung des Satzes von Bonnet auf den Fall von Randkurven mit Ecken.

2.1. **Lokale Version bei stückweise differenzierbarem Rand.** Im Beweis des Satzes von Bonnet hatten wir den Umlaufsatz auf den Riemannschen Tangentenwinkel $\vartheta$ anstelle auf den Winkel $\vartheta_\delta$ in $U$ angewendet. Auch im verallgemeinerten Fall mit Ecken ist dies nötig. Wir halten dies als separate Aussage fest, geben aber diesmal einen anderen Beweis.

**Satz 8.** *Sei $f$ parametrisiertes Flächenstück $f$ und $E = df(e)$ ein Einheitsvektorfeld. Für jede geschlossene $PC^2$-Kurve $\gamma$, die eine einfach zusammenhängende Menge $S \subset U$ positiv berandet und Bogenlängen-Parametrisierung hat,*

$$\int_0^L \vartheta_E'(t)\,dt = 2\pi - \sum_{i=0}^{\ell} \delta_i^g. \tag{11}$$

*Dabei ist $\vartheta_E$ ein Lift des Riemannschen Tangentenwinkels von $\gamma'$ gegenüber dem Einheitsfeld $e$ und $\delta_i^g$ der Riemannsche Außenwinkel (bzgl. $g$ gemessen).*

*Beweis.* Wir führen eine intrinsisch definierte Konstruktion durch. Es sei

$$g^s := sg + (1-s)\langle .,. \rangle, \qquad s \in [0,1]$$

eine Homotopie von der Standardmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zur ersten Fundamentalform (Riemannschen Metrik) $g$. Dann ist auch $g^s$ ein Skalarprodukt, also eine positiv definite Bilinearform (Übung). Je zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ schliessen einen mod $2\pi$ definierten orientierten Winkel $\alpha^s(v,w)$ ein, der die Identität erfüllt

$$\cos \alpha^s(v,w) = \frac{g^s(v,w)}{\sqrt{g^s(v,v)}\,\sqrt{g^s(w,w)}}\,.$$

Dieser Winkel besitzt wiederum einen stetigen Lift nach $\mathbb{R}$. Wir wählen einen Lift $\vartheta_E^s$ des Winkels $\alpha^s(\gamma', e)$ zwischen der Randtangente $\gamma'$ und dem auf $U$ definierten Einheitsfeld $e$; er sei so gewählt, dass er für alle $s$ an einer Stelle von $\gamma$ mit $\gamma' = E$ übereinstimmt.

Es sei

$$f(s) := \int_0^L (\vartheta_E^s)'(t)\,dt + \sum_{i=0}^{\ell} \delta_i^{g^s}.$$

Einerseits ist für eine geschlossene Kurve $\vartheta_E^s(P) = \vartheta_E^s(0)$ mod $2\pi$, so dass diese Funktion nur diskrete Werte annimmt, andererseits ist sie stetig in $s$. Demnach hat sie für $\vartheta_1 = \vartheta^g$ denselben Wert $\pm 2\pi$ wie für $\vartheta^0 = \vartheta_\delta$. $\square$

Wir benötigen die Verallgemeinerung des Satzes von Bonnet für Dreiecke. Dafür präzisieren wir:

**Definition.** ($i$) Ein *Dreieck* in einem Flächenstück ist eine kompakte Menge $\Delta \subset U$ homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe, deren Rand $\partial\Delta$ durch eine reguläre $PC^2$-Kurve mit drei Kanten und drei Ecken parametrisiert wird.
($ii$) In einer Ecke ist der *Innenwinkel* durch $\pi - \delta \in [0, 2\pi]$ gegeben, wobei $\delta$ der Riemannsche Außenwinkel ist.
($iii$) Das Dreieck ist *geodätisch*, wenn jede Kante geodätisch ist.

Wir können nun den Satz von Gauß-Bonnet in der lokalen Version mit Ecken angeben:

**Satz 9.** ($i$) [Bonnet 1848] *Sei $f \in C^3(U^2, \mathbb{R}^m)$ ein Flächenstück in orthogonaler Parametrisierung, d.h. $g_{12} \equiv 0$. Es sei $S \subset U$ eine einfach zusammenhängende kompakte Menge, deren Rand durch eine geschlossene reguläre Kurve $\gamma \in PC^2([0, L], U)$ in positivem Sinne parametrisiert wird. Dann gilt*

$$\int_S K\,dA = 2\pi - \int_{\partial S} \kappa_{geod}\,ds - \sum_{i=0}^{\ell} \delta_i^g. \tag{12}$$

($ii$) [Gauß, theorema elegantissimum, 1825 (unveröffentlicht)]
*Insbesondere gilt für ein geodätisches Dreiecks $\Delta$ mit Innenwinkeln $\alpha, \beta, \gamma$:*

$$\int_\Delta K\,dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi \tag{13}$$

Die rechte Seite von (13) bezeichnet man auch als *Winkelexzess [angle excess]*: Sie gibt an, um wieviel die Innenwinkelsumme den euklidischen Fall übertrifft.

*Beispiele.* 1. Betrachten wir ein rechtwinkliges und gleichseitiges (geodätisches) Dreieck in $\mathbb{S}^2$, das einer Oktaeder-Fläche entspricht. Die rechte Seite von (12) oder (13) ist offenbar $\pi/2$, die linke stimmt mit dem Inhalt $A(\mathbb{S}^2)/8 = \pi/2$ überein. Entsprechend bestätigt das Ikosaeder die Formeln: Der sphärische Inhalt eines Dreiecks ist $4\pi/20 = \pi/5$, und damit gleich dem Winkelexzess $3 \cdot 2\pi/5 - \pi = \pi/5$.
2. Durch welche Zahl wird der Inhalt eines hyperbolischen geodätischen Dreiecks beschränkt?

*Beweis.* ($i$) Wir modifizieren den Beweis des Satzes 5. Wir behaupten, dass sämtliche Identitäten von (8) gelten. Tatsächlich gilt der Divergenzsatz auch für Gebiete mit Ecken (wovon man sich anschaulich durch Approximation überzeugt), und (5) gilt ebenfalls in der Situation mit Ecken. Wiederum ersetzen wir $\int_0^L \vartheta_E'(t)\,dt$, indem wir den Hopfschen Umlaufsatz einsetzen, im vorliegenden Fall jedoch in der Form (11).

($ii$) Für ein geodätisches Dreieck ist $\int_{\partial\Delta} \kappa_{\text{geod}} = 0$ und daher ergibt ($i$), wie gewünscht:

$$\int_\Delta K\,dA \;=\; 2\pi - \sum \delta_i^g = 2\pi - (\pi-\alpha) - (\pi-\beta) - (\pi-\gamma) \tag{14}$$

□

Analog zu Dreiecken kann man auch geodätische Zweiecke $Z$ mit Innenwinkeln $\alpha, \beta$ definieren und erhält:

$$\int_Z K\,dA = 2\pi - \sum \delta_i^g = 2\pi - (\pi-\alpha) - (\pi-\beta) = \alpha+\beta$$

In $\mathbb{S}^2$ haben Zweiecke stets antipodale Ecken und gleiche Winkel $\alpha = \beta$; daher stimmt tatsächlich $\int_Z K\,dA = A(Z) = A(\mathbb{S}^2)\cdot\alpha/(2\pi) = 4\pi\alpha/(2\pi)$ mit $2\alpha$ überein.

`27. Vorlesung, 1.2.18`

---

Die lokale Version des Satzes von Gauß-Bonnet hat interessante Folgerungen:

**Korollar 10.** ($i$) *Hat ein Flächenstück konstante Krümmung $K$, so ist der Winkelexzess von geodätischen Dreiecken proportional zum Inhalt.*
($ii$) *Ein einfach zusammenhängendes Flächenstück mit nicht-positiver Krümmung $K \le 0$, besitzt keine geodätischen Zweiecke. Insbesondere sind Geodätische zwischen zwei Punkten eindeutig in dem Sinne, dass sie dieselbe Spur haben.*

2.2. **Globale Flächen.** Wir benötigen den Begriff einer globalen Fläche. Dazu zitieren wir die folgenden Aussagen aus der Analysis-Vorlesung.

Eine $n$-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist eine zusammenhängende Menge, so dass für jedes $p \in M$ eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ existiert und eine Funktion

$$\psi \in C^1(V, \mathbb{R}^k) \quad \text{mit} \quad M \cap V = \{x \in V : \psi(x) = 0\},$$

wobei 0 ein regulärer Wert von $\psi$ ist, d.h. es gilt die Rangbedingung $\operatorname{Rang} d\psi|_{M\cap V} = k$. Selbstschnitte sind durch diese Beschreibung ausgeschlossen. Eine Untermannigfaltigkeit muss nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n+k}$ sein, in jedem Fall gehören aber Punkte aus $\overline{M} \setminus M$ nicht zu $M$. Falls $M$ kompakt ist, muss $\overline{M} \setminus M$ leer sein (sogannte geschlossene Untermannigfaltigkeit). Eine Untermannigfaltigkeit mit $n = 2$ bezeichne ich in dieser Vorlesung als *Fläche*.

Untermannigfaltigkeiten können äquivalent *parametrisch beschrieben* werden: Für jedes $p \in M$ existieren
- eine offene Umgebung $V \in \mathbb{R}^{n+k}$,
- eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und
- ein eingebettetes Flächenstück $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+k}$ mit $f(U) = V \cap M$.

Die Mengen $f(U) \cap M$ stellen eine offene Überdeckung von $M$ dar, wobei *offen* bezüglich der Relativtopologie gemeint ist. Daher hat eine *kompakte Untermannigfaltigkeit* $M$ eine endliche Teilüberdeckung, d.h. endlich viele Flächenstücke $f_1\colon U_1 \to \mathbb{R}^{n+k}, \dots, f_m\colon U_m \to \mathbb{R}^{n+k}$ überdecken.

Wir haben gesehen, dass die geodätische Krümmung auf Flächenstücken mit $n = 2$ von der gewählten *Orientierung* abhängt. Daher werden wir verlangen, dass unsere Fläche orientiert ist. Das soll bedeuten, dass $f_j^{-1} \circ f_i$ auf seinem Definitionsbereich positive Determinante hat; äquivalent ist, dass die Parametrisierungen $f_i$, $f_j$ im Schnitt $f_i(U_i) \cap f_j(U_j)$ dieselbe 90°-Drehung $J_i = J_j$ induzieren.

Eine vergleichsweise brutale Methode, das Oberflächenintegral zu definieren, ist die Untermannigfaltigkeit $M$ als disjunkte Vereinigung folgender Mengen darzustellen:

$$N_1 := f_1(U_1), \quad N_2 = f_2(U_2) \setminus f_1(U_1), \ldots, \quad N_m := f_m(U_m) \setminus \big(f_1(U_1) \cup \ldots \cup f_{m-1}(U_{m-1})\big).$$

Dann kann man mithilfe der Gramschen Determinante Funktionen $F\colon M \to \mathbb{R}$ integrieren durch

$$\int_M F\, d\lambda := \sum_{i=1}^m \int_{f_i^{-1}(N_i)} F(f_i(x)) \sqrt{\det g_i}\, d\lambda.$$

Insbesondere ist das $n$-dimensionale Volumen einer kompakten Untermannigfaltigkeit durch die Integration von $F \equiv 1$ erklärt. Besser ist es, hier mit einer Partition der 1 zu arbeiten. In jedem Fall sind die definierten Begriffe von allen getroffenen Wahlen unabhängig.

Hat man den Begriff einer orientierten *Riemannschen Mannigfaltigkeit* zur Verfügung, so kann man auf den umgebenden Raum $\mathbb{R}^{n+k}$ ganz verzichten. Eigentlich ist das der adäquate Rahmen, um den Satz von Gauß-Bonnet zu formulieren. Das liegt daran, dass die Gauß-Krümmung unabhängig vom umgebenden Raum durch III.(13) definiert ist.

2.3. **Satz von Gauß-Bonnet.** Wir wollen nun eine kompakte Fläche vollständig mit Dreiecken pflastern, auf die wir dann jeweils den Satz von Bonnet anwenden. Unsere Anforderungen an die Dreiecke sind:

**Definition.** Sei $\Sigma^2$ eine kompakte Fläche in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$. Eine *Triangulierung* oder auch *simpliziale Unterteilung* $\mathcal{T}$ von $\Sigma$ ist eine endliche Familie abgeschlossener Dreiecke $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_F\}$ mit folgenden Eigenschaften:
(*i*) $\bigcup_{i=1}^F \Delta_i = \Sigma$,
(*ii*) der Schnitt $\Delta_i \cap \Delta_j$ zweier verschiedener Dreiecke ist entweder leer, eine Ecke beider Dreiecke, oder genau eine Kante beider Dreiecke.

Jede Kante eines Dreiecks ist auch zugleich Kante genau eines anderen Dreiecks: Einerseits ist $\Sigma$ Fläche, so dass (*i*) mindenstens ein weiteres angrenzendes Dreieck ergibt, andererseits würden zwei oder mehr angrenzende Dreiecke (*ii*) verletzen.

**Satz** (Triangulierungssatz). *Jede kompakte Fläche besitzt eine Triangulierung $\mathcal{T}$. Man kann zusätzlich verlangen, dass jedes Dreieck in einem parametrisierenden Flächenstück enthalten ist.*

Der Beweis erfordert eine Reihe von Überlegungen, die wir in dieser Vorlesung nicht wiedergeben wollen. Für $m = 3$ finden Sie dies im Buch von Bär [B] auf circa 15 Seiten ausgearbeitet; der Triangulierungssatz ist der dortige Satz 6.2.17.

**Definition.** Besitzt $\Sigma$ eine Triangulierung $\mathcal{T}$ mit $E$ Ecken, $K$ Kanten und $F$ Flächen, so heißt $\chi(\Sigma, \mathcal{T}) := E - K + F$ die *Eulerzahl* oder *Euler-Charakteristik* von $\Sigma$.

*Beispiele.* 1. $\chi$ für $\mathbb{S}^2$ mit Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaeder-Triangulierung ist 2 (Euler 1758).
2. Wenn man einen quadratisch durchbohrten Würfel mit Vierecken pflastert, so ergibt sich $E = 16$, $K = 32$, $F = 16$. Wenn man ein Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke aufteilt, so bleibt $E - K + F$ unverändert; also darf man auch direkt Vierecke nehmen, um $\chi$ zu bestimmen.

Als Hauptergebnis können wir nun die globale Form des Satzes angeben:

**Satz 11** ("Gauß-Bonnet"). *Für jede kompakte orientierte $C^3$-Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, gilt*

$$\int_\Sigma K \, dA = 2\pi \, \chi(\Sigma),$$

*unabhängig von der gewählten Triangulierung von $\Sigma$.*

Weil die Euler-Charakteristik nicht von $\mathcal{T}$ abhängt, haben wir bereits $\chi(\Sigma) := \chi(\Sigma, \mathcal{T})$ geschrieben. Man kann dies auch ohne den Satz von Gauß-Bonnet beweisen, indem man für zwei beliebige Triangulierungen eine sogenannte *gemeinsame Verfeinerung* betrachtet.

*Beweis.* Jeder Punkt der Fläche $\Sigma$ liegt im Bild einer (orientierten) Parametrisierung $f_\alpha$ und besitzt daher nach Satz 7 eine Umgebung, die sich orthogonal (um-)parametrisieren lässt. Weil die ganze Fläche $\Sigma$ kompakt ist, kann man endlich viele solcher Flächenstücke auswählen, die $\Sigma$ überdecken.

Der Triangulierungssatz ergibt eine Triangulierung $\mathcal{T} = \{\Delta_i : i = 1, \dots, F\}$, so dass jedes $\Delta_i$ in einer der orthogonalen Parametrisierungen enthalten ist. Die Innenwinkel von $\Delta_i$ seien $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$. Der Rand $\partial\Delta_i$ werde durch eine $PC^2$-Kurve parametrisiert, so dass $\Delta_i$ links davon liegt.

Für jedes Dreieck $\Delta_i$ wenden wir den Satz 9 von Bonnet an und summieren über alle Dreiecke. Dabei beachten wir, dass sich
1. die Innenwinkel in jeder der $E$ Ecken zu $2\pi$ addieren, und
2. sich die geodätischen Krümmungen der $K$ Kanten paarweise wegheben, weil jede Kante jeweils in zwei entgegengesetzten Orientierungen auftaucht.

Also gilt:

$$\int_\Sigma K\,dA = \sum_{i=1}^F \int_{\Delta_i} K\,dA = \sum_{i=1}^F \Big[2\pi - \big(\pi - \alpha_i\big) - (\pi - \beta_i) - (\pi - \gamma_i)\Big] - \sum_{i=1}^F \int_{\partial\Delta_i} \kappa_{\text{geod}}\,ds$$

$$\overset{2.}{=} \pi F + \sum_{i=1}^F (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) - 0 \overset{1.}{=} 2\pi E - \pi F$$

Es bleibt zu zeigen $F = 2K - 2F$, dann folgt die Behauptung. Aber jedes Dreieck hat 3 Kanten, die in genau zwei Dreiecken vorkommen, so dass tatsächlich $K = 3F/2$. □

*Bemerkungen.* 1. Da $\chi$ von der Triangulierung unabhängig ist, stimmt $\chi$ für eine Triangulierung und jede (geeignet definierte) *Verfeinerung* überein. Entsprechend kann man die Annahmen an $\mathcal{T}$ abschwächen: Eine Triangulierung, die erst nach Verfeinerung die Bedingung (*ii*) erfüllt, ist ebenfalls zulässig. Also darf man z.B. für den Torus auch nur zwei Dreiecke verwenden und man erhält $\chi = 1 - 3 + 2 = 0$.

2. Nach der ersten Bemerkung ist $\chi = 0$ für Autoreifen und Kaffeetasse. Also haben beide Flächen die gleiche Totalkrümmung $\int_\Sigma K\,dA = 0$. Für diese Erkenntnis, die den Flächen nicht direkt anzusehen ist, mussten wir einen weiten Weg zurücklegen: Beginnend mit der Definition der Gauß-Krümmung $K = \det B / \det G$, über die Gauß-Gleichung, bis schließlich zur Betrachtung von geodätischer Krümmung und Parallelverschiebung (die orthogonale Parametrisierung ist dabei nur nebensächliches Hilfsmittel).

3. Aus der Definition der Euler-Charakteristik folgt bereits, dass die Euler-Charakteristik invariant unter stetigen Verformungen ist: Betrachtet man eine gegebene Triangulierung unter stetiger Deformation, so bleibt offenbar $E - K + F$ unverändert. Unter dem Wikipedia-Eintrag *Homotopy* finden Sie eine hübsche Visualisierung der Deformation von Kaffeetasse zu Autoreifen.

4. Die Differenzierbarkeitsannahme einer $C^3$-Fläche dient dazu, die Gauß-Krümmung zu definieren, und macht den Satz von Gauß-Bonnet erst formulierbar.

Wir zitieren ein Resultat der Differentialtopologie:

**Satz** (Flächenklassifikationssatz)**.** (*i*) *Die Euler-Charakteristik einer kompakten orientierten (2-dimensionalen) $C^1$-Fläche nimmt nur folgende Werte an:*

$$2,\ 0,\ -2,\ -4,\ \dots$$

(*ii*) *Gilt $\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma')$, so ist $\Sigma$ diffeomorph zu $\Sigma'$.*

Der Satz geht auf Möbius zurück und wird mit Morse-Theorie bewiesen. (Siehe z.B. [M], Kapitel 12; Andrew Ranicki gibt auf einer Webseite viele weitere Quellen an).

*Bemerkungen.* 1. Es gilt also $\chi(\Sigma) = 2 - 2g$ mit $g \in \mathbb{N}_0$. Die Zahl $g$ bezeichnet man als das *Geschlecht [genus]* der Fläche. Sie entspricht der Anzahl von Löchern, die man in eine Sphäre bohrt, oder gleichermaßen der Anzahl von *Henkeln*, die man an eine Sphäre klebt. Es gilt also $\chi(\text{Fläche mit } g \text{ Löchern}) = 2-2g$; insbesondere hat die Sphäre $\mathbb{S}^2$ Geschlecht 0, der Torus $T^2$ Geschlecht 1.

2. Aussage (*ii*) bedeutet, dass die Euler-Charakteristik eine (vollständige) *topologische Invariante* ist: Sie fällt gleich aus, für solche Flächen, die diffeomorph sind, und die wir deshalb als geometrisch gleich ansehen wollen; sie unterscheidet andererseits Flächen, die wir als geometrisch verschieden ansehen, weil sie wegen unterschiedlicher Euler-Charakteristik nicht diffeomorph sein können.

3. Nicht-orientierbare kompakte Flächen können eine ungerade Euler-Charakteristik besitzen.

4. Der Satz gilt bereits für topologische oder $C^0$-Flächen, wenn man die Voraussetzung dafür geeignet formuliert; dann ist $\Sigma$ nur homöomorph zu $\Sigma'$. Die Euler-Charakteristik für $C^0$-Flächen wird in der algebraischen Topologie eingeführt; allerdings wird die Behandlung dadurch nicht unbedingt einfacher.

Nehmen wir den Flächenklassifikationssatz an, so gewinnen wir aus dem Satz von Gauß-Bonnet erstaunlich starke Aussagen:

**Korollar 12.** *Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ eine kompakte orientierbare Fläche mit Gauß-Krümmung $K$.*
(*i*) *Ist $K > 0$, so ist $\Sigma$ diffeomorph zu $\mathbb{S}^2$ $(g = 0)$.*
(*ii*) *Ist $K \equiv 0$, so ist $\Sigma$ diffeomorph zum Torus $(g = 1)$.*
(*iii*) *Ist $K < 0$, so ist $\Sigma$ diffeomorph zu einer Fläche vom Geschlecht $g > 1$.*
(*iv*) *Ist sogar $K \neq 0$ konstant, so hat die Fläche Inhalt $|\Sigma| = \frac{1}{K} 2\pi\chi(\Sigma) = \frac{1}{|K|} 2\pi|\chi(\Sigma)|$.*

Man kann also aus dem Vorzeichen der Gauß-Krümmung die Topologie der Fläche ablesen: Die Geometrie bestimmt die Topologie.

*Bemerkungen.* 1. Beachten Sie, dass für $m = 3$ (*ii*) und (*iii*) nicht eintreten können, denn jede Hyperfläche hat einen Punkt positiver Gauß-Krümmung. Der Satz wird also erst interessant für $m \geq 4$, bzw. in intrinsischer Fassung.

2. Wie kann man den merkwürdig erscheinenden Ausdruck $\chi = E - K + F$ verstehen? Im $n$-dimensionalen Fall besteht $\chi(M^n)$ aus $(n + 1)$ Summanden, die jeweils die Anzahl der $k$-dimensionalen Zellen einer simplizialen Zerlegung angeben, und die $E, K, F$ verallgemeinern:

$$\chi(M^n) := \#(\text{0-Zellen}) - \#(\text{1-Zellen}) \pm \ldots + (-1)^n \#(n\text{-Zellen}). \tag{15}$$

Dies macht man in der algebraischen Topologie für sehr allgemeine $C^0$-Räume, sogenannte simpliziale oder CW-Komplexe. Im Rahmen von Homologie-Theorie zeigt man, dass

$\chi$ sich weiterhin darstellen lässt als eine alternierende Summe der Dimensionen der $k$-ten Homologie-Gruppen, $\chi(M) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k h_k(M)$. Wegen der sogenannten Poincaré-Dualität folgt daraus, dass $\chi(M)$ verschwindet, wenn die Dimension $n$ der (randlosen) Mannigfaltigkeit ungerade ist.

`28. Vorlesung, 6.2.18` ___

## 3. Varianten und Verallgemeinerungen

Man kann die Totalkrümmung bzw. die Euler-Charakteristik einer Fläche durch zwei andere Größen ausdrücken. Dies möchten wir darstellen, obwohl wir einige wichtige Details übergehen, deren Diskussion uns zu aufwendig erscheint. Die beiden Darstellungen erlauben auch eine sinnvolle Diskussion der Frage nach Verallgemeinerungen des Satzes von Gauß-Bonnet auf höhere Dimensionen.

3.1. **Index von Vektorfeldern.** Sei $X \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld auf einer Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$ mit Bildvektorfeld $Y = df(X)$. Um mögliche Nullstellen zu analysieren, definieren wir analog zum Singularitätenbegriff in der Funktionentheorie:

**Definition.** Ein Punkt $p \in U$ heißt *isolierte Singularität* von $X$ oder $Y$, wenn $Y(q) \neq 0$ für alle $q \in B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ gilt.

Einer isolierten Singularität wollen wir nun eine ganze Zahl zuordnen, die auf orientierte Weise zählt, wie oft das Vektorfeld „umläuft", wenn man die Singularität einmal umrundet. Um diese Zahl rigoros zu definieren, betrachten wir

- eine Kreisscheibe in $U$ vom Radius $0 < r < \varepsilon$ um $p$, die keine weitere Singularität enthält,
- das auf Einheitslänge normalisierte Feld $Y/\|Y\|$ in $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$, und
- ein beliebiges Einheitsvektorfeld $E = df(e)$, das auf ganz $B_\varepsilon(p)$ definiert ist.

Wenden wir das Liftungslemma auf den Randkreis $\partial B_r(p)$ an, erhalten wir eine stetige Funktion

$$\varphi\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \frac{Y}{\|Y\|}(p + re^{it}) = \cos\varphi(t)\, E + \sin\varphi(t)\, JE. \tag{16}$$

**Definition.** Der *Index* von $Y$ in der isolierten Singularität $p$ ist dann definiert durch

$$\operatorname{ind}_p Y := \frac{1}{2\pi}\big(\varphi(\pi) - \varphi(-\pi)\big) \quad \in \mathbb{Z}.$$

*Beispiele.* 1. Ein konstantes Vektorfeld hat Index 0 in jedem Punkt, das radiale Feld $z/|z|$ auf $\mathbb{C} \ni z$ hat Index 1 in 0; allgemeiner hat $z^k/|z|^k$ den Index $k \in \mathbb{Z}$ in 0.
2. Wenn $Y$ den Index $k$ in $p$ hat, so ist $k$ auch der Index von $-Y$ oder, allgemeiner, von $\cos\alpha\, Y + \sin\alpha\, JY$ für beliebiges $\alpha$ (warum?).

Der Index ist unabhängig von diversen Wahlen (Übung):
1. Er ist unabhängig von $E$ und unabhängig von $r$. Mit Hilfe des Liftungslemmas IV.4 kann man $\varphi$ stetig auf dem einfach zusammenhängenden geschlitzten Kreisring definieren. Dann ist aber die Auswertung $r \mapsto \operatorname{ind}_p Y$ stetig mit Werten in $\mathbb{Z}$, also konstant in $r$.

2. *Homotopieinvarianz* des Index: Auswertung an jeder zum Kreis $t \mapsto p + e^{it}$ homotopen geschlossenen Kurve in $B_r(p)\backslash\{p\}$ liefert den gleichen Index; er ist dann sinngemäß definiert durch

$$2\pi \operatorname{ind}_p Y = \angle\big(E(t), Y(t)\big)\Big|_0^P, \tag{17}$$

wobei $t \mapsto \angle(E, Y)(t)$ stetig auf $[0, P]$ sein soll.

3. Der Index ist parametrisierungsunabhängig bezüglich orientierungserhaltender Umparametrisierungen der Fläche $f$. Die Beweisidee ist, zuerst orientierungserhaltende lineare Abbildungen zu betrachten, auf die man ein Homotopieargument anwenden kann; dann benutzt man eine Taylorentwicklung und zeigt, dass nur der lineare Term den Index bestimmt.

Als Konsequenz von 3. ist auf orientierten globalen Flächen $\Sigma$ der Index eines Vektorfeldes $Y$ mit isolierten Singularitäten definiert. Ist $\Sigma$ kompakt, so ist die Anzahl der Singularitäten endlich, und wir können die Indexsumme

$$\operatorname{Ind}_\Sigma Y := \sum_{p \in \Sigma} \operatorname{ind} Y(p)$$

betrachten. Sie ist wiederum eine topologische Invariante:

**Satz 13** (Poincaré 1885)**.** *Sei $Y$ ein Vektorfeld mit isolierten Singularitäten auf einer kompakten orientierten Fläche $\Sigma$. Dann gilt* $\operatorname{Ind}_\Sigma Y = \chi(\Sigma)$.

Insbesondere ist nach Gauß-Bonnet $\operatorname{Ind}_\Sigma Y = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma K\, dA$.

Eine bekannte Konsequenz ist der Satz vom (gekämmten) Igel:

**Korollar 14.** *Jedes Vektorfeld auf $\mathbb{S}^2$ besitzt mindestens eine Nullstelle.*

*Beweis.* Nach dem Satz von Gauß-Bonnet oder durch Berechnung von $E - K + F$ ist $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$. Also muss es mindestens einen Punkt mit Index ungleich 0 geben. □

*Beispiele.* 1. Ein Einheitsfeld auf $\mathbb{S}^2$, das tangential an die Großkreisbögen vom Nord- zum Südpol ist, hat zwei Singularitäten mit Index 1. Ein Vektorfeld mit nur einer isolierten Singularität vom Index 2 kann man entsprechend erhalten aus einer Blätterung von $\mathbb{S}^2$ mit Kreisen, die alle durch den Nordpol gehen.
2. Andererseits gibt es auf dem Torus $T^2$ Vektorfelder ohne Singularitäten (und zwar?).

3. Auch auf $\mathbb{S}^3$ ist $Y(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_2, -x_1, x_3, -x_4)$ ein Vektorfeld ohne Nullstelle, entsprechend auf ungrad-dimensionalen Sphären.

Wir beweisen den Indexsatz:

*Beweis.* Wir wählen eine Triangulierung, so dass in jedem Dreieck $\Delta_i$ höchstens eine Singularität von $Y$ liegt, und zwar in $p_i$ im Innern von $\Delta_i$. Den Rand des Dreiecks $\Delta_i$ bildet eine $PC^1$-Kurve $c_i$, die differenzierbar ist, abgesehen von ihren drei Ecken $e(i,1)$, $e(i,2)$, $e(i,3) =: e(i,0)$. Um den Satz von Gauß-Bonnet anzuwenden, setzen wir voraus, dass das Dreieck $\Delta_i$ links von $c_i$ liegt.

Der Winkel von $\varphi(t)$ wie in (16) oder (17) ist relativ zu einem Einheitsfeld $E$ gemessen, das, wie die Aussage des Satzes belegt, im allgemeinen auf ganz $\Sigma$ nicht existiert. Wir betrachten statt dessen ein paralleles Feld $Z$, das zunächst längs der Kurve $c_i$ definiert sei. Wir wählen dazu längs $c_i$ die folgenden Winkel als stetige Funktionen auf $[0, P]$ und stellen die Winkeldifferenzen bei einem Umlauf um $c_i$ fest.

$$\angle(Y,E) = \angle(Y,Z) + \angle(Z,E) \quad \overset{(17)(9)}{\Rightarrow} \quad 2\pi \operatorname{ind}_{p_i} Y = \angle(Y,Z)\Big|_0^P + \operatorname{Hol}(c)$$

Wir beachten nun (10) und spalten den Rand von $\Delta_i$ in seine drei Kanten auf. Das ergibt

$$\int_{\Delta_i} K\,dA = 2\pi \operatorname{ind}_{p_i} Y - \sum_{j=1}^{3} \angle(Y,Z)\Big|_{e(i,j-1)}^{e(i,j)}.$$

Es reicht für diese Formel anzunehmen, dass $Z$ längs jeder Kante stetig und parallel ist; in den Ecken muss man dann jeweils den "einseitigen" Grenzwert auswerten. Wir weisen weiterhin darauf hin, dass die gewählte Orientierung von $c_i$ das Vorzeichen der drei Summanden bestimmt.

Wenn wir nun über alle Dreiecke der Triangulierung summieren, so enthält die entsprechende Summe demnach für jede Kante zwei Terme mit entgegengesetztem Vorzeichen, die sich aufheben. Es verbleibt, wie gewünscht,

$$\int_\Sigma K\,dA = \sum_i \int_{\Delta_i} K\,dA = 2\pi \sum_p \operatorname{ind} Y(p).$$ □

*Aufgabe.* Gegeben sei eine Triangulierung einer kompakten orientierten Fläche $\Sigma$. Definieren Sie ein Vektorfeld $Y$, das im Innern jedes Dreiecks eine Quelle und in jeder Ecke eine Senke besitzt; auf jeder Kante muss ein „Sattel“ liegen. Zeigen Sie für dieses Vektorfeld direkt, dass die Indexsumme $2\pi\chi(\Sigma)$ ist.

*Bemerkung.* Der Satz von Poincaré läßt sich direkt auf höhere Dimensionen verallgemeinern, anders als der Satz von Gauß-Bonnet selbst. Dies hat Hopf 1926 getan. Dazu verallgemeinert man den Index eines Vektorfeldes als das Integral über den orientierten Inhalt des normalisierten Vektorfeldes, dividiert durch den Inhalt der Bildsphäre.

Es stellt sich abschließend auch die Frage, ob es Verallgemeinerungen des Satzes von Gauß-Bonnet auf $n$ Dimensionen gibt. Im gerade-dimensionalen Fall $n \in 2\mathbb{N}$ kann man die Gauß-Krümmung $K$ von $M^n$ tatsächlich mithilfe des intrinsischen Riemannschen Krümmungstensors $R_{ijkl}$ darstellen; für ungerade Dimensionen geht das nicht. Eine solche Darstellung ergibt dann $\int_M K\,dV = |\mathbb{S}^n|\chi(M)/2$ für $n$ gerade. (Insbesondere erklärt das für $n = 2$ den Vorfaktor $|\mathbb{S}^2|/2 = 4\pi/2 = 2\pi$.) Allendorfer, Fenchel, und Chern haben dies 1940–44 herausgefunden. Siehe Kapitel 13 in Band 5 von Spivaks Differential Geometry, unter der schönen Überschrift *The generalized Gauss-Bonnet Theorem and what it means for mankind*; die Formel für $K$ finden Sie schon in der Einleitung zum Kapitel.

`29. Vorlesung, 8.2.18` ———

3.2. **Gauß-Krümmung diskreter Flächen.** Die diskrete Differentialgeometrie versucht, differentialgeometrische Größen für stückweise lineare Objekte zu erklären. Dabei ist das Ziel, die Gültigkeit von Aussagen vom glatten Fall auf solche diskreten Objekte zu übertragen. Als Aussagen eignen sich Sätze über integrale Größen wie die Totalkrümmung. Ein Beispiel dazu haben wir schon gesehen: Den Umlaufsatz $\int \kappa\,ds = \pm 2\pi$ kann man auf Polygone übertragen, wenn man als Krümmung des Polygons die Außenwinkel $\delta_i$ in den Ecken nimmt: Es gilt dann $\sum \delta_i = \pm 2\pi$.

In diesem abschließenden Kaptitel wollen wir als ein Beispiel für die diskrete Differentialgeometrie von Flächen die diskrete Gauß-Krümmung behandeln. Sie soll so definiert sein, dass der Satz von Gauß-Bonnet gilt.

Dabei ersetzen wir globale Flächen durch diskrete Flächen, also Polyeder. Der Einfachheit halber werden wir wiederum voraussetzen, dass sie keine Selbstschnitte besitzen. Eine rigorose Definition solcher diskreter Flächen ist nicht einfach, und wurde auch erst gefunden, nachdem längst interessante Ergebnisse über Polyeder erzielt waren, wie z.B. Cauchys Starrheitssatz.

Um die folgende Definition einzuordnen, sollte man sich zuerst vergegenwärtigen, was wir nicht als Polyeder ansehen wollen: So dürfen nicht drei Polygone eine gemeinsame Kante besitzen oder eine Kante nur in einem einzigen Polygon vorkommen – das wäre keine (randlose) Fläche. Ein anderes unzulässiges Beispiel sind zwei an ihren Spitzen zusammengeklebte Pyramiden.

**Definition.** $(i)$ Ein (*orientiertes*) *Polygon* $P \subset \mathbb{R}^n$ ist eine in einem 2-dimensionalen affinen Unterraum enthaltene abgeschlossene Menge, homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe, die von $k \geq 3$ (abgeschlossenen) Strecken oder *Kanten* orientiert berandet wird. Die gemeinsamen Endpunkte aufeinanderfolgender Kanten heißen *Ecken*.

(*ii*) Eine (*kompakte orientierte*) *polyedrische Fläche* oder auch *Polyeder* ist eine zusammenhängende Menge

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{F} P_i \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei $P_i$ orientiertes Polygon ist. Die Menge $F(\Sigma) := \{P_1, \ldots, P_F\}$ von Polygonen sei endlich, mit folgenden Eigenschaften:

- Für $i \neq j$ ist $P_i \cap P_j$ entweder leer, eine entgegengesetzt orientierte Kante von $P_i$ und von $P_j$, oder eine Ecke von $P_i$ und von $P_j$.
- Jede Kante aus $\bigcup_{i=1}^{F} \partial P_i$ liegt in genau zwei Polygonen.
- Der *Stern [star]* jeder Ecke $e$,

$$\mathrm{st}(e) := \bigcup \{P_i \in F(\Sigma) : e \in P_i\} \subset \Sigma,$$

ist homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe.

(*iii*) Sind sämtliche Polygone einer polyedrischen Fläche Dreiecke, so nennen wir die Fläche *simplizial*.

Bei der Definition der diskreten Gauß-Krümmung ist unser Ziel die Gültigkeit des Satzes von Gauß-Bonnet. Der Satz gilt sicherlich für $C^1$-Flächen, die man aus Polygonen, Zylinderstücken und Kugelkappen zusammensetzen kann. Auf solchen Flächen verschwindet aber die Gauß-Krümmung $K$ allein auf den Kugelkappen nicht. Nehmen wir nun den Spezialfall an, dass eine Folge solcher Flächen eine diskrete Fläche approximiert. Dann ist es plausibel, dass die diskrete Gauß-Krümmung allein in den Ecken nicht verschwindet. Die Untersuchung der Geometrie der Kugelkappen führt dann zu folgender Definition:

**Definition.** (*i*) Sei $e$ eine Ecke einer polyedrischen Fläche und der Stern von $e$ bestehe aus Polygonen $P_1, \ldots, P_\ell$, jeweils mit Innenwinkeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in (0, 2\pi)$ in der Ecke $e$. Dann ist der *Winkeldefekt* oder die *diskrete Gauß-Krümmung* der Ecke $e$ gegeben durch

$$K(e) := 2\pi - \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \quad \in (-\infty, 2\pi).$$

(*ii*) Sind $e_1, \ldots, e_E$ die Ecken von $\Sigma$, so bezeichnen wir die Winkeldefektsumme $\sum_{i=1}^{E} K(e_i)$ als *Totalkrümmung* von $\Sigma$.

*Beispiele.* 1. Liegt $\mathrm{st}(e)$ in einer Ebene, so ist $K(e) = 0$.
2. Beim Würfel hat jede Ecke den Winkeldefekt $2\pi - 3\pi/2 = \pi/2$. Die Totalkrümmung beträgt $8\,\pi/2 = 4\pi$.

Wir können eine Ecke $e$ als *elliptisch*, *euklidisch*, oder *hyperbolisch* bezeichnen, je nachdem, ob ihr Winkeldefekt $K(e) > 0$, $= 0$, oder $< 0$ ist. Anders als im glatten Fall müssen allerdings elliptische Ecken nicht unbedingt lokal konvex sein, und die Umgebung einer hyperbolischen Ecke kann durchaus disjunkt zu einem offenen Halbraum sein, dessen Rand die Ecke enthält (Beispiele?).

Ist $\mu$ das Punktmaß der Ecken von $\Sigma$, so kann man die Totalkrümmung in der Form $\sum K(e) = \int_\Sigma K\,d\mu$ schreiben, d.h. als sogenanntes atomares Maß.

Wir verallgemeinern die für simpliziale Flächen bereits gegebene Definition:

**Definition.** Die *Euler-Charakteristik* einer polyedrischen Fläche $\Sigma$ mit $E$ Ecken, $K$ Kanten und $F$ polygonalen Flächen ist

$$\chi(\Sigma) := E - K + F.$$

Beachten Sie, dass wir $K$ in zwei Bedeutungen verwenden, als Kantenzahl $K$ und Krümmung $K(e_i)$.

Die diskrete Variante des Satzes von Gauß-Bonnet lautet:

**Satz 15.** *Hat die polyedrische Fläche $\Sigma$ die Ecken $e_1, \dots, e_E$, so gilt für ihre Totalkrümmung*

$$2\pi\chi(\Sigma) = \sum_{i=1}^{E} K(e_i).$$

*Beweis.* Die Fläche $\Sigma$ bestehe aus den Polygonen $P_1, \dots, P_F$. Das Polygon $P_i$ habe $k(i)$ Kanten mit Innenwinkeln $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik(i)}$. Nach dem verallgemeinerten Umlaufsatz gilt dann

$$2\pi = \sum_{j=1}^{k(i)} (\pi - \alpha_{ij}) = k(i)\pi - \sum_{j=1}^{k(i)} \alpha_{ij}. \tag{18}$$

Nun vertauschen wir die Reihenfolge der Summierung. Die Summe der über alle Ecken inzidenten Winkel ist gleich der Summe der Innenwinkel über alle Polygone:

$$\sum_{i=1}^{E} K(e_i) = 2\pi E - \sum_{i=1}^{F}\sum_{j=1}^{k(i)} \alpha_{ij} \overset{(18)}{=} 2\pi E + \sum_{i=1}^{F}\big(2\pi - k(i)\pi\big) = 2\pi E - \pi\sum_{i=1}^{F} k(i) + 2\pi F$$

Es ist aber $\sum_{i=1}^F k(i) = 2K$, denn jede Kante liegt im Rand von genau zwei verschiedenen Polygonen. □

Wir geben zwei Rechtfertigungen unserer Definition der Gauß-Krümmung.

1. Wir betrachten den Spezialfall, dass $\Sigma$ simplizial ist, und alle Dreiecke spitzwinklig sind. Bei spitzwinkligen Dreiecken treffen sich die Mittelsenkrechten in einem inneren Punkt des Dreiecks, dem Mittelpunkt des Umkreises. Sie zerlegen $\Sigma$ so, dass zu jeder Ecke $e_i$ mit $\ell$ anliegenden Winkeln $\alpha_{ij}$ ein intrinsisches $k$-Eck $P(i)$ mit orientierten Außenwinkeln $\alpha_{ij}$ gehört, kombinatorisch dual zur Triangulierung (Skizze und Elementargeometrie!). Beachten Sie, dass die Kanten der Triangulierung intrinsisch nicht bemerkbar sind,

so dass intrinsisch die Dreiecksmittelpunkte durch (ungekrümmte) Strecken verbunden sind. Wäre $P(i)$ nun intrinsisch vollständig glatt, so würde der Satz von Bonnet ergeben: $\int_{P(i)} K\,dA = 2\pi - \sum_j \alpha_{ij}$; tatsächlich gilt diese Gleichung, wenn wir die linke Seite durch die Holonomie $\mathrm{Hol}(\partial P_i)$ ersetzen. Ersetzen wir die linke Seite durch $\sum K(e)$ (bzw. durch $\int K\,d\mu$ mit $\mu$ Punktmaß), so ist die Gleichung nach Definition erfüllt.

2. Eine weitere Rechtfertigung des Winkeldefekts als diskreter Krümmungsbegriff leistet der (in dieser Vorlesung nicht bewiesene) Satz von Bertrand/Puiseux, siehe Abschnitt 2.5: Im glatten Fall lautet die Entwicklung des Umfangs eines geodätischen Kreises $S_r$

$$L(S_r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3} K r^2 + O(r^3), \qquad r \sim 0.$$

Im diskreten Fall ist die Krümmung bereits eine Ordnung höher spürbar: Der Umfang eines Kreises um $e$ ist exakt

$$L(S_r) = r \sum \alpha_i = \big(2\pi - K(e)\big) r, \qquad 0 \le r \le r_0,$$

falls $r_0$ der Abstand zur nächsten Ecke ist. Beide Größen sind kleiner als $2\pi r$ für $K > 0$, so dass insbesondere das Vorzeichen von $K(e)$ gerechtfertigt ist.

Im glatten Fall ist die Erkenntnis, dass $K$ intrinsisch ist, nicht offensichtlich. Dagegen folgt im diskreten Fall ein theorema egregium unmittelbar aus der Definition von $K(e)$ als Winkelmessung:

**Satz 16.** *Die Gauß-Krümmung $K(e)$ einer polyedrischen Fläche ist eine intrinsische Größe.*

*Beweis.* Offenbar sind die Kanten innergeometrisch irrelevant: Bei der Messung von Abständen und Kurvenlängen spielen sie keine Rolle. Andererseits zeigen die letzten beiden Bemerkungen, dass $K(e)$ durch die Länge von Kurven um $e$ festgestellt werden kann. □

*Bemerkung.* 1. Descartes hat bereits 1639 gezeigt, dass die Winkeldefektsumme eines zu $\mathbb{S}^2$ homöomorphen Polyeders gerade $4\pi = 2\pi\chi(\mathbb{S}^2)$ ist; das Ergebnis wurde erst 1860 gedruckt, also nach dem Satz von Bonnet.

2. Man kann auch polyedrische Flächen mit Rand definieren (wie?). Für eine Randecke $e$ definiert man dann die geodätische Krümmung durch $\kappa(e) := \pi - \sum \alpha_i$, wobei $\alpha_i$ alle zu $e$ inzidenten Innenwinkel durchläuft. Dies kann man zugleich als Außenwinkel von $\partial\Sigma$ betrachten: Hat man z.B. nur ein an $e$ anliegendes Polygon, so ist $\kappa(e)$ direkt der Außenwinkel der Ecke. Daher erhält man folgende Randvariante des Satzes von Gauß-Bonnet:

$$2\pi\chi(\Sigma) = \sum_{\text{Ecke } e_i \in \Sigma\setminus\partial\Sigma} K(e_i) + \sum_{\text{Ecke } e_j \in \partial\Sigma} \kappa(e_j)$$

# Index