FUNDAMENTOS DE BASES DE DATOS

Examen Febrero 2002

Presentar la resolución del examen:

- Con las hojas adicionales numeradas y escritas de un solo lado.
- Con las hojas escritas a lápiz.
- Poner cédula de identidad y nombre en cada hoja (incluidas estas).
- Escrito en forma prolija.
- Las opciones elegidas se deben marcar poniendo el identificador de la opción en un círculo claramente identificado.
- Poner la cantidad de hojas adicionales entregadas en la primer hoja.

Parte 1 – Modelo Entidad-Relación (25 puntos)

Ejercicio 1.

Una empresa de telecomunicaciones lo contrata a Ud para diseñar una base de datos para llevar el control de que insumo y por qué se compra ese insumo a cada proveedor. La empresa tiene un conjunto de sucursales distribuidas en todo el Uruguay.

De cada sucursal se conoce la ubicación (dirección, nombre de la ciudad y nombre del departamento dentro del Uruguay), un código que la identifica dentro de la empresa, y un conjunto de teléfonos. Cada sucursal tiene varios departamentos (técnico, de ventas, etc). De cada departamento se conoce el nombre, una descripción de su cometido y la cantidad de personas que trabajan en él. El nombre identifica al departamento dentro de una sucursal pero no dentro de la empresa.

Cada departamento va registrando pedidos de materiales de acuerdo a sus necesidades. Luego, a partir de un conjunto de pedidos se arma una orden de compra.

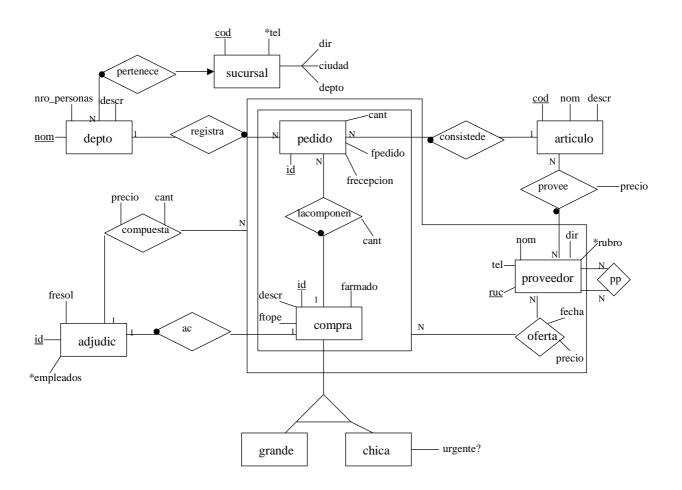
De cada pedido se conoce un identificador único del pedido, el artículo que se pide, la cantidad que se pide, la fecha en la que se realiza el pedido, la fecha en la que se espera contar con el material y qué departamento realizó dicho pedido. De cada artículo se conoce un código que lo identifica, su nombre y una descripción. De las órdenes de compra se registra su identificador, una descripción breve de en qué consiste la compra, la fecha en la que se arma, la fecha tope para la recepción de ofertas por parte de los proveedores y los pedidos que la componen. En la orden de compra, para cada pedido aparece nuevamente la cantidad solicitada de ese artículo, sólo que puede haber sido reducida (nunca aumentada) con respecto a la original que está en el pedido. Hay pedidos que nunca participan de una orden de compra. Las (órdenes de) compras puede ser de dos tipos (grandes o chicas). Las compras chicas responden sólo a pedidos de una misma sucursal, mientras que las compras grandes involucran pedidos de más de una sucursal. Además, las compras chicas pueden ser urgentes o normales.

La empresa tiene además un registro de proveedores. De cada proveedor se conoce su ruc que lo identifica, el nombre, la dirección, el teléfono, los rubros a los que se dedica además del detalle de que artículos provee. El precio de venta de un artículo depende del proveedor. Interesa registrar los proveedores que están relacionados comercialmente entre sí.

Para cada pedido de una orden de compra, interesa registrar que proveedores se ofrecen satisfacer ese pedido, por qué precio unitario y la fecha en que presentaron la oferta.

Por otro lado, interesa llevar registro de las adjudicaciones (o resoluciones de compra) que se hacen. De cada adjudicación se conoce un identificador, la fecha en la que se tomo la resolución y la orden de compra que resuelve. Además, interesa registrar para cada adjudicación, a cuáles proveedores se les adjudicó qué pedido (siempre de la misma orden de compra) indicando a que precio y que cantidad. Una adjudicación puede declarar desierta una compra, o sea que realmente no adjudica a ningún proveedor pedido ninguno de los pedidos de la compra. También puede ser que no adjudique a ningún proveedor alguno de los pedidos de la compra, aunque sí adjudique otros pedidos. Resumiendo, una adjudicación puede declarar desierto algún pedido (o todos) de una compra (o sea que no se adjudica a nadie ese pedido).

Se pide: Modelo Entidad-Relación completo.



RNE:

- 1) grande \cap chica = \emptyset
- 2) Si $(p,c) \in \text{lacomponen} \Rightarrow (p,c).\text{cant} \leq p.\text{cant}$
- 3) Si la compra es chica está formada por pedidos realizados por departamentos pertenecientes a una única sucursal
- 4) Si $((p,c),pr) \in \text{oferta} \land (p,a) \in \text{consistede} \Rightarrow \exists (a,pr) \in \text{provee}$
- 5) La suma de las cantidades adjudicadas a los distintos proveedores es menor o igual que la cantidad que figura en el armado de la compra
- 6) Si $(p1, p2) \in pp \Rightarrow p1 \neq p2$

Parte 2 – Diseño Relacional (25 puntos)

Ejercicio 2.

i. Una inmobiliaria desea implementar una base de datos relacional para llevar el control de sus alquileres en la ciudad de Montevideo.

La inmobiliaria cuenta con un registro de propietarios en el que se encuentra la cédula de identidad (CI_Prop), el nombre del propietario (Nom_Prop), una dirección de contacto (Dir_prop) y un teléfono (Tel_prop) de contacto. Por otro lado, la inmobiliaria cuenta con un registro de inquilinos que contiene datos similares, pero para los inquilinos: cédula de identidad (CI_Inq), nombre del inquilino (Nom_Inq), dirección de contacto (Dir_Inq) y teléfono de contacto (Tel_Inq).

De cada inmueble, se conoce un código (Cod_Inm) que lo identifica, la calle en que se encuentra (Calle), el número de puerta (Nro), la cantidad de ambientes (Cant_Amb), la cédula de identidad del propietario y el tipo de inmueble (T_Inm) que puede ser casa o apartamento.

De cada contrato se conoce un número de contrato que lo identifica (Nro_C), la fecha de firma del mismo (F_Firma_C), la fecha de fin del contrato (F_Fin_C), la cédula de identidad del Inquilino y el código de la propiedad a aquilar.

De acuerdo al relevamiento, las siguientes condiciones deben ser contempladas en el diseño de la base:

- 1. No hay dos contratos diferentes sobre un inmueble que tengan la misma fecha de finalización o la misma fecha de inicio. O sea que no hay dos contratos sobre un inmueble con la misma fecha de inicio y tampoco hay dos contratos sobre un inmueble con la misma fecha de fin.
- 2. El teléfono de contacto de las personas (no importa si son propietarios o inquilinos) no es necesariamente el de su casa, por lo que incluso diferentes personas con diferentes direcciones pueden tener el mismo número de teléfono.
- 3. Hay inquilinos que alquilan varias propiedades, así como un mismo propietario puede poseer varias propiedades administradas por la inmobiliaria.
- 4. Cuando se vence el plazo de un contrato, se hace un nuevo contrato diferente del anterior.

La relación universal para la realidad descripta anteriormente es la siguiente:

R (CI_Prop, Nom_prop, Dir_Prop, Tel_prop, Cod_Inm, Calle, Nro, Cant_Amb, T_Inm, CI_Inq, Nom_Inq, Dir_Inq, Tel_Inq, Nro_c, F_Firma_C, F_Fin_C)

- a) Seleccione las dependencias funcionales y multivaluadas que se cumplen en la realidad anteriormente descripta.
- a. Tel_inq→ Dir_inq
- **(b)** CI_Prop→ Nom_Prop, Dir_Prop
- c. Tel_Prop→ CI_Prop, Nom_Prop
- d. CI_Prop→ Tel_Prop
 - e. Tel_Prop→ Dir_Prop
- **f.** CI_Inq→ Nom_Inq, Dir_Inq
 - g. Tel_Inq CI_Inq, Nom_Inq
- h CI_Inq→ Tel_Inq
- (i) Cod_Inm→ Calle,Nro, Cant_amb
 - j. $CI_Prop \rightarrow CI_Inq$
 - k. CI_Inq→CI_Prop
- 1. $Cod_{Inm} \rightarrow CI_{Prop}$, T_{Inm}
 - b) Seleccione las claves de R.
- a. Nro_C, Cod_Inm,CI_Inq
- b. Cod_Inm,F_Firma_C,CI_Inq
- c. Cod_Inm,F_Fin_C,CI_Inq
- d. Nro_C

- m. CI_Prop→ Nro_C, CI_Inq
- n Nro_C \rightarrow F_Firma_C, F_Fin_C
 - o. $CI_Prop \rightarrow Cod_Inm$
- $P Nro_C \rightarrow Cod_Inm, CI_Inq$
 - q. $CI_Inq \rightarrow Nro_C$
- (r.) Cod_Inm, F_Firma_C \rightarrow Nro_C
- S. Cod_Inm, $F_Fin_C \rightarrow Nro_C$
- t. Cod_Inm-F_Firma_C,F_Fin_C
- u. CI_Prop, CI_Inq→Nro_C
- v. CI_Inq,CI_Prop—Calle
- w. Cod_Inm→CI_Inq
- x. CI_Prop→Tel_Inq
- e. CI_Prop,CI_Inq,Nro_C
- f. F_Firma_C,Cod_Inm
 - g. Tel_Inq,Cod_Inm,Tel_Prop
- h. Cod_Inm,F_Fin_C
- c) Indique en qué forma normal está R y justifique su respuesta.

- ii. Dado el conjunto $F=\{AB \rightarrow D, BC \rightarrow E, HBC \rightarrow GA, DE \rightarrow G, CG \rightarrow H, H \rightarrow A\}$ sobre el esquema R(A,B,C,D,E,H,G).
 - a) De los siguientes conjuntos de dependencias seleccione todas las claves.

a. BCEDGH

b. BC

c. A

d ABC

e. HB

f. GC

g. HGC

h. EDBC

i. DBC

j. GBC

k. EBC

1. HBC

b) Justifique su respuesta.

Como BC no aparecen en el lado derecho de ninguna dependencia, entonces deben aparecer en todas las claves. Como $BC^+=\{B,C,E\}$, BC no es clave. Si se prueban las combinaciones de 3 atributos incluyendo a BC se encuentra que todas son clave excepto BCE. Esto hace que cualquier combinación de 4 atributos que incluya a BC sea una superclave.

c) Indique en qué forma normal está R y justifique su respuesta.

Por la justificación anterior, E no es primo, por lo que es un atributo no primo que depende parcialmente de una clave, lo que implica que R está en 1 NF.

d) Del siguiente conjunto de dependencias, seleccione aquellas que conforman el resultado de aplicar el primer paso del algoritmo de cubrimiento minimal.

(a) AB→D

b. ABC→DEG

C. BC \rightarrow E

d. DEG→ABC

e. HBC→GA

f. DE→G

g. НВС→G

h. CG→H

і. НВС→А

i. EG→A

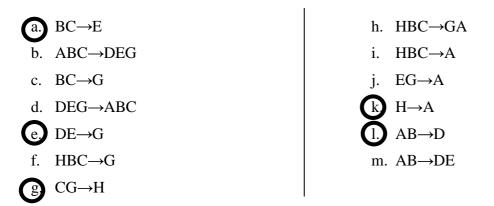
k $H \rightarrow A$

e) Del siguiente conjunto de dependencias, seleccione aquellas que conforman el resultado de aplicar el segundo paso del algoritmo de cubrimiento minimal sobre el resultado anterior.

- (a.) BC→E
 - b. ABC→DEG
- c. BC→G
- d. DEG→ABC
- e. DE→G
- **f.**) HBC→G
- g. CG→H

- h. HBC→GA
- (і) НВС→А
- j. EG→A
- \mathbb{A} $H \rightarrow A$
- \bigcirc AB \rightarrow D
 - m. AB→DE

f) Del siguiente conjunto de dependencias, seleccione aquellas que conforman el resultado final del algoritmo de cubrimiento minimal sobre el resultado anterior.



g) Aplique el algoritmo para construir una descomposición en 3NF con Join Sin Pérdida y con Preservación de dependencias.

 $R_1(B,C,E)$, $R_2(D,E,G)$, $R_3(H,A)$, $R_4(A,B,D)$ Como no hay ninguna clave incluida se agrega $R_5(A,B,C)$

h) A partir del conjunto F inicial, aplique UN PASO del algoritmo para llevar el esquema R a 4nf con join sin pérdida considerando la dependencia AB→D y proyecte las dependencias.

La descomposición es la siguiente:

 $R_I(A,B,D)$ con proyección de dependencias $\{AB \rightarrow D\}$ $R_I(A,B,C,E,G,H)$ con proyección $\{BC \rightarrow E, CG \rightarrow H, H \rightarrow A, ABE \rightarrow G\}$

i) La dependencia ABE→G, se perdió? SI



Parte 3 – Consultas (25 puntos)

Ejercicio 3.

En una facultad se desea analizar las actividades de los estudiantes en las diferentes carreras, materias y asignaturas. Las carreras están compuestas por materias y las materias por asignaturas (por ejemplo, la materia "Programación" está compuesta por las asignaturas "Programación 1", "Programación 2", "Programación 3", etc.). Una misma materia puede estar en varias carreras. Un estudiante puede estar haciendo varias carreras, por lo cual puede realizar actividades de distintas carreras. Cada materia en una carrera tiene un mínimo de créditos necesarios para aprobar la materia. Cada asignatura (independientemente de la carrera en que esté) tiene un número de créditos que el estudiante gana al aprobarla.

Se tiene una base de datos con las siguientes relaciones:

Estudiantes (ci-est, nom-est, generación)

Esta relación contiene los datos sobre los estudiantes de toda la facultad.

Asignaturas (cod-as, nom-as, créditos, cod-mat)

Esta relación representa las asignaturas que se dictan en la facultad. Contiene los créditos que corresponden a cada asignatura cuando es aprobada, y el código de materia a la que pertenece. Una asignatura pertenece a una única materia.

Materias (cod-mat, nom-mat)

Esta relación contiene todas las materias de la facultad.

Mat-Car (cod-mat, cod-car, creditos-min)

En esta relación se encuentran las materias relacionadas con las carreras y los créditos mínimos que debe tener un estudiante en determinada materia en determinada carrera para tener esa materia aprobada. Una materia puede estar en varias carreras diferentes.

Carreras (cod-car, nom-car, año)

Esta relación contiene las carreras de la facultad. Además contiene el año en que se dictó por primera vez el primer año de cada carrera.

Actividades (ci-est, cod-as, cod-car, tipo-act, fecha, aprobo, nota)

En esta relación se guardan todas las actividades que realizan los estudiantes en la facultad. Estas actividades pueden ser de distintos tipos (examen o realización de curso). El atributo aprobo tiene valor 'S' o 'N'. Si este atributo tiene valor 'S' asumimos que la asignatura esta aprobada totalmente, no importa el tipo de actividad que sea. El atributo fecha corresponde a la fecha en la que se realizó la actividad.

SE PIDE:

- 1) Escribir en Algebra Relacional las siguientes consultas:
 - a) Devolver todos los nombres de asignatura con sus créditos, correspondientes a las carreras de nombre 'Ingenieria en Computación'.

 $\Pi_{\text{cod-as, creditos}}$ [(Asignaturas |><| Mat-Car) |><| ($\sigma_{\text{nom-car}} = \Gamma_{\text{Ing. en comp.}}$ Carreras)]

b) Devolver los estudiantes (ci) de la generación 2000 que rindieron el examen por lo menos una vez de todas las asignaturas de la materia de nombre 'Matemáticas'.

```
A = \Pi_{ci\text{-est, cod-as}} (\sigma_{tipo\text{-act} = 'E'} Actividades) \% \Pi_{cod\text{-as}} [ Asignaturas |><| (\sigma_{nom\text{-mat} = 'Matematicas'} Materias) ] Res = A - \Pi_{ci\text{-est}} (\sigma_{generacion \neq 2000} Estudiantes)
```

Otra forma:

```
\begin{split} &\Pi_{\text{ci-est, cod-as}}\left[\;(\sigma_{\text{tipo-act}\;=\;`E'}\;Actividades)\;|{><}|\;(\sigma_{\text{generacion}\;\neq\;2000}\;Estudiantes)\;\right]\;\%\\ &\Pi_{\text{cod-as}}\left[\;Asignaturas\;|{><}|\;(\sigma_{\text{nom-mat}\;=\;`Matematicas'}\;Materias)\;\right] \end{split}
```

- 2) Escribir en Cálculo Relacional las siguientes consultas:
 - a) Dar nombre de asignatura y nombre de materia, donde ningún estudiante aprobó el examen con nota mayor que 9 a partir del 1/12/2001.

```
{ t.nom-as, u.nom-mat / Asignaturas(t) \land Materias(u) \land t.cod-mat = u.cod-mat \land \neg(\exists w) (Actividades(w) \land w.cod-as = t.cod-as \land w.fecha >= 1/1/2001 \land w.tipo-act = 'E' \land w.nota > 9) }
```

b) Dar las materias para las cuales todas sus asignaturas fueron aprobadas por algún estudiante con la nota 12 en diciembre del 2001.

```
{ t.cod-mat / Materias(t) \land (\forallu) (Asignaturas(u) \land u.cod-mat = t.cod-mat \rightarrow (\existsw) (Actividades(w) \land w.nota = 12 \land w.fecha >= 1/12/2001 \land w.cod-as = u.cod-as)) }
```

- 3) Escribir en SQL las siguientes consultas:
 - a) Dar una lista que contenga código de asignatura, código de carrera y cantidad de aprobados a partir del 1/12/2001.

```
SELECT cod-as, cod-car, COUNT(*)
FROM Actividades
WHERE fecha > 1/12/2001 AND aprobo = 'S'
GROUP BY cod-as, cod-car
```

b) Devolver nombre y ci de los estudiantes de la carrera código 6061 que ya han obtenido por lo menos la cantidad mínima de créditos de la materia 'Programación'.

SELECT E.ci-est, E.nom-est FROM Estudiantes E, Actividades A, Asignaturas As, Materias Ma, Mat-Car M WHERE A.ci-est = E.ci-est AND A.cod-as = As.cod-as AND A.aprobo = 'S' AND As.cod-mat = M.cod-mat AND M.cod-car = 6061 AND Ma.cod-mat = M.cod-mat AND Ma.nom-mat = 'Programacion' GROUP BY E.ci-est, E.nom-est HAVING SUM(As.creditos) >= M.creditos-min

Otra solución:

SELECT E.ci-est, E.nom-est
FROM Estudiantes E, Materias M, Mat-Car MC
WHERE M.nom-mat = 'Programacion' AND
M.cod-mat = MC.cod-mat AND
MC.cod-car = 6061 AND
MC.creditos-min <=
(SELECT SUM(creditos)
FROM Actividades A, Asignaturas As
WHERE As.cod-mat = M.cod-mat AND
A.cod-car = MC.cod-car AND
A.ci-est = E.ci-est AND A.aprobo = 'S')

Parte 4 – Optimización y Concurrencia (25 puntos)

Ejercicio 4.

Dados el esquema relacional del Ejercicio 3 y la siguiente consulta

 $\Pi_{cod\text{-as, creditos}} \left[\ \left((\sigma_{creditos > 10} \ Asignaturas) \ | > < | \ Mat\text{-Car} \) \ | > < | \ (\sigma_{nom\text{-car} = \text{`Ing. en comp...'}} \ Carreras \) \] \right] = (1 - 1) \left[(\sigma_{creditos > 10} \ Asignaturas) \ | > < | \ Mat\text{-Car} \) \ | > < | \ (\sigma_{nom\text{-car} = \text{`Ing. en comp...'}} \ Carreras \) \]$

- 1) Dar un plan lógico de la consulta, aplicando las heurísticas y calculando los tamaños intermedios.
- 2) Elegir una implementación para el primer join y calcular su costo estimado. (Aclaración: No tener en cuenta las proyecciones para el cálculo.)

DATOS:

	ASIGNATURAS	MAT-CAR	CARRERAS
Cantidad tuplas	1300	600	54
Indices	cod-as		cod-car
primarios	(niveles: 2)		(niveles: 1)
Indices	cod-mat		
secundarios	(niveles: 3)		
(B+)			
Cantidad de	50	60	30
tuplas por			
bloque			
Observaciones	- Materias distintas: 400	- Materias distintas: 400	- A cada nombre de
	Distribución uniforme.	- Carreras distintas: 54	carrera le
	- Creditos: entre 5 y 30.	 Distribución uniforme 	corresponden 3

	Distribución uniforme.	de materias en carreras	carreras diferentes.

	ASIGNATURAS >< MAT-CAR	MAT-CAR >< CARRERAS
Cantidad de tuplas por bloque	30	20

Fórmulas para cálculo de costo y de tamaños:

Join (R,S)	Nested Loop (ciclo anidado) sin utilizar índices	b _R + b _R * b _S
	Nested Loop (ciclo anidado) utilizando índice secundario para recuperar tuplas que matchean	$b_R + R * (x + s)$
	Nested Loop (ciclo anidado) utilizando índice primario para recuperar tuplas que matchean	$b_R + R * (x + 1)$
Escribir resultados en disco	Join (R,S)	(js * R * S)/ fbl _{RS}
Selectividad	Selección (atrib. A)	1 / V(A,R)
	Join (atrib. A)	1/ Max (V(A,R), V(A,S))

Notación: b - cantidad de bloques

fbl – factor de bloqueo

x - cantidad de niveles del índice

|R| - cantidad de tuplas de R

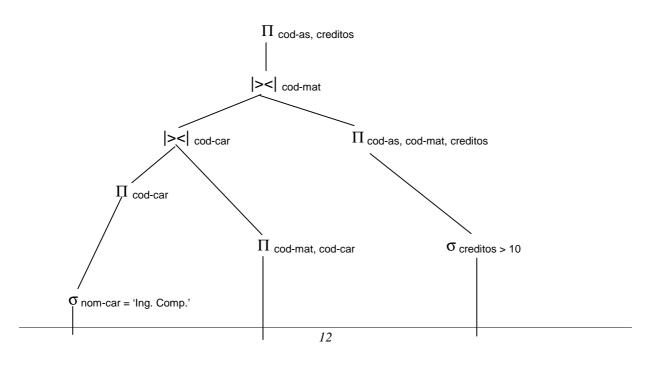
s - selectividad de la selección

js - selectividad del join

V(A,R) - cantidad de valores distintos del atributo A en R

Solución:

1)



CARRERAS

MAT-CAR

ASIGNATURAS

Tamaños: (en cantidad de tuplas)

T (Carreras) = 54

T ($\sigma_{\text{nom-car} = \text{'Ing. Comp.'}}$) = 3

T (Mat-Car) = 600

T (1er. | > < |) = (3 * 600) * js = (3 * 600) / 54 =**34**

T (Asignaturas) = 1300

T
$$(\sigma_{\text{creditos} > 15}) = (1300 * s) * (30 - 10) = (1300 / 25) * 20 = 1040$$

$$T(2^{\circ}, |><|) = (34 * 780) * js = (34 * 780) / 400 = 67$$

Vemos que el orden de las tablas en el árbol esta correcto, ya que en los joins nos quedan del lado izquierdo las que tienen menor cantidad de tuplas.

2)

Implementacion del 1er. join:

$$R = (\sigma_{\text{nom-car} = \text{`Ing. en comp..'}} \text{Carreras})$$

Se implementa con un Nested Loop sin índices, ya que el índice que habia en Carreras se pierde luego de la selección.

Costo (R |><| Mat-Car) =
$$b_R + b_R * b_S + costo$$
-grabar- resultado = $1 + 1 * 10 + ((3 * 600) / 54) / 20 = 11 + 34/20 = 13$

Ejercicio 5.

Dadas las transacciones:

T1: r1(x) w1(x) r1(y) w1(z) c1

T2: r2(x) w2(x) r2(z) w2(z) c2

Marcar con una cruz en el siguiente cuadro si las historias planteadas son: serializables, recuperables, evitan abortos en cascada, estrictas.

	Serializ.	Recup.	EAC	Estricta
--	-----------	--------	-----	----------

r1(x) r2(x) w2(x) w1(x) r1(y) w1(z) r2(z) w2(z) c1 c2		X		
r1(x) w1(x) r2(x) r1(y) w2(x) w1(z) r2(z) w2(z) c2 c1	X			
r1(x) w1(x) r2(x) w2(x) r2(z) r1(y) w2(z) c2 w1(z) c1				
r2(x) r1(x) w2(x) w1(x) r1(y) w1(z) c1 r2(z) w2(z) c2		X	X	
r2(x) r1(x) w2(x) r2(z) w2(z) c2 w1(x) r1(y) w1(z) c1		X	X	X

Ejercicio 6.

Dadas las transacciones:

T1: l1(x) r1(x) w1(x) u1(x) l1(y) r1(y) w1(y) u1(y)

T2: 12(y) r2(y) w2(y) u2(y) 12(x) r2(x) u2(x)

a) Dar un ejemplo de una historia que es impedida por los bloqueos. (no escribir los bloqueos y desbloqueos).

$$r1(x) r2(y) w2(y) r2(x) w1(x) r1(y) w1(y)$$

b) Dar una historia entrelazada que podría ser permitida por los bloqueos.

$$r1(x) r2(y) w2(y) w1(x) r1(y) r2(x) w1(y)$$

c) Si es posible, cambiar de lugar los bloqueos y desbloqueos en T1 y T2 de forma que sigan 2PL, y permitan la siguiente historia:

$$r1(x) w1(x) r2(y) w2(y) r1(y) w1(y) r2(x)$$

Si no es posible, explicar por qué.

No es posible.

Se da el fenómeno de DEADLOCK. Luego que T1 trabaja con 'x' y T2 trabaja con 'y', ambas quedan esperando que la otra transacción libere el elemento que tiene y ninguna de las 2 puede liberarlo hasta no bloquear el que desea (por cumplir el 2PL).

d) Si T1 y T2 usaran el sistema de bloqueo compartido (bloqueo de lectura y bloqueo de escritura), se podría dar una historia entrelazada con T1 y T2 siguiendo el protocolo 2PL? Si la respuesta es afirmativa, escribir esa historia.

$$rl_2(y) \; r_2(y) \; wl_2(y) \; w_2(y) \; rl_1(x) \; r_1(x) \; rl_2(x) \; r_2(x) \; u_2(y) \; u_2(x) \; wl_1(x) \; w_1(x) \; rl_1(y) \; rl_1(y) \; wl_1(y) \; wl_1(y) \; u_1(y) \;$$

Otra:

 $\begin{array}{l} rl_1(x) \; r_1(x) \; rl_2(y) \; r_2(y) \; wl_2(y) \; wl_2(y) \; rl_2(x) \; r_2(x) \; u_2(x) \; wl_1(x) \; w_1(x) \; u_2(y) \; rl_1(y) \; rl_1(y) \; wl_1(y) \\ w_1(y) \; u_1(x) \; u_1(y) \end{array}$