Teoría de Grafos

I. Definiciones Básicas

Los grafos son una manera de representar relaciones binarias, y sirven como modelo matemático para representar el mundo real.

Definición **GRAFO DIRIGIDO (DIGRAFO)**

> Un grafo dirigido es un conjunto V y una relación E asociada a él, esto es:
> $G = (V, E)$ donde: $E \subseteq V \times V$

Los elementos de V se llaman **vértices**, y los de E se llaman **arcos**.

Los grafos son por definición dirigidos, ya que el orden en que aparecen los elementos en cada elemento de E **es** relevante.

Cuando se escribe *(a,b)* se está denotando el arco que va de *a* hasta *b.*

Definición **GRAFO NO DIRIGIDO (GRAFO)**

> Un grafo es *no dirigido* si y sólo si E es simétrica, esto es:
> $(a,b) \in E \Rightarrow (b,a) \in E \qquad \forall a,b \in E$

Cuando hablamos de grafos no dirigidos, los elementos de E se llaman **aristas**.y se denotan {a,b}

Cuando se considera como no dirigido un grafo que originalmente es dirigido, se habla del **grafo fundamental** del grafo dirigido.

Definición **GRAFOS SIMPLES**

> Un grafo es *simple* si y sólo si E es irreflexiva, esto es:
> $(a,a) \notin E \qquad \forall a \in E$

Un elemento de E del tipo *(a,a)* se llama **loop**.

Cuando se considera un grafo, dirigido o no, sin considerar los loops que contenga, se habla del **grafo simple** del grafo original.

Definición **ORDEN Y TAMAÑO DE UN GRAFO**

> Sea $G = (V, E)$ un grafo, se definen:
> *orden(G)* = $|V(G)|$
> *tamaño(G)* = $|E(G)|$

Definición **ADYACENCIA DE NODOS**

Sean $G=(V,E)$ un grafo. $v,w\in V$ son *adyacentes* si y sólo si:
$(v,w)\in E$ ó $(w,v)\in E$

Definición **ROTULADOR DE VÉRTICES (ARCOS)**

Un *rotulador* de vértices (arcos) es una función

$f:E(G)\rightarrow D$ para arcos,

$g:V(G)\rightarrow D$ para vértices,

donde D es algún dominio de rótulos (un valor, por ejemplo).

Estas últimas definiciones pueden parecer arbitraria, pero más adelante veremos su utilidad.

II. Grado de un Vértice

Teorema **GRADO DE UN VÉRTICE**

Sea $v\in V$ un vértice de un grafo, se definen:

grafos dirigidos:

$grado^{+}(a) = \left|\{a\in V:(b,a)\in E\}\right|$ (aristas que <u>llegan al vértice</u> a)

$grado^{-}(a) = \left|\{a\in V:(a,b)\in E\}\right|$ (aristas que <u>salen del vértice</u> a)

$grado(a) = grado^{+}(v) + grado^{-}(v)$ (todas las aristas)

grafos no dirigidos:

$grado(a) = \left|\{a\in V:(a,b)\in E\}\right|$

a).1.1.2 Primer Teorema de Grafos

Sea $G=(V,E)$ un grafo, entonces:

grafos dirigidos:

$$\sum_{v\in V} grado^{-}(v)=\sum_{v\in V} grado^{+}(v)=|E|$$

grafos no dirigidos:

$$\sum_{v\in V} grado(v)=2\cdot|E|$$

Corolario: en cualquier grafo no dirigido, hay un número par de vértices de grado impar.

Teorema **GRADO MÍN (MÁX) DE UN GRAFO**

Sea $G=(V,E)$ un grafo, se definen:

$\delta(G) = min\{grado(v) : v \in V(G)\}$

$\Delta(G) = max\{grado(v) : v \in V(G)\}$

Teorema **GRAFO K-REGULAR**

Un grafo $G=(V,E)$ es *k-regular* si y sólo si

$grado(v) = k \qquad \forall v \in V$

Los de grado 0 (**nulos de orden n**), 1 y 2 (**ciclos de orden n**) son triviales, pero los de grado 3 o mayor (llamados **cúbicos**) no lo son:

III. Subgrafos

Teorema **SUBGRAFO**

Sea $G=(V,E)$ un grafo, entonces un *subgrafo* de G es un grafo $G'=(V',E')$ con: $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ tales que $(a,b) \in E' \Rightarrow a,b \in V'$

Un subgrafo no es más que una parte del grafo original. Se dice que G' tiene la **extensión** de G cuando $V' = V$, pero note que no necesariamente $E' = E$.

Teorema **SUBGRAFO INDUCIDO**

Sea $G=(V,E)$ un grafo, y sea $V' \subseteq V$, entonces el subgrafo inducido por V' es: $G'=(V',E')$, con $E' = \{(a,b) : a,b \in V' \wedge (a,b) \in E\}$

IV. Isomorfismo de Grafos

Teorema **ISOMORFISMO**

Sean $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ grafos. G y G' son isomorfos si y sólo si existe una función biyectiva: $\varphi : V \to V'$ tal que $\forall a,b \in V$ se tiene:

$(a,b) \in E \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi(a),\varphi(b)) \in E'$

Notación: $G \approx G'$ (isomorfos)

Teorema **INVARIANTE**

Sean $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ grafos Una *invariante* es toda función del tipo $\eta : Grafos \to N$ tal que:

$G \approx G' \quad \Rightarrow \quad \eta(G) = \eta(G')$

Hasta ahora se han revisado los siguientes invariantes:

$|V(G)|$, $|E(G)|$,
grado$^+$(v), grado$^-$(v), grado(v),
$\delta(G)$, $\Delta(G)$.

V. Operaciones con Grafos

Teorema **UNIÓN E INTERSECCIÓN DE GRAFOS**

Sean $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ grafos. Se definen la *intersección* y la *unión* de grafos como:

$$G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$$
$$G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$$

Teorema **RESTA DE GRAFOS (COMPLEMENTO)**

Sean $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ un subgrafo de G. Se define:

$G-G'=(W,E-E')$, con $W=\{v : v \in V \wedge (v,w) o (w,v) \in E-E', w \in W\}$

Esta definición dice, en palabras, que *G*-*G’* contiene todas las aristas de G que no están en G’, junto a todos los vértices asociados a las aristas obtenidas.

Teorema **COMPLEMENTO DE GRAFOS ($\overline{G}$)**

Sea $G=(V,E)$ un grafo. Se define:

$\overline{G}=K_n-G$ con $n=|V|$

Observación: $G \cup \overline{G} = K_n$

Teorema **ELIMINACIÓN DE ARISTAS Y VÉRTICES**

Sea $G=(V,E)$ un grafo, y sea $e \in E$ una arista del grafo, entonces:

$$G-e=(V,E-e)$$

$G-v=(V-v,F)$ con F tal que contiene toda arista de E que no incluya a v como uno de sus extremos.

Usamos la notación $G-\{e_1,\ldots,e_n\}$ para eliminar más de una arista o vértice.

VI. Caminos, Trayectorias y Conectividad

Teorema **CAMINO (TRAYECTORIA)**

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido (dirigido). Un *camino (trayectoria)* es una tupla $(v_0,\ldots,v_k)$, $v_i \in V$, tal que:

$$(v_{i-1},v_i) \in E, \quad \forall i = 1..k \quad k \in N \quad k \geq 0$$

Se dice que un camino va desde *a* hasta *b* si y sólo si $v_0=a$ y $v_k=b$.

También se habla de **trayectorias** al referirse a los caminos, y en el caso de grafos dirigidos se habla de **trayectorias o caminos dirigidos**.

Un camino es **simple** cuando todos los arcos y vértices recorridos son distintos, excepto tal vez v_0 y v_n.

Teorema **LONGITUD**

Sea $(v_0,\ldots,v_k)$ una trayectoria. La *longitud* de ella es el valor k.

Teorema **CONECTITUD DE VÉRTICES (DÉBIL, UNILATERAL, FUERTE)**

Sea $G=(V,E)$ un grafo. $a,b\in V$ son *(débil-* **|** *unilateral-* **|** *cuasifuerte-* **|** *fuertemente) conexos* si y sólo si:

débilmente:
existe un camino no dirigido desde *a* hasta *b*.
cuasi-fuertemente:
existe un vértice *v* desde el cual existen trayectorias dirigidas hacia *a* **y** hasta *b*.
unilateralmente:
existe una trayectoria dirigida desde *a* hasta *b*, **o** viceversa.
fuertemente:
existe una trayectoria dirigida desde *a* hasta *b*, **y** viceversa.

Teorema **GRAFO CONEXO (DÉBIL, UNILATERAL, FUERTE)**

Un grafo $G=(V,E)$ es *(débil-* **|** *unilateral-* **|** *cuasifuerte-* **|** *fuertemente) conexo* si y sólo si:

débilmente:
$\forall a,b\in V$ existe un camino no dirigido desde *a* hasta *b*.
cuasi-fuertemente:
$\forall a,b\in V$ existe un vértice v, desde el cual existe una trayectoria dirigida hasta *a* **y** hasta *b*
unilateralmente:
$\forall a,b\in V$ existe una trayectoria dirigida desde *a* hasta *b*, **o** viceversa.
fuertemente:
$\forall a,b\in V$ existe una trayectoria dirigida desde *a* hasta *b*, **y** viceversa.

Teorema **COMPONENTES CONEXOS**

Sea $G=(V,E)$ un grafo. Sea G' un subgrafo de G. G' es *subgrafo (...) conexo maximal* de G si y sólo si G' es (...) conexo y no existe otro subgrafo de G, $G''\supset G'$ tal que G'' también es (...) conexo.

G' es *componente (...) conexo* de G si y sólo si G' es subgrafo (...) conexo maximal de G. Note que la unión de todos los componentes (...) conexos de G es el mismo grafo G original.

a).1.1.2 Tipos de Conectitud

Sea $G=(V,E)$ un grafo, y sean $a,b\in V$. Se tiene que:

	a y b fuertemente conexos		G fuertemente conexo
$\Rightarrow$	a y b unilateralmente conexos	$\Rightarrow$	G unilateralmente conexo
$\Rightarrow$	a y b cuasi-fuertemente conexos	$\Rightarrow$	G cuasi-fuertemente conexo
$\Rightarrow$	a y b débilmente conexos	$\Rightarrow$	G débilmente conexo

a).1.1.3 Teorema de Conectitud de Digrafos

Un grafo dirigido $G=(V,E)$ es débilmente conexo si y sólo si su grafo fundamental (no dirigido) es fuertemente conexo..

Teorema **ARISTA O VÉRTICE DE CORTE**

Sean $G=(V,E)$ un grafo conexo, $e\in E$ una arista y $v\in V$ un vértice del grafo. e es *arista de corte* (v es *vértice de corte*) si y sólo si $G-e$ no es conexo ($G-v$ no es conexo).

VII. Ciclos

Teorema **CIRCUITO**

Sea $G=(V,E)$ un grafo. Un *circuito* es un camino $(v_0,\ldots,v_k)$, $v_i\in V$, tal que $v_0=v_k$, esto es, un camino cerrado.

Sabemos que un circuito de longitud 1 se llama **loop**.

Teorema **CICLO**

Sea $G=(V,E)$ un grafo. Un *ciclo* es un circuito simple $(v_0,\ldots,v_k)$, $v_i\in V$, tal que $v_0=v_k \quad y \quad k>0$, esto es, un camino cerrado no trivial (más de un nodo).

VIII. Tipos Comunes de Grafos

Teorema **GRAFO NULO DE ORDEN N (N_N)**

Un grafo $G=(V,E)$ es *Nulo de Orden n* si y sólo si

$|V|=n$

y *grado(v) = 0* $\quad\forall v\in V$

Teorema **GRAFO COMPLETO DE ORDEN N (K_N)**

Un grafo $G=(V,E)$ es *Completo de Orden n* si y sólo si

$\left|V\right| = n$

y $\quad (v_i, v_j) \in E \qquad \forall v_i, v_j \in V,\ v_i \neq v_j$

Note que un grafo K_n es un grafo $(k-1)$-regular

a).1.1.2 de Grafos Completos de Orden n

Sea $G=(V,E)$ un grafo completo de orden n, entonces se tiene que:

$$\left| E \right| = \frac{n}{2}(n-1)$$

Teorema **GRAFO BIPARTITO**

Un grafo $G=(V,E)$ es *bipartito* si y sólo si existen $A \subseteq V$ y $B \subseteq V$ tales que:

$A \cup B = V$

$A \cap B = \varnothing$

y $\quad (v_i, v_j) \in E \Rightarrow v_i \in A \wedge v_j \in B$ o viceversa

Teo: G es bipartito si y sólo si todo ciclo en G tiene longitud par.

Teorema **GRAFO BIPARTITO COMPLETO DE ORDEN N ($K_{N,M}$)**

Un grafo $G=(V,E)$ es *bipartito completo* si y sólo si existen $A \subseteq V$ y $B \subseteq V$ tales que: $\left|A\right| = n$, $\left|B\right| = m$

$A \cup B = V$

$A \cap B = \varnothing$

$v_i \in A \wedge v_j \in B \Rightarrow (v_i, v_j) \in E \ \forall v_i, v_j \in$ v con $v_i \neq v_j$

Teorema **CICLO DE ORDEN N (C_N)**

Un grafo $G=(V,E)$ es un *ciclo de orden n* si y sólo si $\left|V\right| = \left|E\right| = n$ y cuyas aristas forman un ciclo de longitud n.

Teorema **TRAYECTORIA DE ORDEN N (P_N)**

Un grafo $G=(V,E)$ que es una *trayectoria de orden n* se obtiene quitando una arista cualquiera de un ciclo de orden *n*.

Teorema **RUEDA DE ORDEN N - WHEEL (W_N)**

Un grafo $G=(V,E)$ que es una *rueda de orden n* se obtiene agregando un vértice a un ciclo de orden *n-1*, el cual se une mediante *n-1* nuevas aristas a todos los vértices originales.

a).1.1.3 de Ruedas de Orden n

Sea $G=(V,E)$ una rueda de orden n, entonces se tiene:

$$|V|=n$$

y $$|E|=2\cdot(n-1)$$

IX. Arboles

Teorema **ARBOL**

Un grafo $G=(V,E)$ es un *árbol* si y sólo si es un grafo simple y $\forall a,b\in V$, existe una única trayectoria simple desde a hasta b.

a).1.1.2 Teorema de Arboles

Sea $G=(V,E)$ un grafo. Entonces las siguientes afirmaciones son todas equivalentes entre sí:

a) G es un árbol
b) G es simple, conexo y acíclico;
c) $|E|=|V|-1$ y G es conexo y simple;
d) $|E|=|V|-1$ y G es acíclico y simple;
e) G es acíclico maximal y simple;
f) G es conexo minimal y simple.

a).1.1.3

En todo árbol no trivial (2 o más vértices) hay al menos un vértice de grado 1.

a).1.1.4

Sea $G=(V,E)$ un árbol, entonces G es Bipartito

Teorema **ARBOL CON RAÍZ (ROOTED-TREE)**

$G=(V,E)$ es un *árbol con raíz* si y sólo si existe un vértice designado como raíz. Un rooted-tree es *dirigido* si y sólo si existe una trayectoria dirigida desde la raíz hasta cada vértice del árbol.

Observación: Todo vértice de un árbol puede ser su raíz, pero un rooted-tree dirigido posee una única de ellas.

Def: En un Rooted-Tree, todo vértice de grado 1 (exepto quizá la raíz) se llama **hoja**.

Teorema **NIVEL**

Sean $G=(V,E)$ un árbol con raíz, $v\in V$. El *nivel* del vértice v es la longitud de la trayectoria desde la raíz hasta v.

X. Tipos Comunes de Arboles

Teorema **ARBOL DE COBERTURA**

Sea $G=(V,E)$ un grafo, y sea H un subgrafo de G. H es *árbol de cobertura* de G si y sólo si:

H es un árbol

y $V(H)=V(G)$ (H un subgrafo de cobertura de G)

Teorema **CO-ARBOL**

Sea $G=(V,E)$ un grafo, y sea H un árbol de cobertura de G. Un *co-árbol* de G se define como el complemento con respecto a G de H, agregando todas los vértices de G.

Observación: Todo co-árbol de G contiene $|E|-|V|+1$ aristas (**número cicomático** de G).

Teorema **B-TREE DE GRADO K**

Sea $G=(V,E)$ un árbol. G es un *B-Tree de grado k* si y sólo si:

i) todas las hojas están en el mismo nivel;
ii) todos los vértices que no son hojas tienen al menos $\lceil ½k \rceil$ hijos;
iii) la raíz, o no tiene hijos, o tiene 2 o más hijos; y
iv) ningún vértice tiene más de k hijos.

a).1.1.2 B-Trees

Un B-Tree de grado k y altura h (mayor nivel para una hoja) tiene al menos $2\left(\frac{1}{2}k\right)^{h-1}$ hojas, para $h>0$.

Teorema **ARBOL BINARIO**

Un *árbol binario* es un árbol dirigido $T=(V,E)$ junto a un rotulador $f:E\to\{0,1\}$ tal que cada vértice tiene a lo más una arista “saliente” rotulada con 0, y a lo más una arista “saliente” rotulada con 1.

Cada aristas (u,v) rotulada con 0 (1) se llama *arista izquierda (derecha)*. u es el padre y v el *hijo izquierdo (derecho)*.

Teorema **INDICE DE ORDEN-NIVEL EN ARBOLES BINARIOS**

Sea $T=(V,E)$ un árbol binario. Cada vértice $v\in V$ tiene un *índice de orden-nivel* definido como:

$$ind(v)=\begin{cases} 1 & ,\ v \text{ es raiz} \\ 2\cdot ind(u) & ,\ v \text{ es hijo izq.} \\ 2\cdot ind(u)+1 & ,\ v \text{ es hijo der.} \end{cases}$$

con u el padre de v.

Teorema **ARBOL BINARIO COMPLETO**

Un árbol binario es *completo* si y sólo si los índices de los vértices en el *l*-ésimo nivel están en el intervalo completo

$\left(2^l, n\right)$ o $\left(2^l, 2^{l+1}-1\right)$, con $n < 2^{l+1}-1$

XI. Grafos Planares y Multigrafos

Teorema **GRAFO PLANAR - PLANO**

Un grafo es *plano* cuando está dibujado de manera que ningún par de aristas se cruza. Un grafo es *planar* cuando es posible dibujarlo como grafo plano.

Observación: K_5 es el grafo no planar con el menor número de vértices (5).
$K_{3,3}$ es el grafo no planar con el menor número de aristas (9).

a).1.1.2 Planaridad (Kuratowski)

Un grafo es planar si y sólo si no contiene como subgrafos el grafo $K_{3,3}$ ni el grafo K_5.

Teorema **REGIONES (R)**

Sea $G=(V,E)$ un grafo planar. El conjunto de *Regiones* R de G es el conjunto de las regiones delimitadas por G al dibujarlo como plano.

Notación: un grafo planar se denota como $G=(V,E,R)$, con R el conjunto de regiones del grafo.

Teo: $\sum_i grado_G(r_i) = 2 \cdot |E|$

Teo: $|V| + |R| = |E| + 2$

Teo: $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$

Teo: $3 \cdot |R| \leq 2 \cdot |E|$

Teorema **MULTIGRAFO**

Un *multigrafo* es un grafo dirigido o no dirigido $G=(V,E)$ tal que una arista $e \in E$ puede aparecer más de una vez en el conjunto E. La notación para multigrafos no será vista aquí.

Teo: la suma de los grados de sus vértices es par (sólo para no dirigido);
Teo: existe un número par de vértices de grado impar;

a).1.1.3 Planaridad de Complementos

Sea $G=(V,E)$ un grafo, y sea su $\ddot{G}$ complemento, entonces se tiene:

$|V|<8 \quad \Rightarrow$ al menos uno ***no es*** planar;

$|V|>8 \quad \Rightarrow$ al menos uno ***es*** planar;

$|V|=8 \quad \Rightarrow$ no se sabe nada;

Teorema **GRAFO DUAL**

Sea $G=(V,E)$ un grafo planar. Se define el *grafo dual* G^* de G de la siguiente manera:

i) A cada región r en G se le asocia un vértice r^* en G^*;
ii) A cada arista e en G; se le asocia una arista e^* en G^*.
iii) Dos vértices en G^* están unidos por una arista e^* si y sólo si las regiones asociadas a los vértices están separadas por una arista e en G.

Observación: El grafo resultante puede ser un multigrafo.

Teo: Sea G^* el grafo dual de G. Se tiene:

$$|E^*|=|E|$$
$$|V^*|=|R|$$
$$|R^*|=|V|$$
$$grado_{G^*}(v^*)=grado_G(r)$$

con R conjunto de regiones r_i de G.

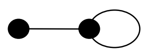
Teorema **AUTODUAL**

Un grafo es *autodual* si y sólo si su es isomorfo con su complemento.

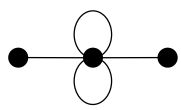
Observación.: para todo valor de $n=|V|$ existe al menos un grafo autodual trivial. Veamos:

n = 0 : *(trivial)*

n = 1 :



n = 2 :



n = 3 :

n = 4 o más: W_n

XII. Trayectorias y Circuitos Eulerianos

Teorema **TRAYECTORIA-CIRCUITO EULERIANO**

Sea G un multigrafo. Una *trayectoria euleriana* es una trayectoria que:

Incluye toda arista del grafo exactamente una vez;

intersecta cada vértice del grafo a lo menos una vez.

Un *circuito euleriano* es una trayectoria euleriana que constituye un circuito.

Si un grafo tiene circuito euleriano se dice que es **recorrible**.

Un multigrafo que tiene circuito euleriano se denomina **multigrafo euleriano**.

a).1.1.2 de Trayectorias Eulerianas

Un multigrafo $G=(V,E)$ tiene trayectoria euleriana si y sólo si:

no dirigido:

es conexo; y

tiene exactamente ningún o dos vértices de grado impar.

dirigido:

es unilateralmente conexo; y

$grado^+(v) = grado^-(v)$ $\forall v \in V$, excepto quizá para exactamente 2 vértices, para los cuales se tiene:

$$grado^+(v) = grado^-(w)+1$$

y $$grado^+(v) = grado^-(w)-1$$

a).1.1.3 de Circuitos Eulerianos

Un multigrafo $G=(V,E)$ tiene circuito euleriano si y sólo si:

no dirigido:

es conexo; y

tiene todos sus vértices de grado par.

dirigido:

es unilateralmente conexo; y

$grado^+(v) = grado^-(v)$ $\forall v \in V$.

XIII. Grafos Hamiltonianos

a).1.1.1 Trayectoria-Ciclo Hamiltoniano

Sea G un grafo. Una *trayectoria hamiltoniana* es una trayectoria simple que contiene todos los vértices de G.

Un *circuito hamiltoniano* es una trayectoria hamiltoniana que constituye un ciclo.

Un grafo que tiene ciclo hamiltoniano se denomina **grafo hamiltoniano**.

Reglas Básicas para construir Trayectorias y Ciclos Hamiltonianos:

1) Sea $|G| = n$, entonces una trayectoria hamiltoniana debe contener exactamente $n-1$ aristas del grafo, y un ciclo hamiltoniano exactamente n aristas;
2) Si *grado(v)=k*, para algún $v \in V$, entonces una trayectoria hamiltoniana debe contener al menos una y a lo más dos arista incidentes sobre *v*; un ciclo hamiltoniano debe contener exactamente dos aristas incidentes sobre *v*. En particular, si *k=2*, ambas aristas incidentes deben pertenecer al ciclo ham.).
3) Ningún ciclo que no contenga todos los vértices puede formarse mientras se construye el ciclo o trayectoria hamiltoniana.
4) Una vez que se ha pasado por un vértice dado, todas las aristas incidentes sobre él deben ser descartadas del análisis.

a).1.2

Todo grafo completo K_n tiene trayectoria hamiltoniana, $\forall n \in N$; y
Todo grafo completo K_n tiene ciclo hamiltoniana, $\forall n > 2$.

XIV. Coloración de Vértices

Teorema **COLORACIÓN DE VÉRTICES**

Asignación de color (elemento de un conjunto dado) a los vértices de un grafo, de modo que vértices adyacentes nunca reciban el mismo color.

Teorema **N-COLORACIÓN**

Sea G un grafo. Una *n-coloración* es una coloración utilizando n colores. Se dice que G es n-coloreable.

Teorema **NÚMERO CROMÁTICO (ℵ)**

Sea G un grafo. El *número cromático* de G es el menor número *n* para el cual existe una n-coloración de G. Se dice que G es n-cromático.

Reglas Básicas para Determinar $\aleph(G)$:

1) $\aleph(G) \le |V|$
2) $\aleph(K_n) = n$
3) Si un subgrafo de G requiere k colores, entonces $\aleph(G) \ge k$
4) Si *grado(v)* = d, entonces se requieren a lo más d colores para los vértices adyacentes a v
5) $\aleph(G) = max\{\aleph(H): H \text{ componente conexo de } G\}$
6) $\aleph(G) = k \quad \Rightarrow \quad$ hay k vértices de *grado()* $\ge k-1$
7) $\aleph(G) \le \Delta(G) + 1$
8) $\aleph(G) \ge \dfrac{|V|}{|V| - \delta(G)}$

a).1.1.2 Los Cinco Colores

> Sea *G* un grafo planar, entonces $\aleph(G) \le 5$

XV. Dominancia, Independencia y Cobertura

Teorema **GRAFO (ALT.)**

> Un grafo es un conjunto de vértices X junto a una correspondencia $\mathrm{T} : X \to P(X)$ P(x):conjunto potencia de X que relaciona pares de vértices (mapamiento). $G = (V, E) = (X, \mathrm{T})$
>
> donde: $\mathrm{T}(v) = \{w : (v, w) \in E, w \in V\}$
>
> $\mathrm{T}^{-1}(v) = \{w : (w, v) \in E, w \in V\}$

Observación: En grafo no dirigido: $\mathrm{T}^{-1}(x) = \mathrm{T}(x), \quad \forall x \in X$

Def: $\mathrm{T}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \mathrm{T}(x_1) \cup \ldots \cup \mathrm{T}(x_n)$

Teorema **CONJUNTO INDEPENDIENTE (INTERNAMENTE ESTABLE)**

> Sea $G = (X, \mathrm{T})$ un grafo no dirigido. Entonces S es *conjunto independiente* si: $S \subseteq X$ y $S \cup \mathrm{T}(S) = \varnothing$

Observación: S independiente $\Rightarrow$ no existen vértices adyacentes en *S*.

Teorema **CONJ. INDEPENDIENTE MAXIMAL**

> Sea $G = (X, \mathrm{T})$ un grafo no dirigido. Entonces S es *conjunto independiente maximal* si S es conj. independiente y no existe $P \supset S$ conj. indep.

Observación: Puede haber conjuntos independientes maximales de distinto tamaño.

Teorema **NÚMERO DE INDEPENDENCIA** (INVARIANTE)

$$\alpha[G] = max\{\,|\,S\,| : S \subseteq X \;\; es\; conj.\, indep.\}$$

Teorema **CONJUNTO DOMINANTE (EXTERNAMENTE ESTABLE)**

Sea $G = (X, \mathrm{T})$ un grafo no dirigido. Entonces S es *conjunto dominante* si y:
$S \subseteq X$ y $S \cup \mathrm{T}(S) = X$

Observación: S dominante $\Rightarrow$ todos los vertices de V-s son adyacentes desde *S*.

Teorema **CONJ. DOMINANTE MNIMAL**

Sea $G = (X, \mathrm{T})$ un grafo no dirigido. Entonces S es *conjunto dominante minimal* S es conj. dominante y no existe $P \supset S$ conj. dominante.

Observación: Puede haber conjuntos dominantes minimales de distinto tamaño.

Teorema **NÚMERO DE DOMINANCIA** (INVARIANTE)

$$\beta[G] = min\{\,|\,S\,| : S \subseteq X \;\; es\; conj.\, dominante.\}$$