1. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{3}\,x + y & \text{si } x^2+y^2<1 \\ -y & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

   (a) Describir en coordenadas polares el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) \geq 0\}$

   (b) Analizar la continuidad de $f(x,y)$ en los puntos del eje x.

2. Sea $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (-t+3, e^t)$ y sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ tal que el plano tangente al gráfico de $z = f(x,y)$ en el punto $(3,1,6)$ tiene ecuación $z = a\,x + b\,y + 1$. Si se sabe que la función $h(t) = f(g(t))$ es tal que $h'(0) = 2$, determinar a y b.

3. Sea $\overline{X}(u,v) = (\sqrt{u^2+1}\,cos(v), \sqrt{u^2+1}\,sen(v), u)$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, $u \in \mathbb{R}$ una parametrización de la superficie S. Calcular la intersección de S con el plano tangente a S en el punto $(1,0,0)$. Graficar.

4. Sea $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función $C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\lim_{h\to 0} \dfrac{g(h,2)-g(0,2)}{h} = 36$ y sea $z = f(x,y)$ definida implícitamente en un entorno de $(0,2,f(0,2))$ por $x^2\,z + y\,z^3 - 2\,x\,y + x\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 128$. Dar la dirección de derivada direccional mínima f en $(0,2)$ y hallar su valor.

5. Sea $g(x,y) = f(x,y) + sen[(x-1)\,(y+1)]$ siendo $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función $C^3(\mathbb{R}^2)$ tal que su desarrollo de Taylor de orden 2 en $(1,-1)$ es $p(x,y) = x^2 + 2\,y^2 - x\,y - 3\,x + 5\,y + 2$. Analizar si g tiene un extremo en $(1,-1)$ y en caso afirmativo clasificarlo y dar el valor.

UBA 04-05-2009 | Análisis Matemático II | Primer Parcial

1. Sea $f(x,y) = \begin{cases} (x-1)\,(y+1) & \text{si } y \geq x^2 \\ x^2 - y & \text{si } y < x^2 \end{cases}$

   a) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

   b) Halle todos los puntos del domino de f donde la función es continua.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función $C^3(\mathbb{R}^2)$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $(2,7)$ es $p(x,y) = x^2 - (1/2)\,x\,y + (1/2)\,x + 4$. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z) = f(x^2 + y - z^3, 3\,x + 2\,y\,z) - 2\,x^2$. Verifique que el punto $P = (1,2,1)$ pertenece a la superficie de nivel 0 de $g(x,y,z)$ y halle el plano tangente a dicha superficie en P.

3. Halle a de manera que $f(x,y) = x^3 + y^3 + a\,x - 12\,y + 1$ tenga extremo en $(1,2)$. Con ese valor de a, clasifique todos los puntos críticos de f.

4. Sea la curva C intersección de las superficies S_1 y S_2 en primer cuadrante, con$S_1 : \{(x,y,z) \in R^3$ tal que x+2z=1)yX(u,v)=(u, u^2, v), $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, una parametrización de S_2.
   Grafique la curva y encuentre los puntos de C donde el vector tangente es paralelo al plano $x + y + 4\,z = 0$.

5. Pruebe que la ecuación $2\,z\,ln(y-x) + x\,y + x\,z^2 - 3 = 0$ define implícitamente en un entorno del punto $(1,2,1)$ a $z = f(x,y)$. Halle un valor aproximado de $f(0{,}98, 2{,}02)$.

1. Sean $g(t) = e^t$, y $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z$.

   a) Grafique la superficie de nivel de la función $h(x, y, z) = (g \circ f)_{(x,y,z)}$ que pasa por el punto $(0, 0, -1)$.

   b) Parametrice la curva intersección de la superficie del punto anterior, con el plano $z = y$.

2. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = x + x^2\, y$, en el punto $P_0 = (1, 2)$, según la dirección del vector tangente a la curva C definida por $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 2$ en P_0, y con sentido de manera que la coordenada x del vector tangente sea positiva.

3. *a*) Demuestre que la ecuación $z^2\, x + z\, y^2 + 3\, e^{x\,y+2} = 0$ define implícitamente a $z = f(x, y)$ en un entorno de $Q_0 = (-2, 1, -1)$.

   b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva C intersección del gráfico de f con el plano $x = -2$, en el punto Q_0.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^3(\mathbb{R}^2)$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $(1, 2)$ es $p(x, y) = a\, x^2 + 2\, y^2 - x\, y + \frac{7}{6}$. Encuentre a sabiendo que el plano tangente al gráfico de $z = f(x^3, x + y)$ en el punto $(1, 1, z_0)$ es paralelo al eje x. Escriba la ecuación cartesiana de ese plano.

5. Estudie los extremos de $f(x, y) = 2\, x^3 + 3\, y^3 + 3\, x^2\, y - 36\, y + 1$.

1. Dada $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2-3\,y^2}$ describa el dominio y el conjunto de positividad de f en coordenadas polares.

2. Sea $\overline{X}(u,v) = (2\,cos(u)+2, v, 2\,sen(u))$, $(u,v) \in [0,\pi] \times [-2,2]$, una parametrización de la superficie S.

   (a) Obtenga la cuación de S en coordenadas cartesianas y grafique la superficie.

   (b) Halle la intersección de la recta tangente a la curva $\overline{X}(u,0)$ en $(2+\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, con el plano $z = -\sqrt{2}$.

3. Sea C la curva definida como intersección de las superficies $x\,y\,z + z\,ln(y) - x\,z^2 + x^2 = 1$ y $x^4 - cos(z) + y\,z + y^2 = 1$. Determine si la curva dada por la parametrización $\vec{\gamma}(t) = (3\,t^2 - e^t + 2, e^t - t^2 + 2, e^t + 3)$ está contenida en el plano normal a C en $P_0 = (-1,1,0)$.

4. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^1(\mathbb{R}^2)$ y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = f(x\,y + y, y^2\,x - 2\,x)$. Sabiendo que

   - la máxima derivada direccional de h en $(1,1)$ es $\sqrt{13}$
   - $\nabla h(1,1)$ tiene componentes positivas y es ortogonal al vector $(-4,6)$,

   halle la derivada direccional mínima de f en $(2,-1)$.

5. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $(1,0)$ es $p(x,y) = -1 + x - y - x^2 + 2\,x\,y - (1/2)\,y^2$. Analice si $f(x,y) = x^2\,y + x\,g(x,y)$ tiene un extremo en $(1,0)$ y en caso afirmativo clasifíquelo y encuentre su valor.

UBA 06-08-2009 Análisis Matemático II Recuperatorio - Tema 1

1. Sea $z = f(x, y)$ la función definida implícitamente en un entorno del punto $(2/3, -1/3, 0)$ por la ecuación: $3x^2 + 3y^2 + 3xy + 3e^z + 3z - 4 = 0$.

   Determinar si el plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x, y) - 2y$ en el punto $(2/3, -1/3, g(2/3, -1/3))$ es paralelo al plano $x + 4y + 2z = 0$.

2. Sea C la curva obtenida de la intersección entre las superficies:

   $S_1 : \varphi(u, v) = (u\,cos(v), 1 + u^2, \frac{1}{\sqrt{2}} u\,sen(v))$, $(u, v) \in [0, 2] \times [-\pi/2, \pi/2]$, y $S_2 : x^2 + z^2 = 1$.

   Graficar aproximadamente la curva C, y hallar la ecuación de la recta tangente a C en el punto $(1, 2, 0)$.

3. Una superficie plana tiene una distribución estacionaria de temperaturas dada por:

   $T(x, y) = 9 - (x - 1)^2 - 2(y - 2)^2$. Suponemos que la superficie es infinita ($\mathbb{R}^2$), que (x, y) indica la posición en la superficie; x, y dadas en cm y los coeficientes de la distribución están dados en unidades tales que la temperatura resulta expresada en ^oC.

   a) Demostrar que el punto $(1, 2)$ es el punto donde la temperatura de la superficie es máxima. Calcular el valor de dicha temperatura.

   b) Si una hormiga se encuentra en el origen de coordenadas, determinar la dirección de mayor aumento de temperatura para la hormiga, y hallar el valor de la máxima variación de la temperatura en las unidades correspondientes.

4. Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de segundo orden en el entorno del punto $(3, 3)$ es $p(u, v) = 16 + u^2 - 2uv - v^2$.

   Si $w = f(x^2 + xy, y^2 - x)$, calcular aproximadamente el valor de $w(0.98\ ,\ 2.02)$.

5. Sea $f(x, y) = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 9)}$.

   a) Graficar el dominio de la función dada.

   b) Describir en coordenadas polares el conjunto $A = \{(x, y) \in^2 / f(x, y) > 0\}$.

1. Sea $f(x,y) = \begin{cases} x+y & si\ x \geq -2 \\ 0 & si\ x < -2 \end{cases}$

   a) Hallar los puntos de discontinuidad de f.

   b) Graficar y describir en coordenadas polares el conjunto de nivel 0 de f.

2. Sea C la curva descripta por las ecuaciones $\begin{cases} x = z + y \\ x = z^3 - y \end{cases}$.
   Hallar el punto del primer octante donde la curva C se intercepta con la superficie S de ecuación $x - y + z^2 = 6$, y analizar en dicho punto si la curva C y la superficie S se cortan ortogonalmente.

3. Sea el polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $P_0 = (1,1)$ de una función $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ $p(x,y) = 4x - 2x^2 + y - y^2$. Hallar todos los $\hat{v}$ unitarios tal que $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(1,1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Sea $F(x,y,z) = 10x^5 + y^2 z + ln(z+1) - 10$. Demostrar que $F(x,y,z) = 0$ define implícitamente una función $z = g(x,y)$ en un entorno del punto $(1,2,0)$, y calcular $g(0{,}97, 2{,}01)$ usando una aproximación lineal.

5. Sea $g(x,y) = h(u(x), v(y))$, siendo $h(u,v) = -u^2 + e^{-v^2}$ y u y v funciones $C^3(\mathbb{R})$ que satisfacen: $u(1) = v(2) = 0,\ u^{'}(1) = v^{'}(2) = 1$.
   Analizar si en el punto $(1,2)$ la función g alcanza un extremo y en caso afirmativo clasificarlo.

1. Sea f una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$, calcular el gradiente de la función f en el punto $(0,2)$ sabiendo que:

   - C descripta en coordenadas polares por $\rho = -4\ sen(\theta)$ es la curva de nivel 0 de f.
   - La norma del gradiente de f en el punto $(0,2)$ es 3.
   - La derivada direccional de f en el punto $(0,2)$ y en la dirección del vector $(1,0)$ es mayor que cero.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tal que el gradiente de f en el punto $(0,1,3)$ es distinto del vector nulo, y $\vec{\gamma}_1(t) = (t, -t^2+1, 3)$, $\vec{\gamma}_2(s) = ((s-1)^2, s, 6-3s)$ con $f(\vec{\gamma}_1(t)) = f(\vec{\gamma}_2(s)) = 0,\ \forall t, s \in \mathbb{R}$. Hallar la ecuacīon del plano tangente a la superficie de nivel 0 de f en el punto $(0,1,3)$.

3. Demostrar que el sistema $\begin{cases} x - yz - cos(yz) = 0 \\ x^2 + y^3 + zx - yz^2 - 6 = 0 \end{cases}$ define una curva regular en un entorno del punto $(1, 0, z_0)$, y hallar la recta tangente a la curva en dicho punto.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(2,0)$ es $p(x,y) = 4 - 3x - 2y + x^2$, y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(1,2) = (2,0)$ y la matriz de derivadas parciales de g en el punto $(1,2)$ es: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $(fog)(0{,}99, 2{,}02)$ usando una aproximación lineal.

5. Hallar los puntos estacionarios y analizar si en esos puntos la función f alcanza un máximo, mínimo o puntos silla siendo $f(x,y) = 8xy - 2x^4 - 2y^4$.

1. Sea C la curva plana descripta en coordenadas polares por $r^2 + 3r^2\ sen^2(\theta) = 4$, graficar y encontrar, si es posible, un punto $P_0 \in C$ tal que la recta tangente a C en P_0 sea paralela al vector $\vec{v} = (-1, 1/2)$.

2. Sea $F(x, y, z) = azx + e^{zy} + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Calcular a y b sabiendo que:

   - $P_0 = (1, 0, -1/2)$ pertenece a la superficie de nivel cero de F.
   - El vector $(1, -2, 0)$ es tangente a la superficie de nivel cero de F en P_0.

   Además, justificar que $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a $z = g(x, y)$ en un entorno de P_0, y calcular $\nabla g(1, 0)$.

3. Sea S la superficie descripta en coordenadas cartesianas por $z = y^2 - x^2$. Demostrar que la intersección de S con su plano tangente en el punto $P_0 = (0, 1, z_0)$ es un par de rectas.

4. Sea $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2-3}$. Hallar el dominio y describir las curvas de nivel de f. Determinar los extremos de f y clasicarlos justificando, además, si son relativos o absolutos.

5. Sea $f(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$, y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ tal que el polinomio de Taylor de orden 2 de $g \circ f$ en el punto $(0, 0)$ es $p(x, y) = 4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy$. Calcular la máxima derivada direccional en g en el punto $(1, -1)$.

1. Sea el sistema $\begin{cases} xu^3 + v = y^2 \\ 3uv - x = 4 \end{cases}$

   a) Determinar bajo qué condiciones el sistema define a las variables u y v como funciones diferenciables de (x, y), en un entorno del punto (x_0, y_0, u_0, v_0), con $x_0 = 0$.

   b) Considerando el punto $(x, y, u, v) = (0, 1, 4/3, 1)$, calcular $\frac{\partial v}{\partial x}(0, 1)$ y $\frac{\partial v}{\partial y}(0, 1)$

2. Sea C_1 la curva descripta en coordenadas polares por $r = cos(\theta)$, y C_2 la semirecta dada por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = -x,\ x \geq 1/2\}$. Encontrar el punto de intersección entre C_1 y C_2, y calcular analíticamente el ángulo que forman la semirecta con el vector tangente a C_1 en el punto de intersección.

3. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ una función extrictamente creciente en su dominio, y $h(x, y) = f(x^2 + y^2 - 2y)$. Determinar las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de la función h en el punto $(1, 5)$.

4. Dada $f(x, y) = a(x - 1)^2 + b(y + 2)^2 - y^3$ hallar todos los $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}$ de manera que f tenga un máximo o mínimo local en $(1, 1)$. Para los valores de a y b encontrados determinar si existen otros puntos estacionarios de f y clasificarlos.

5. Sea S una superficie parametrizada por $\Phi(u, v) = (f(u, v), uv^2, u^2v)$, con $(u, v) \in [0, 2] \times [-2, 0]$, siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $P_0 = (1, -1)$, y $2x - 3y + 2z = 4$ la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $Q_0 = (1, -1, f(1, -1))$.

   Hallar la ecuación del plano tangente a S en el punto $X_0 = \Phi(1, -1)$.

1. Sean las curvas C_1 descripta en coordenads polares por la ecuación $r = -2\cos(t)$, $t \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ y C_2 definida por la ecuación $x^2 + y^2 + 2y = 0$.
   Hallar los puntos de intersección entre las curvas y los vectores tangentes a cada una de ellas en dichos puntos .
   Graficar las curvas y los vectores tangentes en un mismo gráfico.

2. Si f es un campo escalar C^3 en $\mathbb{R}^2$, tal que $\nabla f(1,2) = (1,0)$ y su matríz hessiana en $(1,2)$ es $Hf(1,2)= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ de modo tal que $g(x,y) = f(x,y) + ax + (y-2)^2$ tenga extremo en $(1,2)$ y clasificarlo.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$. Sabiendo que la recta tangente al gráfico de f en el punto $(4, f(4))$ es horizontal y que el sistema:
   $$\begin{cases} f(x^2 - yz) + z^2x & = & 10 \\ f(y^2 + 3x) - xy^2z & = & -2 \end{cases}$$
   define una curva en un entorno de $P_0 = (1,-1,3)$, hallar la ecuación de la recta tangente a esa curva en Po.

4. Sea $\Phi(u,v) = (u^2, u, vf(u,v))$ con $u^2 + v^2 \leq 4$ la parametrización de una superficie S, siendo f un campo escalar definido sobre $\mathbb{R}^2$ con primeras derivadas continuas.
   Sabiendo que:
   - la recta normal a S en $Q_0 = \Phi(1,-1)$ es ortogonal al vector $\vec{w} = (1,0,3)$
   - el conjunto de nivel 1 de f tiene ecuación $x^2 + 4y^2 = 5$,
     hallar $\nabla f(1,-1)$.

5. Probar que la ecuación $x^2y + e^{z^2y} + z = 2$ define a $z = f(x,y)$ en un entorno de $(1,1,0)$ y hallar la derivada direccional de f en la dirección tangente a la curva dada por la ecuación $(x-1)^2 + 2y^2 = 2$ en $(1,1)$, recorrida en sentido antihorario.

Parcial 22-12-09 Análisis Matemático II

1. Sea $f(x,y) = \frac{(1-x^2-y^2)(x^2-y^2)}{(x^2-y^2-1)^2}$, describir en coordenadas polares la región del plano donde $f(x,y) > 0$.

2. Sea $F : R^3 \to R$ una función $C^2(R^3)$tal que $\nabla F(x,y,z) = (2x+y+3, 2y+x+6, z^2+1)$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   Si $z = g(x,y)$ está definida impícitamente por la ecuación $F(x,y,z) = 0$, hallar los puntos estacionarios de g y clasificarlos.

3. Sea S la porción de superficie parametrizada por $\varphi(u,u) = (usen(v), -2u+2, ucos(v))$, $1 < u < 3$, $1 < v < \pi$, hallar un punto P en S tal que la recta normal a S en P pase por $(0,-3,0)$.

4. Sea C la curva correspondiente al conjunto de nivel cero de una función $f : R^2 \to R$, $C^1(R^2)$.
   Sea la función $\varphi : R^2 \to R^3$, $C^1(R^2)$ con $D\varphi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
   Si C^* es la curva imagen de C por φ y sabiendo que:
   - el vector tangente a C^* en $\varphi(u_0, v_0)$ es paralelo al vector $\omega = (1,1,0)$
   - la derivada de f en (u_0, v_0) en la dirección del vector $(1,0)$ es 3

   hallar $\nabla f(u_0, v_0)$.

5. Sea $f : R^2 \to R$ una función C^∞ cuyo polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1,2)$ es $p(x,y) = 1 + 2x - xy + 2x^2$.
   Hallar el valor de la derivada direccional máxima de $h(u,v) = f(u+2v, -u+v)$ en $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$.