

Buenos días por el camino  
hacia el norte a Providence. Para  
encontrarme con el alcalde, el  
alcalde de Providence.  
El estaba sentado en el lobby del  
hotel. ¿Qué dijo?  
El dijo: "¡Hola!" Y le dije: "Oye,  
alcalde, está muy bonita tu  
ciudad". Y entonces se tomó un  
café conmigo. Luego fui para  
Waterbury. Waterbury es una  
ciudad bella. Una ciudad con un  
reloj enorme, el famoso reloj de  
Waterbury. Hice buenos negocios  
ahí. Y luego a Boston (Boston es la  
cuna de la revolución.)  
Bonita ciudad. Luego algunos  
otros lugares de Massachusetts,  
de ahí a Portland, a Bangor y  
¡directo a casa!

- de Death of a Salesman



6.1	INTRODUCCIÓN
6.2	CAMINOS Y CICLOS
6.3	RINCÓN DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS: GRÁFICAS
6.4	CICLOS HAMILTONIANOS Y EL PROBLEMA DEL AGENTE DE VENTAS VIAJERO
6.5	UN ALGORITMO PARA LA RUTA MÁS CORTA
6.6	REPRESENTACIONES DE GRÁFICAS
6.7	ISOMORFISMOS DE GRÁFICAS
6.8	GRÁFICAS PLANAS
6.9	LOCURA INSTANTÁNEA
6.10	NOTAS
6.11	CONCEPTOS BÁSICOS DEL CAPÍTULO
6.12	AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

## TEORÍA DE GRÁFICAS \*

Aunque el primer artículo en teoría de gráficas apareció en 1736 (véase el ejemplo 6.2.16) y varios resultados importantes en la teoría de gráficas se obtuvieron en el siglo XIX, sólo fue a partir de la década de 1920 que hubo un interés sostenido, amplio e intenso en la teoría de gráficas. De hecho, el primer texto sobre teoría de gráficas (König) apareció en 1936. Sin duda, una de las razones de este reciente interés en la teoría de gráficas es su capacidad de aplicación en campos muy diversos, incluyendo las ciencias de la computación, la química, la investigación de operaciones, la ingeniería eléctrica, la lingüística y la economía.

Comenzaremos con cierta terminología básica y ejemplos de gráficas. Luego analizaremos algunos conceptos importantes en la teoría de gráficas, incluyendo los caminos y los ciclos. Presentamos un algoritmo para determinar el camino (o ruta) más corto, con el cual se obtiene la trayectoria más breve entre dos puntos dados. Luego consideraremos dos problemas clásicos de gráficas, la existencia de ciclos hamiltonianos y el problema del agente viajero. Después de dar opciones para la representación de las gráficas, estudiaremos la cuestión de cuándo dos gráficas son esencialmente iguales (es decir, cuándo dos gráficas son isomorfas) y

\* Aunque en algunos libros se ha traducido la palabra *graph* como *grafo*, es preferible emplear el vocablo *casizo* gráfica. (Nota del traductor)  
† Esta sección se puede omitir sin pérdida de continuidad.

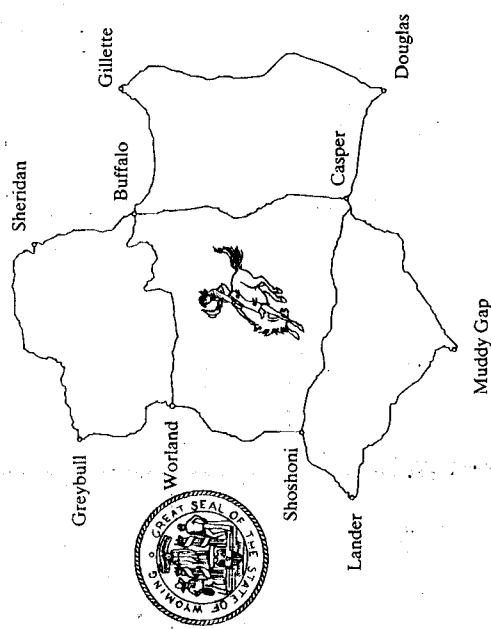


FIGURA 6.1.1 Parte del sistema de carreteras de Wyoming.

El problema se puede modelar mediante una gráfica. De hecho, como las gráficas se trazan con puntos y líneas, parecen como mapas de carreteras. En la figura 6.1.2 hemos trazado una gráfica  $G$  que modela el mapa de la figura 6.1.1. Los puntos de la figura 6.1.2 se llaman **vértices** y las líneas que unen los vértices se llaman **aristas**. (Posteriormente, en esta sección definiremos todos estos términos con cuidado.) Hemos etiquetado cada vértice con las tres primeras letras de la ciudad a la cual corresponde y las aristas como  $e_1, \dots, e_{13}$ . Al trazar una gráfica, la única información importante es saber cuáles vértices están unidos

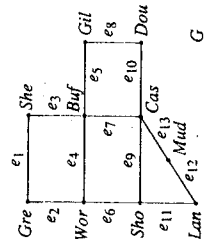


FIGURA 6.1.2 Un modelo de gráfica del sistema de carreteras de la figura 6.1.1.

cuándo una gráfica se puede trazar en el plano sin que se crucen sus aristas. Concluimos presentando una solución con base en un modelo de gráfica para el juego Locura instantánea.

### 6.1 INTRODUCCIÓN

La figura 6.1.1 muestra el sistema de carreteras en Wyoming, el cual debe ser inspeccionado por una persona. En específico, este inspector de carreteras debe recorrer cada uno de estos caminos y crear un archivo con información acerca de las condiciones de cada camino, la visibilidad de las líneas en los caminos, el estado de las señales de tráfico, etc. Como el inspector de carreteras vive en Greybull, la forma más económica de inspeccionar todos los caminos será comenzar en Greybull, recorrer todos los caminos exactamente una vez, y regresar a Greybull. ¿Es esto posible? Vea si puede decidir antes de continuar.

## Sección 6.5

Matriz de adyacencia

Si  $A$  es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, la entrada  $ij$ -ésima de  $A^n$  es igual al número de caminos de longitud  $n$  del vértice  $i$  al vértice  $j$ .

Matriz de incidencia

## Sección 6.6

Las gráficas  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  son isomorfas si existen funciones uno a uno y sobre  $f: V_1 \rightarrow V_2$  y  $g: E_1 \rightarrow E_2$  tales que  $e \in E_1$  es incidente en  $v$  y  $w \in V_1$  si y sólo si  $g(e)$  es incidente en  $f(v)$  y  $f(w)$ .

Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas si y sólo si, para algún orden de sus vértices y aristas, sus matrices de incidencia son idénticas.

Modelo de red para la computación paralela

Invariante

## Sección 6.7

Gráfica plana

Cara

Ecuación de Euler para gráficas planas conexas:  $f = e - v + 2$

Aristas en serie

Reducción de serie

Gráficas homeomorfas

Teorema de Kuratowski: Una gráfica es plana si y sólo si no contiene una subgráfica homeomorfa a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

## Sección 6.8

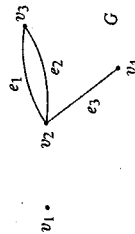
Locura Instantánea

Cómo resolver un juego de Locura Instantánea

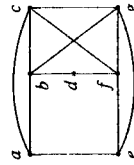
## AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

## Sección 6.1

1. Para la gráfica  $G = (V, E)$ , determine  $V$ ,  $E$ , todas las aristas paralelas, todos los lazos, todos los vértices aislados, e indique si  $G$  es una gráfica simple. Además, indique los vértices sobre los cuales incide la arista  $e_3$  y las aristas sobre las cuales incide el vértice  $v_2$ .



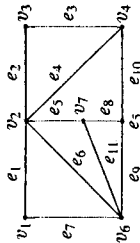
2. Explique por qué la gráfica no tiene un camino de  $a$  a  $a$  que pase por cada arista exactamente una vez.



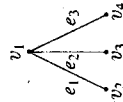
3. Trace  $K_{2,5}$  la gráfica bipartita completa con 2 y 5 vértices.  
4. Demuestre que el  $n$ -cubo es bipartita para toda  $n \geq 1$ .

## Sección 6.2

5. Indique si el camino  $(v_1, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1, v_2)$  en la gráfica es un camino simple, un ciclo, un ciclo simple, o ninguno de los anteriores.



6. Trace todas las subgráficas de la gráfica siguiente que tengan exactamente dos aristas.



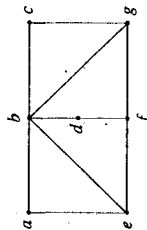
7. Determine una subgráfica conexa de la gráfica del ejercicio 5 que contenga todos los vértices de la gráfica original y tenga el menor número posible de aristas.  
8. ¿Contiene la gráfica del ejercicio 5 un ciclo de Euler? Explique.

## Sección 6.3

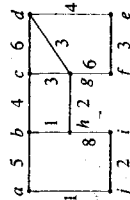
9. Determine un ciclo hamiltoniano para la gráfica del ejercicio 5.

10. Determine un ciclo hamiltoniano en el 3-cubo.

11. Muestre que la gráfica siguiente no tiene un ciclo hamiltoniano.

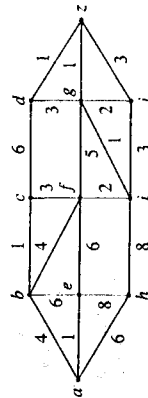


12. Muestre que el ciclo  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, a)$  proporciona una solución al problema del agente viajero para la siguiente gráfica.



## Sección 6.4

Los ejercicios 13-16 se refieren a la siguiente gráfica.



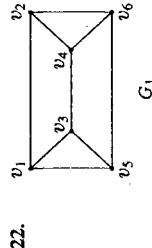
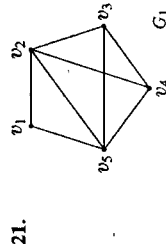
13. Determine la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $i$ .
14. Determine la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ .
15. Determine una ruta más corta de  $a$  a  $z$ .
16. Determine la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$  que pase por  $c$ .

#### Sección 6.5

17. Escriba la matriz de adyacencia de la gráfica del ejercicio 5.
18. Escriba la matriz de incidencia de la gráfica del ejercicio 5.
19. Si  $A$  es la matriz de adyacencia de la gráfica del ejercicio 5, ¿qué representa la entrada del renglón  $v_2$  y la columna  $v_3$  de  $A^3$ ?
20. ¿Puede una columna de una matriz de incidencia constar sólo de ceros? Explique.

#### Sección 6.6

En los ejercicios 21 y 22, determine si las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas. Si las gráficas son isomorfas, proporcione un orden para los vértices que produzca matrices de adyacencia iguales. Si las gráficas no son isomorfas, proporcione un invariante no compartido por las gráficas.

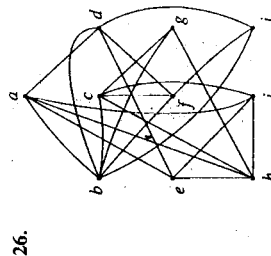
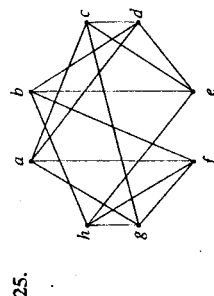


23. Trace todas las gráficas simples, no isomorfas, que tengan exactamente cinco vértices y dos aristas.

24. Trace todas las gráficas simples, no isomorfas, que tengan exactamente cinco vértices, dos componentes, sin ciclos.

#### Sección 6.7

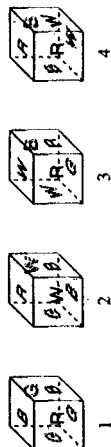
En los ejercicios 25 y 26, determine si la gráfica es plana. Si la gráfica es plana, vuelva a trazarla de modo que las aristas no se crucen; en caso contrario, determine una subgráfica homeomorfa a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .



27. Muestre que cualquier gráfica simple, conexa, con 31 aristas y 12 vértices no es plana.
28. Muestre que el  $n$ -cubo es plano si  $n \leq 3$  y no es plano si  $n > 3$ .

#### Sección 6.8

29. Represente el siguiente juego Locura Instantánea mediante una gráfica.



30. Determine una solución al juego del ejercicio 29.
31. Determine todas las subgráficas de la gráfica del ejercicio 29 que satisfagan las propiedades (6.8.1) y (6.8.2).
32. Utilice el ejercicio 31 para determinar el número de soluciones del juego del ejercicio 29.

## †6.8 LOCURA INSTANTÁNEA

Locura Instantánea es un juego formado por cuatro cubos, cada uno de cuyas caras está pintada de uno de cuatro colores: rojo, blanco, azul o verde (R, W, B, G; véase la figura 6.8.1). (Existen varias versiones del juego, dependiendo de cuántas caras están pintadas con cuáles colores.) El problema consiste en apilar los cubos, uno sobre el otro, de modo que uno vea los cuatro colores desde el frente, por detrás, por la izquierda o por la derecha (véase la figura 6.8.2). Como existen 331,776 formas diferentes de apilar los cubos (véase el ejercicio 12), no es práctica una solución a mano mediante prueba y error. Presentamos una solución, mediante un modelo de gráfica, que permite descubrir una solución, si existe, [en unos cuantos minutos!]

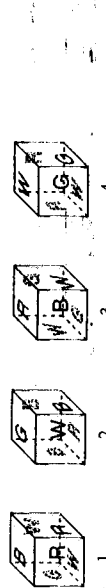
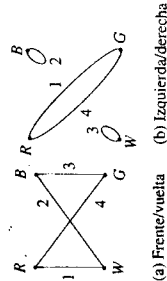
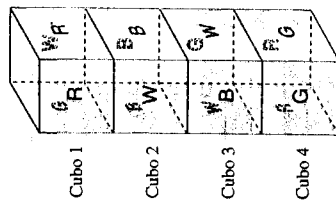


FIGURA 6.8.1 Un juego de Locura Instantánea.

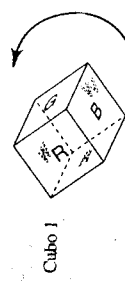
### FIGURA 6.8.2

Una solución al juego de Locura Instantánea de la figura 6.8.1.



### FIGURA 6.8.3

Gráficas que representan las formas de apilar los cubos de la figura 6.8.2.



### FIGURA 6.8.4

La rotación de un cubo para obtener una orientación izquierda/derecha, sin modificar los colores frontal/posterior.

En primer lugar, observemos que cualquier forma particular de apilar los cubos se puede representar mediante dos gráficas, una de las cuales muestra los colores del frente y por detrás, y la otra exhibe los colores de la izquierda y la derecha. Por ejemplo, en la figura 6.8.3, hemos representado la forma de apilar los cubos de la figura 6.8.2. Los vértices representan los colores, y una arista une dos vértices si las caras opuestas tienen dichos colores. Por ejemplo, en la gráfica frente/detrás, la arista etiquetada 1 une R con W, pues las caras del frente y la parte posterior del cubo 1 son rojas y blancas. Como otro ejemplo, en la gráfica izquierda/derecha, W tiene un lazo, pues las caras izquierda y derecha del cubo 3 son blancas.

También podemos apilar los cubos a partir de un par de gráficas como las de la figura 6.8.3, la cual representa una solución al juego Locura Instantánea. Comencemos con la gráfica frente/detrás. El cubo 1 debe tener las caras opuestas de color rojo y blanco. Asignamos de manera arbitraria uno de estos colores, digamos el rojo, al frente. Entonces el cubo 1 tiene la cara posterior de color blanco. La otra arista incidente en W es 2, así que hacemos que la cara frontal del cubo 2 sea blanca. Esto hace que la cara posterior del cubo 2 sea azul. La otra arista incidente en B es 3, de modo que hacemos que la cara frontal del cubo 3 sea azul. Esto hace que la cara posterior del cubo 3 sea verde. La otra arista incidente en G es 4. El cubo 4 tiene entonces una cara frontal verde y una cara posterior roja. Ahora están asignados correctamente los colores frontal y posterior. En este momento, las caras izquierda y derecha están ordenadas de manera aleatoria; sin embargo, mostraremos la forma de orientar correctamente las caras izquierda y derecha sin alterar los colores de las caras frontal y posterior.

El cubo 1 debe tener los colores rojo y verde opuestos en las caras izquierda y derecha. Asignamos de manera arbitraria uno de estos colores, digamos el verde, a la izquierda. Entonces el cubo 1 tiene una cara derecha de color rojo. Observe que al rotar el cubo, podemos obtener esta orientación izquierda/derecha sin modificar los colores frontal y posterior (véase la figura 6.8.4). De manera análoga, podemos orientar los cubos 2, 3 y 4. Observe que los cubos 2 y 3 tienen los mismos colores en los lados opuestos. Así, hemos reconstruido la pila de la figura 6.8.2.

El análisis anterior muestra que podemos obtener una solución del juego Locura Instantánea si podemos determinar dos gráficas como las de la figura 6.8.3. Las propiedades necesarias son

\* Esta sección se puede omitir sin pérdida de continuidad.

• Cada vértice debe tener grado 2.

• Cada cubo debe representarse mediante una arista exactamente una vez en cada gráfica.

• Las dos gráficas no deben tener aristas en común.

La propiedad (6.8.1) garantiza que cada color se puede utilizar dos veces, una en el frente (o izquierda) y una vez en la parte posterior (o derecha). La propiedad (6.8.2) garantiza que cada cubo se utiliza exactamente una vez. La propiedad (6.8.3) garantiza que, después de orientar los lados frontal y posterior, podemos orientar con éxito los lados izquierdo y derecho.

Para obtener una solución, primero trazamos una gráfica  $G$  que representa todas las caras de todos los cubos. Los vértices de  $G$  representan los cuatro colores y una arista con etiqueta  $i$  conecta dos vértices (colores) si las caras opuestas del cubo  $i$  tienen dichos colores. En la figura 6.8.5 hemos trazado la gráfica que representa los cubos de la figura 6.8.1. Entonces, por inspección, determinamos dos subgráficas de  $G$  que satisfacen las propiedades (6.8.1)-(6.8.3). El lector debe utilizar este método para encontrar otra solución del juego representado por la figura 6.8.5.

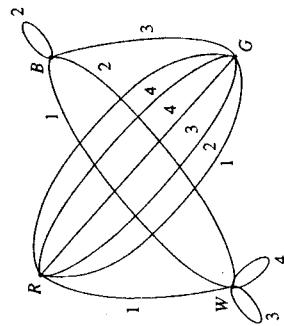


FIGURA 6.8.5 Una representación mediante una gráfica del juego Locura Instantánea de la figura 6.8.1.

### EJEMPLO 6.8.1

Determine una solución del juego Locura Instantánea de la figura 6.8.6.

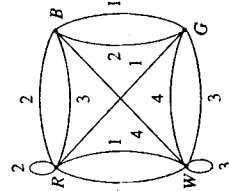
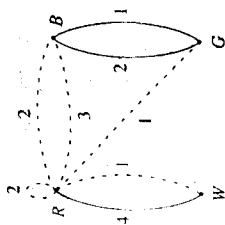
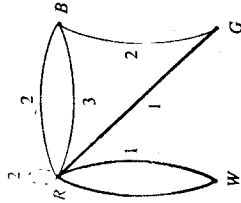


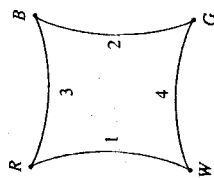
FIGURA 6.8.6 El juego Locura Instantánea del ejemplo 6.8.1.



**FIGURA 6.8.7**  
Intento por determinar una subgráfica de la figura 6.8.6 que satisfaga (6.8.1) y (6.8.2).



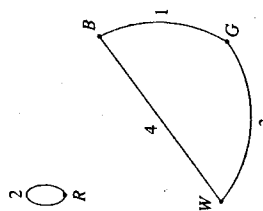
**FIGURA 6.8.8**  
Otro intento por determinar una subgráfica de la figura 6.8.6 que satisfaga (6.8.1) y (6.8.2).



**FIGURA 6.8.9**  
Una subgráfica de la figura 6.8.6 que satisfaga (6.8.1) y (6.8.2).



**FIGURA 6.8.10**  
Aristas incidentes en  $B$  no utilizadas en la figura 6.8.9.

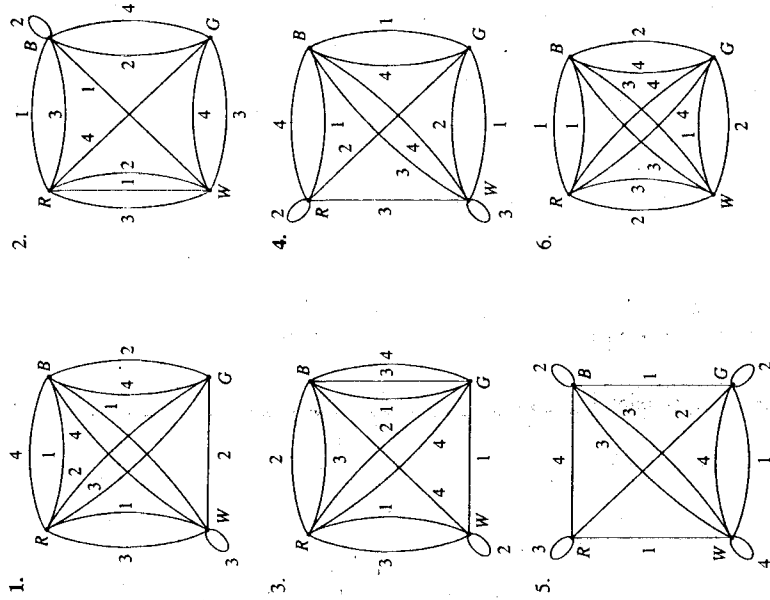


**FIGURA 6.8.11**  
Otra subgráfica de la figura 6.8.6, sin aristas en común con la figura 6.8.9, que satisfaga (6.8.1) y (6.8.2). Esta gráfica y la de la figura 6.8.9 resuelven el juego Locura Instantánea de la figura 6.8.6.

Ahora buscamos una segunda gráfica sin aristas comunes con la gráfica recién determinada. De nuevo comenzamos eligiendo dos aristas incidentes en  $B$ . Como no podemos reutilizar las aristas, nuestras opciones quedan limitadas a tres aristas (véase la figura 6.8.10). Al elegir las aristas etiquetadas 1 y 4 obtenemos la gráfica de la figura 6.8.11. Las gráficas de las figuras 6.8.9 y 6.8.11 resuelven el juego Locura Instantánea de la figura 6.8.6.  $\square$

## Ejercicios

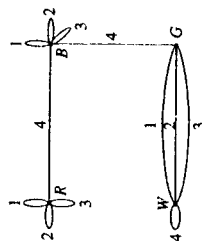
Determine soluciones a los siguientes juegos de Locura Instantánea.



7. (a) Determine todas las subgráficas de la figura 6.8.5 que satisfagan (6.8.1) y (6.8.2).  
(b) Determine todas las soluciones del juego Locura Instantánea de la figura 6.8.5.
8. (a) Represente el juego Locura Instantánea mediante una gráfica.



- (b) Determine una solución del juego.
- (c) Determine todas las subgráficas de la gráfica de la parte (a) que satisfagan las propiedades (6.8.1) y (6.8.2).
- (d) Utilice (c) para mostrar que el juego tiene una única solución.



9. Muestre que el juego Locura Instantánea anexo no tiene solución, proporcionando un argumento para mostrar que ninguna subgráfica satisface las propiedades (6.8.1) y (6.8.2). Observe que no existe una solución, aunque cada cubo contuviese los cuatro colores.

- ☆ 10. Proporcione un ejemplo de un juego Locura Instantánea que satisfaga:

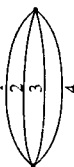
- No existe una solución.
- Cada cubo contiene los cuatro colores.
- Existe una subgráfica que satisface las propiedades (6.8.1) y (6.8.2).

11. Muestre que existen 24 orientaciones de un cubo.

12. Numere los cubos de un juego Locura Instantánea como 1, 2, 3 y 4. Muestre que el número de formas de apilar los cubos en el orden 1, 2, 3 y 4, leídos de arriba hacia abajo, son 331,776.

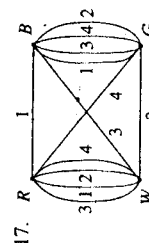
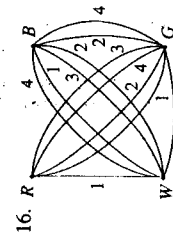
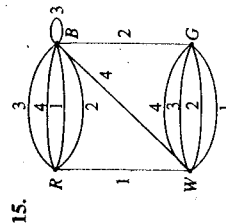
- ★ 13. ¿Cuántas gráficas de Locura Instantánea existen? Es decir, ¿cuántas gráficas existen con cuatro vértices y 12 aristas (tres de ellas de uno de cuatro tipos)?

Los ejercicios 14-21 se refieren a una versión modificada del juego Locura Instantánea, donde una solución se define como una pila tal que, vista desde el frente, por detrás, por la izquierda o por la derecha, muestre un único color. (El frente, la parte posterior, la parte izquierda y la derecha tienen colores diferentes.)



14. Proporcione un argumento que muestre que si graficamos el juego como un juego regular de Locura Instantánea, una solución al juego modificado consta de dos subgráficas de la forma que aparece en la figura, sin aristas ni vértices en común.

Determine soluciones de la Locura Instantánea modificada para los siguientes juegos.



18. La gráfica del ejercicio 6.

19. Muestre que para la figura 6.8.5, la Locura Instantánea dada en el texto tiene una solución, pero la versión modificada no tiene solución.

- ☆ 20. Muestre que si la Locura Instantánea tiene una solución, la versión dada en el texto debe tener una solución.

21. ¿Es posible que ninguna de las versiones de Locura Instantánea tenga solución, aunque cada cubo contenga los cuatro colores? Si la respuesta es afirmativa, demuéstrela; en caso contrario, proporcione un contraejemplo.

## NOTAS

Prácticamente cualquier libro de matemáticas discretas tiene uno o más capítulos sobre teoría de gráficas. Algunos libros específicos de teoría de gráficas son [Berge; Bondy; Chartrand; Deo; Even, 1979; Gibbons; Harary; König; Ore; y Wilson]. [Deo; Even, 1979; y Gibbons] enfatizan los algoritmos de gráficas. [Brassard y Cormen] también estudian las gráficas y los algoritmos de gráficas.

[Fukunaga; Gose; y Nadler] son textos relativos al reconocimiento de patrones.

[Aki; Leighton; Lester; Lewis; y Quinn] analizan las computadoras paralelas y los algoritmos para computadoras paralelas. Nuestros resultados acerca de las subgráficas del hipercubo son de [Saad].

El artículo original de Euler acerca de los puentes de Königsberg, editado por J. R. Newman, fue reimpreso en [Newman].

En [Gardner, 1959], los ciclos hamiltonianos se relacionan con el juego de la Torre de Hanoi.

En muchos casos, los métodos llamados de *ramificación y acotamiento* (véase, por ejemplo, [Tucker]) proporcionan soluciones al problema del agente viajero de manera más eficiente que la búsqueda exhaustiva.

El algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra aparece en [Dijkstra, 1959].

La complejidad del problema de isomorfismo de gráficas se analiza en [Köbler].

Appel y Haken publicaron su solución al problema de los cuatro en [Appel].

## CONCEPTOS BÁSICOS DEL CAPÍTULO

### Sección 6.1

Gráfica de similaridad

Función de disimilaridad

Reconocimiento de patrones

$n$ -cubo (hipercubo)

Computadora en serie

Algoritmo en serie

Computadora paralela

Algoritmo paralelo

### Sección 6.2

Camino

Camino simple

Ciclo

Ciclo simple

Gráfica conexa

Subgráfica

Componente de una gráfica

Grado de un vértice  $\delta(v)$

Problema de los puentes de Königsberg

Ciclo de Euler

Una gráfica  $G$  tiene un ciclo de Euler si y sólo

si  $G$  es conexa y todo vértice tiene grado par.

La suma de los grados de todos los vértices de una gráfica es igual a dos veces el número de aristas.

En cualquier gráfica existe un número par de vértices de grado impar.

Una gráfica tiene un camino sin aristas repetidas de  $v$  a  $w$  ( $v \neq w$ ) que contiene a todas las aristas y todos los vértices si y sólo si es conexa y  $v$  y  $w$  son los únicos vértices que tienen grado impar.

Si una gráfica  $G$  contiene un ciclo de  $v$  a  $v$ , entonces  $G$  contiene un ciclo simple de  $v$  a  $v$ .

### Sección 6.3

Ciclo hamiltoniano

Problema del agente viajero

Modelo de anillo para la computación paralela

Código Gray

### Sección 6.4

Algoritmo de la ruta más corta

de Dijkstra

## DEFINICIÓN 6.7.3

Si una gráfica  $G$  tiene un vértice  $v$  de grado 2 y aristas  $(v, v_1)$  y  $(v, v_2)$  con  $v_1 \neq v_2$ , decimos que las aristas  $(v, v_1)$  y  $(v, v_2)$  están en serie. Una *reducción de serie* consiste en la eliminación del vértice  $v$  de la gráfica  $G$  y el reemplazo de las aristas  $(v, v_1)$  y  $(v, v_2)$  por la arista  $(v_1, v_2)$ . Decimos que la gráfica resultante  $G'$  se obtiene de  $G$  mediante una *reducción de serie*. Por convención, se dice que  $G$  se puede obtener de sí misma mediante una reducción de serie.

## EJEMPLO 6.7.4

En la gráfica  $G$  de la figura 6.7.4, las aristas  $(v, v_1)$  y  $(v, v_2)$  están en serie. La gráfica  $G'$  de la figura 6.7.4 se obtiene de  $G$  mediante una reducción de serie.

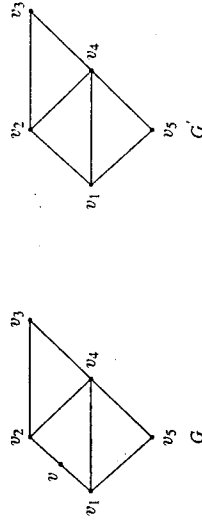


FIGURA 6.7.4  $G'$  se obtiene de  $G$  mediante una reducción de serie.  $\square$

## DEFINICIÓN 6.7.5

Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son *homeomorfas* si  $G_1$  y  $G_2$  se pueden reducir a gráficas isomorfas realizando varias reducciones de serie.

De acuerdo con las definiciones 6.7.3 y 6.7.5, cualquier gráfica es homeomorfa a sí misma. Además, las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son homeomorfas si  $G_1$  se puede reducir a una gráfica isomorfa a  $G_2$  o si  $G_2$  se puede reducir a una gráfica isomorfa a  $G_1$ .

## EJEMPLO 6.7.6

Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  de la figura 6.7.5 son homeomorfas, pues ambas se pueden reducir a la gráfica  $G'$  de la figura 6.7.5 mediante varias reducciones de serie.

Si definimos una relación  $R$  sobre un conjunto de gráficas mediante la regla  $G_1 R G_2$  si  $G_1$  y  $G_2$  son homeomorfas,  $R$  es una relación de equivalencia. Cada clase de equivalencia consta de un conjunto de gráficas homeomorfas entre ellas.

Ahora establezcamos una condición necesaria y suficiente para que una gráfica sea plana. Kuratowski estableció por vez primera el teorema en 1930. La demostración aparece en [Even, 1979].

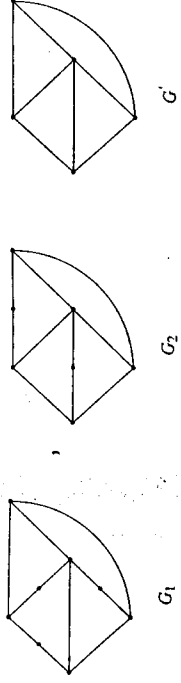
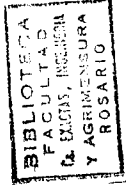


FIGURA 6.7.5  $G_1$  y  $G_2$  son homeomorfas; cada una se puede reducir a  $G'$ .

## TEOREMA 6.7.7

## Teorema de Kuratowski

Una gráfica  $G$  es plana si y sólo si  $G$  no contiene una subgráfica homeomorfa a  $K_{3,3}$  o  $K_5$ .

## EJEMPLO 6.7.8

Utilizando el teorema de Kuratowski, muestre que la gráfica  $G$  de la figura 6.7.6 no es plana.

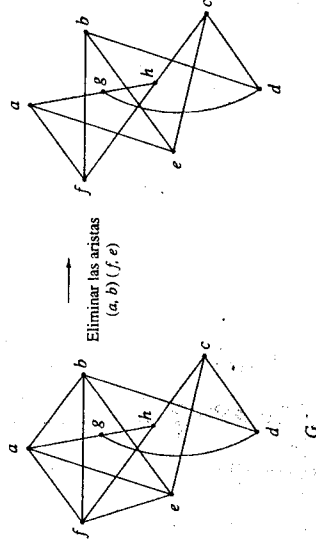


FIGURA 6.7.6 Eliminación de aristas para obtener una subgráfica.

Intentemos encontrar  $K_{3,3}$  en la gráfica  $G$  de la figura 6.7.6. Primero observemos que los vértices  $a, b, f$  y  $e$  tienen cada uno grado 4. En  $K_{3,3}$  cada vértice tiene grado 3, de modo que eliminaremos las aristas  $(a, b)$  y  $(f, e)$  para que todos los vértices tengan grado 3 (véase la figura 6.7.6). Observemos que si eliminamos una arista más, obtendremos dos vértices de grado 2 y luego podremos realizar dos reducciones de serie. La gráfica resultante tendrá nueve aristas, y como  $K_{3,3}$  tiene nueve aristas, este punto de vista parece promisorio. Mediante prueba y error, vemos finalmente que si eliminamos la arista  $(g, h)$  y realizamos las reducciones de serie, obtenemos una copia isomorfa de  $K_{3,3}$  (véase la figura 6.7.7). Por tanto, la gráfica  $G$  de la figura 6.7.6 no es plana, pues contiene una subgráfica homeomorfa a  $K_{3,3}$ .  $\square$

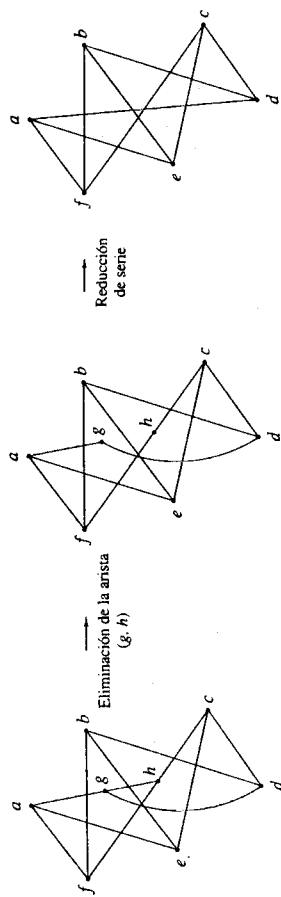


FIGURA 6.7.7 Eliminación de una arista para obtener una subgráfica, seguida por reducciones de serie.

Aunque el teorema 6.7.7 proporciona una elegante caracterización de las gráficas planas, no conduce a un algoritmo eficiente para el reconocimiento de gráficas planas. Sin embargo, se conocen algoritmos que pueden determinar si una gráfica con  $n$  vértices es plana en un tiempo  $O(n)$  (véase [Even, 1979]).

Concluimos esta sección demostrando la fórmula de Euler.

#### TEOREMA 6.7.9

Si  $G$  es una gráfica plana, conexa, con  $e$  aristas,  $v$  vértices y  $f$  caras, entonces

$$f = e - v + 2. \quad (6.7.3)$$

**Demostración.** Utilizaremos inducción sobre el número de aristas.

Supongamos que  $e = 1$ . Entonces  $G$  es una de las dos gráficas que aparecen en la figura 6.7.8. En cualquier caso, la fórmula es válida. Hemos verificado el paso base.

Suponga que la fórmula es válida para las gráficas planas, conexas, con  $n$  aristas. Sea  $G$  una gráfica con  $n + 1$  aristas. En primer lugar, suponga que  $G$  no contiene ciclos. Elegimos un vértice  $v$  y trazamos un camino que comienza en  $v$ . Como  $G$  no tiene ciclos, cada vez que trazamos una arista, llegamos a un nuevo vértice. En cierto momento, llegaremos a un vértice  $a$ , con grado 1, del cual no podremos salir (véase la figura 6.7.9). Eliminamos

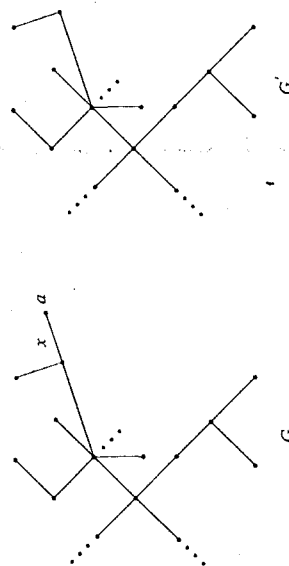


FIGURA 6.7.9 La demostración del teorema 6.7.9 para el caso en que  $G$  no tiene ciclos. Encontramos un vértice  $a$  de grado 1 y eliminamos  $a$  y la arista  $x$  incidente en él.

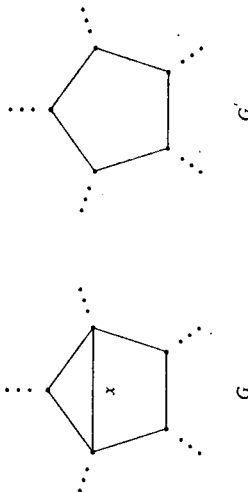


FIGURA 6.7.10 La demostración del teorema 6.7.9 para el caso en que  $G$  tiene un ciclo. Eliminamos una arista  $x$  en un ciclo.

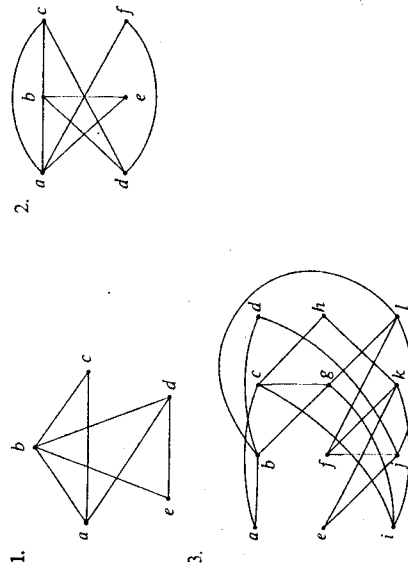
a y la arista  $x$  incidente en  $a$  de la gráfica  $G$ . La gráfica resultante  $G'$  tiene  $n$  aristas; por tanto, por la hipótesis inductiva, (6.7.3) es válida para  $G'$ . Como  $G$  tiene una arista más que  $G'$ , un vértice más que  $G'$ , y el mismo número de caras que  $G'$ , esto implica que (6.7.3) también es válida para  $G$ .

Ahora supongamos que  $G$  contiene un ciclo. Sea  $x$  una arista en un ciclo (véase la figura 6.7.10). Ahora,  $x$  es parte de una frontera para dos caras. Esta vez eliminamos la arista  $x$ , pero no los vértices, para obtener la gráfica  $G'$  (véase la figura 6.7.10). De nuevo,  $G'$  tiene  $n$  aristas; por tanto, por la hipótesis de inducción, (6.7.3) es válida para  $G'$ . Como  $G$  tiene una cara más que  $G'$ , una arista más que  $G'$ , y el mismo número de vértices que  $G'$ , esto implica que (6.7.3) también es válida para  $G$ .

Como hemos verificado el paso inductivo, por el principio de inducción matemática, el teorema queda demostrado. ■

#### Ejercicios

En los ejercicios 1-3, muestre que cada gráfica es plana, volviéndola a trazar de modo que no haya cruces entre las aristas.





En los ejercicios 4 y 5, muestre que cada gráfica no es plana, encontrando una subgráfica homeomorfa a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

4.

5.

En los ejercicios 6-8, determine si cada gráfica es plana. Si la gráfica es plana, vuelva a trazar de modo que no haya cruces entre las aristas; en caso contrario, determine una subgráfica homeomorfa a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

6.

7.

8.

9. Una gráfica plana, conexa, tiene nueve vértices con grados 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 y 5. ¿Cuántas aristas existen? ¿Cuántas caras existen?

10. Muestre que al agregar o eliminar lazos, aristas paralelas o aristas en serie, no se afecta la planaridad de una gráfica.

11. Muestre que cualquier gráfica con cuatro o menos vértices es plana.

12. Muestre que cualquier gráfica con cinco o menos vértices y un vértice de grado 2 es plana.

13. Muestre que en cualquier gráfica simple, conexa, plana,  $e \leq 3v - 6$ .

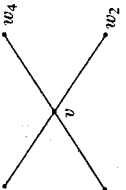
14. Proporcione un ejemplo de una gráfica simple, conexa, no plana, para la cual  $e \leq 3v - 6$ .

15. Utilice el ejercicio 13 para mostrar que  $K_5$  no es plana.

16. Muestre que si una gráfica simple  $G$  tiene 11 o más vértices, entonces  $G$  o su complemento  $\bar{G}$  no es plana.

17. Demuestre que si una gráfica plana tiene un ciclo de Euler, entonces tiene un ciclo de Euler sin cruces. Un camino  $P$  en una gráfica plana tiene un cruce si un vértice  $v$  aparece al menos dos veces en  $P$  y  $P$  se cruza a sí mismo en  $v$ ; es decir,

$P = (\dots, w_1, v, w_2, \dots, w_3, v, w_4, \dots)$ , donde los vértices están ordenados de modo que  $w_1, v, w_2$  cruza a  $w_3, v, w_4$  en  $v$  como en la figura anexa.



Una coloración de una gráfica  $G$  mediante los colores  $C_1, C_2, \dots, C_n$  asigna a cada vértice un color  $C_i$  de modo que cualquier vértice tenga un color diferente al de cualquiera de sus vértices adyacentes. Por ejemplo, la gráfica anexa se coloreará con tres colores. El resto de los ejercicios trata de la coloración de gráficas planas.

Un mapa plano es una gráfica plana en la cual las caras se interpretan como países, las aristas se interpretan como fronteras entre los países y los vértices representan la intersección de las fronteras. El problema de coloración de un mapa plano  $G$ , de modo que no haya países con fronteras contiguas con el mismo color, se puede reducir al problema de coloración de una gráfica, constituyendo primero la gráfica dual  $G'$  de  $G$  de la siguiente manera. Los vértices de la gráfica dual  $G'$  constan de un punto en cada cara de  $G$ , incluyendo la cara no acotada. Una arista en  $G'$  conecta dos vértices si las caras correspondientes en  $G$  están separadas por una frontera. La coloración del mapa  $G$  es equivalente a la coloración de los vértices de la gráfica dual  $G'$ .

- 18. Determine el dual del mapa adyacente.
- 19. Muestre que el dual de un mapa plano es una gráfica plana.
- 20. Muestre que cualquier coloración del mapa del ejercicio 18, excluyendo la región no acotada, requiere al menos tres colores.
- 21. Establezca una coloración del mapa del ejercicio 18, excluyendo la región no acotada, utilizando tres colores.
- 22. Determine el dual del mapa adyacente.
- 23. Muestre que cualquier coloración del mapa del ejercicio 22, excluyendo la región no acotada, requiere al menos cuatro colores.
- 24. Establezca una coloración del mapa del ejercicio 22, excluyendo la región no acotada, utilizando cuatro colores.

Una triangulación de una gráfica plana simple  $G$  se obtiene de  $G$  uniendo el mayor número posible de vértices, conservando la planaridad y sin introducir lazos ni aristas paralelas.

- 25. Determine una triangulación de la gráfica adyacente.
- 26. Muestre que si una triangulación  $G'$  de una gráfica plana, simple  $G$  se puede colorear con  $n$  colores, entonces se puede hacer lo mismo con  $G$ .
- 27. Muestre que en una triangulación de una gráfica plana, simple,  $3f = 2e$ .

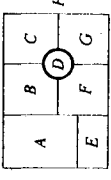
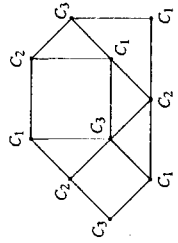
Appel y Haken demostraron (véase [Appel]) que toda gráfica plana, simple, se puede colorear con cuatro colores. El problema había sido planteado a mitad del siglo xx y durante años nadie había logrado establecer una demostración. Las personas que trabajan actualmente en el problema de los cuatro colores en los últimos años tienen una ventaja sobre sus predecesores: el uso de rápidas computadoras electrónicas. Los siguientes ejercicios muestran la forma en que comienza la demostración.

Suponga que existe una gráfica plana, simple, que requiera más de cuatro colores para colorearse. Entre todas las gráficas de este tipo, existe una con la menor cantidad de vértices. Sea  $G$  una triangulación de esta gráfica. Entonces  $G$  también tiene un número mínimo de vértices y por el ejercicio 26,  $G$  requiere más de cuatro colores para colorearse.

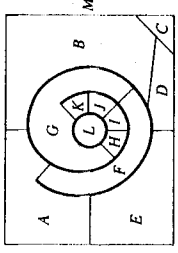
- 28. Si el dual de un mapa tiene un vértice de grado 3, ¿cómo debe verse el mapa original?
- 29. Muestre que  $G$  no puede tener un vértice de grado 3.
- 30. Muestre que  $G$  no puede tener un vértice de grado 4.
- 31. Muestre que  $G$  tiene un vértice de grado 5.

La contribución de Appel y Haken fue mostrar que sólo había que considerar un número finito de casos relacionados con el vértice de grado 5, analizar todos estos casos y mostrar que todos se podrían colorear mediante cuatro colores. La reducción a un número finito de casos fue facilitada por el uso de computadoras para poder determinar los casos por analizar. Luego se volvieron a utilizar las computadoras para analizar los casos restantes.

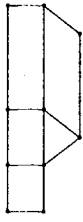
32. Muestre que cualquier gráfica plana simple se puede colorear mediante cinco colores.



Ejercicio 18



Ejercicio 22



Ejercicio 25

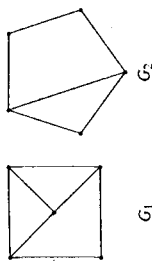


FIGURA 6.6.3

Gráficas no isomorfas.  $G_1$  tiene siete aristas y  $G_2$  tiene seis aristas.

## EJEMPLO 6.6.7

Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  de la figura 6.6.3 no son isomorfas, pues  $G_1$  tiene siete aristas y  $G_2$  tiene seis aristas, y "tener siete aristas" es un invariante.  $\square$

## EJEMPLO 6.6.8

Muestre que si  $k$  es un entero positivo, entonces "tener un vértice de grado  $k$ " es un invariante.

Suponga que  $G_1$  y  $G_2$  son gráficas isomorfas y que  $f$  (respectivamente,  $g$ ) es una función uno a uno y sobre de los vértices (respectivamente, las aristas) de  $G_1$  sobre los vértices (respectivamente, las aristas) de  $G_2$ . Suponga que  $G_1$  tiene un vértice  $v$  de grado  $k$ . Entonces existen  $k$  aristas  $e_1, \dots, e_k$  incidentes en  $v$ . Por la definición 6.6.1,  $g(e_1), \dots, g(e_k)$  son incidentes en  $f(v)$ . Como  $g$  es uno a uno,  $\delta(f(v)) \geq k$ .

Sea  $E$  una arista incidente en  $f(v)$  en  $G_2$ . Como  $g$  es sobre, existe una arista  $e$  en  $G_1$  tal que  $g(e) = E$ . Como  $g(e)$  es incidente en  $f(v)$  en  $G_2$ , la definición 6.6.1 implica que  $e$  es incidente en  $v$  en  $G_1$ . Como  $e_1, \dots, e_k$  son las únicas aristas en  $G_1$  incidentes en  $v$ ,  $e = e_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Ahora,  $g(e_i) = g(e) = E$ . Así,  $\delta(f(v)) = k$ , de modo que  $G_2$  tiene un vértice, a saber,  $f(v)$ , de grado  $k$ .  $\square$

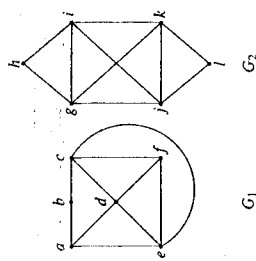


FIGURA 6.6.4

Gráficas no isomorfas.  $G_1$  tiene vértices de grado 3, pero  $G_2$  no tiene vértices de grado 3.

## EJEMPLO 6.6.9

Como "tener un vértice de grado 3" es un invariante, las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  de la figura 6.6.4 no son isomorfas;  $G_1$  tiene vértices ( $a$  y  $f$ ) de grado 3, pero  $G_2$  no tiene un vértice de grado 3. Observe que  $G_1$  y  $G_2$  tienen el mismo número de aristas y de vértices.  $\square$

Otro invariante que es útil en ciertas ocasiones es "tener un ciclo simple de longitud  $k$ ". Dejaremos la demostración de que esta propiedad es un invariante para los ejercicios (ejercicio 12).

## EJEMPLO 6.6.10

Como "tener un ciclo simple de longitud 3" es un invariante, las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  de la figura 6.6.5 no son isomorfas; la gráfica  $G_2$  tiene un ciclo simple de longitud 3, pero todos los ciclos simples en  $G_1$  tienen longitud al menos 4. Observe que  $G_1$  y  $G_2$  tienen el mismo número de aristas y de vértices y que cada vértice en  $G_1$  o  $G_2$  tiene grado 4.  $\square$

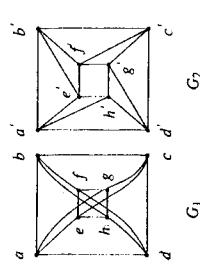
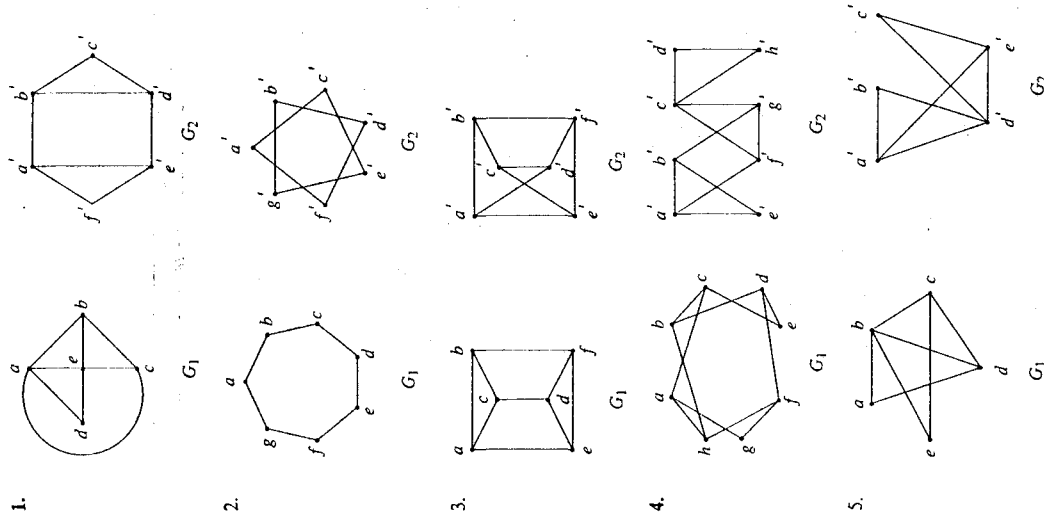


FIGURA 6.6.5

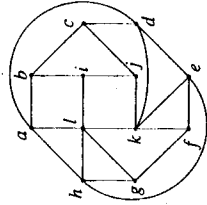
Gráficas no isomorfas.  $G_2$  tiene un ciclo simple de longitud 3, pero  $G_1$  no tiene ciclos simples de longitud 3.

## Ejercicios

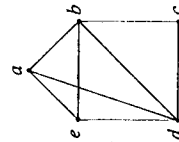
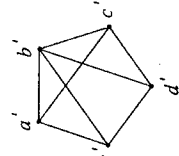
En los ejercicios 1-10, determine si las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas. Si las gráficas son isomorfas, determine las funciones  $f$  y  $g$  de la definición 6.6.1; en caso contrario, proporcione un invariante no compartido por las gráficas.



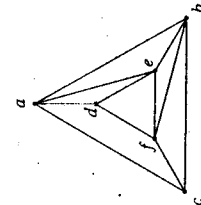
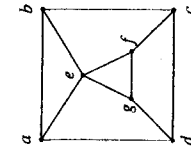
6.

 $G_1$ 

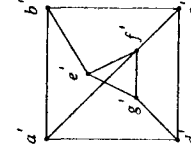
7.

 $G_2$  $G_1$  $G_2$ 

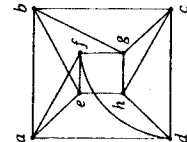
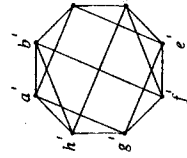
★ 8.

 $G_1$  $G_2$ 

★ 9.

 $G_1$  $G_2$ 

★ 10.

 $G_1$  $G_2$ 

11. Muestre que si  $M$  es una red  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$ , donde  $p_i \leq 2^i$ , para  $i = 1, \dots, k$ , entonces el  $(t_1 + t_2 + \dots + t_k)$ -cubo contiene una subgráfica isomorfa a  $M$ .

En los ejercicios 12-16, muestre que la propiedad dada es un invariante.

12. Tiene un ciclo simple de longitud  $k$
13. Tiene  $n$  vértices de grado  $k$
14. Es conexa
15. Tiene  $n$  ciclos simples de longitud  $k$
16. Tiene una arista  $(v, w)$ , donde  $\delta(v) = i$  y  $\delta(w) = j$
17. Determine un invariante no dado en esta sección o en los ejercicios 12-16. Demuestre que su propiedad es un invariante.

En los ejercicios 18-20, indique si cada propiedad es un invariante o no. Si la propiedad es un invariante, demuestre que lo es; en caso contrario, proporcione un contraejemplo.

18. Tiene un ciclo de Euler
19. Tiene un vértice dentro de un ciclo simple
20. Es bipartita

21. Trace todas las gráficas simples no isomorfas que tengan tres vértices.
22. Trace todas las gráficas simples no isomorfas que tengan cuatro vértices.
23. Trace todas las gráficas conexas, sin ciclos, no isomorfas que tengan cinco vértices.
24. Trace todas las gráficas conexas, sin ciclos, no isomorfas que tengan seis vértices.
25. Muestre que las gráficas simples  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas si y sólo si sus vértices se pueden ordenar de modo que sus matrices de adyacencia sean idénticas.

El complemento de una gráfica simple  $G$  es la gráfica simple  $\bar{G}$  con los mismos vértices que  $G$ . Una arista existe en  $\bar{G}$  si y sólo si no existe en  $G$ .

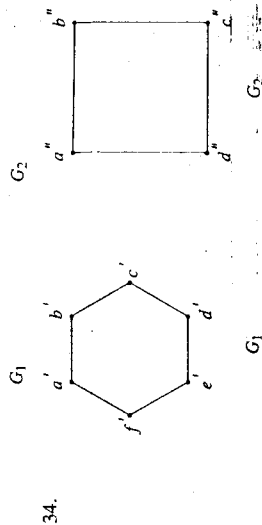
26. Trace el complemento de la gráfica  $G_1$  del ejercicio 1.
27. Trace el complemento de la gráfica  $G_2$  del ejercicio 1.
- ★ 28. Muestre que si  $G$  es una gráfica simple, entonces  $G$  o  $\bar{G}$  es conexa.
29. Una gráfica simple  $G$  es **autocomplementaria** si  $G$  y  $\bar{G}$  son isomorfas.
  - (a) Determine una gráfica autocomplementaria con cinco vértices.
  - (b) Determine otra gráfica autocomplementaria.
30. Sean  $G_1$  y  $G_2$  gráficas simples. Muestre que  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas si y sólo si  $\bar{G}_1$  y  $\bar{G}_2$  son isomorfas.

31. Dadas dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$ , suponga que existe una función uno a uno  $f$  sobre  $f$ , de los vértices de  $G_1$  a los vértices de  $G_2$ , y una función uno a uno  $g$ , de las aristas de  $G_1$  a las aristas de  $G_2$ , de modo que si una arista  $e$  es incidente en  $uv$  y  $w$  en  $G_1$ , la arista  $g(e)$  es incidente en  $f(v)$  y  $f(w)$  en  $G_2$ . ¿Son  $G_1$  y  $G_2$  isomorfas?

Un **homomorfismo** de una gráfica  $G_1$  en una gráfica  $G_2$  es una función  $f$  del conjunto de vértices de  $G_1$  en el conjunto de vértices de  $G_2$  con la propiedad de que si  $uv$  y  $w$  son adyacentes en  $G_1$ , entonces  $f(v)$  y  $f(w)$  son adyacentes en  $G_2$ .

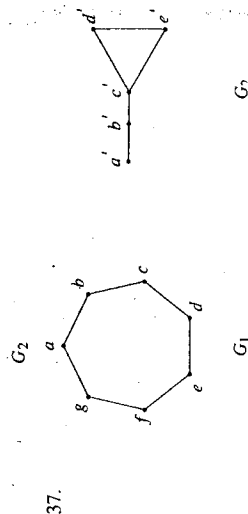
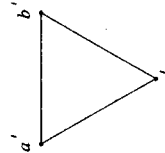
32. Suponga que  $G_1$  y  $G_2$  son gráficas simples. Muestre que si  $f$  es un homomorfismo de  $G_1$  en  $G_2$  y  $f$  es uno a uno y sobre,  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas.

En los ejercicios 33-37, para cada par de gráficas, proporcione un ejemplo de homomorfismo de  $G_1$  en  $G_2$ .

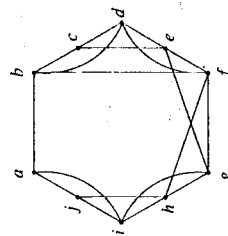


35.  $G_1 = G_1$  del ejercicio 34;  $G_2 = G_1$  del ejercicio 33

36.  $G_1 = G_1$  del ejercicio 33



☆ 38. [Hell] Muestre que el único homomorfismo de la siguiente gráfica en sí misma es la función idéntica.



## 6.7 GRÁFICAS PLANAS

Hay que unir tres ciudades,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , de manera directa, mediante autopistas que van hacia otras tres ciudades,  $C_4$ ,  $C_5$  y  $C_6$ . ¿Puede diseñarse este sistema de carreteras de modo que las autopistas no se crucen? En la figura 6.7.1 se muestra un sistema en el cual se cruzan los caminos. Si usted intenta trazar un sistema en el cual los caminos no se crucen, pronto se convencerá de que esto no se puede hacer. Posteriormente en esta sección explicaremos con cuidado este hecho.

### DEFINICIÓN 6.7.1

Una gráfica es *plana* si se puede trazar en el plano sin que se crucen sus aristas.

En el diseño de circuitos impresos es recomendable tener el menor número posible de cruces de líneas; así, el diseñador de circuitos impresos enfrenta el problema de la planitud.

Si una gráfica conexa y plana se traza en el plano, el plano se divide en regiones contiguas llamadas *caras*. Una cara queda caracterizada por el ciclo que forma su frontera. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 6.7.2, la cara  $A$  está acotada por el ciclo  $(5, 2, 3, 4, 5)$  y la cara  $C$  está acotada por el ciclo  $(1, 2, 5, 1)$ . La cara exterior  $D$  se considera acotada por el ciclo  $(1, 2, 3, 4, 6, 1)$ . La gráfica de la figura 6.7.2 tiene  $f = 4$  caras,  $e = 8$  aristas y  $v = 6$  vértices. Observe que  $f$ ,  $e$  y  $v$  satisfacen la ecuación

$$f = e - v + 2. \quad (6.7.1)$$

En 1752, Euler demostró que la ecuación (6.7.1) es válida para cualquier gráfica plana conexa. Al final de esta sección mostraremos la idea de la demostración de (6.7.1), pero por ahora sólo la utilizaremos para mostrar que ciertas gráficas no son planas.

### EJEMPLO 6.7.2

Muestre que la gráfica  $K_{3,3}$  de la figura 6.7.1 no es plana.

Suponga que  $K_{3,3}$  es plana. Como cada ciclo tiene al menos cuatro aristas, cada cara está acotada por al menos cuatro aristas. Así, el número de aristas que acotan caras es al menos  $4f$ . En una gráfica plana, cada arista pertenece a lo más a dos ciclos acotados por ella. Por tanto,

$$2e \geq 4f.$$

Utilizamos (6.7.1) para obtener

$$2e \geq 4(e - v + 2). \quad (6.7.2)$$

Para la gráfica de la figura 6.7.1,  $e = 9$  y  $v = 6$ , de modo que (6.7.2) se convierte en

$$18 = 2 \cdot 9 \geq 4(9 - 6 + 2) = 20,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto,  $K_{3,3}$  no es plana.

Mediante un tipo similar de argumento (véase el ejercicio 15) podemos mostrar que la gráfica  $K_5$  de la figura 6.7.3 no es plana.

Es claro que si una gráfica contiene a  $K_{3,3}$  o  $K_5$  como una subgráfica, no puede ser plana. El recíproco casi es verdadero. Para establecer la situación con precisión, debemos presentar algunos términos nuevos.

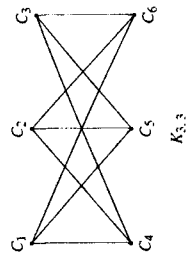


FIGURA 6.7.1  
Ciudades unidas por autopistas.

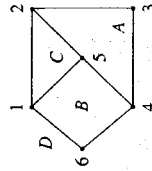


FIGURA 6.7.2  
Una gráfica plana conexa con  
 $f = 4$  caras ( $A, B, C, D$ ),  $e = 8$   
aristas y  $v = 6$  vértices;  
 $f = e - v + 2$ .

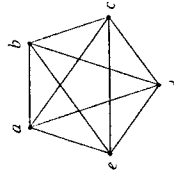


FIGURA 6.7.3  
La gráfica no plana  $K_5$ .

tenemos que

$$A^4 = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

La entrada del renglón  $d$ , columna  $e$  es 6, lo cual significa que existen seis caminos de longitud 4 de  $a$  a  $e$ . Por inspección, vemos que estos caminos son

$(d, a, d, c, e)$ ,  $(d, c, d, c, e)$ ,  $(d, a, b, c, e)$ ,  
 $(d, c, e, c, e)$ ,  $(d, c, e, b, e)$ ,  $(d, c, b, c, e)$ .

Otra útil representación matricial de una gráfica es la **matriz de incidencia**.

#### EJEMPLO 6.5.5

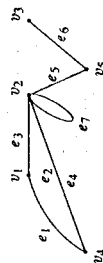
#### Matriz de incidencia

Para obtener la matriz de incidencia de la gráfica de la figura 6.5.4, etiquetamos los renglones con los vértices  $v$  y las columnas con las aristas (en algún orden arbitrario). La entrada del renglón  $v$  y la columna  $e$  es 1 si  $e$  es incidente en  $v$  y 0 en caso contrario. Así, la matriz de incidencia de la gráfica de la figura 6.5.4 es

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

FIGURA 6.5.4

La gráfica del ejemplo 6.5.5.

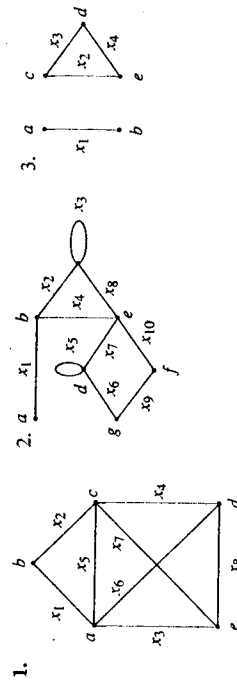


Una columna como  $e_7$  representa un lazo.

La matriz de incidencia nos permite representar las aristas paralelas y los lazos. Observe que en una gráfica sin lazos, cada columna tiene dos 1 y que la suma de los elementos de un renglón proporciona el grado del vértice identificado con ese renglón.

#### Ejercicios

En los ejercicios 1-6, escriba la matriz de adyacencia de cada gráfica.



4. La gráfica de la figura 6.2.2
  5. La gráfica completa de cinco vértices  $K_5$
  6. La gráfica bipartita completa  $K_{2,3}$
- En los ejercicios 7-12, escriba la matriz de incidencia de cada gráfica.
7. La gráfica del ejercicio 1
  8. La gráfica del ejercicio 2
  9. La gráfica del ejercicio 3
  10. La gráfica del ejercicio 6.2.1
  11. La gráfica completa de cinco vértices  $K_5$
  12. La gráfica bipartita completa  $K_{2,3}$

En los ejercicios 13-17, trace la gráfica representada por cada matriz de adyacencia.

13. 
$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$
14. 
$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$
15. 
$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$
16. 
$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

17. La matriz  $7 \times 7$  cuya entrada  $ij$ -ésima es 1 si  $i + 1$  divide  $aj + 1$  o  $j + 1$  divide  $a + i + 1$  y cuya entrada  $ij$ -ésima es 0 en caso contrario.
18. Escriba las matrices de adyacencia de los componentes de las gráficas dadas por las matrices de adyacencia de los ejercicios 13-17.
19. Calcule los cuadrados de las matrices de adyacencia de  $K_5$  y las gráficas de los ejercicios 1 y 3.
20. Sea  $A$  la matriz de adyacencia para la gráfica del ejercicio 1. ¿Cuál es la entrada en el renglón  $a$ , columna  $d$  de  $A^5$ ?
21. Suponga que una gráfica tiene una matriz de adyacencia de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

- donde todas las entradas de las submatrices  $A'$  y  $A''$  son 0. ¿Cómo debe verse la gráfica?
22. Repita el ejercicio 21 reemplazando "adyacencia" por "incidencia".
23. ¿Cómo podría modificarse la definición de matriz de adyacencia para poder representar las aristas paralelas?
24. Sea  $A$  una matriz de adyacencia de una gráfica. ¿Por qué  $A^n$  es simétrica con respecto de la diagonal principal para cada entero positivo  $n$ ?

En los ejercicios 25 y 26, trace las gráficas representadas por las matrices de incidencia.

25.  $a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  26.  $a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

27. ¿Cómo debe verse una gráfica si algún renglón de su matriz de incidencia consta sólo de ceros?

28. Sea  $A$  la matriz de adyacencia de una gráfica  $G$  con  $n$  vértices. Sea

$$Y = A + A^2 + \dots + A^{n-1}.$$

Si alguna entrada fuera de la diagonal principal de la matriz  $Y$  es igual a cero, ¿qué podría decir de la gráfica  $G$ ?

Los ejercicios 29-32 se refieren a la matriz de adyacencia  $A$  de  $K_n$ .

29. Sea  $n$  un entero positivo. Explique por qué todos los elementos en la diagonal de  $A^n$  son iguales entre ellos y todos los elementos fuera de la diagonal de  $A^n$  son iguales unos con otros.

Sea  $d_n$  el valor común de los elementos de la diagonal de  $A^n$  y sea  $a_n$  el valor común de los elementos fuera de la diagonal de  $A^n$ .

- ☆ 30. Muestre que  $d_{n+1} = 4a_n$ ;  $a_{n-1} = d_n + 3a_n$ ;  $a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1}$ .
- ☆ 31. Muestre que  $a_n = \frac{1}{5}[4^n + (-1)^{n-1}]$ .
32. Muestre que  $d_n = \frac{4}{5}[4^{n-1} + (-1)^n]$ .

☆ 33. Deduzca resultados similares a los de los ejercicios 30-32 para la matriz de adyacencia  $A$  de la gráfica  $K_m$ .

☆ 34. Sea  $A$  la matriz de adyacencia de la gráfica  $K_{m,n}$ . Determine una fórmula para las entradas de  $A^i$ .

## 6.6 ISOMORFISMOS DE GRÁFICAS

Se proporcionan las siguientes instrucciones a dos personas, quienes no pueden ver la hoja de la otra persona: "Trace y etiquete cinco vértices como  $a, b, c, d, e$ . Una  $a$  con  $b, b$  con  $c, c$  con  $d, d$  con  $e$  y  $a$  con  $e$ ." Las gráficas producidas aparecen en la figura 6.6.1. Es seguro que estas figuras definen la misma gráfica aunque parezcan diferentes. Tales gráficas son isomorfas.

### DEFINICIÓN 6.6.1

Las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas si existe una función uno a uno y sobre,  $f$ , de los vértices de  $G_1$  a los vértices de  $G_2$  y una función uno a uno y sobre,  $g$ , de las aristas de  $G_1$  a las aristas de  $G_2$ , de modo que una arista  $e$  es incidente en  $v$  y  $w$  en  $G_1$  si y sólo si la arista  $g(e)$  es incidente en  $f(v)$  y  $f(w)$  en  $G_2$ . El par de funciones  $f$  y  $g$  es un isomorfismo de  $G_1$  sobre  $G_2$ .

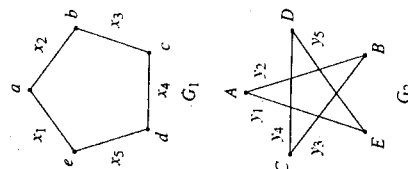


FIGURA 6.6.1 Gráficas isomorfas.

### EJEMPLO 6.6.2

Un isomorfismo para las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  de la figura 6.6.1 se define como

$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad f(c) = C, \quad f(d) = D, \quad f(e) = E$$

$$g(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, 5. \quad \square$$

Si definimos una relación  $R$  en un conjunto de gráficas mediante la regla  $G_1 R G_2$  si  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas, entonces  $R$  es una relación de equivalencia. Cada clase de equivalencia consta de un conjunto de gráficas isomorfas entre ellas.

### EJEMPLO 6.6.3

#### El modelo de red para la computación paralela

Anteriormente consideramos el problema de cuándo el  $n$ -cubo podría simular un modelo de anillo para la computación paralela (véase el ejemplo 6.3.5). Ahora veremos cuándo el  $n$ -cubo puede simular el modelo de red para la computación paralela.

El modelo de red para la computación paralela en dos dimensiones descrito mediante una gráfica consta de un arreglo rectangular de vértices unidos como se muestra (véase la figura 6.6.2). El problema "¿Cuándo puede un  $n$ -cubo simular una red bidimensional?" se puede expresar en terminología de la teoría de gráficas como "¿Cuándo contiene un  $n$ -cubo una subgráfica isomorfa a una red bidimensional?" Mostraremos que si  $M$  es una red de  $p$  por  $q$  vértices, donde  $p \leq 2^i$  y  $q \leq 2^j$ , entonces el  $(i+j)$ -cubo contiene una subgráfica isomorfa a  $M$ . (En la figura 6.6.2, consideramos  $p = 6$ ,  $q = 4$ ,  $i = 3$  y  $j = 2$ . Así, nuestro resultado muestra que el 5-cubo contiene una subgráfica isomorfa a la gráfica de la figura 6.6.2.)

Sea  $M$  una red con  $p$  vértices por  $q$  vértices, donde  $p \leq 2^i$  y  $q \leq 2^j$ . Consideramos a  $M$  como un arreglo rectangular en el espacio ordinario de dos dimensiones con  $p$  vértices en la dirección horizontal y  $q$  vértices en la dirección vertical (véase la figura 6.6.2). Utilizamos los elementos de los códigos Gray como las coordenadas de los vértices. (Los códigos Gray se analizaron en el ejemplo 6.3.5.) Las coordenadas en la dirección horizontal son los primeros  $p$  miembros de un código Gray de  $i$  bits y las coordenadas en la dirección vertical son los primeros  $q$  miembros de un código Gray de  $j$  bits (véase el ejemplo 6.6.2). Si un vértice  $v$  está en la red, sean  $v_i$  la coordenada horizontal y  $v_j$  la coordenada vertical de  $v$ . Ahora definimos una función  $f$  sobre los vértices de  $M$  como

$$f(v) = v_i v_j.$$

(La cadena  $v_i v_j$  es la cadena  $v_i$  seguida de la cadena  $v_j$ .) Observe que  $f$  es uno a uno.

Si  $(v, w)$  es una arista en  $M$ , las cadenas de bits  $v_i v_j$  y  $w_i w_j$  difieren exactamente en un bit. Así,  $(v_i v_j, w_i w_j)$  es una arista en el  $(i+j)$ -cubo. Definimos una función  $g$  sobre las aristas de  $M$  como

$$g((v, w)) = (v_i v_j, w_i w_j).$$

Observe que  $g$  es uno a uno. El par de funciones  $f, g$  es un isomorfismo de  $M$  sobre la subgráfica  $(V, E)$  del  $(i+j)$ -cubo, donde

$$V = \{f(v) \mid v \text{ es un vértice en } M\}, \quad E = \{g(e) \mid e \text{ es una arista en } M\}.$$

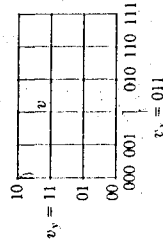


FIGURA 6.6.2

Modelo de red para la computación paralela.

Por tanto, si  $M$  es una red de  $p$  por  $q$  vértices, donde  $p \leq 2^i$  y  $q \leq 2^j$ , el  $(i + j)$ -cubo contiene una subgráfica isomorfa a  $M$ .

El argumento dado se puede ampliar a un número arbitrario de dimensiones (véase el ejercicio 11); es decir, si  $M$  es una red  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$ , donde  $p_i \leq 2^{q_i}$  para  $i = 1, \dots, k$ , entonces el  $(t_1 + t_2 + \dots + t_k)$ -cubo contiene una subgráfica isomorfa a  $M$ .  $\square$

Suponga que las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas. Si  $f$  es la función de la definición 6.6.1, la definición implica que los vértices  $v$  y  $w$  en  $G_1$  son adyacentes si y sólo si los vértices  $f(v)$  y  $f(w)$  son adyacentes en  $G_2$ . El recíproco es verdadero para gráficas simples.

#### TEOREMA 6.6.4

Sean  $G_1$  y  $G_2$  gráficas simples. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas.
- Existe una función uno a uno y sobre,  $f$ , del conjunto de vértices de  $G_1$  al conjunto de los vértices de  $G_2$  que satisfice: Los vértices  $v$  y  $w$  son adyacentes en  $G_1$  si y sólo si los vértices  $f(v)$  y  $f(w)$  son adyacentes en  $G_2$ .

**Demostración.** Por la definición 6.6.1, tenemos de manera directa que (a) implica (b).

Demostremos que (b) implica (a). Suponga que existe una función uno a uno y sobre,  $f$ , del conjunto de vértices de  $G_1$  al conjunto de vértices de  $G_2$  que satisfice la siguiente condición: Los vértices  $v$  y  $w$  son adyacentes en  $G_1$  si y sólo si los vértices  $f(v)$  y  $f(w)$  son adyacentes en  $G_2$ .

Definimos una función,  $g$ , de las aristas de  $G_1$  a las aristas de  $G_2$  mediante la regla

$$g((v, w)) = (f(v), f(w)).$$

Como  $G_1$  y  $G_2$  son gráficas simples, ninguna de ellas tiene aristas paralelas, de modo que la notación  $(v, w)$  designa sin ambigüedades una arista. Observe que el rango de  $g$  es un subconjunto de las aristas de  $G_2$ , pues si  $(v, w)$  es una arista en  $G_1$ ,  $v$  y  $w$  son adyacentes, lo cual implica que  $f(v)$  y  $f(w)$  son adyacentes; es decir, que  $(f(v), f(w))$  es una arista en  $G_2$ .

Dejaremos al lector los detalles de la verificación de que  $g$  es uno a uno y sobre y que una arista  $e$  es incidente en  $v$  y  $w$  en  $G_1$  si y sólo si la arista  $g(e)$  es incidente en  $f(v)$  y  $f(w)$  en  $G_2$ . Esto implica que  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas.  $\blacksquare$

El teorema 6.6.4 implica de inmediato que las gráficas simples son isomorfas si y sólo si para cierto orden de sus vértices, sus matrices de adyacencia son idénticas.

#### TEOREMA 6.6.5

Las gráficas simples  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas si y sólo si para cierto orden de sus vértices, las matrices de adyacencia son iguales.

**Demostración.** Véase el ejercicio 25.  $\blacksquare$

#### EJEMPLO 6.6.6

La matriz de adyacencia de la gráfica  $G_1$  en la figura 6.6.1 con respecto del orden de los vértices  $a, b, c, d, e$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es igual a la matriz de adyacencia de la gráfica  $G_2$  en la figura 6.6.1 con respecto del orden de los vértices  $A, B, C, D, E$ .

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ A & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ E & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De nuevo vemos que  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas.  $\square$

Un problema interesante consiste en determinar si dos gráficas son isomorfas o no. Aunque todos los algoritmos conocidos para verificar si dos gráficas son isomorfas necesitan un tiempo exponencial o factorial en el peor de los casos, existen algoritmos que permiten determinar cuándo un par de gráficas son isomorfas en un tiempo lineal en el caso promedio (véase [Read] y [Babai]).

La siguiente es una forma de demostrar que dos gráficas simples  $G_1$  y  $G_2$  no son isomorfas. Se determina una propiedad de  $G_1$  que  $G_2$  no tenga, pero que  $G_2$  tendría si  $G_1$  y  $G_2$  fuesen isomorfas. Tal propiedad es un **invariante**. Más precisamente, una propiedad  $P$  es un invariante, si siempre que  $G_1$  y  $G_2$  sean gráficas isomorfas:

Si  $G_1$  tiene la propiedad  $P$ , entonces  $G_2$  también tiene la propiedad  $P$ .

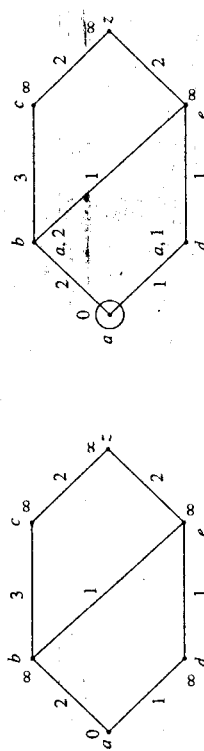
Según la definición 6.6.1, si las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas, entonces existen funciones uno a uno y sobre de las aristas (respectivamente, vértices) de  $G_1$  en las aristas (respectivamente, vértices) de  $G_2$ . Así, si  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas, entonces  $G_1$  y  $G_2$  tienen el mismo número de aristas y el mismo número de vértices. Por tanto, si  $e$  y  $n$  son enteros no negativos, las propiedades "tiene  $e$  aristas" y "tiene  $n$  vértices" son invariantes.

#### EJEMPLO 6.4.4

Determine una ruta más corta de  $a$  a  $z$  y su longitud para la gráfica de la figura 6.4.7.

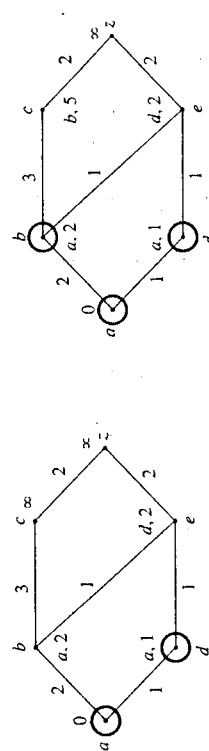
Aplicaremos el algoritmo 6.4.1 con una ligera modificación. Además de encerrar un vértice en un círculo, también lo etiquetaremos con el nombre del vértice a partir del cual fue etiquetado.

La figura 6.4.7 muestra el resultado de ejecutar las líneas 2-4 del algoritmo 6.4.1. Primero encerramos  $a$  en un círculo (véase la figura 6.4.8). A continuación, etiquetamos los vértices  $b$  y  $d$  adyacentes a  $a$ . El vértice  $b$  se etiqueta “a, 2” para indicar su valor y el hecho de que fue etiquetado a partir de  $a$ . De manera análoga, el vértice  $d$  se etiqueta “a, 1”.



**FIGURA 6.4.7** Inicialización en el algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

A continuación, encerramos en un círculo  $d$  y actualizamos la etiqueta del vértice  $e$  adyacente a  $d$  (véase la figura 6.4.9). A continuación, encerramos en un círculo  $c$  y actualizamos las etiquetas de los vértices  $b$  y  $e$  (véase la figura 6.4.10). A continuación, encerramos en un círculo  $e$  y actualizamos la etiqueta del vértice  $z$  (véase la figura 6.4.11). En este momento, podemos encerrar a  $z$  dentro de un círculo, con lo cual concluye el algoritmo. La longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$  es 4. A partir de  $z$ , podemos seguir las etiquetas para determinar la ruta más corta

 $(a, d, e, z).$ 

**FIGURA 6.4.9** La segunda iteración del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

Nuestro siguiente teorema muestra que el algoritmo de Dijkstra es  $\Theta(n^2)$  en el peor de los casos.

**FIGURA 6.4.11** La conclusión del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

### TEOREMA 6.4.3

Para una entrada consistente en una gráfica simple, conexa, con pesos y  $n$  vértices, el algoritmo de Dijkstra (algoritmo 6.4.1) tiene un tiempo de ejecución  $\Theta(n^2)$  en el peor de los casos.

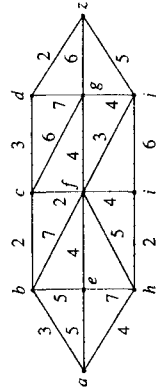
**Demostración.** Consideremos el tiempo ocupado en los ciclos, el cual proporciona una cota superior para el tiempo total. La línea  $s$  se ejecuta  $O(n)$  veces. Dentro del ciclo while, la línea 10 tarda un tiempo  $O(n)$  [podríamos determinar el mínimo  $L$  (ver examinando todos los vértices en  $T$ ). El cuerpo del ciclo for (línea 13) tarda un tiempo  $O(n)$ . Como las líneas 10 y 13 están anidadas dentro de un ciclo while, el cual tarda un tiempo  $O(n)$ , el tiempo total para las líneas 10 y 13 es  $O(n^2)$ . Así, el algoritmo de Dijkstra se ejecuta en tiempo  $O(n^2)$ .

De hecho, para una elección adecuada de  $z$ , el tiempo es  $\Omega(n^2)$  para  $K_n$ , la gráfica completa con  $n$  vértices, debido a que cada vértice es adyacente a todos los demás. Así, el tiempo de ejecución en el peor de los casos es  $\Theta(n^2)$ . ■

Cualquier algoritmo para determinar una ruta más corta y que reciba como entrada  $K_n$ , la gráfica completa con  $n$  vértices, debe examinar todas las aristas de  $K_n$  al menos una vez. Como  $K_n$  tiene  $n(n-1)/2$  aristas (véase el ejercicio 11, sección 6), su tiempo de ejecución en el peor de los casos debe ser al menos  $n(n-1)/2 = \Omega(n^2)$ . El teorema 6.4.5 implica entonces que el algoritmo 6.4.1 es óptimo.

## Ejercicios

En los ejercicios 1-5, determine la longitud de una ruta más corta y de una ruta más corta entre cualesquiera par de vértices en la siguiente gráfica con pesos.



- 1.a,f      2.a,g      3.a,z      4.b,j      5.h,d



6. Escriba un algoritmo que determine la longitud de una ruta más corta entre dos vértices dados en una gráfica conexa con pesos, y que también determine una ruta más corta.
7. Escriba un algoritmo que determine las longitudes de las rutas más cortas desde un vértice dado hasta cualquier otro vértice en una gráfica simple, conexa, con pesos,  $G$ .
- ☆ 8. Escriba un algoritmo que determine las longitudes de las rutas más cortas entre todos los pares de vértices en una gráfica simple, conexa, con pesos, con  $n$  vértices en un tiempo  $O(n^3)$ .
9. Modifique el algoritmo 6.4.1 de modo que acepte una gráfica con pesos que no necesariamente sea conexa. Al concluir, ¿cuál es el valor de  $L(z)$  si no existe un camino de  $a$  a  $z$ ?
10. ¿Verdadero o falso? Al introducir como dato una gráfica conexa con pesos y los vértices  $a$  y  $z$  en el siguiente algoritmo, éste regresa la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ . Si el algoritmo es correcto, demuéstrela; en caso contrario, proporcione un ejemplo de una gráfica conexa con pesos y vértices  $a$  y  $z$  para los cuales falle.

#### ALGORITMO 6.4.5

```

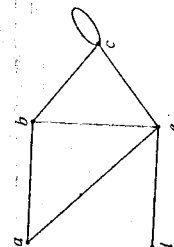
procedure algor( $w, a, z$ )
  length := 0
   $v := a$ 
  while  $v \neq z$  do
    begin
       $T := T - \{v\}$ 
      elegir  $x \in T$  con  $w(v, x)$  mínimo
      length := length +  $w(v, x)$ 
       $v := x$ 
    end
  return (length)
end algor

```

11. ¿Verdadero o falso? El algoritmo 6.4.1 determina la longitud de una ruta más corta en una gráfica conexa con pesos, incluso si algunos pesos son negativos. De ser cierto, demuéstrela; en caso contrario, proporcione un contraejemplo.

## 6.5 REPRESENTACIONES DE GRÁFICAS

En las secciones anteriores representamos una gráfica mediante un diagrama. En ciertas ocasiones, como por ejemplo, al utilizar una computadora para analizar una gráfica, es necesaria una representación más formal. Nuestro primer método de representación de una gráfica utiliza la **matriz de adyacencia**.



**FIGURA 6.5.1**  
La gráfica del ejemplo 6.5.1.

#### EJEMPLO 6.5.1

*Matriz de adyacencia*

Consideremos la gráfica de la figura 6.5.1. Para obtener la matriz de adyacencia de esta gráfica, primero elegimos un orden para los vértices, digamos,  $a, b, c, d, e$ . A continuación eti-

quetamos los renglones y las columnas de una matriz con los vértices ordenados. La entrada en esta matriz es 1 si los vértices del renglón y la columna son adyacentes y 0 en caso contrario. La matriz de adyacencia de esta gráfica es

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Observe que podemos obtener el grado de un vértice  $v$  en una gráfica simple  $G$  sumando el renglón  $v$  o la columna  $v$  en la matriz de adyacencia de  $G$ . Además, observe que aunque la matriz de adyacencia nos permite representar lazos, no nos permite representar aristas paralelas; sin embargo, si modificamos la definición de matriz de adyacencia para que ésta pueda contener enteros no negativos arbitrarios, podemos representar las aristas paralelas. En la matriz de adyacencia modificada, interpretamos la entrada  $ij$ -ésima especificando el número de aristas entre  $i$  y  $j$ .

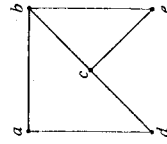
La matriz de adyacencia no es una manera muy eficiente para representar una gráfica. Como la matriz es simétrica con respecto de la diagonal principal (los elementos sobre la línea que va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha), la información aparece dos veces (excepto aquella que se encuentra en la diagonal principal).

#### EJEMPLO 6.5.2

La matriz de adyacencia de la gráfica simple de la figura 6.5.2 es

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$A = c$



**FIGURA 6.5.2**  
La gráfica del ejemplo 6.5.2.

Mostraremos que si  $A$  es la matriz de adyacencia de una gráfica simple  $G$ , las potencias de  $A$ ,

$$A, A^2, A^3, \dots,$$

cuentan el número de caminos de diversas longitudes. Más precisamente, si los vértices de  $G$  se etiquetan  $1, 2, \dots$ , la entrada  $ij$ -ésima en la matriz  $A^n$  es igual al número de caminos de  $i$  a  $j$  de longitud  $n$ . Por ejemplo, supongamos que obtenemos el cuadrado de la matriz  $A$  del ejemplo 6.5.2:

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Consideremos la entrada del renglón  $a$ , columna  $c$  en  $A^2$ , obtenida al multiplicar por pares las entradas del renglón  $a$  por las entradas de la columna  $c$  de la matriz  $A$  y sumando:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1+1 \\ 1+0+0+1 \\ 0+0+1+1 \\ 0+1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La única forma en que un producto distinto de cero podría aparecer en esta suma es cuando ambas entradas por multiplicar son iguales a 1. Esto ocurre si existe un vértice  $v$  cuya entrada en el renglón  $a$  es 1 y cuya entrada en la columna  $c$  es 1. En otras palabras, debe haber aristas de la forma  $(a, v)$  y  $(v, c)$ . Tales aristas forman un camino  $(a, v, c)$  de longitud 2 de  $a$  a  $c$  y cada camino incrementa la cantidad en 1. En este ejemplo, la suma es 2 pues existen dos caminos

$$(a, b, c), (a, d, c)$$

de longitud 2 de  $a$  a  $c$ . En general, la entrada en el renglón  $x$  y la columna  $y$  de la matriz  $A^2$  es el número de caminos de longitud 2 del vértice  $x$  al vértice  $y$ .

Las entradas de la diagonal principal de  $A^2$  proporcionan los grados de los vértices (cuando la gráfica es una gráfica simple). Consideremos, por ejemplo, el vértice  $c$ . El grado de  $c$  es 3, pues  $c$  es incidente en las tres aristas  $(c, b)$ ,  $(c, d)$  y  $(c, e)$ . Pero cada una de estas aristas se puede convertir en un camino de longitud 2 de  $c$  a  $c$ :

$$(c, b, c), (c, d, c), (c, e, c)$$

De manera análoga, un camino de longitud 2 de  $c$  a  $c$  define una arista incidente en  $c$ . Así, el número de caminos de longitud 2 de  $c$  a  $c$  es 3, el grado de  $c$ .

Ahora utilizaremos la inducción para mostrar que las entradas en la  $n$ -ésima potencia de una matriz de adyacencia proporcionan el número de caminos de longitud  $n$ .

#### TEOREMA 6.5.3

Si  $A$  es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, la entrada  $ij$ -ésima de  $A^n$  es igual al número de caminos de longitud  $n$  del vértice  $i$  al vértice  $j$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Demostración.** Utilizaremos la inducción sobre  $n$ .

En el caso  $n = 1$ ,  $A^1$  es simplemente  $A$ . La entrada  $ij$ -ésima es 1 si existe una arista de  $i$  a  $j$ , que es un camino de longitud 1, y 0 en caso contrario. Así, el teorema es verdadero en el caso  $n = 1$ . Hemos verificado el paso base.

Supongamos que el teorema es verdadero para  $n$ . Ahora,

$$A^{n+1} = A^n A$$

de modo que la entrada  $ik$ -ésima de  $A^{n+1}$  se obtiene al multiplicar por pares los elementos del renglón  $i$ -ésimo de  $A^n$  por los elementos de la columna  $k$ -ésima de  $A$  y sumando:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} t_1 & t_2 & \dots & t_j & \dots & t_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_j \\ \vdots \\ s_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} s_1 t_1 & s_1 t_2 & \dots & s_1 t_j & \dots & s_1 t_m \\ s_2 t_1 & s_2 t_2 & \dots & s_2 t_j & \dots & s_2 t_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j t_1 & s_j t_2 & \dots & s_j t_j & \dots & s_j t_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_m t_1 & s_m t_2 & \dots & s_m t_j & \dots & s_m t_m \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= s_i t_1 + s_i t_2 + \dots + s_i t_j + \dots + s_i t_m$$

$$= \text{entrada } ik\text{-ésima de } A^{n+1}$$

Por inducción,  $s_j$  proporciona el número de caminos de longitud  $n$  de  $i$  a  $j$  en la gráfica  $G$ . Ahora,  $t_j$  es 0 o 1. Si  $t_j$  es 0, no existe una arista de  $j$  a  $k$ , de modo que existen  $s_j t_j = 0$  caminos de longitud  $n + 1$  de  $i$  a  $k$ , donde la última arista es  $(j, k)$ . Si  $t_j$  es 1, existe una arista del vértice  $j$  al vértice  $k$  (véase la figura 6.5.3). Como existen  $s_j$  caminos de longitud  $n$  del vértice  $i$  al vértice  $j$ , existen  $s_j t_j = s_j$  caminos de longitud  $n + 1$  de  $i$  a  $k$ , donde la última arista es  $(j, k)$  (véase la figura 6.5.3). Al sumar sobre todas las  $j$ , contamos todos los caminos de longitud  $n + 1$  de  $i$  a  $k$ . Así, la entrada  $ik$ -ésima en  $A^{n+1}$  proporciona el número de caminos de longitud  $n + 1$  de  $i$  a  $k$  y se verifica el paso inductivo. ■

El teorema queda establecido por el principio de inducción matemática.

#### EJEMPLO 6.5.4

Después del ejemplo 6.5.2, mostramos que si  $A$  es la matriz de la gráfica de la figura 6.5.2,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ c & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ d & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ e & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar,

$$A^2 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



FIGURA 6.5.3

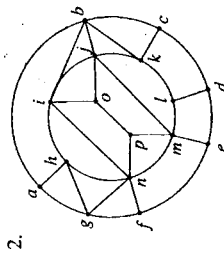
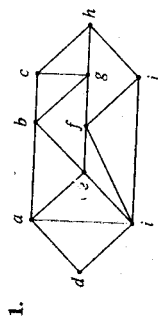
La demostración del teorema 6.5.3. Un camino de  $i$  a  $k$  de longitud  $n + 1$  cuyo penúltimo vértice es  $j$  consta de un camino de longitud  $n$  de  $i$  a  $j$  seguido de la arista  $(j, k)$ . Si existen  $s_j$  caminos de longitud  $n$  de  $i$  a  $j$  y  $t_j$  es igual a 1 si la arista  $(j, k)$  existe y 0 en caso contrario, entonces la suma de  $s_j t_j$  sobre todas las  $j$  proporciona el número de caminos de longitud  $n + 1$  de  $i$  a  $k$ .

mos que  $v_i$  corresponde al cuadro superior izquierdo. Llamamos a los ocho cuadros de la parte superior y la parte inferior los *cuadros exteriores*, y a los otros ocho los llamaremos *cuadros interiores*. Observe que el caballo debe llegar a un cuadro exterior desde un cuadro interior y que el caballo debe moverse desde un cuadro exterior hacia un cuadro interior. Así, en el ciclo  $C$ , cada vértice correspondiente a un cuadro exterior debe ser precedido y seguido por un vértice correspondiente a un cuadro interior. Como existen iguales cantidades de cuadros exteriores e interiores, los vértices  $v_i$ , donde  $i$  es impar corresponden a cuadros exteriores, y los vértices  $v_i$ , donde  $i$  es par, corresponden a cuadros interiores. Pero al observar los movimientos del caballo, vemos que los vértices  $v_i$ , donde  $i$  es impar corresponden a cuadros blancos, y los vértices  $v_i$ , donde  $i$  es par, corresponden a cuadros negros. Por tanto, los únicos cuadros exteriores visitados son blancos y los únicos cuadros interiores visitados son negros. Así,  $C$  no es un ciclo hamiltoniano. Esta contradicción completa la demostración de que  $GK_8$  no tiene un ciclo hamiltoniano. Este argumento fue utilizado por Louis Pósa cuando era adolescente.

La gráfica  $GK_n$  tiene un ciclo hamiltoniano. Este hecho se puede demostrar exhibiendo uno (véase el ejercicio 21). Se puede mostrar mediante métodos elementales que  $GK_n$  tiene un ciclo hamiltoniano para todo  $n \geq 6$  par (véase [Schwenk]). La demostración construye ciclos hamiltonianos de manera explícita para ciertos tableros menores y luego pega los tableros menores entre ellos para obtener ciclos hamiltonianos para los tableros mayores.  $\square$

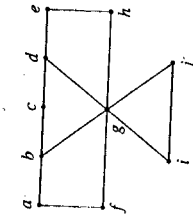
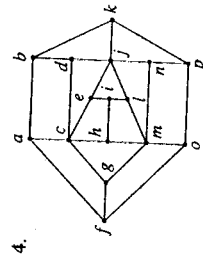
## Ejercicios

Para cada gráfica determine un ciclo hamiltoniano.

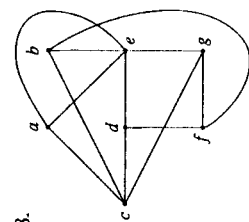
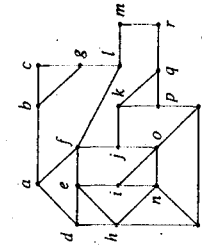
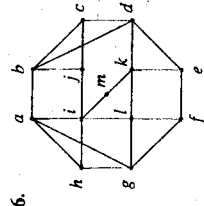


Muestre que ninguna de las siguientes gráficas contiene un ciclo hamiltoniano.

3.



Determine si cada gráfica contiene o no un ciclo hamiltoniano. Si existe un ciclo hamiltoniano, exhibalo; en caso contrario, proporcione un argumento que muestre que no existe tal ciclo hamiltoniano.



9. Proporcione un ejemplo de una gráfica que tenga un ciclo de Euler pero no un ciclo hamiltoniano.

10. Proporcione un ejemplo de una gráfica que tenga un ciclo de Euler que también sea un ciclo hamiltoniano.

11. Proporcione un ejemplo de una gráfica que tenga un ciclo de Euler y un ciclo hamiltoniano pero que no sean idénticos.

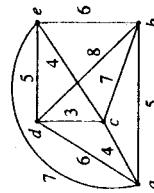
★ 12. ¿Para cuáles valores de  $m$  y  $n$  tiene la gráfica del ejercicio 37, sección 6.2, un ciclo hamiltoniano?

13. Modifique la gráfica del ejercicio 37, sección 6.2, insertando una arista entre el vértice del renglón  $i$ , columna 1, y el vértice en el renglón  $i$ , columna  $m$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Muestre que la gráfica resultante siempre tiene un ciclo hamiltoniano.

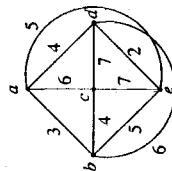
14. Muestre que si  $n \geq 3$ , la gráfica completa de  $n$  vértices  $K_n$  contiene un ciclo hamiltoniano.

15. ¿Cuándo contiene un ciclo hamiltoniano la gráfica bipartita completa  $K_{m,n}$ ?

16. Muestre que el ciclo  $(e, b, a, c, d, e)$  proporciona una solución al problema del agente viajero para la siguiente gráfica.



17. Resuelva el problema del agente viajero para la siguiente gráfica.



★ 18. Sean  $m$  y  $n$  enteros que satisfacen  $1 \leq m \leq 2^n$ . Demuestre que el  $n$ -cubo tiene un ciclo simple de longitud  $m$  si y sólo si  $m \geq 4$  y  $m$  es par.

19. Utilice el teorema 6.3.6 para calcular el código Gray  $G_4$ .
20. Sea  $G$  una gráfica bipartita con conjuntos ajenos de vértices  $V_1$  y  $V_2$ , como en la definición 6.1.10. Muestre que si  $G$  tiene un ciclo hamiltoniano, entonces  $V_1$  y  $V_2$  tienen el mismo número de elementos.
21. Determine un ciclo hamiltoniano en  $GK_6$  (véase el ejemplo 6.3.9).
22. Describa un modelo de gráfica adecuado para resolver el siguiente problema: ¿Podrían ordenarse las permutaciones de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de modo que las permutaciones adyacentes satisfagan  $p_i \neq q_i$  para  $i = 1, \dots, n$ ?
23. Resuelva el problema del ejercicio 22 para  $n = 1, 2, 3, 4$ . (La respuesta a la pregunta es "sí" para  $n \geq 5$ ; véase el [problema 1186] en la bibliografía.)

## 6.4 UN ALGORITMO PARA LA RUTA MÁS CORTA

Recuerde (véase la sección 6.1) que una gráfica con pesos es una gráfica en la cual se asignan valores a las aristas y que la longitud de una ruta (camino) en una gráfica con pesos es la suma de los pesos de las aristas en la ruta. Sea  $w(i, j)$  el peso de la arista  $(i, j)$ . En las gráficas con pesos, con frecuencia queremos determinar la ruta más corta (es decir, un camino de longitud mínima) entre dos vértices dados. El algoritmo 6.4.1, debido a E. W. Dijkstra, que resuelve de manera eficiente este problema, es el tema de esta sección.

Edsger W. Dijkstra (1930–) nació en los Países Bajos. Él fue una de las primeras personas que propuso la programación como una ciencia. Estaba tan dedicado a la programación que al casarse, en 1957, indicó que su profesión era programador. Sin embargo, las autoridades holandesas dijeron que no existía tal profesión, de modo que tuvo que modificar el dato por "físico teórico". Ganó el prestigioso Premio Turing de la Association for Computing Machinery en 1972 y obtuvo la Schlumberger Centennial Chair en Computación en la Universidad de Texas en Austin, en 1984.

En esta sección,  $G$  denota una gráfica conexa, con pesos. Suponemos que los pesos son números positivos y que queremos determinar un camino más corto del vértice  $a$  al vértice  $z$ . Podemos eliminar la hipótesis de que  $G$  sea conexa (véase el ejercicio 9).

En el algoritmo de Dijkstra se asignan etiquetas a los vértices. Sea  $L(v)$  la etiqueta del vértice  $v$ . En cualquier momento, algunos vértices tienen etiquetas temporales y el resto poseen permanentes. Sea  $T$  el conjunto de vértices que tienen etiquetas temporales. Al ilustrar el algoritmo, encerraremos en un círculo los vértices que tienen etiquetas permanentes. Mostraremos posteriormente que si  $L(v)$  es la etiqueta permanente del vértice  $v$ , entonces  $L(v)$  es la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $v$ . En principio, todos los vértices tienen etiquetas temporales. Cada iteración del algoritmo modifica el estado de una etiqueta, de temporal a permanente; así, podemos concluir el algoritmo cuando  $z$  recibe una etiqueta temporal. En este momento,  $L(z)$  proporciona la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ .

### ALGORITMO 6.4.1 Algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra

Este algoritmo determina la longitud de una ruta más corta del vértice  $a$  al vértice  $z$  en una gráfica conexa con pesos. El peso de la arista  $(i, j)$  es  $w(i, j) > 0$  y la etiqueta del vértice  $x$  es  $L(x)$ . Al concluir,  $L(z)$  es la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ .

Entrada: Una gráfica conexa, con pesos, en la cual todos los pesos son positivos. Los vértices  $a$  y  $z$ .

Salida:  $L(z)$ , la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ .

1. **procedure** *dijkstra* ( $w, a, z, L$ )
2.  $L(a) := 0$
3. **for** todos los vértices  $x \neq a$  **do**
4.  $L(x) := \infty$
5.  $T :=$  conjunto de todos los vértices
6.  $T$  es el conjunto de vértices cuya distancia más corta a  $a$
7. **while**  $z \in T$  **do**
8. **begin**
9.  $x :=$  vértice en  $T$  con  $L(x)$  mínimo
10.  $T := T - \{x\}$
11. **for** cada  $x \in T$  adyacente a  $v$  **do**
12.  $L(x) := \min(L(x), L(v) + w(v, x))$
13. **end**
14. **end** *dijkstra*

### EJEMPLO 6.4.2

Ahora mostraremos la forma en que el algoritmo 6.4.1 determina una ruta más corta de  $a$  a  $z$  en la gráfica de la figura 6.4.1. (Los vértices en  $T$  no están encerrados en un círculo y tienen etiquetas temporales. Los vértices encerrados en un círculo tienen etiquetas permanentes.) La figura 6.4.2 muestra el resultado de ejecutar las líneas 2-5. En la línea 8,  $z$  no está encerrado en un círculo. Continuamos con la línea 10, donde elegimos el vértice  $a$  (el vértice no encerrado en un círculo y que tiene la etiqueta menor) y lo encerramos en un círculo.

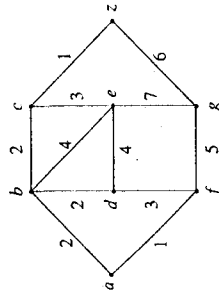


FIGURA 6.4.1 La gráfica para el ejemplo 6.4.2.

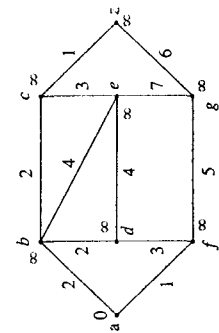


FIGURA 6.4.2 Inicialización en el algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

lo (véase la figura 6.4.3). En las líneas 12 y 13 actualizamos cada uno de los vértices no encerrados en un círculo,  $b$  y  $f$ , adyacentes a  $a$ . Obtenemos las nuevas etiquetas

$$L(b) = \min\{\infty, 0 + 2\} = 2, \quad L(f) = \min\{\infty, 0 + 1\} = 1$$

(véase la figura 6.4.3). En este momento, regresamos a la línea 8.

Como  $z$  no está encerrado en un círculo y que tiene la menor etiqueta) y lo encerramos en un círculo (véase la figura 6.4.4). En las líneas 12 y 13 actualizamos las etiquetas de los vértices no encerrados en un círculo,  $d$  y  $g$ , adyacentes a  $f$ . Obtenemos las etiquetas que aparecen en la figura 6.4.4.

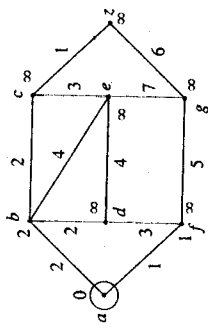


FIGURA 6.4.3 La primera iteración del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

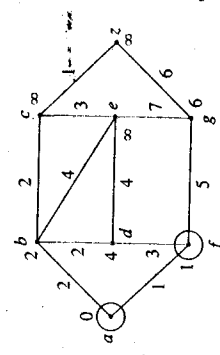


FIGURA 6.4.4 La segunda iteración del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra.

El lector debe verificar que la siguiente iteración del algoritmo produce las etiquetas que aparecen en la figura 6.4.5 y que al concluir el algoritmo,  $z$  tiene la etiqueta 5, lo cual indica que la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$  es 5. Una ruta más corta es  $(a, b, c, z)$ .

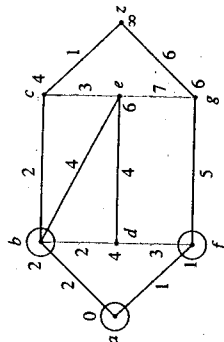


FIGURA 6.4.5 La tercera iteración del algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra. □

Ahora mostraremos que el algoritmo 6.4.1 es correcto. La demostración se basa en el hecho de que el algoritmo de Dijkstra determina las longitudes de las rutas más cortas a partir de  $a$  en orden creciente.

**TEOREMA 6.4.3**

El algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra (algoritmo 6.4.1) determina de manera correcta la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ .

**Demostración.** Utilizamos la inducción matemática sobre  $i$  para demostrar que la  $i$ -ésima vez que llegamos a la línea 10,  $L(v)$  es la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $v$ . Al demostrar esto, tendremos que el algoritmo es correcto, pues al elegir  $z$  en la línea 10,  $L(z)$  dará la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ .

**PASO BASE** ( $i = 1$ ). La primera vez que llegamos a la línea 10, debido a los pasos de inicialización (líneas 2-4),  $L(a)$  es igual a cero y todos los demás valores de  $L$  son  $\infty$ . Así,  $a$  se elige la primera vez que llegamos a la línea 10. Como  $L(a)$  es igual a cero,  $L(a)$  es la longitud de una ruta más corta de  $a$  hasta  $a$ .

**PASO INDUCTIVO.** Supongamos que para toda  $k < i$ , la  $k$ -ésima vez que llegamos a la línea 10,  $L(v)$  es la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $v$ .

Suponga que estamos en la línea 10 por la  $i$ -ésima vez y que elegimos  $v$  en  $T$  con el valor mínimo  $L(v)$ .

Primero mostraremos que si existe un camino de  $a$  a un vértice  $w$ , cuya longitud sea menor que  $L(v)$ , entonces  $w$  no está en  $T$  (es decir,  $w$  fue elegido antes en la línea 10). Supongamos por contradicción que  $w$  está en  $T$ . Sean  $P$  una ruta más corta de  $a$  a  $w$ ,  $x$  el vértice más cercano a  $a$  sobre  $P$  y que pertenezca a  $T$ , y  $u$  el predecesor de  $x$  en  $P$  (véase la figura 6.4.6). Entonces  $u$  no está en  $T$ , por lo que  $u$  fue elegido en la línea 10 durante una iteración anterior del ciclo while. Por la hipótesis de inducción,  $L(u)$  es la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $u$ . Ahora,

$$L(x) \leq L(u) + w(u, x) \leq \text{longitud de } P < L(v).$$

Pero esta desigualdad muestra que  $v$  no es el vértice en  $T$  con  $L(v)$  mínimo [ $L(x)$  es menor]. Esta contradicción concluye la demostración de que si existe una ruta de  $a$  a un vértice  $w$  cuya longitud sea menor que  $L(v)$ , entonces  $w$  no está en  $T$ .



FIGURA 6.4.6 La demostración del teorema 6.4.3.  $P$  es una ruta más corta de  $a$  a  $w$ ,  $x$  es el vértice más cercano a  $a$  sobre  $P$  y que pertenece a  $T$ , y  $u$  es el predecesor de  $x$  sobre  $P$ .

El resultado anterior muestra, en particular, que si existiera un camino de  $a$  a  $v$  con longitud menor que  $L(v)$ ,  $v$  ya hubiera sido elegido en la línea 10 y eliminado de  $T$ . Por tanto, cada camino de  $a$  a  $v$  tiene longitud al menos  $L(v)$ . Por construcción, existe un camino de  $a$  a  $v$  de longitud  $L(v)$ , de modo que éste es una ruta más corta de  $a$  a  $v$ . Esto concluye la demostración. ■

El algoritmo 6.4.1 determina la longitud de una ruta más corta de  $a$  a  $z$ . En la mayor parte de las aplicaciones, también quisiéramos identificar una ruta más corta. Una ligera modificación del algoritmo 6.4.1 nos permite determinar una ruta más corta.

## RINCÓN DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS: GRÁFICAS

### Problema

¿Es posible que en un departamento de 25 personas, clasificadas según su desacuerdo, cada persona congenie con exactamente otras cinco?

### Para enfrentar el problema

¿Dónde comenzar? Como este problema está en el capítulo 6, que trata de las gráficas, es probable que una buena idea sea intentar modelar el problema como una gráfica. Si este problema no estuviese asociado con una sección o capítulo del libro, podríamos intentar varios enfoques, uno de los cuales podría ser modelar el problema como una gráfica. Muchos problemas discretos se pueden resolver modelándolos mediante una gráfica. Esto no quiere decir que éste sea el único enfoque posible. Casi siempre, al adoptar diversos enfoques, un único problema se puede resolver de varias formas. (Un buen ejemplo es [Wagon].)

### Determinación de una solución

Un elemento fundamental al construir un modelo de gráfica es imaginar lo que ésta debe ser, y cuáles son los vértices y cuáles las aristas? En este problema, no tenemos muchas opciones; tenemos personas y desacuerdos. Intentemos utilizar a las personas como vértices. En un modelo de gráfica, es común que las aristas indiquen una relación entre los vértices. En este caso, la relación es "congeniar con", de modo que escribiémos una arista entre dos vértices (personas) si ellas congenian.

Ahora supongamos que cada persona congenia con exactamente otras cinco. Por ejemplo, en la figura adyacente, que muestra parte de la gráfica, Jeremy congenia con Samantha, Alexandra, Lance, Bret y Tiffany, y nadie más.

Esto implica que el grado de cada vértice es 5. Ahora, la situación se resume así: Tenemos 25 vértices y cada vértice tiene grado 5. Antes de continuar, veamos si esto es posible.

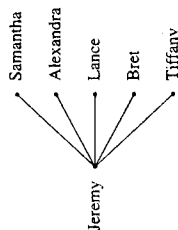
El corolario 6.2.22 dice que existe un número par de vértices de grado impar. Tenemos una contradicción, pues existe un número impar de vértices de grado impar. Por tanto, no es posible que en un departamento de 25 personas clasificadas según sus desacuerdos, cada persona congenie con exactamente otras cinco.

### Solución formal

No. No es posible que en un departamento de 25 personas clasificadas según sus desacuerdos, cada persona congenie con exactamente otras cinco. Supongamos por contradicción que esto es posible. Consideremos una gráfica donde los vértices sean las personas y una arista conecte dos vértices (personas) si las personas congenian. Como cada vértice tiene grado impar, existe un número impar de vértices de grado impar, lo cual es una contradicción.

### Resumen de técnicas para resolver problemas

- Muchos problemas discretos se pueden resolver modelándolos mediante gráficas.
- Para construir un modelo de gráfica, determine lo que representan los vértices y las aristas.
- En un modelo de gráfica, es muy común que las aristas indiquen una relación entre los vértices.



## 6.3 CICLOS HAMILTONIANOS Y EL PROBLEMA DEL AGENTE DE VENTAS VIAJERO

Sir William Rowan Hamilton lanzó al mercado a mediados del siglo XIX un juego en forma de dodecaedro (véase la figura 6.3.1). Cada esquina llevaba el nombre de una ciudad y el problema era partir de cualquier ciudad, recorrer las aristas, visitar cada ciudad exactamente una vez, y regresar a la ciudad inicial. La gráfica de las aristas del dodecaedro aparece en la figura 6.3.2. Podemos resolver el juego de Hamilton si podemos determinar un ciclo en la gráfica de la figura 6.3.2 que contenga a cada vértice exactamente una vez (excepto por el vértice inicial y final que aparece dos veces). El lector debe intentar hallar una solución antes de observar la solución dada en la figura 6.3.3.

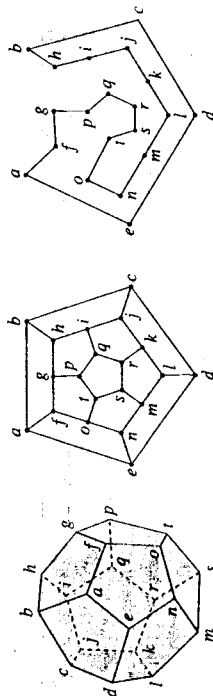


FIGURA 6.3.1  
Juego de Hamilton.

FIGURA 6.3.2  
La gráfica del juego de Hamilton.

FIGURA 6.3.3  
Vista de cada vértice una vez en la gráfica de la figura 6.3.2.

En honor de Hamilton, decimos que un ciclo en una gráfica  $G$  que contiene cada vértice en  $G$  exactamente una vez, excepto por el vértice inicial y final que aparece dos veces, es un ciclo **hamiltoniano**.

Hamilton (1805-1865) fue uno de los más grandes sabios de Irlanda. Fue profesor de astronomía en la Universidad de Dublín, donde publicó artículos en física y matemáticas. En esta última rama, Hamilton es más conocido por idear los cuaternios, una generalización del sistema de números complejos. Los cuaternios inspiraron el desarrollo del álgebra abstracta moderna. A este respecto, Hamilton introdujo el término *vector*.

### EJEMPLO 6.3.1

El ciclo  $(a, b, c, d, e, f, g, a)$  de la gráfica de la figura 6.3.4 es un ciclo hamiltoniano. □

El problema de determinar un ciclo hamiltoniano en una gráfica parece similar al de determinar un ciclo de Euler en una gráfica. Un ciclo de Euler visita cada arista una vez, mientras que un ciclo hamiltoniano visita cada vértice una vez; sin embargo, en realidad estos problemas son un poco distintos. Por ejemplo, la gráfica de la figura 6.3.4 no tiene un ciclo de Euler, pues existen vértices de grado impar, aunque en el ejemplo 6.3.1 se vio que  $G$  tiene un ciclo hamiltoniano. Además, a diferencia de la situación para los ciclos de Euler (véanse los teoremas 6.2.17 y 6.2.18), no se conocen condiciones necesarias y suficientes fácilmente verificables para la existencia de un ciclo hamiltoniano en una gráfica.

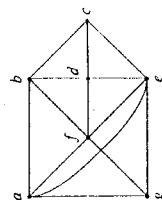


FIGURA 6.3.4  
Una gráfica con un ciclo hamiltoniano.

Los siguientes ejemplos muestran que a veces podemos argumentar que una gráfica no contiene un ciclo hamiltoniano.

### EJEMPLO 6.3.2

Muestre que la gráfica de la figura 6.3.5 no contiene un ciclo hamiltoniano.

Como existen cinco vértices, un ciclo hamiltoniano debe tener cinco aristas. Supongamos que pudiéramos eliminar algunas aristas de la gráfica, para quedarnos sólo con un ciclo hamiltoniano. Tendríamos que eliminar una arista incidente en  $v_2$  y una arista incidente en  $v_4$ , pues cada vértice en un ciclo hamiltoniano tiene grado 2. Pero esto sólo deja cuatro aristas, que no son suficientes para un ciclo hamiltoniano de longitud 5. Por tanto, la gráfica de la figura 6.3.5 no contiene un ciclo hamiltoniano.  $\square$

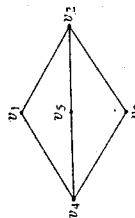


FIGURA 6.3.5

Una gráfica sin un ciclo hamiltoniano.

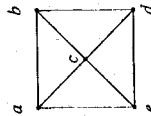


FIGURA 6.3.6

Una gráfica con un ciclo hamiltoniano.

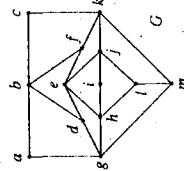


FIGURA 6.3.7

Una gráfica sin un ciclo hamiltoniano.

### EJEMPLO 6.3.4

El ciclo  $C = (a, b, c, d, a)$  es un ciclo hamiltoniano para la gráfica  $G$  de la figura 6.3.8. El reemplazo de cualquiera de las aristas de  $C$  por cualquiera de las aristas con la etiqueta 1 incrementaría la longitud de  $C$ ; así,  $C$  es un ciclo hamiltoniano de longitud mínima para  $G$ . Así,  $C$  resuelve el problema del agente viajero para  $G$ .  $\square$

Aunque existen algoritmos (véase, por ejemplo, [Even, 1979]) para determinar un ciclo de Euler (si éste existe) en un tiempo  $\Theta(n)$  para una gráfica con  $n$  aristas, todos los algoritmos conocidos que permiten determinar un ciclo hamiltoniano requieren un tiempo exponencial o factorial en el peor de los casos. Es por esto que en los problemas donde hay que hallar una solución al del agente viajero se utilizan con frecuencia métodos que producen ciclos de longitud cercana al mínimo. La fama y la fortuna esperan al descubridor de un algoritmo de tiempo polinomial que resuelva el problema del ciclo hamiltoniano (o el problema del agente viajero) o que dé una demostración de que no existe un algoritmo de tiempo polinomial para estos problemas.

Concluimos esta sección buscando ciclos hamiltonianos en el  $n$ -cubo.

### EJEMPLO 6.3.5

#### Códigos Gray y ciclos hamiltonianos en el $n$ -cubo

Consideremos un **modelo de anillo** para la computación paralela: la representación de este modelo mediante una gráfica es un ciclo simple (véase la figura 6.3.9). Los vértices representan los procesadores. Una arista entre los procesadores  $p$  y  $q$  indica que  $p$  y  $q$  se pueden comunicar de manera directa entre sí. Vemos que cada procesador se puede comunicar de manera directa con exactamente dos procesadores más. Los procesadores no adyacentes se comunican enviando mensajes.

El  $n$ -cubo (véase el ejemplo 6.1.7) es otro modelo para la computación paralela. El  $n$ -cubo tiene un mayor grado de conectividad entre sus procesadores. Consideremos la pregunta de cuándo un  $n$ -cubo puede simular un modelo de anillo con  $2^n$  procesadores. En la terminología de las gráficas, queremos ver cuándo un  $n$ -cubo contiene un ciclo simple con  $2^n$  vértices como una subgráfica, o bien, como el  $n$ -cubo tiene  $2^n$  procesadores, cuándo el  $n$ -cubo contiene un ciclo hamiltoniano. [Dejaremos para los ejercicios la pregunta de cuándo un  $n$ -cubo puede simular un modelo de anillo con un número arbitrario de procesadores (véase el ejercicio 18).]

Primero observemos que si el  $n$ -cubo contiene un ciclo hamiltoniano, debemos tener que  $n \geq 2$ , pues el 1-cubo no tiene ciclos.

Recordemos (véase el ejemplo 6.1.7) que podemos etiquetar los vértices del  $n$ -cubo  $0, 1, \dots, 2^n - 1$  de tal modo que una arista conecte dos vértices si y sólo si la representación binaria de sus etiquetas difieren en exactamente un bit. Así, el  $n$ -cubo tiene un ciclo hamiltoniano si y sólo si  $n \geq 2$  y existe una sucesión,

$$s_1, s_2, \dots, s_{2^n} \quad (6.3.1)$$

donde cada  $s_i$  es una cadena de  $n$  bits, de modo que:

- Cada cadena de  $n$  bits aparece en alguna parte de la sucesión.
- $s_i$  y  $s_{i+1}$  difieren en exactamente un bit,  $i = 1, \dots, 2^n - 1$ .
- $s_{2^n}$  y  $s_1$  difieren en exactamente un bit.

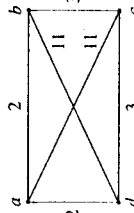


FIGURA 6.3.8

Una gráfica para el problema del agente viajero.

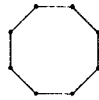


FIGURA 6.3.9

El modelo de anillo para la computación paralela.

Una sucesión (6.3.1) es un **código Gray**. Cuando  $n \geq 2$ , un código Gray (6.3.1) corresponde al ciclo hamiltoniano

$$s_1, s_2, \dots, s_{2^n}, s_1$$

pues todos los vértices aparecen y las aristas  $(s_i, s_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, 2^n - 1$  y  $(s_{2^n}, s_1)$  son distintas. Cuando  $n = 1$ , el código Gray 0, 1, corresponde al camino (0, 1, 0), que no es un ciclo, pues la arista (0, 1) se repite.

Los códigos Gray se han estudiado con amplitud en otros contextos. Por ejemplo, se han utilizado en la conversión de información análoga a una forma digital (véase [Deol]). Ahora mostraremos la forma de construir un código Gray para cada entero positivo  $n$ , con lo cual se demuestra que el  $n$ -cubo tiene un ciclo hamiltoniano para cada entero positivo  $n \geq 2$ .  $\square$

#### TEOREMA 6.3.6

Sea  $G_1$  la sucesión 0, 1. Definimos  $G_n$  en términos de  $G_{n-1}$  mediante las reglas siguientes:

- Sea  $G_{n-1}^R$  la sucesión  $G_{n-1}$  escrita al revés.
- Sea  $G'_n$  la sucesión obtenida al agregar 0 al principio de  $G_{n-1}$ .
- Sea  $G''_n$  la sucesión obtenida al agregar 1 al principio de  $G_{n-1}^R$ .
- Sea  $G_n$  la sucesión formada por  $G'_{n-1}$  seguida de  $G''_{n-1}$ .

Entonces  $G_n$  es un código Gray para cada entero positivo  $n$ .

**Demostración.** Demostramos el teorema por inducción sobre  $n$ .

**PASO BASE** ( $n = 1$ ). Como la sucesión 0, 1 es un código Gray, el teorema es verdadero cuando  $n$  es igual a 1.

**PASO INDUCTIVO.** Supongamos que  $G_{n-1}$  es un código Gray. Cada cadena en  $G'_{n-1}$  comienza con 0, de modo que cualquier diferencia entre las cadenas consecutivas debe surgir de bits diferentes en las cadenas correspondientes en  $G_{n-1}$ . Pero como  $G_{n-1}$  es un código Gray, cada par consecutivo de cadenas en  $G_{n-1}$  difieren en exactamente un bit. Por tanto, cada par consecutivo de cadenas en  $G'_n$  difieren en exactamente un bit. De manera análoga, cada par consecutivo de cadenas en  $G''_n$  difieren en exactamente un bit.

Sea  $\alpha$  la última cadena en  $G'_{n-1}$  y sea  $\beta$  la primera cadena en  $G''_n$ . Si eliminamos el primer bit de  $\alpha$  y el primer bit de  $\beta$ , las cadenas resultantes son idénticas. Como el primer bit en  $\alpha$  es 0 y el primer bit en  $\beta$  es 1, la última cadena en  $G'_{n-1}$  y la primera cadena en  $G''_n$  difieren en exactamente un bit. De manera análoga, la primera cadena en  $G'_{n-1}$  y la última cadena en  $G''_n$  difieren en exactamente un bit. Por tanto,  $G_n$  es un código Gray.  $\blacksquare$

#### COROLARIO 6.3.7

El  $n$ -cubo tiene un ciclo hamiltoniano para cada entero positivo  $n \geq 2$ .

#### EJEMPLO 6.3.8

Utilizaremos el teorema 6.3.6 para construir el código Gray  $G_3$  comenzando en  $G_1$ .

$G_i$ :	0	1						
$G_1^R$ :	1	0						
$G_1'$ :	00	01						
$G_1''$ :	11	10						
$G_2$ :	00	01	11	10				
$G_2^R$ :	10	11	01	00				
$G_2'$ :	000	001	011	010				
$G_2''$ :	110	111	101	100				
$G_3$ :	000	001	011	010	110	111	101	100

Concluimos esta sección examinando un problema con una antigüedad aproximada de 200 años.  $\square$

#### EJEMPLO 6.3.9

##### El recorrido del caballo

En el ajedrez, el movimiento del caballo consta de un movimiento horizontal o vertical de dos cuadros y luego de un movimiento de un cuadro en la dirección perpendicular. Por ejemplo, en la figura 6.3.10, un caballo en el cuadro marcado con  $K$  se puede mover a cualquiera de los cuadros marcados con  $X$ . Un **recorrido del caballo en un tablero  $n \times n$**  comienza en algún cuadro, visita cada cuadro exactamente una vez (mediante movimientos válidos) y regresa al cuadro inicial. El problema consiste en determinar los valores de  $n$  para los cuales existe un recorrido del caballo.

Podemos utilizar una gráfica para modelar este problema. Digamos que los cuadros del tablero, pintados en blanco y negro de la manera usual, son los vértices de la gráfica y coloquemos una arista entre dos vértices si los cuadros correspondientes del tablero representan un movimiento válido del caballo (véase la figura 6.3.11). Denotamos la gráfica como  $GK_n$ . Entonces existe un recorrido del caballo en el tablero  $n \times n$  si y sólo si  $GK_n$  tiene un ciclo hamiltoniano.

Mostraremos que si  $GK_n$  tiene un ciclo hamiltoniano,  $n$  es par. Para ver esto, observemos que  $GK_n$  es bipartita. Separemos los vértices en los conjuntos  $V_1$ , aquellos correspondientes a los cuadros blancos, y  $V_2$ , aquellos correspondientes a los cuadros negros; cada arista es incidente en un vértice en  $V_1$  y  $V_2$ . Como cualquier ciclo debe alternar entre un vértice en  $V_1$  y uno en  $V_2$ , cualquier ciclo en  $GK_n$  debe tener longitud par. Pero como un ciclo hamiltoniano debe visitar cada vértice exactamente una vez, un ciclo hamiltoniano en  $GK_n$  debe tener longitud  $n^2$ . Así,  $n$  debe ser par.

En vista del resultado anterior, el menor tablero posible que podría tener un recorrido del caballo es el tablero  $2 \times 2$ , pero no puede tener tal recorrido, pues el tablero es tan pequeño que el caballo no tiene movimientos válidos. El siguiente tablero menor que podría tener un recorrido del caballo es el tablero  $4 \times 4$ , aunque, como mostraremos, tampoco tiene un recorrido de caballo.

Argumentaremos por contradicción para mostrar que  $GK_4$  no tiene un ciclo hamiltoniano. Supongamos que  $GK_4$  tiene un ciclo hamiltoniano  $C = (v_1, v_2, \dots, v_{17})$ . Supondre-

		X		X	
	X				X
			K		
	X				X
		X		X	

FIGURA 6.3.10

Los movimientos válidos del caballo ( $K$ ) del ajedrez.

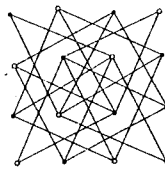
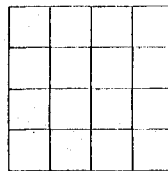


FIGURA 6.3.11

Un tablero  $4 \times 4$  y la gráfica  $GK_4$ .



Concluimos esta sección demostrando un resultado especial que utilizaremos en la sección 7.2.

**TEOREMA 6.2.24.**

Si una gráfica  $G$  contiene un ciclo de  $v$  a  $v$ , entonces  $G$  contiene un ciclo simple de  $v$  a  $v$ .

**Demostración.** Sea

$$C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, e_j, v_j, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_n, v_n)$$

un ciclo de  $v$  a  $v$ , donde  $v = v_0 = v_n$  (véase la figura 6.2.11). Si  $C$  no es un ciclo simple, entonces  $v_i = v_j$  para algún  $i < j < n$ . Podemos reemplazar  $C$  con el ciclo

$$C' = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_n, v_n)$$

Si  $C'$  no es un ciclo simple de  $v$  a  $v$ , repetimos el procedimiento anterior. En algún momento obtenemos un ciclo simple de  $v$  a  $v$ . ■

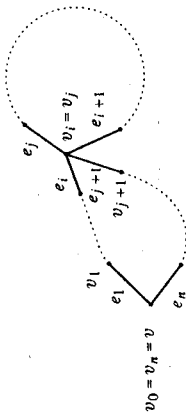


FIGURA 6.2.11 Un ciclo que es simple o se puede reducir a uno simple.

**Ejercicios**

En los ejercicios 1-9, indique si el camino dado en la gráfica es

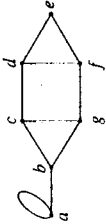
- (a) Un camino simple (b) Un ciclo (c) Un ciclo simple

1.  $(b, b)$
2.  $(e, d, c, b)$
3.  $(a, d, c, d, e)$
4.  $(d, c, b, e, d)$
5.  $(b, c, d, a, b, e, d, c, b)$
6.  $(b, c, d, e, b, b)$
7.  $(a, d, c, b, e)$
8.  $(d)$
9.  $(d, c, b)$

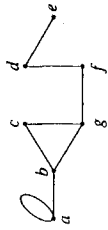
En los ejercicios 10-18, trace una gráfica con las propiedades dadas o explique por qué no existe tal gráfica.

10. Seis vértices, cada uno de grado 3
11. Cinco vértices, cada uno de grado 3

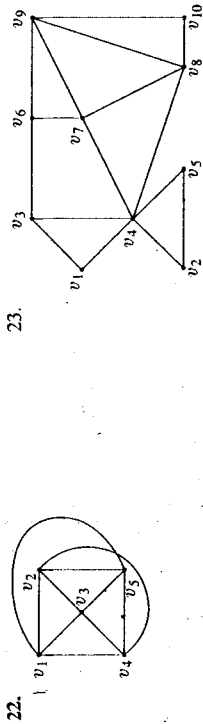
12. Cuatro vértices, cada uno de grado 1
13. Seis vértices; cuatro aristas
14. Cuatro aristas; cuatro vértices con grados 1, 2, 3, 4
15. Cuatro vértices con grados 1, 2, 3, 4
16. Gráfica simple; seis vértices con grados 1, 2, 3, 4, 5, 5
17. Gráfica simple; cinco vértices con grados 2, 3, 3, 4, 4
18. Gráfica simple; cinco vértices con grados 2, 2, 4, 4, 4
19. Determine todos los ciclos simples de la siguiente gráfica.



20. Determine todos los caminos simples de  $a$  a  $e$  en la gráfica del ejercicio 19.
21. Determine todas las subgráficas de la gráfica anexa que contengan a todos los vértices de la gráfica original y tengan el menor número posible de aristas. ¿Cuáles son caminos simples? ¿Cuáles son ciclos? ¿Cuáles son ciclos simples?



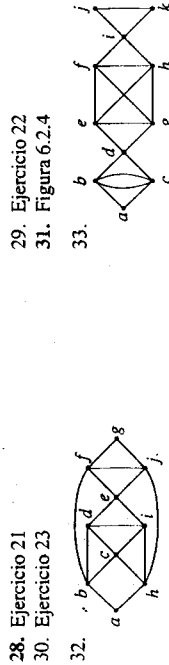
Determine el grado de cada vértice para las siguientes gráficas.



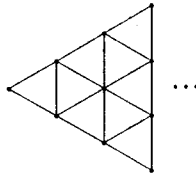
En los ejercicios 24-27, determine todas las subgráficas que tienen al menos un vértice de la gráfica dada.



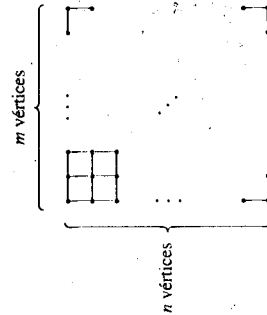
En los ejercicios 28-33, decida si la gráfica tiene un ciclo de Euler. Si la gráfica tiene un ciclo de Euler, exhiba alguno.



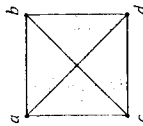
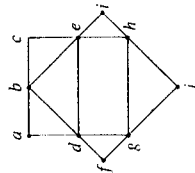
34. La siguiente gráfica continúa hasta una profundidad arbitraria pero finita. ¿Contiene esta gráfica un ciclo de Euler? Si la respuesta es sí, describa uno.



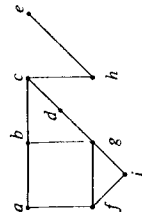
35. ¿En qué casos la gráfica completa  $K_n$  contiene un ciclo de Euler?  
 36. ¿En qué casos la gráfica bipartita completa  $K_{m,n}$  contiene un ciclo de Euler?  
 37. ¿Para cuáles valores de  $m$  y  $n$  la siguiente gráfica contiene un ciclo de Euler?



38. ¿Para cuáles valores de  $n$  contiene el  $n$ -cubo un ciclo de Euler?  
 En los ejercicios 39 y 40, verifique que la gráfica tiene un número par de vértices de grado impar.



41. Para la gráfica del ejercicio 39, determine un camino sin aristas repetidas de  $d$  a  $e$  que contenga a todas las aristas.  
 42. Sea  $G$  una gráfica conexa con cuatro vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4$  de grado impar. Muestre que existen caminos sin aristas repetidas de  $v_1$  a  $v_2$  y de  $v_3$  a  $v_4$  tales que cada arista en  $G$  está en exactamente uno de los caminos.



43. Ilustre el ejercicio 42 mediante la gráfica anexa.  
 44. Enuncie y demuestre una generalización del ejercicio 42 para un número arbitrario de vértices de grado impar.

En los ejercicios 45 y 46, indique si cada afirmación es verdadera o falsa. En caso de que sea falsa, proporcione un contraejemplo y, de ser verdadera, explique.

45. Sea  $G$  una gráfica y sean  $v$  y  $w$  vértices distintos. Si existe un camino de  $v$  a  $w$ , existe un camino simple de  $v$  a  $w$ .  
 46. Si una gráfica contiene un ciclo que incluya todas las aristas, el ciclo es un ciclo de Euler.  
 47. Sea  $G$  una gráfica conexa. Suponga que una arista  $e$  está en un ciclo. Muestre que  $G$  con  $e$  eliminada sigue siendo conexa.  
 48. Proporcione un ejemplo de una gráfica conexa de modo que la eliminación de cualquier arista produzca una gráfica que no sea conexa. (Suponga que la eliminación de una arista no elimina vértice alguno.)

49. ¿Podría un caballo de ajedrez moverse en un tablero y regresar a su posición original realizando cada movimiento exactamente una vez? (Un movimiento se considera efectuado cuando el movimiento se hace en cualquier dirección.)

50. Muestre que si  $G'$  es una subgráfica conexa de una gráfica  $G$ , entonces  $G'$  está contenida en un componente.

51. Muestre que si una gráfica  $G$  se divide en subgráficas conexas de modo que cada arista y cada vértice de  $G$  pertenezca a una de las subgráficas, entonces las subgráficas son componentes.

52. Sea  $G$  una gráfica dirigida y sea  $G'$  la gráfica no dirigida obtenida a partir de  $G$  ignorando la dirección de las aristas de  $G$ . Suponga que  $G$  es conexa. Si  $v$  es un vértice en  $G$ , decimos que la *paridad de  $v$*  es *par* si el número de aristas de la forma  $(v, w)$  es par, la *paridad impar* se define de manera análoga. Demuestre que si  $v$  y  $w$  son vértices de  $G$  que tienen paridad impar, es posible cambiar la orientación de algunas aristas de  $G$  de modo que  $v$  y  $w$  tengan paridad par y que la paridad del resto de los vértices de  $G$  no se modifique.

53. Muestre que el número máximo de aristas en una gráfica simple desconexa con  $n$  vértices es  $(n-1)(n-2)/2$ .

54. Muestre que el número máximo de aristas en una gráfica bipartita simple con  $n$  vértices es  $\lfloor n^2/4 \rfloor$ .

Un vértice  $v$  en una gráfica conexa  $G$  es un *punto de articulación* si la eliminación de  $v$  y de todas las aristas incidentes en  $v$  desconecta a  $G$ .

55. Proporcione un ejemplo de una gráfica con seis vértices que tenga exactamente dos puntos de articulación.

56. Proporcione un ejemplo de una gráfica con seis vértices y que no tenga puntos de articulación.

57. Muestre que un vértice  $v$  en una gráfica conexa  $G$  es un punto de articulación si y sólo si existen vértices  $w$  y  $x$  en  $G$  tales que cada camino de  $w$  a  $x$  pasa por  $v$ .

Sea  $G$  una gráfica dirigida y  $v$  un vértice en  $G$ . El *grado interno* (o grado de entrada) de  $v$ ,  $\text{in}(v)$ , es el número de aristas de la forma  $(w, v)$ . El *grado de salida* de  $v$ ,  $\text{out}(v)$ , es el número de aristas de la forma  $(v, w)$ . Un *ciclo de Euler dirigido* en  $G$  es una sucesión de aristas de la forma

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n),$$

donde  $v_0 = v_n$ , cada arista en  $G$  aparece exactamente una vez, y aparecen todos los vértices.

58. Muestre que una gráfica dirigida  $G$  contiene un ciclo de Euler dirigido si y sólo si la gráfica no dirigida obtenida al ignorar las direcciones de las aristas de  $G$  es conexa e  $\text{in}(v) = \text{out}(v)$  para cada vértice  $v$  en  $G$ .

Una *sucesión de de Bruijn* para  $n$  (en ceros y unos) es una sucesión

$$a_1, \dots, a_{2^n}$$

de  $2^n$  bits con la propiedad de que si  $s$  es una cadena de bits de longitud  $n$ , entonces para alguna  $m$ ,

$$(6.2.2)$$

$$s = a_m a_{m+1} \dots a_{m+n-1}.$$

En (6.2.2), definimos  $a_{2^n-i} = a_i$  para  $i = 1, \dots, 2^n - 1$ .

59. Verifique que 00011101 es una sucesión de de Bruijn para  $n = 3$ .

60. Sea  $G$  una gráfica dirigida con vértices correspondientes a todas las cadenas de bits de longitud  $n - 1$ . Existe una arista dirigida del vértice  $x_1 \dots x_{n-1}$  a  $x_2 \dots x_n$ . Muestre que un ciclo de Euler dirigido en  $G$  corresponde a una sucesión de de Bruijn.

★ 61. Muestre que existe una sucesión de de Bruijn para cada  $n = 1, 2, \dots$ .

★ 62. Un *camino cerrado* es un camino de  $v$  a  $v$ . Muestre que una gráfica conexa  $G$  es bipartita si y sólo si cada camino cerrado en  $G$  tiene longitud par.

63. ¿Cuántos caminos de longitud  $k \geq 1$  existen en  $K_n$ ?

64. Muestre que existen

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

caminos cuyas longitudes están entre 1 y  $k$ , inclusive, en  $K_n$ ,  $n > 2$ .

65. Sean  $v$  y  $w$  vértices distintos en  $K_n$ . Sea  $p_m$  el número de caminos de longitud  $m$  de  $v$  a  $w$  en  $K_n$ ,  $1 \leq m \leq n$ .

(a) Deduzca una relación de recurrencia para  $p_m$ .

(b) Determine una fórmula explícita para  $p_m$ .

66. Sean  $v$  y  $w$  vértices distintos en  $K_n$ ,  $n \geq 2$ . Muestre que el número de caminos simples de  $v$  a  $w$  es

$$(n-2) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}.$$

★ 67. [Requiere conocimientos de cálculo.] Muestre que existen  $\lfloor n!e - 1 \rfloor$  caminos simples en  $K_n$ , ( $e = 2.71828\dots$  es la base del logaritmo natural.)

68. Sea  $G$  una gráfica. Defina una relación  $R$  sobre el conjunto  $V$  de vértices de  $G$  como  $vRw$  si existe un camino de  $v$  a  $w$ . Demuestre que  $R$  es una relación de equivalencia en  $V$ .

69. Demuestre que una gráfica conexa con uno o dos vértices, cada uno de los cuales tiene grado par, tiene un ciclo de Euler.

Sea  $G$  una gráfica conexa. La *distancia* entre los vértices  $v$  y  $w$  en  $G$ ,  $\text{dist}(v, w)$ , es la longitud del camino más corto de  $v$  a  $w$ . El *diámetro* de  $G$  es

$$d(G) = \max\{\text{dist}(v, w) \mid v, w \text{ son vértices en } G\}.$$

70. Determine el diámetro de la gráfica de la figura 6.2.10.

★ 71. Determine el diámetro del  $n$ -cubo. En el contexto de la computación paralela, ¿cuál es el significado de este valor?

72. Determine el diámetro de  $K_n$ , la gráfica completa de  $n$  vértices.

73. Muestre que el número de caminos en la gráfica anexa, de  $v_1$  a  $v_2$  de longitud  $n$  es igual al  $n$ -ésimo número de Fibonacci  $f_n$ .

74. Sea  $G$  una gráfica simple con  $n$  vértices en la cual cada vértice tiene grado  $k$  y

$$k \geq \frac{n-3}{2} \quad \text{si } n \bmod 4 = 1,$$

$$k \geq \frac{n-1}{2} \quad \text{si } n \bmod 4 \neq 1.$$

Muestre que  $G$  es conexa.

Un *ciclo* en una gráfica dirigida simple [es decir, una gráfica dirigida en la que existe a lo más una arista de la forma  $(v, w)$  y que no tiene aristas de la forma  $(v, v)$ ] es una sucesión de tres o más vértices

$$(v_0, v_1, \dots, v_n)$$

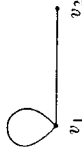
en la cual  $(v_{i-1}, v_i)$  es una arista para  $i = 1, \dots, n$  y  $v_0 = v_n$ . Una *gráfica acíclica dirigida* (gad) es una gráfica simple dirigida sin ciclos.

75. Muestre que una gad tiene al menos un vértice sin aristas de entrada [es decir, existe al menos un vértice tal que no existen aristas de la forma  $(v, w)$ ].

76. Muestre que el número máximo de aristas en una gad de  $n$  vértices es  $n(n-1)/2$ .

77. Un *conjunto independiente* en una gráfica  $G$  es un subconjunto  $S$  de los vértices de  $G$  con la propiedad de que ningún par de vértices en  $S$  son adyacentes. (Observe que  $\emptyset$  es un conjunto independiente para cualquier gráfica.) Demuestre el siguiente resultado debido a [Prodinger].

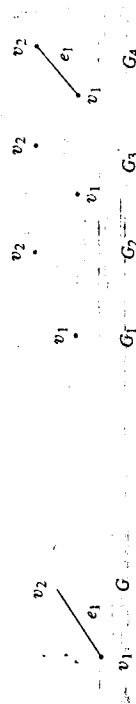
Sea  $P_n$  la gráfica dada por un camino simple con  $n$  vértices. Demuestre que el número de conjuntos independientes en  $P_n$  es igual a  $f_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , donde  $\{f_n\}$  es la sucesión de Fibonacci.



**EJEMPLO 6.2.10**

Determine todas las subgráficas de la gráfica  $G$  de la figura 6.2.5 que tengan al menos un vértice.

Si no elegimos arista alguna, podemos elegir uno o ambos vértices para obtener las subgráficas  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  que aparecen en la figura 6.2.6. Si elegimos la única arista disponible  $e_1$ , debemos seleccionar los dos vértices sobre los cuales incide  $e_1$ . En este caso, obtenemos la subgráfica  $G_4$  de la figura 6.2.6. Así,  $G$  tiene las cuatro subgráficas que aparecen en la figura 6.2.6.



**FIGURA 6.2.5** La gráfica del ejemplo 6.2.10. **FIGURA 6.2.6** Las cuatro subgráficas de la gráfica de la figura 6.2.5.

Ahora podemos definir los componentes.

**DEFINICIÓN 6.2.11**

Sea  $G$  una gráfica y  $v$  un vértice en  $G$ . La subgráfica  $G'$  de  $G$  que consta de todas las aristas y vértices en  $G$  que están contenidas en algún camino que comienza en  $v$  es el *componente* de  $G$  que contiene a  $v$ .

**EJEMPLO 6.2.12**

La gráfica  $G$  de la figura 6.2.1 tiene un componente, a saber, ella misma. De hecho, una gráfica es conexa si y sólo si tiene exactamente un componente.

**EJEMPLO 6.2.13**

Sea  $G$  la gráfica de la figura 6.2.2. El componente de  $G$  que contiene a  $v_3$  es la subgráfica

$$G_1 = (V_1, E_1), \quad V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}.$$

El componente de  $G$  que contiene a  $v_2$  es la subgráfica

$$G_2 = (V_2, E_2), \quad V_2 = \{v_4\}, \quad E_2 = \emptyset.$$

El componente de  $G$  que contiene a  $v_5$  es la subgráfica

$$G_3 = (V_3, E_3), \quad V_3 = \{v_5, v_6\}, \quad E_3 = \{e_4\}.$$

Otra caracterización de los componentes de una gráfica  $G = (V, E)$  se obtiene definiendo una relación  $R$  sobre el conjunto de vértices  $V$  mediante la regla  $v_1 R v_2$ , si existe un camino de  $v_1$  a  $v_2$ .

Se puede mostrar (ejercicio 68) que  $R$  es una relación de equivalencia sobre  $V$  y que si  $v \in V$ , el conjunto de vértices en el componente que contiene a  $v$  es la clase de equivalencia

$$[v] = \{w \in V \mid w R v\}.$$

Observe que la definición de camino permite repetir los vértices o las aristas (o ambos). En el camino (6.2.1), el vértice 2 aparece dos veces.

Obtenemos subclases de caminos prohibiendo la repetición de vértices y de aristas, o haciendo que los vértices  $v_0$  y  $v_n$  de la definición 6.2.1 sean idénticos.

**DEFINICIÓN 6.2.14**

Sean  $v$  y  $w$  vértices en una gráfica  $G$ .

Un *camino simple* de  $v$  a  $w$  es un camino de  $v$  a  $w$  sin vértices repetidos.

Un *ciclo* (o *círculo*) es un camino de longitud distinta de cero de  $v$  a  $v$ , sin aristas repetidas.

Un *ciclo simple* es un ciclo de  $v$  a  $v$  en el cual no existen vértices repetidos, excepto por los vértices inicial y final, que son iguales a  $v$ .

**EJEMPLO 6.2.15**

Para la gráfica de la figura 6.2.1 tenemos

Camino	¿Es un camino simple?	¿Es un ciclo?	¿Es un ciclo simple?
(6, 5, 2, 4, 3, 2, 1)	No	No	No
(6, 5, 2, 4)	Sí	No	No
(2, 6, 5, 2, 4, 3, 2)	No	Sí	No
(5, 6, 2, 5)	No	Sí	Sí
(7)	Sí	No	No

A continuación volvemos a analizar el problema presentado en la sección 6.1: determinar un ciclo en una gráfica que recorra cada arista exactamente una vez.

**EJEMPLO 6.2.16**

*Problema de los puentes de Königsberg*

El primer artículo en teoría de graficas fue el escrito por Leonhard Euler en 1736. El artículo presentó una teoría general que incluía una solución a lo que ahora se llama el problema de los puentes de Königsberg.

Dos islas en el río Pregel, en Königsberg (ahora Kaliningrado, Rusia) se unen entre ellas y con la tierra firme mediante puentes, como muestra la figura 6.2.7. El problema consiste en partir de cualquier lugar ( $A, B, C$  o  $D$ ), caminar sobre cada puente exactamente una vez y luego regresar a la posición inicial.

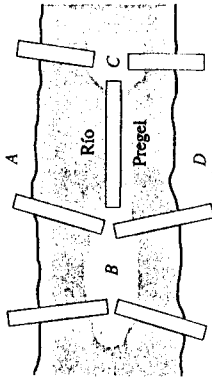
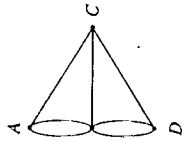


FIGURA 6.2.7 Los puentes de Königsberg.

FIGURA 6.2.8 Un modelo de gráfica de los puentes de Königsberg.



La configuración de los puentes se puede modelar mediante una gráfica, como muestra la figura 6.2.8. Los vértices representan las posiciones y las aristas representan los puentes. Entonces, el problema de los puentes de Königsberg se reduce a determinar un ciclo en la gráfica de la figura 6.2.8 que incluya todas las aristas y todos los vértices. En honor de Euler, un ciclo de una gráfica  $G$  que incluya todas las aristas y los vértices de  $G$  es un **ciclo de Euler**<sup>\*</sup> (también se le conoce como **paseo euleriano**). Por el análisis de la sección 6.1, vemos que no existe un ciclo de Euler en la gráfica de la figura 6.2.8, pues hay un número impar de aristas incidentes en el vértice  $A$ . (De hecho, en la gráfica de la figura 6.2.8, cada vértice es incidente en un número impar de aristas.) □

La solución al problema de existencia de ciclos de Euler se puede establecer mediante el grado de un vértice. El **grado de un vértice**  $v$ ,  $\delta(v)$ , es el número de aristas incidentes en  $v$ . (Por definición, cada lazo en  $v$  contribuye en 2 al grado de  $v$ .) En la sección 6.1 vimos que si una gráfica  $G$  tiene un ciclo de Euler, entonces cada vértice en  $G$  tiene grado par. También podemos demostrar que  $G$  es conexa.

#### TEOREMA 6.2.17

*Si una gráfica  $G$  tiene un ciclo de Euler, entonces  $G$  es conexa y cada vértice tiene grado par.*

**Demostración.** Supongamos que  $G$  tiene un ciclo de Euler. En la sección 6.1 argumentamos que cada vértice en  $G$  tiene grado par. Si  $v$  y  $w$  son vértices en  $G$ , la parte del ciclo de Euler que nos lleva de  $v$  a  $w$  sirve como un camino de  $v$  a  $w$ . Por tanto,  $G$  es conexa. ■

El recíproco del teorema 6.2.17 también es cierto. Daremos una demostración por inducción matemática debida a [Fowler].

<sup>\*</sup> Por razones técnicas, si  $G$  consta de un vértice  $v$  y no tiene aristas, también diremos que el camino ( $v$ ) es un ciclo de Euler para  $G$ .

#### TEOREMA 6.2.18

*Si  $G$  es una gráfica conexa y todo vértice tiene grado par, entonces  $G$  tiene un ciclo de Euler.*

**Demostración.** La demostración es por inducción sobre el número  $n$  de aristas en  $G$ .

**PASO BASE** ( $n = 0$ ). Como  $G$  es conexa, si  $G$  no tiene aristas,  $G$  consta de un único vértice. Un ciclo de Euler consta de este único vértice y ninguna arista.

**PASO INDUCTIVO.** Supongamos que  $G$  tiene  $n$  aristas,  $n > 0$ , y que cada gráfica conexa con  $k$  aristas,  $k < n$ , en la cual todo vértice tenga grado par, tiene un ciclo de Euler.

Se puede verificar directamente que una gráfica conexa con uno o dos vértices, cada uno de los cuales tiene grado par, tiene un ciclo de Euler (véase el ejercicio 69); así, supondremos que la gráfica tiene al menos tres vértices.

Como  $G$  es conexa, existen vértices  $v_1, v_2, v_3$  en  $G$  de modo que la arista  $e_1$  sea incidente en  $v_1$  y  $v_2$  y la arista  $e_2$  sea incidente en  $v_2$  y  $v_3$ . Eliminamos las aristas  $e_1$  y  $e_2$ , pero no los vértices, y agregamos una arista  $e$  incidente en  $v_1$  y  $v_3$  para obtener la gráfica  $G'$  [véase la figura 6.2.9(a)]. Observe que cada componente de la gráfica  $G'$  tiene menos de  $n$  aristas y que en cada componente de la gráfica  $G'$ , cada vértice tiene grado par. Mostraremos que  $G'$  tiene uno o dos componentes.

Sea  $v$  un vértice. Como  $G$  es conexa, existe un camino  $P$  en  $G$  de  $v$  a  $v_1$ . Sea  $P'$  la parte del camino  $P$  que comienza en  $v$  cuyas aristas también estén en  $G'$ . Ahora,  $P'$  termina en  $v_1, v_2$  o  $v_3$ , pues la única forma en que  $P$  podría dejar de ser un camino en  $G'$  sería que  $P$  contuviera alguna de las aristas eliminadas  $e_1$  o  $e_2$ . Si  $P'$  termina en  $v_1$ , entonces  $v$  está en el mismo componente que  $v_1$  en  $G'$ . Si  $P'$  termina en  $v_3$  [véase la figura 6.2.9(b)], entonces  $v$  está en el mismo componente que  $v_3$  en  $G'$ , que está en el mismo componente que  $v_1$  en

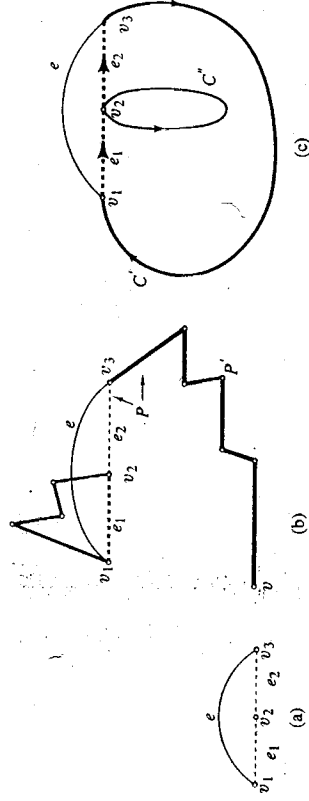


FIGURA 6.2.9 La demostración del teorema 6.2.18. En (a), las aristas  $e_1$  y  $e_2$  se eliminan y se agrega la arista  $e$ . En (b),  $P$  (remarcado) es un camino en  $G$  de  $v$  a  $v_1$ , y  $P'$  (en tono más oscuro) es la parte de  $P$  que comienza en  $v$  y cuyas aristas también están en  $G'$ . Como se muestra,  $P'$  termina en  $v_3$ . Como la arista  $e$  está en  $G'$ , existe un camino en  $G'$  de  $v$  a  $v_1$ . Así,  $v$  y  $v_1$  están en el mismo componente. En (c),  $C'$  (que aparece con una línea más gruesa) es un ciclo de Euler para el componente, y  $C''$  (que aparece con una línea continua más delgada) es un ciclo de Euler para el otro componente. Si reemplazamos  $e$  en  $C'$  por  $e_1, C'', e_2$ , obtenemos un ciclo de Euler (en tono más oscuro o remarcado) para  $G$ .

$G'$  (pues la arista  $e$  en  $G'$  es incidente en  $v_1$  y  $v_3$ ). Si  $P'$  termina en  $v_2$ , entonces  $v_2$  está en el mismo componente que  $v$ . Por tanto, todo vértice en  $G'$  está en el mismo componente que  $v_1$  o  $v_2$ . Así,  $G'$  tiene uno o dos componentes.

Si  $G'$  tiene un componente, es decir, si  $G'$  es conexa, podemos aplicar la hipótesis inductiva para concluir que  $G'$  tiene un ciclo de Euler  $C'$ . Este ciclo de Euler se puede modificar para obtener un ciclo de Euler en  $G$ : basta reemplazar la ocurrencia de la arista  $e$  en  $C'$  por las aristas  $e_1$  y  $e_2$ .

Supongamos que  $G'$  tiene dos componentes [véase la figura 6.2.9(c)]. Por la hipótesis de inducción, el componente que contiene a  $v_1$  tiene un ciclo de Euler  $C''$  y el componente que contiene a  $v_2$  tiene un ciclo de Euler  $C'''$  que comienza y termina en  $v_2$ . Obtenemos un ciclo de Euler en  $G$  modificando  $C''$  reemplazando  $(v_1, v_2)$  en  $C''$  por  $(v_1, v_2)$  seguido de  $C'''$  seguido de  $(v_2, v_1)$  o reemplazando  $(v_3, v_1)$  en  $C''$  por  $(v_3, v_2)$  seguido de  $C'''$  seguido de  $(v_2, v_1)$ . Con esto concluimos el paso inductivo y  $G$  tiene un ciclo de Euler.

Si  $G$  es una gráfica conexa y cada vértice tiene grado par, donde  $G$  tiene pocas aristas, por lo general podemos encontrar un ciclo de Euler por inspección.

#### EJEMPLO 6.2.19

Sea  $G$  la gráfica de la figura 6.2.10. Utilizar el teorema 6.2.18 para verificar que  $G$  tiene un ciclo de Euler. Determinar un ciclo de Euler para  $G$ .

Observamos que  $G$  es conexa y que

$$\delta(v_1) = \delta(v_2) = \delta(v_3) = \delta(v_4) = \delta(v_5) = 4, \quad \delta(v_6) = 6, \quad \delta(v_7) = \delta(v_8) = 2.$$

Como el grado de cada vértice es par, por el teorema 6.2.18,  $G$  tiene un ciclo de Euler. Por inspección, determinamos el ciclo de Euler

$$(v_6, v_4, v_7, v_5, v_1, v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3, v_6).$$

#### EJEMPLO 6.2.20

Un dominó es un rectángulo dividido en dos cuadrados, donde cada cuadrado tiene un número entre 0, 1, ..., 6. Dos cuadrados de un mismo dominó pueden tener el mismo número. Mostraremos que los distintos dominós se pueden ordenar en un círculo, de modo que los dominós adyacentes tengan cuadrados con números idénticos.

Modelamos la situación como una gráfica  $G$  con siete vértices etiquetados 0, 1, ..., 6. Las aristas representan los dominós: existe una arista entre cada par de vértices distintos y existe un lazo en cada vértice. Observe que  $G$  es conexa. Ahora, los dominós se pueden ordenar en un círculo, de modo que los dominós adyacentes tengan cuadrados con números idénticos, si y sólo si  $G$  contiene un ciclo de Euler. Como el grado de cada vértice es 8 (recuerde que un lazo contribuye en 2 unidades al grado), cada vértice tiene grado par. Por el teorema 6.2.18,  $G$  tiene un ciclo de Euler. Por tanto, los dominós se pueden ordenar en un círculo, de modo que los dominós adyacentes tengan cuadrados con números idénticos.

¿Qué se puede decir acerca de una gráfica en la que no todos los vértices tengan grado par? La primera observación (corolario 6.2.22) es que existe un número par de vértices de grado impar. Esto es consecuencia del hecho (teorema 6.2.21) de que la suma de todos los grados en una gráfica es un número par.

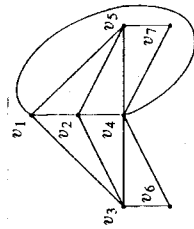


FIGURA 6.2.10

La gráfica del ejemplo 6.2.19.

#### TEOREMA 6.2.21

Si  $G$  es una gráfica con  $m$  aristas y vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = 2m.$$

En particular, la suma de los grados de todos los vértices en una gráfica es par.

**Demostración.** Al sumar los grados de todos los vértices, contamos cada arista  $(v_i, v_j)$  dos veces [una al contarla como  $(v_i, v_j)$  en el grado de  $v_i$  y otra más al contarla como  $(v_j, v_i)$  en el grado de  $v_j$ ]. De aquí se sigue el resultado. ■

#### COROLARIO 6.2.22

En cualquier gráfica, existe un número par de vértices de grado impar.

**Demostración.** Dividimos los vértices en dos grupos, aquellos con grado par  $x_1, \dots, x_m$  y aquellos con grado impar  $y_1, \dots, y_n$ . Sean

$$S = \delta(x_1) + \delta(x_2) + \dots + \delta(x_m), \quad T = \delta(y_1) + \delta(y_2) + \dots + \delta(y_n).$$

Por el teorema 6.2.21,  $S + T$  es par. Como  $S$  es la suma de números pares,  $S$  es par. Así,  $T$  es par. Pero  $T$  es la suma de  $n$  números impares, por tanto  $n$  es par. ■

Supongamos que una gráfica conexa  $G$  tiene exactamente dos vértices  $v$  y  $w$  de grado impar. Insertemos de manera temporal una arista  $e$  de  $v$  a  $w$ . La gráfica resultante  $G'$  es conexa y cada vértice tiene grado par. Por el teorema 6.2.18,  $G'$  tiene un ciclo de Euler. Si eliminamos  $e$  de este ciclo de Euler, obtenemos un camino sin aristas repetidas de  $v$  a  $w$  que contiene a las demás aristas y vértices de  $G$ . Hemos mostrado entonces que si una gráfica tiene exactamente dos vértices  $v$  y  $w$  de grado impar, existe un camino sin aristas repetidas que contiene a todas las aristas y vértices de  $v$  a  $w$ . El recíproco se puede demostrar de manera similar.

#### TEOREMA 6.2.23

Una gráfica tiene un camino sin aristas repetidas de  $v$  a  $w$  ( $v \neq w$ ) que contiene a todas las aristas y vértices si y sólo si es conexa y  $v$  y  $w$  son los únicos vértices que tienen grado impar.

**Demostración.** Supongamos que una gráfica tiene un camino  $P$  sin aristas repetidas de  $v$  a  $w$  que contiene a todas las aristas y vértices. Es claro que la gráfica es conexa. Si agregamos la arista de  $v$  a  $w$ , la gráfica resultante tiene un ciclo de Euler, a saber, el camino  $P$  junto con la arista agregada. Por el teorema 6.2.17, cada vértice tiene grado par. La eliminación de la arista agregada sólo afecta a los grados de  $v$  y  $w$ , que se ven reducidos en 1 cada uno. Así, en la gráfica original,  $v$  y  $w$  tienen grado impar y los demás vértices tienen grado par. ■

El recíproco fue analizado justo antes del enunciado del teorema.

Los ejercicios 42 y 44 tienen generalizaciones del teorema 6.2.23.

El  $n$ -cubo es un modelo importante de la computación, pues varias de estas máquinas ya se han construido y están en operación. Además, el hipercubo puede simular otros modelos de computación paralela. Este último punto se considera con más detalle en los ejemplos 6.3.5 y 6.6.3.

Concluimos esta sección introductoria definiendo algunas gráficas particulares que aparecen con frecuencia en la teoría de gráficas.

#### DEFINICIÓN 6.1.8

La *gráfica completa de  $n$  vértices*, que se denota  $K_n$ , es la gráfica simple con  $n$  vértices en la cual existe una arista entre cada par de vértices distintos.

#### EJEMPLO 6.1.9

La figura 6.1.11 muestra la gráfica completa de 4 vértices,  $K_4$ .

#### DEFINICIÓN 6.1.10

Una gráfica  $G = (V, E)$  es *bipartita* si el conjunto de vértices  $V$  se puede separar en dos subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  de modo que cada arista en  $E$  sea incidente en un vértice de  $V_1$  y un vértice de  $V_2$ .

#### EJEMPLO 6.1.11

La gráfica de la figura 6.1.12 es bipartita, pues si hacemos

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{y} \quad V_2 = \{v_4, v_5\},$$

cada arista es incidente en un vértice de  $V_1$  y un vértice de  $V_2$ .

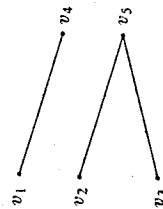


FIGURA 6.1.12 Una gráfica bipartita.

Observe que la definición 6.1.10 establece que si  $e$  es una arista en una gráfica bipartita, entonces  $e$  es incidente en un vértice de  $V_1$  y un vértice de  $V_2$ . No establece que si  $v_i$  es

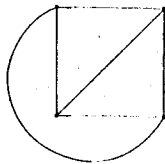


FIGURA 6.1.11 La gráfica completa  $K_4$ .

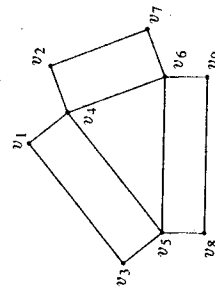


FIGURA 6.1.13 Una gráfica no bipartita.

un vértice de  $V_1$  y  $v_2$  es un vértice de  $V_2$ , entonces exista una arista entre  $v_1$  y  $v_2$ . Por ejemplo, la gráfica de la figura 6.1.12 es bipartita, pues cada arista es incidente en un vértice de  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  y un vértice de  $V_2 = \{v_4, v_5\}$ . Sin embargo, no todas las aristas entre vértices de  $V_1$  y  $V_2$  están en la gráfica. Por ejemplo, no está presente la arista  $(v_1, v_5)$ .

#### EJEMPLO 6.1.12

La gráfica de la figura 6.1.13 no es bipartita. Con frecuencia es más fácil mostrar que una gráfica no es bipartita argumentando por contradicción.

Supongamos que la gráfica de la figura 6.1.13 es bipartita. Entonces el conjunto de vértices se puede separar en dos subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  de modo que cada arista sea incidente en un vértice de  $V_1$  y un vértice de  $V_2$ . Ahora, consideremos los vértices  $v_4, v_5$  y  $v_6$ . Como  $v_4$  y  $v_5$  son adyacentes, uno está en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ . Podemos suponer que  $v_4$  está en  $V_1$  y que  $v_5$  está en  $V_2$ . Como  $v_5$  y  $v_6$  son adyacentes y  $v_5$  está en  $V_2$ ,  $v_6$  está en  $V_1$ . Como  $v_4$  y  $v_6$  son adyacentes y  $v_4$  está en  $V_1$ ,  $v_6$  está en  $V_2$ . Pero entonces  $v_6$  está en  $V_1$  y  $V_2$ , lo cual es una contradicción, pues  $V_1$  y  $V_2$  son ajenos. Por tanto, la gráfica de la figura 6.1.13 no es bipartita.  $\square$

#### DEFINICIÓN 6.1.13

La *gráfica bipartita completa con  $m$  y  $n$  vértices*, denotada  $K_{m,n}$ , es la gráfica simple cuyo conjunto de vértices está dividido en conjuntos  $V_1$  con  $m$  vértices y  $V_2$  con  $n$  vértices, en los cuales existe una arista entre cada par de vértices  $v_1$  y  $v_2$ , donde  $v_1$  está en  $V_1$  y  $v_2$  está en  $V_2$ .

#### EJEMPLO 6.1.14

La gráfica bipartita completa con dos y cuatro vértices,  $K_{2,4}$ , aparece en la figura 6.1.14.

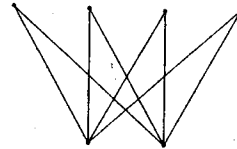
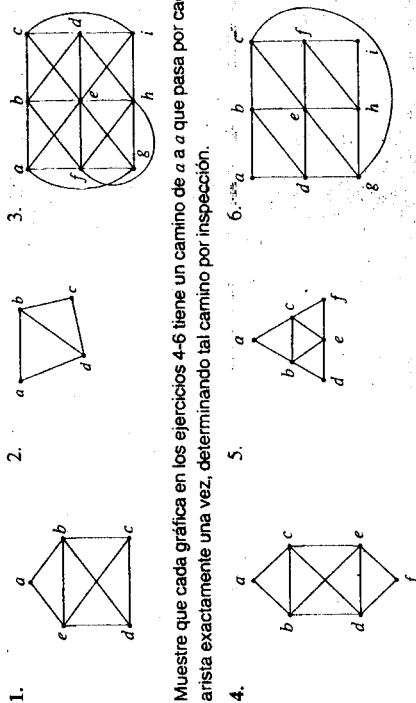


FIGURA 6.1.14 La gráfica bipartita completa  $K_{2,4}$ .

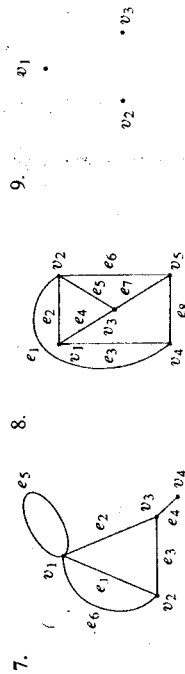
### Ejercicios

Explique por qué ninguna de las gráficas de los ejercicios 1-3 tiene un camino de  $a$  a  $a$  que pase por cada arista exactamente una vez.



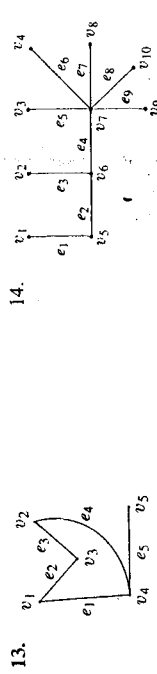
Muestre que cada gráfica en los ejercicios 4-6 tiene un camino de  $a$  a  $a$  que pasa por cada arista exactamente una vez, determinando tal camino por inspección.

Para cada gráfica  $G = (V, E)$  en los ejercicios 7-9, determine  $V \setminus E$ , todas las aristas paralelas, todos los lazos, todos los vértices aislados, e indique si  $G$  es una gráfica simple. Además, indique los vértices donde es incidente la arista  $e_1$ .



10. Trace  $K_3$  y  $K_5$ .  
11. Determine una fórmula para el número de aristas en  $K_n$ .  
12. Proporcione un ejemplo de gráfica bipartita diferente a la figura 6.1.12. Especifique los conjuntos ajenos de vértices.

Indique cuáles de las gráficas de los ejercicios 13-19 son bipartitas. Si la gráfica es bipartita, especifique los conjuntos ajenos de vértices.



15. Figura 6.1.2  
17. Ejercicio 7

16. Figura 6.1.5  
18. Ejercicio 8

19. Ejercicio 9  
20. Trace  $K_{2,3}$  y  $K_{3,3}$ .  
21. Determine una fórmula para el número de aristas de  $K_{n,n}$ .
- En los ejercicios 22-24, determine un camino de longitud mínima de  $v$  a  $w$  en la gráfica de la figura 6.1.7 que pase por cada vértice exactamente una vez.
22.  $v = b, w = e$       23.  $v = c, w = d$       24.  $v = a, w = b$
25. Trace la gráfica de similitud que resulta de hacer  $S = 40$  en el ejemplo 6.1.6. ¿Cuántas clases existen?
26. Trace la gráfica de similitud que resulta de hacer  $S = 50$  en el ejemplo 6.1.6. ¿Cuántas clases existen?
27. En general, ¿"es similar" es una relación de equivalencia?
28. Para el ejemplo 6.1.6, sugiera otras propiedades que podrían ser útiles al comparar programas.
29. ¿Cómo se podría automatizar la selección de  $S$  para agrupar datos en clases utilizando una gráfica de similitud?
30. Trace un 2-cubo.

31. Trace una imagen como la de la figura 6.1.10 para mostrar la forma de construir un 3-cubo mediante dos 2-cubos.
32. Demuestre que la construcción recursiva del ejemplo 6.1.7 produce un  $n$ -cubo.
33. ¿Cuántas aristas son incidentes en un vértice de un  $n$ -cubo?
34. ¿Cuántas aristas tiene un  $n$ -cubo?
35. De cuántas formas se pueden etiquetar los vértices de un  $n$ -cubo como  $0, \dots, 2^n - 1$  de modo que exista una arista entre dos vértices si y sólo si la representación binaria de sus etiquetas difiere precisamente en un bit?

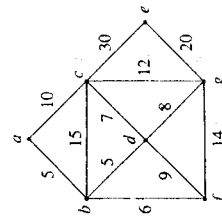
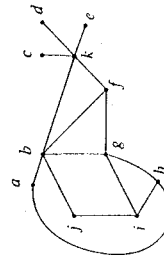
Los ejercicios 36-38 se refieren a la gráfica anexa. Los vértices representan oficinas. Una arista conecta dos oficinas si existe un enlace de comunicación entre ambas. Observe que una oficina se puede comunicar con cualquier otra de manera directa, mediante un enlace, o haciendo que otras oficinas retransmitan el mensaje.

36. Muestre, mediante un ejemplo, que la comunicación entre todas las oficinas es posible aunque se rompan algunos enlaces de comunicación.

37. ¿Cuál es el número máximo de enlaces de comunicación que pueden romperse de modo que continúe siendo posible la comunicación entre todas las oficinas?

38. Muestre una configuración en que se rompa el número máximo de enlaces de comunicación de modo que continúe siendo posible la comunicación entre todas las oficinas.

39. En la gráfica anexa, los vértices representan ciudades y los números sobre las aristas representan los costos de construcción de los caminos indicados. Determine el sistema de carreteras más barato que una todas las ciudades.





## 6.2 CAMINOS Y CICLOS

Si pensamos los vértices de una gráfica como ciudades y las aristas como carreteras, un camino corresponde a un viaje que comienza en cierta ciudad, pasa por varias ciudades, y termina en alguna ciudad. Primero daremos una definición formal de camino.

### DEFINICIÓN 6.2.1

Sean  $v_0, v_1, \dots, v_n$  vértices de una gráfica. Un *camino* (ruta) de  $v_0$  a  $v_n$  de longitud  $n$  es una sucesión alternante de  $n + 1$  vértices y  $n$  aristas que comienza con el vértice  $v_0$  y termina con el vértice  $v_n$ .

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n),$$

en donde la arista  $e_i$  es incidente sobre los vértices  $v_{i-1}$  y  $v_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

El formalismo de la definición 6.2.1 significa que se parte del vértice  $v_0$ , se sigue la arista  $e_1$  hasta  $v_1$ , se sigue la arista  $e_2$  hasta  $v_2$ , y así sucesivamente.

### EJEMPLO 6.2.2

En la gráfica de la figura 6.2.1,

$$(1, e_1, 2, e_2, 3, e_3, 4, e_4, 2) \quad (6.2.1)$$

es un camino de longitud 4 del vértice 1 al vértice 2.

### EJEMPLO 6.2.3

En la gráfica de la figura 6.2.1, el camino (6) que sólo consta del vértice 6 es un camino de longitud 0 del vértice 6 al vértice 6.

Si no hay aristas paralelas, al denotar un camino podemos omitir las aristas. Por ejemplo, el camino (6.2.1) se podría escribir

$$(1, 2, 3, 4, 2).$$

Una *gráfica conexa* es aquella en la cual podemos ir de cualquier vértice a cualquier otro por un camino. A continuación damos la definición formal.

### DEFINICIÓN 6.2.4

Una gráfica  $G$  es *conexa* si dados cualesquiera dos vértices  $v$  y  $w$  en  $G$ , existe un camino de  $v$  a  $w$ .

### EJEMPLO 6.2.5

La gráfica  $G$  de la figura 6.2.1 es conexa, pues dados cualesquiera dos vértices  $v$  y  $w$  en  $G$ , existe un camino de  $v$  a  $w$ .

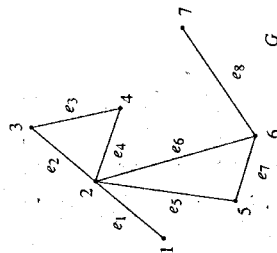


FIGURA 6.2.1

Una gráfica conexa con los caminos  $(1, e_1, 2, e_2, 3, e_3, 4, e_4, 2)$  de longitud 4 y  $(6)$  de longitud 0.

### EJEMPLO 6.2.6

La gráfica  $G$  de la figura 6.2.2 no es conexa, pues por ejemplo, no existe un camino del vértice  $v_2$  al vértice  $v_5$ .

### EJEMPLO 6.2.7

Sea  $G$  la gráfica cuyo conjunto de vértices consta de los 50 estados de Estados Unidos. Colocamos una arista entre los estados  $v$  y  $w$  si ellos tienen una frontera común. Por ejemplo, existe una arista entre California y Oregon y entre Illinois y Missouri. No existe una arista entre Georgia y Nueva York, ni tampoco una arista entre Utah y Nuevo México. (Tercer caso no basta: los estados deben compartir una frontera.) La gráfica  $G$  no es conexa pues no existe un camino de Hawaii a California (o de Hawaii a cualquier otro estado).

Como podemos ver en las figuras 6.2.1 y 6.2.2, una gráfica conexa consta de una "pieza", mientras que una gráfica no conexa consta de dos o más "piezas". Estas "piezas" son subgráficas de la gráfica original y se llaman **componentes**. Daremos las definiciones formales, comenzando por la de subgráfica.

Una subgráfica  $G'$  de una gráfica  $G$  se obtiene eligiendo ciertas aristas y vértices de  $G$ , sujetos a la restricción de que si elegimos una arista  $e$  en  $G$  que sea incidente en los vértices  $v$  y  $w$ , entonces debemos incluir a  $v$  y  $w$  en  $G'$ . La restricción permite garantizar que  $G'$  es realmente una gráfica. A continuación damos la definición formal.

### DEFINICIÓN 6.2.8

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica.  $(V', E')$  es una *subgráfica* de  $G$  si

- (a)  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ .
- (b) Para cada arista  $e' \in E'$ , si  $e'$  es incidente en  $v'$  y  $w'$ , entonces  $v', w' \in V'$ .

### EJEMPLO 6.2.9

La gráfica  $G' = (V', E')$  de la figura 6.2.3 es una subgráfica de la gráfica  $G = (V, E)$  de la figura 6.2.4, pues  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ .

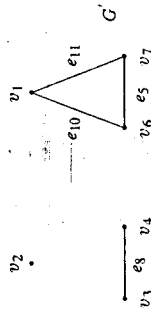


FIGURA 6.2.3 Una subgráfica de la gráfica de la figura 6.2.4.

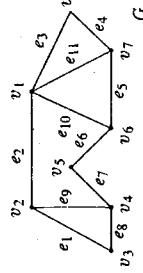


FIGURA 6.2.4 Una gráfica, una de cuyas subgráficas aparece en la figura 6.2.3.

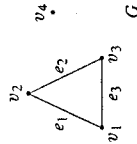


FIGURA 6.2.2 Una gráfica que no es conexa.

Una *gráfica dirigida* (o *digráfica*)  $G$  consta de un conjunto  $V$  de *vértices* (o *nodos*) y un conjunto  $E$  de *aristas* (arcos o *lados*) tales que cada arista  $e \in E$  se asocia con un par ordenado de vértices. Si existe una única arista  $e$  asociada con el par ordenado  $(v, w)$  de vértices, escribimos  $e = (v, w)$ , lo cual denota una arista de  $v$  a  $w$ .

Una arista  $e$  en una gráfica (dirigida o no) asociada con el par de vértices  $v$  y  $w$  es *incidente en*  $v$  y  $w$ , y se dice que  $v$  y  $w$  son *incidentes en*  $e$  y que son *vértices adyacentes*.

Si  $G$  es una gráfica (dirigida o no) con vértices  $V$  y aristas  $E$ , escribimos  $G = (V, E)$ . A menos que se indique lo contrario, supondremos que los conjuntos  $E$  y  $V$  son finitos y que  $V$  es no vacío.

### EJEMPLO 6.1.2

En la figura 6.1.2 la gráfica (no dirigida)  $G$  consta del conjunto

$$V = \{Gre, She, Wor, Buf, Gil, Sho, Cas, Dou, Lan, Mud\}$$

de vértices y el conjunto

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_{13}\}$$

de aristas. La arista  $e_1$  se asocia con el par no ordenado  $\{Gre, She\}$  de vértices y la arista  $e_{10}$  se asocia con el par no ordenado  $\{Cas, Dou\}$  de vértices. La arista  $e_1$  se denota  $(Gre, She)$  o  $(She, Gre)$  y la arista  $e_{10}$  se denota  $(Cas, Dou)$  o  $(Dou, Cas)$ . La arista  $e_4$  es incidente en  $Wor$  y  $Buf$  y los vértices  $Wor$  y  $Buf$  son adyacentes.  $\square$

### EJEMPLO 6.1.3

La figura 6.1.4 muestra una gráfica dirigida. Las aristas dirigidas se indican mediante flechas. La arista  $e_1$  se asocia con el par ordenado  $(v_2, v_1)$  de vértices y la arista  $e_3$  se asocia con el par ordenado  $(v_6, v_5)$  de vértices. La arista  $e_1$  se denota  $(v_2, v_1)$  y la arista  $e_3$  se denota  $(v_6, v_5)$ .  $\square$

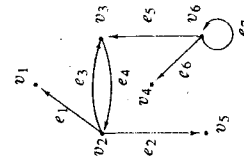


FIGURA 6.1.4 Una gráfica dirigida.

por cuáles aristas. Por esta razón, la gráfica de la figura 6.1.2 también podría haberse trazado como en la figura 6.1.3.

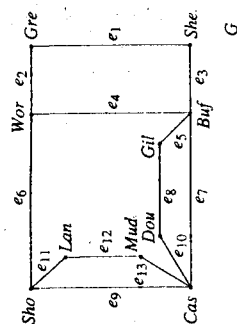


FIGURA 6.1.3 Un modelo de gráfica alternativa, pero equivalente, al modelo de gráfica del sistema de carreteras de la figura 6.1.1.

Si partimos de un vértice  $v_0$ , recorremos una arista hasta el vértice  $v_1$ , recorremos otra arista hasta el vértice  $v_2$ , y así sucesivamente, y en cierto momento llegamos al vértice  $v_n$ , llamamos a todo el recorrido un camino (o ruta) de  $v_0$  a  $v_n$ . El camino que comienza en  $She$ , luego va para  $Buf$ , y termina en  $Gil$  corresponde a un viaje sobre el mapa de la figura 6.1.1 que comienza en Sheridan, va hacia Buffalo y termina en Gillette. El problema del inspector de carreteras se puede parafrasear para el modelo de gráfica  $G$  de la siguiente manera: ¿Existe un camino del vértice  $Gre$  al vértice  $Gre$  que recorra cada arista exactamente una vez?

Podemos mostrar que el inspector de carreteras no puede partir de Greybull, recorrer cada una de las carreteras exactamente una vez y regresar a Greybull. Para poner la respuesta en términos de gráficas, no existe un camino del vértice  $Gre$  en la figura 6.1.2 que recorra cada arista exactamente una vez. Para ver esto, supongamos que existe tal camino y consideremos el vértice  $Wor$ . Cada vez que lleguemos a  $Wor$  por alguna arista, debemos salir de  $Wor$  por alguna arista diferente. Además, hay que utilizar cada una de las aristas que tocan a  $Wor$ . Como tres aristas tocan a  $Wor$ , tenemos una contradicción. Por tanto, no existe un camino del vértice  $Gre$  al vértice  $Gre$  de la figura 6.1.2 que recorra cada arista exactamente una vez. El argumento se puede aplicar a una gráfica arbitraria  $G$ . Si  $G$  tiene un camino del vértice  $v$  a  $v$  que recorra cada arista exactamente una vez, un número par de aristas debe tocar a cada vértice. En la sección 6.2 analizaremos este problema con detalle.

Ahora daremos algunas definiciones formales.

### DEFINICIONES 6.1.1

Una *gráfica* (o *gráfica no dirigida*) consta de un conjunto  $V$  de *vértices* (o *nodos*) y un conjunto  $E$  de *aristas* (arcos o *lados*) tales que cada arista  $e \in E$  queda asociada a un par no ordenado de vértices. Si existe una única arista  $e$  asociada con los vértices  $v$  y  $w$ , escribimos  $e = (v, w)$  o  $e = (w, v)$ . En este contexto,  $(v, w)$  denota una arista entre  $v$  y  $w$  en una gráfica no dirigida y *no* un par ordenado.

La definición 6.1.1 permite asociar aristas distintas con el mismo par de vértices. Por ejemplo, en la figura 6.1.5 siguiente, las aristas  $e_1$  y  $e_2$  están asociadas con el par de vértices  $\{v_1, v_2\}$ . Tales aristas son **paralelas**. Una arista incidente en un único vértice es un **lazo**. Por ejemplo, en la figura 6.1.5, la arista  $e_3 = (v_2, v_2)$  es un lazo. Un vértice, como el vértice  $v_4$  de la figura 6.1.5, que no es incidente en arista alguna es un **vértice aislado**. Una gráfica sin lazos ni aristas paralelas es una **gráfica simple**.

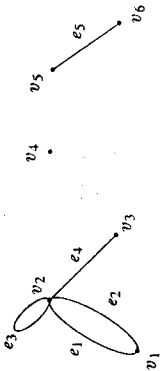


FIGURA 6.1.5 Una gráfica con aristas paralelas y lazos.

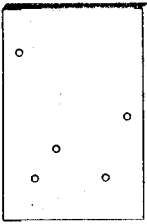


FIGURA 6.1.6 Una hoja de metal con agujeros para tornillos.

#### EJEMPLO 6.1.4

Como la gráfica de la figura 6.1.2 no tiene aristas paralelas ni lazos, es una gráfica simple.

Algunos autores no permiten la existencia de lazos o aristas paralelas al definir las gráficas. Sería de esperar que si no existe un acuerdo en la definición de gráfica, muchos otros términos en teoría de gráficas no tendrían definiciones estándar. Esto realmente ocurre. Al leer artículos o libros relativos a las gráficas, es necesario verificar las definiciones utilizadas.

Ahora veremos un ejemplo que muestra la forma de utilizar un modelo de gráfica para analizar un problema de producción.

#### EJEMPLO 6.1.5

En un proceso de producción, con frecuencia es necesario realizar muchos agujeros en hojas de metal (véase la figura 6.1.6). Los componentes se pueden atornillar entonces en estas hojas de metal. Los agujeros se pueden realizar bajo el control de una computadora. Para ahorrar tiempo y dinero, el taladro debe moverse lo más rápido posible. Modelaremos esta situación como una gráfica.

Los vértices de la gráfica corresponden a los agujeros (véase la figura 6.1.7). Cada par de vértices se une mediante una arista. En cada arista escribimos el tiempo necesario para mover el taladro entre los agujeros correspondientes. Una gráfica con números sobre las aristas (como la gráfica de la figura 6.1.7) se llama una **gráfica con pesos**. Si la arista  $e$  tiene la etiqueta  $k$ , decimos que el **peso de la arista** es  $k$ . Por ejemplo, en la figura 6.1.7,

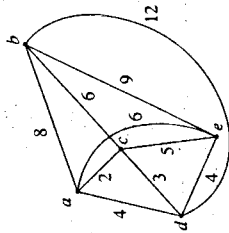


FIGURA 6.1.7

Un modelo de gráfica de la hoja de metal de la figura 6.1.6. El peso de cada arista es el tiempo necesario para mover el taladro.

el peso de la arista  $(c, e)$  es 5. En una gráfica con pesos, la **longitud de un camino** es la suma de los pesos de las aristas en el camino. Por ejemplo, en la figura 6.1.7, la longitud del camino que comienza en  $a$ , visita  $c$  y termina en  $b$  es 8. En este problema, la longitud de un camino que comienza en el vértice  $v_1$ , luego visita  $v_2, v_3, \dots$  en ese orden, y termina en  $v_n$  representa el tiempo que tarda el taladro en partir del agujero  $h_1$ , luego pasar por los agujeros  $h_2, h_3, \dots$  en ese orden, y terminar en  $h_n$ , donde el agujero  $h_i$  corresponde al vértice  $v_i$ . Un camino de longitud mínima que visite cada vértice exactamente una vez representa el camino óptimo que debe seguir el taladro.

Supongamos que en este problema se pide que el camino comience en el vértice  $a$  y termine en el vértice  $e$ . Podemos determinar el camino de longitud mínima enumerando todos los caminos posibles de  $a$  a  $e$  que pasen por cada vértice exactamente una vez y elegir el más corto (véase la tabla 6.1.1). Vemos que el camino que visita los vértices  $a, b, c, d, e$ , en ese orden, tiene longitud mínima. Por supuesto, un par diferente de vértices inicial y final podría producir un camino más corto.

TABLA 6.1.1

Caminos en la gráfica de la figura 6.1.7 de  $a$  a  $e$  que pasan por cada vértice exactamente una vez, y sus longitudes

Camino	Longitud
$a, b, c, d, e$	21
$a, b, d, c, e$	28
$a, c, b, d, e$	24
$a, c, d, b, e$	26
$a, d, b, c, e$	27
$a, d, c, b, e$	22

La enumeración de todos los caminos del vértice  $v$  al vértice  $w$ , como en el ejemplo 6.1.5, es una forma un tanto lenta de determinar un camino de longitud mínima de  $v$  a  $w$  que visite cada vértice exactamente una vez. Por desgracia, no se conoce un método mucho más práctico para gráficas arbitrarias. Este problema es una versión del **problema del agente de ventas viajero**. Analizaremos este problema en la sección 6.3.

#### EJEMPLO 6.1.6

#### Gráficas de similitud

Este ejemplo se refiere al problema de agrupar objetos "semejantes" en clases, con base en las propiedades de los objetos. Por ejemplo, supongamos que un algoritmo particular se implanta en C por cierto grupo de personas y que queremos agrupar a los programas "semejantes" en clases con base en ciertas propiedades de los programas (véase la tabla 6.1.2). Supongamos que elegimos como propiedades

1. El número de líneas en el programa.
2. El número de enunciados return en el programa.
3. El número de llamadas a función en el programa.

TABLA 6.1.2

Programas en C que implantan el mismo algoritmo

Programa	Número de líneas del programa	Número de enunciados return	Número de llamadas a función
1	66	20	1
2	41	10	2
3	68	5	8
4	90	34	5
5	75	12	14

Construimos una **gráfica de similaridad**  $G$  como sigue. Los vértices corresponden a los programas. Un vértice se denota  $(p_1, p_2, p_3)$ , donde  $p_i$  es el valor de la propiedad  $i$ . Definimos una **función de disimilaridad**  $s$  como sigue. Para cada par de vértices  $v = (p_1, p_2, p_3)$  y  $w = (q_1, q_2, q_3)$ , hacemos

$$s(v, w) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |p_3 - q_3|.$$

Si  $v_i$  es el vértice correspondiente al programa  $i$ , obtenemos

$$s(v_1, v_2) = 36, \quad s(v_1, v_3) = 24, \quad s(v_1, v_4) = 42, \quad s(v_1, v_5) = 30,$$

$$s(v_2, v_3) = 38, \quad s(v_2, v_4) = 76, \quad s(v_2, v_5) = 48, \quad s(v_3, v_4) = 54,$$

$$s(v_3, v_5) = 20, \quad s(v_4, v_5) = 46.$$

Si  $v$  y  $w$  son vértices correspondientes a dos programas,  $s(v, w)$  es una medida de la disimilaridad de los programas. Un valor grande de  $s(v, w)$  indica una disimilaridad y un valor pequeño indica una similaridad.

Para un número fijo  $S$ , insertamos una arista entre los vértices  $v$  y  $w$  si  $s(v, w) < S$ . (En general, habrá diferentes gráficas de similaridad para diversos valores de  $S$ .) Decimos que  $v$  y  $w$  están en la **misma clase** si  $v = w$  o si existe un camino de  $v$  a  $w$ . En la figura 6.1.8 mostramos la gráfica correspondiente a los programas de la tabla 6.1.2 con  $S = 25$ . En esta gráfica, los programas se agrupan en tres clases:  $\{1, 3, 5\}$ ,  $\{2\}$  y  $\{4\}$ . En un problema real, se podría elegir un valor adecuado de  $S$  por prueba y error, o bien elegir el valor de  $S$  de manera automática según ciertos criterios determinados con anterioridad.

El ejemplo 6.1.6 pertenece al tema del **reconocimiento de patrones**, el cual trata de la agrupación de datos en clases con base en propiedades de los datos. El reconocimiento de patrones por computadora tiene mucha importancia práctica. Por ejemplo, se han programado computadoras para detectar el cáncer mediante rayos X, para elegir las declaraciones de impuestos por revisar, para analizar imágenes obtenidas por satélites, para reconocer textos y para predecir el clima.

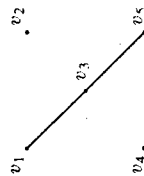


FIGURA 6.1.8

Una gráfica de similaridad correspondiente a los programas de la tabla 6.1.2 con  $S = 25$ .

### EJEMPLO 6.1.7 El $n$ -cubo (hipercubo)

La computadora tradicional, llamada **computadora en serie**, ejecuta una instrucción a la vez. Nuestra definición de algoritmo también supone la ejecución de una instrucción a la vez. Tales algoritmos son **algoritmos en serie**. En los últimos años, al disminuir el costo del hardware, se ha vuelto factible construir **computadoras paralelas** con muchos procesadores, las cuales pueden ejecutar varias instrucciones a la vez. Con frecuencia, las gráficas son modelos convenientes para la descripción de estas máquinas. Los algoritmos asociados se conocen como **algoritmos paralelos**. Muchos problemas se pueden resolver más rápido mediante computadoras en paralelo. Analicemos un modelo para la computación paralela conocido como el  $n$ -cubo o **hipercubo**.

El  $n$ -cubo tiene  $2^n$  procesadores,  $n \geq 1$ , que se representan mediante vértices (véase la figura 6.1.9) con las etiquetas  $0, 1, \dots, 2^n - 1$ . Cada procesador tiene su propia memoria local. Una arista conecta dos vértices si la representación binaria de sus etiquetas difiere en exactamente un bit. Durante una unidad de tiempo, todos los procesadores del  $n$ -cubo pueden ejecutar una instrucción de manera simultánea y luego comunicarse con un procesador adyacente. Si un procesador necesita comunicarse con un procesador no adyacente, el primero envía un mensaje con la ruta hasta el receptor. Tal vez se necesiten varias unidades de tiempo para comunicarse con un procesador no adyacente.

También podemos describir al  $n$ -cubo de manera recursiva. El 1-cubo tiene dos procesadores, etiquetados 0 y 1, y una arista. Sean  $H_1$  y  $H_2$  dos  $(n-1)$ -cubos cuyos vértices están etiquetados en binario  $0, \dots, 2^{n-1} - 1$  (véase la figura 6.1.10). Colocamos una arista entre cada par de vértices, uno de  $H_1$  y uno de  $H_2$ , siempre que los vértices tengan etiquetas idénticas. Luego cambiamos la etiqueta  $L$  de cada vértice de  $H_1$  por  $0L$  y la etiqueta  $L$  de cada vértice de  $H_2$  por  $1L$ . Obtenemos un  $n$ -cubo (ejercicio 32).

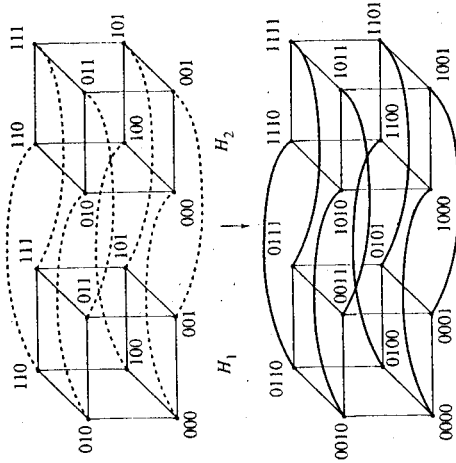


FIGURA 6.1.10 Combinación de dos 3-cubos para obtener un 4-cubo.