FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Análisis Matemático II "A" (61.03)

Guía de problemas (Segunda parte)

Índice

Nota: En los ejercicios indicados con se sugiere el uso de applets.

Guía VI: Ecuaciones diferenciales

1. Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

   - determinar su orden, indicar cuáles son lineales y cuáles son homogéneas
   - demostrar que la función propuesta es solución de la ecuación.

   (a) $y' = 3\,y, \qquad y = e^{3\,x}$.

   (b) $y' + 4\,y = 8\,x, \qquad y = 2\,x - e^{-4\,x} - 1/2$

   (c) $y'' - \frac{2}{x^2}y = 0, \qquad y = x^2 - x^{-1}$.

   (d) $y''' + y'' - y' - y = 1, \qquad y = -1 + 2e^{x}$.

   (e) $y'' - 2\,y' + 3\,y = e^{-2\,x}, \qquad y = -\frac{e^{-3\,x}}{3} - e^{-x}$

   (f) $x\,y' = 2\,y, \qquad y = x^2$.

   (g) $y\,y' - 4\,x = 0, \qquad y = 2\,x$

2. En los siguientes casos, verificar que la función propuesta es solución general de la ecuación diferencial y determinar el valor de las constantes de manera que se satisfaga la condición dada. Graficar aproximadamente la solución obtenida.

   (a) $y' - 3\,y = 3, \qquad y = 1 + c\,e^{3\,x}, \qquad y(0) = 2$

   (b) $y'y = x, \qquad y^2 - x^2 = c, \qquad y(0) = 1$

   (c) $y' = \frac{x\,y}{x^2-1}, \qquad x^2 + c\,y^2 = 1, \qquad y(1) = 2$

   (d) $y\,y' = x, \qquad y^2 - x^2 = c, \qquad y(0) = 1$

   (e) $y'' - y' - 2\,y = 0, \qquad y = c_1\,e^{2\,x} + c_2\,e^{-x}, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = -3$

   (f) $y'' + y = 0, \qquad y = c_1\,\mathrm{sen}(x) + c_2\,\cos(x), \qquad y(0) = -1,\ y'(0) = 1$

   (g) $y'' + 2\,y' + 6\,y, \qquad y = c_1\,e^{-t}\,\mathrm{sen}(2\,t) + c_2\,e^{-t}\,\cos(2\,t), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

3. (a) Hallar la solución de la ecuación **2.2d** cuyo gráfico pasa por el punto $(1,3)$.

   (b) Hallar la solución de la ecuación **2.2b** cuyo gráfico pasa por el punto $(1,2)$.

   (c) Hallar la solución de la ecuación **2.2e** cuya gráfico tiene recta tangente $y = 2\,x$ en $(1,2)$.

4. Proponer una ecuación diferencial del orden indicado de manera que la familia de curvas dada corresponda a su solución general.

   (a) $x\,y = c$, primer orden.

   (b) $4\,x^2 - 2\,y^3 = c$, primer orden.

   (c) $y = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x)$, segundo orden.

   (d) $y = a + \ln(b/x)$, primer orden

   (e) $y = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$, segundo orden.

   (f) Parábolas con eje x y vértice en el origen de coordenadas, primer orden.

   (g) Parábolas con eje x y vértice sobre la recta $y = x$, segundo orden.

   (h) Rectas que pasan por $(2, 2)$, primer orden.

5. Resolver los siguientes problemas:

   (a) Hallar la solución general de $x\,dy = y\,dx$.

   (b) Hallar la solución del problema de valores iniciales $x\,y' = (x\,y - x)$, $y(0) = 2$.

   (c) Hallar la solución general de $x\,\frac{dy}{dx} - y^2 = x\,y^2$.

   (d) Hallar la solución del problema de valores iniciales $y' + 2\,x^2\,y = x^2$, $y(0) = 2$.

   (e) Hallar la solución del problema de valores iniciales $y' + y = 1$, $y(0) = 5/2$.

   (f) Hallar la solución general de $y' + 3\,y = 2$.

   (g) Hallar la solución general de $y\,y' = x \operatorname{sen}(x^2)$.

   (h) Hallar la solución general de $y' + y \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(2\,x)$.

   (i) Hallar la solución del problema de valores iniciales $x\,y' + y = x^2$, $y(3) = 0$.

   (j) Hallar la solución del problema de valores iniciales $x\,y' = y^2 + x\,y$, $y(1) = 1$.

   (k) Hallar la solución del problema de valores iniciales $x\,y' = y + x\,e^{y/x}$, $y(1) = 0$.

6. Resolver:

   (a) Calcular la longitud entre los puntos $(1, y_0)$ y $(3, 0)$ del gráfico de la solución de **5.5i**

   (b) Calcular las raíces de la solución de **5.5i**

7. Hallar en cada caso la familia de curvas ortogonales a las de la familia dada. Ilustrar mediante un gráfico.

   (a) $y = c\,x^2$ (b) $x^2 + y^2 = c$ (c) $x\,y = c$

   (d) $2\,x + y = c$ (e) $x - 3 = c\,y^2$

8. Resolver:

   (a) Hallar las curvas planas tales que la recta normal en todo punto pasa por el origen.

   (b) Hallar las curvas planas tales que la recta tangente en todo punto pasa por el origen.

   (c) Hallar las curvas planas tales que la pendiente en cada punto es igual al cociente ordenada/abscisa del punto.

   (d) Hallar las curvas planas tales que la pendiente en cada punto es igual al cociente abscisa/ordenada del punto.

   (e) Hallar la curva plana que pasa por $(1, 6)$ y satisface que en cada punto de coordenadas (x, y) la recta tangente se interseca con el eje de ordenadas en un punto de ordenada $5y$.

   (f) Hallar las curvas para las que el área del triángulo que tiene como vértices un punto P de la curva, el punto de intersección de la tangente en el punto P con el eje x, y la proyección de P en el eje x es constante (no depende de P) y vale 2.

9. Un termómetro que marca 10℃ se lleva a una habitación a 20℃. En un minuto la temperatura del termómetro asciende a 15℃. Si la velocidad con que cambia la temperatura del termómetro es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la de la habitación (que se supone constante [1]), obtener y graficar el comportamiento de la temperatura del termómetro en función del tiempo. ¿Cuándo estará a 1℃ de la temperatura ambiente?.

10. Resolver los siguientes problemas:

    (a) La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Si hay inicialmente 50 gr de sustancia y al cabo de 3 días quedan solamente 10 gr, qué porcentaje de la cantidad original quedará al cabo de 4 días?

[1] Caso del cuerpo colocado en un fluido (aire de la habitación) indefinido a temperatura uniforme.

(b) Una población P de bacterias crece con $\frac{\frac{dP}{dT}}{P}$ constante 0.03 durante T días, al cabo de los cuales se incrementa a 0.05. Hallar T sabiendo que la población se duplicó en 20 días.

(c) Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la derivada de su volumen $V(t)$ respecto del tiempo t es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para $t = 0$ el diámetro es de 5cm y 30 minutos después el diámetro es de 2cm. En qué momento el diámetro será de 1cm?

(d) Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la razón de cambio de su diámetro $d(t)$ respecto del tiempo t es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para $t = 0$ el diámetro es de 5cm y 30 minutos después el diámetro es de 3cm. En qué momento el diámetro será de 1cm?

11. Resolver los siguientes problemas:

(a) Un objeto de masa m cae hacia la superficie de la tierra, su caída está retardada por la resistencia del aire que es proporcional a su velocidad por lo tanto, a partir de la segunda Ley de Newton sabemos que $m\,\frac{dv}{dt} = m\,g - k\,v$, donde g es la aceleración de la gravedad y $v(t)$ es la velocidad del cuerpo en el instante t. Si la caída comienza en $t = 0$ con $v(0) = 0$, hallar la velocidad del objeto $v(t)$ hasta que llega al piso.

(b) Resolver el problema anterior suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.

12. La posición de un punto que se desplaza con movimiento rectilíneo es $e = f(t)$, donde t es el tiempo. Determinar $f(t)$ en los siguientes casos:

(a) Movimiento rectilíneo uniforme (con velocidad $e' = v$ constante), suponiendo que $f(0) = e_0$ es dato.

(b) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (con aceleración $e'' = a$ constante), suponiendo que $f(0) = e_0$ y $f'(0) = v_0$ son datos.

13. Usar el modelo del Ejercicio 12 para plantear como problema de valores iniciales y resolver: ¿Cuánto tardará en volver a su punto inicial una bala que se dispara hacia arriba verticalmente con velocidad inicial $v_0 = 200m/s$, y a qué altura llegará? (usar $g = 10m/s^2$)

14. La ley de Malthus supone que la tasa (o velocidad) de crecimiento de una población (p') es en cada instante directamente proporcional a la cantidad de individuos (p) existentes.

(a) Escribir la ecuación diferencial que representa esta relación y verificar que si $p(t_0) = p_0$, resulta $p(t) = p_0\, e^{\alpha\,(t-t_0)}$.

(b) Sabiendo que la población de la tierra aumentó en promedio el 2% anual desde 1960 a 1970 ($\alpha = 0.02$) y que al principio de 1965 se estimaba en 3340 millones de personas, calcular mediante este modelo en cuánto tiempo se predice la duplicación de la población (el valor observado fue de 35 años).

(c) Cuando el tamaño p de la población es demasiado grande el modelo de Malthus debe ser corregido para contemplar el hecho que los individuos compiten por alimento, recursos naturales y espacio vital disponibles . Así surge la ley logística de crecimiento $p' = \alpha\, p - \beta\, p^2$ propuesta por Verhulst en 1837, donde las constantes α y β se llaman coeficientes vitales de la población.
Resolver la ecuación logística y demostrar que independientemente de la condición inicial ($p(t_0) = p_0$), la población tiende a α/β cuando $t \to \infty$ (observar que en el modelo lineal es divergente).

15. Considerando la ley de Newton (fuerza(F)=masa(m) aceleración($\frac{dv}{dt}$)), si el movimiento de un punto material con masa m se produce en un medio que le opone una resistencia del tipo $\alpha v + \beta v^n$, donde v es la velocidad, debe cumplirse que $-\alpha\, v - \beta\, v^n = m\, v'$; es decir, $v' + \frac{\alpha}{m}\, v = -\frac{\beta}{m}\, v^n$.
Considerando $n = 2$, $m = 2$ kg, $\alpha = 2$ kg/seg, $\beta = 4$ kg/m, y que a los 0 seg la velocidad inicial es de 20 m/seg, determinar y graficar el comportamiento de la velocidad del punto en función del tiempo.
Nota: en general, la ecuación del tipo: $y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^n (n > 1)$ se denomina ecuación de Bernoulli; esta ecuación se reduce a una del tipo lineal mediante la transformación $z = y^{1-n}$ (demostralo).

16. Hallar una expresión para la familia de líneas de campo en los siguientes casos:

(a) $\overline{f}(x, y) = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{-x}{x^2 + y^2}\right)$

(b) $\overline{f}(x, y) = \left(\dfrac{1}{2\,x - y}, \dfrac{1}{x}\right)$

(c) $\overline{f}(x, y) = (x^2, y^2)$

(d) $\overline{f}(x, y, z) = (x, y^2, z)$

(e) $\overline{f}(x, y) = (2\,x - y, y)$

(f) $\overline{f}(x, y) = (x^2, x\,y)$

(g) $\overline{E}(\overline{X}) = \overline{X}/||\overline{X}||^3$ con $\overline{X} = (x, y) \neq \overline{0}$.

17. Resolver

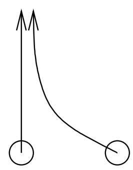
(a) Una mariposa sin peso está posada en el punto $(1/2, 0, -1/3)$ (en metros) y se deja llevar por el viento, que pasa por cada punto (x, y, z) con velocidad $(z, x, 0)$ (en metros sobre segundo). Hallar y dibujar aproximadamente la trayectoria de la mariposa.

(b) La corriente en cada punto (x, y) de la superficie de un canal descripto por $0 < y < 2$ (y en metros) está dada por $V(x, y) = (y^2+1, 2xy)$. Si un pato nada perpendicularmente a la corriente, y parte del punto $(1, 2)$, en qué punto alcanza la otra orilla?

18. Sea $V(x, y) = (10-x, y+1)$ un campo de velocidades. Los centros de dos móviles circulares de radio 1 se mueven según ese campo (es decir que para cada uno de ellos, la velocidad al pasar por un punto (x, y) es $V(x, y)$), partiendo simultáneamente de $P_1 = (10, 2)$ y $P_2 = (20, 2 + \frac{1}{10})$.

    (a) Calcular la distancia entre los centros de los móviles en función del tiempo t.

    (b) Hallar la mínima distancia entre los centros. ¿Chocan entre sí los móviles?



Los móviles y sus trayectorias

Guía VII: Integrales de línea

1. Hallar una parametrización para las siguientes curvas y realizar un gráfico aproximado. ¿Cuáles resultan ser curvas simples?

   (a) $C = \begin{cases} x + 2\,y - z = 4 \\ y = 2\,x - 1 \end{cases}$ en el primer octante.

   (b) $C = \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

   (c) $C = \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2\,x \end{cases}$ en el primer octante.

   (d) $C = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 4 \\ 2\,x + z = 1 \end{cases}$

2. Hallar otra parametrización para las curvas del ejercicio anterior de manera que resulten orientadas en sentido opuesto.

3. Sea $\overline{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\overline{f}(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$. La curva que describe es la circunferencia de radio 1, centrada en el origen, a partir del punto $(1, 0)$ en sentido antihorario.

   (a) Reparametrizarla de manera de recorrer la curva 4 veces más rápido conservando la orientación.

   (b) Reparametrizarla de manera de recorrer la curva 2 veces más lentamente invirtiendo la orientación.

   (c) Reparametrizarla de manera de recorrerla a velocidad constante 1.

4. Resolver:

   (a) Calcular la longitud de la curva parametrizada por $\overline{\sigma}(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), 4)$ con $t \in [0, 2\,\pi]$. Dibujarla y parametrizarla por longitud de arco.

   (b) Idem que en el inciso anterior para la hélice de ecuación paramétrica $\overline{\sigma}(t) = (3\,\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t), 4\,t)$ con $t \in [0, 2\,\pi]$. Hallar su recta tangente y su plano normal en $(3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2, \pi)$.

5. Calcular $\int_C f dl$ en los siguientes casos.

   (a) $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$, $C : x^2 + y^2 = 4, y > 0$.

   (b) $f(x, y, z) = 2\,x - y\,z$, C recta intersección de los planos $2\,y - x + z = 2$ con $x - y + z = 4$ desde $(7, 4, 1)$ hasta $(4, 2, 2)$.

6. Resolver:

   (a) Hallar la masa de un alambre en forma de V, cuya forma es la de la curva $y = |x|$, comprendida entre $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, si su densidad en cada punto es igual al valor absoluto del producto de las coordenadas del punto.

   (b) Hallar la masa de un alambre que es intersección de $z = x^2 + y^2$ y $z = 2\,x$, en el primer octante, entre $(2, 0, 4)$ y $(1, 1, 2)$ si su densidad es $\delta(x, y, z) = (x - 1)\,y$.

   (c) Calcular la masa de un hilo metálico con densidad en cada punto igual al producto de las distancias desde el punto a los planos coordenados, si la forma del alambre coincide con la de la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $z = 2$.

   (d) Hallar la masa, el centro de masa y la densidad media de un alambre en forma de hélice, $\overline{\lambda}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $t \in [0, 2\,\pi]$, cuya función de densidad es $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   (e) Hallar el momento de inercia de un alambre homogéneo de masa m cuya forma es la de la curva parametrizada por $\overline{\sigma} : [-a, a] \to \mathbb{R}^2$, $\overline{\sigma}(t) = (t, \cosh(t))$, respecto de cada uno de los ejes coordenados.

   (f) Suponga que la curva parametrizada por $\overline{\lambda} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de clase $C^1([a, b])$ es la curva de nivel 3 de la función continua $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ¿Cuál es el valor medio de f sobre la curva?

7. Calcular las circulaciones

   (a) $\oint_{C^+} (2\,x, -y) \cdot d\overline{l}$, donde C es el cuadrado $|x| + |y| = 1$.

   (b) $\oint_{C^+} (x\,y, x^2) \cdot d\overline{l}$, siendo C la frontera de la región del primer cuadrante limitada por $x\,y \leq 1$, $y \leq x^2$, $8\,y \geq x^2$.

8. Dado el campo $\overline{F}(x, y) = (y, -x)$, calcular la circulación desde el $(1, 0)$ hasta el $(0, -1)$ a lo largo de:

   (a) un segmento que une los puntos,

   (b) las $3/4$ partes del círculo unitario.

9. Resolver:

   (a) Sea C parametrizada por $\overline{\sigma}(t) = (t, t^2, 2\,t)$, $0 \leq t \leq 2$. Expresar C como intersección de dos superficies y graficarla. Calcular la circulación de $\overline{F}(x, y, z) = (xy, x, zy)$ a lo largo de C. ¿Cuáles son los puntos inicial y final del recorrido?.

(b) Idem que el inciso anterior para $\overline{\sigma}(t) = (t+1, 2\,t+1, t)$, $-1 \leq t \leq 2$ y el campo $\overline{F}(x,y,z) = (x + 2\,y + z, 2\,y, 3\,x - z)$

10. Analizar si los siguientes campos admiten función potencial, en caso afirmativo hallarla:

    (a) $\overline{F}(x,y) = (2\,x + y^2 \mathrm{sen}(2\,x), 2\,y\,\mathrm{sen}^2 x)$.

    (b) $\overline{F}(x,y,z) = (x\,y, x + z\,y, y\,z)$.

    (c) $\overline{F}(x,y,z) = (y - 2\,x\,z + 1, x + 2\,y, -x^2)$.

    (d) $\overline{F}(x,y,z) = ((1 + x\,z)\,e^{x\,z}, x\,e^{x\,z}, y\,x^2\,e^{x\,z})$.

11. Sea $\overline{F}(x,y) = (x, x - y^2)$

    (a) Mostrar que $\overline{F}$ no admite función potencial.

    (b) Hallar la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de la curva positivamente orientada C, perímetro de la región descripta por $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq y^2$.

12. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (4\,x/z, 2\,y/z, -(2\,x^2 + y^2)/z^2)$, $z \neq 0$

    (a) Mostrar que $\overline{F}$ admite función potencial para $z > 0$.

    (b) Describir las superficies equipotenciales de $\overline{F}$.

    (c) Calcular la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de la curva descripta por $x = 1 + \log(1 + |\mathrm{sen}(t)|)$, $y = e^{t\,(\pi - t)}$, $z(t) = 1 + t/\pi$, $t \in [0, \pi]$.

13. Resolver los siguientes ejercicios en los que intervienen ecuaciones diferenciales totales exactas o transformables a este tipo.

    (a) Solución que pasa por $(1,0)$ de $3\,x^2\,y\,dx + (x^3 + \mathrm{sen}(y))\,dy = 0$.

    (b) Solución general de $(2\,x\,y^{-3} + 1)\,dx - (3\,x^2\,y^{-4} - 2\,y)\,dy = 0$.

    (c) Solución que pasa por el punto $(3,2)$ de $2\,x\,y\,y' = x^2 - y^2$. ¿Puede resolverse como homogénea?.

    (d) Solución general de $(x - y + 3)\,y' = (4 - x - y)$.

    (e) Solución tal que $y(2) = 2$ de $(y/x - 1)\,dx + dy = 0$. Observar que, además de existir un factor integrante, también puede tratársela como lineal o como homogénea.

    (f) Solución tal que $y(2) = 1$ de $2\,x\,dx + x^2\,y^{-1}\,dy = 0$.

    (g) Solución general de $(x\,y + y\,\cos(x))\,dx + (x^2 + 2\,\mathrm{sen}(x))\,dy = 0$.

14. Resolver:

    (a) ¿Para qué valores de a y b resulta conservativo el campo $\overline{F}(x,y,z) = (a\,x\,\mathrm{sen}(\pi\,y), x^2\,\cos(\pi\,y) + b\,y\,e^{-z}, y^2\,e^{-z})$? Para esa elección de a y b calcular la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\overline{\sigma}(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(2\,t), \mathrm{sen}^2(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

    (b) ¿Para qué valores de a y b , y en qué dominio posible que contenga a $(1,1,1)$, resulta conservativo el campo $\overline{F}(x,y,z) = (a\,x\,\ln(z))\,\breve{i} + (b\,y^2\,z)\,\breve{j} + (\frac{x^2}{z} + y^3)\,\breve{k}$? Para esa elección de a y b calcular la circulación de $\overline{F}$ a lo largo del segmento que une el punto $(1,1,1)$ al $(2,1,2)$.

    (c) Verificar que $\int_C (3\,x - 2\,y^2)\,dx + (y^3 - 4\,x\,y)\,dy$ no depende de C, sólo de los puntos inicial y final del arco de curva. Calcular la integral cuando se circula desde $(1,3)$ hasta $(2,4)$.

    (d) Evaluar $\int_C (e^x\,\mathrm{sen}(y) + 3\,y)\,dx + (e^x\,\cos(y) + 2\,x - 2\,y)\,dy$, sobre la elipse $4\,x^2 + y^2 = 4$. Indicar el sentido elegido.

15. ¿Cuál es trabajo que realiza $\overline{F}(x,y,z) = (y^2\,\cos(x) + z^3)\,\breve{i} + (2\,y\,\mathrm{sen}(x) - 4)\,\breve{j} + (3\,x\,z^2 + 2)\,\breve{k}$ para mover una partícula a lo largo de la curva parametrizada por $x = \arcsin(t)$, $y = 1 - 2\,t$, $z = 3\,t - 1$, $0 \leq t \leq 1$?.

16. Calcular el trabajo que se necesita para llevar un punto de $(0,-1)$ a $(0,1)$, por la circunferencia unitaria, si en cada punto del plano actúa una fuerza constante de magnitud 2gr, en la dirección positiva del eje y.

17. Calcular la circulación del campo $\overline{F}(x,y,z) = (2\,g(x,y,z), x\,y - 9\,x\,g(x,y,z), 3\,y\,g(x,y,z))$ desde $(1, y_0, z_0)$ hasta $(8, y_1, z_1)$ a lo largo de la curva C cuyos puntos pertenecen a la superficie de ecuación $z = x - y^2$, y su proyección sobre el plano x, y cumple con la ecuación $x = y^3$. Suponga g continua en $\mathbb{R}^3$.

18. Resolver

    (a) Un cuerpo de masa $m = 1$gr se mueve bajo la acción de una única fuerza $\overline{F}$ siguiendo el camino parametrizado por $\overline{\lambda} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ (en los tres ejes de $\mathbb{R}^3$ la unidad es la misma). Si el parámetro $t \in [a,b]$ representa el tiempo, y $\overline{\lambda'}(a) = (1,2,1)$, $\overline{\lambda'}(b) = (1,3,2)$, calcular el trabajo que realiza dicha fuerza para llevar el cuerpo desde $p = \overline{\lambda}(a)$ hasta $q = \overline{\lambda}(b)$ (sugerencia: para integrar hacer uso de $m\,\overline{\lambda''}(t) = \overline{F}(\overline{\lambda}(t))\ldots$)

    (b) Rehacer el inciso anterior, probando antes en general que el trabajo realizado por la resultante $\overline{F}$ es la variación en la energía cinética ($m\,\frac{\|\overline{\lambda'}\|^2}{2}$) producida por $\overline{F}$.

19. Resolver:

    (a) Verificar la ley de conservación de la energía con un cuerpo de masa $m = 1\text{gr}$ moviéndose en el campo de fuerzas $\overline{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overline{F}(x, y) = (y, x)$, por la curva $\overline{\lambda} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\overline{\lambda}(t) = (e^t - \operatorname{sen}(t), e^t + \operatorname{sen}(t))$, donde $t \in [0, \pi]$ representa el tiempo. Es decir, siendo $\overline{F}$ conservativo, probar que la energía cinética más la energía potencial en $p = \overline{\lambda}(0)$ es igual a la suma de la energía cinética más la energía potencial en $q = \overline{\lambda}(\pi)$ (sugerencia: Comprobar en primer lugar que la trayectoria dada satisface la ecuación del movimiento correspondiente al campo de fuerzas, $m\,\overline{\lambda''}(t) = \overline{F}(\overline{\lambda}(t))$. Encontrar una función potencial $U(x, y)$ de manera que $\overline{F}$ sea el campo de fuerzas asociado, es decir tal que $\overline{F}(x, y) = -\nabla U(x, y)$. La energía (cinética más potencial) a lo largo de la trayectoria es entonces:

    $$E(t) = m\,\frac{\|\overline{\lambda'}(t)\|^2}{2} + U(\overline{\lambda}(t))$$

    Comprobar que $E(0) = E(\pi)$.)

    (b) En las mismas condiciones del inciso anterior, probar que $E(t)$ es constante.

20. Mostrar que:

    (a) Si f y g son campos escalares C^1 en un D conexo, entonces

    $$\int_C (f\,\nabla g + g\,\nabla f) \cdot d\bar{l} = f(B)\,g(B) - f(A)\,g(A)$$

    siendo C una curva contenida en D que va de A a B.

    (b) Si f y g son campos escalares C^1 en un D conexo, entonces

    $$\int_C (2\,f\,g\,\nabla f + f^2\,\nabla g) \cdot d\bar{l} = f^2(B)\,g(B) - f^2(A)\,g(A)$$

    siendo C una curva contenida en D que va de A a B.

    (c) Si f y g son campos escalares C^1 en un D conexo, $g \neq 0$ en D, entonces

    $$\int_C \frac{g\,\nabla f - f\,\nabla g}{g^2} \cdot d\bar{l} = f(B)/g(B) - f(A)/g(A)$$

    siendo C una curva contenida en D, que va de A a B.

21. Sea $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, demostrar que $\overline{F} = \varphi\nabla\varphi$ es un campo de gradientes y calcular $\int_{\lambda_{AB}} \overline{F} \cdot d\bar{l}$ sabiendo que $\varphi(B) = 7$ y que $\int_{\lambda_{AB}} \nabla\varphi \cdot d\bar{l} = 4$. ($A$ y B son los puntos inicial y final del arco de curva suave λ_{AB}).

22. Sea $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, una función C^2 en $\mathbb{R}^3$ tal que $\Phi(x_1, x_2, x_3) > 0$, $\forall (x_1, x_2, x_3)$. Mostrar que $\overline{F} = \frac{\nabla\Phi}{\Phi}$ es un campo de gradientes y calcular $\int_C \overline{F} \cdot d\bar{l}$ siendo C un arco de curva que recorre desde A hasta B sabiendo que $\int_C \nabla\Phi \cdot d\bar{l} = 0$.

23. Sea C una curva simple cerrada, que no pasa por el origen y que encierra una región R. Sea $\overline{F}(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

    (a) Probar que si $(0, 0) \notin R$, entonces $\oint_{C+} \overline{F} \cdot d\bar{l} = 0$.

    (b) Probar que si C es una circunferencia centrada en el origen de cualquier radio, orientada en sentido horario, entonces $\oint_C \overline{F} \cdot d\bar{l} = -2\pi$.

    (c) A partir de los resultados de los incisos anteriores deducir que

$$\oint_{C+} \overline{F} \cdot d\bar{l} = \begin{cases} 0 & (0,0) \notin R \\ 2\pi & (0,0) \in R \end{cases}$$

    (d) Probar que el campo $\overline{F}$ tiene matriz jacobiana continua y simétrica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. ¿Es $\overline{F}$ un campo gradiente?

24. Sea $\overline{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ un campo de gradientes con matriz jacobiana

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} -6\,x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    Sabiendo que la gráfica de su función potencial pasa por $(1, 2, 1)$ y que su plano tangente en ese punto tiene ecuación $x - y + z = 0$, comprobar que la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de cualquier curva que una un punto A en el eje y con un punto B en la parábola $y = x^2$ es 0.

25. Calcular las líneas de campo de:

    (a) $\overline{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

    (b) $\overline{F}(x, y) = (-y, x)$

    (c) $\overline{F}(x, y, z) = (x\,z, 2\,x^2\,z, x^2)$

26. Comprobar que la curva parametrizada por $\bar{c}(t)$ es una línea de campo del campo $\overline{F}$ en los siguientes casos:

    (a) $\bar{c}(t) = (t^2, 2\,t - 1, \sqrt{t})$, $t > 0$, $\overline{F}(x, y, z) = (y + 1, 2, \frac{1}{2\,z})$

    (b) $\bar{c}(t) = (\frac{1}{t^3}, e^t, 1/t)$, $\overline{F}(x, y, z) = (-3\,z^4, y, -z^2)$

    (c) $\bar{c}(t) = (\text{sen}(t), \cos(t), e^t)$, $\overline{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$

27. Si $\overline{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo de gradientes, y U su función potencial, entonces las líneas de campo y las líneas equipotenciales son familias de curvas ortogonales. Comprobar este resultado para $\overline{F}(x, y) = (x, y)$, $\overline{F}(x, y) = (-4\,x, 1)$

Guía VIII: Integrales múltiples

1. Calcular el área de las siguientes regiones planas y graficarlas:

   (a) definida por $y \geq x^2$, $y \leq x$,

   (b) definida por $x + y \leq 2$, $y \leq x$, $y \geq 0$,

   (c) limitada por $y = x^3$ y $y = x$,

   (d) limitada por la línea de nivel 4 de $f(x, y) = |x| + |y|$,

   (e) limitada por las curvas de nivel 2 y 4 de $f(x, y) = x + 2\,y$ en el 1° cuadrante.

2. Expresar cada integral invirtiendo el orden de integración. Graficar la región de integración.

   (a) $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y)\, dy$ (b) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)\, dxdy$

   (c) $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y)\, dydx$ (d) $\int_{-1}^1 dy \int_0^{e^y} f(x, y)\, dx$

3. Calcular la masa y el centro de masa de una placa plana definida por $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje y.

4. Calcular el centro de masa de la placa plana definida por $|x| \leq y \leq 2$ cuando la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto a la recta $x = 1$.

5. Interpretar gráficamente la región de integración y calcular las siguientes integrales (en algunos casos puede ser conveniente invertir el orden de integración).

   (a) $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 2x\, dxdy$ (b) $\int_{-2}^2 \int\limits_{\sqrt{4-x^2}}^{\frac{17}{4}-x^2} x\, dydx$

   (c) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dxdy$ (d) $\iint\limits_D y\, dxdy$ (D indica el disco de radio 1 y centro $\bar{0}$.)

6. Resolver los siguientes ejercicios utilizando los cambios de coordenadas propuestos.

   (a) Calcular área(D), $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 2\}$, usando $(x, y) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$.

   (b) Calcular $\iint\limits_D e^{x+y}\, dx\, dy$, D descripto por $1 \leq x + y \leq 4$ en el 1° cuadrante, usando $x + y = u$, $x = v$.

(c) Calcular el área de la región plana definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ con $a > 0, b > 0$, usando $(x, y) = (a\,\rho\,\cos(\varphi), b\,\rho\,\text{sen}(\varphi))$.

(d) Calcular $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x}$, D descripto por $x^2 \leq y \leq 4x^2$, $x \geq 1, y \leq 9$ usando la transformación $(x, y) = (v/u, v^2/u)$.

7. Calcular las siguientes integrales aplicando una transformación lineal conveniente.

   (a) $\iint\limits_D e^{(y-x)/(x+y)}\,dx\,dy$, D descripto por $x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

   (b) $\iint\limits_D (x-y)^2\text{sen}^2(x+y)\,dx\,dy$, D descripto por $-\pi \leq y - x \leq \pi$, $\pi \leq x + y \leq 3\pi$.

   (c) $\iint\limits_D (x+y)^3\,dx\,dy$, D descripto por $1 \leq x + y \leq 4$, $-2 \leq x - 2\,y \leq 1$.

8. Resolver utilizando coordenadas polares, ¿en qué casos merece especial cuidado el análisis de la integrabilidad de la función en el dominio indicado?.

   (a) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D círculo de radio R con centro en $(0, 0)$.

   (b) $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2}\,dx\,dy$, D descripto por $0 \leq y \leq x$, $x + y \leq 2$.

   (c) Área(D), D descripto por $x^2 + y^2 \leq 4\,a^2$, $x^2 + y^2 \geq 2\,a\,x$, con $a > 0$.

9. Describir mediante un gráfico en perspectiva las regiones del espacio dadas por:

   (a) $x + y \leq 1$

   (b) $x^2 \geq y$

   (c) $x^2 + y^2 \geq 1$

   (d) $z \geq x^2 + y^2 - 1$

   (e) $(x-1)^2 + y^2 - y + (z-3)^2 + 3z \geq 1$

   (f) $z > (x-1)^2 + (y+2)^2$

   (g) $x^2 + y^2 - z^2 \geq 1$

   (h) $x^2 + y^2 \geq 1$, $z \geq x + y$

10. Describir mediante un gráfico en perspectiva las regiones del espacio dadas (en coordenadas cilíndricas por:

    (a) $r \leq 1$

    (b) $r > 2$, $0 < \theta < \pi/4$

    (c) $r \leq \theta$

    (d) $0 < \theta < \pi/4$, $\quad r \geq 1/cos(\theta)$

(e) $z \geq r^2$ (f) $z^2 \geq 2\,r^2$

(g) $z^2 > 1 - r^2$ (h) $z^2 \geq 1 + r^2$

11. Describir en coordenadas cartesianas las regiones del ejercicio anterior.

12. Describir en coordenadas cilíndricas las regiones dadas (en cartesianas) por:

    (a) $x \leq 3\,y$ (b) $z \geq 3y$

    (c) $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ (d) $x^2 + y^2 \geq z^2$

    (e) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $y \geq 0$ (f) $|z| \leq x^2 + y^2$

13. Describir mediante un gráfico las regiones dadas (en coordenadas esféricas) por:

    (a) $\rho \leq 2$ (b) $\varphi \leq \pi/4$

    (c) $\theta \leq \pi/4$ (d) $\rho \leq 1$, $\theta \geq 2\,\pi/3$

    (e) $\rho \geq 2$, $\varphi > \pi/2$ (f) $\theta < \pi/2$, $\varphi < \pi/2$

14. Describir en coordenadas cartesianas las regiones del ejercicio anterior.

15. Describir en coordenadas esféricas las regiones dadas (en cartesianas) por:

    (a) $x^2 + y^2 \geq 1$ (b) $|x| \leq y$

    (c) $x^2 + y^2 + 3\,z^2 \leq 1$ (d) $x = 3\,y$, $z = x$, $x \geq 1$

16. Calcular el volumen del cuerpo D mediante una integral triple usando el sistema de coordenadas que crea conveniente.

    (a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y \leq z \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$.
    (b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y^2 + z^2 \leq 1\}$.
    (c) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

(d) D limitado por $z = 2x^2 + y^2$ y $z + y^2 = 8$.

(e) D definido por: $y \geq x^2, y \leq x, z \geq x + y, x + y + z \leq 6$.

(f) D definido por: $x^2 + y^2 - 6 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

(g) D interior a la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4\,a^2$, con $x^2 + y^2 \geq 2\,a\,x$, en el primer octante. $(a > 0)$.

17. Demostrar que $V = \frac{9}{2}\,a^3$ es el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano tangente a la superficie de ecuación $x\,y\,z = a^3$ en el punto (x_0, y_0, z_0) de la misma. $(a \neq 0)$

18. Calcular la masa del cuerpo limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con $y \geq x^2 + z^2$ cuando la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje y.

19. Calcular el momento estático del cuerpo H respecto del plano x, z si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano x, y. H está en el primer octante definido por: $x + y + z \leq 2, z \geq x + y, y \leq x$.

20. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo con densidad constante limitado por $x^2 + z^2 = 1$, $y - x = 1$, primer octante.

21. Calcular el momento de inercia respecto del eje x de un cuerpo con densidad constante limitado por $x = y^2 + z^2$, $5\,x = y^2 + z^2 + 4$.

22. Dada $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ plantear (indicando los correspondientes límites de integración), la integral triple de f extendida al cuerpo en el primer octante con $x + y + z \leq 4$, en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Resolver la integral en el sistema que crea más conveniente.

23. Analizar la existencia de extremos relativos de la función f, clasificarlos y calcular su valor si

$$f(x, y) = \frac{x}{2\,k} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - y + 70$$

siendo k una constante positiva tal que el volumen del cuerpo comprendido entre el paraboloide $x^2 + y^2 = kz$ y el plano $z = k$ resulta $4\,\pi$.

24. Sea $R \subset \mathbb{R}^3$ la región descripta por $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 - 2y \geq 0$, $y \geq 0$.

(a) Hallar el área de la proyección de R sobre el plano yz.

(b) Hallar el área de la proyección de R sobre el plano xz.

(c) Hallar el área de la proyección de R sobre el plano xy.

Guía IX: Integrales de superficie

1. Calcular el área de las siguientes superficies:

   (a) S: trozo de cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con $0 \leq z \leq 2$.

   (b) S: frontera del cuerpo definido por $x + y + z \leq 4, y \geq 2x$ en el primer octante.

   (c) S: trozo de cilindro $x^2 + y^2 = 2\,a\,y$ con $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$. $(a > 0)$

   (d) S: trozo de cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \leq 4, y \leq \sqrt{3}\,x$.

2. Calcular la masa de la porción de superficie cónica dada por $4\,z^2 = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq 1$ y $x \leq y$, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al plano xy.

3. Calcular el momento de inercia respecto del eje y de una chapa con forma de tronco de cono $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ con $1 \leq y \leq 4$, si la densidad es constante.

4. Calcular la integral de $f(x, y, z) = x\,y - z$ sobre la superficie cilíndrica $y = z^2$ con $|x| \leq y \leq 2$.

5. Supongamos que en la superficie de un canal (con un flujo estacionario) el campo de velocidades $\overline{V}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ satisface que existe una función $C^2(\mathbb{R}^2)$ $U(x, y)$ tal que $\frac{\partial U}{\partial x} = -v_2, \frac{\partial U}{\partial y} = v_1$ (*observar que de esta condición resulta que el campo de velocidades es tangente a las líneas de nivel de* U). Mostrar que si C es una curva cerrada en la superficie del canal, el flujo de $\overline{V}$ a través de C es 0.

6. Calcular el flujo de $\overline{f}$ a través de S, indicando claramente en un gráfico la orientación elegida o dada, para $\vec{n}$ en cada caso.

   (a) $\overline{f}(x, y, z) = (y, x^2 - y, x\,y)$ a través del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $y = x^2$ en el primer octante, con $x + y + z \leq 2$.

   (b) $\overline{f}(x, y, z) = (x\,y, x, 2\,z)$ a través de la superficie frontera del cuerpo H con $\breve{n}$ saliente, si $H = [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^3$.

   (c) $\overline{f}(x, y, z) = (x - y, x, 2 - y)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $x + y \leq 4,\ y \geq x,\ z \leq x,\ z \geq 0$, con $\vec{n}$ saliente.

   (d) $\overline{f}(x, y, z) = (y^3\,z, x\,z - y\,z, x^2\,z)$ a través de $2\,y = x^2$ con $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ en el primer octante.

7. Dado $\overline{f}(x, y, z) = (x - y, a\,z, b\,y)$, determinar la relación entre a y b para que sea nulo el flujo de $\overline{f}$ a través de $y + z = 3$ en el primer octante, con $x \leq 2$.

8. Una porción S de la superficie de una esfera de radio 3 centrada en el origen tiene área 2. ¿Cuánto vale el flujo del campo $\overline{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de S hacia adentro de la esfera?

9. Calcular el flujo de $\overline{F}(x, y, z) = (4y, y, \varphi(x, y, z))$ continuo en $\mathbb{R}^3$, a través del trozo de cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $0 \leq z \leq 2$. Indicar en un gráfico el $\vec{n}$ elegido.

10. La familia de superficies equipotenciales del campo conservativo $\overline{f}$ está dada por $x^2 - yz + z^2 - x^3y = c$. Calcular el flujo del campo a través del disco $x^2 + y^2 \leq 9$ en $z = 4$. Indicar en un gráfico el $\vec{n}$ considerado.

11. Determinar los valores de a y b para los que se produce un mínimo relativo del flujo de $\overline{f}(x, y, z) = (a\,b\,x, y/a, -z/b)$ a través de $z = x\,y$ con $(x, y) \in [1, 2] \times [1, 2]$, cuando el $\vec{n}$ se orienta de manera que $\breve{n} \cdot (0, 0, 1) < 0$.

12. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 - 2\,z \leq 0$, $x \leq 0$, $y \leq 0$. Hallar el flujo a través de S del campo $\overline{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$ con S orientada de manera que la coordenada y de su vector normal resulte positiva.

Guía X: Teoremas integrales

1. Trabajando en coordenadas cartesianas y considerando las hipótesis que fueran necesarias en cada caso, demostrar que:

   (a) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\overline{f})) = 0$.

   (b) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = \overline{0}$.

   (c) $\nabla(f\,g) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$.

   (d) $\mathrm{div}(f\,\overline{g}) = f\,\mathrm{div}(\overline{g}) + \nabla f \cdot \overline{g}$.

   (e) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\overline{f})) = \nabla \mathrm{div}(\overline{f}) - \nabla^2 \overline{f}$, donde $\nabla^2 \overline{f}$ se define como el vector cuyas componentes son los laplacianos de las componentes de $\overline{f}$.

2. Sea $\overline{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, $\overline{f} \in C^1$ tal que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = k \neq 0$ (k constante). Obtener la fórmula
$$\text{Área}(D) = \frac{1}{k} \oint_{\partial D^+} \overline{f} \cdot d\bar{l}$$
para el cálculo del área de una región plana D mediante integral de línea a lo largo de su frontera ∂D.

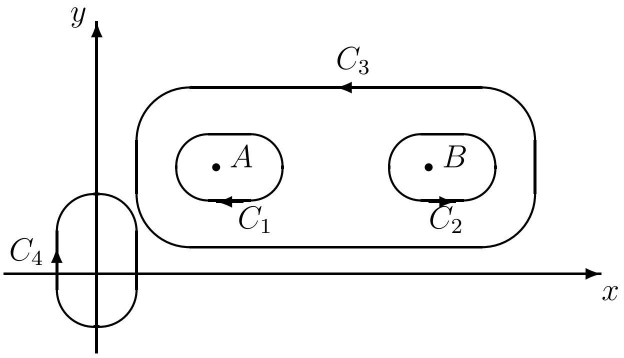
3. Calcular el área de la región $D \subset \mathbb{R}^2$ definida por $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$ integrando $\overline{f}(x,y) = (0, x)$ a lo largo de su frontera.

4. Sea $\overline{f} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. Si $\overline{f} \in C^1$ y tal que $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y) = 4$ en su dominio. Calcular $\oint_{C^+} \overline{f} \cdot d\bar{l}$, siendo C una circunferencia con centro en el origen y radio r y sabiendo que para $r = 1$ el valor de dicha integral es $3\,\pi$.

5. Sea $\overline{f} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, el campo definido por
$$\overline{f}(x,y) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} \right)$$
Mostrar que $\oint_{C^+} \overline{f} \cdot d\bar{l} = 0$ a lo largo de cualquier curva C cerrada que rodee al punto $(0,0)$.

6. Verificar el teorema de Green para $\overline{f}(x,y) = (x, x\,y^2)$ en la región plana D cuyos puntos cumplen con $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

7. Sea $\overline{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial con matriz jacobiana continua y simétrica en $D = \mathbb{R}^2 - \{\overline{A}, \overline{B}\}$. Circulando en los sentidos indicados en el esquema, resulta que $\oint_{C_1} \overline{f} \cdot d\overline{l} = 2$ y $\oint_{C_2} \overline{f} \cdot d\overline{l} = 4$.



Calcular, también con los sentidos indicados, $\oint_{C_3} \overline{f} \cdot d\overline{l}$ y $\oint_{C_4} \overline{f} \cdot d\overline{l}$, justificando teóricamente el método de cálculo utilizado.

8. Según lo propuesto en T.P. 7 - Ejercicio 23, se demuestra que $\overline{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ no es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$. Redefinir el campo en un dominio en el que admita función potencial y calcular dicha función.

9. Sea $\overline{f}(x, y) = (x\,y\,g(x), x^2 - g(x) + 2\,g(y)) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\overline{f}(\overline{0}) = \overline{0}$. Determinar la expresión de g para que $\overline{f}$ admita función potencial.

10. Sea $\overline{F}(x, y, z) = (2x, -y^2 z, h(x, y))$ determinar la expresión de h tal que $\overline{F}$ sea irrotacional, sabiendo que $\overline{F}(0) = (0, 0, 1)$.

11. Demostrar que si $\overline{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y su divergencia es nula en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, su flujo a través de una superficie cerrada que no pasa por el origen, sólo depende de que la superficie encierre o no al origen y no de la superficie particular que se considere (siempre con $\vec{n}$ saliente).

12. Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\iiint_D \|\nabla f(x, y, z)\|^2 dx\,dy\,dz = 0 \ \forall D$, demostrar que $\iint_{\partial D} f dS$ es proporcional al área de ∂D. (Nota: ∂D es la frontera de D).

13. Calcular la circulación de $\overline{f}(x, y, z) = (z - x\,y, y - z, x^3 + y)$ a lo largo de la frontera de la región del plano x, y limitada por $y = x$, $y = 2\,x$, $x\,y = 1$, $x\,y = 4$ con $x > 0$ en sentido positivo, aplicando el teorema del rotor.

14. Dado $\overline{f}(x, y, z) = (x\,g(x) + h(y), g(y) + y\,g(z) + 2\,x\,y, z\,h(y) + y^2\,h(z))$ determinar la expresión de $\overline{f}$ sabiendo que es un campo de fuerzas conservativo y que $\overline{f}(0) = (0, 1, 0)$. ¿Qué hipótesis utiliza para g y h?

15. Demostar que el flujo de $\overline{f}(x, y, z) = (x + y\,e^z, Q(x, z), 5\,z)$ a través del trozo de esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 13$ con $z \geq 2$ no depende de la función Q. Indicar gráficamente

la orientación elegida para el versor normal a la superficie, y otras hipótesis que sean necesarias.

16. Calcular el flujo de $\overline{f}$ a través de la semiesfera de ecuación $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ sabiendo que existe un campo $\overline{g} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\overline{f} = \text{rot}\overline{g}$ y que $\overline{f}(x, y, 0) = (0, y, x - 1)$. Indicar gráficamente la orientación elegida para $\vec{n}$.

17. Dado el campo $\overline{f}$ con matriz jacobiana $D\overline{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 & 2\,x\,y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 2\,y\,z \end{pmatrix}$, calcular la circulación de $\overline{f}$ a lo largo de la curva intersección del plano $x + y + z = 4$ con los planos coordenados; indicar claramente en un esquema el sentido de la curva considerado.

18. Sea $\overline{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, demostrar que la anulación del flujo de $\overline{f}$ a través de toda superficie esférica con centro en el origen **no implica** que $\overline{f}$ sea solenoidal.

19. Sea S la superficie frontera del cuerpo limitado por $x^2 + z^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$ con $z \geq y$, salvo la cara perteneciente al plano $y = 0$. Calcular el flujo de $\overline{f}$ a través de S, si $\text{div}\overline{f}(x, y, z) = 2\,x$ y $\overline{f}(x, 0, z) = (0, 2\,x\,z, 0)$. Indicar gráficamente el $\vec{n}$ elegido en cada trozo de superficie.

20. Dado $\overline{f}(x, y, z) = (x\,g(y), g(y) - y, g(x) - z\,y)$ tal que $\overline{f}(0) = (0, 1, 1)$, hallar la expresión de $\overline{f}$ de manera que $\iint_S \overline{f} \cdot d\overline{S} = 0 \ \forall S$.

21. Sea S la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante, con $x + y \leq 2$. Calcular la circulación de $\overline{f}(x, y, z) = (x\,y, y, y\,z)$ a lo largo de la curva frontera de S con orientación $(0, 0, 2) \to (0, 2, 0) \to (2, 0, 2) \to (0, 0, 2)$, y verificar el resultado aplicando el teorema del rotor.

22. Calcular la circulación de un campo $\overline{f}$ tal que $\text{rot}\overline{f} = (x - y, y - x, z)$ a lo largo de la curva parametrizada por $\overline{g}(t) = (3\,\cos(t), 3\,\text{sen}(t), 6 - 3\,\cos(t) - 3\,\text{sen}(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$.

23. Si $\text{div}\overline{f}(x, y, z) = 2\,y$, calcular el flujo de $\overline{f}$ a través del casquete de esfera de ecuación $x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$ sabiendo que $\overline{f}(0, y, z) = \left(e^{y^2+z^2}, z, y^2\right)$. Indicar en un esquema la orientación del versor normal elegida.

24. Demostrar que si φ es armónico, el flujo de $\varphi\nabla\varphi$ a través de de la superficie frontera de un cuerpo H es igual a la integral triple de $\|\nabla\varphi\|^2$ extendida a H.

25. Dados $\overline{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y solenoidal, una superficie S cerrada y suave a trozos frontera de un cuerpo H convexo, y un plano π que la corta dividiéndola en dos casquetes S_1 y S_2. Hallar

la relación que debe existir entre los flujos ϕ_1 y ϕ_2 de $\overline{f}$ a través de dichos casquetes, si el primero se calcula con versor normal entrante (a H) y el segundo con saliente.

26. Demostrar las siguientes igualdades indicando las hipótesis necesarias en cada caso.

    (a) $\iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial D} (f\,\nabla g - g\,\nabla f)\cdot \breve{n}\, dS$.

    (b) $\iint_{\partial D} (\nabla f \times \nabla g)\cdot \breve{n}\, dS = 0$.

    (c) $\oint_{\partial D^+} f\,\nabla g \cdot d\bar{l} = \iint_D (\nabla f \times \nabla g)\cdot \breve{n}\, dS$.

27. Sea $\overline{f} \in C^2(\mathbb{R}^3)$, si S es la frontera de un cuerpo H, demostrar que

$$\iint_S \frac{\partial \overline{f}}{\partial \breve{n}}\, dS = \iiint_H \nabla^2 \overline{f}\, dx\, dy\, dz,$$

entendiéndose que los vectores se integran componente a componente, y que $\breve{n}$ es el versor normal a S (saliente de H).

28. Sea $\overline{f}$ un campo vectorial no nulo en $W \subset \mathbb{R}^2$ abierto y arco-conexo.

    (a) Mostrar que si C es una línea de campo de $\overline{f} = \nabla\phi$, la circulación a lo largo de C de $\overline{f}$ es $\int_C \|\nabla\phi\| dl$

    (b) Mostrar que si las líneas de campo de $\overline{f}$ son cerradas, $\overline{f}$ no es un campo de gradientes.

29. En algunas aplicaciones interesa saber si existen puntos donde "nacen" (*fuentes*, $\text{div}(\overline{f}) > 0$) o bien "terminan" (*sumideros*, $\text{div}(\overline{f}) < 0$) líneas de campo. Mostrar que para los siguientes tipos de campos no hay fuentes ni sumideros.

    (a) Campo C^2 de gradientes con función potencial armónica.

    (b) Campo C^2 que admite potencial vectorial (si $\overline{f} = \text{rot}\overline{g}$ se dice que $\overline{g}$ es el potencial vectorial de $\overline{f}$).

30. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que $\iiint\limits_D \nabla\cdot\overline{F}\, dx\, dy\, dz = 3$, siendo D la región descripta por $0 \le z \le 1$, $x^2+y^2 \le 1$, calcular el flujo de $\overline{F}$ a través de S, siendo S la superficie cilíndrica (sin tapas!) descripta, en coordenadas cilíndricas, por $r = 1$, $0 \le z \le 1$, orientada de manera que el vector normal se dirija hacia afuera del cilindro.

31. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla\times\overline{F} = \bar{0}$ en R, calcular la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\overline{\sigma}(t) = (\text{sen}(t), 1, \cos(t))$, con t variando desde 0 hasta π.

32. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (P(x,y,z),5,R(x,y,z))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times \overline{F} = \overline{0}$ en D, calcular la circulación de $\overline{G}(x,y,z) = (P(x,y,z), 3\,x, z\,R(x,y,z))$ a lo largo de la curva de ecuaciones $x^2+y^2 = 4$, $z = 1$ en la dirección tal que la proyección sobre el plano x, y está positivamente orientada.

33. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (P(x,y,z),5,R(x,y,z))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times \overline{F} = \overline{0}$ en D, calcular, usando el teorema de la divergencia, el flujo de $\overline{G}(x,y,z) = (x^3 + R(x,y,z), y^3 - P(x,y,z), z^3 - P(x,y,z))$ sobre la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 4$, con el vector normal orientado hacia el exterior de la esfera.

34. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^2(\mathbb{R}^2)$, y sea $\overline{F}(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,z), 0, x+y+\frac{\partial f}{\partial z}(x,z))$. Calcular la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de la curva cerrada definida por $x^2+y^2+z^2 = 25$, $y = 4$ orientada de manera que su vector tangente en $(3,4,0)$ tenga coordenada z negativa.

35. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (x\,P(x,y,z), y\,P(x,y,z), z\,P(x,y,z) - 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 100$. Suponiendo que $\iiint\limits_M \nabla \cdot \overline{F}\,dx\,dy\,dz = 3$, siendo $M \subset \mathbb{R}^3$ la región descripta por $x^2+y^2+z^2 \leq 25$, $4\sqrt{x^2+y^2} \leq 3\,z$, hallar el flujo de $\overline{F}$ a través del casquete esférico definido por $x^2+y^2+z^2 = 25$, $z \geq 4$, con el vector normal orientado hacia el exterior de la esfera.

36. Sea $\overline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial $C^2(\mathbb{R}^3)$, que satisface $\text{rot}\overline{F} = (0,x,0)$. Sea $f(a,b)$ la circulación de $\overline{F}$ a lo largo del borde del rectángulo descripto por $y = -a^2 + b^2\,x$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$ orientado de manera que su tangente en $(0,-a^2,1)$ tenga coordenada x negativa. Hallar el mínimo de $f(a,b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

37. Sea $\overline{F}$ el campo vectorial definido para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ por

$$\overline{F}(x,y,z) = (\frac{2\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{2\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{2\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})$$

(a) Calcular el flujo de $\overline{F}$ a través del borde de la región descripta por $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, orientado con el normal hacia afuera.

(b) Calcular la divergencia de $\overline{F}(x,y,z)$, para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

(c) Usar lo anterior para calcular el flujo de $\overline{F}$ a través del borde de la región descripta por $4 \geq z \geq x^2+y^2-4$, orientado con el normal hacia afuera.

38. Hallar a de manera que sea máximo el flujo del campo $\overline{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través del borde (¡con tapas!) del cilindro elíptico descripto por

$$\frac{x^2}{1-\frac{4\,a^2}{1+4\,a^2}} + \frac{y^2}{1+\frac{4\,a^2}{1+4\,a^2}} \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

39. Sea $\overline{F}$ un campo vectorial $C^2(\mathbb{R}^3)$, $\overline{F}(x,y,z) = (x\,P(x,y,z), y\,Q(x,y,z), z)$ y sea S el semicírculo en el plano $y=0$ descripto por $y=0$, $x^2+z^2 \leq 1$, $x \geq 0$.

    Si el flujo del rotor de $\overline{F}$ a través de S orientado de manera que su normal tenga coordenada y positiva es 4, hallar la circulación de $\overline{F}$ a lo largo del arco de circunferencia parametrizado por $\overline{\sigma}(t) = (\mathrm{sen}(t), 0, -\cos(t))$ con $0 \leq t \leq \pi$.

40. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando claramente la respuesta.

    (a) Sea $\overline{F}(x,y,z) = (0,0,z\,R(x,y))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que el flujo de $\overline{F}$ a través del borde del cilindro definido por $x^2+y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$ es 3, calcular $\iint\limits_M R(x,y)\,dx\,dy$, siendo M el disco descripto en el plano xy por $x^2+y^2 \leq 1$.

    (b) Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f \in C(\mathbb{R}^2)$ tiene extremos en puntos P_1 y P_2. Calcular la circulación del campo $\overline{F}(x,y) = (\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y))$ a lo largo del segmento que va desde P_1 hasta P_2.

    (c) Sea C una curva regular en $\mathbb{R}^2$, positivamente orientada, que encierra una región R de área 4. Calcular $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy$, siendo $P(x,y) = 3\,x^2\,y + 5$, $Q(x,y) = x^3 - 4\,x - 3$.

41. Determinar los volúmenes de los sólidos dados por $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}\}$ y $M* = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}\}$.

    Para M, un método numérico adaptativo con la regla de Simpson está implementado en matlab® por medio de la función dblquad con la sintaxis dblquad(f,a,b,c,d), siendo f el campo escalar a integrar en el rectángulo $[a,b]\times[c,d]$; en este caso basta ejecutar: Integral= dblquad (inline ('exp(-x.^ 2-y.^ 2)'), 0, 1, 0, 1)

42. Una esfera de densidad relativa δ y diámetro ϕ flota en agua. La profundidad sumergida es h; llamando α a la relación h/ϕ, probar que debe verificarse la ecuación $2\,\alpha^3 - 3\,\alpha^2 + \delta = 0$. Demostrar que la ecuación cúbica tiene tres raíces reales α_1, α_2, α_3 (para $0 < \delta < 1$, claro) que verifican $-1/2 < \alpha_1 < 0 < \alpha_2 < 1 < \alpha_3 < 3/2$, siendo α_2 la que resuelve el problema físico de hallar la porción sumergida para una dada densidad relativa δ. Resolver la ecuación para $\delta = 1/2$ y $\delta = 3/4$.

    Una instrucción de matlab® que permite calcular las raíces de una ecuación cúbica del tipo $a_3\,t^3 + a_2\,t^2 + a_1\,t + a_0 = 0$ es: roots $([a_3, a_2, a_1, a_0])$

    Otro recurso para el análisis de la ecuación mediante el método de Newton se tiene en el sitio del MIT: http://ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/tools/tools06.html