MATEMÁTICAS DISCRETAS

Cuarta edición

Richard Johnsonbaugh
DePaul University, Chicago

TRADUCCIÓN:
Óscar Alfredo Palmas Velasco
Doctor en Matemáticas
Instituto de Matemáticas

REVISIÓN TÉCNICA:
Víctor Hugo Ibarra Mercado
Lic. en Física y Matemáticas, ESFM-IPN
Catedrático de la Escuela de Actuaría
Universidad Anáhuac

PRENTICE
HALL

MÉXICO • NUEVA YORK • BOGOTÁ • LONDRES • MADRID
MUNICH • NUEVA DELHI • PARÍS • RÍO DE JANEIRO
SINGAPUR • SYDNEY • TOKIO • TORONTO • ZURICH

Datos de catalogación bibliográfica

JOHNSONBAUGH, RICHARD
Matemáticas discretas, 4a. ed.
PRENTICE HALL, México, 1999

ISBN: 970-17-0253-0
Área: Universitarios

Formato: 20 × 25.5 cm — Páginas: 720

EDICIÓN EN ESPAÑOL:
EDITOR: PABLO EDUARDO ROIG VÁZQUEZ
SUPERVISORA DE TRADUCCIÓN: ROCÍO CABAÑAS CHÁVEZ
SUPERVISOR DE EDICIÓN: MAGDIEL GÓMEZ MARINA

EDICIÓN EN INGLÉS:
Editorial Director: *Tim Bozik*
Editor-in-Chief: *Jerome Grant*
Acquisition Editor: *George Lobell*
Director, Production and Manufacturing: *David Riccardi*
Executive Managing Editor: *Kathleen Schiaparelli*
Managing Editor: *Linda Mihatov Behrens*
Editorial/Production Supervision: *Nicholas Romanelli*
Manufacturing Manager: *Trudy Pisciotti*
Manufacturing Buyer: *Alan Fischer*
Creative Director: *Paula Maylahn*
Art Director: *Amy Rosen*
Assistant to Art Director: *Rod Hernandez*
Interior Designer: *Donna Wickes*
Cover Designer: *Bruce Kenselaar*
Art Manager: *Gus Vibal*
Editorial Assistants: *Gale Epps/Nancy Bauer*
Director of Marketing: *John Tweeddale*
Marketing Assistant: *Diana Penha*

JOHNSONBAUGH: MATEMÁTICAS DISCRETAS, 4a. ed.

Traducido de la cuarta edición en inglés de la obra: **Discrete Mathematics.**

PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, S. A.
Calle 4 Núm. 25-2º piso, Fracc. Industrial Alce Blanco
53370 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

ISBN 970-17-0253-0

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524.

Original English Language Edition Published by Prentice Hall, Inc.

ISBN 0-13-518242-5

IMPRESO EN MÉXICO / PRINTED IN MEXICO

CONTENIDO

† Las secciones precedidas por un símbolo † pueden omitirse sin perder la continuidad de la lectura.

PREFACIO

Este libro está planeado para un curso de introducción a las matemáticas discretas, con una duración de uno o dos semestres. Los requisitos de matemáticas son mínimos: *no* es necesario un conocimiento del cálculo. Tampoco se exigen requisitos de computación. El libro incluye ejemplos, ejercicios, figuras, tablas, secciones relativas a la solución de problemas, notas, repaso y autoevaluación de cada capítulo que ayudarán al estudiante a dominar las matemáticas discretas básicas.

Panorama de la obra

A principios de la década de los ochenta casi no había libros adecuados para un curso de introducción de matemáticas discretas. Al mismo tiempo, existía la necesidad de un curso que ampliase la madurez matemática y la capacidad de los estudiantes para trabajar con la abstracción, y que incluyera temas útiles, como la combinatoria, los algoritmos y las gráficas. La edición original de este libro (1984) buscaba cubrir esta necesidad. Posteriormente, los cursos de matemáticas discretas se enriquecieron con diversos tipos de audiencias, como estudiantes de matemáticas y computación. Un grupo de expertos de la Mathematical Association of America apoyó el establecimiento de un curso de un año sobre matemáticas discretas. El Consejo de Actividades Educativas del Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos (IEEE) ha recomendado un curso de matemáticas discretas para estudiantes del primer año de licenciatura. Los criterios de acreditación de la ACM (Association for Computing Machinery) y del IEEE piden un curso de matemáticas discretas. Esta edición, al igual que las anteriores, incluye temas como algoritmos, combinatoria, conjuntos, funciones e inducción matemática, sugeridos por esos grupos. También busca la comprensión y la construcción de demostraciones y, en general, la ampliación de la madurez matemática.

Acerca de este libro

Este libro incluye:

- Lógica (incluyendo cuantificadores), demostraciones, demostraciones por resolución e inducción matemática (capítulo 1).
- Conjuntos, sucesiones, cadenas, notaciones para la suma y el producto, sistemas numéricos, relaciones y funciones, incluyendo ejemplos motivantes, como una aplicación de los órdenes parciales a la planeación de tareas (sección 2.4), las bases de datos relacionales (sección 2.7) y una introducción a las funciones de dispersión (sección 2.8).
- Una discusión amplia de los algoritmos, de los algoritmos recursivos y del análisis de algoritmos (capítulo 3). Además, en todo el libro se adopta un punto de vista algorítmico. Los algoritmos se escriben en una forma flexible de seudocódigo. (Este libro no presupone requisitos de cursos de computación, la descripción del seudocódigo utilizado se incluye en el mismo texto.) Entre los algoritmos presentados están el algoritmo de Euclides para determinar el máximo común divisor (sección 3.3), los mosaicos (sección 3.4), el algoritmo de criptografía con clave pública RSA (sección 3.7), la generación de combinaciones y permutaciones (sección 4.3), el ordenamiento por fusión (sección 5.3), el algoritmo del camino más corto de Dijkstra (sección 6.4), los algoritmos con retroceso (sección 7.3), la búsqueda a lo ancho y en profundidad (sección 7.3), los recorridos de los árboles (sección 7.6), la evaluación de un árbol de juegos (sección 7.9), la determinación del flujo máximo en una red (sección 8.2), la determinación de un par cercano de puntos (sección 11.1) y el cálculo de la cubierta convexa (sección 11.3).
- Un análisis completo de las notaciones "O mayúscula", omega y theta para el crecimiento de funciones (sección 3.5). Al disponer de todas estas notaciones, es posible dar enunciados precisos acerca del crecimiento de funciones y la complejidad de los algoritmos.
- Combinaciones, permutaciones y el principio de las casillas (capítulo 4).
- Relaciones de recurrencia y su uso en el análisis de algoritmos (capítulo 5).
- Gráficas, incluyendo los modelos de computadoras en paralelo, el recorrido de un caballo de ajedrez, los ciclos hamiltonianos, los isomorfismos de gráficas y las gráficas planas (capítulo 6). El teorema 6.4.3 proporciona una demostración simple, breve y elegante de que el algoritmo de Dijkstra es correcto.
- Árboles, incluyendo árboles binarios, recorridos de árboles, árboles de expansión mínimos, árboles de decisión, el tiempo mínimo para un ordenamiento y los isomorfismos de árboles (capítulo 7).
- El algoritmo del flujo máximo, acoplamiento y las redes de Petri (capítulo 8).
- Un tratamiento de las álgebras booleanas que enfatiza la relación de las álgebras booleanas con los circuitos combinatorios (capítulo 9).
- Un estudio de los autómatas que enfatiza la modelación y las aplicaciones (capítulo 10). El circuito flip-flop *SR* se analiza en el ejemplo 10.1.11. Los fractales, incluyendo el copo de nieve de von Koch, se describen mediante algunos tipos especiales de gramáticas (ejemplo 10.3.19).
- Una introducción a la geometría computacional (capítulo 11).
- Un apéndice sobre matrices.

- Un gran énfasis de la relación entre los diversos temas. Como ejemplo, la inducción matemática está íntimamente ligada con los algoritmos recursivos (sección 3.4); la sucesión de Fibonacci se utiliza en el análisis del algoritmo de Euclides (sección 3.6); muchos ejercicios de todo el libro utilizan la inducción matemática; mostramos cómo caracterizar los componentes de una gráfica definiendo una relación de equivalencia en el conjunto de vértices (véase el análisis después del ejemplo 6.2.13) y contamos el número de árboles binarios con *n* vértices (teorema 7.8.12).
- Un vehemente énfasis en la lectura y realización de demostraciones. La mayor parte de las demostraciones de los teoremas se ilustran mediante figuras. En las secciones independientes *Rincón de solución de problemas* se muestra cómo resolver problemas y cómo realizar demostraciones.
- Numerosos ejemplos resueltos en todo el libro. (Existen más de 430 ejemplos resueltos.)
- Un gran número de aplicaciones, en particular a la computación.
- Cerca de 2400 ejercicios, con respuestas a casi la tercera parte de ellos al final del libro. (Los ejercicios con números en **negritas** tienen su respuesta al final del libro.)
- Más de 650 figuras y tablas para ilustrar los conceptos, para mostrar el funcionamiento de los algoritmos, para aclarar las demostraciones y para motivar el material.
- Secciones de *Notas* con sugerencias de lecturas posteriores.
- Secciones de *Repaso del capítulo.*
- Secciones de *Autoevaluación del capítulo.*
- Una sección de bibliografía con más de 100 referencias.
- En los forros del libro se resume la notación matemática y algorítmica utilizada en esta obra.

Cambios de la tercera edición

- Se han agregado once secciones denominadas *Rincón de solución de problemas*. Estas secciones muestran a los estudiantes formas de enfrentar y resolver los problemas, y cómo realizar demostraciones.
- La demostración por resolución es el tema de la nueva sección 1.5. Esta técnica de demostración, la cual se puede automatizar, y que por tanto es importante en el campo de la inteligencia artificial, ayuda a los estudiantes a tener una mejor perspectiva de la lógica, en general, y de la lectura y construcción de demostraciones, en particular.
- Se ha agregado una nueva sección acerca de los sistemas numéricos binario y hexadecimal (sección 2.3). Se presentan estos sistemas numéricos y se analiza la conversión entre los diversos sistemas. También se estudia la aritmética en los diversos sistemas.
- En la nueva sección 3.7 se estudia el sistema de criptografía de clave pública RSA, que recibe el nombre de sus autores, Ronald L. Rivest, Adi Shamir y Leonard M. Adleman. En el sistema RSA, cada participante hace pública una clave de ciframiento y oculta una clave de desciframiento. Para enviar un mensaje, se busca la clave de ciframiento del receptor en la tabla distribuida en forma pública. El receptor descifra entonces el mensaje utilizando la clave oculta.

- Se han agregado varias figuras para ilustrar demostraciones de teoremas. Ahora todas las figuras tienen leyendas, y las leyendas de las figuras que ilustran demostraciones proporcionan una explicación adicional y dan una mejor idea de las demostraciones.
- Se han agregado algunos libros y artículos recientes a la bibliografía.
- El número de ejemplos resueltos se ha incrementado hasta ser más de 430.
- El número de ejercicios se ha incrementado hasta ser casi 2400.
- Se ha establecido un sitio en la World Wide Web para proporcionar un apoyo actualizado para este libro.

Estructura de cada capítulo

Cada capítulo se organiza de la manera siguiente:

- Panorama
- Sección
- Ejercicios de la sección
- Sección
- Ejercicios de la sección

. . .

- Notas
- Repaso del capítulo
- Autoevaluación del capítulo

Las secciones *Notas* contienen sugerencias para lecturas posteriores. Las secciones *Conceptos básicos del capítulo* proporcionan listas de referencia para los conceptos clave de cada capítulo. Las secciones *Autoevaluación del capítulo* contienen cuatro ejercicios por cada sección, cuyas respuestas aparecen al final del libro. Además, la mayor parte de los capítulos tienen secciones *Rincón de solución de problemas.*

Ejercicios

Este libro contiene casi 2400 ejercicios. Los ejercicios que podrían ser más difíciles que el promedio se han indicado mediante una estrella, ☆. Los números de los ejercicios en **negritas** (aproximadamente la tercera parte de los ejercicios) indican que el ejercicio tiene una sugerencia o solución al final del libro. En algunos ejercicios claramente identificados se necesitan algunos conocimientos de cálculo. Sin embargo, en el cuerpo principal del libro no se utilizan conceptos del cálculo y, excepto por los ejercicios indicados, no se necesita saber cálculo para resolver los ejercicios. El final de las demostraciones se indica mediante el símbolo ■.

Ejemplos

El libro contiene más de 430 ejemplos resueltos. Estos ejemplos muestran a los estudiantes la forma de enfrentar problemas de matemáticas discretas, demuestran aplicaciones de la teoría, aclaran demostraciones y ayudan a motivar el material. El final de los ejemplos se indica mediante el símbolo □.

Rincones de solución de problemas

Las nuevas secciones *Rincón de solución de problemas* ayudan a los estudiantes a enfrentar y resolver problemas, y también muestran cómo hacer demostraciones. Escritas de manera informal, cada una de estas secciones es autosuficiente y continúa el análisis del tema del problema. En vez de simplemente presentar una demostración o la solución a un problema, la intención de estas secciones es mostrar diversas formas de enfrentar un problema, analizar aquello que debe buscarse para obtener la solución de un problema, y presentar técnicas de solución de problemas y de demostraciones.

Cada *Rincón de solución de problemas* comienza con el enunciado de un problema. Después de enunciar el problema, se analizan algunas formas de resolverlo. A este análisis le siguen las técnicas para determinar una solución. Después de hallar una respuesta, se presenta una solución formal para mostrar la forma correcta de redactar ésta. Por último, se resumen las técnicas para solución de problemas utilizadas en la sección. Además, algunas de estas secciones concluyen con una subsección *Comentarios*, la cual analiza la relación con otros temas de matemáticas y ciencias de la educación, proporciona una motivación del problema y enumera algunas referencias para lecturas posteriores relacionadas con el problema.

[redacted]

El sitio http://condor.depaul.edu/~ rjohnson contiene información acerca del libro, incluyendo programas de computadora, transparencias, ejercicios para computadora, un programa para generar gráficas aleatorias de diversos tipos y una fe de erratas de la edición en inglés.

Agradecimientos

He recibido útiles comentarios de muchas personas, entre las que se incluyen a Gary Andrus, Robert Busby, David G. Cantor, Tim Carroll, Joseph P. Chan, Hon-Wing Cheng, Robert Crawford, Henry D'Angelo, Jerry Delazzer, Br. Michael Driscoll, Carl E. Eckberg, Susanna Epp, Gerald Gordon, Jerrold Grossman, Mark Herbster, Steve Jost, Nicholas Krier, Warren Krueger, Glenn Lancaster, Donald E. G. Malm, Kevin Phelps, James H. Stoddard, Michael Sullivan, Edward J. Williams y Hanyi Zhang.

Agradezco de manera especial a Martin Kalin sus comentarios acerca de la nueva sección *Rincón de solución de problemas* y por su apoyo relativo a la nueva sección acerca de las demostraciones por resolución; a Gregory Brewster y a I-Ping Chu por nuestras discusiones acerca de los flujos en redes de computadoras; a Gregory Bachelis por revisar la nueva sección relativa al sistema de criptografía RSA y a Sam Stueckle, de Northeastern University; Towanna Roller, de Asbury College; Feng-Eng Lin, de George Mason University; Gordon D. Prichett, de Babson College; y Donald Bein, de Fairleigh Dickinson University por revisar el manuscrito de esta edición.

Estoy en deuda con Helmut Epp, decano de la escuela de computación, telecomunicaciones y sistemas de información en DePaul University, por prestar su tiempo y apoyo para el desarrollo de esta edición y sus predecesoras.

He recibido un apoyo constante del equipo en Prentice Hall. Agradezco de manera especial la ayuda de George Lobell, editor ejecutivo, y Nicholas Romanelli, supervisor de producción.

R.J.

1

LÓGICA Y DEMOSTRACIONES

Querido Sr. Marlowe, observo en usted una tendencia desagradable hacia las transiciones bruscas. Una característica de su generación, pero, en este caso, le debo pedir que siga algún orden lógico.

—de Murder, My Sweet

La **lógica** es el estudio del razonamiento; en particular, se analiza si un razonamiento es correcto. La lógica se centra en las relaciones entre los enunciados y no en el contenido de un enunciado particular. Por ejemplo, considérese el siguiente argumento:

Todos los matemáticos utilizan sandalias.
Cualquier persona que utilice sandalias es algebrista.
Por tanto, todos los matemáticos son algebristas.

Desde el punto de vista técnico, la lógica no permite determinar si estos enunciados son verdaderos; sin embargo, si los dos primeros enunciados fuesen verdaderos, la lógica garantizaría que el enunciado

Todos los matemáticos son algebristas.

también es verdadero.

Los métodos lógicos se utilizan en matemáticas para demostrar teoremas, y en computación para demostrar que los programas hacen precisamente lo que deberían hacer.

† Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

En la última parte del capítulo analizaremos algunos métodos generales para realizar demostraciones, uno de los cuales, la inducción matemática, se utiliza en matemáticas y en computación. La inducción matemática es particularmente útil en las matemáticas discretas.

1.1 PROPOSICIONES

¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero o falso (pero no ambos)?

(a) Los únicos enteros positivos que dividen a 7 son 1 y el propio 7.

(b) Alfred Hitchcock ganó un Premio de la Academia en 1940 por dirigir *Rebecca*.

(c) Para todo entero positivo n, existe un número primo mayor que n.

(d) La Tierra es el único planeta en el universo que tiene vida.

(e) Compre dos boletos para el concierto de rock de Unhinged Universe para el viernes.

La afirmación (a) es verdadera. Un entero n es *primo* si $n > 1$ y los únicos enteros positivos que dividen a n son 1 y el propio n. La afirmación (a) es otra forma de decir que 7 es primo.

La afirmación (b) es falsa. Aunque *Rebecca* ganó el Premio de la Academia como mejor película en 1940, John Ford ganó el premio al mejor director por *The Grapes of Wrath*. Es sorprendente, pero Alfred Hitchcock nunca ganó un Premio de la Academia como director.

La afirmación (c) es verdadera; es otra forma de decir que existe una infinidad de primos.

La afirmación (d) puede ser verdadera o falsa (pero no ambas), pero nadie podría decidir esto en este momento.

La afirmación (e) no es verdadera ni falsa [en realidad es una orden].

Una afirmación que es verdadera o falsa, pero no ambas, es una **proposición**. Las afirmaciones (a)-(d) son proposiciones, mientras que la afirmación (e) no lo es. En general, una proposición se expresa como una afirmación declarativa (y no como una pregunta, una instrucción, etc.). Las proposiciones son los bloques de construcción básicos para cualquier teoría de la lógica.

Utilizaremos letras minúsculas, como p, q y r, para representar las proposiciones. También utilizaremos la notación

$$p\colon\ 1 + 1 = 3$$

para indicar que p es la proposición $1 + 1 = 3$.

Al hablar o escribir en forma ordinaria, combinamos las proposiciones mediante conectivos como *y* y *o*. Por ejemplo, las proposiciones "Está lloviendo" y "Llevaré mi paraguas" pueden combinarse para formar una única proposición "Está lloviendo y llevaré mi paraguas". A continuación se definen formalmente *y* y *o*.

DEFINICIÓN 1.1.1

Sean p y q proposiciones.

La *conjunción* de p y q, denotada $p \wedge q$, es la proposición

$$p \text{ y } q.$$

La *disyunción* de p y q, denotada $p \vee q$, es la proposición

$$p \text{ o } q.$$

Las proposiciones (como $p \wedge q$ y $p \vee q$) resultantes de combinar proposiciones son **proposiciones compuestas**.

EJEMPLO 1.1.2

Si

$$p\colon\ 1 + 1 = 3,$$
$$q\colon\ \text{Un decenio tiene 10 años,}$$

entonces la conjunción de p y q es

$$p \wedge q\colon\ 1 + 1 = 3 \text{ y un decenio tiene 10 años.}$$

La disyunción de p y q es

$$p \vee q\colon\ 1 + 1 = 3 \text{ o un decenio tiene 10 años.}$$

□

Los valores de verdad de proposiciones como las conjunciones y disyunciones pueden describirse mediante **tablas de verdad**. Una tabla de verdad de una proposición P formada por las proposiciones $p_1, \ldots, p_n$ enumera todas las combinaciones posibles de los valores de verdad para $p_1, \ldots, p_n$, donde V indica verdadero y F falso, de modo que para cada una de estas combinaciones se indica el valor de verdad de P.

DEFINICIÓN 1.1.3

El valor de verdad de la proposición compuesta $p \wedge q$ queda definido mediante la tabla de verdad

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Observe que en la tabla de verdad de la definición 1.1.3 aparecen las cuatro combinaciones posibles de las asignaciones de verdad para p y q.

La definición 1.1.3 establece que la conjunción $p \wedge q$ es verdadera si p y q son ambas verdaderas; en cualquier otro caso, $p \wedge q$ es falsa.

EJEMPLO 1.1.4

Si

p: $1 + 1 = 3$,
q: Un decenio tiene 10 años,

entonces p es falsa, q es verdadera, y la conjunción

$p \wedge q$: $1 + 1 = 3$ y un decenio tiene 10 años

es falsa. □

EJEMPLO 1.1.5

Si

p: Benny Goodman grabó música clásica,
q: Los Orioles de Baltimore eran los Cafés de San Luis,

entonces p y q son verdaderas. Aunque Benny Goodman es mejor conocido por sus grabaciones de jazz, grabó mucha música clásica (por ejemplo, los conciertos para clarinete de Weber, números 1 y 2, con la Orquesta Sinfónica de Chicago). Los Cafés de San Luis se mudaron a Baltimore en 1954 y cambiaron su nombre por Orioles. La conjunción

$p \wedge q$: Benny Goodman grabó música clásica y los Orioles de Baltimore eran los Cafés de San Luis

es verdadera. □

EJEMPLO 1.1.6

Si

p: $1 + 1 = 3$,
q: Minneápolis es la capital de Minnesota,

entonces p y q son falsas y la conjunción

$p \wedge q$: $1 + 1 = 3$ y Minneápolis es la capital de Minnesota

es falsa. □

DEFINICIÓN 1.1.7

El valor de verdad de la proposición compuesta $p \vee q$ se define mediante la tabla de verdad

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

El *o* en la disyunción $p \vee q$ se utiliza en el sentido inclusivo; es decir, $p \vee q$ es verdadera si p o q o ambas son verdaderas, y $p \vee q$ es falsa sólo si p y q son falsas. Existe también una **o exclusiva** (véase el ejercicio 31), donde p *oex* q es verdadera si p o q es verdadera, pero *no* ocurre que ambas sean verdaderas.

EJEMPLO 1.1.8

Si

p: $1 + 1 = 3$,
q: Un decenio tiene 10 años,

entonces p es falsa, q es verdadera, y la disyunción

$p \vee q$: $1 + 1 = 3$ o un decenio tiene 10 años

es verdadera. □

EJEMPLO 1.1.9

Si

p: Benny Goodman grabó música clásica,
q: Los Orioles de Baltimore eran los Cafés de San Luis,

entonces p y q son ambas verdaderas y la disyunción

$p \vee q$: Benny Goodman grabó música clásica o los Orioles de Baltimore eran los Cafés de San Luis

también es verdadera. □

EJEMPLO 1.1.10

Si

p: $1 + 1 = 3$,
q: Minneápolis es la capital de Minnesota,

entonces p y q son falsas y la disyunción

$p \vee q$: $1 + 1 = 3$ o Minneápolis es la capital de Minnesota

es falsa. □

La última operación sobre una proposición p analizada en esta sección es la **negación de** p.

DEFINICIÓN 1.1.11

La *negación* de p, denotada por $\bar{p}$, es la proposición

no p.

El valor de verdad de la proposición $\bar{p}$ se define mediante la tabla de verdad

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

EJEMPLO 1.1.12

Si

p: Cary Grant estelarizó *Rear Window*,

la negación de p es la proposición

$\bar{p}$: No es cierto que Cary Grant haya estelarizado *Rear Window*.

Como p es falsa, $\bar{p}$ es verdadera. (James Stewart interpretó el papel principal en la película *Rear Window*.) La negación se escribiría normalmente:

Cary Grant no estelarizó *Rear Window*. □

EJEMPLO 1.1.13

Sean

p: Blas Pascal inventó varias máquinas calculadoras,

q: La primera computadora digital completamente electrónica fue construida en el siglo XX.

r: π se calculó hasta 1 millón de cifras decimales en 1954.

Representar la proposición

Blas Pascal inventó varias máquinas calculadoras y no es cierto que la primera computadora digital completamente electrónica haya sido construida en el siglo XX; o bien π se calculó hasta 1 millón de cifras decimales en 1954,

en forma simbólica y determinar si es verdadera o falsa.

La proposición puede escribirse en forma simbólica como

$$(p \wedge \bar{q}) \vee r.$$

Primero observamos que p y q son verdaderas y que r es falsa. (No fue sino hasta 1973 que se calculó 1 millón de cifras decimales de π. Posteriormente se han calculado más de dos mil millones de cifras decimales.) Si reemplazamos cada símbolo por su valor de verdad, tenemos que

$$\begin{aligned}(p \wedge \bar{q}) \vee r &= (\mathrm{V} \wedge \overline{\mathrm{V}}) \vee \mathrm{F}\\ &= (\mathrm{V} \wedge \mathrm{F}) \vee \mathrm{F}\\ &= \mathrm{F} \vee \mathrm{F}\\ &= \mathrm{F}.\end{aligned}$$

Por tanto, la proposición dada es falsa. □

Ejercicios

Determine si cada una de las afirmaciones de los ejercicios 1-8 es una proposición. Si la afirmación es una proposición, escriba su negación. (No se le piden los valores de verdad de las afirmaciones que son proposiciones.)

† **1.** $2 + 5 = 19$.

2. Mesero, ¿puede traer las nueces? Es decir, ¿puede servir las nueces a los invitados?

3. Para algún entero positivo n, $19340 = n \cdot 17$.

4. Audrey Meadows fue la "Alicia" original en "The Honeymooners".

5. Pélame una uva.

6. La frase "Hazlo de nuevo, Sam" aparece en la película *Casablanca*.

7. Todo entero par mayor que 4 es la suma de dos primos.

8. La diferencia de dos primos.

Evalúe cada proposición en los ejercicios 9-14 con los valores de verdad

$$p = \mathrm{F}, \qquad q = \mathrm{V}, \qquad r = \mathrm{F}.$$

9. $p \vee q$

10. $\bar{p} \vee \bar{q}$

11. $\bar{p} \vee q$

12. $\bar{p} \vee \overline{(q \wedge r)}$

13. $\overline{(p \vee q)} \wedge (\bar{p} \vee r)$

14. $(p \vee \bar{r}) \wedge \overline{(q \vee r) \vee \overline{(r \vee p)}}$

Escriba la tabla de verdad para cada una de las proposiciones de los ejercicios 15-22.

15. $p \wedge \bar{q}$

16. $(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee p$

17. $(p \vee q) \wedge \bar{p}$

18. $(p \wedge q) \wedge \bar{p}$

19. $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \vee q)$

20. $\overline{(p \wedge q)} \vee (r \wedge \bar{p})$

21. $(p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$

22. $\overline{(p \wedge q)} \vee (q \vee r)$

† Los ejercicios con números en negritas indican que tienen una sugerencia o una solución al final del libro, en la sección posterior a la Bibliografía.

En los ejercicios 23-25, represente la proposición dada de manera simbólica con

$$p: 5 < 9, \quad q: 9 < 7, \quad r: 5 < 7.$$

Determine si cada proposición es verdadera o falsa.

23. $5 < 9$ y $9 < 7$.
24. No es cierto que ($5 < 9$ y $9 < 7$).
25. $5 < 9$ o no es cierto que ($9 < 7$ y $5 < 7$).

En los ejercicios 26-30, describa la expresión simbólica con palabras, utilizando

p: Hoy es lunes.

q: Está lloviendo.

r: Hace calor.

26. $p \vee q$ 27. $\bar{p} \wedge (q \vee r)$ 28. $\overline{p \vee q} \wedge r$
29. $(p \wedge q) \wedge \overline{(r \vee p)}$
30. $(p \wedge (q \vee r)) \wedge (r \vee (q \vee p))$
31. Proporcione el valor de verdad para el o exclusivo de p y q, donde p *oex* q es verdadera si p o q es verdadera, pero no ambas.
32. En alguna época, la siguiente ley regía en Naperville, Illinois: "No se permitirá que una persona tenga más de tres [3] perros y tres [3] gatos dentro de la ciudad". ¿Violó la ley Charles Marko, quien tenía cinco perros y ningún gato? Explique.

1.2 PROPOSICIONES CONDICIONALES Y EQUIVALENCIA LÓGICA

El decano ha anunciado que

> Si el Departamento de Matemáticas obtiene \$20,000 adicionales, entonces podrá contratar un nuevo miembro. (1.2.1)

La afirmación (1.2.1) establece que, bajo la condición de que el Departamento de Matemáticas obtenga \$20,000 adicionales, entonces se podrá contratar un nuevo miembro. Una proposición como (1.2.1) es una **proposición condicional**.

DEFINICIÓN 1.2.1

Si p y q son proposiciones, la proposición compuesta

$$\text{si } p \text{ entonces } q \qquad (1.2.2)$$

es una *proposición condicional* y se denota

$$p \to q.$$

La proposición p es la *hipótesis* (o *antecedente*) y la proposición q es la *conclusión* (o *consecuente*).

EJEMPLO 1.2.2

Si definimos

p: El Departamento de Matemáticas obtiene \$20,000 adicionales,
q: El Departamento de Matemáticas contrata un nuevo miembro,

entonces la afirmación (1.2.1) tiene la forma (1.2.2). La hipótesis es la afirmación "El Departamento de Matemáticas obtiene \$20,000 adicionales", y la conclusión es la afirmación "El Departamento de Matemáticas contrata un nuevo miembro". □

Algunas afirmaciones que no tienen la forma (1.2.2) pueden formularse como proposiciones condicionales, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2.3

Enuncie cada proposición en forma de una proposición condicional (1.2.2).

(a) María será una buena estudiante si estudia mucho.

(b) Juan puede cursar cálculo sólo si está en su segundo, tercer o cuarto año de estudio de licenciatura.

(c) Cuando cantas, me duelen los oídos.

(d) Una condición necesaria para que los Cachorros ganen la Serie Mundial es que consigan un lanzador relevista derecho.

(e) Una condición suficiente para que Rafael visite California es que vaya a Disneylandia.

(a) La hipótesis es la cláusula posterior al condicional *si*, de modo que una formulación equivalente es

> Si María estudia mucho, entonces será una buena estudiante.

(b) La cláusula *sólo si* es la conclusión; es decir,

$$\text{si } p \text{ entonces } q$$

es considerada desde el punto de vista lógico como igual a

$$p \text{ sólo si } q.$$

Una formulación equivalente es

> Si Juan cursa cálculo, entonces está en su segundo, tercer o cuarto año de estudio de licenciatura.

La formulación "si p entonces q" enfatiza la hipótesis, mientras que la formulación "p sólo si q" enfatiza la conclusión: la diferencia es sólo de estilo.

(c) *Cuando* significa lo mismo que *si*, de modo que una formulación equivalente es

> Si cantas, entonces me duelen los oídos.

(d) La conclusión expresa una **condición necesaria**; de este modo, una formulación equivalente es

Si los Cachorros ganan la Serie Mundial, entonces han contratado un lanzador relevista derecho.

(e) La hipótesis expresa una **condición suficiente**, por lo que una formulación equivalente es

Si Rafael va a Disneylandia, entonces estará visitando California. □

Consideremos el problema de asignar un valor de verdad a la afirmación del decano

Si el Departamento de Matemáticas obtiene $20,000 adicionales, entonces podrá contratar un nuevo miembro.

En realidad, la afirmación sólo es de interés cuando la hipótesis "el Departamento de Matemáticas obtiene $20,000 adicionales" es verdadera. Si es cierto que el Departamento de Matemáticas obtiene $20,000 adicionales y también es cierto que el Departamento contrata un nuevo miembro, podemos considerar que la afirmación del decano es verdadera. Por otro lado, si es cierto que el Departamento de Matemáticas obtiene $20,000 adicionales pero es falso que el Departamento contrata un nuevo miembro, podemos considerar que la afirmación del decano es falsa. Cuando la hipótesis es verdadera, el valor de verdad de la proposición condicional, como un todo, depende del valor de verdad de la conclusión. En general, cuando la hipótesis p es verdadera, la proposición condicional $p \to q$ es verdadera si q es verdadera, y falsa si q es falsa. Si la hipótesis p es falsa, el único punto intuitivamente claro es que el valor de verdad del enunciado condicional $p \to q$ no debe basarse en el valor de verdad de la conclusión. No podemos considerar que la afirmación del decano sea falsa sólo porque el Departamento de Matemáticas no hubiese conseguido $20,000 adicionales. Sin embargo, la proposición condicional, al igual que cualquier otra proposición, debe tener un valor de verdad, aunque la hipótesis sea falsa. La definición usual establece que $p \to q$ es verdadera si p es falsa. Este análisis se resume en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.2.4

El valor de verdad de la proposición condicional $p \to q$ se define mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EJEMPLO 1.2.5

Sean

$$p: 1 > 2, \qquad q: 4 < 8.$$

Entonces p es falsa y q es verdadera. Por tanto,

$p \to q$ es verdadera, $q \to p$ es falsa. □

EJEMPLO 1.2.6

Si p es verdadera, q es falsa y r es verdadera, determine el valor de verdad de cada proposición.

(a) $(p \wedge q) \to r$

(b) $(p \vee q) \to \overline{r}$

(c) $p \wedge (q \to r)$

(d) $p \to (q \to r)$

Reemplazamos cada símbolo p, q y r por su valor de verdad para obtener el valor de verdad de la proposición:

(a) $(\mathrm{V} \wedge \mathrm{F}) \to \mathrm{V} = \mathrm{F} \to \mathrm{V} =$ verdadera

(b) $(\mathrm{V} \vee \mathrm{F}) \to \overline{\mathrm{V}} = \mathrm{V} \to \mathrm{F} =$ falsa

(c) $\mathrm{V} \wedge (\mathrm{F} \to \mathrm{V}) = \mathrm{V} \wedge \mathrm{V} =$ verdadera

(d) $\mathrm{V} \to (\mathrm{F} \to \mathrm{V}) = \mathrm{V} \to \mathrm{V} =$ verdadera □

En el lenguaje común, lo usual es que la hipótesis y la conclusión de una proposición condicional tengan cierta relación; pero en lógica, no es necesario que la hipótesis y la conclusión se refieran al mismo tema. Por ejemplo, en lógica se permiten proposiciones como:

Si $5 < 3$, entonces Nelson Rockefeller fue presidente de Estados Unidos.

La lógica estudia la forma de las proposiciones y las relaciones entre éstas, y no con el tema en cuestión. (De hecho, como la hipótesis es falsa, esta proposición es verdadera. Observe que una proposición condicional verdadera es distinta de una proposición condicional con una conclusión verdadera.)

El ejemplo 1.2.5 muestra que la proposición $p \to q$ puede ser verdadera aunque la proposición $q \to p$ sea falsa. La proposición $q \to p$ es la **recíproca** de la proposición $p \to q$. Así, una proposición condicional puede ser verdadera y su recíproca ser falsa.

EJEMPLO 1.2.7

Escriba cada proposición condicional de manera simbólica. Escriba el recíproco de cada enunciado en forma simbólica y con palabras. Además, determine el valor de verdad de cada proposición condicional y de su recíproca.

(a) Si $1 < 2$, entonces $3 < 6$.

(b) Si $1 > 2$, entonces $3 < 6$.

(a) Sean

$$p: 1 < 2, \qquad q: 3 < 6.$$

La afirmación dada puede escribirse de manera simbólica como

$$p \to q.$$

Como p y q son verdaderas, esta proposición es verdadera. La recíproca puede escribirse de manera simbólica como

$$q \to p$$

y con palabras como

Si $3 < 6$, entonces $1 < 2$.

Como p y q son verdaderas, la recíproca $q \to p$ es verdadera.

(b) Sean

$$p: 1 > 2, \qquad q: 3 < 6.$$

La afirmación dada puede escribirse de manera simbólica como

$$p \to q.$$

Como p es falsa y q es verdadera, esta afirmación es verdadera. La recíproca puede escribirse de manera simbólica como

$$q \to p$$

y con palabras como

Si $3 < 6$, entonces $1 > 2$.

Como q es verdadera y p es falsa, la recíproca $q \to p$ es falsa. □

Otra proposición compuesta útil es

$$p \text{ si y sólo si } q. \tag{1.2.3}$$

Esta afirmación se considera verdadera precisamente cuando p y q tienen los mismos valores de verdad (es decir, p y q son ambas verdaderas o ambas falsas).

DEFINICIÓN 1.2.8

Si p y q son proposiciones, la proposición compuesta

$$p \text{ si y sólo si } q$$

es una *proposición bicondicional* y se denota

$$p \leftrightarrow q.$$

El valor de verdad de la proposición $p \leftrightarrow q$ se define mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Una forma alternativa de afirmar "p si y sólo si q" es "p es una condición necesaria y suficiente para q". A veces, "p si y sólo si q" se escribe "p ssi q".

EJEMPLO 1.2.9

La afirmación

$$1 < 5 \text{ si y sólo si } 2 < 8 \tag{1.2.4}$$

puede escribirse de manera simbólica como

$$p \leftrightarrow q$$

si definimos

$$p: 1 < 5, \qquad q: 2 < 8.$$

Como p y q son verdaderas, la afirmación $p \leftrightarrow q$ es verdadera. □

Una forma alternativa de (1.2.4) es: Una condición necesaria y suficiente para $1 < 5$ es que $2 < 8$.

En algunos casos, es posible que dos proposiciones compuestas tengan los mismos valores de verdad, sin importar los valores de verdad de sus proposiciones constituyentes. Tales proposiciones son **lógicamente equivalentes**.

DEFINICIÓN 1.2.10

Supongamos que las proposiciones compuestas P y Q están formadas por las proposiciones $p_1, \ldots, p_n$. Decimos que P y Q son *lógicamente equivalentes* y escribimos

$$P \equiv Q,$$

siempre que dados cualesquiera valores de verdad de $p_1, \ldots, p_n$, P y Q sean ambas verdaderas o ambas falsas.

EJEMPLO 1.2.11 *Leyes de De Morgan para la lógica*

Verificaremos la primera de las **leyes de De Morgan**

$$\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}, \quad \overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$$

y dejaremos la segunda como ejercicio (véase el ejercicio 44).

Al escribir las tablas de verdad para $P = \overline{p \vee q}$ y $Q = \bar{p} \wedge \bar{q}$, podemos verificar que dados cualesquiera valores de verdad de p y q, P y Q son ambas verdaderas o ambas falsas:

p	q	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Por tanto, P y Q son lógicamente equivalentes. □

Nuestro ejemplo siguiente proporciona una forma lógicamente equivalente de la negación de $p \to q$.

EJEMPLO 1.2.12

Muestre que la negación de $p \to q$ es lógicamente equivalente a $p \wedge \bar{q}$.

Debemos mostrar que

$$\overline{p \to q} \equiv p \wedge \bar{q}.$$

Al escribir las tablas de verdad para $P = \overline{p \to q}$ y $Q = p \wedge \bar{q}$, verificamos que dados cualesquiera valores de verdad de p y q, P y Q son ambas verdaderas o ambas falsas:

p	q	$\overline{p \to q}$	$p \wedge \bar{q}$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Por tanto, P y Q son lógicamente equivalentes. □

Ahora mostraremos que de acuerdo con nuestras definiciones, $p \leftrightarrow q$ es lógicamente equivalente a $p \to q$ y $q \to p$.

EJEMPLO 1.2.13

La tabla de verdad muestra que

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p).$$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

□

Concluimos esta sección definiendo la **contrapositiva** de una proposición condicional. Veremos (teorema 1.2.16) que la contrapositiva es una forma alternativa, lógicamente equivalente, de la proposición condicional. El ejercicio 45 muestra otra forma lógicamente equivalente de la proposición condicional.

DEFINICIÓN 1.2.14

La *contrapositiva* (o *transposición*) de una proposición condicional $p \to q$ es la proposición $\bar{q} \to \bar{p}$.

Observe la diferencia entre la contrapositiva y la recíproca. La recíproca de una proposición condicional solamente cambia los papeles de p y q, mientras que la contrapositiva cambia los papeles de p y q y niega cada una de ellas.

EJEMPLO 1.2.15

Escriba la proposición

Si $1 < 4$, entonces $5 > 8$

en forma simbólica. Escriba la recíproca y la contrapositiva de manera simbólica y con palabras. Determine el valor de verdad de cada proposición.

Si definimos

$$p: 1 < 4, \qquad q: 5 > 8,$$

entonces podemos escribir la proposición de manera simbólica como

$$p \to q.$$

La recíproca es

$$q \to p,$$

o, con palabras,

Si $5 > 8$, entonces $1 < 4$.

La contrapositiva es

$$\bar{q} \to \bar{p},$$

o, con palabras,

Si 5 no es mayor que 8, entonces 1 no es menor que 4.

Vemos que $p \to q$ es falsa, $q \to p$ es verdadera y $\bar{q} \to \bar{p}$ es falsa. □

Un hecho importante es que una proposición condicional y su contrapositiva son lógicamente equivalentes.

TEOREMA 1.2.16

La proposición condicional $p \to q$ y su contrapositiva $\bar{q} \to \bar{p}$ son lógicamente equivalentes.

Demostración. La tabla de verdad

p	q	$p \to q$	$\bar{q} \to \bar{p}$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

muestra que $p \to q$ y $\bar{q} \to \bar{p}$ son lógicamente equivalentes. ■

Ejercicios

En los ejercicios 1-7, enuncie cada proposición en la forma (1.2.2) de una proposición condicional.

1. José aprobará el examen de matemáticas discretas si estudia mucho.

2. Rosa podrá graduarse si tiene 160 créditos.

3. Una condición necesaria para que Fernando compre una computadora es que tenga $2000.

4. Una condición suficiente para que Karina lleve el curso de algoritmos es que apruebe matemáticas discretas.

5. Cuando se construyan mejores automóviles, Buick los construirá.

6. El auditorio se dormirá si el presidente imparte la conferencia.

7. El programa es legible sólo si está bien estructurado.

8. Escriba la recíproca de cada proposición en los ejercicios 1-7.

9. Escriba la contrapositiva de cada proposición en los ejercicios 1-7.

Suponiendo que p y r son falsas y que q y s son verdaderas, determine los valores de verdad de cada proposición en los ejercicios 10-17.

10. $p \to q$

11. $\bar{p} \to \bar{q}$

12. $\overline{p \to q}$

13. $(p \to q) \wedge (q \to r)$

14. $(p \to q) \to r$

15. $p \to (q \to r)$

16. $(s \to (p \wedge \bar{r})) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$

17. $((p \wedge \bar{q}) \to (q \wedge r)) \to (s \vee \bar{q})$

En los ejercicios 18-21, represente la afirmación dada de manera simbólica, haciendo

$$p: 4 < 2, \qquad q: 7 < 10, \qquad r: 6 < 6.$$

18. Si $4 < 2$, entonces $7 < 10$.

19. Si ($4 < 2$ y $6 < 6$), entonces $7 < 10$.

20. Si no es cierto que ($6 < 6$ y 7 no es menor que 10), entonces $6 < 6$.

21. $7 < 10$ si y sólo si ($4 < 2$ y 6 no es menor que 6).

En los ejercicios 22-27, formule la expresión simbólica con palabras utilizando

p: Hoy es lunes,

q: Está lloviendo,

r: Hace calor.

22. $p \to q$

23. $\bar{q} \to (r \wedge p)$

24. $\bar{p} \to (q \vee r)$

25. $\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow r$

26. $(p \wedge (q \vee r)) \to (r \vee (q \wedge p))$

27. $(p \vee (\bar{p} \wedge \overline{(q \vee r)})) \to (p \vee \overline{(r \vee q)})$

En los ejercicios 28-31, escriba cada proposición condicional en forma simbólica. Escriba la recíproca y la contrapositiva de cada afirmación de manera simbólica y con palabras. Además, determine el valor de verdad de cada proposición condicional, su recíproca y su contrapositiva.

28. Si $4 < 6$, entonces $9 > 12$.

29. Si $4 > 6$, entonces $9 > 12$.

30. $|1| < 3$ si $-3 < 1 < 3$.

31. $|4| < 3$ si $-3 < 4 < 3$.

Para cada par de proposiciones P y Q en los ejercicios 32-41, indique si $P \equiv Q$.

32. $P = p, Q = p \vee q$

33. $P = p \wedge q, Q = \bar{p} \vee \bar{q}$

34. $P = p \to q, Q = \bar{p} \vee q$

35. $P = p \wedge (\bar{q} \vee r), Q = p \vee (q \wedge \bar{r})$

36. $P = p \wedge (q \vee r), Q = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

37. $P = p \to q, Q = \bar{q} \to \bar{p}$

38. $P = p \to q, Q = q \leftrightarrow p$
39. $P = (p \to q) \wedge (q \to r), Q = p \to r$
40. $P = (p \to q) \to r, Q = p \to (q \to r)$
41. $P = (s \to (p \wedge \bar{r})) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s), Q = p \vee t$
42. Defina la tabla de verdad para *imp1* como

p	q	p *imp1* q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Muestre que

$$p \; imp1 \; q \equiv q \; imp1 \; p.$$

43. Defina la tabla de verdad para *imp2* como

p	q	p *imp2* q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

(a) Muestre que

$$(p \; imp2 \; q) \wedge (q \; imp2 \; p) \not\equiv p \leftrightarrow q. \qquad (1.2.5)$$

(b) Muestre que (1.2.5) sigue siendo verdadera si modificamos *imp2*, de modo que si p es falsa y q es verdadera, entonces p *imp2* q es falsa.

44. Verifique la segunda ley de De Morgan, $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$.
45. Muestre que $(p \to q) \equiv (\bar{p} \vee q)$.

1.3 CUANTIFICADORES

La lógica de las secciones 1.1 y 1.2 que trata con proposiciones, no puede describir la mayoría de las que se manejan en matemáticas y en computación.

Por ejemplo, consideremos la proposición:

$$p\colon\ n \text{ es un entero impar.} \qquad (1.3.1)$$

Una proposición es una afirmación que es verdadera o falsa. La afirmación p no es una proposición, ya que el hecho de que p sea verdadera o falsa depende del valor de n. Por ejemplo, p es verdadera si $n = 103$ y falsa si $n = 8$. Como muchas afirmaciones en matemáticas y computación utilizan variables, debemos ampliar el sistema lógico para incluir estas afirmaciones.

DEFINICION 1.3.1

Sea $P(x)$ un enunciado que contiene la variable x y sea D un conjunto. P es una *función proposicional* (con respecto de D) si para cada x en D, $P(x)$ es una proposición. D es el *dominio de discurso* de P.

EJEMPLO 1.3.2

Sea $P(n)$ la afirmación

$$n \text{ es un entero impar}$$

y sea D el conjunto de enteros positivos. Entonces P es una función proposicional con dominio de discurso D ya que para cada n en D, $P(n)$ es una proposición (es decir, para cada n en D, $P(n)$ es verdadera o falsa, pero no ambas). Por ejemplo, si $n = 1$, obtenemos la proposición

$$1 \text{ es un entero impar}$$

(que es verdadera). Si $n = 2$, obtenemos la proposición

$$2 \text{ es un entero impar}$$

(que es falsa). □

Una función proposicional P, por sí misma, no es verdadera ni falsa. Sin embargo, para toda x en su dominio de discurso, $P(x)$ es una proposición y, por tanto, es verdadera o falsa. Podemos pensar que una función proposicional define una clase de proposiciones, una por cada elemento de su dominio de discurso. Por ejemplo, si P es una función proposicional con dominio de discurso igual al conjunto de enteros positivos, obtenemos la clase de proposiciones

$$P(1), P(2), \ldots .$$

Cada $P(1), P(2), \ldots$ es verdadera o falsa.

EJEMPLO 1.3.3

Las siguientes son funciones proposicionales.

(a) $n^2 + 2n$ es un entero impar (dominio de discurso = conjunto de enteros positivos).

(b) $x^2 - x - 6 = 0$ (dominio de discurso = conjunto de números reales).

(c) El jugador de béisbol bateó arriba de .300 en 1974 (dominio de discurso = conjunto de jugadores de béisbol).

(d) El restaurante se catalogó como de "dos estrellas" en la revista *Chicago* (dominio de discurso = restaurantes catalogados en la revista *Chicago*).

En la afirmación (a), obtenemos una proposición para cada entero positivo n; por tanto, la afirmación (a) es una función proposicional.

De igual manera, en la afirmación (b), obtenemos una proposición para cada número real x; por tanto, la afirmación (b) es una función proposicional.

Podemos considerar que la variable en la afirmación (c) es "jugador de béisbol". Al sustituir un jugador de béisbol particular en vez de la variable "jugador de béisbol", la afirmación es una proposición. Por ejemplo, si sustituimos "Willie Stargell" en vez de "jugador de béisbol", la afirmación (c) es

Willie Stargell bateó arriba de .300 en 1974

que es verdadera. Si sustituimos "Carlton Fisk" por "jugador de béisbol" la afirmación (c) es

Carlton Fisk bateó arriba de .300 en 1974

que es falsa. Así, la afirmación (c) es una función proposicional.

La afirmación (d) tiene una forma similar a la afirmación (c): en este caso, la variable es "restaurante". Al sustituir un restaurante catalogado en la revista *Chicago* en vez de la variable "restaurante", la afirmación es una proposición. Por ejemplo, si sustituimos "Yugo Inn" en vez de "restaurante", la afirmación (d) es

Yugo Inn se catalogó como de "dos estrellas" en la revista *Chicago*

que es falsa. Si sustituimos "Le Français" en vez de "restaurante", la afirmación (d) es

Le Français se catalogó como de "dos estrellas" en la revista *Chicago*

que es verdadera. Así, la afirmación (d) es una función proposicional. □

Muchas afirmaciones en matemáticas y computación utilizan términos como "para todo" y "para algún". Por ejemplo, en matemáticas tenemos el teorema:

Para todo triángulo T, la suma de los ángulos de T es igual a 180°.

En computación, tenemos el teorema:

Para algún programa P, la salida de P es el propio P.

Ahora ampliaremos el sistema lógico de las secciones 1.1 y 1.2 para poder utilizar las afirmaciones que incluyan "para todo" y "para algún".

DEFINICION 1.3.4

Sea P una función proposicional con dominio de discurso D. La afirmación

para toda x, $P(x)$

es una *afirmación cuantificada universalmente*. El símbolo $\forall$ significa "para toda". Así, la afirmación

para toda x, $P(x)$

puede escribirse como

$$\forall x, P(x).$$

El símbolo $\forall$ es un *cuantificador universal*.

La afirmación

para toda x, $P(x)$

es verdadera si $P(x)$ es verdadera para toda x en D. La afirmación

para toda x, $P(x)$

es falsa si $P(x)$ es falsa para al menos una x en D.

La afirmación

para alguna x, $P(x)$

es una *afirmación cuantificada existencialmente*. El símbolo $\exists$ significa "para alguna". Así, la afirmación

para alguna x, $P(x)$

puede escribirse como

$$\exists x, P(x).$$

El símbolo $\exists$ es un *cuantificador existencial*.

La afirmación

para alguna x, $P(x)$

es verdadera si $P(x)$ es verdadera para al menos una x en D. La afirmación

para alguna x, $P(x)$

es falsa si $P(x)$ es falsa para toda x en D.

La variable x en una función proposicional $P(x)$ es una *variable libre*. (La idea es que x tiene la "libertad" de recorrer el dominio de discurso.) La variable x en la afirmación cuantificada universalmente

$$\forall x, P(x) \tag{1.3.2}$$

o en la afirmación cuantificada existencialmente

$$\exists x, P(x) \tag{1.3.3}$$

es una *variable acotada*. (La idea es que x queda "acotada" por el cuantificador $\forall$ o $\exists$.) Anteriormente señalamos que una función proposicional no tiene un valor de verdad. Por otro lado, la definición 1.3.4 asigna un valor de verdad a las afirmaciones cuantificadas (1.3.2) y (1.3.3). En resumen, una afirmación con variables libres no cuantificadas no es una proposición y una afirmación sin variables libres (variables cuantificadas) es una proposición.

La afirmación

para cada x, $P(x)$

también puede escribirse como

para toda x, $P(x)$

y

para cualquier x, $P(x)$.

El símbolo $\forall$ se lee "para cada", "para toda" o "para cualquier".

La afirmación

para alguna x, $P(x)$

también puede escribirse como

para al menos una x, $P(x)$

o como

existe x tal que $P(x)$.

El símbolo $\exists$ se lee "para algún", "para al menos un" o "existe".

A veces, para especificar el dominio de discurso D, escribimos una afirmación cuantificada universalmente como

para toda x en D, $P(x)$,

y una afirmación cuantificada existencialmente como

para alguna x en D, $P(x)$.

EJEMPLO 1.3.5

La afirmación

para cada número real x, $x^2 \geq 0$

es una afirmación cuantificada universalmente. El dominio de discurso es el conjunto de números reales. La afirmación es verdadera, pues *para cada* número real x, es cierto que el cuadrado de x es positivo o cero. □

EJEMPLO 1.3.6

La afirmación cuantificada universalmente

para cada número real x, si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

es verdadera. Esta vez debemos verificar que la afirmación

si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

sea verdadera *para cada* número real x.

Sea x cualquier número real. Es cierto que para cualquier número real x, $x \leq 1$ o $x > 1$. Si $x \leq 1$, la proposición condicional

si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

es verdadera, pues la hipótesis $x > 1$ es falsa. (Recuerde que cuando la hipótesis es falsa, la proposición condicional es verdadera, sin importar que la conclusión sea verdadera o falsa.)

Ahora, supongamos que $x > 1$. Sin importar el valor específico de x, $x + 1 > x$. Como

$$x + 1 > x \quad \text{y} \quad x > 1,$$

concluimos que $x + 1 > 1$, de modo que la conclusión es verdadera. Si $x > 1$, la hipótesis y la conclusión son verdaderas, por lo que la proposición condicional

si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

es verdadera.

Hemos mostrado que para cada número real x, la proposición

si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

es verdadera. Por tanto, la afirmación cuantificada universalmente

para cada número real x, si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

es verdadera. □

El ejemplo 1.3.6 proporciona una motivación más para definir una proposición condicional $p \to q$ como verdadera cuando p es falsa. Para que la afirmación cuantificada universalmente

para cada número real x, si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

sea verdadera, debe ocurrir que la proposición condicional

si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

sea verdadera *sin importar el valor de* x. En particular, la proposición

si $x > 1$, entonces $x + 1 > 1$

debe ser verdadera si $x > 1$ es falsa.

De acuerdo con la definición 1.3.4, la afirmación cuantificada universalmente

para cada x, $P(x)$

es falsa si *para al menos una* x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es falsa. Un valor x en el dominio de discurso que haga falsa a $P(x)$ es un **contraejemplo** a la afirmación

para cada x, $P(x)$.

EJEMPLO 1.3.7

La afirmación cuantificada universalmente

para cada número real x, $x^2 - 1 > 0$

es falsa, pues, si $x = 1$, la proposición

$$1^2 - 1 > 0$$

es falsa. El valor 1 es un contraejemplo a la afirmación

para cada número real x, $x^2 - 1 > 0$. □

Para mostrar que la afirmación cuantificada universalmente

para cada x, $P(x)$

es *falsa*, es suficiente determinar *un* valor x en el dominio de discurso para el cual la proposición $P(x)$ sea falsa. El método para refutar la afirmación

para cada x, $P(x)$

es un poco diferente del método utilizado para demostrar que la afirmación es verdadera. Para probar que

para cada x, $P(x)$

es *verdadera*, hay que examinar *todos* los valores de x en el dominio de discurso y mostrar que para cada x, $P(x)$ es verdadera.

EJEMPLO 1.3.8

La afirmación cuantificada universalmente

para cada entero positivo n, si n es par, entonces $n^2 + n + 19$ es primo

es falsa; obtenemos un contraejemplo al considerar $n = 38$. La proposición condicional

si 38 es par, entonces $38^2 + 38 + 19$ es primo

es falsa, pues la hipótesis

38 es par

es verdadera, pero la conclusión

$38^2 + 38 + 19$ es primo

es falsa. $38^2 + 38 + 19$ no es primo pues puede factorizarse como sigue:

$$38^2 + 38 + 19 = 38 \cdot 38 + 38 + 19 = 19(2 \cdot 38 + 2 + 1) = 19 \cdot 79.$$ □

Ahora analizaremos las afirmaciones cuantificadas existencialmente. Según la definición 1.3.4, la afirmación cuantificada existencialmente

para alguna x en D, $P(x)$

es verdadera si $P(x)$ es verdadera para *al menos una* x en D. Si $P(x)$ es verdadera para algunos valores de x, podría ocurrir que $P(x)$ sea falsa para otros valores de x.

EJEMPLO 1.3.9

La afirmación cuantificada existencialmente

para algún número real x, $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{2}{5}$

es verdadera, pues es posible determinar *al menos un* número real x para el cual la proposición

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5}$$

sea verdadera. Por ejemplo, si $x = 2$, obtenemos la proposición verdadera

$$\frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5}.$$

No es cierto que *todo* valor de x produzca una proposición verdadera. Por ejemplo, la proposición

$$\frac{1}{1^2+1} = \frac{2}{5}$$

es falsa. □

EJEMPLO 1.3.10

La afirmación cuantificada existencialmente

para algún entero positivo n, si n es primo, entonces $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ y $n + 4$ no son primos

es verdadera, pues podemos determinar *al menos un* entero n que haga la proposición condicional

si n es primo, entonces $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ y $n + 4$ no son primos

verdadera. Por ejemplo, si $n = 23$, obtenemos la proposición verdadera

si 23 es primo, entonces 24, 25, 26 y 27 no son primos.

(Esta proposición condicional es verdadera pues tanto la hipótesis "si 23 es primo" como la conclusión "24, 25, 26 y 27 no son primos" son verdaderas.) Algunos valores de n hacen que la proposición condicional sea verdadera (por ejemplo, $n = 23$, $n = 4$, $n = 47$), mientras que otras hacen que sea falsa (por ejemplo, $n = 2$, $n = 101$). El hecho es que hemos determinado *un* valor que hace verdadera a la proposición condicional

si n es primo, entonces $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ y $n + 4$ no son primos.

Por esta razón, la afirmación cuantificada universalmente

para algún entero positivo n, si n es primo, entonces $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ y $n + 4$ no son primos

es verdadera. □

Según la definición 1.3.4. la afirmación cuantificada existencialmente

$$\text{para alguna } x,\ P(x)$$

es falsa si para toda x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es falsa.

EJEMPLO 1.3.11

Para verificar que la afirmación cuantificada existencialmente

$$\text{para algún número real } x,\quad \frac{1}{x^2+1} > 1$$

es falsa, debemos mostrar que

$$\frac{1}{x^2+1} > 1$$

es falsa para cada número real x. Ahora,

$$\frac{1}{x^2+1} > 1$$

es falsa precisamente cuando

$$\frac{1}{x^2+1} \le 1$$

es verdadera. Así, debemos mostrar que

$$\frac{1}{x^2+1} \le 1$$

es verdadera para cada número real x. Para esto, sea x cualquier número real. Como $0 \le x^2$, podemos sumar 1 a ambos lados de esta desigualdad para obtener $1 \le x^2 + 1$. Si dividimos ambos lados de esta última desigualdad entre $x^2 + 1$, obtenemos

$$\frac{1}{x^2+1} \le 1.$$

Por tanto, la afirmación

$$\frac{1}{x^2+1} \le 1$$

es verdadera para cada número real x. Así, la afirmación

$$\frac{1}{x^2+1} > 1$$

es falsa para cada número real x. Hemos mostrado que la afirmación cuantificada existencialmente

$$\text{para alguna } x,\quad \frac{1}{x^2+1} > 1$$

es falsa. □

En el ejemplo 1.3.11, mostramos que una afirmación cuantificada existencialmente era falsa demostrando que una afirmación cuantificada universalmente relacionada con aquella era verdadera. El siguiente teorema precisa esta relación. El teorema generaliza las leyes de De Morgan para la lógica (ejemplo 1.2.11).

TEOREMA 1.3.12 ***Leyes de De Morgan generalizadas para la lógica***

Si P es una función proposicional, cada par de proposiciones en (a) y (b) tiene el mismo valor de verdad (es decir, ambas son verdaderas o falsas).

(a) $\overline{\forall x, P(x)}\ ;\ \exists x, \overline{P(x)}$

(b) $\overline{\exists x, P(x)}\ ;\ \forall x, \overline{P(x)}$

Demostración. Sólo demostraremos el inciso (a) y dejaremos la demostración del inciso (b) al lector (ejercicio 50).

Supongamos que la proposición $\overline{\forall x, P(x)}$ es verdadera. Entonces la proposición $\forall x, P(x)$ es falsa. Por la definición 1.3.4, la proposición $\forall x, P(x)$ es falsa precisamente cuando $P(x)$ es falsa para al menos una x en el dominio de discurso. Pero si $P(x)$ es falsa para al menos una x en el dominio de discurso, $\overline{P(x)}$ es verdadera para al menos una x en el dominio de discurso. De nuevo, por la definición 1.3.4, cuando $\overline{P(x)}$ es verdadera para al menos una x en el dominio de discurso, la proposición $\exists x, \overline{P(x)}$ es verdadera. Así, si la proposición $\overline{\forall x, P(x)}$ es verdadera, la proposición $\exists x, \overline{P(x)}$ es verdadera. De manera análoga, si la proposición $\overline{\forall x, P(x)}$ es falsa, la proposición $\exists x, \overline{P(x)}$ es falsa.

Por tanto, las dos proposiciones en el inciso (a) tienen siempre el mismo valor de verdad. ■

EJEMPLO 1.3.13

Sea $P(x)$ la afirmación

$$\frac{1}{x^2+1} > 1.$$

En el ejemplo 1.3.11 mostramos que

$$\text{para algún número real } x,\ P(x)$$

es falsa verificando que

$$\text{para cada número real } x,\ \overline{P(x)} \tag{1.3.4}$$

es verdadera.

La técnica puede justificarse apelando al teorema 1.3.12. Después de demostrar que la proposición (1.3.4) es verdadera, podemos negarla y concluir que

$$\overline{\text{para cada número real } x,\ \overline{P(x)}}$$

es falsa. Por el inciso (a) del teorema 1.3.12,

$$\text{para algún número real } x,\ \overline{\overline{P(x)}}$$

o bien, en forma equivalente,

$$\text{para algún número real } x,\ P(x)$$

también es falsa. □

Una proposición cuantificada universalmente generaliza la proposición compuesta

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \tag{1.3.5}$$

en el sentido de que las proposiciones individuales $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se reemplazan mediante una familia arbitraria $P(x)$, donde x es un elemento del dominio de discurso, y (1.3.5) se reemplaza mediante

$$\text{para cada } x, P(x). \tag{1.3.6}$$

La proposición (1.3.5) es verdadera si y sólo si P_i es verdadera para cada $i = 1, \ldots, n$. El valor de verdad de la proposición (1.3.6) se define de manera análoga: (1.3.6) es verdadera si y sólo si $P(x)$ es verdadera para cada x en el dominio de discurso.

De manera similar, una proposición cuantificada existencialmente generaliza la proposición compuesta

$$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n \tag{1.3.7}$$

en el sentido de que las proposiciones individuales $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se reemplazan mediante una familia arbitraria $P(x)$, donde x es un elemento del dominio de discurso, y (1.3.7) se reemplaza mediante

$$\text{para alguna } x, P(x).$$

Estas observaciones explican la forma en que el teorema 1.3.12 generaliza las leyes de De Morgan para la lógica (ejemplo 1.2.11). Recuerde que la primera ley de De Morgan para la lógica establece que las proposiciones

$$\overline{P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n} \quad \text{y} \quad \overline{P_1} \wedge \overline{P_2} \wedge \cdots \wedge \overline{P_n}$$

tienen los mismos valores de verdad. En el inciso (b) del teorema 1.3.12,

$$\overline{P_1} \wedge \overline{P_2} \wedge \cdots \wedge \overline{P_n}$$

se reemplaza por

$$\forall x, \overline{P(x)}$$

y

$$\overline{P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n}$$

se reemplaza por

$$\overline{\exists x, P(x)}.$$

EJEMPLO 1.3.14

Ciertas frases pueden tener más de una interpretación. Como ejemplo, consideremos la famosa cita de Shakespeare

Todo lo que brilla no es oro. (All that glitters is not gold.)

Una posible interpretación de esta cita es: Nada que brille es oro (es decir, un objeto de oro nunca brilla). Sin embargo, seguramente esto no es lo que quiso decir Shakespeare. La interpretación correcta es: Algo que brilla no es oro.

Si $P(x)$ es la función proposicional "x brilla" y $Q(x)$ es la función proposicional "x es oro", la primera interpretación es

$$\text{para toda } x, P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}, \tag{1.3.8}$$

y la segunda interpretación es

$$\text{para alguna } x, P(x) \wedge \overline{Q(x)}.$$

Con el resultado del ejemplo 1.2.12, se ve que los valores de verdad de

$$\text{para alguna } x, P(x) \wedge \overline{Q(x)}$$

y

$$\text{para alguna } x, \overline{P(x) \rightarrow Q(x)}$$

son los mismos. Por el teorema 1.3.12, los valores de verdad de

$$\text{para alguna } x, \overline{P(x) \rightarrow Q(x)}$$

y

$$\overline{\text{para toda } x, P(x) \rightarrow Q(x)}$$

son los mismos. Así, una forma equivalente de representar la segunda interpretación es

$$\overline{\text{para toda } x, P(x) \rightarrow Q(x)}. \tag{1.3.9}$$

Al comparar (1.3.8) y (1.3.9), se ve que la ambigüedad surge del hecho de que la negación se aplique a $Q(x)$ (la primera interpretación) o bien a toda la afirmación

$$\text{para toda } x, P(x) \rightarrow Q(x)$$

(la segunda interpretación). La interpretación correcta de la afirmación

Todo lo que brilla no es oro

surge de negar toda la afirmación.

En las afirmaciones positivas, "cualquier", "todo" y "cada uno" tienen el mismo significado. En las afirmaciones negativas, la situación cambia:

No cualquier C_1 es C_2
No toda C_1 es C_2
No cada C_1 es C_2

se considera que estas afirmaciones tienen el mismo significado que

Alguna C_1 no es C_2

mientras que

Ninguna C_1 es C_2

significa que

No hay C_1 que sea C_2.

Véanse otros ejemplos en los ejercicios 47 y 48. □

Nuestro siguiente ejemplo muestra la forma de combinar cuantificadores universales y existenciales dentro de una única afirmación, y también para cuantificar más de una variable.

EJEMPLO 1.3.15

Suponga que el dominio de discurso es el conjunto de números reales. Considere la afirmación

para cada x, para alguna y, $x + y = 0$.

El significado de esta afirmación es que para cualquier x, existe al menos una y, que puede depender de la elección de x, tal que $x + y = 0$. Podemos mostrar que la afirmación

para cada x, para alguna y, $x + y = 0$

es verdadera. Para cualquier x, podemos encontrar al menos una y, a saber, $y = -x$, tal que $x + y = 0$ es verdadera. □

Supongamos que modificamos la afirmación del ejemplo 1.3.15 de la manera siguiente:

para alguna y, para cada x, $x + y = 0$.

Si esta afirmación fuese cierta, entonces es posible elegir algún valor de y tal que la afirmación

para cada x, $x + y = 0$

sea verdadera. Sin embargo, podemos demostrar que esta última afirmación no es verdadera con un contraejemplo. Es decir, podemos considerar $x = 1 - y$. Entonces obtenemos la afirmación falsa

$$1 - y + y = 0.$$

Por tanto, la afirmación

para alguna y, para cada x, $x + y = 0$

es falsa.

EJEMPLO 1.3.16

Sea $P(x, y)$ la afirmación

si $x^2 < y^2$, entonces $x < y$.

El dominio de discurso es el conjunto de números reales.

La afirmación

para cada x, para cada y, $P(x, y)$

es falsa. Un contraejemplo es $x = 1$, $y = -2$. En este caso, obtenemos la proposición falsa

si $1^2 < (-2)^2$, entonces $1 < -2$.

La afirmación

para cada x, para alguna y, $P(x, y)$

es verdadera. Mostraremos que para cada x, la proposición

para alguna y, si $x^2 < y^2$, entonces $x < y$

es verdadera exhibiendo un valor de y para el cual

si $x^2 < y^2$, entonces $x < y$

sea verdadera. De hecho, si $y = 0$, obtenemos la proposición verdadera

si $x^2 < 0$, entonces $x < 0$.

(La proposición condicional es verdadera, pues la hipótesis $x^2 < 0$ es falsa.)

La afirmación

para cada y, para alguna x, $P(x, y)$

es verdadera. Mostraremos que para cada y, la proposición

para alguna x, si $x^2 < y^2$, entonces $x < y$

es verdadera exhibiendo un valor de x para el cual

si $x^2 < y^2$, entonces $x < y$

sea verdadera. De hecho, si $x = |y| + 1$, obtenemos la proposición verdadera

si $(|y| + 1)^2 < y^2$, entonces $|y| + 1 < y$.

(La proposición condicional es verdadera, pues la hipótesis es falsa.) □

Resumimos estas reglas para demostrar o refutar las afirmaciones cuantificadas en forma universal o existencial:

- Para demostrar que la afirmación cuantificada universalmente

  para cada x, $P(x)$

  es verdadera, hay que mostrar que para *cada* x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es verdadera. El hecho de mostrar que $P(x)$ es verdadera para un valor *particular x no* demuestra que

  para cada x, $P(x)$

  sea verdadera.
- Para demostrar que la afirmación cuantificada existencialmente

  para alguna x, $P(x)$

  es verdadera, hay que determinar *un* valor x en el dominio de discurso para el cual $P(x)$ sea verdadera. Basta *un* valor.
- Para demostrar que la afirmación cuantificada universalmente

  para cada x, $P(x)$

  es falsa, hay que determinar *un* valor de x (un contraejemplo) en el dominio de discurso para el cual $P(x)$ sea falsa.
- Para demostrar que la afirmación cuantificada existencialmente

  para alguna x, $P(x)$

  es falsa, hay que mostrar que para *cada* x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es falsa. El hecho de mostrar que $P(x)$ es falsa para un valor *particular x no* demuestra que

  para cada x, $P(x)$

  sea falsa.

Ejercicios

En los ejercicios 1-6, indique si la afirmación es una función proposicional. Para cada afirmación que sea una función proposicional, indique el dominio de discurso.

1. $(2n + 1)^2$ es un entero impar.

2. Elija un entero entre 1 y 10.

3. Sea x un número real.

4. La película ganó el Premio de la Academia como la mejor de 1955.

5. $1 + 3 = 4$.

6. Existe x tal que $x < y$ (x, y números reales).

Sea $P(n)$ la función proposicional "n divide a 77". Escriba cada proposición de los ejercicios 7-11 con palabras e indique si es verdadera o falsa. El dominio de discurso es el conjunto de enteros positivos.

7. $P(11)$ 8. $P(1)$ 9. $P(3)$ **10.** Para cada n, $P(n)$.

11. Para alguna n, $P(n)$.

Sea $T(x, y)$ la función proposicional "x es más alto que y". El dominio de discurso consta de tres estudiantes: Garth, quien mide 5 pies y 11 pulgadas; Erin, quien mide 5 pies y 6 pulgadas; y Marty, quien mide 6 pies. Escriba cada proposición en los ejercicios 12-15 con palabras e indique si es verdadera o falsa.

12. $\forall x \forall y T(x, y)$ 13. $\forall x \exists y T(x, y)$

14. $\exists x \forall y T(x, y)$ **15.** $\exists x \exists y T(x, y)$

16. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 12-15 con palabras y en forma simbólica.

Sea $L(x, y)$ la función proposicional "x ama a y". El dominio de discurso es el conjunto de todas las personas vivas. Escriba cada proposición en los ejercicios 17-20 en forma simbólica. ¿Cuáles cree que sean verdaderas?

17. Alguien ama a todos.

18. Todos aman a todos.

19. Alguien ama a alguien.

20. Todos aman a alguien.

21. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 17-20 con palabras y en forma simbólica.

Determine el valor de verdad de cada afirmación en los ejercicios 22-45. El dominio de discurso es el conjunto de números reales. Justifique sus respuestas.

22. Para cada x, $x^2 > x$.

23. Para alguna x, $x^2 > x$.

24. Para cada x, si $x > 1$, entonces $x^2 > x$.

25. Para alguna x, si $x > 1$, entonces $x^2 > x$.

26. Para cada x, si $x > 1$, entonces $x/(x^2 + 1) < \frac{1}{3}$.

27. Para alguna x, si $x > 1$, entonces $x/(x^2 + 1) < \frac{1}{3}$.

28. Para cada x, para cada y, $x^2 < y + 1$.

29. Para cada x, para alguna y, $x^2 < y + 1$.

30. Para alguna x, para cada y, $x^2 < y + 1$.

31. Para alguna x, para alguna y, $x^2 < y + 1$.

32. Para alguna y, para cada x, $x^2 < y + 1$.

33. Para cada y, para alguna x, $x^2 < y + 1$.

34. Para cada x, para cada y, $x^2 + y^2 = 9$.

35. Para cada x, para alguna y, $x^2 + y^2 = 9$.

36. Para alguna x, para cada y, $x^2 + y^2 = 9$.

37. Para alguna x, para alguna y, $x^2 + y^2 = 9$.

38. Para cada x, para cada y, $x^2 + y^2 \geq 0$.

39. Para cada x, para alguna y, $x^2 + y^2 \geq 0$.

40. Para alguna x, para cada y, $x^2 + y^2 \geq 0$.

41. Para alguna x, para alguna y, $x^2 + y^2 \geq 0$.

42. Para cada x, para cada y, si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$.

43. Para cada x, para alguna y, si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$.

44. Para alguna x, para cada y, si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$.

45. Para alguna x, para alguna y, si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$.

46. Escriba la negación de cada proposición en los ejercicios 22-45.

47. La siguiente proposición apareció en la columna *Querida Abby*: Todos los hombres no engañan a sus esposas. ¿Cuál es el significado exacto de esta afirmación? ¿Piensa que la proposición es verdadera o falsa?

48. El economista Robert J. Samuelson fue citado diciendo "Cada problema ambiental no es una tragedia". ¿Cuál es el significado exacto de esta afirmación? Aclare la afirmación reformulándola.

49. (a) Utilice una tabla de verdad para demostrar que si p y q son proposiciones, alguna de las afirmaciones $p \to q$ o $q \to p$ es verdadera.

(b) Sea $P(x)$ la función proposicional "x es un número racional" y sea $Q(x)$ la función proposicional "x es un número positivo". El dominio de discurso es el conjunto de todos los números reales. Comente el siguiente argumento, que supuestamente demuestra que todos los números racionales son positivos o que todos los números reales positivos son racionales.

Por el inciso (a),

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \vee (Q(x) \to P(x))$$

es verdadera. Con palabras: Para toda x, si x es racional, entonces x es positiva, o si x es positiva, entonces x es racional. Por tanto, todos los números racionales son positivos o todos los números reales positivos son racionales.

50. Demuestre el inciso (b) del teorema 1.3.12.

1.4 DEMOSTRACIONES

Un **sistema matemático** consta de **axiomas, definiciones** y **términos no definidos**. Se suponen verdaderos los axiomas. Las definiciones se utilizan para crear conceptos nuevos en términos de los existentes. Algunos términos no se definen en forma explícita, sino que se definen en forma implícita mediante los axiomas. Dentro de un sistema matemático es posible deducir teoremas. Un **teorema** es una proposición cuya verdad se ha demostrado. Algunos tipos especiales de teoremas se conocen como lemas y corolarios. Un **lema** es un teorema que por lo general no es interesante en sí mismo sino que es útil para demostrar otro teorema. Un **corolario** es un teorema que se sigue rápidamente de otro teorema.

Un argumento que establece la verdad de un teorema es una **demostración**. La lógica es una herramienta para el análisis de las demostraciones. En esta sección describiremos algunos métodos generales de demostración y utilizaremos la lógica para analizar los argumentos válidos y los no válidos. En las secciones 1.5 y 1.6 analizaremos la resolución y la inducción matemática, que son técnicas especiales de demostración. Primero daremos algunos ejemplos de sistemas matemáticos.

EJEMPLO 1.4.1

La geometría euclidiana proporciona un ejemplo de sistema matemático. Entre los axiomas están

- Dados dos puntos distintos, existe exactamente una recta que los contiene.
- Dada una recta y un punto que no está sobre la recta, existe exactamente una recta paralela a la primera recta y que pasa por el punto.

Los términos *punto* y *recta* son términos no definidos que quedan definidos de manera implícita mediante los axiomas que describen sus propiedades.

Entre las definiciones están

- Dos triángulos son *congruentes* si sus vértices pueden ponerse en correspondencia de modo que los lados correspondientes y los ángulos correspondientes sean iguales.
- Dos ángulos son *suplementarios* si la suma de sus medidas es $180°$. □

EJEMPLO 1.4.2

Los números reales proporcionan otro ejemplo de sistema matemático. Entre los axiomas están

- Para todos los números reales x y y, $xy = yx$.
- Existe un subconjunto **P** de números reales que satisface

(a) Si x y y están en **P**, entonces $x + y$ y xy están en **P**.
(b) Si x es un número real, entonces exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$$x \text{ está en } \mathbf{P} \qquad x = 0 \qquad -x \text{ está en } \mathbf{P}.$$

La multiplicación se define de manera implícita mediante el primer axioma y otros axiomas que describen las propiedades que se supone tiene la multiplicación.

Entre las definiciones están

- Los elementos en **P** (del axioma anterior) son los *números reales positivos*.
- El *valor absoluto* $|x|$ de un número real x es x si x es positivo o 0 y en caso contrario es $-x$. □

Daremos varios ejemplos de teoremas, corolarios y lemas de la geometría euclidiana y del sistema de números reales.

EJEMPLO 1.4.3

Algunos ejemplos de teoremas de geometría euclidiana son

- Si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los ángulos opuestos a ellos son iguales.
- Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan mutuamente, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. □

EJEMPLO 1.4.4

Un ejemplo de corolario en geometría euclidiana es

- Si un triángulo es equilátero, entonces es equiangular.

Este corolario se sigue de manera inmediata a partir del primer teorema del ejemplo 1.4.3. □

EJEMPLO 1.4.5

Algunos ejemplos de teoremas relativos a los números reales son

- $x \cdot 0 = 0$ para cada número real x.
- Para todos los números reales x, y y z, si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$. □

EJEMPLO 1.4.6

Un ejemplo de lema relativo a los números reales es

- Si n es un entero positivo, entonces $n - 1$ es un entero positivo o $n - 1 = 0$.

Seguramente este resultado no es interesante en sí mismo, pero puede utilizarse para demostrar otros resultados. □

Con frecuencia, los teoremas tienen la forma

Para toda $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Esta afirmación cuantificada universalmente es verdadera siempre que la proposición condicional

$$\text{si } p(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ entonces } q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.4.1}$$

sea verdadera para toda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el dominio de discurso. Para demostrar (1.4.1), suponemos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son elementos arbitrarios del dominio de discurso. Si $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es falsa, por la definición 1.2.4, (1.4.1) es verdadera; así, sólo es necesario considerar el caso en que $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sea verdadera. Una **demostración directa** supone que $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es verdadera y entonces, utilizando $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y otros axiomas, definiciones o teoremas demostrados con anterioridad, muestra directamente que $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es verdadera.

EJEMPLO 1.4.7

Daremos una demostración directa de la siguiente afirmación. Para todos los números reales d, d_1, d_2 y x,

Si $d = \min\{d_1, d_2\}$ y $x \le d$, entonces $x \le d_1$ y $x \le d_2$.

Demostración. Suponemos que d, d_1, d_2 y x son números reales arbitrarios. El análisis anterior muestra que basta suponer que

$$d = \min\{d_1, d_2\} \text{ y } x \le d$$

es verdadera y demostrar entonces que

$$x \le d_1 \quad \text{y} \quad x \le d_2$$

es verdadera.

Por la definición del mínimo, se tiene que $d \le d_1$ y $d \le d_2$. De $x \le d$ y $d \le d_1$, podemos deducir $x \le d_1$ de un teorema anterior (el segundo teorema del ejemplo 1.4.5). De $x \le d$ y $d \le d_2$, puede deducirse $x \le d_2$ por el mismo teorema anterior. Por tanto, $x \le d_1$ y $x \le d_2$. ■ □

Una segunda técnica de demostración es la **demostración por contradicción**. Una demostración por contradicción establece (1.4.1) suponiendo que la hipótesis p es verdadera y que la conclusión q es falsa, para entonces, utilizando p y $\bar{q}$, así como otros axiomas, definiciones y teoremas demostrados con anterioridad, deducir una **contradicción**. Una contradicción es una proposición de la forma $r \wedge \bar{r}$ (r puede ser cualquier proposición). Una demostración por contradicción se llama a veces **demostración indirecta**, pues para establecer (1.4.1) mediante una demostración por contradicción, se sigue un camino indirecto: se deduce $r \wedge \bar{r}$ y se concluye que (1.4.1) es verdadera.

La única diferencia entre las suposiciones en una demostración directa y una demostración por contradicción es la conclusión negada. En una demostración directa, no se supone la conclusión negada, mientras que en una demostración por contradicción se supone la conclusión negada.

La demostración por contradicción puede justificarse observando que las proposiciones

$$p \to q \quad \text{y} \quad p \wedge \bar{q} \to r \wedge \bar{r}$$

son equivalentes. La equivalencia es inmediata observando la tabla de verdad:

p	q	r	$p \to q$	$p \wedge \bar{q}$	$r \wedge \bar{r}$	$p \wedge \bar{q} \to r \wedge \bar{r}$
V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

EJEMPLO 1.4.8

Daremos una demostración por contradicción de la siguiente afirmación:

Para todos los números reales x y y, si $x + y \ge 2$, entonces $x \ge 1$ o $y \ge 1$.

Demostración. Supongamos que la conclusión es falsa. Entonces $x < 1$ y $y < 1$. (Recuerde que al negar un "o" se obtiene un "y"; véase el ejemplo 1.2.11, las leyes de De Morgan para la lógica.) Un teorema anterior permite sumar estas desigualdades para obtener

$$x + y < 1 + 1 = 2.$$

En este momento, hemos obtenido la contradicción $p \wedge \bar{p}$, donde

$$p\colon x + y \ge 2.$$

De esta manera, concluimos que la afirmación es verdadera. ■ □

Suponga que damos una demostración por contradicción de (1.4.1) en la que, como en el ejemplo 1.4.8, deducimos $\bar{p}$. Entonces habremos demostrado

$$\bar{q} \to \bar{p}. \tag{1.4.2}$$

Este caso particular de demostración por contradicción se llama **demostración por contrapositiva**.

Al construir una demostración, debemos asegurarnos de que los argumentos utilizados sean **válidos**. En el resto de esta sección precisaremos el concepto de argumento válido y exploraremos este concepto con cierto detalle.

Consideremos la siguiente serie de proposiciones.

El problema está en el módulo 17 o en el módulo 81.
El problema es un error numérico.
El módulo 81 no tiene un error numérico. (1.4.3)

Suponiendo que estas afirmaciones son verdaderas, es razonable concluir:

El problema está en el módulo 17. (1.4.4)

Este proceso de extracción de una conclusión a partir de una serie de proposiciones se llama **razonamiento deductivo**. Las proposiciones dadas, como (1.4.3), son las **hipótesis** o **premisas** y la proposición que se sigue de las hipótesis, como (1.4.4), es la **conclusión**. Un **argumento (deductivo)** consta de ciertas hipótesis con una conclusión. Muchas demostraciones en matemáticas y computación utilizan argumentos deductivos.

Un argumento tiene la forma

$$\text{Si } p_1 \text{ y } p_2 \text{ y} \cdots \text{y } p_n, \text{ entonces } q. \qquad (1.4.5)$$

El argumento (1.4.5) es válido si las conclusiones se siguen de la hipótesis; es decir, si p_1 y p_2 y $\cdots$ y p_n son verdaderas, entonces q también debe ser verdadera. Este análisis motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.4.9

Un *argumento* es una serie de proposiciones que se escriben

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore q \end{array}$$

o

$$p_1, p_2, \ldots, p_n / \therefore q.$$

Las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son las *hipótesis* (o *premisas*) y la proposición q es la *conclusión*. El argumento es *válido* si siempre que p_1 y p_2 y $\cdots$ y p_n sean todas verdaderas, entonces q deberá también ser verdadera; en caso contrario, el argumento *no* es *válido* (es una *falacia*).

En un argumento válido, a veces decimos que la conclusión se sigue de las hipótesis. Observe que no estamos diciendo que la conclusión sea verdadera; sólo estamos diciendo que si se garantizan las hipótesis, entonces se tiene garantizada la conclusión. Un argumento es válido debido a su forma, no a su contenido.

EJEMPLO 1.4.10

Determine si el argumento

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$$

es válido.

[Primera solución.] Construimos una tabla de verdad para todas las proposiciones que aparecen en el argumento:

p	q	$p \to q$	p	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Observamos que siempre que las hipótesis $p \to q$ y p son verdaderas, la conclusión q también lo es; por tanto, el argumento es válido.

[Segunda solución.] Podemos dejar de lado la tabla de verdad, verificando directamente que siempre que las hipótesis sean verdaderas, la conclusión también es verdadera.

Supongamos que $p \to q$ y p son verdaderas. Entonces q debe ser verdadera, ya que en caso contrario $p \to q$ sería falsa. Por tanto, el argumento es válido. □

EJEMPLO 1.4.11

Represente el argumento

Si $2 = 3$, entonces me comí mi sombrero.
<u>Me comí mi sombrero.</u>
$\therefore 2 = 3$

en forma simbólica y determinar si el argumento es válido.

Si hacemos

$$p: 2 = 3, \quad q: \text{Me comí mi sombrero.}$$

el argumento puede escribirse como

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q} \\ \therefore p \end{array}$$

Si el argumento es válido, entonces siempre que $p \to q$ y q sean ambas verdaderas, p debería ser verdadera. Suponga que $p \to q$ y q son verdaderas. Esto es posible si p es falsa y q es verdadera. En este caso, p no es verdadera; así, el argumento no es válido. □

También podemos determinar la validez del argumento en el ejemplo 1.4.11 examinando la tabla de verdad del ejemplo 1.4.10. En el tercer renglón de la tabla, las hipótesis son verdaderas y la conclusión falsa; así, el argumento no es válido.

Ejercicios

1. Proporcione un ejemplo (diferente de los dados en el ejemplo 1.4.1) de un axioma de la geometría euclidiana.
2. Proporcione un ejemplo (diferente de los dados en el ejemplo 1.4.2) de un axioma del sistema de números reales.
3. Proporcione un ejemplo (diferente de los dados en el ejemplo 1.4.1) de una definición de la geometría euclidiana.
4. Proporcione un ejemplo (diferente de los dados en el ejemplo 1.4.2) de una definición del sistema de números reales.
5. Proporcione un ejemplo (diferente de los dados en el ejemplo 1.4.3) de un teorema de la geometría euclidiana.
6. Proporcione un ejemplo (diferente de los dados en el ejemplo 1.4.5) de un teorema del sistema de números reales.
7. Justifique cada paso de la siguiente demostración indirecta, la cual muestra que si x es un número real, entonces $x \cdot 0 = 0$. Suponga que los siguientes son teoremas previos: Si a, b y c son números reales, entonces $b + 0 = b$ y $a(b + c) = ab + ac$. Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.

   Demostración. $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 \quad x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$; por tanto, $x \cdot 0 = 0$. ■

8. Justifique cada paso de la siguiente demostración por contradicción, la cual muestra que si $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$. Suponga que si a, b y c son números reales tales que $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.

   Demostración. Suponga que $xy = 0$ y $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Como $xy = 0 = x \cdot 0$ y $x \neq 0$; tenemos que $y = 0$, lo cual es una contradicción. ■

9. Muestre, mediante una demostración por contradicción, que si se colocan 100 bolas en nueve cajas, alguna caja contiene 12 o más bolas.

Formule los argumentos de los ejercicios 10-14 en forma simbólica y determine si cada uno es válido. Sean

p: Estudio mucho. q: Obtengo un 10. r: Me vuelvo rico.

10. Si estudio mucho, entonces obtengo un 10.
    Estudio mucho.
    ∴ Obtengo un 10.
11. Si estudio mucho, entonces obtengo un 10.
    Si no me vuelvo rico, entonces no obtengo un 10.
    ∴ Me vuelvo rico.
12. Estudio mucho si y sólo si me vuelvo rico.
    Me vuelvo rico.
    ∴ Estudio mucho.
13. Si estudio mucho o me vuelvo rico, entonces obtengo un 10.
    Obtengo un 10.
    ∴ Si no estudio mucho, entonces me vuelvo rico.
14. Si estudio mucho, entonces obtengo un 10 o me vuelvo rico.
    No obtengo un 10 y no me vuelvo rico.
    ∴ No estudio mucho.

En los ejercicios 15-19, escriba el argumento dado con palabras y determine si cada argumento es válido. Sean

p: 64K es mejor que no tener memoria alguna.
q: Compraremos más memoria.
r: Compraremos una nueva computadora.

15. $\begin{array}{l} p \to r \\ p \to q \\ \hline \therefore p \to (r \wedge q) \end{array}$

16. $\begin{array}{l} p \to (r \vee q) \\ r \to \bar{q} \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$

17. $\begin{array}{l} p \to r \\ r \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$

18. $\begin{array}{l} \bar{r} \to \bar{p} \\ r \\ \hline \therefore p \end{array}$

19. $\begin{array}{l} p \to r \\ r \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$

Determine si cada argumento en los ejercicios 20-24 es válido.

20. $\begin{array}{l} p \to q \\ \bar{p} \\ \hline \therefore q \end{array}$

21. $\begin{array}{l} p \to q \\ \bar{q} \\ \hline \therefore \bar{p} \end{array}$

22. $\begin{array}{l} p \wedge \bar{p} \\ \hline \therefore q \end{array}$

23. $\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ q \to (p \to r) \\ \hline \therefore (p \vee q) \to r \end{array}$

24. $\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$

25. Muestre que si

$$p_1, p_2 / \therefore p \quad \text{y} \quad p, p_3, \ldots, p_n / \therefore c$$

son argumentos válidos, el argumento

$$p_1, p_2, \ldots, p_n / \therefore c$$

también es válido.

26. Comente acerca del siguiente argumento:

    El espacio de almacenamiento en disco flexible es mejor que nada.
    Nada es mejor que una unidad de disco duro.
    ∴ El espacio de almacenamiento en disco flexible es mejor que una unidad de disco duro.

† 1.5 DEMOSTRACIONES POR RESOLUCIÓN

En esta sección escribiremos $a \wedge b$ como ab.

La **resolución** es una técnica de demostración propuesta por J. A. Robinson en 1965 (véase [Robinson]) que depende de una única regla:

$$\text{Si } p \vee q \text{ y } \bar{p} \vee r \text{ son verdaderas, entonces } q \vee r \text{ es verdadera.} \qquad (1.5.1)$$

Podemos verificar (1.5.1) mediante la tabla de verdad (véase el ejercicio 1). Como la resolución depende sólo de esta sencilla regla, es la base de muchos programas de computadora que realizan razonamientos y demostraciones de teoremas.

En una demostración por resolución, las hipótesis y la conclusión se escriben como **cláusulas**. Una cláusula consta de términos separados por *o*, donde cada término es una variable o la negación de una variable.

EJEMPLO 1.5.1

La expresión

$$a \vee b \vee \bar{c} \vee d$$

es una cláusula, pues los términos a, b, $\bar{c}$ y d están separadas por *o*, y cada término es una variable o la negación de una variable. □

EJEMPLO 1.5.2

La expresión

$$xy \vee w \vee \bar{z}$$

no es una cláusula, pues aunque los términos están separados por *o*, el término xy consta de dos variables, y no de una sola. □

EJEMPLO 1.5.3

La expresión

$$p \rightarrow q$$

no es una cláusula, pues los términos están separados por $\rightarrow$. Sin embargo, cada término es una variable. □

Una demostración directa por resolución se realiza aplicando varias veces (1.5.1) a pares de afirmaciones, para deducir nuevas afirmaciones, hasta que se obtenga la conclusión. Al aplicar (1.5.1), p debe ser una sola variable, pero q y r pueden ser expresiones. Observe que al aplicar (1.5.1) a las cláusulas, el resultado $q \vee r$ es una cláusula. (Como q y r constan de términos separados por *o*, donde cada término es una variable o la negación de una variable, $q \vee r$ también consta de términos separados por *o*, donde cada término es una variable o la negación de una variable.)

† Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

EJEMPLO 1.5.4

Demostraremos lo siguiente mediante resolución

$$\begin{array}{ll} 1. & a \vee b \\ 2. & \bar{a} \vee c \\ 3. & \underline{\bar{c} \vee d} \\ & \therefore b \vee d \end{array}$$

Al aplicar (1.5.1) a las expresiones 1 y 2, deducimos

$$4. \quad b \vee c$$

Al aplicar (1.5.1) a las expresiones 3 y 4, deducimos

$$5. \quad b \vee d$$

la conclusión deseada. Dadas las hipótesis 1, 2 y 3, hemos demostrado la conclusión $b \vee d$. □

Algunos casos particulares de (1.5.1) son

$$\begin{array}{l} \text{Si } p \vee q \text{ y } \bar{p} \text{ son verdaderas, entonces } q \text{ es verdadera.} \\ \text{Si } p \text{ y } \bar{p} \vee r \text{ son verdaderas, entonces } r \text{ es verdadera.} \end{array} \qquad (1.5.2)$$

EJEMPLO 1.5.5

Demostraremos lo siguiente mediante resolución

$$\begin{array}{ll} 1. & a \\ 2. & \bar{a} \vee c \\ 3. & \underline{\bar{c} \vee d} \\ & \therefore d \end{array}$$

Al aplicar (1.5.2) a las expresiones 1 y 2, deducimos

$$4. \quad c$$

Al aplicar (1.5.2) a las expresiones 3 y 4, deducimos

$$5. \quad d$$

la conclusión deseada. Dadas las hipótesis 1, 2 y 3, hemos demostrado la conclusión d. □

Si una hipótesis no es una cláusula, debe reemplazarse por una expresión equivalente que sea una cláusula o la conjunción de varias cláusulas. Por ejemplo, supongamos que una de las hipótesis es $\overline{a \vee b}$. Como la barra está sobre más de una variable, utilizamos la primera ley de De Morgan (véase el ejemplo 1.2.11)

$$\overline{a \vee b} \equiv \bar{a}\,\bar{b}, \qquad \overline{ab} \equiv \bar{a} \vee \bar{b} \qquad (1.5.3)$$

para obtener una expresión equivalente con una barra sobre las variables individuales

$$\overline{a \vee b} \equiv \bar{a}\,\bar{b}.$$

Luego reemplazamos la hipótesis original $\overline{a \vee b}$ por las dos hipótesis $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Este reemplazo se justifica recordando que las hipótesis individuales h_1 y h_2 son equivalentes a $h_1 h_2$ (véase la definición 1.4.9 y el análisis anterior a ésta). Al utilizar varias veces las leyes de De Morgan se logra que cada barra se aplique sólo a una variable.

Una expresión que consta de términos separados por *o*, donde cada término consta de la *conjunción* de varias variables puede reemplazarse mediante una expresión equivalente que consta de las conjunciones de cláusulas, utilizando la equivalencia

$$a \vee bc \equiv (a \vee b)(a \vee c). \qquad (1.5.4)$$

En este caso, podemos reemplazar la hipótesis $a \vee bc$ por las dos hipótesis $a \vee b$ y $a \vee c$. Al utilizar primero las leyes de De Morgan (1.5.3) y luego (1.5.4), podemos obtener hipótesis equivalentes, de modo que cada una de ellas sea una cláusula.

EJEMPLO 1.5.6

Demostraremos lo siguiente mediante resolución

$$\begin{array}{ll} 1. & a \vee \bar{b}c \\ 2. & \underline{\overline{a \vee d}} \\ & \therefore \bar{b} \end{array}$$

Utilizamos (1.5.4) para reemplazar la hipótesis 1 con las dos hipótesis

$$a \vee \bar{b}$$

$$a \vee c$$

Utilizamos la primera ley de De Morgan (1.5.3) para reemplazar la hipótesis 2 con las dos hipótesis

$$\bar{a}$$

$$\bar{d}$$

El argumento se convierte en

$$\begin{array}{ll} 1. & a \vee \bar{b} \\ 2. & a \vee c \\ 3. & \bar{a} \\ 4. & \underline{\bar{d}} \\ & \therefore \bar{b} \end{array}$$

Al aplicar (1.5.1) a las expresiones 1 y 3, de inmediato obtenemos la conclusión

$$\bar{b}$$

□

En los sistemas de razonamiento automatizado, la demostración por resolución se combina con la demostración por contradicción. Escribimos la conclusión negada como cláusulas y agregamos estas cláusulas a las hipótesis. Luego utilizamos varias veces (1.5.1) hasta obtener una contradicción.

EJEMPLO 1.5.7

Volveremos a resolver el ejemplo 1.5.4 combinando la resolución con la demostración por contradicción.

Primero negamos la conclusión y utilizamos la primera ley de De Morgan (1.5.3) para obtener

$$\overline{b \vee d} \equiv \bar{b}\,\bar{d}.$$

Luego agregamos las cláusulas $\bar{b}$ y $\bar{d}$ a las hipótesis para obtener

$$\begin{array}{ll} 1. & a \vee b \\ 2. & \bar{a} \vee c \\ 3. & \bar{c} \vee d \\ 4. & \bar{b} \\ 5. & \bar{d} \end{array}$$

Al aplicar (1.5.1) a las expresiones 1 y 2, obtenemos

$$6. \quad b \vee c$$

Al aplicar (1.5.1) a las expresiones 3 y 6, obtenemos

$$7. \quad b \vee d$$

Al aplicar (1.5.1) a las expresiones 4 y 7, obtenemos

$$8. \quad d$$

Ahora, podemos combinar 5 y 8 para obtener una contradicción, con lo que concluye la demostración. □

Puede mostrarse que la resolución es *correcta* y *completa con respecto de la refutación*. El hecho de que la resolución sea correcta significa que sólo puede obtenerse una contradicción a partir de un conjunto de cláusulas inconsistentes (es decir, un conjunto de cláusulas tales que no todas pueden ser verdaderas). El hecho de que la resolución sea completa con respecto de la refutación significa que si un conjunto de cláusulas es inconsistente, entonces la resolución podrá obtener una contradicción. Así, si se obtiene una conclusión a partir de un conjunto de hipótesis, la resolución podrá obtener una contradicción a partir de las hipótesis y la negación de la conclusión. Por desgracia, la resolución no nos indica cuáles son las cláusulas que debemos combinar para deducir la contradicción. Un reto fundamental al automatizar un sistema de razonamiento es ayudar a guiar la búsqueda de las cláusulas que deben combinarse. La bibliografía acerca de la resolución y el razonamiento automatizado es [Gallier; Genesereth; y Wos].

Ejercicios

1. Escriba una tabla de verdad que demuestre (1.5.1).

Utilice la resolución para deducir cada conclusión en los ejercicios 2-6. *Sugerencia*: En los ejercicios 5 y 6, reemplace $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ con expresiones lógicamente equivalentes que utilicen *o* e *y*.

2. $\bar{p} \vee q \vee r$
$\bar{q}$
$\bar{r}$
$\therefore \bar{p}$

3. $\bar{p} \vee r$
$\bar{r} \vee q$
p
$\therefore q$

4. $\bar{p} \vee t$
$\bar{q} \vee s$
$\bar{r} \vee st$
$p \vee q \vee r \vee u$
$\therefore s \vee t \vee u$

5. $p \rightarrow q$
$p \vee q$
$\therefore q$

6. $p \leftrightarrow r$
r
$\therefore p$

7. Utilice la resolución y la demostración por contradicción para resolver de nuevo los ejercicios 2-6.

8. Utilice la resolución y la demostración por contradicción para resolver de nuevo el ejemplo 1.5.6.

1.6 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Supongamos que una serie de cubos numerados 1, 2, . . . están sobre una mesa (infinitamente) larga (véase la figura 1.6.1) y que algunos cubos están marcados con una "X". (Todos los cubos visibles en la figura 1.6.1 están marcados.) Supongamos que

El primer cubo está marcado. (1.6.1)

Si todos los cubos anteriores al cubo $(n + 1)$ están marcados, entonces el cubo $(n + 1)$ también lo está. (1.6.2)

Mostraremos que (1.6.1) y (1.6.2) implican que cada cubo está marcado, examinando los cubos uno por uno.

La afirmación (1.6.1) establece de manera explícita que el cubo 1 está marcado. Consideremos el cubo 2. Todos los cubos anteriores al cubo 2, a saber, el cubo 1, están marcados; así, de acuerdo con (1.6.2), el cubo 2 también está marcado. Consideremos el cubo 3. Todos los cubos anteriores al cubo 3, a saber, los cubos 1 y 2, están marcados; así, de acuerdo con (1.6.2), el cubo 3 también está marcado. De esta forma, podemos mostrar que cada cubo está marcado. Por ejemplo, supongamos que hemos verificado que los cubos 1 a 5 están marcados, como muestra la figura 1.6.1. Para mostrar que el cubo 6, que no aparece en la figura 1.6.1, está marcado, observamos que todos los cubos anteriores al cubo 6 están marcados, de modo que por (1.6.2), el cubo 6 también está marcado.

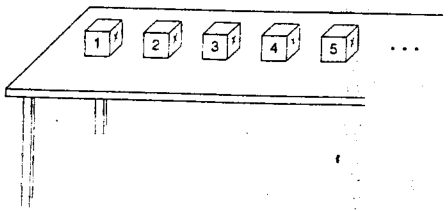


FIGURA 1.6.1 Cubos numerados sobre una mesa.

El ejemplo anterior ilustra el **principio de inducción matemática**. Para mostrar cómo se puede utilizar la inducción matemática de manera más profunda, sea S_n la suma de los primeros n enteros positivos

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n. \qquad (1.6.3)$$

Supongamos que alguien afirma que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots \qquad (1.6.4)$$

En realidad, se establece una serie de afirmaciones, a saber,

$$S_1 = \frac{1(2)}{2} = 1$$
$$S_2 = \frac{2(3)}{2} = 3$$
$$S_3 = \frac{3(4)}{2} = 6$$
$$\vdots$$

Supongamos que cada ecuación verdadera tiene una "×" junto a ella (véase la figura 1.6.2). Como la primera ecuación es verdadera, está marcada. Ahora, supongamos que podemos mostrar que si todas las ecuaciones anteriores a una ecuación particular, digamos, la ecuación $(n + 1)$, están marcadas, entonces la ecuación $(n + 1)$ también está marcada. Entonces, como en el ejemplo de los cubos, todas las ecuaciones están marcadas; es decir, todas las ecuaciones son verdaderas y se verifica la fórmula (1.6.4).

Debemos mostrar que si todas las ecuaciones anteriores a la ecuación $(n + 1)$ son verdaderas, entonces la ecuación $(n + 1)$ también lo es. Suponiendo que todas las ecuaciones anteriores a la ecuación $(n + 1)$ son verdaderas, entonces, en particular, la ecuación n es verdadera:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1.6.5)$$

Debemos mostrar que la ecuación $(n + 1)$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

es verdadera. De acuerdo con la definición (1.6.3),

$$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1).$$

Observamos que S_n está contenida dentro de S_{n+1}, en el sentido de que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) \\ &= S_n + (n + 1). \end{aligned} \qquad (1.6.6)$$

Debido a (1.6.5) y (1.6.6), tenemos

$$S_{n+1} = S_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$S_1 =$	$\frac{1(2)}{2}$	×
$S_2 =$	$\frac{2(3)}{2}$	×
$\vdots$		
$S_{n-1} =$	$\frac{(n-1)n}{2}$	×
$S_n =$	$\frac{n(n+1)}{2}$	×
$S_{n+1} =$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	?
$\vdots$		

FIGURA 1.6.2 Una serie de afirmaciones. Las afirmaciones verdaderas se señalan con ×.

Nuestra demostración por inducción matemática constó de dos pasos. En primer lugar, verificamos que la afirmación correspondiente a $n = 1$ era verdadera. En segundo lugar, *supusimos* que las afirmaciones $1, 2, \ldots, n$ eran verdaderas y *demostramos* que la afirmación $(n + 1)$ también lo era. Al demostrar la afirmación $(n + 1)$, podíamos utilizar las afirmaciones $1, 2, \ldots, n$; de hecho, el truco para construir una demostración por inducción matemática consiste en relacionar las afirmaciones $1, 2, \ldots, n$ con la afirmación $(n + 1)$.

A continuación enunciamos de manera formal el principio de inducción matemática.

Principio de inducción matemática
Supongamos que para cada entero positivo n tenemos una afirmación $S(n)$ que es verdadera o falsa. Supongamos que

$$S(1) \text{ es verdadera;} \tag{1.6.7}$$
$$\text{si } S(i) \text{ es verdadera, para toda } i < n+1, \text{ entonces } S(n+1) \text{ es verdadera.} \tag{1.6.8}$$

Entonces $S(n)$ es verdadera para cada entero positivo n.

La condición (1.6.7) se llama el **paso base** y la condición (1.6.8) se llama el **paso inductivo**. De aquí en adelante, "inducción" significa "inducción matemática".

En este momento ilustraremos el principio de inducción matemática mediante otro ejemplo.

EJEMPLO 1.6.1

Utilice la inducción para mostrar que

$$n! \ge 2^{n-1} \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \tag{1.6.9}$$

PASO BASE. [Condición (1.6.7)] Debemos mostrar que (1.6.9) es verdadera si $n = 1$. Esto es fácil de verificar, pues $1! = 1 \ge 1 = 2^{1-1}$.
PASO INDUCTIVO. [Condición (1.6.8)] Debemos mostrar que si $i! \ge 2^{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$(n+1)! \ge 2^n. \tag{1.6.10}$$

Supongamos que $i! \ge 2^{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces, en particular, para $i = n$, tenemos

$$n! \ge 2^{n-1}. \tag{1.6.11}$$

Podemos relacionar (1.6.10) y (1.6.11) observando que

$$(n+1)! = (n+1)(n!).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1)(n!) & \\ &\ge (n+1)2^{n-1} & \text{por } (1.6.11) \\ &\ge 2 \cdot 2^{n-1} & \text{pues } n+1 \ge 2 \\ &= 2^n. & \end{aligned}$$

Por tanto, (1.6.10) es verdadera. Hemos concluido el paso inductivo.

Como hemos verificado el paso base y el paso inductivo, el principio de inducción matemática nos dice que (1.6.9) es verdadera para cada entero positivo n. □

Para verificar el paso inductivo (1.6.8), suponemos que $S(i)$ es verdadera para toda $i < n + 1$ y luego demostramos que $S(n + 1)$ es verdadera. Esta formulación de la inducción matemática se llama la **forma fuerte de la inducción matemática**. Con frecuencia, como en el caso de los ejemplos anteriores, podemos deducir $S(n + 1)$ suponiendo solamente $S(n)$. En realidad, con frecuencia se enuncia el paso inductivo de la manera siguiente:

$$\text{Si } S(n) \text{ es verdadera, entonces } S(n+1) \text{ es verdadera.}$$

En estas dos formulaciones, el paso base no se modifica. Puede mostrarse (véase el ejercicio 45) que las dos formas de inducción matemática son lógicamente equivalentes.

Si queremos verificar que las afirmaciones

$$S(n_0), S(n_0 + 1), \ldots,$$

donde $n_0 \ne 1$, son verdaderas, debemos cambiar el paso base a

$$S(n_0) \text{ es verdadera.}$$

El paso inductivo no se modifica.

EJEMPLO 1.6.2 ***Suma geométrica***

Utilice la inducción para mostrar que si $r \ne 1$,

$$a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} \tag{1.6.12}$$

para $n = 0, 1, \ldots$.

La suma de la izquierda se llama **suma geométrica**. En una suma geométrica, la razón entre los términos consecutivos $(ar^{i+1}/ar^i = r)$ es constante.

PASO BASE. El paso base, que en este caso se obtiene haciendo $n = 0$, es

$$a = \frac{a(r^1 - 1)}{r - 1},$$

lo cual es verdadero.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que la afirmación (1.6.12) es verdadera para n. Ahora

$$\begin{aligned} a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} &= \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} + ar^{n+1} \\ &= \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} + \frac{ar^{n+1}(r-1)}{r - 1} \\ &= \frac{a(r^{n+2} - 1)}{r - 1}. \end{aligned}$$

Como hemos verificado el paso base modificado y el paso inductivo, el principio de inducción matemática nos dice que (1.6.12) es verdadera para $n = 0, 1, \ldots$. □

Como ejemplo del uso de la suma geométrica, si hacemos $a = 1$ y $r = 2$ en (1.6.12), obtenemos la fórmula

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

El lector habrá notado que para demostrar la fórmula anterior, primero hay que contar con las fórmulas correctas. Una pregunta razonable es: ¿cómo obtener estas fórmulas? Existen muchas respuestas a esta pregunta. Una técnica para deducir una fórmula es experimentar con valores pequeños e intentar descubrir un patrón. Por ejemplo, consideremos la suma $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$. La siguiente tabla proporciona los valores de esta suma para $n = 1, 2, 3, 4$.

n	$1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$
1	1
2	4
3	9
4	16

Como la segunda columna consta de cuadrados, conjeturamos que

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \qquad \text{para cada entero positivo } n.$$

La conjetura es correcta y la fórmula puede demostrarse por inducción matemática (véase el ejercicio 1).

Nuestros dos últimos ejemplos muestran que la inducción no se limita a demostrar fórmulas para sumas y verificar desigualdades.

EJEMPLO 1.6.3

Utilice inducción para mostrar que $5^n - 1$ es divisible entre 4 para $n = 1, 2, \ldots$.

PASO BASE. Si $n = 1$, $5^n - 1 = 5^1 - 1 = 4$, que es divisible entre 4.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que $5^n - 1$ es divisible entre 4. Debemos mostrar que $5^{n+1} - 1$ es divisible entre 4. Para relacionar el caso $(n + 1)$ con el caso n, escribimos

$$5^{n+1} - 1 = 5 \cdot 5^n - 1 = (5^n - 1) + 4 \cdot 5^n.$$

Por hipótesis, $5^n - 1$ es divisible entre 4, y como $4 \cdot 5^n$ es divisible entre 4, la suma

$$(5^n - 1) + 4 \cdot 5^n = 5^{n+1} - 1$$

es divisible entre 4. Como hemos verificado el paso base y el paso inductivo, el principio de inducción matemática nos dice que $5^n - 1$ es divisible entre 4 para $n = 1, 2, \ldots$. □

EJEMPLO 1.6.4 *Un problema de mosaicos*

Un *triominó recto*, que de aquí en adelante llamaremos sólo *triominó*, es un objeto formado por tres cuadrados, como muestra la figura 1.6.3. Un triominó es un tipo de poliminó. Desde que los poliminós fueron ideados por Solomon W. Golomb en 1954 (véase [Golomb, 1954]), han sido un tema predilecto de las matemáticas recreativas. Un *poliminó de orden s* consta de s cuadrados unidos por sus aristas. Un triominó es un poliminó de orden 3. El otro tipo de poliminó de orden 3 está formado por una fila de tres cuadrados. (Nadie ha determinado una fórmula sencilla para el número de poliminós de orden s.) Se han diseñado varios problemas con poliminós (véase [Martin]).

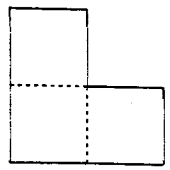


FIGURA 1.6.3
Un triominó.

Daremos la demostración inductiva de Golomb (véase [Golomb, 1954]) de que si eliminamos un cuadrado de un tablero de $n \times n$, donde n es una potencia de 2, podemos formar un mosaico sobre los demás cuadrados con triominós rectos (véase la figura 1.6.4). Formar un *mosaico* sobre una figura con triominós quiere decir cubrir de manera exacta una figura mediante triominós, sin que éstos se traslapen o rebasen la figura. Un tablero al que le falta un cuadrado se llama *tablero deficiente*.

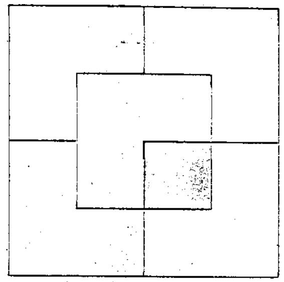


FIGURA 1.6.4
Formación de un mosaico sobre un tablero deficiente 4×4 con triominós.

Ahora, utilizaremos la inducción sobre k para demostrar que podemos formar un mosaico sobre un tablero deficiente de $2^k \times 2^k$ con triominós.

PASO BASE. Si $k = 1$, el tablero deficiente 2×2 es en sí un triominó y por tanto puede formarse un mosaico con un triominó.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que podemos formar un mosaico sobre un tablero deficiente $2^k \times 2^k$. Mostraremos que podemos formar un mosaico sobre un tablero deficiente $2^{k+1} \times 2^{k+1}$.

Consideremos un tablero deficiente $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Dividimos el tablero en cuatro tableros $2^k \times 2^k$, como muestra la figura 1.6.5. Giramos el tablero de modo que el cuadrado faltante esté en el cuadrante superior izquierdo. Según la hipótesis inductiva, podemos formar un mosaico sobre el tablero superior izquierdo $2^k \times 2^k$. Colocamos un triominó T en el centro, como muestra la figura 1.6.5, de modo que cada cuadrado de T esté en cada uno de los demás cuadrantes. Si consideramos que los cuadrados cubiertos por T son faltantes, entonces cada uno de estos cuadrantes es un tablero deficiente $2^k \times 2^k$. De nuevo, por la hipótesis de inducción, podemos formar un mosaico sobre estos tableros. Ahora hemos formado un mosaico sobre el tablero $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Por el principio de inducción matemática, se sigue que podemos formar un mosaico sobre cualquier tablero deficiente $2^k \times 2^k$ con triominós, para $k = 1, 2, \ldots$.

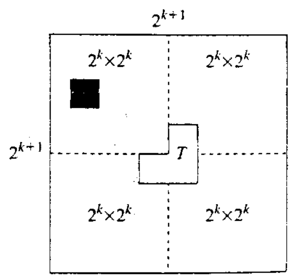


FIGURA 1.6.5
Uso de la inducción matemática para formar un mosaico sobre un tablero deficiente $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ con triominós.

Si podemos formar un mosaico sobre un tablero deficiente $n \times n$, donde n no necesariamente es una potencia de 2, entonces el número de cuadrados, $n^2 - 1$, debe ser divisible entre 3. [Chu] mostró que la recíproca es verdadera, excepto cuando n es igual a 5. Más precisamente, si $n \neq 5$, puede formarse un mosaico sobre cualquier tablero deficiente $n \times n$ con triominós si y sólo si 3 divide a $n^2 - 1$. [Es posible formar un mosaico sobre algunos tableros deficientes 5×5 y sobre otros no (véanse los ejercicios 32 y 33)]. □

Ejercicios

En los ejercicios 1-11, utilice inducción para verificar que cada ecuación es verdadera para cada entero positivo n.

1. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
2. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

3. $1(1!)+2(2!)+\cdots+n(n!)=(n+1)!-1$

4. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2=\dfrac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$

6. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

7. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

8. $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}$

9. $\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)^2-1}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)}-\dfrac{1}{2(n+2)}$

†★ **10.** $\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\cos[(x/2)(n+1)]\operatorname{sen}(nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}$ siempre que $\operatorname{sen}(x/2)\neq 0$.

☆ 11. $1\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}2x+\cdots+n\operatorname{sen}nx=$

$$\frac{\operatorname{sen}[(n+1)x]}{4\operatorname{sen}^2(x/2)}-\frac{(n+1)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}(x/2)}$$

siempre que $\operatorname{sen}(x/2)\neq 0$.

En los ejercicios 12-17, utilice inducción para verificar la desigualdad.

12. $\dfrac{1}{2n}\leq\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$, $n=1, 2, \ldots$

☆ 13. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\leq\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, $n=1, 2, \ldots$

14. $2n+1\leq 2^n$, $n=3, 4, \ldots$

★ **15.** $2^n\geq n^2$, $n=4, 5, \ldots$

☆ 16. $(a_1a_2\cdots a_{2^n})^{1/2^n}\leq\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n}$, $n=1, 2, \ldots$ y las a_i son números positivos.

17. $(1+x)^n\geq 1+nx$, para $x\geq -1$ y $n=1, 2, \ldots$

En los ejercicios 18-21, utilice inducción para demostrar la afirmación.

18. 7^n-1 es divisible entre 6, para $n=1, 2, \ldots$.

19. 11^n-6 es divisible entre 5, para $n=1, 2, \ldots$.

20. $6\cdot 7^n-2\cdot 3^n$ es divisible entre 4, para $n=1, 2, \ldots$.

★ **21.** 3^n+7^n-2 es divisible entre 8, para $n=1, 2, \ldots$.

22. Experimente con valores pequeños de n, conjeture una fórmula para la suma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)},$$

y luego utilice inducción para verificar su fórmula.

† Un ejercicio con una estrella indica un problema con dificultad superior al promedio.

23. Utilice inducción para mostrar que n líneas rectas en el plano dividen a éste en $(n^2+n+2)/2$ regiones. Suponga que no hay pares de rectas paralelas y que no hay tres rectas que tengan un punto en común.

24. Muestre que cualquier tarifa postal de 5 centavos o más puede cobrarse utilizando sólo estampillas de 2 y 5 centavos.

25. Muestre que cualquier tarifa postal de 24 centavos o más puede cobrarse utilizando sólo estampillas de 5 y 7 centavos.

Los antiguos egipcios expresaban una fracción como una suma de fracciones con numerador igual a 1. Por ejemplo, 5/6 puede expresarse como

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Decimos que una fracción p/q, donde p y q son enteros positivos, está en *forma egipcia* si

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}, \tag{1.6.13}$$

donde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son enteros positivos que satisfacen $n_1<n_2<\cdots n_k$.

26. Muestre que la representación (1.6.13) no necesariamente es única, representando $\frac{5}{6}$ de dos maneras distintas.

★ 27. Muestre que la representación (1.6.13) nunca es única.

28. Realice los siguientes pasos para demostrar, por inducción sobre p, que cada fracción p/q con $0<p/q<1$ puede expresarse en forma egipcia.

(a) Verifique el paso base ($p=1$).

(b) Suponga que $0<p/q<1$ y que todas las fracciones i/q', con $1\leq i<p$ y q' arbitrarios, pueden expresarse en forma egipcia. Elija el menor entero positivo n tal que $1/n\leq p/q$. Muestre que

$$n>1 \quad \text{y} \quad \frac{p}{q}<\frac{1}{n-1}.$$

(c) Muestre que si $p/q=1/n$, la demostración concluye.

(d) Suponga que $1/n<p/q$. Sean

$$p_1=np-q \quad \text{y} \quad q_1=nq.$$

Muestre que

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{p}{q}-\frac{1}{n}, \qquad 0<\frac{p_1}{q_1}<1 \qquad \text{y} \qquad p_1<p.$$

Concluya que

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}$$

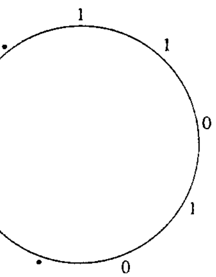
con $n_1, n_2, \ldots, n_k$ distintos.

(e) Muestre que $p_1/q_1<1/n$.

(f) Muestre que

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_k}$$

y $n, n_1, \ldots, n_k$ son distintos.



29. Utilice el método del ejercicio 28 para determinar formas egipcias para 3/8, 5/7 y 13/19.

★ **30.** Muestre que cualquier fracción p/q, donde p y q son enteros positivos, puede escribirse en forma egipcia. (No estamos suponiendo que $p/q < 1$.)

31. Dado un número igual de ceros y unos distribuidos en un círculo (véase la figura anexa), muestre que es posible comenzar en algún número y recorrer el círculo hasta llegar a la posición inicial de modo que, en cualquier punto del ciclo, uno haya visto al menos tantos ceros como unos.

32. Forme un mosaico sobre un tablero 5×5 con triominós, donde falte el cuadrado superior izquierdo.

33. Muestre un tablero deficiente 5×5 sobre el cual no pueda formarse un mosaico con triominós. Explique la razón de este hecho.

34. Muestre que cualquier tablero $(2i) \times (3j)$, donde i y j son enteros positivos, sin que falten cuadrados, puede cubrirse mediante triominós.

☆ 35. Muestre que sobre cualquier tablero deficiente 7×7 puede formarse un mosaico con triominós.

★ **36.** Muestre que sobre cualquier tablero deficiente $n \times n$ puede formarse un mosaico con triominós si n es impar, $n > 5$, y 3 divide a $n^2 - 1$.

Un *heptaminó tridimensional* es un cubo tridimensional $2 \times 2 \times 2$ al que se le ha quitado un cubo $1 \times 1 \times 1$ en una esquina. Un *cubo deficiente* es un cubo $k \times k \times k$ al que se le ha quitado un cubo $1 \times 1 \times 1$.

37. Demuestre que un cubo deficiente $2^n \times 2^n \times 2^n$ puede cubrirse mediante heptaminós tridimensionales.

38. Demuestre que si puede formarse un mosaico con heptaminós tridimensionales sobre un cubo deficiente $k \times k \times k$, entonces 7 divide a $k - 1$, $k - 2$ y $k - 4$.

39. Suponga que $S_n = (n + 2)(n - 1)$ se propone (incorrectamente) como una fórmula para
$$2 + 4 + \cdots + 2n.$$

(a) Muestre que se satisface el paso inductivo pero no el paso base.

☆ (b) Si S'_n es una expresión arbitraria que satisface el paso inductivo, ¿qué forma debe tener?

☆ 40. ¿En qué punto falla el siguiente argumento, el cual mostraría que cualesquiera dos enteros positivos son iguales?

Utilizamos inducción sobre n para "demostrar" que si a y b son enteros positivos y $n = \text{máx}\{a, b\}$, entonces $a = b$.

PASO BASE. $(n = 1)$. Si a y b son enteros positivos y $1 = \text{máx}\{a, b\}$, debemos tener $a = b = 1$.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que si a' y b' son enteros positivos y $n = \text{máx}\{a', b'\}$, entonces $a' = b'$. Supongamos que a y b son enteros positivos y que $n + 1 = \text{máx}\{a, b\}$. Ahora, $n = \text{máx}\{a - 1, b - 1\}$. Por la hipótesis de inducción, $a - 1 = b - 1$. Por tanto, $a = b$.

Como hemos verificado el paso base y el paso inductivo, el principio de inducción matemática implica que ¡cualesquiera dos enteros positivos son iguales!

41. ¿Qué falla en la siguiente "demostración" de que
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1} \neq \frac{n^2}{n+1}$$
para toda $n \geq 2$?

Supongamos, por contradicción, que
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}. \qquad (1.6.14)$$

Entonces también
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n+2}.$$

Podríamos demostrar la afirmación (1.6.14) por inducción. En particular, el paso inductivo sería
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}\right)+\frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}.$$

Por tanto,
$$\frac{n^2}{n+1}+\frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n+2}.$$

Al multiplicar cada lado de esta última ecuación por $(n + 1)(n + 2)$ se obtiene
$$n^2(n + 2) + (n + 1)^2 = (n + 1)^3.$$

Podemos escribir esta última ecuación como
$$n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$
o
$$n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$
lo cual es una contradicción. Por tanto,
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1} \neq \frac{n^2}{n+1}$$
como se afirmaba.

42. Utilice la inducción matemática para demostrar que
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1} < \frac{n^2}{n+1}$$
para toda $n \geq 2$. Esta desigualdad proporciona una demostración correcta de la afirmación del ejercicio 41.

☆ 43. Suponga que la forma del paso inductivo en la inducción matemática es: Si $S(n)$ es verdadera, entonces $S(n + 1)$ es verdadera. Demuestre el principio de buen orden para enteros positivos.

Principio de buen orden para enteros positivos

Si X es un conjunto no vacío de enteros positivos, entonces X contiene un elemento mínimo.

Suponga que no existe un entero positivo menor que 1 y que si n es un entero positivo, no existe un entero positivo entre n y $n + 1$.

★ **44.** Suponga válido el principio de buen orden para los enteros positivos (véase el ejercicio 43). Demuestre la forma fuerte del principio de inducción matemática.

☆ 45. Muestre que la forma fuerte del principio de inducción matemática y la forma de la inducción matemática en que el paso inductivo es "si $S(n)$ es verdadera, entonces $S(n + 1)$ es verdadera" son equivalentes; es decir, suponga la forma fuerte y demuestre la forma alternativa; después, suponga la forma alternativa y demuestre la forma fuerte.

46. Muestre que si se distribuyen 40 monedas en nueve bolsas, al menos dos bolsas contienen el mismo número de monedas.

☆ 47. [Carmony] Suponga que $n > 1$ personas se colocan de modo que cada una tenga un único vecino más cercano. Además, suponga que cada persona tiene un pastel que arroja sobre su vecino más cercano. Un *sobreviviente* es una persona que no es alcanzada por un pastel.

(a) Proporcione un ejemplo para mostrar que si n es par, podría no haber sobrevivientes.

(b) Utilice inducción sobre n para mostrar que si n es impar, siempre habrá al menos un sobreviviente.

RINCÓN DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Problema

Defina

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \tag{1}$$

para $k \geq 1$. Demuestre que

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \tag{2}$$

para toda $n \geq 0$.

Para enfrentar el problema

Con frecuencia, es buena idea analizar algunos ejemplos concretos de las expresiones en cuestión. Analizaremos H_k para algunos valores pequeños de k. El menor valor de k para el cual H_k está definido es $k = 1$. En este caso, el último término $1/k$ en la definición de H_k es igual a $1/1 = 1$. Como el primer y el último términos coinciden,

$$H_1 = 1.$$

Para $k = 2$, el último término $1/k$ en la definición de H_k es igual a $1/2$, de modo que

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2}.$$

De manera análoga, vemos que

$$H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

Observamos que H_1 aparece como primer término de H_2, H_3 y H_4, que H_2 aparece como los dos primeros términos de H_3 y H_4; y que H_3 aparece como los tres primeros términos de H_4. En general, H_m aparece como los m primeros términos de H_k, si $m \leq k$. Esta observación nos ayudará posteriormente, pues el paso inductivo en una demostración por inducción debe relacionar las instancias menores de un problema con las instancias mayores.

En general, es una buena estrategia retrasar la combinación de términos y la simplificación mientras se pueda; ésta es la razón por la cual, por ejemplo, hemos dejado H_4 como la suma de cuatro términos en vez de escribir $H_4 = 25/12$. Como dejamos a H_4 expresada como la suma de cuatro términos, pudimos observar que H_1, H_2 y H_3 aparecían en la expresión para H_4.

Determinación de una solución

El paso base consiste en demostrar la siguiente afirmación para el menor valor de n, que en este caso es $n = 0$. Para $n = 0$, la desigualdad (2) que debemos demostrar se convierte en

$$H_{2^0} \geq 1 + \frac{0}{2} = 1. \tag{3}$$

Ya hemos observado que $H_1 = 1$. Así, la desigualdad (3) es verdadera cuando $n = 0$; de hecho, se convierte en una igualdad. (Recuerde que por definición, si $x = y$ es verdadera, entonces $x \geq y$ también lo es.)

Veamos ahora el paso inductivo. Es bueno escribir lo que se supone (aquí es el caso n)

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \tag{4}$$

y lo que hay que demostrar (aquí es el caso $n + 1$)

$$H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2} \tag{5}$$

También es bueno escribir las fórmulas de todas las expresiones que han aparecido. Al utilizar la ecuación (1), podemos escribir

$$H_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tag{6}$$

y

$$H_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La última ecuación no muestra tan claramente que H_{2^n} aparezca como los primeros 2^n términos de $H_{2^{n+1}}$. Escribimos la última ecuación como

$$H_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \tag{7}$$

para hacer evidente que H_{2^n} aparece como los primeros 2^n términos de $H_{2^{n+1}}$.

Para mayor claridad, hemos escrito el término posterior a $1/2^n$. Observe que los denominadores aumentan de uno en uno, de modo que el término posterior a $1/2^n$ es $1/(2^n + 1)$. Además, observe que existe una gran diferencia entre $1/(2^n + 1)$, el término posterior a $1/2^n$, y $1/2^{n+1}$, el último término en la ecuación (7).

Al utilizar las ecuaciones (6) y (7), podemos relacionar H_{2^n} con $H_{2^{n+1}}$ de manera explícita escribiendo

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{8}$$

Al combinar (4) y (8), obtenemos

$$H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{9}$$

Esta desigualdad muestra que $H_{2^{n+1}}$ es mayor o igual que

$$1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

pero nuestro objetivo (5) es mostrar que $H_{2^{n+1}}$ es mayor o igual que $1+(n+1)/2$. Lograremos esto si mostramos que

$$1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\geq 1+\frac{n+1}{2}.$$

En general, para demostrar una desigualdad, reemplazamos algunos términos en la expresión más grande mediante términos más pequeños, de modo que la expresión resultante sea igual a la expresión menor, o bien reemplazamos algunos términos en la expresión menor con términos más grandes de modo que la expresión resultante sea igual a la expresión mayor. En este caso, reemplazaremos cada uno de los términos de la suma

$$\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

mediante el término menor $1/2^{n+1}$. Obtenemos

$$\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\geq\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Como existen 2^n términos en esta última suma, cada uno de los cuales es igual a $1/2^{n+1}$, podemos escribir esta última desigualdad como

$$\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\geq\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}=2^n\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}. \tag{10}$$

Combinamos (9) y (10) para obtener

$$H_{2^{n+1}}\geq 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{n+1}{2}. \tag{11}$$

Tenemos el resultado deseado, con lo que concluye el paso inductivo.

Solución formal

Podemos escribir la solución formal como sigue.

PASO BASE ($n=0$)

$$H_{2^0}=1\geq 1=1+\frac{0}{2}$$

PASO INDUCTIVO. Supongamos (2). Ahora bien

$$\begin{aligned}H_{2^{n+1}}&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\\&=H_{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\geq 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\\&=1+\frac{n}{2}+2^n\frac{1}{2^{n+1}}=1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

Resumen de técnicas para resolver problemas

- Analice algunos ejemplos concretos de las expresiones en cuestión, por lo general con valores pequeños de las variables.
- Busque las expresiones para valores pequeños de n que aparezcan dentro de expresiones para valores mayores de n. En particular, el paso inductivo depende de la habilidad para relacionar el caso n con el caso $n+1$.
- Retrase la agrupación y simplificación de términos lo más posible, para poder descubrir las relaciones entre las expresiones.
- Escriba con detalle aquello que debe demostrar; en específico, el valor más pequeño en el paso base, el caso n supuesto en el paso inductivo y el caso $n+1$ por demostrar en el paso inductivo. Escriba las fórmulas para las diversas expresiones necesarias.
- Para demostrar una desigualdad, reemplace los términos en la expresión mayor con términos más pequeños, de modo que la expresión resultante sea igual a la expresión menor, o bien reemplace los términos de la expresión menor con términos más grandes de modo que la expresión resultante sea igual a la expresión mayor.

Comentarios

Los números H_k son los *números armónicos*, y la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

que aparece en cálculo es la *serie armónica*. La desigualdad (2) muestra que los números armónicos crecen sin límite. En la terminología del cálculo, la serie armónica *diverge*.

NOTAS

La bibliografía general relativa a las matemáticas discretas es [Dossey; Graham, 1988; Liu, 1985; Ross; Tucker]. [Knuth, 1973, volúmenes 1 y 3; 1981] es la referencia clásica para una gran parte del material.

[Barker; Copi; Edgar] son libros de texto de introducción a la lógica. Un análisis más avanzado aparece en [Davis]. El primer capítulo del libro de geometría de [Jacobs] está dedicado a la lógica básica. [Solow] estudia el problema de la construcción de demostraciones. Para una historia de la lógica, véase [Kline]. El papel del razonamiento lógico en los programas de cómputo se analiza en [Gries].

La formación de mosaicos con poliminós es el tema del libro de [Martin].

CONCEPTOS BÁSICOS DEL CAPÍTULO

Sección 1.1

Lógica
Proposición
Conjunción: p y q, $p \wedge q$
Disyunción: p o q, $p \vee q$
Negación: no p, $\bar{p}$
Proposición compuesta
Tabla de verdad
O exclusivo de proposiciones p, q: p o q, pero no ambos

Sección 1.2

Proposición condicional: si p, entonces q; $p \to q$
Hipótesis
Conclusión
Condición necesaria
Condición suficiente
Recíproca de $p \to q$: $q \to p$
Proposición bicondicional: p si y sólo si q, $p \leftrightarrow q$
Equivalencia lógica: $P \equiv Q$
Leyes de De Morgan para la lógica: $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$, $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$
Contrapositiva de $p \to q$: $\bar{q} \to \bar{p}$

Sección 1.3

Función proposicional
Dominio de discurso
Cuantificador universal
Afirmación cuantificada universalmente
Contraejemplo
Cuantificador existencial
Afirmación cuantificada existencialmente
Leyes de De Morgan generalizadas para la lógica:

$\overline{\forall x, P(x)}$ y $\exists x, \overline{P(x)}$ tienen los mismos valores de verdad.
$\overline{\exists x, P(x)}$ y $\forall x, \overline{P(x)}$ tienen los mismos valores de verdad.

Para demostrar que la afirmación cuantificada universalmente

para cada x, $P(x)$

es verdadera, muestre que para cada x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es verdadera.

Para demostrar que la afirmación cuantificada universalmente

para alguna x, $P(x)$

es verdadera, determine un valor de x en el dominio de discurso para la cual la proposición $P(x)$ sea verdadera.

Para demostrar que la afirmación cuantificada universalmente

para cada x, $P(x)$

es falsa, determine un valor de x (un contraejemplo) en el dominio de discurso para el cual la proposición $P(x)$ sea falsa.

Para demostrar que la afirmación cuantificada universalmente

para alguna x, $P(x)$

es falsa, muestre que para cada x en el dominio de discurso, la proposición $P(x)$ es falsa.

Sección 1.4

Sistema matemático
Axioma
Definición
Término no definido
Teorema
Demostración
Lema
Demostración directa
Demostración por contradicción
Demostración indirecta
Demostración por contrapositiva
Razonamiento deductivo
Hipótesis
Premisas
Conclusión
Argumento
Argumento válido
Argumento no válido

Sección 1.5

Demostración por resolución; utiliza: Si $p \vee q$ y $\bar{p} \vee r$ son verdaderas, entonces $q \vee r$ es verdadera.
Cláusula: consta de términos separados por *o*, donde cada término es una variable o la negación de una variable.

Sección 1.6

Principio de inducción matemática
Paso base: demostrar la verdad de la afirmación para la primera instancia
Paso inductivo: suponer ciertas todas las instancias menores que n y demostrar que es cierta para n
Fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suma geométrica:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

Sección 1.1

1. Si p, q y r son verdaderas, determine el valor de verdad de la proposición $(p \vee q) \wedge \overline{((\bar{p} \wedge r) \vee q)}$.
2. Escriba la tabla de verdad de la proposición $\overline{(p \wedge q)} \vee (p \vee \bar{r})$.
3. Formule la proposición $p \wedge (\bar{q} \vee r)$ con palabras, utilizando

   p: Mi área es la administración hotelera.
   q: Mi área es la supervisión de diversiones.
   r: Mi área es la cultura popular.

4. Suponga que a, b y c son números reales. Represente la afirmación

   $$a < b \text{ o } (b < c \text{ y } a \geq c)$$

   en forma simbólica, haciendo

   $$p: a < b, \quad q: b < c, \quad r: a < c.$$

Sección 1.2

5. Enuncie la afirmación "Una condición necesaria para que Leah obtenga una buena calificación en matemáticas discretas es que estudie mucho" como una proposición condicional.
6. Escriba la recíproca y la contrapositiva de la proposición del ejercicio 5.
7. Si p es verdadera y q y r son falsas, determine el valor de verdad de la proposición

   $$(p \vee q) \to \bar{r}.$$

8. Represente la afirmación

   $$\text{Si } (a \geq c \text{ o } b < c), \text{ entonces } b \geq c$$

en forma simbólica, utilizando las definiciones del ejercicio 4.

Sección 1.3

9. ¿Es una proposición la siguiente afirmación?

   El equipo ganó el campeonato de la Asociación Nacional de Básquetbol en 1996.

   Justifique su respuesta.

10. ¿Es la afirmación del ejercicio 9 una función proposicional? Explique.

Sea $P(n)$ la afirmación

$$n \text{ y } n + 2 \text{ son primos.}$$

En los ejercicios 11 y 12, escriba la afirmación con palabras e indique si es verdadera o falsa.

11. Para todos los enteros positivos n, $P(n)$.
12. Para algún entero positivo n, $P(n)$.

Sección 1.4

13. Muestre, dando una demostración por contradicción, que si cuatro equipos juegan siete juegos, algún par de equipos juega al menos dos veces.
14. Distinga entre los términos *axioma* y *definición*.
15. ¿Cuál es la diferencia entre una demostración directa y una demostración por contradicción?

16. Determine si el siguiente argumento es válido.

$$\begin{array}{l} p \to q \vee r \\ p \vee \overline{q} \\ \underline{r \vee q} \\ \therefore q \end{array}$$

Sección 1.5

17. Determine una expresión, que sea la *conjunción* de cláusulas, equivalente a $(p \vee q) \to r$.

18. Determine una expresión, que sea la *conjunción* de cláusulas, equivalente a $(p \vee \overline{q}) \to \overline{r}s$.

19. Utilice resolución para demostrar

$$\begin{array}{l} \overline{p} \vee q \\ \overline{q} \vee \overline{r} \\ \underline{p \vee \overline{r}} \\ \therefore \overline{r} \end{array}$$

20. Demuestre de nuevo el ejercicio 19 utilizando la resolución y la demostración por contradicción.

Sección 1.6

Utilice inducción matemática para demostrar que las afirmaciones de los ejercicios 21-24 son verdaderas para cada entero positivo n.

21. $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$

22. $2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

23. $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

24. $2^{n+1} < 1 + (n+1)2^n$