APÉNDICE: MATRICES

La organización de datos por renglones y columnas es una práctica común. En matemáticas, un arreglo de datos de este tipo es una **matriz**. En este apéndice resumimos algunas definiciones y propiedades elementales de las matrices. Primero damos la definición de matriz.

DEFINICION A.1

Una *matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

es un arreglo rectangular de datos.

Si A tiene m renglones y n columnas, decimos que el tamaño de A es m por n (lo cual se escribe $m \times n$).

Con frecuencia abreviamos la ecuación (A.1) como $A = (a_{ij})$. En esta ecuación, a_{ij} denota el elemento de A que aparece en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

EJEMPLO A.2

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

tiene dos renglones y tres columnas, por lo que su tamaño es 2×3. Por ejemplo, si escribimos $A = (a_{ij})$, tendríamos que

$$a_{11} = 2, \quad a_{21} = -1, \quad a_{13} = 0. \qquad \square$$

DEFINICIÓN A.3

Dos matrices A y B son *iguales*, lo que se denota $A = B$, si tienen el mismo tamaño y sus entradas correspondientes son iguales.

EJEMPLO A.4

Determinar w, x, y y z tales que

$$\begin{pmatrix} x+y & y \\ w+z & w-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con la definición A.3, como las matrices tienen el mismo tamaño, serán iguales siempre que

$$x + y = 5 \qquad y = 2$$
$$w + z = 4 \quad w - z = 6.$$

Al resolver estas ecuaciones, obtenemos

$$w = 5, \quad x = 3, \quad y = 2, \quad z = -1. \qquad \square$$

A continuación describimos algunas operaciones que se pueden realizar con las matrices. La **suma** de dos matrices se obtiene sumando las entradas correspondientes. El **producto por un escalar** se obtiene multiplicando cada entrada de la matriz por un número fijo.

DEFINICION A.5

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices $m \times n$. La suma de A y B se define como

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

El *producto por un escalar* de una matriz $A = (a_{ij})$ por un número c se define como

$$cA = (ca_{ij}).$$

Si A y B son matrices, definimos $-A = (-1)A$ y $A - B = A + (-B)$.

EJEMPLO A.6

Si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}, \qquad 2A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}, \qquad -B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

La multiplicación de matrices es otra importante operación matricial.

DEFINICIÓN A.7

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$ y sea $B = (b_{jk})$ una matriz $n \times l$. El *producto matricial* de A y B se define como la *matriz* $m \times l$

$$AB = (c_{ik}),$$

donde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Para multiplicar la matriz A por la matriz B, la definición A.7 requiere que el número de columnas de A sea igual al número de renglones de B.

EJEMPLO A.8

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

El producto matricial AB está definido, pues el número de columnas de A es igual al número de renglones de B; ambos son iguales a 2. La entrada c_{ik} en el producto AB se obtiene mediante el i-ésimo renglón de A y la k-ésima columna de B. Por ejemplo, la entrada c_{31} se calcula mediante el tercer renglón

$$(3 \quad 1)$$

de A y la primera columna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

de B. Multiplicamos cada elemento del tercer renglón de A por cada elemento de la primera columna de B y luego sumamos los resultados para obtener

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7.$$

Como el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, los elementos se corresponden correctamente. De esta manera, obtenemos el producto

$$AB = \begin{pmatrix} 25 & 44 & -1 \\ 12 & 22 & -4 \\ 7 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

□

EJEMPLO A.9

El producto matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{es} \quad \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

□

DEFINICIÓN A.10

Sea A una matriz $n \times n$. Si m es un entero positivo, la m-ésima *potencia* de A se define como el producto matricial

$$A^m = \underbrace{A \cdots A}_{m\ A\text{'s}}.$$

EJEMPLO A.11

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ -10 & 22 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = AAAA = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ -10 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -15 \\ -10 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 199 & -435 \\ -290 & 634 \end{pmatrix}.$$

□

Ejercicios

1. Calcule la suma

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

En los ejercicios 2-8, sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

y calcule cada expresión.

2. $A + B$ 3. $B + A$ 4. $-A$ **5.** $3A$

6. $-2B$ 7. $2B + A$ **8.** $B - 6A$

En los ejercicios 9-13, calcule los productos.

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -8 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$

11. A^2, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

12. $(2 \quad -4 \quad 6 \quad 1 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

14. (a) Proporcione el tamaño de cada matriz.

$$A=\begin{pmatrix}1&4&6\\0&1&7\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&4&7\\8&2&1\\0&1&6\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}4&2\\0&0\\2&9\end{pmatrix}$$

(b) Utilice las matrices de la parte (a) para decidir cuáles de los productos

$$A^2,\ AB,\ BA,\ AC,\ CA,\ AB^2,\ BC,\ CB,\ C^2$$

están definidos, y luego calcule estos productos.

15. Determine x, y y z de modo que se cumpla la ecuación

$$\begin{pmatrix}x+y & 3x+y\\ x+z & x+y-2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\9&-17\end{pmatrix}.$$

16. Determine w, x, y y z de modo que se cumpla la ecuación

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&7\\6&8&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&2x\\y&-y+z\\x+w&w-2y+x\\z&z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}45&46\\3&87\end{pmatrix}.$$

17. Defina la matriz $n\times n$ $I_n=(a_{ij})$ como

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}.$$

La matriz I_n es la **matriz identidad** $n\times n$.

Muestre que si A es una matriz $n\times n$ (una matriz de este tipo es una **matriz cuadrada**), entonces

$$AI_n=A=I_nA.$$

Una matriz $n\times n$ A es *invertible* si existe una matriz $n\times n$ B tal que

$$AB=I_n=BA.$$

(La matriz I_n se definió en el ejercicio 17.)

18. Muestre que la matriz

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

es invertible.

☆ 19. Muestre que la matriz

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

es invertible si y sólo si $ad-bc\neq 0$.

20. Suponga que queremos resolver el sistema

$$AX=C\quad\text{donde}\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

en términos de x y y.

Muestre que si A es invertible, el sistema tiene una solución.

21. La **transpuesta** de una matriz $A=(a_{ij})$ es la matriz $A^T=(a'_{ji})$, donde $a'_{ji}=a_{ij}$.
Ejemplo:

$$\begin{pmatrix}1&3\\4&6\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&4\\3&6\end{pmatrix}.$$

Si A y B son matrices $m\times k$ y $k\times n$, respectivamente, muestre que

$$(AB)^T=B^TA^T.$$

REFERENCIAS

AHO, A., J. HOPCROFT, y J. ULLMAN, *The Desing and Analysis of Computer Algorithms,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

AINSLIE, T., *Ainslie's Complete Hoyle,* Simon and Schuster, Nueva York, 1975.

AKL, S. G., *The Desing and Analysis of Parallel Algorithms,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1989.

APPEL, K., y W. HAKEN, "Every planar map is four-colorable", *Illinois, J. Math.,* 21 (1977), 429-567.

BAASE, S., *Computer Algorithms: Introduction to Desing and Analysis,* 2a. ed., Addisson-Wesley, Reading, Mass., 1988.

BABAI, L., y T. KUCERA, "Canonical labelling of graphs in linear average time", *Proc. 20th symposium on the Foundations of Computer Science,* 1979, 39-46.

BARKE, S. F., *The Elements of Logic,* 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1984.

BELL, R. C., *Board and Table Games from Many Civilizations,* ed. rev., Dover, Nueva York, 1979.

BENTLEY, J., *Programming Pearls,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986.

BERGE, C., *Graphs and Hypergraphs,* North-Holland, Amsterdam, 1979.

BERLEKAMP, E. R., J. H. CONWAY, y R. K. GUY, *Winning Ways,* Vols. 1 y 2, Academic Press, Nueva York, 1982.

BONDY, J. A., y U.S.R. MURTY, *Graph Theory with Applications,* American Elsevier, Nueva York, 1976.

BOOLE, G. *The Laws of Thought,* reimpreso por Dover, Nueva York, 1951.

BRASSARD, G., y P. BRATLEY, *Fundamentals of Algorithms,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1996.

BRUALDI, R. A., *Introductory Combinatorics,* 2a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1992.

CARMONY, L., "Odd pie fights", *Math, Teacher,* 72 (1979), 61-64.

CARROLL, J., y D. LONG, *Theory of Finite Automata,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1989.

CHARTRAND, G., y L. LESNIAK, *Graphs and Diagraphs,* 2a. ed., Wadsworth, Belmont, Calif., 1986.

CHU, I. P., y R. JOHNSONBAUGH, "Tiling deficient boards with trominoes", *Math. Mag.*, 59 (1986), 34-40.

CODD, E. F., "A relational model of data for large shared databanks", *Comm, ACM*, 13 (1970), 377-387.

COHEN, D. I. A., *Introduction to Computer Theory*, Wiley, Nueva York, 1986.

COPI, I. M., *Introduction to Logic*, 7a. ed., Macmillan, Nueva York, 1986.

CORMEN, T. H., C. E. LEISERSON, y R. L. RIVEST, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1990.

CULL. P., y E. F. ECKLUND, JR., "Towers of Hanoi and analysis of algorithms", *Amer. Math. Monthly*, 92 (1985), 407-420.

DATE, C. J., *An Introduction to Database Systems*, 4a. ed., Vol. 1 Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986.

DAVIS, M. D., R. SIGAL, y E. J. WEYUKER, *Computability, Complexity, and Languages*, 2a. ed., Academic Press, San Diego, 1994.

DEO, N., *Graph Theory and Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1974.

DIJKSTRA, E. W., "A note on two problems in connexion with graphs", *Numer, Math.*, 1 (1959), 260-271

DIJKSTRA, E. W., "Cooperating sequential processes", in *Programming Languages*, F. Genuys, ed., Academic Press, Nueva York, 1968.

DOSSEY J. A., A. D. OTTO, L. E. SPENCE, y C. VANDEN EYNDEN, *Discrete Mathematics*, Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1987.

EDELSBRUNNER, H., *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, Nueva York, 1987.

EDGAR, W. L., *The Elements of Logic*, SRA, Chicago, 1989.

ENGLISH, E., y S. HAMILTON, "Network security under siege, the timing attack", *Computer*, (Marzo 1996), 95-97.

ERBAS, C., y M. M. TANIK, "Generating solutions to the n-queens problem using 2-circulants", *Math. Mag.*, 68 (1995), 343-356.

EVEN, S., *Algorithmic Combinatorics*, Macmillan, Nueva York, 1973.

EVEN, S., *Graph Algorithms*, Computer Science Press, Rockville, Md., 1979.

EZEKIEL, M., "The cobweb theorem", *Quart. J. Econom.*, 52 (1938), 225-280.

FORD, L. R. JR., y D. R. FULKERSON, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962.

FOWLER, P. A., "The Königsberg bridges—250 years later", *Amer. Math Monthly*, 95 (1988), 42-43.

FREY, P., "Machine-problem solving—Part 3: The alpha-beta procedure", *BYTE*, 5 (Noviembre 1980), 244-264.

FUKUNAGA, K., *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, 2a. ed., Academic Press, Nueva York, 1990.

GALLIER, J. H., *Logic for Computer Science*, Harper & Row, Nueva York, 1986.

GARDNER, M., *Mathematical Puzzles and Diversions*, Simon and Schuter, 1959.

GARDNER, M., "A new kind of cipher that would take millions of years to break", *Sci. Amer.* (Febrero 1977), 120-124.

GARDNER, M., *Mathematical Circus*, Alfred A. Knopf, Nueva York, 1979.

GENESERETH, M. R., y N. J. NILSSON, *Logical foundations of Artificial Intelligence*, Morgan Kaufman, Los Altos, Calif., 1987.

GIBBONS, A., *Algorithmic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

GOLDBERG, S., *Introduction to Difference Equations*, Wiley, Nueva York, 1958.

GOLOMB, S. W., "Checker boards and polyominoes", *Amer. Math. Monthly*, 61 (1954), 675-682.

GOLOMB, S., y L. BAUMERT, "Backtrack programming", *J. ACM*, 12 (1965), 516-524.

GOSE, E., R. JOHNSONBAUGH, y S. JOST, *Pattern Recognition and Image Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1996.

GRAHAM, R. L., "An efficient algoritm for determining tho convex hull of a finite planar set", *Info. Proc. Lett.*, 1 (1972), 132-133.

GRAHAM, R. L., D. E. KNUTH, y O. PATASHNIK, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1988.

GRIES, D., *The Sciencie of Programming*, Springer-Verlag, Nueva York, 1981.

HAILPERIN, T., "Boole's algebra isn't Boolean algebra", *Math. Mag.*, 54 (1981), 137-184.

HALMOS, P. R., *Naive Set Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

HELL, P., "Absolute retracts in graphs", en *Graphs and Combinatorics*, R. A. Bari y F. Harary, eds., Lecture Notes in Mathematics, Vol. 406, Springer-Verlag, Nueva York, 1974.

HILLIER, F. S., y G. J. LIEBERMAN, *Introduction to Operations Research*, Holden-Day, San Francisco, 1974.

HINZ, A. M., "The Tower of Hanoi", *Enseignement Math.*, 35 (1989), 289-321.

HOHN, F., *Applied Boolean Algebra*, 2a. ed., Macmillan, Nueva York, 1966.

HOPCROFT, J. E., y J. D. ULLMAN, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1982.

HU, T. C., *Combinatorial Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1982.

JACOBS, H. R., *Geometry*, W. H. Freeman, San Francisco, 1974.

JARVIS, R. A., "On the identification of the convex hull of a finite set of points in the plane", *Info. Proc. Lett.*, 2 (1973), 18-21.

JONES, R. H., y N C. STEELE, *Mathematics in Communication Theory*, Ellis Horwood, Chichester, Inglaterra, 1989.

KELLEY, D., *Automata and Formal Languages*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1995.

KLEINROCK, L., *Queueing Systems*, Vol. 2: *Computer Applications*, Wiley, Nueva York, 1976.

KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Nueva York, 1972.

KNUTH, D. E., *The Art of Computer Programming*, Vol. 1: *Fundamental Algorithms*, 2a. ed., Addison Wesley, Reading Mass., 1973.

KNUTH, D. E., *The Art of Computer Programming*, Vol. 3: *Sorting and Searching*, Addison Wesley, Reading Mass., 1973.

KNUTH, D. E., "Algorithms", *Sci. Amer.* (Abril 1977), 63-80.

KNUTH, D. E., *The Art of Computer Programming*, Vol. 2: *Seminumeric Algorithms*, 2a. ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

KNUTH, D. E., "Algorithm thinking and mathematical thinking", *Amer. Math. Monthly*, 92 (1985), 170-181.

KÖBLER, J., U. SCHÖNING, y J. TORÁN, *The Graph Isomorphism Problem: Its Structural Complexity,* Birkhäuser Verlag, Basel, Suiza, 1993.

KOHAVI, Z., *Switching and Finite Automata Theory,* 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1978.

KÖNIG, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen,* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipyig, 1936. (Reimpreso en 1950 por Chelsea, Nueva York.) (Traducción al inglés: *Theory of Finite and Infinite Graphs,* Birkhäuser Boston, Cambridge, Mass., 1990.)

KROENKE, D., *Database Processing,* 2a. ed., Science Research Associates, Palo Alto, Calif., 1983.

KRUSE, R. L., *Data Structures and Program Desing,* 2a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1987.

KUROSAKA, R. T., "A ternary state of affairs", *BYTE,* 12 (Febrero 1987), 319-328.

LEIGHTON, F. T., *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures,* Morgan Kaufmann, San Mateo, Calif., 1992.

LESTER, B. P., *The Art of Paralel Programming,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1993.

LEWIS, T. G., y H., EL-REWINI, *Introduction to Parallel Computing,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1992.

LINDENMAYER, A., "Mathematical models for cellular interaction in development", partes I y II, *J. Theoret, Biol.,* 18 (1968), 280-315.

LIPSCHUTZ, S., *Theory and Problems of Set Theory and Related Topic,* Schaum, Nueva York, 1964.

LIU, C. L., *Introduction to Combinatorial Mathematics,* McGraw-Hill, Nueva York, 1968.

LIU, C. L., *Elements of Discrete Mathematics,* 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1985.

MANBER, U., *Introduction to Algorithms,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.

MANDELBROT, B. B., *Fractals: Form, Chance, and Dimension,* W. H. Freeman, San Francisco, 1977.

MANDELBROT, B. B., *The Fractal Geometry of Nature,* W. H. Freeman, San Francisco, 1982.

MARTIN, G. E., *Polyominoes: A Guide to Puzzles and Problems in Tiling,* Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1991.

MCCALLA, T. R., *Digital Logic and Computer Desing,* Merrill, Nueva York, 1992.

MCNAUGHTON, R., *Elementary Computability, Formal Languages, and Automata,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1982.

MENDELSON, E., *Boolean Algebra and Switching Circuits,* Schaum, Nueva York, 1970.

NADLER, M., y E. P. SMITH, *Pattern Recognition Engineering,* Wiley, Nueva York, 1993.

NEWMAN, J. R., "Leonhard Euler and the Koenigsberg bridges", *Sci. Amer.* (Julio 1953), 66-70.

NIEVERGELT, J., J. C. FARRAR, y E. M. REINGOLD, *Computer Approaches to Mathematical Problems,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1974.

NILSSON, N. J., *Problem-Solving Methods in Artificial Intelligence,* McGraw-Hill, Nueva York, 1971.

NIVEN, I., *Mathematics of Choice,* Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1965.

NYHOFF, L., y S. LEESTMA, *Data Structures and Program Design in Pascal,* 2a. ed., Macmillan, Nueva York, 1992.

ORE, O., *Graphs and Their Uses,* Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1963.

PEARL, J., "The solution for the branching factor of the alpha-beta pruning algorithm and its optimality", *Comm. ACM,* 25 (1982), 559-564.

PEITGEN, H., y D. SAUPE, eds., *The Science of Fractal Images,* Springer-Verlag, Nueva York, 1988.

PETRI, C., "Kommunikation mit Automaten", Tesis doctoral, Universidad de Bonn, Bonn, Alemania Occidental, 1962 (en alemán). Traducido por C. F. Green, Jr., "Comunication with automata", Supplement to Technical Report RADC-TR-65-377, Vol. I, Rome Air Development Center, Griffiss Air Force Base, Nueva York, 1966.

PFLEEGER, C. P., *Security in Computing,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1989.

PREPARATA, F. P., y S. J. HONG, "Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions", *Comm. ACM,* 20 (1977), 87-93.

PREPARATA, F. P., y M. I. SHAMOS, *Computational Geometry,* Springer-Verlag, Nueva York, 1985.

Problem 1186, *Math. Mag.,* 58 (1985), 112-114.

PRODINGER, H., y R. TICHY, "Fibonacci numbers of graphs", *Fibonacci Quarterly,* 20 (1982), 16-21.

PRUSINKIEWICZ, P., "Graphical aplications of L-systems", *Proc. of Graphics Interface 1986—Vision Interface* (1986), 247-253.

PRUSINKIEWICZ, P., y J. HANNAN, "Applications of L-systems to computer imagery", en *Graph Grammars and Their Aplication to Computer Science; Third International Workshop,* H. Ehrig, M. Nagl, A. Rosenfeld, y G. Rosenberg, eds., Springer-Verlag, Nueva York, 1988.

QUINN, M. J., *Desing Efficient Algoritms for Parallel Computers,* McGraw-Hill, Nueva York, 1987.

READ, R. C., y D. G. CORNEIL, "The graph isomorphism disease", *J. Graph Theory,* 1 (1977), 339-363.

REINGOLD, E., J. NIEVERGELT, y N. DEO, *Combinatorial Algorithms,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1977.

RIORDAN, J., *An Introduction to Combinatorial Analysis,* Wiley, Nueva York, 1958.

RITTER, G. L., S. R. LOWRY, H. B. WOODRUFF, y T. L. ISENHOUR, "An aid to the superstitious", *Math. Teacher,* mayo 1977, 456-457.

ROBERTS, F. S., *Aplied Combinatorics,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1984.

ROBINSON, J. A., "A machine oriented logic based on the resolution principle", *J. ACM,* 12 (1965), 23-41.

ROSS, K. A., y C. R. B. WRIGHT, *Discrete Mathematics,* 3a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1992.

SAAD, Y., y M. H. SCHULTZ, "Topological properties of hypercubes", *IEEE Trans. Computers,* 37 (1988), 867-872.

SCHWENK, A. S., "Which rectangular chessboards have a knight's tour?" *Math. Mag.,* 64 (1991), 325-332.

SEIDEL, R., "A convex hull algorithm optimal for points in even dimensions", M. S. thesis, Tech. Rep. 81-14, Dept. of Comp. Sci., Univ. of British Columbia, Vancouver, Canadá, 1981.

SHANNON, C. E., "A symbolic analysis of relay and switching circuits", *Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.*, 47 (1938), 713-723.

SLAGLE, J. R., *Artificial Inteligence: The Heuristic Programming Approach,* McGraw-Hill, Nueva York, 1971.

SMITH, A. R., "Plants, fractals, and formal lenguajes", *Computer Graphics,* 18 (1984), 1-10.

SOLOW, D., *How to Read and Do Proofs,* 2a. ed., Wiley, Nueva York, 1990.

STANDISH, T. A., *Data Structures, Algorithms, and Sofware Principles in C,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1995.

STOLL, R. R., *Set Theory and Logic,* W. H. Freeman, San Francisco, 1963.

SUDKAMP, T. A., *Languages and Machines,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1988.

TARJAN, R. E., *Data Structures and Network Algorithms,* Society for Industrial and Applied Mathematics, Filadelfia, 1983.

TAUBES, G., "Small army of code-breakers conquers a 129-digit giant", *Science,* 264, (1994), 776-777.

TUCKER, A., *Applied Combinatorics,* 2a. ed., Wiley, Nueva York, 1985.

ULLMAN, J. D., *Principles of Database Systems,* Computer Science Press, Rockville, Md., 1980.

VILENKIN, N. Y., *Combinatorics,* Academic Press, Nueva York, 1971.

WAGON, S., "Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle", *Amer. Math. Monthly,* 94 (1987), 601-617. (Reimpreso en R. K. Guy y R. E. Woodrow, eds., *The Lighter Side of Mathematics,* Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1994, 113-128).

WARD, S. A., y R. H. HALSTEAD, JR., *Computation Structures,* MIT Press, Cambridge, Mass., 1990.

WILSON, R. J., *Introduction to Graph Theory,* 2a. ed., Academic Press, Orlando, Fla., 1979.

WOOD, D., *Theory of Computation,* Harper & Row, Nueva York, 1987.

WOS, L., R. OVERBEEK, E. LUSK, y J. BOYLE, *Automated Reasoning,* Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1984.

SUGERENCIAS Y SOLUCIONES DE EJERCICIOS SELECCIONADOS

Sección 1.1

1. Es una proposición. Negación: $2 + 5 \neq 19$

4. Es una proposición. Negación: Audrey Meadows no fue la "Alicia" original en "The Honeymooners".

7. Es una proposición. Algún entero par mayor que 4 no es la suma de dos primos.

9. Verdadero

12. Verdadero

15.

p	q	$p \wedge \overline{q}$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

18.

p	q	$(p \wedge q) \wedge \overline{p}$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

21.

p	q	$(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

23. $p \wedge q$; falso

26. Hoy es lunes o está lloviendo.

29. (Hoy es lunes y está lloviendo) y no ocurre que (hace calor u hoy es lunes).

32. No. Un juez resolvió que la ley era "vaga". Se supone que la orden debería ser: "No se permitirá que una persona tenga más de tres [3] perros *o* tres [3] gatos dentro de la ciudad".

Sección 1.2

1. Si Joey estudia mucho, entonces aprobará el examen de matemáticas discretas.

4. Si Karina aprueba matemáticas discretas, entonces llevará el curso de algoritmos.

7. Si el programa es legible, entonces está bien estructurado.

8. [Para el ejercicio 1] Si Joey aprueba el examen de matemáticas discretas, entonces habrá estudiado mucho.

10. Verdadero **13.** Falso **16.** Falso

18. $p \to q$ **21.** $p \leftrightarrow (p \wedge \overline{r})$

22. Si hoy es lunes, entonces está lloviendo.

25. No ocurre que hoy sea lunes o que esté lloviendo si y sólo si hace calor.

28. Sean p: $4 < 6$ y q: $9 > 12$.
Afirmación dada: $p \to q$: falsa.
Recíproca: $q \to p$; si $9 > 12$, entonces $4 < 6$; verdadera.
Contrapositiva: $\overline{q} \to \overline{p}$; si $9 \leq 12$, entonces $4 \geq 6$; falsa.

31. Sean p: $|4| < 3$ y q: $-3 < 4 < 3$.
Afirmación dada: $q \to p$; verdadera.
Recíproca: $p \to q$; si $|4| < 3$, entonces $-3 < 4 < 3$; verdadera.
Contrapositiva: $\overline{p} \to \overline{q}$; si $|4| \geq 3$, entonces $-3 \geq 4$ o $4 \geq 3$; verdadera.

. $P \not\equiv Q$ **35.** $P \not\equiv Q$ **38.** $P \not\equiv Q$ **41.** $P \not\equiv Q$

p	q	p *impl* q	q *impl* p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Como p *impl* q es verdadera precisamente cuando q *impl* p es verdadera, p *impl* $q \equiv q$ *impl* p.

p	q	$p \to q$	$\bar{p} \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Como $p \to q$ es verdadera precisamente cuando $\bar{p} \vee q$ es verdadera, $p \to q \equiv \bar{p} \vee q$.

ción 1.3

Es una función proposicional. El dominio de discurso podrían ser todos los enteros.

Es una función proposicional. El dominio de discurso es el conjunto de todas las películas.

11 divide a 77. Verdadera

Para cada entero positivo n, n divide a 77. Falsa

Todos son más altos que todos los demás. Falsa

Alguien es mayor que otro. Verdadera

$\exists x \forall y L(x, y)$. Probablemente verdadera

$\forall x \exists y L(x, y)$. Por desgracia, probablemente falsa

Falsa. Un contraejemplo es $x = \frac{1}{2}$.

Verdadera. Por ejemplo, si $x = 0$, la proposición condicional, si $x > 1$, entonces $x^2 > x$, es verdadera, pues la hipótesis es falsa.

Falsa. Un contraejemplo es $x = 2, y = 0$.

Verdadera. Considere $x = y = 0$.

Falsa. Un contraejemplo es $x = y = 2$.

Verdadera. Considere $x = 1, y = \sqrt{8}$.

Verdadera. Considere $x = 0$. Entonces, para toda y, $x^2 + y^2 \geq 0$.

Verdadera. Para cualquier x, si hacemos $y = x - 1$, la proposición condicional, si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$, es verdadera, pues la hipótesis es falsa.

La interpretación correcta es: Algún hombre no engaña a su esposa. Esta proposición es verdadera. Éste fue el significado que quería darle Abby. Ella recibió algunas cartas en las que las personas habían interpretado la proposición como: Ningún hombre engaña a su esposa. Bajo esta interpretación, la proposición es falsa.

Sección 1.4

1. Si tres puntos no son colineales, entonces existe exactamente un plano que los contiene.

4. Si x es un número real no negativo y n es un entero positivo, $x^{1/n}$ es el número no negativo y tal que $y^n = x$.

7. $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$

pues $b + 0 = b$ para todos los números reales b

$= x \cdot (0 + 0)$

pues $b + 0 = b$ para todos los números reales b

$= x \cdot 0 + x \cdot 0$

pues $a(b + c) = ab + ac$ para todos los números reales a, b, c

Al considerar $a = b = x \cdot 0$ y $c = 0$, la ecuación anterior se convierte en $a + b = a + c$; así, $x \cdot 0 = b = c = 0$.

10. Válido $\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$ **13.** No válido $\begin{array}{l} (p \vee r) \to q \\ \underline{q} \\ \therefore \bar{p} \to r \end{array}$

15. Válido. Si 64K es mejor que no tener memoria alguna, entonces compraremos una nueva computadora. Si 64K es mejor que no tener memoria alguna, entonces compraremos más memoria. Por lo tanto, si 64K es mejor que no tener memoria alguna, entonces compraremos una nueva computadora y compraremos más memoria.

18. No válido. Si no compraremos una nueva computadora, entonces 64K no es mejor que no tener memoria alguna. Compraremos una nueva computadora. Por lo tanto, 64K es mejor que no tener memoria alguna.

20. No válido **23.** No válido

26. Un análisis del argumento debe tomar en cuenta el hecho de que "nada" se utiliza de dos maneras muy diferentes.

Sección 1.5

1.

p	q	r	$p \vee q$	$\bar{p} \vee r$	$q \vee r$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

2. 1. $\bar{p} \vee q \vee r$

2. $\bar{q}$

3. $\bar{r}$

4. $\bar{p} \vee r$ De 1 y 2

5. $\bar{p}$ De 3 y 4

5. Primero observemos que $p \to q$ es lógicamente equivalente a $\bar{p} \vee q$. Ahora argumentamos como sigue:

1. $\bar{p} \vee q$

2. $p \vee q$

3. q De 1 y 2

7. (Para el ejercicio 2).

1. $\bar{p} \vee q \vee r$ Hipótesis

2. $\bar{q}$ Hipótesis

3. $\bar{r}$ Hipótesis

4. p Negación de la conclusión

5. $\bar{p} \vee r$ De 1 y 2

6. $\bar{p}$ De 3 y 5

Ahora, combinamos 4 y 6 para obtener una contradicción.

Sección 1.6

1. PASO BASE. $1 = 1^2$

PASO INDUCTIVO. Supongamos que es verdadera para n.

$1 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$

4. PASO BASE. $1^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6$

PASO INDUCTIVO. Supongamos que es verdadera para n.

$$1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

7. PASO BASE. $1/(1 \cdot 3) = \frac{1}{3}$

PASO INDUCTIVO. Supongamos que es verdadera para n.

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{n+1}{2n+3}$$

10. PASO BASE. $\cos x = \dfrac{\cos[(x/2) \cdot 2]\operatorname{sen}(x/2)}{\operatorname{sen}(x/2)}$

PASO INDUCTIVO. Supongamos que es verdadera para n. Entonces

$$\cos x + \cdots + \cos nx + \cos(n+1)x$$
$$= \frac{\cos[(x/2)(n+1)]\operatorname{sen}(nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)} + \cos(n+1)x. \qquad (*)$$

Debemos mostrar que el lado derecho de $(*)$ es igual a

$$\frac{\cos[(x/2)(n+2)]\operatorname{sen}[(n+1)x/2]}{\operatorname{sen}(x/2)}.$$

Esto es lo mismo que mostrar que [después de multiplicar por el término $\operatorname{sen}(x/2)$]

$$\cos\left[\frac{x}{2}(n+1)\right]\operatorname{sen}\frac{nx}{2} + \cos(n+1)x \operatorname{sen}\frac{x}{2}$$
$$= \cos\left[\frac{x}{2}(n+2)\right]\operatorname{sen}\left[\frac{(n+1)x}{2}\right].$$

Si $\alpha = (x/2)(n + 1)$ y $\beta = x/2$, debemos mostrar que $\cos\alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \cos 2\alpha \operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\alpha$.

Podemos verificar esta última ecuación reduciendo cada lado a términos que utilicen sólo α y β.

12. PASO BASE. $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

PASO INDUCTIVO. Supongamos que es verdadera para n.

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)} \geq \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$$
$$= \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+2}$$
$$\geq \frac{1}{2n+2}$$

15. PASO BASE $(n = 4)$. $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$

PASO INDUCTIVO. Supongamos que es verdadera para n.

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1$$
$$\leq 2^n + 2^n \quad \text{por el ejercicio 14}$$
$$= 2^{n+1}$$

18. PASO BASE. $7^1 - 1 = 6$ es divisible entre 6.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que 6 divide a $7^n - 1$. Ahora

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 7^n - 1 + 6 \cdot 7^n.$$

Como 6 divide a $7^n - 1$ y a $6 \cdot 7^n$, divide a su suma, que es $7^{n+1} - 1$.

21. PASO BASE. $3^1 + 7^1 - 2 = 8$ es divisible entre 8.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que 8 divide a $3^n + 7^n - 2$. Ahora

$$3^{n+1} + 7^{n+1} - 2 = 3(3^n + 7^n - 2) + 4(7^n + 1).$$

Por la hipótesis de inducción, 8 divide a $3^n + 7^n - 2$. Podemos utilizar inducción matemática para mostrar que 2 divide a $7^n + 1$ para toda $n \geq 1$ (el argumento es similar al dado en la sugerencia del ejercicio 18). Esto implica que 8 divide a $4(7^n + 1)$. Como 8 divide a $3(3^n + 7^n - 2)$ y $4(7^n + 1)$, divide a su suma, que es $3^{n+1} + 7^{n+1} - 2$.

23. En el paso inductivo, cuando se agrega la línea $(n + 1)$, debido a las hipótesis, la línea intersecará cada una de las otras n rectas. Ahora, imagine que recorremos la línea $(n + 1)$. Cada vez que pasamos por una de las regiones originales, se divide en dos regiones.

26. $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

30. Podemos suponer que $p/q > 1$. Elegimos el máximo entero n tal que

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \frac{p}{q}.$$

Si obtenemos una igualdad, p/q está en forma egipcia, así que supongamos que

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \frac{p}{q}. \qquad (*)$$

Hacemos

$$D = \frac{p}{q} - \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Es claro que $D > 0$. Como n es el máximo entero que satisface $(*)$,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{p}{q}.$$

Así,

$$\begin{aligned} D &= \frac{p}{q} - \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

En particular, $D < 1$. Por el ejercicio 28, D se puede escribir en forma egipcia:

$$D = \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k},$$

donde los n_i son distintos. Como

$$\frac{1}{n_i} \leq D \leq \frac{1}{1+n},$$

$n < n + 1 \leq n_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Esto implica que

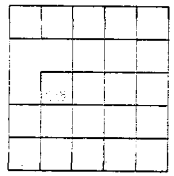
$$1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ n_1,\ \ldots,\ n_k$$

son distintos. Así,

$$\frac{p}{q} = D + \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

se representa en forma egipcia.

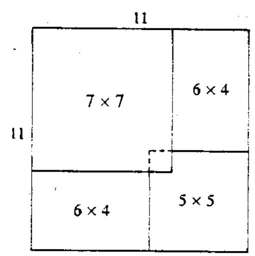
33. Un triominó puede cubrir el cuadrado a la izquierda del cuadrado faltante (que aparece sombreado) como se muestra



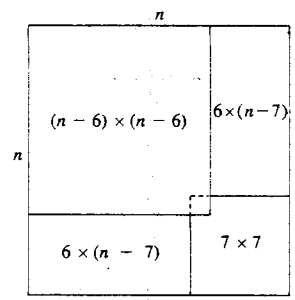
o en forma simétrica, reemplazando por "arriba" y "abajo". En el primer caso, es imposible cubrir los dos cuadrados del renglón superior, en el extremo izquierdo. En el segundo caso, es imposible cubrir los dos cuadrados del renglón inferior, en el extremo izquierdo. Por lo tanto, es imposible cubrir el tablero con triominós.

36. **PASO BASE.** ($n = 7$ u 11). El ejercicio 35 da una solución para $n = 7$.

Si $n = 11$, primero giramos el tablero de modo que el cuadrado faltante se localice en el tablero 7×7 que aparece en la siguiente figura. El ejercicio 35 muestra la forma de cubrir este subtablero. El ejercicio 34 muestra que los dos tableros 6×4 también se pueden cubrir. Es directo verificar que el tablero 5×5 con un cuadrado faltante en una esquina se puede cubrir. Hemos mostrado que cualquier tablero deficiente 11×11 se puede cubrir con triominós.



PASO INDUCTIVO. Supongamos que n es impar, $n > 11$, 3 divide a $n^2 - 1$, y que se pueden cubrir los tableros deficientes $k \times k$, donde k es impar, $n > k > 5$, y 3 divide a $k^2 - 1$. La siguiente figura muestra cómo cubrir un tablero deficiente $n \times n$. Primero giramos el tablero de modo que el cuadrado faltante se localiza en el subtablero $(n - 6) \times (n - 6)$. Ahora, $n - 6$ es impar, $n - 6 > 5$, y 3 divide a $(n - 6)^2 - 1$; así, por la hipótesis de inducción, este tablero deficiente $(n - 6) \times (n - 6)$ se puede cubrir. Como n es impar, $n - 7$ es par; así, por el ejercicio 34, los dos subtableros $6 \times (n - 7)$ se pueden cubrir. Por el ejercicio 35, el subtablero deficiente 7×7 se puede cubrir. Por lo tanto, podemos cubrir el tablero $n \times n$.



39. (a) $S_1 = 0 \neq 2$;

$$\begin{aligned} 2 + \cdots + 2n + 2(n+1) &= S_n + 2n + 2 \\ &= (n+2)(n-1) + 2n + 2 \\ &= (n+3)n \\ &= S_{n+1}. \end{aligned}$$

(b) Debemos tener $S'_n = S'_{n-1} + 2n$; así,

$$\begin{aligned} S'_n &= S'_{n-1} + 2n = [S'_{n-2} + 2(n-1)] + 2n \\ &= S'_{n-2} + 2n + 2(n-1) \\ &= S'_{n-3} + 2n + 2(n-1) + 2(n-2) = \cdots \\ &= S'_1 + 2[n + (n-1) + \cdots + 2] \\ &= C' + 2\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] = n^2 + n + C. \end{aligned}$$

44. Por contradicción, supongamos que alguna afirmación $S(n)$ es falsa. Sea X el conjunto de enteros positivos n para los cuales $S(n)$ es falsa. Ahora, aplicamos el principio del buen orden.

Capítulo 1 Autoevaluación

1. Falsa

2.

p	q	r	$(\overline{p \wedge q}) \vee (p \vee \overline{r})$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

3. Mi área es la administración hotelera y, o bien mi área no es la supervisión de diversiones o mi área es la cultura popular.
4. $p \vee (q \wedge \overline{r})$
5. Si Leah obtiene una buena calificación en matemáticas discretas, entonces Leah estudia mucho.
6. Recíproca: Si Leah estudia mucho, entonces Leah obtiene una buena calificación en matemáticas discretas. Contrapositiva: Si Leah no estudia mucho, entonces Leah no obtendrá una buena calificación en matemáticas discretas.
7. Verdadera 8. $(\overline{r} \vee q) \rightarrow \overline{q}$
9. La afirmación no es una proposición. El valor de verdad no se puede determinar sin saber a cuál "equipo" se refiere.
10. La afirmación es una función proposicional. Al sustituir un equipo particular en la variable "equipo", la afirmación se convierte en una proposición.
11. Para todos los enteros positivos n, n y $n + 2$ son primos. La proposición es falsa. Un contraejemplo es $n = 7$.
12. Para algún entero positivo n, n y $n + 2$ son primos. La proposición es verdadera. Por ejemplo, si $n = 5$, n y $n + 2$ son primos.
13. Suponga que si cuatro equipos juegan siete juegos, ningún par de equipos juega al menos dos veces; o bien, en forma equivalente, si cuatro equipos juegan siete juegos, cada par de equipos juega a lo más una vez. Si los equipos son A, B, C y D, y cada par de equipos juega a lo más una vez, la mayor cantidad de juegos que se pueden realizar son:
A y B; A y C; A y D; B y C; B y D; C y D.
Así, a lo más se pueden realizar seis juegos. Ésta es una contradicción. Por lo tanto, si cuatro equipos juegan siete juegos, algún par de equipos juega al menos dos veces.
14. Los axiomas son afirmaciones que se suponen verdaderas. Las definiciones se utilizan para crear nuevos conceptos en términos de otros ya existentes.
15. En una demostración directa, no se supone la negación de la conclusión, mientras que en una demostración por contradicción, se supone la negación de la conclusión.

El argumento no es válido. Si p y r son verdaderas y q es falsa, las hipótesis son verdaderas, pero la conclusión es falsa.

$$(p \vee q) \to r \equiv \overline{p \vee q} \vee r$$
$$\equiv \bar{p}\,\bar{q} \vee r$$
$$\equiv (\bar{p} \vee r)(\bar{q} \vee r)$$

$$(p \vee \bar{q}) \to \bar{r}s \equiv \overline{p \vee \bar{q}} \vee \bar{r}s$$
$$\equiv \bar{p}\, q \vee \bar{r}s$$
$$\equiv (\bar{p} \vee \bar{r})(\bar{p} \vee s)(q \vee \bar{r})(q \vee s)$$

1. $\bar{p} \vee q$
2. $\bar{q} \vee \bar{r}$
3. $q \vee \bar{r}$
4. $\bar{p} \vee \bar{r}$ De 1 y 2
5. $\bar{r}$ De 3 y 4

1. $\bar{p} \vee q$
2. $\bar{q} \vee \bar{r}$
3. $q \vee \bar{r}$
4. r Negación de la conclusión
5. $\bar{p} \vee \bar{r}$ De 1 y 2
6. $\bar{r}$ De 3 y 5

Ahora, 4 y 6 dan una contradicción.

En los ejercicios 21-24, sólo aparece el paso inductivo.

$$2 + 4 + \dots + 2n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1)$$
$$= (n+1)(n+2)$$

$$2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 + [2(n+1)]^2$$
$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} + [2(n+1)]^2$$
$$= \frac{2(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{3}$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$
$$+ \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$
$$= 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$2^{n+2} = 2 \cdot 2^{n+1} < 2[1 + (n+1)2^n] = 2 + (n+1)2^{n+1}$$
$$= 1 + [1 + (n+1)2^{n+1}]$$
$$< 1 + [2^{n+1} + (n+1)2^{n+1}]$$
$$= 1 + (n+2)2^{n+1}$$

Sección 2.1

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$ **4.** $\{2, 3, 5\}$

7. $\varnothing$ **10.** U

13. $\{6, 8\}$ **16.** $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$

17. $\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

20. $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

21. $\{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta)\}$

24. $\{(a, 1, a, \alpha), (a, 2, a, \alpha), (a, 1, a, \beta), (a, 2, a, \beta)\}$

25. $\{\{1\}\}$

28. $\{\{a, b, c, d\}\}, \{\{a, b, c\}, \{d\}\},$
$\{\{a, b, d\}, \{c\}\}, \{\{a, c, d\}, \{b\}\}, \{\{b, c, d\}, \{a\}\},$
$\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\},$
$\{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\},$
$\{\{b, c\}, \{a\}, \{d\}\}, \{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\}, \{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\},$
$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \{\{a, d\}, \{b, c\}\},$
$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

29. Verdadero **32.** Verdadero

33. Iguales **36.** Iguales

38. $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$. Todos son subconjuntos propios, excepto $\{a, b\}$.

41. $2^n - 1$ **43.** Falso. $X = \{1, 2\}, Y = \{2, 3\}$

46. Falso. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{2\}, Z = \{3\}$.

49. Falso. $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$. **52.** Verdadero

55. Verdadero **57.** $A \subseteq B$

60. $B \subseteq A$ **61.** $\{1, 4, 5\}$

65. $|A| + |B|$ cuenta los elementos de A y B, pero cuenta los elementos en $A \cap B$ dos veces.

68. P es el conjunto de números primos.

Sección 2.2

1. (a) c (b) c (c) $cddcdc$

4. (a) 12 (b) 23 (c) 7
(d) 46 (e) 1 (f) 3
(g) 3 (h) 21

8. (a) 15 (b) 155
(c) $2n + 3(n-1)n/2$ (d) Sí
(e) No

11. (a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13
(b) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25
(c) $n_k = 2k - 1$ (c) $s_{nk} = 4k - 3$

13. (a) 88 (b) 1140
(c) 48 (d) 3168

16. $b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 5, b_4 = 8, b_5 = 12, b_6 = 257$

19. Sea $s_0 = 0$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} b_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_k b_{k+1} + s_n b_{n+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}.$$

22. 00, 01, 10, 11

25. 000, 010, 001, 011, 100, 110, 101, 111, 00, 01, 11, 10, 0, 1, λ

28. **PASO BASE** ($n = 1$). En este caso, $\{1\}$ es el único subconjunto no vacío de $\{1\}$, de modo que la suma es

$$\frac{1}{1} = 1 = n.$$

PASO INDUCTIVO. Supongamos que la afirmación es verdadera para n. Separamos los subconjuntos de $\{1, \dots, n, n+1\}$ en dos clases:

C_1 = clase de subconjuntos no vacíos que no contienen a $n + 1$.

C_2 = clase de subconjuntos que contienen a $n + 1$.

Por la hipótesis de inducción,

$$\sum_{C_1} \frac{1}{n_1 \cdots n_k} = n.$$

Como un conjunto en C_2 consta de $n + 1$ junto con un subconjunto (vacío o no) de $\{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{C_2} \frac{1}{(n+1) n_1 \cdots n_k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{C_1} \frac{1}{n_1 \cdots n_k}.$$

[El término $1/(n + 1)$ surge del subconjunto $\{n + 1\}$.] Por la hipótesis de inducción,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{C_1} \frac{1}{n_1 \cdots n_k}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \cdot n = 1.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{C_2} \frac{1}{(n+1) n_1 \cdots n_k} = 1.$$

Por último,

$$\sum_{C_1 \cup C_2} \frac{1}{n_1 \cdots n_k} = \sum_{C_1} \frac{1}{n_1 \cdots n_k} + \sum_{C_2} \frac{1}{(n+1) n_1 \cdots n_k}$$
$$= n + 1.$$

Sección 2.3

1. 9 **4.** 32

7. 100010 **10.** 110010000

13. 11000 **16.** 1001000

19. 58 **22.** 2563

25. [Para el ejercicio 7] 22 **28.** FE

31. 3DBF9

33. 2010 no puede representar un número en binario, pues 2 no es un símbolo legal en binario. 2010 podría representar un número en decimal o hexadecimal.

35. 51 **38.** 4570

41. (Para el ejercicio 7) 42 **44.** (Para el ejercicio 35) 33

47. 9450 no puede representar un número en binario, pues 9, 4 y 5 no son símbolos legales en binario. 9450 no puede representar un número en octal, pues 9 no es un símbolo legal en octal. 9450 representa un número en decimal o hexadecimal.

Sección 2.4

1. $\{(8840, \text{Martillo}), (9921, \text{Pinzas}), (452, \text{Pintura}), (22097, \text{Tapiz})\}$

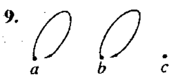
4. $\{(a, a), (b, b)\}$

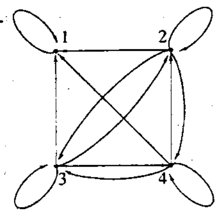
5.

a	6
b	2
a	1
a	1

8.

Maine	Augusta
Maryland	Annapolis
Massachusetts	Boston
Michigan	Lansing
Minnesota	St. Paul
Mississippi	Jackson
Missouri	Jefferson City
Montana	Helena

9. 

12. 

13. $\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,d),(c,c),(c,d)\}$

16. $\{(b,c),(c,b),(d,d)\}$

17. [Para el ejercicio 1] dominio = {8840, 9921, 452, 2207}, rango = {Martillo, Pinzas, Pintura, Tapiz}

19. $\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,5),(3,3),(4,1),(4,4),(5,2),(5,5)\}$

22. $\{1,2,3,4,5\}$

25. $R = R^{-1} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$

dominio R = rango R = dominio R^{-1}

= rango $R^{-1} = \{1,2,3,4,5\}$

28. Antisimétrica **29.** Antisimétrica

32. Reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, orden parcial

34. Reflexiva, antisimétrica, transitiva, orden parcial

37. $R_1 \circ R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,2)\}$

$R_2 \circ R_1 = \{(1,1),(1,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$

38. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(2,1),(3,2)\}$

41. $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

43. Falsa. Sean $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(2,3)\}$.

46. Verdadera **49.** Verdadera **52.** Verdadera

55. Falsa. Sean $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(2,1)\}$.

58. Verdadera

Sección 2.5

1. Relación de equivalencia: $[1] = [3] = \{1,3\}$, $[2] = \{2\}$, $[4] = \{4\}$, $[5] = \{5\}$

4. Relación de equivalencia: $[1] = [3] = [5] = \{1,3,5\}$, $[2] = \{2\}$, $[4] = \{4\}$

7. No es una relación de equivalencia (no es transitiva ni reflexiva)

9. $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$, $[1] = [2] = \{1,2\}$, $[3] = [4] = \{3,4\}$

12. $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4)\}$, $[1] = [2] = [3] = \{1,2,3\}$, $[4] = \{4\}$

16. $\{1\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,3,4\}$

18. (a) {San Francisco, San Diego, Los Ángeles}, {Pittsburgh, Philadelphia}, {Chicago}

21. $R = \{(x,x) \mid x \in X\}$

24. (b) $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9),(1,10),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(7,1),(8,1),(9,1),(10,1)$

27. (a) Sólo mostraremos la simetría. Sean $(x,y) \in R_1 \cap R_2$. Entonces $(x,y) \in R_1$ y $(x,y) \in R_2$. Como R_1 y R_2 son simétricas, $(y,x) \in R_1$ y $(y,x) \in R_2$. Así, $(y,x) \in R_1 \cap R_2$ y por lo tanto, $R_1 \cap R_2$ es simétrica.

(b) A es una clase de equivalencia de $R_1 \cap R_2$ si y sólo si existen clases de equivalencia A_1 de R_1 y A_2 de R_2 tales que $A = A_1 \cap A_2$.

30. (b) Toro

31. $\rho(R_1) = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(3,4),(4,2)\}$

$\sigma(R_1) = \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,4),(4,3),(4,2),(2,4)\}$

$\tau(R_1) = \{(1,1),(1,2),(3,4),(4,2),(3,2)\}$

$\tau(\sigma(\rho(R_1))) = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,4\}\}$

34. Sean $(x,y),(y,z) \in \tau(R)$. Entonces $(x,y) \in R^m$ y $(y,z) \in R^n$. Así, $(x,z) \in R^{m+n}$. Por lo tanto, $(x,z) \in \tau(R)$ y $\tau(R)$ es transitiva.

37. Supongamos que R es transitiva. Si $(x,y) \in \tau(R) = \cup\{R^n\}$, entonces existen $x = x_0, \ldots, x_n = y \in X$ tales que $(x_{i-1}, x_i) \in R$ para $i = 1, \ldots, n$. Como R es transitiva, esto implica que $(x,y) \in R$. Así, $R \supseteq \tau(R)$. Como siempre tenemos que $R \subseteq \tau(R)$, esto implica que $R = \tau(R)$.

Supongamos que $\tau(R) = R$. Por el ejercicio 34, $\tau(R)$ es transitiva. Por lo tanto, R es transitiva.

38. Verdadero

41. Falso. Sean $R_1 = \{(1,2),(2,3)\}$, $R_2 = \{(1,3),(3,4)\}$.

44. Verdadero

Sección 2.6

1.

$$\begin{array}{c|c} & \alpha \;\; \beta \;\; \Sigma \;\; \delta \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{c|c} & 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

7. $R = \{(a,w),(a,y),(c,y),(d,w),(d,x),(d,y),(d,z)\}$

10. El criterio es: siempre que la entrada ij-ésima sea 1, $i \neq j$, entonces la entrada ji-ésima *no* es 1.

13. [Para el ejercicio 7]

$$\begin{array}{c|c} & a \;\; b \;\; c \;\; d \\ \begin{matrix}w\\x\\y\\z\end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

14. (a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) Cambiamos cada entrada distinta de cero de la parte (c) por 1 para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) $\{(1,b),(1,a),(1,c),(2,b),(3,b)\}$

17. Cada columna que contiene un 1 en el renglón x corresponde a un elemento de la clase de equivalencia que contiene a x.

Sección 2.7

1. {(1089, Suzuki, Zamora), (5620, Kaminski, Jones), (9354, Jones, Yu), (9551, Ryan, Washington), (3600, Beaulieu, Yu), (0285, Schmidt, Jones), (6684, Manacotti, Jones)}

5. EMPLEADO [Nombre]

Suzuki, Kaminski, Jones, Ryan, Beaulieu, Schmidt, Manacotti

8. COMPRADOR [Nombre]

United Supplies, ABC Unlimited, JCN Electronics, Danny's, Underhanded Sales, DePaul University

11. TEMP := COMPRADOR [Número de parte = 20A8]

TEMP [Nombre]

Underhanded Sales, Danny's, ABC Unlimited

14. TEMP1 := COMPRADOR [Nombre = Danny's]

TEMP2 := TEMP1 [Número de parte = Parte número] PROVEEDOR

TEMP2 [Departamento]

04, 96

17. TEMP1 := COMPRADOR [Nombre = JCN Electronics]

TEMP2 := TEMP1 [Número de parte = Parte número] PROVEEDOR

TEMP3 := TEMP2 [Departamento = Departamento] DEPARTAMENTO

TEMP4 := TEMP3 [Jefe = Jefe] EMPLEADO

TEMP4 := [Nombre]

Kaminski, Schmidt, Manacotti

22. Sean R_1 y R_2 dos relaciones n-arias. Supongamos que el conjunto de elementos en la i-ésima columna de R_1 y el conjunto de elementos en la i-ésima columna de R_2 provienen de un dominio común, para $i = 1, \ldots, n$. La *unión* de R_1 y R_2 es la relación n-aria $R_1 \cup R_2$.

TEMP1 := DEPARTAMENTO [Departamento = 23]

TEMP2 := DEPARTAMENTO [Departamento = 96]

TEMP3 := TEMP1 *unión* TEMP2

TEMP4 := TEMP3 [Jefe = Jefe] EMPLEADO

TEMP4 [Nombre]

Kaminski, Schmidt, Manacotti, Suzuki

Sección 2.8

1. Es una función de X en Y; dominio = X, rango = $\{a, b, c\}$; no es uno a uno ni sobre.

4. No es una función (de X en Y).

6. Ejemplo 2.8.15

9. $f \circ g = \{(1,x),(2,z),(3,x)\}$

12. (a) $f \circ f = \{(a,a),(b,b),(c,a)\}$

$f \circ f \circ f = \{(a,b),(b,a),(c,b)\}$

(b) $f^9 = f$, $f^{623} = f$

15. El máximo común divisor de m y n debe ser 1.

En las soluciones a los ejercicios 18 y 21, $a : b$ significa guardar el elemento a en la celda b.

18. 53 : 9, 13 : 2, 281 : 6, 743 : 7, 377 : 3, 20 : 10, 10 : 0, 796 : 4

21. 714 : 0, 631 : 6, 26 : 5, 373 : 1, 775 : 8, 906 : 13, 509 : 2, 2032 : 7, 42 : 4, 4 : 3, 136 : 9, 1028 : 10

24. Durante una búsqueda, si detenemos ésta en una celda vacía, tal vez podríamos no encontrar el elemento, aunque estuviese presente. La celda podría estar vacía debido a la eliminación de un elemento. Una solución consiste en marcar las celdas eliminadas y considerarlas como no vacías durante una búsqueda.

25. Falsa. Sean $g = \{(a,x),(b,x)\}$ y $f = \{(x,1)\}$.

28. Falsa. Sean $f = \{(a,z),(b,z)\}$ y $g = \{(1,a)\}$.

31. $g(S) = \{a\}$, $g(T) = \{a,c\}$, $g^{-1}(U) = \{1\}$, $g^{-1}(V) = \{1,2,3\}$

34. Si $x \in X$, entonces $x \in f^{-1}(f(\{x\}))$. Así, $\cup\{S \mid S \in \mathcal{S}\} = X$. Supongamos que,

$$a \in f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{z\})$$

para algunas $y, z \in Y$. Entonces $f(a) = y$ y $f(a) = z$. Así, $y = z$. Por lo tanto, $\mathcal{S}$ es una partición de X. La relación de equivalencia que genera esta partición está dada en el ejercicio 33.

[El caso: Si g es uno a uno, entonces $f \circ g$ es uno a uno implica que f es uno a uno.]

Supongamos que f no es uno a uno. Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ distintos tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Sea $A = \{1, 2\}$. Sea $g = \{(1, x_1), (2, x_2)\}$. En este caso, g es uno a uno, pero $f \circ g$ no lo es, y esto es una contradicción.

Si $x \in X \cap Y$, $C_{X\cap Y}(x) = 1 = 1 \cdot 1 = C_X(x)C_Y(x)$. Si $x \notin X \cap Y$, entonces $C_{X\cap Y}(x) = 0$. Como $x \notin X$ o $x \notin Y$, $C_X(x) = 0$ o $C_Y(x) = 0$. Así, $C_X(x)C_Y(x) = 0 = C_{X\cap Y}(x)$.

Si $x \in X - Y$, entonces

$$C_{X-Y}(x) = 1 = 1 \cdot [1 - 0] = C_X(x)[1 - C_Y(x)].$$

Si $x \notin X - Y$, entonces $x \notin X$ o $x \in Y$. En caso de que $x \notin X$,

$$C_{X-Y}(x) = 0 = 0 \cdot [1 - C_Y(x)] = C_X(x)[1 - C_Y(x)].$$

En caso de que $x \in Y$,

$$C_{X-Y}(x) = 0 = C_X(x)[1 - 1] = C_X(x)[1 - C_Y(x)].$$

Así, la ecuación es válida para todo $x \in U$.

$C_{X\Delta Y}(x) = C_X(x) + C_Y(x) - 2C_X(x)C_Y(x)$

Un conjunto es equivalente a sí mismo por medio de la función identidad.

Si X es equivalente a Y, existe una función, f, uno a uno y sobre X de Y. Ahora, f^{-1} es una función uno a uno y sobre de Y en X.

Si X es equivalente a Y, existe una función, f, uno a uno y sobre X en Y. Si Y es equivalente a Z, existe una función, g, uno a uno y sobre Y en Z. Ahora, $g \circ f$ es una función uno a uno y sobre g de X en Z.

Suponga que X es equivalente a $P(X)$. Entonces existe una función, f, uno a uno y sobre X en $P(X)$. Sea

$$Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Entonces $f(y) = Y$ para algún $y \in X$. Considere las posibilidades $y \in Y$ y $y \notin Y$.

f es un operador binario conmutativo.

f no es un operador binario, pues $f(x, 0)$ no está definido.

$g(x) = -x$

Cada renglón debe contener exactamente un 1 para que la relación sea una función.

Verdadero

Si n es un entero impar, $n = 2k - 1$ para algún entero k. Ahora,

$$\frac{n^2}{4} = \frac{(2k-1)^2}{4} = \frac{4k^2 - 4k + 1}{4} = k^2 - k + \frac{1}{4}.$$

Como $k^2 - k$ es un entero,

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = k^2 - k.$$

De esto se sigue el resultado, pues

$$\frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2} = \frac{(2k-1)-1}{2}\frac{2k-1+1}{2}$$
$$= \frac{(2k-1)^2 - 1}{4}$$
$$= \frac{4k^2 - k}{4} = k^2 - k.$$

69. Abril y julio

Capítulo 2 Autoevaluación

1. $\varnothing$

2. 256, 255

3. $A \subseteq B$

4. Sí

5. (a) 14
(b) 18
(c) 192
(d) $a_{nk} = 4k$

6. $\displaystyle\sum_{k=-1}^{n-2} (n-k-2)\, r^{k+2}$

7. (a) $b_5 = 35, b_{10} = 120$
(b) $(n+1)^2 - 1$
(c) Sí
(d) No

8. (a) *ccddcccdd*
(b) *cccddccddc*
(c) 5
(d) 20

9. 150

10. 11010110, 1AE

11. 1000010

12. 3129

13. Reflexiva, simétrica, transitiva

14. Simétrica

15. $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3)\}$

16. Todas las relaciones de los contraejemplos están definidas en $\{1, 2, 3\}$.
(a) Falsa. $R = \{(1, 1)\}$.
(b) Verdadera
(c) Verdadera
(d) Falsa. $R = \{(1, 1)\}$.

17. Sí. Es reflexiva, simétrica y transitiva.

18. $[3] = \{3, 4\}$. Existen dos clases de equivalencia.

19. $\{(a,a), (b,b), (b,d), (b,e), (d,b), (d,d), (d,e), (e,b), (e,d), (e,e), (c,c)\}$

20. (a) R es reflexiva, pues cualquier cadena de ocho bits tiene el mismo número de ceros que ella misma.

R es simétrica, pues si s_1 y s_2 tienen el mismo número de ceros, entonces s_2 y s_1 tienen el mismo número de ceros.

Para ver que R es transitiva, supongamos que s_1 y s_2 tienen el mismo número de ceros y que s_2 y s_3 tienen el mismo número de ceros. Entonces s_1 y s_3 tienen el mismo número de ceros. Por lo tanto, R es una relación de equivalencia.

(b) Hay nueve clases de equivalencia.

(c) 11111111, 01111111, 00111111, 00011111, 00001111, 00000111, 00000011, 00000001, 00000000

21. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

25. ASIGNACIÓN [Equipo]
Blue Sox, Mutts, Jackalopes

26. JUGADOR [Nombre, Edad]
Johnsonbaugh, 22; Glover, 24; Battey, 18; Cage, 30; Homer, 37; Score, 22; Johnsonbaugh, 30; Singleton, 31

27. TEMP1 := JUGADOR [Posición]
TEMP2 := TEMP1 [Número de identificación = Número de identificación del jugador] ASIGNACIÓN
TEMP2 [Equipo]
Mutts, Jackalopes

28. TEMP1 := JUGADOR [Edad ≥ 30]
TEMP2 := TEMP1 [Número de identificación = Número de identificación del jugador] ASIGNACIÓN
TEMP2 [Equipo]
Blue Sox, Mutts

29. f no es uno a uno. f es sobre.

30. $x = y = 2.3$

31. Defina f de $X = \{1, 2\}$ en $\{3\}$ como $f(1) = f(2) = 3$. Defina g de $\{1\}$ en X como $g(1) = 1$.

32. ($a : b$ significa guardar el elemento a en la celda b.) 1 : 1 748 : 4, 18 : 5, 329 : 6, 43 : 7, 281 : 8, 620 : 9, 1141 : 10, 31 : 11, 684 : 12

Sección 3.1

1. Si $a < b$ entonces $x := a$, en caso contrario, $x := b$.
Si $c < x$ entonces $x := c$.

Sección 3.2

1. Entrada: La sucesión $s_1, s_2, \ldots, s_n$ y la longitud n de s
Salida: *small*, el menor elemento de la sucesión

```
procedure find_small(s, n)
  small := s1
  i := 2
  while i ≤ n do
    begin
    if si < small then
      small := si
    i := i + 1
    end
  return(small)
end find_small
```

4. Entrada: La sucesión $s_1, s_2, \ldots, s_n$ y la longitud n de s
Salida: *small*, el menor elemento de la sucesión
large, el mayor elemento de la sucesión

```
procedure small_large(s, n, small, large)
  small := s1
  large := s1
  i := 2
  while i ≤ n do
    begin
    if si < small then
      small := si
    if si > large then
      large := si
    i := i + 1
    end
end small_large
```

7. Entrada: La sucesión $s_1, s_2, \ldots, s_n$, la longitud n de s y *key*, el valor por encontrar
Salida: El índice de la primera aparición del valor *key* en la sucesión

```
procedure find(s, n, key)
  i := 1
  while i ≤ n do
    begin
    if si = key then
      return(i)
    i := i + 1
    end
  return(0)
end find
```

10. Entrada: La sucesión $s_1, s_2, \ldots, s_n$ y la longitud n de s
Salida: El índice del primer elemento que sea mayor que su predecesor. Si ninguno cumple esto, la salida es 0.

```
procedure check_order(s, n)
  i := 2
  while i ≤ n do
   begin
   if s_i > s_{i-1} then
     return(i)
   i := i + 1
   end
  return(0)
end check_order
```

12. En este algoritmo, 0^k denota k ceros.

Entrada: $s_n s_{n-1} \cdots s_1, t_m t_{m-1} \cdots t_1$, dos números decimales; n y m

Salida: El producto de s y t

```
procedure product(s, t, n, m)
 for i := 1 to m do
  begin
  carry := 0
  for j := 1 to n do
   begin
   xy := representación decimal
     de carry + t_i s_j
   u_ij := y
   carry := x
   end
  u_{i,n+i} := carry
  end
 prod := 0
 for i := 1 to m do
   prod := prod + u_{i,n+i} ··· u_{i1} 0^{i-1}
 return(prod)
end product
```

15. Entrada: A, la matriz $m \times n$ de la relación R; m y n

Salida: **true**, si R es una función
false, si R no es una función

```
procedure is_function(A, m, n)
 for i := 1 to m do
  begin
  sum := 0
  for j := 1 to n do
   sum := sum + A_ij
  if sum ≠ 1 then
   return(false)
  end
 return(true)
end is_function
```

Sección 3.3

1. $45 = 6 \cdot 7 + 3$ 4. $221 = 17 \cdot 13 + 0$

7. Divida 90 entre 60 para obtener
$90 = 60 \cdot 1 + 30$.
Así, $\text{mcd}(90, 60) = \text{mcd}(60, 30)$.
Divida 60 entre 30 para obtener $60 = 30 \cdot 2 + 0$.
Así, $\text{mcd}(60, 30) = \text{mcd}(30, 0) = 30$.
Por lo tanto, $\text{mcd}(60, 90) = 30$.

10. 15 13. 1 16. 1

17. Como $c \mid m$, $m = cq_1$ para algún entero q_1.
Como $c \mid n$, $n = cq_2$ para algún entero q_2. Ahora,
$$m - n = cq_1 - cq_2 = c(q_1 - q_2).$$
Por lo tanto, $c \mid (m - n)$.

20. Sea m un divisor común de a y de b. Por el teorema 3.3.4a, m divide a $a + b$. Así, m es un divisor común de a y de $a + b$.

Sea m un divisor común de a y de $a + b$. Por el teorema 3.3.4b, m divide a $(a + b) - a = b$. Así, m es un divisor común de a y b.

Como el conjunto de divisores comunes de a y $a + b$ es igual al conjunto de divisores comunes de a y b, mcd $(a, b) = \text{mcd}(a, a + b)$.

23. Si p divide a a, hemos terminado; así que podemos suponer que p no divide a a. Debemos mostrar que p divide a b. Como p es primo, $\text{mcd}(p, a) = 1$. Por el ejercicio 21, existen enteros s y t tales que
$$1 = sp + ta.$$
Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por b, obtenemos
$$b = spb + tab.$$
Por el teorema 3.3.4c, p divide a spb y p divide a tab. Por el teorema 3.3.4a, p divide a $spb + tab = b$.

26. Entrada: a y b (enteros no negativos, no ambos iguales a cero)

Salida: El máximo común divisor de a y b.

```
procedure sub_gcd(a, b)
 while true do
  begin
  if a < b then
   swap(a, b)
  if b = 0 then
   return(a)
  a := a − b
  end
end sub_gcd
```

Sección 3.4

1. (a) En la línea 2, como $4 \neq 0$, pasamos a la línea 4. El algoritmo se llama con la entrada 3.
(b) En la línea 2, como $3 \neq 0$, pasamos a la línea 4. El algoritmo se llama con la entrada 2.
(c) En la línea 2, como $2 \neq 0$, pasamos a la línea 4. El algoritmo se llama con la entrada 1.
(d) En la línea 2, como $1 \neq 0$, pasamos a la línea 4. El algoritmo se llama con la entrada 0.
(e) En las líneas 2 y 3, como $0 = 0$, regresamos 1.
La ejecución regresa a la parte (d) en la línea 4, después de calcular $0!\ (= 1)$. Regresamos $0! \cdot 1 = 1$.
La ejecución regresa a la parte (c) en la línea 4, después de calcular $1!\ (= 1)$. Regresamos $1! \cdot 2 = 2$.
La ejecución regresa a la parte (b) en la línea 4, después de calcular $2!\ (= 2)$. Regresamos $2! \cdot 3 = 6$.
La ejecución regresa a la parte (a) en la línea 4, después de calcular $3!\ (= 6)$. Regresamos $3! \cdot 4 = 24$.

4. En la línea 1, como $5 < 0$ es falsa, pasamos a la línea 3. En la línea 3, como $b = 0$, regresamos 5.

7. (a) Entrada: n
Salida: $2 + 4 + \cdots + 2n$

```
1. procedure sum(n)
2.   if n = 1 then
3.     return(2)
4.   return(sum(n − 1) + 2n)
   end(sum)
```

(b) **PASO BASE** ($n = 1$). Si n es igual a 1, regresamos 2 de manera correcta.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que el algoritmo calcula en forma correcta la suma, cuando la entrada es $n - 1$. Ahora, supongamos que la entrada de este algoritmo es $n > 1$. En la línea 2, como $n \neq 1$, pasamos a la línea 4, donde llamamos al algoritmo con entrada $n - 1$. Por la hipótesis de inducción, el valor regresado $sum(n - 1)$ es igual a
$$2 + \cdots + 2(n - 1).$$
Luego, en la línea 4 regresamos
$$sum(n - 1) + 2n = 2 + \cdots + 2(n - 1) + 2n,$$
que es el valor correcto.

10. Entrada: n
Salida: $n!$

```
procedure factorial(n)
 fact := 1
 for i := 2 to n do
  fact := i · fact
 return(fact)
end factorial
```


13. Después de un mes, sigue habiendo una pareja, pues una pareja no puede reproducirse sino hasta transcurrir un mes. Por lo tanto, $a_1 = 1$. Después de dos meses, la pareja viva desde el principio puede reproducirse y agrega otra pareja. Por lo tanto, $a_2 = 2$. El incremento en parejas de conejos $a_n - a_{n-1}$ del mes $n - 1$ al mes n se debe a que cada pareja viva en el mes $n - 2$ produce una pareja adicional. Es decir, $a_n - a_{n-1} = a_{n-2}$. Como $\{a_n\}$ satisface las mismas relaciones de recurrencia que $\{f_n\}$ y las mismas condiciones iniciales, $a_n = f_n$, $n \geq 1$.

16. **PASO BASE** ($n = 2$)
$$f_2^2 = 4 = 1 \cdot 3 + 1 = f_1 f_3 + (-1)^2$$
PASO INDUCTIVO
$$\begin{aligned} f_n f_{n+2} + (-1)^{n+1} &= f_n(f_{n+1} + f_n) + (-1)^{n+1} \\ &= f_n f_{n+1} + f_n^2 + (-1)^{n+1} \\ &= f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_{n+1} \\ &\quad + (-1)^n + (-1)^{n+1} \\ &= f_{n+1}(f_n + f_{n-1}) = f_{n+1}^2 \end{aligned}$$

19. **PASO BASE** ($n = 1, 2$). $f_1\ (= 1)$ es impar y 2 no es divisible entre 3. $f_2\ (= 2)$ es par y 3 es divisible entre 3. Por lo tanto, la afirmación es verdadera para $n = 1, 2$.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que la afirmación es verdadera para toda $k < n$. Debemos demostrar que la afirmación es verdadera para n. Podemos suponer que $n > 2$. Consideremos dos casos: $n + 1$ es divisible entre 3 y $n + 1$ no es divisible entre 3.

Si $n + 1$ es divisible entre 3, entonces n y $n - 1$ no son divisibles entre 3. Por la hipótesis de inducción, uno de los términos f_{n-1} o f_{n-2} es impar. Como $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, f_n es par. Por lo tanto, si $n + 1$ es divisible entre 3, f_n es par.

Ahora supongamos que $n + 1$ no es divisible entre 3; entonces exactamente uno de los valores n o $n - 1$ es divisible entre 3. Por la hipótesis de inducción, uno de los términos f_{n-1} o f_{n-2} es impar y el otro es par. Como $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, f_n es impar. Por lo tanto, si $n + 1$ no es divisible entre 3, f_n es impar.

Hemos mostrado que f_n es par si y sólo si $n + 1$ es divisible entre 3, lo cual concluye el paso inductivo.

22. Sólo mostraremos la primera fórmula. La segunda se demuestra de manera análoga.

PASO BASE
$$f_1 = 1 = 2 - 1 = f_2 - 1$$
PASO INDUCTIVO
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} f_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} + f_{2n+1} \\ &= (f_{2n} - 1) + f_{2n+1} = f_{2n+2} - 1 \end{aligned}$$

26. **PASO BASE**

$$\frac{dx}{dx} = 1 = 1x^{1-1}$$

PASO INDUCTIVO

$$\frac{dx^{n+1}}{dx} = \frac{d(x \cdot x^n)}{dx} = x\frac{dx^n}{dx} + x^n\frac{dx}{dx}$$
$$= xnx^{n-1} + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n$$

Sección 3.5

1. $\Theta(n)$ 4. $\Theta(n^2)$
7. $\Theta(n^2)$ 10. $\Theta(n)$
3. $\Theta(n^2)$ 16. $\Theta(n)$
9. $\Theta(n^2)$ 22. $\Theta(n^3)$
5. $\Theta(\lg n)$
0. $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$
$\leq n \cdot n \cdots n = n^n$
3. Verdadera
6. Falsa. Un contraejemplo es $f(n) = n$ y $g(n) = 2n$.
9. Verdadera
2. Falsa. Un contraejemplo es $f(n) = 1$ y $g(n) = 1/n$.
3. $f_n = \begin{cases} 1, \text{ si } n \text{ es par} \\ 0, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$
5. La desigualdad dada es equivalente, a su vez, a

$$(n/2)[(\lg n) - 1] \geq (n \lg n)/4$$
$$2[(\lg n) - 1] \geq \lg n$$
$$\lg n \geq 2.$$

La última desigualdad es una igualdad si $n = 4$. Como $\lg n$ es una función creciente, la última desigualdad es válida si $n \geq 4$. Así, la desigualdad dada es válida para $n \geq 4$.

. (a) La suma de las áreas de los rectángulos debajo de la curva es igual a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Esta área es menor que el área bajo la curva, que es igual a

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log_e n.$$

La desigualdad dada es ahora una consecuencia inmediata.

(b) La suma de las áreas de los rectángulos cuyas bases están sobre el eje x y cuyas partes superiores están sobre la curva es igual a

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

Como esta área es mayor que el área bajo la curva, la desigualdad dada es ahora una consecuencia inmediata.

(c) La parte (a) muestra que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = O(\log_e n).$$

Como $\log_e n = \Theta(\lg n)$ (véase el ejercicio 29),

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = O(\lg n).$$

De manera análoga, podemos concluir de la parte (b) que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \Omega(\lg n).$$

Por lo tanto

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \Theta(\lg n).$$

52. (a) Verdadera
(b) Falsa. Un contraejemplo es
$$f(n) = 1, g(n) = 2 + (-1)^n.$$
(c) Falsa. Un contraejemplo es
$$f(n) = n, g(n) = n^2.$$
(d) Verdadera
(e) Falsa. Un contraejemplo es
$$f(n) = 1, g(n) = 2 + (-1)^n.$$

55. Multiplique ambos lados de la desigualdad del ejercicio 54 por $\lg e$ y utilice la fórmula del cambio de base para logaritmos.

Sección 3.6

1.

a \ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	–	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	0	1	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
4	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	1	2
5	0	1	2	3	2	1	2	3	4	3	1	2	3	4
6	0	1	1	1	2	2	1	2	2	2	3	3	1	2
7	0	1	2	2	3	3	2	1	2	3	3	4	4	3
8	0	1	1	3	1	4	2	2	1	2	2	4	2	5

a b	n (= Número de divisiones)
1 0	0
2 1	1
3 2	2
5 3	3
8 5	4
13 8	5

4. Utilizamos inducción sobre n para demostrar que cuando la pareja f_{n+1}, f_n se introduce como entrada en el algoritmo de Euclides se necesitan exactamente n divisiones.

PASO BASE ($n = 1$). La tabla 3.6.2 muestra que cuando la pareja f_2, f_1 se introduce como entrada en el algoritmo de Euclides, se necesita una división.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que cuando la pareja f_{n+1}, f_n se introduce como entrada en el algoritmo de Euclides, se necesitan exactamente n divisiones. Debemos mostrar que cuando la pareja f_{n+2}, f_{n+1} se introduce como entrada en el algoritmo de Euclides, se necesitan $n + 1$ divisiones.

En la línea 7, dividimos f_{n+2} entre f_{n+1} para obtener

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Luego, el algoritmo se repite utilizando los valores de f_{n+1} y f_n. Por la hipótesis de inducción, se necesitan exactamente n divisiones adicionales. Así, se necesita un total de $n + 1$ divisiones.

Sección 3.7

1. FKKGEJAIMWQ
4. $a = c^s \bmod z = 411^{569} \bmod 713 = 500$
5. $z = pq = 17 \cdot 23 = 391$
8. $c = a^n \bmod z = 101^{31} \bmod 391 = 186$
11. Este algoritmo calcula $a^n \bmod z$.

Entrada: a, n, z

Salida: $a^n \bmod z$

procedure *exp_mod*(a, n, z)
exp := 1
$x := a \bmod z$
while $n > 0$ **do**
begin
if n es impar **then**
exp := (*exp* $\cdot x$) mod z
$x := (x \cdot x) \bmod z$
$n := n/2$
end
return(*exp*)
end *exp_mod*

14. Utilizamos el algoritmo de Euclides para obtener

$$660 = 22 \cdot 29 + 22, 29 = 22 \cdot 1 + 7, 22 = 3 \cdot 7 + 1.$$

Por lo tanto,

$$1 = 22 - 3 \cdot 7 = 22 - 3(29 - 22) = 4 \cdot 22 - 3 \cdot 29$$
$$= 4(660 - 22 \cdot 29) - 3 \cdot 29 = 4 \cdot 660 - 91 \cdot 29.$$

Así, $s = 91 \cdot 659 \bmod 660 = 569$.

Capítulo 3 Autoevaluación

1. En la línea 1, hacemos x igual a 12. En la línea 2, como $b > x$ $(3 > 12)$ es falsa, pasamos a la línea 3. En la línea 3, como $c > x$ $(0 > 12)$ es falsa, concluimos el algoritmo. El valor de x es 12, el máximo de los valores dados.

2. 1. $x := a, y := b, z := c$
   2. Si $y < x$, swap (x, y)
   3. Si $z < x$, swap (x, z)
   4. Si $y > z$, swap (y, z)

3. 1. Si $a = b$, la salida es "No" y termina.
   2. Si $a = c$, la salida es "No" y termina.
   3. Si $b = c$, la salida es "No" y termina.
   4. La salida es "Sí".

4. Si el conjunto S es infinito, el algoritmo no terminará jamás, de modo que no tiene carácter finito y carece de la propiedad relativa a la salida. La línea 1 no está enunciada de manera precisa, pues la *forma* de enumerar los subconjuntos de S y sus sumas no se ha especificado; así, el algoritmo no es preciso. El orden de los subconjuntos enumerados en la línea 1 depende del método utilizado para generarlos, de modo que el algoritmo carece de la propiedad de unicidad. Como la línea 2 depende del orden de los subconjuntos generados en la línea 1, aquí falla también la propiedad de unicidad.

5. En la línea 2, hacemos *large* igual a 7. En la línea 3, hacemos i igual a 2. En la línea 6, como $s_2 > large$ $(9 > 7)$ es verdadera, hacemos *large* igual a 9. En la línea 6, como $s_3 > large$ $(17 > 9)$ es verdadera, hacemos *large* igual a 17. En la línea 6, como $s_4 > large$ $(7 > 17)$ es falsa, regresamos el valor 17.

6. Entrada: La matriz de tamaño $n \times n$ de una relación R y n

Salida: **true**, si R es simétrica
false, si R no es simétrica

```
procedure is_symmetric(A, n)
 for i := 1 to n − 1 do
  for j := i + 1 to n do
   if A_ij ≠ A_ji then
  return(false)
 return(true)
end is_symmetric
```

7. Entrada: La matriz A de tamaño $n \times n$ y n

Salida: A^T

```
procedure transpose(A, n)
 for i := 1 to n − 1 do
  for j := i + 1 to n do
   swap(A_ij, A_ji)
end transpose
```

8. Entrada: $s_1, \ldots, s_n$ y n

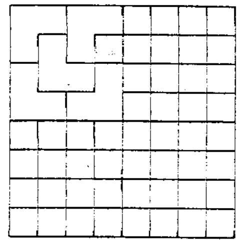
Salida: Todos los valores repetidos

```
procedure repeat(s, n)
 i := 1
 j := 2
 while j ≤ n do
  begin
  if s_i := s_j then
   begin
   print s_i
   while j ≤ n and s_i := s_j do
    j := j + 1
   end
  i := j
  j := j + 1
  end
end repeat
```

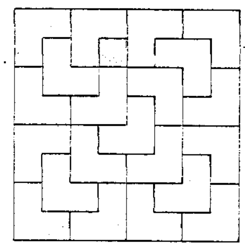
9. $333 = 24 \cdot 13 + 21$ **10.** 12

11. 2 **12.** mcd(b, r)

13. Como $n \neq 2$, pasamos de inmediato a la línea 3, donde dividimos al tablero en cuatro tableros 4×4. En la línea 4, giramos el tablero de modo que el cuadrado faltante esté en el cuadrante superior izquierdo, y llamamos al algoritmo para cubrir el subtablero superior izquierdo. La siguiente figura muestra el estado de la ejecución en este punto:



A continuación, en la línea 5, colocamos un triominó en el centro. Luego pasamos a las líneas 5–9, donde llamamos al algoritmo para cada uno de los subtableros restantes. Obtenemos el siguiente mosaico:



14. $t_4 = 3, t_5 = 5$

15. Entrada: n, un entero mayor o igual a 1

Salida: t_n

```
procedure tribonacci(n)
1. if n = 1 or n = 2 or n = 3 then
2.   return(1)
3. return(tribonacci(n − 1)
    +(tribonacci(n − 2)
    +(tribonacci(n − 3)
end tribonacci
```

16. PASO BASE ($n = 1, 2, 3$). Si $n = 1, 2, 3$, la salida de las líneas 1 y 2 tiene el valor correcto, 1. Por lo tanto, el algoritmo es correcto en estos casos.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que $n > 3$ y que el algoritmo calcula de manera correcta t_k, si $k < n$. Como $n > 3$, pasamos a la línea 3. Luego llamamos a este algoritmo para calcular t_{n-1}, t_{n-2} y t_{n-3}. Por la hipótesis de inducción, los valores calculados son correctos. El algoritmo calcula entonces $t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$. Pero la relación de recurrencia muestra que este valor es igual a t_n. Por lo tanto, el algoritmo calcula el valor correcto para t_n.

17. $\Theta(n^3)$ **18.** $\Theta(n^4)$ **19.** $\Theta(n^2)$

20. Entrada: A y B, matrices de $n \times n$, y n

Salida: **true**, si $A = B$; **false**, si $A \neq B$

```
procedure equal_matrix(A, B, n)
 for i := 1 to n do
  for j := 1 to n do
   if A_ij ≠ B_ij then
    return(false)
 return(true)
end equal_matrix
```

El tiempo en el peor de los casos es $\Theta(n^2)$.

21. Mostraremos que se necesitan 14 divisiones para el algoritmo de Euclides, en el peor de los casos, para números entre 0 y 1000. Por el teorema 3.6.1, si el par $a, b, a > b$, necesita 15 divisiones, entonces $a \geq f_{16} = 1597$. Por lo tanto, se necesitan a lo más 14 divisiones. Por el ejercicio 4 de la sección 3.6, cuando el par $f_{15} = 987$, $f_{14} = 610$ se utiliza como entrada para el algoritmo de Euclides, se necesitan exactamente 14 divisiones. Por lo tanto, se necesitan precisamente 14 divisiones en el algoritmo de Euclides, para el peor de los casos, para los números entre 0 y 1000.

22. El algoritmo de Euclides (algoritmo 3.3.8) necesita dos divisiones para calcular mcd(2,76652913). En la línea 4, intercambiamos a y b de modo que $a = 76652913$ y $b = 2$. Como $b \neq 0$, pasamos a la línea 7. La primera división ocurre al dividir 76652913 entre 2 para obtener

$$76652913 = 2 \cdot 38326456 + 1.$$

En las líneas 8 y 9, hacemos a igual a 2 y b igual a 1. Luego regresamos a la línea 5.

Como $b \neq 0$, pasamos a la línea 7. La segunda división ocurre cuando dividimos 2 entre 1 para obtener

$$2 = 1 \cdot 2 + 0.$$

En las líneas 8 y 9, hacemos a igual a 1 y b igual a 0. Luego regresamos a la línea 5.

Esta vez, $b = 0$, de modo que el algoritmo termina. Se realizaron dos divisiones.

23. 323 (véase el ejercicio 4, sección 3.6)

24. Como

$$\begin{aligned}\log_{3/2} \frac{2(100,000,000)}{3} &= \log_{3/2} 100^4 + \log_{3/2} \frac{2}{3}\\ &= 4\log_{3/2} 100 - 1\\ &= 4(11.357747) - 1\\ &= 44.430988,\end{aligned}$$

una cota superior para el número de divisiones que necesita el algoritmo de Euclides para los enteros en el rango 0 a 100,000,000 es 44.

25. $z = pq = 13 \cdot 7 = 221$, $\phi = (p-1)(q-1) = 12 \cdot 16 = 192$

26. $ns \bmod \phi = 19 \cdot 91 \bmod 192 = 1729 \bmod 192 = 1$

27. $c = a^n \bmod z = 144^{19} \bmod 221 = 53$

28. $a = c^s \bmod z = 28^{91} \bmod 221 = 63$

Sección 4.1

1. $2 \cdot 4$ **4.** $8 \cdot 4 \cdot 5$ **7.** 8^2

10. $6 + 2$ **13.** 11 **16.** $10 \cdot 5$

19. $26^3 10^2, 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9$

22. $3 \cdot 2^6$ **25.** $2^8 - 1$ **27.** $5 \cdot 4 \cdot 3$

30. $3 \cdot 4 \cdot 3$ **33.** 5^3 **36.** $4 \cdot 3$

39. $5^3 - 4^3$ **41.** $200 - 5 + 1$ **44.** 40

47. Un número con 1 dígito contiene al 7. Los números distintos de dos dígitos, que contienen al 7, son $17, 27, \ldots, 97$ y $70, 71, \ldots, 76, 78, 79$. Existen 18 números de este tipo. Los números distintos de tres dígitos que contienen a 7 son 107 y $1xy$, donde xy es uno de los números de dos dígitos ya mencionados. La respuesta es $1 + 18 + 19$.

50. $5 + (8 + 7 + \cdots + 1) + (7 + 6 + \cdots + 1)$

53. 10! **56.** $(3!)(5!)(2!)(3!)$ **60.** 2^{10}

63. Contamos el número de relaciones antisimétricas en $\{1, 2, \ldots, n\}$ calculando el número de formas de construir la matriz de una relación antisimétrica.

Cada elemento de la diagonal puede ser 0 o 1. Así, existen 2^n formas de asignar valores a la diagonal.

Para i y j tales que $1 \leq i < j \leq n$, podemos asignar las entradas del renglón i, columna j y del renglón j, columna i, de tres formas:

Renglón i, columna j	*Renglón j, columna i*
0	0
1	0
0	1

Como existen $(n^2 - n)/2$ valores de i y j que satisfacen $1 \leq i < j \leq n$, podemos asignar los valores fuera de la diagonal de $3^{(n^2-n)/2}$. Por lo tanto, existen

$$2^n \cdot 3^{(n^2-n)/2}$$

relaciones antisimétricas en un conjunto de n elementos.

65. $2^5 + 2^7 - 2^4$ (De acuerdo con el ejercicio 64, el número total de posibilidades es igual al número de cadenas que comienzan con 100 + el número de cadenas que tienen el cuarto bit igual a uno menos el número de cadenas que comienzan con 100 y que tienen el cuarto bit igual a 1.)

68. $5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 4 - 2 \cdot 4$ (De acuerdo con el ejercicio 64, el número total de posibilidades es igual al número en que

Connie es presidente + número en que Alice tiene un puesto − número en que Connie es presidente y Alice tiene un puesto.)

Sección 4.2

1. $4! = 24$

4. *abc, acb, bac, bca, cab, cba, abd, adb, bad, bda, dab, dba, acd, adc, cad, cda, dac, dca, bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb*

7. $P(11, 3) = 11 \cdot 10 \cdot 9$ **10.** $3!$

13. $4!$ contienen la subcadena *AE* y $4!$ contienen la subcadena *EA*; por lo tanto, el número total es $2 \cdot 4!$.

16. Primero contamos el número *N* de cadenas que contienen a la subcadena *AB* o a la subcadena *BE*. La respuesta al ejercicio será: Número total de cadenas − *N*, o bien $5! - N$.

De acuerdo con el ejercicio 64, sección 4.1, el número de cadenas que contienen a *AB* o *BE* es igual al número de cadenas que contienen a *AB* más el número de cadenas que contienen a *BE* menos el número de cadenas que contienen a *AB* y *BE*. Una cadena contiene a *AB* y *BE* si y sólo si contiene a *ABE* el número de tales cadenas es $3!$. El número de cadenas que contienen a *AB* es igual al número de cadenas que contienen a $BE = 4!$. Así, el número de cadenas que contienen a *AB* o a *BE* es $4! + 4! - 3!$. La solución del ejercicio es

$$5! - (2 \cdot 4! - 3!).$$

19. $8!\,P(9, 5) = 8!(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)$

21. $10!$

24. Fijamos un asiento para un jupiteriano. Existen $7!$ arreglos para los demás jupiterianos. Para cada uno de estos arreglos podemos colocar a los marcianos en cinco de las ocho posiciones intermedias, lo cual se puede hacer de $P(8, 5)$ formas. Así, existen $7!P(8, 5)$ arreglos de este tipo.

25. $C(4, 3) = 4$

28. $C(11, 3)$

31. $C(13, 5)$

34. Un comité que tiene a lo más un hombre tiene exactamente un hombre o ningún hombre. Existen $C(6, 1)C(7, 3)$ comités con exactamente un hombre. Existen $C(7, 4)$ comités sin hombres. Así, la respuesta es $C(6, 1)C(7, 3) + C(7, 4)$.

37. $C(10, 4)C(12, 3)C(4, 2)$

40. En primer lugar, contamos el número de cadenas de ocho bits sin dos ceros consecutivos. Separamos este problema en el problema de contar el número de cadenas de este tipo con exactamente ocho unos, con exactamente siete unos, y así sucesivamente.

Existe una cadena de ocho bits sin dos ceros consecutivos, la cual tiene exactamente ocho unos. Supongamos que una cadena de ocho bits sin ceros consecutivos tiene exactamente siete unos. El 0 puede aparecer en cualquiera de las ocho posiciones; así, existen ocho cadenas de este tipo. Supongamos que una cadena de ocho bits sin ceros consecutivos tiene exactamente seis unos. Los dos ceros deben ir en alguno de los espacios que se muestran:

$$\_1\_1\_1\_1\_1\_1\_.$$

Así, los dos ceros se pueden colocar de $C(7, 2)$ formas. Así, existen $C(7, 2)$ cadenas de este tipo. De manera análoga, existen $C(6, 3)$ cadenas de ocho bits sin ceros consecutivos que tienen exactamente cinco unos y existen $C(5, 4)$ cadenas de ocho bits sin ceros consecutivos que tienen exactamente cuatro unos consecutivos. Si una cadena tiene menos de cuatro unos, tendrá dos ceros consecutivos. Por lo tanto, el número de cadenas de ocho bits sin ceros consecutivos es

$$1 + 8 + C(7, 2) + C(6, 3) + C(5, 4).$$

Como existen 2^8 cadenas de ocho bits, existen

$$2^8 - [1 + 8 + C(7, 2) + C(6, 3) + C(5, 4)]$$

cadenas de ocho bits que contienen al menos dos ceros consecutivos.

41. $1 \cdot 48$ (Los cuatro ases se pueden elegir de una forma y la quinta carta se puede elegir de 48 formas.)

44. En primer lugar, contamos el número de manos que contienen cartas con espadas y corazones. Como existen 26 espadas y corazones, existen $C(26, 5)$ formas de elegir cinco cartas entre estas 26. Sin embargo, $C(13, 5)$ sólo contienen espadas y $C(13, 5)$ sólo contienen corazones. Por lo tanto, existen

$$C(26, 5) - 2C(13, 5)$$

formas de elegir cinco cartas que contengan espadas y corazones.

Como existen $C(4, 2)$ formas de elegir dos palos, el número de manos que contienen cartas de exactamente dos palos es

$$C(4, 2)[C(26, 5) - 2C(13, 5)].$$

47. Existen nueve patrones consecutivos: A2345, 23456, 34567, 45678, 56789, 6789D, 789DJ, 89DJQ, 9DJQK. Para los cuatro palos posibles, existen cuatro formas de que ocurra cada patrón. Así, existen $9 \cdot 4$ manos que son consecutivas y del mismo palo.

50. $C(52, 13)$

53. $1 \cdot C(48, 9)$ (Se eligen los ases y luego se eligen las restantes 9 cartas.)

56. Existen $C(13, 4)C(13, 4)C(13, 4)C(13, 1)$ manos que contienen cuatro espadas, cuatro corazones, cuatro diamantes y un trébol. Como existen cuatro formas de elegir los tres palos para tener cuatro cartas de cada uno, existen $4C(13, 4)^3C(13, 1)$ manos que contienen cuatro cartas de tres palos y una carta del cuatro palo.

58. 2^{10} **61.** 2^9

63. $C(50, 4)$

66. $C(50, 4) - C(46, 4)$ (Número total − número de no defectuosos)

70. Ordenamos los $2n$ elementos. El primer elemento puede formar un par de $2n - 1$ formas. El siguiente elemento (aún no seleccionado) puede formar un par de $2n - 3$ formas, y así sucesivamente.

73. La solución cuenta manos *ordenadas*.

78. Utilice los teoremas 2.5.1 y 2.5.9.

Sección 4.3

1. 1357 **4.** 12435

7. [Para el ejercicio 1] En las líneas 9–14, determinamos el s_m más a la derecha, que no esté en su máximo valor. En este caso, $m = 4$. En la línea 16 incrementamos s_m. Esto hace que el último dígito sea 7. Como *m* es la posición extrema derecha, no hacemos nada en las líneas 18 y 19. La siguiente combinación es 1357.

9. 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456

12. 12, 21

14. Entrada: r, n

Salida: Una lista de todas las r-combinaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico creciente.

```
procedure r_comb1(r, n)
  s0 := −1  // suponga que s0 existe
  for i := 1 to r do
    si := i
  output s
  while true do
   begin
   m := r
   max_val := n
   while sm = max_val do
    begin
    m := m − 1
    max_val := max_val − 1
    end
   if = 0 then
    return
   sm := sm + 1
   for j := m + 1 to r do
    sj := sj−1 + 1
   output s
   end
end r_comb1
```

17. Entrada: $r, s_k, s_{k+1}, \ldots, s_n$, una cadena α, *k* y *n*

Salida: Una lista de todas las r-combinaciones de $\{s_k, s_{k+1}, \ldots, s_n\}$, cada una con α como prefijo. [Para enumerar todas las *r* combinaciones de $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, se llama a este procedimiento como $r\_comb2(r, s, 1, n, \lambda)$, donde λ es la cadena nula.]

```
procedure r_comb2(r, s, k, n, α)
 if r = 0 then
  begin
  output α
  return
  end
 if r = n then
  begin
  output α sk, sk+1, . . . , sn
  return
  end
 // produce como salida las r-combinaciones
   que contienen a sk
 β := α seguida de sk
 r_comb2(r − 1, s, k + 1, n − 1, β)
 // produce como salida las r-combinaciones
   que no contienen a sk
 r_comb2(r, s, k + 1, n − 1, α)
end r_comb2
```

Sección 4.4

1. $5!$ **4.** $10!/(5! \cdot 3! \cdot 2!)$

5. $C(10 + 3 - 1, 10)$

8. $C(9 + 2 - 1, 9)$

11. Cuatro, pues las posibilidades son (0, 0), (2, 1), (4, 2) y (6, 3), donde el par (r, v) denota *r* pelotas rojas y *v* pelotas verdes.

12. $C(15 + 3 - 1, 15)$

15. $C(13 + 2 - 1, 13)$

18. $C(12 + 4 - 1, 12)$
$- C[(7 + 4 - 1, 7) + C(6 + 4 - 1, 6)$
$+ C(3 + 4 - 1, 3) + C(2 + 4 - 1, 2)$
$- C(1 + 4 - 1, 1)]$

21. $52!/(13!)^4$ **24.** $C(20, 5)$ **27.** $C(20, 5)^2$

30. $C(15 + 6 - 1, 15)$ **33.** $C(10 + 12 - 1, 10)$

36. Aplique el resultado del ejemplo 4.4.9 a los $k - 1$ ciclos anidados interiores de ese ejemplo. A continuación, escriba el número de iteraciones para $i_1 = 1$; luego para $i_1 = 2$, y así sucesivamente. Por el ejemplo 4.4.9, esta suma es igual a $C(k + n - 1, k)$.

Sección 4.5

1. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

3. $C(11, 7)x^4y^7$ **6.** 5,987,520

9. $C(7, 3) + C(5, 2)$, pues
$(a + \sqrt{ax} + x)^2(a + x)^5$
$= [(a + x) + \sqrt{ax}]^2(a + x)^5$
$= (a + x)^7 + 2\sqrt{ax}(a + x)^6 + ax(a + x)^5$.

10. $C(10 + 3 - 1, 10)$ **13.** 1 8 28 56 70 56 28 8 1

16. [Sólo el paso inductivo] Supongamos que el teorema es verdadero para n.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$
$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1} C(n,k-1)a^{n+1-k}b^k$$
$$= C(n,0)a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n} C(n,k)a^{n+1-k}b^k + C(n,n)a^0b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C(n,k-1)a^{n+1-k}b^k$$
$$= C(n+1,0)a^{n+1}b^0 + \sum_{k=0}^{n}[C(n,k)+C(n,k-1)]a^{n+1-k}b^k + C(n+1,n+1)a^0b^{n+1}$$
$$= C(n+1,0)a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n} C(n+1,k)a^{n+1-k}b^k + C(n+1,n+1)a^0b^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} C(n+1,k)a^{n+1-k}b^k$$

19. El número de soluciones enteras no negativas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+2} = n - k$$

es $C(k + 2 + n - k - 1, n - k) = C(n + 1, k + 1)$. El número de soluciones es también el número de soluciones $C(k + 1 + n - k - 1, n - k) = C(n, k)$ con $x_{k+2} = 0$ más el número de soluciones

$C(k + 1 + n - k - 1 - 1, n - k - 1) = C(n - 1, k)$

con $x_{k+2} = 1$ más $\cdots$ más el número de soluciones $C(k + 1 + 0 - 1, 0) = C(k, k)$ con $x_{k+2} = n - k$. De aquí se sigue el resultado.

22. Sean $a = 1$ y $b = 2$ en el teorema del binomio.

25. $x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$

28. Hacemos $a = 1$ y $b = x$ y reemplazamos n por $n - 1$ en el teorema del binomio para obtener

$$(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C(n-1,k)x^k.$$

Ahora multiplicamos por n para obtener

$$n(1+x)^{n-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} C(n-1,k)x^k$$
$$= n\sum_{k=1}^{n} C(n-1,k-1)x^{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}kx^{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C(n,k)kx^{k-1}.$$

31. La solución es por inducción sobre k. Omitimos el paso base. Supongamos que la afirmación es verdadera para k. Después de k iteraciones, obtenemos la sucesión definida por

$$a'_j = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+j}\frac{B_i}{2^n}.$$

Sea $B'_0, \ldots, B'_k$ el renglón posterior a $B_0, \ldots, B_{k-1}$ en el triángulo de Pascal. Al suavizar a', mediante c para obtener a'' se tiene

$$a''j = \frac{1}{2}\left(a'_j + a'_{j+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_{i+j}B_i + \sum_{i=0}^{k-2} a_{i+j+1}B_i\right)$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(a_jB_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i+j}B_i + \sum_{i=0}^{k-2} a_{i+j+1}B_i + a_{k+j}B_{k-1}\right)$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(a_jB_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i+j}B_i + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i+j}B_{i-1} + a_{k+j}B_{k-1}\right)$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(a_jB'_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i+j}B'_i + a_{k+j}B'_k\right)$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=0}^{k} a_{i+j}B'_i,$$

lo cual completa el paso inductivo.

Sección 4.6

1. Existen 12 nombres posibles para las 13 personas. Podemos considerar la asignación de nombres a las personas como la asignación de pichoneras a los pichones. Por el principio de la pichonera o de las casillas, algún nombre está asignado al menos a dos personas.

4. Sí. Conectamos los procesadores 1 y 2, 2 y 3, 2 y 4, 3 y 4. El procesador 5 no se conecta a los demás procesadores. Ahora, sólo los procesadores 3 y 4 están conectados directamente al mismo número de procesadores.

7. Sea a_i la posición del elemento i-ésimo no disponible. Consideremos

$a_1, \ldots, a_{30};\quad a_1 + 3, \ldots, a_{30} + 3;\quad a_1 + 6, \ldots, a_{30} + 6.$

Estos 90 números varían entre 1 y 86. Por la segunda forma del principio de la pichonera, dos de estos números son iguales. Si $a_i = a_j + 3$, dos de ellos están a 3 artículos de distancia. Si $a_i + 3 = a_j + 6$, dos están a 6 artículos de distancia.

11. $n + 1$

12. Suponga que $k \le m/2$. Es claro que $k \ge 1$. Como $m \le 2n + 1$,

$$k \le \frac{m}{2} \le n + \frac{1}{2} < n + 1.$$

Suponga que $k > m/2$. Entonces

$$m - k < m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} < n + 1.$$

Como m es el máximo elemento en X, $k < m$. Así, $k + 1 \le m$ y entonces $1 \le m - k$. Por lo tanto, el rango de a está contenido en $\{1, \ldots, n\}$.

13. Se puede aplicar la segunda forma del principio de la pichonera.

14. Suponga que $a_i = a_j$. Entonces $i \le m/2$ y $j > m/2$ o $j \le m/2$ e $i > m/2$. Podemos suponer que $i \le m/2$ y $j > m/2$. Ahora,

$$i + j = a_i + m - a_j = m.$$

24. Al dividir a entre b, los residuos posibles son $0, 1, \ldots, b - 1$. Considere lo que ocurre después de b divisiones.

28. Suponemos que el tablero tiene tres renglones y siete columnas. Dos cuadrados de una columna que tengan el mismo color es un *par colorido*. Por el principio de la pichonera, cada columna contiene al menos un par colorido. Así, el tablero contiene siete pares coloridos, uno en cada columna. De nuevo, por el principio de la pichonera, al menos cuatro de estos siete pares coloridos tienen el mismo color, digamos rojo. Como existen tres pares de renglones y cuatro pares coloridos rojos, una tercera aplicación del principio de la pichonera muestra que al menos dos columnas contienen pares coloridos de color rojo. Estos pares coloridos determinan un rectángulo cuyas cuatro esquinas son rojas.

Capítulo 4 Autoevaluación

1. 2^4

2. $6 \cdot 9 \cdot 7 + 6 \cdot 9 \cdot 4 + 6 \cdot 7 \cdot 4 + 9 \cdot 7 \cdot 4$

3. $2^n - 2$

4. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

5. $6!/(3!\,3!) = 20$

6. Construimos las cadenas mediante un proceso de tres pasos. Primero elegimos las posiciones para A, C y E [$C(6, 3)$ formas]. Luego, colocamos A, C y E en esas posiciones. Podemos colocar a C de una forma (al final), y A y E de dos formas (AE o EA). Por último, colocamos las restantes tres letras (3! formas). Por lo tanto, el número total de cadenas es $C(6, 3) \cdot 2 \cdot 3!$.

7. Dos palos se pueden elegir de $C(4, 2)$ formas. Podemos elegir tres cartas de un palo de $C(13, 3)$ formas y elegir tres cartas del otro palo de $C(13, 3)$ formas. Por lo tanto, el número total de manos es $C(4, 2)C(13, 3)^2$.

8. Debemos elegir tres de cuatro discos defectuosos. Así, el número total de selecciones es $C(5, 3)C(95, 1) + C(5, 4)$.

9. 12567 **10.** 234567 **11.** 6427153

12. 631245 **13.** $8!/(3!\,2!)$

14. Contamos el número de cadenas en las que ninguna I aparece antes de ninguna L y luego las restamos del total de cadenas.

Construimos las cadenas en las que ninguna I aparece antes de alguna L mediante un proceso de dos pasos. En primer lugar, elegimos las posiciones de N, O y S; luego colocamos las I y las L. Podemos elegir las posiciones de N, O y S de $8 \cdot 7 \cdot 6$ formas. Entonces, las I y las L se pueden colocar sólo de una forma, pues las L deben aparecer primero. Así, existen $8 \cdot 7 \cdot 6$ cadenas en las que ninguna I aparece antes de alguna L.

El ejercicio 13 muestra que existen $8!/(3!\,2!)$ cadenas formadas al ordenar las letras *ILLINOIS*. Por lo tanto, existen

$$\frac{8!}{3!\,2!} - 8 \cdot 7 \cdot 6$$

cadenas formadas al ordenar las letras *ILLINOIS* en las que alguna I aparece antes de alguna L.

15. $12!/(3!)^4$

16. $C(11 + 4 - 1, 4 - 1)$

17. $(s - r)^4 = C(4, 0)s^4 + C(4, 1)s^3(-r) + C(4, 2)s^2(-r)^2$

$$+ C(4,3)s(-r)^3 + C(4,4)(-r)^4$$
$$= s^4 - 4s^3r + 6s^2r^2 - 4sr^3 + r^4$$

18. $2^3 \cdot 8!/(3!\,1!\,4!)$

19. Si hacemos $a = 2$ y $b = -1$ en el teorema del binomio, obtenemos

$$1 = 1^n = [2 + (-1)]^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^{n-k}(-1)^k.$$

20. $C(n, 1) = n$

21. Si los 15 calcetines individuales juegan el papel de los pichones y los 14 tipos de pares son las pichoneras, asignamos cada calcetín (pichón) a su tipo (pichonera). Por el principio de la pichonera, alguna pichonera debe contener al menos dos pichones (los calcetines forman un par correcto).

22. Existen $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ nombres posibles para las 19 personas. Podemos considerar la asignación de nombres a personas como la asignación de pichoneras a los pichones. Por el principio de la pichonera, algún nombre es asignado por lo menos a dos personas.

23. Sea a_i la posición del i-ésimo artículo disponible. Los 220 números

$$a_1, \ldots, a_{110}; \quad a_1 + 19, \ldots, a_{110} + 19$$

varían de 1 a 219. Por el principio de la pichonera, dos de ellos son iguales.

24. Cada punto tiene una abscisa que es par o impar, y una ordenada que es par o impar. Como existen cuatro posibilidades y existen cinco puntos, por el principio de la pichonera, al menos dos puntos, $p_i = (x_i, y_i)$ y $p_j = (x_j, y_j)$ satisfacen que

- x_i y x_j son ambos pares o ambos impares.

y

- y_i y y_j son ambos pares o ambos impares.

Por lo tanto, $x_i + x_j$ es par y $y_i + y_j$ es par. En particular, $(x_i + x_j)/2$ y $(y_i + y_j)/2$ son enteros. Así, el punto medio del par p_ip_j tiene coordenadas enteras.

Sección 5.1

1. $a_n = a_{n-1} + 4; a_1 = 3$

4. $A_n = (1.14)A_{n-1}$ **5.** $A_0 = 2000$

6. $A_1 = 2280,\ A_2 = 2599.20,\ A_3 = 2963.088$

7. $A_n = (1.14)^n 2000$

8. Debemos tener $A_n = 4000$ o $(1.14)^n 2000 = 4000$ o $(1.14)^n = 2$. Al calcular el logaritmo de ambos lados, debemos tener $n \log 1.14 = \log 2$. Así,

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.14} = 5.29.$$

18. Contamos el número de cadenas de n bits que no contienen al patrón 000.

- Que comienzan con 1. En este caso, si la restante cadena de $(n-1)$ bits no contiene 000, tampoco la cadena de n bits contendrá este patrón. Existen S_{n-1} de tales cadenas de $(n-1)$ bits.
- Que comienzan con 0. Hay que considerar dos casos.
  1. Que comienzan con 01. En este caso, si la restante cadena de $(n-2)$ bits no contiene a 000, tampoco lo contendrá la cadena de n bits. Existen S_{n-2} de tales cadenas de $(n-2)$ bits.
  2. Que comienzan con 00. Entonces, el tercer bit debe ser un 1, y si la restante cadena de $(n-3)$ bits no contiene a 000, tampoco lo contendrá la cadena de n bits. Existen S_{n-3} de tales cadenas de $(n-3)$ bits.

Como los casos son mutuamente excluyentes y abarcan a todas las cadenas de n bits $(n > 3)$ que no contienen a 000, tenemos que $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$ para $n > 3$. $S_1 = 2$ (existen dos cadenas de 1 bit), $S_2 = 4$ (existen cuatro cadenas de 2 bits) y $S_3 = 7$ (existen ocho cadenas de 3 bits, pero una de ellas es 000).

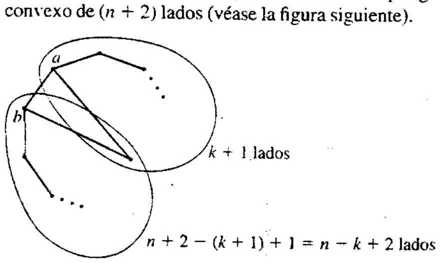
19. Existen S_{n-1} cadenas de n bits que comienzan con 1 y no contienen al patrón 00 y existen S_{n-2} cadenas de n bits que comienzan con 0 (pues el segundo bit debe ser 1) y no contienen al patrón 00. Así, $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. Las condiciones iniciales son $S_1 = 2, S_2 = 3$.

22. $S_1 = 2,\ S_2 = 4,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12$

25. $C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ C_5 = 42$

29. Sea P_n el número de formas de dividir un polígono convexo de $(n+2)$ lados, $n \geq 1$, en triángulos, trazando $n-1$ líneas a través de las esquinas y de modo que no se intersequen en el interior del polígono. Observamos que $P_1 = 1$.

Supongamos que $n > 1$ y consideremos un polígono convexo de $(n+2)$ lados (véase la figura siguiente).



Elegimos una arista ab y construimos una partición del polígono mediante un procedimiento de dos pasos. En primer lugar, elegimos un triángulo al cual pertenezca el lado ab. Este triángulo divide al polígono original en dos polígonos; uno con $k+1$ lados, para cierta k tal que $1 \leq k \leq n$, y el otro con $n - k + 2$ lados (véase la figura anterior). Por definición, el polígono de $(k+1)$ lados se puede separar de P_{k-1} formas y el polígono de $(n-k+2)$ lados se puede separar de P_{n-k} formas. (Para los casos degenerados $k = 1$ y $k = n$, hacemos $P_0 = 1$.) Por lo tanto, el número total de formas de separar el polígono de $(n+2)$ lados es

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} P_{k-1} P_{n-k}.$$

Como la sucesión $P_1, P_2, \ldots$ satisface la misma relación de recurrencia que la sucesión de Catalan $C_1, C_2, \ldots$ y $P_0 = P_1 = 1 = C_0 = C_1$, esto implica que $P_n = C_n$ para toda $n \geq 1$.

33. [Para $n = 3$]

Paso 1: Mover el disco 3 del poste 1 al poste 3.
Paso 2: Mover el disco 2 del poste 1 al poste 2.
Paso 3: Mover el disco 3 del poste 3 al poste 2.
Paso 4: Mover el disco 1 del poste 1 al poste 3.
Paso 5: Mover el disco 3 del poste 2 al poste 1.
Paso 6: Mover el disco 2 del poste 2 al poste 3.
Paso 7: Mover el disco 3 del poste 1 al poste 3.

35. Sean α y β los ángulos de la figura 5.1.6. La geometría de la situación muestra que el precio tiende a estabilizarse si y sólo si $\alpha + \beta > 180°$. Esta última condición se cumple si y sólo si $-\tan\beta < \tan\alpha$. Como $b = -\tan\beta$ y $k = \tan\alpha$, concluimos que el precio se estabiliza si y sólo si $b < k$.

37. $A(2, 2) = 7,\ A(2, 3) = 9$

40. $A(3, n) = 2^{n+3} - 3$

43. Si $m = 0$,

$$\begin{aligned} A(m, n+1) &= A(0, n+1) \\ &= n + 2 > n + 1 \\ &= A(0, n) = A(m, n). \end{aligned}$$

La última desigualdad es consecuencia del ejercicio 41.

44. Utilice los ejercicios 38 y 39.

47. Demostramos la afirmación mediante inducción sobre x. El propio paso inductivo requerirá inducción sobre y.

El ejercicio 44 muestra que la ecuación es válida para $x = 0, 1, 2$ y para toda y.

PASO BASE $(x = 2)$. Véase el ejercicio 44.

PASO INDUCTIVO (EL CASO x IMPLICA EL CASO $x + 1$).

Supongamos que $x \geq 2$ y que

$$A(x, y) = AO(x, 2, y+3) - 3 \quad \text{para toda } y \geq 0.$$

Debemos mostrar que

$$A(x+1, y) = AO(x+1, 2, y+3) - 3 \quad \text{para toda } y \geq 0.$$

Establecemos esta última ecuación mediante inducción sobre y.

PASO BASE $(y = 0)$. Debemos demostrar que

$$A(x+1, 0) = AO(x+1, 2, 3) - 3$$

Ahora,

$AO(x+1, 2, 3) - 3$	
$= AO(x, 2, AO(x+1, 2, 3)) - 3$	por definición
$= AO(x, 2, 4) - 3$	por el ejercicio 46
$= A(x, 1)$	por la hipótesis de inducción sobre x
$= A(x+1, 0)$	por (5.1.11).

PASO INDUCTIVO (EL CASO y IMPLICA EL CASO $y + 1$).
Supongamos que

$$A(x+1, y) = AO(x+1, 2, y+3) - 3.$$

Debemos demostrar que

$$A(x+1, y+1) = AO(x+1, 2, y+4) - 3.$$

Ahora,

$AO(x+1, 2, y+4) - 3$	
$= AO(x, 2, AO(x+1, 2, y+3)) - 3$	por definición
$= AO(x, 2, A(x+1, y) + 3) - 3$	por la hipótesis de inducción sobre y
$= A(x, A(x+1, y))$	por la hipótesis de inducción sobre x
$= A(x+1, y+1)$	por (5.1.12).

50. Suponga que tenemos n dólares. Si compramos jugo de naranja el primer día, nos sobran $n-1$ dólares, que se pueden gastar de R_{n-1} formas. De manera análoga, si el primer día compramos leche o cerveza, existen R_{n-2} formas de gastar el dinero restante. Como estos casos son ajenos entre sí, $R_n = R_{n-1} + 2R_{n-2}$.

53. $S_3 = \frac{1}{2}, S_4 = \frac{3}{4}$

55. Denotamos una función f de $X = \{1, \ldots, n\}$ a X como $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, lo cual significa que $f(k) = i_k$. El problema entonces es contar el número de formas de elegir $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de modo que si i aparece, también lo hagan $1, 2, \ldots, i-1$.

Contaremos el número de tales funciones que tienen exactamente j unos. Tales funciones se pueden construir en dos pasos: Se eligen las posiciones de los j unos; luego se colocan los demás números. Existen $C(n, j)$ formas de colocar los unos. Los números restantes se pueden elegir de modo que si i aparece, entonces también aparecen $1, \ldots, i-1$. Existen F_{n-j} formas de elegir los números restantes, ya que los números restantes se pueden elegir de $\{2, \ldots, n\}$. Así, existen $C(n, j)F_{n-j}$ funciones del tipo deseado y que tienen exactamente j unos. Por lo tanto, el número total de funciones de X en X que tienen la propiedad de que si i está en el rango de f, entonces también están $1, \ldots, i-1$, es

$$\sum_{j=1}^{n} C(n,j)\, F_{n-j} = \sum_{j=1}^{n} C(n, n-j)\, F_{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} C(n,j)\, F_j.$$

58. Utilice la ecuación (4.5.4) para escribir

$$S(k, n) = \Sigma_{i=1}^{n} S(k-1, i).$$

61. Utilizamos la terminología del ejercicio 74 de la sección 4.2. Elegimos una de las $n+1$ personas, digamos P. Existen $s_{n,j-1}$ formas de que P se siente sola. (Las otras n personas se sientan en las $k-1$ mesas restantes.) A continuación, contamos el número de arreglos en los que P no está sola. Las personas distintas de P se sientan en k mesas. Esto se puede hacer de $s_{n,k}$ formas. Ahora, P se puede sentar a la derecha de alguien de n formas. Así, existen $ns_{n,k}$ arreglos en los que P no está sola. De aquí se sigue la relación de recurrencia.

64. Sea A_n la cantidad al final de n años y sea i la tasa de interés, expresada como un decimal. El análisis posterior al ejemplo 5.1.3 muestra que

$$A_n = (1+i)^n A_0.$$

El valor de n necesario para duplicar la cantidad satisface

$$2A_0 = (1+i)^n A_0 \quad \text{o} \quad 2 = (1+i)^n.$$

Si calculamos el logaritmo natural (logaritmo de base e) de ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\ln 2 = n \ln(1+i).$$

Así,

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}.$$

Como $\ln 2 = 0.6931472\ldots$ y $\ln(1+i)$ es aproximadamente igual a i para valores pequeños de i, n es aproximadamente igual a $0.69\ldots/i$, lo cual, a su vez, es aproximadamente igual a $70/r$.

66. 1, 3, 2; 2, 3, 1; $E_3 = 2$

69. Contamos el número de permutaciones sube / baja de $1, \ldots, n$ considerando cuántas de ellas tienen n en la segunda, cuarta, ..., posiciones.

Supongamos que n está en la segunda posición. Como cualquiera de los números restantes es menor que n, cualquiera de ellos se puede colocar en la primera posición. Así, podemos elegir el número por colocar en la primera posición de $C(n-1, 1)$ formas y, después de elegirlo, podemos ordenarlo de $E_1 = 1$ forma. Las últimas $n-2$ posiciones se pueden llenar de E_{n-2} formas, pues cualquier permutación sube/baja de los $n-2$ números restantes proporcionan una permutación sube/baja de $1, \ldots, n$. Así, el número de permutaciones sube/baja de $1, \ldots, n$ con n en la segunda posición es $C(n-1, 1)E_1 E_{n-2}$.

Supongamos que n está en la cuarta posición. Podemos elegir los números por colocar en las primeras tres posiciones de $C(n-1, 3)$ formas. Después de elegir los tres elementos, podemos ordenarlos de E_3 formas. Los últimos $n-4$ números se pueden ordenar de E_{n-4} formas. Así, el número de permutaciones sube/baja de $1, \ldots, n$, con n en la cuarta posición es $C(n-1, 3)E_3 E_{n-4}$.

En general, el número de permutaciones sube/baja de $1, \ldots, n$, con n en la $(2j)$-ésima posición es

$$C(n-1, 2j-1)E_{2j-1} E_{n-2j}.$$

Al sumar sobre todas las j se obtiene la relación de recurrencia deseada.

Sección 5.2

1. Sí; orden 1	**4.** No
7. No	**10.** Sí; orden 3
11. $a_n = 2(-3)^n$	**14.** $a_n = 2^{n+1} - 4^n$
17. $a_n = (2^{2-n} + 3^n)/5$	**20.** $a_n = 2(-4)^n + 3^n(-4)^n$

23. $R_n = [(-1)^n + 2^{n+1}]/3$

26. Sea d_n la población de venados en el instante n. La condición inicial es $d_0 = 0$. La relación de recurrencia es

$$d_n = 100n + 1.2_{dn-1}, \quad n > 0.$$

$$\begin{aligned} d_n &= 100n + 1.2_{dn-1} = 100n + 1.2[100(n-1) + 1.2d_{n-2}] \\ &= 100n + 1.2 \cdot 100(n-1) + 1.2^2{}_{dn-2} \\ &= 100n + 1.2 \cdot 100(n-1) \\ &\quad + 1.2^2[100(n-2) + 1.2d_{n-3}] \\ &= 100n + 1.2 \cdot 100(n-1) \\ &\quad + 1.2^2 \cdot 100(n-2) + 1.2^3 d_{n-3} \\ &\;\;\vdots \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 1.2^i \cdot 100(n-i) + 1.2^n d_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 1.2^i \cdot 100(n-i) \\ &= 100n \sum_{i=0}^{n-1} 1.2^i - 1.2 \cdot 100 \sum_{i=1}^{n-i} i \cdot 1.2^{i-1} \\ &= \frac{100n(1.2^n - 1)}{1.2 - 1} \\ &\quad -120\frac{(n-1)1.2^n - n1.2^{n-1} + 1}{(1.2-1)^2}, \quad n > 0. \end{aligned}$$

29. Hacemos $b_n = a_n/n!$ para obtener $b_n = -2b_{n-1} + 3b_{n-2}$. Al resolver esta ecuación obtenemos $a_n = n!\, b_n = (n!/4)[5 - (-3)^n]$.

32. Establecemos la desigualdad mediante inducción sobre n.

Los casos base $n = 1$ y $n = 2$ se dejan al lector. Ahora supongamos que la desigualdad es verdadera para los valores menores que $n+1$. Entonces

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &\geq \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}, \end{aligned}$$

y esto concluye el paso inductivo.

34. $a_n = b2^n + d4^n + 1$

37. $a_n = b/2^n + d3^n - (4/3)2^n$

40. El argumento es idéntico al dado en el teorema 5.2.11.

43. El llamado recursivo de este algoritmo para mover los $n - k_n$ discos en la parte superior del poste 1 al poste 2 requiere $T(n - k_n)$ movimientos (véase el ejemplo 5.2.4). El llamado recursivo de este algoritmo para mover los $n - k_n$ discos en la parte superior del poste 2 al poste 4 requiere de nuevo $T(n - k_n)$ movimientos. De aquí se sigue la relación de recurrencia.

46. De la desigualdad

$$\frac{k_n(k_n+1)}{2} \leq n,$$

podemos deducir $k_n \leq \sqrt{2n}$. Como

$$n - k_n \leq \frac{k_n(k_n+1)}{2},$$

esto implica que $r_n \leq k_n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T(n) &= (k_n + r_n - 1)2^{kn} + 1 \\ &< 2k_n 2^{kn} + 1 \\ &\leq 2\sqrt{2n}\, 2^{\sqrt{2n}} + 1 \\ &= O(4^{\sqrt{n}}). \end{aligned}$$

Sección 5.3

1. En la línea 2, como $i > j$ $(1 > 5)$ es falso, pasamos a la línea 4, donde hacemos k igual a 3. En la línea 5, como *key* ('G') no es igual a s_3 ('J'), pasamos a la línea 7. En la línea 7, *key* $< s_k$ ('G' < 'J') es verdadera, de modo que en la línea 8 hacemos j igual a 2. Luego llamamos a este algoritmo con $i = 1, j = 2$ para buscar *key* en

$$s_1 = \text{'C'}, \ s_2 = \text{'G'}.$$

En la línea 2, como $i > j$ $(1 > 2)$ es falso, pasamos a la línea 4, donde hacemos k igual a 1. En la línea 5, como *key* ('G') no es igual a s_1 ('C'), pasamos a la línea 7. En la línea 7, *key* $< s_k$ ('G' < 'C') es verdadera, de modo que en la línea 10 hacemos i igual a 2. Luego llamamos a este algoritmo con $i = j = 2$ para buscar *key* en

$$s_2 = \text{'G'}.$$

En la línea 2, como $i > j$ $(2 > 2)$ es falso, pasamos a la línea 4, donde hacemos k igual a 2. En la línea 5, como *key* ('G') es igual a s_2 ('G'), regresamos 2, el índice de *key* en la sucesión s.

4. En la línea 2, como $i > j$ $(1 > 5)$ es falso, pasamos a la línea 4, donde hacemos k igual a 3. En la línea 5, como *key* ('Z') no es igual a s_3 ('J'), pasamos a la línea 7. En la línea 7, *key* $< s_k$ ('Z' < 'J') es falsa, de modo que en la línea 10 hacemos i igual a 4. Luego llamamos a este algoritmo con $i = 4, j = 5$ para buscar *key* en

$$s_4 = \text{'M'}, \ s_5 = \text{'X'}.$$

En la línea 2, como $i > j$ $(4 > 5)$ es falso, pasamos a la línea 4, donde hacemos k igual a 4. En la línea 5, como *key* ('Z') no es igual a s_4 ('M'), pasamos a la línea 7. En la línea 7, *key* $< s_k$ ('Z' < 'M') es falsa, de modo que en la línea 10 hacemos i igual a 5. Luego llamamos a este algoritmo con $i = j = 5$ para buscar *key* en

$$s_5 = \text{'X'}.$$

En la línea 2, como $i > j$ $(5 > 5)$ es falso, pasamos a la línea 4, donde hacemos k igual a 5. En la línea 5, como *key* ('Z') no es igual a s_5 ('X'), pasamos a la línea 7. En la línea 7, *key* $< s_k$ ('Z' < 'X') es verdadera, de modo que en la línea 10 hacemos i igual a 6. Luego llamamos a este algoritmo con $i = 6, j = 5$.

En la línea 2, como $i > j$ $(6 > 5)$ es verdadera, regresamos 0 para indicar que no hemos encontrado *key*.

7. El algoritmo B es mejor si $2 \leq n \leq 15$. (Para $n = 1$ y $n = 16$, los algoritmos requieren la misma cantidad de comparaciones.)

10. Supongamos que las sucesiones son $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$.

(a) $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots$ (b) $a_n < b_1$

13. 11

17. El algoritmo 5.3.11 calcula a^n mediante la fórmula $a^n = a^m a^{n-m}$.

18. $b_n = b_{\lfloor n/2 \rfloor} + b_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} + 1, b_1 = 0$

19. $b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 3$

20. $b_n = n - 1$

21. Demostraremos la fórmula mediante inducción matemática. El paso base, $n = 1$, ya ha sido establecido.

Supongamos que $b_k = k - 1$ para toda $k < n$. Mostraremos que $b_n = n - 1$. Ahora,

$$b_n = b_{\lfloor n/2 \rfloor} + b_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} + 1$$
$$= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 + 1$$

por la hipótesis de inducción

$$= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 = n - 1.$$

34. Si $n = 1$, entonces $i = j$ y regresamos antes de llegar a la línea 7c, 11 o 15. Por lo tanto, $b_1 = 0$. Si $n = 2$, entonces $j = i + 1$. Existe una comparación en la línea 7c y regresamos antes de llegar a la línea 11 o 15. Por lo tanto, $b_2 = 1$.

35. $b_3 = 3, b_4 = 4$

36. Cuando $n > 2$, se necesitan $b_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$ comparaciones para la primera llamada recursiva y $b_{\lfloor n/2 \rfloor}$ comparaciones para la segunda llamada recursiva. Se necesitan otras dos comparaciones en las líneas 11 y 15. De aquí se sigue la relación de recurrencia.

37. Supongamos que $n = 2^k$. Entonces (5.3.12) se convierte en

$$b_{2^k} = 2b_{2^{k-1}} + 2.$$

Ahora

$$\begin{aligned} b_{2^k} &= 2b_{2^{k-1}} + 2 \\ &= 2[2b_{2^{k-2}} + 2] + 2 \\ &= 2^2 b_{2^{k-2}} + 2^2 + 2 = \dots \\ &= 2^{k-1} b_{2^1} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 \\ &= 2^{k-1} + 2^{k-1} + \dots + 2 \\ &= 2^{k-1} + 2^k - 2 \\ &= n - 2 + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2} - 2. \end{aligned}$$

38. Utilizamos el siguiente hecho, el cual se puede verificar considerando los casos x par y x impar:

$$\left\lceil \frac{3x}{2} - 2 \right\rceil + \left\lceil \frac{3(x+1)}{2} - 2 \right\rceil = 3x - 2 \quad \text{para} \quad x = 1, 2, \cdots$$

Sea a_n el número de comparaciones necesarias para el algoritmo en el peor de los casos. Los casos $n = 1$ y $n = 2$ se pueden verificar directamente. (El caso $n = 2$ es el paso base.)

PASO INDUCTIVO. Supongamos que $a_k \le \lceil (3k/2) - 2 \rceil$ para $2 \le k < n$. Debemos mostrar que la desigualdad es válida para $k = n$.

Si n es impar, el algoritmo separa el arreglo en subclases de tamaños $(n - 1)/2$ y $(n + 1)/2$. Ahora,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{(n-1)/2} + a_{(n+1)/2} + 2 \\ &\le \left\lceil \frac{(3/2)(n-1)}{2} - 2 \right\rceil + \left\lceil \frac{(3/2)(n+1)}{2} - 2 \right\rceil + 2 \\ &= \frac{3(n-1)}{2} - 2 + 2 = \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} \\ &= \left\lceil \frac{3n}{2} - 2 \right\rceil. \end{aligned}$$

El caso n par se analiza de manera análoga.

47. Si $n = 2^k$,

$$a_{2^k} = 3a_{2^{k-1}} + 2^k,$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_n = a_{2^k} &= 3a_{2^{k-1}} + 2^k \\ &= 3[3a_{2^{k-2}} + 2^{k-1}] + 2^k \\ &= 3^2 a_{2^{k-2}} + 3 \cdot 2^{k-1} + 2^k \\ &\vdots \\ &= 3^k a_{2^0} + 3^{k-1} \cdot 2^1 + 3^{k-2} \cdot 2^2 + \dots \\ &\quad + 3 \cdot 2^{k-1} + 2^k \qquad (*) \\ &= 3^k + 2(3^k - 2^k) \\ &= 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 3 \cdot 3^{\lg n} - 2n. \end{aligned}$$

La línea (*) es consecuencia de la ecuación

$$(a - b)(a^{k-1}b^0 + a^{k-2}b^1 + \dots + a^1 b^{k-2} + a^0 b^{k-1})$$
$$= a^k - b^k$$

con $a = 3$ y $b = 2$.

49. $b_n = b_{\lfloor (1+n)/2 \rfloor} + b_{\lfloor n/2 \rfloor} + 3$

52. $b_n = 4n - 3$

55. Mostraremos que $b_n \le b_{n+1}, n = 1, 2, \dots$ Tenemos la relación de recurrencia

$$b_n = b_{\lfloor (1+n)/2 \rfloor} + b_{\lfloor n/2 \rfloor} + c_{\lfloor (1+n)/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}.$$

PASO BASE. $b_2 = 2b_1 + c_{1,1} \ge 2b_1 \ge b_1$

PASO INDUCTIVO. Supongamos que la afirmación es válida para $k < n$. Si n es par, tenemos $b_n = 2b_{n/2} + c_{n/2, n/2}$, de modo que

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_{(n+2)/2} + b_{n/2} + c_{(n+2)/2, n/2} \\ &\ge b_{n/2} + b_{n/2} + c_{n/2, n/2} = b_n. \end{aligned}$$

El caso n impar es similar.

57.
```
procedure ex57(s, i, j)
  if i = j then
    return
  m := ⌊(i + j)/2⌋
  call ex57(s, i, m)
  call ex57(s, m + 1, j)
  call combine(s, i, m, j)
end ex57
```

60. Demostramos la desigualdad mediante inducción matemática.

PASO BASE. $a_1 = 0 \le 0 = b_1$

PASO INDUCTIVO. Supongamos que $a_k \le b_k$ para $k < n$. Entonces

$$\begin{aligned} a_n &\le a_{\lfloor n/2 \rfloor} + a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} + 2 \lg n \\ &\le b_{\lfloor n/2 \rfloor} + b_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} + 2 \lg n = b_n. \end{aligned}$$

63. Sea $c = a_1$. Si n es una potencia de m, digamos, $n = m^k$, entonces

$$\begin{aligned} a_n = a_{m^k} &= a_{m^{k-1}} + d \\ &= [a_{m^{k-2}} + d] + d \\ &= a_{m^{k-2}} + 2d \\ &\vdots \\ &= a_{m^0} + kd = c + kd. \end{aligned}$$

Un valor arbitrario de n está entre dos potencias de m, digamos

$$m^{k-1} < n \le m^k.$$

Esta última desigualdad implica que

$$k - 1 < \log_m n \le k.$$

Como la sucesión a es creciente,

$$a_{m^{k-1}} \le a_n \le a_{m^k}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \Omega(\log_m n) &= c + (-1 + \log_m n) \le c + (k - 1)d \\ &= a_{m^{k-1}} \le a_n \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a_n &\le a_{m^k} = c + kd \\ &\le c + (1 + \log_m n)d = O(\log_m n). \end{aligned}$$

Así, $a_n = \Theta(\log_m n)$. Por el ejercicio 29 de la sección 3.5, $a_n = \Theta(\lg n)$.

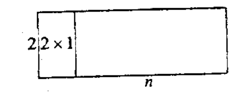
Capítulo 5 Autoevaluación

1. (a) 3, 5, 8, 12 (b) $a_1 = 3$ (c) $a_n = a_{n-1} + n$

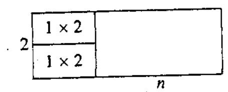
2. $A_n = (1.17)A_{n-1}, A_0 = 4000$

3. Sea X un conjunto con n elementos y sea $x \in X$. Sea k un entero fijo, $0 \le k \le n - 1$. Podemos elegir un subconjunto Y de $X - \{x\}$ con k elementos de $C(n - 1, k)$ formas. Una vez hecho esto, podemos separar Y de P_k formas. Esta partición, junto con $X - Y$, es una partición de X. Como todas las particiones de X se pueden generar de esta forma, obtenemos la relación de recurrencia deseada.

4. Si el primer dominó se coloca como muestra la figura, existen a_{n-1} formas de cubrir al tablero $2 \times (n - 1)$ sobrante.



Si los primeros dos dominoes se colocan como se muestra, existen a_{n-2} formas de cubrir el tablero $2 \times (n - 2)$ sobrante.



Esto implica que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Por inspección, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$. Como $\{a_n\}$ satisface la misma relación de recurrencia que la sucesión de Fibonacci y $a_1 = f_1$ y $a_2 = f_2$, esto implica que $a_i = f_i$ para $i = 1, 2, \dots$.

5. Sí

6. $a_n = 2(-2)^n - 4n(-2)^n$

7. $a_n = 3 \cdot 5^n + (-2)^n$

8. Consideremos una cadena de longitud n que contiene un número par de unos y que comienza con 0. La cadena posterior al 0 puede ser cualquier cadena de longitud $n - 1$ que contenga un número par de unos, y existen c_{n-1} de tales cadenas. Una cadena de longitud n que contiene un número par de unos y que comienza con 2 puede ir seguida de cualquier cadena de longitud $n - 1$ que contenga un número par de unos, y existen c_{n-1} de tales cadenas. Una cadena de longitud n que contiene un número par de unos y que comienza con 1 puede ir seguida de una cadena arbitraria de longitud $n - 1$ que contiene un número impar de unos. Como existen en total 3^{n-1} cadenas de longitud $n - 1$ y c_{n-1} de ellas contienen un número par de unos, existen $3^{n-1} - c_{n-1}$ cadenas de longitud $n - 1$ que contienen un número impar de unos. Esto implica que

$$c_n = 2c_{n-1} + 3^{n-1} - c_{n-1} = c_{n-1} + 3^{n-1}.$$

Una condición inicial es $c_1 = 2$, pues existen dos cadenas (0 y 2) que contienen un número par (a saber, cero) de unos.

Podemos resolver la relación de recurrencia mediante iteración:

$$c_n = c_{n-1} + 3^{n-1} = c_{n-2} + 3^{n-2} + 3^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$= c_1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$$
$$= 2 + \frac{3^n - 3}{3 - 1} = \frac{3^n + 1}{2}.$$

9. $b_n = b_{n-1} + 1,\ b_0 = 0$

10. $b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = 3$

11. $b_n = n$

12. $n(n+1)/2 = O(n^2)$. El algoritmo dado es más rápido que la técnica directa, por lo que es preferible su uso.

Sección 6.1

1. Como un número impar de aristas toca a algunos vértices (c y d), no existe un camino de a a a que pase por cada arista exactamente una vez.

4. $(a, c, e, b, c, d, e, f, d, b, a)$

7. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. e_1 y e_6 son aristas paralelas. e_5 es un lazo. No existen vértices aislados. G no es una gráfica simple. e_1 es incidente en v_1 y v_2.

10.

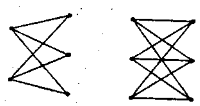
K_3 K_5

13. Bipartita. $V_1 = \{v_1, v_2, v_5\}$, $V_2 = \{v_3, v_4\}$.

16. No bipartita

19. Bipartita. $V_1 = \{v_1\}$, $V_2 = \{v_2, v_3\}$.

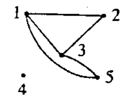
20.



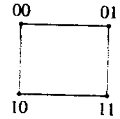
$K_{2,3}$ $K_{3,3}$

22. (b, c, a, d, e)

25. Dos clases

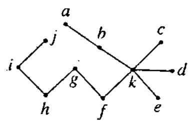


30.

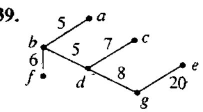


30. n

36.



39.



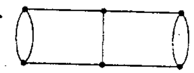
Sección 6.2

1. Ciclo, ciclo simple

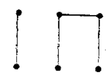
4. Ciclo, ciclo simple

7. Camino simple

10.



13.



16. Supongamos que existe tal gráfica, con vértices a, b, c, d, e, f. Supongamos que los grados de a y b son 5. Como la gráfica es simple, cada uno de los grados de c, d, e y f son por lo menos 2; así, no existe tal gráfica.

19. (a, a), (b, c, g, b), (b, c, d, f, g, b), (b, c, d, e, f, g, b), (c, g, f, d, c), (c, g, f, e, d, c), (d, f, e, d)

22. Cada vértice tiene grado 4.

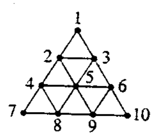
24. Existen cuatro subgráficas: el vértice v_1, sin aristas; el vértice v_2, sin aristas; los vértices v_1 y v_2, sin aristas y la gráfica original.

27. Existen 17 subgráficas.

28. No tiene ciclos de Euler

31. No tiene ciclos de Euler

34. Para



un ciclo de Euler es (10, 9, 6, 5, 9, 8, 5, 4, 8, 7, 4, 2, 5, 3, 2, 1, 3, 6, 10). El método se generaliza.

37. $m = n = 2$ o $m = n = 1$

39. d y e son los únicos vértices de grado impar.

42. El argumento es similar al de la demostración del teorema 6.2.23.

45. Verdadera. En el camino, para todas las a repetidas,

$$(\ldots, a, \ldots, b, a, \ldots)$$

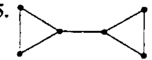
se elimina $a, \ldots, b$.

47. Supongamos que $e = (v, w)$ está en un ciclo. Entonces existe un camino P de v a w que no incluye a e. Sean x y y vértices en $G - \{e\}$. Como G es conexa, existe un camino P' en G de v a w. Reemplazamos cada ocurrencia de e en P' por P. El camino resultante de v a w está en $G - \{e\}$. Por lo tanto, $G - \{e\}$ es conexa.

50. La unión de todas las subgráficas conexas que contienen a G' es un componente.

53. Sea G una gráfica disconexa, simple, con n vértices, con el máximo número de aristas. Muestre que G tiene dos componentes. Si un componente tiene i vértices, muestre que los componentes son K_i y K_{n-i}. Utilice el ejercicio 11 de la sección 6.1, para determinar una fórmula para el número de aristas en G como función de i. Muestre que el máximo ocurre cuando $i = 1$.

55.



58. Modifique las demostraciones de los teoremas 6.2.17 y 6.2.18.

61. Utilice los ejercicios 58 y 60.

64. Primero contamos el número de caminos

$$(v_0, v_1, \ldots, v_k)$$

de longitud $k \geq 1$. El primer vértice v_0 se puede elegir de n formas. Cada vértice posterior se puede elegir de $n - 1$ formas (pues debe ser distinto de su predecesor). Así, el número de caminos de longitud k es $n(n-1)^k$.

El número de caminos de longitud k, $1 \leq k \leq n$, es

$$\sum_{k=1}^{n} n(n-1)^k = n(n-1)\frac{(n-1)^k - 1}{(n-1) - 1}$$
$$= \frac{n(n-1)[(n-1)^k - 1]}{n-2}.$$

68. Si v es un vértice en V, el camino formado por v y ninguna arista es un camino de v a v; así, vRv para cada vértice v en V. Por lo tanto, R es reflexiva.

Supongamos que vRw. Entonces existe un camino $(v_0, \ldots, v_n)$, donde $v_0 = v$ y $v_n = w$. Ahora, $(v_n, \ldots, v_0)$ es un camino de w a v, por lo que wRv. Por lo tanto, R es simétrica.

Supongamos que vRw y wRx. Entonces existe un camino P_1 de v a w y un camino P_2 de w a x. Ahora, P_1 seguido de P_2 es un camino de v a x, de modo que vRx. Por lo tanto, R es transitiva.

Como R es reflexiva, simétrica y transitiva en V, R es una relación de equivalencia en V.

70. 2

73. Sea s_n el número de caminos de longitud n de v_1 a v_1. Mostraremos que las sucesiones $s_1, s_2, \ldots$ y $f_1, f_2, \ldots$ satisfacen la misma relación de recurrencia y las mismas condiciones iniciales, lo cual implicaría que $s_n = f_n$ para $n \geq 1$.

Si $n = 1$, existe un camino de longitud 1 de v_1 a v_1, a saber, el lazo en v_1; así, $s_1 = f_1$.

Si $n = 2$, existen dos caminos de longitud 2 de v_1 a v_1: (v_1, v_1, v_1) y (v_1, v_2, v_1); así, $s_2 = f_2$.

Supongamos que $n > 2$. Consideremos un camino de longitud n de v_1 a v_1. El camino debe comenzar con el lazo (v_1, v_1) o la arista (v_1, v_2).

Si el camino comienza con el lazo, el resto del camino debe ser un camino de longitud $n - 1$ de v_1 a v_1. Como existen s_{n-1} de tales caminos, existen s_{n-1} caminos de longitud n de v_1 a v_1 que comienzan con $(v_1, v_1, \ldots)$.

Si el camino comienza con la arista (v_1, v_2), la siguiente arista en el camino debe ser (v_2, v_1). El resto del camino debe ser un camino de longitud $n - 2$ de v_1 a v_1. Como existen s_{n-2} de tales caminos, existen s_{n-2} caminos de longitud n de v_1 a v_1 que comienzan $(v_1, v_2, v_1, \ldots)$.

Como cualquier camino de longitud $n > 2$ de v_1 a v_1 comienza con el lazo (v_1, v_1) o la arista (v_1, v_2), esto implica que

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}.$$

Como ahora las sucesiones $s_1, s_2, \ldots$ y $f_1, f_2, \ldots$ satisfacen la misma relación de recurrencia y las mismas condiciones iniciales, esto implica que $s_n = f_n$ para $n \geq 1$.

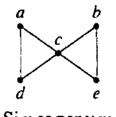
75. Supongamos que cada vértice tiene una arista de salida. Elegimos un vértice v_0. Seguimos una arista de salida de v_0 a un vértice v_1. (Por hipótesis, tal arista existe.) Continuamos siguiendo una arista de salida de v_i a un vértice v_{i+1}. Como existe un número finito de vértices, en algún momento regresaremos a un vértice ya visitado con anterioridad. En este punto, habremos descubierto un ciclo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, una gráfica acíclica dirigida tiene al menos un vértice sin aristas de salida.

Sección 6.3

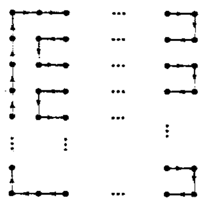
1. $(d, a, e, b, c, h, g, f, j, i, d)$

3. Tendríamos que eliminar dos aristas, cada una en b, d, i y k, lo cual deja $19 - 8 = 11$ aristas. Un ciclo hamiltoniano tendría 12 aristas.

6. $(a, b, c, j, i, m, k, d, e, f, l, g, h, a)$

9. 

2. Si n es par y $m > 1$ o si m es par y $n > 1$, existe un ciclo hamiltoniano. El diagrama muestra la solución en el caso n par.



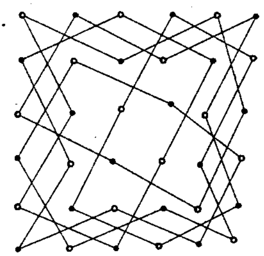
Si $n = 1$ o si $m = 1$, no existe un ciclo, y en particular, no existe un ciclo hamiltoniano. Supongamos que n y m son ambos impares y que la gráfica tiene un ciclo hamiltoniano. Como existen nm vértices, este ciclo tiene nm aristas; por lo tanto, el ciclo hamiltoniano contiene un número impar de aristas. Sin embargo, observemos que en un ciclo hamiltoniano deben aparecer tantas aristas "hacia arriba" como aristas "hacia abajo" y tantas aristas "hacia la izquierda" como aristas "hacia la derecha". Así, un ciclo hamiltoniano debe tener un número par de aristas. Esta contradicción muestra que si n y m son ambos impares, la gráfica no tiene un ciclo hamiltoniano.

. Cuando $m = n$ y $n > 1$

. Cualquier ciclo C del n-cubo tiene longitud par, pues los vértices en C alternan entre un número par y un número impar de unos.

Supongamos que el n-cubo tiene un ciclo simple de longitud m. Acabamos de observar que m es par. Ahora, $m > 0$ por definición. Como el n-cubo es una gráfica simple, $m \neq 2$. Por lo tanto, $m \geq 4$.

Ahora, supongamos que $m \geq 4$ y m es par. Sean G los primeros $m/2$ miembros del código de Gray G_{n-1}. Entonces $0G$, $1G^R$ describe un ciclo simple de longitud m en el n-cubo.



Sección 6.4

1. 7; (a, b, c, f) 4. 7; (b, c, f, j)

6. El ejemplo 6.4.2 permite modelar un algoritmo.

9. Modifique el algoritmo 6.4.1 de modo que comience asignando el peso ∞ a cada arista inexistente. Luego, el algoritmo continúa como está escrito. Al terminar, $L(z)$ será igual a ∞ si no existe un camino de a a z.

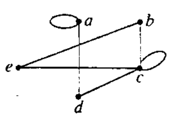
Sección 6.5

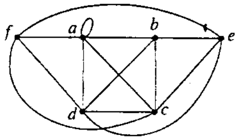
1.
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

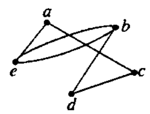
10.
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

13. 

16. 

19. [Para K_5]
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

22. La gráfica no es conexa.

25. 

28. G no es conexa.

29. Debido a la simetría de la gráfica, si v y w son vértices en K_5, existe el mismo número de caminos de longitud n de v a v como caminos de longitud n de w a w. Así, todos los elementos de la diagonal de A^n son iguales. De manera análoga, todos los elementos fuera de la diagonal de A^n son iguales.

32. Si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} d_n &= 4a_{n-1} && \text{por el ejercicio 30} \\ &= 4\left(\frac{1}{5}\right)[4^{n-1} + (-1)^n] && \text{por el ejercicio 31.} \end{aligned}$$

La fórmula se puede verificar de manera directa para $n = 1$.

Sección 6.6

1. Las gráficas no son isomorfas, pues no tienen el mismo número de vértices.

4. Las gráficas no son isomorfas, pues G_2 tiene un vértice (c') de grado 4, pero G_1 no.

7. Las gráficas no son isomorfas, pues G_1 tiene un vértice de grado 2, pero G_2 no.

10. Las gráficas son isomorfas: $f(a) = e'$, $f(b) = c'$, $f(c) = a'$, $f(d) = g'$, $f(e) = d'$, $f(f) = f'$, $f(g) = b'$, $f(h) = h'$. Definimos

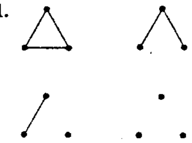
$$g((x, y)) = (f(x), f(y)).$$

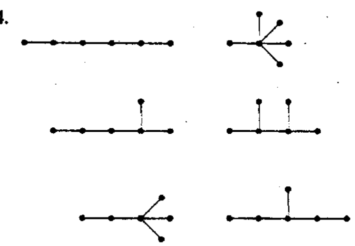
En los ejercicios 12–18, utilizamos la notación de la definición 6.6.1.

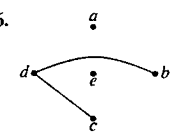
12. Si $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ es un ciclo simple de longitud k en G_1, entonces $(f(v_0), f(v_1), \ldots, f(v_k))$ es un ciclo simple de longitud k en G_2. [Los vértices $f(v_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$, son distintos, pues f es uno a uno.]

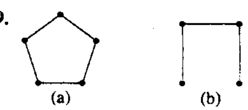
15. En la sugerencia del ejercicio 12, mostramos que si $C = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ es un ciclo simple de longitud k en G_1, entonces $(f(v_0), f(v_1), \ldots, f(v_k))$, que denotamos como $f(C)$, es un ciclo simple de longitud k en G_2. Sean $C_1, C_2, \ldots, C_n$ los n ciclos simples de longitud k en G_1. Entonces $f(C_1)$, $f(C_2), \ldots, f(C_n)$ son n ciclos simples de longitud k en G_2. Además, como f es uno a uno, $f(C_1)$, $f(C_2), \ldots, f(C_n)$ son distintos.

18. La propiedad es un invariante. Si $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ es un ciclo de Euler en G_1, entonces, como g es sobre, $(f(v_0), f(v_1), \ldots, f(v_n))$ es un ciclo de Euler en G_2.

21. 

24. 

26. 

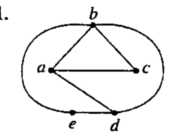
29. 

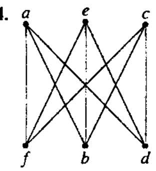
32. Definimos $g((v, w)) = (f(v), f(w))$.

33. $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$, $f(d) = b'$

36. $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$, $f(d) = a'$,

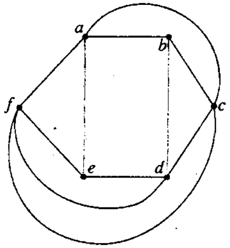
Sección 6.7

1. 

4. 

es $K_{3,3}$

6. Plana

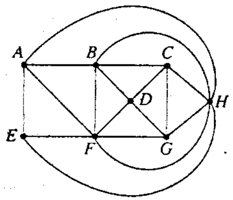


9. $2e = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5$, de modo que $e = 14$. $f = e - v + 2 = 14 - 9 + 2 = 7$

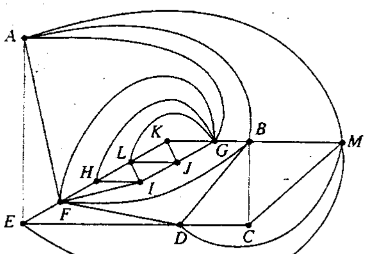
12. Una gráfica con cinco o menos vértices y un vértice de grado 2 es homeomorfa a una gráfica con cuatro o menos vértices. Tal gráfica no puede contener una copia homeomorfa de $K_{3,3}$ o de K_5.

15. Si K_5 es plana, $e \leq 3v - 6$ se convierte en $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$.

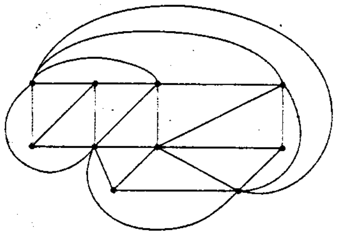
18.



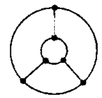
22.



25.



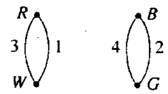
28. Contiene a



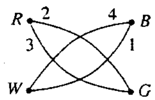
31. Suponga que G no tiene un vértice de grado 5. Muestre que $2e \geq 6v$. Ahora utilice el ejercicio 13 para obtener una contradicción.

Sección 6.8

1.

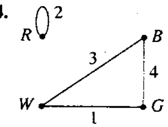


G_1

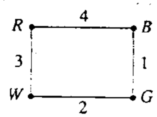


G_2

4.

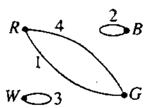


G_1

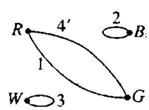


G_2

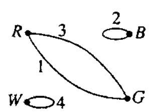
7. (a)



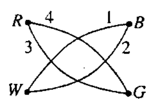
G_1



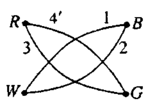
G_2



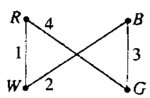
G_3



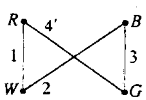
G_4



G_5



G_6

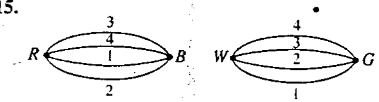


G_7

(b) Las soluciones son: G_1, G_5; G_1, G_7; G_2, G_4; G_2, G_6; G_3, G_6; y G_3, G_7.

13. Una arista se puede elegir de $C(2 + 4 - 1, 2) = 10$ formas. Las tres aristas etiquetadas con 1 se pueden elegir de $C(3 + 10 - 1, 3) = 220$ formas. Así, el número total de gráficas es 220^4.

15.



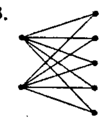
19. De acuerdo con el ejercicio 14, sin contar los lazos, cada vértice debe tener grado al menos 4. En la figura 6.8.5, sin contar los lazos, el vértice W tiene grado 3 y, por lo tanto, la figura 6.8.5 no tiene una solución a la versión modificada de Locura Instantánea. La figura 6.8.3 da una solución del juego regular de Locura Instantánea para la figura 6.8.5.

Capítulo 6 Autoevaluación

1. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. e_1 y e_2 son aristas paralelas. No hay lazos. v_1 es un vértice aislado. G no es una gráfica simple. e_3 es incidente en v_2 y v_4. v_2 es incidente en e_1, e_2 y e_3.

2. Existen vértices (a y e) de grado impar.

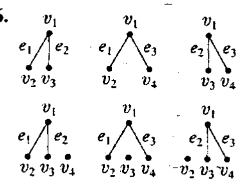
3.



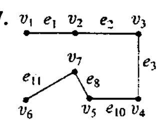
4. Si V_1 denota el conjunto de vértices que contienen un número par de unos y V_2 el conjunto de vértices que contienen un número impar de unos, cada arista es incidente en un vértice de V_1 y un vértice de V_2. Por lo tanto, el n-cubo es bipartita.

5. Es un ciclo.

6.



7.



8. No. Existen vértices de grado impar.

9. $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_6, v_1)$

10. (000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100, 000)

11. Un ciclo hamiltoniano tendría siete aristas. Supongamos que la gráfica tiene un ciclo hamiltoniano. Tendríamos que eliminar tres aristas en el vértice b y una arista en el vértice f. Esto deja $10 - 4 = 6$ aristas, que no son suficientes para un ciclo hamiltoniano. Por lo tanto, la gráfica no tiene un ciclo hamiltoniano.

12. En un ciclo hamiltoniano de peso mínimo, cada vértice debe tener grado 2. Por lo tanto, hay que incluir las aristas (a, b), (a, j), (j, i), (i, h), (g, f), (f, e) y (e, d). No podemos incluir la arista (b, h), pues entonces se formaría un ciclo. Esto implica que debemos incluir las aristas (h, g) y (b, c). Como el vértice g tiene ahora grado 2, no podemos incluir las aristas (c, g) ni (g, d). Así, debemos incluir (c, d). Éste es un ciclo hamiltoniano, y el argumento muestra que es único. Por lo tanto, es mínimo.

13. 9 14. 11 15. (a, e, f, i, g, z) 16. 12

17.

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

18.

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

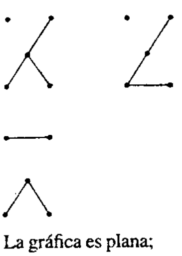
19. El número de caminos de longitud 3 de v_2 en v_3.

20. No. Cada arista es incidente en al menos un vértice.

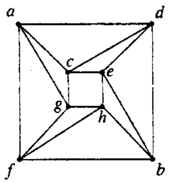
21. Las gráficas son isomorfas. Los órdenes v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y w_3, w_1, w_4, w_2, w_5 producen matrices de adyacencia iguales.

22. Las gráficas son isomorfas. Los órdenes $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ y $w_3, w_6, w_2, w_5, w_1, w_4$ producen matrices de adyacencia iguales.

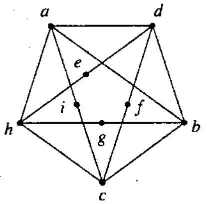
23.



La gráfica es plana;

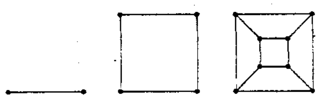


La gráfica no es plana; la siguiente subgráfica es homeomorfa a K_5:



Una gráfica simple, plana, conexa, con e aristas y v vértices satisface $e \le 3v - 6$ (véase el ejercicio 13 de la sección 6.7). Si $e = 31$ y $v = 12$, la desigualdad no se satisface, de modo que la gráfica no puede ser plana.

Para $n = 1, 2, 3$, es posible trazar el n-cubo en el plano sin que se crucen sus aristas:



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

Argumentamos por contradicción para mostrar que el 4-cubo no es plano. Supongamos que el 4-cubo es plano. Como cada ciclo tiene al menos cuatro aristas, cada cara está acotada por al menos cuatro aristas. Así, el número de aristas que acotan caras es al menos $4f$. En una gráfica plana, cada arista pertenece a lo más a dos ciclos frontera. Por lo tanto, $2e \ge 4f$. Al utilizar la fórmula de Euler para gráficas, tenemos que

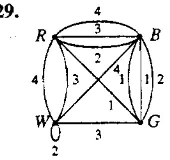
$$2e \ge 4(e - v + 2).$$

Para el 4-cubo, tenemos que $e = 32$ y $v = 16$, de modo que la fórmula de Euler queda

$$64 = 2 \cdot 32 \ge 4(32 - 16 + 2) = 72,$$

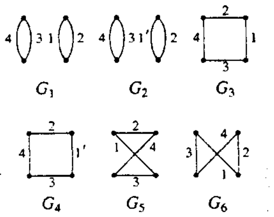
lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el 4-cubo no es plano. El n-cubo, para $n > 4$, no es plano, pues contiene al 4-cubo.

29.



30. Véanse las sugerencias para los ejercicios 31 y 32.

31.



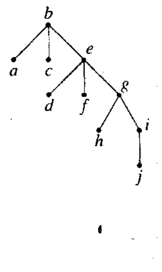
Denotamos las dos aristas incidentes en B y G etiquetadas con 1 en la gráfica del ejercicio 29 como 1 y 1′, aquí.

32. El juego del ejercicio 29 tiene cuatro soluciones. Al utilizar la notación del ejercicio 31, las soluciones son G_1, G_5; G_2, G_5; G_3, G_6; y G_4, G_6.

Sección 7.1

1. *a*-1; *b*-1; *c*-1; *d*-1; *e*-2; *f*-3; *g*-3; *h*-4; *i*-2; *j*-3; *k*-0

4. Altura = 4



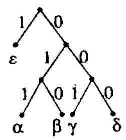
7. PEN

10. SALAD

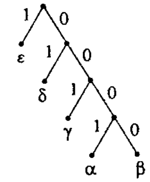
11. 0111100010

14. 0110000100100001111

17.



20. Otro árbol aparece en la sugerencia del ejercicio 17.



24. Sea T un árbol. Elegimos como raíz de T algún vértice arbitrario. Sea V el conjunto de vértices en los niveles pares y W el conjunto de vértices en los niveles impares. Como cada arista es incidente en un vértice de V y un vértice de W, T es una gráfica bipartita.

27. *e*, *g*

30. El radio es la excentricidad de un centro. No necesariamente ocurre que $2r = d$ (véase la figura 7.1.5).

Sección 7.2

1. Cronos

4. Apolo, Atenea, Hermes, Hércules

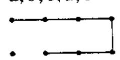
7. *b*; *d*

10. *e*, *f*, *g*, *j*; *j*

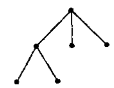
13. *a*, *b*, *c*, *d*, *e*

17. Son hermanos.

22.



25.

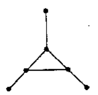


27. Un único vértice es un "ciclo" de longitud 0.

30. Cada componente de un bosque es conexo y acíclico y, por lo tanto, es un árbol.

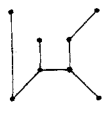
33. Supongamos que G es conexa. Agregamos aristas paralelas hasta que la gráfica resultante G^* tenga $n - 1$ aristas. Como G^* es conexa y tiene $n - 1$ aristas, por el teorema 7.2.3, G^* es acíclica. Pero al agregar una arista paralela se forma un ciclo, lo cual es una contradicción.

36.



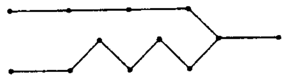
Sección 7.3

1.



4. El camino (h, f, e, g, b, d, c, a)

7.



10. Es claro que el problema de las dos reinas no tiene solución. Para el problema de las tres reinas, por simetría, las únicas posiciones posibles en la primera columna son arriba a la izquierda y en el segundo renglón de arriba hacia abajo. Si el primer movimiento es en la primera columna, arriba a la izquierda, el segundo movimiento debe ser a la parte inferior de la segunda columna. Ahora, ya no existe un movimiento posible para la tercera columna. Si el primer movimiento es al segundo renglón de la primera columna, no existe un movimiento posible en la segunda columna. Por lo tanto, no existe solución al problema de las tres reinas.

13. Falso. Considere K_4.

16. En primer lugar, muestre que la gráfica T construida es un árbol. Luego utilice inducción sobre el nivel de T para mostrar que T contiene a todos los vértices de G.

19. Supongamos que x es incidente en los vértices a y b. Al eliminar x de T se obtiene una gráfica disconexa, con dos componentes U y V. Los vértices a y b pertenecen a componentes distintos, digamos, $a \in U$ y $b \in V$. Existe un camino P de a a b en T'. Al movernos por P, en verdadero punto encontramos una arista $y = (v, w)$ con $v \in U$, $w \in V$. Como el hecho de agregar y a $T - \{x\}$ produce una gráfica conexa, $(T - \{x\}) \cup \{y\}$ es un árbol de expansión. Es claro que $(T' - \{y\}) \cup \{x\}$ es un árbol de expansión.

22. Supongamos que T tiene n vértices. Si se agrega una arista a T, la gráfica resultante T' es conexa. Si T' fuese acíclica, T' sería un árbol con n aristas y n vértices. Así, T' contiene un ciclo. Si T' tuviera dos o más ciclos, podríamos obtener una gráfica conexa T'' eliminando dos o más aristas de T'. Pero entonces T'' sería un árbol con n vértices y menos de $n - 1$ aristas, lo cual es imposible.

23.

$$\begin{array}{c} \\ (abca) \\ (acda) \\ (acdb) \\ (bcdeb) \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_6 & e_5 & e_3 & e_4 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

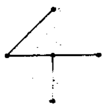
26. Entrada: Una gráfica $G = (V, E)$ con n vértices

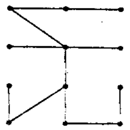
Salida: **true**, si G es conexa
false, si G no es conexa

procedure *is_connected*(V, E)
$T := bfs(V, E)$
$// T = (V', E')$
// es el árbol de expansión regresado por *bfs*
if $|V'| = n$ **then**

```
    return(true)
  else
    return(false)
end is_connected
```

Sección 7.4

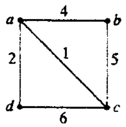
1. 

4. 

10. Si v es el primer vértice examinado por el algoritmo de Prim, la arista estará en el árbol de expansión mínimo construido por el algoritmo.

13. Supongamos que G tiene dos árboles de expansión minimales T_1 y T_2. Entonces existe una arista x en T_1 que no está en T_2. Por el ejercicio 19 de la sección 7.3, existe una arista y en T_2 que no está en T_1 y tal que $T_3 = (T_1 - \{x\}) \cup \{y\}$ y $T_4 = (T_2 - \{y\}) \cup \{x\}$ son árboles de expansión. Como x y y tienen pesos distintos, entonces T_3 o T_4 tienen peso menor que T_1, lo cual es una contradicción.

14. Falso



16. Falso. Considere K_5, con el peso de cada arista igual a 1.

20. Entrada: Las aristas E de una gráfica conexa, con pesos, con n vértices. Si e es una arista, $w(e)$ es igual al peso de e; si e no es una arista, $w(e) = \infty$ (un valor mayor que cualquier peso real).

Salida: Un árbol de expansión mínimo.

```
procedure kruskal(E, w, n)
  V' := Ø
  E' := Ø
  T' := (V', E')
  while |E'| < n − 1 do
    begin
      elegir una arista e = (v_i, v_j) de peso mínimo
        entre todas las aristas tales que al agregarse a T'
        no formen un ciclo
      E' := E' ∪ {e}
      V' := V' ∪ {v_i, v_j}
      T' := (V', E')
    end
  return(T')
end kruskal
```

23. Terminar el algoritmo de Kruskal después de k iteraciones. Esto agrupa los datos en $n - k$ clases.

27. Mostraremos que $a_1 = 7$ y $a_2 = 3$ proporciona una solución. Utilizamos inducción sobre n para mostrar que la solución codiciosa proporciona una solución óptima para $n \geq 1$. Los casos $n = 1, 2, \ldots, 8$ se pueden verificar de manera directa.

Primero mostraremos que si $n \geq 9$, existe una solución óptima que contiene al menos un 7. Sea S' una solución óptima. Supongamos que S' no contiene sietes. Como S' contiene a lo más dos unos (pues S' es óptima), S' contiene al menos tres 3. Reemplazamos tres 3 por un 7 y un 1 para obtener una solución S. Como $|S| = |S'|$, S es óptima.

Si eliminamos un 7 de S, obtenemos una solución S^* al problema $(n - 7)$. Si S^* no fuese óptima, S no podría ser óptima. Así, S^* es óptima. Por la hipótesis de inducción, la solución codiciosa GS^* al problema $(n - 7)$ es óptima, de modo que $|S^*| = |GS^*|$. Observe que 7 junto con GS^* es la solución codiciosa al problema n. Como $|GS| = |S|$, GS es óptima.

30. Mostraremos que si el algoritmo codicioso es óptimo para $n = 1, 2, \ldots, k$, donde

$$k = \sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{a_{i+1}}{\operatorname{mcd}(a_{i+1}, a_i)} - 1\right)a_i,$$

entonces el algoritmo codicioso es óptimo para toda n con denominaciones

$$1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_m.$$

El recíproco es directo.

Utilizamos inducción sobre n para demostrar que el algoritmo codicioso es óptimo para n. Los pasos base son $n = 1, \ldots, k$, los cuales se satisfacen por hipótesis.

Supongamos que $n > k$. Sea S una solución óptima para n, y sea G_n la solución codiciosa para n. Además, sean $|S|$ y $|G_n|$ los números de estampillas en estas soluciones. Afirmamos que S contiene al menos una estampilla de denominación a_m. Supongamos, por contradicción, que S no contiene una estampilla de denominación a_m. Ahora, S contiene a lo más

$$\frac{a_{i+1}}{\operatorname{mcd}(a_{i+1}, a_i)} - 1$$

estampillas de denominación a_i para $i = 1, \ldots, m - 1$. En caso contrario, podríamos reemplazar

$$\frac{a_{i+1}}{\operatorname{mcd}(a_{i+1}, a_i)}$$

estampillas de denominación a_i por

$$\frac{a_i}{\operatorname{mcd}(a_{i+1}, a_i)}$$

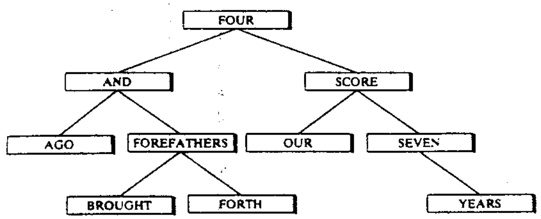
estampillas de denominación a_{i+1} y con ello reducir el número de estampillas en S. Como S es una solución óptima, esto es imposible. Por lo tanto, S contiene a lo más

$$\frac{a_{i+1}}{\operatorname{mcd}(a_{i+1}, a_i)} - 1$$

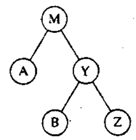
estampillas de denominación a_i para $i = 1, \ldots, m - 1$. Esto implica que podemos pagar a lo más una tarifa de k centavos. Como $n > k$, esto es una contradicción. Por lo tanto, S contiene al menos una estampilla de denominación a_m.

Sea S' igual a S, con una estampilla de denominación a_m eliminada. Entonces S' es óptima para una tarifa de $n - a_m$ centavos. Por la hipótesis de inducción, el algoritmo codicioso es óptimo para una tarifa de $n - a_m$ centavos. Por lo tanto, $|G_{n-a_m}| = |S'|$. Esto implica que $|G_n| = |S|$, con lo que concluye la demostración.

Sección 7.5



4. Falso. Considere



5. 

8. $mi + 1, (m - 1)i + 1$ **11.** $t - 1$

14. Balanceado **17.** Balanceado

18. Un árbol de altura 0 tiene un vértice, de modo que $N_0 = 1$. En un árbol binario balanceado de altura 1, la raíz debe tener al menos un hijo. Si la raíz tiene exactamente un hijo, el número de vértices estará minimizado. Por lo tanto, $N_1 = 2$. En un árbol binario balanceado de altura 2, debe existir un camino de la raíz a un vértice terminal de longitud 2. Por esto, al menos existen tres vértices. Pero para que el árbol esté balanceado, la raíz debe tener dos hijos. Por lo tanto, $N_2 = 4$.

21. Supongamos que existen n vértices en un árbol binario balanceado de altura h. Entonces

$$n \geq N_h = f_{h+2} - 1 > \left(\frac{3}{2}\right)^{h+2} - 1,$$

para $h \geq 3$. La igualdad proviene del ejercicio 20 y la última desigualdad del ejercicio 20 de la sección 3.4. Por lo tanto,

$$n + 1 > \left(\frac{3}{2}\right)^{h+2}.$$

Al obtener el logaritmo de base $\frac{3}{2}$ de cada lado, obtenemos

$$\log_{3/2}(n + 1) > h + 2.$$

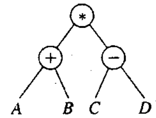
Por lo tanto,

$$h < [\log_{3/2}(n + 1)] - 2 = O(\lg n).$$

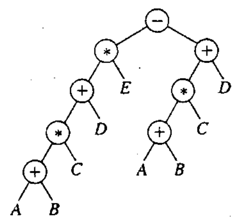
Sección 7.6

1. *preorden* ABDCE *entreorden* BDAEC *posorden* DBECA

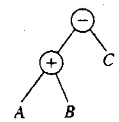
4. *preorden* ABCDE *entreorden* EDCBA *posorden* EDCBA

6. 

prefija: $* + AB - CD$
posfija: $AB + CD - *$

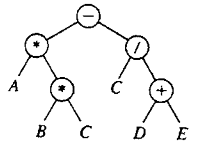
9. 

prefija: $- * + * + ABCDE + * + ABCD$
posfija: $AB + C * D + E * AB + C * D + -$

11. 

prefija: $- + ABC$
entrefija usual: $A + B - C$
entrefija con paréntesis: $((A + B) - C)$

4.

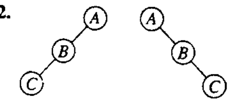


prefija: $- * A * BC/C + DE$
entrefija usual: $A * B * C - C/(D + E)$
entrefija con paréntesis: $((A * (B * C)) - (C/(D + E)))$

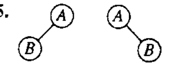
6. −4

19. 0

2.



5.



. Entrada: PT, la raíz de un árbol binario

Salida: PT, la raíz del árbol binario modificado

procedure *swap_children(PT)*
  if *PT* vacío **then**
    return
  intercambiar los hijos izquierdo y derecho de *PT*
  l := hijo izquierdo de *PT*
  swap_children(l)
  r := hijo derecho de *PT*
  swap_children(r)
end *swap_children*

. Un *segmento inicial* de una cadena son los primeros $i \geq 1$ caracteres, para alguna i. Sea $r(x) = 1$, para $x = A, B, \ldots, Z$; y $r(x) = -1$, para $x = +, -, *, /$. Si $x_1 \cdots x_n$ es una cadena sobre $\{A, \ldots, Z, +, -, *, /\}$, definimos

$$r(x_1 \cdots x_n) = r(x_1) + \cdots + r(x_n).$$

Entonces una cadena s es una cadena posfija si y sólo si $r(s) = 1$ y $r(s') \geq 1$, para todos los segmentos iniciales s' de s.

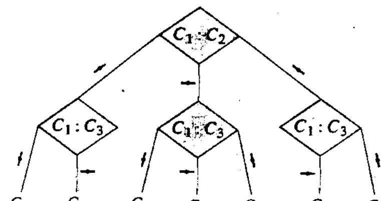
. Entrada: PT, la raíz de un árbol no vacío

Salida: Cada nodo del árbol tiene un campo *in_cover* que es **true** si ese nodo está en la cubierta de vértices o **false** en caso contrario.

procedure *tree_cover(PT)*
  flag := **false**
  ptr := primer hijo de *PT*
  while *ptr* no es vacío **do**
    begin
    tree_cover(ptr)
    if *in_cover* de *ptr* = **false then**
      flag := **true**
    ptr := siguiente hermano de *ptr*
    end
  in_cover de *PT* := *flag*
end *tree_cover*

Sección 7.7

1.



4. Véase la siguiente página.

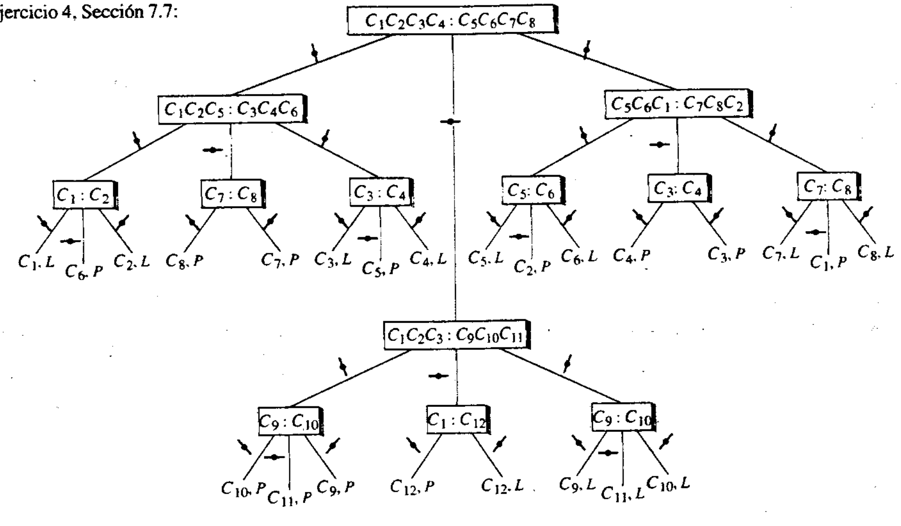
7. Existen 28 resultados posibles para el juego de las 14 monedas. Un árbol de altura 3 tiene a lo más 27 vértices terminales: así, se necesitan al menos cuatro pesadas en el peor de los casos. De hecho, existe un algoritmo que utiliza cuatro pesadas en el peor de los casos: Primero pesamos cuatro monedas contra cuatro monedas. Si las monedas no se equilibran, procedemos como en la solución dada en el ejercicio 4 (para el juego de las 12 monedas). En este caso, se necesitan a lo más tres pesadas. Si las monedas se equilibran, las desechamos; nuestro problema entonces es determinar la moneda mala entre las seis monedas restantes. El juego de 6 monedas se puede resolver con a lo más tres pesadas en el peor de los casos, lo cual, junto con la pesada inicial, requiere cuatro pesadas en el peor de los casos.

10. El análisis del árbol de decisión muestra que se necesitan al menos $\lceil \lg 5! \rceil = 7$ comparaciones para ordenar cinco elementos en el peor de los casos. El siguiente algoritmo ordena cinco elementos utilizando a lo más siete comparaciones en el peor de los casos.

Dada la sucesión $a_1, \ldots, a_5$, primero ordenamos a_1, a_2 (una comparación) y luego a_3, a_4 (una comparación). (Supongamos que $a_1 < a_2$ y $a_3 < a_4$.) Luego comparamos a_2 y a_4. (El caso $a_2 > a_4$ es simétrico, y por esta razón se omite esa parte del algoritmo.) En este punto sabemos que

$$a_1 < a_2 < a_4 \text{ y } a_3 < a_4$$

Ejercicio 4, Sección 7.7:



A continuación determinamos si a_5 está entre a_1, a_2 y a_4 comparando primero a_5 con a_2. Si $a_5 < a_2$, a continuación comparamos a_5 con a_1; pero si $a_5 > a_2$, comparamos a_5 con a_4. En cualquier caso, se necesitan otras dos comparaciones. En este momento, a_1, a_2, a_4, a_5 están ordenados. Por último, insertamos a_3 en el lugar correcto. Si primero comparamos a_3 con el segundo menor elemento de a_1, a_2, a_4, a_5, sólo se necesitará una comparación adicional, para un total de siete comparaciones. Para justificar esta última afirmación, observemos que son posibles los siguientes arreglos después de insertar a_3 en su posición correcta:

$$a_5 < a_1 < a_2 < a_4$$
$$a_1 < a_5 < a_2 < a_4$$
$$a_1 < a_2 < a_5 < a_4$$
$$a_1 < a_2 < a_4 < a_5.$$

Si a_3 es menor que el segundo elemento, sólo se necesita una comparación más (con el primer elemento) para localizar la posición correcta de a_3. Si a_3 es mayor que el segundo elemento, a lo más se necesita otra comparación para localizar la posición correcta de a_3. En los primeros tres casos, sólo necesitamos comparar a_3 con a_2 o a_5 para determinar la posición correcta de a_3, ya que sabemos que $a_3 < a_4$. En el cuarto caso, si a_3 es mayor que a_2, sabemos que va entre a_2 y a_4.

12. Podemos considerar a los números como contendientes y los vértices internos como ganadores, donde el valor mayor gana.

15. Suponga que tenemos un algoritmo que determina el valor máximo entre $x_1, \ldots, x_n$. Sean $x_1, \ldots, x_n$ los vértices de una gráfica. Existe una arista entre x_i y x_j si el algoritmo compara a x_i con x_j. La gráfica debe ser conexa. El mínimo número de aristas necesarias para unir n vértices es $n - 1$.

18. Por el ejercicio 14, el ordenamiento por torneo necesita $2^k - 1$ comparaciones para determinar el elemento máximo. Por el ejercicio 16, el ordenamiento por torneo necesita k comparaciones para determinar el segundo elemento más grande. De manera similar, el ordenamiento por torneo necesita a lo más k comparaciones para determinar el tercer elemento más grande, a lo más k comparaciones para determinar el cuarto más grande, y así sucesivamente. Así, el número total de comparaciones es a lo más

$$[2^k - 1] + (2^k - 1)k \leq 2^k + k2^k$$
$$\leq k2^k + k2^k$$
$$= 2 \cdot 2^k k = 2n \lg n.$$

Sección 7.8

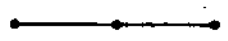
1. Isomorfos. $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_5$, $f(v_3) = w_3$, $f(v_4) = w_4$, $f(v_5) = w_2$, $f(v_6) = w_6$.

4. No son isomorfos. T_2 tiene un camino simple de longitud 2 de un vértice de grado 1 a un vértice de grado 1, pero T_1 no.

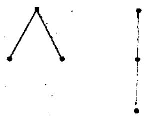
7. Isomorfos como árboles con raíz. $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_4$, $f(v_3) = w_3$, $f(v_4) = w_2$, $f(v_5) = w_6$, $f(v_6) = w_5$, $f(v_7) = w_7$, $f(v_8) = w_8$. También son isomorfos como árboles libres.

10. No son isomorfos como árboles binarios. La raíz de T_1 tiene un hijo izquierdo, pero la raíz de T_2 no. Isomorfos como árboles con raíz y como árboles libres.

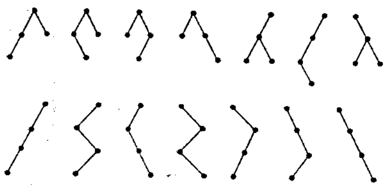
13.



16.



19.



22. Sea b_n el número de árboles binarios completos, no isomorfos, con n vértices. Como cada árbol binario completo tiene un número impar de vértices, $b_n = 0$, si n es par. Mostraremos que si $n = 2i + 1$ es impar, entonces,

$$b_n = C_i,$$

donde C_i denota el i-ésimo número de Catalan.

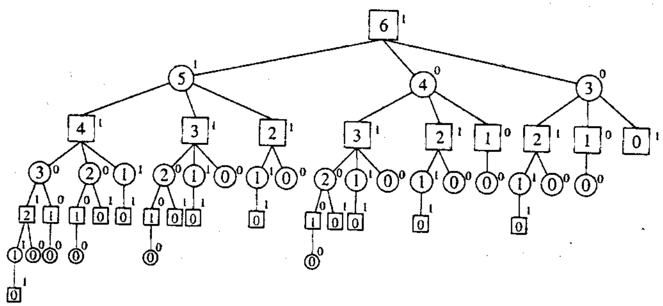
La última ecuación es consecuencia del hecho de que existe una función uno a uno y sobre del conjunto de árboles binarios con i vértices al conjunto de árboles binarios completos con $(2i + 1)$ vértices. Tal función se puede construir como sigue. Dado un árbol binario con i vértices, en cada vértice terminal agregamos dos hijos. En cada vértice con un hijo, agregamos un hijo adicional. Como el árbol que se obtiene tiene i vértices internos, existen $2i + 1$ vértices en total (teorema 7.5.4). El árbol construido es un árbol binario completo. Observe que esta función es uno a uno. Dado un árbol binario completo T' con $(2i + 1)$ vértices, si eliminamos todos los vértices terminales, obtenemos un árbol binario con i vértices T. La imagen de T es T'. Por lo tanto, la función es sobre.

25. Existen cuatro comparaciones en las líneas 1 y 3. Por el ejercicio 24; la llamada *bin_tree_isom*(lc_r_1, lc_r_2) requiere $6(k - 1) + 2$ comparaciones. La llamada *bin_tree_isom*(rc_r_1, rc_r_2) requiere cuatro comparaciones. Así, el número total de comparaciones es

$$4 + 6(k - 1) + 2 + 4 = 6k + 4.$$

Sección 7.9

1.



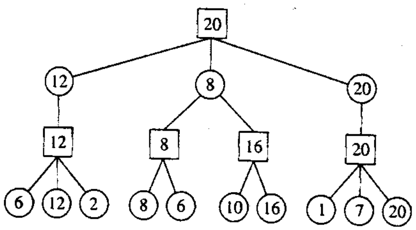
El primer jugador siempre gana. La estrategia ganadora consiste en tomar primero una ficha; y luego, sin importar lo que haga el segundo jugador, dejar una ficha.

4. El segundo jugador siempre gana. Si quedan dos pilas, deja pilas con igual número de fichas. Si queda una pila, tomarla.

7. Suponga que el primer participante puede ganar el juego de nim. El primer jugador siempre puede ganar en nim' mediante la siguiente estrategia: Jugar nim' exactamente como nim' a menos que el movimiento deje un número impar de pilas con una ficha y ninguna otra pila. En este caso, dejar un número par de pilas.

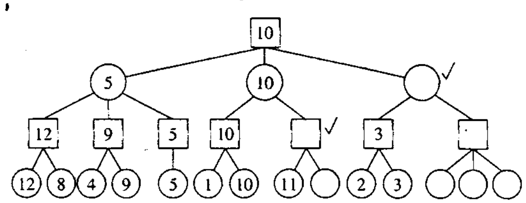
Suponga que el primer jugador siempre puede ganar en nim'. El primer jugador siempre puede ganar en nim adoptando la siguiente estrategia: Jugar nim exactamente como nim', a menos que el movimiento deje un número par de pilas con una ficha y ninguna otra pila. En este caso, dejar un número impar de pilas.

9.



12. El valor de la raíz es 3.

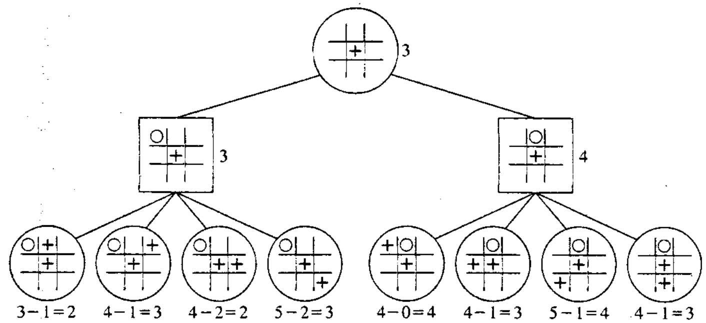
14. [Para el ejercicio 11]



15. $3 - 2 = 1$

18. $4 - 1 = 3$

19.



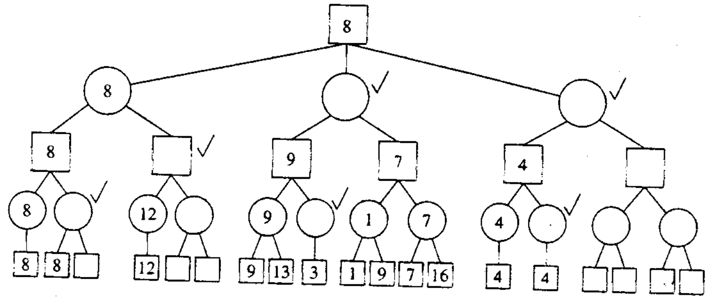
O moverá en una esquina.

22. Entrada: La raíz PT de un árbol de juego, el tipo *PT_type* de PT (*box* o *circle*, cuadro o círculo), el nivel *PT_level* de PT, el máximo nivel n hasta el cual realizar la búsqueda, una función de evaluación E, y un número *ab_val* (que es el valor alfa o beta del padre de PT). (La llamada inicial hace *ab_val* igual a ∞ si PT es un vértice de cuadro, o $-\infty$ si PT es un vértice de círculo.)

Salida: El árbol de juego con PT evaluado

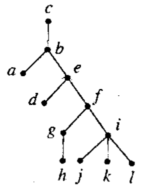
```
procedure alpha_beta_prune(PT,
  PT_type, PT_level, n, E, ab_val)
 if PT_level = n then
  begin
  contents (PT) := E(PT)
  return
  end
 if PT_type = box then
  begin
  contents (PT) := −∞
  for cada hijo C de PT
   alpha_beta_prune (C, circle,
    PT_level + 1, n, E, contents(PT))
  c_val := contents(C)
   if c_val ≥ ab_val then
    begin
    contents(PT) := ab_val
    return
    end
   if c_val > contents(PT) then
    contents(PT) := c_val
  end
 else
  begin
  contents(PT) := ∞
  for cada hijo C de PT
   alpha_beta_prune(C, box,
   PT_level + 1, n, E, contents(PT))
   c_val := contents(C)
   if c_val ≤ ab_val then
    begin
    contents(PT) := ab_val
    return
    end
   if c_val < contents(PT) then
    contents(PT) := c_val
  end
end alpha_beta_prune
```

23. Primero obtenemos los valores 6, 6, 7 para los hijos de la raíz. Luego ordenamos los hijos de la raíz de modo que el hijo del extremo izquierdo sea el primero, y utilizamos el procedimiento alfa-beta para obtener



Capítulo 7 Autoevaluación

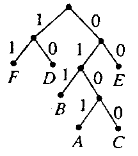
1.



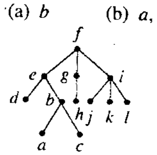
2. a-2, b-1, c-0, d-3, e-2, f-3, g-4, h-5, i-4, j-5, k-5, l-5

3. 5

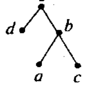
4.



5. (a) b (b) a, c



(c) d, a, c, h, j, k, l (d)

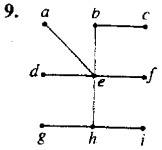


6. Verdadero. Véase el teorema 7.2.3.

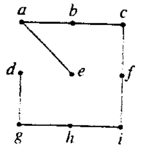
7. Verdadero. Un árbol de altura 6 o más debe tener siete o más vértices.

8. Falso.

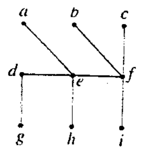
9.



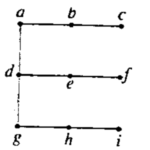
10.



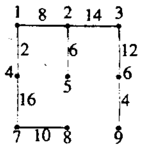
11.



12.



13.



14. (1, 4), (1, 2), (2, 5), (2, 3), (3, 6), (6, 9), (4, 7), (7, 8)

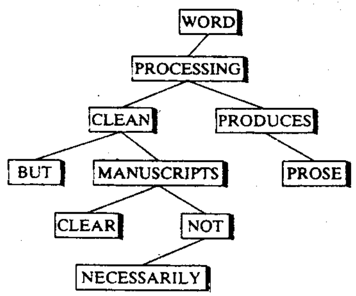
15. (6, 9), (3, 6), (2, 3), (2, 5), (1, 2), (1, 4), (4, 7), (7, 8)

16. Consideremos un "algoritmo del camino más corto" en el cual, en cada paso, elegimos una arista disponible con peso mínimo, incidente en el vértice que ha sido agregado de manera más reciente (véase el análisis antes del teorema 7.4.5).

17.

18. 16

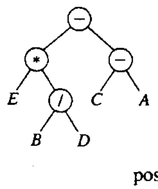
19.



20. Primero comparamos MORE con la palabra WORD en la raíz. Como MORE es menor que WORD, pasamos al hijo izquierdo. A continuación, comparamos MORE con PROCESSING. Como MORE es menor que PROCESSING, pasamos al hijo izquierdo. Como MORE es mayor que CLEAN, pasamos al hijo derecho. Como MORE es mayor que MANUSCRIPTS, pasamos al hijo derecho. Como MORE es menor que NOT, pasamos al hijo izquierdo. Como MORE es menor que NECESSARILY, intentamos ir al hijo izquierdo. Como éste no existe, concluimos que MORE no está en el árbol.

21. $ABFGCDE$ 22. $BGFAEDC$ 23. $GFBEDCA$

24.

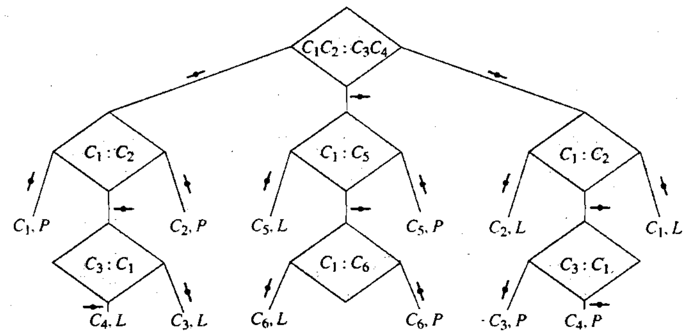


posfija: $EBD/\ *\ CA\ -\ -$

entrefija con paréntesis: $((E * (B/D)) - (C - A))$

25. Un algoritmo que requiere a lo más dos pesadas se puede representar mediante un árbol de decisión de altura a lo más 2. Sin embargo, tal árbol tiene a lo más nueve vértices terminales. Como existen 12 resultados posibles, no existe tal algoritmo. Por lo tanto, se necesitan al menos tres pesadas en el peor de los casos para identificar la moneda mala y determinar si es más pesada o más ligera.

26.



27. De acuerdo con el teorema 7.7.3, cualquier algoritmo de ordenamiento necesita al menos $Cn \lg n$ comparaciones en el peor de los casos. Como el algoritmo del profesor Sabic utiliza a lo más $100n$ comparaciones, debemos tener $Cn \lg n \leq 100n$ para todo $n \geq 1$. Si cancelamos n, obtenemos $C \lg n \leq 100$ para toda $n \geq 1$, lo cual es falso. Por lo tanto, el profesor no tiene un algoritmo de ordenamiento que utilice a lo más $100n$ comparaciones en el peor de los casos, para $n \geq 1$.

28. En el peor de los casos, se necesitan tres comparaciones para ordenar tres elementos mediante un ordenamiento óptimo (véase el ejemplo 7.7.2).

Si $n = 4$, el ordenamiento por inserción binaria ordena tres elementos (tres comparaciones en el peor de los casos) y luego inserta el cuarto elemento en la lista ordenada de tres elementos (dos comparaciones en el peor de los casos) para un total de cinco comparaciones en el peor de los casos.

Si $n = 5$, el ordenamiento por inserción binaria ordena cuatro elementos (cinco comparaciones en el peor de los casos) y luego inserta el quinto elemento en la lista ordenada de cuatro elementos (tres comparaciones en el peor de los casos) para un total de ocho comparaciones en el peor de los casos.

Si $n = 6$, el ordenamiento por inserción binaria ordena cinco elementos (ocho comparaciones en el peor de los casos) y luego inserta el sexto elemento en la lista ordenada de cinco elementos (tres comparaciones en el peor de los casos) para un total de once comparaciones en el peor de los casos.

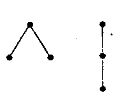
El análisis del árbol de decisión muestra que cualquier algoritmo necesita al menos cinco comparaciones en el peor de los casos para ordenar cuatro elementos. Así, el ordenamiento por inserción binaria es óptimo si $n = 4$.

El análisis del árbol de decisión muestra que cualquier algoritmo necesita al menos siete comparaciones en el peor de los casos para ordenar cinco elementos. De hecho, es posible ordenar cinco elementos mediante siete comparaciones en el peor de los casos. Así, el ordenamiento por inserción binaria no es óptimo si $n = 5$.

El análisis del árbol de decisión muestra que cualquier algoritmo necesita al menos diez comparaciones en el peor de los casos para ordenar seis elementos. De hecho, es posible ordenar seis elementos mediante diez comparaciones en el peor de los casos. Así, el ordenamiento por inserción binaria no es óptimo si $n = 6$.

29. Verdadero. Si f es un isomorfismo de T_1 y T_2 como árboles con raíz, f es también un isomorfismo de T_1 y T_2 como árboles libres.

30. Falso.



T_1 T_2

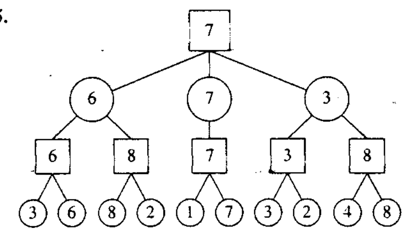
31. Isomorfos. $f(v_1) = w_6$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_5$, $f(v_4) = w_7$, $f(v_5) = w_4$, $f(v_6) = w_1$, $f(v_7) = w_3$, $f(v_8) = w_8$.

32. No son isomorfos. T_1 tiene un vértice (v_3) en el nivel 1, de grado 3, pero T_2 no.

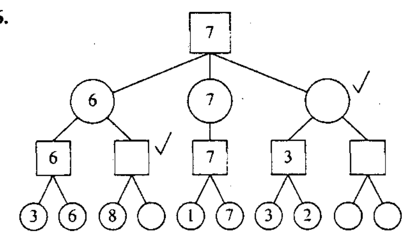
33. $3 - 1 = 2$

34. Hagamos que cada renglón, columna o diagonal que contenga una X y dos espacios en blanco cuente 1. Hagamos que cada renglón, columna o diagonal que contenga dos X y un espacio en blanco cuente 5. Hagamos que cada renglón, columna o diagonal que contenga tres X cuente 100. Hagamos que cada renglón, columna o diagonal que contenga un 0 y dos espacios en blanco cuente -1. Hagamos que cada renglón, columna o diagonal que contenga dos 0 y un espacio en blanco cuente -5. Hagamos que cada renglón, columna o diagonal que contenga tres 0 cuente -100. Sume los valores obtenidos.

35.



36.

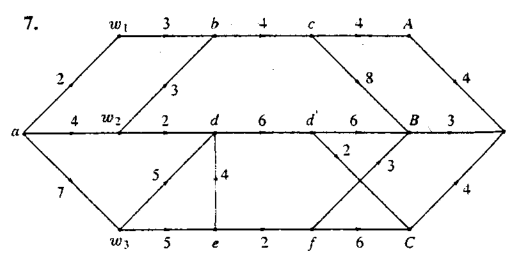


Sección 8.1

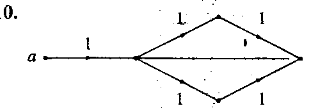
1. (b, c) es 6, 3; (a, d) es 4, 2; (c, e) es 6, 1; (c, z) es 5, 2. El valor del flujo es 5.

4. Agregar las aristas (a, w_1), (a, w_2), (a, w_3), (A, z), (B, z) y (C, z), cada una con capacidad ∞.

7.



10.

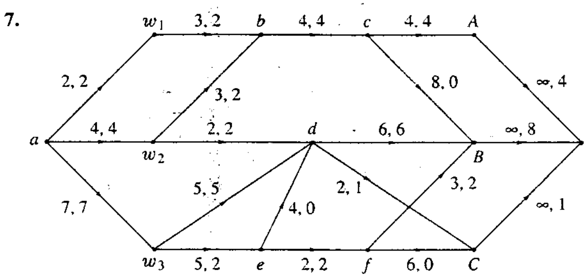


Sección 8.2

1. 1

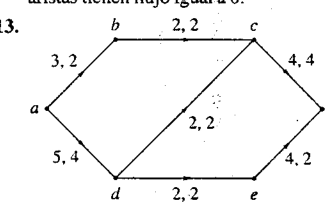
4. $(a, w_1)-6$, $(a, w_2)-0$, $(a, w_3)-3$, $(w_1, b)-6$, $(w_2, b)-0$, $(w_3, d)-3$, $(d, c)-3$, $(b, c)-2$, $(b, A)-4$, $(c, A)-2$, $(c, B)-3$, $(A, z)-6$, $(B, z)-3$

7.



10. $(a, A - 7{:}00) - 3000$, $(a, A - 7{:}15) - 3000$, $(a, A - 7{:}30) - 2000$, $(A - 7{:}00, B - 7{:}30) - 1000$, $(A - 7{:}00, C - 7{:}15) - 2000$, $(A - 7{:}15, B - 7{:}45) - 1000$, $(A - 7{:}15, C - 7{:}30) - 2000$, $(A - 7{:}30, C - 7{:}45) - 2000$, $(B - 7{:}30, D - 7{:}45) - 1000$, $(C - 7{:}15, D - 7{:}30) - 2000$, $(B - 7{:}45, D - 8{:}00) - 1000$, $(C - 7{:}30, D - 7{:}45) - 2000$, $(C - 7{:}45, D - 8{:}00) - 2000$, $(D - 7{:}45, z) - 3000$, $(D - 7{:}30, z) - 2000$, $(D - 8{:}00, z) - 3000$. El resto de las aristas tienen flujo igual a 0.

13.



16. El flujo máximo es 9.

19. Supongamos que la suma de las capacidades de las aristas incidentes en a es U. Cada iteración del algoritmo 8.2.5 incrementa el flujo en 1. Como el flujo no puede exceder a U, el algoritmo debe concluir en algún momento.

Sección 8.3

1. 8; mínimo

4. $P = \{a, b, d\}$

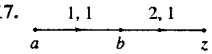
7. $P = \{a, d\}$

10. $P = \{a, w_1, w_2, w_3, b, d, e\}$

13. $P = \{a, w_1, w_2, w_3, b, c, d, d', e, f, A, B, C\}$

16. $P = \{a, b, c, f, g, h, j, k, l, m\}$

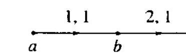
17.



con $C_{ab} = 1$, $C_{bz} = 2$, $m_{ab} = 1$, $m_{bz} = 2$.

20. Modifique el algoritmo 8.2.4.

23. Falso; considere el flujo

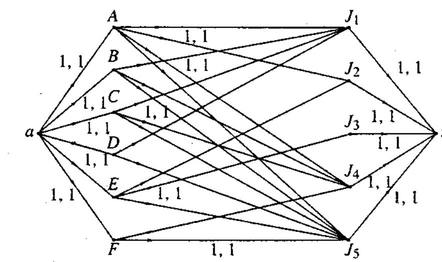


y el corte $P = \{a, b\}$.

Sección 8.4

1. $P = \{a, A, B, D, J_2, J_5\}$

4. Todas las aristas no etiquetadas son 1, 0. No existe un acoplamiento completo.



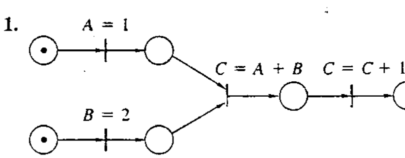
8. Cada renglón y columna tiene a lo más una etiqueta.

12. Si $\delta(G) = 0$, entonces $|S| - |R(S)| \leq 0$, para todo $S \subseteq V$. Por el teorema 8.4.7, G tiene un acoplamiento completo.

Si G tiene un acoplamiento completo, entonces $|S| - |R(S)| \leq 0$, para todo $S \subseteq V$, de modo que $\delta(G) \leq 0$. Si $S = \varnothing$, $|S| - |R(S)| = 0$, de modo que $\delta(G) = 0$.

Sección 8.5

1.

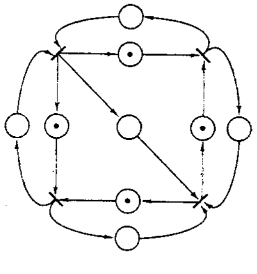


Sistemas operativos para computadoras, protocolos de comunicación, sistemas de información en oficinas, control de procesos industriales, sistemas de bases de datos (en especial, los sistemas distribuidos de bases de datos).

Sea M_1 el marcado que resulta de M al descargar t_1. La única transición activada en M_1 es t_2. Sea M_2 el marcado que resulta de M_1 al descargar t_2. La única transición activada en M_2 es t_3. Si se descarga t_3, se obtiene el marcado M. Esto implica que M está vivo y acotado.

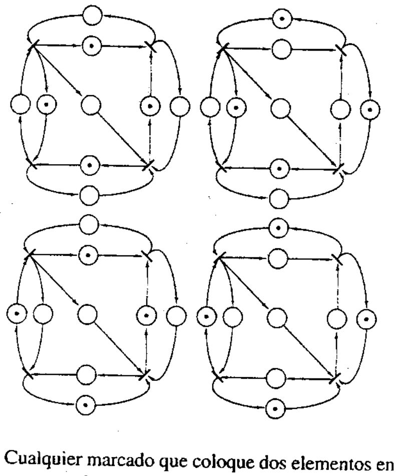
(a) t_1

(b)



(c) Sí (d) Sí (e) Sí

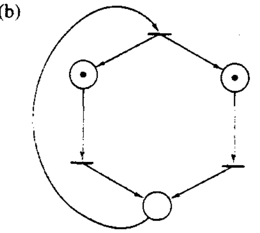
(f)



(g) Cualquier marcado que coloque dos elementos en al menos un lugar.

11. (a) t_1

(b)

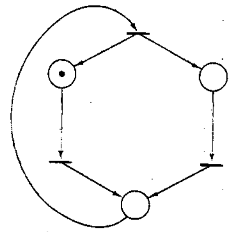


(c) Sí (d) No (e) No

(f) Designe al lugar de entrada a t_i como p_i. Los marcados alcanzables desde M son de dos tipos:

1. p_3 tiene al menos un elemento.
2. p_3 no tiene elementos y p_1 y p_2 tienen cada uno un elemento.

(g)

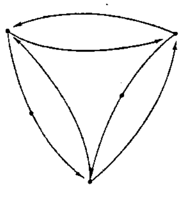


13. Figura 8.5.5

17. 8 y 9

20. Si se descarga un vértice en un ciclo simple dirigido C, se elimina un elemento de una arista en C, y se agrega un elemento a una arista en C; por lo tanto, la cantidad de elementos en C no cambia.

23.



Capítulo 8 Autoevaluación

1. En cada arista, el flujo es menor o igual que la capacidad y, excepto por la fuente y el sumidero, el flujo de entrada de cada vértice v es igual al flujo de salida de v.

2. 3 **3.** 3 **4.** 3 **5.** (a, b, e, f, g, z)

6. Modifique los flujos por $F_{a,b} = 2, F_{e,b} = 1, F_{e,f} = 1, F_{f,g} = 1, F_{g,z} = 1$.

7. $F_{a,b} = 3, F_{b,c} = 3, F_{c,d} = 4, F_{d,z} = 4, F_{a,e} = 2, F_{e,f} = 2, F_{f,c} = 2, F_{f,g} = 1, F_{g,z} = 1$, y el flujo en las demás aristas es cero.

8. $F_{a,b} = 0, F_{b,c} = 5, F_{c,d} = 5, F_{d,z} = 8, F_{e,b} = 3, F_{g,d} = 3, F_{a,e} = 8, F_{e,f} = 3, F_{f,g} = 3, F_{a,h} = 4, F_{e,i} = 2, F_{j,z} = 6, F_{h,i} = 4, F_{i,j} = 6$, y el flujo en las demás aristas es cero.

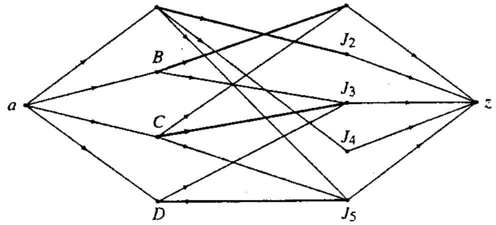
9. a—verdadero; b—falso; c—falso; d—verdadero

10. 6.

11. No. La capacidad de $(P, \overline{P})$ es 6, pero la capacidad de $(P', \overline{P}')$, $P' = \{a, b, c, e, f\}$, es 5.

12. $P = \{a, b, c, e, f, g, h, i\}$

13.

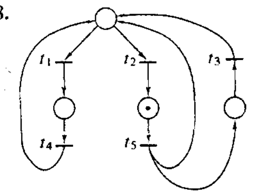


14. Véase la solución del ejercicio 13.

15. $A - J_2$, $B - J_1$, $C - J_3$, $D - J_5$, es un acoplamiento completo.

16. $P = \{a\}$ **17.** t_1 y t_2

18.



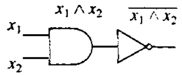
19. No

20. Sí

Sección 9.1

1. $\overline{x_1 \wedge x_2}$

x_1	x_2	$\overline{x_1 \wedge x_2}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1



4.

x_1	x_2	x_3	$((x_1 \wedge x_2) \vee \overline{(x_1 \wedge x_3)}) \wedge \overline{x}_3$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

7. Si $x = 1$, la salida y está indeterminada: Supongamos que $x = 1$ y $y = 0$. Entonces, la entrada de la compuerta AND es 1, 0. Así, la salida de esta compuerta es 0. Como luego se realiza el NOT de esta expresión, $y = 1$. Contradicción. Se obtiene una contradicción análoga si $x = 1$ y $y = 1$.

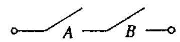
10. 0

13. 1

16. Es una expresión booleana. x_1, x_2 y x_3 son expresiones booleanas por (9.1.2). $x_2 \vee x_3$ es una expresión booleana por (9.1.3c). $(x_2 \vee x_3)$ es una expresión booleana por (9.1.3a). $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$ es una expresión booleana por (9.1.3d).

19. No es una expresión booleana

22.



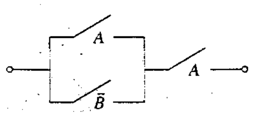
25. $(A \wedge B) \vee (C \wedge \bar{A})$

A	B	C	$(A \wedge B) \vee (C \wedge \bar{A})$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

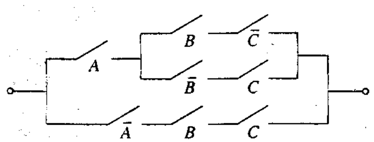
28. $(A \wedge (C \vee (D \wedge C))) \vee (B \wedge (\bar{D} \vee (C \wedge A) \vee \bar{C}))$

30.

A	B	$(A \vee \bar{B}) \wedge A$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0



33.



Sección 9.2

1.

x_1	x_2	$\overline{x_1 \wedge x_2}$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

4.

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1 \vee (\bar{x}_2 \vee x_3)$	$(\overline{x_1 \wedge x_2}) \vee x_3$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

6.

x_1	$x_1 \vee x_1$
1	1
0	0

9.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge (\overline{x_2 \wedge x_3})$	$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_3)$
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

11.

x	$\bar{\bar{x}}$
1	1
0	0

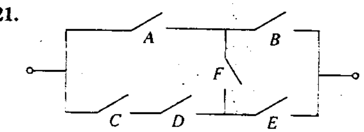
14. Falso. Sean $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$.

16.

a	b	c	$a \vee (b \wedge c)$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

18. Las expresiones booleanas que representan los circuitos son $(A \wedge \bar{B}) \vee (A \wedge C)$ y $A \wedge (\bar{B} \vee C)$. Las expresiones son iguales por el teorema 9.2.1c. Por lo tanto, los circuitos de conmutación son equivalentes.

21.



Sección 9.3

2. Uno puede mostrar de manera directa que las leyes asociativa y distributiva se cumplen para el mcm y el mcd. Es claro que se cumple la ley conmutativa. Para ver que se cumplen las leyes de identidad, observemos que

$$\text{mcm}(x, 1) = x \quad \text{y} \quad \text{mcd}(x, 6) = x.$$

Como

$$\text{mcm}(x, 6/x) = 6 \quad \text{y} \quad \text{mcd}(x, 6/x) = 1,$$

se cumplen las leyes de complemento. Por lo tanto, $(S, +, \cdot, ', 1, 6)$ es un álgebra booleana.

4. Sólo mostramos que

$$x \cdot (x + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \text{para todo } x, y, z \in S_n.$$

Ahora,

$$x \cdot (y + z) = \text{mín}\{x, \text{máx}\{y, z\}\},$$

$$(x \cdot y) + (x \cdot z) = \text{máx}\{\text{mín}\{x, y\}, \text{mín}\{x, z\}\}.$$

Supongamos que $y \le z$. (El argumento es similar si $y > z$.) Hay que considerar tres casos: $x < y$, $y \le x \le z$ y $z < x$.

Si $x < y$, obtenemos

$$x \cdot (y + z) = \text{mín}\{x, \text{máx}\{y, z\}\}$$
$$= \text{mín}\{x, z\} = x = \text{máx}\{x, x\}$$
$$= \text{máx}\{\text{mín}\{x, y\}, \text{mín}\{x, z\}\}$$
$$= (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Si $y \le x \le z$, obtenemos

$$x \cdot (y + z) = \text{mín}\{x, \text{máx}\{x, z\}\}$$
$$= \text{mín}\{x, z\}\} = x = \text{máx}\{y, x\}$$
$$= \text{máx}\{\text{mín}\{x, y\}, \text{mín}\{x, z\}\}$$
$$= (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Si $z < x$, obtenemos

$$x \cdot (y + z) = \text{mín}\{x, \text{máx}\{y, z\}\}$$
$$= \text{mín}\{x, z\} = z = \text{máx}\{y, z\}$$
$$= \text{máx}\{\text{mín}\{x, y\}, \text{mín}\{x, z\}\}$$
$$= (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

7. Si $X \cup Y = U$ y $X \cap Y = \varnothing$, entonces $Y = \bar{X}$.

8. $xy + x0 = x(x + y)y$

11. $x + y' = 1$ si y sólo si $x + y = x$.

14. $x(x + y0) = x$

15. [Para el ejercicio 12]

$$0 = x + y = (x + x) + y$$
$$= x + (x + y) = x + 0 = x$$

De manera análoga, $y = 0$.

18. [Para la parte (c)]

$$x(x + y) = (x + 0)(x + y)$$
$$= x + 0y = x + y0 = x + 0 = x$$

21. Primero mostramos que si $ba = ca$ y $ba' = ca'$, entonces $b = c$. Ahora, haga $a = x$, $b = x + (y + z)$, y $c = (x + y) + z$ y utilice este resultado.

23. Si el primo p divide a n, p^2 no divide a n.

Sección 9.4

En estas sugerencias, $a \wedge b$ se escribe ab.

1. $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$

4. $xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z}$

7. $xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

10. $wx\bar{y}z \vee wx\bar{y}\bar{z} \vee w\bar{x}yz \vee w\bar{x}y\bar{z} \vee w\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{w}xy\bar{z} \vee \bar{w}x\bar{y}z \vee \bar{w}x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{w}\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

11. $xy \vee x\bar{y}$

14. $xy\bar{z}$

17. $xyz \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$

20. 0

22. 2^{2^n}

25. [Para el ejercicio 3]

$$(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)$$

28. [Para el ejercicio 3]

$$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)$$

ión 9.5

AND se puede expresar en términos de OR y NOT: $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.

Un circuito combinatorio que sólo consta de compuertas AND tendría siempre 0 como salida, si todas las entradas son 0.

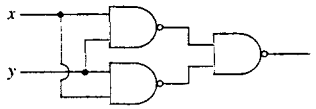
Utilizamos inducción sobre n para mostrar que no existe un circuito combinatorio de n compuertas que sólo conste de compuertas AND y OR y que calcule $f(x) = \overline{x}$.

Si $n = 0$, la entrada x es igual a la salida x, de modo que es imposible que un circuito con 0 compuertas calcule f. Esto demuestra el paso base.

Ahora, supongamos que no existe un circuito combinatorio con n compuertas, que conste sólo de compuertas AND y OR y que calcule f. Consideremos un circuito combinatorio con $(n + 1)$ compuertas, que conste sólo de compuertas AND y OR. Al principio, la entrada x llega a una compuerta AND o a una compuerta OR. Supongamos que x llega al principio a una compuerta AND. (El argumento es similar si x llega al principio a una compuerta OR, por lo cual se omite.) Debido a que el circuito es combinatorio, la otra entrada de la compuerta AND es x mismo, la constante 1 o la constante 0. Si ambas entradas de la compuerta AND son el propio x, entonces la salida de la compuerta AND es igual a la entrada. En este caso, el comportamiento del circuito no se altera si eliminamos la compuerta AND y unimos x con lo que era la línea de salida de la compuerta AND. Pero ahora tenemos un circuito equivalente con n compuertas, el cual, por la hipótesis de inducción, no puede calcular f. Así, el circuito con $(n + 1)$ compuertas no puede calcular f.

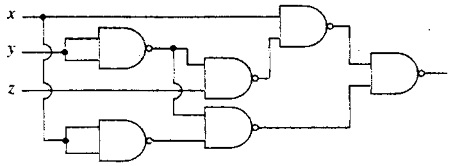
Si la otra entrada de la compuerta AND es la constante 1, la salida de la compuerta AND es de nuevo igual a la entrada y podemos argumentar como en el caso anterior que el circuito de $(n + 1)$ compuertas no puede calcular f.

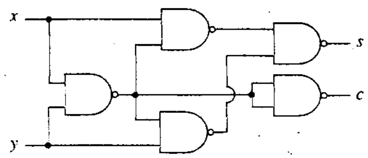
Si la otra entrada de la compuerta AND es la constante 0, la salida de la compuerta AND siempre será 0 y, en consecuencia, la modificación del valor de x no afecta la salida del circuito. En este caso, el circuito no puede calcular f. Esto concluye el paso inductivo. Por lo tanto, ningún circuito combinatorio con n compuertas, que conste sólo de compuertas AND y OR, puede calcular $f(x) = \overline{x}$. Así, {AND, OR} no es funcionalmente completo.

6. 

9. $y_1 = x_1x_2 \vee \overline{(x_2 \vee x_3)}$; $y_2 = \overline{x_2 \vee x_3}$

12. [Para el ejercicio 3] La forma disyuntiva normal se puede simplificar como $xy \vee x\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}$ y luego escribir como $x(y \vee \overline{z}) \vee \overline{x}\,\overline{y} = (x\overline{\overline{y}z}) \vee \overline{x}\,\overline{y} = \overline{\overline{x\overline{\overline{y}z}}\;\overline{\overline{x}\,\overline{y}}}$, lo cual produce el circuito



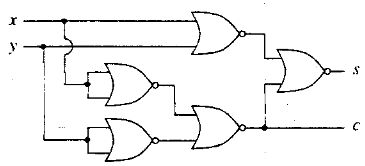
15. 

17. $xy = (x \downarrow y) \downarrow (y \downarrow y)$;
$x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$; $\overline{x} = x \downarrow x$;
$x \uparrow y = [(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)] \downarrow [(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)]$

20. Como

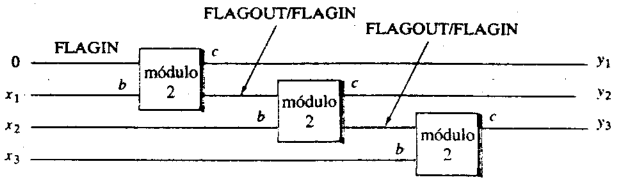
$$\overline{x} = x \downarrow x, \quad x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y),$$

y {NOT, OR} es funcionalmente completo, {NOR} es funcionalmente completo.

23. 

25. La tabla lógica es

x	y	z	*Salida*
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

31. 

34. Las tablas de verdad muestran que

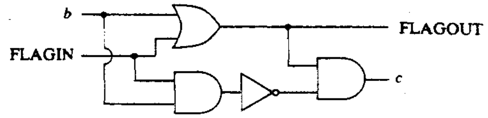
$$\overline{x} = x \rightarrow 0, \quad x \vee y = (x \rightarrow 0) \rightarrow y.$$

Por lo tanto, una compuerta NOT se puede reemplazar por una compuerta $\rightarrow$, y una compuerta OR se puede reemplazar mediante dos compuertas $\rightarrow$. Como el conjunto {NOT, OR} es funcionalmente completo, esto implica que el conjunto $\{\rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

27. La tabla lógica es

b	FLAGIN	c	FLAGOUT
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Así, $c = b \oplus$ FLAGIN y FLAGOUT $= b \vee$ FLAGIN. Obtenemos el circuito



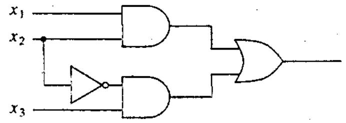
28. 010100

Capítulo 9 Autoevaluación

1.

x	y	z	$\overline{(x \wedge \overline{y})} \vee z$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

2. 1

3. 

4. Supongamos que x es 1. Entonces la entrada superior de la compuerta OR es 0. Si y es 1, entonces la entrada inferior de la compuerta OR es 0. Como ambas entradas de la compuerta son 0, la salida y de la compuerta OR es 0, lo cual es imposible. Si y es 0, entonces la entrada inferior de la compuerta OR es 1. Como una entrada de la compuerta OR es 1, la salida y de esta compuerta es 1, lo cual es imposible. Por lo tanto, si la entrada del circuito es 1, la salida no queda determinada de manera única. Así, el circuito no es combinatorio.

5. Los circuitos son equivalentes. La tabla lógica para cualquiera de estos circuitos es

x	y	*Salida*
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

6. Los circuitos no son equivalentes. Si $x = 0$, $y = 1$ y $z = 0$, la salida del circuito (a) es 1, mientras que la salida del circuito (b) es 0.

7. La ecuación es verdadera. La tabla lógica para cualquiera de estas expresiones es

x	y	z	*Valor*
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

8. La ecuación es falsa. Si $x = 1$, $y = 0$ y $z = 1$, entonces

$$(x \wedge y \wedge z) \vee \overline{(x \vee z)} = 0,$$

pero

$$(x \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{z}) = 1.$$

9. Leyes de acotación:

$X \cup U = U \qquad X \cap \varnothing = \varnothing \qquad$ para todo $X \in S$.

Leyes de absorción:

$X \cup (X \cap Y) = X \quad X \cap (X \cup Y) = X$ para todo $X, Y \in S$.

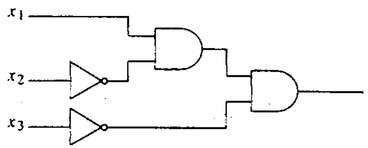
10. $(x(x + y \cdot 0))' = (x(x + 0))'$ (Ley de acotación)
$= (x \cdot x)'$ (Ley de identidad)
$= x'$ (Ley de idempotencia)

11. Dual: $(x + x(y + 1))' = x'$

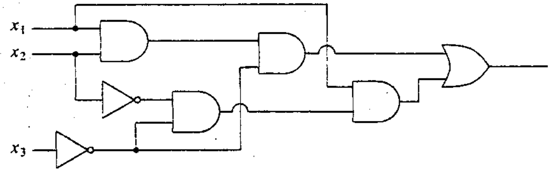
$(x + x(y + 1))' = (x + x \cdot 1)'$ (Ley de acotación)
$= (x + x)'$ (Ley de identidad)
$= x'$ (Ley de idempotencia)

12. $\bar{}$ no es un operador unario en S. Por ejemplo, $\overline{\{1, 2\}} \notin S$.
En los ejercicios 13-16, $a \wedge b$ se escribe ab.

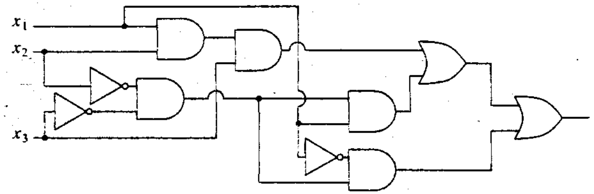
13. $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$



14. $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$



15. $x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$



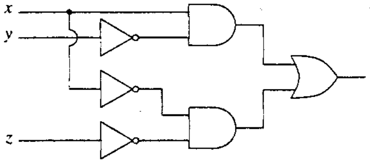
16. $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$

17.

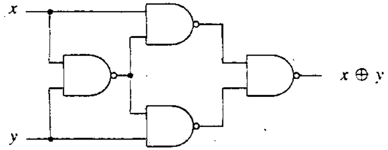
x	y	z	*Salida*
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

18. Forma disyuntiva normal: $x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

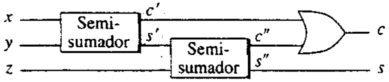
$$(x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}) \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = x\bar{y} \vee (\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z})$$
$$= x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}$$



19.

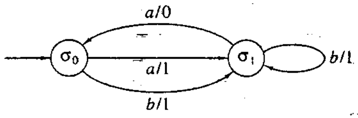


20.

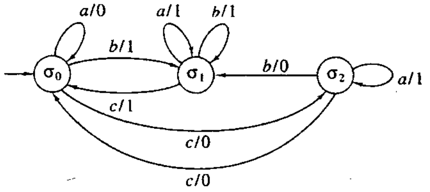


Sección 10.1

1.



4.



6. $\mathcal{I} = \{a, b\}$; $\mathcal{O} = \{0, 1\}$; $\mathcal{S} = \{\sigma_0, \sigma_1\}$; estado inicial $= \sigma_0$

$\mathcal{S}$ \ $\mathcal{I}$	***a***	***b***	***a***	***b***
σ_0	σ_1	σ_0	0	1
σ_1	σ_1	σ_1	1	1

9. $\mathcal{I} = \{a, b\}$; $\mathcal{O} = \{0, 1\}$; $\mathcal{S} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$; estado inicial $= \sigma_0$

$\mathcal{S}$ \ $\mathcal{I}$	***a***	***b***	***a***	***b***
σ_0	σ_1	σ_2	0	0
σ_1	σ_0	σ_2	1	0
σ_2	σ_3	σ_0	0	1
σ_3	σ_1	σ_3	0	0

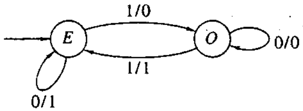
11. 1110

14. 001110

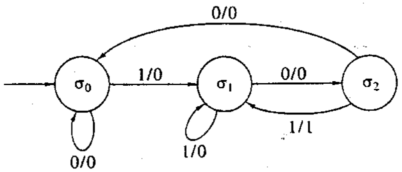
17. 001110001

20. 020022201020

21.



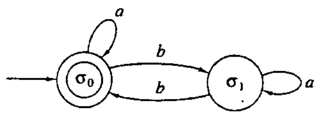
24.



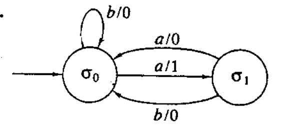
7. Cuando γ es la entrada, la máquina produce como salida x_n, $x_{n-1}, \ldots$, hasta $x_i = 1$. A partir de ese momento, la salida es $\bar{x}_i$. Sin embargo, de acuerdo con el algoritmo 9.5.16, éste es el complemento a dos de α.

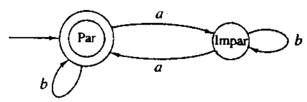
ección 10.2

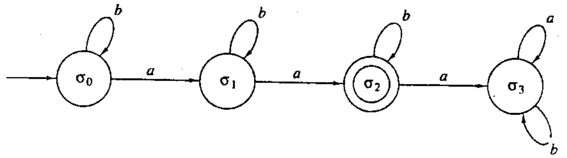
. Todas las aristas que llegan a σ_0 producen 1 como salida y todas las aristas que llegan a σ_1 producen 0 como salida; por lo tanto, la máquina de estado finito es un autómata de estado finito.

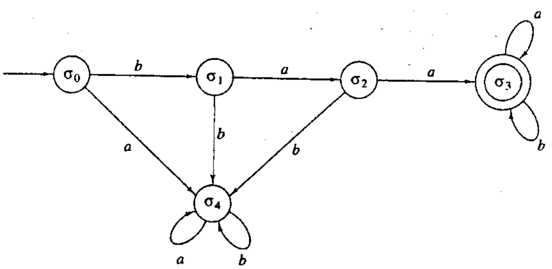


.

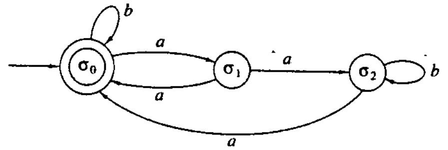








7.



10. [Para el ejercicio 1] $\mathcal{I} = \{a, b\}$; $\mathcal{S} = \{\sigma_0, \sigma_1\}$; $\mathcal{A} = \{\sigma_0\}$; estado inicial $= \sigma_0$

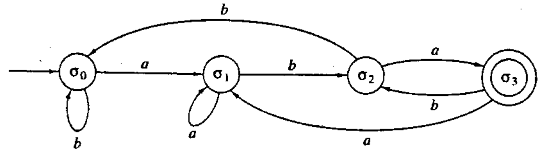
$\mathcal{S}$ \ $\mathcal{I}$	a	b
σ_0	σ_0	σ_1
σ_1	σ_1	σ_0

13. Aceptado

16. Aceptado

18. Sin importar el estado en que estemos, después de una a nos movemos a un estado de aceptación; sin embargo, después de una b nos movemos a un estado de no aceptación.

30.



32. [Para el ejercicio 1] Este algoritmo determina si una cadena sobre $\{a, b\}$ es aceptada por el autómata de estado finito cuyo diagrama de transición aparece en el ejercicio 1.

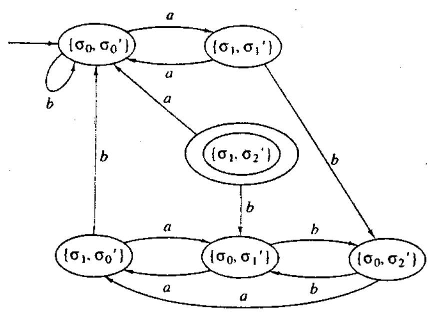
Entrada: n, la longitud de la cadena ($n = 0$ indica la cadena nula) $s_1 \cdots s_n$, la cadena

Salida: "Aceptar" si la cadena es aceptada
"Rechazar" si la cadena no es aceptada

```
procedure ex32(s, n)
 state := 'σ0'
 for i := 1 to n do
  begin
  if state = 'σ0' and s_i := 'b' then
   state := 'σ1'
  if state = 'σ1' and s_i := 'b' then
   state := 'σ0'
  end
 if state = 'σ0' then
  return("Aceptar")
 else
  return("Rechazar")
end ex32
```

35. Haga que cada estado de aceptación sea ahora de no aceptación y viceversa.

38. Utilice la construcción dada en los ejercicios 36 y 37, para obtener el siguiente autómata de estado finito que acepta $L_1 \cap L_2$. (Designamos los estados del ejercicio 5 con apóstrofos.)



El autómata de estado finito que acepta $L_1 \cup L_2$ es igual al autómata de estado finito que acepta $L_1 \cap L_2$, excepto porque el conjunto de estados de aceptación es

$$\{(\sigma_1, \sigma_0'),\ (\sigma_1, \sigma_1'),\ (\sigma_1, \sigma_2'),\ (\sigma_0, \sigma_2')\}.$$

41. Utilice la construcción de los ejercicios 36 y 37.

Sección 10.3

1. Regular, libre de contexto, sensible al contexto

4. Libre de contexto, sensible al contexto

7. $\sigma \Rightarrow b\sigma \Rightarrow bb\sigma \Rightarrow bbaA \Rightarrow bbabA \Rightarrow bbabbA \Rightarrow bbabba\sigma \Rightarrow bbabbab$

10. $\sigma \Rightarrow ABA \Rightarrow ABBA \Rightarrow ABBAA$
$\Rightarrow ABBaAA \Rightarrow abBBaAA \Rightarrow abbBaAA$
$\Rightarrow abbbaAA \Rightarrow abbbaabA \Rightarrow abbbaabab$

12. [Para el ejercicio 1]

$$<\sigma> ::= b<\sigma>|a<A>|b$$
$$<A> ::= a<\sigma>|b<A>|a$$

15. $S \to aA,\ A \to aA,\ A \to bA,\ A \to a,$
$A \to b,\ S \to a$

18. $S \to aA,\ S \to bS,\ S \to \lambda,\ A \to aA,$
$A \to bB,\ A \to \lambda,\ B \to aA,\ B \to bS$

21. < número exponencial > ::=
< entero > E < entero > |
< número con punto flotante > |
< número con punto flotante > E < entero >

24. $S \to aSa,\ S \to bSb,\ S \to a,\ S \to b,\ S \to \lambda$

25. Si una derivación comienza con $S \Rightarrow aSb$, la cadena resultante comienza con a y termina con b. De manera análoga, si una derivación comienza con $S \Rightarrow bSa$, la cadena resultante comienza con b y termina con a. Por lo tanto, la gramática no genera la cadena $abba$.

28. Si una derivación comienza con $S \Rightarrow abS$, la cadena resultante comienza con ab. Si una derivación comienza con $S \Rightarrow baS$, la cadena resultante comienza con ba. Si una derivación comienza con $S \Rightarrow aSb$, la cadena resultante comienza con a y termina con b. Si una derivación comienza con $S \Rightarrow bSa$, la cadena resultante comienza con b y termina con a. Por lo tanto, la gramática no genera la cadena $aabbabba$.

31. La gramática genera a L, el conjunto de todas las cadenas sobre $\{a, b\}$ con igual número de letras a que de letras b.

Cualquier cadena generada por la gramática tiene igual número de letras a que de letras b, pues siempre que se utilice cualquiera de las producciones en una derivación, se agrega a la cadena igual número de letras a que de letras b.

Para demostrar el recíproco, consideremos una cadena arbitraria α en L y utilicemos inducción sobre la longitud $|\alpha|$ de α para mostrar que α es generada por la gramática. El paso base es $|\alpha| = 0$. En este caso, α es la cadena nula, y $S \Rightarrow \lambda$ es una derivación de α.

Sea α una cadena no nula, y supongamos que cualquier cadena en L cuya longitud es menor que $|\alpha|$ es generada por la gramática. Primero consideremos el caso en que α comienza con a. Entonces α se puede escribir como $\alpha = a\alpha_1 b\alpha_2$, donde α_1 y α_2 tienen igual número de letras a que de letras b. Por la hipótesis de inducción, existen derivaciones $S \Rightarrow \alpha_1$ y $S \Rightarrow \alpha_2$ de α_1 y α_2. Pero entonces

$$S \Rightarrow aSbS \Rightarrow a\alpha_1 b\alpha_2$$

es una derivación de α. De manera análoga, si α comienza con b, existe una derivación de α. Esto concluye el paso inductivo y la demostración.

32. Reemplazamos cada producción

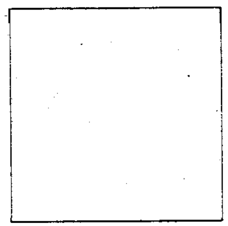
$$A \to x_1 \ldots x_n B,$$

donde $n > 1$, $x_i \in T$ y $B \in N$, con las producciones

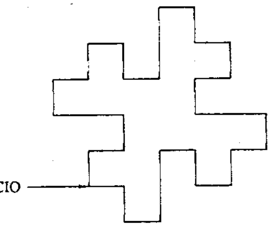
$$A \to x_1 A_1$$
$$A_1 \to x_2 A_2$$
$$\vdots$$
$$A_{n-1} \to x_n B,$$

donde $A_1, \ldots, A_{n-1}$ son símbolos no terminales adicionales.

35. $S \Rightarrow D + D + D + D \Rightarrow d + d + d + d$

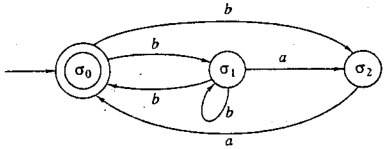


$$\begin{aligned} S &\Rightarrow D + D + D + D \\ &\Rightarrow D + D - D - DD + D + D - D + \\ &\quad\; D + D - D - DD + D + D - D + \\ &\quad\; D + D - D - DD + D + D - D + \\ &\quad\; D + D - D - DD + D + D - D \\ &\Rightarrow d + d - d - dd + d + d - d + \\ &\quad\; d + d - d - dd + d + d - d + \\ &\quad\; d + d - d - dd + d + d - d + \\ &\quad\; d + d - d - dd + d + d - d \end{aligned}$$

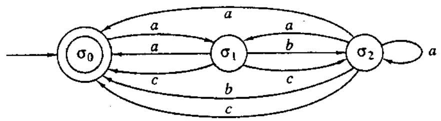


Sección 10.4

1.



4.



6. $I = \{a, b\}$; $\mathcal{S} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$; $\mathcal{A} = \{\sigma_1, \sigma_2\}$; estado inicial $= \sigma_0$

S \ I	a	b
σ_0	$\{\sigma_1, \sigma_2\}$	$\emptyset$
σ_1	$\{\sigma_1\}$	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$
σ_2	$\emptyset$	$\emptyset$

9. $I = \{a, b\}$; $\mathcal{S} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$; $\mathcal{A} = \{\sigma_3\}$; estado inicial $= \sigma_0$

S \ I	a	b
σ_0	$\{\sigma_0\}$	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$
σ_1	$\{\sigma_2\}$	$\emptyset$
σ_2	$\emptyset$	$\{\sigma_3\}$
σ_3	$\{\sigma_3\}$	$\{\sigma_3\}$

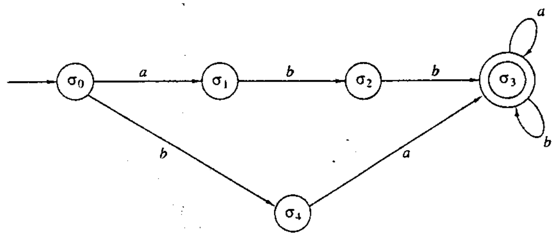
11. [Para el ejercicio 5] $N = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$; $T = \{a, b\}$,

$$\sigma_0 \to a\sigma_1, \quad \sigma_0 \to b\sigma_0, \quad \sigma_1 \to a\sigma_0, \quad \sigma_1 \to b\sigma_2,$$
$$\sigma_2 \to b\sigma_1, \quad \sigma_2 \to a\sigma_0, \quad \sigma_2 \to \lambda$$

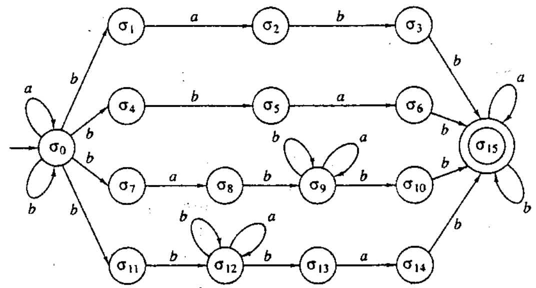
14. No. Para los tres primeros caracteres, *bba*, los movimientos están determinados y llegamos a C. A partir de C, ninguna arista contiene una a; por lo tanto, *bbabab* no es aceptada.

17. Sí. El camino $(\sigma, \sigma, \sigma, \sigma, C, C)$, que representa a la cadena *aaaab*, termina en C, que es un estado de aceptación.

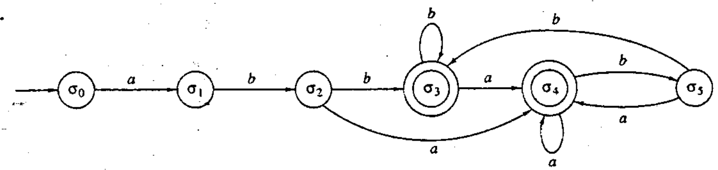
21.



24.



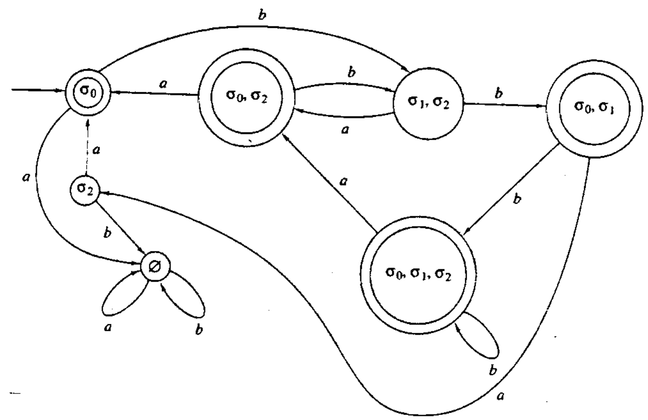
27.

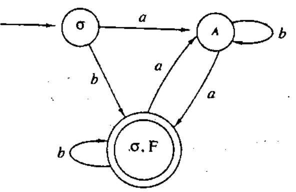


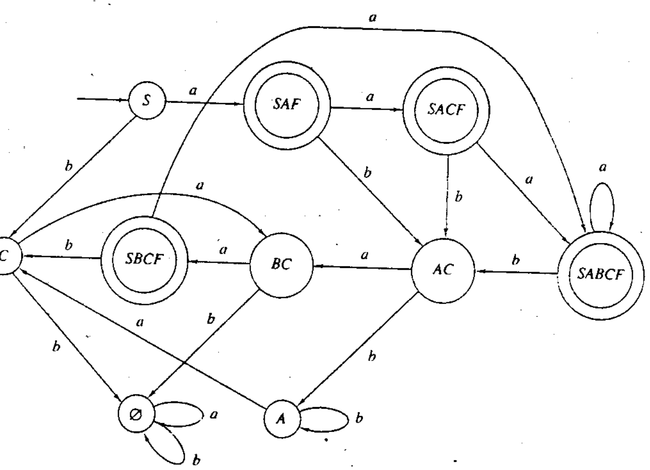
30. [Para el ejercicio 21] $\sigma_0 \to a\sigma_1$, $\sigma_0 \to b\sigma_4$, $\sigma_1 \to b\sigma_2$, $\sigma_2 \to b\sigma_3$, $\sigma_3 \to a\sigma_3$, $\sigma_3 \to b\sigma_3$, $\sigma_4 \to a\sigma_3$, $\sigma_3 \to \lambda$

ección 10.5

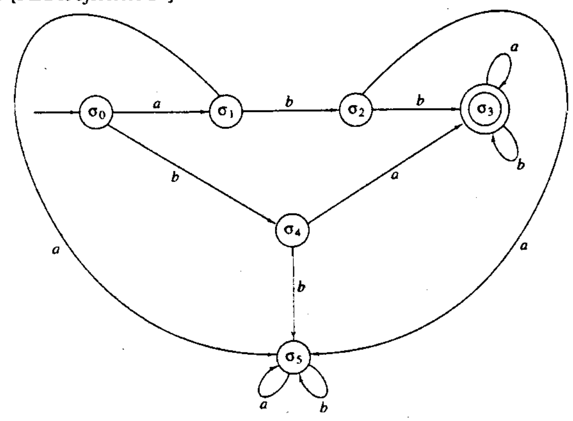
. [Para el ejercicio 1]





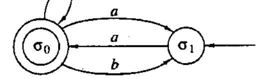


7. [Para el ejercicio 21]

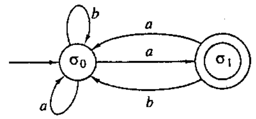


10. La figura 10.5.7 acepta la cadena ba^n, $n \geq 1$, y las cadenas que terminan en b^2 o aba^n, $n \geq 1$. Utilizamos el ejemplo 10.5.8 para ver que la figura 10.5.9 acepta la cadena a^nb, $n \geq 1$, y las cadenas que comienzan con b^2 o a^nba, $n \geq 1$.

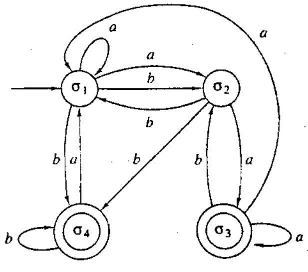
11.



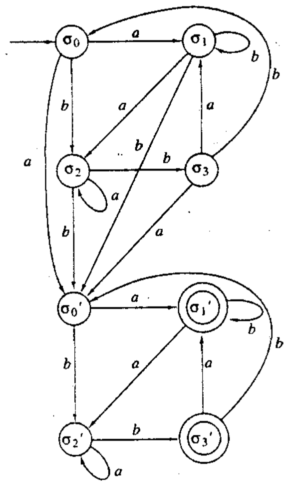
14.



17.



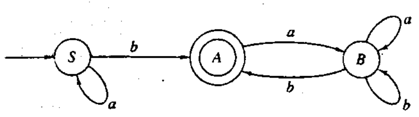
20.



22. $\sigma_0 \to a\sigma_1$, $\sigma_0 \to b\sigma_2$, $\sigma_0 \to a$, $\sigma_1 \to a\sigma_0$, $\sigma_1 \to a\sigma_2$, $\sigma_1 \to b\sigma_1$, $\sigma_1 \to b$, $\sigma_2 \to b\sigma_0$

25. Suponga que L es regular. Entonces existe un autómata de estado finito A tal que $L = \mathrm{Ac}(A)$. Supongamos que A tiene k estados. Considere la cadena a^kbba^k y argumente como en el ejemplo 10.5.6.

28. La afirmación es falsa. Considere el lenguaje regular $L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$, el cual es aceptado por el autómata de estado finito



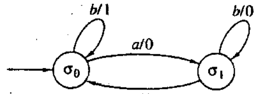
El lenguaje

$$L' = \{u^n \mid u \in L, n \in \{1, 2, \ldots\}\}$$

no es regular. Supongamos que L' es regular. Entonces existe un autómata de estado finito A que acepta a L'. En particular, A acepta a $a^n b$ para cada n. Esto implica que para n suficientemente grande, el camino que representa a $a^n b$ contiene un ciclo de longitud k. Como A acepta a $a^n b a^n b$, A también acepta a $a^{n+k} b a^n b$, lo que es una contradicción.

Capítulo 10 Autoevaluación

1.

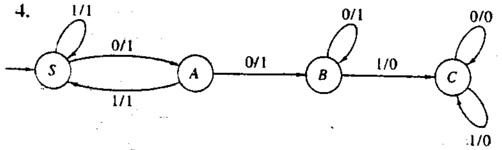


2. $\mathcal{I} = \{a, b\}$; $\mathcal{O} = \{0, 1\}$; $\mathcal{S} = \{S, A, B\}$; estado inicial $= S$

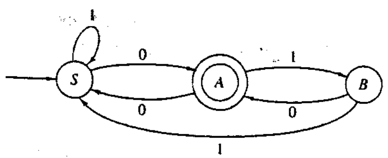
$\mathcal{S}$ \ $\mathcal{I}$	f: a	f: b	g: a	g: b
S	A	A	0	0
A	S	B	1	1
B	A	B	1	0

3. 1101

4.

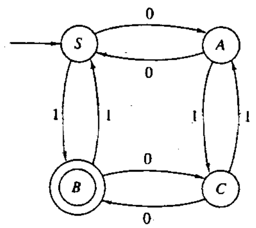


5.



6. Sí

7.



8. Cada 0 va seguido de un 1.

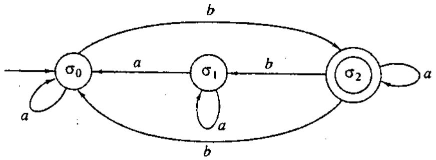
9. Libre de contexto

10. $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaaAbbbb \Rightarrow aaaaAbbbb \Rightarrow aaaabbbb$

11. $a^i b^j$, $j \leq 2 + i$, $j \geq 1$, $i \geq 0$

12. $S \to ASB$, $S \to AB$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $A \to a$, $B \to b$

13.



14. $\mathcal{I} = \{a, b\}$; $\mathcal{S} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$; $\mathcal{A} = \{\sigma_0\}$; estado inicial $= \sigma_0$

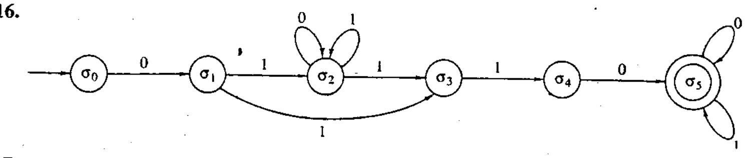
$\mathcal{S}$ \ $\mathcal{I}$	a	b
σ_0	$\{\sigma_0, \sigma_1\}$	$\emptyset$
σ_1	$\emptyset$	$\{\sigma_2\}$
σ_2	$\{\sigma_0, \sigma_2\}$	$\{\sigma_2\}$

15. Sí, pues el camino

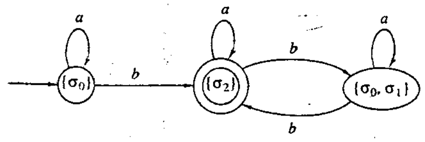
$$(\sigma_0, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_0)$$

representa a *aabaaba* y σ_0 es un estado de aceptación.

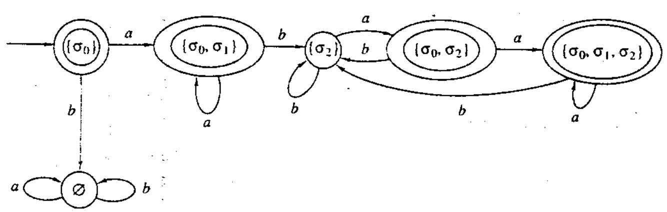
16.



17.



18.



19. Combinamos los autómatas de estado finito no deterministas que aceptan a L_1 y L_2 de la siguiente forma. Sea S el estado inicial de L_2. Para cada arista de la forma (S_1, S_2) etiquetada a en L_1, donde S_2 es un estado de aceptación, agregamos una arista (S_1, S) etiquetada a. El estado inicial del autómata de estado finito no determinista es el estado inicial de L_1. Los estados de aceptación del autómata de estado finito no determinista son los estados de aceptación de L_2.

20. Sea A' un autómata de estado finito no determinista que acepta un lenguaje regular, el cual no contiene a la cadena nula. Agregue un estado F. Para cada arista, (σ, σ') con la etiqueta a en A', donde σ' es un estado de aceptación, agregamos la arista (σ, F) con la etiqueta a. F será el único estado de aceptación. El autómata de estado finito no determinista A tiene un estado de aceptación. Afirmamos que $\text{Ac}(A) = \text{Ac}(A')$.

Mostraremos que $\text{Ac}(A) \subseteq \text{Ac}(A')$. [El argumento en el sentido $\text{Ac}(A') \subseteq \text{Ac}(A)$ es similar y se omite.] Supongamos que $\alpha \in \text{Ac}(A)$. Existe un camino

$$(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n)$$

que representa a α en A, con σ_n un estado de aceptación. Como $\alpha \neq \lambda$, existe un último símbolo a en α. Así, la arista (σ_{n-1}, σ_n) tiene la etiqueta a. Ahora, el camino

$$(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, F)$$

representa α en A' y termina en un estado de aceptación. Por lo tanto, $\alpha \in \text{Ac}(A')$.

Para ver que la afirmación es falsa para un lenguaje regular arbitrario, considere el lenguaje regular

$$L = \{\lambda\} \cup \{0^i \mid i \text{ es impar}\}$$

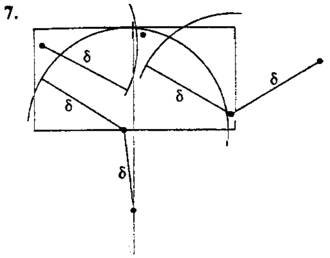
y un autómata de estado finito no determinista A con estado inicial S que acepta L. Como $\lambda \in L$, S es un estado de aceptación. Si S tiene un lazo con la etiqueta 0, entonces A acepta todas las cadenas de ceros; por lo tanto, no existe un lazo en S con la etiqueta 0. Así, existe una arista (S, S'), $S \neq S'$, con la etiqueta 0. Como $0 \in L$, S' es de aceptación. Por lo tanto, A tiene al menos dos estados de aceptación.

Sección 11.1

1. Los 16 puntos ordenados según su abscisa son: (1, 2), (1, 5), (1, 9), (3, 7), (3, 11), (5, 4), (5, 9), (7, 6), (8, 4), (8, 7), (8, 9), (11, 3), (11, 7), (12, 10), (14, 7), (17, 10), de modo que el punto divisor es (7, 6). A continuación determinamos $\delta_L = \sqrt{8}$, la distancia mínima entre los puntos del lado izquierdo (1, 2), (1, 5), (1, 9), (3, 7), (3, 11), (5, 4), (5, 9), (7, 6) y $\delta_R = 2$, la distancia mínima entre los puntos del lado derecho (8, 4), (8, 7), (8, 9), (11, 3), (11, 7), (12, 10), (14, 7), (17, 10). Así, $\delta = \min\{\delta_L, \delta_R\} = 2$. Los puntos de la franja vertical, ordenados según su coordenada y son (8, 4), (7, 6), (8, 7), (8, 9). En este caso, comparamos cada punto de la franja con todos los puntos siguientes. Las distancias de (8, 4) a (7, 6), (8, 7), (8, 9) no son menores que 2, por lo que no hay necesidad de actualizar δ. La distancia de (7, 6) a (8, 7) es $\sqrt{2}$, de modo que δ se actualiza como $\sqrt{2}$. La distancia de (7, 6) a (8, 9) y de (8, 7) a (8, 9) es mayor que $\sqrt{2}$, de modo que δ sigue siendo $\sqrt{2}$. Por lo tanto, la distancia entre el par más cercano es $\sqrt{2}$.

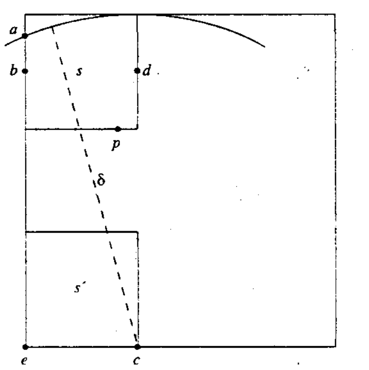
4. Considere el caso extremo en que todos los puntos están sobre una misma recta vertical.

7.



10. Sea B alguno de los cuadrados $\delta \times \delta$ izquierdo o derecho que forman al rectángulo δ por 2δ (véase la figura 11.1.2). Argumentamos por contradicción y suponemos que B contiene cuatro o más puntos. Dividimos B en cuatro cuadrados $\delta/2 \times \delta/2$, como se muestra en la figura 11.1.3. Entonces, cada uno de estos cuatro cuadrados contiene a lo más un punto, por lo que hay exactamente un punto. En lo sucesivo nos referiremos a estos cuatro cuadrados como los subcuadrados de B.

La figura



muestra la siguiente construcción. Reducimos el tamaño de los subcuadrados, de ser posible, de modo que

- Cada subcuadrado contenga un punto.
- Los subcuadrados tengan el mismo tamaño.
- Los subcuadrados sean lo más pequeños posible.

Como al menos un punto no está en una esquina de B, los subcuadrados no se colapsan en puntos, y así, al menos un punto está sobre un lado de un subcuadrado s interior a B. Elegimos tal punto y lo llamamos p. Elegimos un subcuadrado s' cercano a p. Etiquetamos los dos puntos esquina de s' del lado más alejado de p como e y c. Trazamos un círculo de radio δ con centro en c; sea a el punto (no esquina) donde este círculo corta al lado de s. Observe que este círculo corta un lado de s en un punto que no es esquina. Elegimos un punto b en s del mismo lado que a, entre a y e. Sea d el punto correspondiente en el lado opuesto de s. Ahora, la longitud del diámetro del rectángulo $R = bdce$ es menor que δ; por lo tanto, R contiene a lo más un punto. Esto es una contradicción, pues R contiene a p y al punto en s'. Por lo tanto, B contiene a lo más tres puntos.

Sección 11.2

1. Entrada: $x_1, \ldots, x_n$ y n

Salida: "Sí" si $x_1, \ldots, x_n$ son distintos, y "No" en caso contrario

```
procedure check_distinct(x, n)
 sort x_1, ..., x_n
 for i := 1 to n − 1 do
  if x_i := x_{i+1} then
   return("No")
 return("Sí")
end check_distinct
```

4. Inicializamos una lista L como vacía. Determinamos el vértice v que no tiene aristas de entrada y lo agregamos al final de L. Eliminamos v y todas las aristas incidentes en él. Repetimos el proceso; es decir, determinamos el vértice v sin aristas de entrada y lo agregamos al final de L. Continuamos de esta forma hasta agotar los vértices. La salida es L.

Sección 11.3

1. Sea L la recta horizontal que pasa por p_1. Por la elección de p_1, ningún punto de S está arriba de L. Si p_1 es el único punto de S sobre L, p_1 es un punto de la cubierta. Si otros puntos de S están en L, todos están a la derecha de p_1 (por la elección de p_1). En este caso, si giramos L en dirección de las manecillas del reloj un poco en torno de p_1, L sólo contendrá a p_1 y todos los demás puntos de S estarán arriba de L. De nuevo, concluimos que p_1 es un punto de la cubierta.

4. Los puntos [ordenados con respecto de (7,1)] son (7, 1), (10, 1), (16, 4), (12, 3), (14, 5), (16, 10), (13, 8), (10, 5), (10, 9), (10, 13), (7, 7), (7, 13), (6, 10), (3, 13), (4, 8), (1, 8), (4, 4), (2, 2). La siguiente tabla muestra cada una de las tercias examinadas en el ciclo while, si forma un giro hacia la izquierda, y la acción por realizar con respecto de la tercia:

Tercia	*¿Giro hacia la izquierda?*	*¿Descartar el punto medio?*
(7, 1), (10, 1), (16, 4)	Sí	No
(10, 1), (16, 4), (12, 3)	Sí	No
(16, 4), (12, 3), (14, 5)	No	Sí
(10, 1), (16, 4), (14, 5)	Sí	No
(16, 4), (14, 5), (16, 10)	No	Sí
(10, 1), (16, 4), (16, 10)	Sí	No
(16, 4), (16, 10), (13, 8)	Sí	No
(16, 10), (13, 8), (10, 5)	Sí	No
(13, 8), (10, 5), (10, 9)	No	Sí
(16, 10), (13, 8), (10, 9)	No	Sí
(16, 4), (16, 10), (10, 9)	Sí	No
(16, 10), (10, 9), (10, 13)	No	Sí
(16, 4), (16, 10), (10, 13)	Sí	No
(16, 10), (10, 13), (7, 7)	Sí	No
(10, 13), (7, 7), (7, 13)	No	Sí
(16, 10), (10, 13), (7, 13)	Sí	No
(10, 13), (7, 13), (6, 10)	Sí	No
(7, 13), (6, 10), (3, 13)	No	Sí
(10, 13), (7, 13), (3, 13)	No	Sí
(16, 10), (10, 13), (3, 13)	Sí	No
(10, 13), (3, 13), (4, 8)	Sí	No
(3, 13), (4, 8), (1, 8)	No	Sí
(10, 13), (3, 13), (1, 8)	Sí	No
(3, 13), (1, 8), (4, 4)	Sí	No
(1, 8), (4, 4), (2, 2)	No	Sí
(3, 13), (1, 8), (2, 2)	Sí	No

La cubierta convexa es (7, 1), (10, 1), (16, 4), (16, 10), (10, 13), (3, 13), (1, 8), (2, 2).

7. Después de determinar $p_1, \ldots, p_i$, la marcha de Jarvis halla el punto p_{i+1} tal que p_{i-1}, p_i, p_{i+1} forman el menor giro hacia la izquierda. Esto implica que si la línea L que pasa por p_i, p_{i+1} se gira en dirección de las manecillas del reloj ligeramente en torno de p_i, L sólo contendrá a p_i, y los demás puntos de S estarán en un lado de L. Así, p_i es un punto de la cubierta. Por construcción, la marcha de Jarvis determina todos los puntos de la cubierta. Así, la marcha de Jarvis realmente halla la cubierta convexa.

10. Sí. La marcha de Jarvis es más rápida cuando la mayor cantidad de puntos no están en la cubierta.

Capítulo 11 Autoevaluación

1. Los 18 puntos ordenados según su abscisa son: (1, 8), (2, 2), (3, 13), (4, 4), (4, 8), (6, 10), (7, 1), (7, 7), (7, 13), (10, 1), (10, 5), (10, 9), (10, 13), (12, 3), (13, 8), (14, 15), (16, 4), (16, 10), de modo que el punto divisor es (7, 13). A continuación determinamos $\delta_L = \sqrt{8}$, la distancia mínima entre los puntos del lado izquierdo (1, 8), (2, 2), (3, 13), (4, 4), (4, 8), (6, 10), (7, 1), (7, 7), (7, 13), y $\delta_R = \sqrt{5}$, la distancia mínima entre los puntos del lado derecho (10, 1), (10, 5), (10, 9), (10, 13), (12, 3), (13, 8), (14, 5), (16, 4), (16, 10). Así, $\delta = \min\{\delta_L, \delta_R\} = \sqrt{5}$. Los puntos de la franja vertical, ordenados según su coordenada y, son (7, 1), (7, 7), (6, 10), (7, 13). En este caso, comparamos cada punto de la franja con todos los puntos siguientes. Como ningún par está más cerca que $\sqrt{5}$, el algoritmo no actualiza a δ. Por lo tanto, la distancia entre el par más cercano es $\sqrt{5}$.

2. Si reemplazamos "tres" por "dos", cuando hay tres puntos, el algoritmo se llamaría de manera recursiva con entradas de tamaños 1 y 2. Pero un conjunto de un único punto no tiene pareja, mucho menos una pareja más cercana.

3. Cada cuadro $\delta/2 \times \delta/2$ contiene a lo más un punto, de modo que existen a lo más cuatro puntos en la mitad inferior del rectángulo.

4. $\Theta(n(\lg n)^2)$

5. Sea t_n el tiempo en el peor de los casos para un algoritmo que determina un par más cercano, entre n elementos del espacio de dimensión d. Entonces, t_n es también el tiempo asintótico en el peor de los casos para un algoritmo CP que regresa la distancia entre un par más cercano de puntos en el espacio de dimensión d, ya que podemos agregar una línea al algoritmo original que calcule y regrese la distancia entre un par más cercano. Considere el siguiente algoritmo que resuelva el problema de determinar si existen duplicados entre n números:

```
procedure dup(x, n)
 // La entrada es x_1, ..., x_n.
 // Los datos se transforman en puntos del espacio
    de dimensión d.
 for i := 1 to n do
  a_i := (x_i, 0, ..., 0)
 if CP(a, n) = 0 then
  return("Con duplicados")
 else
  return("Sin duplicados")
end dup
```

El tiempo en el peor de los casos para t'_n para dup es el tiempo necesario para el ciclo for más el tiempo en el peor de los casos para CP; es decir,

$$t'_n = n + 6n.$$

Por el teorema 11.2.1,

$$Cn \lg n \leq t'n.$$

Al combinar estas dos últimas afirmaciones, obtenemos

$$\Omega(n \lg n) = Cn \lg n - n \leq t'_n - n = t_n.$$

6. Podemos agregar una línea sin modificar el tiempo asintótico de un algoritmo que determine todos los pares más cercanos, de modo que determine la distancia entre un par más cercano. Por el corolario 11.2.2, esto requiere un tiempo $\Omega(n \lg n)$.

7. El tiempo en el peor de los casos de cualquier algoritmo que determine si n números reales son todos iguales es $\Omega(n)$, pues cualquier algoritmo debe examinar cada elemento al menos una vez. Esta cota inferior es justa, pues el siguiente algoritmo resuelve el problema en un tiempo $\Theta(n)$:

```
procedure all_equal(x, n)
  // determinar si x_1, . . . , x_n son iguales
  for i := 1 to n − 1 do
    if x_i ≠ x_{i+1} then
      return("No todos iguales")
  return("Todos iguales")
end all_equal
```

8. La afirmación es consecuencia del hecho de que un algoritmo de este tipo se puede modificar sin alterar su tiempo asintótico en el peor de los casos, para determinar si la entrada tiene duplicados y, por el teorema 11.2.1, cualquier algoritmo que determine si existen duplicados tiene un tiempo en el peor de los casos $\Omega(n \lg n)$. Los duplicados existen si y sólo si la distancia entre cada par de salida es cero; así, sólo debemos verificar un par para ver si existen duplicados o no.

9. Sea L la recta vertical que pasa por p. Por la elección de p, ningún punto de S está a la derecha de L. Si p es el único punto de S sobre L, p es un punto de la cubierta. Si otros puntos de S están en L, todos están debajo de p. En este caso, si giramos L en dirección de las manecillas del reloj un poco en torno de p, L sólo contendrá a p y todos los demás puntos de S estarán a la izquierda de L. De nuevo, concluimos que p es un punto de la cubierta.

10. Sea L el segmento de recta que une p con q. Sea L' la recta que pasa por p perpendicular a L. No puede haber otro punto r de S sobre L' o en el lado de L' opuesto a q, ya que de existir un punto r de ese tipo, la distancia de r a q sería mayor que la distancia de p a q, lo cual es imposible. Así, p es un punto de la cubierta. De manera similar, q es un punto de la cubierta.

11. Los puntos [ordenados con respecto de (1, 2)] son (1, 2), (11, 3), (8, 4), (14, 7), (5, 4), (11, 7), (17, 10), (7, 6), (8, 7), (12, 10), (8, 9), (5, 9), (3, 7), (3, 11), (1, 5), (1, 9). La siguiente tabla muestra cada tercia examinada en el ciclo while, si realiza un giro hacia la izquierda, y la acción realizada con respecto de la tercia:

Tercia	*¿Giro hacia la izquierda?*	*¿Descartar el punto medio?*
(1, 2), (11, 3), (8, 4)	Sí	No
(11, 3), (8, 4), (14, 7)	No	Sí
(1, 2), (11, 3), (14, 7)	Sí	No
(11, 3), (14, 7), (5, 4)	Sí	No
(14, 7), (5, 4), (11, 7)	No	Sí
(11, 3), (14, 7), (11, 7)	Sí	No
(14, 7), (11, 7), (17, 10)	No	Sí
(11, 3), (14, 7), (17, 10)	No	Sí
(1, 2), (11, 3), (17, 10)	Sí	No
(11, 3), (17, 10), (7, 6)	Sí	No
(17, 10), (7, 6), (8, 7)	No	Sí
(11, 3), (17, 10), (8, 7)	Sí	No
(17, 10), (8, 7), (12, 10)	No	Sí
(11, 3), (17, 10), (12, 10)	Sí	No
(17, 10), (12, 10), (8, 9)	Sí	No
(12, 10), (8, 9), (5, 9)	No	Sí
(17, 10), (12, 10), (5, 9)	Sí	No
(12, 10), (5, 9), (3, 7)	Sí	No
(5, 9), (3, 7), (3, 11)	No	Sí
(12, 10), (5, 9), (3, 11)	No	Sí
(17, 10), (12, 10), (3, 11)	No	Sí
(11, 3), (17, 10), (3, 11)	Sí	No
(17, 10), (3, 11), (1, 5)	Sí	No
(3, 11), (1, 5), (1, 9)	No	Sí
(17, 10), (3, 11), (1, 9)	Sí	No

La cubierta convexa es (1, 2), (11, 3), (17, 10), (3, 11), (1, 9).

12. Ejecute la parte del algoritmo de Graham posterior al ordenamiento de los demás puntos.

Sección Apéndice

1. $\begin{pmatrix} 2+a & 4+b & 1+c \\ 6+d & 9+e & 3+f \\ 1+g & -1+h & 6+i \end{pmatrix}$,

2. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 \\ -7 & 10 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 18 & 27 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -2 & -35 & -56 \\ -7 & -18 & 13 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 14 & -6 \\ 23 & 1 \end{pmatrix}$

12. (-4)

14. (a) $2 \times 3, 3 \times 3, 3 \times 2$

(b) $AB = \begin{pmatrix} 33 & 18 & 47 \\ 8 & 9 & 43 \end{pmatrix}$

$AC = \begin{pmatrix} 16 & 56 \\ 14 & 63 \end{pmatrix}$

$CA = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 38 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 17 & 75 \end{pmatrix}$

$AB^2 = \begin{pmatrix} 177 & 215 & 531 \\ 80 & 93 & 323 \end{pmatrix}$

$BC = \begin{pmatrix} 18 & 65 \\ 34 & 25 \\ 12 & 54 \end{pmatrix}$

17. Sean $A = (b_{ij})$, $I_n = (a_{jk})$, $AI_n = (c_{ik})$. Entonces

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, a_{jk} = b_{ik} a_{kk} = b_{ik}.$$

Por lo tanto, $AI_n = A$. De manera análoga, $I_n A = A$.

20. La solución es $X = A^{-1}C$.

ÍNDICE

B

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

LISTA DE SÍMBOLOS

Lógica

$p \vee q$: p o q; página 3
$p \wedge q$: p y q; página 2
$\bar{p}$: no p; página 6
$p \to q$: si p, entonces q; página 8
$p \leftrightarrow q$: p si y sólo si q; página 13
$P \equiv Q$: P y Q son lógicamente equivalentes; página 13
$\forall$: para todo; página 20
$\exists$: existe; página 21
$\therefore$: por lo tanto; página 38

Notación de conjuntos

$\{x_1, \ldots, x_n\}$: conjunto que consta de los elementos $x_1, \ldots, x_n$; página 64
$\{x \mid p(x)\}$: conjunto formado por aquellos elementos x que satisfacen la propiedad $p(x)$; página 64
$x \in X$: x es un elemento de X; página 64
$x \notin X$: x no es un elemento de X; página 64
$X = Y$: igualdad de conjuntos (X y Y tienen los mismos elementos); página 64
$|X|$: número de elementos en X; página 64
$\varnothing$: conjunto vacío; página 64
$X \subseteq Y$: X es un subconjunto de Y; página 65
$\mathcal{P}(X)$: conjunto potencia de X (todos los subconjuntos de X); página 65
$X \cup Y$: X unión Y (todos los elementos en X o en Y); página 66

$\bigcup_{i=1}^{n} X_i$: unión de $X_1, \ldots, X_n$ (todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$); página 68

$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$: unión de $X_1, X_2, \ldots$ (todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos $X_1, X_2, \ldots$); página 68

$\cup \mathcal{S}$: unión de $\mathcal{S}$ (todos los elementos que pertenecen al menos a un conjunto en $\mathcal{S}$); página 68

$X \cap Y$: X intersección Y (todos los elementos en X y en Y); página 66

$\bigcap_{i=1}^{n} X_i$: intersección de $X_1, \ldots, X_n$ (todos los elementos que pertenecen a cada uno de los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$); página 68

$\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$: intersección de $X_1, X_2, \ldots$ (todos los elementos que pertenecen a cada uno de los conjuntos $X_1, X_2, \ldots$); página 68

$\cap \mathcal{S}$: intersección de $\mathcal{S}$ (todos los elementos que pertenecen a cada conjunto en $\mathcal{S}$); página 68
$X - Y$: diferencia de conjuntos (todos los elementos en X que no están en Y); página 66
$\overline{X}$: complemento de X (todos los elementos que no están en X); página 67
(x, y) : par ordenado; página 69
$(x_1, \ldots, x_n)$: n-ada; página 70
$X \times Y$: producto cartesiano de X y Y (pares (x, y) tales que $x \in X$ y $y \in Y$); página 69

Relaciones

xRy : (x, y) está en R (x está relacionado con y mediante la relación R); página 92
$[x]$: clase de equivalencia que contiene a x; página 106
R^{-1} : relación inversa (todas las (y, x) con (x, y) en R); página 98
$R_2 \circ R_1$: composición de relaciones; página 99
$x \preceq y$: xRy; página 97

Funciones

$f(x)$: valor asignado a x; página 126
$f: X \to Y$: función de X en Y; página 125
$f \circ g$: composición de f y g; página 130
f^{-1} : función inversa (todas las (y, x) con (x, y) en f); página 130
$f(n) = O(g(n))$: $|f(n)| \le C|g(n)|$ para n suficientemente grande; página 168
$f(n) = \Omega(g(n))$: $c|g(n)| \le |f(n)|$ para n suficientemente grande; página 168
$f(n) = \Theta(g(n))$: $c|g(n)| \le |f(n)| \le C|g(n)|$ para n suficientemente grande; página 168

Conteo

$C(n, r)$: número de r combinaciones de un conjunto de n elementos ($n!/[(n-r)!r!]$); página 214
$P(n, r)$: número de r permutaciones de un conjunto de n elementos ($n(n-1)\cdots(n-r+1)$); página 212

Gráficas

$G = (V, E)$: gráfica G con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E; página 306
(v, w) : arista; página 306
$\delta(v)$: grado de un vértice v; página 320
$(v_1, \ldots, v_n)$: camino de v_1 a v_n; página 316
$(v_1, \ldots, v_n)$; $v_1 = v_n$: ciclo; página 319
K_n : gráfica completa con n vértices; página 312
$K_{m,n}$: gráfica bipartita completa con m y n vértices; página 313
$w(i, j)$: peso de la arista (i, j); página 338
F_{ij} : flujo en la arista (i, j); página 457
C_{ij} : capacidad de la arista (i, j); página 456
$(P, \overline{P})$: corte en una red; página 473