0.1.6. Parcial 20/02/07.

Análisis II
Parcial 20/02/07

---

1. Hallar los extremos de $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ restringida a la curva de ecuaciones $(x-1)^2/4+y^2/6=1, x+2z=3$.

---

2. Sabiendo que el polinomio de Taylor de grado 2 en $(1,1)$ de una función C^3 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es $p(x,y)=x-x^2+y^2$, calcular la derivada direccional $f'((1,1),(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2))$.

---

3. Sean $u=u(x,y)$ y $v=v(x,y)$ las funciones definidas por el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-u^3=v^3 \\ y+v^2=uv \end{cases}$ en un entorno de $(x_0,y_0,u_0,v_0)=(2,0,1,1)$. Hallar $\nabla(f)(2,0)$, siendo $f(x,y)=u^2-3v$.

---

4. Resolver y fundamentar brevemente su respuesta

(**a**) Hallar una ecuación implícita para el plano tangente a la superficie parametrizada por

$$(u,v)\mapsto(u\cos(v),u\operatorname{sen}(v),u), 1<u<3, 0<v<\pi$$

en el punto $(0,2,2)$. Graficar.

(**b**) Dada $f(x,y)=\frac{4}{2+x^2+y^2}$, hallar todas los vectores unitarios v tales que $f'((0,1),v)=0$.

---

5. Hallar a de manera que la curva de ecuaciones $25=x^2+z^2, y=a(z-3)$ sea perpendicular a la superficie de ecuación $-3x^2/4+8y+8z=12$ en $(4,0,3)$.

Parcial 5/05/07-Tema 2

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^n$ tal que su plano tangente en $(0, 5, f(0, 5))$ es $x + 2y - 2z = 3$.
   Hallar $f(0, 5)$ y $g'((1, 2), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}))$ siendo $g(x, y) = f(2x - y, x + 2y)$.

2. Construir una función $f(x, y)$ no polinómica, tal que su polinomio de Taylor de grado 1 en $(1, 2)$ sea $p(x, y) = (3e^3 + 1)x - 2y - 2e^3 + 3$.

3. Las ecuaciones $f(u, v) = 0$, $u = x.z$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$ definen una superficie en $\mathbb{R}^3$. Hallar un vector normal a esa superficie en el punto $(1, \sqrt{3}, 1)$ si se sabe que $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = 2$

4. Hallar máximos y mínimos de $f(x, y) = x.(y-2)$ sujetos a la condición $x^2 + (y - 2)^2 = 1$. Graficar los conjuntos de nivel de $f(x, y)$.

5. La curva de nivel que pasa por el punto $(2, -4)$ de una función $\mathcal{C}^1$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es perpendicular en ese punto a la recta de ecuación $ax + y = 7$.
   Determine a y el vector unitario $\breve{v}$ tal que la derivada direccional $f'((2, -4), \breve{v}) = 0$

Parcial 8/05/07-Tema 1

1. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $g(x, y) = f(2x - 3y, x + y)$ en el punto $(1, 1, g(1, 1))$ sabiendo que $\nabla f(-1, 2) = (2, 3)$ y $f(-1, 2) = 5$.

2. Construir dos funciones $f(x, y) \neq g(x, y)$ no lineales, tales que sus polinomios de Taylor de grado 1 en el punto $(1, -1)$ coincidan. Dar algún significado geométrico a este hecho.

3. La intersección de las dos superficies dadas por las ecuaciones:
$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$
contiene una curva C que pasa por el punto $P = (\sqrt{7}, 3, 4)$. Hallar un vector unitario tangente a la curva C en el punto P.

4. Sea $f(x, y) \in \mathcal{C}^1$ tal que $f'((1, 2), \breve{v}_1) = 2$ y $f'((1, 2), \breve{v}_2) = 3$ siendo $\breve{v}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $\breve{v}_2 = (-1, 0)$. Hallar un vector tangente a la curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por el $(1, 2)$.

5. Hallar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 - 2z^2 + y^2$ restringida a la curva
C $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = x \end{cases}$

Parcial 29/05/07-Tema 1

1. Sea f una función $\mathcal{C}^2$, hallar aproximadamente el valor de $f(1,02;0,01)$ sabiendo que $f(x,y) = xu^2 + yv$ siendo $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ definidas por: $\begin{cases} uv + x - y + 2v = 0 \\ xv + u^2y - x = 0 \end{cases}$
en un entorno de punto $(x,y,u,v) = (1,0,-3,1)$

2. Hallar la mínima distancia de los puntos de la recta:
$\begin{cases} z = 2 + x + y \\ x + y = 1 \end{cases}$ al punto $(1,1,0)$

3. Hallar a para que las superficies:
$S_1 : (u,v) \mapsto (u+v, u-v, v^2)$ con $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2$, y
$S_2 : x^3 + ay - z^2 - 7 = 0$ sean ortogonales en el punto $(2,0,1)$.

4. El nivel de toxicidad en un laboratorio está dado por:
$T(x,y) = 2x^2 - 4y^2$. Un empleado se encuentra en el recinto ubicado en el punto de coordenadas $(-1,2)$.
    1. ¿En que dirección deberá moverse para reducir la toxicidad lo más rápidamente posible?
    2. Si se mueve de modo de recibir el 50 % del máximo posible, ¿en que dirección se mueve?

5. Dada la curva C:$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ hallar el o los puntos de la curva para los cuales su recta tangente contiene al punto de coordenadas:$(0, \sqrt{2}, 1)$

Parcial 5/07/07-Tema 1

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$ y sea $\vec{C}(t)$ una curva con $\vec{C}(0) = (0, 0)$ y $\vec{C}'(0) = (1, 1)$. Determine el vector tangente a la curva imagen de $\vec{C}(t)$ por f en $t = 0$

2. Sea $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.Hallar $\mathbb{D}$(Dominio de la función). Mostrar que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es ortogonal al vector con componentes $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Interpretar geométricamente.

3. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones $\mathcal{C}^2$ tales que $f(x)$ tiene en $x = 2$ mínimo 1, $g(x)$ tiene en $y = 3$ mínimo 5, y $f"(x) > 0$ $g"(y) > 0$ para todo x , y. Estudiar los extremos de $h(x, y) = f(2x).g(3y + 1)$

4. Siendo $f(x, y) = x + y$, $g(u) = (u^2 - 1)^2$. Muestre que $\nabla(gof)$ resulta nulo en todos los puntos de la recta $x + y = 1$.

5. Sabiendo que el polinomio de Taylor de grado 2 en $(1, 1)$ de una función $\mathcal{C}^3$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $p(x, y) = 4x - 2x^2 + y - y^2$, hallar $\overrightarrow{v}$ para que $f'((1, 1)\overrightarrow{v}) = 0$

Parcial 20/10/07-Tema 1

1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^2$ tal que $F(x+y, y+z) = 0$ define implícitamente a $z = f(x,y)$ en un entorno de (x_0, y_0, z_0), verificar que en dicho entorno se cumple que: $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^3$ cuyo polinomio de Taylor de grado 2 en $(1,1)$ es $p(x,y) = 2 + x^2 - 2x - 2y^2 + 4y$. Hallar $\mathbf{a}$ de manera que la función $g(x,y) = x.f(x,y) + \mathbf{a}x^2$ tenga extremo en $(1,1)$ y determinar si es máximo o mínimo.

3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva descrita en coordenadas polares por: $\rho = 3\theta$ en el punto correspondiente a $\theta = \pi/2$.

4. Dada la superficie S definida por: $(x-5)^2 + (y+1)^2 + (z+13)^2 = 21$ y las rectas parametrizadas por:
   $\alpha(t) = (2t, -3t, 2t)$ y $\beta(t) = (1+3t, -1-2t, t)$.
   Encontrar los puntos de S para los que el plano tangente a S en dichos puntos sea paralelo a ambas rectas. Hallar las ecuaciones de dichos planos.

5. Hallar todos los valores de las constantes a, b y c tales que la derivada direccional de $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1,2,-1)$ verifique a la vez que:
   1. Alcance valor máximo en una dirección paralela al eje z.
   2. Que dicho valor máximo sea de 64.

Parcial 23/10/07-Tema 1

1. Sea $h(x,y) = f(x^2 + y^2 + g(x))$, siendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$ tal que $f' > 0 \ \forall x$. Hallar $g'(1)$ sabiendo que h satisface $h'_{\mathbf{v}}(1,1) = 0$ siendo $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

2. Hallar los puntos de la superficie parametrizada por:
$\varphi : [0, 2\pi) \times [\frac{1}{2}, 10] \to \mathbb{R} \ / \ \varphi(u,v) = (v\ cos(u), v\ sen(u), 2v^2)$ donde el plano tangente es perpendicular a la recta:
$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 2x + 3z = 5 \end{cases}$$

3. Hallar y clasificar extremos de la función: $z = x^2(x - y)$

4. Sea $g(u,v) = vu^2 + v^2$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función $\mathcal{C}^1$ tal que $f(x,y) = (x^2 + 2y, v(x,y))$ con $v = v(x,y)$ definida implícitamente por:
$x^3 + v^3 - 3y^2 v = 0$ en el entorno del punto $(1, 0, v(1,0))$.
Si $h = gof$ hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de h en el punto $(1, 0, h(1,0))$

5. Sea $y - z + e^{zx} = 0$ que define implícitamente a $z = f(x,y)$ en el entorno de $(0, 0, z(0,0))$, halle un valor aproximado para $f(0{,}01, -0{,}02)$ utilizando el polinomio de Taylor de primer orden.

Parcial 24/11/07-Tema 1

1. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^3$ y su polinomio de Taylor de orden 2 en un entorno del $(0, 0, f(0, 0))$:
   $P(x, y) = x^2 + \alpha y^2$
   1. Demostrar que la gráfica de f es tangente al plano xy en $(0, 0, f(0, 0))$
   2. Demostrar que si $\alpha \geq 0$ en $(0, 0))$ la función alcanza un mínimo local.
   3. Demostrar que si $\alpha < 0$ en $(0, 0))$ la función tiene un punto de ensilladura.

2. Sea el sistema $\left\{ \begin{array}{l} yx^2 + yz + 2 = 0 \\ x^3 + y^2 - z^2 = 1 \end{array} \right.$ que en un entorno del punto $P = (1, -1, 1)$ define implícitamente a x e y como funciones de z , hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(z) = y(z)^3 x(z)^2$, en $(1, h(1))$.

3. S es la superficie parametrizada por:
   $(u, v) \to (1 + u, u + v, 2u + v^2)$ con $-1 < u < 1$ y $-2 < v < 2$.
   Hallar los puntos P pertenecientes a S para los cuales el plano tangente a S en P es paralelo al vector $(1, 2, 4)$.

4. Sea $\pi : 3x + 2y + 5z = 6$ el plano tangente a la gráfica de $f(x, y)$ en $(1, -1, 1)$ y sea $\breve{u}$ un versor tangente a la curva de nivel 9 de $g(x, y) = x^3 - 2xy + y^2$ en $(1, -2)$. Hallar la derivada direccional de f en $(1, -1)$ en la dirección del versor $\breve{u}$ elegido.

5. Sean C una curva en $\mathbb{R}^2$ parametrizada por:
   $\gamma(u) = (u, 2u^2)$ con $\sqrt{\frac{1}{2}} < u < \sqrt{\frac{3}{2}}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(u, v) = (u + v, uv)$. Mostrar que la imagen por f de la curva C en el punto $(3, 2)$ es perpendicular a la recta $6y = -5x + 27$.

Parcial 27/11/07-Tema 1

1. Sean la curva parametrizada por $\alpha(t) = (\frac{t^3}{4} - 2, \frac{4}{t} - 3, cos(t-2))$ con $0 \leq t \leq 3$ y la superficie S definida por: $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$. Comprobar que la recta tangente a la curva en el punto $(0,-1,1)$ está contenida en el plano tangente a la superficie en dicho punto.

2. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial diferenciable en el punto A cuya matriz jacobiana en A es:
$J(\vec{F}(A)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y tal que $\vec{F}(A) = (2,1)$. Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(u,v) = u^2 + 3v^2$ y $h = go\vec{F}$. Hallar una dirección $\vec{w}$ tal que la derivada de h en A respecto de w sea nula.

3. Hallar y clasificar los extremos de la función: $f(x,y,z) = x + y^3 + z$ restringida a la curva definida por:
$x^2 + y^2 = 2$, $x + z = 1$

4. Dado el paraboloide $\alpha(z-c) = (x - \frac{4}{5})^2 + (y - \frac{8}{5})^2$ con $\alpha \neq 0$ y la superficie S gráfica de una función $f(x,y)$. Sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 2 en el entorno del $(0,0)$ de $f(x,y)$ es:
$p(x,y) = 2 + 3x - y + 4xy - 6y^2$, hallar α y c para que el paraboloide y la superficie S sean ortogonales en $(0,0,2)$.

5. Sean $f(u,v) = u^2 - 3v$ y $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de h en el punto $(2,0,h(2,0))$ sabiendo que en un entorno de $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (2,0,1,1)$ el sistema:

$$\begin{cases} x - u^3 = v^3 \\ y + v^2 = uv \end{cases} \quad \text{define implícitamente } u = u(x,y) \text{ y } v = v(x,y)$$

20/12/07 Segundo Recuperatorio-Tema 1

1. Sea $\mathcal{C}$ la curva intersección entre las superficies S_1 parametrizada por: $\phi(u, v) = (u + 3, v + 3, 4 - u + v)$ con $-3 \leq u \leq 3$ y $-5 \leq v \leq 5$ y S_2 definida por la ecuación: $2x^2 + y^2 - z = 1$.
   Hallar el punto de intersección entre la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $(1, -1, 2)$ y el plano $z = 0$.

2. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial diferenciable en el punto $(0, 0)$, $F(0, 0) = (0, 0)$ y cuya matriz jacobiana en $(0, 0)$ es:
   $J(\vec{F}(0, 0)) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $h = goF$ y $h(0, 0) = 0$. Hallar $\nabla(g(0, 0))$ sabiendo que el plano tangente a la gráfica de h en $(0, 0)$ es el plano $z = -2x + 4y$

3. Sea S la superficie definida por $(y + z)^2 + (z - x)^2 = 16$. Hallar los puntos de S en los que su normal es perpendicular al eje x. Verificar que estos corresponden a un par de rectas en $\mathbb{R}^3$.

4. Dada $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + y^2$ verificar que $(0, 0)$ es un punto crítico de f y clasificarlo de acuerdo a los valores de a y b.

5. Si $z = f(x, y)$ está definida implícitamente por la ecuación $z^3 + 2xz - yz = 2$ en el entorno del punto $(1, 1, 1)$. Hallar un valor aproximado de $f(0,98; 1,02)$ utilizando el polinomio de Taylor de grado uno.