16. Determine si el siguiente argumento es válido.

$$\begin{array}{l} p \to q \vee r \\ p \vee \bar{q} \\ \underline{r \vee q} \\ \therefore q \end{array}$$

Sección 1.5

17. Determine una expresión, que sea la *conjunción* de cláusulas, equivalente a $(p \vee q) \to r$.

18. Determine una expresión, que sea la *conjunción* de cláusulas, equivalente a $(p \vee \bar{q}) \to \bar{r}s$.

19. Utilice resolución para demostrar

$$\begin{array}{l} \bar{p} \vee q \\ \bar{q} \vee \bar{r} \\ \underline{p \vee \bar{r}} \\ \therefore \bar{r} \end{array}$$

20. Demuestre de nuevo el ejercicio 19 utilizando la resolución y la demostración por contradicción.

Sección 1.6

Utilice inducción matemática para demostrar que las afirmaciones de los ejercicios 21-24 son verdaderas para cada entero positivo n.

21. $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$

22. $2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

23. $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

24. $2^{n+1} < 1 + (n+1)2^n$

2

EL LENGUAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Cuando YO utilizo una palabra, ésta quiere decir precisamente lo que yo quiero decir, ni más ni menos.

—tomado de Alicia en el país de las maravillas

Este capítulo trata acerca del lenguaje de las matemáticas. Los temas, algunos de los cuales son familiares para el lector, son los conjuntos, las sucesiones, los sistemas numéricos, las relaciones y las funciones. Todas las matemáticas, así como las áreas que se basan en éstas, como las ciencias de la computación y la ingeniería, hacen uso de estos conceptos fundamentales.

Un conjunto es una colección de objetos. Las matemáticas discretas trabajan con estructuras como gráficas (conjuntos de vértices y aristas) y álgebras booleanas (conjuntos con ciertas operaciones definidas sobre ellos).

A diferencia de un conjunto, una sucesión toma en cuenta el orden. Una lista de las letras, conforme éstas aparecen en una palabra, es un ejemplo de sucesión. (Es claro que en este caso es importante el orden, pues, por ejemplo, *caso* y *cosa* son palabras diferentes.)

Entre los sistemas numéricos están el familiar sistema decimal (base 10), así como los sistemas binario (base 2) y hexadecimal (base 16).

† Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Una relación es un conjunto de pares ordenados. La presencia del par ordenado (a, b) en una relación indica una relación entre a y b. El modelo de base de datos relacional que ayuda a los usuarios a obtener información en una base de datos (una colección de registros controlada por una computadora) se basa en el concepto de relación.

Una función, que es un tipo particular de relación, asigna a cada miembro de un conjunto X exactamente un miembro de un conjunto Y. Las funciones se utilizan ampliamente en las matemáticas discretas; por ejemplo, las funciones sirven para analizar el tiempo necesario para ejecutar los algoritmos.

2.1 *CONJUNTOS*

El concepto de conjunto es fundamental en todas las matemáticas y en las aplicaciones matemáticas. Un **conjunto** es simplemente una colección arbitraria de objetos. Si un conjunto es finito y no demasiado grande, podemos describirlo enumerando sus elementos. Por ejemplo, la ecuación

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \tag{2.1.1}$$

describe un conjunto A formado por los cuatro elementos 1, 2, 3 y 4. Un conjunto queda determinado mediante sus elementos y no por algún orden particular en que se enumeren dichos elementos. Así, A también puede especificarse como

$$A = \{1, 3, 4, 2\}.$$

Se supone que los elementos que conforman un conjunto son distintos, y aunque por alguna razón podríamos tener duplicados en nuestra lista, sólo una ocurrencia de cada elemento está en el conjunto. Por esta razón, también podríamos describir al conjunto A definido en (2.1.1) como

$$A = \{1, 2, 2, 3, 4\}.$$

Si un conjunto es finito pero grande, o bien es infinito, podemos describirlo enunciando una propiedad necesaria para la pertenencia a dicho conjunto. Por ejemplo, la ecuación

$$B = \{x \mid x \text{ es un entero positivo par}\} \tag{2.1.2}$$

describe al conjunto B formado por todos los enteros positivos pares; es decir, B consta de los enteros 2, 4, 6, y así sucesivamente. La barra vertical "$|$" se lee "tal que". La ecuación (2.1.2) se leería entonces "B es igual al conjunto de todas las x tales que x es un entero positivo par". En este caso, la propiedad necesaria para la pertenencia es "es un entero positivo par". Observe que la propiedad aparece después de la barra vertical.

Si X es un conjunto finito, sea

$$|X| = \text{número de elementos en } X.$$

Dada una descripción de un conjunto X, como (2.1.1) o (2.1.2) y un elemento x, podemos determinar si éste pertenece o no a X. Si los miembros de X se enumeran como en (2.1.1), sólo revisamos la lista para ver si el elemento x aparece en la lista. En una descripción como (2.1.2), verificamos si el elemento x tiene la propiedad indicada. Si x está en el conjunto X, escribimos $x \in X$, y si x no está en X, escribimos $x \notin X$. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces $x \in A$, pero $x \notin B$, donde A y B están dados por las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2).

El conjunto sin elementos es el **conjunto vacío** y se denota $\varnothing$. Así, $\varnothing = \{\ \}$.

Dos conjuntos X y Y son **iguales** y escribimos $X = Y$ si X y Y tienen los mismos elementos. Dicho de otra forma, $X = Y$ si siempre que $x \in X$, entonces $x \in Y$ y siempre que $x \in Y$, entonces $x \in X$.

EJEMPLO 2.1.1

Si

$$A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}, \qquad B = \{2, -3\},$$

entonces $A = B$. □

Supongamos que X y Y son conjuntos. Si todo elemento de X es un elemento de Y, decimos que X es un **subconjunto** de Y y escribimos $X \subseteq Y$.

EJEMPLO 2.1.2

Si

$$C = \{1, 3\} \qquad \text{y} \qquad A = \{1, 2, 3, 4\},$$

entonces C es un subconjunto de A. □

Cualquier conjunto X es un subconjunto de sí mismo, pues cualquier elemento en X está en X. Si X es un subconjunto de Y y X no es igual a Y, decimos que X es un **subconjunto propio** de Y. El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto (véase el ejercicio 56). El conjunto de todos los subconjuntos (propios o no) de un conjunto X, denotado $P(X)$, es el **conjunto potencia** de X.

EJEMPLO 2.1.3

Si $A = \{a, b, c\}$, los miembros de $P(A)$ son

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Todos los subconjuntos, excepto $\{a, b, c\}$, son subconjuntos propios de A. Para este ejemplo,

$$|A| = 3, \quad |P(A)| = 2^3 = 8.$$ □

Daremos una demostración por inducción de que el resultado del ejemplo 2.1.3 es válido en general; es decir, el conjunto potencia de un conjunto con n elementos tiene 2^n elementos.

TEOREMA 2.1.4

Si $|X| = n$, entonces

$$|P(X)| = 2^n. \tag{2.1.3}$$

Demostración. La demostración es por inducción sobre n.

PASO BASE. Si $n = 0$, X es el conjunto vacío. El único subconjunto del conjunto vacío es el propio conjunto vacío; así,

$$|P(X)| = 1 = 2^0 = 2^n.$$

Así, (2.1.3) es verdadera para $n = 0$.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que (2.1.3) es válida para n. Sea X un conjunto con $n + 1$ elementos. Elijamos $x \in X$. Afirmamos que exactamente la mitad de los subconjuntos de X contienen a x, y exactamente la mitad de los subconjuntos de X no contienen a x. Para ver esto, observe que cada subconjunto S de X que contenga a x puede asociarse de manera única con el subconjunto obtenido al eliminar x de S (véase la figura 2.1.1). Así, exactamente la mitad de los subconjuntos de X contienen a x, y exactamente la mitad de los subconjuntos de X no contienen a x.

Si Y es el conjunto obtenido de X al eliminar x, Y tiene n elementos. Por la hipótesis de inducción, $|P(Y)| = 2^n$. Pero los subconjuntos de Y son precisamente los subconjuntos de X que no contienen a x. Por el argumento del párrafo anterior, concluimos que

$$|P(Y)| = \frac{|P(X)|}{2}.$$

Subconjuntos de X que contienen a a	*Subconjuntos de X que no contienen a a*
$\{a\}$	$\varnothing$
$\{a, b\}$	$\{b\}$
$\{a, c\}$	$\{c\}$
$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$

FIGURA 2.1.1
Los subconjuntos de $X = \{a, b, c\}$ divididos en dos clases: aquellos que contienen a a y aquellos que no contienen a a. Cada subconjunto de la derecha se obtiene del conjunto correspondiente en la columna de la izquierda eliminando el elemento a de éste.

Por lo tanto,

$$|P(X)| = 2|P(Y)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Así, (2.1.3) es válida para $n + 1$ y esto concluye el paso inductivo. Por el principio de inducción matemática, (2.1.3) es válida para toda $n \geq 0$. ■

En la sección 4.1 (véase el ejemplo 4.1.4) se dará otra demostración del teorema 2.1.4.

Dados dos conjuntos X y Y, existen varias formas de combinar X y Y para formar un nuevo conjunto. El conjunto

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ o } x \in Y\}$$

es la **unión** de X y Y. La unión consta de todos los elementos que pertenecen a X o a Y (o a ambos).

El conjunto

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ y } x \in Y\}$$

es la **intersección** de X y Y. La intersección consta de todos los elementos que pertenecen a X y a Y.

Los conjuntos X y Y son **ajenos** si $X \cap Y = \varnothing$. Una colección de conjuntos $\mathcal{S}$ es ajena por pares si siempre que X y Y sean conjuntos distintos en $\mathcal{S}$, X y Y son ajenos.

El conjunto

$$X - Y = \{x \mid x \in X \text{ y } x \notin Y\}$$

es la **diferencia** (o **complemento relativo**). La diferencia $X - Y$ consta de todos los elementos en X que no están en Y.

EJEMPLO 2.1.5

Si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, entonces

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A \cap B = \{5\}$$
$$A - B = \{1, 3\}$$
$$B - A = \{4, 6\}.$$

□

EJEMPLO 2.1.6

Los conjuntos

$$\{1, 4, 5\} \quad \text{y} \quad \{2, 6\}$$

son ajenos. La colección de conjuntos

$$\mathcal{S} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}, \{3\}, \{7, 8\}\}$$

es ajena por pares. □

A veces trabajaremos con varios conjuntos, todos los cuales serán subconjuntos de un conjunto U. Este conjunto U es un **conjunto universal** o **universo**. El conjunto U debe darse en forma explícita o inferirse del contexto. Dado un conjunto universal U y un subconjunto X de U, el conjunto $U - X$ es el **complemento** de X y se denota $\overline{X}$.

EJEMPLO 2.1.7

Sea $A = \{1, 3, 5\}$. Si el conjunto universal U se especifica como $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces $\overline{A} = \{2, 4\}$. Por otro lado, si el conjunto universal U se especifica como $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, entonces $\overline{A} = \{7, 9\}$. Es claro que el complemento depende del universo con el cual estemos trabajando. □

Nuestro siguiente teorema resume algunas propiedades útiles de los conjuntos. La demostración se deja al lector (véase el ejercicio 70).

TEOREMA 2.1.8

Sean U un conjunto universal y A, B y C subconjuntos de U. Se cumplen las siguientes propiedades.

(a) Leyes asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(b) Leyes conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

(c) Leyes distributivas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(d) Leyes del neutro y del idéntico:

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap U = A$$

(e) Leyes de complementos:

$$A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$$

(f) Leyes de idempotencia:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

(g) Leyes de acotación:

$$A \cup U = U, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$$

(h) Leyes de absorción:

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$

(i) Ley de involución:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

(j) Leyes del 0/1:

$$\overline{\varnothing} = U, \quad \overline{U} = \varnothing$$

(k) Leyes de De Morgan para conjuntos:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Demostración. Véase el ejercicio 70. ■

Definimos la unión de una familia arbitraria de conjuntos $\mathcal{S}$ como aquellos elementos x que pertenecen al menos a un conjunto X en $\mathcal{S}$. De manera formal,

$$\bigcup \mathcal{S} = \{ x \mid x \in X \text{ para algún } X \in \mathcal{S} \}.$$

De manera análoga, definimos la intersección de una familia arbitraria $\mathcal{S}$ de conjuntos como aquellos elementos x que pertenecen a cada conjunto X en $\mathcal{S}$. De manera formal,

$$\bigcap \mathcal{S} = \{ x \mid x \in X \text{ para todo } X \in \mathcal{S} \}.$$

Si

$$\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\},$$

escribimos

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

y si

$$\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \ldots\},$$

escribimos

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \qquad \bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

EJEMPLO 2.1.9

Si

$$A_n = \{n, n+1, \ldots\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S} = \{A_1, A_2, \ldots\},$$

entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup \mathcal{S} = \{1, 2, \ldots\}, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap \mathcal{S} = \varnothing.$$ □

Una partición de un conjunto X divide a X en subconjuntos que no se traslapan. Más formalmente, una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos no vacíos de X es una **partición** del conjunto X si todo elemento de X pertenece exactamente a un miembro de $\mathcal{S}$. Observe que si $\mathcal{S}$ es una partición de X, $\mathcal{S}$ es ajena por pares y $\bigcup \mathcal{S} = X$.

EJEMPLO 2.1.10

Como cada elemento de

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

está exactamente en un miembro de

$$\mathcal{S} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}, \{3\}, \{7, 8\}\},$$

$\mathcal{S}$ es una partición de X. □

Al inicio de esta sección señalamos que un conjunto es una colección no ordenada de elementos; es decir, un conjunto queda determinado por sus elementos y no por algún orden particular de enumerar éstos. Sin embargo, a veces es necesario tomar en cuenta el orden. Un **par ordenado** de elementos, que se escribe (a, b), se considera distinto del par ordenado (b, a), a menos, por supuesto, que $a = b$. Dicho de otra forma, $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Si X y Y son conjuntos, $X \times Y$ denota el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tales que $x \in X$ y $y \in Y$. $X \times Y$ es el **producto cartesiano** de X y Y.

EJEMPLO 2.1.11

Si $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{a, b\}$, entonces

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$
$$Y \times X = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$$
$$X \times X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$
$$Y \times X = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$ □

El ejemplo 2.1.11 muestra que, en general, $X \times Y \neq Y \times X$. Observe que $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

EJEMPLO 2.1.12

Un restaurante sirve cuatro entradas

$$r = \text{costillas}, \quad n = \text{nachos}, \quad s = \text{camarón}, \quad f = \text{queso fundido}$$

y tres platos principales

$$c = \text{pollo}, \quad b = \text{filete de res}, \quad t = \text{trucha}.$$

Si $A = \{r, n, s, f\}$ y $M = \{c, b, t\}$, el producto cartesiano $A \times M$ indica las 12 posibles comidas que constan de una entrada y un plato principal. □

Las listas ordenadas no tienen por qué ser de dos elementos. Una ***n*-ada**, que se escribe $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, toma en cuenta el orden:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

si y sólo si

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

El producto cartesiano de conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se define como el conjunto de todas las n-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_i \in X_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

EJEMPLO 2.1.13

Si

$$X = \{1, 2\}, \qquad Y = \{a, b\}, \qquad Z = \{\alpha, \beta\},$$

entonces

$$X \times Y \times Z = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}.$$ □

Observe que en el ejemplo 2.1.13, $|X \times Y \times Z| = |X| \cdot |Y| \cdot |Z|$. En general, tenemos

$$|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdots |X_n|. \tag{2.1.4}$$

Esta última afirmación puede demostrarse por inducción sobre el número n de conjuntos (véase el ejercicio 71).

EJEMPLO 2.1.14

Si A es un conjunto de entradas, M un conjunto de platos principales y D un conjunto de postres, el producto cartesiano $A \times M \times D$ enumera todas las comidas posibles que constan de una entrada, un plato principal y un postre. □

Ejercicios

En los ejercicios 1-16, considere como universo al conjunto $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Sean $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Enumere los elementos de cada conjunto.

1. $A \cup B$
2. $B \cap C$
3. $A - B$
4. $B - A$
5. $\overline{A}$
6. $U - C$
7. $\overline{U}$
8. $A \cup \varnothing$
9. $B \cap \varnothing$
10. $A \cup U$
11. $B \cap U$
12. $A \cap (B \cup C)$
13. $\overline{B} \cap (C - A)$
14. $(A \cap B) - C$
15. $\overline{A \cap B} \cup C$
16. $(A \cup B) - (C - B)$

En los ejercicios 17-20, sean $X = \{1, 2\}$ y $Y = \{a, b, c\}$. Enumere los elementos de cada conjunto.

17. $X \times Y$
18. $Y \times X$
19. $X \times X$
20. $Y \times Y$

En los ejercicios 21-24, sean $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a\}$ y $Z = \{\alpha, \beta\}$. Enumere los elementos de cada conjunto.

21. $X \times Y \times Z$
22. $X \times Y \times Y$
23. $X \times X \times X$
24. $Y \times X \times Y \times Z$

En los ejercicios 25-28, enumere todas las particiones del conjunto.

25. $\{1\}$
26. $\{1, 2\}$
27. $\{a, b, c\}$
28. $\{a, b, c, d\}$

En los ejercicios 29-32, responda cierto o falso.

29. $\{x\} \subseteq \{x\}$
30. $\{x\} \in \{x\}$
31. $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$
32. $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$

En los ejercicios 33-37, determine si cada par de conjuntos son iguales.

33. $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}$
34. $\{1, 2, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}$
35. $\{1, 1, 3\}, \{3, 3, 1\}$
36. $\{x \mid x^2 + x = 2\}, \{1, -2\}$
37. $\{x \mid x \text{ es un número real y } 0 < x \leq 2\}, \{1, 2\}$
38. Enumere los elementos de $P(\{a, b\})$. ¿Cuáles son subconjuntos propios de $\{a, b\}$?
39. Enumere los elementos de $P(\{a, b, c, d\})$. ¿Cuáles son subconjuntos propios de $\{a, b, c, d\}$?
40. Si X tiene 10 elementos, ¿cuántos miembros tiene $P(X)$? ¿Cuántos subconjuntos propios tiene X?
41. Si X tiene n elementos, ¿cuántos subconjuntos propios tiene X?
42. Si X y Y son conjuntos no vacíos y $X \times Y = Y \times X$, ¿qué podemos concluir acerca de X y Y?

En cada uno de los ejercicios 43-55, escriba "verdadero" si la afirmación es verdadera; en caso contrario, proporcione un contraejemplo. Los conjuntos X, Y y Z son subconjuntos de un conjunto universal U. Suponga que el universo para los productos cartesianos es $U \times U$.

43. Para cualesquiera conjuntos X y Y, X es un subconjunto de Y o Y es un subconjunto de X.

44. $X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$ para todos los conjuntos X, Y y Z

45. $(X - Y) \cap (Y - X) = \varnothing$ para todos los conjuntos X y Y

46. $X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cup Z$ para todos los conjuntos X, Y y Z

47. $\overline{X - Y} = \overline{Y - X}$ para todos los conjuntos X y Y

48. $\overline{X \cap Y} \subseteq X$ para todos los conjuntos X y Y

49. $(X \cap Y) \cup (Y - X) = X$ para todos los conjuntos X y Y

50. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$ para todos los conjuntos X, Y y Z

51. $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ para todos los conjuntos X y Y

52. $X \times (Y - Z) = (X \times Y) - (X \times Z)$ para todos los conjuntos X, Y y Z

53. $X - (Y \times Z) = (X - Y) \times (X - Z)$ para todos los conjuntos X, Y y Z

54. $X \cap (Y \times Z) = (X \cap Y) \times (X \cap Z)$ para todos los conjuntos X, Y y Z

55. $X \times \varnothing = \varnothing$. para todo conjunto X

56. Muestre que para cualquier conjunto X, $\varnothing \subseteq X$.

Para cada una de las condiciones de los ejercicios 57-60, ¿cuál es la relación que debe existir entre los conjuntos A y B?

57. $A \cap B = A$

58. $A \cup B = A$

59. $\overline{A} \cap U = \varnothing$

60. $\overline{A \cap B} = \overline{B}$

La *diferencia simétrica* de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

61. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$, determine $A \Delta B$.

62. Describa la diferencia simétrica de los conjuntos A y B con palabras.

63. Dado un universo U, describa $A \Delta A$, $A \Delta \overline{A}$, $U \Delta A$ y $\varnothing \Delta A$.

64. Demuestre o dé un contraejemplo: Si A, B y C son conjuntos que satisfacen $A \Delta C = B \Delta C$, entonces $A = B$.

65. Muestre que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

66. Determine una fórmula para $|A \cup B \cup C|$ similar a la fórmula del ejercicio 65. Muestre que su fórmula es válida para cualesquiera conjuntos A, B y C.

67. Sea C un círculo y D el conjunto de todos los diámetros de C. ¿Qué es $\cap D$?

68. Sea P el conjunto de los enteros mayores que 1. Para $i \geq 2$, defina

$$X_i = \{ik \mid k \geq 2, k \in P\}.$$

Describa $P - \bigcup_{i=2}^{\infty} X_i$.

69. Utilice la inducción para mostrar que si $X_1, \ldots, X_n$ y X son conjuntos, entonces

(a) $X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \cdots \cup (X \cap X_n)$.

(b) $\overline{X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n} = \overline{X}_1 \cup \overline{X}_2 \cup \cdots \cup \overline{X}_n$.

70. Demuestre el teorema 2.1.8.

71. Utilice la inducción para demostrar la afirmación (2.1.4).

2.2 SUCESIONES Y CADENAS

La compañía Blue Taxi cobra \$1 por la primera milla y 50 centavos por cada milla adicional. La tabla anexa muestra el costo de recorrido de 1 a 10 millas. En general, el costo C_n de recorrido de n millas es 1.00 (el costo de recorrido de la primera milla) más 0.50 veces el número $(n - 1)$ de millas adicionales. Es decir,

Millaje	*Costo*
1	\$1.00
2	1.50
3	2.00
4	2.50
5	3.00
6	3.50
7	4.00
8	4.50
9	5.00
10	5.50

$$C_n = 1 + 0.5(n - 1).$$

Por ejemplo,

$$C_1 = 1 + 0.5(1 - 1) = 1 + 0.5 \cdot 0 = 1,$$

$$C_5 = 1 + 0.5(5 - 1) = 1 + 0.5 \cdot 4 = 1 + 2 = 3.$$

Una **sucesión** es una lista donde se toma en cuenta el orden. En el ejemplo anterior, la lista de tarifas

$$1.00, \quad 1.50, \quad 2.00, \quad 2.50, \quad 3.00, \ldots$$

es una sucesión. Observe que el orden realmente es importante. Por ejemplo, si se intercambian el primero y el quinto números, la tarifa por una milla sería \$3.00, un poco distinta a la tarifa de \$1.00.

Si s es una sucesión, con frecuencia denotamos el primer elemento de la sucesión como s_1, el segundo elemento de la sucesión como s_2, y así sucesivamente. En general, s_n denota el n-ésimo elemento de la sucesión. n es el **índice** de la sucesión.

EJEMPLO 2.2.1

La lista ordenada

$$2, \quad 4, \quad 6, \ldots, \quad 2n, \ldots$$

es una sucesión. El primer elemento de la sucesión es 2, el segundo es 4, y así sucesivamente. El n-ésimo elemento de la sucesión es $2n$. Si s denota esta sucesión, tenemos

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = 6, \ldots, \quad s_n = 2n, \ldots. \qquad \square$$

EJEMPLO 2.2.2

La lista ordenada

$$a, \quad a, \quad b, \quad a, \quad b$$

es una sucesión. El primer elemento de la sucesión es a, el segundo es a, y así sucesivamente. Si t denota esta sucesión, tenemos

$$t_1 = a, \quad t_2 = a, \quad t_3 = b, \quad t_4 = a, \quad t_5 = b. \qquad \square$$

El ejemplo 2.2.2 muestra que una sucesión (a diferencia de un conjunto) puede tener repeticiones. Una sucesión puede tener una infinidad de elementos (como la sucesión del ejemplo 2.2.1) o un número finito de elementos (como la sucesión del ejemplo 2.2.2).

Una notación alternativa para la sucesión s es $\{s_n\}$. En este caso, s o $\{s_n\}$ denota la sucesión completa

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots .$$

Utilizamos la notación s_n para denotar al n-ésimo elemento de la sucesión s.

EJEMPLO 2.2.3

Defina una sucesión $\{t_n\}$ mediante la regla

$$t_n = n^2 - 1, \quad n \geq 1.$$

Los primeros cinco términos de esta sucesión son

$$0, \quad 3, \quad 8, \quad 15, \quad 24.$$

El término número 55 es

$$t_{55} = 55^2 - 1 = 3024.$$

□

EJEMPLO 2.2.4

Defina una sucesión u mediante la regla, u_n está dada por la n-ésima letra de la palabra *digital*. Entonces $u_1 = d$, $u_2 = u_4 = i$ y $u_7 = l$. Esta sucesión es finita. □

Aunque en este libro se denotará al primer elemento de una sucesión s por lo general como s_1, este primer elemento puede quedar indicado por cualquier entero. Por ejemplo, si v es una sucesión cuyo primer elemento es v_0, los elementos de v serían

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \quad \ldots .$$

Cuando queremos mencionar de manera explícita el índice inicial de una sucesión finita s, escribimos $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Una sucesión infinita v cuyo índice inicial es 0 se denota $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$. Una sucesión finita x con índices de -1 a 4 se denota $\{x_n\}_{n=-1}^{4}$.

EJEMPLO 2.2.5

Si x es la sucesión definida por

$$x_n = 1/2^n, \quad -1 \leq n \leq 4,$$

los elementos de x son

$$2, \quad 1, \quad 1/2, \quad 1/4, \quad 1/8, \quad 1/16.$$

□

Dos tipos importantes de sucesiones son las sucesiones crecientes y las decrecientes.† Una sucesión s es **creciente** si $s_n \leq s_{n+1}$ para toda n. Una sucesión s es **decreciente** si $s_n \geq s_{n+1}$ para toda n. Observe que en ambas definiciones se permite la igualdad entre los términos sucesivos de la sucesión.

EJEMPLO 2.2.6

La sucesión 2, 4, 6, . . . , del ejemplo 2.2.1 es creciente, pues $s_n = 2n \leq 2(n+1) = s_{n+1}$ para toda n.

□

EJEMPLO 2.2.7

La sucesión 2, 1, 1/2, . . . , del ejemplo 2.2.5 es decreciente, pues $x_n = 1/2^n \geq 1/2^{n+1} = x_{n+1}$ para toda n.

□

EJEMPLO 2.2.8

La sucesión s

$$3, \quad 5, \quad 5, \quad 7, \quad 8, \quad 8, \quad 13$$

es creciente, pues $s_n \leq s_{n+1}$ para toda n. Observe que $s_2 = s_3$ y $s_5 = s_6$ (suponemos que el índice del primer término de la sucesión es 1). La igualdad se permite en la definición de *sucesión creciente*. □

Una forma de crear una nueva sucesión a partir de una sucesión dada es conservar solamente algunos términos de la sucesión original, manteniendo el orden de los términos en la sucesión dada. La sucesión resultante es una **subsucesión** de la sucesión original.

DEFINICIÓN 2.2.9

Sea $\{s_n\}$ una sucesión definida para $n = m, m+1, \ldots$, y sea $n_1, n_2, \ldots$ una sucesión creciente que satisface $n_k < n_{k+1}$, para toda k, cuyos valores están en el conjunto $\{m, m+1, \ldots\}$. Decimos que la sucesión $\{s_{n_k}\}$ es una *subsucesión* de $\{s_n\}$.

EJEMPLO 2.2.10

La sucesión

$$b, c \tag{2.2.1}$$

es una subsucesión de la sucesión

$$t_1 = a, \quad t_2 = a, \quad t_3 = b, \quad t_4 = c, \quad t_5 = q. \tag{2.2.2}$$

† En algunos libros, lo que llamamos *creciente* se llama *no decreciente* o lo que llamamos *decreciente* se llama *no creciente*.

La subsucesión (2.2.1) se obtiene de la sucesión (2.2.2) eligiendo el tercer y cuarto términos. La expresión n_k de la definición 2.2.9 nos dice cuáles términos de (2.2.2) debemos elegir para obtener la subsucesión (2.2.1); así, $n_1 = 3$, $n_2 = 4$. La subsucesión (2.2.1) es

$$t_3, t_4 \quad \text{o} \quad t_{n_1}, t_{n_2}.$$

Observe que la sucesión

$$c, b$$

no es una subsucesión de la sucesión (2.2.2), pues no se conserva el orden de los términos en la sucesión (2.2.2). □

EJEMPLO 2.2.11

La sucesión

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad \ldots, \quad 2^k, \quad \ldots \tag{2.2.3}$$

es una subsucesión de la sucesión

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12, \quad 14, \quad 16, \ldots, \quad 2n, \ldots. \tag{2.2.4}$$

La subsucesión (2.2.3) se obtiene de la sucesión (2.2.4) eligiendo el primer, segundo, cuarto, octavo, etc., términos; así, el valor de n_k de la definición 2.2.9 es $n_k = 2^{k-1}$. Si definimos la sucesión (2.2.4) como $s_n = 2n$, la subsucesión (2.2.3) queda definida por

$$s_{n_k} = s_{2^{k-1}} = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k.$$

Para crear nuevas sucesiones a partir de sucesiones numéricas, dos formas importantes consisten en sumar y multiplicar los términos entre ellos.

DEFINICIÓN 2.2.12

Si $\{a_i\}_{i=m}^{n}$ es una sucesión, definimos

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n, \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n.$$

El formalismo

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \tag{2.2.5}$$

es la *notación de suma* (o *sigma*) y

$$\prod_{i=m}^{n} a_i \tag{2.2.6}$$

es la *notación producto*.

En (2.2.5) o (2.2.6), i es el *índice*, m es el *límite inferior* y n es el *límite superior*.

EJEMPLO 2.2.13

Sea a la sucesión definida mediante $a_n = 2n$, $n \geq 1$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 4 + 6 = 12,$$

$$\prod_{i=1}^{3} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48.$$

□

EJEMPLO 2.2.14

La suma geométrica (véase el ejemplo 1.6.2)

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

puede escribirse de manera más compacta mediante la notación de suma, como

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i.$$

□

El nombre del índice en (2.2.5) o (2.2.6) no es importante. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{y} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{x=1}^{n} a_x.$$

A veces no sólo es útil cambiar el nombre del índice, sino también los límites. (El proceso es análogo a cambiar la variable en una integral.)

EJEMPLO 2.2.15 ***Cambio del índice y los límites en una suma***

Reescriba la suma

$$\sum_{i=0}^{n} ir^{n-i},$$

reemplazando el índice i por j, donde $i = j - 1$.

Como $i = j - 1$, el término ir^{n-1} se convierte en

$$(j-1)r^{n-(j-1)} = (j-1)r^{n-j+1}.$$

Como $j = i + 1$, cuando $i = 0$, $j = 1$. Así, el límite inferior para j es 1. De manera análoga, cuando $i = n$, $j = n + 1$ y el límite superior para j es $n + 1$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^{n} ir^{n-i} = \sum_{j=1}^{n+1} (j-1)r^{n-j+1}.$$

□

EJEMPLO 2.2.16

Sea a la sucesión definida mediante la regla $a_n = 2(-1)^n$, $n \geq 0$. Determinar una fórmula para la sucesión definida como

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} s_n &= 2(-1)^0 + 2(-1)^1 + 2(-1)^2 + \cdots + 2(-1)^n \\ &= 2 - 2 + 2 - \cdots \pm 2 = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$ □

Las notaciones de suma y producto pueden modificarse para denotar sumas y productos indicados por conjuntos arbitrarios de enteros. Formalmente, si S es un conjunto de enteros y a es una sucesión,

$$\sum_{i \in S} a_i$$

denota la suma de los elementos $\{a_i \mid i \in S\}$. De manera análoga,

$$\prod_{i \in S} a_i$$

denota el producto de los elementos $\{a_i \mid i \in S\}$.

EJEMPLO 2.2.17

Si S denota el conjunto de números primos menores que 20,

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} = 1.455.$$ □

En ciertos contextos, una sucesión finita se llama **cadena**.

DEFINICIÓN 2.2.18

Una *cadena sobre X* es una sucesión finita de elementos de X.

EJEMPLO 2.2.19

Sea $X = \{a, b, c\}$. Si

$$\beta_1 = b, \quad \beta_2 = a, \quad \beta_3 = a, \quad \beta_4 = c,$$

obtenemos una cadena sobre X. Esta cadena se escribe *baac*. □

Como una cadena es una sucesión, es importante el orden. Por ejemplo, la cadena *baac* es diferente de la cadena *acab*.

Las repeticiones en una cadena pueden especificarse mediante superíndices. Por ejemplo, la cadena *bbaaac* puede escribirse b^2a^3c.

La cadena sin elementos es la **cadena nula** y se denota λ. Sea X^* el conjunto de todas las cadenas sobre X, incluyendo la cadena nula, y sea X^+ el conjunto de todas las cadenas no nulas sobre X.

EJEMPLO 2.2.20

Sea $X = \{a, b\}$. Algunos elementos de X^* son

$$\lambda, \quad a, \quad b, \quad abab, \quad b^{20}a^5ba.$$ □

La **longitud** de una cadena α es el número de elementos en α. La longitud de α se denota $|\alpha|$.

EJEMPLO 2.2.21

Si $\alpha = aabab$ y $\beta = a^3b^4a^{32}$, entonces

$$|\alpha| = 5 \quad \text{y} \quad |\beta| = 39.$$ □

Si α y β son dos cadenas, la cadena formada por α seguida de β, la cual se escribe $\alpha\beta$, es la **concatenación** de α y β.

EJEMPLO 2.2.22

Si $\gamma = aab$ y $\theta = cabd$, entonces

$$\gamma\theta = aabcabd, \quad \theta\gamma = cabdaab, \quad \gamma\lambda = \gamma = aab, \quad \lambda\gamma = \gamma = aab.$$ □

Ejercicios

1. Responda (a)-(c) para la sucesión s definida por

$$c, d, d, c, d, c.$$

(a) Determine s_1. (b) Determine s_4.
(c) Escriba s como una cadena.

2. Responda (a)-(k) para la sucesión t definida por

$$t_n = 2n - 1, \quad n \geq 1.$$

(a) Determine t_3.
(b) Determine t_7.
(c) Determine t_{100}.
(d) Determine t_{2077}.
(e) Determine $\sum_{i=1}^{3} t_i$.
(f) Determine $\sum_{i=3}^{7} t_i$.
(g) Determine $\prod_{i=1}^{3} t_i$.
(h) Determine $\prod_{i=3}^{6} t_i$.
(i) Determine una fórmula que represente esta sucesión como aquella en la que el índice inferior sea 0.
(j) ¿Es t creciente?
(k) ¿Es t decreciente?

3. Responda (a)-(f) para la sucesión v definida como

$$v_n = (n-1)\cdots 2 \cdot 1 + 2, \quad n \geq 1.$$

(a) Determine v_3.
(b) Determine v_4.
(c) Determine $\sum_{i=1}^{4} v_i$.
(d) Determine $\sum_{i=3}^{3} v_i$.
(e) ¿Es v creciente?
(f) ¿Es v decreciente?

4. Calcule la cantidad dada utilizando la sucesión a definida como

$$a_n = n^2 - 3n + 3, \quad n \geq 1.$$

(a) $\sum_{i=1}^{4} a_i$
(b) $\sum_{j=3}^{5} a_j$
(c) $\sum_{i=4}^{4} a_i$
(d) $\sum_{k=1}^{6} a_k$
(e) $\prod_{i=1}^{2} a_i$
(f) $\prod_{i=1}^{3} a_i$
(g) $\prod_{n=2}^{3} a_n$
(h) $\prod_{x=3}^{4} a_x$

5. Responda (a) y (b) para la sucesión a del ejercicio 4.
(a) ¿Es a creciente?
(b) ¿Es a decreciente?

6. Responda (a)-(f) para la sucesión b definida como $b_n = n(-1)^n$.

(a) Determine $\sum_{i=1}^{4} b_i$.
(b) Determine $\sum_{i=1}^{10} b_i$.
(c) Determine una fórmula para la sucesión c definida como

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

(d) Determine una fórmula para la sucesión d definida como

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

(e) ¿Es b creciente?
(f) ¿Es b decreciente?

7. Responda (a)-(f) para la sucesión Ω definida como $\Omega_n = 3$ para toda n.

(a) Determine $\sum_{i=1}^{3} \Omega_i$.
(b) Determine $\sum_{i=1}^{10} \Omega_i$.
(c) Determine una fórmula para la sucesión c definida como

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i.$$

(d) Determine una fórmula para la sucesión d definida como

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i.$$

(e) ¿Es Ω creciente?
(f) ¿Es Ω decreciente?

8. Responda (a)-(e) para la sucesión x definida como

$$x_1 = 2 \quad x_n = 3 + x_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

(a) Determine $\sum_{i=1}^{3} x_i$.
(b) Determine $\sum_{i=1}^{10} x_i$.
(c) Determine una fórmula para la sucesión c definida como

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

(d) ¿Es x creciente?
(e) ¿Es x decreciente?

9. Responda (a)-(f) para la sucesión w definida como

$$w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

(a) Determine $\sum_{i=1}^{3} w_i$.
(b) Determine $\sum_{i=1}^{10} w_i$.
(c) Determine una fórmula para la sucesión c definida como

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

(d) Determine una fórmula para la sucesión d definida como

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} w_i.$$

(e) ¿Es w creciente?
(f) ¿Es w decreciente?

10. Sea u la sucesión definida como

$$u_1 = 3 \quad u_n = 3 + u_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Determine una fórmula para la sucesión d definida como

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} u_i.$$

11. Defina $\{s_n\}$ mediante la regla

$$s_n = 2n - 1, \quad n \geq 1.$$

Considere la subsucesión de s obtenida con el primer, tercer, quinto, . . . términos.

(a) Enumere los primeros siete términos de s.

(b) Enumere los primeros siete términos de la subsucesión.

(c) Determine una fórmula para la expresión n_k de la definición 2.2.9.

(d) Determine una fórmula para el k-ésimo término de la subsucesión.

12. Defina $\{t_n\}$ mediante la regla

$$t_n = 2^n, \quad n \geq 1.$$

Considere la subsucesión de t obtenida al considerar el primer, segundo, cuarto, séptimo, undécimo, . . . términos.

(a) Enumere los primeros siete términos de t.

(b) Enumere los primeros siete términos de la subsucesión.

(c) Determine una fórmula para la expresión n_k de la definición 2.2.9.

(d) Determine una fórmula para el k-ésimo término de la subsucesión.

13. Responda (a)-(d) con las sucesiones y y z definidas por

$$y_n = 2^n - 1, \quad z_n = n(n-1).$$

(a) Determine $\left(\sum_{i=1}^{3} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} z_i\right)$. (b) Determine $\left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} z_i\right)$.

(c) Determine $\sum_{i=1}^{3} y_i z_i$. (d) Determine $\left(\sum_{i=3}^{4} y_i\right)\left(\prod_{i=2}^{4} z_i\right)$.

14. Responda (a)-(h) para la sucesión r definida como

$$r_n = 3 \cdot 2^n - 4 \cdot 5^n, \quad n \geq 0.$$

(a) Determine r_0. (b) Determine r_1.
(c) Determine r_2. (d) Determine r_3.
(e) Determine una fórmula para r_p. (f) Determine una fórmula para r_{n-1}.
(g) Determine una fórmula para r_{n-2}.
(h) Muestre que $\{r_n\}$ satisface

$$r_n = 7r_{n-1} - 10r_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

15. Responda (a)-(h) para la sucesión z definida como

$$z_n = (2+n)3^n, \quad n \geq 0.$$

(a) Determine z_0. (b) Determine z_1.
(c) Determine z_2. (d) Determine z_3.
(e) Determine una fórmula para z_i. (f) Determine una fórmula para z_{n-1}.
(g) Determine una fórmula para z_{n-2}.
(h) Muestre que $\{z_n\}$ satisface

$$z_n = 6z_{n-1} - 9z_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

16. Determine b_i, $i = 1, \ldots, 6$, donde

$$b_n = 2[1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)] + \frac{(n-1)n}{2}.$$

17. Reescriba la suma

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 r^{n-1}$$

reemplazando el índice i por k, donde $i = k + 1$.

18. Reescriba la suma

$$\sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

reemplazando el índice k por i, donde $k = i + 1$.

19. Sean a y b sucesiones, y sea

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Muestre que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}.$$

Esta ecuación, conocida como la *fórmula de suma por partes*, es el análogo discreto para la fórmula de integración por partes del cálculo.

20. Podemos generalizar el concepto de sucesión definido en esta sección utilizando índices más generales. Supongamos que $\{a_{ij}\}$ es una sucesión cuyos índices es una pareja de enteros positivos. Muestre que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right).$$

21. Calcule lo que se pide utilizando las cadenas

$$\alpha = baab, \quad \beta = caaba, \quad \gamma = bbab.$$

(a) $\alpha\beta$ (b) $\beta\alpha$ (c) $\alpha\alpha$ (d) $\beta\beta$
(e) $|\alpha\beta|$ (f) $|\beta\alpha|$ (g) $|\alpha\alpha|$ (h) $|\beta\beta|$
(i) $\alpha\lambda$ (j) $\lambda\beta$ (k) $\alpha\beta\gamma$ (l) $\beta\beta\gamma\alpha$

22. Enumere todas las cadenas de longitud 2 sobre $X = \{0, 1\}$.

23. Enumere todas las cadenas de longitud 2 o menor sobre $X = \{0, 1\}$.

24. Enumere todas las cadenas de longitud 3 sobre $X = \{0, 1\}$.

25. Enumere todas las cadenas de longitud 3 o menor sobre $X = \{0, 1\}$.

26. Una cadena s es una **subcadena** de t si existen cadenas u y v tales que $t = usv$. Determine todas las subcadenas de la cadena *babc*.

27. Determine todas las subcadenas de la cadena *aabaabb*.

28. Utilice inducción para mostrar que

$$\sum \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdots n_k} = n,$$

donde la suma se toma sobre todos los subconjuntos no vacíos $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2.3 SISTEMAS NUMÉRICOS

Un **bit** es un dígito binario (la palabra bit proviene de *b*inary dig*it*), es decir, un 0 o un 1. En una computadora digital, los datos y las instrucciones se codifican mediante bits. (El término *digital* se refiere al uso de los dígitos 0 y 1.) La tecnología determina la forma física de representar los bits dentro de un sistema de cómputo. El hardware actual se basa en el estado de un circuito electrónico para representar un bit. El circuito debe poder estar en dos estados (uno que represente 1, y el otro 0). En esta sección analizaremos el **sistema numérico binario**, el cual representa a los enteros mediante bits, y el **sistema numérico hexadecimal**, el cual representa los enteros mediante 16 símbolos. El **sistema numérico octal**, que representa a los enteros mediante ocho símbolos, se analiza antes del ejercicio 35.

Para representar los enteros en el sistema numérico decimal, utilizamos los diez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Al representar un entero, es importante la posición de los símbolos; al leer de derecha a izquierda, el primer símbolo representa el número de unidades, el siguiente símbolo el número de decenas, el siguiente símbolo el número de centenas, y así sucesivamente (véase la figura 2.3.1). En general, el símbolo en la posición n (donde el símbolo de la extrema derecha está en la posición 0) representa el número de magnitud 10^n. Como $10^0 = 1$, el símbolo en la posición 0 representa el número de magnitud 10^0, o unidades; como $10^1 = 10$, el símbolo en la posición 1 representa el número de magnitud 10^1, o decenas; como $10^2 = 100$, el símbolo en la posición 2 representa el número de magnitud 10^2, o centenas; y así sucesivamente. El valor sobre el cual se basa el sistema (10 en el caso del sistema decimal) es la **base** del sistema numérico.

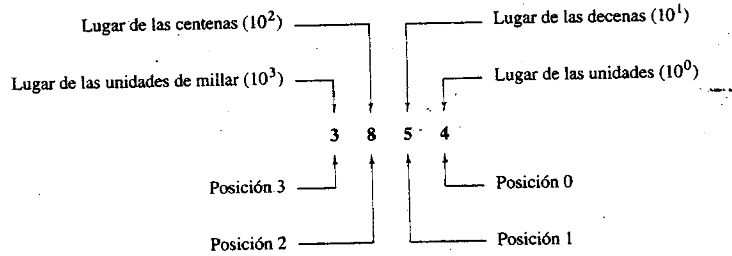


FIGURA 2.3.1 Sistema numérico decimal.

En el sistema numérico binario (base 2), sólo necesitamos dos símbolos (0 y 1) para representar los enteros. En la representación de un entero, leída de derecha a izquierda, el primer símbolo representa el número de unos, el siguiente símbolo el número de doses, el siguiente símbolo el número de cuatros, el siguiente símbolo el número de ochos, y así sucesivamente (véase la figura 2.3.2). En general, el símbolo en la posición n (donde el símbolo de la extrema derecha ocupa la posición 0) representa el número de magnitud 2^n. Como $2^0 = 1$, el símbolo en la posición 0 representa el número de 2^0, o de unos; como $2^1 = 2$, el símbolo en la posición 1 representa el número de 2^1, o de doses; como $2^2 = 4$, el símbolo en la posición 2 representa el número de 2^2, o de cuatros; y así sucesivamente.

Sin saber cuál sistema numérico se esté utilizando, una representación es ambigua; por ejemplo, 101101 representa un número en decimal y otro número muy distinto en binario. Con frecuencia, el contexto indica el sistema numérico en uso, pero cuando se quiere ser absolutamente claro, colocamos un número como subíndice para especificar la base (el subíndice 10 denota el sistema decimal y el subíndice 2 denota el sistema binario). Por ejemplo, el número binario 101101 puede escribirse 101101_2.

EJEMPLO 2.3.1 ***De binario a decimal***

El número binario 101101_2 representa al número que consta de un 1, ningún 2, un 4, un 8, ningún 16 y un 32 (véase la figura 2.3.2). Esta representación puede expresarse como

$$101101_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Al calcular el lado derecho en decimal, tenemos que

$$\begin{aligned} 101101_2 &= 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 32 + 8 + 4 + 1 + 45_{10}. \end{aligned}$$

□

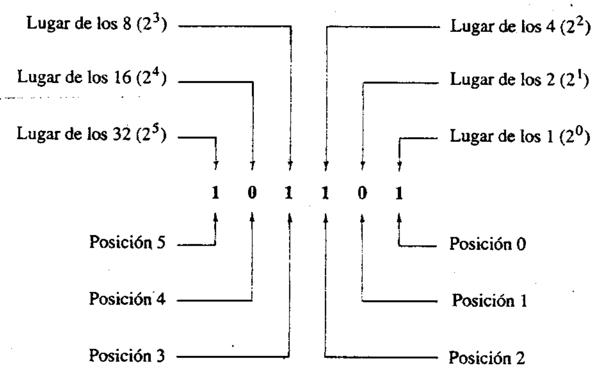


FIGURA 2.3.2 Sistema numérico binario.

El ejemplo 2.3.1 muestra la forma de convertir un número binario a decimal. Consideremos el problema inverso, convertir un número decimal a binario. Supongamos, por ejemplo, que queremos convertir el número decimal 91 a binario. Si dividimos 91 entre 2, obtenemos

$$\begin{array}{r} 45 \\ 2\overline{)91} \\ \underline{8} \\ 11 \\ \underline{10} \\ 1 \end{array}$$

Este cálculo muestra que

$$91 = 2 \cdot 45 + 1. \tag{2.3.1}$$

Comenzamos expresando 91 en potencias de 2. Si a continuación dividimos 45 entre 2, tenemos

$$45 = 2 \cdot 22 + 1. \tag{2.3.2}$$

Al sustituir esta expresión para 45 en (2.3.1), obtenemos

$$\begin{aligned} 91 &= 2 \cdot 45 + 1 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 22 + 1) + 1 \qquad (2.3.3) \\ &= 2^2 \cdot 22 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Si ahora dividimos 22 entre 2, tenemos que

$$22 = 2 \cdot 11.$$

Al sustituir esta expresión para 22 en (2.3.3), obtenemos

$$\begin{aligned} 91 &= 2^2 \cdot 22 + 2 + 1 \\ &= 2^2 \cdot (2 \cdot 11) + 2 + 1 \qquad (2.3.4) \\ &= 2^3 \cdot 11 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Si ahora dividimos 11 entre 2, tenemos que

$$11 = 2 \cdot 5 + 1.$$

Al sustituir esta expresión para 11 en (2.3.4), obtenemos

$$91 = 2^4 \cdot 5 + 2^3 + 2 + 1. \tag{2.3.5}$$

Si ahora dividimos 5 entre 2, tenemos

$$5 = 2 \cdot 2 + 1.$$

Al sustituir esta expresión para 5 en (2.3.5), obtenemos

$$\begin{aligned} 91 &= 2^5 \cdot 2 + 2^4 + 2^3 + 2 + 1 \\ &= 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2 + 1 \\ &= 1011011_2. \end{aligned}$$

El cálculo anterior muestra que los *residuos*, cuando N se divide de manera sucesiva entre 2, proporcionan los bits en la representación binaria de N. La primera división entre (2.3.1) proporciona el bit de los unos; la segunda división entre 2 en (2.3.2) proporciona el bit de los 2, y así sucesivamente. Ilustraremos esto con otro ejemplo.

EJEMPLO 2.3.2 *De decimal a binario*

Escribir el número decimal 130 en binario.

El cálculo muestra las divisiones sucesivas entre 2, con los residuos registrados a la derecha.

2)130	residuo = 0	bit de los 1
2)65	residuo = 1	bit de los 2
2)32	residuo = 0	bit de los 4
2)16	residuo = 0	bit de los 8
2)8	residuo = 0	bit de los 16
2)4	residuo = 0	bit de los 32
2)2	residuo = 0	bit de los 64
2)1	residuo = 1	bit de los 128
0		

Podemos concluir el proceso cuando el dividendo es 0. Al recordar que el primer residuo proporciona el número de los unos, el segundo residuo proporciona el número de los 2, y así sucesivamente, obtenemos

$$130_{10} = 10000010_2. \qquad \square$$

Ahora analizaremos la suma de números con bases arbitrarias. El mismo método utilizado para sumar números decimales puede utilizarse para sumar números binarios; sin embargo, debemos reemplazar la tabla de la suma decimal con la tabla de suma binaria

+	0	1
0	0	1
1	1	10

(En decimal, $1 + 1 = 2$, y $2_{10} = 10_2$; así, en binario, $1 + 1 = 10$.)

EJEMPLO 2.3.3 *Suma binaria*

Sumar los números binarios 10011011 y 1011011.

Escribimos el problema como

$$\begin{array}{r} 10011011 \\ +\ \ 1011011 \\ \hline \end{array}$$

Como en la suma decimal, comenzamos por la derecha, sumando 1 y 1. La suma es 10_2; así, escribimos 0 y llevamos 1. En este momento el cálculo es

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10011011 \\ +\ \ 1011011 \\ \hline 0 \end{array}$$

A continuación, sumamos 1 más 1 más 1, que es 11_2. Escribimos 1 y llevamos 1. En este momento, el cálculo es

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10011011 \\ +\ \underline{1011011} \\ 10 \end{array}$$

Continuamos de esta manera, y obtenemos

$$\begin{array}{r} 10011011 \\ +\ \underline{1011011} \\ 11110110 \end{array}$$

□

EJEMPLO 2.3.4

El problema de suma del ejemplo 2.3.3, en decimal, es

$$\begin{array}{r} 155 \\ +\ \underline{91} \\ 246 \end{array}$$

□

Otras bases importantes para los sistemas numéricos en las ciencias de la computación son la base 8 u **octal** y la base 16 o **hexadecimal** (a veces se abrevia como **hex**). Analizaremos el sistema hexadecimal y dejaremos el sistema octal para los ejercicios (véanse los ejercicios 35-40).

En el sistema numérico hexadecima utilizamos los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F para representar los enteros. Los símbolos A-F se interpretan como los decimales 10-15. (En general, en el sistema numérico de base N, se necesitan N símbolos distintos, los cuales representan $0, 1, 2, \ldots, N-1$.) En la representación de un entero, comenzando por la derecha, el primer símbolo representa el número de 1, el siguiente símbolo el número de 16, el siguiente símbolo el número de 16^2, y así sucesivamente (véase la figura 2.3.3). En general, el símbolo en la posición n (donde el símbolo de la extrema derecha está en la posición 0) representa el número de $16n$.

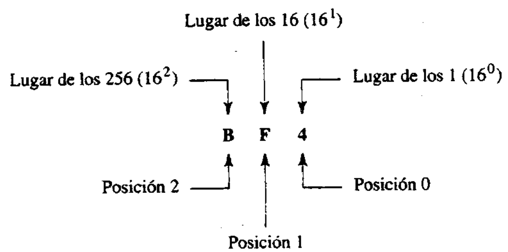


FIGURA 2.3.3 Sistema numérico hexadecimal.

EJEMPLO 2.3.5 ***De hexadecimal a decimal***

Convierta el número hexadecimal B4F a decimal.

Obtenemos

$$\begin{aligned} B4F_{16} &= 11 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 \\ &= 11 \cdot 256 + 4 \cdot 16 + 15 = 2816 + 64 + 15 = 2895_{10}. \end{aligned}$$

□

Para convertir un número decimal a hexadecimal, dividimos entre 16 de manera sucesiva. Los residuos proporcionan los símbolos hexadecimales.

EJEMPLO 2.3.6 ***De decimal a hexadecimal***

Convierta el número decimal 20385 a hexadecimal.

El cálculo muestra las sucesivas divisiones entre 16, con los residuos a la derecha.

16)20385	residuo = 1	lugar de los 1
16)1274	residuo = 10	lugar de los 16
16)79	residuo = 15	lugar de los 16^2
16)4	residuo = 4	lugar de los 16^3
0		

Podemos concluir el proceso cuando el dividendo es 0. El primer residuo proporciona el número de 1, el segundo residuo proporciona el número de 16, y así sucesivamente, con lo cual obtenemos

$$20385_{10} = 4FA1_{16}.$$

□

Nuestro siguiente ejemplo muestra que podemos sumar números hexadecimales de la misma forma en que sumamos números decimales o binarios.

EJEMPLO 2.3.7 ***Suma hexadecimal***

Sume los números hexadecimales 84F y 42EA.

El problema puede escribirse

$$\begin{array}{r} 84F \\ +\ \underline{42EA} \end{array}$$

Comenzamos con la primera columna de la derecha, sumando F y A. Como F es 15_{10} y A es 10_{10}, $F + A = 15_{10} + 10_{10} = 25_{10} = 19_{16}$. Escribimos 9 y llevamos 1:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 84F \\ +\ \underline{42EA} \\ 9 \end{array}$$

Ahora sumamos 1, 4 y E, obteniendo 13_{16}. Escribimos 3 y llevamos 1:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 84F \\ +\ \underline{42EA} \\ 39 \end{array}$$

Continuamos de esta forma para obtener

$$\begin{array}{r} 84F \\ +\ \underline{42EA} \\ 4B39 \end{array}$$

EJEMPLO 2.3.8

El problema de la suma del ejemplo 2.3.7 escrito en decimal es

$$\begin{array}{r} 2127 \\ +\ \underline{17130} \\ 19257 \end{array}$$

Ejercicios

En los ejercicios 1-6, exprese cada número binario en decimal.

1. 1001 2. 11011 3. 11011011
4. 100000 5. 11111111 6. 110111011011

En los ejercicios 7-12, exprese cada número decimal en binario.

7. 34 8. 61 9. 223
10. 400 11. 1024 12. 12,340

En los ejercicios 13-18, sume los números binarios.

13. 1001 + 1111 14. 11011 + 1101
15. 110110 + 101101
16. 101101 + 11011
17. 110110101 + 1101101
18. 1101 + 101100 + 11011011

En los ejercicios 19-24, exprese cada número hexadecimal en decimal.

19. 3A 20. 1E9 21. 3E7C
22. A03 23. 209D 24. 4B07A
25. Exprese cada número decimal de los ejercicios 7-12 en hexadecimal.

26. Exprese cada número binario de los ejercicios 1-6 en hexadecimal.
27. Exprese cada número hexadecimal de los ejercicios 19, 20 y 22 en binario.

En los ejercicios 28-32, sume los números hexadecimales.

28. 4A + B4 29. 195 + 76E 30. 49F7 + C66
31. 349CC + 922D 32. 82054 + AEFA3
33. ¿Representa 2010 un número en binario?, ¿en decimal?, ¿en hexadecimal?
34. ¿Representa 1101010 un número en binario?, ¿en decimal?, ¿en hexadecimal?

En el sistema numérico octal (base 8) utilizamos los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 para representar un entero; leyendo desde la derecha, el primer símbolo representa el número de 1, el siguiente símbolo el número de 8, el siguiente símbolo el número de 8^2, y así sucesivamente. En general, el símbolo en la posición n (donde el símbolo de la extrema derecha está en la posición 0) representa el número de 8^n. En los ejercicios 35-40, exprese cada número octal en decimal.

35. 63 36. 7643 37. 7711
38. 10732 39. 1007 40. 537261
41. Exprese cada número decimal en los ejercicios 7-12 en octal.
42. Exprese cada número binario en los ejercicios 1-6 en octal.
43. Exprese cada número hexadecimal en los ejercicios 19-24 en octal.
44. Exprese cada número octal en los ejercicios 35-40 en hexadecimal.
45. ¿Representa 1101010 un número en octal?
46. ¿Representa 30470 un número en binario?, ¿en octal?, ¿en decimal?, ¿en hexadecimal?
47. ¿Representa 9450 un número en binario?, ¿en octal?, ¿en decimal?, ¿en hexadecimal?
48. Sea T_n la mayor potencia de 2 que divida a n. Muestre que $T_{mn} = T_m + T_n$ para toda m, $n \geq 1$.
49. Sea S_n el número de unos en la representación binaria. Utilice inducción para demostrar que $T_{n!} = n - S_n$ para toda $n \geq 1$. (T_n se define en el ejercicio 48.)

2.4 *RELACIONES*

Una **relación** puede pensarse como una tabla que enumera la relación de algunos elementos con otros (véase la tabla 2.4.1). La tabla 2.4.1 muestra cuáles estudiantes están asistiendo a cuáles cursos. Por ejemplo, Bill está cursando Ciencias de la computación y Arte, y Mary está cursando Matemáticas. En la terminología de las relaciones, podríamos decir que Bill está relacionado con Ciencias de la computación y Arte, y que Mary está relacionada con Matemáticas.

Por supuesto, la tabla 2.4.1 es tan sólo un conjunto de pares ordenados. De manera abstracta, *definimos* una relación como un conjunto de pares ordenados. En este contexto, consideramos que el primer elemento del par ordenado se relaciona con el segundo elemento del par ordenado.

TABLA 2.4.1
Relación de los estudiantes con los cursos

Estudiante	*Curso*
Bill	Ciencias de la computación
Mary	Matemáticas
Bill	Arte
Beth	Historia
Beth	Ciencias de la computación
Dave	Matemáticas

DEFINICIÓN 2.4.1

Una *relación (binaria) R de un conjunto X en un conjunto Y* es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$. Si $(x, y) \in R$, escribimos $x\,R\,y$ y decimos que *x está relacionada con y*. Si $X = Y$, decimos que R es una *relación (binaria) sobre X*.

El conjunto

$$\{x \in X \mid (x, y) \in R \text{ para algún } y \in Y\}$$

es el *dominio* de R. El conjunto

$$\{y \in Y \mid (x, y) \in R \text{ para algún } x \in X\}$$

es el *rango* de R.

Si una relación se indica mediante una tabla, el dominio está formado por los miembros de la primera columna y el rango consta de los miembros de la segunda columna.

EJEMPLO 2.4.2

Si

$$X = \{\text{Bill, Mary, Beth, Dave}\}$$

y

$$Y = \{\text{Ciencias de la computación, Matemáticas, Arte, Historia}\}$$

nuestra relación R de la tabla 2.4.1 puede escribirse

$$R = \{(\text{Bill, Ciencias de la computación}),\ (\text{Mary, Matemáticas}),\ (\text{Bill, Arte}),\ (\text{Beth, Historia}),\ (\text{Beth, Ciencias de la computación}),\ (\text{Dave, Matemáticas})\}.$$

Como (Beth, Historia) $\in R$, podemos escribir Beth R Historia. El dominio (primera columna) de R es el conjunto X y el rango (segunda columna) de R es el conjunto Y. □

El ejemplo 2.4.2 muestra que para indicar una relación basta especificar los pares ordenados que pertenecen a dicha relación. Nuestro siguiente ejemplo muestra que a veces es posible definir una relación proporcionando una regla para la pertenencia a la relación.

EJEMPLO 2.4.3

Sean

$$X = \{2, 3, 4\} \quad \text{y} \quad Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Si definimos una relación R de X en Y como

$$(x, y) \in R \text{ si } x \text{ divide a } y \text{ (con residuo igual a cero)},$$

obtenemos

$$R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}.$$

Si escribimos R como una tabla, obtenemos

X	Y
2	4
2	6
3	3
3	6
4	4

El dominio de R es el conjunto $\{2, 3, 4\}$ y el rango de R es el conjunto $\{3, 4, 6\}$. □

EJEMPLO 2.4.4

Sea R la relación sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$ definida como $(x, y) \in R$ si $x \le y$, $x, y \in X$. Entonces

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}.$$

Tanto el dominio como el rango de R son iguales a X. □

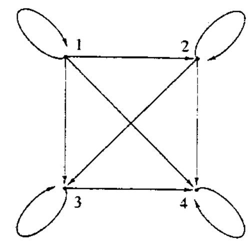


FIGURA 2.4.1
La digráfica de la relación del ejemplo 2.4.4.

Una manera útil de graficar una relación sobre un conjunto utiliza su **digráfica**. (Las digráficas se analizan con detalle en el capítulo 6. Por ahora, sólo mencionaremos las digráficas en conexión con las relaciones.) Para trazar la digráfica de una relación sobre un conjunto X, primero dibujamos puntos o **vértices** para representar los elementos de X. En la figura 2.4.1 hemos trazado cuatro vértices para representar los elementos del conjunto X del ejemplo 2.4.4. A continuación, si el elemento (x, y) está en la relación, trazamos una flecha (llamada **arista dirigida**) de x a y. En la figura 2.4.1 hemos trazado las aristas dirigidas que representan los miembros de la relación R del ejemplo 2.4.4. Observe que un elemento de la forma (x, x) en una relación corresponde a una arista dirigida de x a x. Dicha arista es un **lazo**. En cada vértice de la figura 2.4.1 aparece un lazo.

EJEMPLO 2.4.5

La relación R sobre $X = \{a, b, c, d\}$ dada por la digráfica de la figura 2.4.2 es

$$R = \{(a, a), (b, c), (c, b), (d, d)\}.$$ □

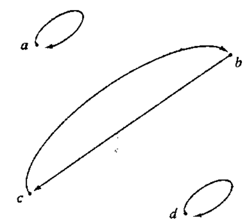


FIGURA 2.4.2
La digráfica de la relación del ejemplo 2.4.5.

A continuación definimos varias propiedades de las relaciones.

DEFINICIÓN 2.4.6

Una relación R sobre un conjunto X es *reflexiva* si $(x, x) \in R$ para cada $x \in X$.

EJEMPLO 2.4.7

La relación R sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$ del ejemplo 2.4.4 es reflexiva, pues para cada elemento $x \in X$, $(x, x) \in R$; específicamente, $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ y $(4, 4)$ están en R. La digráfica de una relación reflexiva tiene un lazo en cada vértice. Observe que la digráfica de la relación reflexiva del ejemplo 2.4.4 (véase la figura 2.4.1) tiene un lazo en cada vértice. □

EJEMPLO 2.4.8

La relación R sobre $X = \{a, b, c, d\}$ del ejemplo 2.4.5 no es reflexiva. Por ejemplo, $b \in X$, pero $(b, b) \notin R$. El hecho de que esta relación no sea reflexiva también se ve en su digráfica (véase la figura 2.4.2); el vértice b no tiene un lazo. □

DEFINICION 2.4.9

Una relación R sobre un conjunto X es *simétrica* si para toda $x, y \in X$, si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$.

EJEMPLO 2.4.10

La relación del ejemplo 2.4.5 es simétrica, pues para toda x, y, si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$. Por ejemplo, (b, c) está en R y (c, b) también está en R. La digráfica de una relación simétrica tiene la siguiente propiedad: siempre que exista una arista dirigida de v a w, también existe una arista dirigida de w a v. Observe que la digráfica de la relación del ejemplo 2.4.5 (véase la figura 2.4.2) tiene la propiedad de que para cada arista dirigida de v a w, también existe una arista dirigida de w a v. □

EJEMPLO 2.4.11

La relación del ejemplo 2.4.4 no es simétrica. Por ejemplo, $(2, 3) \in R$, pero $(3, 2) \notin R$. La digráfica de esta relación (véase la figura 2.4.1) tiene una arista dirigida de 2 a 3, pero no tiene una arista dirigida de 3 a 2. □

DEFINICIÓN 2.4.12

Una relación R sobre un conjunto X es *antisimétrica* si para toda $x, y \in X$, si $(x, y) \in R$ y $x \neq y$, entonces $(y, x) \notin R$.

EJEMPLO 2.4.13

La relación del ejemplo 2.4.4 es antisimétrica, pues para toda x, y, si $(x, y) \in R$ y $x \neq y$, entonces $(y, x) \notin R$. Por ejemplo $(1, 2) \in R$, pero $(2, 1) \notin R$. La digráfica de una relación antisimétrica tiene la propiedad de que entre cualesquiera dos vértices existe a lo más una arista dirigida. Observe que la digráfica de la relación del ejemplo 2.4.4 (véase la figura 2.4.1) tiene a lo más una arista dirigida entre cada par de vértices. □

EJEMPLO 2.4.14

La relación del ejemplo 2.4.5 no es antisimétrica pues (b, c) y (c, b) están en R. Observe que en la digráfica de la relación del ejemplo 2.4.5 (véase la figura 2.4.2) existen dos aristas dirigidas entre b y c. □

EJEMPLO 2.4.15

Si una relación R sobre X no tiene elementos de la forma (x, y) con $x \neq y$, entonces R es antisimétrica. En este caso, si x y y son elementos arbitrarios en X, la proposición

$$\text{si } (x, y) \in R \text{ y } x \neq y, \text{ entonces } (y, x) \notin R$$

es verdadera, pues la hipótesis es falsa. Por ejemplo,

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

sobre $X = \{a, b, c\}$ es antisimétrica. La digráfica de R, que aparece en la figura 2.4.3, tiene a lo más una arista dirigida entre cada par de vértices. Observe que R también es reflexiva y simétrica. Este ejemplo muestra que "antisimétrica" no es lo mismo que "no simétrica". □

FIGURA 2.4.3 La digráfica de la relación del ejemplo 2.4.15.

DEFINICIÓN 2.4.16

Una relación R sobre un conjunto X es *transitiva* si para toda $x, y, z \in X$, si (x, y) y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$.

EJEMPLO 2.4.17

La relación R del ejemplo 2.4.4 es transitiva, pues para toda x, y, z, si (x, y) y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$. Para verificar formalmente que esta relación satisface la definición 2.4.16, debemos enumerar todas las parejas de pares de la forma (x, y) y (y, z) en R, y luego verificar que, en cada caso, $(x, z) \in R$:

Pares de la forma			*Pares de la forma*		
(x, y),	(y, z)	(x, z)	(x, y),	(y, z)	(x, z)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)
(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 3)
(1, 1)	(1, 3)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 4)	(2, 4)
(1, 1)	(1, 4)	(1, 4)	(2, 3)	(3, 3)	(2, 3)
(1, 2)	(2, 2)	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)	(2, 4)
(1, 2)	(2, 3)	(1, 3)	(2, 4)	(4, 4)	(2, 4)
(1, 2)	(2, 4)	(1, 4)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)
(1, 3)	(3, 3)	(1, 3)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 4)
(1, 3)	(3, 4)	(1, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(3, 4)
(1, 4)	(4, 4)	(1, 4)	(4, 4)	(4, 4)	(4, 4)

Cuando hay que determinar si una relación R es transitiva directamente a partir de la definición 2.4.16, en el caso $x = y$ o $y = z$ no hay que verificar de manera explícita la condición

$$\text{si } (x, y) \text{ y } (y, z) \in R, \text{ entonces } (x, z) \in R,$$

pues ésta se satisface de manera automática. Supongamos, por ejemplo, que $x = y$ y que (x, y) y (y, z) están en R. Como $x = y$, $(x, z) = (y, z)$ está en R y se satisface la condición. Al eliminar los casos $x = y$ y $y = z$ sólo hay que verificar lo siguiente de manera explícita, para ver que la relación del ejemplo 2.4.4 es transitiva:

Pares de la forma (x, y),	(y, z)	(x, z)
(1, 2)	(2, 3)	(1, 3)
(1, 2)	(2, 4)	(1, 4)
(1, 3)	(3, 4)	(1, 4)
(2, 3)	(3, 4)	(2, 4)

La digráfica de una relación transitiva tiene la propiedad de que siempre que existan aristas dirigidas de x a y y de y a z, también existe una arista dirigida de x a z. Observe que la digráfica de la relación del ejemplo 2.4.4 (véase la figura 2.4.1) tiene esta propiedad. □

EJEMPLO 2.4.18

La relación del ejemplo 2.4.5 no es transitiva. Por ejemplo, (b, c) y (c, b) están en R, pero (b, b) no está en R. Observe que en la digráfica (véase la figura 2.4.2) de la relación del ejemplo 2.4.5 existen aristas dirigidas de b a c y de c a b, pero no existe una arista dirigida de b a b. □

Las relaciones pueden utilizarse para ordenar los elementos de un conjunto. Por ejemplo, la relación R definida sobre el conjunto de los enteros como

$$(x, y) \in R \quad \text{si } x \le y$$

ordena a los enteros. Observe que la relación R es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Tales relaciones se llaman **órdenes parciales**.

DEFINICIÓN 2.4.19

Una relación R sobre un conjunto X es un *orden parcial* si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

EJEMPLO 2.4.20

Como la relación R definida sobre los enteros positivos mediante

$$(x, y) \in R \quad \text{si } x \text{ divide a } y \text{ (exactamente)}$$

es reflexiva, antisimétrica y transitiva, tenemos que R es un orden parcial. □

Si R es un orden parcial sobre un conjunto X, a veces se utiliza la notación $x \preceq y$ para indicar que $(x, y) \in R$. Esta notación sugiere que estamos interpretando la relación como un orden sobre los elementos de X.

Supongamos que R es un orden parcial sobre un conjunto X. Si $x, y \in X$ y $x \preceq y$ o $y \preceq x$, decimos que x y y son **comparables**. Si $x, y \in X$ y $x \npreceq y$ y $y \npreceq x$, decimos que x y y **no son comparables**. Si cada par de elementos en X son comparables, decimos que R es un **orden total**. La relación menor o igual sobre los enteros positivos es un orden total, pues si x y y son enteros, entonces $x \le y$ o $y \le x$. La razón del término "orden parcial" es que, en general, algunos elementos de X pueden no ser comparables. La relación "divide" sobre los enteros positivos (véase el ejemplo 2.4.20) tiene elementos comparables y elementos no comparables. Por ejemplo, 2 y 3 no son comparables (pues 2 no divide a 3 y 3 no divide a 2), pero 3 y 6 sí lo son (pues 3 divide a 6).

Una aplicación de los órdenes parciales es la planeación de tareas.

EJEMPLO 2.4.21 *Planeación de tareas*

Consideremos el conjunto T de tareas que pueden realizarse para tomar una fotografía con flash en un interior.

1. Quitar la tapa de la lente.
2. Enfocar la cámara.
3. Quitar la cerradura de seguridad.
4. Activar la unidad de flash.
5. Oprimir el botón para tomar la fotografía.

Algunas de estas tareas deben realizarse antes que otras. Por ejemplo, la tarea 1 debe llevarse a cabo antes de la tarea 2. Por otro lado, otras tareas pueden efectuarse en cualquier orden. Por ejemplo, las tareas 2 y 3 pueden realizarse en cualquier orden.

La relación R' definida sobre T como

$$iR'j \text{ si y sólo si la tarea } i \text{ debe realizar antes que la tarea } j$$

ordena las tareas. Aunque R' es antisimétrica y transitiva, no es reflexiva, de modo que R' no es un orden parcial. Podemos obtener un orden parcial si añadimos todos los pares (i, i) para $i = 1, \ldots, 5$. Desde el punto de vista formal, la relación

$$R' \cup \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

es un orden parcial sobre T. Una solución al problema de planeación de las tareas necesarias para tomar una fotografía es establecer un orden total de las tareas, consistente con el orden parcial. Más precisamente, necesitamos un orden total de las tareas

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad t_4, \quad t_5$$

tal que si $t_i R' t_j$, entonces t_i precede a t_j en la lista. □

Dada una relación R de X a Y, podemos definir una relación de Y a X invirtiendo el orden de cada par ordenado en R. A continuación damos la definición formal.

DEFINICION 2.4.22

Sea R una relación de X en Y. La *inversa* de R, que se denota R^{-1}, es la relación de Y a X definida como

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

EJEMPLO 2.4.23

La inversa de la relación R del ejemplo 2.4.3 es

$$R^{-1} = \{(4,2), (6,2), (3,3), (6,3), (4,4)\}.$$

Podemos expresar esta relación en palabras, como "es divisible entre". □

Si tenemos una relación R_1 de X a Y y una relación R_2 de Y a Z, podemos formar una relación de X a Z, aplicando primero la relación R_1 y luego la relación R_2. La relación resultante se denota $R_2 \circ R_1$. Observe el orden en que se escriben las relaciones. A continuación damos la definición formal.

DEFINICIÓN 2.4.24

Sea R_1 una relación de X a Y y R_2 una relación de Y a Z. La *composición* de R_1 y R_2, que se denota $R_2 \circ R_1$, es la relación de X a Z definida como

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \mid (x, y) \in R_1 \text{ y } (y, z) \in R_2 \text{ para alguna } y \in Y\}.$$

EJEMPLO 2.4.25

La composición de las relaciones

$$R_1 = \{(1,2), (1,6), (2,4), (3,4), (3,6), (3,8)\}$$

y

$$R_2 = \{(2,u), (4,s), (4,t), (6,t), (8,u)\}$$

es

$$R_2 \circ R_1 = \{(1,u), (1,t), (2,s), (2,t), (3,s), (3,t), (3,u)\}.$$ □

Ejercicios

En los ejercicios 1-4, escriba la relación como un conjunto de pares ordenados.

1.

8840	Martillo
9921	Pinzas
452	Pintura
2207	Tapiz

2.

a	3
b	1
b	4
c	1

3.

Sally	Matemáticas
Ruth	Física
Sam	3Economía

4.

a	a
b	b

En los ejercicios 5-8, escriba la relación como una tabla.

5. $R = \{(a, 6), (b, 2), (a, 1), (c, 1)\}$
6. $R = \{$(Roger, Música), (Pat, Historia), (Ben, Matemáticas), (Pat, Ciencias políticas)$\}$
7. La relación R sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ definida como $(x, y) \in R$ si $x^2 \geq y$.
8. La relación R del conjunto X de estados de la Unión Americana cuyos nombres comienzan con la letra "M" al conjunto Y de ciudades, definida como $(S, C) \in X \times Y$ si C es la capital de S.

En los ejercicios 9-12, trace la digráfica de la relación.

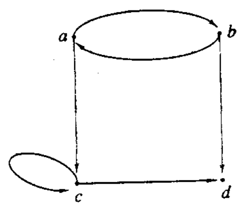
9. La relación del ejercicio 4 sobre $\{a, b, c\}$.
10. La relación $R = \{(1,2), (2,1), (3,3), (1,1), (2,2)\}$ sobre $X = \{1, 2, 3\}$.

11. La relación $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$.

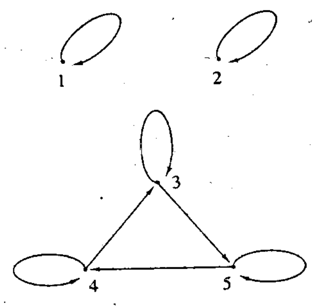
12. La relación del ejercicio 7.

En los ejercicios 13-16, escriba la relación como un conjunto de pares ordenados.

13.

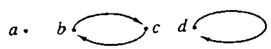


14.



15.

16.



17. Determine el dominio y rango de cada una de las relaciones en los ejercicios 1-16.

18. Determine la inversa (como conjunto de pares ordenados) de cada relación en los ejercicios 1-16.

Los ejercicios 19-24 se refieren a la relación R sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida mediante la regla $(x, y) \in R$ si 3 divide a $x - y$.

19. Enumere los elementos de R.

20. Enumere los elementos de R^{-1}.

21. Determine el dominio de R.

22. Concluya el rango de R.

23. Delimite el dominio de R^{-1}.

24. Determine el rango de R^{-1}.

25. Repita los ejercicios 19-24 para la relación R sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida mediante la regla $(x, y) \in R$ si $x + y \leq 6$.

26. Repita los ejercicios 19-24 para la relación R sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida mediante la regla $(x, y) \in R$ si $x = y - 1$.

27. ¿Es la relación del ejercicio 25 reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o un orden parcial?

28. ¿Es la relación del ejercicio 26 reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o un orden parcial?

En los ejercicios 29-33, determine si cada relación definida sobre el conjunto de enteros positivos es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o un orden parcial.

29. $(x, y) \in R$ si $x = y^2$.

30. $(x, y) \in R$ si $x > y$.

31. $(x, y) \in R$ si $x \geq y$.

32. $(x, y) \in R$ si $x = y$.

33. $(x, y) \in R$ si 3 divide a $x - y$.

34. Sea X un conjunto no vacío. Defina una relación sobre $P(X)$, el conjunto potencia de X, como $(A, B) \in R$ si $A \subseteq B$. ¿Es esta relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o un orden parcial?

35. Sea X el conjunto de todas las cadenas de cuatro bits (por ejemplo, 0011, 0101, 1000). Defina una relación R sobre X como $s_1 \; R \; s_2$ si alguna subcadena de s_1 de longitud 2 es igual a alguna subcadena de s_2 de longitud 2. Por ejemplo: $0111R1010$ (pues 0111 y 1010 contienen a 01). $1110 \not R 0001$ (pues 1110 y 0001 no comparten una subcadena común de longitud 2). ¿Es esta relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o un orden parcial?

36. Suponga que R_i es un orden parcial sobre X_i, $i = 1, 2$. Muestre que R es un orden parcial sobre $X_1 \times X_2$ si definimos

$$(x_1, x_2) \; R \; (x_1', x_2') \quad \text{si } x_1 R_1 x_1' \text{ y } x_2 R_2 x_2'.$$

37. Sean R_1 y R_2 las relaciones sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ dadas por

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$$
$$R_2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (2, 2)\}.$$

Enumere los elementos de $R_1 \circ R_2$ y $R_2 \circ R_1$.

Proporcione ejemplos de relaciones sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ que tengan las propiedades especificadas en los ejercicios 38-42.

38. Reflexiva, simétrica y no transitiva

39. Reflexiva, no simétrica y no transitiva

40. Reflexiva, antisimétrica y no transitiva

41. No reflexiva, simétrica, no antisimétrica y transitiva

42. No reflexiva, no simétrica y transitiva

Sean R y S relaciones sobre X. Determine si cada afirmación en los ejercicios 43-58 es verdadera o falsa. Si la afirmación es falsa, proporcione un contraejemplo.

43. Si R y S son transitivas, entonces $R \cup S$ es transitiva.

44. Si R y S son transitivas, entonces $R \cap S$ es transitiva.

45. Si R y S son transitivas, entonces $R \circ S$ es transitiva.

46. Si R es transitiva, entonces R^{-1} es transitiva.

47. Si R y S son reflexivas, entonces $R \cup S$ es reflexiva.

48. Si R y S son reflexivas, entonces $R \cap S$ es reflexiva.

49. Si R y S son reflexivas, entonces $R \circ S$ es reflexiva.

50. Si R es reflexiva, entonces R^{-1} es reflexiva.

51. Si R y S son simétricas, entonces $R \cup S$ es simétrica.

52. Si R y S son simétricas, entonces $R \cap S$ es simétrica.

F 53. Si R y S son simétricas, entonces $R \circ S$ es simétrica. $R=\{(1,2),(2,1)\} \wedge S=\{(2,3),(3,2)\}$

✓ 54. Si R es simétrica, entonces R^{-1} es simétrica.

55. Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cup S$ es antisimétrica.

56. Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cap S$ es antisimétrica.

57. Si R y S son antisimétricas, entonces $R \circ S$ es antisimétrica.

58. Si R es antisimétrica, entonces R^{-1} es antisimétrica.

F 59. ¿Qué es incorrecto en el siguiente argumento, el cual supuestamente muestra que para cualquier relación R sobre X que sea simétrica y transitiva es reflexiva?

Sea $x \in X$. Utilizamos la simetría para tener (x, y) y (y, x) ambos en R. Como (x, y), $(y, x) \in R$, por transitividad tenemos $(x, x) \in R$. Por lo tanto, R es reflexiva.

$(Y, Y) \notin R \rightarrow$ no es reflexiva.

RINCÓN DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

RELACIONES

Problema

Defina la relación R sobre el conjunto de enteros positivos como

$$(x, y) \in R \text{ si el máximo común divisor de } x \text{ y } y \text{ es } 1.$$

Determine si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o un orden parcial.

Para enfrentar el problema

La relación R consta de pares ordenados de enteros positivos. Clasificaremos algunos pares ordenados como estando o no en R. Enumeraremos de manera sistemática todos los pares en orden creciente, en el sentido de que primero enumeramos todos los pares (x, y) donde $x + y = 2$, luego todos los pares (x, y) donde $x + y = 3$, y así sucesivamente.

Par ordenado (x, y)	$x + y$	*Máximo común divisor*	*¿Está en R?*
(1, 1)	2	1	Sí
(1, 2)	3	1	Sí
(2, 1)	3	1	Sí
(1, 3)	4	1	Sí
(2, 2)	4	2	No
(3, 1)	4	1	Sí
(4, 1)	5	1	Sí
(3, 2)	5	1	Sí
(2, 3)	5	1	Sí
(1, 4)	5	1	Sí

El lector debe agregar las entradas para $x + y = 6$ antes de continuar.

Al construir la tabla, surgen varios patrones. En primer lugar, vemos que el máximo común divisor de (x, y) y (y, x) son iguales. Así, si (x, y) está en R (es decir, si el máximo común divisor de x y y es 1), entonces (y, x) también está en R (pues el máximo común divisor de y y x también es 1). Además, (x, x) está en R sólo si $x = 1$.

Determinación de una solución

La primera pregunta es si R es reflexiva. Recordemos (véase la definición 2.4.6) que R es reflexiva sobre el conjunto de enteros positivos si (x, x) está en R para toda x en el conjunto de enteros positivos. Nuestra tabla muestra que $(2, 2)$ no está en R. Así, $(2, 2)$ es un contraejemplo que muestra que R no es reflexiva.

La siguiente pregunta es si R es simétrica. Recordemos (véase la definición 2.4.9) que R es simétrica si para toda x y y, si (x, y) está en R, entonces (y, x) también está en R. En la subsección anterior observamos que esta condición es válida para R. Así, R es simétrica.

La siguiente pregunta es si R es antisimétrica. Recordemos (véase la definición 2.4.12) que R es antisimétrica si para toda x y y, si (x, y) está en R y $x \neq y$, entonces (y, x) no está en R. Nuestra tabla muestra que $(2, 1)$ está en R, y es claro que $2 \neq 1$, pero $(1, 2)$ está en R. Así, $(2, 1)$ es un contraejemplo que muestra que R no es antisimétrica.

La siguiente pregunta es si R es transitiva. Recordemos (véase la definición 2.4.16) que R es transitiva si para toda x, y y z, si (x, y) y (y, z) están en R, entonces (x, z) está en R. Nuestra tabla muestra que $(2, 1)$ y $(1, 2)$ están en R, pero $(2, 2)$ no está en R. Así, si consideramos $x = 2$, $y = 1$ y $z = 2$, tenemos un contraejemplo que muestra que R no es transitiva.

La última pregunta es si R es un orden parcial. Recordemos (véase la definición 2.4.19) que R es un orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Ya hemos mostrado que R no es reflexiva, R no es antisimétrica, y R no es transitiva. Por lo tanto, R no es un orden parcial. Si R no hubiese cumplido con sólo uno de los tres criterios (ser reflexiva, antisimétrica o transitiva), R no sería un orden parcial. En este caso, R no cumple con los tres criterios.

Solución formal

Hemos determinado que R no es reflexiva, es simétrica, no es antisimétrica, no es transitiva, ni es un orden parcial.

Resumen de técnicas para la solución de un problema

- En un problema que se refiere a una relación concreta, comience enumerando varios pares ordenados y clasifíquelos como pertenecientes o no a la relación.
- Al enumerar los pares ordenados, hágalo de una manera sistemática. Su método de enumeración de pares ordenados debe generar todos los pares como si éstos continuasen de manera indefinida.
- Al enumerar los pares ordenados, busque patrones. Por ejemplo, en este problema ya habíamos observado que (x, y) y (y, x) estaban ambas en R o no estaban ambas en R.
- No debe olvidar que un contraejemplo demuestra que una propiedad no se cumple para una relación.
- Para demostrar que una propiedad es válida para una relación, es necesario considerar un elemento arbitrario de la relación y demostrar la propiedad para éste. Por ejemplo, para demostrar que una relación es simétrica, se hace que (x, y) represente un par ordenado *arbitrario* en R y se proporciona un argumento para mostrar que (x, y) está en R.

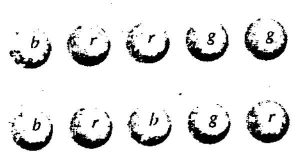


FIGURA 2.5.1
Un conjunto de bolas con color.

2.5 *RELACIONES DE EQUIVALENCIA*

Suponga que tenemos un conjunto X de 10 bolas rojas (R), azules (B) y verdes (G) (véase la figura 2.5.1). Si dividimos las bolas en los conjuntos R, B y G de acuerdo con su color, la familia $\{R, B, G\}$ es una partición de X. (Recuerde que en la sección 2.1 definimos una partición de un conjunto X como una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos no vacíos de X tal que todo elemento en X pertenece exactamente a un miembro de $\mathcal{S}$.)

Una partición puede utilizarse para definir una relación. Si $\mathcal{S}$ es una partición de X, podemos decir que $x\,R\,y$ si para algún conjunto $S \in \mathcal{S}$, x y y pertenecen a S. Para el ejemplo de la figura 2.5.1, la relación obtenida podría describirse como "tiene el mismo color que". El siguiente teorema muestra que esta relación siempre es reflexiva, simétrica y transitiva.

TEOREMA 2.5.1

Sea $\mathcal{S}$ una partición de un conjunto X. Decimos que $x\,R\,y$ si para algún conjunto S en $\mathcal{S}$, x y y pertenecen a S. Entonces R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Demostración. Sea $x \in X$. Por la definición de partición, x pertenece a algún miembro S de $\mathcal{S}$. Así, $x\,R\,x$ y R es reflexiva.

Supongamos que $x\,R\,y$. Entonces x y y pertenecen a algún conjunto $S \in \mathcal{S}$. Como y y x pertenecen a S, $y\,R\,x$ y R es simétrica.

Por último, supongamos que $x\,R\,y$ y $y\,R\,z$. Entonces x y y pertenecen a algún conjunto $S \in \mathcal{S}$ y y y z pertenecen a algún conjunto $T \in \mathcal{S}$. Como y pertenece exactamente a un miembro de $\mathcal{S}$, se debe cumplir que $S = T$. Por lo tanto, x y z pertenecen a S y $x\,R\,z$. Hemos mostrado que R es transitiva. ■

EJEMPLO 2.5.2

Consideremos la partición

$$\mathcal{S} = \{\{1, 3, 5,\}, \{2, 6\}, \{4\}\}$$

de $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La relación R sobre X dada por el teorema 2.5.1 contiene los pares ordenados $(1, 1)$, $(1, 3)$ y $(1, 5)$, pues $\{1, 3, 5\}$ está en $\mathcal{S}$. La relación completa es

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5),$$
$$(2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6), (4, 4)\}.$$

□

Sean $\mathcal{S}$ y R como en el teorema 2.5.1. Si $S \in \mathcal{S}$, podemos considerar a los miembros de S como equivalentes, en el sentido de la relación R. Por esta razón, las relaciones que son reflexivas, simétricas y transitivas se llaman **relaciones de equivalencia**. En el ejemplo de la figura 2.5.1, la relación es "tiene el mismo color que"; por lo tanto, *equivalente* quiere decir "tiene el mismo color que". Cada conjunto en la partición consta de todas las bolas de un color particular.

DEFINICIÓN 2.5.3

Una relación que sea reflexiva, simétrica y transitiva sobre un conjunto X es una *relación de equivalencia sobre* X.

EJEMPLO 2.5.4

La relación R del ejemplo 2.5.2 es una relación de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ debido al teorema 2.5.1. También podemos verificar directamente que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

La digráfica de la relación R del ejemplo 2.5.2 aparece en la figura 2.5.2. De nuevo, vemos que R es reflexiva (existe un lazo en cada vértice), simétrica (para cada arista dirigida de v a w, también existe una arista dirigida de w a v) y transitiva (si existe una arista dirigida de x a y y una arista dirigida de y a z, entonces existe una arista dirigida de x a z). □

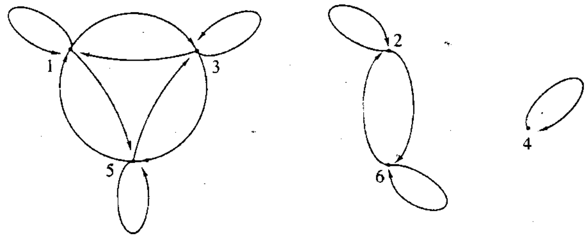


FIGURA 2.5.2 La digráfica de la relación del ejemplo 2.5.2.

EJEMPLO 2.5.5

Consideremos la relación

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2),$$
$$(4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. R es reflexiva pues $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) \in R$. R es simétrica, pues siempre que (x, y) esté en R, (y, x) también está en R. Por último, R es transitiva, pues siempre que (x, y) y (y, z) estén en R, (x, z) también está en R. Como R es reflexiva, simétrica y transitiva, R es una relación de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. □

EJEMPLO 2.5.6

La relación R del ejemplo 2.4.4 no es una relación de equivalencia, pues R no es simétrica. □

EJEMPLO 2.5.7

La relación R del ejemplo 2.4.5 no es una relación de equivalencia, pues R no es reflexiva ni transitiva. □

EJEMPLO 2.5.8

La relación R del ejemplo 2.4.15 es una relación de equivalencia, pues R es reflexiva, simétrica y transitiva. □

Dada una relación de equivalencia sobre un conjunto X, podemos separar a X agrupando los miembros de X relacionados entre ellos. Los elementos relacionados pueden pensarse como equivalentes unos con otros. El siguiente teorema proporciona los detalles.

TEOREMA 2.5.9

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto X. Para cada $a \in X$, sea

$$[a] = \{x \in X \mid xRa\}.$$

Entonces

$$\mathcal{S} = \{[a] \mid a \in X\}$$

es una partición de X.

Demostración. Debemos mostrar que cada elemento de X pertenece a exactamente un miembro de $\mathcal{S}$.

Sea $a \in X$. Como $a\,R\,a$, $a \in [a]$. Así, cada elemento en X pertenece *al menos a un* elemento de $\mathcal{S}$. Ahora debemos mostrar que cada elemento de X pertenece a *exactamente* un miembro de $\mathcal{S}$; es decir,

$$\text{si } x \in X \text{ y } x \in [a] \cap [b], \quad \text{entonces } [a] = [b]. \tag{2.5.1}$$

Primero mostramos que si $a\,R\,b$, entonces $[a] = [b]$. Supongamos que $a\,R\,b$. Sea $x \in [a]$. Entonces $x\,R\,a$. Como $a\,R\,b$ y R es transitiva, $x\,R\,b$. Por lo tanto, $x \in [b]$ y $[a] \subseteq [b]$. El argumento para mostrar que $[b] \subseteq [a]$ es igual al último argumento, pero cambiando los papeles de a y b. Así, $[a] = [b]$.

Ahora demostraremos (2.5.1). Supongamos que $x \in X$ y $x \in [a] \cap [b]$. Entonces $x\,R\,a$ y $x\,R\,b$. Nuestro resultado anterior muestra que $[x] = [a]$ y $[x] = [b]$. Así, $[a] = [b]$. ■

DEFINICIÓN 2.5.10

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto X. Los conjuntos $[a]$ definidos en el teorema 2.5.9 son las *clases de equivalencia de X dadas por la relación R*.

EJEMPLO 2.5.11

Consideremos la relación de equivalencia R del ejemplo 2.5.2. La clase de equivalencia $[1]$ que contiene a 1 consta de todas las x tales que $(x, 1) \in R$. Por lo tanto,

$$[1] = \{1, 3, 5\}.$$

Las demás clases de equivalencia se determinan de manera similar:

$$[3] = [5] = \{1, 3, 5\}, \quad [2] = [6] = \{2, 6\}, \quad [4] = \{4\}.$$ □

EJEMPLO 2.5.12

Las clases de equivalencia aparecen con claridad en la digráfica de una relación de equivalencia. Las tres clases de equivalencia de la relación R del ejemplo 2.5.2 aparecen en la digráfica de R (que aparece en la figura 2.5.2) como las tres subgráficas cuyos vértices son $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 6\}$ y $\{4\}$. Una subgráfica G que representa a una clase de equivalencia es una subgráfica más grande de la digráfica original, con la propiedad de que para cualesquiera vértices v y w en G, existe una arista dirigida de v a w. Por ejemplo, si $v, w \in \{1, 3, 5\}$, existe una arista dirigida de v a w. Además, no pueden agregarse vértices a 1, 3, 5 de modo que el conjunto de vértices resultante tenga una arista dirigida entre cada par de vértices. □

EJEMPLO 2.5.13

Existen dos clases de equivalencia para la relación de equivalencia del ejemplo 2.5.5, a saber,

$$[1] = [3] = [5] = \{1, 3, 5\}, \quad [2] = [4] = \{2, 4\}.$$ □

EJEMPLO 2.5.14

Las clases de equivalencia para la relación de equivalencia del ejemplo 2.4.15 son

$$[a] = \{a\}, \quad [b] = \{b\}, \quad [c] = \{c\}.$$ □

EJEMPLO 2.5.15

Sea $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Decimos que $x\,R\,y$ si 3 divide a $x - y$. Podemos verificar rápidamente que la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva. Así, R es una relación de equivalencia sobre X.

Ahora determinaremos los miembros de las clases de equivalencia. La clase de equivalencia $[1]$ consta de todas las x tales que $x\,R\,1$. Así,

$$[1] = \{x \in X \mid 3 \text{ divide a } x - 1\} = \{1, 4, 7, 10\}.$$

De manera análoga,

$$[2] = \{2, 5, 8\}$$
$$[3] = \{3, 6, 9\}.$$

Estos tres conjuntos separan a X. Observe que

$$[1] = [4] = [7] = [10], \quad [2] = [5] = [8], \quad [3] = [6] = [9].$$

Para esta relación, *equivalencia* es "tiene el mismo residuo al dividir entre 3". □

Concluimos esta sección demostrando un resultado especial que necesitaremos posteriormente (véanse las secciones 4.2 y 4.4). La demostración se ilustra en la figura 2.5.3.

X

X_1	X_2	$\cdots$	X_k
(r elementos)	(r elementos)		(r elementos)

$$|X| = rk$$

FIGURA 2.5.3 La demostración del teorema 2.5.16.

TEOREMA 2.5.16

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto finito X. Si cada clase de equivalencia tiene r elementos, entonces existen $|X|/r$ clases de equivalencia.

Demostración. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ las distintas clases de equivalencia. Como éstos conjuntos separan a X,

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_k| = r + r + \cdots + r = kr$$

de donde se sigue la conclusión. ■

Ejercicios

En los ejercicios 1-8, determine si la relación dada es una relación de equivalencia sobre {1, 2, 3, 4, 5}. Si la relación es una relación de equivalencia, enumere las clases de equivalencia. (En los ejercicios 5-8, $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.)

1. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}$

2. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$

3. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

4. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 3), (3, 1)\}$

5. $\{(x, y) \mid 1 \le x \le 5, 1 \le y \le 5\}$

6. $\{(x, y) \mid$ 4 divide a $x - y\}$

7. $\{(x, y) \mid$ 3 divide a $x + y\}$

8. $\{(x, y) \mid x$ divide a $2 - y\}$

En los ejercicios 9-14, enumere los miembros de la relación de equivalencia sobre {1, 2, 3, 4} definida mediante la partición dada (como en el teorema 2.5.1). Además, determine las clases de equivalencia [1], [2], [3] y [4].

9. $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

10. $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$

11. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

12. $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$

13. $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$

14. $\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$

En los ejercicios 15-17, sean $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{3, 4\}$ y $C = \{1, 3\}$. Defina la relación R sobre $P(X)$, el conjunto de todos los subconjuntos de X, como

$$A\ R\ B \text{ si y sólo si } A \cup Y = B \cup Y.$$

15. Muestre que R es una relación de equivalencia.

16. Enumere los elementos de $[C]$, la clase de equivalencia que contiene a C.

17. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas existen?

18. Sea

$X = \{$San Francisco, Pittsburgh, Chicago, San Diego, Filadelfia, Los Ángeles$\}$.

Defina una relación R sobre X como $x\ R\ y$ si x y y están en el mismo estado.

(a) Muestre que R es una relación de equivalencia.

(b) Enumere las clases de equivalencia de X.

19. Muestre que si R es una relación de equivalencia sobre X, entonces

$$\text{dominio } R = \text{rango } R = X.$$

20. Si una relación de equivalencia tiene sólo una clase de equivalencia, ¿cómo debe verse dicha relación?

21. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto X y $|X| = |R|$, ¿cómo debe verse dicha relación? la relación debe ser solamente reflexiva.

22. Proporcione un ejemplo de una relación de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con exactamente cuatro clases de equivalencia, enumerando sus pares ordenados.

23. ¿Cuántas relaciones de equivalencia existen sobre el conjunto $\{1, 2, 3\}$?

24. Sea $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Defina una relación R sobre $X \times X$ como $(a, b)\ R\ (c, d)$ si $a + d = b + c$.

(a) Muestre que R es una relación de equivalencia sobre $X \times X$.

(b) Enumere un miembro de cada clase de equivalencia de $X \times X$.

25. Sea $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Defina una relación R sobre $X \times X$ como $(a, b)\ R\ (c, d)$ si $ad = bc$.

(a) Muestre que R es una relación de equivalencia sobre $X \times X$.

(b) Enumere un miembro de cada clase de equivalencia de $X \times X$.

(c) Describa la relación R en términos familiares.

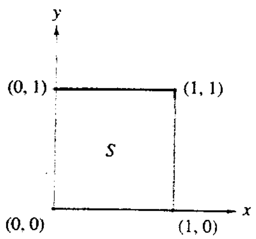
26. Sea R una relación reflexiva y transitiva sobre X. Muestre que $R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia sobre X.

27. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia sobre X.

(a) Muestre que $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia sobre X.

(b) Describa las clases de equivalencia de $R_1 \cap R_2$ en términos de las clases de equivalencia de R_1 y las clases de equivalencia de R_2. $[y] = \{x / x R_1 y \wedge x R_2 y\}$

28. Suponga que $\mathcal{S}$ es una colección de subconjuntos de un conjunto X y $X = \cup\, \mathcal{S}$. (No suponemos que la familia $\mathcal{S}$ es ajena por pares.) Definimos: $x\ R\ y$ si para algún conjunto $S \in \mathcal{S}$, x y y están en S. ¿Es R necesariamente reflexiva, simétrica o transitiva?



29. Sea S un cuadrado unitario, incluyendo el interior, como muestra la figura anexa. Defina una relación R sobre S como $(x, y)\, R\, (x', y')$ si ($x = x'$ y $y = y'$) o ($y = y'$ y $x = 0$ y $x' = 1$) o ($y = y'$ y $x = 1$ y $x' = 0$).
   (a) Muestre que R es una relación de equivalencia sobre S.
   (b) Si los puntos en la misma clase de equivalencia se pegan, ¿cómo describiría la figura formada?

30. Sea S un cuadrado unitario, incluyendo el interior (como en el ejercicio 29). Defina una relación R' sobre S como $(x, y)\, R'\, (x', y')$ si ($x = x'$ y $y = y'$) o ($y = y'$ y $x = 0$ y $x' = 1$) o ($y = y'$ y $x = 1$ y $x' = 0$) o ($x = x'$ y $y = 0$ y $y' = 1$) o ($x = x'$ y $y = 1$ y $y' = 0$). Sea

$$R = R' \cup \{((0, 0), (1, 1)), ((0, 1), (1, 0)), ((1, 0), (0, 1)), ((1, 1), (0, 0))\}.$$

   (a) Muestre que R es una relación de equivalencia sobre S.
   (b) Si los puntos en la misma clase de equivalencia se pegan, ¿cómo describiría la figura formada?

Sea R una relación sobre un conjunto X. Defina

$$\rho(R) = R \cup \{(x, x) \mid x \in X\}$$
$$\sigma(R) = R \cup R^{-1}$$
$$R^n = R \circ R \circ R \circ R \circ \cdots \circ R \quad (n \text{ erres})$$
$$\tau(R) = \cup \{R^n \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

La relación $\tau(R)$ es la *cerradura transitiva* de R.

31. Para las relaciones R_1 y R_2 del ejercicio 37, sección 2.4, determine $\rho(R_i)$, $\sigma(R_i)$, $\tau(R_i)$, y $\tau(\sigma(\rho(R_i)))$, para $i = 1, 2$.

32. Muestre que $\rho(R)$ es reflexiva.

33. Muestre que $\sigma(R)$ es simétrica.

34. Muestre que $\tau(R)$ es transitiva.

☆ 35. Muestre que $\tau(\sigma(\rho(R)))$ es una relación de equivalencia que contiene a R.

☆ 36. Muestre que $\tau(\sigma(\rho(R)))$ es la menor relación de equivalencia sobre X que contiene a R; es decir, muestre que si R' es una relación de equivalencia sobre X y $R' \supseteq R$, entonces $R' \supseteq \tau(\sigma(\rho(R)))$.

★ **37.** Muestre que R es transitiva si y sólo si $\tau(R) = R$.

En los ejercicios 38-44, escriba "verdadero" si la afirmación es verdadera para todas las relaciones R_1 y R_2 sobre un conjunto arbitrario X; en caso contrario, proporcione un contraejemplo.

38. $\rho(R_1 \cup R_2) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2)$

39. $\sigma(R_1 \cap R_2) = \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2)$

40. $\tau(R_1 \cup R_2) = \tau(R_1) \cup \tau(R_2)$

41. $\tau(R_1 \cap R_2) = \tau(R_1) \cap \tau(R_2)$

42. $\sigma(\tau(R_1)) = \tau(\sigma(R_1))$

43. $\sigma(\rho(R_1)) = \rho(\sigma(R_1))$

44. $\rho(\tau(R_1)) = \tau(\rho(R_1))$

RINCÓN DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Problema

Responda las siguientes preguntas para la relación R definida sobre el conjunto de cadenas de ocho bits como $s_1\, R\, s_2$ si los primeros cuatro bits de s_1 y s_2 coinciden.

(a) Muestre que R es una relación de equivalencia.

(b) Enumere un miembro de cada clase de equivalencia.

(c) ¿Cuántas clases de equivalencia existen?

Para enfrentar el problema

Primero analizaremos algunas cadenas específicas de ocho bits relacionadas de acuerdo con la relación R. Consideremos una cadena arbitraria 01111010 y determinaremos las cadenas relacionadas con ella. Una cadena s está relacionada con 01111010 si los primeros cuatro bits de 01111010 y s coinciden. Esto significa que s debe comenzar con 0111 y los cuatro últimos dígitos pueden ser arbitrarios. Un ejemplo es s = 01111000.

Enumeraremos todas las cadenas relacionadas con 01111010. Al hacerlo, debemos tener cuidado en agregar a 0111 todas las cadenas posibles de cuatro bits:

01110000, 01110001, 01110010, 01110011,
01110100, 01110101, 01110110, 01110111,
01111000, 01111001, 01111010, 01111011,
01111100, 01111101, 01111110, 01111111.

Supondremos por el momento que R es una relación de equivalencia; en este caso, la clase de equivalencia que contiene a 01111010, denotada [01111010], consta de todas las cadenas relacionadas con 01111010. Por lo tanto, lo que acabamos de calcular son los miembros de [01111010].

Observe que si consideramos cualquier cadena en [01111010], digamos 01111100, y calculamos su clase de equivalencia [01111100], obtendremos exactamente el mismo conjunto de cadenas, a saber, el conjunto de cadenas de ocho bits que comienzan con 0111.

Para obtener un ejemplo diferente, tendríamos que comenzar con una cadena cuyos primeros cuatro bits son distintos de 0111, como 1011. Por ejemplo, las cadenas relacionadas con 10110100 son

10110000, 10110001, 10110010, 10110011,
10110100, 10110101, 10110110, 10110111,
10111000, 10111001, 10111010, 10111011,
10111100, 10111101, 10111110, 10111111.

Lo que acabamos de calcular son los miembros de [10110100].

Antes de continuar, calcule los miembros de alguna otra clase de equivalencia.

Vemos que [01111010] y [10110100] no tienen miembros en común. Siempre ocurre que dos clases de equivalencia son idénticas o que no tienen miembros en común (véase el teorema 2.5.9).

Determinación de una solución

Para mostrar que R es una relación de equivalencia, debemos mostrar que R es reflexiva, simétrica y transitiva (véase la definición 2.5.3). Para cada propiedad, iremos directamente a la definición y verificaremos que se cumplen las condiciones dadas en ella.

Para que R sea reflexiva, debemos tener que $s\,R\,s$ para cada cadena de ocho bits s. Para que $s\,R\,s$ sea cierto, los primeros cuatro bits de s y s deben coincidir. ¡Esto claramente es cierto!

Para que R sea simétrica, para todas las cadenas de ocho bits s_1 y s_2, si $s_1\,R\,s_2$, entonces $s_2\,R\,s_1$. Utilizamos la definición de R para traducir esta condición como: Si los primeros cuatro bits de s_1 y de s_2 coinciden, entonces los primeros cuatro bits de s_2 y de s_1 coinciden, lo cual ¡nuevamente es cierto!

Para que R sea transitiva, para todas las cadenas de ocho bits s_1, s_2 y s_3, si $s_1\,R\,s_2$ y $s_2\,R\,s_3$, entonces $s_1\,R\,s_3$. De nuevo utilizamos la definición de R para traducir esta condición como sigue: Si los primeros cuatro bits de s_1 y de s_2 coinciden y los primeros cuatro bits de s_2 y de s_3 coinciden, entonces los primeros cuatro bits de s_1 y de s_3 coinciden. ¡Esto también es cierto! Hemos demostrado que R es una relación de equivalencia.

En nuestro análisis anterior, vimos que cada cadena de cuatro bits determina una clase de equivalencia. Por ejemplo, la cadena 0111 determina la clase de equivalencia que consta de todas las cadenas de ocho bits que comienzan con 0111. Por lo tanto, el número de clases de equivalencia es igual al número de cadenas de cuatro bits. Podemos enumerarlas de la manera siguiente:

0000, 0001, 0010, 0011,
0100, 0101, 0110, 0111,
1000, 1001, 1010, 1011,
1100, 1101, 1110, 1111

y luego contarlas. Existen 16 clases de equivalencia.

Consideremos el problema de enumerar un miembro de cada clase de equivalencia. Las 16 cadenas de cuatro bits ya enumeradas determinan las 16 clases de equivalencia. La primera cadena 0000 determina la clase de equivalencia que consta de todas las cadenas de ocho bits que comienzan con 0000; la segunda cadena 0001 determina la clase de equivalencia que consta de todas las cadenas de ocho bits que comienzan con 0001, y así sucesivamente. Así, para enumerar un miembro de cada clase de equivalencia, sólo necesitamos agregar alguna cadena de cuatro bits a cada una de las cadenas en la lista anterior:

00000000, 00010000, 00100000, 00110000,
01000000, 01010000, 01100000, 01110000,
10000000, 10010000, 10100000, 10110000,
11000000, 11010000, 11100000, 11110000.

Solución formal

(a) Ya hemos presentado una demostración formal de que R es una relación de equivalencia.

(b)

00000000, 00010000, 00100000, 00110000,
01000000, 01010000, 01100000, 01110000,
10000000, 10010000, 10100000, 10110000,
11000000, 11010000, 11100000, 11110000.

enumera un miembro de cada clase de equivalencia.

(c) Existen 16 clases de equivalencia.

Resumen de técnicas para resolver problemas

- Enumerar los elementos relacionados entre ellos.
- Calcular algunas clases de equivalencia; es decir, enumerar *todos* los elementos relacionados con un elemento particular.
- Puede ser de utilidad resolver las partes de un problema en un orden distinto al dado en el enunciado del problema. En nuestro ejemplo, al analizar algunos casos concretos fue útil *suponer* que la relación era una relación de equivalencia antes de demostrar que realmente lo era.
- Para mostrar que una relación particular R es una relación de equivalencia, vaya directamente a las definiciones. Muestre que R es reflexiva, simétrica y transitiva, verificando directamente que R satisface las definiciones correspondientes.
- Si el problema consiste en contar el número de elementos que satisfacen cierta propiedad (por ejemplo, en nuestro problema se pedía contar el número de clases de equivalencia) y el número es pequeño, sólo enumere todos los elementos y cuéntelos en forma directa.

Comentarios

En los lenguajes de programación, lo usual es que sólo cierto número de caracteres de los nombres de las variables y los términos especiales (desde el punto de vista técnico se llaman *identificadores*) son significativos. Por ejemplo, en el lenguaje de programación C, sólo los primeros 31 caracteres de los identificadores son significativos. Esto quiere decir que si dos identificadores comienzan con los mismos 31 caracteres, el sistema puede considerarlos idénticos.

Si definimos una relación R sobre el conjunto de identificadores en C como $s_1\,R\,s_2$ siempre que los primeros 31 caracteres de s_1 y s_2 coincidan, entonces R es una relación de equivalencia. Una clase de equivalencia consta de los identificadores que el sistema puede considerar idénticos.

2.6 *MATRICES DE RELACIONES*

Una matriz es una forma conveniente de representar una relación R de X a Y. Una computadora puede utilizar esta representación para analizar una relación. Etiquetamos los renglones con los elementos de X (con cierto orden arbitrario) y las columnas con los elementos de Y (de nuevo, con cierto orden arbitrario). Entonces colocamos un 1 en el renglón x y la columna y si $x\,R\,y$ o un 0 en caso contrario. Esta matriz es la **matriz de la relación R** (con respecto del orden dado para X y Y.)

EJEMPLO 2.6.1

La matriz de la relación

$$R = \{(1, b), (1, d), (2, c), (3, c), (3, b), (4, a)\}$$

de $X = \{1, 2, 3, 4\}$ a $Y = \{a, b, c, d\}$ con respecto de los órdenes 1, 2, 3, 4 y a, b, c, d es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

□

EJEMPLO 2.6.2

La matriz de la relación R del ejemplo 2.6.1 con respecto de los órdenes 2, 3, 4, 1 y d, b, a, c es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} d & b & a & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es claro que la matriz de la relación de X a Y depende de los órdenes de X y Y. □

EJEMPLO 2.6.3

La matriz de la relación R de $\{2, 3, 4\}$ a $\{5, 6, 7, 8\}$, con respecto de los órdenes 2, 3, 4 y 5, 6, 7, 8 definida como

$$x\,R\,y \quad \text{si } x \text{ divide a } y$$

es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

□

Al escribir la matriz de una relación R sobre un conjunto X (es decir, de X en X), utilizamos el mismo orden para los renglones y para las columnas.

EJEMPLO 2.6.4

La matriz de la relación

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b)\}$$

sobre $\{a, b, c, d\}$ con respecto del orden a, b, c, d, es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

□

Observe que la matriz de una relación sobre un conjunto X siempre es una matriz cuadrada.

Podemos determinar con rapidez si una relación R sobre un conjunto X es reflexiva analizando la matriz A de R (con respecto de cierto orden). La relación R es reflexiva si y sólo si A tiene unos en la diagonal principal. (La diagonal principal de una matriz cuadrada consta de las entradas sobre una línea que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha.) La relación R es reflexiva si y sólo si $(x, x) \in R$ para toda $x \in X$. Pero esta última condición se cumple precisamente cuando la diagonal principal consta de unos. Observe que la relación R del ejemplo 2.6.4 es reflexiva y que la diagonal principal de la matriz de R consta de unos.

También podemos determinar con rapidez si una relación R sobre un conjunto X es simétrica, analizando la matriz A de R (con respecto de cierto orden). La relación R es simétrica si y sólo si para toda i y j, la ij-ésima entrada de A es igual a la $j\,i$-ésima entrada de A. (De manera menos formal, R es simétrica si y sólo si A es simétrica con respecto de la diagonal principal.) La razón es que R es simétrica si y sólo si siempre que (x, y) esté en R, entonces (y, x) también está en R. Pero esta última condición se cumple precisamente cuando A es simétrica con respecto de la diagonal principal. Observe que la relación R del ejemplo 2.6.4 es simétrica y que la matriz de R es simétrica con respecto de la diagonal principal.

También podemos determinar con rapidez si una relación R es antisimétrica analizando la matriz de R (con respecto de cierto orden; véase el ejercicio 10). Por desgracia, no existe una forma sencilla de verificar si una relación R sobre X es transitiva analizando la matriz de R.

Concluimos esta sección mostrando la forma en que la multiplicación matricial se relaciona con la composición de relaciones.

EJEMPLO 2.6.5

Sea R_1 la relación de $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b\}$ definida por

$$R_1 = \{(1, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

y sea R_2 la relación de Y en $Z = \{x, y, z\}$ definida por

$$R_2 = \{(a, x), (a, y), (b, y), (b, z)\}.$$

La matriz de R_1 con respecto de los órdenes 1, 2, 3 y a, b es

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

y la matriz de R_2 con respecto de los órdenes a, b y x, y, z es

$$A_2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

El producto de estas matrices es

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora interpretaremos este producto.

La ik-ésima entrada en A_1A_2 se calcula así:

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ (s \quad t) \end{array} \begin{array}{c} k \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{array} = su + tv.$$

Si este valor es distinto de cero, entonces su o tv es distinto de cero. Supongamos que $su \neq 0$. (El argumento es similar si $tv \neq 0$.) Entonces $s \neq 0$ y $u \neq 0$. Esto significa que $(i, a) \in R_1$ y $(a, k) \in R_2$. Esto implica que $(i, k) \in R_2 \circ R_1$. Hemos mostrado que si la ik-ésima entrada en A_1A_2 es distinta de cero, entonces $(i, k) \in R_2 \circ R_1$. El recíproco también es verdadero, como mostramos a continuación.

Supongamos que $(i, k) \in R_2 \circ R_1$. Entonces

1. $(i, a) \in R_1$ y $(a, k) \in R_2$

o

2. $(i, b) \in R_1$ y $(b, k) \in R_2$.

Si 1 se cumple, entonces $s = 1$ y $u = 1$, de modo que $su = 1$ y $su + tv$ es distinto de cero. De manera análoga, si se cumple 2, $tv = 1$ y de nuevo tenemos que $su + tv$ es distinto de cero. Hemos mostrado que si $(i, k) \in R_2 \circ R_1$, entonces la ik-ésima entrada en A_1A_2 es distinta de cero.

Hemos mostrado que $(i, k) \in R_2 \circ R_1$ si y sólo si la ik-ésima entrada en A_1A_2 es distinta de cero; así, A_1A_2 "casi" es la matriz de la relación $R_2 \circ R_1$. Para obtener la matriz de la relación $R_2 \circ R_1$, sólo hay que cambiar todas las entradas distintas de cero en A_1A_2 por unos. Así, la matriz de la relación $R_2 \circ R_1$, con respecto de los órdenes previamente elegidos 1, 2, 3 y x, y, z es

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

□

El argumento dado en el ejemplo 2.6.5 es válido para cualesquiera relaciones. Resumimos este resultado como el teorema 2.6.6.

TEOREMA 2.6.6

Sea R_1 una relación de X en Y y sea R_2 una relación de Y en Z. Elíjanse órdenes para X, Y y Z. Todas las matrices de las relaciones están dadas respecto de estos órdenes. Sea A_1 la matriz de R_1 y A_2 la matriz de R_2. La matriz de la relación R_2 o R_1 se obtiene reemplazando cada término distinto de cero en el producto de matrices A_1A_2 por 1.

Demostración. La demostración aparece antes del enunciado del teorema. ■

Ejercicios

En los ejercicios 1-3, determine la matriz de la relación R de X en Y con respecto de los órdenes dados.

1. $R = \{(1, \delta), (2, \alpha), (2, \Sigma), (3, \beta), (3, \Sigma)\}$
Orden de X: 1, 2, 3
Orden de Y: $\alpha, \beta, \Sigma, \delta$

2. R como en el ejercicio 1
Orden de X: 3, 2, 1
Orden de Y: $\Sigma, \beta, \alpha, \delta$

3. $R = \{(x, a), (x, c), (y, a), (y, b), (z, d)\}$
Orden de X: x, y, z
Orden de Y: a, b, c, d

En los ejercicios 4-6, determine la matriz de la relación R sobre X con respecto del orden dado.

4. $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
Orden de X: 1, 2, 3, 4, 5

5. R como en el ejercicio 4
Orden de X: 5, 3, 1, 2, 4

6. $R = \{(x, y) \mid x < y\}$
Orden de X: 1, 2, 3, 4

En los ejercicios 7-9, escriba la relación R, dada por la matriz, como un conjunto de pares ordenados.

7. $\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

8. $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

9. $\begin{array}{c} \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

10. ¿Cómo podemos determinar, rápidamente, si una relación R es antisimétrica, examinando la matriz de R (con respecto de cierto orden)?

11. Indique si la relación del ejercicio 9 es reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica, un orden parcial o una relación de equivalencia.

12. Dada la matriz de una relación R de X en Y, ¿cómo podemos determinar la matriz de la relación inversa R^{-1}?

13. Determine la matriz de la inversa de cada una de las relaciones de los ejercicios 7 y 8.

En los ejercicios 14-16, determine

(a) La matriz A_1 de la relación R_1 (con respecto de los órdenes dados).
(b) La matriz A_2 de la relación R_2 (con respecto de los órdenes dados).
(c) El producto matricial A_1A_2.
(d) Utilice el resultado de la parte (c) para determinar la matriz de la relación $R_2 \circ R_1$.
(e) Utilice el resultado de la parte (d) para determinar la relación $R_2 \circ R_1$ (como un conjunto de pares ordenados).

14. $R_1 = \{(1, x), (1, y), (2, x), (3, x)\}$
$R_2 = \{(x, b), (y, b), (y, a), (y, c)\}$
Órdenes: 1, 2, 3; x, y; a, b, c

15. $R_1 = \{(x, y) \mid x \text{ divide a } y\}$; R_1 es de X en Y
$R_2 = \{(y, z) \mid y > z\}$; R_2 es de Y en Z
Órdenes de X y Y: 2, 3, 4, 5
Orden de Z: 1, 2, 3, 4

16. $R_1 = \{(x, y) \mid x + y \le 6\}$; R_1 es de X en Y
$R_2 = \{(y, z) \mid y = z + 1\}$; R_2 es de Y en Z
Órdenes de X, Y y Z: 1, 2, 3, 4, 5

17. Dada la matriz de una relación de equivalencia R sobre X, ¿cómo podemos determinar con facilidad la clase de equivalencia que contiene al elemento $x \in X$?

★ **18.** Sean R_1 una relación de X en Y y R_2 una relación de Y en Z. Elija órdenes para X, Y y Z. Todas las matrices de las relaciones son con respecto de estos órdenes. Sea A_1 la matriz de R_1 y A_2 la matriz de R_2. Muestre que la ik-ésima entrada en el producto matricial A_1A_2 es igual al número de elementos en el conjunto

$$\{m \mid (i, m) \in R_1 \text{ y } (m, k) \in R_2\}.$$

† 2.7 *BASES DE DATOS RELACIONALES*

El prefijo "bi" en una relación binaria R refleja el hecho de que R tiene dos columnas cuando se escribe como una tabla. Con frecuencia, es útil permitir que una tabla tenga un número arbitrario de columnas. Si una tabla tiene n columnas, la relación correspondiente es una **relación n-aria**.

EJEMPLO 2.7.1

La tabla 2.7.1 representa una relación 4-aria. Esta tabla expresa la relación entre los números de identificación, los nombres, las posiciones y las edades. □

También podemos expresar una relación n-aria como una colección de n-adas.

† Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

TABLA 2.7.1
JUGADOR

Número de identificación	*Nombre*	*Posición*	*Edad*
22012	Johnsonbaugh	c	22
93831	Glover	of	24
58199	Battey	p	18
84341	Cage	c	30
01180	Homer	1b	37
26710	Score	p	22
61049	Johnsonbaugh	of	30
39826	Singleton	2b	31

EJEMPLO 2.7.2

La tabla 2.7.1 puede expresarse como el conjunto

$$\{(22012, \text{Johnsonbaugh}, c, 22),\ (93831, \text{Glover}, of, 24),\ (58199, \text{Battey}, p, 18),\ (84341, \text{Cage}, c, 30),\ (01180, \text{Homer}, 1b, 37),\ (26710, \text{Score}, p, 22),\ (61049, \text{Johnsonbaugh}, of, 30),\ (39826, \text{Singleton}, 2b, 31)\}$$

de 4-adas. □

Una **base de datos** es una colección de registros controlada mediante una computadora. Por ejemplo, una base de datos de una línea aérea podría contener los registros de las reservaciones, programación de los vuelos, equipo, etc. Los sistemas de cómputo permiten guardar grandes cantidades de información en bases de datos. Los datos están disponibles para su uso mediante varias aplicaciones. Los **sistemas de administración de bases de datos** son programas que permiten a los usuarios tener acceso a la información contenida en las bases de datos. El **modelo de base de datos relacional**, ideado por E. F. Codd en 1970, se basa en el concepto de una relación n-aria. A continuación presentaremos algunas de las ideas fundamentales en la teoría de las bases de datos relacionales. Para más detalles, el lector puede consultar [Codd; Date; y Kroenke]. Comenzaremos con un poco de terminología.

Las columnas de una relación n-aria se llaman **atributos** (o campos). El dominio de un atributo es un conjunto al cual pertenecen todos los elementos en ese atributo. Por ejemplo, en la tabla 2.7.1, el atributo Edad se podría considerar como el conjunto de todos los enteros positivos menores que 100. El atributo Nombre se podría considerar como todas las cadenas sobre el alfabeto con longitud menor o igual a 30.

Un atributo individual o una combinación de atributos para una relación es una **clave** si los valores de los atributos definen de manera única una n-ada. Por ejemplo, en la tabla 2.7.1, podemos considerar al atributo Número de identificación como una clave. (Suponemos que cada persona tiene un número de identificación único.) El atributo Nombre no es una clave, pues personas diferentes pueden tener el mismo nombre. Por esta misma razón, no podemos considerar a los atributos Posición o Edad como una clave. La combinación de Nombre y Posición puede servir como clave para la tabla 2.7.1, pues en nuestro ejemplo, cada jugador queda definido de manera única por su nombre y su posición.

Un sistema de administración de bases de datos responde a **consultas**. Una consulta es una solicitud de información en la base de datos. Por ejemplo, "Determinar todas las personas que juegan en el jardín" es una consulta significativa para la relación dada por la tabla 2.7.1. Analizaremos varias operaciones relacionales que pueden utilizarse para responder a consultas en el modelo de base de datos relacional.

EJEMPLO 2.7.3 ***Selección***

El operador de selección elige ciertas n-adas de una relación. Las elecciones se realizan dando condiciones sobre los atributos. Por ejemplo, para la relación JUGADOR dada en la tabla 2.7.1,

JUGADOR [Posición = c]

seleccionará las n-adas

(22012, Johnsonbaugh, c, 22), (84341, Cage, c, 30). □

EJEMPLO 2.7.4 ***Proyección***

Mientras que el operador de selección elige los renglones de una relación, el operador de proyección elige las columnas. Además, se eliminan los duplicados. Por ejemplo, para la relación JUGADOR dada en la tabla 2.7.1,

JUGADOR [Nombre, Posición]

seleccionará las n-adas

(Johnsonbaugh, c), (Glover, of), (Battey, p), (Gage, c),

(Homer, 1b), (Score, p), (Johnsonbaugh, of), (Singleton, 2b). □

TABLA 2.7.2
ASIGNACIÓN

NIJ	*Equipo*
39826	Blue Sox
26710	Mutts
58199	Jackalopes
01180	Mutts

EJEMPLO 2.7.5 ***Fusión***

Los operadores de selección y de proyección controlan una única relación; el operador fusión controla dos relaciones. La operación de fusión sobre las relaciones R_1 y R_2 comienza examinando todos los pares de n-adas, uno de R_1 y otro de R_2. Si se satisface la condición de fusión, las n-adas se combinan para formar una nueva. La condición de fusión especifica una relación entre un atributo de R_1 y un atributo de R_2. Por ejemplo, realicemos una operación de fusión sobre las tablas 2.7.1 y 2.7.2. Como condición consideramos

Número de identificación = Número de identificación del jugador.

Consideremos un renglón de la tabla 2.7.1 y un renglón de la tabla 2.7.2; si Número de identificación = Número de identificación del jugador, combinamos los renglones. Por ejemplo, el Número de identificación 01180 en el primer renglón (01180, Homer, 1b, 37) de la tabla 2.7.1 concuerda con el Número de identificación del jugador en el cuarto renglón (01180, Mutts) de la tabla 2.7.2. Estas n-adas se combinan escribiendo primero la n-ada de la tabla 2.7.1, seguida de la n-ada de la tabla 2.7.2 y eliminando las entradas iguales en los atributos dados para obtener

(01180, Homer, 1b, 37, Mutts).

Esta operación se expresa como

JUGADOR [Número de identificación = NIJ] ASIGNACIÓN.

La relación obtenida al realizar esta fusión aparece en la tabla 2.7.3. □

TABLA 2.7.3
JUGADOR [Número de identificación = NIJ] ASIGNACIÓN

Número de identificación	*Nombre*	*Posición*	*Edad*	*Equipo*
58199	Battey	p	18	Jackalopes
01180	Homer	1b	37	Mutts
26710	Score	p	22	Mutts
39826	Singleton	2b	31	Blue Sox

La mayor parte de las consultas a una base de datos relacional necesitan de varias operaciones para proporcionar la respuesta.

EJEMPLO 2.7.6

Describa las operaciones que proporcionen la respuesta a la consulta "Determinar los nombres de todas las personas que juegan para algún equipo".

Si primero realizamos la fusión de las relaciones dadas por las tablas 2.7.1 y 2.7.2 sujeta a la condición Número de identificación = Número de identificación del jugador, obtenemos la tabla 2.7.3, la cual enumera todas las personas que juegan para algún equipo, junto con otra información. Para obtener los nombres, basta proyectar sobre el atributo Nombre. Obtenemos la relación

Nombre
Battey
Homer
Score
Singleton

Formalmente, podemos especificar estas operaciones como

TEMP := JUGADOR [Número de identificación = Número de identificación del jugador] ASIGNACIÓN
TEMP [Nombre] □

EJEMPLO 2.7.7

Describa las operaciones que proporcionen la respuesta a la consulta "Determinar los nombres de todas las personas que juegan para los Mutts".

Si primero utilizamos el operador de selección para elegir los renglones de la tabla 2.7.2 que hacen referencia a los jugadores de los Mutts, obtenemos la relación

TEMP1

NIJ	*Equipo*
26710	Mutts
01180	Mutts

Si ahora realizamos la fusión de la tabla 2.7.1 y la relación TEMP1 sujeta a Número de identificación = Número de identificación del jugador, obtenemos la relación

TEMP2

Número de identificación	*Nombre*	*Posición*	*Edad*	*Equipo*
01180	Homer	1b	37	Mutts
26710	Score	p	22	Mutts

Si proyectamos la relación TEMP2 sobre al atributo Nombre, obtenemos la relación

Podríamos especificar formalmente estas operaciones como sigue:

Nombre
Homer
Score

TEMP1 := ASIGNACIÓN [Equipo = Mutts]
TEMP2 := JUGADOR [Número de identificación = Número de identificación del jugador] TEMP1
TEMP2 [Nombre] □

Observe que las operaciones

TEMP1 := JUGADOR [Número de identificación = Número de identificación del jugador] ASIGNACIÓN
TEMP2 := TEMP1 [Equipo = Mutts]
TEMP2 [Nombre]

también responderían a la consulta del ejemplo 2.7.7.

Ejercicios

1. Exprese la relación dada por la tabla 2.7.4 como un conjunto de n-adas.

TABLA 2.7.4
EMPLEADO

Número de identificación	*Nombre*	*Jefe*
1089	Suzuki	Zamora
5620	Kaminski	Jones
9354	Jones	Yu
9551	Ryan	Washington
3600	Beaulieu	Yu
0285	Schmidt	Jones
6684	Manacotti	Jones

2. Exprese la relación dada por la tabla 2.7.5 como un conjunto de n-adas.

TABLA 2.7.5
DEPARTAMENTO

Departamento	*Jefe*
23	Jones
04	Yu
96	Zamora
66	Washington

3. Exprese la relación dada por la tabla 2.7.6 como un conjunto de n-adas.

TABLA 2.7.6
PROVEEDOR

Departamento	*Número de parte*	*Cantidad*
04	335B2	220
23	2A	14
04	8C200	302
66	42C	3
04	900	7720
96	20A8	200
96	1199C	296
23	772	39

4. Exprese la relación dada por la tabla 2.7.7 como un conjunto de n-adas.

TABLA 2.7.7
COMPRADOR

Nombre	*Número de parte*
United Supplies	2A
ABC Unlimited	8C200
United Supplies	1199C
JCN Electronics	2A
United Supplies	335B2
ABC Unlimited	772
Danny's	900
United Supplies	772
Underhanded Sales	20A8
Danny's	20A8
DePaul University	42C
ABC Unlimited	20A8

En los ejercicios 5-20, escriba una serie de operaciones para responder la consulta. Además, proporcione una respuesta a la consulta. Utilice las tablas 2.7.4 a 2.7.7.

5. Determine los nombres de todos los empleados. (No incluya a los jefes.)

6. Determine los nombres de todos los jefes.

7. Determine todos los números de parte.

8. Determine los nombres de todos los compradores.

9. Determine los nombres de todos los empleados que son dirigidos por Jones.

10. Determine todos los números de partes proporcionadas por el departamento 96.

11. Determine todos los compradores de la parte 20A8.

12. Determine todos los empleados del departamento 04.

13. Determine los números de parte de las partes cuya existencia es al menos de 100 unidades.

14. Determine todos los números de departamento de los departamentos que proporcionan partes a Danny's.

15. Determine los números de parte y la cantidad de partes adquiridas por United Supplies.

16. Determine todos los jefes de departamento que producen partes para ABC Unlimited.

17. Determine los nombres de todos los empleados que trabajan en departamentos que proporcionan partes para JCN Electronics.

18. Determine todos los compradores que adquieren partes en el departamento dirigido por Jones.

19. Determine todos los compradores que adquieren partes producidas por el departamento donde trabaja Suzuki.

20. Determine todos los números de parte y cantidades para el departamento de Zamora.

21. Cree al menos tres relaciones n-arias con datos artificiales que se puedan utilizar en una base de datos médicos. Ilustre la forma en que se podría utilizar su base de datos, planteando y resolviendo dos consultas. Además, escriba una serie de operaciones que podrían servir para responder las consultas.

22. Describa una operación *unión* sobre una base de datos relacional. Ilustre la forma en que funciona el operador, respondiendo la siguiente consulta, utilizando las relaciones de las tablas 2.7.4 a 2.7.7: Determine los nombres de todos los empleados que trabajan en el departamento 23 o en el departamento 96. Además, escriba una serie de operaciones que pudiesen servir para responder la consulta.

23. Describa una operación *intersección* sobre una base de datos relacional. Ilustre la forma en que funciona el operador, respondiendo la siguiente consulta, utilizando las relaciones de las tablas 2.7.4 a 2.7.7: Determine los nombres de todos los compradores que adquieren las partes 2A y 1199C. Además, escriba una serie de operaciones que pudiesen servir para responder la consulta.

24. Describa una operación *diferencia* sobre una base de datos relacional. Ilustre la forma en que funciona el operador, respondiendo la siguiente consulta, utilizando las relaciones de las tablas 2.7.4 a 2.7.7: Determine los nombres de todos los empleados que no trabajan en el departamento 04. Además, escriba una serie de operaciones que pudiesen servir para responder la consulta.

2.8 *FUNCIONES*

Una **función** es un tipo especial de relación. Recuerde (véase la definición 2.4.1) que una relación R de X en Y es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ y que

$$\text{dominio } R = \{x \in X \mid (x, y) \in R \text{ para alguna } y \in Y\}.$$

Si f es una relación de X en Y, para que f sea además una función, el dominio de f debe ser igual a X y si (x, y) y (x, y') están en f, debemos tener $y = y'$.

DEFINICIÓN 2.8.1

Una *función* f de X en Y es una relación de X en Y con las siguientes propiedades:

1. El dominio de f es X.
2. Si $(x, y), (x, y') \in f$, entonces $y = y'$.

A veces, una función de X en Y se denota como $f: X \rightarrow Y$.

EJEMPLO 2.8.2

La relación

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$$

de $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b, c\}$ es una función de X en Y. El dominio de f es X y el rango de f es $\{a, b\}$. [Recuerde (véase la definición 2.4.1) que el rango de una relación R es el conjunto

$$\{y \in Y \mid (x, y) \in R \text{ para alguna } x \in X\}.] \qquad \square$$

Una sucesión (véase la sección 2.2) es un tipo particular de función. Una sucesión cuyo menor índice es 1 es una función cuyo dominio es el conjunto de todos los enteros positivos o un conjunto de la forma $\{1, \ldots, n\}$. La sucesión del ejemplo 2.2.2 tiene dominio $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. La sucesión del ejemplo 2.2.1 tiene como dominio al conjunto de todos los enteros positivos.

EJEMPLO 2.8.3

La relación

$$R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\} \qquad (2.8.1)$$

de $X = \{1, 2, 3, 4\}$ en $Y = \{a, b, c\}$ no es una función de X en Y. No se cumple la propiedad 1 de la definición 2.8.1. El dominio de R, $\{1, 2, 3\}$, no es igual a X. Si (2.8.1) se considera como una relación de $X' = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b, c\}$, sería una función de X' en Y. □

EJEMPLO 2.8.4

La relación

$$R = \{(1, a), (2, b), (3, c), (1, b)\}$$

de $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b, c\}$ no es una función de X en Y. No se cumple la propiedad 2 de la definición 2.8.1. Tenemos que $(1, a)$ y $(1, b)$ están en R pero $a \neq b$. □

Dada una función f de X en Y, de acuerdo con la definición 2.8.1, para cada elemento x del dominio X, existe exactamente una $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$. Este único valor y se denota $f(x)$. En otras palabras, $y = f(x)$ es otra forma de escribir $(x, y) \in f$.

EJEMPLO 2.8.5

Para la función f del ejemplo 2.8.2, podemos escribir

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = a.$$ □

Las funciones que implican al **operador módulo** juegan un importante papel en las matemáticas y las ciencias de la computación.

DEFINICIÓN 2.8.6

Si x es un entero no negativo y y es un entero positivo, definimos $x \bmod y$ como el residuo que queda al dividir x entre y.

EJEMPLO 2.8.7

$$6 \bmod 2 = 0, \quad 5 \bmod 1 = 0, \quad 8 \bmod 12 = 8, \quad 199673 \bmod 2 = 1$$ □

EJEMPLO 2.8.8

¿Qué día de la semana será 365 días después de un miércoles?

Siete días después del miércoles será miércoles de nuevo; 14 días después del miércoles será miércoles de nuevo; y en general, si n es un entero positivo, después de $7n$ días será miércoles de nuevo. Así, debemos eliminar tantos sietes de 365 como sea posible y ver cuántos días restan. Pero esto es $365 \bmod 7 = 1$. Así, 365 días después del miércoles será un día de la semana después, es decir, jueves. Esto explica por qué, excepto por los años bisiestos en que se agrega un día a febrero, el día y mes idénticos en años consecutivos se mueve hacia adelante un día de la semana. □

EJEMPLO 2.8.9 ***Números estándar internacionales de libros***

Un número estándar internacional de un libro (ISBN) es un código de 10 caracteres separados por guiones, como 0-8065-0959-7. Un ISBN consta de cuatro partes: un código de grupo, un código de editor, un código que identifica de manera única al libro entre aquellos publicados por el editor particular, y un carácter de verificación. Este último sirve para validar el ISBN.

Para el ISBN 0-8065-0959-7, el código de grupo es 0, el cual identifica al libro como correspondiente a un país de habla inglesa. El código del editor 8065 identifica al libro como publicado por Citadel Press. El código 0959 identifica de manera única al libro entre aquellos publicados por Citadel Press (Brode: *Woody Allen: His Films and Career*, en este caso). El carácter de verificación es $s \bmod 11$, donde s es la suma del primer dígito más dos veces el segundo dígito más tres veces el tercer dígito, . . . , más nueve veces el noveno dígito. Si este valor es 10, el carácter de verificación es X. Por ejemplo, la suma s para el ISBN 0-8065-0959-7 es

$$s = 0 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 9 = 249.$$

Así, el carácter de verificación es $249 \bmod 11 = 7$. □

EJEMPLO 2.8.10 ***Funciones de dispersión***

Suponga que tenemos ciertas celdas en la memoria de una computadora, con índices de 0 a 10 (véase la figura 2.8.1). Queremos guardar y recuperar enteros no negativos arbitrarios en estas celdas. Nuestro método consiste en utilizar una **función de dispersión** (hash). Una función de dispersión considera un elemento de datos por guardar o recuperar y calcula la primera opción para la posición del elemento. Por ejemplo, en nuestro problema, para guardar o recuperar el número n, podríamos considerar como primera opción para la posición al número $n \bmod 11$. Nuestra función de dispersión es

$$h(n) = n \bmod 11.$$

La figura 2.8.1 muestra el resultado de guardar 15, 558, 32, 132, 102 y 5, en ese orden, en unas celdas originalmente vacías.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
132			102	15	5	257		558		32

FIGURA 2.8.1 Celdas en la memoria de una computadora.

Ahora suponga que queremos guardar 257. Como $h(257) = 4$, tendríamos que guardar 257 en la posición 4; sin embargo, esta posición ya está ocupada. En este caso decimos que ha ocurrido una **colisión**. Más precisamente, ocurre una colisión para una función de dispersión H si $H(x) = H(y)$, pero $x \neq y$. Para controlar las colisiones se necesita una **política para resolver colisiones**. Una política sencilla para resolver colisiones es determinar la siguiente celda mayor (suponiendo que 0 va después de 10) no ocupada. Si utilizamos esta política para resolver colisiones, podríamos guardar 257 en la posición 6 (véase la figura 2.8.1).

Si queremos localizar un valor ya guardado n, calculamos $m = h(n)$ y comenzamos a buscar en la posición m. Si n no está en esa posición, buscamos en la siguiente posición mayor (de nuevo, suponiendo que 0 va después de 10); si n no está en esa posición, pasamos a la siguiente posición, etc. Si llegamos a una celda vacía o regresamos a la posición original, concluimos que n no está presente; en caso contrario, obtenemos la posición de n.

Si las colisiones no ocurren con frecuencia, y si cuando una de ellas ocurre se resuelve con rapidez, entonces la dispersión proporciona un método muy rápido para guardar y recuperar datos. Como ejemplo, los datos relativos al personal se guardan y recuperan con frecuencia mediante la dispersión de los números de identificación de los empleados. □

A continuación definimos el **piso** y el **techo** de un número real.

DEFINICION 2.8.11

El *piso* de x, denotado $\lfloor x \rfloor$, es el mayor entero menor o igual a x. El *techo* de x, denotado $\lceil x \rceil$, es el menor entero mayor o igual que x.

EJEMPLO 2.8.12

$$\lfloor 8.3 \rfloor = 8, \qquad \lceil 9.1 \rceil = 10,$$
$$\lfloor -8.7 \rfloor = -9, \qquad \lceil -11.3 \rceil = -11,$$
$$\lceil 6 \rceil = 6, \qquad \lceil -8 \rceil = -8$$
□

El piso de x "redondea x hacia abajo", mientras que el techo de x "redondea x hacia arriba". En todo el libro utilizaremos las funciones piso y techo.

EJEMPLO 2.8.13

En 1996, la tarifa postal de primera clase en Estados Unidos para pesos de hasta 11 onzas, era de 32 centavos por la primera onza o fracción y de 23 centavos por cada onza o fracción adicional. La tarifa postal $P(w)$ como una función del peso w está dada por la ecuación

$$P(w) = 32 + 23\lceil w - 1 \rceil, \quad 11 \geq w > 0.$$

La expresión $\lceil w - 1 \rceil$ cuenta el número de onzas adicionales arriba de 1 donde una fracción cuenta como una onza adicional. Como ejemplos,

$$P = (3.7) = 32 + 23\lceil 3.7 - 1 \rceil = 32 + 23\lceil 2.7 \rceil = 32 + 23 \cdot 3 = 101,$$
$$P(2) = 32 + 23\lceil 2 - 1 \rceil = 32 + 23\lceil 1 \rceil = 32 + 23 \cdot 1 = 55.$$
□

DEFINICION 2.8.14

Una función f de X en Y es *uno a uno* (o *inyectiva*) si para cada $y \in Y$ existe a lo más una $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

La condición dada en la definición 2.8.14 para que una función sea uno a uno es equivalente a: Si $x, x' \in X$ y $f(x) = f(x')$, entonces $x = x'$.

Debido a que la cantidad de datos potenciales es por lo general mucho mayor que la memoria disponible, es usual que las funciones de dispersión no sean uno a uno. En otras palabras, la mayor parte de las funciones de dispersión provocan colisiones.

EJEMPLO 2.8.15

La función

$$f = \{(1, b), (3, a), (2. c)\}$$

de $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b, c, d\}$ es uno a uno. □

EJEMPLO 2.8.16

La función del ejemplo 2.8.2 no es uno a uno, pues $f(1) = a = f(3)$. □

Si el rango de una función f es Y, decimos que la función es **sobre** Y.

DEFINICIÓN 2.8.17

Si f es una función de X en Y y el rango de f es Y, f es *sobre* Y (o una *función suprayectiva*).

EJEMPLO 2.8.18

La función

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$$

de $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b, c\}$ es uno a uno y sobre Y. □

EJEMPLO 2.8.19

La función f del ejemplo 2.8.15 *no* es sobre $Y = \{a, b, c, d\}$. Es sobre $\{a, b, c\}$. □

DEFINICION 2.8.20

Una función que es uno a uno y sobre es una *biyección.*

EJEMPLO 2.8.21

La función f del ejemplo 2.8.18 es una biyección. □

Supongamos que f es una función uno a uno y sobre de X en Y. Puede mostrarse (véase el ejercicio 60) que la relación inversa

$$\{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

es una función de Y en X. Esta nueva función, denotada f^{-1}, es llamada f **inversa**.

EJEMPLO 2.8.22

Para la función f del ejemplo 2.8.18, tenemos

$$f^{-1} = \{(a, 1), (c, 2), (b, 3)\}.$$ □

Como las funciones son tipos especiales de relaciones, podemos formar la **composición** de dos funciones. En específico, supongamos que g es una función de X en Y y que f es una función de Y en Z. Dada $x \in X$, podemos aplicarle g para determinar un único elemento $y = g(x) \in Y$. Luego podemos aplicar f para determinar un único elemento $z = f(y) = f(g(x)) \in Z$. La función resultante de X en Z es la *composición de f con g* y se denota $f \circ g$.

EJEMPLO 2.8.23

Dadas

$$g = \{(1, a), (2, a), (3, c)\},$$

una función de $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b, c\}$, y

$$f = \{(a, y), (b, x), (c, z)\},$$

una función de Y en $Z = \{x, y, z\}$, la composición de X en Z es la función

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, z)\}.$$ □

Un **operador binario** sobre un conjunto X asocia a cada par ordenado de elementos en X un elemento en X.

DEFINICION 2.8.24

Una función de $X \times X$ en X es un *operador binario* sobre X.

EJEMPLO 2.8.25

Sea $X = \{1, 2, \ldots\}$. Si definimos

$$f(x, y) = x + y,$$

entonces f es un operador binario sobre X. □

EJEMPLO 2.8.26

Sea $X = \{a, b, c\}$. Si definimos

$$f(s, t) = st,$$

donde s y t son cadenas sobre X y st es la concatenación de s y t, entonces f es un operador binario sobre X^*. □

Un **operador unario** sobre un conjunto X asocia a cada elemento particular de X un elemento en X.

DEFINICIÓN 2.8.27

Una función de X en X es un *operador unario* sobre X.

EJEMPLO 2.8.28

Sea U un conjunto universal. Si definimos

$$f(X) = \overline{X}, \quad X \subseteq U,$$

entonces f es un operador unario sobre $P(U)$. □

Ejercicios

Determine si cada relación en los ejercicios 1-5 es una función de $X = \{1, 2, 3, 4\}$ en $Y = \{a, b, c, d\}$. Si es una función, determine su dominio y rango y determine si es uno a uno o sobre. Si es uno a uno y sobre, proporcione una descripción de la función inversa como un conjunto de pares ordenados y proporcione el dominio y rango de la función inversa.

1. $\{(1, a), (2, a), (3, c), (4, b)\}$
2. $\{(1, c), (2, a), (3, b), (4, c), (2, d)\}$
3. $\{(1, c), (2, d), (3, a), (4, b)\}$

4. $\{(1, d), (2, d), (4, a)\}$
5. $\{(1, b), (2, b), (3, b), (4, b)\}$
6. Dé un ejemplo de una función que sea uno a uno pero no sobre.
7. Dé un ejemplo de una función que sea sobre pero no uno a uno.
8. Dé un ejemplo de una función que no sea uno a uno ni sobre.
9. Dadas

$$g = \{(1, b), (2, c), (3, a)\},$$

una función de $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b, c, d\}$, y

$$f = \{(a, x), (b, x), (c, z), (d, w)\},$$

una función de Y en $Z = \{w, x, y, z\}$, escriba $f \circ g$ como un conjunto de pares ordenados.

10. Dada

$$f = \{(x, x^2) \mid x \in X\},$$

una función de $X = \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$ al conjunto de enteros, escriba f como un conjunto de pares ordenados. ¿Es f uno a uno o sobre?

11. ¿Cuántas funciones existen de $\{1, 2\}$ en $\{a, b\}$? ¿Cuáles son uno a uno? ¿Cuáles son sobre?

12. Dada

$$f = \{(a, b), (b, a), (c, b)\},$$

una función de $X = \{a, b, c\}$ en X:

(a) Escriba $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$ como conjuntos de pares ordenados.
(b) Defina

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$$

como la composición de n copias de f. Determine f^9 y f^{623}.

13. Sea f la función de $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en X definida por

$$f(x) = 4x \bmod 5.$$

Escriba f como un conjunto de pares ordenados. ¿Es f uno a uno o sobre?

14. Sea f la función de $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ en X definida por

$$f(x) = 4x \bmod 6.$$

Escriba f como un conjunto de pares ordenados. ¿Es f uno a uno o sobre?

★ **15.** Sean m y n enteros positivos. Sea f la función de

$$X = \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

en X definida por

$$f(x) = nx \bmod m.$$

Determine condiciones sobre m y n que garanticen que f es uno a uno y sobre.

16. Verifique el carácter de verificación ISBN de este libro.

17. Los códigos universales de productos (UPC) son los familiares códigos de barras que identifican a los productos, de modo que se pueda revisar su precio de manera automática al pagar en una caja. Un UPC es un código de 12 dígitos, donde el primer dígito identifica el tipo de producto (0 identifica un artículo común de abarrotes, 2 es un artículo vendido por peso, 3 es un artículo médico, 4 es un artículo especial, 5 es un cupón, y 6 y 7 son artículos que no se venden al menudeo). Los siguientes cinco dígitos identifican al fabricante, los siguientes cinco dígitos identifican al producto y el último dígito es un dígito de verificación. (Todos los códigos UPC tienen un dígito de verificación. Siempre está presente en el código de barras, pero podría no aparecer en la versión impresa.) Por ejemplo, el UPC para un paquete de 10 tacos Ortega es 0-54400-00800-5. El primer cero indica que éste es un artículo común de abarrotes, los siguientes cinco dígitos identifican al fabricante Nabisco Foods, y los siguientes cinco dígitos 00800 identifican al producto como un paquete de 10 tacos Ortega.

El dígito de verificación se calcula como sigue. Primero se calcula s, donde s es tres veces la suma de los dígitos que ocupan los lugares impares, más la suma de los dígitos que ocupan los lugares pares, excepto el dígito de verificación. El dígito de verificación es el número c, entre 0 y 9, que satisface $(c + s) \bmod 10 = 0$. Para el código en el paquete de tacos, tendríamos

$$s = 3(0 + 4 + 0 + 0 + 8 + 0) + 5 + 4 + 0 + 0 + 0 = 45.$$

Como $(5 + 45) \bmod 10 = 0$, el dígito de verificación es 5.

Determine el dígito de verificación para el UPC cuyos primeros 11 dígitos son 3-41280-21414.

Para cada función de dispersión en los ejercicios 18-21, muestre la forma en que los datos serían insertados, en el orden dado, en celdas inicialmente vacías. Utilice la política para resolver colisiones del ejemplo 2.8.10.

18. $h(x) = x \bmod 11$; las celdas van del 0 al 10; datos: 53, 13, 281, 743, 377, 20, 10, 796
19. $h(x) = x \bmod 17$; las celdas van del 0 al 16; datos: 714, 631, 26, 373, 775, 906, 509, 2032, 42, 4, 136, 1028
20. $h(x) = x^2 \bmod 11$; las celdas y los datos como en el ejercicio 18
21. $h(x) = (x^2 + x) \bmod 17$; las celdas y los datos como en el ejercicio 19
22. Suponga que guardamos y recuperamos datos según lo descrito en el ejemplo 2.8.10. ¿Surgirá algún problema si eliminamos algunos datos? Explique.
23. Suponga que guardamos datos según lo descrito en el ejemplo 2.8.10 y que nunca guardamos más de 10 artículos. ¿Surgirá algún problema al recuperar datos si detenemos la búsqueda al encontrar una celda vacía? Explique.
24. Suponga que guardamos datos según lo descrito en el ejemplo 2.8.10 y recuperamos los datos como en el ejercicio 23. ¿Surgirá algún problema si eliminamos algunos datos? Explique.

Sea g una función de X en Y y sea f una función de Y en Z. Para cada afirmación en los ejercicios 25-30, escriba "verdadero" si la afirmación es verdadera. Si la afirmación es falsa, proporcione un contraejemplo.

25. Si f es uno a uno, entonces $f \circ g$ es uno a uno.
26. Si f y g son sobre, entonces $f \circ g$ es sobre.
27. Si f y g son uno a uno y sobre, entonces $f \circ g$ es uno a uno y sobre.
28. Si $f \circ g$ es uno a uno, entonces f es uno a uno.
29. Si $f \circ g$ es uno a uno, entonces g es uno a uno.
30. Si $f \circ g$ es sobre, entonces f es sobre.

Si f es una función de X en Y y $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, definimos

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Decimos que $f^{-1}(B)$ es la *imagen inversa* de B bajo f.

31. Sea

$$g = \{(1, a), (2, c), (3, c)\}$$

una función de $X = \{1, 2, 3\}$ en $Y = \{a, b, c, d\}$. Sean $S = \{1\}$, $T = \{1, 3\}$, $U = \{a\}$ y $V = \{a, c\}$. Determine $g(S)$, $g(T)$, $g^{-1}(U)$ y $g^{-1}(V)$.

☆ 32. Sea f una función de X en Y. Demuestre que f es uno a uno si y sólo si

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

para todos los subconjuntos A y B de X.

33. Sea f una función de X en Y. Defina una relación R sobre X como

$$x R y \quad \text{si} \quad f(x) = f(y).$$

Muestre que R es una relación de equivalencia sobre X.

34. Sea f una función de X en Y. Sea

$$\mathcal{S} = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\}.$$

[La definición de $f^{-1}(B)$, donde B es un conjunto, aparece antes del ejercicio 31.] Muestre que $\mathcal{S}$ es una partición de X. Describa una relación de equivalencia que dé lugar a esta partición.

35. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Defina una función f de A en el conjunto de clases de equivalencia de A mediante la regla

$$f(x) = [x].$$

¿Cuándo ocurre que $f(x) = f(y)$?

36. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Suponga que g es una función de A en un conjunto X con la propiedad de que si $x R y$, entonces $g(x) = g(y)$. Muestre que

$$h([x]) = g(x)$$

define una función del conjunto de clases de equivalencia de A en X. [Lo que hay que mostrar es que h asigna un valor de manera *única* a $[x]$: es decir, que si $[x] = [y]$, entonces $g(x) = g(y)$.]

★ **37.** Sea f una función de X en Y. Muestre que f es uno a uno si, y sólo si, siempre que g sea una función uno a uno de cualquier conjunto A en X, $f \circ g$ es uno a uno.

☆ 38. Sea f una función de X en Y. Muestre que f es sobre Y si, y sólo si, siempre que g sea una función de Y sobre cualquier conjunto Z, $g \circ f$ es sobre Z.

Sea U un conjunto universal y sea $X \subseteq U$. Defina

$$C_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$

C_X es la *función característica* de X (en U).

39. Muestre que $C_{X \cap Y}(x) = C_X(x)C_Y(x)$ para toda $x \in U$.

40. Muestre que $C_{X \cup Y}(x) = C_X(x) + C_Y(x) - C_X(x)C_Y(x)$ para toda $x \in U$.

41. Muestre que $C_{\overline{X}}(x) = 1 - C_X(x)$ para toda $x \in U$.

42. Muestre que $C_{X-Y}(x) = C_X(x)[1 - C_Y(x)]$ para toda $x \in U$.

43. Muestre que si $X \subseteq Y$, entonces $C_X(x) \le C_Y(x)$ para toda $x \in U$.

44. Muestre que $C_{X \cup Y}(x) = C_X(x) + C_Y(x)$ para toda $x \in U$ si y sólo si $X \cap Y = \varnothing$.

45. Determine una fórmula para $C_{X \Delta Y}$. ($X \Delta Y$ es la diferencia simétrica de X y Y. La definición aparece antes del ejercicio 61, sección 2.1.)

46. Muestre que la función f de $P(U)$ en el conjunto de funciones características en U, definida como

$$f(X) = C_X$$

es uno a uno y sobre.

47. Sea f una función característica en X. Defina una relación R sobre X como $x R y$ si $f(x) = f(y)$. De acuerdo con el ejercicio 33, R es una relación de equivalencia. ¿Cuáles son las clases de equivalencia?

Si X y Y son conjuntos, decimos que X es *equivalente* a Y si existe una función uno a uno y sobre de X en Y.

48. Muestre que la equivalencia de conjuntos es una relación de equivalencia.

49. Si X y Y son conjuntos finitos y X es equivalente a Y, ¿qué nos dice esto acerca de X y de Y?

50. Muestre que los conjuntos $\{1, 2, \ldots\}$ y $\{1, 4, \ldots\}$ son equivalentes.

★ **51.** Muestre que para cualquier conjunto X, X no es equivalente a $P(X)$, el conjunto potencia de X.

52. Sean X y Y conjuntos. Muestre que existe una función uno a uno de X en Y si y sólo si existe una función de Y sobre X.

Un operador binario f sobre un conjunto X es *conmutativo* si $f(x, y) = f(y, x)$ para toda $x, y \in X$. En los ejercicios 53-57, indique si la función dada f es un operador binario sobre el conjunto X. Si f no es un operador binario, indique por qué. Si f es un operador binario, indique si es conmutativo o no.

53. $f(x, y) = x + y$, $\quad X = \{1, 2, \ldots\}$

54. $f(x, y) = x - y$, $\quad X = \{1, 2, \ldots\}$

55. $f(s, t) = st$, X es el conjunto de cadenas sobre $\{a, b\}$

56. $f(x, y) = x/y$, $\quad X = \{0, 1, 2, \ldots\}$

57. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, $\quad X = \{1, 2, \ldots\}$

En los ejercicios 58 y 59, proporcione un ejemplo de un operador unario (diferente de $f(x) = x$, para toda x) sobre el conjunto dado.

58. $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

59. El conjunto de cadenas sobre $\{a, b\}$

60. Muestre que si f es una función uno a uno y sobre de X en Y, entonces

$$\{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

es un función uno a uno y sobre de Y en X.

61. ¿Cómo podemos determinar con rapidez si una relación R es una función, examinando la matriz de R (con respecto de algún orden)?

62. Sea A la matriz de una función f de X en Y (con respecto al orden dado de X y Y). ¿Qué condiciones debe satisfacer A para que f sea sobre Y?

63. Sea A la matriz de una función f de X en Y (con respecto del orden dado de X y Y). ¿Qué condiciones debe satisfacer A para que f sea uno a uno?

En los ejercicios 64-66, escriba "verdadero" si la afirmación es verdadera para todos los números reales. Si es falsa, proporcione un contraejemplo.

64. $\lceil x + 3 \rceil = \lceil x \rceil + 3$

65. $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

66. $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lceil y \rceil$

67. Muestre que si n es un entero impar,

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

68. Muestre que si n es un entero impar,

$$\left\lceil \frac{n^2}{4} \right\rceil = \frac{n^2+3}{4}.$$

El 1 de enero del año x se presenta en el día de la semana mostrado en la segunda columna del renglón

$$y = \left(x + \left\lfloor \frac{x-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{400} \right\rfloor\right) \bmod 7$$

en la siguiente tabla (véase [Ritter]).

y	*1 de enero*	*Año no bisiesto*	*Año bisiesto*
0	Domingo	enero, octubre	enero, abril, julio
1	Lunes	abril, julio	septiembre, diciembre
2	Martes	septiembre, diciembre	junio
3	Miércoles	junio	marzo, noviembre
4	Jueves	febrero, marzo, noviembre	febrero, agosto
5	Viernes	agosto	mayo
6	Sábado	mayo	octubre

Los meses con viernes 13 en el año x se determinan en el renglón y de la columna adecuada.

69. Determine los meses con viernes 13 en 1945.
70. Determine los meses con viernes 13 en este año.
71. Determine los meses con viernes 13 en el año 2000.
72. Sea X el conjunto de sucesiones con dominio finito. Defina una relación R sobre X como $s\,R\,t$ si $|\text{dominio } s| = |\text{dominio } t|$ y, si el dominio de s es $\{m, m+1, \ldots, m+k\}$ y el dominio de t es $\{n, n+1, \ldots, n+k\}$, entonces $s_{m+i} = t_{n+i}$ para $i = 0, \ldots, k$.
    (a) Muestre que R es una relación de equivalencia.
    (b) Explique con palabras lo que significa que dos sucesiones en X sean equivalentes bajo la relación R.
    (c) Una sucesión es una función y por lo tanto es un conjunto de pares ordenados. Dos sucesiones son iguales si los dos conjuntos de pares ordenados son iguales. Compare la diferencia entre dos sucesiones equivalentes en X y dos sucesiones iguales en X.

NOTAS

La mayor parte de la bibliografía general en matemáticas discretas se refieren a los temas de este capítulo. [Halmos; Lipschutz; y Stoll] son recomendables para el lector que desee estudiar teoría de conjuntos, relaciones y funciones con mayor detalle. [Codd; Date; Kroenke; y Ullman] son referencias recomendables acerca de las bases de datos en general y el modelo relacional en particular.

CONCEPTOS BÁSICOS DEL CAPÍTULO

Sección 2.1

Conjunto: cualquier colección de objetos
Notación para conjuntos:
  $\{x \mid x$ tiene la propiedad $P\}$
$|X|$: el número de elementos en el conjunto X
$x \in X$: x es un elemento del conjunto X
$x \notin X$: x no es un elemento del conjunto X
Conjunto vacío: $\varnothing$ o $\{\}$
$X = Y$, donde X y Y son conjuntos: X y Y tienen los mismos elementos
$X \subseteq Y$, X es un subconjunto de Y: todo elemento de X es también elemento de Y
X es un subconjunto propio de Y: $X \subseteq Y$ y $X \neq Y$
$\mathcal{P}(X)$, el conjunto potencia de X: conjunto de todos los subconjuntos de X
$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$
$X \cup Y$, X unión Y: conjunto de elementos en X o Y
Unión de una familia $\mathcal{S}$ de conjuntos:
  $\cup\mathcal{S} = \{x \mid x \in X$ para algún $X \in \mathcal{S}\}$
$X \cap Y$, X intersección Y: conjunto de elementos en X y Y
Intersección de una familia $\mathcal{S}$ de conjuntos: $\cap\mathcal{S} = \{x \mid x \in X$ para toda $X \in \mathcal{S}\}$
Conjuntos ajenos X y Y: $X \cap Y = \varnothing$
Familia de conjuntos ajenos por pares
$X - Y$, diferencia de X y Y, complemento relativo: conjunto de elementos en X pero no en Y
Conjunto universal, universo
$\overline{X}$, complemento de X: $U - X$, donde U es un conjunto universal
Propiedades de conjuntos (véase el teorema 2.1.8)
Leyes de De Morgan para conjuntos:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Partición de X: una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos no vacíos de X tales que todo elemento en X pertenece exactamente a un miembro de $\mathcal{S}$
Par ordenado: (x, y)
Producto cartesiano de X y Y:
  $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$
Producto cartesiano de $X_1, X_2, \ldots, X_n$:
  $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in X_i\}$

Sección 2.2

Sucesión: lista donde se toma en cuenta el orden
Índice: en la sucesión $\{s_n\}$, n es el índice
Sucesión creciente: $s_n \leq s_{n+1}$ para toda n
Sucesión decreciente: $s_n \geq s_{n+1}$ para toda n
Subsucesión s_{n_k} de la sucesión $\{s_n\}$
Notación de suma o sigma:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Notación producto:

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n$$

Cadena: sucesión finita
Cadena nula, λ: cadena sin elementos
X^*: conjunto de todas las cadenas sobre X, incluyendo la cadena nula
X^+: conjunto de todas las cadenas no nulas sobre X
Longitud de la cadena α, $|\alpha|$: número de elementos en α
Concatenación de cadenas α y β, $\alpha\beta$: α seguida de β

Sección 2.3

Sistema numérico decimal
Sistema numérico binario
Sistema numérico hexadecimal
Base de un sistema numérico
Conversión de binario a decimal
Conversión de hexadecimal a decimal
Conversión de decimal a hexadecimal
Suma de números binarios
Suma de números hexadecimales

Sección 2.4

Relación binaria de X en Y: conjunto de pares ordenados (x, y), con $x \in X$, $y \in Y$

Dominio de una relación binaria R: $\{x \mid (x, y) \in R\}$

Rango de una relación binaria R: $\{y \mid (x, y) \in R\}$

Digráfica de una relación binaria

Relación reflexiva R sobre X: $(x, x) \in R$ para toda $x \in X$

Relación simétrica R sobre X: para toda $x, y \in X$, si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$

Relación antisimétrica R sobre X: para toda $x, y \in X$, si $(x, y) \in R$ y $x \neq y$, entonces $(y, x) \notin R$

Relación transitiva R en X: para toda $x, y, z \in X$, si (x, y) y (y, z) están en R, entonces $(x, z) \in R$

Orden parcial: relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva

Relación inversa R^{-1}: $\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$

Composición de relaciones $R_2 \circ R_1$: $\{(x, z) \mid (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2\}$

Sección 2.5

Relación de equivalencia: relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva

Clase de equivalencia que contiene a a, dada por la relación de equivalencia R: $[a] = \{x \mid x R a\}$

Las clases de equivalencia crean una partición del conjunto (teorema 2.5.9)

Sección 2.6

Matriz de una relación

R es una relación reflexiva si y sólo si la diagonal principal de la matriz de R consta de unos.

R es una relación simétrica si y sólo si la matriz de R es simétrica con respecto de la diagonal principal.

Si A_1 es la matriz de la relación R_1 y A_2 es la matriz de la relación A_2, la matriz de la relación $R_2 \circ R_1$ se obtiene reemplazando cada término distinto de cero en la matriz producto A_1A_2 por 1.

Sección 2.7

Relación n-aria: Conjunto de n-adas

Sistema de administración de bases de datos

Base de datos relacional

Clave

Consulta

Selección

Proyección

Fusión

Sección 2.8

Función de X en Y, $f: X \to Y$: relación de X en Y que satisface que el dominio de $f = X$ y si $(x, y), (x, y') \in f$, entonces $y = y'$

x mod y: residuo cuando x es dividido entre y

Función de dispersión

Colisión para una función de dispersión H: $H(x) = H(y)$

Política de resolución de colisiones

Piso de x, $\lfloor x \rfloor$: mayor entero menor o igual a x

Techo de x, $\lceil x \rceil$: menor entero mayor o igual a x

Función f uno a uno: si $f(x) = f(x')$, entonces $x = x'$

Función sobre f de X en Y: rango de $f = Y$

Biyección: función uno a uno y sobre

Inversa f^{1} de una función f uno a uno y sobre: $\{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$

Composición de funciones: $f \circ g = \{(x, z) \mid (x, y) \in g\}$ y $(y, z) \in f\}$

Operador binario sobre X: función de $X \times X$ sobre X

Operador unario sobre X: función de X sobre X

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

Sección 2.1

1. Si $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x \mid x$ es un entero par$\}$, $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, determine $(A \cap B) - C$.
2. Si X es un conjunto y $|X| = 8$, ¿cuántos miembros tiene $P(X)$? ¿Cuántos subconjuntos propios tiene X?
3. Si $A \cup B = B$, ¿qué relación debe haber entre A y B?
4. ¿Son iguales los conjuntos

$$\{3, 2, 2\}, \quad \{x \mid x \text{ es un entero y } 1 < x \leq 3\}?$$

Explique.

Sección 2.2

5. Para la sucesión a definida por $a_n = 2n + 2$, determine

(a) a_6 (b) $\sum_{i=1}^{3} a_i$ (c) $\prod_{i=1}^{3} a_i$

(d) una fórmula para la subsucesión de a obtenida al elegir un término sí y uno no en a, comenzando por el primero.

6. Reescriba la suma

$$\sum_{i=1}^{n} (n - i)r^i$$

reemplazando el índice i por k, donde $i = k + 2$.

7. Sea

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} (i + 1)^2 - i^2.$$

(a) Determine b_5 y b_{10}. (b) Determine una fórmula para b_n.
(c) ¿Es b creciente? (d) ¿Es b decreciente?

8. Sean $\alpha = ccddc$ y $\beta = c^3d^2$. Determine

(a) $\alpha\beta$ (b) $\beta\alpha$ (c) $|\alpha|$ (d) $|\alpha\alpha\beta\alpha|$

Sección 2.3

9. Escriba el número binario 10010110 en decimal.
10. Escriba el número decimal 430 en binario y en hexadecimal.
11. Sume los números binarios 11001 y 101001.
12. Escriba el número hexadecimal C39 en decimal.

Sección 2.4

En los ejercicios 13 y 14, determine si la relación definida sobre el conjunto de enteros positivos es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o un orden parcial.

13. $(x, y) \in R$ si 2 divide a $x + y$
14. $(x, y) \in R$ si 3 divide a $x + y$
15. Proporcione un ejemplo de una relación sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ que sea reflexiva, pero no antisimétrica ni transitiva.

16. Suponga que R es una relación sobre X, simétrica y transitiva, pero no reflexiva. Suponga también que $|X| \geq 2$. Defina la relación $\bar{R}$ sobre X como

$$\bar{R} = X \times X - R.$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Para cada afirmación falsa, proporcione un contraejemplo.

(a) $\bar{R}$ es reflexiva. (b) $\bar{R}$ es simétrica.
(c) $\bar{R}$ es no antisimétrica. (d) $\bar{R}$ es transitiva.

Sección 2.5

17. ¿La relación

$$\{(1,1),(1,2),(2,2),(4,4),(2,1),(3,3)\}$$

es una relación de equivalencia sobre $\{1,2,3,4\}$? Explique.

18. Si la relación

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$$

es una relación de equivalencia sobre $\{1,2,3,4\}$, determine $[3]$, la clase de equivalencia que contiene a 3. ¿Cuántas clases de equivalencia (distintas) existen?

19. Determine la relación de equivalencia (como un conjunto de pares ordenados) sobre $\{a,b,c,d,e\}$ cuyas clases de equivalencia sean

$$\{a\}, \quad \{b,d,e\}, \quad \{c\}.$$

20. Sea R la relación definida sobre el conjunto de cadenas de ocho bits como $s_1 R s_2$ siempre que s_1 y s_2 tengan el mismo número de ceros.
(a) Muestre que R es una relación de equivalencia.
(b) ¿Cuántas clases de equivalencia existen?
(c) Enumere un miembro de cada clase de equivalencia.

Sección 2.6

Los ejercicios 21-24 se refieren a las relaciones

$$R_1 = \{(1,x),(2,x),(2,y),(3,y)\}, \qquad R_2 = \{(x,a),(x,b),(y,a),(y,c)\}.$$

21. Determine la matriz A_1 de la relación R_1 con respecto de los órdenes

$$1, 2, 3; \ x, y.$$

22. Determine la matriz A_2 de la relación R_2 con respecto de los órdenes

$$x, y; \ a, b, c.$$

23. Determine el producto matricial A_1A_2.

24. Utilice el resultado del ejercicio 23 para determinar la matriz de la relación $R_2 \circ R_1$.

Sección 2.7

En los ejercicios 25-28, escriba una serie de operaciones que respondan la consulta. Además, proporcione una respuesta a la consulta. Utilice las tablas 2.7.1 y 2.7.2.

25. Determine todos los equipos.

26. Determine los nombres y edades de todos los jugadores.

27. Determine los nombres de todos los equipos que tienen un lanzador (pitcher, p).

28. Determine los nombres de todos los equipos que tengan jugadores de 30 años o más.

Sección 2.8

29. Sean X el conjunto de cadenas sobre $\{a,b\}$ de longitud 4 y Y el conjunto de cadenas sobre $\{a,b\}$ de longitud 3. Defina una función f de X en Y mediante la regla

$$f(\alpha) = \text{cadena que consta de los primeros tres caracteres de } \alpha.$$

¿Es f uno a uno? ¿Es f sobre?

30. Determine los números reales que satisfacen $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor = \lfloor xy \rfloor - 1$.

31. Proporcione ejemplos de funciones f y g tales que $f \circ g$ sea sobre, pero que g no sea sobre.

32. Para la función de dispersión

$$h(x) = x \bmod 13,$$

muestre la forma en que los datos

$$784, \quad 281, \quad 1141, \quad 18, \quad 1, \quad 329, \quad 620, \quad 43, \quad 31, \quad 684$$

se insertarían en el orden dado en celdas inicialmente vacías, con índices del 0 al 12.