Sección 3.5

Seleccione una notación theta entre $\Theta(1)$, $\Theta(n)$, $\Theta(n^2)$, $\Theta(n^3)$, $\Theta(n^4)$, $\Theta(2^n)$ o $\Theta(n!)$ para cada una de las expresiones en los ejercicios 17 y 18.

17. $4n^3 + 2n - 5$

18. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$

19. Seleccione una notación theta entre $\Theta(1)$, $\Theta(n)$, $\Theta(n^2)$, $\Theta(n^3)$, $\Theta(2^n)$ o $\Theta(n!)$ para el número de veces que se ejecuta la línea $x := x + 1$.

```
for i := 1 to n do
  for j := 1 to n do
    x := x + 1
```

20. Escriba un algoritmo que verifique si dos matrices $n \times n$ son iguales y determine una notación theta para el peor de los casos.

Sección 3.6

21. ¿Exactamente cuántas divisiones necesita el algoritmo de Euclides en el peor de los casos, para números en el rango de 0 a 1000?

22. ¿Exactamente cuántas divisiones necesita el algoritmo de Euclides para calcular mcd(2, 76652913)?

23. ¿Exactamente cuántas divisiones necesita el algoritmo de Euclides para calcular $\text{mcd}(f_{324}, f_{323})$? ($\{f_n\}$ denota la sucesión de Fibonacci.)

24. Dado que $\log_{3/2} 100 = 11.357747$, proporcione una cota superior para el número de divisiones necesarias para el algoritmo de Euclides, para enteros en el rango de 0 a 100,000,000.

Sección 3.7

En los ejercicios 25-28, suponga que elegimos los primos $p = 13$, $q = 17$ y $n = 19$.

25. Calcule z y ϕ.

26. Verifique que $s = 91$.

27. Cifre 144 utilizando la clave pública z, n.

28. Descifre 28.

4

MÉTODOS DE CONTEO Y EL PRINCIPIO DE LA PICHONERA

Sólo existen demasiadas manos en una baraja de naipes.

—de Shane

En muchos problemas discretos debemos enfrentar un problema de conteo. Por ejemplo, en la sección 3.5 vimos que para estimar el tiempo de ejecución de un algoritmo, había que contar el número de veces que ciertos pasos o ciclos se ejecutaban. El conteo también tiene un papel crucial en la teoría de la probabilidad. Debido a la importancia del conteo, se han desarrollado varias formas para realizarlo, algunas de ellas un tanto complejas. En este capítulo desarrollaremos varias herramientas para el conteo. Estas técnicas pueden utilizarse para desarrollar el teorema del binomio. El capítulo concluye con un análisis del principio de la pichonera, el cual permite, con frecuencia, demostrar la existencia de un objeto con ciertas propiedades.

4.1 PRINCIPIOS BÁSICOS

El menú de Quick Lunch de Kay aparece en la figura 4.1.1. Como puede verse, tiene dos entradas, tres platos principales, y cuatro bebidas. ¿Cuántas comidas diferentes constan de un plato principal y una bebida?

ENTRADAS	
Nachos (N)	2.15
Ensalada (E)	1.90
PLATOS PRINCIPALES	
Hamburguesa (H)	3.25
Hamburguesa con queso (Q)	3.65
Filete de pescado	3.15
BEBIDAS	
Té	0.70
Leche	0.85
Cola	0.75
Cerveza de raíz	0.75

FIGURA 4.1.1
Menú del Quick Lunch de Kay.

Si enumeramos todas las comidas posibles que constan de un plato principal y una bebida:

HT, HL, HC, HR, QT, QL, QC, QR, FT, FL, FC, FR,

vemos que hay 12 comidas diferentes. (La comida que consta de un plato principal cuya primera letra es X y una bebida cuya primera letra es Y se denota XY. Por ejemplo, QR se refiere a la comida que consta de una hamburguesa con queso y cerveza de raíz.) Observe que existen tres platos principales y cuatro bebidas, y que $12 = 3 \cdot 4$.

Existen 24 posibles comidas que constan de una entrada, un plato principal y una bebida:

NHT, NHL, NHC, NHR, NQT, NQL, NQC, NQR,

NFT, NFL, NFC, NFR, EHT, EHL, EHC, EHR,

EQT, EQL, EQC, EQR, EFT, EFL, EFC, EFR.

(La comida que consta de una entrada cuya primera letra es X, un plato principal cuya primera letra es Y y una bebida cuya primera letra es Z se denota XYZ.) Observe que hay dos entradas, tres platos principales y cuatro bebidas, y que $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

En cada uno de estos ejemplos vimos que el número total de comidas era igual al producto de los números de cada platillo. Estos ejemplos ilustran el **principio de multiplicación**.

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si una actividad puede construirse en t pasos sucesivos y el paso 1 puede realizarse de n_1 formas; el paso 2 puede realizarse de n_2 formas; . . . ; y el paso t puede realizarse de n_t formas, entonces el número de diferentes actividades posibles es $n_1 \cdot n_2 \cdots n_t$.

En el problema de conteo de la cantidad de comidas que constan de un plato principal y una bebida, el primer paso consiste en "elegir el plato principal" y el segundo paso es "elegir la bebida". Así, $n_1 = 3$ y $n_2 = 4$, y, por el principio de multiplicación, el número total de comidas es $3 \cdot 4 = 12$. La figura 4.1.2 muestra por qué multiplicamos 3 por 4 (tenemos tres grupos de cuatro objetos).

Podemos resumir el principio de multiplicación diciendo que multiplicamos el número de formas de realizar cada paso cuando una actividad se construye mediante pasos sucesivos.

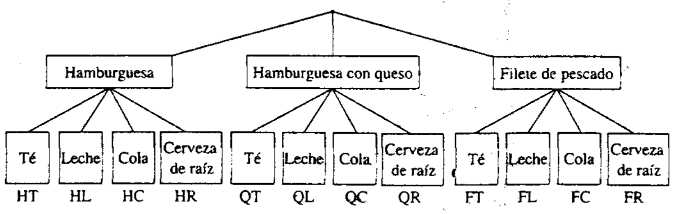


FIGURA 4.1.2 Una ilustración del principio de multiplicación.

EJEMPLO 4.1.1

¿Cuántas comidas están disponibles en Quick Lunch que consten de un plato principal y una bebida *opcional*?

Podemos formar una comida que consta de un plato principal y una bebida opcional mediante un proceso de dos pasos. El primer paso consiste en "elegir el plato principal" y el segundo paso es "elegir una bebida opcional". Existen $n_1 = 3$ formas de elegir el plato principal (hamburguesa, hamburguesa con queso, filete de pescado) y $n_2 = 5$ formas de elegir la bebida opcional (té, leche, cola, cerveza de raíz, ninguna). Por el principio de multiplicación, existen $3 \cdot 5 = 15$ comidas. Como confirmación, estas comidas se enumeran a continuación:

HT, HL, HC, HR, HN, QT, QL,

QC, QR, QN, FT, FL, FC, FR, FN. □

EJEMPLO 4.1.2

(a) ¿Cuántas cadenas de longitud 4 pueden formarse mediante las letras *ABCDE* si no se permiten repeticiones?

(b) ¿Cuántas cadenas de la parte (a) comienzan con la letra B?

(c) ¿Cuántas cadenas de la parte (a) no comienzan con la letra B?

(a) Utilizamos el principio de multiplicación. Una cadena de longitud 4 puede construirse en cuatro pasos sucesivos: Se elige la primera letra, luego la segunda, luego la tercera y finalmente la cuarta. La primera letra puede escogerse de cinco maneras. Una vez elegida la primera letra, la segunda puede seleccionarse de cuatro formas. Una vez elegida la segunda letra, la tercera puede escogerse de tres formas. Una vez elegida la tercera letra, la cuarta puede seleccionarse de dos formas. Por el principio de multiplicación, existen

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

cadenas.

(b) Las cadenas que comienzan con la letra B pueden construirse en cuatro pasos: Se elige la primera letra, luego la segunda, luego la tercera y por último la cuarta. La primera letra (B) puede escogerse de una manera, la segunda de cuatro formas, la tercera de tres y la cuarta de dos formas. Así, por el principio de multiplicación, existen

$$1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

cadenas que comienzan con la letra B.

(c) La parte (a) muestra que existen 120 cadenas de longitud 4 que pueden formarse mediante las letras *ABCDE* y la parte (b) muestra que 24 de ellas comienzan con la letra B. Esto implica que existen

$$120 - 24 = 96$$

cadenas que no comienzan con la letra B. □

EJEMPLO 4.1.3

En una imagen digital, queremos codificar la cantidad de luz en cada punto como una cadena de ocho bits. ¿Cuántos valores son posibles en cada punto?

Podemos construir un código de ocho bits en ocho pasos: Se elige el primer bit, luego el segundo, . . . , y finalmente el octavo. Como existen dos formas de escoger cada bit, por el principio de multiplicación el número total de códigos de ocho bits es

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256. \qquad \square$$

A continuación daremos una demostración, utilizando el principio de multiplicación, de que un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos. Anteriormente dimos una demostración de este resultado utilizando inducción matemática (teorema 2.1.4).

EJEMPLO 4.1.4

Utilice el principio de multiplicación para mostrar que un conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Un subconjunto puede construirse en n pasos: Se elige o no x_1, se elige o no $x_2, \ldots,$ se elige o no x_n. Cada paso puede realizarse de dos formas. Así, el número de subconjuntos posibles es

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ factores}} = 2^n. \qquad \square$$

EJEMPLO 4.1.5

Sea X un conjunto con n elementos. ¿Cuántos pares ordenados (A, B) satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$?

Dado un par ordenado (A, B) que satisface $A \subseteq B \subseteq X$, cada elemento de X está exactamente en alguno de los conjuntos A, $B - A$, o $X - B$. Recíprocamente, si asignamos cada elemento de X a alguno de los tres conjuntos A (y por hipótesis, también a B y X), $B - A$ (y por hipótesis, también a X), o $X - B$, obtenemos un único par ordenado (A, B) que satisface $A \subseteq B \subseteq X$. Así, el número de pares ordenados (A, B) que satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$ es igual al número de formas de asignar los elementos de X a los tres conjuntos A, $B - A$ y $X - B$. Podemos realizar tales asignaciones mediante el siguiente proceso de n pasos: Asignamos el primer elemento de X a A, $B - A$ o $X - B$; asignamos el segundo elemento de X a A, $B - A$ o $X - B$; . . . ; asignamos el n-ésimo elemento de X a A, $B - A$ o $X - B$. Como cada paso puede realizarse de tres formas, el número de pares ordenados (A, B) que satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$ es

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{n \text{ factores}} = 3^n. \qquad \square$$

A continuación ilustraremos el principio de la suma mediante un ejemplo, para después presentar el principio.

EJEMPLO 4.1.6

¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 101 o 111?

Una cadena de ocho bits que comienza con 101 puede construirse en cinco pasos: Se elige el cuarto bit, se elige el quinto bit, . . . , se elige el octavo bit. Como cada uno de los cinco bits puede elegirse de dos formas, por el principio de multiplicación, existen

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

cadenas de ocho bits que comienzan con 101. Podemos utilizar el mismo argumento para mostrar que existen 32 cadenas de ocho bits que comienzan con 111. Como existen 32 cadenas de ocho bits que comienzan con 101 y 32 cadenas de ocho bits que comienzan con 111, existen $32 + 32 = 64$ cadenas de ocho bits que comienzan con 101 o con 111. $\square$

En el ejemplo 4.1.6 sumamos los números de cadenas de ocho bits (32 y 32) de cada tipo para determinar el resultado final. El **principio de la suma** nos dice cuándo debemos sumar para calcular el número total de posibilidades.

PRINCIPIO DE LA SUMA

Supóngase que $X_1, \ldots, X_t$ son conjuntos y que el i-ésimo conjunto X_i tiene n_i elementos. Si $\{X_1, \ldots, X_t\}$ es una familia ajena por pares (es decir, si $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \varnothing$), el número de elementos posibles que pueden elegirse de X_1 o X_2 o . . . o X_t es

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t.$$

(En forma equivalente, la unión $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_t$ contiene $n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ elementos.)

En el ejemplo 4.1.6, X_1 podría ser el conjunto de cadenas de ocho bits que comienzan con 101 y X_2 el conjunto de cadenas de ocho bits que comienzan con 111. Como X_1 es ajeno de X_2, de acuerdo con el principio de la suma, el número de cadenas de ocho bits de cualquiera de estos tipos, que es el número de elementos en $X_1 \cup X_2$, es $32 + 32 = 64$.

Podemos resumir el principio de la suma diciendo que sumamos la cantidad de elementos en cada subconjunto cuando los elementos por contar pueden descomponerse en subconjuntos ajenos.

Si estamos contando objetos que se construyen por pasos, utilizamos el principio de multiplicación. Si tenemos conjuntos ajenos de objetos y queremos conocer la cantidad total de objetos, utilizamos el principio de la suma. Es importante reconocer cuándo aplicar cada principio. Esta habilidad se adquiere con la práctica y un razonamiento cuidadoso en cada problema.

Concluimos esta sección con ejemplos que ilustran ambos principios de conteo.

EJEMPLO 4.1.7

¿De cuántas formas podemos elegir dos libros de diferentes materias entre cinco libros distintos de computación, tres libros distintos de matemáticas y dos libros distintos de arte?

Por el principio de multiplicación, vemos que podemos elegir dos libros, uno de computación y uno de matemáticas, de $5 \cdot 3 = 15$ formas.

De manera análoga, podemos elegir dos libros, uno de computación y uno de arte, de $5 \cdot 2 = 10$ formas, y podemos elegir dos libros, uno de matemáticas y uno de arte, de $3 \cdot 2 = 6$ formas. Como estos conjuntos de selecciones son ajenos por pares, podemos utilizar el principio de la suma para concluir que existen

$$15 + 10 + 6 = 31$$

formas de elegir dos libros de diversos temas entre los libros de computación, matemáticas y arte. □

EJEMPLO 4.1.8

Un comité de seis personas compuesto por Alice, Ben, Connie, Dolph, Egbert y Francisco debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

(a) ¿De cuántas formas puede hacerse esto?
(b) ¿De cuántas formas puede hacerse esto si debe ser presidente Alice o Ben?
(c) ¿De cuántas formas puede hacerse esto si Egbert debe ocupar uno de los puestos?
(d) ¿De cuántas formas puede hacerse esto si Dolph y Francisco deben tener alguno de los puestos?

(a) Utilizamos el principio de multiplicación. Los ocupantes de los puestos pueden elegirse en tres pasos: Se elige el presidente, luego el secretario y finalmente el tesorero. El presidente puede elegirse de seis formas. Una vez electo el presidente, el secretario puede elegirse de cinco formas. Después de la selección del presidente y del secretario, el tesorero puede elegirse de cuatro formas. Por tanto, el número total de posibilidades es

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

(b) Argumentaremos como en la parte (a): Si Alice es presidente, existen $5 \cdot 4 = 20$ formas de seleccionar a los demás ocupantes de los puestos. De manera análoga, si Ben es presidente, existen 20 formas de elegir a los demás. Como estos casos son ajenos, por el principio de la suma, existen

$$20 + 20 = 40$$

posibilidades.

(c) [Primera solución.] Argumentamos como en la parte (a): Si Egbert es presidente, existen 20 formas de elegir a los demás. De manera análoga, si Egbert es secretario, existen 20 posibilidades, y si Egbert es tesorero, existen 20 posibilidades. Como estos tres casos son ajenos por pares, por el principio de la suma, existen

$$20 + 20 + 20 = 60$$

posibilidades.

[Segunda solución.] Vemos que la actividad de asignar a Egbert y otras dos personas los puestos se conforma con tres pasos: Asignar a Egbert un puesto, ocupar el siguiente puesto más alto, ocupar el último puesto restante. Existen tres formas de asignar a Egbert un puesto. Una vez asignado el puesto a Egbert, existen tres formas de ocupar el siguiente puesto más alto. Una vez asignados los puestos de Egbert y el siguiente puesto más alto, existen cuatro formas de ocupar el último puesto restante. Por el principio de multiplicación, existen

$$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$

posibilidades.

(d) Vemos que la actividad de asignar puestos a Dolph, Francisco y alguna otra persona consta de tres pasos: Asignar un puesto a Dolph, asignar un puesto a Francisco, ocupar el puesto restante. Existen tres formas de asignar un puesto a Dolph. Una vez asignado un puesto a Dolph, existen dos formas de asignar un puesto a Francisco. Una vez asignados puestos a Dolph y a Francisco, existen cuatro formas de ocupar el puesto restante. Por el principio de multiplicación, existen

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

posibilidades. □

Ejercicios

Determine el número de comidas en Quick Lunch (figura 4.1.1) que satisfagan las condiciones de los ejercicios 1-3.

1. Una entrada y una bebida.

2. Una entrada, un plato principal y una bebida opcional.

3. Una entrada opcional, un plato principal y una bebida opcional.

4. Un hombre tiene ocho camisas, cuatro pares de pantalones y cinco pares de zapatos. ¿Cuántas combinaciones de ropa puede hacer?

5. Las opciones disponibles para un modelo particular de automóvil son cinco colores para el interior, seis colores para el exterior, dos tipos de asientos, tres tipos de motor y tres tipos de radios. ¿Cuántas posibilidades diferentes tiene un consumidor?

6. El sistema Braille para representación de caracteres fue desarrollado a principios del siglo XIX por Louis Braille. Los caracteres, utilizados por los ciegos, constan de puntos en altorrelieve. Las posiciones de los puntos se eligen en dos columnas verticales, de tres puntos cada una. Debe aparecer al menos un punto en altorrelieve. ¿Cuántos caracteres Braille son posibles?

En los ejercicios 7-15 se lanzan dos dados, uno azul y otro rojo.

7. ¿Cuántos resultados son posibles?

8. ¿En cuántos resultados la suma es 4?

9. ¿Cuántos resultados son dobles? (Un doble ocurre cuando ambos dados muestran el mismo número.)

10. ¿En cuántos resultados la suma es 7 u 11?

11. ¿En cuántos resultados el dado azul muestra el 2?

12. ¿En cuántos resultados ocurre que exactamente uno de los dados muestre un 2?

13. ¿En cuántos resultados al menos uno de los dados muestra un 2?

14. ¿En cuántos resultados ninguno de los dados muestra un 2?

15. ¿En cuántos resultados se obtiene una suma par?

En los ejercicios 16-18, suponga que existen 10 caminos de Oz a Mid Earth y cinco caminos de Mid Earth a la Isla de la Fantasía.

16. ¿Cuántas rutas existen de Oz a la Isla de la Fantasía que pasen por Mid Earth?

17. ¿Cuántas rutas de viaje redondo son de la forma Oz - Mid Earth - Isla de la Fantasía - Mid Earth - Oz?

18. ¿Cuántas rutas de viaje redondo son de la forma Oz - Mid Earth - Isla de la Fantasía - Mid Earth - Oz y en las cuales el viaje de regreso no sea igual a la ruta original de Oz a la Isla de la Fantasía?

19. ¿Cuántas placas de automóvil pueden construirse si las placas contienen tres letras seguidas de dos dígitos, y se permiten las repeticiones? ¿Y si no se permiten repeticiones?

20. ¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 1100?

21. ¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan y terminan con 1?

22. ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen el segundo o el cuarto bit (o ambos) igual a 1?

23. ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen exactamente un 1?

24. ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen exactamente dos 1?

25. ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen al menos un 1?

26. ¿Cuántas cadenas de ocho bits se leen igual en ambas direcciones? (Un ejemplo de este tipo de cadena es 01111110. Tales cadenas se llaman *palíndromos*.*)

En los ejercicios 27-32, un comité de seis personas compuesto por Alice, Ben, Connie, Dolph, Egbert y Francisco debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

27. ¿Cuántas selecciones excluyen a Connie?

28. ¿En cuántas selecciones Ben y Francisco no tienen puestos?

29. ¿En cuántas selecciones Ben y Francisco tienen puestos?

30. ¿En cuántas selecciones Dolph tiene un puesto y Francisco no?

31. ¿En cuántas selecciones Dolph es presidente o no tiene un puesto?

32. ¿En cuántas selecciones Ben es presidente o tesorero?

* Palíndromo es una palabra que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

En los ejercicios 33-40, las letras $ABCDE$ se utilizan para formar cadenas de longitud 3.

33. ¿Cuántas cadenas pueden formarse si permitimos repeticiones?

34. ¿Cuántas cadenas pueden formarse si no permitimos repeticiones?

35. ¿Cuántas cadenas comienzan con A, permitiendo repeticiones?

36. ¿Cuántas cadenas comienzan con A, sin permitir repeticiones?

37. ¿Cuántas cadenas no contienen a A, permitiendo repeticiones?

38. ¿Cuántas cadenas no contienen a A, sin permitir repeticiones?

39. ¿Cuántas cadenas contienen a A, permitiendo repeticiones?

40. ¿Cuántas cadenas contienen a A, sin permitir repeticiones?

Los ejercicios 41-51 se refieren a los enteros del 5 al 200, inclusive.

41. ¿Cuántos números de este tipo existen?

42. ¿Cuántos son pares?

43. ¿Cuántos son impares?

44. ¿Cuántos son divisibles entre 5?

45. ¿Cuántos son mayores que 72?

46. ¿Cuántos constan de dígitos distintos?

47. ¿Cuántos contienen el dígito 7?

48. ¿Cuántos no contienen al dígito 0?

49. ¿Cuántos son mayores que 101 y no contienen al dígito 6?

50. ¿Cuántos tienen los dígitos en orden estrictamente creciente? (Por ejemplo, 13, 147, 8.)

51. ¿Cuántos son de la forma xyz, donde $0 \neq x < y$ y $y > z$?

52. (a) ¿De cuántas formas pueden ser distintos los meses de los cumpleaños de cinco personas?

(b) ¿Cuántas posibilidades existen para los meses de los cumpleaños de cinco personas?

(c) ¿De cuántas formas pueden tener su cumpleaños en el mismo mes al menos dos personas de las cinco?

Los ejercicios 53-57 se refieren a un conjunto de cinco libros distintos de computación, tres libros distintos de matemáticas y dos libros distintos de arte.

53. ¿De cuántas formas pueden ordenarse estos libros en un estante?

54. ¿De cuántas formas pueden ordenarse estos libros en un estante si los cinco libros de computación debe estar a la izquierda y los dos libros de arte deben estar a la derecha?

55. ¿De cuántas formas pueden ordenarse estos libros en un estante si los cinco libros de computación debe estar a la izquierda?

56. ¿De cuántas formas pueden ordenarse estos libros en un estante si todos los libros de la misma disciplina se deben colocar juntos?

☆ 57. ¿De cuántas formas pueden ordenarse estos libros en un estante si los dos libros de arte no deben colocarse juntos?

58. En algunas versiones de FORTRAN, un identificador consta de una cadena de uno a seis caracteres alfanuméricos que comienzan con una letra. (Un carácter *alfanumérico* es una letra, de la A a la Z, o un dígito, del 0 al 9.) ¿Cuántos identificadores válidos en FORTRAN existen?

59. Si X es un conjunto con n elementos y Y es un conjunto con m elementos, ¿cuántas funciones existen de X en Y?

★ **60.** Existen 10 copias de un libro y una copia de otros 10 libros. ¿De cuántas formas podemos elegir 10 libros?

61. ¿Cuántos términos hay en el desarrollo de

$$(x + y)(a + b + c)(e + f + g)(h + i)?$$

☆ 62. ¿Cuántos subconjuntos de un conjunto con $(2n + 1)$ elementos tienen n elementos o menos?

63. ¿Cuántas relaciones antisimétricas existen sobre un conjunto con n elementos?

64. Si X y Y no son subconjuntos ajenos, no podemos sumar $|X|$ con $|Y|$ para calcular el número de elementos en $X \cup Y$. Demuestre que

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

para cualesquiera conjuntos X y Y.

Utilice el resultado del ejercicio 64 para resolver los ejercicios 65-69.

65. ¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 100 o tienen el cuarto bit igual a 1?

66. ¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 1 o terminan con 1?

En los ejercicios 67 y 68, un comité de seis personas compuesto por Alice, Ben, Connie, Dolph, Egbert y Francisco debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

67. ¿En cuántas selecciones Ben es presidente o Alice es secretario?

68. ¿En cuántas selecciones Connie es presidente o Alice tiene un puesto?

69. Se arrojan dos dados, uno azul y otro rojo. ¿En cuántos resultados el dado azul muestra un 3 o se obtiene una suma par?

70. ¿Cuántos operadores binarios existen sobre $\{1, 2, \ldots, n\}$?

71. ¿Cuántos operadores binarios conmutativos existen sobre $\{1, 2, \ldots, n\}$?

RINCÓN DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS: CONTEO

Problema

Determinar el número de ternas o tercias ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfagan

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ y } X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \varnothing.$$

Por *terna ordenada* entendemos que el orden de los conjuntos X_1, X_2, X_3 se toma en cuenta. Por ejemplo, las ternas

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 4, 8\}, \quad \{2, 5, 6, 7\}$$

y

$$\{1, 4, 8\}, \quad \{1, 2, 3\}, \quad \{2, 5, 6, 7\}$$

se consideran distintas.

Para resolver el problema

Sería bueno comenzar a enumerar las ternas, pero son tantas que difícilmente se lograría cierta intuición a partir del análisis de unas cuantas ternas. Simplificaremos el problema haciéndolo más pequeño. Reemplacemos

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

por $\{1\}$. ¿Qué podría ser más sencillo que $\{1\}$? (Bueno, tal vez $\varnothing$, ¡pero es demasiado sencillo!) Ahora podemos enumerar todas las ternas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfacen $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1\}$ y $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \varnothing$. Debemos colocar 1 en al menos uno de los conjuntos X_1, X_2, X_3 (de modo que la unión sea $\{1\}$), pero no debemos colocar 1 en los tres conjuntos X_1, X_2, X_3 (ya que en caso contrario, la intersección no sería vacía). Así, 1 estará en exactamente uno o dos de los conjuntos X_1, X_2, X_3. La lista completa de ternas ordenadas es:

$$X_1 = \{1\}, \quad X_2 = \varnothing, \quad X_3 = \varnothing; \qquad X_1 = \varnothing, \quad X_2 = \{1\}, \quad X_3 = \varnothing;$$
$$X_1 = \varnothing, \quad X_2 = \varnothing, \quad X_3 = \{1\}; \qquad X_1 = \{1\}, \quad X_2 = \{1\}, \quad X_3 = \varnothing;$$
$$X_1 = \{1\}, \quad X_2 = \varnothing, \quad X_3 = \{1\}; \qquad X_1 = \varnothing, \quad X_2 = \{1\}, \quad X_3 = \{1\}.$$

Así, existen seis ternas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfacen

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1\} \quad \text{y} \quad X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \varnothing.$$

Pasemos a otro nivel y enumeremos todas las ternas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfacen $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1, 2\}$ y $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \varnothing$. Como antes, debemos colocar 1 en al menos uno de los conjuntos X_1, X_2, X_3 (de modo que 1 esté en la unión), pero no debemos colocar 1 en los tres conjuntos X_1, X_2, X_3 (en caso contrario, la intersección no sería vacía). Esta vez, también debemos colocar a 2 en al menos uno de los conjuntos X_1, X_2, X_3 (de modo que 2 esté también en la unión), pero no debemos colocar a 2 en los tres conjuntos X_1, X_2, X_3 (en caso contrario, la intersección no sería vacía). Así, cada uno de los elementos 1 y 2 estará exactamente en uno o dos de los conjuntos X_1, X_2, X_3. Enumeramos los conjuntos de manera sistemática, de modo que podamos reconocer algún patrón. La lista completa de ternas ordenadas es:

1 está en	*2 está en*	*1 está en*	*2 está en*	*1 está en*	*2 está en*
X_1	X_1	X_1	X_2	X_1	X_3
X_2	X_1	X_2	X_2	X_2	X_3
X_3	X_1	X_3	X_2	X_3	X_3
X_1, X_2	X_1	X_1, X_2	X_2	X_1, X_2	X_3
X_1, X_3	X_1	X_1, X_3	X_2	X_1, X_3	X_3
X_2, X_3	X_1	X_2, X_3	X_2	X_2, X_3	X_3
X_1	X_1, X_2	X_1	X_1, X_3	X_1	X_2, X_3
X_2	X_1, X_2	X_2	X_1, X_3	X_2	X_2, X_3
X_2	X_1, X_2	X_3	X_1, X_3	X_3	X_2, X_3
X_1, X_2	X_1, X_2	X_1, X_2	X_1, X_3	X_1, X_2	X_2, X_3
X_1, X_3	X_1, X_2	X_1, X_3	X_1, X_3	X_1, X_3	X_2, X_3
X_2, X_3	X_1, X_2	X_2, X_3	X_1, X_3	X_2, X_3	X_2, X_3

Por ejemplo, la entrada superior izquierda, $X_1 X_1$, especifica que 1 está en X_1 y 2 está en X_1; por tanto, esta entrada proporciona la terna ordenada

$$X_1 = \{1, 2\}, \quad X_2 = \varnothing, \quad X_3 = \varnothing.$$

Como se muestra, existen 36 ternas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfacen

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1, 2\} \quad \text{y} \quad X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \varnothing.$$

Vemos que existen seis formas de asignar 1 a los conjuntos X_1, X_2, X_3, lo cual implica la existencia de seis líneas por bloque. De manera análoga, existen seis formas de asignar 2 a los conjuntos X_1, X_2, X_3, por lo cual existen seis bloques.

Antes de continuar, ¿podría usted estimar el número de ternas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfacen

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \varnothing?$$

Aquí surge el patrón. Si $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, existen seis formas de asignar cada uno de los elementos $1, 2, \ldots, n$ a los conjuntos X_1, X_2, X_3. Por el principio de multiplicación, el número de ternas ordenadas es 6^n.

Determinación de otra solución

Hemos determinado una solución al problema partiendo de un problema más sencillo y luego descubriendo y justificando el patrón que apareció.

Otro enfoque consiste en analizar un problema similar e imitar su solución. El problema del ejemplo 4.1.5 es similar a nuestro problema en cuestión, en el sentido de que también es un problema de conteo relacionado con conjuntos:

Sea X un conjunto con n elementos. ¿Cuántos pares ordenados (A, B) satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$?

(En este momento, sería bueno regresar a releer el ejemplo 4.1.5.) La solución dada en el ejemplo 4.1.5 contaba el número de formas de asignar elementos de X con exactamente uno de los conjuntos A, $B - A$, o $X - B$.

Podemos resolver nuestro problema mediante un enfoque similar. Cada elemento de X está exactamente en uno de los conjuntos

$$\overline{X_1} \cap X_2 \cap X_3, \quad X_1 \cap \overline{X_2} \cap X_3, \quad X_1 \cap X_2 \cap \overline{X_3},$$
$$\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap X_3, \quad \overline{X_1} \cap X_2 \cap \overline{X_3}, \quad X_1 \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3}.$$

Como cada miembro de X puede ser asignado a uno de estos conjuntos de seis formas, por el principio de multiplicación, el número de ternas ordenadas es 6^n.

Observe que aunque este enfoque de solución del problema es distinto al de la sección anterior, el argumento final es esencialmente el mismo.

Solución formal

Cada elemento en X está exactamente en uno de los conjuntos

$$Y_1 = \overline{X_1} \cap X_2 \cap X_3, \quad Y_2 = X_1 \cap \overline{X_2} \cap X_3, \quad Y_3 = X_1 \cap X_2 \cap \overline{X_3},$$
$$Y_4 = \overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap X_3, \quad Y_5 = \overline{X_1} \cap X_2 \cap \overline{X_3}, \quad Y_6 = X_1 \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3}.$$

Podemos construir una terna ordenada mediante el siguiente proceso de ocho pasos: se elige j, $1 \le j \le 6$, y se coloca 1 en Y_j; se elige j, $1 \le j \le 6$, y se coloca 2 en Y_j; . . . ; se elige j, $1 \le j \le 6$, y se coloca 8 en Y_j. Por ejemplo, para construir la terna

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 4, 8\}, \quad \{2, 5, 6, 7\},$$

primero elegimos $j = 3$ y colocamos 1 en $Y_3 = X_1 \cap X_2 \cap \overline{X_3}$. Luego elegimos $j = 2$ y colocamos 2 en $Y_2 = X_1 \cap \overline{X_2} \cap X_3$. Las demás elecciones de j son $j = 6, 5, 4, 4, 4, 5$.

Cada elección de j puede hacerse de seis formas. Por el principio de multiplicación, el número de ternas ordenadas es

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^8 = 1{,}679{,}616.$$

Resumen de técnicas para resolver problemas

- Reemplazar el problema original con un problema más sencillo. Una forma de hacer esto consiste en reducir el tamaño del problema original.
- Enumerar directamente los elementos por contar.
- Enumerar los elementos de manera sistemática, de modo que surjan los patrones.
- Buscar patrones.
- Buscar un problema similar e imitar su solución.

4.2 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Existen cuatro candidatos para un puesto de elección: Zeke, Yung, Xeno y Wilma. Para que las posiciones de los nombres en la boleta electoral no influyan sobre los votantes, es necesario imprimir boletas con los nombres enumerados en todos los órdenes posibles. ¿Cuántas boletas distintas puede haber?

Podemos utilizar el principio de multiplicación. Podemos formar una boleta en cuatro pasos: Se elige el primer nombre por enumerar, se elige el segundo nombre, se elige el tercer nombre, y finalmente se elige el cuarto. El primer nombre puede elegirse de cuatro formas. Una vez elegido el primer nombre, el segundo nombre puede elegirse de tres formas. Una vez elegido el segundo nombre, el tercero puede elegirse de dos formas. Una vez elegido el tercer nombre, el cuarto puede elegirse de una forma. Por el principio de multiplicación, el número de boletas es

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Un ordenamiento de objetos, como los nombres en la boleta, es una **permutación**.

DEFINICIÓN 4.2.1

Una *permutación* de n elementos distintos $x_1, \ldots, x_n$ es un ordenamiento de los n elementos $x_1, \ldots, x_n$.

EJEMPLO 4.2.2

Existen seis permutaciones de tres elementos. Si los elementos se denotan como A, B, C, las seis permutaciones son

$$ABC, \quad ACB, \quad BAC, \quad BCA, \quad CAB, \quad CBA. \qquad \square$$

Hemos visto que existen 24 formas de ordenar cuatro candidatos en una boleta; así, existen 24 permutaciones de cuatro objetos. El método que utilizamos para contar el número de boletas distintas que contienen cuatro nombres puede utilizarse para deducir una fórmula para el número de permutaciones de n elementos.

La demostración del siguiente teorema para $n = 4$ se ilustra en la figura 4.2.1.

B	$\rightarrow$	A	$\rightarrow$	D	$\rightarrow$	C
Se elige el primer elemento		Se elige el segundo elemento		Se elige el tercer elemento		Se elige el cuarto elemento

FIGURA 4.2.1 La demostración del teorema 4.2.3 para $n = 4$. Una permutación de $ABCD$ se construye seleccionando de manera sucesiva el primer elemento, luego el segundo, después el tercero y, finalmente, el cuarto elemento.

TEOREMA 4.2.3

Existen $n!$ permutaciones de n elementos.

Demostración. Utilizamos el principio de multiplicación. Una permutación de n elementos puede construirse en n pasos: Se elige el primer elemento, luego el segundo, . . . , y finalmente el último elemento. El primer elemento puede elegirse de n formas. Una vez elegido el primer elemento, el segundo elemento puede elegirse de $n - 1$ formas. Una vez elegido el segundo elemento, el tercer elemento puede elegirse de $n - 2$ formas, y así sucesivamente. Por el principio de multiplicación, existen

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

permutaciones de n elementos. ■

EJEMPLO 4.2.4

Existen

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3{,}628{,}800$$

permutaciones de 10 elementos. □

EJEMPLO 4.2.5

¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEF$ contiene la subcadena DEF?

Para garantizar la presencia del patrón DEF en la subcadena, estas tres letras deben estar juntas y en este orden. Las demás letras, A, B y C, pueden colocarse de manera arbitraria. Podemos pensar que construimos las permutaciones de las letras $ABCDEF$ que contienen el patrón DEF permutando cuatro elementos, uno con la etiqueta DEF y los otros con las etiquetas A, B y C (véase la figura 4.2.2). Por el teorema 4.2.3, existen $4!$ permutaciones de cuatro objetos. Así, el número de permutaciones de las letras $ABCDEF$ que contienen a la subcadena DEF es

$$4! = 24. \qquad \square$$

$\boxed{DEF}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$

FIGURA 4.2.2 Permutación de cuatro elementos.

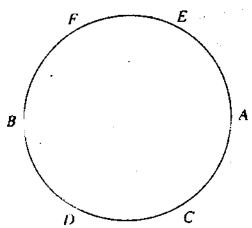
EJEMPLO 4.2.6

¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEF$ contienen las letras DEF juntas en cualquier orden?

Podemos resolver este problema mediante un procedimiento de dos pasos: Se elige un ordenamiento de las letras DEF, se construye una permutación de $ABCDEF$ que contenga el orden dado de las letras DEF. Por el teorema 4.2.3, el primer paso puede realizarse de $3! = 6$ formas, y, de acuerdo con el ejemplo 4.2.5, el segundo paso puede realizarse de 24 formas. Por el principio de multiplicación, el número de permutaciones de las letras $ABCDEF$ que contienen las letras DEF juntas y con un orden arbitrario es

$$6 \cdot 24 = 144. \qquad \square$$

EJEMPLO 4.2.7



¿De cuántas formas pueden sentarse seis personas en torno de una mesa circular? Si una forma de sentarse se obtiene de otra forma de sentarse haciendo que cada persona se mueva n asientos en el sentido de las manecillas del reloj, dichas formas se consideran idénticas.

Denotemos las personas por A, B, C, D, E y F. Como las formas de sentarse obtenidas mediante rotaciones se consideran idénticas, podríamos sentar a A de manera arbitraria. Para sentar a las otras cinco personas, podemos ordenarlas y luego sentarlas en este orden, en el sentido de las manecillas del reloj, a partir de A. Por ejemplo, la permutación *CDBFE* definiría la forma de sentarse de la figura anexa. Como existen $5! = 120$ permutaciones de cinco elementos, existen 120 formas en que seis personas pueden sentarse en torno de una mesa circular.

Podemos utilizar el mismo argumento para mostrar que existen $(n-1)!$ formas en que n personas pueden sentarse en torno de una mesa circular. □

A veces queremos considerar un ordenamiento de r elementos, elegidos entre n elementos disponibles. Tal ordenamiento es una ***r*-permutación**.

DEFINICIÓN 4.2.8

Una *r-permutación* de n elementos (distintos) $x_1, \ldots, x_n$ es un ordenamiento de un subconjunto de r elementos de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. El número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos se denota $P(n, r)$.

EJEMPLO 4.2.9

Los siguientes son ejemplos de 2-permutaciones de a, b, c:

$$ab, \quad ba, \quad ca. \qquad \square$$

Si $r = n$ en la definición 4.2.8, obtenemos un ordenamiento de los n elementos. Así, una n-permutación de n elementos es lo que antes hemos llamado una permutación. El teorema 4.2.3 dice que $P(n, n) = n!$. El número $P(n, r)$ de r-permutaciones de un conjunto con n elementos cuando $r < n$ puede deducirse como en la demostración del teorema 4.2.3. La demostración del teorema para $r = 6$ y $r = 3$ se ilustra en la figura 4.2.3.

C	$\rightarrow$	A	$\rightarrow$	E
Se elige el primer elemento		Se elige el segundo elemento		Se elige el tercer elemento

FIGURA 4.2.3 La demostración del teorema 4.2.10 para $n = 6$ y $r = 3$. Una r-permutación de *ABCDEF* se construye eligiendo de manera sucesiva el primer elemento, luego el segundo y finalmente el tercero.

TEOREMA 4.2.10

El número de r-permutaciones de un conjunto de n objetos distintos es

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1), \quad r \le n.$$

Demostración. Debemos contar el número de formas de ordenar r elementos elegidos de un conjunto con n elementos. El primer elemento puede elegirse de n formas. Una vez elegido el primer elemento, el segundo elemento puede elegirse de $n-1$ formas. Continuamos eligiendo elementos hasta que, después de elegir el $(r-1)$-ésimo elemento, elegimos el r-ésimo elemento. Este último elemento puede elegirse de $n-r+1$ formas. Por el principio de multiplicación, el número de r-permutaciones de un conjunto con n objetos distintos es

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4.2.11

De acuerdo con el teorema 4.2.10, el número de 2-permutaciones de $X = \{a, b, c\}$ es

$$P(3,2) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Estas seis 2-permutaciones son

$$ab, \quad ac, \quad ba, \quad bc, \quad ca, \quad cb. \qquad \square$$

EJEMPLO 4.2.12

¿De cuántas formas podemos elegir un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero de un grupo de 10 personas?

Debemos contar el número de ordenamientos de cuatro personas elegidas de un grupo de 10, pues un ordenamiento elige (de manera única) un presidente (primera elección), un vicepresidente (segunda elección), un secretario (tercera elección) y un tesorero (cuarta elección). Por el teorema 4.2.10, la solución es

$$P(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040. \qquad \square$$

También podríamos haber resuelto el ejemplo 4.2.12 apelando directamente al principio de multiplicación.

$P(n, r)$ puede escribirse en términos de factoriales:

$$P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}. \qquad (4.2.1)$$

EJEMPLO 4.2.13

Utilizamos (4.2.1) para escribir la solución del ejemplo 4.2.12 como

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}. \qquad \square$$

EJEMPLO 4.2.14

¿De cuántas formas pueden formarse en una fila siete marcianos distintos y cinco jupiterianos distintos si ninguna pareja de jupiterianos puede estar junta?

Podemos formar a los marcianos y los jupiterianos mediante un proceso de dos pasos: Formamos a los marcianos y formamos a los jupiterianos. Los marcianos pueden formarse de $7! = 5040$ maneras. Una vez formados los marcianos (por ejemplo, en las posiciones M_1–M_7), como ninguna pareja de jupiterianos pueden estar juntos, los jupiterianos tienen ocho posiciones posibles en las cuales formarse (indicadas mediante espacios en blanco):

$$\_M_1\_M_2\_M_3\_M_4\_M_5\_M_6\_M_7\_.$$

Así, los jupiterianos pueden formarse de $P(8,5) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ maneras. Por el principio de multiplicación, el número de maneras en que siete marcianos distintos y cinco jupiterianos distintos pueden formarse de modo que no queden jupiterianos juntos es

$$5040 \cdot 6720 = 33{,}868{,}800. \qquad \square$$

Ahora veremos las combinaciones. Una selección de objetos en la cual no importa el orden es una **combinación**.

DEFINICIÓN 4.2.15

Dado un conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ con n elementos (distintos),

(a) Una *r-combinación* de X es una selección no ordenada de r elementos de X (es decir, un subconjunto de X con r elementos).

(b) El número de r-combinaciones de un conjunto de n elementos distintos se denota $C(n, r)$ o $\binom{n}{r}$.

EJEMPLO 4.2.16

Un grupo de cinco estudiantes, Mary, Boris, Rosa, Ahmad y Nguyen, ha decidido hablar con la jefa del departamento de matemáticas para que el departamento ofrezca más cursos de matemáticas discretas. La jefa ha avisado que hablará con tres estudiantes. ¿De cuántas maneras pueden elegir estos cinco estudiantes a tres de ellos para hablar con la jefa?

Para resolver este problema, *no* debemos tomar en cuenta el orden. (Por ejemplo, no importa si la jefa habla con Mary, Ahmad y Nguyen o con Nguyen, Mary y Ahmad.) Si enumeramos las posibilidades, vemos que existen 10 maneras en que los cinco estudiantes pueden elegir a tres de ellos para hablar con la jefa:

MBR, MBA, MRA, BRA, MBN, MRN, BRN, MAN, BAN, RAN.

Con la terminología de la definición 4.2.15, el número de maneras en que los cinco estudiantes pueden elegir a tres de ellos para hablar con la jefa es $C(5,3)$, el número de 3-combinaciones de cinco elementos. Hemos determinado que

$$C(5,3) = 10. \qquad \square$$

A continuación deducimos una fórmula para $C(n, r)$, contando el número de r-permutaciones de un conjunto con n elementos de dos formas. La primera forma sólo utiliza la fórmula $P(n, r)$. La segunda forma de contar el número de r-permutaciones de un conjunto con n elementos implica el uso de $C(n, r)$. El cálculo de los dos valores nos permitirá derivar una fórmula de $C(n, r)$.

Podemos construir las r-permutaciones de un conjunto X con n elementos en dos pasos: Primero se elige una r-combinación de X (un subconjunto no ordenado con r elementos), y luego se ordena ésta. Por ejemplo, para construir una 2-permutación de $\{a, b, c, d\}$, podemos elegir primero una 2-combinación y luego ordenarla. La figura 4.2.4 muestra cómo se obtienen de esta manera todas las 2-permutaciones de $\{a, b, c, d\}$. El principio de multiplicación nos dice que el número de r-permutaciones es el producto del número de r-combinaciones y el número de ordenamientos de r elementos. Es decir,

$$P(n, r) = C(n, r)r!.$$

Por tanto,

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}.$$

Nuestro siguiente teorema establece este resultado y proporciona varias formas de escribir $C(n, r)$.

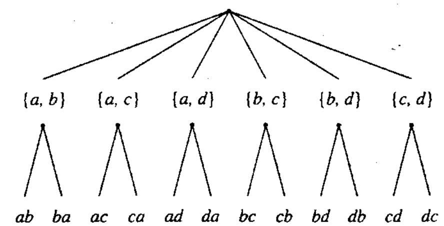


FIGURA 4.2.4 2-permutaciones de $\{a, b, c, d\}$.

TEOREMA 4.2.17

El número de r-combinaciones de un conjunto de n objetos distintos es

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!},\quad r\le n.$$

Demostración. La demostración de la primera ecuación está dada antes del enunciado del teorema. Las otras formas de la ecuación son consecuencia del teorema 4.2.10 y de la ecuación (4.2.1). ■

EJEMPLO 4.2.18

¿De cuántas formas puede elegirse un comité de tres entre un grupo de 10 personas distintas?

Como un comité es un grupo no ordenado de personas, la respuesta es

$$C(10,3)=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}=120.$$

□

EJEMPLO 4.2.19

¿De cuántas formas puede elegirse un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres distintas y seis hombres distintos?

Como en el ejemplo 4.2.18, vemos que las dos mujeres pueden elegirse de

$$C(5,2)=10$$

formas y que los tres hombres pueden elegirse de

$$C(6,3)=20$$

formas. El comité puede construirse en dos pasos sucesivos. Se eligen las mujeres, y luego se eligen los hombres. Por el principio de multiplicación, el número total de comités es

$$10\cdot 20=200.$$

□

EJEMPLO 4.2.20

¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen exactamente cuatro unos?

Una cadena de ocho bits que contiene cuatro unos queda determinada de manera única si indicamos cuáles bits contienen 1. Pero esto puede hacerse de

$$C(8,4)=70$$

formas. □

EJEMPLO 4.2.21

Una baraja ordinaria de 52 cartas consta de cuatro palos

tréboles, diamantes, corazones y espadas

con 13 denominaciones cada una

as, 2-10, jack, reina, rey.

(a) ¿Cuántas manos de póquer de cinco cartas (no ordenadas) pueden elegirse de una baraja ordinaria con 52 cartas?

(b) ¿Cuántas manos de póquer tienen todas las cartas de un mismo palo?

(c) ¿Cuántas manos de póquer tienen tres cartas de una denominación y dos cartas de una segunda denominación?

(a) La respuesta está dada por la fórmula de combinación

$$C(52,5)=2{,}598{,}960.$$

(b) Una mano con todas las cartas del mismo palo puede construirse en dos pasos: Se elige un palo, se eligen cinco cartas del palo elegido. El primer paso puede realizarse de cuatro formas y el segundo paso de $C(13,5)$ formas. Por el principio de multiplicación, la respuesta es

$$4\cdot C(13,5)=5148.$$

(c) Una mano con tres cartas de una denominación y dos cartas de una segunda denominación puede construirse en cuatro pasos: Se elige la primera denominación, se escoge también la segunda, se eligen tres cartas de la primera denominación, se eligen dos cartas de la segunda denominación. La primera denominación puede elegirse de 13 formas. Una vez elegida la primera denominación, podemos elegir la segunda de 12 formas. Podemos elegir tres cartas de la primera denominación de $C(4,3)$ formas y podemos elegir dos cartas de la segunda denominación de $C(4,2)$ formas. Por el principio de multiplicación, la respuesta es

$$13\cdot 12\cdot C(4,3)\cdot C(4,2)=3744.$$

□

EJEMPLO 4.2.22

¿Cuántas rutas existen desde la esquina inferior izquierda de una retícula cuadrada de $n \times n$ hasta la esquina superior derecha si sólo podemos viajar hacia la derecha y hacia arriba? Una de estas rutas aparece en una retícula de 4×4 en la figura 4.2.5a.

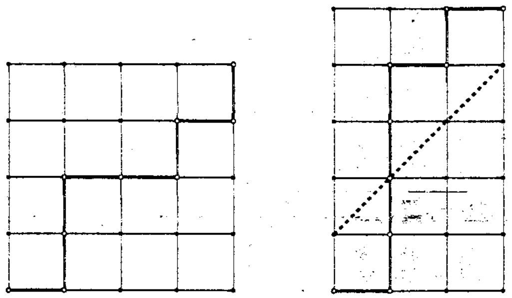


FIGURA 4.2.5 (a) Una retícula 4×4 con una ruta de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha. (b) La ruta en (a) transformada en una ruta en una retícula 5×3.

Cada ruta puede describirse mediante una cadena de n letras D (derecha) y n letras A (arriba). Por ejemplo, la ruta que aparece en la figura 4.2.5a puede describirse mediante la cadena *DAADDADA*. Cada una de estas cadenas puede obtenerse eligiendo n posiciones para las D, sin importar el orden de selección, de entre las $2n$ posiciones disponibles en la cadena y luego ocupando las demás posiciones con A. Así, existen $C(2n, n)$ rutas posibles. □

EJEMPLO 4.2.23

¿Cuántas rutas existen desde la esquina inferior izquierda de una retícula cuadrada de $n \times n$ hasta la esquina superior derecha si sólo podemos viajar hacia la derecha y hacia arriba y si sólo se permite tocar pero no ir por arriba de una recta diagonal que va de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha?

Diremos que una ruta que toca pero no pasa sobre la diagonal es una *ruta buena*, y una ruta que rebasa la diagonal es una *ruta mala*. Nuestro problema consiste en contar el número de rutas buenas. Sea G_n el número de rutas buenas y B_n el número de rutas malas. En el ejemplo 4.2.22 se mostró que

$$G_n + B_n = C(2n, n);$$

así, basta calcular el número de rutas malas.

Una ruta en una retícula $(n + 1) \times (n - 1)$ que va de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha (sin restricciones) es una ruta $(n + 1) \times (n - 1)$. La figura 4.2.5b muestra una ruta 5×3. Mostraremos que el número de rutas malas es igual al número de rutas $(n + 1) \times (n - 1)$ describiendo una función uno a uno y sobre del conjunto de rutas malas al conjunto de rutas $(n + 1) \times (n - 1)$.

Dada una ruta mala, determinamos el primer movimiento (partiendo de la esquina inferior izquierda) que la lleva por arriba de la diagonal. A partir de ese momento reemplazamos cada movimiento a la derecha por un movimiento hacia arriba y cada movimiento hacia arriba por un movimiento hacia la derecha. Por ejemplo, la ruta de la figura 4.2.5a se transforma en la ruta de la figura 4.2.5b. Esta transformación también puede realizarse girando la parte de la ruta posterior al primer movimiento arriba de la diagonal, en torno de la línea punteada que aparece en la figura 4.2.5b. Vemos que esta transformación realmente asigna a cada ruta mala una ruta $(n + 1) \times (n - 1)$.

Para mostrar que nuestra función es sobre, consideremos cualquier ruta $(n + 1) \times (n - 1)$. Como esta ruta termina sobre la diagonal, existe un primer movimiento que la lleva arriba de la diagonal. Entonces podemos girar el resto de la ruta en torno de la línea punteada que aparece en la figura 4.2.5b para obtener una ruta mala. La imagen de esta ruta mala bajo nuestra función es la ruta $(n + 1) \times (n - 1)$ con la que comenzamos. Por tanto, nuestra función es sobre. Nuestra función también es uno a uno, pues podemos verificar con facilidad que la función transforma rutas malas distintas en rutas $(n + 1) \times (n - 1)$ distintas. Por tanto, existe el mismo número de rutas malas y de rutas $(n + 1) \times (n - 1)$.

Un argumento similar al del ejemplo 4.2.22 muestra que el número de rutas $(n + 1) \times (n - 1)$ es igual a $C(2n, n - 1)$. Así, el número de rutas buenas es igual a

$$\begin{aligned} C(2n,n) - B_n = C(2n,n) - C(2n,n-1) &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{C(2n,n)}{n+1}. \end{aligned}$$

□

Los números $C(2n, n)/(n + 1)$ son llamados **números de Catalan** en honor del matemático belga Eugène-Charles Catalan (1814-1894), quien descubrió una deducción elemental de la fórmula $C(2n, n)/(n + 1)$. El primer problema investigado por Catalan aparece en el ejercicio 29 de la sección 5.1. Catalan publicó un gran número de artículos de análisis, combinatoria, álgebra, geometría, probabilidad y teoría de números. La conjetura de Catalan de que 0,1 y 8, 9 son las únicas parejas de enteros no negativos consecutivos que son potencia, permanece abierta (véase P. Ribenboim, "Catalan's conjeture", Am. núm., 103 [1996], 529–538).

En este libro denotaremos los números de Catalan $C(2n, n)/(n + 1)$ como C_n, $n \geq 1$, y definimos C_0 como 1. Los primeros números de Catalan son

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42.$$

Al igual que los números de Fibonacci, los números de Catalan pueden aparecer en lugares insospechados (por ejemplo, véanse los ejercicios 28 y 29 de la sección 5.1).

Concluimos esta sección con otra demostración del teorema 4.2.17, el cual proporciona una fórmula para el número de subconjuntos con r elementos, de un conjunto con n elementos. La demostración se ilustra en la figura 4.2.6. Sea X un conjunto con n elementos. Supondremos válida la fórmula $P(n, r) = n(n-1)\cdots(n-r+1)$, que cuenta el número de ordenamientos de subconjuntos con r elementos elegidos de X. Para contar el número de subconjuntos con r elementos de X, *no* queremos tomar en cuenta el orden; queremos considerar como *equivalentes* las permutaciones del mismo subconjunto. Formalmente, definimos una relación R sobre el conjunto S de r-permutaciones de X mediante la regla: p_1Rp_2 si p_1 y p_2 son permutaciones del mismo subconjunto con r elementos de X. Se verifica de manera directa que R es una relación de equivalencia sobre S.

Si p es una r-permutación de X, entonces p es una permutación de algún subconjunto con r elementos X_r de X; así, la clase de equivalencia que contiene a p consta de todas las permutaciones de X_r. Vemos que cada clase de equivalencia tiene $r!$ elementos. Una clase de equivalencia queda determinada mediante el subconjunto de X con r elementos que es permutado para obtener sus miembros. Por tanto, existen $C(n, r)$ clases de equivalencia. Como el conjunto S tiene $P(n, r)$ elementos, por el teorema 2.5.16, $C(n, r) = P(n, r)/r!$.

ab	*ac*	*ad*	*bc*	*bd*	*cd*
ba	*ca*	*da*	*cb*	*db*	*dc*

FIGURA 4.2.6 La demostración alternativa del teorema 4.2.17 para $n = 4$ y $r = 2$. Cada caja contiene una clase de equivalencia para la relación R sobre el conjunto de 2-permutaciones de $X = \{a, b, c, d\}$ definida como p_1Rp_2 si p_1 y p_2 son permutaciones del mismo subconjunto con 2 elementos de X. Existen $P(4, 2) = 12$ 2-permutaciones de X y 2 formas de permutar cada 2-permutación. Como cada clase de equivalencia corresponde a un subconjunto de X, $12/2 = C(4, 2)$.

Ejercicios

1. ¿Cuántas permutaciones existen de a, b, c, d?

2. Enumere las permutaciones de a, b, c, d.

3. ¿Cuántas 3-permutaciones existen de a, b, c, d?

4. Enumere las 3-permutaciones de a, b, c, d.

5. ¿Cuántas permutaciones existen de 11 objetos distintos?

6. ¿Cuántas 5-permutaciones existen de 11 objetos distintos?

7. ¿De cuántas formas puede elegirse un presidente, un vicepresidente y un secretario de actas de un grupo de 11 personas?

8. ¿De cuántas formas puede elegirse un presidente, un vicepresidente un secretario y un tesorero de un grupo de 12 personas?

9. En una carrera de 12 caballos, ¿de cuántas formas puede terminar la carrera (sólo importa el orden primero, segundo y tercero)?

En los ejercicios 10-18, determine cuántas cadenas pueden formarse ordenando las letras *ABCDE* sujetas a las condiciones dadas.

10. Que contengan la subcadena *ACE*.

11. Que contengan las letras *ACE*, juntas y en cualquier orden.

12. Que contengan las subcadenas *DB* y *AE*.

13. Que contengan la subcadena *AE* o la subcadena *EA*.

14. Que *A* aparezca antes que *D*. *Ejemplos*: *BCAED*, *BCADE*.

15. Que no contenga las subcadenas *AB*, *CD*.

16. Que no contenga las subcadenas *AB*, *BE*.

17. Que *A* aparezca antes que *C* y que *C* aparezca antes que *E*.

18. Que contenga la subcadena *DB* o la subcadena *BE*.

19. ¿De cuántas maneras puede formarse una fila con cinco marcianos distintos y ocho jupiterianos distintos si ningún par de marcianos debe estar junto?

20. ¿De cuántas maneras puede formarse una fila con cinco marcianos distintos, 10 venusinos distintos y ocho jupiterianos distintos si ningún par de marcianos debe estar junto?

21. ¿De cuántas maneras puede formarse una fila con cinco marcianos distintos y cinco jupiterianos distintos?

22. ¿De cuántas formas pueden sentarse en torno de una mesa redonda cinco marcianos distintos y cinco jupiterianos distintos?

23. ¿De cuántas formas pueden sentarse en torno de una mesa redonda cinco marcianos distintos y cinco jupiterianos distintos si ningún par de marcianos debe estar junto?

24. ¿De cuántas formas pueden sentarse en torno de una mesa redonda cinco marcianos distintos y ocho jupiterianos distintos si ningún par de marcianos debe estar junto?

En los ejercicios 25-27, sea $X = \{a, b, c, d\}$.

25. Calcule el número de 3-combinaciones de X.

26. Enumere las 3-combinaciones de X.

27. Muestre la relación entre las 3-permutaciones y las 3-combinaciones de X mediante un diagrama como el de la figura 4.2.4.

28. ¿De cuántas formas podemos elegir un comité de 3 personas entre un grupo de 11?

29. ¿De cuántas formas podemos elegir un comité de 4 personas entre un grupo de 12?

30. En el juego Lotto de la lotería estatal de Illinois, una persona debe elegir seis números (en cualquier orden) entre 44 números. ¿De cuántas formas puede hacerse esto? El estado piensa modificar el juego, de modo que una persona deba elegir seis números de 48. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

Los ejercicios 31-36 se refieren a un club que consta de seis hombres distintos y siete mujeres distintas.

31. ¿De cuántas formas puede elegirse un comité de cinco personas?

32. ¿De cuántas formas puede elegirse un comité de tres hombres y cuatro mujeres?

33. ¿De cuántas formas puede elegirse un comité de cuatro personas que tenga al menos una mujer?

34. ¿De cuántas formas puede elegirse un comité de cuatro personas que tenga al menos un hombre?

35. ¿De cuántas formas puede elegirse un comité de cuatro personas que tenga personas de ambos sexos?

36. ¿De cuántas formas puede elegirse un comité de cuatro personas de modo que Mabel y Ralph no queden juntos?

37. ¿De cuántas formas puede elegirse un comité de cuatro republicanos, tres demócratas y dos independientes de un grupo de 10 republicanos distintos, 12 demócratas distintos y cuatro independientes distintos?

38. ¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen exactamente tres ceros?

39. ¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen tres ceros consecutivos y cinco unos?

★ **40.** ¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen al menos dos ceros consecutivos?

En los ejercicios 41-49, determine el número de manos de póquer de cinco cartas (sin orden), elegidas de una baraja común con 52 cartas, con las propiedades indicadas.

41. Con cuatro ases.

42. Con cuatro cartas del mismo tipo. es decir, cuatro cartas de la misma denominación.

43. Que todas las cartas sean espadas.

44. Con cartas de exactamente dos palos.

45. Con cartas de todos los palos.

46. De la forma A2345 del mismo palo.

47. Consecutivas y del mismo palo. (Suponga que el as es la menor denominación.)

48. Consecutivas. (Suponga que el as es la menor denominación.)

49. Con dos cartas de una denominación, dos cartas de otra denominación y una carta de una tercera denominación.

50. Determine el número de manos de bridge de 13 cartas (no ordenadas) elegidas de una baraja normal con 52 cartas.

51. ¿Cuántas manos de bridge tienen todas las cartas del mismo palo?

52. ¿Cuántas manos de bridge contienen exactamente dos palos?

53. ¿Cuántas manos de bridge tienen los cuatro ases?

54. ¿Cuántas manos de bridge tienen cinco espadas, cuatro corazones, tres tréboles y un diamante?

55. ¿Cuántas manos de bridge tienen cinco cartas de un palo, cuatro de otro palo, tres de otro palo y una de otro palo?

56. ¿Cuántas manos de bridge tienen cuatro cartas de tres palos y una carta del cuarto palo?

57. ¿Cuántas manos de bridge no tienen cartas 10, J, Q, K y A?

En los ejercicios 58-62, una moneda se arroja 10 veces.

58. ¿Cuántos resultados son posibles? [Un *resultado* es una lista de 10 caras (C) y cruces (X) que proporciona el resultado de cada uno de los 10 lanzamientos. Por ejemplo,

C C X C X C C C X C

representa 10 lanzamientos, en los que se obtuvo una cara en los dos primeros lanzamientos, luego una cruz, luego una cara, etcétera.]

59. ¿Cuántos resultados tienen exactamente tres caras?

60. ¿Cuántos resultados tienen a lo más tres caras?

61. ¿Cuántos resultados tienen una cara en el quinto lanzamiento?

62. ¿Cuántos resultados tienen tantas caras como cruces?

Los ejercicios 63-66 se refieren a un embarque de 50 microprocesadores de los cuales cuatro están defectuosos.

63. ¿De cuántas formas puede elegirse un conjunto de cuatro microprocesadores?

64. ¿De cuántas formas puede elegirse un conjunto de cuatro microprocesadores no defectuosos?

65. ¿De cuántas formas puede elegirse un conjunto de cuatro microprocesadores con exactamente dos microprocesadores defectuosos?

66. ¿De cuántas formas puede elegirse un conjunto de cuatro microprocesadores que contenga al menos un microprocesador defectuoso?

☆ 67. Muestre que el número de cadenas binarias de longitud $n \geq 4$ que contengan exactamente dos ocurrencias de 10 es $C(n + 1, 5)$.

☆ 68. Muestre que el número de cadenas de n bit con exactamente k ceros, sin que haya ceros consecutivos, es $C(n - k + 1, k)$.

☆ 69. Muestre que el producto de cualquier entero positivo y sus $k - 1$ sucesores es divisible entre $k!$.

70. Muestre que existen $(2n - 1)(2n - 3)\cdots 3 \cdot 1$ formas de elegir n pares de $2n$ elementos distintos.

71. Suponga que tenemos n objetos, r distintos y $n - r$ idénticos. Proporcione otra manera de deducir la fórmula

$$P(n, r) = r!C(n, r)$$

contando el número de ordenamientos de los n objetos de dos maneras:

- Contando los ordenamientos, eligiendo primero las posiciones de los r objetos distintos.
- Contando los ordenamientos, eligiendo primero las posiciones de los $n - r$ objetos idénticos.

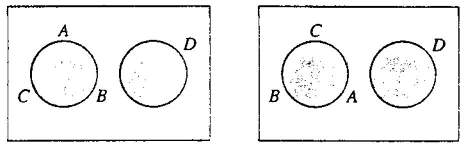
72. ¿Cuál es el error del siguiente argumento, el cual supuestamente muestra que $4C(39, 13)$ manos de bridge contienen tres o menos palos?

$C(39, 13)$ manos contienen sólo tréboles, diamantes y espadas. De hecho, para cualesquiera tres palos, existen $C(39, 13)$ manos que sólo contienen estos tres palos. Como existen cuatro 3-combinaciones de los palos, la respuesta es $4C(39, 13)$.

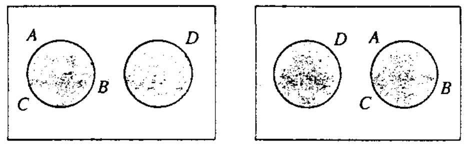
73. ¿Cuál es el error del siguiente argumento, el cual supuestamente muestra que $13^4 \cdot 48$ manos de póquer de cinco cartas (sin ordenar) contienen cartas de todos los palos?

Se elige una carta de cada palo. Esto puede realizarse de $13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 = 13^4$ formas. Como la quinta carta puede elegirse de 48 formas, la respuesta es $13^4 \cdot 48$.

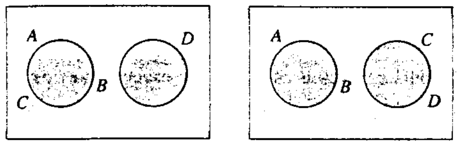
74. Sea $s_{n,k}$ el número de formas de sentar a n personas en torno de k mesas redondas, con al menos una persona en cada mesa. (Los números $s_{n,k}$ son los *números de Stirling de primer tipo.*) El orden de las tablas *no* se toma en cuenta. El orden del arreglo en una mesa *se* toma en cuenta, salvo rotaciones. *Ejemplos*: El siguiente par *no* es distinto:



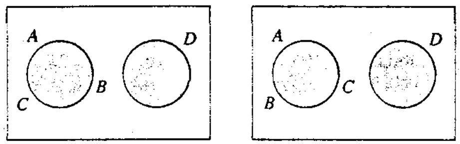
El siguiente par *no* es distinto:



El siguiente par *es* distinto:



El siguiente par *es* distinto:



(a) Muestre que $s_{n,k} = 0$ si $k > n$.
(b) Muestre que $s_{n,n} = 1$ para toda $n \geq 1$.
(c) Muestre que $s_{n,1} = (n-1)!$ para toda $n \geq 1$.
(d) Muestre que $s_{n,n-1} = C(n, 2)$ para toda $n \geq 2$.
(e) Muestre que

$$s_{n,2} = (n-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \qquad \text{para toda } n \geq 2.$$

(f) Muestre que

$$\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n! \qquad \text{para toda } n \geq 1.$$

(g) Determine una fórmula para $s_{n,n-2}$, $n \geq 3$, y demuéstrela.

75. Sea $S_{n,k}$ el número de formas de separar un conjunto de n elementos en exactamente k subconjuntos no vacíos. El orden de los subconjuntos no se toma en cuenta. (Los números $S_{n,k}$ son los *números de Stirling de segundo tipo.*)
(a) Muestre que $S_{n,k} = 0$ si $k > n$.
(b) Muestre que $S_{n,n} = 1$ para toda $n \geq 1$.
(c) Muestre que $S_{n,1} = 1$ para toda $n \geq 1$.
(d) Muestre que $S_{3,2} = 3$.
(e) Muestre que $S_{4,2} = 7$.
(f) Muestre que $S_{4,3} = 6$.
(g) Muestre que $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ para toda $n \geq 2$.
(h) Muestre que $S_{n,n-1} = C(n, 2)$ para toda $n \geq 2$.
(i) Determine una fórmula para $S_{n,n-2}$, $n \geq 3$, y demuéstrela.

76. Muestre que existen

$$\sum_{k=1}^{n} S_{n,k}$$

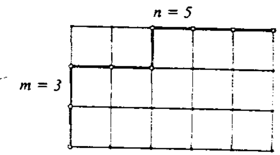
relaciones de equivalencia sobre un conjunto de n elementos. [Los números $S_{n,k}$ son los números de Stirling del segundo tipo; véase el ejercicio 75.]

RINCÓN DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

COMBINACIONES

Problema

(a) ¿Cuántas rutas existen desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha de una retícula $m \times n$, la cual sólo puede recorrerse hacia la derecha o hacia arriba? Por ejemplo, la figura anexa es una retícula 3×5 en la cual se muestra una ruta.



(b) Divida las rutas en clases, basándose en el momento en que la ruta llega primero a la arista superior, para deducir la fórmula

$$\sum_{k=0}^{n} C(k + m - 1, k) = C(m + n, m).$$

Para enfrentar el problema

En el ejemplo 4.2.22 se contó el número de trayectorias desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha de una retícula $n \times n$, la cual sólo se podía recorrer hacia la derecha o hacia arriba. La solución a ese problema codificaba cada ruta como una cadena de n letras D (derecha) y n letras A (arriba). Entonces, el problema se convirtió en el problema de contar el número de tales cadenas. Una de estas cadenas puede obtenerse eligiendo n posiciones para las letras D, sin importar el orden de selección, entre las $2n$ posiciones disponibles en la cadena, para después llenar las demás posiciones con letras A. Así, el número de cadenas y el número de rutas son iguales a $C(2n, n)$.

En este nuevo problema, podemos codificar cada ruta como una cadena de n letras D (derecha) y m letras A (arriba). Como en el teorema anterior, debemos contar el número de tales cadenas. Una de estas cadenas puede obtenerse eligiendo n posiciones para las letras D, sin importar el orden de selección, entre las $n + m$ posiciones disponibles en la cadena y llenando después las posiciones restantes con letras A. Así, el número de cadenas y el número de rutas son iguales a $C(n + m, n)$. Con esto hemos respondido a la parte (a).

En la parte (b) se nos proporciona una sugerencia importante: Dividir las rutas en clases de acuerdo con el momento en que la ruta llega a la arista superior. Una ruta puede llegar por primera vez a la arista superior en cualquiera de $n + 1$ posiciones. En la figura anterior, la ruta que se muestra toca por vez primera a la arista superior en la tercera posición a partir de la izquierda. Antes de continuar, tal vez el lector se pregunte la razón de dividir las rutas en clases.

Observe que al dividir las rutas en clases con base en el primer momento en que la ruta toca la arista superior:

- Las clases son *ajenas.*

(Una ruta no puede tocar a la arista superior en dos o más posiciones distintas.) Observe también que todas las rutas llegan a la arista superior en algún momento, de modo que

- Cada ruta está en alguna clase.

Con la terminología de la sección 2.1 (véase el ejemplo 2.1.10 y el análisis anterior a éste), las clases establecen una *partición* del conjunto de rutas. Debido a este hecho, podemos aplicar el principio de la suma, de modo que la suma del número de rutas en cada clase es igual al número total de rutas. (Ninguna ruta se cuenta dos veces, pues las clases no se traslapan, y cada ruta se cuenta una vez, pues cada ruta está en alguna clase.) Es claro que la ecuación que debemos demostrar surge de igualar la suma de los números de rutas en cada clase con el número total de rutas.

Determinación de una solución

Ya hemos resuelto la parte (a). Para la parte (b), observemos la retícula 3×5. Existe exactamente una ruta que llega por vez primera a la arista superior en la primera posición a partir de la izquierda. Existen tres rutas que llegan por vez primera a la arista superior en la segunda posición a partir de la izquierda:

Observe que la única variación en las figuras anteriores ocurre entre el inicio y el

punto marcado con un círculo. Dicho de otra forma, después de que una ruta llega a dicho punto, sólo existe una forma de concluir el recorrido. Por tanto, basta contar el número de rutas desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha de una retícula 2×1. ¡Pero ya hemos resuelto esto en la parte (a)! El número de rutas desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha de una retícula 2×1 es igual a $C(2 + 1, 1) = 3$. De manera análoga, vemos que el número de rutas que llegan por vez primera a la arista superior en la tercera posición desde la izquierda es igual al número de rutas desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha de una retícula 2×2 [a saber, $C(2 + 2, 2) = 6$]. Al sumar obtenemos todas las rutas

$$C(5 + 3, 5) = C(0 + 2, 0) + C(1 + 2, 1) + C(2 + 2, 2) + C(3 + 2, 3) + C(4 + 2, 4) + C(5 + 2, 5).$$

Si reemplazamos cada término $C(k + 3 - 1, k)$ por su valor, obtenemos

$$56 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21.$$

El lector debe verificar esta fórmula, determinar las seis rutas que llegan por vez primera en la tercera posición desde la izquierda, y ver por qué el número de tales rutas es igual al número de rutas desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha de una retícula 2×2.

Solución formal

(a) Podemos codificar cada ruta como una cadena de n letras D (derecha) y m letras A (arriba). Cualquiera de estas cadenas puede obtenerse eligiendo n posiciones para las letras D, sin importar el orden de selección, entre las $n + m$ posiciones disponibles en la cadena, y luego ocupando las demás posiciones con letras A. Así, el número de rutas es igual a $C(n + m, n)$.

(b) Cada cadena puede describirse como una cadena que contiene n letras D y m letras A. La última A de la cadena señala el punto donde la ruta toca por vez primera a la arista superior. Contaremos las cadenas, dividiéndolas en clases que constan de cadenas que terminan en A, AD, ADD, y así sucesivamente. Existen

$$C(n + m - 1, n)$$

cadenas que terminan en A, pues debemos elegir n espacios entre los primeros $n + m - 1$ espacios para las n letras D. Existen

$$C((n - 1) + m - 1, n - 1)$$

cadenas que terminan en AD, pues debemos elegir $n - 1$ espacios entre los primeros $(n - 1) + m - 1$ espacios para las $n - 1$ letras D. En general, existen $C(k + m - 1, k)$ cadenas que terminan en AD^{n-k}. Como en total existen $C(m + n, m)$ cadenas, obtenemos el resultado deseado.

Resumen de técnicas para resolver problemas

- Busque un problema similar e imite su solución.
- Con frecuencia, el conteo del número de miembros de un conjunto de dos maneras distintas conduce a una ecuación. En particular, si $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una partición de X, podemos aplicar el principio de la suma y

$$|X| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|.$$

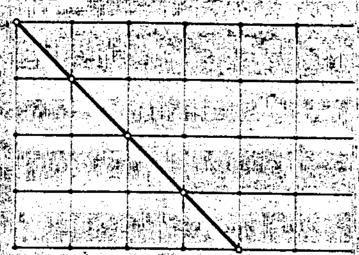
- Enumere en forma directa algunos de los elementos por contar.
- Busque patrones.

Comentarios

Antes de aplicar el principio de la suma, es importante verificar que una supuesta partición realmente lo sea. Si X es el conjunto de cadenas de cinco bits y X_i es el conjunto de cadenas de cinco bits que no contienen i ceros consecutivos, el principio de la suma *no* se aplica; los conjuntos X_i *no* son ajenos por pares. Por ejemplo, $00001 \in X_2 \cap X_3$. Como ejemplo de una partición de X, podríamos definir X_i como el conjunto de cadenas de cinco bits que contienen exactamente i ceros.

Ejercicios

1. Divida las rutas en clases, con base en el primer momento en que la ruta cruza una recta vertical, y utilice el principio de la suma para deducir una fórmula como la demostrada en esta sección.
2. Divida las rutas en clases, con base en el momento en que la ruta cruza la línea inclinada de la figura.



Luego, utilice el principio de la suma para deducir una fórmula como la demostrada en esta sección.

4.3 ALGORITMOS PARA GENERAR PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

El grupo de rock Unhinged Universe ha grabado n videos, cuyos tiempos de ejecución son

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

segundos. Hay que lanzar al mercado una cinta que contenga C segundos. Como ésta es la primera cinta del grupo, ellos quieren incluir la mayor cantidad posible de material. Así, el problema consiste en elegir un subconjunto $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que la suma

$$\sum_{j=1}^{k} t_{i_j} \qquad (4.3.1)$$

no exceda a C y sea lo más grande posible. Un método directo consiste en examinar todos los subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y elegir un subconjunto de modo que la suma (4.3.1) no exceda a C y sea lo más grande posible. Para implantar este método, necesitamos un algoritmo que genere todas las combinaciones de un conjunto con n elementos. En esta sección desarrollaremos algoritmos para generar combinaciones y permutaciones.

Como existen 2^n subconjuntos de un conjunto con n elementos, el tiempo de ejecución de un algoritmo que examine todos los subconjuntos es $\Omega(2^n)$. Como hemos visto en la sección 3.5, la ejecución de tales algoritmos no es práctica, salvo para valores pequeños de n. Por desgracia, existen problemas (un ejemplo de los cuales es el problema de la cinta en cuestión) para los cuales no se conoce un método mejor que el de enumerar todas las posibilidades.

Nuestro algoritmo enumera las permutaciones y las combinaciones en **orden lexicográfico**. Este orden generaliza el orden común de los diccionarios.

Dadas dos palabras distintas, para determinar cuál precede a la otra en el diccionario, comparamos las letras en las palabras. Existen dos posibilidades:

1. Las palabras tienen diferentes longitudes, y cada letra de la palabra más corta es idéntica a la letra correspondiente en la palabra más larga.
2. Las palabras tienen igual o distinta longitud, y en alguna posición, las letras de las palabras son diferentes. (4.3.2)

Si se cumple 1, entonces la palabra más corta precede a la más larga. (Por ejemplo, "gas" precede a "gaseoso" en el diccionario.) Si se cumple 2, localizamos la primera posición p (partiendo de la izquierda) donde las letras son distintas. El orden de las palabras se determina mediante el orden de las letras en la posición p. [Por ejemplo, "gladiador" precede a "gladiola" en el diccionario. En la primera posición (desde la izquierda) donde las letras son distintas, tenemos una "a" en "gladiador" y una "o" en "gladiola", y "a" precede a "o" en el alfabeto.]

El orden lexicográfico generaliza el orden común de los diccionarios, reemplazando el alfabeto por cualquier conjunto de símbolos para los cuales se ha definido un orden. Nosotros trabajaremos con cadenas de enteros.

DEFINICIÓN 4.3.1

Sean $\alpha = s_1 s_2 \cdots s_p$ y $\beta = t_1 t_2 \cdots t_q$ cadenas sobre $\{1, 2, \ldots, n\}$. Decimos que α es *lexicográficamente menor que* β y escribimos $\alpha < \beta$ si

(a) $p < q$ y $s_i = t_i$ para $i = 1, \ldots, p$

o

(b) para algún i, $s_i \neq t_i$ y para el mínimo de tales i, tenemos $s_i < t_i$.

En la definición 4.3.1, el caso (a) corresponde a la posibilidad 1 de (4.3.2) y el caso (b) corresponde a la posibilidad 2 de (4.3.2).

EJEMPLO 4.3.2

Sean $\alpha = 132$ y $\beta = 1324$ cadenas sobre $\{1, 2, 3, 4\}$. En la notación de la definición 4.3.1, $p = 3$, $q = 4$, $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 2$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 2$ y $t_4 = 4$. Como $p = 3 < 4 = q$ y $s_i = t_i$ para $i = 1, 2, 3$, se cumple la condición (a) de la definición 4.3.1. Por tanto, $\alpha < \beta$. □

EJEMPLO 4.3.3

Sean $\alpha = 13246$ y $\beta = 1342$ cadenas sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En la notación de la definición 4.3.1, $p = 5$, $q = 4$, $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 2$, $s_4 = 4$, $s_5 = 6$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$ y $t_4 = 2$. El menor i para el cual $s_i \neq t_i$ es $i = 3$. Como $s_3 < t_3$, por la condición (b) de la definición 4.3.1, $\alpha < \beta$. □

EJEMPLO 4.3.4

Sean $\alpha = 1324$ y $\beta = 1342$ cadenas sobre $\{1, 2, 3, 4\}$. En la notación de la definición 4.3.1, $p = q = 4$, $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 2$, $s_4 = 4$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$ y $t_4 = 2$. El menor i para el cual $s_i \neq t_i$ es $i = 3$. Como $s_3 < t_3$, por la condición (b) de la definición 4.3.1, $\alpha < \beta$. □

EJEMPLO 4.3.5

Sean $\alpha = 13542$ y $\beta = 21354$ cadenas sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. En la notación de la definición 4.3.1, $s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 5, s_4 = 4, s_5 = 2, t_1 = 2, t_2 = 1, t_3 = 3, t_4 = 5$ y $t_5 = 4$. El menor i para el cual $s_i \neq t_i$ es $i = 1$. Como $s_1 < t_1$, por la condición (b) de la definición 4.3.1, $\alpha < \beta$. □

Para las cadenas de la misma longitud sobre $\{1, 2, \ldots, 9\}$, el orden lexicográfico es igual al orden numérico de los enteros positivos, si interpretamos las cadenas como números decimales (véanse los ejemplos 4.3.4 y 4.3.5). Para las cadenas de distinta longitud, el orden lexicográfico puede ser distinto del orden numérico (véase el ejemplo 4.3.3). En el resto de esta sección, orden se refiere al *orden* lexicográfico.

Primero, consideremos el problema de enumerar todas las r-combinaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$. En nuestro algoritmo, enumeraremos la r-combinación $\{x_1, \ldots, x_r\}$ como la cadena $s_1 \cdots s_r$, donde $s_1 < s_2 < \cdots < s_r$ y $\{x_1, \ldots, x_r\} = \{s_1, \ldots, s_r\}$. Por ejemplo, la 3-combinación $\{6, 2, 4\}$ se enumera 246.

Enumeraremos las r-combinaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico. Así, la primera cadena enumerada será $12 \cdots r$ y la última será $(n - r + 1) \cdots n$.

EJEMPLO 4.3.6

Consideremos el orden en que se enumerarán las 5-combinaciones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. La primera cadena es 12345, seguida por 12346 y 12347. La siguiente cadena es 12356 seguida por 12357. La última cadena será 34567. □

EJEMPLO 4.3.7

Determine la cadena posterior a 13467 al enumerar las 5-combinaciones de $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Ninguna cadena que comience con 134 y represente una 5-combinación de X excede a 13467. Así, la cadena posterior a 13467 debe comenzar con 135. Como 13567 es la menor cadena que comienza con 135 y que representa una 5-combinación de X, la respuesta es 13567. □

EJEMPLO 4.3.8

Determine la cadena posterior a 2367 al enumerar las 4-combinaciones de $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Ninguna cadena que comience con 23 y represente una 4-combinación de X excede a 2367. Así, la cadena posterior a 2367 debe comenzar con 24. Como 2456 es la menor cadena que comienza con 24 y representa una 4-combinación de X, la respuesta es 2456. □

Comienza a aparecer un patrón. Dada una cadena $\alpha = s_1 \cdots s_r$ que represente a la r-combinación $\{s_1, \ldots, s_r\}$, para determinar la siguiente cadena $\beta = t_1 \cdots t_r$ buscamos el elemento de más a la derecha que no tenga su máximo valor (s_r puede tener el valor máximo n, s_{r-1} puede tener el valor máximo $n - 1$, y así sucesivamente). Entonces

$$t_i = s_i \quad \text{para } i = 1, \ldots, m - 1.$$

El elemento t_m es igual a $s_m + 1$. Para el resto de la cadena β tenemos

$$t_{m+1} \cdots t_r\ (s_m + 2)(s_m + 3) \cdots.$$

A continuación damos el algoritmo.

ALGORITMO 4.3.9 ***Generación de combinaciones***

Este algoritmo enumera todas las r-combinaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico creciente.

Entrada: r, n

Salida: Todas las r-combinaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico creciente.

```
procedure combination(r, n)
 for i := 1 to r do
   s_i := i
 print s_1, ..., s_r   // se imprime la primera r-combinación
 for i := 2 to C(n, r) do
  begin
  m := r
  max_val := n
  while s_m = max_val do
   // se determina el elemento más a la derecha, que no tenga su máximo valor
   begin
   m := m - 1
   max_val := max_val - 1
   end
  // se incrementa el elemento más a la derecha
  s_m := s_m + 1
  // el resto de los elementos son los sucesores de s_m
  for j := m + 1 to r do
    s_j := s_{j-1} + 1
  print s_1, ..., s_r   // se imprime la i-ésima combinación
  end
end combination
```

EJEMPLO 4.3.10

Mostramos la forma en que el algoritmo 4.3.9 genera la 5-combinación de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ posterior a 23467. Estamos suponiendo que

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 4, \quad s_4 = 6, \quad s_5 = 7.$$

En la línea 15, vemos que s_3 es el elemento más a la derecha que no alcanza su máximo valor. En la línea 16, s_3 se iguala a 5. En las líneas 18 y 19, s_4 se iguala a 6 y s_5 se iguala a 7. En este momento,

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 5, \quad s_4 = 6, \quad s_5 = 7.$$

Hemos generado la 5-combinación 23567 posterior a 23467. □

EJEMPLO 4.3.11

Las 4-combinaciones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ enumeradas según el algoritmo 4.3.9 son

1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1256, 1345, 1346,
1356, 1456, 2345, 2346, 2356, 2456, 3456. □

Al igual que el algoritmo para generación de las r-combinaciones, el algoritmo para generar permutaciones enumerará las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico. (En el ejercicio 16 se pide un algoritmo que genere todas las r-permutaciones de un conjunto con n elementos.)

EJEMPLO 4.3.12

Para construir la permutación de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ posterior a 163542, debemos mantener idénticos el mayor número posible de dígitos de la izquierda.

¿Podría la permutación posterior a la permutación dada tener la forma 1635__? Como la única permutación de la forma 1635__ distinta de la permutación dada es 163524 y 163524 es menor que 163542, la permutación posterior a la permutación dada no es de la forma 1635__.

¿Podría la permutación posterior a la permutación dada tener la forma 163___? Los últimos tres dígitos deben ser una permutación de $\{2, 4, 5\}$. Como 542 es la permutación más grande de $\{2, 4, 5\}$, cualquier permutación que comience con 163 es menor que la permutación dada. Así, la permutación posterior a la permutación dada no es de la forma 163___.

La razón por la cual la permutación posterior a la permutación dada no puede comenzar con 1635 o 163 es que en cualquier caso, los dígitos restantes en la permutación dada (42 y 542, respectivamente) *decrecen*. Por tanto, trabajando desde el lado derecho, debemos determinar el primer dígito d cuyo vecino derecho satisfaga $d < r$. En nuestro caso, el tercer dígito, 3, tiene esta propiedad. Así, la permutación posterior a la permutación dada comenzará con 16.

El dígito posterior a 16 debe ser mayor que 3. Como queremos determinar la permutación siguiente más pequeña, el siguiente dígito es 4, el menor dígito disponible. Así, la permutación deseada comienza con 164. Los demás dígitos 235 deben aparecer en orden creciente para obtener el valor mínimo. Por tanto, la permutación posterior a la permutación dada es 164235. □

Vemos que para generar todas las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$, podemos comenzar con la permutación $12 \cdots n$ y luego utilizar varias veces el método del ejemplo 4.3.12 para generar la siguiente permutación. El proceso concluye cuando se genera la permutación $n(n-1)\cdots 21$.

EJEMPLO 4.3.13

El método del ejemplo 4.3.12 permite enumerar las permutaciones de $\{1, 2, 3, 4\}$ en orden lexicográfico como

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143,
2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241,
3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321. □

A continuación damos el algoritmo.

ALGORITMO 4.3.14 *Generación de permutaciones*

Este algoritmo enumera todas las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico creciente.

Entrada: n

Salida: Todas las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico creciente.

```
procedure permutation(n)
 for i := 1 to n do
   s_i := i
 print s_1, ..., s_n // se imprime la primera permutación
 for i := 2 to n! do
  begin
  m := n - 1
  while s_m > s_{m+1} do
   // se determina la primera disminución trabajando desde la derecha
   m := m - 1
  k := n
  while s_m > s_k do
   // se determina el elemento más a la derecha s_k con s_m < s_k
   k := k - 1
  swap(s_m, s_k)
  p := m + 1
  q := n
  while p < q do
   // se intercambian s_{m+1} y s_n, se intercambian s_{m+2} y s_{n-1}, y así sucesivamente
   begin
   swap(s_p, s_q)
   p := p + 1
   q := q - 1
   end
  print s_1, ..., s_n     // se imprime la i-ésima permutación
  end
end permutation
```

EJEMPLO 4.3.15

Ahora mostraremos la forma en que el algoritmo 4.3.14 genera la permutación posterior a 163542. Supongamos que

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 6, \quad s_3 = 3, \quad s_4 = 5, \quad s_5 = 4, \quad s_6 = 2$$

y que estamos en la línea 7. El máximo índice m que satisface $s_m < s_{m+1}$ es 3. En las líneas 11 a 14, vemos que el máximo índice k que satisface $s_k > s_m$ es 5. En la línea 15, intercambiamos s_m y s_k. En este momento, tenemos $s = 164532$. En las líneas 16-24, invertimos el orden de los elementos $s_4 s_5 s_6 = 532$. Obtenemos la permutación deseada 164235. □

Ejercicios

En los ejercicios 1-3, determine la r-combinación que será generada por el algoritmo 4.3.9 con $n = 7$, posterior a la r-combinación dada.

1. 1356 2. 12367 3. 14567

En los ejercicios 4-6, determine la permutación que será generada por el algoritmo 4.3.14 posterior a la permutación dada.

4. 12354 5. 625431 6. 12876543

7. Para cada una de las cadenas de los ejercicios 1-3, explique (como en el ejemplo 4.3.10) exactamente la forma en que el algoritmo 4.3.9 genera la siguiente r-combinación.

8. Para cada una de las cadenas de los ejercicios 4-6, explique (como en el ejemplo 4.3.15) exactamente la forma en que el algoritmo 4.3.14 genera la siguiente permutación.

9. Muestre la salida del algoritmo 4.3.9 cuando $n = 6$ y $r = 3$.

10. Muestre la salida del algoritmo 4.3.9 cuando $n = 6$ y $r = 2$.

11. Muestre la salida del algoritmo 4.3.9 cuando $n = 7$ y $r = 5$.

12. Muestre la salida del algoritmo 4.3.14 cuando $n = 2$.

13. Muestre la salida del algoritmo 4.3.14 cuando $n = 3$.

14. Modifique el algoritmo 4.3.9 para eliminar la línea 5

5. **for** $i := 2$ **to** $C(n, r)$ **do**

se elimina. Base la condición de conclusión en el hecho de que la última r-combinación tiene todos los elementos s_i iguales a su máximo valor.

15. Modifique el algoritmo 4.3.14 para eliminar la línea 5

5. **for** $i := 2$ **to** $n!$ **do**

se elimina. Base la condición de conclusión en el hecho de que la última permutación tiene los elementos s_i en orden decreciente.

16. Escriba un algoritmo que genere todas las r-permutaciones de un conjunto con n elementos.

★ **17.** Escriba un algoritmo recursivo que genere todas las r-combinaciones del conjunto $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Divida el problema en dos subproblemas:

- Enumere todas las r-combinaciones que contienen a s_1.
- Enumere todas las r-combinaciones que no contienen a s_1.

☆ 18. Escriba un algoritmo recursivo que genere todas las permutaciones del conjunto $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Divida el problema en n subproblemas:

- Enumere las permutaciones que comienzan con s_1.
- Enumere las permutaciones que comienzan con s_2.

$\vdots$

- Enumere las permutaciones que comienzan con s_n.

4.4 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES GENERALIZADAS

En las secciones 4.2 y 4.3 trabajamos con ordenamientos y selecciones sin permitir repeticiones. En esta sección consideraremos ordenamientos de sucesiones que contienen repeticiones y selecciones no ordenadas donde se permiten las repeticiones.

EJEMPLO 4.4.1

¿Cuántas cadenas pueden formarse mediante las siguientes letras?

$$M\ I\ S\ S\ I\ S\ S\ I\ P\ P\ I$$

Debido a la duplicación de letras, la respuesta no es 11!, sino algún número menor que 11!.

Consideremos el problema de llenar 11 espacios en blanco,

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ,

con las letras dadas. Existen $C(11, 2)$ formas de elegir posiciones para las dos letras P. Una vez elegidas las posiciones de las P, existen $C(9, 4)$ formas de elegir posiciones para las cuatro S. Una vez elegidas las posiciones de las S, existen $C(5, 4)$ formas de elegir posiciones para las cuatro I. Una vez realizadas estas selecciones, existe una única posición para la M. Por el principio de multiplicación, el número de formas de ordenar las letras es

$$C(11, 2)C(9, 4)C(5, 4) = \frac{11!}{2!9!}\,\frac{9!}{4!5!}\,\frac{5!}{4!1!} = \frac{11!}{2!4!4!1!} = 34,650. \qquad \square$$

La solución del ejemplo 4.4.1 adopta una forma agradable. El número 11 que aparece en el numerador es el número total de letras. Los valores en el denominador proporcionan las cantidades de duplicados de cada letra. El método puede utilizarse para establecer una fórmula general.

TEOREMA 4.4.2

Suponga que una sucesión S de n elementos tiene n_1 objetos idénticos de tipo 1, n_2 objetos idénticos de tipo 2, . . . , y n_t objetos idénticos de tipo t. Entonces el número de ordenamientos de S es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}.$$

Demostración. Asignamos posiciones a cada uno de los n elementos para crear un ordenamiento de S. Podemos asignar posiciones a los n_1 elementos de tipo 1 de $C(n, n_1)$ formas. Una vez realizadas estas asignaciones, podemos asignar posiciones a los n_2 elementos de tipo 2 de $C(n - n_1, n_2)$ formas, y así sucesivamente. Por el principio de multiplicación, la cantidad de ordenamientos es

$$C(n, n_1)C(n - n_1, n_2)C(n - n_1 - n_2, n_3)\cdots C(n - n_1 - \cdots - n_{t-1}, n_t)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{t-1})!}{n_t!0!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}.$$

■

EJEMPLO 4.4.3

¿De cuántas formas pueden dividirse ocho libros distintos entre tres estudiantes si Bill debe tener cuatro libros y Shizuo y Marian dos libros cada una?

Se colocan los libros en algún orden fijo. Ahora, consideremos los ordenamientos de cuatro letras B, dos S y dos M. Un ejemplo es

$$B\ B\ B\ S\ M\ B\ M\ S.$$

Cada ordenamiento de este tipo determina una distribución de los libros. Para el ordenamiento del ejemplo, Bill tendrá los libros 1, 2, 3 y 6, Shizuo tendrá los libros 4 y 8 y Marian los libros 5 y 7. Así, el número de formas de ordenar *BBBBSSMM* es el número de formas de distribuir los libros. Por el teorema 4.4.2, este número es

$$\frac{8!}{4!2!2!} = 420.$$

□

Podemos dar una demostración alternativa del teorema 4.4.2 mediante relaciones. Supongamos que una sucesión S de n elementos tiene n_i objetos idénticos de tipo i para $i = 1, \ldots, t$. Sea X el conjunto de n elementos obtenidos de S considerando los n_i objetos de tipo i *distintos* para $i = 1, \ldots, t$. Por ejemplo, si S es la sucesión de letras

$$M\ I\ S\ S\ I\ S\ S\ I\ P\ P\ I,$$

X sería el conjunto

$$\{M, I_1, S_1, S_2, I_2, S_3, S_4, I_3, P_1, P_2, I_4\}.$$

Definimos una relación R sobre el conjunto de todas las permutaciones de X mediante la regla: p_1Rp_2 si p_2 se obtiene de p_1 permutando el orden de los objetos de tipo 1 (pero sin cambiar su posición) o permutando el orden de los objetos de tipo 2 (pero sin cambiar su posición) $\cdots$ y/o permutando el orden de los objetos de tipo t (pero sin cambiar su posición); por ejemplo,

$$I_1S_1S_2I_2S_3S_4I_3P_1P_2I_4MRI_2S_3S_2I_1S_4S_1I_3P_1P_2I_4M.$$

En forma directa puede verificarse que R es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las permutaciones de X.

La clase de equivalencia que contiene a la permutación p consta de todas las permutaciones de X que son idénticas si consideramos idénticos los objetos de tipo i para $i = 1, \ldots, t$. Así, cada clase de equivalencia tiene $n_1!n_2!\cdots n_t!$ elementos. Como una clase de equivalencia queda determinada por un ordenamiento de S, el número de ordenamientos de S es igual al número de clases de equivalencia. Existen $n!$ permutaciones de X, de modo que, por el teorema 2.5.16, el número de ordenamientos de S es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}.$$

Ahora analizaremos el problema de contar las selecciones no ordenadas donde se permiten repeticiones.

EJEMPLO 4.4.4

Consideremos tres libros: un libro de computación, un libro de física y uno de historia. Supongamos que la biblioteca tiene al menos seis copias de cada uno de estos libros. ¿De cuántas formas pueden elegirse seis libros?

El problema consiste en obtener selecciones no ordenadas de seis elementos, entre el conjunto {computación, física, historia}, permitiendo repeticiones. Una selección queda determinada de manera única mediante el número de libros elegidos de cada tipo. Denotemos una selección particular como

Computación		Física		Historia
× × ×	|	× ×	|	×

Aquí hemos designado la selección que consta de tres libros de computación, dos libros de física y un libro de historia. Otro ejemplo de selección es

Computación		Física		Historia
	|	× × × ×	|	× ×

lo cual denota la selección que consta de ningún libro de computación, cuatro libros de física y dos libros de historia. Vemos que cada orden de seis símbolos × y dos símbolos | denota una selección. Así, nuestro problema consiste en contar el número de tales ordenamientos. Pero esto es precisamente el número de formas

$$C(8, 2) = 28$$

de elegir dos posiciones para los símbolos | entre ocho posibles posiciones. Así, existen 28 formas de elegir seis libros. □

El método utilizado en el ejemplo 4.4.4 puede utilizarse para deducir un resultado general.

TEOREMA 4.4.5

Si X es un conjunto con t elementos, el número de selecciones no ordenadas de k elementos de X, permitiendo repeticiones, es

$$C(k + t - 1, t - 1) = C(k + t - 1, k).$$

Demostración. Sea $X = \{a_1, \ldots, a_t\}$. Consideremos los $k + t - 1$ espacios

$$\_\,\_\,\_ \ldots \_\,\_$$

y $k + t - 1$ símbolos que constan de k símbolos $\times$ y $t - 1$ símbolos $|$. Cada colocación de estos símbolos en los espacios determina una selección. El número n_1 de $\times$ hasta el primer $|$ representa la selección de n_1 símbolos a_1; el número n_2 de $\times$ entre el primer y el segundo $|$ representa la selección de n_2 símbolos a_2; y así sucesivamente. Como existen $C(k + t - 1, t - 1)$ formas de elegir las posiciones para los símbolos $|$, también existen $C(k + t - 1, t - 1)$ selecciones. Esto es igual a $C(k + t - 1, k)$, el número de formas de elegir las posiciones para los símbolos $\times$; por tanto, existen

$$C(k + t - 1, t - 1) = C(k + t - 1, k)$$

selecciones no ordenadas de k elementos de X, permitiendo repeticiones. ■

EJEMPLO 4.4.6

Supongamos que existen pilas de pelotas rojas, azules y verdes, y que cada pila contiene al menos ocho pelotas.

(a) ¿De cuántas formas podemos elegir ocho pelotas?

(b) ¿De cuántas formas podemos elegir ocho pelotas si debemos tener al menos una pelota de cada color?

Por el teorema 4.4.5, el número de formas de elegir ocho pelotas es

$$C(8 + 3 - 1, 3 - 1) = C(10, 2) = 45.$$

También podemos utilizar el teorema 4.4.5 para resolver la parte (b), si primero elegimos una pelota de cada color. Para completar la selección, debemos elegir otras cinco pelotas. Esto puede realizarse de

$$C(5 + 3 - 1, 3 - 1) = C(7, 2) = 21$$

formas. □

EJEMPLO 4.4.7

¿De cuántas formas pueden distribuirse 12 libros idénticos de matemáticas entre los estudiantes Anna, Beth, Candy y Dan?

Podemos utilizar el teorema 4.4.5 para resolver este problema, si lo consideramos como el problema de etiquetar cada libro con el nombre del estudiante que lo recibe. Esto es lo mismo que elegir 12 elementos (los nombres de los estudiantes) del conjunto {Anna, Beth, Candy, Dan}, permitiendo repeticiones. Por el teorema 4.4.5, el número de formas de hacer esto es

$$C(12 + 4 - 1, 4 - 1) = C(15, 3) = 455.$$ □

EJEMPLO 4.4.8

(a) ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29? \qquad (4.4.1)$$

(b) ¿Cuántas soluciones enteras tiene (4.4.1) y que satisfagan $x_1 > 0, x_2 > 1, x_3 > 2, x_4 \geq 0$?

(a) Cada solución de (4.4.1) es equivalente a elegir 29 elementos, x_i de tipo i, $i = 1, 2, 3, 4$. De acuerdo con el teorema 4.4.5, el número de selecciones es

$$C(29 + 4 - 1, 4 - 1) = C(32, 3) = 4960.$$

(b) Cada solución de (4.4.1) y que satisfaga las condiciones dadas es equivalente a seleccionar 29 elementos, x_i de tipo i, $i = 1, 2, 3, 4$, donde, además, debemos tener al menos un elemento de tipo 1, al menos dos elementos de tipo 2, y al menos tres elementos de tipo 3. En primer lugar, se elige un elemento de tipo 1, dos elementos de tipo 2 y tres elementos de tipo 3. Luego, se eligen otros 23 elementos. Por el teorema 4.4.5, esto puede hacerse de

$$C(23 + 4 - 1, 4 - 1) = C(26, 3) = 2600$$

formas. □

EJEMPLO 4.4.9

¿Cuántas veces se ejecuta la instrucción print?

```
for i1 := 1 to n do
  for i2 := 1 to i1 do
    for i3 := 1 to i2 do
      .
      .
      .
        for ik := 1 to ik-1 do
          print i1, i2, ..., ik
```

Observe que cada línea de salida consta de k enteros

$$i_1 i_2 \cdots i_k, \qquad (4.4.2)$$

donde

$$n \geq i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_k \geq 1, \qquad (4.4.3)$$

y que aparece cada sucesión (4.4.2) que satisfaga (4.4.3). Así, el problema consiste en contar el número de formas de elegir k enteros, permitiendo repeticiones, en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. [Cualquier selección de este tipo puede ordenarse para producir (4.4.3).] Por el teorema 4.4.5, el número total de selecciones posibles es

$$C(k + n - 1, k).$$ □

Ejercicios

En los ejercicios 1-3, determine el número de cadenas que pueden formarse ordenando las letras dadas.

1. *GUIDE* 2. *SCHOOL* 3. *SALESPERSONS*

4. ¿De cuántas formas pueden repartirse 10 libros distintos entre tres estudiantes, si el primero debe tener cinco libros, el segundo tres y el tercero dos?

Los ejercicios 5-11 se refieren a pilas de pelotas rojas, azules y verdes, idénticas, donde cada pila contiene al menos 10 pelotas.

5. ¿De cuántas formas pueden elegirse 10 pelotas?

6. ¿De cuántas formas pueden elegirse 10 pelotas si al menos se debe elegir una roja?

7. ¿De cuántas formas pueden elegirse 10 pelotas si al menos debe elegirse una pelota roja, al menos dos azules y al menos tres verdes?

8. ¿De cuántas formas pueden elegirse 10 pelotas si hay que elegir exactamente una pelota roja?

9. ¿De cuántas formas pueden elegirse 10 pelotas si hay que elegir al exactamente una pelota roja y al menos una pelota azul?

10. ¿De cuántas formas pueden elegirse 10 pelotas si a lo más se elige una pelota roja?

11. ¿De cuántas formas pueden elegirse 10 pelotas si hay que elegir el doble de pelotas rojas en relación con las pelotas verdes?

En los ejercicios 12-17, determine el número de soluciones enteras de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

sujetas a las condiciones dadas.

12. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

13. $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$

14. $x_1 = 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

15. $x_1 \geq 0, x_2 > 0, x_3 = 1$

16. $0 \leq x_1 \leq 6, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

☆ 17. $0 \leq x_1 < 6, 1 \leq x_2 < 9, x_3 \geq 0$

★ **18.** Determine el número de soluciones enteras de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

que satisfacen $0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 5, 0 \leq x_3 \leq 8$ y $0 \leq x_4 \leq 9$.

19. ¿Cuántos enteros entre 1 y 1,000,000 cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 15?

☆ 20. ¿Cuántos enteros entre 1 y 1,000,000 cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 20?

21. ¿Cuántas partidas de bridge existen? (Una partida consiste en repartir una baraja de 52 cartas en cuatro manos, cada una de las cuales contiene 13 cartas.)

22. ¿De cuántas formas pueden elegirse tres equipos con cuatro, dos y dos personas, respectivamente, en un grupo de ocho personas?

23. Un *dominó* es un rectángulo dividido en dos cuadrados, donde cada cuadrado tiene un número elegido entre 0, 1, . . . , 6, permitiendo repeticiones. ¿Cuántos dominós distintos existen?

Los ejercicios 24-29 se refieren a una bolsa que contiene 20 pelotas (seis rojas, seis verdes y ocho moradas).

24. ¿De cuántas formas podemos elegir cinco pelotas si las pelotas se consideran distintas unas de otras?

25. ¿De cuántas formas podemos elegir cinco pelotas si las pelotas del mismo color se consideran idénticas?

26. ¿De cuántas formas podemos extraer de la bolsa dos pelotas rojas, tres pelotas verdes y dos pelotas moradas si las pelotas se consideran distintas?

27. Extraemos cinco pelotas, luego las reemplazamos, y finalmente extraemos cinco pelotas más. ¿De cuántas formas puede hacerse esto si las bolas se consideran distintas?

28. Sacamos cinco pelotas sin reemplazarlas, y luego extraemos cinco pelotas más. ¿De cuántas formas puede hacerse esto si las bolas se consideran distintas?

29. Extraemos cinco pelotas donde al menos una es roja. Luego las reemplazamos. A continuación sacamos cinco pelotas y a lo más una es verde. ¿De cuántas formas puede hacerse esto si las pelotas se consideran distintas?

30. ¿De cuántas formas pueden distribuirse 15 libros idénticos de matemáticas entre seis estudiantes?

31. ¿De cuántas formas pueden distribuirse 15 libros idénticos de computación y 10 libros idénticos de psicología entre cinco estudiantes?

32. ¿De cuántas formas podemos colocar 10 pelotas idénticas en 12 cajas, si cada caja sólo puede contener una pelota?

33. ¿De cuántas formas podemos colocar 10 pelotas idénticas en 12 cajas, si cada caja puede contener 10 pelotas?

34. Muestre que $(kn)!$ es divisible entre $(n!)^k$.

35. Considere

for $i_1 := 1$ **to** n **do**
  for $i_2 := 1$ **to** i_1 **do**
    print i_1, i_2

y el ejemplo 4.4.9 para deducir que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

★ **36.** Utilice el ejemplo 4.4.9 para demostrar la fórmula

$$C(k-1, k-1) + C(k, k-1) + \cdots + C(n+k-2, k-1) = C(k+n-1, k).$$

37. Escriba un algoritmo para enumerar todas las soluciones enteras no negativas de

$$x_1 + x_2 + x_3 = n.$$

38. ¿Cuál es el error del siguiente argumento, el cual supuestamente cuenta el número de particiones de un conjunto con 10 elementos en ocho subconjuntos (no vacíos)?

Enumeramos los elementos del conjunto con espacios en blanco entre ellos:

$$x_1\_x_2\_x_3\_x_4\_x_5\_x_6\_x_7\_x_8\_x_9\_x_{10}.$$

Cada vez que ocupamos siete de los nueve espacios en blanco con siete barras verticales, obtenemos una partición de $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ en ocho subconjuntos. Por ejemplo, la partición $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7, x_8\}, \{x_9\}, \{x_{10}\}$ se representaría como

$$x_1 \mid x_2 \mid x_3 x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7 x_8 \mid x_9 \mid x_{10}.$$

Así, la solución a este problema es $C(9, 7)$.

4.5 COEFICIENTES BINOMIALES E IDENTIDADES COMBINATORIAS

A primera vista, la expresión $(a + b)^n$ no parece tener mucho que ver con las combinaciones, pero como veremos en esta sección, podemos obtener una fórmula para desarrollar $(a + b)^n$ utilizando la fórmula para el número de r-combinaciones de n objetos. Con frecuencia, podemos relacionar una expresión algebraica con algún proceso de conteo. Varias técnicas avanzadas de conteo utilizan estos métodos (véanse [Riordan y Tucker]).

El **teorema del binomio** proporciona una fórmula para los coeficientes en el desarrollo de $(a + b)^n$. Como

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{\text{factores de } n}, \tag{4.5.1}$$

el desarrollo surge al elegir a o b en cada uno de los n factores, multiplicando las selecciones entre ellas, y luego sumando todos los productos obtenidos de esta manera. Por ejemplo, en el desarrollo de $(a + b)^3$, se elige a o b en el primer factor $(a + b)$; a o b en el segundo factor $(a + b)$, y a o b en el tercer factor $(a + b)$; se multiplican las selecciones entre ellas y luego se suman los productos obtenidos. Si elegimos a en todos los factores y multiplicamos, obtenemos el término aaa. Si elegimos a en el primer factor, b en el segundo factor y a en el tercer factor y multiplicamos, obtenemos el término aba. La tabla 4.5.1 muestra todas las posibilidades. Si sumamos los productos de todas las selecciones, obtenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb\\ &= a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

En (4.5.1), un término de la forma $a^{n-k}b^k$ surge de elegir b en k factores y a de los otros $n - k$ factores. Pero esto puede realizarse de $C(n, k)$ formas, pues $C(n, k)$ cuenta el número de formas de elegir k cosas de n elementos. Así, $a^{n-k}b^k$ aparece $C(n, k)$ veces. Esto implica que

$$\begin{aligned}(a+b)^n = {}& C(n,0)a^n b^0 + C(n,1)a^{n-1}b^1 + C(n,2)a^{n-2}b^2\\ &+ \cdots + C(n,n-1)a^1b^{n-1} + C(n,n)a^0b^n.\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Este resultado se conoce como el teorema del binomio.

TEOREMA 4.5.1 *Teorema del binomio*

Si a y b son números reales y n es un entero positivo, entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k.$$

Demostración. La demostración aparece antes del enunciado del teorema. ■

El teorema del binomio también puede demostrar por inducción sobre n (véase el ejercicio 16).

TABLA 4.5.1
Cálculo de $(a + b)^3$

Selección del primer factor $(a + b)$	*Selección del segundo factor* $(a + b)$	*Selección del tercer factor* $(a + b)$	*Producto de selecciones*
a	a	a	$aaa = a^3$
a	a	b	$aab = a^2b$
a	b	a	$aba = a^2b$
a	b	b	$abb = ab^2$
b	a	a	$baa = a^2b$
b	a	b	$bab = ab^2$
b	b	a	$bba = ab^2$
b	b	b	$bbb = b^3$

Los números $C(n, r)$ se conocen como los **coeficientes binomiales**, pues aparecen en el desarrollo (4.5.2) del binomio elevado a una potencia.

EJEMPLO 4.5.2

Al considerar $n = 3$ en el teorema 4.5.1, obtenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= C(3,0)a^3b^0 + C(3,1)a^2b^1 + C(3,2)a^1b^2 + C(3,3)a^0b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$ □

EJEMPLO 4.5.3

Desarrollar $(3x - 2y)^4$ utilizando el teorema del binomio.

Si hacemos $a = 3x$, $b = -2y$ y $n = 4$ en el teorema 4.5.1, obtenemos

$$\begin{aligned}(3x-2y)^4 &= (a+b)^4\\ &= C(4,0)a^4b^0 + C(4,1)a^3b^1 + C(4,2)a^2b^2\\ &\quad + C(4,3)a^1b^3 + C(4,4)a^0b^4\\ &= C(4,0)(3x)^4(-2y)^0 + C(4,1)(3x)^3(-2y)^1\\ &\quad + C(4,2)(3x)^2(-2y)^2 + C(4,3)(3x)^1(-2y)^3\\ &\quad + C(4,4)(3x)^0(-2y)^4\\ &= 3^4x^4 + 4\cdot 3^3x^3(-2y) + 6\cdot 3^2x^2(-2)^2y^2\\ &\quad + 4(3x)(-2)^3y^3 + (-2)^4y^4\\ &= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4.\end{aligned}$$ □

EJEMPLO 4.5.4

Determine el coeficiente de a^5b^4 en el desarrollo de $(a + b)^9$.

El término relacionado con a^5b^4 aparece en el teorema del binomio considerando $n = 9$ y $k = 4$:

$$C(n, k)a^{n-k}b^k = C(9, 4)a^5b^4 = 126a^5b^4.$$

Así, el coeficiente de a^5b^4 es 126. □

EJEMPLO 4.5.5

Determine el coeficiente de $x^2y^3z^4$ en el desarrollo de $(x + y + z)^9$.

Como

$$(x + y + z)^9 = (x + y + z)(x + y + z) \cdots (x + y + z) \qquad \text{(nueve términos)},$$

obtenemos $x^2y^3z^4$ cada vez que multiplicamos dos x elegidas de los nueve términos, tres y elegidas de los nueve términos y cuatro z elegidas de los nueve términos. Podemos elegir dos términos para las x de $C(9, 2)$ formas. Una vez realizada esta selección, podemos elegir tres términos para las y de $C(7, 3)$ formas. Esto deja los cuatro términos restantes para las z. Así, el coeficiente de $x^2y^3z^4$ en el desarrollo de $(x + y + z)^9$ es

$$C(9,2)\,C(7,3) = \frac{9!}{2!\,7!}\,\frac{7!}{3!\,4!} = \frac{9!}{2!\,3!\,4!} = 1260.$$ □

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
⋮

FIGURA 4.5.1
Triángulo de Pascal.

Podemos escribir los coeficientes binomiales en una forma triangular conocida como el **triángulo de Pascal** (véase la figura 4.5.1). El borde consta de unos y cualquier valor interior es la suma de los dos números arriba de él. Esta relación se enuncia de manera formal en el siguiente teorema. La demostración es un argumento combinatorio. Una identidad que surge de algún proceso de conteo es una **identidad combinatoria** y el argumento que conduce a su formulación es un **argumento combinatorio**.

TEOREMA 4.5.6

$$C(n + 1, k) = C(n, k - 1) + C(n, k)$$

para $1 \le k \le n$.

Demostración. Sea X un conjunto con n elementos. Sea $a \notin X$. Entonces $C(n + 1, k)$ es el número de subconjuntos de $Y = X \cup \{a\}$ con k elementos. Ahora, los subconjuntos de Y con k elementos pueden separar en dos clases ajenas:

1. Los subconjuntos de Y que no contienen a a.
2. Los subconjuntos de Y que contienen a a.

Los subconjuntos de la clase 1 son precisamente los subconjuntos de X con k elementos y existen $C(n, k)$ de ellos. Cada subconjunto de la clase 2 consta de un subconjunto de X con $(k - 1)$ elementos, junto con a, y existen $C(n, k - 1)$ de ellos. Por tanto,

$$C(n + 1, k) = C(n, k - 1) + C(n, k).$$ ■

El teorema 4.5.6 también puede demostrar mediante el teorema 4.2.17 (ejercicio 17).

Concluimos esta sección mostrando la forma en que el teorema del binomio (teorema 4.5.1) y el teorema 4.5.6 pueden utilizarse para deducir otras identidades combinatorias.

EJEMPLO 4.5.7

Utilice el teorema del binomio para deducir la ecuación

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n.$$

La suma es igual a la suma del teorema del binomio

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k.$$

excepto que falta la expresión $a^{n-k}b^k$. Una forma de "eliminar" esta expresión es considerar $a = b = 1$, en cuyo caso el teorema del binomio se convierte en

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k). \tag{4.5.3}$$

□

La ecuación (4.5.3) también puede demostrarse mediante un argumento combinatorio. Dado un conjunto X con n elementos, $C(n, k)$ cuenta el número de subconjuntos con k elementos. Así, el lado derecho de la ecuación (4.5.3) cuenta el número de subconjuntos de X. Pero el número de subconjuntos de X es 2^n; con esto hemos demostrado de nuevo la ecuación (4.5.3).

EJEMPLO 4.5.8

Utilice el teorema 4.5.6 para mostrar que

$$\sum_{i=k}^{n} C(i,k) = C(n+1,k+1). \tag{4.5.4}$$

Utilizamos el teorema 4.5.6 en la forma

$$C(i, k) = C(i + 1, k + 1) - C(i, k + 1)$$

para obtener

$$\begin{aligned} &C(k, k) + C(k + 1, k) + C(k + 2, k) + \cdots + C(n, k) \\ &= 1 + C(k + 2, k + 1) - C(k + 1, k + 1) + C(k + 3, k + 1) \\ &\quad - C(k + 2, k + 1) + \cdots + C(n + 1, k + 1) - C(n, k + 1) \\ &= C(n + 1, k + 1). \end{aligned}$$ □

El ejercicio 36 de la sección 4.4 muestra otra forma de demostrar (4.5.4).

EJEMPLO 4.5.9

Utilice la ecuación (4.5.4) para determinar la suma

$$1 + 2 + \cdots + n.$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n &= C(1,1) + C(2,1) + \cdots + C(n,1) \\ &= C(n+1, 2) \qquad \text{por la ecuación (4.5.4)} \\ &= \frac{(n+1)n}{2}. \end{aligned}$$

□

Ejercicios

1. Desarrolle $(x + y)^4$ mediante el teorema del binomio.
2. Desarrolle $(2c - 3d)^5$ mediante el teorema del binomio.

En los ejercicios 3-9, determine el coeficiente que tendrá el término indicado al desarrollar la expresión.

3. x^4y^7; $(x + y)^{11}$
4. s^6t^6; $(2s - t)^{12}$
5. $x^2y^3z^5$; $(x + y + z)^{10}$
6. $w^2x^3y^2z^5$; $(2w + x + 3y + z)^{12}$
7. a^2x^3; $(a + x + c)^2(a + x + d)^3$
8. a^2x^3; $(a + ax + x)(a + x)^4$
9. a^3x^4; $(a + \sqrt{ax} + x)^2(a + x)^5$

En los ejercicios 10-12, determine el número de términos en el desarrollo de cada expresión.

10. $(x + y + z)^{10}$
11. $(w + x + y + z)^{12}$
☆ 12. $(x + y + z)^{10}(w + x + y + z)^2$
13. Determine el siguiente renglón del triángulo de Pascal, dado el renglón

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1.$$

14. (a) Muestre que $C(n, k) < C(n, k + 1)$ si y sólo si $k < (n - 1)/2$.
(b) Utilice la parte (a) para deducir que el máximo de $C(n, k)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ es $C(n, \lfloor n/2 \rfloor)$.
15. Utilice el teorema del binomio para demostrar que

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n, k).$$

16. Utilice inducción sobre n para demostrar el teorema del binomio.
17. Demuestre el teorema 4.5.6 utilizando el teorema 4.2.17.
18. Proporcione un argumento combinatorio para demostrar que

$$C(n, k) = C(n, n - k).$$

★ **19.** Demuestre la ecuación (4.5.4) dando un argumento combinatorio.

20. Determine la suma

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n - 1)n.$$

☆ 21. Utilice la ecuación (4.5.4) para deducir una fórmula para

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

22. Utilice el teorema del binomio para mostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n,k) = 3^n.$$

23. Suponga que n es par. Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n/2} C(n, 2k) = 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n/2} C(n, 2k - 1).$$

24. Demuestre

$$(a + b + c)^n = \sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} a^i b^j c^{n-i-j}.$$

25. Utilice el ejercicio 24 para escribir el desarrollo de $(x + y + z)^3$.
26. Demuestre

$$3^n = \sum_{0 \le i-j \le n} \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}.$$

☆ 27. Proporcione un argumento combinatorio para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n, n).$$

28. Demuestre

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C(n,k) k x^{k-1}.$$

29. Utilice el resultado del ejercicio 28 para mostrar que

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC(n,k). \qquad (4.5.5)$$

☆ 30. Demuestre la ecuación (4.5.5) por inducción.
31. Una *sucesión suavizante* $b_0, \ldots, b_{k-1}$ es una sucesión (finita) que satisface $b_i \ge 0$ para $i = 0, \ldots, k - 1$ y $\sum_{i=0}^{k-1} b_i = 1$. Una *suavización de la sucesión (infinita)* $a_1, a_2, \ldots$ *por medio de la sucesión suavizante* $b_0, \ldots, b_{k-1}$ es la sucesión $\{a'_j\}$ definida como

$$a'_j = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+j} b_i.$$

La idea es que al tomar promedios se suavizan los datos con ruido.

El *suavizante binomial de tamaño k* es la sucesión

$$\frac{B_0}{2^n}, \ldots, \frac{B_{k-1}}{2^n},$$

donde $B_0, \ldots, B_{k-1}$ es el n-ésimo renglón del triángulo de Pascal (el renglón 0 es el superior).

Sea c_0, c_1 la sucesión suavizante definida como $c_0 = c_1 = \frac{1}{2}$. Muestre que si una sucesión a es suavizada por c, luego la sucesión resultante suavizada por c, y así sucesivamente k veces; entonces, la sucesión resultante puede obtenerse mediante suavización, valga la repetición, del suavizante binomial de tamaño $k + 1$ sobre a.
32. En el ejemplo 4.1.5 mostramos que existen 3^n pares ordenados (A, B) que satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$, donde X es un conjunto con n elementos. Deduzca este resultado considerando los casos $|A| = 0$, $|A| - 1, \ldots, |A| = n$, y utilizando después el teorema del binomio.

4.6 EL PRINCIPIO DE LA PICHONERA

El **principio de la pichonera** (también conocido como *principo de las casillas, principio de las gavetas de Dirichlet* o *principio de las cajas de zapatos*) sirve en ciertas ocasiones para responder la pregunta: ¿Existe un elemento con una propiedad dada? Si puede aplicar el principio de la pichonera, este principio sólo dice que el objeto existe; el principio no indica la forma de determinar al objeto o el número de ellos.

Nuestra primera versión del principio de la pichonera afirma que si n palomas vuelan a k pichoneras y $k < n$, alguna pichonera contendrá al menos dos palomas (véase la figura 4.6.1). La razón de la verdad de este enunciado puede verse argumentando por contradicción. Si la conclusión fuese falsa, cada pichonera contendría a lo más una paloma y, en este caso, habría a lo más k palomas. Como existen n palomas y $n > k$, tenemos una contradicción.

PRINCIPIO DE LA PICHONERA (*Primera forma*)

Si n palomas vuelan hacia k pichoneras y $k < n$, alguna pichonera contiene al menos dos palomas.

Observemos que el principio de la pichonera no nos dice cómo localizar la pichonera que contiene dos o más palomas. Sólo afirma la *existencia* de una pichonera con ~~dos o~~ más palomas.

Para aplicar el principio de la pichonera, debemos decidir cuáles objetos juegan el papel de las palomas y cuáles objetos juegan el papel de los palomares. Nuestro primer ejemplo ilustra una posibilidad.

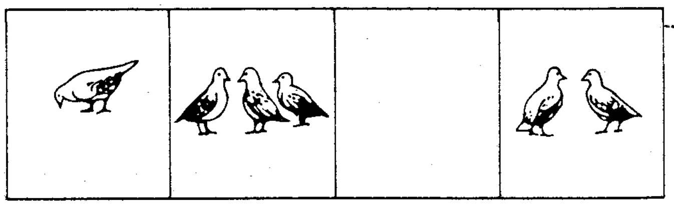


FIGURA 4.6.1 $n = 6$ palomas en $k = 4$ pichoneras. Alguna pichonera contiene al menos dos palomas.

EJEMPLO 4.6.1

Los nombres de diez personas son Alice, Bernard y Charles, mientras que sus apellidos son Lee, McDuff y Ng. Muestre que al menos dos personas tienen los mismos nombres y apellidos.

Existen nueve nombres posibles para las 10 personas. Si pensamos que las personas son las palomas y los nombres son los palomares, podemos considerar la asignación de nombres a las personas como la asignación de palomares a las palomas. Por el principio de la pichonera, algún nombre (pichonera) se asigna por lo menos a dos personas (palomas). □

A continuación enunciamos el principio de la pichonera de forma alternativa.

PRINCIPIO DE LA PICHONERA (*Segunda forma*)

Si f es una función de un conjunto finito X a un conjunto finito Y y $|X| > |Y|$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$.

La segunda forma del principio de la pichonera puede reducirse a la primera, si X es el conjunto de palomas y Y el conjunto de pichoneras. Asignamos la paloma x a la pichonera $f(x)$. Por la primera forma del principio de la pichonera, al menos dos palomas, $x_1, x_2 \in X$, se asignan a la misma pichonera; es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$.

Nuestro siguiente ejemplo ilustra el uso de la segunda forma del principio de la pichonera.

EJEMPLO 4.6.2

Si se conectan unos con otros 20 procesadores, muestre que al menos dos procesadores se conectan directamente al mismo número de procesadores.

Designemos los procesadores como $1, 2, \ldots, 20$. Sea a_i el número de procesadores a los cuales está directamente conectado el procesador i. Debemos mostrar que $a_i = a_j$ para algún $i \neq j$. El dominio de la función a es $X = \{1, 2, \ldots, 20\}$ y el rango Y es algún subconjunto de $\{0, 1, \ldots, 19\}$. Por desgracia, $|X| = |\{0, 1, \ldots, 19\}|$ y no podemos utilizar de manera inmediata la segunda forma del principio de la pichonera.

Examinemos la situación con más detalle. Observe que no podemos tener $a_i = 0$, para algún i, y $a_j = 19$, para algún j, ya que entonces tendríamos un procesador (el i-ésimo) no conectado a los demás, mientras que, al mismo tiempo, algún otro procesador (el j-ésimo) estaría conectado a todos los demás procesadores (incluyendo al i-ésimo). Así, el rango Y es un subconjunto de $\{0, 1, \ldots, 18\}$ o $\{1, 2, \ldots, 19\}$. En cualquier caso, $|Y| < 20 = |X|$. Por la segunda forma del principio de la pichonera, $a_i = a_j$ para algún $i \neq j$, como se deseaba demostrar. □

EJEMPLO 4.6.3

Muestre que si se eligen 151 cursos distintos entre 300 cursos de computación numerados del 1 al 300 inclusive, al menos dos están numerados en forma consecutiva.

Digamos que los números de los cursos elegidos son

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_{151}. \tag{4.6.1}$$

Los 302 números que constan de (4.6.1) junto con

$$c_1 + 1, \quad c_2 + 1, \quad \ldots, \quad c_{151} + 1. \tag{4.6.2}$$

varían entre 1 y 301. Por la segunda forma del principio de la pichonera, al menos dos de estos valores coinciden. Los números (4.6.1) son todos distintos y por tanto los números (4.6.2) también son distintos. Entonces, debe ocurrir que uno de los números (4.6.1) y uno de los números (4.6.2) sean iguales. Así, tenemos

$$c_i = c_j + 1$$

y por supuesto, c_i es el sucesor de c_j. □

EJEMPLO 4.6.4

Un inventario consta de una lista de 80 artículos, cada uno marcado como "disponible" o "no disponible". Existen 45 artículos disponibles. Muestre que existen al menos dos artículos disponibles en la lista a exactamente nueve artículos de distancia. (Por ejemplo, los artículos disponibles en las posiciones 13 y 22 o en las posiciones 69 y 78 satisfacen la condición.)

Sea a_i la posición del i-ésimo artículo disponible. Debemos mostrar que $a_i - a_j = 9$ para algunos i y j. Consideremos los números

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{45} \tag{4.6.3}$$

y

$$a_1 + 9, \quad a_2 + 9, \quad \ldots, \quad a_{45} + 9. \tag{4.6.4}$$

Los 90 números en (4.6.3) y (4.6.4) sólo pueden variar entre 1 y 89 inclusive. Por la segunda forma del principio de la pichonera, dos de los números deben coincidir. No podemos tener dos números de (4.6.3) o de (4.6.4) idénticos; así, algún número en (4.6.3) es igual a algún número de (4.6.4). Por tanto, $a_i - a_j = 9$ para algunos i y j, como se deseaba. □

A continuación enunciamos otra forma más del principio de la pichonera.

PRINCIPIO DE LA PICHONERA *(Tercera forma)*

Sea f una función de un conjunto finito X en un conjunto finito Y. Suponga que $|X| = n$ y $|Y| = m$. Sea $k = \lceil n/m \rceil$. Entonces existen al menos k valores $a_1, \ldots, a_k \in X$ tales que

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_k).$$

Para demostrar la tercera forma del principio de la pichonera, argumentamos por contradicción. Sea $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Supongamos que la conclusión es falsa. Entonces existen a lo más $k - 1$ valores $x \in X$ con $f(x) = y_1$; existen a lo más $k - 1$ valores $x \in X$ con $f(x) = y_2$; . . . ; existen a lo más $k - 1$ valores $x \in X$ con $f(x) = y_m$. Así, existen a lo más $m(k - 1)$ miembros en el dominio de f. Pero

$$m(k-1) < m\frac{n}{m} = n,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, existen al menos k valores $a_1, \ldots, a_k \in X$ tales que

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_k).$$

Nuestro último ejemplo ilustra el uso de la tercera forma del principio de la pichonera.

EJEMPLO 4.6.5

Una característica útil de las fotos en blanco y negro es la brillantez promedio de la foto. Decimos que dos fotos son similares si su brillantez promedio no difiere más allá de cierto valor fijo. Muestre que entre seis fotos, hay tres que son mutuamente similares o tres que no son mutuamente similares.

Denotemos las fotos por $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Cada uno de los cinco pares

$$(P_1, P_2), \quad (P_1, P_3), \quad (P_1, P_4), \quad (P_1, P_5), \quad (P_1, P_6),$$

tiene el valor "similar" o "no similar". Por la tercera forma del principio de la pichonera, existen al menos $\lceil 5/2 \rceil = 3$ pares con el mismo valor; es decir, existen tres pares de fotos

$$(P_1, P_i), \quad (P_1, P_j), \quad (P_1, P_k)$$

todas similares o todas no similares. Supongamos que cada par es similar. (El caso en que cada par no es similar está en el ejercicio 8.) Si cualquier par

$$(P_i, P_j), \quad (P_i, P_k), \quad (P_j, P_k) \tag{4.6.5}$$

es similar, entonces estas dos fotos, junto con P_1, son mutuamente similares, con lo que hemos encontrado tres fotos mutuamente similares. En caso contrario, cada uno de los pares (4.6.5) no es similar y hemos determinado tres fotos que no son mutuamente similares. □

Ejercicios

1. Trece personas tienen por nombres Dennis, Evita y Ferdinand, y por apellidos Oh, Pietro, Quine y Rostenkowski. Muestre que al menos dos personas tienen el mismo nombre y apellido.

2. 18 personas tienen por nombres Alfie, Ben y Cissi, y por apellidos Dumont y Elm. Muestre que al menos tres personas tienen el mismo nombre y apellido.

3. El profesor Euclides recibe su pago por semanas alternadas, en viernes. Muestre que en algún mes se le paga en tres ocasiones.

4. ¿Es posible conectar cinco procesadores unos con otros, de modo que exactamente dos procesadores estén conectados de manera directa con un número idéntico de procesadores? Explique.

5. Un inventario consta de una lista de 115 artículos, cada uno marcado "disponible" o "no disponible". Existen 60 artículos disponibles. Muestre que existen al menos dos artículos disponibles en la lista que están a cuatro artículos de distancia.

6. Un inventario consta de una lista de 100 artículos, cada uno marcado "disponible" o "no disponible". Existen 55 artículos disponibles. Muestre que existen al menos dos artículos disponibles en la lista que están a nueve artículos de distancia.

★ **7.** Un inventario consta de una lista de 80 artículos, cada uno marcado "disponible" o "no disponible". Existen 50 artículos disponibles. Muestre que existen al menos dos artículos no disponibles en la lista que están a tres o a seis artículos de distancia.

8. Complete el ejemplo 4.6.5, mostrando que si los pares (P_1, P_i), (P_1, P_j), (P_1, P_k) no son similares, entonces existen tres fotos que son mutuamente similares o que no son mutuamente similares.

9. ¿Necesariamente se cumple la conclusión del ejemplo 4.6.5 si existen menos de seis fotos? Explique.

10. ¿Necesariamente se cumple la conclusión del ejemplo 4.6.5 si existen más de seis fotos? Explique.

Responda los ejercicios 11-14 para dar un argumento que muestre que si X es cualquier subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$ con $(n + 2)$ elementos y m es el máximo elemento en X, entonces existen i y j distintos en X tales que $m = i + j$.

Para cada elemento $k \in X - \{m\}$, sea

$$a_k = \begin{cases} k & \text{si } k \le \dfrac{m}{2} \\ m-k & \text{si } k > \dfrac{m}{2}. \end{cases}$$

11. ¿Cuántos elementos tiene el dominio de a?
12. Muestre que el rango de a está contenido en $\{1, 2, \ldots, n\}$.
13. Explique por qué los ejercicios 11 y 12 implican que $a_i = a_j$ para algunos $i \neq j$.
14. Explique por qué el ejercicio 13 implica que existen i y j distintos en X tales que $m = i + j$.
15. Proporcione un ejemplo de un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$ con $(n + 1)$ elementos con la siguiente propiedad: No existen $i, j \in X$ tales que $i + j \in X$.

Responda los ejercicios 16-19 para proporcionar un argumento que demuestre el siguiente resultado.

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ de $n^2 + 1$ números distintos contiene una subsucesión creciente de longitud $n + 1$ o una subsucesión decreciente de longitud $n + 1$.

Supongamos, por contradicción, que toda subsucesión creciente o decreciente tiene longitud n o menor. Sea b_i la longitud de la subsucesión creciente más grande, que comience en a_i y sea c_i la longitud de la subsucesión decreciente más pequeña que comienza en a_i.

16. Muestre que los pares ordenados (b_i, c_i), $i = 1, \ldots, n^2 + 1$, son distintos.
17. ¿Cuántos pares ordenados (b_i, c_i) existen?
18. Explique por qué $1 \le b_i \le n$ y $1 \le c_i \le n$.
19. ¿Cuál es la contradicción?

Responda los ejercicios 20-23 para dar un argumento que muestre que en un grupo de 10 personas existen al menos dos tales que la suma o resta de sus edades es divisible entre 16. Suponga que las edades se dan como números enteros no negativos.

Sean $a_1, \ldots, a_{10}$ las edades. Sea $r_i = a_i \bmod 16$ y sea

$$s_i = \begin{cases} r_i & \text{si } r_i \le 8 \\ 16 - r_i & \text{si } r_i > 8. \end{cases}$$

20. Muestre que $s_1, \ldots, s_{10}$ varían entre 0 y 8.
21. Explique por qué $s_j = s_k$ para algún $j \neq k$.
22. Explique por qué si $s_j = r_j$ y $s_k = r_k$ o $s_j = 16 - r_j$ y $s_k = 16 - r_k$, entonces 16 divide a $a_j - a_k$.
23. Muestre que si no se cumplen las condiciones del ejercicio 22, entonces 16 divide a $a_j + a_k$.
24. Muestre que en el desarrollo decimal del cociente de dos enteros, en algún momento se repite un bloque de dígitos. *Ejemplos*:

$$\frac{1}{6} = 0.1\underline{6}66\ldots, \qquad \frac{217}{660} = 0.32\underline{87}8787\ldots$$

25. Doce jugadores de básquetbol, cuyos uniformes están numerados del 1 al 12, se paran en torno del centro de una cancha en un orden arbitrario. Muestre que existen tres jugadores consecutivos tales que la suma de sus números es al menos 20.
26. Para la situación del ejercicio 25, determine y demuestre una estimación de la magnitud de la suma de los números de cuatro jugadores consecutivos.
27. Sea f una función uno a uno de $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ sobre X. Sea $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ la k-ésima composición de f con sí misma. Muestre que existen enteros positivos distintos i y j tales que $f^i(x) = f^j(x)$ para todo $x \in X$. Muestre que para algún entero positivo k, $f^k(x) = x$ para todo $x \in X$.
28. Un rectángulo 3×7 se divide en 21 cuadrados, cada uno de los cuales se colorea rojo o negro. Demuestre que el tablero contiene un rectángulo no trivial (que no sea $1 \times k$ ni $k \times 1$) cuyas cuatro esquinas cuadradas sean todas negras o todas rojas.
29. Demuestre que si p unos y q ceros se colocan en torno de un círculo de manera arbitraria, donde p, q y k son enteros positivos tales que $p \ge kq$, el arreglo debe contener al menos k unos consecutivos.
30. Escriba un algoritmo tal que, dada una sucesión a, determine la longitud de la máxima subsucesión creciente de a.

NOTAS

Un libro elemental relativo a los métodos de conteo es [Niven]. La bibliografía para combinatoria es [Brualdi; Even, 1973; Liu, 1968; Riordan; y Roberts]. [Vilenkin] contiene muchos ejemplos combinatorios resueltos. Las principales referencias relativas a la matemática discreta [Liu, 1985; y Tucker] dedican varias secciones a los temas del capítulo 4. [Even, 1973; Hu; y Reingold] analizan los algoritmos combinatorios.

CONCEPTOS BÁSICOS DEL CAPÍTULO

Sección 4.1

Principio de multiplicación

Principio de la suma

Sección 4.2

Permutación de $x_1, \ldots, x_n$: Ordenamiento de $x_1, \ldots, x_n$

$n!$ = número de permutaciones de un conjunto con n elementos

r-permutación de $x_1, \ldots, x_n$: Ordenamiento de r elementos de $x_1, \ldots, x_n$

$P(n, r)$: Número de r-permutaciones de un conjunto con n elementos; $P(n, r) = n(n-1)\cdots(n-r+1)$

r-combinación de $\{x_1, \ldots, x_n\}$: Subconjunto (no ordenado) de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con r elementos

$C(n, r)$: Número de r-combinaciones de un conjunto con n elementos; $C(n, r) = P(n, r)/r! = n!/[(n-r)!r!]$

Sección 4.3

Orden lexicográfico

Algoritmo para generar r-combinaciones: Algoritmo 4.3.9

Algoritmo para generar permutaciones: Algoritmo 4.3.14

Sección 4.4

Número de ordenamientos de n elementos de t tipos, con n_i objetos idénticos del tipo $i = n!/[n_1! \cdots n_t!]$

Número de selecciones de k elementos, sin considerar el orden, extraídos de un conjunto con t elementos, permitiendo repeticiones $= C(k + t - 1, k)$

Sección 4.5

Teorema del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^{n-k} b^k$$

Triángulo de Pascal: $C(n + 1, k) = C(n, k - 1) + C(n, k)$

Sección 4.6

Principio de la pichonera (tres formas)

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

Sección 4.1

1. ¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 0 y terminan con 101?

2. ¿De cuántas formas podemos elegir tres libros, cada uno de un tema distinto, de un conjunto de seis libros diferentes de historia, nueve libros distintos de literatura clásica, siete libros diferentes de derecho y cuatro libros distintos de enseñanza?

3. ¿Cuántas funciones existen de un conjunto de n elementos sobre $\{0, 1\}$?

4. Un comité de siete personas compuesto por Greg, Hwang, Isaac, Jasmine, Kirk, Lynn y Manuel debe elegir un presidente, un vicepresidente, un presidente de eventos sociales, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas pueden otorgarse los puestos si Greg es el secretario o bien no tiene un puesto?

Sección 4.2

5. ¿Cuántas 3-combinaciones de seis objetos existen?

6. ¿Cuántas cadenas pueden formarse ordenando las letras *ABCDEF* si *A* aparece antes que *C* y *E* aparece antes que *C*?

7. ¿Cuántas manos de seis cartas extraídas de una baraja normal con 52 cartas contienen tres cartas de un palo y tres cartas de otro palo?

8. Un embarque de 100 discos compactos contiene cinco discos defectuosos. ¿De cuántas formas puede elegirse un conjunto de cuatro discos compactos que contenga más discos defectuosos que no defectuosos?

Sección 4.3

9. Determine la 5-combinación posterior a 12467 que será generada por el algoritmo 4.3.9, si $n = 7$.

10. Determine la 6-combinación posterior a 145678 que será generada por el algoritmo 4.3.9, si $n = 8$.

11. Determine la permutación posterior a 6427135 que será generada por el algoritmo 4.3.14.

12. Determine la permutación posterior a 625431 que será generada por el algoritmo 4.3.14.

Sección 4.4

13. ¿Cuántas cadenas pueden formarse ordenando las letras de la palabra *ILLINOIS*?

14. ¿Cuántas cadenas pueden formarse ordenando las letras de la palabra *ILLINOIS* si alguna *I* aparece antes de alguna *L*?

15. ¿De cuántas formas pueden repartirse 12 libros distintos entre cuatro estudiantes, si cada estudiante debe tener cuatro libros?

16. ¿Cuántas soluciones enteras de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

satisfacen $x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 2, x_4 \geq 3$?

Sección 4.5

17. Desarrolle la expresión $(s - r)^4$ mediante el teorema del binomio.

18. Determine el coeficiente de x^3yz^4 en el desarrollo de $(2x + y + z)^8$.

19. Utilice el teorema del binomio para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}(-1)^k C(n,k) = 1.$$

20. Gire el triángulo de Pascal en contra del sentido de las manecillas del reloj, de modo que el renglón superior conste de unos. Explique por qué el segundo renglón enumera los enteros positivos en orden: 1, 2, ...

Sección 4.6

21. Muestre que todo conjunto de 15 calcetines elegidos entre 14 pares de calcetines tiene al menos un par correcto.

22. 19 personas tienen por nombre Zeke, Wally o Linda, por segundo nombre Lee y David, y por apellido Yu, Zamora y Smith. Muestre que al menos dos personas tienen los mismos primeros nombres, segundos nombres y apellidos.

23. Un inventario consta de una lista de 200 artículos, cada uno marcado como "disponible" o "no disponible". Existen 110 artículos disponibles. Muestre que existen al menos dos artículos disponibles en la lista a exactamente 19 artículos de distancia.

24. Sea $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ un conjunto de cinco puntos (distintos) en el plano euclidiano ordinario, cada uno de los cuales tiene coordenadas enteras. Muestre que para algún par, su punto medio tiene coordenadas enteras.