

Análisis Matemático II “A” (61.03)

Profesora responsable: Susana Gabbanelli



Evaluaciones

La elaboración de las evaluaciones de la asignatura es realizada por Silvia Gigola, Cristina Unger y Eduardo Zitto bajo la supervisión de María Inés Troparevsky.

Para la evaluación parcial se trabaja con los ejercicios aportados por los docentes Jefes de Trabajos Prácticos de la asignatura y para la evaluación integradora con los ejercicios aportados por los Profesores.

Página web de la asignatura


<http://materias.fi.uba.ar/6103/>

Diseño y actualización a cargo de Jorge Comas.

Guía de problemas (Primera parte)

Índice

1. GUIA I: Geometría del plano y el espacio	2
2. GUIA II: Funciones, límite, continuidad, derivadas	5
3. GUIA III: Diferenciabilidad, tangentes	10
4. GUIA IV: Funciones compuestas y funciones implícitas	16
5. GUIA V: Polinomio de Taylor y extremos	20

Nota: En los ejercicios indicados con  se sugiere el uso de applets.

Guía I: Geometría del plano y el espacio

1. Hallar en cada caso la ecuación implícita de un plano que satisfaga las condiciones dadas. Analizar si esas condiciones determinan el plano unívocamente.
 - (a) pasa por $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$ y $(3, 2, -1)$;
 - (b) pasa por $(2, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1, 0)$ y $(4, -1, -2)$;
 - (c) contiene a la intersección de los planos de ecuaciones $x + y - 2z = 0$ y $2x - y + z = 2$;
 - (d) es perpendicular al plano de ecuación $2x + 3y + 4z = 5$ y contiene a la recta de ecuaciones $x + y = 2$, $y - z = 3$.
2. Hallar en cada caso las ecuaciones implícitas de una recta que satisfaga las condiciones dadas. Analizar si esas condiciones determinan la recta unívocamente.
 - (a) pasa por el origen y es paralela a la recta dada por las ecuaciones $x + 2y - z = 2$, $2x - y + 4z = 5$;
 - (b) pasa por $(1, 2, -1)$ y forma con los tres semiejes positivos ángulos iguales entre sí;
 - (c) está determinada como intersección de los planos de ecuaciones $y - x = 0$ y $z = 4 - x - y$.
3. En los siguientes casos, hallar k de manera que exista más de un plano que pase por p_1, p_2 y p_3 . Analizar una condición aplicable en general.
 - (a) $p_1 = (1, 0, 0)$, $p_2 = (0, 1, 0)$, $p_3 = (2, -1, k)$;
 - (b) $p_1 = (1, 1, 0)$, $p_2 = (1, -1, 1)$, $p_3 = (1, -3, k)$.
4. Expresar $3\check{i} + \check{j}$ en la forma $\vec{u} + \vec{v}$, con \vec{u} paralelo a $\check{i} + \check{j}$ y \vec{v} perpendicular a \vec{u} .
5. Calcular las siguientes distancias:
 - (a) del origen al plano de ecuación $x + 2y + 3z = 4$;
 - (b) del punto $(1, 2, 0)$ al plano de ecuación $3x - 4y - 5z = 2$;
 - (c) del origen a la recta de ecuaciones $x + y + z = 0$, $2x - y - 5z = 1$.
6. Hallar la distancia de la recta de ecuaciones $x - 2 = (y + 3)/2 = (z - 1)/4$ al plano de ecuación $2y - z = 1$.

7. Dados los vectores $\vec{u} = 2\check{i} + \check{j} - 2\check{k}$ y $\vec{v} = 2\check{i} - 2\check{j} - \check{k}$ hallar:

- (a) el ángulo entre \vec{u} y \vec{v} ;
- (b) $|\vec{u}|$;
- (c) $3\vec{u} - 2\vec{v}$;
- (d) un vector unitario paralelo a \vec{u} .

8. Responder a cada uno de los siguientes problemas

- (a) Hallar los valores de k para los que los puntos $(1, 1, -1)$, $(0, 3, -2)$, $(-2, 1, 0)$ y $(k, 0, 2)$ son coplanares; determinar en esos casos una ecuación del plano que los contiene.
- (b) Hallar el área del paralelogramo dos de cuyos lados son los segmentos que unen el origen con $(1, 0, 1)$ y $(0, 2, 1)$.

9. Describir mediante un gráfico las regiones planas dadas por las siguientes inecuaciones:

- (a) $x + y \leq 1$
- (b) $x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0$
- (c) $y - x^2 + 2x \geq 0, y \geq 2$
- (d) $x \leq e^{-y}$
- (e) $x^2 - 2x + y^2/4 - y \leq 16$
- (f) $5 \operatorname{sh}(x) < y < 3 \operatorname{ch}(x)$
- (g) $\operatorname{sen}(x) < 1/2$

10. Describir mediante inecuaciones en coordenadas cartesianas las regiones planas dadas:

- (a) Interior del círculo centrado en $(0, 0)$ y de radio 2.
- (b) Cuadrado de lado 1 con ejes paralelos a los ejes coordenados y vértice inferior izquierdo en $(1, 1)$.
- (c) Puntos por encima de la parábola de ecuación $y = 2x^2$.
- (d) Puntos interiores a la elipse de semiejes 2 y 4, paralelos a los ejes coordenados, centrada en $(0, 0)$.

11. Trazar aproximadamente las curvas descritas (en coordenadas polares) por:

- (a) $r = 2, 0 \leq \theta \leq \pi/4$
- (b) $\theta = \pi/6, 1 \leq r \leq 2$
- (c) $r = \cos(\theta), 0 \leq \theta < \pi/2$

12. Describir mediante inecuaciones en coordenadas cartesianas las regiones planas descritas (en coordenadas polares) por:

(a) $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$

(b) $1 \leq r < 2$

(c) $1 < r \leq 2, \pi/6 \leq \theta < \pi/3$

(d) $r \geq \theta$

(e) $r \leq 2 \cos(\theta), \theta \in [0, \pi/2] \cup [3/2\pi, 2\pi]$

(f) $r \leq 3 \sin(\theta), \theta \in [0, \pi]$

¿Por qué fue necesario restringir el dominio de θ en los ítems (e) y (f)?

13. Describir mediante inecuaciones en coordenadas polares las regiones planas descritas (en coordenadas cartesianas) por:

(a) $x^2 + y^2 \leq 1$

(b) $x^2 + y^2 - 2y \leq 0, y > |x|$

(c) $x^2 \geq 3y^2$

(d) $x \geq y, x < 3y$

14. Describir mediante inecuaciones el interior y frontera de los conjuntos dados por:

(a) $0 < x^2 + y^2 < 1$ (en \mathbb{R}^2)

(b) $0 < x^2 + y^2 < 1$ (en \mathbb{R}^3)

(c) $x \geq 0, y < 0$ (en \mathbb{R}^2)

(d) $x^2 + y^2 \leq 1$ (en \mathbb{R}^2)

(e) $0 < |x| + |y| \leq 1$ (en \mathbb{R}^2)

(f) $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$ (en \mathbb{R}^3)

15. (a) Sea S el sector de una corona circular correspondiente a un ángulo $\Delta\theta$ de lado Δr en un círculo de radio $r + \Delta r$. Graficar el conjunto S y calcular su área.
- (b) Sea R el rectángulo cuyos lados tienen longitud Δr y longitud de un arco de circunferencia de radio r correspondiente a un ángulo $\Delta\theta$. Calcular el área del rectángulo.
- (c) Si $\Delta r \ll 1$ ¿Es cierto que el área de rectángulo aproxima al área del sector circular? ¿Por qué? Ejemplifique con valores de $r, \Delta\theta$ y $\Delta r, \Delta r \ll 1$.

Guía II: Funciones, límite, continuidad, derivadas

1. Definir:

Dominio de una función. Imagen de una función. Gráfico de un campo escalar. Conjunto de nivel de un campo escalar. Conjunto abierto. Conjunto cerrado. Conjunto acotado.

2. ■ En los siguientes casos, describir el dominio de f , determinar si es un conjunto cerrado, abierto, acotado, describir los conjuntos de nivel de f y esbozar su gráfico.

(a) $f(x, y) = 3(1 - x/2 - y/2)$

(b) $f(x, y) = \ln(x - y^2)$

(c) $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$

(d) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(e) $f(x, y) = 1/\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

(f) $f(x, y) = 25 - x^2$

(g) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$

(h) $f(x, y) = \sqrt{3x - x^2 - y^2}$

(i) $f(x, y) = \min(x, y)$

Describir en coordenadas polares las curvas de nivel de las funciones de los incisos (b), (e) y (h) que pasan por los puntos $(1, 0)$, $(-2, \sqrt{3})$ y $(0, 0)$, respectivamente. Graficar las mencionadas curvas.

3. Definir límite de un campo escalar y de una función vectorial en un punto de acumulación de su dominio y enunciar al menos tres propiedades referidas a límite.


4. Demostrar que si existe el límite de un campo escalar en un punto de acumulación de su dominio entonces los valores del campo están acotados en algún entorno del punto contenido en el dominio.

5. Determinar cuál de las siguientes expresiones es la correcta:

(a) Entorno de un punto contenido en el dominio de una función.

(b) Entorno de un punto perteneciente al dominio de una función.

6. Demostrar que si un campo escalar f está acotado en un entorno de un punto de acumulación P de su dominio y otro campo escalar g tiene límite nulo en P , también punto de acumulación del dominio de g , entonces el campo producto de f y g tiene límite nulo en P .

7.  Estudiar la existencia de los límites que se indican más abajo fundamentando sus conclusiones con definiciones, propiedades o teoremas.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2+y^2}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{y^2(x-2)^2}{x^2+(y-2)^2}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$$

$$(e) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,1)} \frac{y+1}{\sqrt{z^2-1}}$$

$$(f) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 y - 2x^2 - y + 2}{x y - 2x + y - 2}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{|x|}, \sqrt{x} \right)$$

$$(h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left((y-1) \cos\left(\frac{1}{x}\right), \frac{\sin(3x)}{2x}, x-y \right)$$

Para cada uno de los ejercicios anteriores, elegir una definición o propiedad que se haya usado y enunciarla.

8. Definir continuidad de un campo escalar en un punto de su dominio y definir continuidad de una función vectorial en un punto de su dominio.
9. Determinar el dominio y los puntos de continuidad de las siguientes funciones:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & \text{cuando } x \neq 2y \\ 3 & \text{cuando } x = 2y \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x - y > 0 \\ 0 & \text{cuando } x - y \leq 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } xy \neq 0 \\ 1 & \text{cuando } xy = 0 \end{cases}$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } y = 0, |x| \leq 1 \\ 1 - y^2 & \text{si } x = 0, |y| \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

10. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Definimos g y h de \mathbb{R} en \mathbb{R} mediante $g(x) = f(x, b)$ y $h(y) = f(a, y)$.


- (a) Estudiar las relaciones entre los gráficos de h y g y el gráfico de f .
- (b) Si f es continua en (a, b) : ¿Es g continua en a ? ¿Es h continua en b ? Justificar.
- (c) Si $f(x, y) = x^2 + y^3$ y $(a, b) = (1, 2)$, hallar g y h .

- (d) Dar un ejemplo para mostrar que g puede ser continua en a y h en b , sin que f sea continua en (a, b) .
11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Fijado $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, definimos $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $h(t) = f((a, b) + t(\alpha, \beta))$.
- (a) Estudiar la relación entre el gráfico de h y el de f
- (b) Dar un ejemplo para mostrar que aún cuando para cada $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ h resulte continua en 0, f puede no ser continua en (a, b) .
- (c) ¿Es cierto que si f es continua en (a, b) entonces h es continua en 0?
12. Definir, si es posible, una función f que sea continua en \mathbb{R}^2 tal que $f(x, y) = 0$ cuando $x^2 + y^2 < 1$ y $f(x, y) = 1$ cuando $x^2 + y^2 > 2$.
13. Definir derivada parcial de un campo escalar en un punto de su dominio.
14. En los siguientes casos, calcular las derivadas parciales de f en el punto indicado.
- (a) $f(x, y) = xy + x^2$, $(2, 0)$
- (b) $f(x, y, z) = xz/(y + z)$, $(1, 1, 1)$
- (c) $f(x, y, z) = \ln(1 + e^{x+y^2z})$, $(0, 2, 0)$
- (d) $f(x, y) = \sin(x\sqrt{y})$, $(\pi/3, 4)$. Fundamente su respuesta con definiciones, propiedades o teoremas.
- (e) $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, $(-3, 4)$
- (f) $f(x, y) = \int_x^{y^2} \sin(\ln(1 + t^3)) dt$, $(1, 2)$.
- (g) f es la función dada en 9d, $(0, 0)$
15. Hallar las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:
- (a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$. Determine el dominio de f .
- (b) $f(x, y, z) = x \sin(y) + y \cos(z)$
16. Enunciar algún teorema que asegure la igualdad de las derivadas segundas cruzadas de un campo escalar.
17. Sea C la curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi)$. Hallar la ecuación de su recta tangente en $t = \pi/4$. Graficar la curva y la recta indicando la orientación de la curva.

18. ■ Sea C la curva dada por $\vec{\sigma}(t) = (t^2, t^3 + 1, t^3 - 1), t \in [0, 4]$.
- Hallar la ecuación de su recta tangente y su plano normal en $t = 2$.
 - Hallar la rapidez en $t = 2$.
 - Probar que la curva es plana.
 - Hallar la intersección de C con el plano de ecuación $y + z = 2$.
 - Muestre que la parametrización dada no es regular y encuentre alguna que lo sea.
19. Sean $\gamma_1(t) = (t, |t|)$ con $t \in [-1, 1]$ y $\gamma_2(t) = (t^3, |t^3|)$ con $t \in [-1, 1]$.
- Verificar que ambas parametrizaciones definen la misma curva plana y graficarla.
 - Hallar los vectores tangentes a la curva y la rapidez para cada parametrización.
- ¿Existen los vectores tangentes para todo valor del parámetro?
20. ■ En los siguientes casos, hallar una parametrización regular de la curva definida por el par de ecuaciones, y calcular su recta tangente en el punto indicado.
- $y = 4 - x, z = 4 - x^2, (1, 3, 3)$
 - $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z = \sqrt{x^2 + y^2}, (0, 1, 1)$
 - $z = x + y^2, x = y^2, (4, 2, 8)$
 - $x^2 + y^2 + z^2 = 6, z = x^2 + y^2, (1, 1, 2)$
21. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $g(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2$. Hallar una parametrización para la curva determinada por la intersección de las superficies de nivel de f y g que pasan por $(0, 0, -2)$.
22. Parametrizar las siguientes curvas planas y graficarlas:
- $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$
 - $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$
- Estudiar la existencia de los vectores tangentes a las curvas según las parametrizaciones propuestas.
- ¿Las parametrizaciones encontradas son regulares?
23. Resolver los siguientes problemas:
- Una abeja vuela ascendiendo a lo largo de la curva intersección de $z = x^4 + xy^3 + 12$ con $x = 1$. En el punto $(1, -2, 5)$ sigue a lo largo de la tangente. ¿Dónde cruza la abeja el plano $y = 1$?

- (b) Una partícula se mueve en el plano de manera que su posición al tiempo t es $r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$. Hallar los máximos de los módulos de su velocidad y su aceleración. Dibujar aproximadamente la trayectoria y los vectores velocidad y aceleración.
- (c) Una partícula se mueve a lo largo de la parte superior de la parábola de ecuación $y^2 = 2x$ de izquierda a derecha con rapidez de 5 unidades por segundo. ¿Cuál es su vector velocidad al pasar por $(2, 2)$?

Guía III: Diferenciabilidad, tangentes

1.  Dados el campo escalar $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $P_0 \in D$ se pide en cada caso:
 - i. Hallar $\nabla f(P_0)$, la curva de nivel de f que pasa por $P_0 = (x_0, y_0)$ y su recta tangente en ese punto. Graficar.
 - ii. Representar el gráfico de f , $Q_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, el plano tangente a la superficie en Q_0 y el vector $\vec{N} = (f'_x(P_0), f'_y(P_0), -1)$
 - iii. Relacionar lo hecho en (i) y (ii)
 - (a) $f(x, y) = x^2 + y^2, P_0 = (1, 1)$
 - (b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, P_0 = (1, -1)$
 - (c) $f(x, y) = 5 + 2x - 3y, P_0 = (0, 0)$

Justificar que las funciones dadas son diferenciables en los puntos indicados.

¿Esas funciones son diferenciables en sus dominios?

2. Probar que si un campo escalar definido en \mathbb{R}^2 es diferenciable en un punto entonces es continuo en ese punto.

3. Dada $f(x, y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}(\frac{1}{xy}) & \text{si } x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Probar que el campo escalar f es diferenciable en el origen de coordenadas y que las derivadas parciales no son funciones continuas en dicho punto.

4. Dada la superficie de ecuación $z = xy - x^2$,
 - (a) calcular su plano tangente en $(2, 3, 2)$;
 - (b) calcular la ecuación de la recta intersección del plano con la superficie $x + y = 4$.
5. Hallar los puntos del cilindro $x = 4 - z^2$ en los que el plano tangente es paralelo al plano yz .
6. Hallar los puntos donde el plano normal a la curva intersección de las superficies $z = 5 - y^2$ y $x = y - 1$ es paralelo al plano tangente a la superficie $x^2 + 3xy + y^2 - z = 0$ en el $(1, 1, 5)$.

7. Hallar para cada f el valor aproximado en el punto dado, usando una aproximación lineal:

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 y^2, \quad P_0 = (1.1, 2.99)$$

$$(b) \quad f(x, y) = x e^{x+y}, \quad P_0 = (2.05, -0.02)$$

Para la función dada en el inciso (a) calcular el valor $f(P_0)$ y comparar con el valor obtenido con la aproximación lineal.

¿Encontró una buena aproximación?

Para la función del inciso (a), definiendo $g(x) = f(x, 3)$ y $h(y) = f(1, y)$ encontrar cotas de los errores que se cometen al aproximar linealmente a los valores $g(1.1)$ y $h(2.99)$ y compare con el error exacto.

8. (a) Dado un campo escalar definido en \mathbb{R}^2 enunciar la definición de derivada direccional en un punto P_0 según la dirección de un versor \check{v} .

(b) Probar que si la función es diferenciable en P_0 entonces el valor de la derivada direccional en P_0 según la dirección de un versor \check{v} se puede calcular como el producto escalar del gradiente de la función en P_0 con el versor.

9. Hallar la derivada direccional de las funciones dadas en los puntos y en las direcciones indicadas justificando, si la emplea, el uso de la fórmula dada en 8b:

$$(a) \quad f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen}(y + 1) \text{ en } (-1, -1) \text{ en la dirección del vector } \check{i} + \check{j}.$$

$$(b) \quad f(x, y) = x^2 y + y^2 \text{ en } (1, -1) \text{ en la dirección del vector que forma un ángulo de } 30^\circ \text{ con el eje } x.$$

10. Hallar los versores para los cuales la derivada direccional de las funciones dadas en los puntos indicados, es máxima, mínima y nula y sus valores:

$$(a) \quad f(x, y) = 2x + xy \text{ en } (2, 1)$$

$$(b) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + (y + 1)^3}{x^2 + (y + 1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, -1) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, -1) \end{cases} \text{ en } (0, -1) \text{ y en } (1, 0).$$

11. Probar que la siguiente función definida en \mathbb{R}^2 tiene derivadas en todas las direcciones en el origen de coordenadas pero no es diferenciable.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$


12. Probar que la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tiene derivadas direccionales en todas las direcciones en el origen de coordenadas. Interpretar gráficamente.
13. Sea f una función diferenciable tal que $\frac{\partial f}{\partial \check{v}_1} f(a, b) = \sqrt{2}$ siendo $\check{v}_1 = (\check{i} - \check{j})/\sqrt{2}$ y $\frac{\partial f}{\partial \check{v}_2} f(a, b) = \sqrt{5}$ siendo $\check{v}_2 = (\check{i} + 2\check{j})/\sqrt{5}$. Hallar la dirección de mínima derivada direccional de f en (a, b) y el valor de dicha derivada.

Indicar claramente el uso de todas las hipótesis dadas en el ejercicio.

14. En los siguientes casos, suponga que f es una función diferenciable en un punto interior de su dominio, $P_0 = (x_0, y_0)$. A partir de los datos dados, hallar:
- i. el gradiente de f en P_0 ,
 - ii. la dirección de máximo crecimiento de f ,
 - iii. la dirección de la curva de nivel de f que pasa por P_0 ,
 - iv. si es posible, dos direcciones en P_0 sobre las que la pendiente de la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto $Q_0 = (x_0, y_0, f(P_0))$ sea m .
- (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 1$, $\nabla(f)(P_0) \cdot (1, 1) = 3$, $m = 1$.
- (b) La curva de nivel de f que pasa por P_0 tiene ecuación $x^2 - y = 1$, y la pendiente de $z = f(x, y)$ en la dirección $(1, 1)$ es $\sqrt{2}$.
- (c) El plano tangente a S en el punto Q_0 es paralelo al plano de ecuación $6x + 12y - 3z = 0$, $m = 4$.
- (d) La recta de ecuación $3x - y = 0$ es perpendicular a la curva de nivel de f por P_0 , y la máxima pendiente de S en Q_0 es $\sqrt{5}$, $m = -\sqrt{5}/2$.
- (e) El vector $(6, 2, -2)$ es perpendicular a S en Q_0 , $m = 10$.
- (f) f tiene un máximo relativo en P_0 , $m = 1$.
- (g) Los vectores $(1, 0, -1)$ y $(1, 1, 1)$ son tangentes a S en Q_0 , $m = 0$.
15. En este ejercicio se expone la linealidad del diferencial de los campos escalares y de las funciones vectoriales.

- (a) Probar que: $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una transformación lineal si y sólo si $T(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es la matriz de la transformación asociada en bases canónicas?
- (b) Probar que: $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una transformación lineal si y sólo si $T(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^n$. ¿Cuál es la matriz de la transformación asociada en bases canónicas?

- (c) Probar que: $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal si y sólo si $T(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^m \times n$. ¿Cuál es la matriz de la transformación asociada en bases canónicas?
- (d) Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable en $P_0 = (x_0, y_0)$ entonces el diferencial de f en P_0 es una transformación lineal de los incrementos $(\Delta x, \Delta y)$.
- (e) Probar que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función vectorial diferenciable en $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ entonces el diferencial de f en P_0 es una transformación lineal de los incrementos $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$.
16. (a) Sea $f(x, y) = x^2 y^2 - 3xy$ un campo escalar definido sobre \mathbb{R}^2 . Justificar que f es diferenciable en $P_0 = (1, 2)$ y hallar la expresión del diferencial del campo en el punto P_0 .
- (b) Sea $F(x, y) = (x^2 y, y^2 x^3, x + y)$ una función vectorial de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 . Justificar que la función es diferenciable en $P_0 = (0, 1)$ y hallar la expresión del diferencial de la función vectorial en el punto P_0 .
17. En los siguientes casos hallar, cuando sea posible, una función f **diferenciable** (en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ que contenga a todos los puntos del plano involucrados) que satisfaga las condiciones dadas. En los casos en que no sea posible, fundamentar esta imposibilidad.
- (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2$, $f(0, 0) = -1$.
- (b) f es constante a lo largo de la curva de ecuación $y = x - x^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$.
- (c) f es constante a lo largo de la curva de ecuación $y = 2x + x^2$, $\nabla(f)(0, 0) = (-1, 2)$.
- (d) Las pendientes de la superficie $z = f(x, y)$ sobre el punto $(1, 0)$ en las direcciones $(1, 1)$ y $(0, -1)$ son 1 y 2 respectivamente, y $f(1, 0) = -3$.
18. La elevación de una montaña sobre el nivel del mar está dada por la función $f(x, y) = 1500 e^{-(x^2+y^2)/200}$. El semieje positivo de las x apunta hacia el este y el de las y hacia el norte.
- (a) Hallar y dibujar algunas curvas de nivel de f .
- (b) Un alpinista está en $(10, 10)$, si se mueve hacia el noreste, ¿asciende o desciende?, ¿con qué pendiente?
19. El nivel de toxicidad en un laboratorio está dado por $T(x, y) = -3x^2 + 4y^2$. Un empleado se encuentra en el recinto ubicado en el punto de coordenadas $(-1, 2)$.
- (a) Hallar y dibujar algunas curvas de nivel de T .

- (b) ¿En qué dirección deberá moverse para reducir la toxicidad tan rápido como sea posible?
- (c) ¿Con qué rapidez decrece la toxicidad si el empleado se mueve en esa dirección?
- (d) ¿A qué razón habría decrecido la toxicidad si se hubiese movido desde el punto $(-1, 2)$ en la dirección del vector $-\check{i} - 2\check{j}$.
20. Definir superficie como un subconjunto del espacio tridimensional real Definir curvas paramétricas.
21.  Dada la parametrización de una superficie S , como $\overline{X}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\overline{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

y un punto $P_0 \in S$, se pide en cada caso:

- i. Hallar $(u_0, v_0) \in D$ tal que $\overline{X}(u_0, v_0) = P_0$.
 - ii. Obtener la ecuación de S en coordenadas cartesianas.
 - iii. Dibujar la superficie, trazar las curvas paramétricas por P_0 y sus vectores tangentes en P_0 .
 - iv. Hallar una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana del plano tangente a S en P_0
- (a) (plano)

$$\overline{X}(u, v) = (u, v, 3 - u - v), \quad D = [0, 3] \times [0, 3], \quad P_0 = (1, 1, 1)$$

(b) (paraboloide)

$$\overline{X}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad u^2 + v^2 \leq 9, \quad P_0 = (0, 2, 4)$$

(c) (paraboloide)

$$\overline{X}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2), \quad 0 \leq u \leq 3, \quad 0 \leq v \leq 2\pi, \quad P_0 = (0, 2, 4)$$

(d) (cilindro elíptico)

$$\overline{X}(u, v) = (v, 2 + \cos(u), 2 \sin(u)), \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 4, \quad P_0 = (2, 3/2, \sqrt{3})$$

(e) (cono)

$$\overline{X}(u, v) = (v \cos(u), 2v, v \sin(u)), \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 3, \quad P_0 = (0, 4, 2)$$

(f) (cilindro hiperbólico)

$$\overline{X}(u, v) = (\cosh(u), \sinh(u), v), \quad -1 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2, \quad P_0 = (1, 0, 1)$$

22. Mostrar en cada caso, definiendo una parametrización adecuada de la superficie S dada, las siguientes propiedades e ilustrarlas gráficamente:

- (a) Si S es una esfera de centro $A = (1, 2, 0)$ y radio 3, y $P = (x, y, z) \in S$, $\vec{u} = P - A$ es perpendicular a S en P , y $\vec{v} = (-(y - 2), x - 1, 0)$ es tangente a S en P .
- (b) Si S es un cilindro de sección circular con eje de ecuaciones $y = 1, z = 2$, y $P = (x, y, z) \in S$, $\vec{u} = (0, y - 1, z - 2)$ es perpendicular a S en P , y $\vec{v} = (1, 0, 0)$, $\vec{w} = (0, -(z - 2), y - 1)$ son tangentes a S en P .
- (c) Si S es un cono con vértice en $A = (0, 2, 0)$, y tal que su sección por el plano $y = 4$ es la circunferencia de ecuaciones $y = 4, x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 25$, y $P = (x, y, z) \in S$, $\vec{u} = (x, y - 2, z)$ es tangente a S en P .
- (d) Si S es un cilindro de sección parabólica con eje de ecuaciones $y = 6, z = 3$ y sección por el plano $x = 3$ de ecuaciones $x = 3, (y - 6) = 3(z - 3)^2$, y $P = (x, y, z) \in S$, $\vec{u} = (1, 0, 0)$ es tangente a S en P .
- (e) Si S es un cono con vértice en $A = (1, 0, 2)$, y tal que su sección por el plano $y = 4$ es la hipérbola de ecuaciones $y = 4, (x - 1)^2 - (z - 2)^2 = 4$, y $P = (x, y, z) \in S$, $\vec{u} = (x - 1, y, z - 2)$ es tangente a S en P .

23. Dada la superficie S en forma paramétrica por $\overline{X}(u, v) = (u + v, u - v, uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

- (a) Hallar una ecuación cartesiana para S .
- (b) Hallar la ecuación del plano tangente a S en $(3, -1, 2)$.
- (c) Aproximar el valor de z para que $(3.02, -1.01, z) \in S$.
- (d) Calcular la distancia desde $(3, -1, 2)$ hasta el punto en que la recta normal a S en $(3, -1, 2)$ interseca al cilindro de ecuación $72y = x^2$.

Guía IV: Funciones compuestas y funciones implícitas

- Dadas $\bar{f}(x, y) = (x y^4 + y^2 x^3, \ln(x))$ y $\bar{g}(u, v) = (v \sqrt{u}, \frac{\sin(u)}{u})$,
 - construir $\bar{h} = \bar{f} \circ \bar{g}$, hallar su dominio y su expresión;
 - ídem (a) para $\bar{w} = \bar{g} \circ \bar{f}$;
 - calcular $\frac{\partial \bar{h}}{\partial v}(1, e)$ aplicando la regla de la cadena y usando la expresión de \bar{h} hallada en (a).
 - Sin calcular, asegurar la existencia de $\frac{\partial \bar{h}}{\partial v}(1, e)$.
- Calcular $\nabla z(A)$ en los siguientes casos:
 - $A = (0, 1)$, $z = \sqrt{u/v}$ con $u = 1 + \ln(x + y)$, $v = \cos(xy)$.
 - $A = (1, 0)$, $z = h(x, x e^u, v)$, con $u = y^2$, $v = x - y$, sabiendo que $\nabla h(1, 1, 1) = (3, 1, 2)$ y $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
- Dada $w = e^{x-y} - z^2 y + x$ con $x = u - v$, $y = u + u^3 \ln(v - 1)$, $z = u v$, hallar la dirección de máxima derivada direccional de $w = w(u, v)$ en $(1, 2)$ y el valor de dicha derivada máxima.
- Analizar si $z = g(xy, x - y)$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ en puntos de la recta $x + y = 0$. ¿Qué hipótesis falta?
- Dada $z = h(x - y, xy)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$, demostrar que en puntos de la recta $y + x = 0$ resulta $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. ¿Es necesaria la hipótesis impuesta para h ? ¿Por qué?
- Suponiendo que f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes, si $z = f(x, y)$ donde $x = 2s + 3t$ y $y = 3s - 2t$, calcular
 - $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(s, t)$
 - $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}(s, t)$
 - $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(s, t)$
- Mostrar que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica en \mathbb{R}^2 (i.e. $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$), entonces $h(x, y) = f(x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ también es armónica en \mathbb{R}^2 . Justificar que $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
- Hallar el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en $(0, 1, z_0)$ cuando $f = h \circ \bar{g}$ con $h(u, v) = u - v^2$ y $\bar{g}(x, y) = (x - y, \sin(x/y))$.

9. Sea $\overline{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función vectorial diferenciable e inyectiva y sea $C \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular. $\overline{F}(C) = C^*$ es la imagen de C a través de la función vectorial. Probar que la matriz derivada de \overline{F} transforma vectores tangentes a C en vectores tangentes a C^* y que C^* resulta también una curva regular.
10. Sea S la superficie de ecuación paramétrica $\overline{F}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y C la curva de ecuación $v = u^2 - 1$ en el plano u, v .
- (a) Hallar una parametrización regular para la curva C^* , imagen de C a través de \overline{F} .
- (b) Sea A un punto cualquiera de C^* , probar que el plano tangente a S en A contiene a la recta tangente a C^* en dicho punto.
11. Suponer en los siguientes casos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función $C^2(\mathbb{R}^2)$ que satisface las condiciones dadas. Determinar, en cada caso, el gradiente de f en el punto A especificado y hallar una función que satisfaga esas condiciones
- (a) $f(1, 1+t) = 1+t$, $f(1+t, 1) = 1-t$, $t \in \mathbb{R}$, $A = (1, 1)$
- (b) $f(t, t) = 1$, $f(t, t^2) = 1+t-t^2$, $A = (0, 0)$
- (c) $f'_v(1, 1) = -2$, $f(t, \sqrt{t}) = t$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\check{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $A = (1, 1)$.
12. Sea $\overline{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\overline{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ una función biyectiva y $C^2(\mathbb{R}^2)$ que satisface

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y $\overline{F}(1, -2) = (1, 2)$.

- (a) Hallar un vector tangente en $(1, 2)$ de la curva imagen por \overline{F} de la circunferencia de ecuación $u^2 + v^2 = 5$.
- (b) Hallar un vector tangente en $(1, -2)$ de la preimagen por \overline{F} de la recta de ecuación $y = 2x$.
13. Sea $\overline{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función inyectiva y diferenciable en \mathbb{R}^2 , $\overline{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, tal que $\overline{F}(1, 1) = (3, 2)$, y la matriz jacobiana de \overline{F} en $(1, 1)$ es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una ecuación para la recta tangente en $(3, 2)$ a la imagen por \overline{F} de la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 2$.

14. Sea $z = f(x, y)$, definida implícitamente por la ecuación dada, calcular $\nabla f(A)$ en cada caso.

(a) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, $A = (4, 5)$, $z > 0$.

(b) $z = 2 - \ln(z + 3x - y^2)$, $A = (1, 2)$.

(c) $z - xv + y^2 = 0$, $A = (1, 0)$, con $v = h(x, y)$ tal que $xv + ye^{yv} = 0$.

En los casos anteriores demostrar que z es, efectivamente, una función dependiente de (x, y) en algún entorno del punto A .

15. Un cierto gas satisface la ecuación $pV = T - \frac{4p}{T^2}$ donde p es la presión, V el volumen, y T la temperatura. Hallar el conjunto de puntos en donde la temperatura se pueda definir como una función del volumen y la presión. Calcular $\frac{\partial T}{\partial p}$ y $\frac{\partial T}{\partial V}$ en un punto donde $p = 1$, $V = 1$, $T = 2$.
16. Demostrar que $(x^2 + \ln(x + z) - y, yz + e^{xz} - 1) = (0, 0)$ define una curva C regular en un entorno de $(1, 1, 0)$ y hallar el plano normal a C en dicho punto.

17. (a) Mostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - u^3 - v^3 &= 0 \\ y - uv + v^2 &= 0 \end{cases}$$

define a u y v como funciones de x e y en el entorno de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 0, 1, 1)$ y calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(2, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(2, 0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(2, 0)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(2, 0)$, $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(2, 0)$.

- (b) Mostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 + xu + v^2 &= 3 \\ xu + 2yv - xy &= 0 \end{cases}$$

define a x y y como funciones de u e v en el entorno de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 1, 1, 0)$ y calcular $\frac{\partial x}{\partial u}(1, 0)$, $\frac{\partial y}{\partial v}(1, 0)$

18. Hallar una ecuación cartesiana para la recta tangente a C en los siguientes casos.

(a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + 2xy = 4\}$, en $(1, 1)$.

(b) $C = \{\overline{X} \in \mathbb{R}^2 / \overline{X} = (t, v), \text{ con } v(t) \text{ tal que } tv + e^v = 1\}$, en $(1, 0)$.

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy + \ln y = e^x\}$, en $(0, e)$.

(d) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (xy + z, y + x - 2) = (3, 5)\}$, en $(1, 6, -3)$.

19. Suponga que $F(x, y, z) = 0$ define a $z = f(x, y)$, y que el plano tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0, z_0) tiene ecuación $\overline{X} = (2 + u, 3 + v, 1 + 5u - 4v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Calcular la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0) en la dirección que va del punto (x_0, y_0) al punto $(6, 5)$.
20. Demostrar que la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y el cono $z^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$ son superficies ortogonales en todo punto de su intersección.
21. Sea $u = z v$ con $v = f(x, y)$ tal que $x v - x - y \ln v = 0$. Hallar los puntos de la superficie de nivel $u_0 = 4$ para los que la recta normal a esta superficie es paralela al eje z .
22. Sea C la curva definida como intersección de las superficies $e^{x z^{-1}} - x y + \ln(y z) = 0$ con $y = x^2$, si r_0 es la recta tangente a C en $A = (1, 1, 1)$. Calcular la distancia desde A hasta el punto en que r_0 corta al plano de ecuación $x + y = 8$.

Guía V: Polinomio de Taylor y extremos

1. Hallar el polinomio de Taylor de primer orden para los siguientes campos escalares definidos sobre \mathbb{R}^2 en el punto A y una cota del error al aproximar linealmente el valor $f(B)$.
 - (a) $f(x, y) = \cos(x + y)$, $A = (0, 0)$, $B = (0.1, -0.05)$
 - (b) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $A = (0, 0)$, $B = (0.01, 0.01)$
2. Expresar el polinomio $p(x, y) = x^3 - 2xy + y^2$ en potencias de $(x - 1)$ e $(y + 1)$.
3. Desarrollar f por Taylor hasta 2° orden en un entorno de A .
 - (a) $f(x, y) = \cos(x + y)$, $A = (0, 0)$.
 - (b) $f(x, y) = e^{x+y} \cos(y - 1)$, $A = (-1, 1)$.
 - (c) $f(x, y, z) = \sqrt{xy} \ln z$, $A = (1, 4, 1)$.
 - (d) $z = u - v^2$ con $\begin{cases} u = 2x + y^2 \\ v = g(x, y) \end{cases}$ tal que $vx + e^{yv} = 1$, $A = (1, 0)$.
4. Sea $w = f(u, v)$ definida en forma implícita por $3v + ue^{2w} - w = 1$. Si $u = x - 2y$ y $v = x + y$, calcular aproximadamente el valor de w cuando $x = 0.97$ e $y = -3.01$.
5. Sea $y - z + e^{zx} = 0$ que define implícitamente a $z = f(x, y)$, hallar un valor aproximado para $f(0.01, -0.02)$ aplicando Taylor hasta 2° orden.
6. El polinomio de Taylor de 2° orden para f en un entorno de $(2, 1)$ es $p(x, y) = x^2 - 3xy + 2x + y - 1$, hallar una ecuación cartesiana para el plano tangente a la gráfica de f en $(2, 1, z_0)$.
7. Dado un campo escalar definido en \mathbb{R}^2 definir mínimo relativo, máximo relativo y punto silla.
8. Dado un campo escalar definido en $A \subset \mathbb{R}^2$ definir mínimo y máximo absolutos.
9. Supongamos que un campo escalar f se encuentra definido en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y tiene derivadas primeras continuas en ese entorno. Probar, detallando claramente el uso de las hipótesis, que si (x_0, y_0) le proporciona mínimo relativo al campo f entonces (x_0, y_0) es un punto estacionario.

10. Los valores $f(x, y)$ sobre puntos de la recta $y = 3x + 2$ son $x^2 - \ln(x - 1) + 3$. ¿Es posible asegurar que f no alcanza un extremo local en $(2, 8)$?
11. Analizar la existencia de extremos relativos y de extremos absolutos de los valores de f en su dominio.

(a) $f(x, y) = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$	(b) $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)y}$
(c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)(2 - e^{z^2})$	(d) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
(e) $f(x, y) = \sqrt{\ln(2 - x^2 - y^2)}$	(f) $f(x, y) = \ln(1 + x^4 + y^4)$

12. Hallar los puntos estacionarios; analizar si en ellos la función alcanza extremo relativo y, en ese caso, clasificar el extremo y calcular su valor.

(a) $z = x^3 + y^3 + \frac{48}{x} + \frac{48}{y}$	(b) $z = (2x - 3y + 4)^2$
(c) $z = x^2 + xy + y^2 - ax - by$	(d) $z = f(x, y)$ definida por $xy + z + e^z - 1 = 0$
(e) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 2y^2 - 8$	(f) $f(x, y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2$

13. Dada la familia de funciones $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ siendo k una constante, mostrar que hay un único punto crítico (x_0, y_0) , común a **todos** los miembros de la familia y determinar, en cada uno de los siguientes casos, **todos** los k que aseguren que:

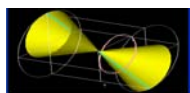
- (a) (x_0, y_0) sea un punto de ensilladura,
 (b) en (x_0, y_0) f alcance un mínimo local.

¿Puede alguna de estas funciones tener un máximo local en ese punto crítico?












14. (a) Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función $C^2(\mathbb{R})$ que satisface $f'(1) = 0$, $f''(1) > 0$, $f'(2) = 0$, $f''(2) < 0$ y $f'(x) \neq 0$ en otros puntos, y $g(u) = 2u^3 - 9u^2 + 12u$. Hallar y clasificar los extremos de $h(x, y) = f(x - 1) - g(-y + 1)$.
 ¿Por qué es necesarios que la función f tenga derivada segunda continua en \mathbb{R} ?
- (b) Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente positiva y $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo gradiente se anula sólo en $P_1 = (1, -1)$ y en $P_2 = (-1, 1)$, cuyo determinante Hessiano en esos puntos es no nulo, y tal que en P_1 tiene un máximo 10 y en P_2 tiene un mínimo 3. Estudiar los extremos de $g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$.

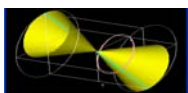
- (c) Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo gradiente se anula sólo en $P_1 = (1, -1)$ y en $P_2 = (-1, 1)$, cuyo determinante Hessiano en esos puntos es no nulo, y tal que en P_1 tiene un máximo 10 y en P_2 tiene un mínimo 3. Estudiar los extremos de $g(x, y, z) = z^3/3 - z + f(x, y)$.
- ¿Por qué es necesario que el campo f tenga derivadas terceras continuas en \mathbb{R}^2 ?
- (d) Dada $f(x, y) = ax^3 + bxy + cy^2$, hallar a , b y c de manera que en $(0, 0)$ haya punto silla de f y en $(1, 1)$ un mínimo de f .
- (e) Sean $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones $C^2(\mathbb{R})$ tales que $g(x)$ tiene en $x = 2$ mínimo 1, $h(y)$ tiene en $y = 3$ mínimo 5, y $g''(x) > 0$, $h''(y) > 0$ para todo x, y (observe que en estas condiciones $g(x) > 0$, $h(y) > 0 \forall x, y$). Estudiar los extremos de $f(x, y) = g(2x)h(3y + 1)$. Justificar.
15. (a) Demostrar que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z + 2$ tiene un mínimo relativo cuando se la evalúa en puntos del plano $\overline{X} = (u - 3, v + 4, 2u - 2v - 2)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) Hallar los extremos de $f(x, y, z) = xyz - z^2$ en puntos de la superficie $\overline{X} = (uv, u + v, u)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Ayuda: para $f(0, 0, 0)$ analizar el comportamiento sobre $u = v^2$.
16. (a) Una función $C^2(\mathbb{R}^2)$, $z = f(x, y)$ tiene máximo relativo 3 en $(1, 2)$. Hallar una ecuación del plano tangente en $(1, 2, 4)$ a la superficie de ecuación $z = f(x, y) + x^2$.
- (b) Una función $C^2(\mathbb{R}^3)$ $G(x, y, z)$ tiene máximo relativo 0 en $(1, 2, 3)$. Hallar una ecuación del plano tangente en $(1, 2, 3)$ a la superficie de **ecuación** $G(x, y, z) = 4x - y^2$ (i.e., la superficie está dada por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / G(x, y, z) - 4x + y^2 = 0\}$).
- (c) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función $C^3(\mathbb{R}^2)$ que satisface $\nabla f(1, 2) = (1, 0)$, y cuya matriz Hessiana en $(1, 2)$ es
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- Hallar a de manera que la función $g(x, y) = f(x, y) + ax + (y - 2)^2$ tenga extremo en $(1, 2)$. ¿Qué tipo de extremo es?
17. Resolver:
- (a) Mostrar que $f(x, y, z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$ tiene un máximo local en $(1, 1, 1)$.
- (b) Hallar los máximos y mínimos de $f(x, y, z) = xyz e^{-x^2 - y^2 - z^2}$.
18. Hallar los puntos de la superficie $z = \sqrt{xy + 1}$ más cercanos al origen.

19. Un envase cilíndrico debe tener 1 litro de capacidad. El material para las tapas cuesta 0.02\$/cm² mientras que el de la cara lateral 0.01\$/cm². Calcular las dimensiones del envase para que el costo sea mínimo.
20. Calcular el máximo valor de $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + xz + z^2$ evaluada en puntos de la superficie esférica de radio 1 con centro en el origen.
21. Hallar los extremos de $f(x, y, z) = xz - yz$ evaluada en puntos de la curva intersección de las superficies de ecuación $yz = 2$ y $x^2 + z^2 = 2$.
22. Hallar los extremos de la función $f(x, y) = 2xy$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 9$.
23. Hallar los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = xy^2 e^{-(x+y)}$ en la región dada por $0 \leq x \leq 5$, $x + y \leq 5$, $y \geq 0$.
24. Sean T un campo escalar de temperaturas definido en \mathbb{R}^2 y la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = -2y\}$. hallar las temperaturas extremas sobre la curva C . Graficar la curva C y las curvas de nivel del campo de temperaturas correspondientes a esos valores extremos en un mismo gráfico.
25. Dada $f(x, y) = (x + 3)^3 y^2 + x^2 + 2y$, hallar su derivada direccional máxima en el punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 12$ más alejado del punto $(3\sqrt{3}, -3)$.



MATHLETS Y CÁLCULO MULTIVARIABLE

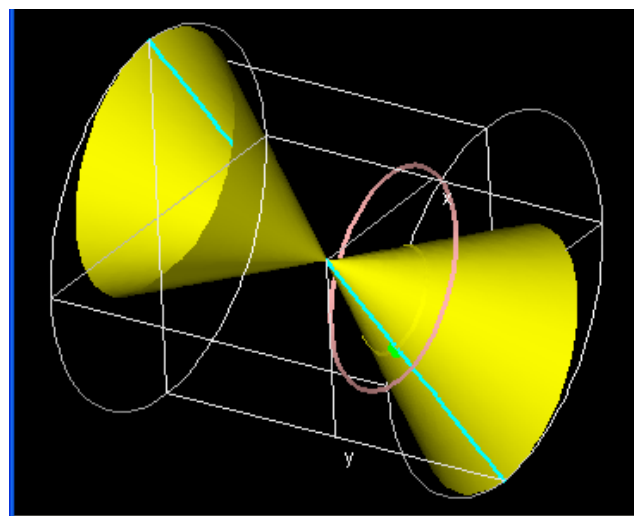
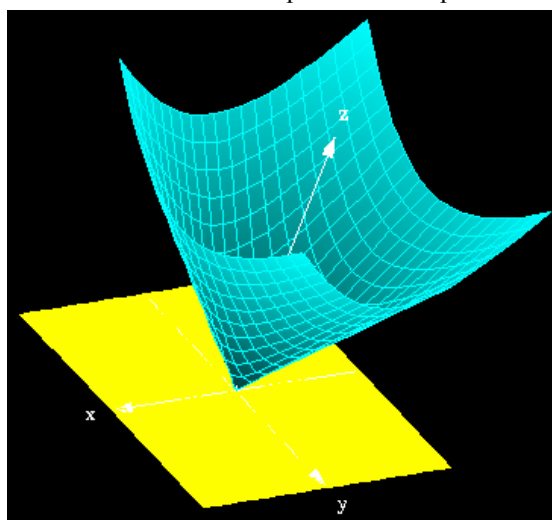
§1. INTRODUCCIÓN	II
§2.  APPLET 1	II
2.1. El applet 1 con el campo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$	iii
2.2. El applet 1 como herramienta de graficación	iii
2.2.1. Gráficos de varias superficies	iv
2.2.2. Gráficos de superficies parametrizadas	v
2.2.3. Curvas parametrizadas en \mathbb{R}^3	v
2.2.4. Curvas parametrizadas en \mathbb{R}^2	vi
§3.   ACTIVIDADES SUGERIDAS CON EL APPLET 1	VII
3.1. Guía de Trabajos Prácticos I	vii
3.1.2. Ejemplo I.1	vii
3.2. Guía de Trabajos Prácticos II	vii
3.2.1. Ejemplo II.1	vii
3.2.2. Ejemplo II.2	vii
3.2.3. Ejemplo II. 3	viii
3.2.4. Ejemplo II.4	viii
3.3. Guía de Trabajos Prácticos III	viii
3.3.1. Ejemplo III. 1	viii
3.4. Guía de Trabajos Prácticos IV	ix
3.4.1. Ejemplo IV. 1	ix
§4.  APPLET 2	IX
4.1. El applet 2 y las curvas de nivel	x
4.2. El applet 2 y las derivadas parciales	x
4.3. El applet 2, el gradiente y derivada direccional	xi
§5.   ACTIVIDADES SUGERIDAS CON EL APPLET 2	XI
5.1. Guía de Trabajos Prácticos II	xi
5.1.1. Ejemplo II.1	xii
5.1.2. Ejemplo II.2	xii
5.2. Guía de Trabajos Prácticos III	xii
5.2.1. Ejemplo III.1	xii
5.3. Guía de Trabajos Prácticos IV	xiii
5.3.1. Ejemplo IV.1	xiii
§6.  APPLET 3	XIII
§7.   ACTIVIDADES SUGERIDAS CON EL APPLET 3	XIV
§8.  APPLET 4	XIV
§9.  APPLET 5	XV



§1. Introducción

Un applet es un programa es un programa abierto en una página HTML y cuyos resultados se observan en una pantalla gráfica dentro de ésta; mathlet el nombre de la especie de applet cuyo asunto es matemática. En el Departamento de Matemática de nuestra Facultad, el profesor Jorge Busch¹ ha diseñado y puesto a disposición libremente un [conjunto de applets](#) con la pretensión de *brindar un complemento útil a las clases y los buenos libros*; añadimos que se trata de un complemento de alta calidad, con la posibilidad de la interacción y la liberación de muchas tareas de cálculo, que se ha hecho cada vez más necesario y corriente en la formación propia de la ingeniería. La navegación por tales páginas de gráficos es muy sencilla y está organizada en apartados: [coordenadas](#), [cuádricas](#), [tangencias](#), [campos de gradientes](#), [integrales triples](#), y es una componente virtual de nuestra guía de trabajos prácticos. También puede visitarse la página del profesor Jorge Comas².

En este documento no repetimos la explicación del uso de los applets anteriores que está incluida en las páginas mismas de los



reenvíos, sino que pretendemos mostrar *algunos otros applets* que se encuentran disponibles en red, y señalar algunos seleccionados ejercicios en los que el estudiante podría encontrar conveniente aplicarlos. En diversos puntos de la Guía de Trabajos Prácticos puede un applet resultar un instrumento valioso, permitiendo no sólo un ahorro de tiempo, sino aumentando los recursos del alumno para autogestionar su aprendizaje con mayor profundidad y calidad. Nos limitamos a señalar algunos de tales puntos, a modo de mínima muestra.

El applet 1 tiene dedicado dos apartados: el primero describe sumariamente algunas de sus posibilidades mediante ejemplos, mientras que el segundo señala inserciones posibles en la guía de trabajos

prácticos de nuestra asignatura desarrollando algunas de modo completo para la resolución de los problemas. Los sucesivos applets provienen en su mayoría del sitio del MIT ([MITOPENCOURSEWARE](#)) y los presentamos con una descripción cada vez más sumaria, entendiendo que bastará sobradamente al alumno que pretenda utilizarlo.

§2. Applet 1

El applet³ que llamaremos [Applet 1](#)⁴ abre tras hacer click en el botón *Level Curve Applet* los cuatro paneles de la [figura 1](#).

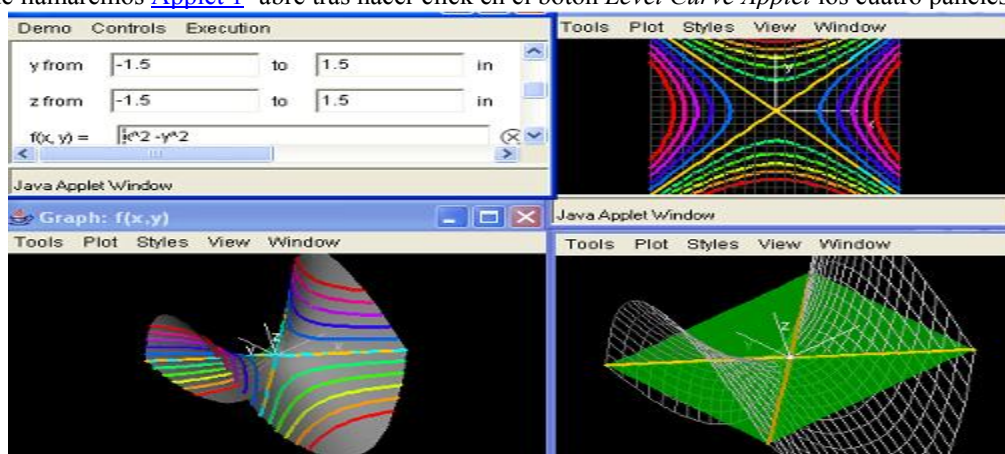


Figura 1. Los cuatro paneles del [Applet 1](#) [<http://www.slu.edu/classes/maymk/banchoff/LevelCurve.html>]

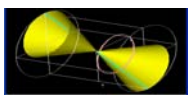
¹ La página de los applets creados por el profesor Jorge Busch: [<http://www.fi.uba.ar/materias/6103/graficos/graficos/graficos.html>].

² La página de los applets creados por el profesor Jorge Comas: [http://web.fi.uba.ar/~jcomas/tiro_oblicuo.htm]; otros elementos para las ecuaciones diferenciales por el mismo profesor en [<http://www.fi.uba.ar/~jcomas>].

³ Diseñado por [Tom Banchoff](#) at Brown University, modificado por el profesor Mike May, S.J. del departamento de matemática de la [Saint Louis University](#) [<http://euler.slu.edu/>].

⁴ En red el 13.06.2008 en el sitio [<http://www.slu.edu/classes/maymk/banchoff/LevelCurve.html>].





El panel superior izquierdo permite al usuario ingresar un número de parámetros suficiente como para garantizarle pueda ver lo que desea estudiar con el nivel de detalle adecuado. Uno de tales parámetros es el campo escalar mismo, que se ingresa en el cuadro de texto con las notaciones corrientes de funciones y serán reconocidas por el parser del applet (de modo predeterminado está el campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 - y^2$, cuya gráfica se muestra en los dos paneles inferiores mientras que las curvas de nivel en el superior derecho (observe la correspondencia de colores!). Los paneles a su vez tienen herramientas que permiten cambiar la visualización.

2.1. El applet 1 con el campo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$

En la Guía de Trabajos Prácticos II, se pide analizar la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$; basta pues ingresar en el cuadro de texto del panel superior izquierdo la expresión $\sqrt{x^2 + 2y^2}$ y luego oprimir la tecla ENTER.

Los paneles se actualizarán mostrando ahora la salida para esta nueva función. Seguramente convendrá ajustar el rango de los parámetros predeterminados del panel superior izquierdo: en la [figura 2](#) puede verse que se ha ajustado el rango de variación de z , dado que no se precisa mostrar nada con z negativo (el conjunto imagen del campo escalar f es \mathbb{R}^+_0).

En los paneles restantes se han utilizado algunas de las opciones funcionales de la barra de menú (Tools, Plot, Styles, View, Window) con sus correspondientes opciones desplegables. Consideramos especialmente importante la función zoom (como una opción del menú View) que permite un acercamiento a los detalles que resulten de interés en cada caso; es particularmente expresivo del comportamiento local y en tal sentido puede hacerse intuitivo el grado de aproximación al plano tangente.

Lo más sencillo es experimentar con el applet mismo, aprovechando que nos hemos liberado del tedio del cálculo, para ingresar funciones que puedan ser de alguna dificultad especial para la visualización; la simultaneidad de los gráficos con los conjuntos de nivel permite ver de inmediato la correspondencia a la vez que diferencia entre ambos objetos. Muchas otras opciones de este muy potente applet se descubren con sólo investigar el menú y sus efectos. Más detalles se encuentran directamente en la página de ayuda descriptiva de las applets en general de su autor original, [Tom Banchoff](#)⁵.

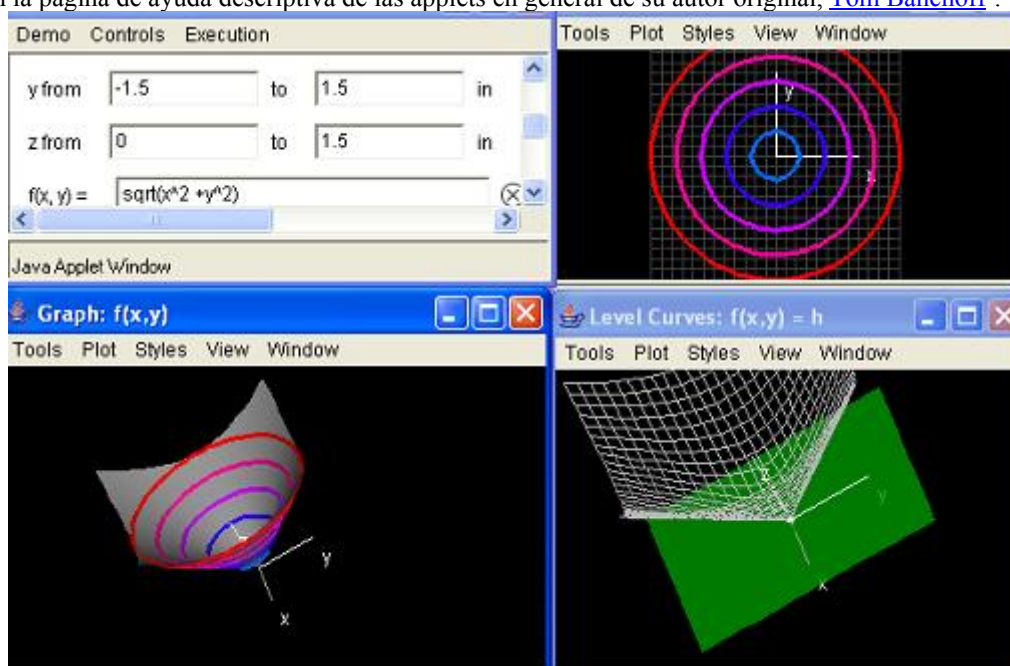


Figura 2. Ejemplo [Applet 1](#) con el campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$

2.2. El applet 1 como herramienta de graficación

Una posible utilización con una flexibilidad razonablemente amplia puede obtenerse cerrando los tres paneles de gráficos y abriendo el menú desplegable en el panel superior izquierdo, Controls \rightarrow New 3D Graph y en la ventana emergente (3D Graph) desplegar el menú plot \rightarrow Add Plot \rightarrow Surface tras lo cual se puede ingresar en la ventana emergente la función a graficar; a modo de ejemplo hemos ingresado el campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x*y*\sin(2*x*y)$ ([figura 3](#)) con el resultado de la [figura 4](#).

⁵ En red el 14.06.2008 en el sitio [<http://www.slu.edu/classes/maymk/banchoff/ControllingAppletWindows.html>].

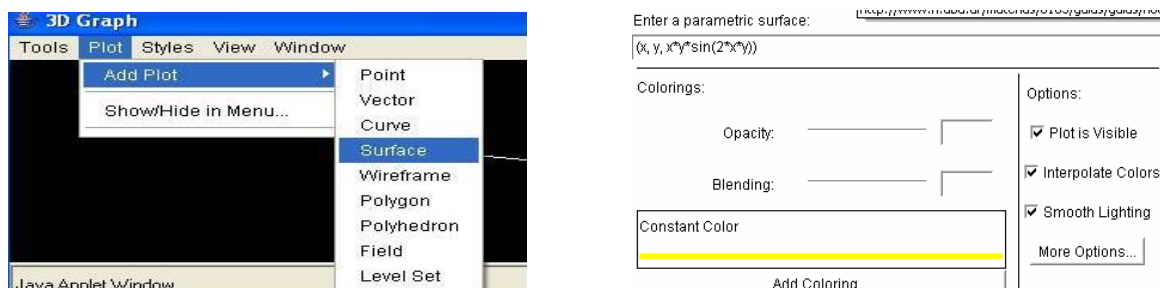
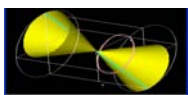


Figura 3. Selección del menú Surface

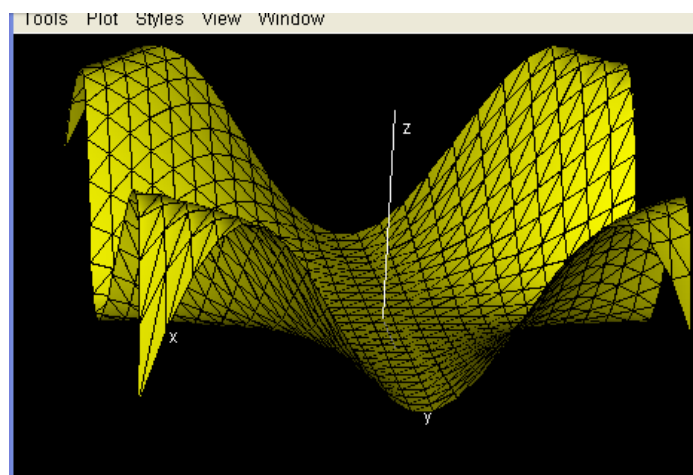


Figura 4. El gráfico de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x*y*\sin(2*x*y)$

2.2.1. Gráficos de varias superficies

El applet permite superponer varios gráficos en un mismo panel, diferenciándolos por colores que pueden elegirse directamente; para ello basta dibujar un gráfico como se explicó en §1.1.2, y luego hacer click en el menú Plot → add Plot → surface y repetir el procedimiento: el gráfico se dibuja en el mismo panel. Pueden controlarse las opciones de visibilidad modificando los parámetros que los paneles presentan. Pueden añadirse varios gráficos y luego seleccionar cuáles hacer visible (sólo uno, pares, tríos...) según lo que interese ver. \mathbb{R}

Por ejemplo, dado que el polinomio Taylor de segundo orden en $P_0 = (0, 0)$ del campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sin(x*y)$ está dado por $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x, y) = x*y$, esperamos que el campo escalar $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x, y) = x*y - \sin(x*y)$ tenga un gráfico en las proximidades del origen 'pegado' al plano tangente de ecuación $z = 0$. La [figura 5](#) grafica el campo escalar h junto con su plano tangente, pudiendo apreciarse ese grado de contacto. Es interesante rotar el gráfico para ver esas características desde otros ángulos.

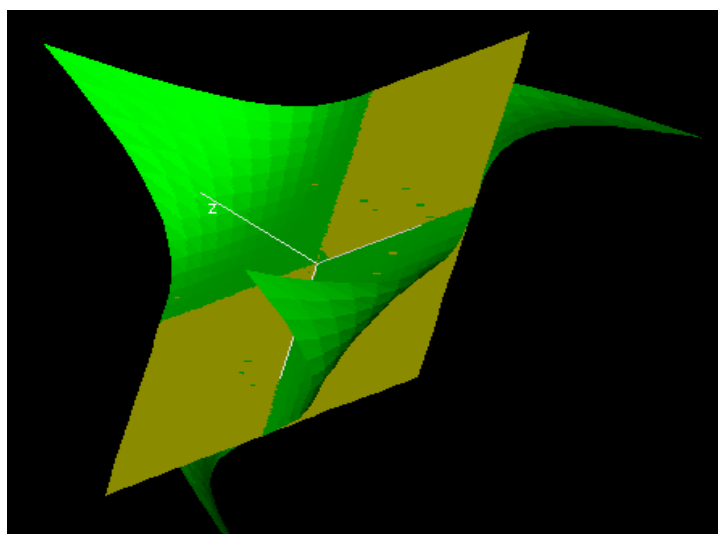
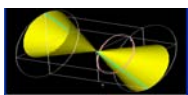


Figura 5. El gráfico de $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x, y) = x*y - \sin(x*y)$ y su plano tangente en el origen



2.2.2. Gráficos de superficies parametrizadas

Pueden superponerse superficies parametrizadas con el mismo procedimiento del apartado anterior, como se muestra en la [figura 6](#).

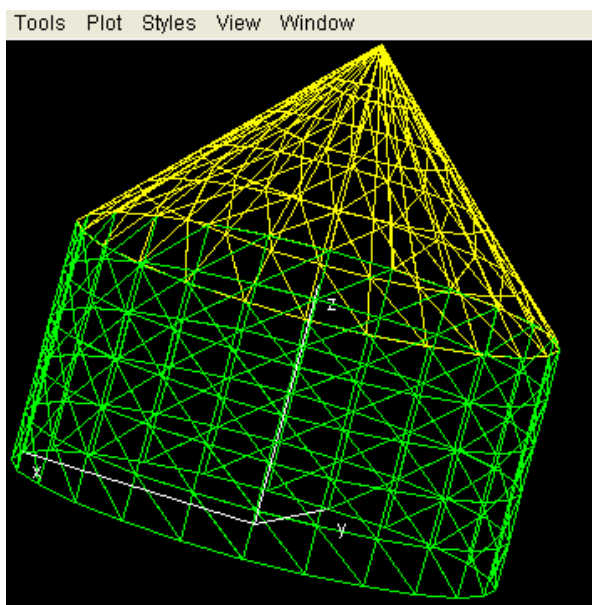


Figura 6. El cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ ($0 \leq z \leq 1$), el cono de ecuación $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ con $1 \leq z \leq 2$

En la [figura 6](#) hemos preferido dejar sólo el esqueleto que construye las superficies para permitir ver a través de ellas las zonas que quedan por detrás; las parametrizaciones que hemos introducido en el cuadro de texto son $(\cos(x), \sin(x), y)$, para la superficie cilíndrica, en tanto que $(y \cdot \cos(x), y \cdot \sin(x), 2 - y)$ para la superficie cónica; en el menú desplegable de Styles hemos tildado la opción Open Surfaces tal como lo indica la [figura 7](#).

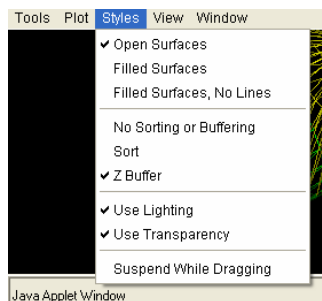


Figura 7. El estilo de superficie transparente

2.2.3. Curvas parametrizadas en \mathbb{R}^3

La graficación de curvas es también directa: en el submenú de Plot → Add Plot se selecciona Curve, ingresando en el cuadro de texto la parametrización correspondiente. En la [figura 8 \(b\)](#) hemos añadido a la [figura 6](#) dos curvas: la hélice que es el conjunto imagen de la función vectorial definida por $h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h(x) = (\cos(x), \sin(x), x/2\pi)$ y el segmento que es el conjunto imagen de la función vectorial $s: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $s(y) = (1 - y, 0, 1 + y)$.



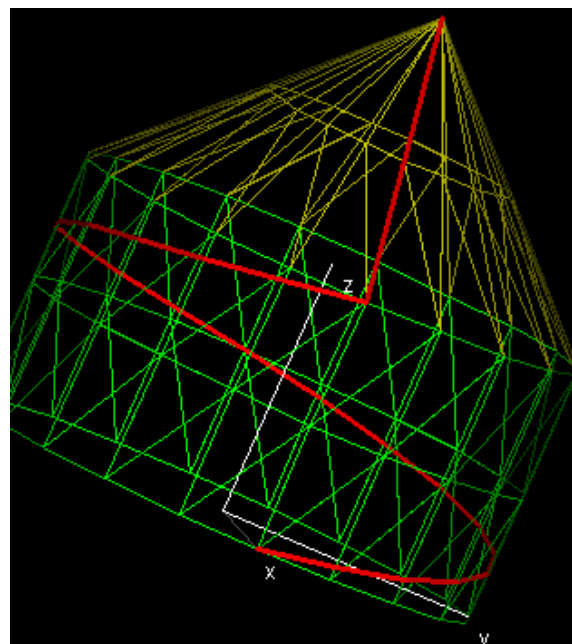
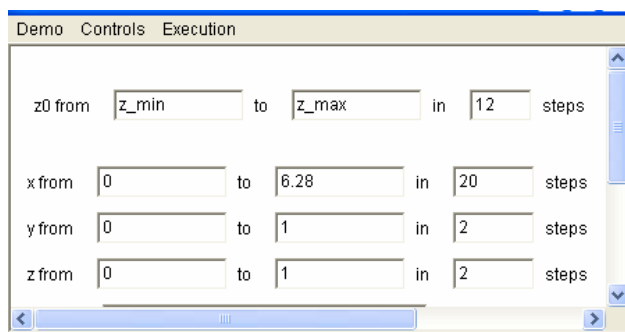
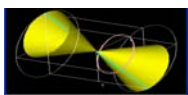


Figura 8. (a) El rango de los argumentos; (b) una hélice sobre el cilindro y un segmento sobre el cono

Observación: El intervalo I en el que toma valores el argumento de h (de nombre 'x') es el que queda definido en el panel habitual que se reproduce en la [figura 8 \(a\)](#), mientras que lo propio sucede para el argumento (de nombre 'y') de la función s .

2.2.4. Curvas parametrizadas en \mathbb{R}^2

La graficación de curvas en \mathbb{R}^2 es también inmediata en la modalidad parametrizada, y basta seleccionar en el panel principal en el menú Controls \rightarrow New 2D Graphs para que resulte la correspondiente ventana de dibujo titulada 2D Graph, tras lo cual la secuencia es la habitual: el menú Plot \rightarrow Add Plot \rightarrow Curve da lugar al correspondiente cuadro de texto para ingresar la curva en forma paramétrica. En la [figura 9](#) se muestra el resultado de ingresar sucesivamente en tal cuadro la elipse $((0.8*\cos(x), 0.2*\sin(x)))$, la circunferencia de ecuación en coordenadas polares $r = \cos(\theta)$, esto es $(\cos(x)*\cos(x), \cos(x)*\sin(x))$, la circunferencia de ecuación $r = \sin(\theta)$, esto es $(\sin(x)*\cos(x), \sin(x)*\sin(x))$, la senoide de ecuación $y = |\sin(4x)|$, que escribimos $(x/2\pi, \text{abs}(\sin(4*x)))$ con el factor de escala 2π para graficar sólo el intervalo $[0,1]$ para la misma variación del argumento llamado 'x'.

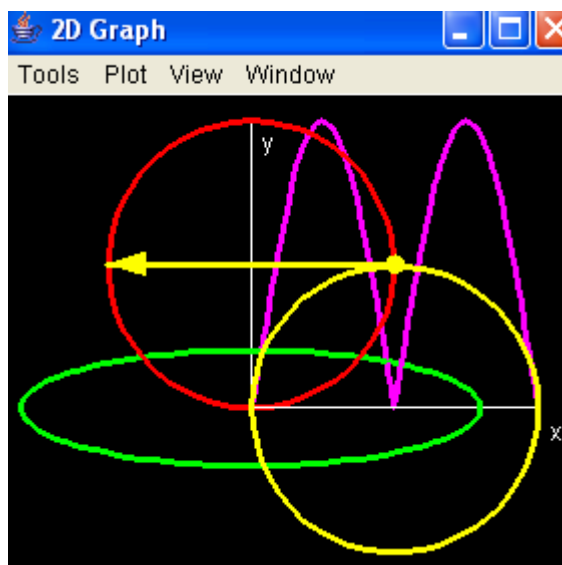
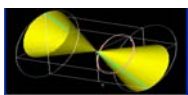


Figura 9. Cuatro curvas en \mathbb{R}^2

Observación: la parametrización que ingresamos debe atender al intervalo en el que está definido su argumento; en este ejemplo, hemos puesto el argumento llamado 'x' variando entre 0 y 2π y hemos aprovechado ese intervalo para *todas* las curvas. Para decirlo de modo más preciso, cada una de las cuatro curvas γ_k está definida como $\gamma_k: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, para $k = 1, 2$,



3, 4. La [figura 9](#) muestra algo más: el vector velocidad $\gamma_2'(\pi/4)$ de la parametrización $\gamma_2: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma_2(x) = (\cos^2(x), \cos(x) \sin(x))$, esto es $\gamma_2'(\pi/4) = (-1, 0)$, dibujado en el punto $\gamma_2(\pi/4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^6$.

§3. Actividades sugeridas con el applet 1.

En este apartado indicamos algunas actividades que el alumno que pretende mejorar su capacidad de visualización puede considerar conveniente seguir; nos permitimos una sugerencia: manteniendo una *misma* ventana de dibujo se pueden añadir los gráficos necesarios para desarrollarlas ocultando o eliminando los que van resultando innecesarios, lo que acelera mucho este proceso.

3.1. Guía de Trabajos Prácticos I

3.1.2. Ejemplo I.1

Para el conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 < (x-z)^2 + (y-z)^2 < 1\}$: graficarlo y mirarlo desde varios ángulos, si es necesario cortarlo con planos (por ejemplo en la [figura 10](#) lo hemos cortado con el plano $y = 0$). Lograr una perspectiva desde la que la superficie de la envoltura sólo se vea como una curva: en tal caso estará mirando el cilindro desde una dirección paralela a su eje.

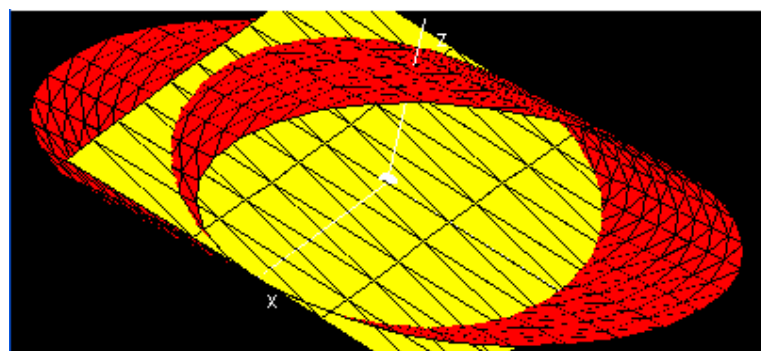
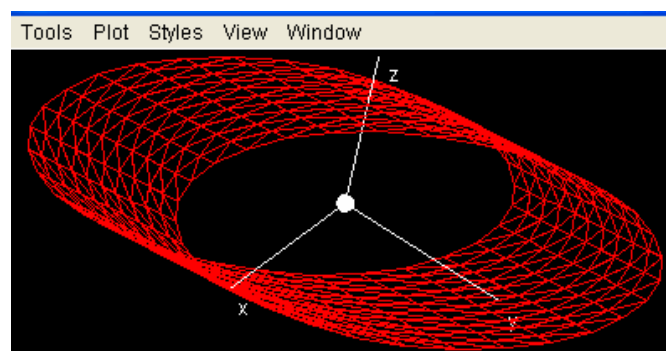


Figura 10. (a) El cilindro de ecuación $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$; (b) La sección con el plano de ecuación $y = 0$

3.2. Guía de Trabajos Prácticos II

3.2.1. Ejemplo II.1

Nos limitamos a mostrar en la [figura 11](#) los gráficos de cada una de las funciones correspondientes $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \min(x, y)$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = \max(x, y)$.

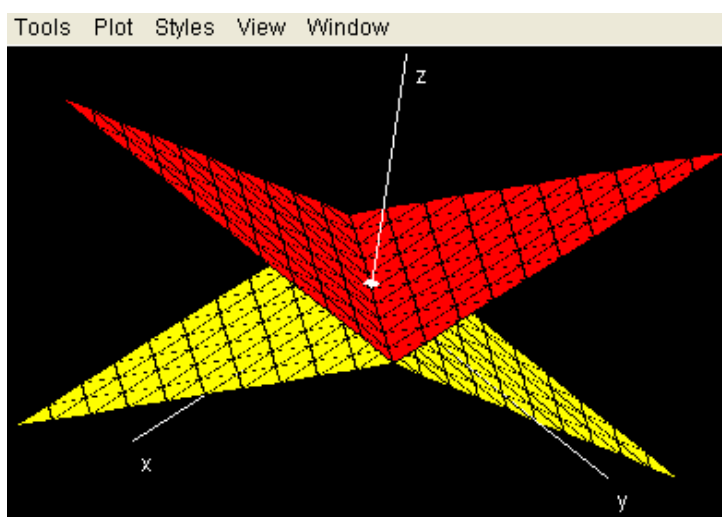
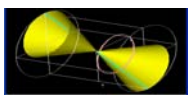


Figura 11. Los gráficos de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \min(x, y)$, y de $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = \max(x, y)$

3.2.2. Ejemplo II.2

⁶ El applet no incluye la capacidad de ejecutar estos cálculos: el vector velocidad ha sido calculado manualmente e ingresado con el menú de añadir un vector.





El campo escalar $g: D_g \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = (y - 1) \cos(1/x)$. Puede resultar de utilidad espiar (¡usar el zoom!) lo que sucede en las proximidades del punto $(0, 1)$ con el campo escalar; se tiene la [figura 12](#) en las proximidades (muy acercadas con el zoom) del punto $P_0 = (0, 1, 0)$ ¿Qué se intuye respecto al límite de este campo escalar cuando (x, y) tiende a $(0, 1)$?

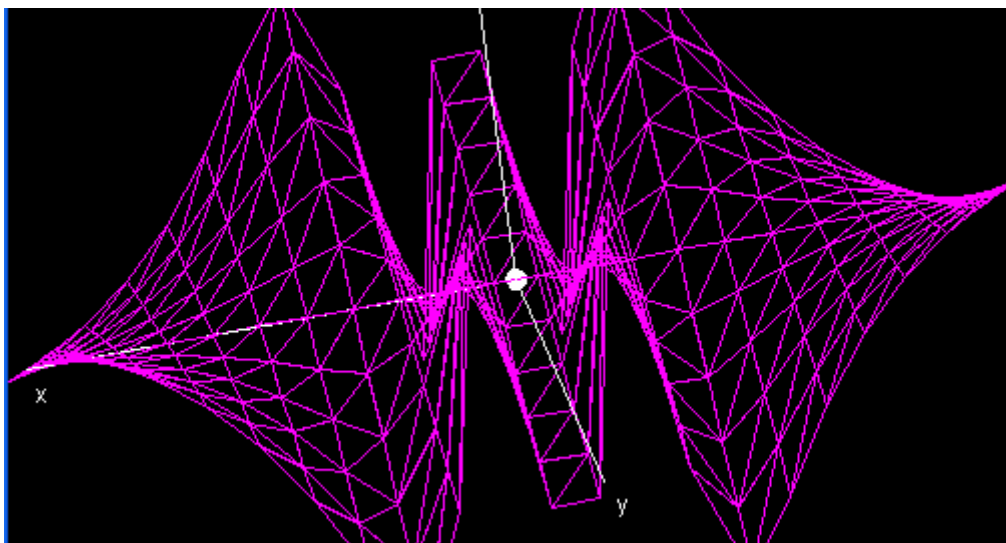


Figura 12. El gráfico del campo $g: D_g \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = (y - 1) \cos(1/x)$, en un vecinal de $P_0 = (0, 1, 0)$

3.2.3. Ejemplo II. 3

Se tiene la curva parametrizada por la función vectorial $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(t) = (t^2, t^3 + 1, t^3 - 1)$; la recta tangente en $P_0 = \gamma(2) = (4, 9, 8)$ está dirigida por el vector $\gamma'(2) = (4, 12, 12)$, de modo que su ecuación vectorial es $X = (4, 9, 8) + \alpha(1, 3, 3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, mientras que su plano normal en P_0 tiene la ecuación $(X - P_0) \cdot \gamma'(2) = 0$, esto es $(x - 4) + 3(y - 9) + 3(z - 8) = 0$. La curva está contenida en el plano de ecuación $y = z + 2$, lo que es inmediato de la definición de γ . Graficar (localmente) estos hechos.

3.2.4. Ejemplo II.4

Consideremos la curva intersección entre la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; mostramos en la [figura 13](#) con suficiente elocuencia los tres elementos diferenciando los colores. La curva intersección es el conjunto imagen de la función vectorial $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$, y se indica un vector que dirige a la recta tangente que pasa por el punto $P_0 = \gamma(0) = (0, 1, 1)$, cuya ecuación vectorial es $X = (0, 1, 1) + \alpha(-1, 0, 0)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

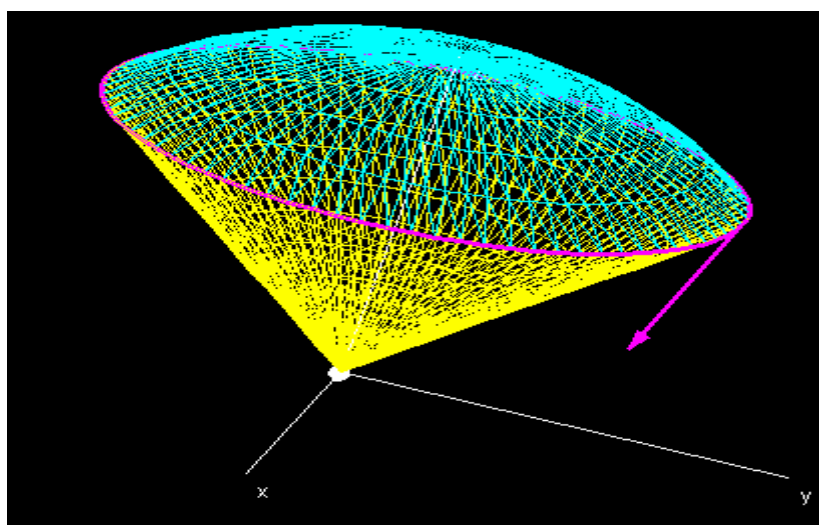
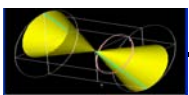


Figura 13. La curva intersección de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

3.3. Guía de Trabajos Prácticos III

3.3.1. Ejemplo III. 1



El campo vectorial $T: [0, 3\pi/2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(u, v) = (v, v \cos(u), v \sin(u))$ es una parametrización de la superficie cónica contenida en el cono de ecuación $x^2 = y^2 + z^2$, como muestra la [figura 14](#).

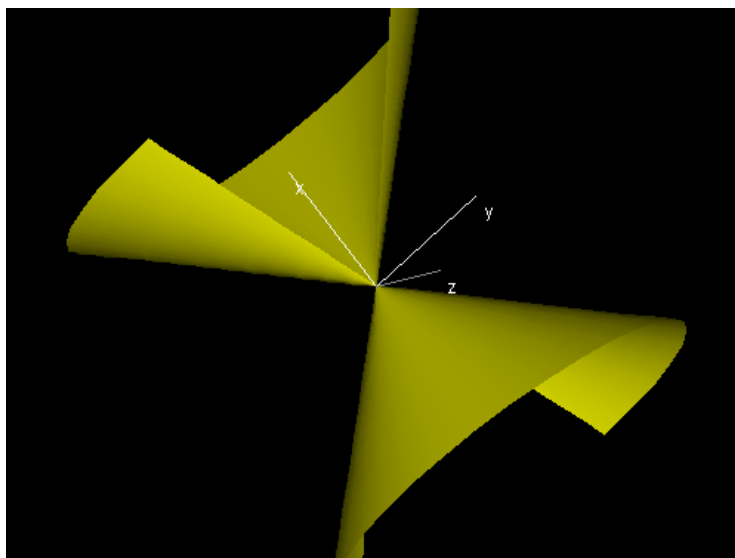


Figura 14. La imagen de $T: [0, 3\pi/2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(u, v) = (v, v \cos(u), v \sin(u))$

3.4. Guía de Trabajos Prácticos IV

3.4.1. Ejemplo IV. 1

Dada la curva C en \mathbb{R}^2 de ecuación $v = u^2 - 1$ y el campo vectorial $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u)$ (que es una parametrización de la superficie cónica $z^2 = x^2 + y^2$) queremos ver la imagen a través de T de la curva C . Ver [figura 15](#).

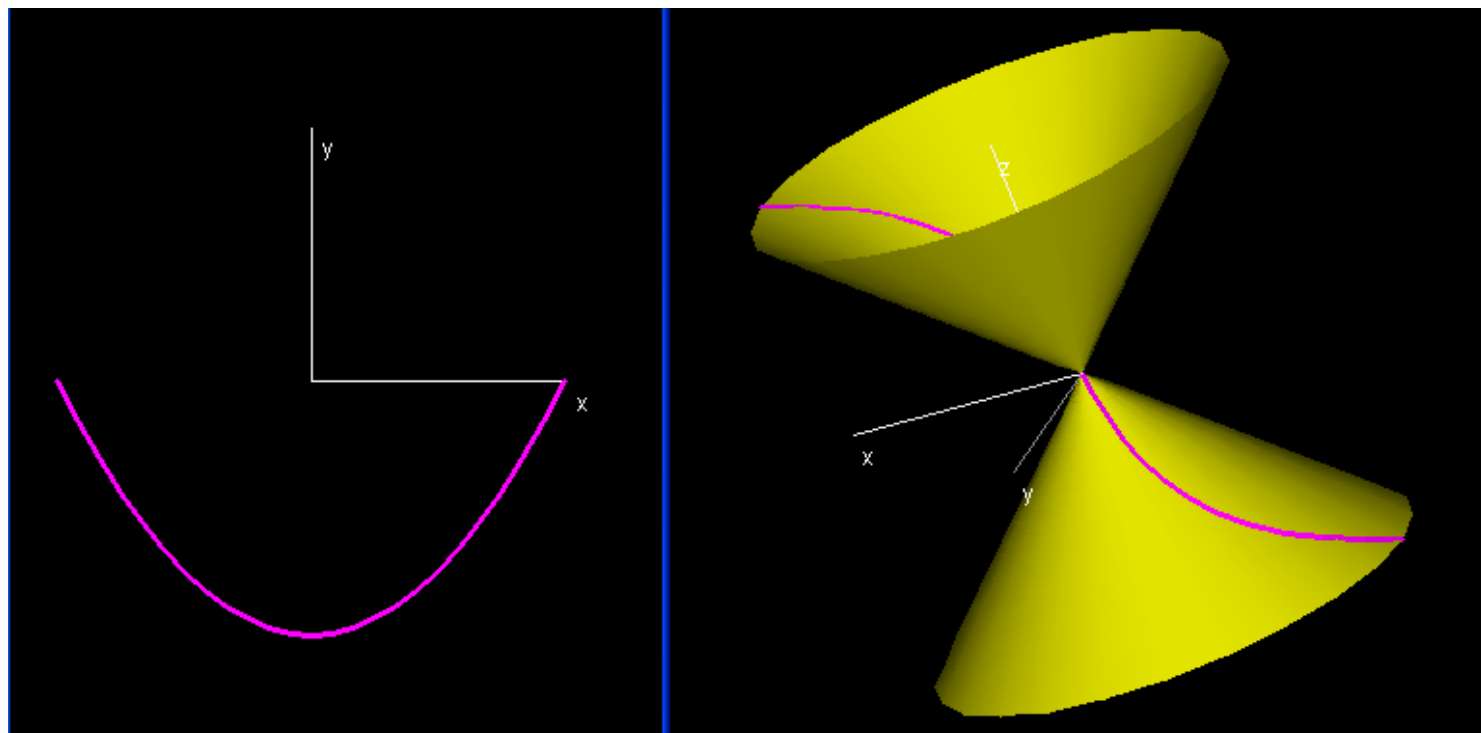
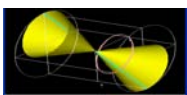


Figura 15. La curva C y su imagen a través de T

§4. Applet 2



El muy potente applet⁷ del Massachusetts Institute of Technology que llamaremos [Applet 2](#)⁸ muestra de modo directo la [figura 16](#), que es de por sí muy clara respecto a las posibilidades de ingresar campos escalares.

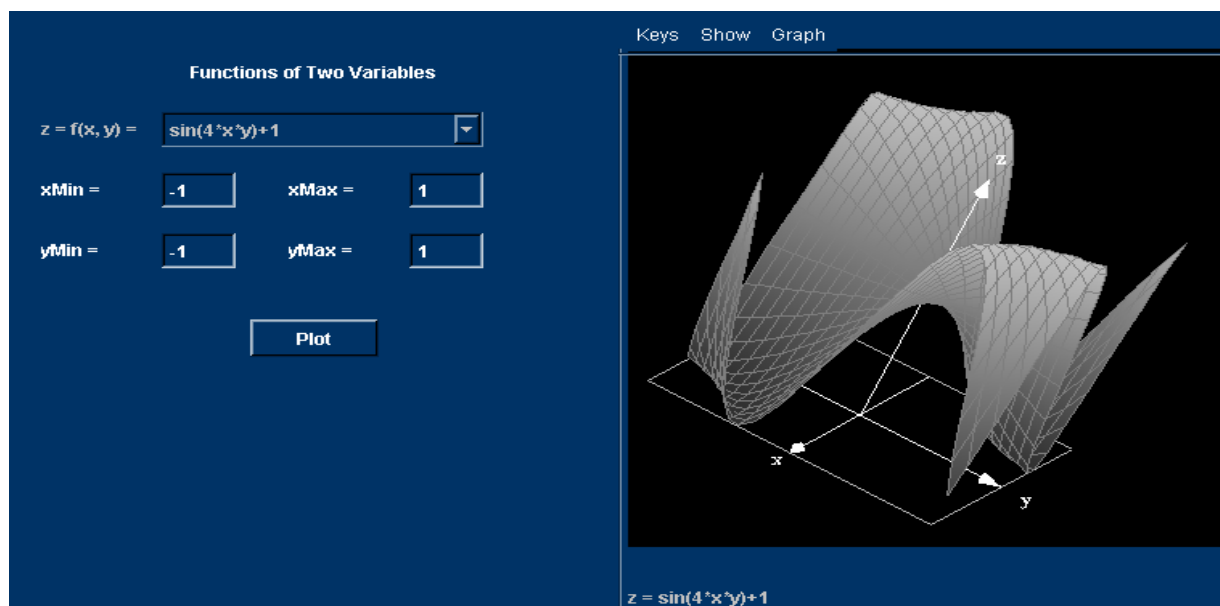


Figura 16. El panel del applet 2

4.1. El applet 2 y las curvas de nivel

Basta seleccionar en el menú Show → Level Curves para tener la [figura 17](#), donde se tiene el control sobre el cursor del panel izquierdo para desplazar una dada curva de nivel.

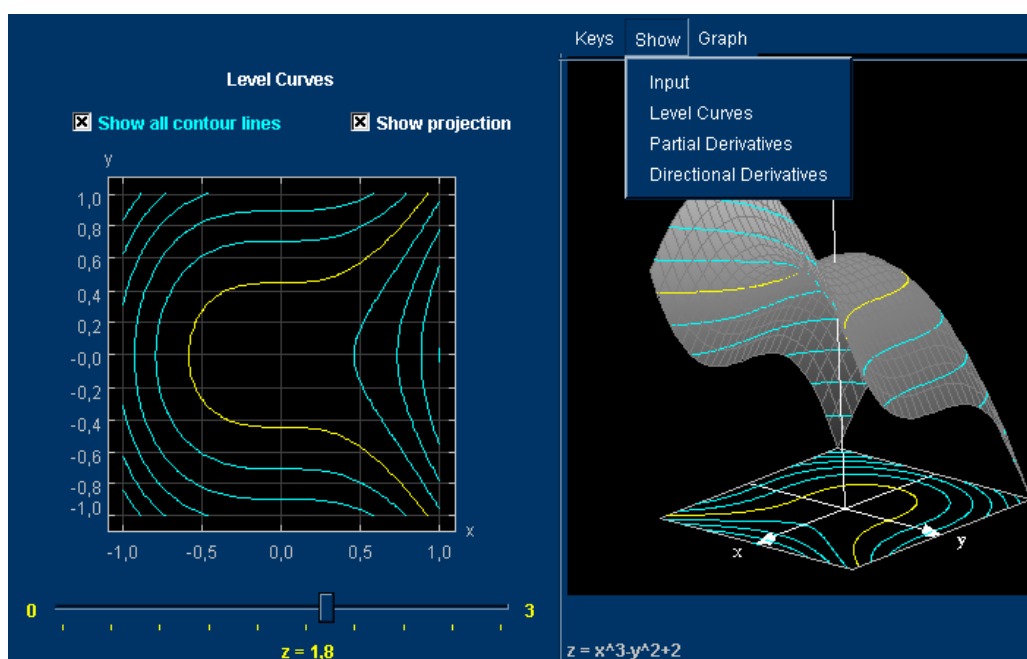


Figura 17. Gráfico y curvas de nivel del campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2$

4.2. El applet 2 y las derivadas parciales

Basta seleccionar en el menú Show → Partial Derivatives para tener la [figura 18](#), donde se tiene el control sobre el cursor del panel izquierdo para desplazar una dada curva de nivel. La potencia del applet es manifiesta por sí misma.

⁷ Del Massachusetts Institute of Technology.

⁸ En red el 21.06.2008 en el sitio [http://ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/tools/tools22.html].

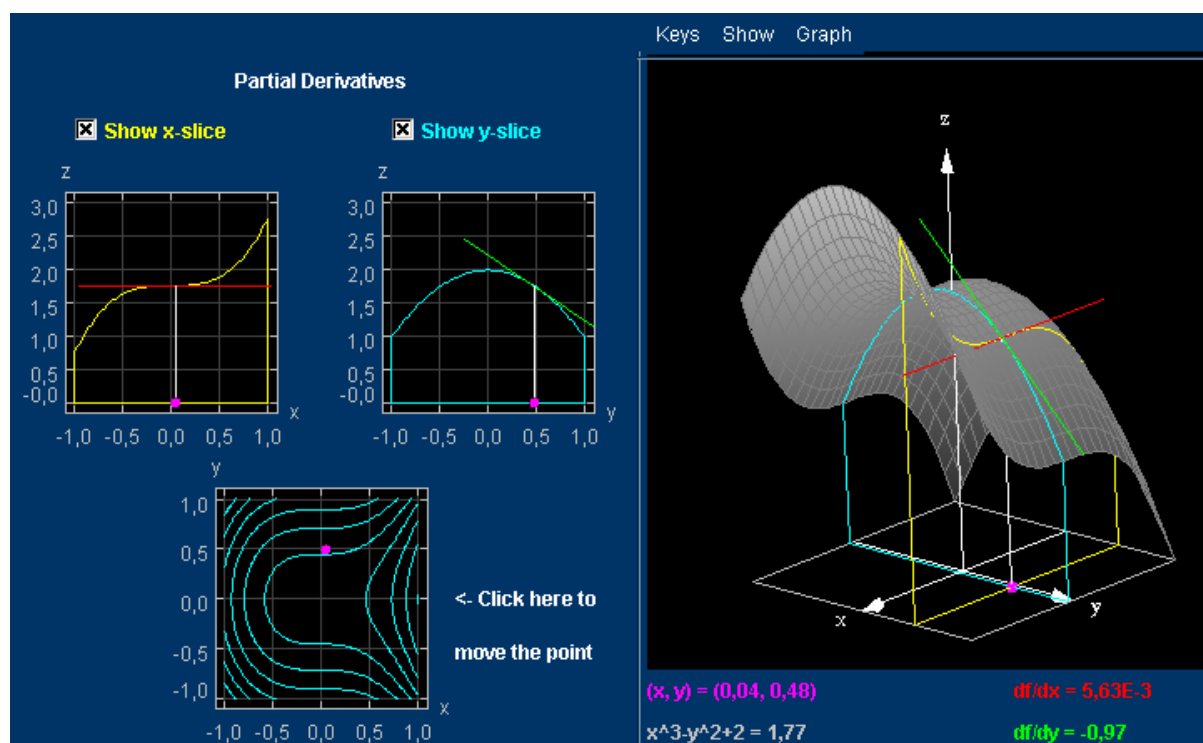
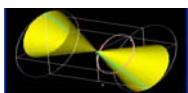


Figura 18. Gráfico, curvas de nivel y derivadas parciales del campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2$

4.3. El applet 2, el gradiente y derivada direccional

Basta seleccionar en el menú Show \rightarrow Partial Derivatives para tener la [figura 19](#), donde se tiene el control sobre el cursor que dirige al vector y sobre el punto mismo en el que se busca la derivada direccional.

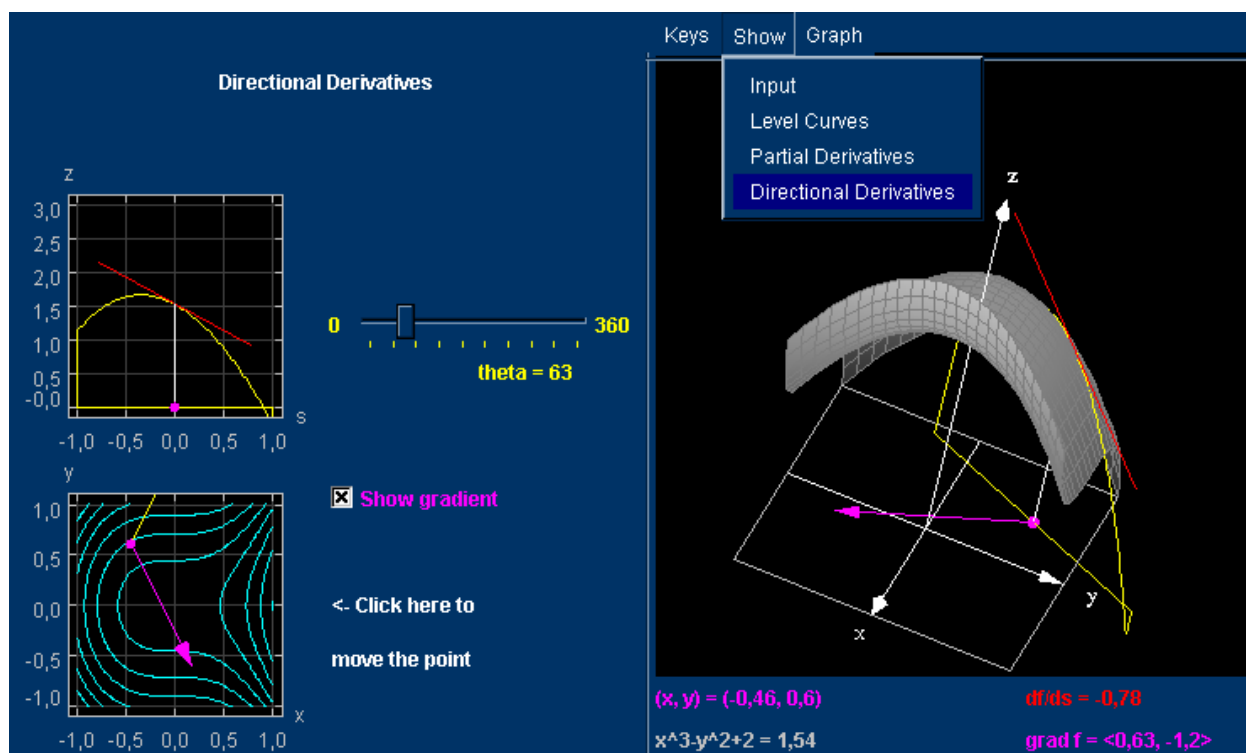
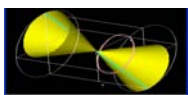


Figura 19. Gráfico, curvas de nivel, derivada direccional y gradiente del campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2$

§5. Actividades sugeridas con el Applet 2

5.1. Guía de Trabajos Prácticos II



5.1.1. Ejemplo II.1

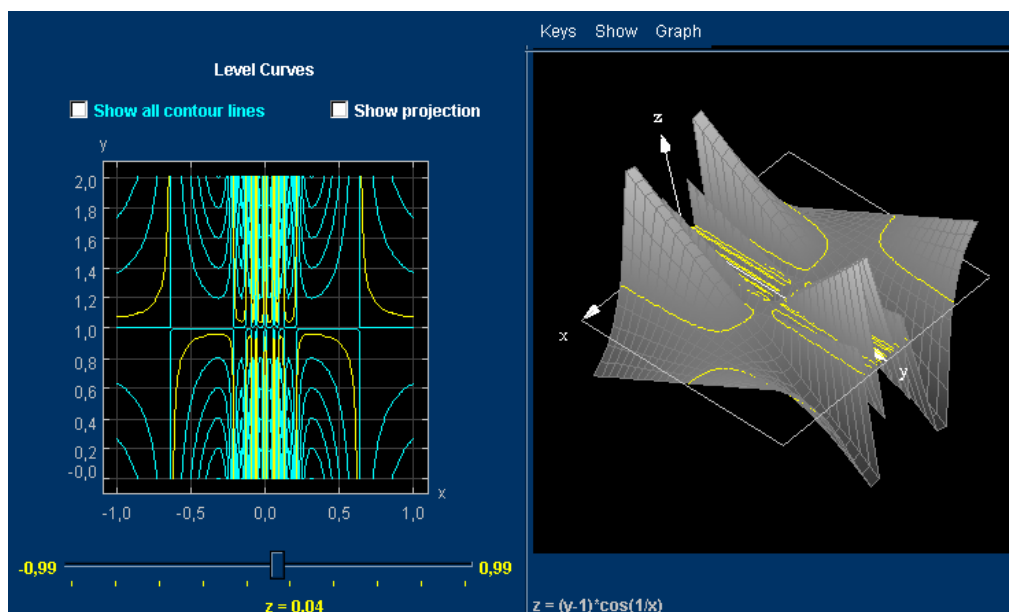


Figura 20. El gráfico y las curvas de nivel $k=0.04$ de $g: D_g \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = (y-1) \cos(1/x)$,

5.1.2. Ejemplo II.2

Para el campo escalar $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sin[x / \sqrt{y}]$, derivadas parciales en $P_0 = (\pi/3, 4)$, ver [figura 21](#).

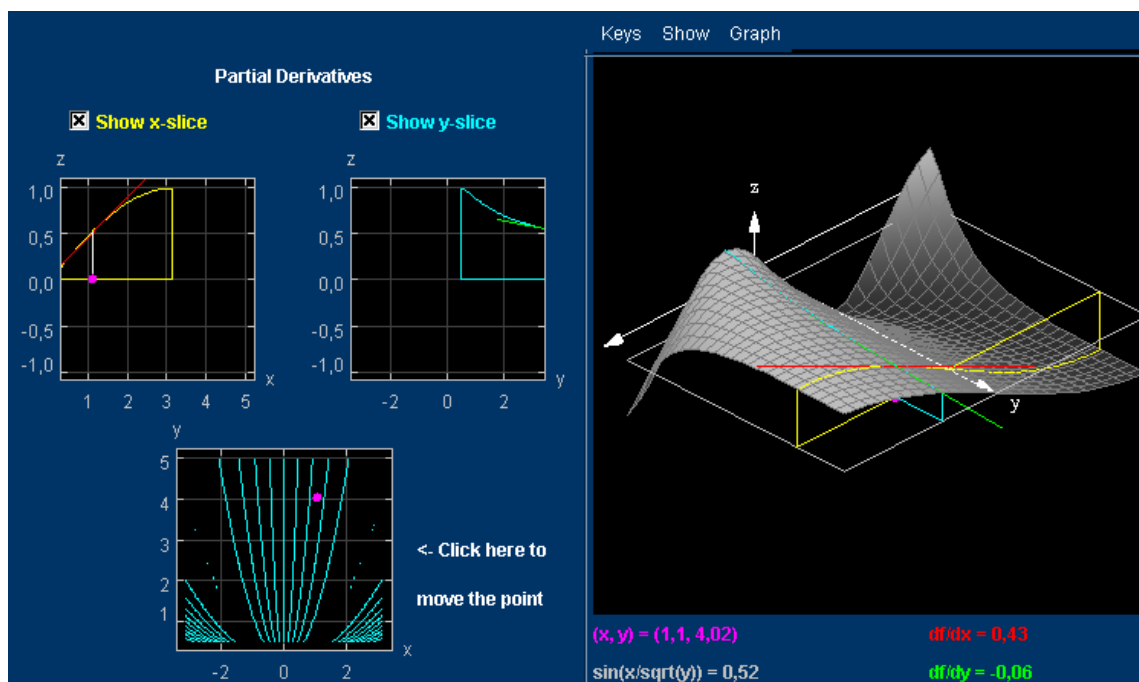


Figura 21. Gráfico, curvas de nivel y derivadas parciales de $f(x, y) = \sin[x / \sqrt{y}]$ en $P_0 = (\pi/3, 4)$

5.2. Guía de Trabajos Prácticos III

5.2.1. Ejemplo III.1

Para el campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$, las derivadas parciales en $P_0 = (1, 1)$, ver [figura 22](#).

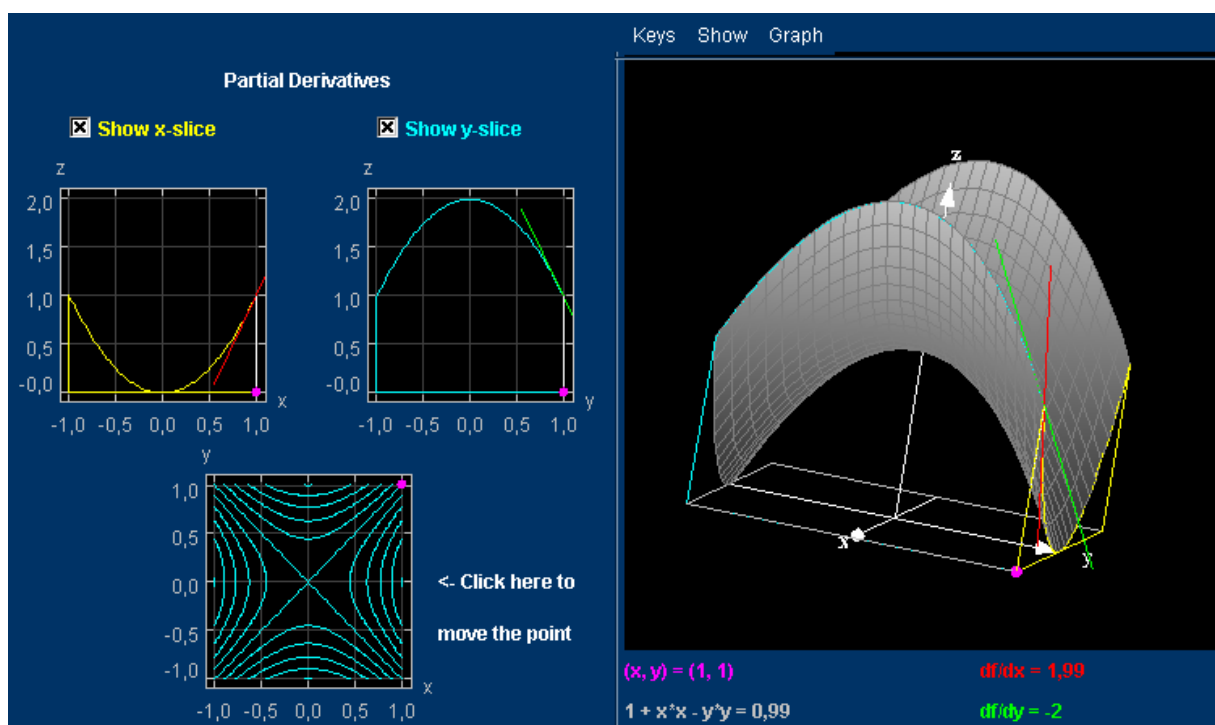
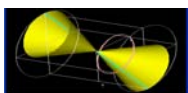


Figura 22. Gráfico, curvas de nivel y derivadas parciales de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$, en $P_0 = (1, 1)$

5.3. Guía de Trabajos Prácticos IV

5.3.1. Ejemplo IV.1

Para el campo escalar $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{(1 + \ln(x+y)) / \cos(xy)}$, las derivadas parciales en $P_0 = (0, 1)$, ver [figura 22](#).

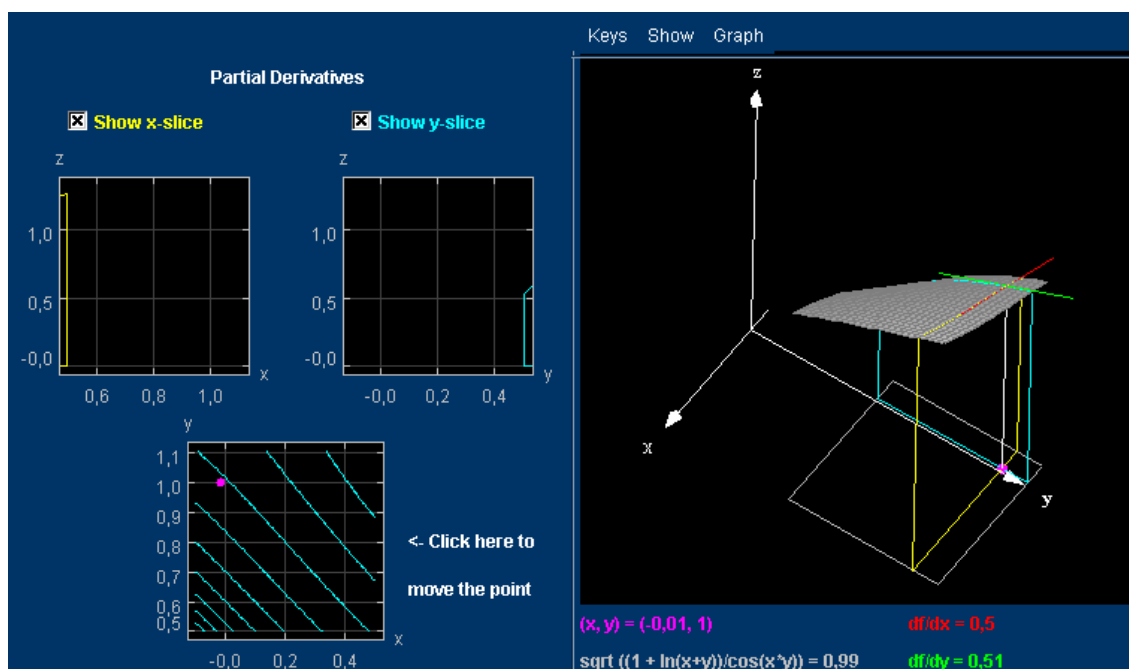


Figura 23. Gráfico de $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{(1 + \ln(x+y)) / \cos(xy)}$, las derivadas parciales en $P_0 = (0, 1)$

§6. Applet 3

El muy potente applet⁹ del Massachusetts Institute of Technology que llamaremos [Applet 3](#)¹⁰ muestra de modo directo la [figura 24](#), que es de por sí muy clara respecto la graficación de curvas en coordenadas polares.

⁹ Del Massachusetts Institute of Technology.



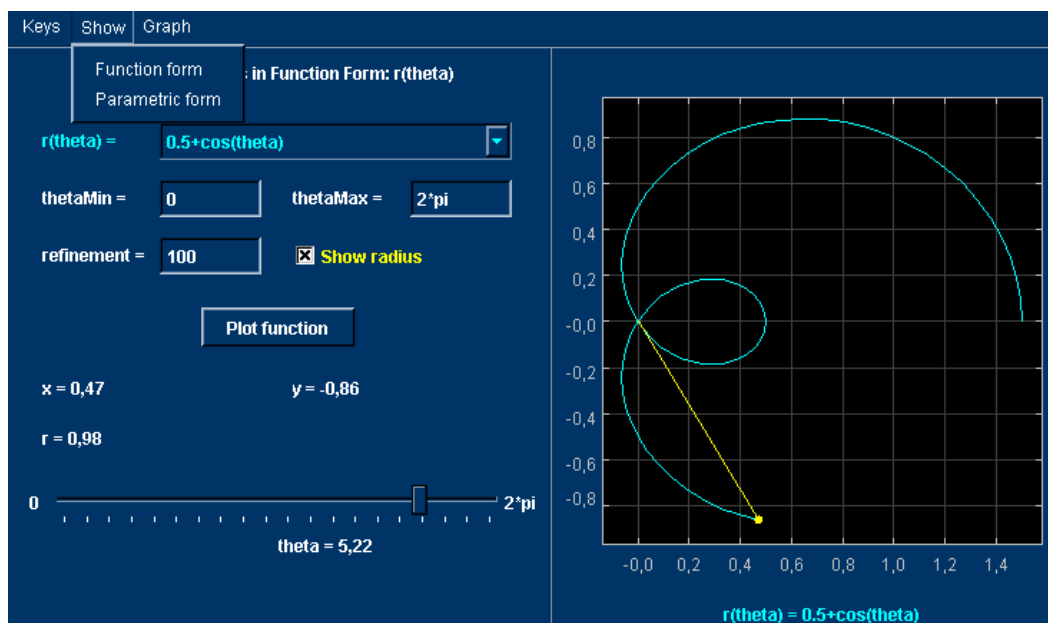
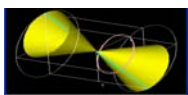


Figura 24. El gráfico de la curva $r = \frac{1}{2} + \cos(\theta)$

§7. Actividades sugeridas con el Applet 3

Consideramos que la aplicación y utilidad de este applet no requiere ninguna explicación para interactuar con el material de la guía de trabajos prácticos.

§8. Applet 4

MITOPENCOURSEWARE
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

El muy potente applet del Massachusetts Institute of Technology que llamaremos [Applet 4](#)¹¹ muestra de modo directo la [figura 25](#), que es de por sí muy clara respecto los elementos que pueden controlarse y modificarse por el usuario en la

manipulación de los campos escalares.

Recomendamos en este caso asegurarse que se establecen las relaciones entre los objetos que el applet distingue con diferentes colores, a medida que se desplazan los cursores de control. Probar de una perspectiva en la que pueda advertirse el vector rojo (gradiente) como proyección del vector verde (normal). Examinar las posiciones críticas como el origen de coordenadas. Introducir campos escalares que le creen dificultades al programa. Aplicar el applet a la visualización de muchos ejercicios de la guía de trabajos prácticos.

¹⁰ En red el 21.06.2008 en el sitio [<http://ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/tools/tools16.html>].

¹¹ En red el 22.06.2008 en el sitio [<http://ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/tools/tools19.html>].

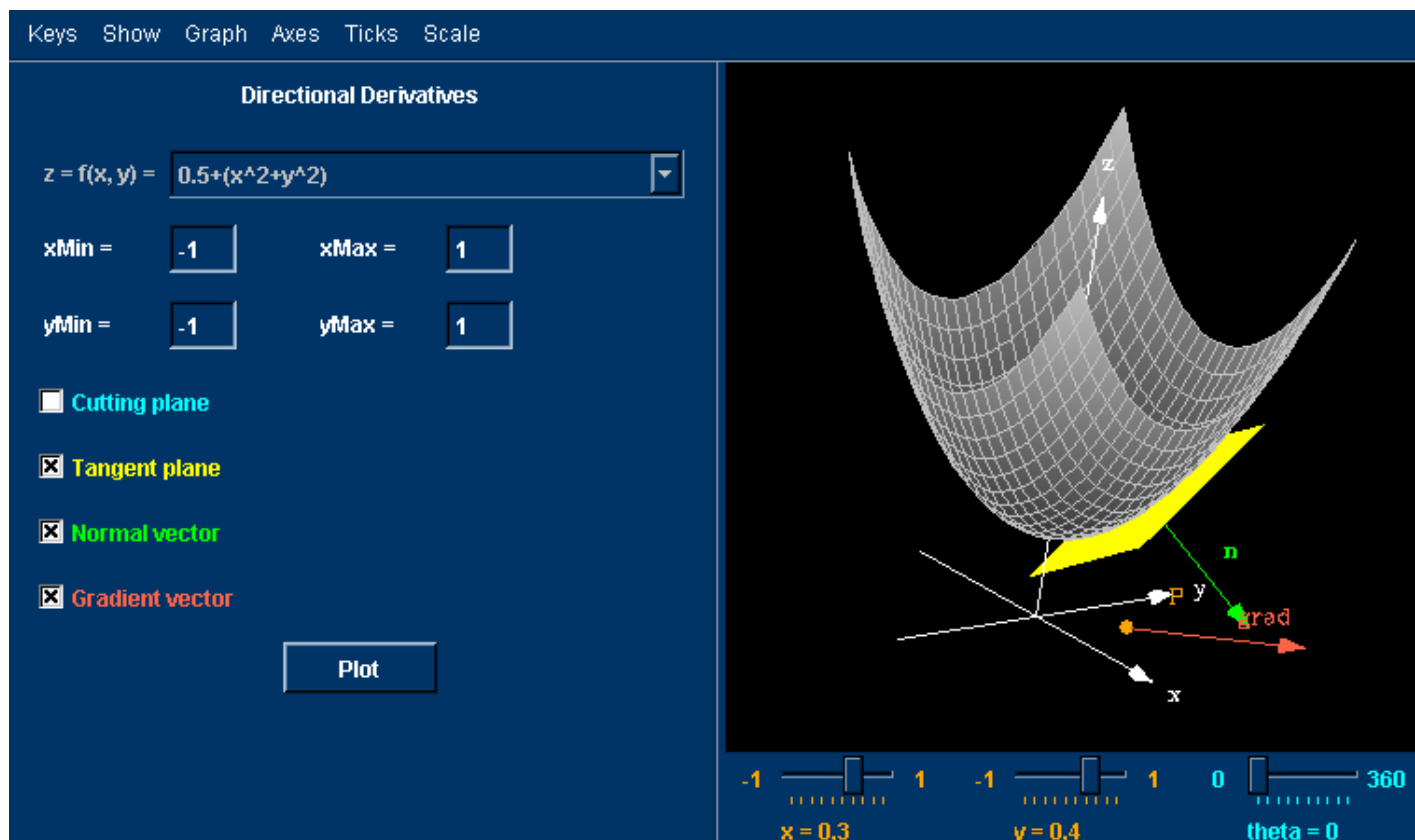
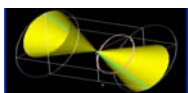


Figura 25. Gráfico, plano tangente, vector normal, gradiente del campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \frac{1}{2} + x^2 + y^2$

§9. Applet 5

MITOPENCOURSEWARE
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

El muy potente applet del Massachusetts Institute of Technology que llamaremos [Applet 5](#)¹² muestra de modo directo la [figura 26](#), que es de por sí muy clara respecto los elementos que pueden controlarse y modificarse por el usuario en la

manipulación de curvas en el espacio.

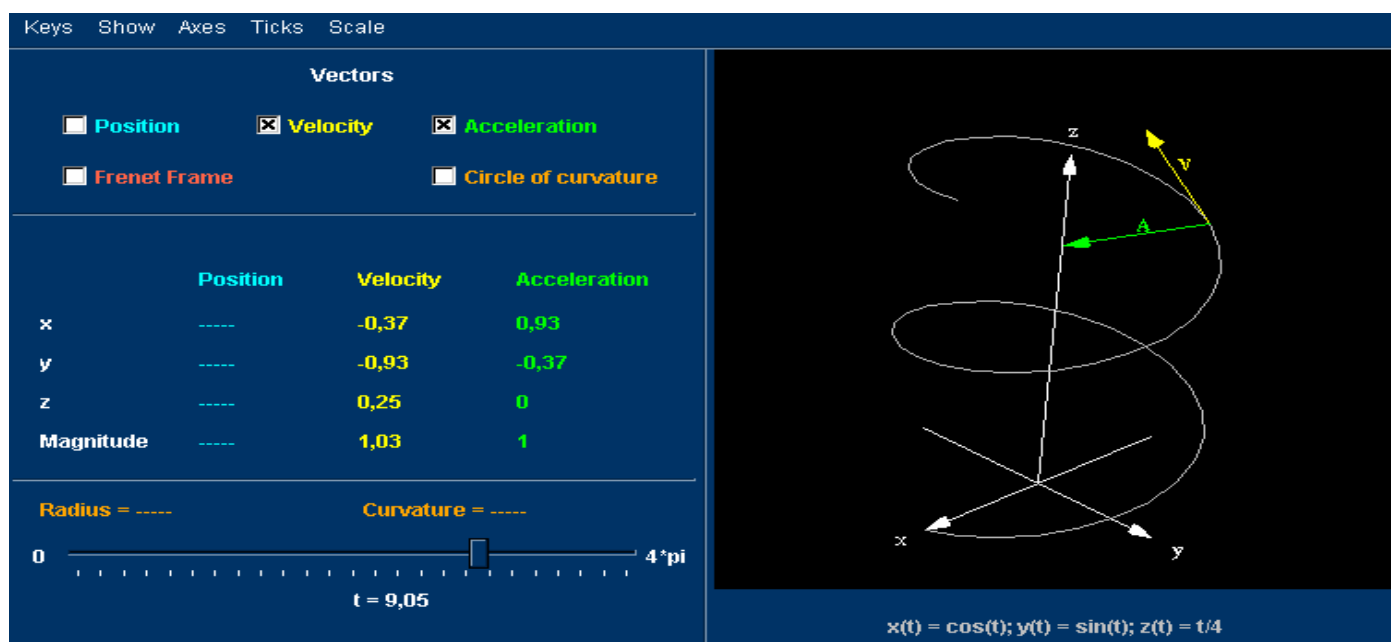


Figura 26. Gráfico de la hélice parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t/4)$

¹² En red el 22.06.2008 en el sitio [http://ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/tools/tools18.html].