Prólogo

Este trabajo se ha preparado para introducir al estudiante en los conceptos fundamentales y los métodos básicos de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. He optado por un tratamiento tradicional de las mismas, pues estimo que el mismo refleja la evolución natural del desarrollo de la teoría (evolución que alteré, por razones técnicas, al introducir algo prematuramente el Teorema 1.1 de Existencia y Unicidad de las soluciones). En general traté de ilustrar los diversos tipos de ecuaciones diferenciales presentados mediante ejemplos tomados de diversas ramas de la ciencia, sobre todo de la Física, aunque evité, salvo excepcionalmente, presentar modelos que excedieran el nivel de un curso de Física I. Así, importantes ejemplos de Electricidad, Magnetismo y Mecánica fueron omitidos. De todos modos, espero que los ejemplos presentados den al lector una idea de la importancia de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el modelado de los diversos problemas de la Ingeniería.
Un párrafo aparte merece el tratamiento de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Opté por reducir su solución a la de una ecuación diferencial ordinaria de orden superior por dos razones: en primer lugar, porque este enfoque es una continuación natural de las ideas y métodos presentados previamente y en segundo lugar, porque el tratamiento geométrico-algebraico de los sistemas no presenta ventajas computacionales respecto del propuesto, (su verdadera fuerza no reside en la resolución elegante de un sistema lineal no homogéneo a coeficientes constantes de unas pocas ecuaciones, sino en el tratamiento *cualitativo* de las ecuaciones diferenciales ordinarias vectoriales, tratamiento que por supuesto no hacemos en este trabajo introductorio).
En lo que respecta a requisitos para la lectura de este trabajo, el lector deberá estar familiarizado con el cálculo elemental, algunos aspectos básicos del álgebra lineal y del cálculo de derivadas parciales. El Apéndice, dedicado a la demostración de la mayoría de los resultados presentados, presupone una madurez matemática algo mayor, en especial en el manejo del Teorema de la Función Implícita.
Finalmente, deseo agradecer a José Luis Mancilla Aguilar y a Armando Pérez por su cuidadosa lectura del manuscrito y por sus observaciones y opiniones.

Rafael García.
Noviembre 2000

1 Introducción

Suele suceder al estudiar un fenómeno físico, que no sea posible hallar de inmediato las leyes físicas que vinculan las magnitudes que caracterizan dicho fenómeno, pero que a su vez sea fácil establecer la dependencia entre esas magnitudes y sus derivadas o sus diferenciales. Así obtenemos ecuaciones que contienen las funciones desconocidas, escalares o vectoriales, y las derivadas o diferenciales de éstas.
Las ecuaciones en las cuales la función desconocida, escalar o vectorial, se encuentra bajo el signo de la derivada o de diferencial, se llaman *ecuaciones diferenciales.* Veamos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dx}{dt} = -kx \tag{1}$$

es la ecuación de la desintegración radiactiva. (k es la constante de desintegración; x es la cantidad de sustancia no desintegrada en el instante t; la velocidad de desintegración $\frac{dx}{dt}$ es proporcional a la cantidad de sustancia que se desintegra).

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \tag{2}$$

es la ecuación del movimiento de un punto de masa m, bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F}$ que depende del tiempo, de la posición del punto (determinada por el radio vector $\mathbf{r}$) y de su velocidad $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. La fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z) \tag{3}$$

es la ecuación de Poisson, a la cual satisface, por ejemplo, el potencial $u(x, y, z)$ del campo electrostático; $\rho(x, y, z)$ es la densidad de las cargas.
Si se indican los métodos para hallar las funciones incógnitas, determinadas por las ecuaciones diferenciales, se habrá hallado así la dependencia entre las magnitudes indicadas. La búsqueda de las funciones desconocidas, determinadas por las ecuaciones diferenciales, es precisamente el problema fundamental de la teoría de las ecuaciones diferenciales.
Si en una ecuación diferencial las funciones desconocidas, escalares o vectoriales, son funciones de una sóla variable, la ecuación diferencial se denomina *ordinaria* (por ejemplo, las ecuaciones (1) y (2)). Si en cambio, la función desconocida es función de dos o más variables independientes, la ecuación diferencial es una *ecuación en derivadas parciales* (por ejemplo la ecuación (3)).
Se denomina *orden* de la ecuación diferencial al orden máximo de la derivada (o diferencial) de la función desconocida, que figura en la ecuación. Así, por ejemplo, (1) es de orden 1, y (2) y (3) son de orden dos.
En este trabajo, trataremos sólamente con ecuaciones diferenciales ordinarias, escalares o vectoriales, del tipo

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0, \qquad \text{o, cuando es posible} \tag{4}$$
$$y^{(n)} = f(x, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{5}$$

donde x (a veces será t) es la variable independiente, que supondremos adopta valores en un intervalo $I = (a, b)$ finito o infinito. La variable desconocida $y = y(x)$ es escalar o vectorial, y la notación que emplearemos es

$$y' = \frac{dy}{dx}, \ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, y^{(j)} = \frac{d^jy}{dx^j}.$$

La ecuación (5) se dice *resuelta en su derivada de mayor orden.* Si bien haremos referencia indistintamente a (4) o (5), la mayoría de los resultados que obtengamos serán para este último tipo de ecuaciones. De todas formas indicaremos, cuando sea preciso, las diferencias que pueden aparecer al considerar ambos tipos de ecuaciones.
Una *solución* de la ecuación (4) en el intervalo I es una función $y = \phi(x)$ n veces derivable que satisface la identidad

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

para todo x en I; el mismo concepto se aplica para las ecuaciones del tipo (5).

Ejemplo 1.1 Verificar que $\phi(x) = x^2$ es una solución de $xy' = 2y$ en $\mathbb{R}$.
Solución. Dado que $\phi'(x) = 2x$, se verifica $x\phi'(x) = x(2x) = 2x^2 = 2\phi(x)$ para todo x y por lo tanto $\phi(x)$ es una solución de la ecuación en $\mathbb{R}$.

A veces una solución de una ecuación diferencial vendrá dada en forma implícita por una ecuación de la forma $H(x, y) = 0$. Diremos que se trata de una solución implícita, en contraste con la solución explícita de la forma $y = \phi(x)$.

Ejemplo 1.2 Verificar que la función $\phi(x)$ dada implícitamente por la ecuación $x^2+y^2-1 = 0$, $(y > 0)$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $yy' = -x$ en el intervalo $(-1, 1)$.
Solución. Dado que ϕ verifica $x^2 + \phi(x)^2 - 1 = 0$, si derivamos esta ecuación obtenemos $2x + 2\phi(x)\phi'(x) = 0$, de donde $\phi(x)\phi'(x) = -x$.

En general una ecuación diferencial tienen más de una solución. Esto no debería sorprendernos ya que la integración introduce constantes arbitrarias, y una ecuación diferencial del tipo $y' = f(x)$ se resuelve por integración.
La ecuación de la desintegración radiactiva, por ejemplo, tiene una solución $x(t) = ce^{-kt}$, con c una constante arbitraria.
Es evidente que la ecuación diferencial (1) no determina por completo la ley de desintegración $x(t)$; para su completa determinación hay que conocer la cantidad x_0 de sustancia que se desintegra en un momento inicial t_0. Sabiendo entonces que $x(t_0) = x_0$, obtenemos el valor de la constante $c = x_0e^{kt_0}$, como se puede comprobar fácilmente.
Este ejemplo es típico para la mayoría de las ecuaciones. Muestra que para una ecuación diferencial ordinaria de orden n, todas las soluciones suelen estar representadas por una única fórmula que involucra n constantes arbitrarias $c_1, \ldots, c_n$, a la que se la denomina *solución general* ($x(t) = ce^{-kt}$ en el caso anterior). Cuando se elijen valores para las constantes $c_1, \ldots, c_n$ se obtiene una *solución particular* de la ecuación. En general, la determinación de las constantes viene dada por las *condiciones iniciales* ($x(t_0) = x_0$ para la ecuación (1)).

Ejemplo 1.3 La ecuación diferencial $y'' + y = 0$ tiene una solución general $\phi(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$, como es fácil de comprobar. Si imponemos las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, resultan $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, y una solución particular es $y(x) = \cos x$.

En algunas ocasiones la ecuación diferencial tiene soluciones que no pueden obtenerse a partir de la solución general. A estas soluciones se las denomina *soluciones singulares* y, si bien no las trataremos en este trabajo, las mencionamos por completitud.

Ejemplo 1.4 La ecuación

$$y'^2 - xy' + y = 0$$

tiene como solución general $\phi(x) = cx - c^2$ como se puede comprobar por derivación y sustitución. Esta solución representa una familia de rectas, una para cada valor de c, que son las soluciones particulares. También por sustitución se puede comprobar que la función $\psi_s(x) = x^2/4$ también es una solución. Esta es una solución singular, ya que no puede obtenerse de $\phi(x)$ para ningún valor de c.

Consideremos ahora más detalladamente la ecuación (2) que es una ecuación vectorial de segundo orden. Esta puede sustituirse por un sistema equivalente de dos ecuaciones vectoriales de *primer* orden, si consideramos la velocidad $\mathbf{v}$ como una segunda función vectorial desconocida:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}\\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Este sistema a su vez, se puede sustituir por un sistema equivalente de seis ecuaciones de primer orden, reemplazando $\mathbf{F}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) = (F_1(t,\mathbf{r},\mathbf{v}), F_2(t,\mathbf{r},\mathbf{v}), F_3(t,\mathbf{r},\mathbf{v}))$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x\\ \frac{dy}{dt} &= v_y\\ \frac{dz}{dt} &= v_z\\ \frac{dv_x}{dt} &= F_1(t,x,y,z,v_x,v_y,v_z)\\ \frac{dv_y}{dt} &= F_2(t,x,y,z,v_x,v_y,v_z)\\ \frac{dv_z}{dt} &= F_3(t,x,y,z,v_x,v_y,v_z).\end{aligned}$$

Este proceso se puede aplicar a la mayoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales vectoriales de cualquier orden, por lo que su estudio queda unificado en el de los *sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias* que escribimos

$$\begin{array}{rcl} y_1' &=& f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\\ y_2' &=& f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ y_n' &=& f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\end{array} \tag{6}$$

o, en forma más compacta,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \tag{7}$$

con $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

1.1 Teorema de existencia y unicidad de soluciones.

En los ejemplos anteriores hemos visto que una ecuación diferencial puede tener varias soluciones. Por ejemplo, vinos que dada una ecuación de orden n, su solución general (en caso que exista), depende de n constantes arbitarias. Vimos también que dadas condiciones iniciales adecuadas, estas constantes podían determinarse en esos casos, lo que definía una única solución particular. Los siguientes ejemplos muestran que no siempre el comportamiento de las ecuaciones diferenciales es tan regular.

Ejemplo 1.5

1. El problema : $|y'| + |y| = 0, \;\; y(0) = 1$, no tiene solución, ya que $y \equiv 0$ es la única solución de la ecuación diferencial. ¿Por qué?
2. El problema $y' = 2x, \;\; y(0) = 1$ tiene una única solución $y = x^2 + 1$.
3. El problema $y' = \sqrt{|y|}, \;\; y(0) = 0$ tiene las soluciones

$$y \equiv 0, \qquad y = \begin{cases} x^2/4 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x^2/4 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

4. El problema $xy' = y - 1, \;\; y(0) = 1$ tiene infinitas soluciones de la forma $y = 1 + cx$, con c una constante arbitraria.

En esta sección trataremos el problema de la existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria. Lo haremos para la ecuación (7), ya que este caso comprende, como veremos, todas las ecuaciones que trataremos en este trabajo.
Es importante notar, según lo argumentado previamente, que para que el problema de unicidad tenga solución, es necesario que se agreguen a la ecuación diferencial condiciones iniciales. Tendremos así el *problema a valores iniciales*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' & = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) & = \mathbf{y_0}. \end{cases} \tag{8}$$

El siguiente teorema, cuya demostración omitiremos, y del cual se pueden obtener versiones más fuertes, da condiciones para la exsitencia y unicidad de soluciones del problema (8):

Teorema 1.1 Teorema de existencia y unicidad
Supongamos que $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ en (8) está definida en la región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\mathcal{R} = \{(x, \mathbf{y}) : |x - x_0| \leq \alpha, \;\; \|\mathbf{y} - \mathbf{y_0}\| \leq \beta\} \;\; (\alpha, \beta > 0), \tag{9}$$

que es continua allí, y que las derivadas parciales de f respecto de las componentes de $\mathbf{y}$ son acotadas, es decir, que existe una constante $K > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) \right\| < K, \quad \forall\, (x, \mathbf{y}) \subset \mathcal{R} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Entonces existe una única solución $\mathbf{y}(x)$ del problema (8) definida en $|x - x_0| \leq \alpha' \leq \alpha$.

Este teorema será de gran importancia en los desarrollos ulteriores.

Observación 1.1 Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, \mathbf{y})$ es una función continua en $\mathcal{R}$; entonces es acotada. Por lo tanto, si $\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, \mathbf{y})$ es continua en $\mathcal{R}$ para todo j, $1 \leq j \leq n$, se cumplen las hipótesis del Teorema 1.1.

Observación 1.2 Si bien se puede enunciar un teorema similar para el problema a valores iniciales

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0, \; \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0},$$

no lo haremos aquí, ya que la complejidad que involucra excede el nivel de este trabajo.

2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

En esta sección, consideraremos la ecuación diferencial de primer orden

$$F(x, y, y') = 0,$$

en particular, cuando está resuelta en su derivada:

$$y' = f(x, y). \tag{10}$$

Un ejemplo simple de tal ecuación es

$$y' = f(x)$$

con $f(x)$ continua, cuya solución es simplemente

$$y(x) = \int f(x)dx + c,$$

con c una constante arbitraria que puede determinarse, de acuerdo con el Teorema 1.1, a partir del valor $y(x_0) = y_0$; en efecto,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau.$$

Consideremos la ecuación (10), que reescribiremos momentáneamente en la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{11}$$

Escrita en esta forma, la ecuación diferencial tiene una clara interpretación geométrica: establece una dependencia entre las coordenadas de un punto y el coeficiente angular $\frac{dy}{dx}$ a la gráfica de la solución en ese punto. Conociendo a x y a y se puede determinar $\frac{dy}{dx}$, es decir, se asigna a cada punto de coordenadas (x, y) una *dirección*. Por consiguiente, la ecuación diferencial (11) determina un *campo de direcciones*, y el problema de la integración de la ecuación diferencial se reduce a hallar las *curvas integrales*, para las cuales la dirección de las tangentes a éstas coincide en cada punto con la dirección del campo.

Ejemplo 2.1 La Figura 1 muestra el campo de direcciones correspondientes a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x - 2y$$

mientras que la Figura 2 muestra sus curvas integrales $y = (2x - 1)/4 + ce^{-2x}$.

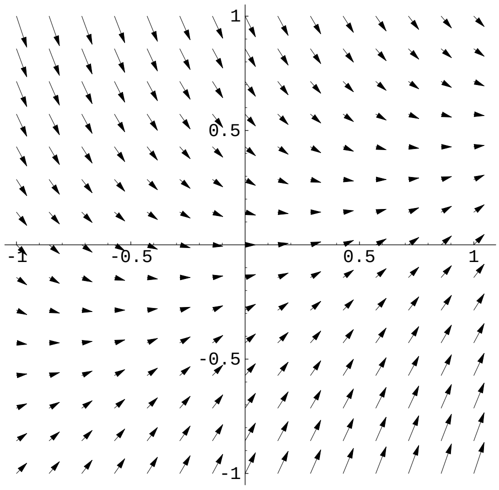

Figura 1: Campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = x - 2y$

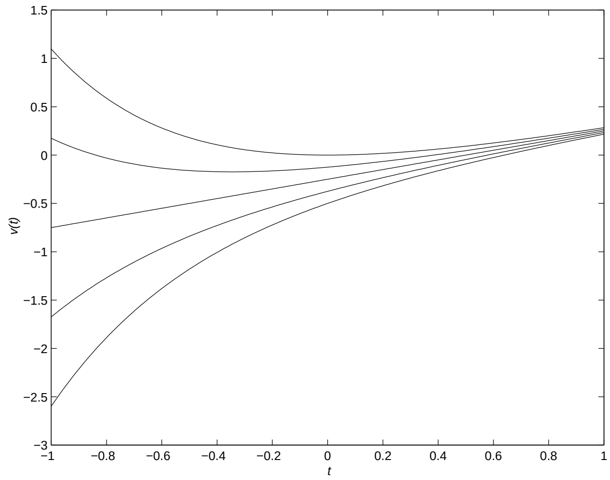

Figura 2: Curvas integrales de $\frac{dy}{dx} = x - 2y$

Por lo tanto, en términos geométricos podemos decir que: *una ecuación diferencial del tipo (11) es un campo de direcciones en una región del plano* (x, y). *Una solución es una función definida en un intervalo del eje* x *cuya gráfica es tangente al campo en cada uno de sus puntos.*
Esta interpretación geométrica se generaliza fácilmente a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (7) (pasando del plano al espacio $n+1$-dimensional), y por lo tanto da un significado intrínseco a todas las ecuaciones y sistemas direferenciales resueltos en sus derivadas.

2.1 Ecuaciones de variables separables

Se dice que una ecuación de primer orden $y' = f(x, y)$ es de *variables separables* si f puede escribirse en la forma

$$f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}.$$

En este caso la ecuación también se escribe:

$$h(y)y' = g(x), \tag{12}$$

o bien:

$$h(y)dy = g(x)dx, \tag{13}$$

de donde el origen del término “variables separables”.
En la práctica, el método usual para resolver la ecuación (12) consiste en escribirla en la forma (13) (esto es, separando las variables), integrar ambos lados de la igualdad para obtener

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c, \tag{14}$$

y luego, de ser posible, despejar y en función de x. (A veces no es sencillo obtener una expresión explícita de y en términos de x y de c). La siguiente proposición, cuya demostración puede encontrarse en el Apéndice, establece las condiciones para las cuales este procedimiento es correcto:

Proposición 2.1 Sea la ecuación (12) con $g(x)$ y $h(y)$ definidas y continuas en los intervalos abiertos I_x e I_y respectivamente, y supongamos que $h(y)$ no se anula en I_y. Sea c un número para el que se satisfaga la ecuación (14) al menos para un par de números (x, y).
Si (x_0, y_0) satisface (14), entonces (14) define y implícitamente como una función ψ de x en un cierto intervalo $I \subset I_x$ que contiene a x_0. Además, ψ es una solución de (12) que satisface $\psi(x_0) = y_0$.

Ejemplo 2.2 Resolver el problema a valores iniciales $y' = y^2 + 4, \;\; y(0) = 1$.
Solución. Escribiendo la ecuación en la forma (12) tenemos

$$\frac{y'}{y^2+4} = 1,$$

por lo que integrando, de acuerdo con (14), se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\arctan y = x + c \qquad \text{y entonces} \\ &y(x) = \tan(2x + 2c). \end{aligned}$$

De acuerdo con las condiciones iniciales, se tiene $1 = y(0) = \tan(2c)$ con lo que $c = \pi/8$. En consecuencia, la solución es

$$y(x) = \tan(2x + \frac{\pi}{4}).$$

Ejemplo 2.3 Resolver la ecuación diferencial $9\,y\,y' + 4x = 0$.
Solución. Separando variables, tenemos

$$9\,y\,dy = -4\,x\,dx$$

por lo que, integrando de acuerdo con (14), obtenemos la solución

$$\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + c, \text{ con lo que } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \tilde{c} \qquad \left(\tilde{c} = \frac{c}{18}\right).$$

La solución representa, para $c \geq 0$ ($\tilde{c} \geq 0$) una familia de elipses. Para $c < 0$ la relación (14) no define en este caso a y como una función de x.
Obsérvese que no es posible obtener en forma explícita y en función de x y de c, si consideramos que el intervalo I_y contiene a 0, pues $h(y) = 9y$ se anula en $y = 0$..

Ejemplo 2.4 Encontrar todas las soluciones de $y' = y^2$.
Solución. En este caso, $h(y) = 1/y^2$ que no es continua en $y = 0$. Separando variables, tenemos

$$\frac{dy}{y^2} = dx,$$

e integrando según (14), obtenemos

$$-\frac{1}{y} = x + c \quad \text{o} \quad y = \frac{-1}{x+c}.$$

Así, si c es una constante arbitraria, la función ψ dada por

$$\psi(x) = \frac{-1}{x+c} \tag{15}$$

es una solución al problema, siempre que $x \neq -c$, esto es, la solución está definida en un intervalo.

Observación 2.1 Es importante recalcar que el método de separación de variables puede no dar *todas* las soluciones de una ecuación. Así, es claro que la función $\phi \equiv 0$ es una solución para este ultimo problema. Sin embargo, la solución ψ de (15) no es igual a ϕ para ningún valor de la constante c. Nótese que ψ es precisamente el valor de y que hace que, en este caso, $h(y)$ no sea continua.

Modelar significa establecer modelos matemáticos de diversos sistemas, físicos, biológicos, económicos, etc. En los ejemplos siguientes veremos algunos de los muchos sistemas que pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales de variables separables.

Ejemplo 2.5 Fechado mediante carbono radiactivo Si un fósil contiene la cuarta parte de su cantidad original de carbono radiactivo $_6C^{14}$, ¿cuál es su edad?
Solución. a) Idea del método: en la atmósfera, la relación de carbono radiactivo $_6C^{14}$ a la de carbono ordinario ($_6C^{12}$) se mantiene constante, y lo mismo le pasa a *todos* los organismos vivientes. Cuando un organismo muere, cesa su absorción de $_6C^{14}$ (lo que en vida hace por medio de la respiración y de la alimentación). Por lo tanto, se puede estimar la edad de un fósil comparando la proporción de cabón en el mismo con la de la atmósfera. Se sabe además que la *vida media* del $_6C^{14}$ es de 5730 años.
b) Modelado de la desintegración radiactiva: los experimentos muestran que la velocidad de emisión de una substancia radiactiva es proporcional a la masa de la misma. Entonces, si llamamos $y(t)$ a la masa de sustancia en el instante t, la ley que gobierna el proceso de radiación vendrá dado por

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

Por separación de variables e integración, si la condición inicial es $y(0) = y_0$, obtenemos:

$$\frac{dy}{y} = k, \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = kx + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{\tilde{c}}e^{kt},$$

por lo que

$$y = ce^{kt}, \text{ con } c = e^{\tilde{c}} \text{ si } y > 0 \text{ y } c = -e^{\tilde{c}} \text{ si } y < 0.$$

En este caso como $y(0) = y_0 > 0$, nos queda

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Como y_0 es la masa inicial de ${}_6C^{14}$, y la vida media es el tiempo que transcurre hasta que la masa de sustancia radiactiva se reduce a la mitad de su valor original, podemos calcular la constante k:

$$y_0 e^{5730k} = \frac{1}{2} y_0 \;\Rightarrow\; k = \frac{\ln(1/2)}{5730} = -0.000121.$$

c) Solución del problema: el tiempo transcurrido hasta que la cantidad de ${}_6C^{14}$ se redujo al 25% de su valor original viene dado por:

$$y_0 e^{-0.000121t} = \frac{1}{4} y_0, \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln(1/4)}{-0.000121} = 11460\,\text{años}.$$

Ejemplo 2.6 Flujo de agua a través de un agujero Un tanque cilindrico de 1.5 metros de altura y 1 metro de diámetro, está inicialmento lleno de agua. En el fondo del tanque hay un agujero de 1 centímetro de diámetro, que se abre en un determinado instante, y por consiguiente, el agua comienza a derramarse por efecto de la gravedad. Encontrar la altura $h(t)$ del agua en el tanque en cualquier tiempo t. Determinar los tiempos para los cuales el tanque está medio vacío y completamente vacío.
Solución. a) Modelado: los experimentos (ley de Torricelli) muestran que el agua sale por un agujero con velocidad

$$v(t) = 0.6\sqrt{2gh(t)},$$

donde t es el tiempo, $h(t)$ la altura instantánea del agua por encima del agujero, $g = 980$ cm/seg^2 es la aceleración de la gravedad y 0.6 es un factor de contracción que tiene en cuenta que el chorro saliente tiene menor sección que el agujero por donde sale.
Si A es el área del agujero, el volúmen ΔV de agua que sale del mismo con velocidad v durante un breve lapso Δt es $\Delta V = A\,v\,\Delta t$. Como consecuencia de ésto, el nivel de agua h decrecerá un valor Δh que debe ser tal que el correspondiente volumen $B\,\Delta h$ (donde B es el área de la sección del tanque paralela a la base) iguale a ΔV. Por lo tanto

$$B\,\Delta h = -\Delta V = -A\,v\,\Delta t = -0.6A\sqrt{2gh}\,\Delta t.$$

Dividiendo ambos miembros por $B\Delta t$, y haciendo tender Δt a 0, obtenemos

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A}{B}0.6\sqrt{2gh}.$$

A partir de los datos, obtenemos $A/B = 0.0001$ por lo que nuestro modelo es la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -0.002656\sqrt{h}.$$

b) Solución del problema: por separación de variables e integración obtenemos

$$\frac{dh}{h^{\frac{1}{2}}} = -0.002656\,dt, \qquad 2h^{\frac{1}{2}} = -0.002656\,t + \tilde{c}.$$

Poniendo $c = 2\tilde{c}$, obtenemos la solución general

$$h(t) = (c - 0.001328\,t)^2.$$

La condición inicial es $h(0) = 150$ cm., con lo que obtenemos $h(0) = c^2 = 150, c = 12.25$ y la solución particular es

$$h(t) = (12,25 - 0.001328\,t)^2. \tag{16}$$

Para poder determinar los instantes pedidos, despejamos t de (16):

$$t = \frac{12.25 - \sqrt{h}}{0.001328} = 9224 - 753\sqrt{h}.$$

Así, el tanque estará medio vacío ($h = 75$ cm.) después de 2703 seg. y vacío después de 9249 seg.

Ejemplo 2.7 Caída atenuada Supongamos que un paracaidista se lanza (desde el reposo) hacia la tierra, y que el paracaídas se abre en un instante, digamos, $t = 0$ cuando la velocidad del paracaidista es $v(0) = v_0$ m/seg. Encontrar la velocidad $v(t)$ del paracaidista en cualquier instante t. ¿Aumenta $v(t)$ indefinidamente?

Solución. a) Modelado: supongamos que la masa del paracaidista es m, y que la resistencia del aire, U, es proporcional a v^2, es decir, $U = b\,v^2$, donde la constante de proporcionalidad b depende principalmente del paracaídas. Entonces, las fuerzas que se ejercen sobre el paracaidista mientras cae son: su peso $P = mg$, con g la aceleración de la gravedad, hacia abajo y la resistencia del aire U oponiéndose al movimiento, es decir, hacia arriba. De acuerdo con la segunda ley de Newton, tenemos $P - U = ma$, donde $a = dv/dt$ es la aceleración. Entonces

$$m\frac{dv}{dt} = mg - b\,v^2,$$

y dividiendo ambos miembros por m obtenemos nuestro modelo, que es la ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}(v^2 - k^2), \qquad k^2 = \frac{mg}{b}. \tag{17}$$

b) Solución de la ecuación diferencial: separando variables e integrando, obtenemos

$$\int \frac{dv}{v^2 - k^2} = -\int \frac{b}{m}\,dt = -\frac{b}{m}\,t + \tilde{c}.$$

Pero como

$$\frac{1}{v^2 - k^2} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{v - k} - \frac{1}{v + k}\right), \quad \text{resulta}$$

$$\int \frac{dv}{v^2 - k^2} = \frac{1}{2k}(\ln|v - k| - \ln|v + k|) = \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{v - k}{v + k}\right| = -\frac{b}{m}\,t + \tilde{c}.$$

Operando, se obtiene

$$\frac{v - k}{v + k} = ce^{-pt}, \qquad p = \frac{2kb}{m},$$

donde $c = e^{2k\tilde{c}}$ o $-e^{2k\tilde{c}}$, de acuerdo a si la fracción es positiva o negativa. Notar además que $c = 0$ da una solución ($v = k =$ constante), como puede deducirse de (17). Despejando v, obtenemos

$$v(t) = k\frac{1 + ce^{-pt}}{1 - ce^{-pt}}. \tag{18}$$

Dado que $\lim_{t\to\infty} v(t) = k$, $v(t)$ no aumenta indefinidamente, sinó que tiende al valor límite k (ver Figura 3). Es interesante notar que este límite es independiente de la condición inicial $v(0) = v_0$. Finalmente, a partir de la condición inicial obtenemos

$$c = \frac{v_0 - k}{v_0 + k}.$$

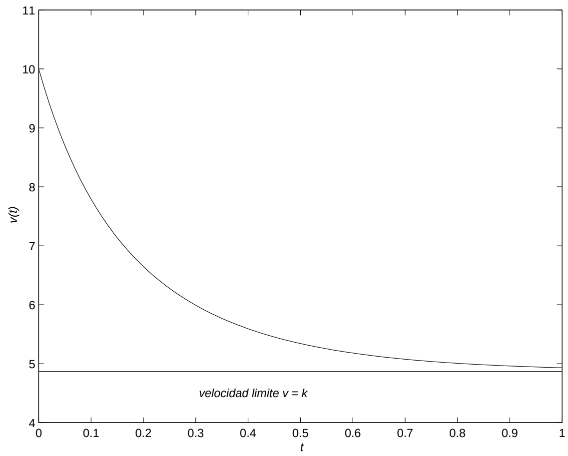

Figura 3: Velocidad $v(t)$ del paracaidista del Ejemplo 2.7

Ejercicios

1. Encontrar una solución general para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y' = \cos x \tan y$

   (b) $y' = x^2 y^2 - 2y^2 + x^2 - 2$

   (c) $y' = y/(x \ln x)$

   (d) $y' = \sqrt{1 - y^2}$

2. Resolver los siguientes problemas a valores iniciales:

   (a) $y' = x^3 e^{-y}, \quad y(2) = 0$

   (b) $y' = 4\sqrt{y+1} \cos 2x, \quad y(\pi/4) = -1$

   (c) $\sqrt{x^2+1}\, y' = x\, y^3, \quad y(0) = 2$

   (d) $y' \cosh^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 0, \quad y(0) = \pi/4$

3. Suponga que el tanque del Ejemplo 2.6 es hemisférico de radio R, que inicialmente está lleno de agua y que tiene en el fondo un orificio de salida de área A. Este orificio es abierto en el instante $t = 0$. Encontrar la expresión de la altura $h(t)$ del agua en el tanque, y del tiempo que tarda el tanque en vaciarse completamente.

4. Encontrar la ecuación de la velocidad, y su solución, en el Ejemplo 2.7, si ahora suponemos que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad, esto es $U = \tilde{b}v$. ¿Es el modelo aún físicamente razonable?

5. **Ley de Boyle-Mariotte para los gases ideales** Los experimentos muestran que para un gas a baja presión p (y temperatura constante) la variación del volúmen $V(p)$ es $-V/p$. Resolver la ecuación diferencial correspondiente.

6. Si se arrolla una cuerda alrededor de un cilindro de superficie rugosa que está fijo a tierra, basta ejercer una pequeña fuerza en uno de los extremos de la cuerda para resistir una gran fuerza en el otro. Sea S la fuerza en la cuerda. Los experimentos muestran que el cambio ΔS de S en una porción pequeña de la cuerda es proporcional a S y al ángulo $\Delta\phi$, con una constante de proporcional μ. (ver Figura 4). a) Encontrar la ecuación diferencial para S. b) Si $\mu = 0.2$ radian^{-1}, ¿cuántas veces debe arrollarse la cuerda alrededor del cilindro para que un hombre que sostiene un extremo de la cuerda pueda soportar una fuerza mil veces mayor que la que él puede hacer?

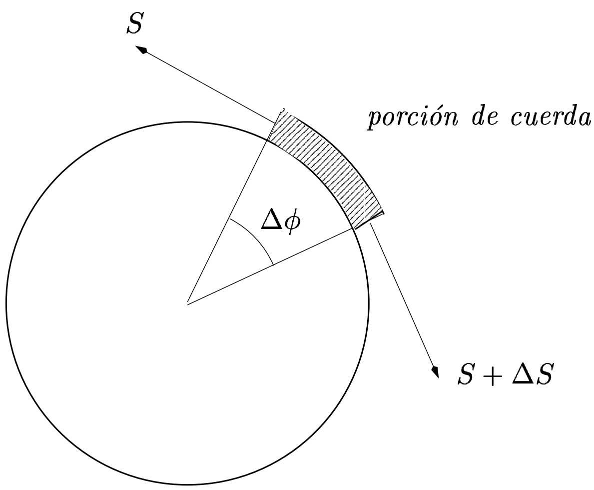

Figura 4: Cilindro y cuerda del Problema 6

2.2 Ecuaciones diferenciales exactas

Supongamos que la ecuación de primer orden $y' = f(x, y)$ se escribe de la siguiente manera:

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

o, en forma equivalente:

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0, \tag{19}$$

o, separando variables,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

donde M, N son funciones definidas en el rectángulo $\mathcal{R} \subset \mathrm{R}^2$ dado por (9). Se dice que (19) es *exacta* en $\mathcal{R}$, si existe una función u que tenga sus primera derivadas parciales continuas tales que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N, \tag{20}$$

en R. Si (19) es exacta en $\mathcal{R}$ y u es una función que satisface (20), entonces (19) se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)y' = 0, \;\; &\text{o, equivalentemente,}\\ du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dy = 0.&\end{aligned}$$

Si ϕ es cualquier solución de (19) definida en cierto intervalo I, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\phi(x)) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,\phi(x))\phi'(x) = 0$$

para toda x en I. La ecuación anterior significa precisamente que $du(x,\phi(x)) = 0$, y en consecuencia

$$u(x,\phi(x)) = c$$

donde c es una constante. Así, la solución ϕ debe ser una función que esté dada implícitamente por

$$u(x,y) = c. \tag{21}$$

El problema de resolver una ecuación exacta queda reducido pues, al problema de hallar una función u que satisfaga (20). A veces puede determinarse esta función por simple inspección como muestra el siguiente

Ejemplo 2.8 Sea la ecuación

$$y' = -\frac{x}{y},$$

que puede escribirse en la forma

$$2\,x\,dx + 2\,y\,dy = 0.$$

Claramente el miembro izquierdo es la diferencial de $u(x,y) = x^2 + y^2$. Así, cualquier función diferenciable que esté definida por la relación

$$x^2 + y^2 = c, \;\; (c \text{ constante}),$$

es una solución de la ecuación.

Para reconocer cuándo una ecuación es exacta, observemos que si por ejemplo

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

es exacta y u es una función con derivadas segundas continuas que verifica (20) en $\mathcal{R}$, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

y dado que para dicha función

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

debemos tener

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{22}$$

Esta condición no es sólo necesaria sino también suficiente para que $M dx + N dy$ sea exacta.
En lo que sigue no haremos referencia al rectángulo $\mathcal{R}$, ya que el lector podrá en cada caso reconocerlo fácilmente.
Si (19) es exacta, podemos obtener u a partir de (20). En efecto, de la primera igualdad de (20) obtenemos, integrando con respecto a x,

$$u = \int M\, dx + k(y); \tag{23}$$

en esta integral, se considera a y como una constante, y $k(y)$ juega el papel de "constante" de integración. Para determinar $k(y)$, se obtiene a partir de (23) $\partial u/\partial y$ se utiliza la segunda igualdad de (20) para despejar dk/dy, y se integra esta última para obtener $k(y)$.
En forma similar, se puede obtener u partiendo de la segunda igualdad de (20),

$$u = \int N\, dy + l(x). \tag{24}$$

Para determinar $l(x)$, se obtiene de (24), $\partial u/\partial x$, se usa la primera igualdad de (20) para despejar dl/dx y se integra.

Ejemplo 2.9 Resolver

$$y' = \frac{3x^2 - 2\,x\,y}{x^2 - 2\,y}.$$

Solución. Esta ecuación puede escribirse en la forma:

$$(3x^2 - 2\,x\,y)\, dx + (2\,y - x^2)\, dy = 0,$$

por lo que $M(x,y) = 3x^2 - 2\,x\,y, \quad N(x,y) = 2\,y - x^2$. Un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -2\,x,$$

por lo que la ecuación es exacta. De (23) obtenemos

$$u = \int M\, dx + k(y) = \int (3x^2 - 2\,x\,y) dx + k(y) = x^3 - x^2\,y + k(y).$$

Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 + \frac{dk}{dy} = N = 2\,y - x^2,$$

con lo que $dk/dy = 2y$, y $k(y) = y^2$. Entonces,

$$u(x,y) = x^3 - x^2\,y + y^2 + \tilde{c},$$

con lo que la solución al problema es:

$$x^3 - x^2\,y + y^2 = c.$$

Observar que si bien la solución a $dk/dy = 2y$ es $y^2 + \tilde{c}$, la constante $\tilde{c}$ siempre puede ser absorbida por la constante c para la solución del problema. Esto se da en la generalidad de los casos, y no sólo en este ejemplo particular.

Ejemplo 2.10 Resolver el siguiente problema a valores iniciales:

$$(\operatorname{sen} x\, \cosh y)\, dx - (\cos x \operatorname{senh} y)\, dy = 0, \quad y(0) = 0.$$

Solución. En este caso $M = \operatorname{sen} x\, \cosh y$ y $N = -\cos x \operatorname{senh} y$. Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

y por lo tanto la ecuación es exacta. Por consiguiente

$$u = \int N\, dy + l(x) = \int -\cos x \operatorname{senh} y\, dy + l(x) = -\cos x \cosh y + l(x).$$

De aquí resulta $\partial u/\partial x = \operatorname{sen} x\, \cosh y + dl/dx$ con lo que $dl/dx = 0$ y $l = \tilde{c}$. Por lo tanto la solución general es

$$u(x,y) = \cos x \cosh y = c,$$

y de las condiciones iniciales, $u(0,0) = \cos 0 \cosh 0 = 1 = c$ y como consecuencia, la solución del problema es

$$\cos x \cosh y = 1.$$

2.2.1 Factores integrantes

La idea del método de los factores integrantes es muy simple. A veces una ecuación

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{25}$$

no es exacta, pero si se la multiplica por una función $\mu(x,y)$ adecuada, la nueva ecuación

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{26}$$

resulta exacta, por lo que se la puede resolver por el método ya visto. La función $\mu(x,y)$ es entonces un *factor integrante* para la ecuación (25).

Ejemplo 2.11 Verificar que la ecuación diferencial

$$ydx - xdy = 0 \tag{27}$$

no es exacta, que $\mu(x, y) = 1/x^2$ es un factor integrante y resolver la nueva ecuación.
Solución. La ecuación es de la forma (25) con $P = y$ y $Q = -x$. Como

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1,$$

la ecuación no es exacta. Si la multiplicamos por $\mu(x, y)$, obtenemos

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0, \tag{28}$$

que es exacta, ya que

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Además,

$$\mu P dx + \mu Q dy = \frac{ydx - xdy}{x^2} = -d\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Entonces, la solución de (28) es

$$\frac{y}{x} = c. \tag{29}$$

Otros factores integrantes de (27) son $1/y^2$, $1/xy$ y $1/(x^2 + y^2)$, ya que

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right), \quad \frac{y\,dx - x\,dy}{xy} = d\left(\ln\frac{x}{y}\right), \quad \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = -d\left(\arctan\frac{y}{x}\right).$$

Notar que para todos estos factores integrantes, se obtiene la misma solución (29).

Es fácil verificar que si $\phi(x)$ es una solución de (25), es decir, si

$$P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

con I un intervalo, entonces lo es de (26):

$$\mu(x, \phi(x))P(x, \phi(x)) + \mu(x, \phi(x))Q(x, \phi(x))\phi'(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

La recíproca no es cierta en general, pues de las soluciones de (26) puede ser necesario descartar las funciones $\psi(x)$ que se obtengan a partir de $\mu(x, \psi(x)) = 0$, es decir aquellas funciones que anulan el factor integrante. Esto se puede apreciar en el siguiente

Ejemplo 2.12 Consideremos la ecuación

$$\frac{1}{xy}dy - \frac{1}{x^2}dx = 0$$

que no es exacta. Un factor integrante es $\mu(x, y) = y$, como es fácil de comprobar. Este factor integrante conduce a

$$\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

cuya solución general es $y = cx$, con c arbitraria. Sin embargo $\mu(x, y) = y = 0$ no es solución de la ecuación original.

A veces resulta sencillo encontrar por inspección un factor integrante μ para (25). De todas formas, en el caso general una manera de tratar de encontrarlo es la siguiente.
Si comparamos (19) con (26), vemos que $M = \mu P$ y $N = \mu Q$; por lo tanto, de (22) obtenemos las condiciones para que (26) sea exacta:

$$\mu_y P + \mu P_y = \frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \mu_x Q + \mu Q_x. \tag{30}$$

Resolver esta ecuación en μ puede ser muy complicado, y por ello introducimos previamente hipótesis simplificativas. Posteriormente debemos verificar que estas hipoótesis sean consistentes con la ecuación (25) que debemos resolver. Tales hipótesis son a) $\mu = \mu(x)$ y b) $\mu = \mu(y)$. Veamos a que nos conduce cada una de ellas.
a) En este caso, $\mu_y = 0$ y por lo tanto, de (30) obtenemos

$$\begin{aligned} \mu P_y &= \frac{d\mu}{dx} Q + \mu Q_x \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} &= \frac{1}{Q}(P_y - Q_x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si

$$R := \frac{1}{Q}(P_y - Q_x)$$

depende sólo de x, (25) tiene un factor integrante $\mu = \mu(x)$ que se obtiene, aplicando separación de variables a la última ecuación diferencial:

$$\mu(x) = e^{\int R(x)dx}. \tag{31}$$

b) Procediendo en forma similar al caso a), si

$$S := \frac{1}{P}(Q_x - P_y),$$

depende sólo de y, (25) tiene un factor integrante $\mu = \mu(y)$:

$$\mu(y) = e^{\int S(y)dy}. \tag{32}$$

Ejemplo 2.13 Resolver el problema a valores iniciales

$$(3xe^y + 2y)\,dx + (x^2 e^y + x)\,dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

Solución. En este caso, con la notación de (25), $P = 3xe^y + 2y$, $Q = x^2 e^y + x$, con lo que $P_y = 3xe^y + 2$, $Q_x = 2xe^y + 1$ y $P_y - Q_x = xe^y + 1$. Es fácil verificar que

$$R = \frac{1}{x} \text{ y } S = -\frac{1 + xe^y}{3xe^y + 2y}$$

por lo que, el factor integrante vendrá dado por (31), $\mu(x) = x$. Entonces, tendremos que $M = \mu P = 3x^2 e^y + 2xy$ y $N = \mu Q = x^3 e^y + x^2$. Procediendo en la forma habitual, se tiene que la solución general del problema viene dada por $x^3 e^y + x^2 y = c$, y de las condiciones iniciales obtenemos $c = 1$ y la solución del problema a valores iniciales es $x^3 e^y + x^2 y = 1$.

Es conveniente verificar si la ecuación admite factores integrantes dependientes sólo de x y otros dependientes de y, ya que a veces es más sencilla la resolución adoptando uno en vez del otro como muestra el siguiente

Ejemplo 2.14 Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$2\,\mathrm{sen}(y^2)\,dx + xy\cos(y^2)\,dy = 0.$$

Solución. En este caso $P = 2\,\mathrm{sen}(y^2)$, $Q = xy\cos(y^2)$ y $P_y - Q_x = 3y\cos(y^2)$. Es inmediato verificar que $S = -\frac{3}{2}y\tan(y^2)$, por lo que, de acuerdo con (32) el factor integrante es en este caso

$$\mu_1(y) = e^{\int S(y)dy}, \quad \text{y como}$$

$$\int S(y)dy = -\frac{3}{2}\int y\,\tan(y^2)\,dy = -\frac{3}{4}\ln|\mathrm{sen}(y^2)|, \quad \text{obtenemos}$$

$$\mu_1(y) = |\mathrm{sen}(y^2)|^{-\frac{3}{4}}.$$

Obtendremos ahora la solución $y(x)$ en un intervalo en el cual $\mathrm{sen}(y^2(x))$ no se anula; por ejemplo donde es positivo. En este caso

$$\mu_1(y) = (\mathrm{sen}(y^2))^{-\frac{3}{4}}$$

y procediendo en forma habitual tenemos

$$M = 2(\mathrm{sen}(y^2))^{\frac{1}{4}}, \quad N = x\,y\,\cos(y^2)\,(\mathrm{sen}(y^2))^{-\frac{3}{4}}$$

con lo que, de acuerdo con (23), obtenemos la solución general

$$u_1(x,y) = 2\,x\,(\mathrm{sen}(y^2))^{\frac{1}{4}} = c_1.$$

Por otra parte, $R = \frac{3}{x}$, y a partir de (31) es fácil ver que $\mu_2(x) = x^3$. Entonces, en este caso resultan

$$M = 2\,x^3\,(\mathrm{sen}(y^2)), \quad N = x^4\,y\,\cos(y^2),$$

por lo que, aplicando nuevamente (23) obtenemos la solución general

$$u_2(x,y) = x^4\,\mathrm{sen}(y^2) = c_2.$$

Observemos que en el dominio donde existen las dos soluciones, ambas coinciden (basta toma $c_2 = (c_1/2)^4$). Notemos además que el cálculo de la segunda solución es considerablemente más sencillo.

Ejercicios

1. Demuestre que las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y resuélvalas:

   (a) $y^3\,dx + 3x\,y^2dy = 0$

   (b) $e^{-\theta}\,dr - r\,e^{-\theta}d\theta = 0$

   (c) $\cosh x\,\cos y\,dx = \mathrm{senh}\,x\,\mathrm{sen}\,y\,dy$

(d) $2\,x\,y\,dy = (x^2 + y^2)\,dx, \quad y(1) = 2$

(e) $e^{y/x}(-y\,dx + x\,dy)/x^2 = 0, \quad y(-2) = -2$

2. Demuestre que toda ecuación de variables separables es exacta.¿Es válida la recíproca?

3. ¿Bajo qué condiciones es exacta $(ax + by)\,dx + (kx + ly)\,dy = 0$? ($a, b, k$ y l son constantes). Resuelva la ecuación exacta.

4. Encuentre un factor integrante μ y resuelva:

   (a) $(1 + 2x^2 + 4xy)\,dx + 2\,dy = 0$

   (b) $y\,\cos x\,dx + 3\,\mathrm{sen}\,x\,dy = 0$

   (c) $5\,dx - e^{y-x}dy = 0.$

2.3 Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial de primer orden se dice *lineal*, si es lineal en y e y', es decir, si es del tipo

$$y' + p(x)y = r(x), \tag{33}$$

con $p(x)$ y $r(x)$ funciones continuas en x en el intervalo $I = (a, b)$ en el que consideremos la ecuación.

Observación 2.2 Dado que en este caso podemos escribir, según la notación del Teorema 1.1, $f(x, y) = r(x) - p(x)y$, la derivada de f respecto de y,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -p(x)$$

es una función continua en I, y es inmediato comprobar que se cumplen las hipótesis de dicho teorema. En consecuencia, para la ecuación (4), el problema a valores iniciales tendrá solución única si $x_0 \in I$.

Diremos que la ecuación (33) es *homogénea* si $r(x) = 0$ para todo $x \in I$; en el caso contrario diremos que es *no homogénea*.
Con el objeto de encontrar la solución general de (33), consideremos en primera instancia la de la ecuación homogénea asociada a ella:

$$y' + p(x)y = 0. \tag{34}$$

Por el método de separación de variables, se obtiene fácilmente una solución de ésta última ecuación:

$$\psi_h(x) = e^{-\int p(x)dx} \tag{35}$$

siendo $\int p(x)dx$ una primitiva de $p(x)$.
Pongamos ahora (método de *variación de parámetros*)

$$y = u(x)\psi_h. \tag{36}$$

Se trata de determinar la función $u(x)$ de modo que y sea solución de la ecuación no homogénea (33). Derivando (36) y reemplazando en (33), resulta:

$$u'\psi_h + u\psi_h' + p(x)u\psi_h = u'\psi_h + u[\psi_h' + p(x)\psi_h] = r(x);$$

pero, la expresión entre corchetes se anula pues ψ_h es solución de (34), con lo que $u(x)$ debe verificar la ecuación:

$$u'\psi_h = r(x),$$

y aplicando nuevamente separación de variables, obtenemos

$$u(x) = \int r(x)e^{\int p(x)dx}dx + c,$$

siendo c una constante arbitraria. Por tanto, la solución general de (33) será

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int p(x)dx}\int r(x)e^{\int p(x)dx}dx + ce^{-\int p(x)dx} && (37)\\ &:= \psi_p(x) + c\,\psi_h(x). && (38) \end{aligned}$$

Observación 2.3 Notar que la solución general de (33) se obtiene sumando a la solución general de la ecuación homogénea asociada $(c\,\psi_h(x))$ una *solución particular* de (33) $(\psi_p(x))$.

Ejemplo 2.15 Resolver $y' + 2y = e^x(3\,\mathrm{sen}2x + 2\cos 2x)$.
Solución. En este caso $p(x) = 2$ y $r(x) = e^x(3\,\mathrm{sen}2x + 2\cos 2x)$, por lo tanto, en (35), $\psi_h(x) = e^{-2x}$, y de acuerdo con (37),

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2x}\int e^{2x}e^x(3\,\mathrm{sen}2x + 2\cos 2x)dx + ce^{-2x}\\ &= e^{-2x}e^{3x}\mathrm{sen}2x + ce^{-2x}\\ &= e^x\mathrm{sen}2x + ce^{-2x}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.16 Resolver el problema a valores iniciales $y' + y\tan x = \mathrm{sen}\,2x,\ y(0) = 1$.
Solución. Aquí $p(x) = \tan x,\ r(x) = \mathrm{sen}2x = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$ y

$$\int p(x)dx = \ln|\sec x|.$$

De esto se desprende que en (37),

$$e^{\int p(x)dx} = \sec x,\ e^{-\int p(x)dx} = \cos x,\ e^{\int p(x)dx}r(x) = (\sec x)(2\,\mathrm{sen}x\cos x) = 2\,\mathrm{sen}x,$$

y la solución general de la ecuación es

$$y(x) = \cos x\int 2\,\mathrm{sen}x dx + c\cos x = c\cos x - 2\cos^2 x.$$

De esta última ecuación, y de la condición inicial, $1 = c - 2$, con lo que $c = 3$ y la solución del problema es

$$y(x) = 3\cos x - 2\cos^2 x.$$

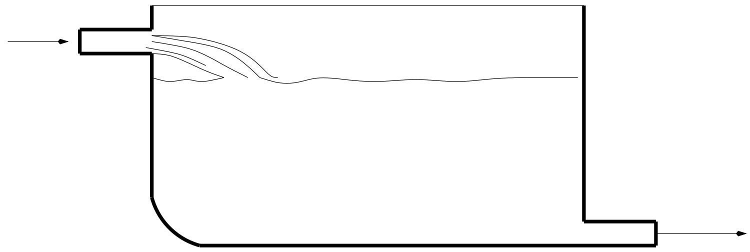

Figura 5: Tanque del Ejemplo 2.17

Ejemplo 2.17 El tanque de la Figura 2.17 contiene 200 litros de agua, en los cuales se han disuelto 40 gramos de sal. Al tanque se le agregan, por minuto, 5 litros de salmuera, conteniendo cada litro 2 gramos de sal disuelta. La solución se mantiene perfectamente mezclada, de modo que su concentración (masa de sal por unidad de volumen) se mantiene uniforme en todo el interior del tanque. Si la solución sale del tanque a la misma velocidad a la que entra, encontrar la cantidad de sal $y(t)$ en el tanque, para cualquier instante t

Solución. a) Modelado: la variación de y respecto de t, $y' = \frac{dy}{dt}$ es igual a la cantidad de sal entrante, $5 \times 2 = 10$ gr/min., menos la cantidad saliente. Esta es $(5/200) \times y(t) = 0.025y(t)$ gr/min. ya que $y(t)$ es la cantidad total de sal en el tanque, y 5 gr/200 l. es la fracción de volumen que sale por minuto. Por lo tanto, el modelo es $y' = 10 - 0.025y$, y el problema a valores iniciales resultante es

$$y' + 0.0025y = 10, \qquad y(0) = 40.$$

b) Resolución de la ecuación: en (37), con t en vez de x, se tiene $p = 0.0025$ y $r = 10$. Por lo tanto, en (35), $\psi_h(t) = e^{-0.025t}$, y de (37), resulta

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-.025t} \int 10e^{0.025t} dt + ce^{-0.025t} \\ &= e^{-0.025t} \frac{10}{0.025} + ce^{-0.025t} \\ &= 400 + ce^{-0.025t}. \end{aligned}$$

De la condición inicial $y(0) = c + 400 = 40$ obtenemos $c = -360$, con lo que la solución al problema es

$$y(t) = 400 - 360\, e^{-0.025t} \text{ gr.}$$

2.3.1 Reducción a la forma lineal. Ecuación de Bernoulli

Algunas ecuaciones no lineales pueden reducirse a la forma lineal. Una de las de mayor importancia en las aplicaciones es la *ecuación de Bernoulli* que trataremos aquí; algunas de las otras las incluiremos en los problemas. La ecuación de Bernoulli es de la forma

$$y' + p(x)y = g(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \text{ un número real.} \tag{39}$$

Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, la ecuación es lineal. De otra forma es no lineal, y si hacemos

$$u(x) = [y(x)]^{1-\alpha},$$

diferenciamos u y sustituimos y' según (39), se obtiene

$$\begin{aligned} u' &= (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)y^{-\alpha}(gy^{\alpha} - py) \\ &= (1-\alpha)(g - py^{1-\alpha}) = (1-\alpha)(g - pu), \end{aligned}$$

con lo que resulta la ecuación *lineal* en u,

$$u' + (1-\alpha)\,p\,u = (1-\alpha)g. \tag{40}$$

Ejemplo 2.18 Resolver $y' + y = x/y$.
Solución. En este caso $\alpha = -1$, con lo que de (40) obtenemos

$$u' - 2u = -2x,$$

y de acuerdo con (37) se tiene (verificarlo)

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \frac{1}{2} + ce^{2x}, \quad \text{y entonces} \\ y(x) &= u(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + e^{2x}}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.19 Ecuación de Verhulst. Modelo logístico de la población. Resolver la ecuación de Verhulst:

$$y' - ay = -by^2, \quad a\,\text{y}\,b\,\text{constantes positivas.} \tag{41}$$

donde $y = y(t)$, t es el tiempo, e $y' = \frac{dt}{dt}$.
Solución. En este caso $\alpha = 1$, con lo que $u = y^{-1}$, y diferenciando, y sustituyendo y de acuerdo con (41), obtenemos

$$\begin{aligned} &u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(-by^2 + ay) = b - ay^{-1} \quad \Rightarrow \\ &u' + au = b, \end{aligned}$$

y, nuevamente por (37), se obtiene

$$u(t) = ce^{-at} + \frac{b}{a}.$$

Por lo tanto, la solución general de (41) es

$$y(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{\frac{b}{a} + ce^{-at}}, \tag{42}$$

y, directamente de (40), se ve que $y \equiv 0$ es tambien una solución.
La ecuación (42) es la *ley logística de crecimiento de la población.* Cuando $b = 0$ se tiene la *ley de Malthus* de crecimiento exponencial $y(t) = e^{at}/c$. El factor $-by^2$ actúa como un freno que evita que la población crezca indefinidamente.
Supongamos que la población inicial es $y(0) = y_0$; reemplazando en (42) se obtiene

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{\frac{b}{a} + c} \quad \Rightarrow c = \frac{1}{y_0} - \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{1}{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right)e^{-at}}. \end{aligned}$$

De esta última ecuación se ve que para poblaciones iniciales pequeñas ($0 < y_0 < a/b$) la población crece monótonamente hasta alcanzar el valor límite a/b. Para poblaciones iniciales grandes ($a/b < y_0$) la población decrece monótonamente hasta alcanzar el mismo límite (Figura 6).

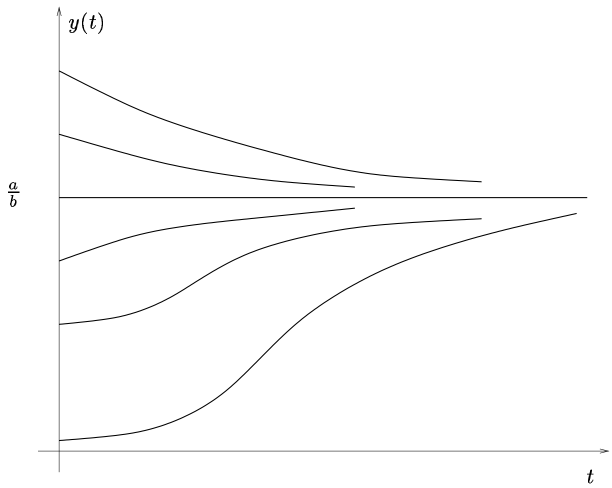

Figura 6: Modelo logístico de la población

Ejercicios

1. Encontrar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones diferenciales.

   (a) $y' + 2y = 6e^x$
   (b) $y' + 3y = e^{-3x}$
   (c) $y' - 4y = 2x - 4x^2$
   (d) $y' = (y - 1)\cot x$
   (e) $xy' + 2y = 9x$
   (f) $x^2y' + 2xy = \operatorname{senh} 3x$

2. Resolver los siguientes problemas a valores iniciales.

   (a) $y' + y = (x + 1)^2, \quad y(0) = 3$
   (b) $y' + x^3y = 4x^3, \quad y(0) = -1$
   (c) $y' - 2y/x + x^2e^x, \quad y(2) = 0$
   (d) $y' + ky = e^{-kx}, \quad y(0) = 0.7$

3. Resolver

   (a) $y' + y = x/y$.
   (b) $2\,x\,y\,y' + (x - 1)y^2 = x^2e^x$.

4. Una ecuación de *Riccati* es de la forma $y' + p(x)y = g(x)y^2 + h(x)$. Demostrar que si se conoce una solución $y = v$, se la puede reducir a una ecuación de Bernoulli en la variable w si se hace $w = y - v$. Aplicar este método a la ecuación $y' = x^3(y - x)^2 + x^{-1}y$, si una solución es $y = x$.

5. **Movimiento de un bote** Dos personas navegan en un bote, y el peso combinado de éste y de las personas es de 500 kg. Suponga que el motor ejerce una fuerza constante de 200 nt, y que la resistencia R del agua es proporcional a la velocidad v del bote, siendo la constante de proporcionalidad $k = 10$ nt seg/m. Obtener la ecuación diferencial para $v(t)$. Encontrar $v(t)$ que satisfaga $v(0) = 0$ y la máxima velocidad v_∞ a la que el bote puede viajar (prácticamente después de un largo tiempo). Si el bote parte del reposo, ¿cuánto tardará en alcanzar una velocidad de $0.9\,v_\infty$ y qué distancia recorrerá en ese lapso?

6. **Ley de enfriamiento de Newton** Una bola de cobre se calienta a una temperatura $T(0) = T_0$ y luego se la deja en un ambiente cuya temperatura es T_a. Sabiendo que la velocidad de cambio $\frac{dT}{dt}$ de la temperatura $T(t)$ de la bola es proporcional a la diferencia de temperatura entre ella y el ambiente (ley de Newton), encontrar la ley de variación de la temperatura de la bola.

7. **Secreción hormonal** La secreción hormonal puede ser modelada por la ley

$$y' = a - b\,\cos\frac{2\pi t}{24} - ky,$$

estando t medido en horas, siendo $y(t)$ la cantidad de una cierta hormona en la sangre y a la velocidad promedio de secreción. El factor $b\cos(\pi t/12)$ modela el ciclo de secreción diario de 24 horas, y ky modela la velocidad de eliminación de la hormona de la sangre. Encontrar la solución cuando $a = b = k = 1$ e $y(0) = 2$.

3 Ecuaciones diferenciales de segundo orden

En esta sección trataremos las ecuaciones que siguen en complejidad a las de primer orden: las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Haremos un tratamiento relativamente exhaustivo de las mismas, ya que muchos de los resultados que presentaremos se extienden fácilmente a las ecuaciones de orden superior.

3.1 Teorema de existencia y unicidad para la ecuación de segundo orden

Una ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{43}$$

o bien, si no está resuelta con respecto a la derivada de mayor orden,

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

El teorema de existencia y unicidad para la ecuación de segundo orden se puede obtener fácilmente llevándola a un sistema de ecuaciones y aplicando el Teorema 1.1 (teorema de existencia y unicidad para sistemas).
En efecto, si en la ecuación (43) se consideran como funciones desconocidas no solo a $y = y_1$, sino también a $y' = y_2$, la ecuación (43) se sustituye por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & y_2, \\ y_2' & = & f(x, y_1, y_2); \end{array} \right. \tag{44}$$

es decir, si

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (y_1, y_2), && (45)\\ \mathbf{f}(x,\mathbf{y}) &= (y_2, f(x, y_1, y_2)), && (46)\end{aligned}$$

la ecuación (43) se sustituye por el sistema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}) \tag{47}$$

siendo posible aplicar el Teorema 1.1. Según éste, si $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ es continua en la región $\mathcal{R}$ considerada y se satisfacen allí

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}(x,\mathbf{y}) \right\| < K, \quad j = 1, 2,$$

con K una constante, entonces existe una única solución del sistema (47) que satisface la condición inicial $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$.
Ahora bien, como

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{y}(x_0) = (y(x_0), y'(x_0))$, si $\mathbf{y_0} = (\alpha_1, \alpha_2)$ tenemos el siguiente

Teorema 3.1 Si en un entorno $\mathcal{R}$ de las condiciones iniciales $(x_0, \alpha_1, \alpha_2)$ la función f es continua en todos sus argumentos y satisface allí, para alguna constante K,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \right| \leq K, \tag{48}$$

entonces existe una única solución de (43) que satisface las condiciones

$$y(x_0) = \alpha_1, \; y'(x_0) = \alpha_2. \tag{49}$$

Observación 3.1 Si el segundo miembro de (43) satisface, en cierta región de variación de sus argumentos, las condiciones del Teorema 3.1, entonces la solución general de (43) depende de 2 parámetros (α_1, α_2), en calidad de los cuales se pueden tomar por ejemplo, en el punto x_0, los valores y_0 e y_0' de la función buscada y de su derivada, respectivamente. Además, si fijamos $\alpha_1 = y_0,\ \alpha_2 = y_0'$, o sea, damos el punto (x_0, y_0) y la dirección de la tangente a la curva integral buscada en dicho punto, estas condiciones determinarán una sola curva integral.

Ejemplo 3.1 Si por ejemplo consideramos la ecuación del movimiento rectilíneo de un punto de masa m sometido a una fuerza $f(t, x) = k\,t$,

$$mx'' = k\,t,$$

por integración obtenemos $x(t) = k/2mt^2 + \alpha_2 t + \alpha_1$. Tomando $\alpha_1 = x(t_0)$ la posición inicial y $\alpha_2 = x'(t_0)$ la velocidad inicial, se determina una ley única de movimiento.

3.2 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden es una ecuación lineal con respecto a la función desconocida y a sus derivadas y, por lo tanto, tiene la forma

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \tag{50}$$

donde a_0, a_1, a_2 y b son funciones definidas en un intervalo I. A los puntos donde $a_0(x) = 0$ se los llama *puntos singulares*, y con frecuencia se requieren consideraciones especiales acerca de la ecuación en esos puntos. Tales consideraciones involucran la teoría de Variable Compleja, y por lo tanto no trataremos este problema aquí. Por consiguiente, supondremos que $a_0(x) \neq 0$ en I y entonces, dividiendo (50) por a_0 podemos obtener una ecuación de la misma forma, pero en la cual a_0 queda reemplazada por la constante 1. Así, consideraremos la ecuación

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \tag{51}$$

y en lo que sigue, adoptaremos la siguiente hipótesis
H1. Las funciones $a_1(x), a_2(x)$ y $b(x)$ son *continuas* en un intervalo I que supondremos, sin pérdida de generalidad, de la forma $I = (a, b)$.

Observación 3.2 Si vale **H1**, entonces, en un entorno cualquiera de las condiciones iniciales $y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \alpha_2$, donde x_0 es cualquier punto del intervalo I, se satisfacen las condiciones del Teorema 3.1, pues en este caso

$$f(x, y, y') = b(x) - a_1(x)y' - a_2(x)y,$$

es claramente continua en todos sus argumentos, y además las deeerivadas parciales de f respecto de y e y' son acotadas en cualquier intervalo cerrado $I^\star \subset I$ centrado en x_0, pues

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |-a_2(x)|, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| = |-a_1(x)|,$$

y $|a_j(x)|$ está acotada en $I^\star$, al ser una función continua. Basta pues tomar K como el máximo de esas cotas para que las hipótesis del teorema se verifiquen.
A partir de ésto se puede deducir (no lo haremos aquí) que dadas constantes arbitrarias α_2 y α_2 y un punto $x_0 \in I$, existe una única solución $\phi(x)$ de (51) definida en I que verifica $\phi(x_0) = \alpha_1$ y $\phi'(x_0) = \alpha_2$.

Si $b(x) = 0$ para toda x en I, decimos que (50) es una ecuación *homogénea*, mientras que si $b(x) \neq 0$ para algún x en I, se dice que es *no homogénea.*
Consideremos $\mathcal{C}^n(I)$ el espacio de las funciones que admiten derivada n-ésima continua en I (simbolizaremos con $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}^0(I)$ el espacio de funciones continuas en I).
Entonces, si definimos $L : \mathcal{C}^2(I) \to \mathcal{C}(I)$ por

$$L(y) = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y, \tag{52}$$

donde, por abuso de notación hemos omitido la dependencia respecto de x de $L(y), y$ e y', resulta claro que L es una transformación lineal que llamaremos *operador diferencial lineal de segundo orden.* En términos de esta transformación, la ecuación (50) puede escribirse:

$$L(y) = b(x).$$

3.2.1 La ecuación lineal homogénea

De acuerdo con lo precedente, la ecuación lineal homogénea

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{53}$$

se escribirá

$$L(y) = 0.$$

Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{H}_2$ de soluciones de la ecuación lineal homogénea (53), al ser el núcleo de una transformación lineal, es un subespacio de $\mathcal{C}^2(I)$.
En lo que sigue, veremos que este subespacio tiene dimensión 2 por lo que si encontramos un conjunto de dos funciones ϕ_1 y ϕ_2 de $\mathcal{H}_2$ linealmente independientes en $\mathcal{C}^2(I)$, toda otra solución ϕ de (53) se escribirá, para dos escalares c_1, c_2, en la forma

$$\phi = c_1\,\phi_1 + c_2\,\phi_2.$$

Ejemplo 3.2 Las funciones $\psi_1(x) = e^x$ y $\psi_2(x) = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y'' - y = 0 \tag{54}$$

para todo x (es decir, podemos tomar $I = (a, b)$, con a y b cualesquiera), pues para $\psi_1(x) = e^x$, se tiene $(e^x)'' - e^x = 0$, y lo mismo para $\psi_2(x) = e^{-x}$.
Si ψ es una solución de (54) que verifica $\psi(x_0) = \alpha_1$ y $\psi'(x_0) = \alpha_2$, consideremos $\tilde{\psi}(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$, con c_1 y c_2 a determinar, que verifique $\tilde{\psi}(x_0) = \alpha_1$, $\tilde{\psi}'(x_0) = \alpha_2$. Se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \tilde{\psi}(x_0) = c_1\psi_1(x_0) + c_2\psi_2(x_0) = c_1 e^{x_0} + c_2 e^{-x_0} \\
\alpha_2 &= \tilde{\psi}'(x_0) = c_1\psi_2'(x_0) + c_2\psi_2'(x_0) = c_1 e^{x_0} - c_2 e^{-x_0}
\end{aligned}$$

y resolviendo en c_1 y c_2 obtenemos

$$c_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} e^{-x_0}, \quad c_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} e^{x_0}.$$

Ahora bien, tanto ψ como $\tilde{\psi}$ verifican (53) y satisfacen las *mismas* condiciones iniciales. Por lo tanto, de acuerdo a la Observación 3.2, $\psi = \tilde{\psi}$ y por lo tanto

$$\psi(x) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} e^{-x_0} e^x + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} e^{x_0} e^{-x}.$$

A partir de este ejemplo puede observarse que si se tiene una base $\{\phi_1, \phi_2\}$ de $\mathcal{H}_2$, entonces una solución *general* de (53) es de la forma

$$y = c_1\,\phi_1 + c_2\,\phi_2 \tag{55}$$

con constantes *arbitrarias* c_1 y c_2, y que toda solución *particular* de la ecuación (53) se obtiene asignando valores específicos a estas constantes. Tal asignación se dará en términos de los valores de la solución particular y de su derivada en un punto arbitrario x_0 del intervalo I. El teorema que sigue muestra que $dim\mathcal{H}_2 = 2$, y su demostración, que se puede encontrar en el Apéndice, se basa en exhibir una base de $\mathcal{H}_2$ con 2 elementos.

Teorema 3.2 El subespacio $\mathcal{H}_2$ tiene dimensión 2.

Ejemplo 3.3 Consideremos nuevamente la ecuación (54) del Ejemplo 3.2. Es inmediato comprobar que $\phi_1(x) = \cosh(x - x_0)$, $\phi_2(x) = \operatorname{senh}(x - x_0)$ son soluciones de esta ecuación. Además

$$\begin{aligned}
\phi_1(x_0) &= \cosh(0) = 1,\ \phi_1'(x_0) = \operatorname{senh}(0) = 0, \\
\phi_2(x_0) &= \operatorname{senh}(0) = 1,\ \phi_2'(x_0) = \cosh(0) = 1,
\end{aligned}$$

y por lo tanto forman una base de soluciones de (54). Se sigue que si ϕ es una solución de esta ecuación, entonces

$$\phi(x) = \phi(x_0)\cosh(x - x_0) + \phi'(x_0)\operatorname{senh}(x - x_0).$$

Ejemplo 3.4 Consideremos en el intervalo $I = (0.5, 2)$ la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0;$$

si proponemos una solución de la forma $y = x^r$ con r una constante, y la introducimos en la ecuación, se ve fácilmente que debe verificarse en I

$$r(r-1)x^{r-2} + rx^{r-2} - x^{r-2} = 0,$$

y por lo tanto, r debe cumplir

$$r(r-1) + r - 1 = (r-1)(r+1) = 0.$$

Por consiguiente, dos soluciones de la ecuación en I son

$$\psi_1(x) = x, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{x}$$

que son linealmente independientes, ya que

$$\begin{aligned}
c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) &= c_1 x + c_2\frac{1}{x} = 0\ \forall x \in I \quad \Rightarrow \\
c_1\psi_1'(x) + c_2\psi_2'(x) &= c_1 - \frac{c_2}{x^2} = 0\ \forall x \in I.
\end{aligned}$$

En particular, para $x = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= 0 \\
c_1 - c_2 &= 0,
\end{aligned}$$

con lo que $c_1 = c_2 = 0$.
La base $\{\phi_1, \phi_2\}$ de $\mathcal{H}_2$ que verifica (125) para $x_0 = 1$ es

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad \phi_2(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

La demostración del Teorema 3.2 y los ejemplos anteriores muestran que el tener la base $\mathcal{B} = \{\phi_1, \phi_2\}$ de $\mathcal{H}_2$ que verifica

$$\begin{array}{llll} \phi_1(x_0) & = 1, & \phi_1'(x_0) & = 0 \\ \phi_2(x_0) & = 0, & \phi_2'(x_0) & = 1. \end{array} \tag{56}$$

facilita la determinación de los coeficientes que expresan una solución particular de (53), pero que por otra parte no es inmediato obtenerla. Interesa tener algún criterio que nos permita establecer si un par de soluciones cualesquiera de (53) es una base de $\mathcal{H}_2$ y si lo es, obtener en forma sistemática los coeficientes anteriormente citados. El siguiente resultado, cuya demostración puede hallarse en el Apéndice, da tal criterio.

Teorema 3.3 Consideremos dos soluciones ψ_1 y ψ_2 de (53) en I. Entonces $\mathcal{B}' = \{\psi_1, \psi_2\}$ es una base de $\mathcal{H}_2$ si y solo si existe $x_0 \in I$ tal que el *Wronskiano*

$$W(\psi_1, \psi_2)(x_0) = \det \begin{bmatrix} \psi_1(x_0) & \psi_2(x_0) \\ \psi_1'(x_0) & \psi_2'(x_0) \end{bmatrix}$$

es diferente de 0. Además, si para algún $x_0 \in I$, $W(\psi_1, \psi_2)(x_0) \neq 0$, entonces $W(\psi_1, \psi_2)(\tilde{x}_0) \neq 0 \, \forall \, \tilde{x}_0 \in I$.

Observación 3.3 A continuación veremos una forma directa de determinar los coeficientes en la base $\mathcal{B}'$ de una solución ϕ de (53) que satisface $\phi(x_0) = \alpha_1$, $\phi'(x_0) = \alpha_2$.
Sean $\mathcal{B}$ la base que verifica (56) y $M = \{m_{ij}\}_{1 \le i,j \le 2}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Entonces para todo $x \in I$ se verifica

$$\begin{array}{l} \psi_1(x) = m_{11}\phi_1(x) + m_{21}\phi_2(x) \\ \psi_2(x) = m_{12}\phi_1(x) + m_{22}\phi_2(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \psi_1'(x) = m_{11}\phi_1'(x) + m_{21}\phi_2'(x) \\ \psi_2'(x) = m_{12}\phi_1'(x) + m_{22}\phi_2'(x), \end{array}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{bmatrix} M.$$

Si tomamos ahora $x = x_0$, queda

$$\begin{bmatrix} \psi_1(x_0) & \psi_2(x_0) \\ \psi_1'(x_0) & \psi_2'(x_0) \end{bmatrix} = IM = M.$$

Supongamos ahora que $\phi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, entonces como $\phi = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2$ y M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, reulta

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \psi_1(x_0) & \psi_2(x_0) \\ \psi_1'(x_0) & \psi_2'(x_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.5 Consideremos nuevamente las soluciones $\{\psi_1, \psi_2\} = \{e^x, e^{-x}\}$ de la ecuación (54) del Ejemplo 3.2. En este caso,

$$M = \begin{bmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{bmatrix},$$

$W(\psi_1,\psi_2)(x_0)=-1/2$, por lo que forman base, y como

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{e^{-x_0}}{2} & \frac{e^{-x_0}}{2} \\ \\ \frac{e^{x_0}}{2} & \frac{-e^{x_0}}{2} \end{bmatrix}$$

si ψ es una solución de (54) que verifica $\phi(x_0)=\alpha_1$, $\phi'(x_0)=\alpha_2$, $\phi=c_1\,\psi_1+c_2\,\psi_2$ para

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{e^{-x_0}}{2} & \frac{e^{-x_0}}{2} \\ \\ \frac{e^{x_0}}{2} & \frac{-e^{x_0}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}e^{-x_0} \\ \\ \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}e^{x_0} \end{bmatrix},$$

que es el resultado al que habíamos llegado previamente.

Ejemplo 3.6 Verificar que $\{\psi_1,\psi_2\}=\{x^{-1/2},x^3\}$ es una base de soluciones de

$$x^2\,y''-1.5\,x\,y'-1.5\,y=0, \tag{57}$$

y resolver el problema a valores iniciales $y(1)=1$, $y'(1)=-4$.
Solución. Consideremos las soluciones para $x>0$, e $I=(a,b)$, $0<a<1<b$. Es inmediato verificar que ψ_1 y ψ_2 son soluciones de (57) en I. Además

$$M=\begin{bmatrix} x^{-1/2} & x^3 \\ -\frac{1}{2}x^{-3/2} & 3\,x^2 \end{bmatrix}$$

y $\det M\ =\ 7/2\,x^{3/2}$. Por lo tanto $W(\psi_1,\psi_2)(x)\neq 0\ \forall\, x\in I$, con lo que $\{\psi_1,\psi_2\}$ es una base de soluciones. Tomando $x_0=1$, de acuerdo con la Observación 3.3,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución es $\phi(x)=2\,x^{-1/2}-x^3$.

Observación 3.4 La hipótesis (implícita) en Teorema 3.3, que ψ_1 y ψ_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea (53), es fundamental para probar a partir de la no anulación del Wronskiano que son linealmente independientes. Si esa hipótesis no se cumple, que sean linealmente independientes en un intervalo I *no es equivalente* a que su Wronskiano no se anule allí, como muestra el siguiente

Ejemplo 3.7 Consideremos las siguientes funciones definidas en $I=(0,2)$:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \begin{cases} (x-1)^3 & \text{s} \quad 0<x\leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1<x<2 \end{cases} \\ \psi_2(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0<x\leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{s} \quad 1<x<2 \end{cases}\end{aligned}$$

Evidentemente

$$W(\psi_1,\psi_2)(x)=\det\begin{bmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{bmatrix}\equiv 0, \qquad 0<x<2$$

ya que en el intervalo $0 < x < 1$, la segunda columna está formada por ceros, y para $1 \leq x < 2$ la primera columna se compondrá también de ceros. Sin embargo, las funciones ψ_1 y ψ_2 son linealmente independientes en I, ya que

$$c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) = 0 \;\forall x \in I \;\Rightarrow c_1(x-1)^3 = 0 \forall x \in (0,1] \;\Rightarrow c_1 = 0.$$

Análogamente

$$c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) = 0 \;\forall x \in I \;\Rightarrow c_2(x-1)^3 = 0 \forall x \in (1,2) \;\Rightarrow c_2 = 0.$$

Sin embargo, lo que es inmediato comprobar es que si el Wronskiano de ψ_1 y ψ_2 no se anula en algún punto x_0 de I, entonces estas funciones son linealmente independientes en I. Resumiendo:
a) $W(\psi_1, \psi_2)(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$, implica que ψ_1 y ψ_2 son linealmente independientes en I;
b) si ψ_1 y ψ_2 son soluciones de (53) en I y $W(\psi_1, \psi_2)(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in I$, $W(\psi_1, \psi_2)(x) \equiv 0$ en I y además ψ_1 y ψ_2 son linealmente dependientes en I.

Ejercicios

1. Verifique que las funciones dadas forman una base de soluciones de la ecuación dada y resuelva el problema a valores iniciales dado.
   (a) $y'' - 9\,y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0; \quad \{e^{3x},\ e^{-3x}\}$
   (b) $y'' + \omega^2 y = 0 \;\; (\omega \neq 0), \quad y(0) = -1.5,\ y'(0) = 0; \quad \{\cos\omega x,\ \operatorname{sen}\omega x\}$
   (c) $y''y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 5; \quad \{x^2, x^2 \ln x\}$

2. Si ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes en el intervalo I, ¿son linealmente independientes en un intervalo $I^\star \subset I$?

3. ¿ Son las siguientes funciones linealmente independientes en el intervalo dado?
   (a) $\{x+1, x-1\}, \quad (0 < x < 1)$
   (b) $\{\operatorname{sen} 2x,\ \operatorname{sen} x\, \cos x\}$, cualquier intervalo.
   (c) $\{|x|x, x^2\}, \quad (0 < x < 1)$
   (d) $\{\cosh x, \cosh 2x\}$, cualquier intervalo.

Reducción del orden: cómo obtener una segunda solución
En el proceso de encontrar una base de $\mathcal{H}_2$, a menudo es posible obtener una solución ψ_1 de (53) ya sea por tanteo o por algún otro método, en cuyo caso se puede utilizar esta información para obtener otra solución ψ_2 linealmente independiente de ψ_1. Para ello, se propone $\psi_2 = u\psi_1$, donde u es una función a determinar; por lo tanto, si ψ_2 va a ser una solución de (53), debe verificar

$$\begin{aligned}
0 &= \psi_2'' + a_1(x)\psi_2' + a_2(x)\psi_2 \\
&= (u\psi_1)'' + a_1(x)(u\psi_1)' + a_2(x)u\psi_1 \\
&= (u''\psi_1 + 2u'\psi_1' + u\psi_1'') + a_1(x)(u'\psi_1 + u\psi_1') + a_1(x)(u\psi_1)' + a_2(x)u\psi_1 \\
&= u(\psi_1'' + a_1(x)\psi_1' + a_2(x)u\psi_1) + u''\psi_1 + u'(2\psi_1' + a_1(x)\psi_1) \\
&= uL(\psi_1) + u''\psi_1 + u'(2\psi_1' + a_1(x)\psi_1) \\
&= u''\psi_1 + u'(2\psi_1' + a_1(x)\psi_1)
\end{aligned}$$

pues $\psi_1 \in \mathcal{H}_2$. Llamando $v = u'$, obtenemos

$$\psi_1 v' + (2\psi_1' + a_1(x)\psi_1)v = 0,$$

que es una ecuación de *primer orden.* Por lo tanto, si podemos encontrar una solución v de esta ecuación, entonces integrando obtendremos u; de aquí el nombre de *reducción del orden* con el que se conoce a este método.

Sea I un intervalo en el cual $\psi_1(x)$ no se anula; en ese intervalo podemos escribir la ecuación anterior en la forma (34):

$$v' + \left(\frac{2\psi_1'}{\psi_1} + a_1(x)\right) v = 0,$$

cuya solución en I es, de acuerdo con (35),

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-\int\left(\frac{2\psi_1'}{\psi_1}+a_1(x)\right)dx} \\ &= \frac{1}{\psi_1^2}e^{-\int a_1(x)\,dx}, \end{aligned} \tag{58}$$

ya que

$$\int \frac{2\psi_1'}{\psi_1}\,dx = \ln \psi_1^2(x).$$

Finalmente, $u = \int v\,dx$, es decir es una primitiva de v (notar que tomamos la constante de integración igual a cero ¿por qué?

Ejemplo 3.8 Es fácil comprobar por inspección que $\psi_1(x) = x$ es una solución de

$$(x^2-1)y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = 0.$$

Encontrar una segunda solución linealmente independiente de ésta.

Solución. *Cuidado*, primero se debe escribir la ecuación en la forma (53), ya que para esta forma se obtuvo la solución (58); tenemos entonces, si $\tilde{I}$ es un intervalo que no contiene al 1 ni al -1, y $x \in \tilde{I}$,

$$y'' - \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{x^2-1}y = 0,$$

y como

$$a_1(x) = \frac{-2x}{x^2-1}, \qquad -\int a_1(x)\,dx = \int \frac{2x}{x^2-1}dx = \ln|x^2-1|.$$

Por lo tanto, si $I \subset \tilde{I}$ no contiene al 0, allí $v = x^{-2}(x^2-1) = 1 - x^{-2}$ y $u = x + x^{-1}$. Por lo tanto, una segunda solución linealmente independiente de ψ_1 es $\psi_2(x) = u\psi_1(x) = (x+x^{-1})x = x^2+1$.

Ejercicios

1. Comprobar que la solución ψ_2 obtenida por el método de reducción del orden es efectivamente linealmente independiente de ψ_1 en cualquier intervalo I donde esta no se anula.

2. Compruebe que en cada caso la función ψ_1 dada es solución de la ecuación diferencial, y obtenga otra solución ψ_2 linealmente independiente de la primera.

   (a) $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad \psi_1 = e^x$
   (b) $(1-x)^2y'' - 4\,(1-x)y' + 2y = 0, \quad \psi_1 = (1-x)^{-1}, \quad x \neq 1$
   (c) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0, \quad \psi_1 = x^{-1/2}\cos x, \quad x > 0$

Ecuación lineal homogénea a coeficientes constantes
No es sencillo en general obtener una base de soluciones de (53); la excepción es el caso en que a_1 y a_2 son constantes. Consideraremos ahora este caso, es decir, estudiaremos la ecuación

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{59}$$

Dado que a_1 y a_2 son constantes, se las puede considerar como funciones continuas que toman un único valor sobre el eje real, por lo que tendremos, en este caso, $I = \mathbb{R}$. Recordemos que la ecuación de primer orden con coeficientes constantes $y' + ay = 0$ tiene una solución e^{-ax}. La constante $-a$ en esta solución es la raíz de la ecuación $r + a = 0$. Dado que si derivamos k veces, $k \geq 1$ la función e^{rx}, con r una constante, obtenemos $r^k e^{rx}$, es razonable suponer que para una constante r adecuada, e^{rx} será solución de (59) (ya se vió que esto es cierto para ecuaciones de primer orden). Si reemplazamos y por e^{rx} en (59), obtenemos

$$L(e^{rx}) = (r^2 + a_1 r + a_2)e^{rx} = p(r)e^{rx}. \tag{60}$$

Llamaremos a $p(r) = r^2 + a_1 r + a_2$ *polinomio característico* de L, o de la ecuación (59). Notar que $p(r)$ puede obtenerse a partir de $L(y)$ sustituyendo $y^{(k)}$ por r^k, empleando la convención $y^{(0)} = y$ y $r^0 = 1$.
El siguiente teorema, cuya demostración está en el Apéndice, da un método para hallar una base de soluciones de (59).

Teorema 3.4 Dada la ecuación (59), si r_1 y r_2 son dos raíces diferentes del polinomio característico $p(r)$, entonces

$$\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$$

es una base $\mathcal{H}_2$. Si en cambio r_1 es una raíz doble de $p(r)$, una base de $\mathcal{H}_2$ será

$$\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}.$$

Ejemplo 3.9 Consideremos la ecuación $y'' + y' - 2y = 0$, cuyo polinomio característico es $p(r) = r^2 + r - 2 = 0$. Dado que las raíces de este polinomio son -2 y 1, toda solución ϕ tiene la forma

$$\phi(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}.$$

Ejemplo 3.10 Resolver $y'' + 8y' + 16y = 0$.
Solución. El polinomio característico $p(r) = r^2 + 8r + 16$ tiene la raíz doble $r = -4$. Por lo tanto una base de soluciones es $\{e^{-4x}, xe^{-4x}\}$, y la correspondiente solución general es

$$\phi(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-4x}.$$

Ejemplo 3.11 Como un tercer ejemplo consideremos la ecuación $y'' + \omega^2 y = 0$, donde ω es una constante positiva. El polinomio característico es $p(r) = r^2 + \omega^2$, cuyas raíces son $i\omega$ y $-i\omega$. En consecuencia, una base de $\mathcal{H}_2$ es

$$\mathcal{B}_C = \{e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}\}.$$

Por otra parte, es un hecho conocido que

$$\begin{aligned}\cos\omega x &= \frac{1}{2}e^{i\omega x}+\frac{1}{2}e^{-i\omega x} \quad \text{y}\\ \operatorname{sen}\omega x &= \frac{1}{2i}e^{i\omega x}-\frac{1}{2i}e^{-i\omega x};\end{aligned}$$

en consecuencia, $\{\cos\omega x, \operatorname{sen}\omega x\}\subset\mathcal{H}_2$, y es fácil ver que son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. Por lo tanto $\mathcal{B}_R=\{\cos\omega x, \operatorname{sen}\omega x\}$ también es una base de $\mathcal{H}_2$.

Observación 3.5 El Ejemplo 3.11 es un caso particular del siguiente resultado general. Si a_1 y a_2 en (59) son números reales, entonces las raíces r_1 y r_2 de $p(r)$ pueden ser reales y distintas, reales e iguales o complejas conjugadas. En este último caso, si

$$r_1=\alpha+i\beta, \quad r_2=\alpha-i\beta,$$

de acuerdo a lo visto anteriormente una base de $\mathcal{H}_2$ es

$$\mathcal{B}_C=\{e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}\}$$

Procediendo como en el Ejemplo 3.11, es fácil ver que otra base es

$$\mathcal{B}_R=\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\}.$$

Por lo tanto, dada $\phi(x)$ una solución de (59) con condiciones iniciales reales, si

$$\phi(x)=c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x}=d_1e^{\alpha x}\cos\beta x+d_2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,$$

deben ser d_1 y d_2 números *reales* y c_1 y c_2 números *complejos conjugados*, pues $\phi(x)$ es necesariamente una función a valores *reales*, ya que es solución de una ecuación diferencial a coeficientes reales y verifica condiciones iniciales también reales. (La demostración de este hecho se propone como ejercicio).
En la práctica es más conveniente trabajar con la base $\mathcal{B}_R$, aunque en ciertos casos (particularmente en la solución del problema no homogéneo), $\mathcal{B}_C$ es más cómoda, como veremos más adelante.

Ejemplo 3.12 Resolver el siguiente problema a valores iniciales

$$y''+2y'+5y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=5.$$

Solución. En este caso $p(r)=r^2+2r+5$ tiene raíces $r_1=-1+2i$, $r_2=-1-2i$. Por lo tanto, tenemos

$$\mathcal{B}_C=\{e^{-x+2xi}, e^{-x-2xi}\}, \quad \mathcal{B}_R=\{e^{-x}\cos 2x, e^{-x}\operatorname{sen}2x\}.$$

Entonces, si

$$\phi(x)=c_1e^{-x+2xi}+c_2e^{-x-2xi}=d_1e^{-x}\cos 2x+d_2e^{-x}\operatorname{sen}2x,$$

de acuerdo con la Observación 3.3, tendremos

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1-2i & -1+2i\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1+3i}{2}\\ \frac{1-3i}{2}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}d_1\\ d_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Encontrar una solución general que involucre funciones reales de las siguientes ecuaciones

   (a) $y'' + 25y = 0$

   (b) $y'' + 6y' + 9y = 0$

   (c) $8y'' - 2y' - y = 0$

   (d) $2y'' + 10y' + 25y = 0$

   (e) $y'' + 2y' = 0$

2. Resolver los siguientes problemas a valores iniciales

   (a) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 10$

   (b) $y'' - 6y' + 18y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$

   (c) $2y'' + y' - y = 0, \quad y(4) = e^2 - e^{-4}, \quad y'(4) = \frac{1}{2}e^2 + e^{-4}$

Ejemplo 3.13 Oscilaciones libres (sistema masa-resorte)
En este ejemplo consideraremos una importante aplicación de la ecuación lineal homogénea a coeficientes constantes a la mecánica: estudiaremos el movimiento de una masa vibrando bajo la acción de un resorte.
Consideremos un resorte de constante elástica $k > 0$ suspendido verticalmente de un soporte fijo, y de cuyo extremo libre pende un cuerpo cuya masa m es lo suficientemente grande como para despreciar la masa del resorte (Figura 7)
Para determinar el movimiento del sistema mecánico, se deben considerar las fuerzas que actúan

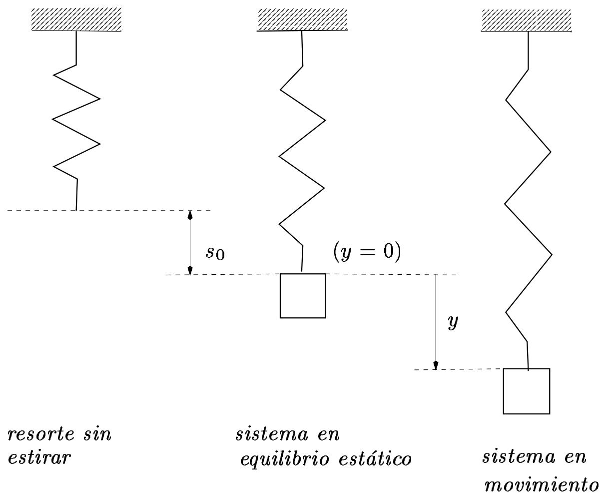

Figura 7: Modelo mecánico masa-resorte

sobre el cuerpo durante el movimiento (que supondremos en sentido vertical). Consideraremos la dirección hacia abajo como positiva, y entonces las fuerzas hacia abajo serán positivas y las hacia arriba negativas.
Sobre el cuerpo actúan las siguientes fuerzas:

1. la atracción de la gravedad $F_1 = mg$, con g la aceleración de la gravedad

2. la fuerza que ejerce el resorte $F_2 = -ks$ donde s es el desplazamiento del cuerpo y el signo negativo hace F_2 negativa para s positiva (resorte estirado) y positiva para s negativa (resorte comprimido)

3. el rozamiento viscoso que ejerce el medio sobre el cuerpo (podemos suponer a éste sumergido en algún líquido viscoso, de densidad mucho menor que la del cuerpo, de forma que el empuje del fluído sobre el mismo sea despreciable frente a su peso). Esta fuerza de atenuación del movimiento tiene una dirección opuesta al movimiento instantáneo, y la podemos suponer proporcional a la velocidad del cuerpo (ésta es una buena aproximación, al menos para bajas velocidades). Tenemos pues que esta fuerza es de la forma $F_3 = -c\, ds/dt$, con $c \geq 0$ la constante de atenuación.

En consecuencia, la fuerza F que actúa sobre el cuerpo, que experimenta un desplazamiento instantáneo $s(t)$, es

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = mg - ks - c\frac{ds}{dt}. \tag{61}$$

Cuando el cuerpo está en reposo, la fuerza de rozamiento no actúa y la fuerza gravitatoria y la del resorte están en equilibrio, con lo que su resultante es cero:

$$F_1 + F_2 = mg - ks_0 = 0$$

siendo s_0 la extensión del resorte correspondiente a esta posición; a s_0 se la llama *posición de equilibrio estático.*
Si $y(t)$ es el desplazamiento del cuerpo respecto de su posición de equilibrio estático, con dirección positiva hacia abajo, esto es $y(t) = s(t) - s_0$, de (61) obtenemos

$$F = mg - k(y(t) + s_0) - c\frac{d}{dt}(y(t) + s_0) = -ky(t) - c\frac{dy}{dt},$$

por lo que, de acuerdo con la segunda ley de Newton, dado que la aceleración del cuerpo es

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} := y'',$$

se debe verificar la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} &my'' = F = -ky - cy' \Rightarrow \\ &my'' + cy' + ky = 0, \end{aligned} \tag{62}$$

con $y' = dy/dt$.
El polinomio característico correspondiente es

$$p(r) = r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0,$$

cuyas raíces son

$$r_1 = -\frac{c}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk} \quad r_2 = -\frac{c}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}.$$

Si hacemos

$$\alpha = \frac{c}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk},$$

podemos escribir $r_1 = -\alpha + \beta$ y $r_2 = -\alpha - \beta$. La forma de la solución $y(t)$ de (62) dependerá del amortiguamiento, y podemos distinguir los siguientes casos:
I) $c^2 > 4mk$. Raíces reales distintas. (*Sobreamortiguamiento*).
II) $c^2 = 4mk$. Raíz real doble. (*Amortiguamiento crítico*).
III) $c^2 < 4mk$. Raíces complejas conjugadas. (*Subamortiguamiento*).
Veamos estos casos separadamente.
I) *Sobreamortiguamiento*
En este caso, la solución general de (62) es

$$y(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}. \tag{63}$$

Dado que, como es fácil comprobar, $y(t) = 0$ si $c_1 e^{2\beta t} = -c_2$ y esta ecuación en t tiene a lo sumo una única solución (cuando c_1 y c_2 tienen distinto signo), el cuerpo no oscila. Para $t > 0$ ambos exponentes de (62) son negativos pues $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\beta^2 = \alpha^2 - k/m < \alpha^2$. En consecuencia, ambos términos de (62) tienden a cero a medida que t tiende a infinito y, prácticamente, después de un tiempo suficientemente largo el cuerpo estará en reposo en la posición de equilibrio estático, $y = 0$. (Ver Figura 8).
II) *Amortiguamiento crítico*

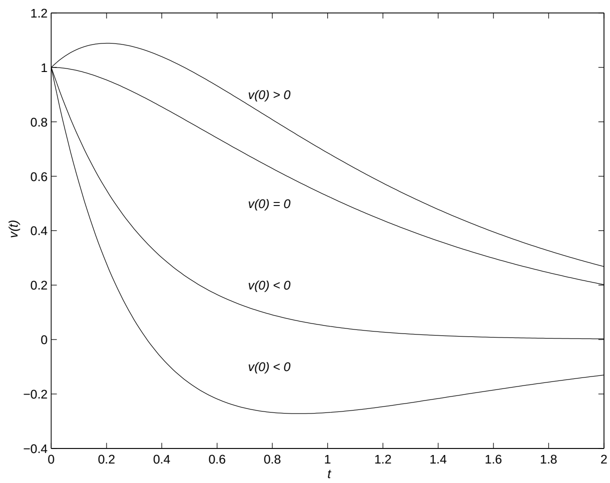

Figura 8: Movimientos típicos del sistema sobreamortiguado

Como $\beta = 0$, $r_1 = r_2 = -\alpha$, y la solución general es

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}. \tag{64}$$

Como la función exponencial no se anula y $c_1 = c_2 t$ puede tener a lo sumo un cero positivo (cuando c_1 y c_2 tiene distinto signo), nuevamente como en el caso I) el movimiento puede tener a lo sumo un pasaje por la posición de equilibrio ($y = 0$). (Ver Figura 9).
Este caso marca el límite entre movimiento oscilatorio y no oscilatorio.
III) *Subamortiguamiento*
Dado que $c^2 < 4mk$, β es imaginario puro:

$$\beta = i\omega^*, \quad \text{donde } \omega^* = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \ \ (> 0). \tag{65}$$

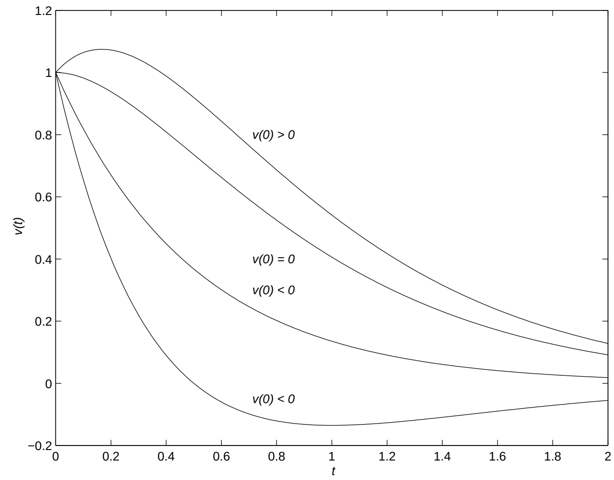

Figura 9: Movimientos típicos en el caso de amortiguamiento crítico

Por lo tanto, la solución general es

$$y(t) = e^{-\alpha t}(c_1 \cos \omega^* t + c_2 \operatorname{sen} \omega^* t) = Ce^{-\alpha t} \cos(\omega^* t - \varphi), \tag{66}$$

donde $C^2 = c_1^2 + c_2^2$ y $\tan \varphi = c_2/c_1$.
Esta solución representa oscilaciones amortiguadas y como $\cos(\omega^* t - \varphi)$ varía entre -1 y 1, la curva de la solución yace entre las curvas $y = Ce^{-\alpha t}$ y $y = -Ce^{-\alpha t}$, tocando estas curvas cuando $\omega^* t - \varphi$ en un múltiplo entero de π (ver Figura 10)
La frecuencia de oscilación es $\omega^*/2\pi$ Hertz, y de (65) se deduce que a medida que c disminuye, ω^*

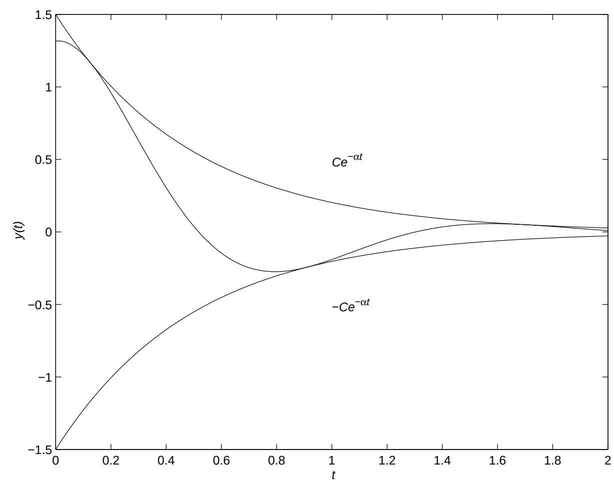

Figura 10: Oscilación amortiguada del sistema subamortiguado

aumenta y la oscilación se vuelve más rápida. Cuando c tiende a 0, ω^* tiende a $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, la frecuencia del *oscilador armónico*. En este último caso ($c = 0,\ \alpha = 0$) y (66) es ahora

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t = C \cos(\omega_0 t - \varphi);$$

esta ecuación corresponde a un movimiento armónico puro (*oscilación armónica*).

Ejercicios

1. Si un cuerpo de masa 1 kg. estira un resorte 10 cm. ¿cuántos ciclos por segundo ejecutará el sistema masa-resorte? ¿ Cuál será su movimiento si estiramos el resorte 15 cm. más?

2. ¿Cómo cambia el movimiento del cuerpo si el sistema tiene un amortiguamiento dado por

   (a) $c = 30$ kg/seg.

   (b) $c = 19.7989$ kg/seg.

   (c) $c = 10$ kg/seg.?

La ecuación de Euler-Cauchy

Hay un tipo particular de ecuaciones homogéneas lineales a coeficientes variables que pueden resolverse en forma sencilla a partir de las de coeficientes constantes: las ecuaciones de Euler-Cauchy

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0, \tag{67}$$

con a_1 y a_2 números reales.

Esta ecuación se puede llevar a la forma (53) siempre que $x \neq 0$, con lo que consideraremos su solución para $x > 0$ (respectivamente $x < 0$). Dividiendo ambos lados de (67) por x^2 tenemos

$$y'' + \frac{a_1}{x}y' + \frac{a_2}{x^2}y = 0. \tag{68}$$

Trataremos ahora para mayor determinación la solución de (68) para $x > 0$; efectuemos el cambio de variable $x = e^t$ (para $x < 0$ el cambio es $x = -e^t$). Si denotamos

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

es fácil comprobar, empleando la regla de la cadena, que

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}\frac{1}{x} \quad \text{y} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y}); \end{aligned}$$

reemplazando en (68), obtenemos

$$\ddot{y} + (a_1 - 1)\dot{y} + a_2y = 0 \tag{69}$$

cuyo polinomio característico es

$$p(r) = r^2 + (a_1 - 1)r + a_2. \tag{70}$$

De acuerdo con lo que ya vimos, según sean las raíces de $p(r)$ se nos presentan tres casos:

a) *Raíces reales distintas*

Sean estas r_1 y r_2; entonces una base de soluciones de (69) es $\{e^{r_1t}, e^{r_2t}\}$, y por lo tanto una base de soluciones de (68) es $\{x^{r_1}, x^{r_2}\}$, ya que $e^{rt} = x^r$.

b) *Raíz doble*
Si la raíz es r_1, dado que en este caso una base de soluciones de (69) es $\{e^{r_1 t}, t\,e^{r_1 t}\}$, y que $t = \ln x$, una base de soluciones para (68) es $\{x_1^r, \ln x\, x_1^r\}$.
c) *Raíces complejas conjugadas*
Aquí $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, y una base para (69) es $\{e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\}$. Por lo tanto una base para (68) es $\{x^\alpha \cos(\beta \ln x),\ x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)\}$.

Ejemplo 3.14 Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} a) & x^2y'' - 2.5xy' - 2y = 0 \\ b) & x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \\ c) & x^2y'' + 7xy' + 13y = 0. \end{array}$$

Solución
a) De acuerdo con (70) el polinomio característico es $p(r) = r^2 - 3.5r - 2$ y sus raíces son $r_1 = -0.5$ y $r_2 = 4$. Por lo tanto la solución de la ecuación es

$$y = \frac{c_1}{\sqrt{x}} + c_2x^4.$$

b) El polinomio característico es ahora $p(r) = r^2 - 4r - 4$ y tiene una raíz doble $r_1 = 2$; entonces la solución general de la ecuación es

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x = x^2(c_1 + c_2 \ln x).$$

c) En este caso, tenemos $p(r) = r^2 + 6r + 13$, con raíces $r_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm 2i$, y la solución general de la ecuación es

$$y = x^{-3}[c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(2 \ln x).$$

Las ecuaciones de Euler-Cauchy aparecen en ciertos problemas de la ingeniería, como muestra el siguiente ejemplo sencillo de la electrostática.

Ejemplo 3.15 Encontrar el potencial electrostático $v = v(\rho)$ entre dos esferas concéntricas de radios $\rho_1 = 4$ cm y $\rho_2 = 8$ cm a las que se mantiene a potenciales $v_1 = 100$ volts y $v_2 = 0$ volts respectivamente.
Información física $v(\rho)$ es una solución de $\rho v'' + 2v' = 0$, siendo $v' = dv/d\rho$.
Solución. El polinomio característico es $p(r) = r^2 + r$ y tiene raíces 1 y -1. Por lo tanto, la solución general es

$$v(\rho) = c_1 + \frac{c_2}{\rho}.$$

De las condiciones de contorno (los potenciales de las esferas), obtenemos

$$v(8) = c_1 + \frac{c_2}{8} = 0, \qquad v(4) = c_1 + \frac{c_2}{4} = 100,$$

con lo que $c_1 = -100$ y $c_2 = 800$. Por lo tanto, la solución es

$$v(\rho) = -100 + \frac{800}{\rho}.$$

Ejercicios

1. Verificar que efectivamente los conjuntos de funciones obtenidos el los casos a), b) y c) son bases de (67).

2. Obtener las bases de soluciones para los tres casos cuando $x < 0$, mediante el cambio de variables indicado, y comprobar que las bases de soluciones de (67) son para$x \neq 0$ las siguientes:
caso a) $\{|x|^{r_1}, |x|^{r_2}\}$
caso b) $\{|x|^{r_1}, |x|^{r_1}\ln|x|\}$
caso c) $\{|x|^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|),\ |x|^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln|x|)\}$.

3. Encontrar una solución general para las siguientes ecuaciones:

   (a) $x^2\,y'' - 6y = 0$
   (b) $x\,y'' + 6y' = 0$
   (c) $x^2\,y'' + 9xy' + 16y = 0$
   (d) $x^2\,y'' + 3xy' + 5y = 0$
   (e) $4x^2\,y'' + 8xy' - 15y = 0$

4. Resuelva los siguientes problemas a valores iniciales:

   (a) $x^2\,y'' - 4xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 13$
   (b) $x^2\,y'' - xy' + 2y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -1$
   (c) $10x^2\,y'' + 46xy' + 32.4y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.1$

5. Encontrar la solución general de la ecuación (también llamada de Euler)

$$a_0\,(ax+b)^2 y'' + a_1\,(ax+b)y' + a_2 y = 0$$

   siendo a_0, a_1, a_2, a y b constantes reales y a_0 y a no nulas.
   Pista: Hacer el cambio de variables $ax + b = e^t$ si $ax + b > 0$ y $ax + b = -e^t$ si $ax + b < 0$.

6. Resolver

   (a) $2\,(3x+1)^2\,y'' + 21\,(3x+1)y' + 18y = 0$
   (b) $(x-2)^2\,y'' + 5\,(x-2)y' + 3y = 0$

3.2.2 La ecuación lineal no homogénea

Abordaremos ahora el problema de hallar todas las soluciones de la ecuación (51)

$$L(y) = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x),$$

siendo $a_1(x), a_2(x)$ y $b(x)$ funciones continuas en el intervalo I.
Supongamos que ψ_p es una solución particular conocida de esta ecuación, y que ψ es cualquier otra solución. Entonces

$$L(\psi - \psi_p) = L(\psi) - L(\psi_p) = b - b = 0$$

en I. Por lo tanto $\psi - \psi_p \in \mathcal{H}_2$, y si $\{\psi_1, \psi_2\}$ es una base de $\mathcal{H}_2$, entonces existen constantes únicas c_1 y c_2 tales que

$$\psi - \psi_p = c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2.$$

En otras palabras, toda solución ψ de $L(y) = b(x)$ puede escribirse en la forma:

$$\psi = \psi_p + c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2,$$

y entonces llegamos a la conclusión que el problema de hallar todas las soluciones de (51) se reduce al de hallar una solución particular ψ_p y una base de $\mathcal{H}_2$.
Sea $\{\psi_1, \psi_2\}$ una base de $\mathcal{H}_2$; es obvio que no podremos hallar una solución particular (51) de la forma $c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2$ con c_1 y c_2 constantes, a menos que $b \equiv 0$ en I. Sin embargo, si suponemos que c_1 y c_2 son *funciones* u_1, u_2 (no necesariamente constantes) en I, podremos encontrar una solución de $L(y) = b(x)$ de la forma $u_1\,\psi_1 + u_2\,\psi_2$ en I. A este procedimiento se lo llama *variación de parámetros.* El siguiente teorema, cuya demostración figura en el Apéndice, resume el método de variación de los parámetros.

Teorema 3.5 Toda solución ψ de (51) en un intervalo I donde $a_1(x), a_2(x)$ y $b(x)$ son continuas puede escribirse en la forma

$$\psi = \psi_p + c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2,$$

con $\{\psi_1, \psi_2\}$ una base de $\mathcal{H}_2$, c_1 y c_2 constantes, y ψ_p una solución particular dada por

$$\psi_p(x) \;=\; -\psi_1(x)\int \frac{\psi_2(x)b(x)}{W(\psi_1,\psi_2)(x)}\,dx + \psi_2(x)\int \frac{\psi_1(x)b(x)}{W(\psi_1,\psi_2)(x)}\,dx. \tag{71}$$

Ejemplo 3.16 Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = \sec x$.
Solución. Una base de $\mathcal{H}_2$, en cualquier intervalo, es

$$\psi_1 = \cos x, \quad \psi_2 = \operatorname{sen} x.$$

En consecuencia, el Wronskiano es

$$W(\psi_1,\psi_2)(x) = \cos x\,\cos x - (-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x = 1,$$

y la solución particular dada por (71) es

$$\begin{aligned}\psi_p &= -\cos x\int \operatorname{sen} x\,\sec x\,dx + \operatorname{sen} x\int \cos x\,\sec x\,dx\\ &= \cos x\,\ln|\cos x| + x\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

por lo que la solución general es, de acuerdo con el Teorema 3.5,

$$\psi(x) = [c_1 + \ln|\cos x|]\,\cos x + (c_2 + x)\operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 3.17 Resolver el problema a valores iniciales

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x, \quad y(1) = -e, \quad y'(1) = 0.$$

Solución. *Debemos poner la ecuación diferencial en la forma (51)* y además, dado que las condiciones iniciales están dadas para $x_0 = 1$, consideraremos la solución general en $x > 0$. Tendremos pues

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x.$$

Dado que la ecuación homogénea asociada es del tipo de Euler-Cauchy, a partir de (69) y (70), obtenemos el polinomio característico $p(r) = r^2 - 4r + 3$ con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = 3$; por lo tanto, una base de $\mathcal{H}_2$ es $\{x, x^3\}$, y el Wronskiano es $W(x, x^3)(x) = 2x^3$, con lo que una solución particular es

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &= -x\int \frac{x^3 2x^2 e^x}{2x^3}dx + x^3\int \frac{x 2x^2 e^x}{2x^3}dx \\ &= 2x^2e^x - 2xe^x. \end{aligned}$$

La solución general es

$$\psi(x) = c_1x + c_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^2,$$

y a partir de las condiciones iniciales se obtiene $c_1 = -e$, $c_2 = 0$, con lo que la solución pedida es

$$y(x) = -ex + 2x^2e^x - 2xe^x.$$

Observación 3.6 Cuando $b(x)$ en (51) es una suma de m funciones continuas en I, $b(x) = \sum_{k=1}^m b_k(x)$, entonces si ψ_{pk} es una solución particular para $L(y) = b_k$, $k = 1, \ldots, m$, y $\psi_p = \sum_{k=1}^m \psi_{pk}$, resulta

$$\begin{aligned} L(\psi_p) &= L\left(\sum_{k=1}^m \psi_{pk}\right) = \sum_{k=1}^m L(\psi_{pk}) = \sum_{k=1}^m b_k(x) \\ &= b(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto cuando $b(x)$ es de esta forma, se busca por separado una solución particular para cada problema $L(y) = b_k(x)$ y se obtiene una solución particular para $b(x)$ como la suma de todas estas soluciones particulares. A este último hecho se lo conoce como el *principio de superposición.*

Ejemplo 3.18 Encontrar la solución general de $y'' - 3y' + 2y = x + e^{3x}$.
Solución. En este caso $b(x) = x + e^{3x}$ y es inmediato comprobar que una base de soluciones de la ecuación homogénea es $\{e^x, e^{2x}\}$ cuyo Wronskiano es $W(e^x, e^{2x})(x) = e^{3x}$. Entonces, si $b_1(x) = x$, y $b_2(x) = e^{3x}$, es fácil ver, de acuerdo con (71), que las respectivas soluciones particulares de los problemas

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= x \\ y'' - 3y' + 2y &= e^{3x} \end{aligned}$$

son $\psi_{p1}(x) = (2x + 3)/4$ y $\psi_{p2}(x) = e^{3x}/2$, con lo que la solución general de la ecuación es

$$\psi(x) = \frac{2x + 3}{4} + \frac{e^{3x}}{2} + c_1e^x + c_2e^{2x}.$$

Ejercicios Encontrar una solución general para cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1} + x$

2. $y'' + y = \cos x + \tan^2$

3. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$

4. $y'' + 3y' + 2y = \frac{x}{(x+1)^2}$

5. $(x+1)^3 y'' + 3(x+1)^2 y' + (x+1)y = 6\ln(x+1)$

6. $x^2 y'' - 2y = 9x^2$

7. $4x^2 y'' + 4xy' - y = \frac{12}{x}$

Método de los coeficientes indeterminados
Si bien el método de variación de los parámetros es general, tiene la desventaja que es necesario calcular las integrales (71), lo que puede resultar dificultoso.
Hay un método, que si bien permite obtener soluciones particulares para una clase restringida de ecuaciones no homogéneas, resulta de fácil aplicación. Tal método es el de los *coeficientes indeterminados*, y se aplica a ecuaciones lineales a coeficientes constantes no homogéneas con $b(x)$ suma de exponenciales multiplicadas por polinomios en x:

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = \sum_{j=1}^{l} q_j(x) e^{\mu_j x}, \tag{72}$$

siendo $q_j(x)$ un polinomio de grado d_j. Con el objeto de exhibir el método, y teniendo en cuenta el principio de superposición (ver Observación 3.6), consideraremos la ecuación

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = q(x) e^{\mu x}, \tag{73}$$

con $q(x)$ un polinomio de grado d,

$$q(x) = \sum_{k=0}^{d} q_k x^k.$$

El siguiente teorema, que demostramos en el Apéndice, expone la esencia del método de los coeficientes indeterminados.

Teorema 3.6 Sea $q(x)$ un polinomio de grado d. La ecuación

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = q(x)\, e^{\mu x},$$

tiene una solución particular de la forma

$$\psi_p(x) = s(x) e^{\mu x},$$

donde $s(x) = x^\nu\, h(x)$; ν es la multiplicidad de μ como raíz del polinomio caracrerístico $p(r) = r^2 + a_1 r + a_2$ y $h(x)$ es un polinomio de grado d,

$$h(x) = \sum_{k=0}^{d} h_k x^k.$$

Es inmediata una generalización a las ecuaciones del tipo (72):

Corolario 3.1 Si $q_j(x)$ es un polinomio de grado d_j y μ_j es una raíz del polinomio característico de multiplicidad ν_j, entonces la ecuación

$$y'' + a_1y' + a_2y = \sum_{j=1}^{l} q_j(x)e^{\mu_j x},$$

tiene una solución particular de la forma

$$\psi_p(x) = \sum_{j=1}^{l} x^{\nu_j} h_j(x)e^{\mu_j x},$$

donde $h_j(x)$ es un polinomio de grado d_j,

$$h_j(x) = \sum_{k=0}^{d_j} h_{jk}x^k.$$

Observación 3.7 Si bien en el la demostración del Teorema 3.6 se obtienen fórmulas explícitas para la determinacion de los coeficientes h_k, en la práctica (como se verá en los ejemplos siguientes) es más sencillo plantear en cada caso la forma de la solución particular que indica el teorema, reemplazar ésta en la ecuación diferencial, y obtener a partir de este reemplazo los coeficientes.

Ejemplo 3.19 Encontrar una solución particular de $y'' + 4y = 8x^2$.
Solución. En este caso, $q(x) = x^2$, $d = 2$, $\mu = 0$ y el polinomio característico $r^2 + 4$ tiene raíces $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$ por lo que la multiplicidad es $\nu = 0$.
De acuerdo con el teorema, la forma de la solución particular será $\psi_p(x) = h_2x^2 + h_1x + h_0$, con lo que $\psi_p'' = 2h_2$.
Reemplazando en la ecuación diferencial, tenemos

$$2h_2 + 4(h_2x^2 + h_1x + h_0) = 8x^2,$$

de donde obtenemos, igualando coeficientes, $4h_2 = 8$, $h_1 = 0$ y $2h_2+4h_0 = 0$, con lo que $h_2 = 2$, $h_1 = 0$ y $h_0 = -1$. La solución particular es

$$\psi_p(x) = 2x^2 - 1.$$

Ejemplo 3.20 Resolver $y'' - 3y' + 2y = e^x$.
Solución. Tenemos $\mu = 1$, $q(x) = 1$, $d = 0$ y el polinomio característico es $p(r) = r^2 - 3r + 2$ con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$, con lo que $\nu = 1$. Por lo tanto, una base de soluciones de la ecuación homogénea es $\{e^x, e^{2x}\}$, y una solución particular, de acuerdo con el Teorema 3.6 es $\psi_p(x) = xh_0e^x$. Por lo tanto,

$$\psi_p' = h_0(1 + x)e^x, \quad , \psi_p'' = h_0(2 + x)e^x,$$

con lo que, sustitutendo en la ecuación, resulta

$$h_0(2 + x)e^x - 3h_0(1 + x)e^x + 2h_0xe^x = e^x,$$

de donde operando, sale $-h_0e^x = e^x$, y $h_0 = -1$. Por lo tanto, la solución general es

$$\psi(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x.$$

Ejemplo 3.21 Resolver el problema a valores iniciales

$$y'' - 2y' + y = x + e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solución. En este caso tenemos $b_1(x) = x$, $b_2(x) = e^x$ y, con la notación del Corolario 3.1, $l = 2$, $q_1(x) = 1$, $\mu_1 = 1$, $d_1 = 0$, $q_2(x) = x$, $\mu_2 = 0$, $d_2 = 1$; el polinomio característico es $p(r) = r^2 - 2r + 1$, con raíz doble $r_1 = 1$. Por lo tanto, $\nu_1 = 2$ y $\nu_2 = 0$, y la base de soluciones de la ecuación homogénea es $\{e^x, xe^x\}$. Entonces, de acuerdo con el corolario, las soluciones particulares serán

$$\psi_{p1}(x) = h_{11}x + h_{10}, \qquad \psi_{p2}(x) = h_{20}x^2e^x,$$

con lo que, la solución particular será

$$\psi_p(x) = h_{11}x + h_{10} + h_{20}x^2e^x.$$

Sustituyendo en la ecuación, y simplificando, obtenemos

$$\psi_p'' - 2\psi_p' + \psi_p = 2h_{20}e^x + h_{11}x - 2h_{11} + h_{10} = e^x + x.$$

Por lo tanto, $h_{20} = 1/2$, $h_{11} = 1$, $h_{10} = 2$, con lo que la solución general de la ecuación es

$$\psi(x) = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2.$$

Utilizando las condiciones iniciales, obtenemos $c_1 = -1$ y $c_2 = 0$, por lo que la solución es

$$y(x) = -e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2.$$

Observación 3.8 En virtud de las identidades

$$\begin{aligned}\cos\beta x &= \frac{1}{2}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})\\ \operatorname{sen}\beta x &= \frac{1}{2i}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}),\end{aligned}$$

el Corolario 3.1 incluye el caso en que el segundo miembro de la ecuación contenga términos de la forma $q(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ o $q(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ como muestra el siguiente

Ejemplo 3.22 Encontrar una solución particular de $y'' + 4y = \operatorname{sen} x$.
Solución. Dado que podemos reescribir la ecuación en la forma

$$y'' + 4y = \frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}e^{-ix},$$

tendremos, con la notación del Corolario 3.1, que $q_1(x) = \frac{1}{2i}$, $d_1 = 0$, $\mu_1 = i$ y $q_2(x) = \frac{-1}{2i}$, $d_2 = 0$ y $\mu_2 = -i$. El polinomio característico es $p(r) = r^2 + 4$ con raíces $r_1 = 2i$ y $r_2 = -2i$, con lo que $\nu_1 = 0$ y $\nu_2 = 0$. Por lo tanto, $\psi_{p1} = h_{10}e^{ix}$ y $\psi_{p2} = h_{20}e^{-ix}$, y entonces $\psi_p(x) = h_{10}e^{ix} + h_{20}e^{-ix}$. Remplazando en la ecuación diferencial obtenemos

$$\psi_p'' + 4\psi_p = -h_{10}e^{ix} - h_{20}e^{-ix} + 4h_{10}e^{ix} + 4h_{20}e^{-ix} = \frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}e^{-ix},$$

con lo que obtenemos $h_{10} = -h_{20} = \frac{1}{6i}$. Por lo tanto, una solución particular es

$$\psi_p = \frac{1}{6i}e^{ix} - \frac{1}{6i}e^{-ix} = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x.$$

Cuando a_1 y a_2 son reales, hay un método más fácil para manejar tales términos. Sea la ecuación

$$\begin{aligned} L(y) &= q(x)e^{(\alpha+i\beta)x} \\ &= q(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + iq(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x. \end{aligned} \tag{74}$$

Si $\psi_p(x) = \psi_{p_R}(x) + i\psi_{p_I}(x)$ es una solución particular, suponiendo que $q(x)$ es un polinomio real, tenemos

$$L(\psi_p) = L(\psi_{p_R}) + iL(\psi_{p_I}) = q(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + iq(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

e igualando partes reales e imaginarias, y al ser los coeficientes de L *reales*, debe ser ψ_{p_R} una solución particular de

$$L(y) = q(x)e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{75}$$

y ψ_{p_I} de

$$L(y) = q(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x. \tag{76}$$

Por lo tanto, en vez de resolver una cualquiera de las ecuaciones (75) y (76), resolvemos la ecuación (74). La parte real de la solución será la solución de (75), y la parte imaginaria, solución de (76).

Ejemplo 3.23 Encontrar la solución general de $y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x$.
Solución. La solución de la ecuación homogénea es $c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x$. Para hallar una solución particular de la ecuación, buscamos en su lugar una de

$$y'' + 4y = e^{i2x},$$

y luego elegimos la parte imaginaria. Como $2i$ es una raíz simple del polinomio característico, buscaremos una solución particular del tipo $\psi_p(x) = h_0xe^{i2x}$. Reemplazando en la ecuación diferencial, tenemos

$$\psi_p'' + 4\psi_p = 4ih_0e^{i2x} - 4xh_0e^{i2x} + 4xh_0e^{i2x} = e^{i2x},$$

con lo que $4ih_0 = 1$ y $h_0 = -i/4$. Luego

$$\psi_p(x) = -\frac{i}{4}xe^{i2x} = \frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x - \frac{i}{4}x\cos 2x.$$

De aquí se sigue que

$$\psi_{p_I}(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x$$

es una solución particular de $y'' + 4y = 2\operatorname{sen} 2x$, y la solución general es

$$\psi = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Ejemplo 3.24 Oscilaciones forzadas (sistema masa-resorte) En este ejemplo continuamos el estudio del movimiento de un sistema masa-resorte, que habíamos comenzado en el Ejemplo 3.13. Ahora supondremos que sobre el cuerpo, además de la acción del resorte, y eventualmente del rozamiento, se ejerce una fuerza externa $f(t)$. En consecuencia, el modelo debe incorporar esta nueva fuerza, lo que resulta en la ecuación no homogénea

$$my'' + cy' + ky = f(t); \tag{77}$$

a $f(t)$ se la denomina *entrada* o *excitación* y a la correspondiente solución, *salida* o *respuesta del sistema* a la excitación.
Las *entradas periódicas* son particularmente importantes en la ingeniería, y aquí consideraremos excitaciones sinusoidales:

$$f(t) = F_0 \cos \omega t, \qquad (F_0 > 0,\ \omega > 0).$$

En consecuencia, trataremos la ecuación

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t. \tag{78}$$

Reescribiéndola, tenemos

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}\cos \omega t, \tag{79}$$

y ya habíamos visto que su polinomio característico tiene raíces $r_1 = -\alpha + \beta$ y $r_2 = -\alpha - \beta$ con

$$\alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \sqrt{\frac{c^2}{4m} - \frac{k}{m}},$$

por lo que la base de soluciones de la homogénea es $\{e^{-(\alpha-\beta)t}, e^{-(\alpha+\beta)t}\}$, o $\{e^{-\alpha t}, t\, e^{-\alpha t}\}$ en el caso en que $\beta = 0$.
Para hallar una solución particular de (78), planteamos, de acuerdo con la Observación 3.8, la ecuación

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}. \tag{80}$$

Si $c \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y por lo tanto $i\omega$ no será raíz del polinomio característico, y tendremos, con la notación habitual, $q(t) = \frac{F_0}{m}$, $d = 0$, $\mu = i\omega$ y $\nu = 0$, por lo que la solución particular será de la forma $\psi_p(t) = h_0 e^{i\omega t}$. Remplazando esta expresión en (80), obtenemos

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{F_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{c}{m}\omega} \\ &= F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2} - iF_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \end{aligned}$$

siendo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \psi_{p_R} &= F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \cos \omega t + F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \operatorname{sen} \omega t \\ &= C^\star(\omega) \cos(\omega t - \varphi^\star(\omega)), \end{aligned}$$

donde

$$C^{\star}(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}} \text{ y } \varphi^{\star}(\omega) = \arctan \frac{\omega c}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

La solución general es, pues

$$\psi(t) = \psi_h(t) + C^{\star}(\omega)\cos(\omega t - \varphi^{\star}(\omega)), \tag{81}$$

donde $\psi_h(t)$, solución de la ecuación homogénea es, según (63) - (66), de la forma

$$\begin{aligned} \psi_h(t) &= e^{-\alpha t}(c_1 e^{-\beta t} + c_2 e^{\beta t}) \quad \text{ó} \\ &= e^{-\alpha t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{ó} \\ &= C e^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \varphi), \end{aligned}$$

de acuerdo a si el movimiento es sobreamortiguado, críticamente amortiguado, o subamortiguado, respectivamente. (Ver el Ejemplo 3.13). En todos los casos, al ser $\alpha > 0$, $\psi_h(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, (en la práctica después de un tiempo suficientemente grande); esto es, la solución general (81) representa la *solución (o régimen) transitoria* y tiende a la *solución (o régimen) permanente* ψ_p. Por lo tanto, después de un lapso suficientemente prolongado, la salida correspondiente a una entrada sinusoidal pura, será prácticamente una oscilación armónica de igual frecuencia que la de la entrada.
Estudiemos ahora la variación de la amplitud $C^{\star}$ de ψ_p con la frecuencia de la entrada, y veamos si es posible determinar un máximo:

$$\frac{dC^{\star}}{d\omega} = [-2m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + c^2]\omega = 0 \text{ si}$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}}.$$

Para $c^2 > 2m^2\omega_0^2$ esta ecuación no tiene solución real y $C^{\star}$ disminuye monótonamente a medida que ω aumenta. Si $c^2 \leq 2m^2\omega_0^2$, la ecuación tiene una solución real $\omega = \omega_{\max}$, que aumenta y tiende a ω_0 a medida que c tiende a 0. La amplitud correspondiente a esta frecuencia es

$$C^{\star}(\omega_{\max}) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}.$$

En la Figura 11 se muestra la *amplificación* $C^{\star}/F_0$ como función de ω para $m = 1$, $k = 1$ y varios valores de c.

En el caso en que $c = 0$, (79) será ahora

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

el polinomio característico será $p(r) = r^2 + \omega_0^2 = 0$, y una base de la ecuación homogénea será $\{\cos\omega_0 t, \operatorname{sen}\omega_0 t\}$. En este caso (80) será

$$y'' + \omega_0^2 y' = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t},$$

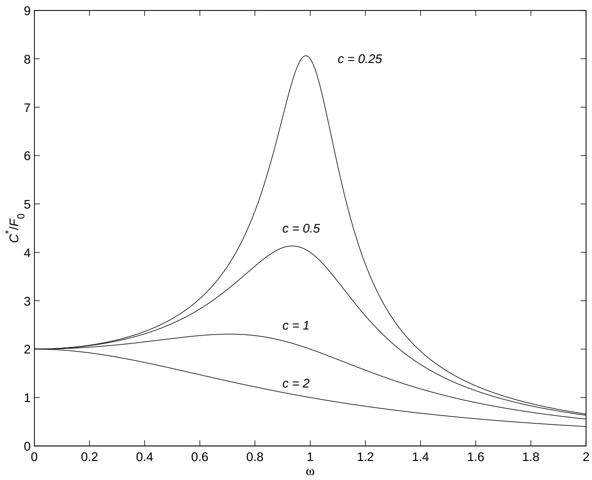

Figura 11: Amplificación $C^\star/F_0(\omega)$ para distintas constantes de atenuación

y nuevamente $d = 0$, $q(t) = \frac{F_0}{m}$ y $\mu = i\omega$. Distinguiremos dos casos:
a) $\omega \neq \omega_0$: entonces, $\nu = 0$ y planteamos $\psi_p(t) = h_0\, e^{i\omega t}$, con lo que reemplazando en la ecuación diferencial, obtenemos

$$h_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

por lo que

$$\psi_{p_R} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t, \tag{82}$$

y la solución general resulta

$$y(t) = \psi_h(t) + \psi_{p_R}(t) = C\, \cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t, \tag{83}$$

ya que la solución de la ecuación homogénea es $C\, \cos(\omega_0 t - \varphi)$ (ver el Ejemplo 3.13).
Esta salida representa la superposición de dos oscilaciones armónicas; las frecuencias son la *frecuencia natural del sistema* $\omega_0/2\pi$ y la de la entrada $\omega/2\pi$.
La máxima amplitud de ψ_{p_R} es, de acuerdo con (82),

$$\frac{F_0}{\omega_0^2 m} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}.$$

Por lo tanto, si $\omega \to \omega_0$, la amplitud de la oscilación tiende a infinito. Este fenómeno de excitación de grandes oscilaciones debido a la coincidencia de las frecuencias natural y de entrada, se conoce como *resonancia.*
b) $\omega = \omega_0$ (resonancia): ahora $\nu = 1$ y planteamos $\psi_p(t) = h_0 t\, e^{i\omega t}$ y, reemplazando en la ecuación diferencial, obtenemos

$$h_0 = \frac{-iF_0}{2m\omega_0}$$

por lo que

$$\psi_{p_R} = \frac{F_0}{2m\omega_0}\, t\, \cos\omega_0 t,$$

y la solución general resulta

$$y(t) = C\, \cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{F_0}{2m\omega_0}\, t\, \cos\omega_0 t.$$

Aquí se ve claramente que la máxima amplitud de ψ_{p_R} crece con t, por lo que el sistema puede llegar a destruirse. (Ver Figura 12)

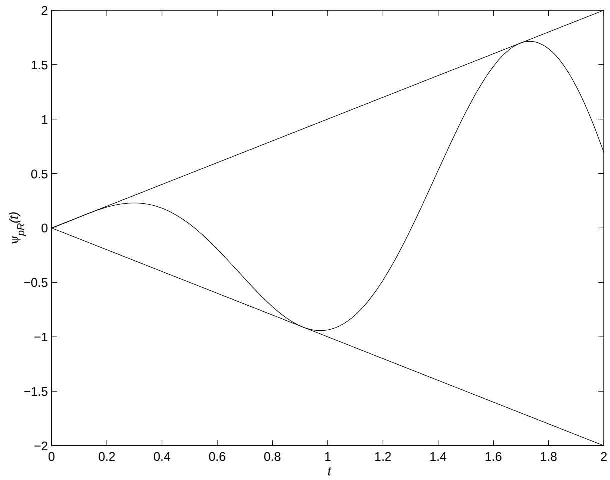

Figura 12: Solución particular en resonancia

Ejercicios.

1. Encontrar la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones.

   (a) $y'' + y = 3x^2$

   (b) $y'' - 4y = e^{2x}$

   (c) $y'' + 6y' + 9y = 18\cos 3x$

   (d) $3y'' + 6y' + 15y = 15x^2 + xe^{-x}\cos 2x$

   (e) $y'' - 4y = x + \operatorname{senh} 2x$.

2. Resolver los siguientes problemas a valores iniciales.

   (a) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2$

   (b) $y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$

   (c) $y'' + y' - 2y = -6\operatorname{sen} 2x - 18\cos 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

4 Ecuaciones diferenciales de orden superior

En esta sección trataremos las ecuaciones diferenciales de orden superior, como extensión de las de segundo orden. Veremos que no se necesitan nuevas ideas para tratarlas, y que los métodos que se presentaron para resolver las ecuaciones de segundo orden (salvo, naturalmente, el de *Reducción del Orden*) se extienden en forma directa al caso general.

4.1 Teorema de existencia y unicidad para la ecuación de orden n

Como vimos en la Introducción, una ecuación diferencial de orden n tiene la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{84}$$

o bien, si no está resuelta con respecto a la derivada de mayor orden,

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

Así como sucede para la ecuación de segundo orden, el teorema de existencia y unicidad para la ecuación de orden n se puede obtener fácilmente llevándo la ecuación (84) a un sistema de ecuaciones y aplicando el Teorema 1.1.
Si en la ecuación (84) se consideran como funciones desconocidas a $y = y_1$, $y' = y_2, \cdots, y^{(n-1)} = y_n$, entonces la ecuación (84) se sustituye por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2, \\ y_2' & = & y_3, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n-1}' & = & y_n, \\ y_n' & = & f(x, y_1, \cdots, y_n); \end{array} \right. \tag{85}$$

es decir, si

$$\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n), \tag{86}$$

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (y_2, \cdots, y_n, f(x, y_1, \cdots, y_n)), \tag{87}$$

la ecuación (84) se sustituye por

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \tag{88}$$

siendo posible aplicar el Teorema 1.1. Entonces, si $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ es continua en la región $\mathcal{R}$ dada por (9) y sus derivadas parciales respecto de las componentes de $\mathbf{y}$ son acotadas, es decir,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) \right\| < K, \quad 1 \leq j \leq n$$

para alguna constante K, entonces existe una única solución del sistema (88) que satisface la condición inicial $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$.
Ahora bien, dado que

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial y^{(j-1)}} \end{bmatrix}$$

donde el 1 está ubicado en la fila $j-1$-ésima y $1 \leq j \leq n$ (no hay 1 en la derivada respecto de y_1), entonces, como $\mathbf{y}(x_0) = (y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{(n-1)}(x_0))$, si $\mathbf{y_0} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ tenemos el

Teorema 4.1 Si en un entorno $\mathcal{R}$ de las condiciones iniciales $(x_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ la función f es continua en todos sus argumentos y satisface allí para alguna constante K

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y^{(j)}} \right| \leq K \quad \forall 0 \leq j \leq n-1, \tag{89}$$

entonces existe una única solución de (84) que satisface las condiciones

$$y(x_0) = \alpha_1,\ y'(x_0) = \alpha_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n. \tag{90}$$

Si el segundo miembro de (84) satisface, en cierta región de variación de sus argumentos, las condiciones del Teorema 4.1, entonces la solución general de (84) depende de n parámetros $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, en calidad de los cuales se pueden tomar, por ejemplo, las condiciones iniciales de la función buscada y de sus derivadas $y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$.

4.2 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Generalizando los casos de ecuaciones de primero y segundo orden, una ecuación diferencial lineal de orden n es una ecuación lineal con respecto a la función desconocida y a sus derivadas,de la forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \tag{91}$$

donde $a_0, a_1, \cdots, a_n, b$ son funciones definidas en el intervalo $I = (a, b)$. Supondremos nuevamente que la ecuación no tiene puntos singulares en I, es decir que $a_0(x) \neq 0$ en I y entonces, dividiendo (91) por a_0 podemos obtener una ecuación de la misma forma, pero en la cual a_0 queda reemplazada por la constante 1. Así, consideraremos la ecuación

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \tag{92}$$

y adoptaremos la hipótesis
H2. las funciones $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ y $b(x)$ son *continuas* en el intervalo I.

Observación 4.1 Utilizando el mismo argumento que en la Observación 3.2, se prueba que en un entorno cualquiera de las condiciones iniciales $y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \alpha_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$, donde x_0 es cualquier punto del intervalo I, se satisfacen las condiciones del Teorema 4.1.

Al igual que antes, si $b(x) = 0$ para toda x en I, decimos que (91) es una ecuación *homogénea*, mientras que si $b(x) \neq 0$ para algún x en I, se dice que es *no homogénea.*
Consideremos el *operador diferencial lineal de orden n* $L : \mathcal{C}^n(I) \to \mathcal{C}(I)$ dado por

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y, \tag{93}$$

donde al igual que en el caso de orden 2, omitimos la dependencia respecto de x de $L(y)$, y, y', etc.
En términos de este operador la ecuación (91) puede escribirse:

$$L(y) = b(x).$$

4.2.1 La ecuación lineal homogénea de orden n

Consideraremos ahora la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{94}$$

que de acuerdo con la definición de L, se escribirá

$$L(y) = 0.$$

En este caso, el conjunto $\mathcal{H}_n$ de soluciones de la ecuación lineal homogénea (94), es un subespacio de $\mathcal{C}^n(I)$. El siguiente teorema, que es una generalización del Teorema 3.2, puede demostrarse construyendo en la misma forma que en aquel, una base de $\mathcal{H}_n$ con n elementos. Se sugiere al lector hacer la demostración.

Teorema 4.2 El subespacio $\mathcal{H}_n$ tiene dimensión n.

Observación 4.2 En consecuencia, si encontramos un conjunto de n funciones de $\mathcal{H}_n$ linealmente independientes en $\mathcal{C}^n(I)$, $\psi_1, \cdots, \psi_n$, toda otra solución ϕ de (94) se escribirá en la forma

$$\phi(x) = c_1\psi_1(x) + \cdots + c_n\psi_n(x),$$

y los coeficientes $c_1, \cdots, c_n$ se determinarán de acuerdo con las condiciones iniciales. Tal proceso es similar al de la ecuación de segundo orden.

Ejemplo 4.1 La ecuación $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ admite una base de soluciones $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} = \{x, x^2, x^3\}$ en $I = (0, \infty)$, pero en $x_0 = 1$

$$(\psi_1(1), \psi_1'(1), \psi_1''(1)) = (1,1,0),\ (\psi_2(1), \psi_2'(1), \psi_2''(1)) = (1,2,2),\ (\psi_3(1), \psi_3'(1), \psi_3''(1)) = (1,3,6).$$

En cambio, la base $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} = \{3x - 3x^2 + x^3, -2x + 3x^2 - x^3, \frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}\}$ verifica en $x_0 = 1$

$$(\phi_i(1), \phi_i'(1), \phi_i''(1)) = \mathrm{e_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

siendo $\mathrm{e_i}$ el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^3$.
Por lo tanto, si deseamos que se verifiquen para solución de la ecuación diferencial las condiciones iniciales $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$ e $y''(1) = -4$, tendremos

$$y(x) = 2\phi_1(x) + \phi_2(x) - 4\phi_3(x) = 2x + x^2 - x^3 = 2\psi_1(x) + \psi_2(x) - \psi_3(x).$$

El criterio para establecer si n soluciones cualesquiera de (94) es una base de $\mathcal{H}_n$, viene dado por el siguiente teorema, que es una extensión del Teorema 3.3, y cuya demostración es similar a la de aquel.

Teorema 4.3 Consideremos n soluciones ψ_1, $\psi_2, \cdots, \psi_n$ de (94) en I. Entonces $\mathcal{B}' = \{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}$ es una base de $\mathcal{H}_n$ si y solo si existe $x_0 \in I$ tal que el *Wronskiano*

$$W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)(x_0) = \det \begin{bmatrix} \psi_1(x_0) & \psi_2(x_0) & \cdots & \psi_x(x_0) \\ \psi_1'(x_0) & \psi_2'(x_0) & \cdots & \psi_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(x_0) & \psi_2^{(n-1)} & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}$$

es diferente de 0. Además, si para algún $x_0 \in I$, $W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)(x_0) \neq 0$, entonces para todo $\tilde{x}_0 \in I$, $W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)(\tilde{x}_0) \neq 0$.

Ejemplo 4.2 En el caso de las funciones ψ_1, ψ_2 y ψ_3 del Ejemplo 4.1, tenemos

$$W(\psi_1, \psi_2, \psi_3)(x) = \det \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} = 2x^3 \neq 0 \;\; \forall x \in I = (0, \infty).$$

Ejercicios

1. Verifique que las funciones dadas forman una base de soluciones de las respectivas ecuaciones diferenciales homogéneas, y resuelva los problemas a valores iniciales.
   (a) $y''' - y' = 0,\ y(0) = 6,\ y'(0) = -4,\ y''(0) = 2;\ \ \{1, e^{-x}, e^x\}$
   (b) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 11,\ y''(0) = 17;\ \ \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$
   (c) $xy''' + 3y'' = 0,\ y(1) = 4,\ y'(1) = -8,\ y''(1) = 10;\ \ \{1, x, x^{-1}\}$
   (d) $(x+1)y''' - y'' - (x+1)y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1;\ \ \{e^{-x}, e^x, x+1\}$
2. ¿Son las siguientes funciones linealmente independientes en $x > 0$?
   (a) $\{(x-1)^2, (x+1)^2, x\}$
   (b) $\{\ln x, \ln x^2, (\ln x)^2\}$
   (c) $\{\cos^2 x,\ \mathrm{sen}^2\, x, -2\}$
   (d) $\{x, 1/x, 1\}$
3. Verifique que $\{e^x, e^{-x}, x\}$ forma una base de soluciones de
   $$x\,y''' - y'' - xy' + y = 0$$
   en cualquier intervalo. Muestre que $W(e^x, e^{-x}, x)(0) = 0$. ¿Contradice este hecho el Teorema 4.3?

Ecuación lineal homogénea a coeficientes constantes

Cuando los coeficientes $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de la ecuación (94) son *constantes*, es sencillo, al igual que en el caso de la ecuación de segundo orden, determinar una base de $\mathcal{H}_n$. Estudiemos, pues, la ecuación

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{95}$$

para la cual, al igual que antes $I = \mathbb{R}$. Si ensayamos e^{rx} como solución de (95), tendremos

$$L(e^{rx}) = (r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n)e^{rx} = p(r)e^{rx}, \tag{96}$$

siendo ahora $p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n$ el polinomio característico de L, o de (95), al que podemos obtener por un procedimiento similar al de la ecuación de segundo orden.
El siguiente resultado, que generaliza el Teorema 3.4 y cuya demostración esbozaremos en el Apéndice, da un procedimiento para obtener una base de $\mathcal{H}_n$.

Teorema 4.4 Sean $r_1, \cdots, r_s$ las diferentes raíces del polinomio característico $p(r)$, y supongamos que r_i tiene multiplicidad ν_i (así que $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_s = n$). Entonces las n funciones

$$\begin{array}{llll} e^{r_1 x}, & x e^{r_1 x}, & \cdots & x^{\nu_1 - 1} e^{r_1 x}; \\ e^{r_2 x}, & x e^{r_2 x}, & \cdots & x^{\nu_2 - 1} e^{r_2 x}; \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ e^{r_s x}, & x e^{r_s x}, & \cdots & x^{\nu_s - 1} e^{r_s x} \end{array}$$

son una base de $\mathcal{H}_n$.

Ejemplo 4.3 Resolver la ecuación diferencial $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.
Solución. El polinomio característico es $p(r) = r^3 - 2r^2 - r + 2$ y sus raíces son $-1, 1$ y 2. Por lo tanto, una base de $\mathcal{H}_3$ es $\{e^{-x}, e^x, e^{2x}\}$, y la solución del problema es

$$\psi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}.$$

Ejemplo 4.4 Resolver la ecuación diferencial $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$.
Solución. El polinomio característico es $p(r) = r^5 - 3r^4 + 3r^3 - r^2$ y sus raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = 1$ con multiplicidades $\nu_1 = 2$ y $\nu_2 = 3$ respectivamente. Por lo tanto, la solución general es

$$\psi(x) = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) e^x.$$

Observación 4.3 Al igual que en la Observación 3.5, si los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de (95) son *reales*, si el polinomio característico tiene una raíz compleja $\alpha + i\beta$ de multiplicidad ν, también tendrá com raíz *de igual multiplicidad*, ν, a su conjugada $\alpha - i\beta$. En consecuencia, formarán parte de una base de $\mathcal{H}_n$ las funciones

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, x e^{(\alpha+i\beta)x}, \cdots, x^{\nu-1} e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}, x e^{(\alpha-i\beta)x}, \cdots, x^{\nu-1} e^{(\alpha-i\beta)x},$$

o sinó, por los mismos argumentos que en la Observación 3.5, las siguientes funciones formarán parte de *otra* base de $\mathcal{H}_n$

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \cdots, x^{\nu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{\nu-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Ejemplo 4.5 Resolver $y^{(7)} + 18y^{(5)} + 81y''' = 0$
Solución. El polinomio característico

$$\begin{aligned} p(r) = r^7 + 18y^5 + 81y^3 &= r^3(r^4 + 18r^2 + 81) \\ &= r^3(r^2 + 9)^2 \\ &= r^3[(r + 3i)(r - 3i)]^2, \end{aligned}$$

tiene una raíz triple $r_1 = 0$ y dos raíces dobles $r_2 = -3i$ y $r_3 = 3i$. En consecuencia, una solución general es de la forma

$$\psi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_4 \cos 3x + c_5 \operatorname{sen} 3x + c_6 x \cos 3x + c_7 x \operatorname{sen} 3x.$$

Ejercicios

1. Resolver los siguientes problemas a valores iniciales

(a) $y''' = 0, \quad y(2) = 12,\ y'(2) = 16,\ y''(2) = 8$
(b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 10$
(c) $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$
(d) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 3$
(e) $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -10,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 40.$
(f) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = 12,\ y'(0) = -12,\ y''(0) = 6.$

2. **Ecuación de Euler-Cauchy** Dada la ecuación de Euler-Cauchy de orden n con coeficientes *reales*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \tag{97}$$

generalizar los resultados obtenidos para la de segundo orden, y demostrar que si $r_1, \cdots, r_s$ son las diferentes raíces del polinomio característico correspondiente a (97), con multiplicidades $\nu_1, \cdots, \nu_s$ respectivamente, entonces las n funciones

$$\begin{array}{llll} |x|^{r_1}, & |x|^{r_1} \ln|x|, & \cdots & |x|^{r_1} \ln^{\nu_1 - 1}|x|; \\ |x|^{r_2}, & |x|^{r_2} \ln|x|, & \cdots & |x|^{r_2} \ln^{\nu_2 - 1}|x|; \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ |x|^{r_s}, & |x|^{r_s} \ln|x|, & \cdots & |x|^{r_s} \ln^{\nu_s - 1}|x|; \end{array}$$

forman una base de soluciones de (97), en cualquier intervalo I que no contenga a $x = 0$. **Nota:** cuando tenemos una raíz *compleja*, $r_j = \alpha + i\beta$, como su conjugada $\bar{r}_j = \alpha - i\beta$ también es raíz, cada par de funciones $(|x|^{r_j} \ln^k|x|, |x|^{\bar{r}_j} \ln^k|x|)$ se puede reemplazar por el par $(|x|^\alpha \ln^k|x| \cos(\alpha \ln|x|), |x|^\alpha \ln^k|x| \operatorname{sen}(\alpha \ln|x|))$.

3. Resolver

(a) $x^2 y''' + 3xy'' - 3y' = 0$
(b) $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$
(c) $x^3 y''' + 2x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$
(d) $x^3 y''' + 2x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0.$

4.2.2 La ecuación lineal no homogénea

Abordaremos ahora el problema de encontrar todas las soluciones de la ecuación (92)

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x),$$

siendo $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ y $b(x)$ funciones continuas en el intervalo I.
Supongamos, como en el caso de ecuaciones de segundo orden, que ψ_p es una solución particular conocida de esta ecuación y que $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ es una base de $\mathcal{H}_n$. Entonces, razonando como en aquel caso, resulta que toda solución ψ de $L(y) = b(x)$ puede escribirse en la forma:

$$\psi = \psi_p + c_1 \psi_1 + \cdots + c_n \psi_n,$$

con lo que el problema de hallar todas las soluciones de (92) se reduce a halla una solución particular ψ_p y una base de $\mathcal{H}_n$.

Sea $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ una base de $\mathcal{H}_n$. Entonces, si generalizamos el método de *variación de los parámetros* para encontrar en I una solución particular de (92). Si planteamos una solución particular de la forma

$$\psi_p(x) = u_1(x)\psi_1(x) + \cdots + u_n(x)\psi_n(x),$$

el siguiente teorema, cuya demostración damos en el Apéndice, da el procedimiento para hallar tal solución particular.

Teorema 4.5 Toda solución ψ de (92) en un intervalo donde $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ y $b(x)$ son continuas puede escribirse en la forma

$$\psi = \psi_p + c_1\psi_1 + \cdots + c_n\psi_n,$$

con $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ una base de $\mathcal{H}_n$, $c_1, \ldots, c_n$ constantes y ψ_p una solución particular dada por

$$\psi_p(x) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x) \int \frac{W_k(x)b(x)}{W(\psi_1, \cdots, \psi_n)(x)} dx, \tag{98}$$

siendo W_k es el determinante que se obtiene de $W(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ reemplazando la k-ésima columna (esto es $\psi_k, \psi_k', \cdots, \psi_k^{(n-1)}$) por $0, 0, \cdots, 1$, y donde cada integral representa una primitiva del integrando.

Ejemplo 4.6 Resolver la ecuación no homogénea de Euler-Cauchy siguiente:

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x, \quad (x > 0).$$

Solución. Comenzamos por escribir la ecuación en la forma (92):

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = x \ln x.$$

Es fácil comprobar que una base de $\mathcal{H}_3$ es en este caso $\{x, x^2, x^3\}$, con lo que

$$W(x, x^2, x^3)(x) = \det \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} = 2x^3 \quad W_1(x) = \det \begin{bmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{bmatrix} = x^4$$

$$W_2(x) = \det \begin{bmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{bmatrix} = -2x^3 \qquad W_3(x) = \det \begin{bmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = x^2.$$

Entonces, de acuerdo con (4.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &= x \int \frac{x}{2} x \ln x \, dx - x^2 \int x \ln x \, dx + x^3 \int \frac{1}{2x} x \ln x \, dx \\ &= \frac{x^4}{6} \left(\ln x - \frac{11}{6} \right), \end{aligned}$$

y la solución general pedida es

$$\psi(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \frac{x^4}{6} \left(\ln x - \frac{11}{6} \right).$$

Ejercicios

1. Encontrar la solución general de

   (a) $y''' - 3y' - y = x^{1/2}e^x$
   (b) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4 \operatorname{senh} x$
   (c) $xy''' + 3y'' = e^x$
   (d) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^{-2}$.

Método de los coeficientes indeterminados
Es posible generalizar el método de los *coeficientes indeterminados* a las ecuaciones lineales no homogéneas de orden n a coeficientes constantes del tipo

$$L(y) = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = \sum_{j=1}^{l} q_j(x)e^{\mu_j x}, \tag{99}$$

siendo $q_j(x)$ un polinomio de grado d_j. Teniendo nuevamente en cuenta el principio de superposición (ver Observación 3.6), consideraremos la ecuación

$$L(y) = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = q(x)e^{\mu x}, \tag{100}$$

con $q(x)$ un polinomio de grado d,

$$q(x) = \sum_{k=0}^{d} q_k x^k.$$

Procediendo como en el caso de segundo orden, se puede ver que valen las siguientes generalizaciones del Teorema 3.6 y del Corolario 3.1:

Teorema 4.6 La ecuación (100) tiene una solución particular de la forma

$$\psi_p(x) = s(x)e^{\mu x},$$

donde $s(x) = x^\nu h(x)$; ν es la multiplicidad de μ como raíz del polinomio característico $p(r) = r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n$ y $h(x)$ es un polinomio de grado d,

$$h(x) = \sum_{k=0}^{d} h_k x^k.$$

Corolario 4.1 Si $q_j(x)$ es un polinomio de grado d_j y μ_j es una raíz del polinomio característico de multiplicidad ν_j, entonces la ecuación (99) tiene una solución particular de la forma

$$\psi_p(x) = \sum_{j=1}^{l} x^{\nu_j} h_j(x)e^{\mu_j x},$$

donde $h_j(x)$ es un polinomio de grado d_j,

$$h_j(x) = \sum_{k=0}^{d_j} h_{jk} x^k.$$

Ejemplo 4.7 Resolver $y^{(4)} - y = 4.5e^{-2x}$.
Solución. El polinomio característico $p(r) = r^4 - 1$ tiene las raíces $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = i$ y $r_4 = -i$. Por lo tanto, una base de $\mathcal{H}_4$ es $\{e^x,\ e^{-x}, \cos x,\ \operatorname{sen} x\}$. Además, en términos del Teorema 4.6, $d = 0$, $q(x) = 4.5$, $\mu = -2$, y en consecuencia $\nu = 0$. Entonces, una solución particular será de la forma

$$\psi_p(x) = h_0 e^{-2x}.$$

Reemplazando esta solución propuesta en la ecuación diferencial, obtenemos

$$(-2)^4 h_0 e^{-2x} - h_0 e^{-2x} = 4.5e^{-2x} \ \Rightarrow h_0 = 0.3,$$

y la solución pedida es

$$\psi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + 0.3e^{-2x}.$$

Ejemplo 4.8 Dada $y''' - 3y'' + 3y' - y = 30e^x$, hallar una solución general.
Solución. En este caso, el polinomio característico $p(r) = r^3 - 3r^2 + 3r - 1$ tiene una raíz triple $r_1 = 1$, y una base de $\mathcal{H}_3$ es en este caso $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$. Además $q(x) = 30$, $d = 0$, $\mu = 1$ y $\nu = 3$, con lo que, de acuerdo con el Teorema 4.6, una solución particular será de la forma

$$\psi_p(x) = h_3 x^3 e^x.$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, y omitiendo el factor común e^x, se obtiene

$$(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)h_3 - 3(x^3 + 6x^2 + 6x)h_3 + 3(x^3 + 3x^2)h_3 - x^3 h_3 = 30,$$

con lo que simplificando, obtenemos $h_3 = 5$. En consecuencia, la solución general es

$$\psi(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x + 5x^3 e^x.$$

Ejemplo 4.9 Resolver el problema a valores iniciales

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4, \ \ y(0) = 5, \ y'(0) = -5, \ \ y''(0) = 1.$$

Solución. De acuerdo con el Ejemplo 4.3, las raíces del polinomio característico son $-1, 1$ y 2, y una base de $\mathcal{H}_3$ es $\{e^{-x}, e^x, e^{2x}\}$.
Como $q(x) = 2x^2 - 6x + 4$ tiene grado $d = 2$, y al ser $\mu = 0$ es $\nu = 0$, resulta que una solución particular es de la forma

$$\psi_p(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos

$$-2 \cdot 2h_2 - (2h_2 x + h_1) + 2(h_2 x^2 + h_1 x + h_0) = 2x^2 - 6x + 4.$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x obtenemos $h_0 = 3$, $h_1 = -2$ y $h_2 = 1$, con lo que la solución general del problema es

$$\psi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + x^2 - 2x + 3.$$

Si $y(x)$ es la solución que verifica las condiciones iniciales, debe cumplir

$$\begin{array}{lll} y(0) & = c_1 + c_2 + c_3 + 3 & = 5, \\ y'(0) & = -c_1 + c_2 + 2c_3 - 2 & = -5, \\ y''(0) & = c_1 + c_2 + 4c_3 + 2 & = 1. \end{array}$$

resolviendo este sistema, obtenemos $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ y $c_3 = -1$. La respuesta pedida es, pues,

$$y(x) = 2e^{-x} + e^x - e^{2x} - 2x + 3.$$

Ejemplo 4.10 Resolver $y^{(5)} + 4y''' = e^x + 3\operatorname{sen} 2x$.
Solución. El polinomio característico es $p(r) = r^5 + 4r^3 = r^3(r^2+4)$, que tiene a $r_1 = 0$ como raíz triple y a $r_2 = 2i$ y $r_3 = -2i$ como raíces simples. Por lo tanto, una base de $\mathcal{H}_5$ es $\{1, x, x^2, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x\}$. Dado que tenemos la función $\operatorname{sen} 2x$, para encontrar la solución particular, resolveremos de acuerdo a lo ya visto para ecuaciones de segundo orden, el problema

$$y^{(5)} + 4y''' = e^x + 3e^{i2x}.$$

En términos del Corolario 4.1 tenemos $q_1(x) = 1$, $d_1 = 0$, $\mu_1 = 1$ y $\nu_1 = 0$, con lo que la primera solución particular será de la forma $\psi_{p1}(x) = h_{01}e^x$. Además $q_2(x) = 3$, $d_2 = 1$, $\mu_2 = 2i$ y $\nu_2 = 1$, con lo que la segunda solución particular ψ_{p2} será la parte imaginaria ψ_{p_I} de la solución propuesta, $h_{02}xe^{i2x}$. Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos:

$$\begin{array}{rl} h_{01}e^x + 4h_{01}e^x = e^x & \Rightarrow \; h_{01} = \dfrac{1}{5} \\ h_{02}(80 + 32ix)e^{2ix} + 4h_{02}(-12 - 8ix)e^{2ix} = 3e^{2ix} & \Rightarrow \; h_{02} = \dfrac{3}{32}, \end{array}$$

con lo que $\psi_{p1}(x) = \frac{1}{5}e^x$, $\psi_{p2}(x) = \frac{3}{32}x \operatorname{sen} 2x$ y la solución general es

$$\psi(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos 2x + c_5 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{5}e^x + \frac{3}{32}\operatorname{sen} 2x.$$

Ejercicios

1. Encontrar una solución general de cada una de las siguientes ecuaciones

   (a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 12e^{2x}$

   (b) $y''' - y' = 10\cos 2x$

   (c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 12e^x$

   (d) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 16e^x + x + 3$.

2. Resolver los siguientes problemas a valores iniciales

   (a) $y^{(4)} + y''' - 2y'' = -4x^2 + 18$, $y(1) = -3/2$, $y'(1) = -10/3$, $y''(1) = -2$, $y'''(1) = 6$.

   (b) $y''' + y'' - 2y = 2x^2 + 2x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -4$.

   (c) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 2\operatorname{senh} x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4.1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = -27.9$.

5 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

En esta sección trataremos brevemente el problema de encontrar la solución general (y como consecuencia el problema a valores iniciales asociado) para la ecuación diferencial vectorial de primer orden

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \tag{101}$$

con $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$. Si se dan las condiciones iniciales $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$, el Teorema 1.1 asegura la existencia y unicidad de las soluciones de (101) siempre que $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ verifique determinadas hipótesis. Si $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y}), \cdots, f_n(x, \mathbf{y}))$, entonces (101) se puede escribir en la forma de *sistema de ecuaciones diferenciales* de primer orden

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{102}$$

y las condiciones iniciales toman ahora la forma

$$y_1(x_0) = y_{01},\ y_2(x_0) = y_{02}, \cdots, y_n(x_0) = y_{0n}.$$

El método que daremos para la resolución del sistema (102) se basa en eliminar todas las funciones incógnita, salvo una que será solución, en general, de una ecuación ordinaria de orden n.
Es importante notar que el método sólo se puede aplicar en el caso en que las funciones $f_1, \cdots, f_n$ de (102) son derivables con continuidad respecto de *todas* sus variables un número suficiente de veces. Estableceremos pues, la siguiente hipótesis (que de acuerdo con cada caso se podrá debilitar):
H3. las funciones $f_1, \cdots, f_n$ en (102) admiten derivadas parciales continuas de orden n respecto de todas sus variables.
Si bien hay otros métodos de solución, en particular para los sistemas *lineales*, en los que

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = A(x)(\mathbf{y}) + \mathbf{g}(x), \quad A : I \to \mathcal{L}(R^n), \quad \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^n,$$

que no requieren (*en principio* pues los casos computacionalmente tratables si lo hacen) verificar **H3**, no los trataremos en este texto introductorio, ya que no presentan ventajas operatorias, por lo que su real importancia se manifiesta en la teoría *cualitativa* de Ecuaciones Diferenciales, teoría que por supuesto no trataremos aquí. De todas maneras el lector interesado encontrará tales métodos en la bibliografía que incluímos al final.

5.1 Integración por reducción a una sóla ecuación de mayor orden

Uno de los métodos fundamentales de integración de sistemas de ecuaciones diferenciales consiste en lo siguiente: de las ecuaciones del sistema (102) y de las ecuaciones obtenidas derivando éstas, se excluyen todas las funciones desconocidas, excepto una, para cuya determinación se obtiene una ecuación diferencial de orden mayor. Integando dicha ecuación, se halla una de las funciones desconocidas. Las funciones desconocidas restantes se determinan, en lo posible sin integración, partiendo de las ecuaciones originales y de las obtenidas por derivación. Ilustraremos lo antedicho con algunos ejemplos.

Ejemplo 5.1 Resolver,

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_1.$$

Solución. Derivando la primera ecuación respecto de x obtenemos $y_1'' = y_2'$, y reemplazando $y_2' = y_1$ mediante la segunda ecuación, se obtiene $y_1'' - y_1 = 0$, de donde $y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x}$. Utilizando la primera ecuación obtenemos $y_2 = y_1' = c_1e^x - c_2e^{-x}$.
Hemos determinado y_2 sin integrar, mediante la primera ecuación. Si hubiéramos determinado y_2 de la segunda ecuación,

$$y_2' = y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x}, \quad y_2 = c_1e^x - c_2e^{-x} + c_3,$$

entonces habríamos introducido soluciones superfluas, puesto que la sustitución directa en el sistema original muestra que las funciones $y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x}$ e $y_2 = c_1e^x - c_2e^{-x} + c_3$ satisfacen al sistema no para c_3 cualesquiera, sino para $c_3 = 0$.

Ejemplo 5.2 Resolver el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 2y_2 && (103)\\ y_2' &= 2y_1 - y_2. && (104) \end{aligned}$$

Derivemos la segunda ecuación

$$y_2'' = 2y_1' - y_2'. \tag{105}$$

De (104) y (105) determinamos y_1 e y_1':

$$y_1 = \frac{1}{2}(y_2' + y_2), \quad y_1' = \frac{1}{2}(y_2'' + y_2'). \tag{106}$$

Reemplazando en (103), obtenemos $y_2'' - 2y_2' + y_2 = 0$, con lo que $y_2(x) = (c_1 + c_2x)e^x$. Sustituyendo en (106) hallamos $y_1(x)$:

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(2c_1 + c_2 + 2c_2x)e^x.$$

Ejemplo 5.3 Resolver el problema a valores iniciales

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2\\ y_2' &= -y_1 - y_2\\ y_1(0) &= 1 \quad y_2(0) = 2. \end{aligned}$$

De la primera ecuación despejamos $y_2 = y_1' + y_1$, y reemplazándola en la segunda ecuación, obtenemos $y_2' = -y_1' - 2y_1$. En consecuencia, si derivamos la primera ecuación y reemplazamos estos valores, obtenemos la ecuación de segundo orden para y_1:

$$y_1'' = -2y_1' - 2y_1,$$

cuya solución general es

$$y_1(x) = c_1e^{-x}\cos x + c_2e^{-x}\operatorname{sen} x.$$

Reemplazando este valor en la expresión obtenida para y_2 en términos de y_1 e y_1', resulta

$$y_2(x) = y_1'(x) + y_1(x) = -c_1 e^{-x} \operatorname{sen} x + c_2 e^{-x} \cos x,$$

con lo que la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1 e{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \operatorname{sen} x \\ y_2(x) &= -c_1 e^{-x} \operatorname{sen} x + c_2 e^{-x} \cos x. \end{aligned}$$

Si hacemos $x = 0$ y consideramos las condiciones iniciales, tenemos $y_1(0) = c_1 = 1$, $y_2(0) = c_2 = 2$, y la solución del problema es

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e{-x} \cos x + 2e^{-x} \operatorname{sen} x \\ y_1(x) &= -e^{-x} \operatorname{sen} x + 2e^{-x} \cos x. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4 Resolver $y_1'' = y_2, \quad y_2'' = y_1$.
Solución. Derivando dos veces la primera ecuación, obtenemos $y_2'' = y_1^{(4)}$, y sustituyendo en la segunda ecuación, se tiene $y_1^{(4)} = y_1$. Integrando esta ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, obtenemos

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x,$$

y sustituyendo en la primera ecuación, se halla

$$y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 5.5 Resolver el siguiente problema a valores iniciales

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + y_2 + 3\cos x \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 - 2\cos x - 3\operatorname{sen} x, \\ y_1(0) &= 3, \quad y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Solución. A partir de la primera ecuación obtenemos $y_2 = y_1' + 3y_1 - 3\cos x$, y reemplazando ésta última en la segunda, sale $y_2' = -8y_1 - 3y_1' + 7\cos x - 3\operatorname{sen} x$, por lo que reemplazando y_2 e y_2' así obtenidas en la derivada de la primera ecuación

$$y_1'' = -3y_1' + y_2' - 3\operatorname{sen} x,$$

obtenemos la ecuación diferencial de segundo orde para y_1:

$$y_1'' = -6y_1' - 8y_1 + 7\cos x - 6\operatorname{sen} x,$$

cuya solución es, de acuerdo a lo ya visto,

$$y_1(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-2x} + \cos x,$$

por lo que, reemplazando en $y_2 = y_1' + 3y_1 - 3\cos x$, obtenemos

$$y_2(x) = -c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-2x} - \operatorname{sen} x.$$

En consecuencia, la solución general del problema es

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x} + \cos x \\ y_2(x) &= -c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x} - \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Evaluando estas ecuaciones en $x = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} y_1(0) &= c_1 + c_2 + 1 = 3 \\ y_2(x) &= -c_1 + c_2 = 0, \end{aligned}$$

de donde $c_1 = c_2 = 1$, y la solución del problema es

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-4x} + e^{-2x} + \cos x \\ y_2(x) &= -e^{-4x} + e^{-2x} - \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6 Masas y resortes en un sistema vibrante En el Ejemplo 3.13 vimos que los movimientos libres no atenuados de una masa que pende de un resorte están gobernados por la ecuación $my'' + ky = 0$, donde $y = y(t)$ es el desplazamiento de la masa. Utilizando los mismos argumentos para las dos masa y los dos resortes de la Figura 13, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} m_1y_1'' &= -k_1y_1 + k_2(y_2 - y_1) && (107) \\ m_2y_2'' &= -k_2(y_2 - y_1). && (108) \end{aligned}$$

para los desplazamientos (desconocidos) $y_1(t)$ de la masa m_1 y $y_2(t)$ de la m_2. Las fuerzas que actúan

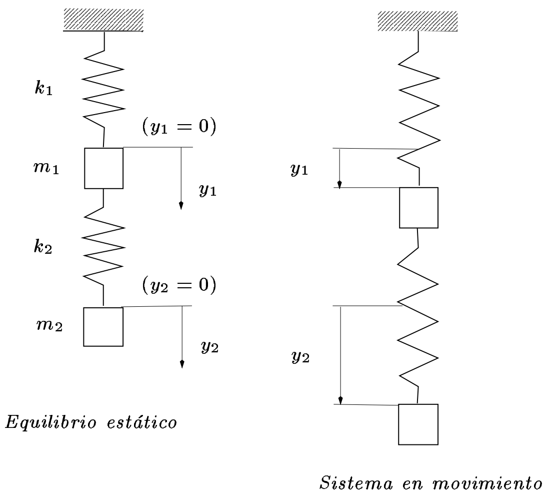

Figura 13: Sistema mecánico del Ejemplo 5.6

sobre la masa m_1 dan la primera ecuación y las que actúan sobre m_2 dan la segunda.
Si tomamos $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$, (107) se transforma en el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} y_1'' &= -5y_1 + 2y_2 \\ y_2'' &= 2y_1 - 2y_2. \end{aligned}$$

De la primera obtenemos $y_2 = \frac{1}{2}(y_1''+5y_1)$, y reemplazándola en la segunda obtenemos $y_2'' = -y_1''-3y_1$. Si ahora derivamos la primera ecuación dos veces y reemplazamos el valor de y_2'' así obtenido, llegamos a

$$y_1^{(4)} = -5y_1'' + 2y_2'' = -7y_1'' - 6y_1$$

cuya solución es

$$y_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos \sqrt{6}t + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{6}t.$$

A partir de ésta y de la expresión de y_2 en términos de y_1 e y_1'', obtenemos

$$y_2(t) = 2c_1 \cos t + 2c_2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{2}c_3 \cos \sqrt{6}t - \frac{1}{2}c_4 \operatorname{sen} \sqrt{6}t,$$

por lo que el movimiento de las masas viene regido por

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos \sqrt{6}t + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{6}t \\ y_2(t) &= 2c_1 \cos t + 2c_2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{2}c_3 \cos \sqrt{6}t - \frac{1}{2}c_4 \operatorname{sen} \sqrt{6}t. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.7 El tanque T_1 de la Figura 14 contiene inicialmente 100 litros de agua pura, el tanque T_2, 100 litros de agua en los que hay disueltos 90 gramos de sal. El líquido se bombea a través del sistema como se indica en la figura, y las concentraciones en los tanques se mantienen uniformes mediante mezclado. Encontrar las cantidades de sal $y_1(t)$ e $y_2(t)$ en T_1 y T_2, respectivamente.

Solución.a) Modelado: la variación de y_1 respecto de t es iguala la cantidad de sal entrante $\frac{4}{100}y_2$

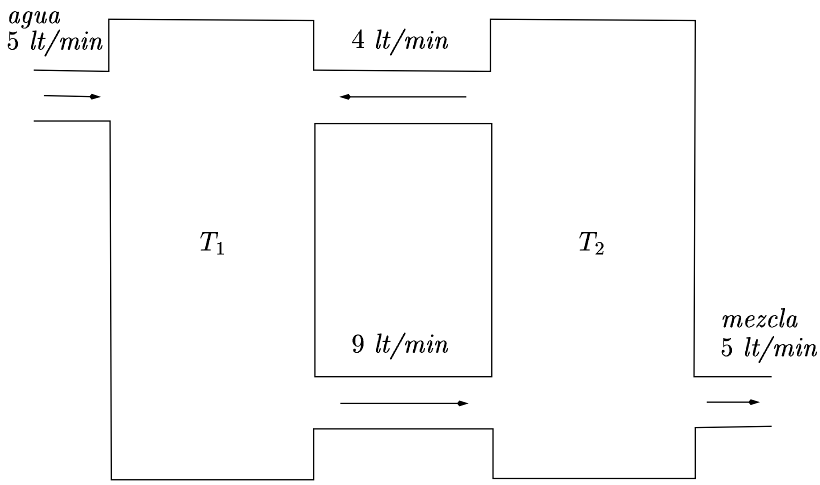

Figura 14: Tanques del Ejemplo 5.7

gr/min menos la cantidad saliente $\frac{9}{100}y_1$ gr/min. La cantidad de sal entrante al tanque T_2 es $\frac{9}{100}y_1$ gr/min y la que sale, $\frac{9}{100}y_2$ gr/min. Por lo tanto, las cantidades de sal en los tanques evolucionan según la ley

$$y_1' = -\frac{9}{100}y_1 + \frac{4}{100}y_2 \tag{109}$$

$$y_2' = \frac{9}{100}y_1 - \frac{9}{100}y_2. \tag{110}$$

b) Resolución del sistema: de la primera ecuación obtenemos

$$y_2 = \frac{9}{4}y_1 + \frac{100}{4}y_1',$$

y reemplazando en la segunda,

$$y_2' = -\frac{45}{400}y_1 - \frac{9}{4}y_1'.$$

Derivando la primera ecuación de (109) y reemplazando, obtenemos

$$y_1'' = -\frac{18}{100}y_1' - \frac{180}{40000}y_1,$$

cuya solución es

$$y_1(t) = c_1 e^{-0.15t} + c_2 e^{-0.03t}.$$

A partir de esta ecuación y de la expresión de y_2 en términos de y_1 e y_1', sale

$$y_2(t) = -1.5c_1 e^{-0.15t} + 1.5c_2 e^{-0.03t}.$$

Reemplazando las condiciones iniciales para $t = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} y_1(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y_2(0) &= -1.5c_1 + 1.5c_2 = 90, \end{aligned}$$

con lo que $c_1 = -30, \quad c_2 = 30$, y la solución del problema es

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 30e^{-0.03t} - 30e^{0.15t} \text{ gr} \\ y_2(t) &= 45e^{-0.15t} + 45e^{-0.03t} \text{ gr}. \end{aligned}$$

Justificación del método.
Describiremos ahora más exactamente el proceso de eliminación de todas las funciones incógnitas, excepto una, del sistema. Demostremos previamente que una de las funciones desconocidas, por ejemplo $y_1(x)$, que figura en la solución $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ del sistema de ecuaciones diferenciales (102) satisface cierta ecuación de n-ésimo orden. Consideraremos en este caso que todas las funciones f_i poseen derivadas parciales continuas respecto a todos los argumentos, de hasta $(n-1)$-ésimo orden inclusive. Al poner en el sistema (102) cierta solución $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$, todas las ecuaciones de éste se reducen a identidades. En particular, la primera ecuación

$$y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$$

del sistema se reduce a una identidad. Derivando esta identidad con respecto a x

$$\begin{aligned} y_1'' &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} y_j', \quad \text{o bien} \\ y_1'' &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} f_j, \end{aligned} \tag{111}$$

y designando el segundo miembro de la última identidad por $F_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$, obtenemos

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \tag{112}$$

Derivando nuevamente esta identidad:

$$\begin{aligned} y_1''' &= \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_j} y_j', \quad \text{o bien} \\ y_1''' &= \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_j} f_j, \end{aligned} \tag{113}$$

y designando el segundo miembro de la última identidad por $F_3(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$, obtenemos:

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \tag{114}$$

Derivando una vez más esta identidad, y continuando este proceso $n-2$ veces, obtenemos por último la identidad

$$y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \cdots, y_n); \tag{115}$$

derivándola y utilizando las identidades (102), tendremos:

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \tag{116}$$

De esta manera, hemos obtenido $n-1$ identidades

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_1'' &= F_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ y^{(n-1)} &= F_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{117}$$

y además la identidad (116).

Supongamos que el determinante Jacobiano

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \det \frac{\partial(f_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(y_2, y_3, \cdots, y_n)} \neq 0 \tag{118}$$

en la región considerada de variación de las variables. Entonces, por el Teorema de las Funciones Implícitas, el sistema (117) se puede resolver respecto a $y_2, \cdots, y_n$, expresándolas mediante las variables $x, y_1, y_1', \cdots, y^{(n-1)}$. Sustituyendo en la ecuación (116) las variables $y_2, y_3, \cdots, y_n$, halladas del sistema (117), obtenemos la ecuación de n-ésimo orden

$$y^{(n)} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \cdots, y^{(n-1)}\right), \tag{119}$$

la cual es satisfecha por la función $y_1(x)$, que era, por hipótesis, la primera función $y_1(x)$ de la solución $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ del sistema (102).

Demostremos ahora que si se toma cualquier solución $y_1(x)$ de la ecuación de n-ésimo orden (119), se sustituye en el sistema (117) y se determinan de éste $y_2(x), y_3(x), \cdots, y_n(x)$, entonces el sistema de funciones

$$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$$

es solución del sistema (102).
Sustituyendo este conjunto de funciones en el sistema (117), todas las ecuaciones de éste se reducen a identidades; en particular, se obtiene la identidad

$$y_1' \equiv f_1(x, y_1, \cdots, y_n).$$

Derivándola con respecto a x, tendremos

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} y_j'. \tag{120}$$

En esta identidad, por ahora, no es posible sustituir las y_j' por las funciones f_j, ya que aún no hemos demostrado que las funciones obtenidas $y_1, y_2, \cdots, y_n$ por el método expuesto anteriormente, a partir de (120) - (117) satisfacen el sistema (102), ya que precisamente esta afirmación constituye la finalidad de esta demostración.
Restando miembro a miembro la segunda identidad de (117) y (120) tomada en la forma desarrollada (111), obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(y_j' - f_j) \equiv 0,$$

o bien, debido a la primera identidad de (117),

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(y_j' - f_j) \equiv 0.$$

En forma completamente análoga, derivando la segunda identidad de (117) y restándole (113), etc., obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(y_j' - f_j) & \equiv & 0 \\ \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_j}(y_j' - f_j) & \equiv & 0 \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_j}(y_j' - f_j) & \equiv & 0. \end{array}\right. \tag{121}$$

Como el determinante de este sistema de $n-1$ ecuaciones lineales homogéneas con $n-1$ incógnitas $(y_j' - f_j,\ j = 2, \cdots, n)$, coincide con el determinante Jacobiano (118) que es no nulo en la región considerada, el sistema (121) tiene en dicha región sólo soluciones triviales:

$$y_j' - f_j \equiv 0, \quad (j = 2, 3, \cdots, n).$$

Tomando en cuenta además la primera ecuación de (117), concluímos que las n funciones $y_1, y_2, \cdots, y_n$ son soluciones del sistema (102).

En el siguiente ejemplo, *a modo de ilustración* resolveremos un problema aplicando los pasos de este análisis. El lector debería examinar cuidadosamente éste y los ejemplos anteriores, con el fin de verificar en aquellos la corrección del procedimiento de solución empleado. *En la práctica, sin embargo, es preferible utilizar este procedimiento, y no el método que se obtiene del análisis y que pasamos a exponer.*

Ejemplo 5.8 Encontrar una solución general de

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' &= 2y_1 - y_2 \end{aligned}$$

Solución. Seguiremos los pasos del análisis anterior.
En este caso $f_1(x, y_1, y_2) = y_1 - y_2 + y_3$, $f_2(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 - y_3$ y $f_3(y_1, y_2, y_3) = 2y_1 - y_2$, por lo que

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} f_2 + \frac{\partial f_3}{\partial y_3} f_3 \\ &= f_1 - f_2 + f_3 = 2y_1 - 3y_2 + 2y_3, \\ F_3 &= \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} f_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y_3} f_3 \\ &= 2f_1 - 3f_2 + 2f_3 = 3y_1 - 7y_2 + 5y_3. \end{aligned}$$

En consecuencia, el sistema (119) es, en este caso,

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + y_3 \\ y_1'' &= 2y_1 - 3y_2 + 2y_3, \end{aligned}$$

y como el determinante Jacobiano

$$\det \frac{\partial(f_1, F_2)}{\partial(y_2, y_3)} = 1,$$

podemos despejar del sistema anterior y_2 e y_3 en función de y_1, y_1' e y_1''; resolviendo, obtenemos

$$y_2 = 2y_1' - y_1'', \quad y_3 = -y_1 + 3y_1' - y_1''. \tag{122}$$

En este caso, (116) es $y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, y_3)$, con lo que reemplazando las expresiones de F_3, y_2 e y_3, obtenidas, llegamos a que (119) será

$$\begin{aligned} y_1''' &= \Phi(x, y_1, y_1', y_1'') \\ &= 2y_1'' + y_1' - 2y_1, \end{aligned}$$

cuya solución general es

$$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}.$$

Reemplazando esta expresión en (122), obtenemos

$$y_2(x) = c_1 e^x - 3c_2 e^{-x}, \quad y_3(x) = c_1 e^x - 5c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x},$$

con lo que la solución pedida es

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} \\ y_2(x) &= c_1e^x - 3c_2e^{-x} \\ y_3(x) &= c_1e^x - 5c_2e^{-x} + c_3e^{2x}. \end{aligned}$$

Observación 5.1 El proceso indicado más arriba de eliminación de todas las funciones, con excepción de una, presupone que

$$\det \frac{\partial(f_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(y_2, y_3, \cdots, y_n)} \neq 0. \tag{123}$$

Si esta condición no se cumple, se puede utilizar el mismo proceso, pero en lugar de la función y_1, tomar cualquier función de las $y_2, y_3, \cdots, y_n$ que forman la solución del sistema (102). Si la condición (123) no se cumple al escoger cualquier función de las $y_2, y_3, \cdots, y_n$ en lugar de y_1, entonces son posibles diferentes casos excepcionales, que ilustraremos con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.9

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1), \\ y_2' &= f_2(x, y_2), \\ y_3' &= f_3(x, y_3). \end{aligned}$$

El sistema se descompone en ecuaciones completamente independientes entre sí, cada una de las cuales debe integrarse por separado.

Ejemplo 5.10

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1), \\ y_2' &= f_2(x, y_2, y_3), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_3} \neq 0 \\ y_3' &= f_3(x, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones se pueden reducir a una ecuación de segundo orden por el método señalado anteriormente; pero la primera ecuación, que contiene la función desconocida y_1, la cual no figura en las ecuaciones restantes, debe ser integrada por separado.

Observación 5.2 Si aplicamos el proceso de eliminación indicado anteriormente al sistema *lineal no homogéneo*

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + g_i(x), \quad (i = 1, \cdots, n)$$

entonces, como es fácil comprobar, la ecuación de n-ésimo orden

$$y_1^{(n)} = \Phi(x, y_1, y_1', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{124}$$

también será lineal no homogénea. Además, si todos los coeficientes a_{ij} son constantes, la ecuación (124) será también lineal no homogénea a coeficientes constantes. Una observación similar se cumple para el sistema *lineal homogéneo*

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

para el cual (124) será una ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden.

Ejercicios
Resolver los siguientes problemas a valores iniciales.

1. $\begin{array}{rcl} y_1' &=& 4y_1 - 8y_2 + 2\cosh x \\ y_2' &=& 2y_1 - 6y_2 + \cosh x + 2\,\mathrm{senh}\, x \end{array} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$

2. $\begin{array}{rcl} y_1' &=& y_2 - 5\tan x \\ y_2' &=& -4y_1 + 17\cos x \end{array} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0$

3. $\begin{array}{rcl} xy_1' &=& -y_1 + y_2 \\ x^2 y_2' &=& 3y_1 + x^3 \ln x \end{array}, \quad y_1(1) = 2 \quad y_2(1) = 1$

4. $\begin{array}{rcl} y_1' &=& 4y_1 - 8y_2 + 2\cosh x \\ y_2' &=& 2y_1 - 6y_2 + \cosh x + 2\,\mathrm{senh}\, x \end{array}$

5. $\begin{array}{rcl} y_1' &=& 4y_1 - 8y_2 + 2\cosh x \\ y_2' &=& 2y_1 - 6y_2 + \cosh x + 2\,\mathrm{senh}\, x \end{array}$

6 Apéndice

6.1 Demostración de la Proposición 2.1

Sean $\mathcal{R} \subset I_x \times I_y$ el conjunto definido en (9) (para $n = 1$). Entonces, de acuerdo con el Teorema 1.1, la ecuación (12)

$$h(y)y' = g(x)$$

con las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ tiene una única solución definida en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I_x$.
Supongamos que $\psi(x)$ es tal solución; como verifica (12), tendremos $h(\psi(x))\psi'(x) = g(x)$, y si integramos esta identidad , obtenemos

$$\int_{x_0}^{x} h(\psi(\tau))\psi'(\tau)d\tau = \int_{x_0}^{x} g(t)dt,$$

para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Dado que con el cambio de variables $u = \psi(\tau)$, se tiene $du = \psi'(\tau)d\tau$, resulta

$$\int_{y_0}^{\psi(x)} h(u)du = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

ya que $\psi(x_0) = y_0$. Por consiguiente, si H y G son primitivas de h y g respectivamente, llegamos a que la solución ψ verifica:

$$H(\psi(x)) - H(y_0) = G(x) - G(x_0).$$

Si consideremos la función $F(x, y)$ definida en $\mathcal{R}$ por

$$F(x, y) = H(y) - G(x) + G(x_0) - H(y_0),$$

entonces ψ verifica $F(x, \psi(x)) = 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Recíprocamente, notemos que F admite en $\mathcal{R}$ derivadas parciales primeras continuas pues, por la regla de Leibniz,

$$F_x(x, y) := \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -g(x), \quad F_y(x, y) := \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = h(y),$$

y además $F(x_0, y_0) = 0$ y $F_y(x_0, y_0) = h(y_0) \neq 0$.
Por lo tanto, por el teorema de la Función Implícita, existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I_x$, y una única función $\psi : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to I_y$ que verifica:

- $F(x, \psi(x)) = 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. En particular $y_0 = \psi(x_0)$.
- ψ es derivable con continuidad y

$$\psi'(x) = -\left.\frac{F_x}{F_y}\right|_{(x,\psi(x))} = -\left.\frac{-g(x)}{h(y)}\right|_{(x,\psi(x))} = \frac{g(x)}{h(\psi(x))}.$$

De esta última ecuación sale que $h(\psi(x))\psi'(x) = g(x)$ en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, y entonces $\psi(x)$ es solución de la ecuación (12) es ese intervalo.
Dado que (x_0, y_0) es arbitario, una solución general se podrá obtener para *cualquier* $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$, haciendo $F(x, y) = H(y) - G(x) - c$, con $H(y) = \int h(y)dy$ y $G(x) = \int g(x)dx$, resolviendo en y la ecuación implícita $F(x, y) = 0$ y ajustando c de forma que $F(x_0, y_0) = 0$.

6.2 Demostración del Teorema 3.2

Sea x_0 un punto de I. Entonces, de acuerdo con la Observación 3.2, existen una única solución ϕ_1 de $L(y) = 0$ y una única solución $\phi_2(x)$ de $L(y) = 0$ que satisfacen, respectivamente,

$$\begin{aligned} \phi_1(x_0) &= 1, & \phi_1'(x_0) &= 0 \\ \phi_2(x_0) &= 0, & \phi_2'(x_0) &= 1; \end{aligned} \tag{125}$$

estas dos funciones son linealmente independientes. En efecto, supongamos que existen dos escalares c_1 y c_2 tales que

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = 0;$$

Entonces se debe verificar

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = 0\ \ \forall x \in I \Rightarrow c_1\phi_1'(x) + c_2\phi_2'(x) = 0\ \ \forall x\ :\ a < x < b.$$

En particular, esto debe cumplirse para x_0:

$$\begin{aligned} 0 &= c_1\phi_1(x_0) + c_2\phi_2(x_0) = c_1 \\ 0 &= c_1\phi_1'(x_0) + c_2\phi_2'(x_0) = c_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $c_1 = c_2 = 0$ y ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes.
Sea ahora ϕ cualquier solución de $L(y)$; veremos que existen constantes d_1 y d_2 tales que $\phi = d_1\phi_1 + d_2\phi_2$ en I. En otras palabras, queremos ver que ϕ_1 y ϕ_2 generan $\mathcal{H}_2$.
Sean $\phi(x_0) = \alpha_1$, $\phi'(x_0) = \alpha_2$, y consideremos la función

$$\psi(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x).$$

Como ψ es combinación lineal de ϕ_1 y ϕ_2, $\phi \in \mathcal{H}_2$ y además

$$\begin{aligned} \psi(x_0) &= \alpha_1\phi_1(x_0) + \alpha_2\phi_2(x_0) = \alpha_1, \\ \psi'(x_0) &= \alpha_1\phi_1'(x_0) + \alpha_2\phi_2'(x_0) = \alpha_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ψ es una solución de $L(y) = 0$ que satisface las mismas condiciones iniciales en x_0 que ϕ. Entonces, de acuerdo con la Observación 3.2, debe ser $\psi = \phi$, esto es

$$\phi = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2,$$

con lo que $d_1 = \alpha_1 = \phi(x_0)$ y $d_2 = \alpha_2 = \phi'(x_0)$.
En consecuencia, $\{\phi_1, \phi_2\}$ es una base de $\mathcal{H}_2$ y el teorema queda probado.

6.3 Demostración del Teorema 3.3

($\Rightarrow$) Supongamos que para todo $x \in I$ $W(\psi_1, \psi_2)(x) = 0$ y consideremos, para un $x_0 \in I$ fijo, el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{aligned} c_1\psi_1(x_0) + c_2\psi_2(x_0) &= 0 \\ c_1\psi_1'(x_0) + c_2\psi_2'(x_0) &= 0 \end{aligned} \right. \tag{126}$$

en las incógnitas c_1 y c_2. Este sistema es homogéneo, con determinante $W(\psi_1, \psi_2)(x_0)$, que es 0 por hipótesis. En consecuencia el sistema (126) tiene una solución $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Consideremos ahora la función

$$\psi(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x);$$

$\psi \in \mathcal{H}_2$ y verifica, de acuerdo con (126) $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0$ Ahora bien, dado que $\psi^\star \equiv 0$ es otra solución de $L(y) = 0$ que satisface las mismas condiciones iniciales, entonces de acuerdo con el Teorema 3.1 de existencia y unicidad de soluciones, $\psi \equiv \psi^\star$, esto es

$$c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

En consecuencia, ψ_1 y ψ_2 son linealmente dependientes y $\mathcal{B}'$ no es base de $\mathcal{H}_2$.
($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\mathcal{B}'$ no es una base de $\mathcal{H}_2$; por lo tanto ψ_1 y ψ_2 son linealmente dependientes en I, por lo que existen constantes c_1 y c_2 no simultáneamente nulas tales que $c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) = 0$

para todo $x \in I$. Derivando esta igualdad, resulta $c_1\psi_1'(x) + c_2\psi_2'(x) = 0$ para todo $x \in I$. En consecuencia, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) & = & 0 \\ c_1\psi_1'(x) + c_2\psi_2'(x) & = & 0 \end{array} \right. \tag{127}$$

tiene solución $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ para todo $x \in I$, y por lo tanto su determinante, $W(\psi_1, \psi_2)(x)$ se anula cualquiera sea $x \in I$.
Supongamos ahora que para algún $x_0 \in I$, $W(\psi_1, \psi_2)(x_0) \neq 0$. Entonces $\{\psi_1, \psi_2\}$ es una base de $\mathcal{H}_2$ de acuerdo con la segunda parte $(\Leftarrow)$ de la demostración. Sea ahora $\tilde{x}_0 \in I$ arbitrario; entonces, procediendo como en la primera parte $(\Rightarrow)$ con $\tilde{x}_0$ en vez de x_0, se tiene $W(\psi_1, \psi_2)(\tilde{x}_0) \neq 0$.

6.4 Demostración del Teorema 3.4

Dado que e^{rx} no se anula nunca, será una solución de

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{128}$$

si r es una raíz del polinomio característico $p(r)$, es decir, si $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$. Sabemos que el polinomio $p(r)$ siempre tiene dos raíces complejas r_1 y r_2 (las cuales pueden ser reales). Si $r_1 \neq r_2$, entonces $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$ son dos soluciones linealmente independientes de (59). En efecto, en este caso

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})(x_0) = \det \begin{bmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & r_2 e^{r_2 x_0} \end{bmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x_0} \neq 0.$$

También es posible hallar diferentes soluciones en el caso en que $r_1 = r_2$. Recordemos que si r_1 es raíz doble de $p(r)$, se verifica no sólo $p(r_1) = 0$ sino también $p'(r_1) = 0$, lo que nos sugiere derivar

$$L(e^{rx}) = (r^2 + a_1 r + a_2)e^{rx} = p(r)e^{rx}, \tag{129}$$

respecto de r:

$$\frac{\partial}{\partial r} L(e^{rx}) = L\left(\frac{\partial}{\partial r} e^{rx}\right) = L(xe^{rx}),$$

dado que L involucra solamente derivadas con respecto a x y por lo tanto conmuta con $\partial/\partial r$. Finalmente, derivando el último término de (129) respecto de r obtenemos

$$L(xe^{rx}) = [p'(r) + xp(r)]e^{rx},$$

por lo que haciendo $r = r_1$ en esta última ecuación vemos que $L(xe^{r_1 x}) = 0$, con lo que $xe^{r_1 x}$ es otra solución para el caso en que $r_1 = r_2$, y además $e^{r_1 x}$ y $xe^{r_1 x}$ son linealmente independientes, pues

$$W(e^{r_1 x}, xe^{r1x})(x_0) = \det \begin{bmatrix} e^{r_1 x_0} & x_0 e^{r_1 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & (1 + r_1 x_0)e^{r_1 x_0} \end{bmatrix} = e^{r_1 x_0} \neq 0.$$

6.5 Demostración del Teorema 3.5

Sea $\{\psi_1, \psi_2\}$ una base de $\mathcal{H}_2$ y supongamos que existe una solución particular $\psi_p = u_1\,\psi_1 + u_2\,\psi_2$ de $L(y) = b$; dado que tenemos dos incógnitas, u_1 y u_2, debemos tener dos ecuaciones a partir de las cuales obtenerlas. Una es, precisamente $L(y) = b$; la otra, que es arbitraria, la elegiremos de manera que ψ_p' tenga en lo posible la misma forma que adopta cuando se tiene las constantes c_1 y c_2 en vez de u_1 y u_2, es decir,

$$\begin{aligned} \psi_p' &= u_1'\psi_1 + u_1\psi_1' + u_2'\psi_2 + u_2\psi_2' \\ &= u_1\psi_1' + u_2\psi_2' \end{aligned}$$

con lo que la ecuación arbitraria que agregamos es

$$u_1'\psi_1 + u_2'\psi_2 = 0. \tag{130}$$

Entonces, si se cumple esta ecuación, resulta

$$\psi_p'' = u_1'\psi_1' = u_1\psi_1'' + u_2'\psi_2' + u_2\psi_2'',$$

con lo que reemplazando en $L(\psi_p) = b$, obtenemos

$$\begin{aligned} b(x) &= \psi_p'' + a_1(x)\psi_p' + a_2(x)\psi_p \\ &= u_1'\psi_1' = u_1\psi_1'' + u_2'\psi_2' + u_2\psi_2'' + a_1(x)(u_1\psi_1' + u_2\psi_2') + a_2(x)(u_1\psi_1 + u_2\psi_2) \\ &= u_1\,L(\psi_1) + u_2\,L(\psi_2) + u_1'\psi_1' + u_2'\psi_2' \\ &= u_1'\psi_1' + u_2'\psi_2', \end{aligned}$$

dado que ψ_1 y ψ_2 son funciones de $\mathcal{H}_2$.
Por lo tanto la otra ecuación que obtenemos acerca de u_1 y u_2 es

$$u_1'\psi_1' + u_2'\psi_2' = b(x). \tag{131}$$

De acuerdo con este razonamiento, si se puede hallar dos funciones u_1 y u_2 que satisfagan (130) y (131), entonces $\psi_p = u_1\psi_1 + u_2\psi_2$ satisfará la ecuación $L(y) = b(x)$.
Ahora bien (130) - (131) conforman el sistema en u_1' y u_2'

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1'\psi_1 + u_2'\psi_2 &=& 0 \\ u_1'\psi_1' + u_2'\psi_2' &=& b(x) \end{array} \right. , \tag{132}$$

cuyo determinante es precisamente el Wronskiano $W(\psi_1, \psi_2)$ que no se anula en I (¿ por qué?) y en consecuencia existe una solución única u_1', u_2'. Resolviendo este sistema, obtenemos para $x \in I$,

$$u_1'(x) = -\frac{\psi_2(x)b(x)}{W(\psi_1, \psi_2)(x)}, \qquad u_2'(x) = \frac{\psi_1(x)b(x)}{W(\psi_1, \psi_2)(x)},$$

por lo que integrando y tomando constantes de integración nulas (analizar cuál es la consecuencia de esta elección), obtenemos

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \frac{\psi_2(x)b(x)}{W(\psi_1, \psi_2)(x)}\,dx, \quad u_2(x) = \int \frac{\psi_1(x)b(x)}{W(\psi_1, \psi_2)(x)}\,dx \quad \text{y} \\ \psi_p(x) &= -\psi_1(x)\int \frac{\psi_2(x)b(x)}{W(\psi_1, \psi_2)(x)}\,dx + \psi_2(x)\int \frac{\psi_1(x)b(x)}{W(\psi_1, \psi_2)(x)}\,dx. \end{aligned}$$

6.6 Demostración del Teorema 3.6

Consideremos la ecuación

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = q(x)e^{\mu x}, \tag{133}$$

con $q(x)$ un polinomio de grado d,

$$q(x) = \sum_{k=0}^{d} q_k x^k.$$

Para una función $h(x)$ arbitraria que admite derivada segunda, es fácil comprobar que se verifica

$$L(h(x)e^{\mu x}) = [p(\mu)h(x) + p'(\mu)h'(x) + h''(x)]e^{\mu x},$$

siendo $p(\mu)$ el polinomio característico $\mu^2 + a_1\mu + a_2$. Supongamos ahora, y esta es la idea del método, que una solución particular de (133) es de la forma $\psi_p(x) = h(x)e^{\mu x}$, con $h(x)$ un *polinomio*. Entonces, de

$$[p(\mu)h(x) + p'(\mu)h'(x) + h''(x)]e^{\mu x} = q(x)e^{\mu x}$$

resulta

$$p(\mu)h(x) + p'(\mu)h'(x) + h''(x) = q(x) \tag{134}$$

y en consecuencia $h(x)$ debe ser un polinomio de grado d *por lo menos* y $d+2$ *a lo sumo* (en los casos en que $p(\mu) \neq 0$ y $(p(\mu) = p'(\mu) = 0$ respectivamente).
Veremos a continuación que *siempre* es posible obtener un polinomio $h(x)$ tal que $h(x)e^{\mu x}$ sea una solución particular de (133). Consideremos que $h(x)$ tiene en principio grado $d+2$,

$$h(x) = \sum_{k=0}^{d+2} h_k x^k;$$

entonces, derivando $h(x)$ y reemplazando en (134), se obtiene

$$\sum_{k=0}^{d+2} p(\mu)h_k x^k + \sum_{k=1}^{d+2} p'(\mu)k h_k x^{k-1} + \sum_{k=2}^{d+2} k(k-1)h_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{d} q_k x^k,$$

por lo que, haciendo cambios convenientes en las variables de sumación, se tiene

$$\sum_{k=0}^{d+2} p(\mu)h_k x^k + \sum_{k=0}^{d+1} p'(\mu)(k+1)h_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{d} (k+2)(k+1)h_{k+2} x^k = \sum_{k=0}^{d} q_k x^k.$$

Finalmente, agrupando los términos de igual potencia de x, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{d} [(k+2)(k+1)h_{k+2} + p'(\mu)(k+1)h_{k+1} + p(\mu)h_k - q_k]x^k \\ &+ p(\mu)h_{d+2}x^{d+2} + [p(\mu)h_{d+1} + p'(\mu)(d+2)h_{d+2}]x^{d+1} \end{aligned}$$

En consecuencia, los coeficientes de las diversas potencias de x deben anularse, con lo que

$$\begin{aligned} p(\mu)h_{d+2} &= 0 & (135)\\ p(\mu)h_{d+1} + p'(\mu)(d+2)h_{d+2} &= 0 & (136)\\ (k+2)(k+1)h_{k+2} + p'(\mu)(k+1)h_{k+1} + p(\mu)h_k - q_k &= 0, \quad 0 \leq k \leq d. & (137) \end{aligned}$$

Se plantea ahora tres casos de acuerdo a si μ es o no raíz del polinomio característico.
Caso I.*No es raíz.*
En este caso $p(\mu) \neq 0$; de (135) deducimos que $h_{d+2} = 0$ y a posteriori, de (136) que $h_{d+1} = 0$ y el resto de los coeficientes vienen dados por (137):

$$h_k = \frac{q_k - p'(\mu)(k+1)h_{k+1} - (k+2)(k+1)h_{k+2}}{p(\mu)}, \quad 0 \leq k \leq d,$$

que tiene solución recursiva, y como $q_d \neq 0$, $h_d = q_d/p(\mu) \neq 0$, es decir $h(x)$ es de grado d, y la solución particular es

$$\psi_p(x) = \sum_{k=1}^{d} h_k x^k e^{\mu x}.$$

Caso II.*Es raíz simple.*
Entonces $p(\mu) = 0$ y $p'(\mu) \neq 0$. Ni (135) ni (136) nos dan información acerca de h_{d+1}, pero de la última deducimos que $h_{d+2} = 0$. De (137), con $p(\mu) = 0$, obtenemos los coeficientes

$$h_{k+1} = \frac{q_k - (k+2)(k+1)h_{k+2}}{(k+1)p'(\mu)}, \quad 0 \leq k \leq d.$$

Como $h_{d+1} = q_d/[(d+1)p'(\mu)] \neq 0$, $h(x)$ es de grado $d+1$; el coeficiente h_0 queda indeterminado, y veremos seguidamente que lo podemos tomar $h_0 = 0$. En efecto, una solución particular es ahora

$$\tilde{\psi}_p(x) = h(x)e^{\mu x} = \left(\sum_{k=1}^{d+1} h_k x^k\right) e^{\mu x} + h_0 e^{\mu x},$$

y como $e^{\mu x}$ es una solución de la homogénea, y dos soluciones particulares difieren en una solución de la homogénea, podemos tomar como solución particular a

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &= \left(\sum_{k=1}^{d+1} h_k x^k\right) e^{\mu x} = x\left(\sum_{k=1}^{d+1} h_k x^{k-1}\right) e^{\mu x}\\ &= x\tilde{h}(x)e^{\mu x}, \quad \text{siendo}\\ \tilde{h}(x) &= \sum_{k=0}^{d} h_{k+1}x^k. \end{aligned}$$

Caso III.*Es raíz doble.*
En este caso $p(\mu) = p'(\mu) = 0$, y las ecuaciones (135) y (136) no aportan información acerca de h_{d+2} y de h_{d+1}. De (137) obtenemos

$$h_{k+2} = \frac{q_k}{(k+1)(k+2)}, \quad 0 \leq k \leq d.$$

Nuevamente, como $q_d \neq 0$, $h_{d+2} = q_d/(k+1)(k+2) \neq 0$ y $h(x)$ es de grado $d+2$; los coeficientes h_0 y h_1 quedan indeterminados, y a partir del hecho que $\{e^{\mu x}, xe^{\mu x}\}$ es ahora una base de soluciones, (¿por qué?), es fácil ver que se pueden tomar ambos iguales a cero. Entonces, razonando como en el Caso II, una solución particular será, en este caso,

$$\begin{aligned}
\psi_p(x) &= \left(\sum_{k=2}^{d+2} h_k x^k\right) e^{\mu x} = x^2 \left(\sum_{k=2}^{d+2} h_k x^{k-2}\right) e^{\mu x} \\
&= x^2 \hat{h}(x) e^{\mu x}, \quad \text{siendo} \\
\hat{h}(x) &= \sum_{k=0}^{d} h_{k+2} x^k.
\end{aligned}$$

6.7 Demostración del Teorema 4.4

Sea la ecuación

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{138}$$

entonces para cualquier r

$$L(e^{rx}) = (r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n) e^{rx} = p(r) e^{rx}, \tag{139}$$

por lo que ahora $p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n$ es el polinomio característico de L, o de (138).
Si r_1 es una raíz de $p(r)$, es claro que $L(e^{r_1 x}) = 0$ y entonces ya tenemos una solución $e^{r_1 x}$. Si r_1 es una raíz de multiplicidad ν_1 de $p(r)$, entonces

$$p(r_1) = 0,\ p'(r_1) = 0, \cdots, p^{(\nu_1 - 1)}(r_1) = 0.$$

Si derivamos el primer término de (139) k veces respecto de r, tenemos

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k} L(e^{rx}) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial r^k} e^{rx}\right) = L(x^k\, e^{rx}).$$

Con el objeto de realizar la misma operación con el último término de (139), recordemos que para dos funciones cualesquiera f y g que poseen las k primeras derivadas, se verifica

$$(f\, g)^{(k)} = f^{(k)}\, g + k\, f^{(k-1)}\, g' + \frac{k(k-1)}{2} f^{(k-2)}\, g'' + \cdots + f\, g^{(k)}.$$

Aplicando esta fórmula para derivar el último término de (139), obtenemos

$$L(x^k\, e^{rx}) = \left[p^{(k)}(r) + kp^{(k-1)}(r)x + \frac{k(k-1)}{2} p^{(k-2)}(r)x^2 + \cdots + p(r)x^k\right] e^{rx}.$$

Así vemos que para $k = 0, 1, \cdots, \nu_1 - 1$, $x^k e^{r_1 x}$ es una solución de (138). Repitiendo este procedimiento para cada una de las raíces de $p(r)$, llegamos a que las n funciones así obtenidas pertenecen a $\mathcal{H}_n$. Para demostrar que forman una base de $\mathcal{H}_n$, deberíamos exhibir su independencia lineal. Omitiremos esta demostración que, aunque sencilla, es algo extensa.

6.8 Demostración del Teorema 4.5

Dada la ecuación (92)

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

sea $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ una base de $\mathcal{H}_n$, y planteemos una solución particular de la forma

$$\psi_p(x) = u_1(x)\psi_1(x) + \cdots + u_n(x)\psi_n(x).$$

Es fácil ver que si adoptamos las siguientes ecuaciones

$$\begin{array}{llll} u_1'\psi_1 & +\cdots & +u_n'\psi_n & = 0 \\ u_1'\psi_1' & +\cdots & +u_n'\psi_n' & = 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ u_1'\psi_1^{(n-2)} & +\cdots & +u_n'\psi_n^{(n-2)} & = 0 \end{array}$$

entonces, si $L(\psi_p)(x) = L(u_1(x)\psi_1(x) + \cdots + u_n(x)\psi_n(x)) = b(x)$, debe verificarse

$$u_1'\psi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\psi_n^{(n-1)} = b(x),$$

con lo que, para obtener ψ_p, debemos resolver el sistema

$$\begin{array}{llll} u_1'\psi_1 & +\cdots & +u_n'\psi_n & = 0 \\ u_1'\psi_1' & +\cdots & +u_n'\psi_n' & = 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ u_1'\psi_1^{(n-2)} & +\cdots & +u_n'\psi_n^{(n-2)} & = 0 \\ u_1'\psi_1^{(n-1)} & +\cdots & +u_n'\psi_n^{(n-1)} & = b, \end{array}$$

cuyo determinante es $W(\psi_1, \cdots, \psi_n)$, que no se anula en I, lo que asegura la existencia de una solución única $u_1', \cdots, u_n'$. Es fácil comprobar que las soluciones están dadas por

$$u_k'(x) = \frac{W_k(x)b(x)}{W(\psi_1, \cdots, \psi_n)(x)}, \quad (k = 1, \ldots, n),$$

donde W_k es el determinante que se obtiene de $W(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ reemplazando la k-ésima columna (esto es $\psi_k, \psi_k', \cdots, \psi_k^{(n-1)}$) por $0, 0, \cdots, 1$. Finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \int \frac{W_k(x)b(x)}{W(\psi_1, \cdots, \psi_n)(x)}dx, \quad (k = 1, \ldots, n) \text{ y} \\ \psi_p(x) &= \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x) \int \frac{W_k(x)b(x)}{W(\psi_1, \cdots, \psi_n)(x)}dx. \end{aligned} \tag{140}$$

7 Bibliografía

Ecuaciones Diferenciales Ordinaria es uno de los temas de Matemáticas sobre los que más se ha escrito y se escribe. En esta sección citaremos algunos de los libros más accesibles que versan sobre el tema.

1. Rey Pastor, J. Pi Calleja, P. y C. Trejo, *Análisis Matemático: Tomo III*, Ed. Kapelusz, 1965.

2. E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 7a. Edición, Wiley, 1993.

3. W. Hurewicz, *Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ediciones Rialp, 1966.

4. L. Elsgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Editorial MIR, 1969.

5. O. Plaat, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Editorial Reverté, 1974.