Parcial 3/05/08-Tema 1

1. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^3$ que satisface $\nabla f(1,2) = (0,0)$, y cuya matriz Hessiana en $(1,2)$ es:
   $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
   Hallar todos los $b \ \epsilon \ \mathbb{R}$ de manera que la función:
   $g(x,y) = -f(x,y) + \frac{1-b}{b}(y-2)^2)$ tenga extremo en $(1,2)$. ¿Qué tipo de extremo es?

2. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$ tal que su plano tangente en $(5,0,f(5,0))$ es $x + 8y + 2z = 7$.
   Hallar $f(5,0)$ y $g'((1,1),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}))$ siendo $g(x,y) = f(2x+3y, x-y)$.

3. Dada la superficie S en forma paramétrica por:
   $\varphi(u,v) = (u-v, u+v, 4uv); \quad (u,v)\epsilon \ \mathbb{R}^2$
   1. Hallar una ecuación cartesiana para S.
   2. Hallar la ecuación del plano tangente a S en $(-1,3,8)$.
   3. Calcular la distancia desde $(-1,3,8)$ hasta el punto en que la recta normal a S en $(-1,3,8)$ interseca al cilindro de ecuación $72x = y^2$

4. Sea $f(x,y) \ \epsilon \ \mathcal{C}^1$ tal que $f'((1,2),\breve{v}_1) = 2$ y $f'((1,2),\breve{v}_2) = 3$ siendo $\breve{v}_1 = (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ y $\breve{v}_2 = (-1,0)$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel de $f(x,y)$ que pasa por el $(1,2)$.

5. Demuestre que:
   $$\begin{cases} x^2 + ln(x+z) - y & = 0 \\ yz + e^{xz} - 1 & = 0 \end{cases}$$
   define una curva C regular en un entorno de $(1,1,0)$ y halle el plano normal a C en dicho punto.

Parcial 8/05/08-Tema 1

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable, $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, tal que $f(1,1) = (3,2)$, con matriz jacobiana de f en $(1,1)$ $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Sea C la curva imagen por f de $x^2 + y^2 = 2$. Hallar la ecuación de la recta tangente a C en $(3,2)$.

2. Una función $\mathcal{C}^2$, $h(x,y,z)$ tiene un máximo relativo de valor 0 en $(1,2,3)$. Hallar una ecuación del plano tangente en $(1,2,3)$ a la superficie de ecuación $h(x,y,z) = 4x - y^2$

3. Parametrizar la curva

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 - z & = 0 \\ -\sqrt{x^2 + y^2} - (z - 12) & = 0 \end{cases}$$

Graficar C y hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(-3,0,9)$.

4. Sabiendo que:

   1. $f(x,y)$ es una función diferenciable en $P_0 = (x_0, y_0)$.
   2. La recta de ecuación 3x-y=0 es perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por P_0.
   3. La máxima pendiente de la superficie S de ecuación $z = f(x,y)$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es $\sqrt{5}$.

   Hallar el gradiente de f en $P_0 = (x_0, y_0)$ sabiendo que su primer componente es positiva.

5. Hallar a para que las superficies:
   $S_1 : (u,v) \mapsto (u + v, u - v, v^2)$ con $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2$, y
   $S_2 : x^3 + ay - z^2 - 7 = 0$ sean ortogonales en el punto $(2,0,1)$.

Parcial 24/05/08-Tema 1

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^3$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $(1,1)$ es $p(x,y) = -6xy + 3y^2$. Hallar a de manera que $g(x,y) = f(x,y) + a^2x^3 - 3x$ tenga un mínimo en $(1,1)$.

2. Hallar todos los puntos en el cono parametrizado por $\varphi(u,v) = (\sqrt{3}ucos(v), usen(v), u)$ tales que su recta normal es paralela al plano de ecuación $z = y - 1$.

3. Sea $\pi : 2x + 3y + 5z = 6$ el plano tangente a la gráfica de $f(x,y)$ en $(-1,1,1)$ y sea $\breve{u}$ un versor tangente a la curva de nivel 9 de $g(x,y) = y^3 - 2xy + x^2$ en $(-2,1)$. Hallar la derivada direccional de f en $(-1,1)$ en la dirección del versor $\breve{u}$ elegido.

4. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^2$ tal que $F(x+y, y+z) = 0$ define implícitamente a $z = f(x,y)$ en un entorno de (x_0, y_0, z_0), verificar que en (x_0, y_0) se cumple que: $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

5. Sean S_1 el cilindro de eje z descripto en coordenadas cilíndricas por $\varrho^2 = \frac{2}{1+sen^2\theta}$ y S_2 el cilindro $z = 2 - x^2$
    1. Describir la curva C intersección entre S_1 y S_2, realizar un gráfico aproximado de C y hallar una parametrización de la misma.
    2. Hallar un vector tangente a C en $(0,1,2)$.

Parcial 27/05/08-Tema 1

1. Sabiendo que la curva C_1 parametrizada por $t \mapsto (t, t^2, t^3), t \in (-2, 2)$ y la curva C_2 de ecuaciones $x - y = 0, x^2 + z^2 = 2$ están contenidas en una superficie S de clase C^2, hallar una ecuación para el plano tangente a S en $(1, 1, 1)$.

2. Sabiendo que el polinomio de Taylor de grado 2 en $(1, 1)$ de una función C^3 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $p(x, y) = x - x^2 + y^2$, calcular la derivada direccional $f'((1, 1), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2))$.

3. Sea $z = f(x, y)$ definida implícitamente por $2zx^2 - xz^2y^2 - 4y = -6$ en un entorno de $(-1, 2, -1)$. Estudiar si z tiene extremo en $(-1, 2)$.

4. Sea S la porción de superficie parametrizada por $\varphi(u, v) = (usen(v), -2u + 2, ucos(v))$, $1 < u < 3$, $0 < v < \pi$. Hallar un punto P en S tal que la recta normal a S en P pase por $(0, -3, 0)$.

5. Analice si $z = g(xy, x - y)$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ en los puntos de la recta $x + y = 0$

Parcial 1/07/08-Tema 1

1. Dada la familia de funciones $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$ siendo k una constante, mostrar que hay un único punto crítico (x_0, y_0), común a todos los miembros de la familia y determinar todos los k que aseguren que:
   a) (x_0, y_0) sea un punto de ensilladura
   b) en (x_0, y_0) f alcance un mínimo local.
   c) ¿Puede alguna de estas funciones tener un máximo local en ese punto crítico?

2. La ecuación $F(x,y,z) = f(xy, xz + \sqrt{z^2 + y^2}) = 0$, con $f \in C^2 \quad en R^2$ $f(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 0$ define una superficie S en el entorno del punto $Q = (\sqrt{2},1,1)$. Sabiendo que $\nabla f(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = (1,-3)$, hallar el punto donde la recta normal a S en Q corta al plano xy.

3. Sea C_1 la curva parametrizada por $\alpha(t) = (t^3 + 2t^2 + 1, t + 1) \quad t \in [-2,2]$ y C_2 la curva de nivel 3 de la función $f(x,y) = ax^2 + x^3y^4 + b$ hallar a y b para que ambas curvas se corten ortogonalmente en el punto $(1,1)$.

4. Sea $f : R^2 \to R$ definida por $f(x,y) = x^2 + b(x-1)^2 e^y + 1$
   a) Hallar b de manera que el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $(1,0)$ sea $p(x,y) = 2 - 2x + 2x^2$.
   b) Sea $h : R^2 \to R$ definida por $h(x,y) = f(2x - y, x - y)$, hallar aproximadamente $h(1{,}01;1{,}02)$.

5. Hallar una curva plana que pase por el punto $P = (0,0,3)$, que esté contenida en la superficie $S : z = x^2y + 2x^2 + 3$ y cuya tangente en el punto P sea paralela al vector $(2,2,0)$.

Parcial 11/10/08-Tema 1

1. Sea $F: R^3 \to R$ una función C^∞ tal que $F(0,1,3)=1$ y $\nabla F(0,1,3)=(1,1,1)$.
   Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la superficie
   $S=\{(x,y,z)\in R^3 / F(x,y,z)-e^x+2xy=0\}$ en el punto $(0,1,3)$.

2. Mostrar que el sistema $\begin{cases} 2xy-3u^2+uv=-1 \\ xu+yv=1 \end{cases}$ define $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ en el entorno del punto $(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,1,1,0)$ y hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $u=u(x,y)$ en el punto $(1,1,1)$.

3. Sea $f: R^2 \to R$ una función C^∞ cuyo polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(2,-1)$ es $p(x,y)=1+2x-xy+2x^2$.
   Sea $h(u,v)=f(u+2v,-u+v)$. Hallar el valor de la derivada direccional máxima de h en $(\frac{4}{3},\frac{1}{3})$.

4. Hallar $a\in R$ de modo que la recta $\begin{cases} x+z=1 \\ x-2y+z=3 \end{cases}$ sea tangente en $(1,-1,0)$ a la superficie parametrizada por $\sigma(u,v)=(1+2v, au+v^2, 2uv)$ con $\begin{cases} -2\le u\le 2 \\ -1\le v\le 1 \end{cases}$.

5. Sea la superficie S definida por $(x-1)^2+z^2=4$ hallar y parametrizar una curva $C\subset S$ de manera que C resulte perpendicular al vector $(1,2,3)$ en todo punto.

Parcial 15/10/08-Tema 1

1. Sea $\overline{F}(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ una función en C^1 en R^2 tal que $\overline{F}(1,-1)=(0,3)$ y $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(1,-1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
   Encontrar la recta tangente en $(1,-1)$ a la preimagen por $\overline{F}$ de la curva de ecuación $x^2+y^2=9$.

2. Demostrar que $(e^{2x}+2xz^2-z,\ln(yz))=(0,0)$ define una curva C regular en un entorno del punto $(0,1,1)$ y obtener el plano normal a C en dicho punto.

3. Sea $f:R^2\to R$ diferenciable en R^2 tal que los vectores $(2,1,0)$ y $(0,1,-1)$ son tangentes al gráfico de f en el punto $(2,3,1)$.
   Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por $(2,3)$.

4. Dadas $f(u,v)=(2u+v^2,1-v)$ con $(u,v)\in R^2$ y $g:R^2\to R$ una función $C^\infty(R^2)$ cuyo polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(2,1)$ es $p(x,y)=1+x-x.y$.
   Calcular el valor de la derivada direccional de $h=g\circ f$ en el punto $(1,0)$ en la dirección que va del punto $(1,0)$ hacia el $(2,3)$.

5. Hallar todos los puntos de la superficie $z^2=(x-1)^2+2y^2$ cuya recta normal pasa por el origen. Graficar.

Parcial 1/11/08-Tema 1

1. Hallar y graficar el dominio de la función $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & si\ x.y\geq 0\\ \dfrac{1}{x+y} & si\ x.y<0\end{cases}$

   Expresarlo en coordenadas polares.

2.
   a) Hallar el plano tangente al conjunto de nivel 0 de la función $f(x,y,z)=x^2-\frac{2}{3}y+z^3-\frac{5}{3}$ en el punto $P_0=(1,-1,0)$.

   b) Dada la curva C: $\begin{cases}x^2-y+2e^z=4\\ x^3y+\cos(z)=0\end{cases}$ comprobar que la recta tangente a C en P_0, está contenida en el plano hallado en a).

3. Sea $f(x,y)=xe^{y+2x}$. Hallar un valor aproximado de $f(2.01,-3.98)$ utilizando el polinomio de Taylor de segundo orden.

4. Sea $f:R^2\to R$ una función diferenciable en R^2 tal que el plano tangente a la gráfica de f en $(2,8,0)$ es $\overrightarrow{X}(u,v)=(3-u,2+3v,-2u+v)$ con $(u,v)\in R^2$.

   Sea $g:R^2\to R^2$ una función C^∞ en R^2 tal que $g(0,1)=(2,8)$ y $Dg(0,1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

   Hallar la derivada direccional de $h=f\circ g\ en\ (0,1)$ en la dirección del vector $v=(3,4)$.

5. Hallar una parametrización de la curva $C:\begin{cases}y-1=-\sqrt{9x^2+9z^2}\\ y+3=x^2+z^2\end{cases}$

   Graficar C y obtener la ecuación del plano normal a C en $(0,-2,1)$.

Parcial 3/11/08-Tema 1

1. Comprobar que la ecuación $e^{xz-1}+yz-2=0$ define $z=f(x,y)$ en un entorno del punto $(1,1,1)$. Hallar una ecuación para la recta tangente a la curva intersección del gráfico de f con el plano $x=y$ en el punto $(1,1,f(1,1))$.

2. Sea $f:R^2\to R$ una función diferenciable en R^2 de la que sólo se sabe que la curva $x^2-y^2=3$ es una curva de nivel de f y que $f'_x(2,1)=5$. Hallar la derivada direccional de f en $(2,1)$ en la dirección del vector $v=(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

3. Dada $f(x,y)=\sqrt{2x-x^2-y^2}$
   a) Hallar el dominio de f. Graficarlo y expresarlo en coordenadas polares.
   b) Determinar a de manera que la recta perpendicular al gráfico de f en $(1,a,f(1,a))$ resulte paralela a la recta de ecuación $\begin{cases} x+y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

4. Sean $h:R^2\to R$, $h\in C^1$ en R^2 y $g(x,y)=(y^2,sen(x-y))$.
   Sabiendo que el plano tangente al gráfico de $f(x,y)=h\circ g$ en el punto $(1,1,f(1,1))$ es $-2x+2y+z=0$, hallar $\nabla h(1,0)$.

5. Hallar un valor aproximado de $(1.02)^{0.99}$ utilizando el polinomio de Taylor de segundo orden de la función $f(x,y)=x^y$.

Parcial 11/12/08-Tema 1

1. Sea $f: R^2 \to R$ una función diferenciable en R^2.
   Hallar la recta tangente a la curva de nivel 6 de f en el punto $(2,1)$, sabiendo que el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,1,f(2,1))$ es $z = 2x - 3y + 5$

2. Sea $f(x,y) = g(x^2 - y, 2xy)$ con $g \in C^1$ en R^2
   Sabiendo que el polinomio de Taylor de 2º orden de g en $(0,2)$ es $p(x,y) = 2 - 3x + y + x^2 + 3xy$, hallar la recta normal al gráfico de f en $(1,1,f(1,1))$.

3. Sea $F: R^2 \to R^2$, $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ una función C^∞ en R^2 tal que
   $F(1,2) = (1,0)$ y $JF(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
   Dada la curva $C: x^2 + y^2 = 1$, probar que la recta tangente en el punto $(1,2)$ a la curva **preimagen** de C es $r:\ u + v - 3 = 0$.

4. Hallar a para que las superficies:
   $S_1: \sigma(u,v) = (u+v, u-v, v^2)$ con $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2$ y $S_2: x^3 + ay - z^2 - 7 = 0$
   sean ortogonales en el punto $(2,0,1)$.

5. Mostrar que el sistema $\begin{cases} 2xy + u^2 v - yv = 2 \\ -xu^2 + 2yv^2 = 1 \end{cases}$ define a x e y como funciones de u y v en un entorno del punto $(1,1,1,1)$.
   Calcular la derivada direccional de $y = y(u,v)$ en el punto $(1,1)$ según la dirección del vector $(3,4)$.