Moto di un punto materiale su una superficie

Modelli matematici

Giacomo Fregona

7 settembre 2021

Problema

Determinare il moto di un punto materiale vincolato ad una superficie e sottoposto a forza peso e reazione vincolare.

Sistema di riferimento

Consideriamo un sistema di riferimento x, y sul piano e supponiamo che la superficie sia il grafico di una funzione $\mathcal{C}^2$

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\
(x, y) &\mapsto z = f(x, y)
\end{aligned}
$$

Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vettore che descrive la posizione del punto considerato sulla superficie in un certo istante di tempo t. Indichiamo con xp, yp, zp le derivate di x, y e z. Un punto sulla superficie e un vettore velocità sono individuati dalla quartupla (x, y, xp, yp), infatti vale

$$zp = \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} xp + \frac{\partial f}{\partial y} yp$$

Studiamo le forze agenti supponendo che il moto del punto sia descritto dalla generica quartupla (x, y, xp, yp) in modo da ottenere, tramite il secondo principio della dinamica, un sistema di equazioni differenziali. Per ipotesi le forze agenti sono la forza peso F_p e la reazione vincolare F_v, che supponiamo essere ortogonale al piano tangente la superficie nel punto considerato. Scomponiamo il problema nel calcolare distintamente le forze parallele ed ortogonali al piano tangente. Possiamo calcolare una base u, v del piano tangente punto per punto calcolando il gradiente di f. Troviamo infine il vettore N normale al piano tangente con $N = u \times v$.

Forza parallela al piano tangente

L'unica componente tangente è data dalla componente della forza peso parallela al piano, che indichiamo con P. Per calcolarla utilizziamo la formula

$$P = F_p - N \cdot F_p.$$

Forza ortogonale al piano

Indichiamo con N la componente ortogonale al piano della forza risultante. Supponendo che il punto sia vincolato a rimanere nella superficie, dalla geometria differenziale si ricava che l'accelerazione lungo l'asse ortogonale deve essere

$$a_N = k_N \ \left|\left| \begin{pmatrix} xp \\ yp \\ zp \end{pmatrix} \right|\right|^2$$

In cui k_N è la curvatura normale della superficie nel punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ rispetto alla direzione $\begin{pmatrix} xp \\ yp \\ zp \end{pmatrix}$.

Forza ortogonale al piano

Per calcolare k_N consideriamo la curva

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} x + t\ xp \\ y + t\ yp \\ f(x + t\ xp, y + t\ yp) \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $\gamma(0) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\gamma'(0) = \begin{pmatrix} xp \\ yp \\ zp \end{pmatrix}$.

Forza ortogonale al piano

Utilizzando le formule della geometria differenziale possiamo allora calcolare k_N:

$$k_N = \frac{||\gamma' \times \gamma''||}{||\gamma'||^3} N \cdot n$$

in cui n è il versore normale alla curva γ. n può essere calcolato con la formula

$$n = \left(\frac{\gamma' \times \gamma''}{||\gamma' \times \gamma''||} \right) \times \frac{\gamma'}{||\gamma'||}.$$

Forza ortogonale al piano

È quindi possibile calcolare la componente ortogonale della forza risultante:

$$F_N = m\, a_N$$

e ottenere il sistema di equazioni differenziali

$$m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'' = P + F_N.$$

Poiché il problema può essere descritto dalle sole variabili x ed y, ci è sufficiente considerare solo le prime due equazioni.

Equazioni differenziali

Il problema viene così descritto dalle equazioni differenziali

$$x'' = \frac{P(1) + F_N(1)}{m} \qquad y'' = \frac{P(2) + F_N(2)}{m}$$

corredate da condizioni iniziali
$(x(0), y(0), xp(0), yp(0)) = (x_0, y_0, xp_0, yp_0)$.

Risoluzione numerica

Risolviamo numericamente il metodo utilizzando il metodo RKN ricavato a partire da RK4, che viene descritto dallo schema di Butcher:

$$
\begin{array}{c|cccc|cccc}
0 & & & & & & & & \\
\frac{1}{2} & & & & & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & & & & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & & & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Il problema dipende in generale sia dalla posizione sia dalla velocità.