Università degli Studi di Verona

Sistemi

Appunti del corso

Mattia Zorzan

2 ottobre 2019

Indice

1 Introduzione

La presente è una dispesa LaTeXcontenente gli appunti per il corso di Sistemi. Alla presente potranno essere aggiunte integrazioni prese dal libro **Signals and Systems: Pearson New International Edition** di *Alan V. Oppenheim* con lo scopo di integrare parti meno chiare del corso.
Il codice LaTeXè disponibile a:

`https://github.com/davbianchi/dispense-info-univr`

2 Definizoni

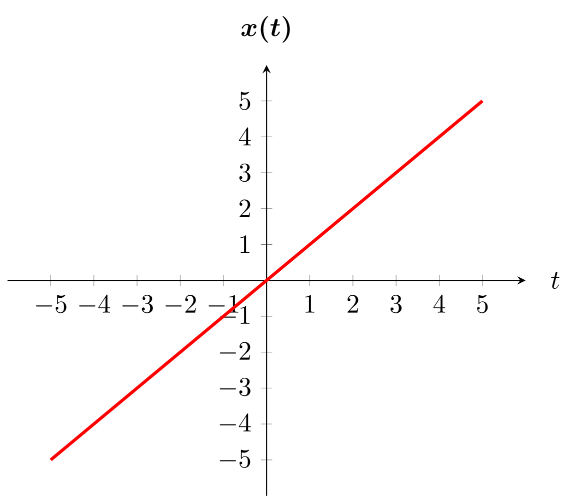
Sistema - Modello matematico che rappresenta un fenomeno che evolve nel tempo in modo deterministico.
Segnale - Grandezza fisica variabile nel tempo, a cui è assegnata un'informazione.

Lasciando perdere le definizioni, che vogliono dire tutto e niente in questo caso, ci si può ricondurre all'amata matematica per aiutarsi un pochino. Matematicamente i *segnali* sono rappresentati come funzioni di una o più variabili indipendenti. La definizione di segnale usa il tempo come variabile indipendente, anche se se ne potrebbero utilizzare altre in casi diversi.

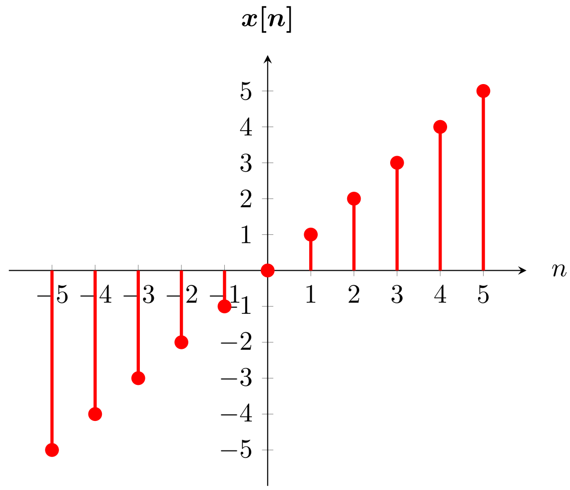
Considereremo due tipi di segnali, *continui* e *discreti*.
I segnali continui sono quelli in cui la variabile indipendente è rappresentata come un valore continuo, e questi sono definiti per un contnuum di valori della variabile indipendente.
I segnali discreti sono definiti solo a tempo discreto (utlizzando il tempo come variabile indipendente) e di conseguenza sono definiti solo per un insieme discreto di valori della variabile indipendente.

Il passaggio di uno stesso segnale da continuo a discreto avviene tramite un processo detto *campionamento*.

N.B: Si usa la notazione con le parentesi tonde per i segnali continui, quella con le parentesi quadre per i segnali discreti. La variabile indipendente è t per i segnali continui e n per quelli discreti.



Segnale continuo



Segnale discreto

3 Tipi di Segnale

3.1 Segnali Pari e Dispari

Un segnale $x(t)$ o $x[n]$ è *pari* se è uguale alla sua controparte rovesciata, ovvero alla sua controparte ruotata di °180 rispetto all'origine.
Un segnale continuo è *pari* se:

$$x(-t) \ = \ x(t)$$

Un segnale discreto è *pari* se:

$$x[-n] \ = \ x[n]$$

Un segnale si dice *dispari* se:

$$\begin{aligned} x(-t) \ &= \ -x(t) \\ x[-n] \ &= \ -x[n] \end{aligned}$$

Un segnale dispari deve necessariamente valere 0 a $t = 0$ o $n = 0$ dato che le condizioni di disparità richiedono che:

$$\begin{aligned} x(0) \ &= \ -x(0) \\ x[0] \ &= \ -x[0] \end{aligned}$$

Ogni segnale può essere diviso in una somma di due segnali, uno pari ed uno dispari. Consideriamo:

$$Even\{x(t)\} \ = \ \frac{1}{2} \cdot [x(t) \ + \ x(-t)]$$

ossia la parte intera di $x(t)$.
Analogamente, la sua parte dispari è definita come:

$$Odd\{x(t)\} \ = \ \frac{1}{2} \cdot [x(t) \ - \ x(-t)]$$

3.2 Segnali Periodici

Un segnale periodico continuo ha la proprietà che esiste una valore T per il quale:

$$x(t) \ = \ x(t \ + \ T)$$

per ogni t.
In parole povere, un seganle periodico continuo $x(t)$ non cambia anche se *shiftato*, ossia traslato, di T verso sinistra.
In questo caso diciamo che $x(t)$ è *periodico di periodo* T.

Il *periodo fondamentale* T_0 di $x(t)$ è il valore positivo più piccolo per cui vale la condizione di periodicità di un segnale.

Questa definizione funziona solo se $x(t)$ non è costante. In questo caso il periodo non è definito, dato che $x(t)$ è periodico $\forall T$.
Un segnale non periodico viene detto *aperiodico*.

Per i segnali discreti valgono le stesse proprietà, e possono essere definiti in maniera analoga. Un segnale discreto $x[n]$ è *periodico di periodo* N, N intero positivo, se:

$$x[n] \ = \ x[n \ + \ N]$$

per ogni valore di n.
Il *periodo fondamentale* N_0 è il più piccolo valore positivo di N per cui vale la condizione di periodicità di un seganle.

3.3 Segnali Continui Sinusoidali ed Esponenziali

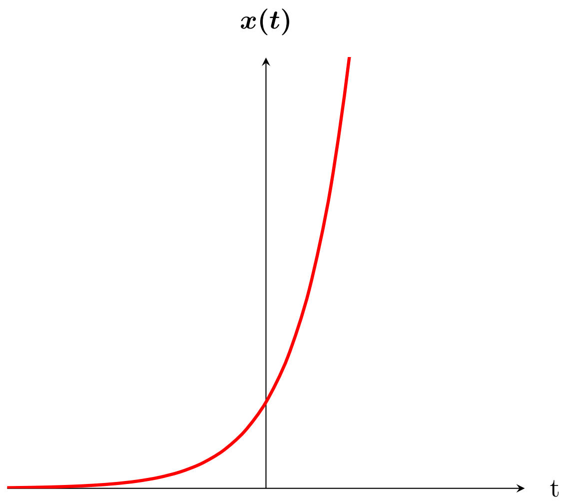
Il *segnale continuo ad esponenziale complesso* è:

$$x(t) \ = \ A \cdot e^{at}$$

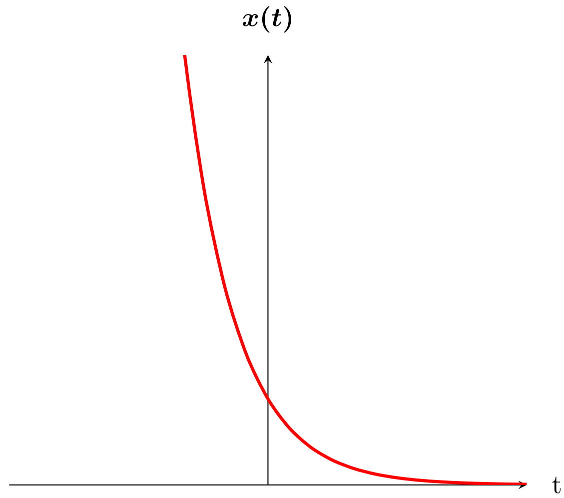
con A ed a numeri complessi.

3.3.1 Segnali Esponenziali Reali

Se A ed a sono reali ho due casi. Se a è positivo, con l'aumento di t, $x(t)$ è un esponenziale crescente.
Se a è negativo allora $x(t)$ è un esponenziale decrescente.



$a > 0$



$a < 0$

3.3.2 Segnali Sinusoidali ed Esponenziali Periodici Complessi

Un'altra classe di esponenziali complessi si ottiene vincolando a a valore immaginario.
Consideriamo:

$$x(t) \;=\; e^{j\omega_0 t}$$

Questo segnale è periodico. Per verificarlo basta verificare che $x(t)$ sia di periodo T:

$$\begin{aligned} e^{j\omega_0 t} &= e^{j\omega_0 (t\,+\,T)} \\ &= e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} \end{aligned}$$

per priodicità, abbiamo:

$$e^{j\omega_0 T} \;=\; 1$$

Se $\omega_0 = 0$, allora $x(t) = 1$, che è periodico $\forall T$.
Se $\omega_0 \neq 0$, allora il *periodo fondamentale* T_0 di $x(t)$ è:

$$T_0 \;=\; \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

I segnali $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{-j\omega_0 t}$ hanno lo stesso periodo fondamentale.
Un segnale fortemente correlato all'*esponenziale periodico complesso* è il *segnale sinusoidale*:

$$x(t) \;=\; A \cdot cos(\omega_0 t \;+\; \phi)$$

Utilizzando i secondi come unità di t, le unità di ω_0 e ϕ sono radianti per secondo e radianti, rispettivamente.

Comunemente si scrive $\omega_0 = 2\pi f_0$, con f_0 sono cicli per secondo, o *Hertz* (Hz). Il segnale sinusoidale è periodico di periodo fondamentale T_0.

Usando la **Formula di Eulero** posso scrivere l'esponenziale complesso come un segnale sinusoidale dello stesso periodo fondamentale:

$$e^{j\omega_0 t} \ = \ cos(\omega_0 t) \ + \ jsin(\omega_0 t)$$

Allo stesso modo posso scrivere un segnale sinusoidale come un esponenziale complesso, sempre dello stesso periodo:

$$A \cdot cos(\omega_0 t \ + \ \phi) \ = \ \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} \ + \ \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}$$

Alternativamente, possiamo esprimere un sinusoide come un esponenziale complesso come:

$$A \cdot cos(\omega_0 t \ + \ \phi) \ = \ A \cdot Re\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

dove, se $c \in \mathbb{C}$, $Re\{c\}$ è la sua parte reale. Si usa la notazione $Im\{c\}$ per indicarne la parte immaginaria. Quindi:

$$A \cdot sin(\omega_0 t \ + \ \phi) \ = \ A \cdot Im\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

Si può notare che il periodo fondamentale T_0 di un segnale sinusoidale continuo è inversamente proporzionale a $|\omega_0|$, al quale ci riferiamo come *frequenza fondamentale*. Se lo diminuiamo rallentiamo l'oscillazione, o *ampiezza* ed aumentiamo il periodo.
Consideriamo il caso in cui $\omega_0 = 0$, il periodo di un segnale costante è indefinito, ma posso definirne la frequenza fondamentale come 0. Quindi un segnale costante non ha oscillazione.

3.3.3 Segnali Esponenziali Complessi Generali

Consideriamo un esponenziale complesso $A \cdot e^{at}$, con C espresso in forma polare ed a in forma rettangolare. Avendo:

$$A \ = \ |A| \, e^{j\theta}$$

e:

$$a \ = \ r \ + \ j\omega_0$$

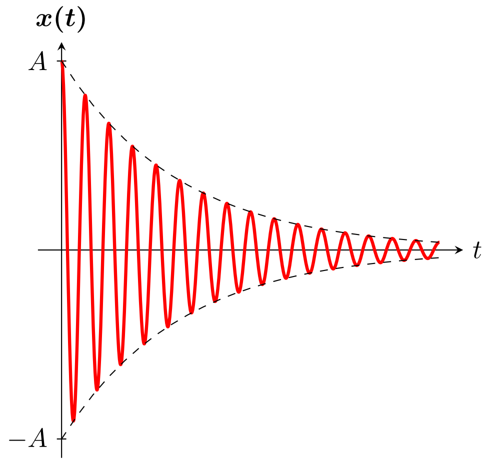
ho:

$$\begin{aligned} Ae^{at} \ &= \ |A| \, e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t} \\ &= \ |A| \, e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)} \end{aligned}$$

Usando la Formula di Eulero:

$$Ae^{at} \ = \ |C| \, e^{rt} cos(\omega_0 t + \theta) \ + \ j \, |A| \, e^{rt} sin(\omega_0 t + \theta)$$

Per $r = 0$ la parte *reale* e quella *immaginaria* di un segnale sono sinusoidali, per $r > 0$ corrispondono ad un segnale sinusoidale moltiplicato per un esponenziale



Segnale sinusoidale modulato esponenzialmente $(r < 0)$

crescente e per $r < 0$ ad un segnale sinusoidale moltiplicato per un esponenziale decrescente.

Per $r > 0$ il grafico è lo stesso ma ruotato di 180° rispetto all'asse $x(t)$. L'ampiezza massima di questo segnale è la dimensione dell'intervallo $[A, -A]$.

3.4 Impulso Unitario, Gradino Unitario e Rampa Unitaria

Il gradino unitario $\delta_{-1}(t)$ assume il seguenti valori:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0 \\ 1, \ t \geq 0 \end{cases}$$

L'impulso unitario invece:

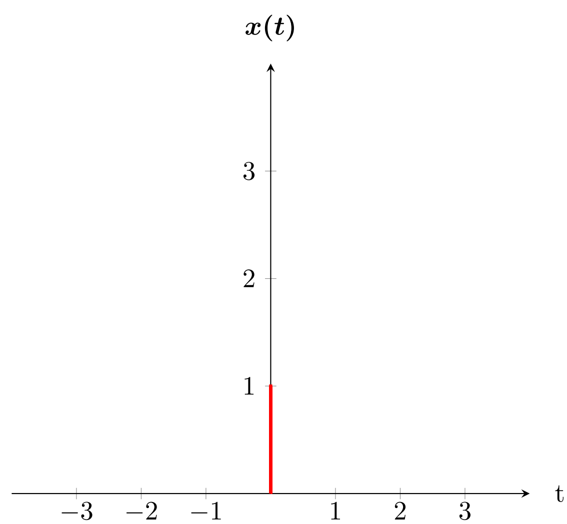
$$\delta(t) = \begin{cases} 1, \ t = 0 \\ 0 \quad altrimenti \end{cases}$$

Il gradino unitario è legato all'impulso unitario, infatti è il suo integrale:

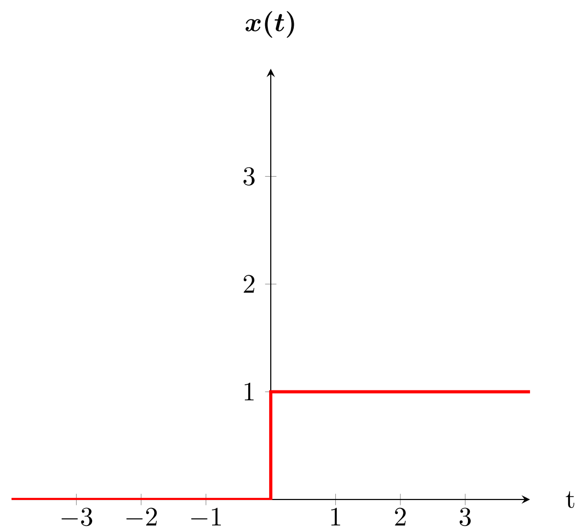
$$\delta_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\ d\tau$$

e, di conseguenza, l'impulso unitario è la derivata del gradino unitario:

$$\delta(t) = \frac{d\ \delta_{-1}(t)}{dt}$$



Impulso Unitario

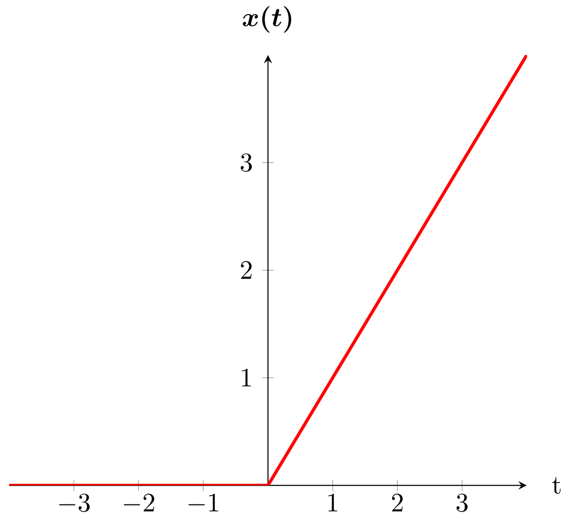


Gradino Unitario

Analogamente all'Impulso Unitario ed al Gradino Unitario possiamo definire la *Rampa Unitaria* come segue:

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} t, \ t \geq 0 \\ 0 \quad altrimenti \end{cases}$$

e rappresentare come:



Rampa Unitaria

Così come il Gradino Unitario è l'integrale dell'Impulso Unitario, la Rampa Unitaria è l'integrale del Gradino Unitario:

$$\delta_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_{-1}(\tau)\, d\tau$$

In generale possiamo dire che:

$$\delta_{-k}(t) = \begin{cases} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!},\ t \geq 0 \\ 0 \quad altrimenti \end{cases}$$

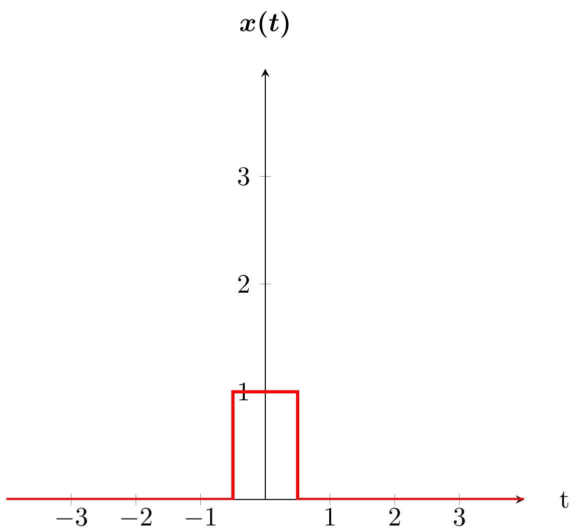
quindi possiamo dire che integrando "*scendo*" di un grado di derivazione, mentre derivando "*salgo*".

3.5 Box e Impulso Triangolare

Posso definire la Box come:

$$\sqcap(t) = \begin{cases} 1,\ -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 \quad altrimenti \end{cases}$$

e rappresentarla:



Box

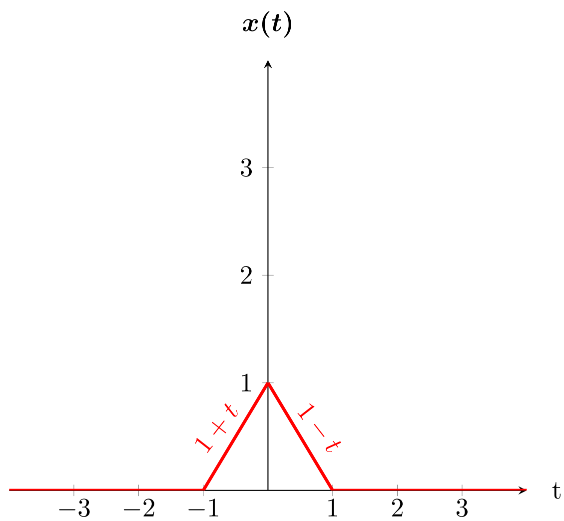
Possiamo anche definire la Box tramite la seguente formula:

$$\sqcap(t) = \delta_{-1}(t + \frac{1}{2}) - \delta_{-1}(t - \frac{1}{2})$$

L'Impulso Triangolare è definito come:

$$\triangle(t) = \begin{cases} 0, t \leq 1 \\ 1 - |t|, -1 < t < 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$$

La sua rappresentazione è la seguente:



Impulso Triangolare

3.6 Segnali a Tempo Discreto

3.6.1 Impulso Unitario Discreto

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, \ n = 0 \\ 0 \quad altrimenti \end{cases}$$

3.6.2 Gradino Unitario Discreto

$$\delta_{-1}[n] = \begin{cases} 1, \ n \geq 0 \\ 0 \quad altrimenti \end{cases}$$

Osservazione:

$$\delta_{-1}[n] = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta(i)$$

3.6.3 Rampa Unitaria Discreta

$$\delta_{-2}[n] = \begin{cases} n, \ n \geq 0 \\ 0 \quad altrimenti \end{cases}$$

Osservazione:

$$\delta_{-2}[n] = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \delta_{-1}[i]$$

Osservazione:

$$\delta_{-2}[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{k-1} \delta[j]$$

3.6.4 Successioni Esponenziali

$$\begin{aligned} v[n] &= Ae^{j\phi}\lambda^n \\ &= Ae^{j\phi}\rho^n e^{j\theta n} \\ &= Ae^{j\phi}e^{ln(\rho)+j\theta} \end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{Z};\ A, \phi \in \mathbb{R}; \lambda \in \mathbb{C}$ e $\lambda = \rho(cos(\theta) + j\ sin(\theta)) = e^{j\theta}$

Osservazione:
$v[n]$ può essere visto come la versione campionata ($q = 1$) del segnale esponenziale continuo.

$$v(t) = Ae^{j\theta}e^{\mu t}$$

con

$$\mu = ln(\rho) + j\theta$$

3.6.5 Successioni Sinusoidali

$$v[n] = A\ cos(\theta n + \phi)$$

con $A > 0$, θ pulsazione e ϕ fase.
Periodico sse $\theta = \frac{2\pi n}{N}$, con $N > 0$ (periodo), $n \in \mathbb{N}$.

3.6.6 Successioni Sinusoidali modulate Esponenzialmente

$$v[n] = A\rho^n cos(\theta n + \phi)$$

con $A > 0;\ \rho > 0;\ \theta, \phi \in \mathbb{R}$.

4 Sistemi

Un *sistema* può essere visto come un processo in cui i *segnali di input* sono trasformati dal sistema o causano una risposta di qualche tipo da parte di questo, risultando in altri segnali detti *segnali di output*.
Anche per questi va fatta la distinzione tra *sistemi a tempo continuo* e *sistemi a tempo discreto*.

$$\xrightarrow{input} \boxed{\text{Sistema}} \xrightarrow{output}$$

4.1 Proprietà di un Sistema

1. **Linearità**

   $$\alpha u_1 + \beta u_2 \mapsto \alpha v_1 + \beta v_2$$

   con $u = input$ e $v = output$.

2. **Tempo Invarianza**
   Se traslo l'input nel tempo l'output trasla a sua volta

   $$u(t-\tau) \ \rightarrow \ \boxed{\text{Sistema}} \ \rightarrow \ v(t-\tau)$$

3. **Causalità**
   L'effetto non anticipa la causa.
   Ci sarà sempre un instante t_0 punto di inizio studio del sistema t.c:

   $$\exists\ t_0 \in \mathbb{R} : u(t_0) = 0$$

4. **Stabilità BIBO**

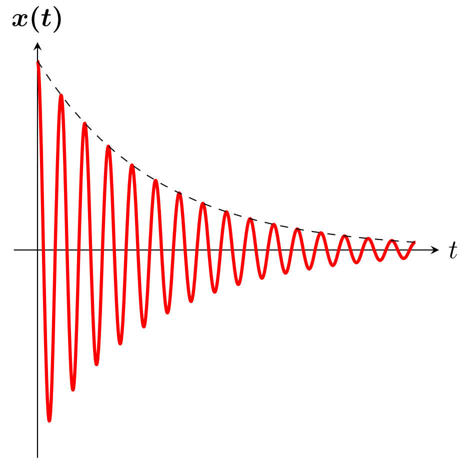
   $$\forall\ t \in [t_0, +\infty) \subseteq \mathbb{R},\ \exists\ M_u > 0 : |u(t)| < M_v$$

   $$\exists\ M_v > 0 : \forall\ t \in [t_o, +\infty) : |v(t)| < M_v$$

5. **Stabilità Asisntotica**
   Se

   $$\exists\ t_0 : u(t) = 0, \forall\ t \geq t_0 \rightarrow \lim_{t \to +\infty} v(t) = 0$$

   In assenza di input, l'output converge a 0 asintoticamente.



Perchè:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = 0$$

Se un sistema soddisfa 1 e 2 allora è *LTI* (*Lineare Tempo Invariante*).

4.2 Sistemi a Tempo Continuo

Un *sistema a tempo continuo* è un sistema in cui vengono applicati segnali di input a tempo continuo, risultando in segnali di output a tempo continuo.
I segnali di input vengono rappresentati mediante la notazione $x(t)$, quelli di output con la notazione $y(t)$.
La relazione tra input e output viene rappresentata come segue:

$$x(t) \to y(t)$$

4.2.1 Rappresentazione in termini di Impulsi

Consideriamo una pulsazione, o "*scala*", $\hat{x}(t)$ ed un segnale continuo $x(t)$. Possiamo esprimere quest'approssimazione come una combinazione lineare di pulsazione ritardate. Definiamo:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

Dato che $\delta_{\Delta}(t)$ ha ampiezza unitaria:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

Più Δ si avvicina allo 0, più $\hat{x}(t)$ si avvicina ad essere $x(t)$, fino ad esserne uguale

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t \; - \; k\Delta)\Delta$$

Sappiamo che

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$

quindi posso passare all'integrale:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

Ci riferiamo a questo come *Proprietà di Settacciamento* dell'impulso a tempo continuo.
Il segnale $\delta(t-\tau)$ è un impulso in $\tau = t$. Quindi il segnale $x(\tau)\delta(t-\tau)$ è uguale a $x(t)\delta(t-\tau)$, di conseguenza l'integrale è uguale a $x(t)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-\tau)\, d\tau \\ &= x(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau \\ &= x(t)\end{aligned}$$

4.2.2 Risposta Impulsiva e Rappresentazione Sistemi LTI Continui

Possiamo vedere un segnale continuo come una somma di impulsi *scalati e shiftati.* La risposta $\hat{y}(t)$ di un sistema lineare ad un segnale $\hat{x}(t)$ (descritto nel paragrafo precedente) come la somma delle risposte alle versioni scalate e shifate di $\delta_\Delta(t)$.
Definiamo $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ come risposta di un sistema LTI all'input $\delta_\Delta(t - k\Delta)$.

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$$

Consideriamo un decremento di Δ fino a diventare considerevolmente piccolo ($\Delta \to 0$). Come visto precedentemente, $\hat{x}(t)$ diventa considerevolmente simile ad $x(t)$, finoa coincidervi. Consegunetemente la risposta $\hat{y}(t)$ si avvicina sempre più ad essere uguale a $y(t)$ per $\Delta \to 0$.
Per un Δ "*sufficientemente piccolo*" la durata della pulsazione $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ diventa poco significativa in quanto diventa essenzialmente uguale alla risposta del sistema ad un *Impulso Unitario* per lo stesso valore di t.
Se definiamo $h_\tau(t)$ come la risposta a tempo t ad un impulso unitario $\delta(t-\tau)$ posizionato in tempo τ, abbiamo:

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$$

Per $\Delta \to 0$ la sommatoria diventa un integrale, quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_\tau(t)\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Quest'equazione rappresenta la forma generale della *risposta di un sistema lineare a tempo continuo.*
Se il sistema è anche tempo invariante, $h_\tau(t) = h_0(t-\tau)$. Per convenienza useremo la seguente notazione:

$$h(t) = h_0(t-\tau)$$

dove $h(t)$ è la risposta a $\delta(t)$. Per la proprietà di tempo invarianza la risposta a $\delta(t)$ non è diversa dalla risposta a $\delta(t-\tau)$, quindi l'equazione diventa:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

4.3 Sistemi a Tempo Discreto

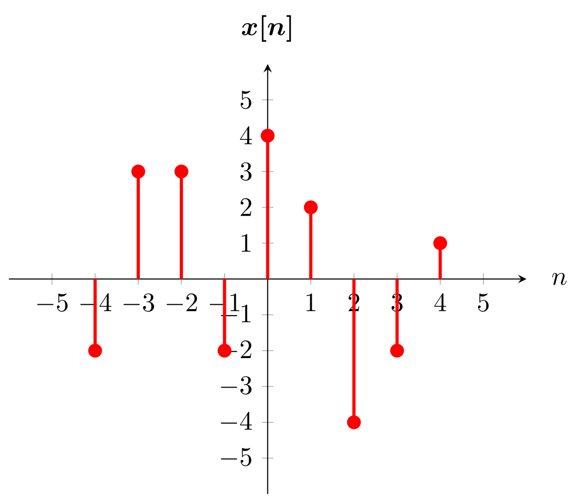
Analogamente, i *sistemi a tempo discreto* prendono in input seganli a tempo discreto ne generano altri in output.
La relazione tra input e output viene rappresentata come segue:

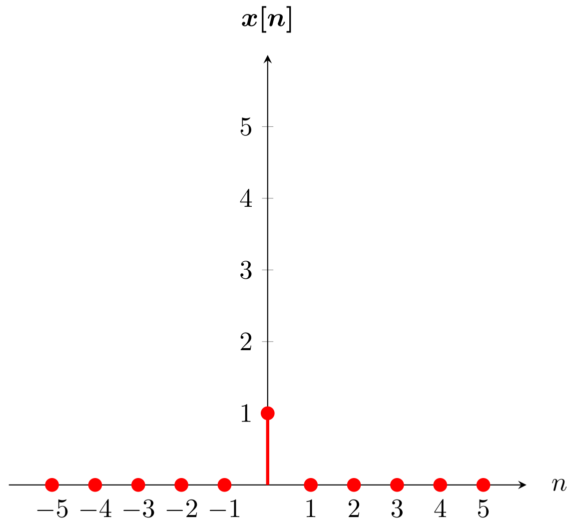
$$x[n] \to y[n]$$

4.3.1 Rappresentazione in termini di Impulsi

Posso costruire qualsiasi segnale a tempo discreto partendo da un impulso a tempo discreto $\delta[n]$.

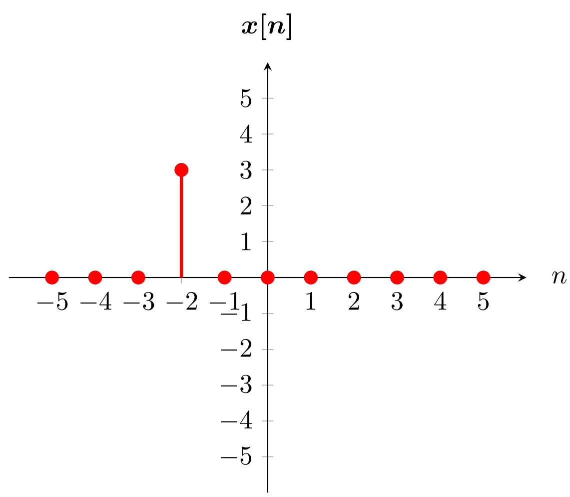
Poniamo $x[n]$ rappresentato come segue:

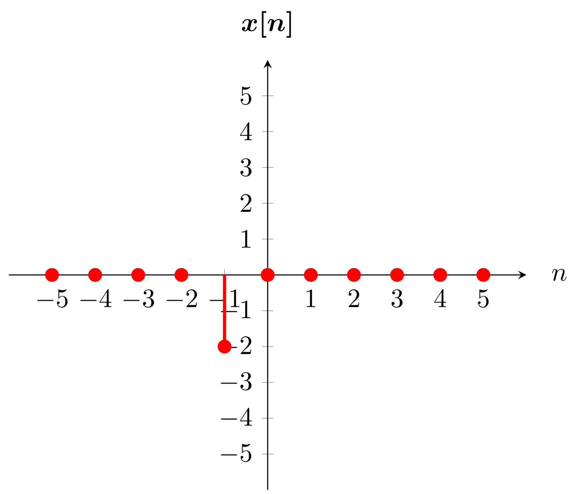




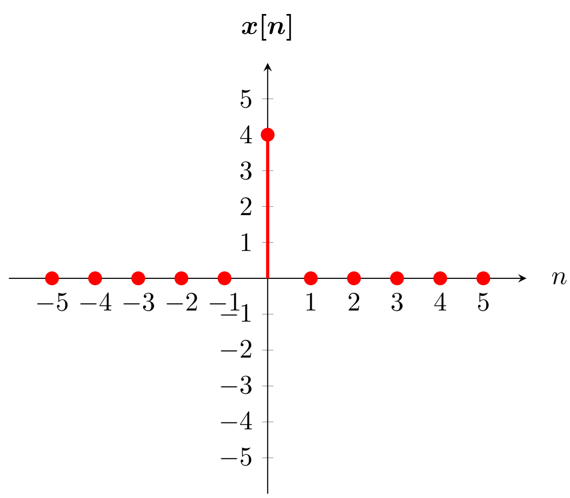
Impulso a tempo discreto

Posso vedere la sua reppresentazione da $n = -2$ a $n = 2$ come la somma dei 5 impulsi a tempo discreso che seguono:

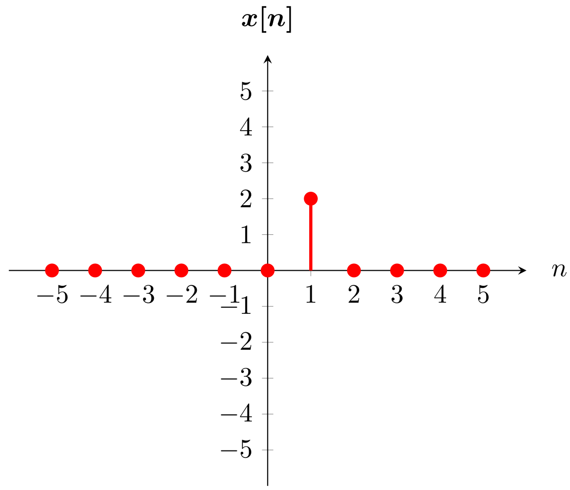


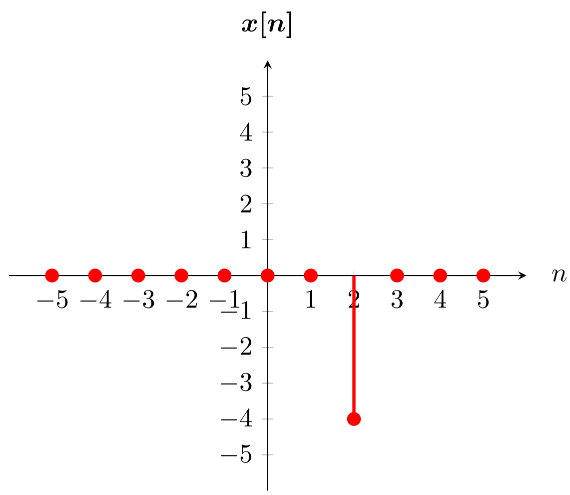


$x[n]$
5
4
3
2
1
n
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5
−1
−2
−3
−4
−5



$x[n]$
5
4
3
2
1
n
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5
−1
−2
−3
−4
−5





Ossia ogniuno di questi assume il valore di $x[n]$ al momento del campionamento. Matematicamente:

$$\dots$$

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], n = -1 \\ 0, \qquad n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], n = 0 \\ 0, \quad n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], n = 1 \\ 0, \quad n \neq 1 \end{cases}$$

$$\dots$$

Più in generale, scritto come una sommatoria, risulta:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Quest'equazione viene detta *Proprietà di Setacciamento* per i sistemi a tempo discreto.
Visto che la sequenza $\delta[k-n] \neq 0$ solo se $k = n$, possiamo dire che la sommatoria "*setaccia*" la sequanza di valori $x[k]$ e mantiene solo i valori per cui $k = n$.

4.3.2 Risposta Impulsiva e Rappresentazione Sistemi LTI Discreti

Consideriamo la risposta di un sistema lineare ad un input arbitrario $x[n]$. Possiamo rappresentare questo input come una combinazione lineare di impulsi shiftati.
$h_k[n]$ sarà la risposta del nostro sistema allimpulso shiftato $\delta[n-k]$. L'output $y[n]$ sarà espresso come:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

Quindi, conoscendo la formula della risposta ad una serie di impulsi shiftati, possiamo costruire la risposta ad un input arbitrario.
Dato che $x[n]$ può essere scritto come una combinazione lineare di $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ e $\delta[n-1]$, possiamo scrivere la relativa risposta come una combinazione lineare delle risposte ai singoli impulsi.
In generale, le risposte $h_k[n]$ non devono essere legate tra loro per valori diversi di k. Se il sistema è *LTI* le risposte agli impulsi shiftati sono tutte verioni shifate di loro stesse.
Dato che $\delta[n-k]$ è una versione shiftata di $\delta[n]$, $h_k[n]$ e la versione shiftata di $h_0[n]$.
Per motivi notazionali, definiamo la *risposta impulsiva* come:

$$h[n] = h_0[n]$$

ossia la risposta del sistema LTI quando l'input è $\delta[n]$.
L'equazione precedente diventa:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Ci riferiremo a questa formula come *Sommatoria della Convoluzione*, la sommatoria nella prte destra dell'uguale è la *convoluzione* delle sequenze $x[n]$ e $h[n]$.
La convoluzione è reppresentata simbolicamente come:

$$y[n] = x[k] \circledast h[n]$$

L'operazione di convoluzione può essere vista come uno "*slide*" di $h[n-k]$ attarverso $x[n]$.

5 Risposta Libera e Forzata

Grazie al principio di sovrapposizione è possibile scomporre la risposta di un sistema come:

$$v(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

dove $v_l(t)$ è la risposta libera, ossia la risposta del sistema imponendo solo le sue condizioni iniziali, e $v_f(t)$, ossia la sua risposta facendo agire solo l'ingresso e rtrascurandone quindi lo stato.

5.1 Sistemi desctitti da Equazioni Differenziali

Un sistema è descritto attraverso un'EDO (*Equazione Differenziale Ordinara*)

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i\ v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_i \frac{d^j\ u(t)}{dt^j}$$

5.2 Evoluzione Libera

Dal punto di vista pratico cerco la soluzione dell'EDO:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i\ v(t)}{dt^i} = 0$$

Data λ come soluzione distinta e μ come molteplicità:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\rho=0}^{\mu_i=1} C_{i,\rho}\ e^{\lambda_i t}\ \frac{t^\rho}{\rho!}$$

dove $C_{i,\rho}$ sono i coefficienti complessi da calcolare tramite condizione iniziale

5.3 Evoluzione Forzata

A differenza dell'evoluzione libera, tengo conto degli input di sistema.

Proprietà:
Se uno degli ingressi è $\delta(t)$ calcolo solo risposta impulsiva.
Se $t < 0$ è sistema causale, quindi risposta impulsiva $= 0$

$$h(t) = d_0\delta_0(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\rho=0}^{\mu_i=1} d_{i,\rho}\ e^{\lambda_i t}\ \frac{t^\rho}{\rho!}$$

6 Sistemi LTI Generali

Per sistemi causali $h(t) = 0$, $t < 0$.
Possiamo descrivere un sistema SISO associando ad un ingresso $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ e ad una funzione $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, l'uscita:

$$v(t) = (h(t) \circledast u(t))(t)$$

Per i sistemi LTI causali:

$$\begin{aligned}(h(t) \circledast u(t))(t) &= \int_{-\infty}^{t^+} h(t-\tau)u(\tau)\ d\tau \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)\ d\tau\end{aligned}$$

6.1 Stabilità BIBO

BIBO Stabilità:

$$|u(t)| < M_u, \forall t \in \mathbb{R} \rightarrow \exists M_v : |v(t)| < M_v, \forall t \in \mathbb{R}$$

Un sistema LTI è BIBO stabile sse:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\ dt < +\infty$$

Ossia se la sua risposta impulsiva è sommabile oppure assolutamente integrabile.

Dimostrazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\ dt < +\infty$$

Dato $u(t)$ t.c. $|u(t)| < M_u, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}v(t) &= (h(t) \circledast u(t))(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)\ d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|v(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)\ d\tau\right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)u(t-\tau)|\ d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\,|u(t-\tau)|\ d\tau \\ &= M_u \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\ d\tau < +\infty\end{aligned}$$

Scegliamo

$$M_v = M_u \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\ d\tau \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$|v(t)| < M_v, \forall t \in \mathbb{R}$$

Dimostriamo ora l'implicazione in senso contrario, ossia che la *BIBO-Stabilità* di un sistema implica la sommabilità oppure l'assoluta integrabilità della sua risposta impulsiva.
Supponiamo, per assurdo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\ dt = +\infty$$

$\forall u(t)$ con $|u(t)| < M_u$ ho:

$$\exists M_v\ t.c.\ v(t) = (h(t) \circledast u(t))(t)$$
$$|v(t)| < M_v, \forall t \in \mathbb{R}$$

Scelgo

$$u(t) = sgn(h(-t)) = \begin{cases} 1,\ h(-t) > 0 \\ 0,\ h(-t) = 0 \\ -1,\ h(-t) < 0 \end{cases}$$

Per $t \in \mathbb{R}$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)\ d\tau$$

Per $t = 0$

$$\begin{aligned} v(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(-\tau)\ d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)sgn(\tau)\ d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\ d\tau = +\infty \qquad \perp \end{aligned}$$

1. Per i *Sistemi Causali LTI:*

$$\text{BIBO-Stabilità} \ = \ \int_{0^-}^{+\infty} |h(t)|\ dt < +\infty$$

2. $$h(t) = d_0\delta(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{\rho=0}^{\mu-1} d_{i,\rho}\ e^{\lambda_{i,\rho}}\ \frac{t^\rho}{\rho!}$$

   $h(t)$ sommabile sse tutti i modi sono convergenti, quindi $d_{i,\rho}$ converge

$$Re(\lambda_i) < 0$$

3. I modi di $h(t) \subseteq \{modi\ di\ v_\rho(t)\}$
4. Stabilità Asisntotica $\rightarrow$ BIBO-Stabilità

6.2 Risposta in Frequenza

Dato un sistema LTI BIBO-Stabile di risposta impulsiva $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$ reale a valori reali.
Rappresenta la risposta in presenza di ingressi esponenziali con esponente immaginario puro, ossia in presenza di *fasori* in input.

$$\xrightarrow{u_1(t)=Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}} \boxed{\text{Sistema}} \xrightarrow{v_1(t)}$$

$A \in \mathbb{R}_+$; $\phi, \omega_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u_1(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)Ae^{j(\omega_0(t-\tau)+\phi)}\, d\tau \\ &= Ae^{j(\omega_0 t+\phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}\, d\tau \end{aligned}$$

<u>*BIBO Stabile*</u>

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}\, d\tau\right| &\le \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \underbrace{\left|e^{-j\omega_0\tau}\right|}_{=1}\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau < +\infty \end{aligned}$$

Possiamo scrivere

$$H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}\, d\tau$$

$$v_1(t) = H(j\omega_0)\, Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Per $\omega \in \mathbb{R}$, definiamo

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

e la chiamaiamo *Risposta in Frequenza* del sistema LTI generale BIBO stabile.

$\forall\omega \in \mathbb{R} \to H(j\omega) \in \mathbb{C}$, esistono due funzioni:

$$\begin{aligned} &A(\omega) \quad \underline{\text{modulo}} \\ &\Phi(\omega) \quad \underline{\text{fase}} \end{aligned}$$

tali che

$$A(\omega) = |H(jw)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}\, d\tau\right|$$

$$\Phi(\omega) = arg(H(jw)) = arg\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}\, d\tau\right)$$

Quindi

$$v_1(t) = (A(\omega_0)A)\ e^{j(\omega_0 t+\phi+\Phi(\omega_0))}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Poniamo

$$u_2(t) = Ae^{-j(\omega_0 t+\phi)}$$
$$v_2(t) = H(-j\omega_0)Ae^{-j(\omega_0 t+\phi)} = A(-\omega_0)\ Ae^{-j(\omega_0 t+\phi+\Phi(-\omega_0)}$$

con

$$\begin{aligned} H(-j\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega_0\tau}\ d\tau &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}\ d\tau} \\ &= \overline{H(j\omega_0)} \end{aligned}$$

Possiamo quindi dedurre che

$$A(j\omega_0) = A(-j\omega_0) \rightarrow \text{Funzione Pari}$$
$$\Phi(j\omega_0) \neq \Phi(-j\omega_0) \rightarrow \text{Funzione Dispari}$$

Supponiamo in ingresso

$$u(t) = A\ cos(\omega_0 t + \phi), \quad t \in \mathbb{R}$$

Per la *formula di Eulero*

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 t+\phi)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 t+\phi)} \\ &= \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{v_1(t) + v_2(t)}{2} \\ &= \frac{Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}A(\omega_0)e^{j\Phi(\omega_0)} + Ae^{-j(\omega_0 t+\phi)}A(\omega_0)e^{-j\Phi(\omega_0)}}{2} \\ &= A\ A(\omega_0)cos(\omega_0 t + \phi\Phi(\omega_0)) \end{aligned}$$

La risposta di un sistema LTI reale ($h(t)$ reale) BIBO Stabile a un segnale sinusoidale di ω_0 è un altro segnale sinusoidale della stessa frequenza e:

- Ampiezza data dal prodotto di amiezza dell'ingresso ed il modulo della risposta in frequenza
$$A \cdot |H(j\omega_0)|$$
- Fase data dalla somma della fase in ingresso e la fase della risposta in frequenza
$$\phi + arg(H(j\omega_0))$$

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$
$$u(t) = e^{j\omega t} \rightarrow v(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

dove $H(j\omega)$ è la risposta in frequenza.
Abbiamo

$$\frac{d^i(e^{j\omega t})}{dt^i} = (j\omega)^i e^{j\omega t}$$

Sostituendo

$$\sum_{i=0}^{N} a_i H(j\omega)(j\omega)^i e^{j\omega t} = \sum_{i=0}^{M} b_i (j\omega)^i e^{j\omega t}$$
$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i (j\omega)^i e^{j\omega t}}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j\omega)^i e^{j\omega t}}$$

7 Trasformata di Laplace

Trasforma il problema da un problema nel *doiminio del tempo* ad un problema nel *dominio complesso*.
Torno nel dominio del tempo con **Antitasformata di Laplace**.
Nel dominio complesso ho una soluzione algebrica e calcolo la stabilità più facilmente.

7.1 Trasformata di Laplace Unilatera

Se $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è localmente sommabile in $[0, +\infty)$

$$\int_a^b v(t)\, dt < +\infty,\ \forall\, a, b\ \in [0,\ +\infty)$$

si definisce la *Trasformata di Laplace unilatera di v(t)*:

$$\mathcal{L}[v(t)](s) = V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t) e^{-st}\, dt$$

dove $s = \sigma + j\omega$ è una variabile complessa, di cui σ e ω somi rispettivamente la parte reale e complessa

$$Re(s) = \sigma$$
$$Im(s) = \omega$$

V è definita per s t.c. l'integrale sia ben definito

$$\left| \int_{0^-}^{+\infty} v(t) e^{-st}\, dt \right| < +\infty$$

Tale refione del piano complesso è detta *Regione di Convergenza*, da ora *RdC*.
Possiamo definire la RdC della Trasformata di Laplace l'intervallo di valori

assunti da s per cui l'integrale converge.
Si può dimostrare che la RdC è un semipiano aperto del tipo

$$RdC = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \alpha\}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$, chiamato *Ascissa di convergenza della Trasformata di Laplace.*
Dimostrazione:
Per combinazioni lineari di equazioni esponenziali

$$v(t) = \sum_{i=1}^{N} C_i e^{\lambda_i t}, \quad \lambda_i t = \sigma_i + j\omega_i \in \mathbb{C}$$

$$V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} \sum_{i=1}^{N} C_i e^{\lambda_i t} e^{-st}\, dt = \sum_{i=1}^{N} C_i \int_{0^-}^{+\infty} e^{\lambda_i t} e^{-st}\, dt$$

Dimostriamo che

$$\left| \int_{0^-}^{+\infty} e^{\lambda_i t} e^{-st}\, dt \right| < +\infty \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \left| \int_{0^-}^{+\infty} e^{\sigma_i t} \underbrace{e^{j\omega_i t}}_{=1} e^{-\sigma t} \underbrace{e^{-j\omega_i t}}_{=1}\, dt \right|$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} \left| e^{(\sigma_i - \sigma)t} \right| dt = \frac{e^{(\sigma_i - \sigma)t}}{\sigma_i - \sigma} \Big|_{0^-}^{+\infty}$$

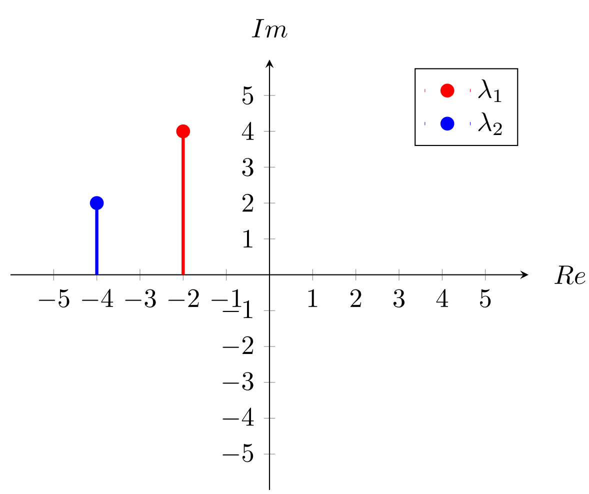
ossia

$$\lim_{t \to \infty} \frac{e^{(\sigma_i - \sigma)t}}{\sigma_i - \sigma} - \frac{1}{\sigma_i - \sigma}$$

che converge per

$$(\sigma_i - \sigma) < 0 \;\rightarrow\; \sigma > \sigma_i$$

Scegliendo $\alpha = sup\{Re(\lambda_i)\}$ la Trasformata di Laplace converge $\forall v(t)$



Quindi $sup\{Re(\lambda_i)\}$ ascissa di convergenza.
Nel caso del nostro grafico l'ascissa di convergenza è λ_1, la regione alla sua destra è la RdC. Alcune cose da tenere a mente:

- I sistemi stabili hanno $\alpha < 0$ $(Re(\lambda_i) < \alpha < 0 \quad \forall i)$

$$j\omega \in \ RdC, \ \forall \omega \in \mathbb{R}$$

- $v(t)$ (Dominio del Tempo) $\rightarrow V(s)$ (Dominio Complesso)

7.2 Proprietà Trasformata di Laplace

1. **Linearità**

$$\mathcal{L}[a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)] = a_1 \, \mathcal{L}[v_1(t)] + a_2 \, \mathcal{L}[v_2(t)]$$

$$RdC = \{s \in \mathbb{C} : \ Re(s) > \alpha\} \text{ dove } \alpha \geq \{\alpha_1, \ \alpha_2\}$$

2. **Time-shifting**

Se $v(t)$ ammette Trasformata di Laplace $V(s)$, allora $v(t-\tau)$ l'ammette a sua volta

$$\mathcal{L}[v(t-\tau)] = e^{-s\tau} \, \mathcal{L}[v(t)] \qquad \alpha_1 = \alpha_2$$

3. **Moltiplicazione per una Funzione Esponenziale**

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} v(t)] = V(s-\lambda) \qquad \alpha_2 = Re(\lambda) + \alpha$$

Dimostrazione:

$$\int_{0^-}^{+\infty} e^{\lambda t} v(t) \, dt = \int_{0^-}^{+\infty} v(t) e^{-s(\lambda - 1)t} \, dt$$

4. **Cambio di Scala**

$$\mathcal{L}[v(rt)] = \frac{1}{r} \, V\left(\frac{s}{r}\right) \qquad \alpha_2 = r\alpha$$

Dimostrazione:

$$\int_{o^-}^{+\infty} v(rt) e^{-st} \, dt$$

$$\text{Per sostituzione } rt = x, \ dt = \frac{1}{r} \, dx$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} \frac{1}{r} \, v(x) e^{\frac{s}{r} t} \, dx$$

5. **Proprietà della Derivata**

Se $v(t)$ ammette Trasformata di Laplace $V(s)$ed esiste ed è finito

$$v(0^-) = \lim_{t \to 0} v(t)$$

allora anche $v'(t)$ ammette Trasformata di Laplace.
Data la Trasformata di Laplace della derivata prima

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v'(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} v'(t)e^{-st}\, dt &= v(t)e^{-st}\big|_{0^-}^{+\infty} - (-s)\int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st}\, dt \\ &= \lim_{t\to\infty} [v(t)e^{-st}|_{0^-}^{t}] + sV(s) \\ &= \lim_{t\to\infty} [e^{-st}\underbrace{v(t)}_{0} - v(0^-)] + sV(s) \\ &= -v(0^-) + sV(s)\end{aligned}$$

E quella della derivata seconda

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v''(t)] &= s\,\mathcal{L}[v'(t)] - v'(0^-) \\ &= s(s\,\mathcal{L}[v(t)] - v(0^-) - v'(0^-)) \\ &= s^2\,\mathcal{L}[v(t)] - sv(0^-) - v'(0^-)\end{aligned}$$

Possiamo definire la *Trasformata di Laplace della Derivata i-esima*

$$\mathcal{L}[v^i(t)] = s^i\,\mathcal{L}[v(t)] - \sum_{k=0}^{i-1} v^k(t)|_{t=0^-} \cdot s^{i-1-k} \qquad \alpha_2 \leq \alpha$$

6. **Moltiplicazione per una Funzione Polinomiale**

$$\mathcal{L}[tv(t)] = -V'(s) \qquad RdC_1 = RdC_2$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}V'(s) &= \frac{d}{ds}\int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st}\, dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} \frac{d}{ds}e^{-st}v(t)\, dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} -te^{-st}v(t)\, dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} -tv(t)e^{-st}\, dt \;=\; -\mathcal{L}[tv(t)]\end{aligned}$$

In generale

$$\mathcal{L}[t^i v(t)] = (-1)^i V^i(s)$$

7. **Integrazione nel Dominio del Tempo**

Se $v(t)$ ammette Trasformata di Laplace $V(s)$ per $Re(s) > \alpha$, allora anche

$$\int_{0^-}^{t} v(\tau)\, d\tau$$

ha Trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}\Big[\int_{0^-}^{t} v(\tau)\, d\tau\Big] = \frac{V(s)}{s} \qquad \alpha_2 = max(0, \alpha_1)$$

Dimostrazione:
Dato

$$v_1(t) = \int_{0^-}^{t} v(\tau)\, d\tau \;\Rightarrow v_1'(t) = v_1(t)$$

$$v_1(0^-) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t)] &= \mathcal{L}[v_1(t)] \\ &= s\,\mathcal{L}[v_1(t)] - \underbrace{v_1(0^-)}_{0} \\ &= s\,\mathcal{L}\Big[\int_{0^-}^{t} v(\tau)\, d\tau\Big] \\ &= \mathcal{L}\Big[\int_{0^-}^{t} v(\tau)\, d\tau\Big] = \frac{V(s)}{s}\end{aligned}$$

8. **Integrazione nel Dominio del Tempo**

Se esiste

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{v(t)}{t}$$

allora

$$\mathcal{L}\Big[\frac{v(t)}{t}\Big] = \int_{s}^{+\infty} V(s)\, ds$$

Dimostrazione:
Dato

$$V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st}\, dt|_{\int_s^{+\infty}}$$

$$\begin{aligned}\int_{s}^{+\infty} V(s)\, ds &= \int_{s}^{+\infty} \Big[\int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st}\, dt\Big]\, ds \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} \Big[\int_{s}^{+\infty} e^{-st}\, ds\Big]\, v(t)\, dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} \Big[-\frac{1}{t}e^{-st}|_s^{+\infty}\Big]\, v(t)\, dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} v(t)\frac{e^{-st}}{t}\, dt = \mathcal{L}\Big[\frac{v(t)}{t}\Big]\end{aligned}$$

9. **Teorema del Valore Iniziale**

Ammetta $v(t)$ Trasformata di Laplace, se esiste $\lim_{t\to 0^-} v(t)$ finito

$$\lim_{t\to 0^-} v(t) = \lim_{s\to +\infty} sV(s)$$

Dimostrazione:

$$\mathcal{L}[v'(t)] = sV(s) - v(0^-)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to+\infty} sV(s) - v(0^-) &= \lim_{s\to+\infty} \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{s\to+\infty} \Big(\lim_{T\to+\infty,\ \epsilon\to 0^-} \int_{\epsilon}^{T} v'(t)e^{-st}\, dt \Big) \\
&= \lim_{T\to+\infty,\ \epsilon\to 0^-} \Big(\int_{\epsilon}^{T} v'(t) \underbrace{\lim_{s\to+\infty} e^{-st}}_{0}\, dt \Big) \\
&= 0 \ \Rightarrow \ \lim_{s\to+\infty} sV(s) - v(0^-) = 0 \\
&\quad\ \ \Rightarrow \ \lim_{s\to+\infty} sV(s) - v(0^-)
\end{aligned}$$

10. **Teorema del Valore Finale**

Se $v(t)$ ammette Trasformata di Laplace e $\lim_{t\to+\infty} v(t)$ esiste ed è finito, allora

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{s\to 0^+} sV(s)$$

Dimostrazione:

$$\mathcal{L}[v'(t)] = sV(s) - v(0^-) = \int_{0^-}^{+\infty} v'(t)e^{-st}\, dt$$

Allora

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^+} sV(s) - v(0^-) &= \lim_{s\to 0^+} \Big(\lim_{T\to+\infty,\ \epsilon\to 0^-} \int_{\epsilon}^{T} v'(t)e^{-st}\, dt \Big) \\
&= \lim_{T\to+\infty,\ \epsilon\to 0^-} \Big(\int_{\epsilon}^{T} v'(t) \underbrace{\lim_{s\to 0^+} e^{-st}}_{1}\, dt \Big) \\
&= \lim_{T\to+\infty,\ \epsilon\to 0^-} v(t)\big|_{\epsilon}^{T} \\
&= \lim_{T\to+\infty,\ \epsilon\to 0^-} v(T) - v(\epsilon) \\
&= \lim_{T\to+\infty,\ \epsilon\to 0^-} v(T) - v(0^-)
\end{aligned}$$

Quindi

$$= \lim_{s\to 0^+} sV(s) - \cancel{v(0^-)} = \lim_{T\to +\infty} v(T) - \cancel{v(0^-)}$$

11. **Convoluzione**

Se $v_1(t),\ v_2(t)$ nulle per $t < 0$ ammettono Trasformata di Laplace $V_1(s),\ V_2(s)$

$$\mathcal{L}[v_1(t) \circledast v_2(t)] = V_1(s)V_2(s)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[v_1(t) \circledast v_2(t)] &= \mathcal{L}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\tau)v_2(t-\tau)\ d\tau\Big] \\
&= \int_{0^-}^{+\infty} \Big(\int_{0^-}^{+\infty} v_1(\tau)v_2(t-\tau)\ d\tau\Big)e^{-st}\ dt \\
&= \int_{0^-}^{+\infty} v_1(\tau)\Big(\int_{0^-}^{+\infty} v_2(t-\tau)e^{-st}\ dt\Big)\ d\tau
\end{aligned}$$

Per sostituzione $t - \tau = \lambda,\ dt = d\lambda$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_{0^-}^{+\infty} v_1(\tau)\Big(\int_{0^-}^{+\infty} v_2(\lambda)e^{-s(\lambda+\tau)}\ d\lambda\Big)\ d\tau \\
&= \int_{0^-}^{+\infty} v_1(\tau)e^{-s\tau}\Big(\int_{0^-}^{+\infty} v_2(\lambda)e^{-s\lambda}\ d\lambda\Big)\ d\tau \\
&= \underbrace{\int_{0^-}^{+\infty} v_1(\tau)e^{-s\tau}\ d\tau}_{V_1(s)}\underbrace{\Big(\int_{0^-}^{+\infty} v_2(\lambda)e^{-s\lambda}\ d\lambda\Big)}_{V_2(s)}
\end{aligned}$$

7.3 Trasformate di Laplace Notevoli

- **Impulso Ideale Unitario**

$$\mathcal{L}[\delta(t)]\ \rightarrow\ \int_{o^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}\ dt$$

Proprietà del Campionamento $\rightarrow\ v(t) = e^{-st}$, quindi $e^{-s0} = 1$

$$V(s) = 1 \qquad RdC = \mathbb{C}$$

- **Segnale generico**

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \qquad RdC = Re(s) > 0$$

$$\mathcal{L}[-u(-t)] = \frac{1}{s} \qquad RdC = Re(s) < 0$$

- **Gradino Unitario**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_{-1}(t)e^{-st}\ dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}\ dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{0^-}^{+\infty} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

- **Impulso Ritardato**

$$\mathcal{L}[\delta(t) - t_0] = \Big(\int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}\ dt\Big)e^{-st_0} = e^{-st_0}$$

- **Esponenziale Causale**

$$v(t) = e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$$

$$\mathcal{L}[v(t)] = V(s-\lambda) = \frac{1}{s-\lambda}\ \text{ con }\ V(s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)]$$
$$RdC = \{s \in \mathbb{C} :\ Re(s) > Re(\lambda)\}$$

- **Esponenziale Causale moltiplicato per Funzione Polinomiale**

$$v(t) = \frac{t^\rho}{\rho!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[v(t)] &= \frac{1}{\rho!}\,\mathcal{L}[t^\rho e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)] \\ &= \frac{(-1)^\rho}{\rho!}\frac{d^\rho}{ds^\rho}\,\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)] \\ &= \frac{(-1)^\rho}{\rho!}\Big(\frac{d^\rho}{ds^\rho}\frac{1}{s-\lambda}\Big) = \frac{1}{(s-\lambda)^{\rho+1}}\end{aligned}$$

- **Seno**

$$\mathcal{L}[sin(\omega t)] = \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}$$

Dimostrazione:
Usiamo la *Formula di Euelero* per aiutarci con la dimostrazione

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[sin(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right] \\ &= \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}[e^{j\omega t}]-\mathcal{L}[e^{-j\omega t}]\right) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{\cancel{s}+j\omega-\cancel{s}+j\omega}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

- **Coseno**

$$\mathcal{L}[cos(\omega t)] = \frac{s^2}{s^2+\omega^2}$$

Dimostrazione:
Usiamo la *Formula di Euelero* per aiutarci con la dimostrazione

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[cos(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{j\omega t}]-\mathcal{L}[e^{-j\omega t}]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{s+\cancel{j\omega}+s-\cancel{j\omega}}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

7.4 Sistemi LTI Causali: Analisi nel Dominio Complesso

$$a_n\frac{d^n v(t)}{dt^n}+\cdots+a_0v(t)=b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m}+\cdots+b_0u(t)$$
$$u(t)=v(t)\delta_{-1}(t) \qquad a_n,b_m\neq 0,\ n\geq m$$

Se $u(t)$ ammette Trasformata di Laplace, $v(t)$ ammette Trasformata di Laplace

$$U(s)=\mathcal{L}[u(t)] \qquad V(s)=\mathcal{L}[v(t)]$$
$$\mathcal{L}[v'(t)]=s^iV(s)-\sum_{k=0}^{i-1}\left.\frac{d^k v(t)}{dt^k}\right|_{t=0^-}\cdot s^{i-1-k}$$

Applico Trasformata di Laplace

$$a_n\Big[s^nV(s) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{d^kv(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-}\cdot s^{n-1-k}\Big] + a_{n-1}\Big[s^{n-1}V(s) - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{d^kv(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-}\cdot s^{n-2-k}\Big] + \cdots$$
$$\cdots + a_0V(s) = b_ms^mU(s) + \cdots + b_0U(s)$$

Quindi

$$\underline{(a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)}V(s) - a_nV(0^-)s^{n-1} - \underline{[a_{n-1}v(0^-) + a_nv'(0^-)]s^{n-2}} -$$
$$-\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k-1}d^kv(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-}\right] = \underline{(b_ms^m + \cdots + b_0)U(s)}$$

Risulta

$$\underline{d(s)}V(s) - \underline{p(s)} = \underline{n(s)}U(s)$$
$$\Rightarrow\ V(s) = \frac{p(s)}{d(s)} + \frac{n(s)}{d(s)}U(s)$$

con $d(s)$ polinomio caratteristico.
$\frac{p(s)}{d(s)}$ dipende solo dalle condizioni iniziali su $v(t)$ e dal polinomio caratteristico.
Rappresenta la Trasformata di Lpalce della *Risposta Libera*

$$V_l(s) = \frac{p(s)}{d(s)}$$

$\frac{n(s)}{d(s)}$ dipende solo dal sistema e dall'ingresso.
Rappresenta la Trasformata di Laplace della *Risposta Forzata*

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}U(s)$$

$$\mathcal{L}[h(t)] = H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

Definiamo $H(s)$ come *Funzione di Trasferimento.*

7.5 Rappresentazione della Funzione di Trasferimento

$H(s)$ è la Trasformata di Laplace della *Risposta Impulsiva*

$$h(t) = d_0\delta(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\rho=0}^{\mu-1} d_{i,\rho}\ e^{\lambda,i}\ \frac{t^\rho}{\rho!}\ \delta_{-1}(t)$$
$$H(s)d_0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\rho=0}^{\mu-1}\frac{d_{i,\rho}}{(s-\lambda)^{\rho+1}}$$

L'*ascissa di convergenza* di $H(s)$ è

$$\alpha = \{max(Re(\lambda_i) : \exists \, \rho \; t.c. \; d_{i,\lambda} \neq 0)\}$$

Con le opportune operazioni algebriche

$$H(s) = \frac{\bar{n}(s)}{(s-\lambda_1)^{\mu_1}(s-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(s-\lambda_n)^{\mu_n}} \qquad \bar{n}(s) = \frac{n(s)}{\alpha_n}$$

Fattorizzando si ottiene

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

dove z e p non sono necessariamente distinti.
Con questa rappresentazioen si possono evidenzaire gli *zeri* ed i *poli* di $H(s)$.
Se $\{z_1, ..., z_n\} \bigcap \{p_1, ..., p_n\} = \emptyset$ e quindi $H(s)$ irriducibile

- Gli zeri (valori di s per cui $H(s) = 0$) sono le zeta al numeratore
- I poli (valori di s per cui $H(s) = \infty$) sono le p al denominatore

7.6 Diagrammi a Blocchi (Metodo di Mason)

Il *Diagramma a Blocchi* è la rappresentazione grafica di un sistema. Il nostro obiettivi è quello di semplificare il diagramma a blocchi al fine di ottenere la *Funzione di Trasferimento* di quels siatema.
Per fare questo ci avvaliamo del *Metodo di Mason* che ci permette di rappresentare la FdT di un sistema tramite questa formula

$$FdT = \frac{1}{\Delta}\sum_i P_i\Delta_i$$

dove P_i viene chiamato *percorso* e Δ, Δ_i vengono chiamati *determinanti*.
Il metodo è molto semplice

1. Trovo tutti i *percorsi* del sistema (ovvero tutte le strade che dell'inizio del grafo portano alla fine) ricordando che, se uno di questi passa per un *nodo sommatore* con segno meno ,coniugo il percorso.

2. Trovo tutti i *cicli* nel grafo.

3. Calcolo Δ con la formula

   $$\Delta = 1 - \sum_i A_i + \sum_{i,j} A_iA_j$$

   dove A rappresenta un *ciclo*.
   La prima sommatoria rappresenta la somma di tutti i cicli, la seconda la somma di tutti i cicli che non si toccano, ovvero i cicli che **non** hanno alcun nodo in comune.

4. Calcolo FdT nella forma

$$FdT = \frac{1}{\Delta} \sum_i P_i \Delta_i$$

dove

$$\Delta_i = \begin{cases} 1 \text{ se } P_i \text{ tocca quel ciclo} \\ (1 - \ ciclo) \text{ se } P_i \text{ non tocca quel ciclo} \end{cases}$$

7.7 Stabilità BIBO nel Dominio delle Trasformate

Un sistema è *BIBO Stabile* sse tutte le soluzioni λ_i pesate per un coefficiente non nullo $h(t)$ sono parte reale negativa.
Una volta semplificato $H(s)$ tutti i p_i sono esattamente i λ_i non pesati da un coefficeinte nullo.
Un sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ è *BIBO Stabile* sse tutti i poli p hanno parte reale minore di 0

$$\forall\, p: \ Re(p) < 0$$

7.8 Antitrasformata Unilatera di Laplace

La Trasformata di Laplace è un operatore iniettivo sotto le seguenti condizioni

1. Prende in considerazione segnai causali o li considera solo in $[0, +\infty)$
2. Identifica tra loro funzioni che differiscono su un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}_+$

L'*Antitrasfotmata di Laplace* $\mathcal{L}^{-1}$ di una fiunzione razionale a coefficienti in $\mathbb{C}$ è unica

$$\exists! \ \mathcal{L}^{-1}[V(s)]$$

Se $V(s) \in \mathbb{C}$ allora può essere decomposta in frazioni parziali di cui è nota l'antitrasforamta

$$V(s) = \frac{\bar{n}(s)}{\bar{d}(s)} \qquad \bar{n}(s), \bar{d}(s) \neq 0$$

posso ottenere l'antitrasformata come segue

1. Divido $\bar{n}(s)$ per $\bar{d}(s)$

$$V(s) = q(s) + \frac{r(s)}{\bar{d}(s)}$$

Il polinomio $q(s)$ sarà nella forma

$$\sum_{i=0}^{k} q_i s^i$$

e la sua Antitrasformata di Laplace è combinazione lineare di componenti impulsive

$$\sum_{i=0}^{k} q_i \delta_i(t)$$

tali che

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \sum_{i=0}^{k} q_i \delta_i(t) + \mathcal{L}^{-1}[V_{SP}(s)]$$

con

$$V_{SP}(s) = \frac{r(s)}{\bar{d}(s)}$$

2. Fattorizzando $\bar{d}(s) = (s - \lambda_i)^{\mu_i} \cdot (s - \lambda_r)^{\mu_r}$ si ottiene

$$\begin{aligned} V_{SP}(s) &= \frac{r(s)}{(s-\lambda_1)^{\mu_1}(s-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(s-\lambda_n)^{\mu_n}} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\rho=0}^{\mu-1} \frac{C_{i,\rho}}{(s-\lambda_i)^{\rho+1}} \end{aligned}$$

L'antitrasformata della seconda è

$$v_{SP}(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_{SP}(s)] = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\rho=0}^{\mu_i-1} C_{i,\rho}\; e^{\lambda_i}\; \frac{t^\rho}{\rho!}\; \delta_{-1}(t)$$

Unendo i due si ottiene

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \sum_{i=0}^{k} q_i \delta_i(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{\rho=0}^{\mu_i-1} C_{i,\rho}\; e^{\lambda_i}\; \frac{t^\rho}{\rho!}\; \delta_{-1}(t)$$

8 Serie di Fourier

La uso per rappresentare un qualsiasi segnale periodico.

Ogni combinazione lineare di fasori con frequenze multiple di una frequenza di potenza f_0, è un segnale periodico di periodo $\frac{1}{T_0}$.

Qualunque segnale periodico $v(t)$ di periodo T_0 è riscrivibile come una sommatoria infinita di termini fasoriali

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k e^{j2\pi f_0 kt}$$

con

$$f_0 = \frac{1}{t_0} \qquad \underline{\text{Equazione di Sintesi}}$$

purchè questa converga.

I v_k sono dati dall'equazione

$$v_k = \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{T_0} v(t) e^{j2\pi f_0 kt}\, dt}_{\text{Equazione di Analisi}}$$

Se la serie converge prende il nome di *Serie di Fourier*.

8.1 Convergenza della Serie di Fourier

Sia $v(t)$ funzione periodica di periodo T_0 generalmente continua e derivabile su $[t_0, t_0+T_0),\ t_0 \in \mathbb{R}$, con derivata generalmene continua e limitata in $[t_0, t_0+T_0)$, allora essa risulta sommabile, al quadrato sommabile e sviluppabile secondo Fourier.

Sotto queste ipotesi la serie converge e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|\, dt < +\infty \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)^2|\, dt < +\infty$$

Se v è discontinua restituisce la media aritmetica tra il limite destro e quello sinistro

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k e^{j2\pi f_0 kt} = \frac{v(t_0^-) + v(t_0^+)}{2}$$

8.2 Rappresentazione Trigonometrica Serie di Fourier

Se $v(t)$, sviluppabile secondo Fourier, è reale

$$v_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{T_0} v(t) e^{j2\pi f_0 kt}\, dt = \bar{v_k}$$

Ricordando che $|v_k| = |\bar{v_k}|$ e $arg(v_k) = -arg(\bar{v_k})$, allora

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} |v_k| e^{j\ arg(v_k)} e^{j2\pi f_0 kt}\ dt + v_0' + \sum_{k=1}^{+\infty} |v_k| e^{j\ arg(v_k)} e^{j2\pi f_0 kt}\ dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} |v_k| e^{-j\ arg(v_k)} e^{-j2\pi f_0 kt}\ dt + \sum_{k=1}^{+\infty} |v_k| e^{j\ arg(v_k)} e^{j2\pi f_0 kt}\ dt + v_0 \end{aligned}$$

Invocando la *Formula di Eulero*

$$v(t) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |v_k| cos(2\pi f_0 kt + arg(v_k))$$

oppure

$$v(t) = v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\ cos(2\pi f_0 kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k\ sin(2\pi f_0 kt)$$

dove

$$\begin{aligned} A_k &= 2|v_k| cos(arg(v_k)) \\ B_k &= 2|v_k| sin(arg(v_k)) \end{aligned}$$

v_0 è il valore medio preso da $v(t)$ in T_0.

9 Trasformata di Fourier

Permette di descrivere un qualsiasi segnale aperiodico o periodico mediante un continuo di frequenze

- **Equazione di Analisi** (Trasformazione)

$$\mathcal{F}[v(t)] = V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)e^{-j2\pi f_0 t}\,dt$$

- **Equazione di Sintesi** (Antitrasformazione)

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}[V(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f)e^{j2\pi f_0 t}\,dt$$

Viene introdotta una nuova variabile, f. Quando *Trasformo secondo Fourier* un segnale generico nel dominio del tempo $v(t)$, questo viene portato nel dominio delle frequenze, la variabile f rappresenta infatti gli Hertz.

9.1 Trasformata di Fourier Segnali Periodici

Consideriamo un segnale generico $x(t)$ con Trasformata di Fourier $X(f)$ in ω_0

$$X(f) = \delta(\omega_0)$$

Applichiamo la trasformata inversa

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_0)e^{j2\pi f_0 t}\,dt \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Più in generale, se $X(f)$ è nella forma di una combinazione lineare di impulsi equamente spaziati nelle frequenze, diventa

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k \delta(k\omega_0)$$

quindi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k e^{jk\omega_0 t}$$

Possiamo dedurre che la Trasformata di Fourier di un segnale periodico con coefficienti v_k nella Serie di Fourier può essere interpretata come un *Treno di Impulsi* alla frequenza armonica correlata.

9.2 Proprietà Trasformata di Fourier

- **Linerità**

  Dati due segnali generici $v_1(t)$ e $v_2(t)$, se
  $$\mathcal{F}[v_1(t)] = V_1(f)$$
  e
  $$\mathcal{F}[v_2(t)] = V_2(f)$$
  allora
  $$\mathcal{F}[av_1(t) + bv_2(t)] = aV_1(f) + bV_2(f)$$

- **Time Shifting**

  Dato un segnale generico $v(t)$, se
  $$\mathcal{F}[v(t)] = V(f)$$
  allora
  $$\mathcal{F}[v(t-\tau)] = V(f)e^{-j2\pi f_0 \tau}$$
  Dimostrazione:

  Consideriamo
  $$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f)e^{-j2\pi f_0 t}\, dt$$
  Sostituiamo ora t con $t - \tau$
  $$\begin{aligned} V(t-\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(f)e^{-j2\pi f_0 (t-\tau)}\, dt \\ &= e^{j2\pi f_0 \tau} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} V(f)e^{-j2\pi f_0 t}\, dt \end{aligned}$$
  Che ci porta all'equazione di sintesi, quindi
  $$\mathcal{F}[v(t-\tau)] = V(f)e^{-j2\pi f_0 \tau}$$

- **Coniugazione e Riflessione**

  Dato un segnale generico $v(t)$
  $$\mathcal{F}[\overline{v(t)}] = \overline{V(-f)}$$
  Dimostrazione:
  $$\begin{aligned} \mathcal{F}[\overline{v(t)}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(t)}e^{-j2\pi f_0 t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(t)e^{-j2\pi (-f_0) t}}\, dt = \overline{V(-f)} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[v(-t)] = V(-f)$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

$$\mathcal{F}[v(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} v(-t)e^{-j2\pi f_0 t}\ dt$$

Sostituendo $x = -t,\ dx = -dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)e^{j2\pi - f_0 t}\ dx = V(-f)$$

$$\mathcal{F}[\overline{v(t)}] = \overline{V(f)}$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

$$\mathcal{F}[\overline{v(t)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(t)}e^{-j2\pi f_0 t}\ dt$$

Sostituendo $x = -t,\ dx = -dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(x)}e^{-j2\pi f_0 x}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(x)e^{-j2\pi f_0 x}}\ dx$$
$$= \overline{V(f)}$$

- **<u>Cambio di Scala</u>**

  Dato un segnale generico $v(t)$

  $$\mathcal{F}[v(rt)] = \frac{1}{r}\ V\left(\frac{f}{r}\right)$$

- **<u>Proprietà della Derivata</u>**

  Dato un segnale generico $v(t)$

  $$\mathcal{F}[v(t)'] = (j2\pi f_0)V(f)$$

  Questa definizione si può estendere alla derivata di ordine i

  $$\mathcal{F}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = (j2\pi f_0)^i V(f)$$

- **<u>Integrazione nel Dominio del Tempo</u>**

  Dato un seganle generico $v(\tau)$

  $$\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\ dt = \frac{V(f)}{j2\pi f_0} + \frac{1}{2}V(0)\delta(f)$$

- **Convoluzione**

  Dati due segnali generici $v_1(t)$ e $v_2(t)$ aventi Trasformata di Fourier $V_1(f)$ e $V_2(f)$, allora
  $$\mathcal{F}[v_1(t) \circledast v_2(t)] = V_1(f) \cdot V_2(f)$$
  da questo possiamo dedurre che valga anche l'inversa
  $$\mathcal{F}[v_1(t) \cdot v_2(t)] = V_1(f) \circledast V_2(f)$$

9.3 Trasformate di Fourier Notevoli

Molte di queste sono identiche alle corrispondenti *Trasformate di Laplace* tenendo a mente che, in questo caso, $s = j2\pi f$.

- **Impulso Unitario**
  $$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi f_0 t}\, dt = e^{-j2\pi f_0 0} = 1$$

- **Impulso Traslato**
  $$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)e^{-j2\pi f_0 t}\, dt = e^{-j2\pi f_0 t_0}$$

- **Box**
  $$\begin{aligned}
  \mathcal{F}\left[\sqcap\left(\frac{t}{T}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqcap\Big(\frac{t}{T}\Big)e^{-j2\pi f_0 t}\, dt \\
  &= \int_{-T/2}^{+T/2} 1\ e^{-j2\pi f_0 t}\, dt \\
  &= \frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{-j2\pi f_0}\Bigg|_{-T/2}^{+T/2} \\
  &= \frac{1}{-j2\pi f_0}(e^{-j2\pi f_0 (T/2)} - e^{-j2\pi f_0(-T/2)}) \\
  &= T\Big(\frac{1}{\pi T f_0}\Big)\Big(\frac{e^{j(\pi T f_0)} - e^{-j(\pi T f_0)}}{2j}\Big) \\
  &= T\frac{sin(\pi T f_0)}{\pi T f_0} = T sinc(T f_0)
  \end{aligned}$$

- **Funzione Costante**

  Dato un segnale di potenza A rapportato ad una Box t.c. $v_T(t) = A\sqcap\Big(\frac{t}{T}\Big)$
  $$\mathcal{F}\left[A\sqcap\left(\frac{t}{T}\right)\right] = V_T(f) = A\int_{-T/2}^{+T/2} 1\ e^{-j2\pi f_0 t}\, dt = AT sinc(T f_0)$$

Facendo tendere $T \to +\infty$

$$\mathcal{F}[A] = \lim_{T\to+\infty} V_T(t) = \lim_{T\to+\infty} ATsinc(Tf_0) = A\delta(f)$$

- **Fasore**

  Dato un segnale di potenza $e^{j2\pi ft}$ rapportato ad una Box t.c. $v_T(t) = e^{j2\pi ft} \sqcap \left(\frac{t}{T}\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{j2\pi ft} \sqcap \left(\frac{t}{T}\right)] &= \int_{-T/2}^{+T/2} e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi f_0 t}\ dt \\ &= \int_{-T/2}^{+T/2} 1\ e^{-j2\pi(f-f_0)t}\ dt \\ &= Tsinc(T(f-f_0))\end{aligned}$$

  Facendo tendere $T \to +\infty$

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi ft}] = \lim_{T\to+\infty} V_T(t) = \lim_{T\to+\infty} Tsinc(T(f-f_0)) = \delta(f-f_0)$$

- **Coseno**

  Tramite la *Formula di Eulero* si può notare che avremo una serie di impulsi traslati come risultato

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[cos(2\pi ft)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} cos(2\pi ft) e^{-j2\pi f_0 t}\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{e^{j2\pi ft} - e^{-j2\pi ft}}{2}\Big) e^{-j2\pi f_0 t}\ dt \\ &= \frac{1}{2j}\Big(\ \mathcal{F}[e^{j2\pi ft}] + \mathcal{F}[e^{j2\pi(-f)t}]\Big) \\ &= \frac{1}{2j}(\delta(f+f_0) + \delta(f_0 - f))\end{aligned}$$

- **Seno**

  Analogamente al coseno, anche per la funzione seno utilizziamo la *Formula di Eulero* ottenendo come risultato una serie di impulsi traslati

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[sin(2\pi ft)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} sin(2\pi ft) e^{-j2\pi f_0 t}\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{e^{j2\pi ft} - e^{-j2\pi ft}}{2}\Big) e^{-j2\pi f_0 t}\ dt \\ &= \frac{1}{2j}\Big(\ \mathcal{F}[e^{j2\pi ft}] - \mathcal{F}[e^{j2\pi(-f)t}]\Big) \\ &= \frac{1}{2j}(-\delta(f+f_0) + \delta(f_0 - f))\end{aligned}$$

- **Treno di Impulsi (Pettine di Dirac)**

  Si applica la *Trasformata di Fourier* ad ogni impulso $\delta(t)$, definiamo $f_T = 1/T$. Il risultato è una serie di impulsi distanziati di f_T

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta_T(t)] &= \mathcal{F}\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\Big] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\delta(t-kT)] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 kT} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-k(1/T)) \\
&= f_T \cdot \delta_{f_t}(f)
\end{aligned}
$$

10 Diagrammi di Bode

Servono per rappresentare correttamente la *Risposta in Frequenza.*
Esistono due grafici distinti, il **Diagramma di Bode del Modulo** ed il **Diagramma di Bode della Fase**.
Entrambi i grafici sono in scala *semilogaritmica*, questo vuol dire che i due assi hanno scale diverse, l'asse delle ascisse è in *scala logaritmica* mentre l'asse delle ordinate è in *scala lineare.*

Il primo passo per tracciare entrambi i daigrammi è portare la *Funzione di Trasferimento* (FdT da ora in poi) nella *Forma di Bode.* Per fare questo poniamo $s = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{K_B}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_{zi})^{\mu_i} \prod_i (1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n_{zi}}^2} + \frac{2\rho_{zi}}{\omega_{n\,zi}} j\omega)^{\mu_i}}{\prod_i (1 + j\omega\tau_{pi})^{\mu_i} \prod_i (1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n_{pi}}^2} + \frac{2\rho_{pi}}{\omega_{n\,pi}} j\omega)^{\mu_i}}$$

con

- $K_B \rightarrow$ Guadagno di Bode
- $g \rightarrow$ Tipo del sistema
- $\tau \rightarrow$ Costante di Tempo
- $\rho \rightarrow$ Coefficiente di Smorzamento (< 1 altrimenti non ho trinomi indivisibili)
- $\omega_n \rightarrow$ Pulsazione Naturale (sempre > 0)

Rappresento ora $H(j\omega)$ in *decibel*, utilizziamo la notazione

$$|H(j\omega)|_{dB}$$

Ricordiamo che

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\ log_{10}|H(j\omega)|$$

<u>N.B:</u> I decibel non sono un unità di misura!
Quindi, rappresentiamo in decibel l'FdT in Forma di Bode

$$\begin{aligned}
|H(j\omega)|_{dB} &= 20\ log_{10}|H(j\omega)| \\
&= 20\ log_{10}|K_B| - 20g\ log_{10}|j\omega| + \sum_i 20\ log_{10}|(1 + j\omega\tau_{zi})^{\mu_i}| + \\
&+ \sum_i 20\ log_{10}\left|\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n_{zi}}^2} + j\frac{2\rho_{zi}\omega}{\omega_{n_z i}^2}\right)^{\mu_i}\right| - \sum_i 20\ log_{10}|(1 + j\omega\tau_{pi})^{\mu_i}| - \\
&+ \sum_i 20\ log_{10}\left|\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{n_{pi}}^2} + j\frac{2\rho_{zi}\omega}{\omega_{n_p i}^2}\right)^{\mu_i}\right|
\end{aligned}$$

Possiamo quindi individuare quattro *Termini Fondamentali* partendo da questa equazione

- $H_a(j\omega) = k_B$ (Termine Guadagno)
- $H_b(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ (Termine Monomio)
- $H_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$ (Termine Binomio)
- $H_d(j\omega) = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j\frac{2\rho\omega}{\omega_n}}$ (Termine Trinomio)

con le p che rappresentano i *poli* e le z che rappresentano gli *zeri*.
Nelle sezioni a seguire, per comodità, Considereremo i vari termini espressi come *poli*. Teniamo a mente che il grafico, se espressi invece come *zeri*, risulterebbe specchiato rispetto all'asse delle ascisse.

Per quanto riaguarda il *Diagramma di Bode della Fase* l'unità di misura sono i gradi.

Per aiutare la comprensionde dell'argomento verranno utilizzati degli esempi concreti ed i grfici verranno creati utilizzando il comando *bode()* di **MATLAB**.

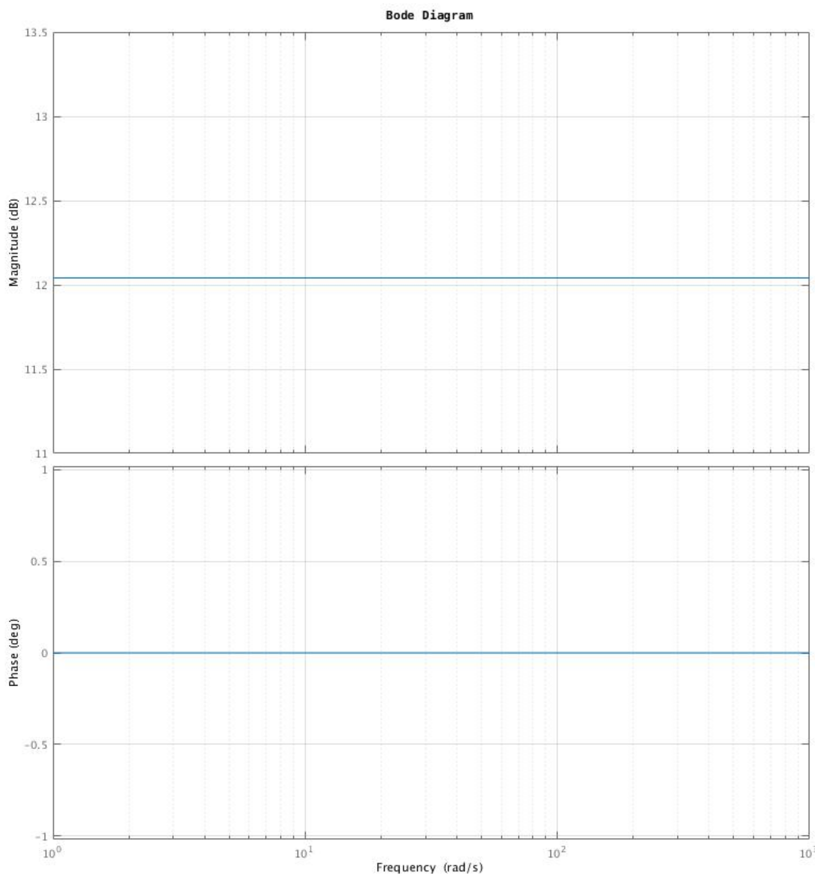
10.1 Termine Guadagno

$$|H_a(j\omega)|_{dB} = 20\ log_{10}|H_a(j\omega)|$$

ponendo, per esempio, $K_B = 4$ otteniamo

$$|H_a(j\omega)|_{dB} = 20\ log_{10}|4| \approx 12$$

Abbiamo quindi un *Guadagno di Bode* (K_B) costante pari a *12 dB*.
Per quanto riguarda la *Fase* abbiamo 0°costanti in quanto $K_B > 0$, nel caso in cui $K_B < 0$ avremo -180°.



10.2 Termine Monomio

$$\begin{aligned}|H_b(j\omega)|_{dB} &= 20\ log_{10}|H_b(j\omega)| \\ &= 20\ log_{10}\Big|\frac{1}{j\omega}\Big| \\ &= -20\ log_{10}|j\omega| \\ &= -20\ log_{10}|\omega|\end{aligned}$$

Il che vuol dire che la retta perde *20 dB* per decade in maniera costante. Se avessimo avuto $g > 1$ ci saremmo trovati nella seguente situazione

$$\begin{aligned}|H_b(j\omega)|_{dB} &= 20\ log_{10}\Big|\frac{1}{(j\omega)^g}\Big| \\ &= -20g\ log_{10}|\omega|\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il diagramma della Fase abbiamo

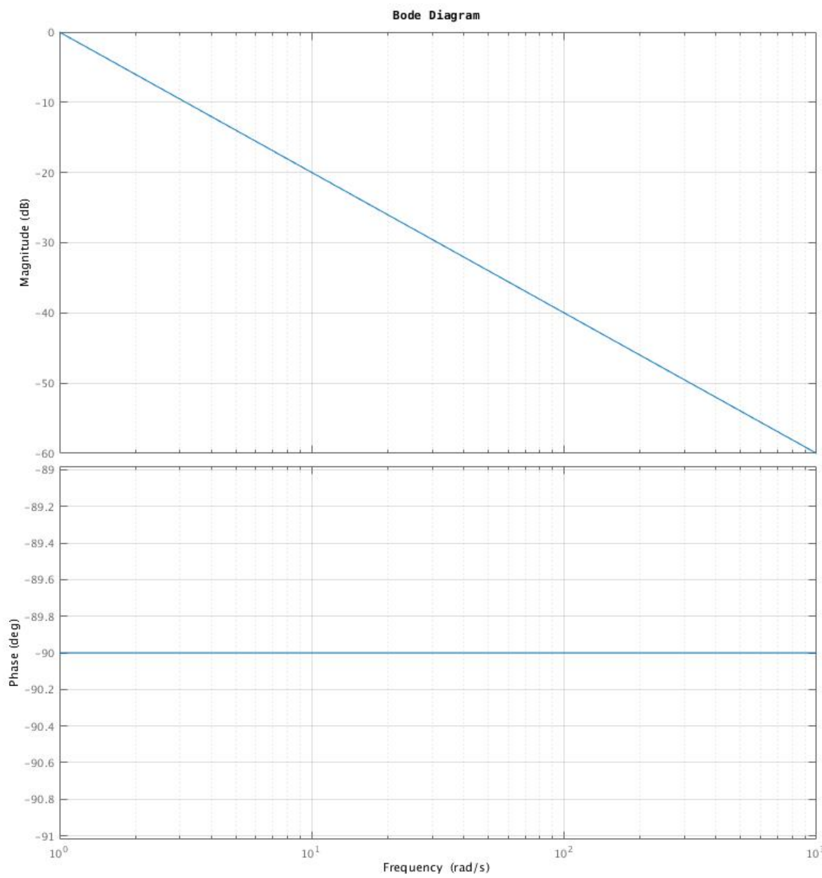
$$\angle(H_b(j\omega)) = \angle\Big(\frac{1}{j\omega}\Big) = -90°$$

nel caso avessi $g > 1$

$$\angle(H_b(j\omega)) = \angle\Big(\frac{1}{(j\omega)^g}\Big) = -g90°$$

Nel seguente grafico prendimo in considerazione

$$H_b(j\omega) = \frac{1}{s}$$



10.3 Termine Binomio

In questo caso dobbiamo andare a vedere il comportamento di ω quando diventa molto piccolo o molto grande. Procediamo come segue

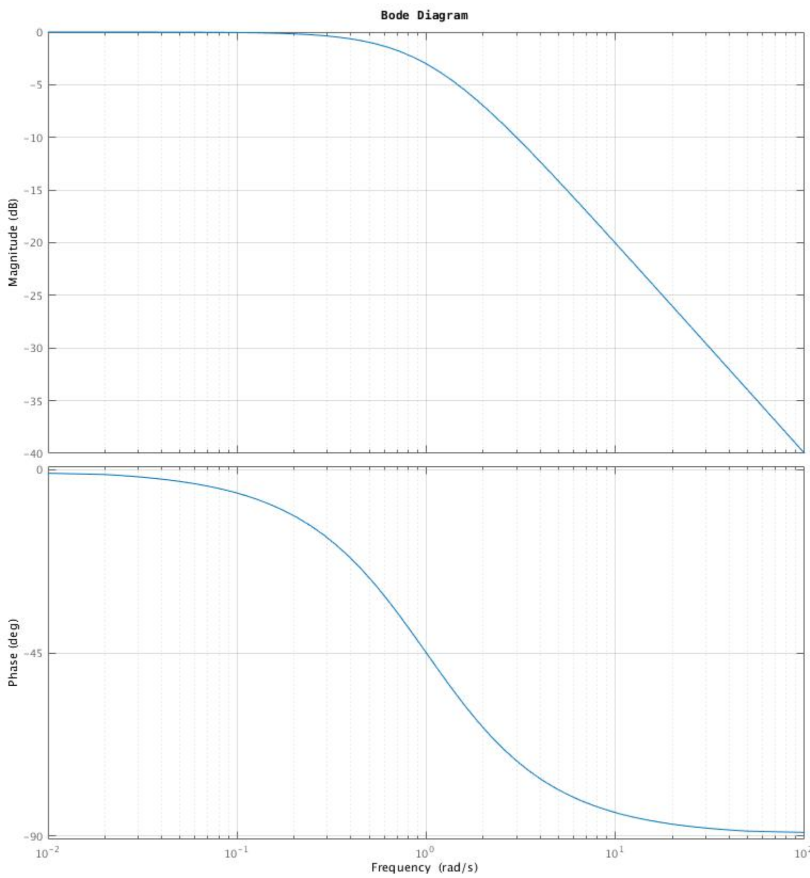
$$\begin{aligned}
|H_c(j\omega)|_{dB} &= 20\ log_{10}|H_c(j\omega)| \\
&= 20\ log_{10}\Big|\frac{1}{1+j\omega\tau}\Big| \\
&= -20\ log_{10}|1+j\omega\tau| \\
&= -20\ log_{10}\sqrt{1+(\omega\tau)^2} \approx \begin{cases} -20\ log_{10}\sqrt{1} = 0,\ \omega << \frac{1}{|\tau|} \\ -20\ log_{10}|\omega\tau|,\ \omega >> \frac{1}{|\tau|} \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi, asintoticamente, so che avrò *0 dB* fino a $\frac{0.1}{|\tau|}$ e da $\frac{10}{|\tau|}$ in poi avrò una perdita costante di *-20 dB* per decade.
Quindi procedo a calcolare il valore in dB in $\omega = \frac{1}{|\tau|}$

$$
\begin{aligned}
|H_c(j\frac{1}{|\tau|})|_{dB} &= 20\ log_{10}\left|\underbrace{\frac{1}{j\frac{1}{|\tau|}\tau}}_{=\frac{1}{2}}\right| \\
&= -20\ log_{10}\sqrt{2} \approx -3
\end{aligned}
$$

Se ho $g > 1$, come nei casi precedenti, moltiplico sia i *-3 dB* che i *-20 dB* per g. Ponendo $g = 2$ avrei *-40 dB* per decade da $\frac{10}{|\tau|}$ in poi e passo per *-6 dB* in $\omega = \frac{1}{|\tau|}$.
Stessa considerazione va fatta per il diagramma della *Fase*, siamo a 0°fino a $\frac{0.1}{|\tau|}$ e andiamo a ±90° in base alla positività o negatività di τ. In $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ si passa per i ±45° sempre in base al valore di τ.
Nel seguente grafico prendiamo in considerazione

$$H_c(j\omega) = \frac{1}{1+s}$$



10.4 Termine Trinomio

Anche in questo caso, come nel precedente, il grafico dipende dal valore di ω, questa volta rapportato ad ω_n.

$$\begin{aligned}|H_d(j\omega)|_{dB} &= 20\ log_{10}\left|\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j\frac{2\rho\omega}{\omega_n}}\right| \\ &= -20\ log_{10}\sqrt{(1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+\frac{4\rho^2\omega^2}{\omega_n^2}} \\ &\approx \begin{cases}-20\ log_{10}\sqrt{1}\approx 0,\ \omega << \omega_n \\ -40\ log_{10}\frac{\omega}{\omega_n},\ \omega >> \omega_n\end{cases}\end{aligned}$$

Analogamente a prima ci troviamo, asintoticamnete, a *0 dB* fino a $0.1\omega_n$ e da $10\omega_n$ avrei una perdita costante di *-40 dB* per decade.
Per il calcolo del valore in *dB* in ω_n dipendo da ρ, se $\rho \to 1$ tutto il termine trinomio tende ad un *termine binomio elevato al quadrato*.
Un caso limite è quello per $|\rho| = 1$ in cui ho il passaggio per *-6 dB* in ω_n.
Se $|\rho| < 1$, si può dimostrare che per $\rho < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ ho un massimo detto *Picco di Risonanza* a frequenza ω_R, detta *Frequenza di Risonanza*

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\rho^2}$$

Definisco M_R *Picco di Risonanza*

$$M_R = |H(j\omega_R)| = \frac{1}{2|\rho|\sqrt{1 - 2\rho^2}}$$

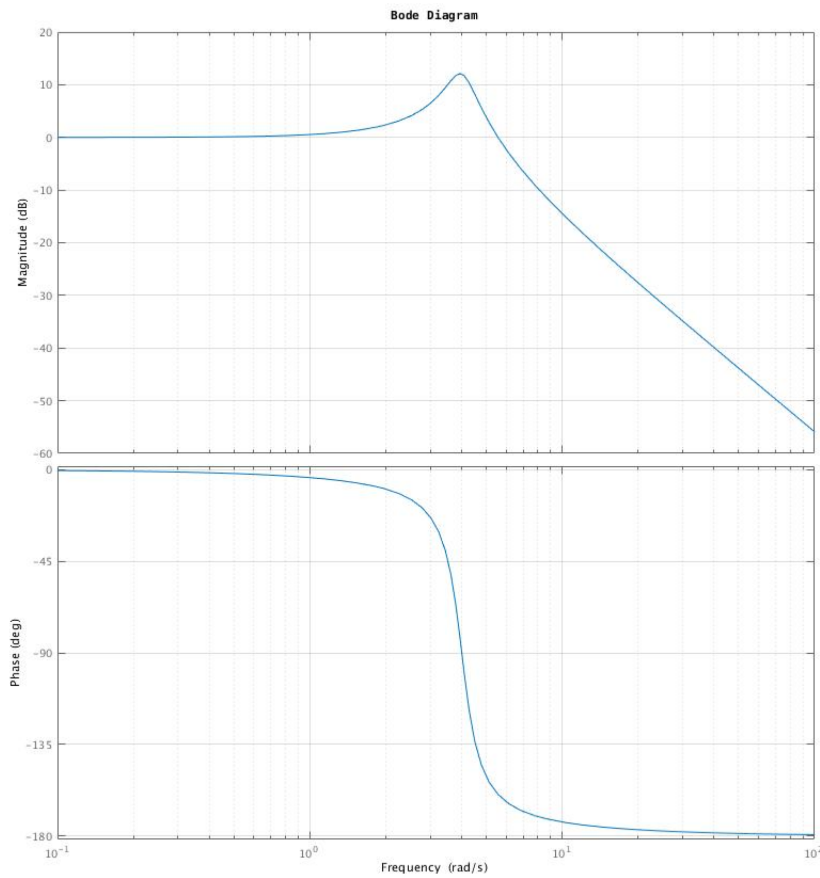
N.B: Anche questo va portato in dB!
Cerco anche il punto di passaggio per ω_n

$$|H(j\omega_n)| = \frac{1}{2|\rho|}$$

Si può notare che più ρ diventa piccolo, più ω_R si sposta verso ω_n e, di conseguenza, M_R è sempre più alto di quota.
Un altro caso limite è per $\rho = 0$, ossia $\omega_R = \omega_n$, in questo caso ho $M_R \to \infty$ ed ho un asintoto vericale in ω_n
Come nel termine binomio, se ho $g > 1$ da $10\omega_n$ in poi avrò una perdita costante di *-40g dB* per decade.
Per quanto riguarda il diagramma della *Fase*, analogamente al termine binomio, rimango a 0°fino ad $0.1\omega_n$ e varrà ±180° da $10\omega_n$ in poi, passo per ±90° in ω_n.
Per $\rho = 0$ il diagramma della fase coincide con il *Gradino*.

Nel caso in esempio prendo

$$H_d(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{16}s + \frac{1}{16}s^2}$$



11 Analisi in $\mathcal{Z}$

11.1 Trasformata Zeta

Equivalente della *Trasformata di Laplace* per il discreto.
Definiamo la *Trasforamta Zeta bilatera* come

$$V(z) = \mathcal{Z}_b[v[n]] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[k]z^{-k}$$

con $z = \sigma + j\omega$ variabile complessa.
Considerando solo *sistemi causali*, come per la Trasformata di Laplace, possiamo

ridurre gli estremi della sommatoria ottenendo la *Trasformata Zeta unilatera*

$$V(z) = \mathcal{Z}[v[n]] = \sum_{k=0}^{+\infty} v[k]z^{-k}$$

Si ricorda che viene utilizzata la notazione con parentesi quadre per indicare un segnale discreto invece di un segnale continuo.

11.2 Proprietà della Trasformata Zeta

- **Linearità**

  Dati due segnali discreti generici $v_1[n]$ e $v_2[n]$

  $$\mathcal{Z}[av_1[n] + bv_2[n]] = aV_1(z) + bV_2(z)$$

  Dimostrazione:

  $$\begin{aligned}\mathcal{Z}[av_1[n] + bv_2[n]] &= \sum_{k=0}^{+\infty} (av_1[k] + bv_2[k])z^{-k} \\ &= a\sum_{k=0}^{+\infty} v_1[k]z^{-k} + b\sum_{k=0}^{+\infty} v_2[k]z^{-k} \\ &= aV_1(z) + bV_2(z)\end{aligned}$$

- **Time Shifting**

  Dato un segnale discreto generico $v[n]$

  $$\mathcal{Z}[v[n - n_0]] = z^{-n_0}V(z)$$

  Dimostrazione:

  $$\begin{aligned}\mathcal{Z}[v[n - n_0]] &= \sum_{k=0}^{+\infty} v[k - n_0]z^{-k} \\ &= \sum_{j=-n_0}^{+\infty} v[j]z^{-(j+n_0)} \qquad \text{(Ponendo } j = k - n_0\text{)} \\ &= \sum_{j=-n_0}^{+\infty} v[j]z^{-j}z^{-n_0} \\ &= z^{-n_0}\sum_{j=-n_0}^{+\infty} v[j]z^{-j} \\ &= z^{-n_0}\sum_{j=0}^{+\infty} v[j]z^{-j}\end{aligned}$$

Essendo $v[n] = 0$ se $n < 0$, si ottiene

$$z^{-n_0} \sum_{j=0}^{+\infty} v[j] z^{-j} = z^{-n_0} V(z)$$

- **Moltiplicazione per n (Differenziazione)**

  Dato un segnale discreto generico $v[n]$

  $$\mathcal{Z}[n \cdot v[n]] = -zV'(z)$$

  Dimostrazione:
  Utilizziamo la *Trasformata Zeta bilatera* per la dimostrazione

  $$\begin{aligned}\mathcal{Z}_b[n \cdot v[n]] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} n \cdot v[k] z^{-k} \\ &= z \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k \cdot v[k] z^{-k-1} \\ &= -z \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[k](-kz^{-k-1}) \\ &= -z \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[k] \frac{d}{dz}(z^{-k}) \\ &= -zV'(z)\end{aligned}$$

- **Moltiplicazione per λ^n**

  Dato un segnale discreto generico $v[n]$

$$\mathcal{Z}[\lambda^n \cdot v[n]] = V\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

  Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\lambda^n \cdot v[n]] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \cdot v[k] z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} v[k] \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{-k} \\
&= V\left(\frac{z}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

- **Convoluzione**

  Dati due segnali discreti generici $v_1[n]$ e $v_2[n]$

$$\mathcal{Z}[v_1[n] \circledast v_2[n]] = V_1(z) \cdot V_2(z)$$

  Dimostrazione:
  Utiliziamo la *Trasformata Zeta bilatera* per la dimostrazione

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[v_1[n] \circledast v_2[n]] &= \mathcal{Z}_b\left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} v_1[l] v_2[n-l]\right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} v_1[l] v_2[k-l]\right] z^{-k} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} v_1(l) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_2[k-l] z^{-k}\right) \\
&= \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} v_1[l] z^{-l}\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_1[k] z^{-k}\right] \\
&= V_1(z) \cdot V_2(z)
\end{aligned}$$

11.3 Trasformate Zeta Notevoli

- **Costante**

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[A] &= \sum_{K=0}^{+\infty} A \cdot z^{-k} \\
&= A \cdot \sum_{K=0}^{+\infty} z^{-k} \\
&= A \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \\
&= A \cdot \frac{z}{z-1}
\end{aligned}$$

- **Impulso**

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\delta[n]] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[k] z^{-k} \\
&= z^0 = 1
\end{aligned}$$

- **Impulso traslato**

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\delta[n-n_0]] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[k-n_0] z^{-k} \\
&= z^{-n_0}
\end{aligned}$$

- **Gradino**

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\delta_{-1}[n]] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{-1}[n] z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}
\end{aligned}$$

- **Esponenziale**

Consideriamo un esponenziale generico λ^n moltiplicato per un gradino $\delta_{-1}[n]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\lambda^n \delta_{-1}[n]] &= \mathcal{Z}[\delta_{-1}[n]] \cdot \left(\frac{z}{\lambda}\right) \\
&= \frac{\frac{z}{\lambda}}{\frac{z}{\lambda}-1} \\
&= \frac{z}{z-\lambda}
\end{aligned}$$

- <u>**Segnale Sinusoidale**</u>

  Consideriamo il segnale sinusoidale $v[n] = cos(\theta n + \phi)$ moltiplicato per un gradino $\delta_{-1}[n]$.
  Si ricordi che la *Formula di Eulero* è valida anche per i segnali discreti.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[cos(\theta n + \phi)\delta_{-1}[n]] &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j(\theta n+\phi)} + e^{-j(\theta n+\phi)}}{2}\delta_{-1}[n]\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{j\phi}\,\mathcal{Z}[(e^{j\theta})^k\delta_{-1}[k]] + e^{-j\phi}\,\mathcal{Z}[(e^{-j\theta})^k\delta_{-1}[k]]\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{ze^{j\theta}}{z-e^{j\theta}} + \frac{ze^{-j\phi}}{z-e^{-j\phi}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{z^2e^{j\phi} - ze^{j(\phi-\theta)} + z^2e^{-j\phi} - ze^{-j(\phi-\theta)}}{z^2 - ze^{j\theta} - ze^{-j\theta} + 1}\Big) \\
&= \frac{z(cos(\phi)z - cos(\phi-\theta))}{z^2 - 2cos(\theta)z + 1}
\end{aligned}$$

11.4 Antitrasformata Zeta

Per tornare dal *dominio complesso* al *dominio del tempo*, analoga all'*Antitarsformata di Laplace* per i segnali continui.

$$\mathcal{Z}^{-1}[V(z)] = v[n]$$

Il calcolo della *risposta del sistema* è identico a quello usato con la Trasormata di Laplace, applicato però a segnali discreti.

$$\begin{aligned}
V(z) &= V_l(z) + V_f(z) \\
&= \frac{p(z)}{d(z)} + H(z)U(z) \\
&= \frac{p(z)}{d(z)} + \frac{n(z)}{d(z)}U(z)
\end{aligned}$$

Per trovare $V(z)$ ci si può avvalere della forma utilizzata con la *Trasforamta di Laplace*, facendo attenzione al numeratore z.

$$\begin{aligned}
V(z) &= \frac{n(z)}{\prod_{i=1}^{r'}(z-\lambda'_i)^{\mu'_i}} \\
&= \sum_{i=1}^{r'}\sum_{l=1}^{\mu'_i} C_{i,l}\frac{z}{(z-\lambda'_i)^l} = V'(s)
\end{aligned}$$

I vari $C_{i,l}$ si ottengono con il metodo dei fratti semplici

$$C_{i,l} = \frac{d^{\mu'_i - l}}{dz^{\mu'_i - l}}\left((z-\lambda'_i)^{\mu'_i}\frac{V'(z)}{z}\right)\Bigg|_{z=\lambda'_i}$$

12 Esercizi

12.1 Risposta di un Sistema

Calcolare la risposta di un sistema espresso nella forma di un *Problema di Cauchy*.

$$\begin{cases} v''(t) - 5v'(t) + 4v(t) = u'(t) - 3u(t) \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

con

$$u(t) = e^t \delta_{-1}(t)$$

1. Risolvo l'equazione caratteristica per trovare l'*Evoluzione Libera*

$$s^2 - 5s + 4 = 0 \qquad \Delta = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = 4 \text{ e } 1$$

Ottengo quindi l'Evoluzione Libera, indicata da $v_l(t)$

$$v_l(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^t$$
$$v_l'(t) = 4C_1 e^{4t} + C_2 e^t$$

2. Metto a sistema ed impongo le condizioni inizali

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \ \rightarrow \ C_1 = -C_2 \ \rightarrow \ C_1 = \frac{1}{3} \\ 4C_1 + C_2 = 1 \ \rightarrow \ -3C_2 = 1 \ \rightarrow \ C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ottengo quindi la *Risposta Libera*

$$v_l(t) = \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^t$$

3. Calcolo l'*Evoluzione Forzata*

$$h(t) = (d_1 e^{4t} + d_2 e^t)\delta_{-1}(t)$$
$$h'(t) = (4d_1 e^{4t} + d_2 e^t)\delta_{-1}(t) + (d_1 e^{4t} + d_2 e^t)\delta(t)$$
$$h''(t) = (16d_1 e^{4t} + d_2 e^t)\delta_{-1}(t) + 2(4d_1 e^{4t} + d_2 e^t)\delta(t) + (d_1 e^{4t} + d_2 e^t)\delta'(t)$$

E sostituisco all'equazione del sistema nella seguente forma

$$h''(t) - 5h'(t) + 4h(t) = \delta'(t) - 3\delta(t)$$

$$
\begin{aligned}
&(16d_1e^{4t}+d_2e^t)\delta_{-1}(t)+2(4d_1e^{4t}+d_2e^t)\delta(t)+(d_1e^{4t}+d_2e^t)\delta'(t)+\\
&\quad-5((4d_1e^{4t}+d_2e^t)\delta_{-1}(t)+(d_1e^{4t}+d_2e^t)\delta(t))+4((d_1e^{4t}+d_2e^t)\delta_{-1}(t))\\
&\quad=\delta'(t)-3\delta(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(16d_1e^{4t}+d_2e^t)\delta_{-1}(t)+(8d_1e^{4t}+2d_2e^t)\delta(t)+(d_1e^{4t}+d_2e^t)\delta'(t)+\\
&\quad-(20d_1e^{4t}+5d_2e^t)\delta_{-1}(t)-(5d_1e^{4t}+5d_2e^t)\delta(t)+(4d_1e^{4t}+4d_2e^t)\delta_{-1}(t)+\\
&\quad-\delta'(t)+3\delta(t)=0
\end{aligned}
$$

Raccolgo e metto a sistema

$$
\begin{cases}
\delta_{-1}(t)((\cancel{16d_1}+\cancel{d_2})-(\cancel{20d_1}+\cancel{5d_2})+(\cancel{4d_1}+\cancel{4d_2}))=0\\
\delta(t)((8d_1+2d_2)-(5d_1+5d_2)+3)=0\\
\delta'(t)((d_1+d_2)-1)=0
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
3d_1-3d_2+3=0\ \rightarrow\ 3(-d_2+1)-3d_2+3=0\\
d_1+d_2-1=0\ \rightarrow\ d_1=-d_2+1
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
-3d_2+3-3d_2+3=0\ \rightarrow\ -6d_2=-6\ \rightarrow\ d_2=1\\
d_1=-1+1\ \rightarrow\ d_1=0
\end{cases}
$$

Ottengo quindi l'Evoluzione Forzata, scrivendola con la notazione $h(t)$

$$
h(t)=e^t\delta_{-1}(t)
$$

4. Calcolo la *Risposta Forzata*

$$
\begin{aligned}
v_f(t)&=\int_0^t(e^\tau\underbrace{\delta_{-1}(\tau)}_{=1})(e^{(t-\tau)}\underbrace{\delta_{-1}(t-\tau)}_{=1})\,d\tau\\
&=e^t\left(\int_0^t e^0\,d\tau\right)\delta_{-1}(t)\\
&=\frac{1}{2}e^t(t-0)\delta_{-1}(t)\\
&=\frac{1}{2}e^t t\delta_{-1}(t)
\end{aligned}
$$

5. Sommo Risposta Libera e Risposta Forzata per ottenere la *Risposta Totale*

$$
\begin{aligned}
v(t)&=v_l(t)+v_f(t)\\
&=\frac{1}{3}e^{4t}-\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{2}e^t t\delta_{-1}(t)
\end{aligned}
$$

12.2 Stabilità Asintotica e BIBO Stabilità

$$\begin{cases} v''(t) + v'(t) - 2v(t) = u'(t) - u(t) \\ v'(0) = 0 \\ v(0) = 3 \\ u(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

1. Controllo le radici del polinomio caratteristico ricordando che devono entrambe essere < 0 per avere *Stabilità asintotica*

   $$s^2 + s - 2 = 0$$
   $$\Delta = 1 + 8 = 9$$

   $$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2 \text{ e } -1$$

   Quindi **non** ho stabilità asintotica.

2. Nel caso al punto *1* risultasse stabilità asintotica avremo anche *BIBO Stabilità*, in quanto **Stabilità Asintotica** $\Rightarrow$ **BIBO Stabilità**.
   In caso contrario analizaimo $H(s)$ per il sistema in questione, ricordando che

   $$H(s) = \frac{Eq.\ Caratteristica\ 2^\circ\ Membro}{Eq.\ Caratteristica\ 1^\circ\ Membro}$$

   nel nostro caso

   $$H(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}$$

   Risolvo quindi con il *Metodo dei Fratti Semplici*

   $$H(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = A\frac{1}{s-2} + B\frac{1}{s+1}$$

   $$A = (s+1)H(s)|_{s=-1} = \left.\frac{s-1}{s-2}\right|_{s=-1} = \frac{2}{3}$$

   $$B = (s-2)H(s)|_{s=2} = \left.\frac{s-1}{s+1}\right|_{s=2} = \frac{1}{3}$$

   Quindi riscrivo $H(s)$ nella forma

   $$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-2}\right)$$

   Passaimo ora nel *dominio del tempo* tramite l'*Antitrasforamta di Laplace*

   $$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

   Se ne deduce che il sistema non è nemmeno *BIBO Stabile* in quanto le λ sono positive.

12.3 Risposta di un Sistema tramite Trasf. di Laplace

Calcolare la risposta di un sistema espresso nella forma di un *Problema di Cauchy* utilizzando la *Trasforamta di Laplace*.

$$\begin{cases} v''(t) - 5v'(t) + 4v(t) = u'(t) - 3u(t) \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

con

$$u(t) = e^t \delta_{-1}(t)$$

1. Trasformo il sistema tramite *Trasforamta di Laplace*

   $$\mathcal{L}[v''(t) - 5v'(t) + 4v(t) = u'(t) - 3u(t)]$$
   $$\downarrow$$
   $$(s^2V(s) - sv(0) - v'(0)) - 5(sV(s) - v(0)) + 4(V(s)) = (sU(s) - v(0)) - 3(U(s))$$

   Imponendo le condizioni iniziali otteniamo

   $$s^2V(s) - 1 - 5sV(s) + 4V(s) = sU(s) - 3U(s)$$

   Raccolgo

   $$V(s)(\underbrace{s^2 - 5s + 4}_{(s-1)(s-4)}) = 1 + (s-3)U(s)$$

   che equivale a

   $$V(s) = \frac{1}{(s-1)(s-4)} + \frac{(s-3)}{(s-1)(s-4)}U(s)$$

   dove

   - $\frac{1}{(s-1)(s-4)} = V_l(s)$
   - $\frac{(s-3)}{(s-1)(s-4)} = H(s)$
   - $U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s-1}$

   Riscrivendo tutto come un unica frazione

   $$\begin{aligned} V(s) &= \frac{1}{(s-1)(s-4)} + \frac{(s-3)}{(s-1)^2(s-4)} \\ &= \frac{2(s-2)}{(s-1)^2(s-4)} = F(s) \end{aligned}$$

2. Risolvo utilizzando il Metodo dei Fratti Semplici

   $$V(s) = \frac{A}{(s-4)} + \frac{B}{(s-1)} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$
\begin{aligned}
A &= (s-4)F(s)|_{s=4} \\
&= \cancel{(s-4)}\frac{2(s-2)}{(s-1)^2\cancel{(s-4)}}\Bigg|_{s=4} \\
&= \frac{2(s-2)}{(s-1)^2}\Bigg|_{s=4} = \frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= ((s-1)^2F(s))'|_{s=1} \\
&= 2\left(\cancel{(s-1)^2}\frac{(s-2)}{\cancel{(s-1)^2}(s-4)}\right)'\Bigg|_{s=1} \\
&= 2\left(\frac{s-2}{s-4}\right)'\Bigg|_{s=1} \\
&= \frac{-4}{(s-4)^2}\Bigg|_{s=1} = -\frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= (s-1)^2F(s)|_{s=1} \\
&= 2\left(\frac{s-2}{s-4}\right)\Bigg|_{s=1} \\
&= \frac{2s-4}{s-4}\Bigg|_{s=1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

ed ottengo la *Risposta Totale* nel Dominio Complesso

$$
V(s) = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{s-4}\right) - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)
$$

3. Applico l'*Antitrasformata di Laplace* alla Risposta Toatale

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \mathcal{L}^{-1}[V(s)] \\
&= \left(\frac{4}{9}e^{4t} - \frac{4}{9}e^{t} + \frac{2}{3}te^{t}\right)\delta_{-1}(t)
\end{aligned}
$$

12.4 Risposta di un Sistema Discreto

$$\begin{cases} v[n] - v[n-2] = u[n-1] + 2u[n-2] \\ v[-1] = 1 \\ v[n-2] = -2 \end{cases}$$

1. Risolvo l'equazione caratterisctica

$$z^2 - 1 = 0$$
$$\Delta = 0 + 4 = 4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm 2}{2} = 1 \text{ e } -1$$

e trovo l'Evoluzione Libera

$$v_l[n] = C_1(1)^n + C_2(-1)^n$$

2. Imposto il sistema con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = -2 \rightarrow 2C_2 = -3 \rightarrow C_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} C_1 = -\frac{3}{2} + 1 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

e trovo la *Risposta Libera*

$$v_l[n] = -\frac{1}{2}(1)^n - \frac{3}{2}(-1)^n$$

3. Cerco Risposta Impulsiva

$$h[n] - h[n-2] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

Risolvendo nella forma

$$h[n] = d_0\delta[n] + (d_1(1)^n + d_2(-1)^n)\delta_{-1}[n-1]$$

Calcolo gli $h[n]$ nel sistema per

- $n = 0$
$$h[0] - \underbrace{\cancel{h[-2]}}_{=0} = \underbrace{\cancel{\delta[-1]}}_{=0} + \underbrace{\cancel{2\delta[-2]}}_{=0} \rightarrow h[0] = 0$$

- $n = 1$
$$h[1] - \underbrace{\cancel{h[-1]}}_{=0} = \delta[0] + \underbrace{\cancel{2\delta[-1]}}_{=0} \rightarrow h[1] = 1$$

- $n = 2$

$$h[2] - h[0] = \underbrace{\cancel{\delta[1]}}_{=0} + 2\delta[0] \ \rightarrow \ h[2] = 2$$

Imposto il sistema

$$\begin{cases} d_0\delta[0] + (d_1(1)^0 + d_2(-1)^0)\underbrace{\delta_{-1}[-1]}_{=0} = 0 \\ \underbrace{\cancel{d_0\delta[1]}}_{=0} + (d_1(1) + d_2(-1))\underbrace{\delta_{-1}[0]}_{=1} = 1 \\ \underbrace{\cancel{d_0\delta[2]}}_{=0} + (d_1(1)^2 + d_2(-1)^2)\underbrace{\delta_{-1}[1]}_{=1} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 = 0 \\ d_1 - d_2 = 1 \ \rightarrow \ d_1 = d_2 + 1 \ \rightarrow \ d_1 = \frac{3}{2} \\ d_1 + d_2 = 2 \ \rightarrow \ 2d_2 = 1 \ \rightarrow \ d_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$h[n] = (\frac{3}{2}(1)^n + \frac{1}{2}(-1)^n)\delta_{-1}[n-1]$$

4. Cerco *Risposta Forzata*

$$v_f[n] = \sum_{i=0}^{n} h[i]u[n-i]$$

5. *Risposta Totale*

$$\begin{aligned} v[n] &= v_l[n] + v_f[n] \\ &= -\frac{1}{2}(1)^n - \frac{3}{2}(-1)^n + \sum_{i=0}^{n} h[i]u[n-i] \end{aligned}$$

12.5 Risposta di un Sistema Discreto con Trasf. Zeta

$$\begin{cases} v[n] - v[n-2] = u[n-1] + 2u[n-2] \\ v[-1] = 1 \\ v[-2] = -2 \\ u[n] = (-1)^n \delta_{-1}[n] \end{cases}$$

1. Risolvo l'equazione caratteristica

$$z^2 - 1 = 0$$
$$\Delta = 0 + 4 = 4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm 2}{2} = 1 \text{ e } -1$$

2. Applico *Trasforamta Zeta* al sistema

$$\mathcal{Z}[v[n] - v[n-2] = u[n-1] + 2u[n-2]]$$
$$\downarrow$$
$$= z^0 V(z) - z^{-2}(V(z) + z^1 v[-1] + z^2 v[-2]) = z^{-1}(U(z) z^1 \underbrace{u[-1]}_{0}) +$$
$$+ z^{-2}(U(z) + z^1 \underbrace{u[-1]}_{0} + z^2 \underbrace{u[-2]}_{0})$$

$$= z^0 V(z) - z^{-2} V(z) - z^{-1} + 2z^0 = z^{-1} U(z) + 2z^{-2} U(z)$$

3. Moltiplico per z^n, ossia z^2 perchè ho 2 coefficienti

$$z^2 V(z) - z^0 V(z) - z^1 + 2z^2 = z^1 U(z) + 2z^0 U(z)$$
$$(z^2 - 1) V(z) = -2z^2 + z + (z+2) U(z)$$

$$V(z) = \frac{z(-2z+1)}{(z-1)(z+1)} + \frac{z+2}{(z-1)(z+1)} U(z)$$

da cui possiamo capire che

- $V_l(z) = \frac{z(-2z+1)}{(z-1)(z+1)}$
- $H(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z+1)}$
- $U(z) = \mathcal{Z}[u[n]] = \frac{z}{z+1}$

quindi

$$
\begin{aligned}
V(z) &= \frac{z(-2z+1)}{(z-1)(z+1)} + \frac{z+2}{(z-1)(z+1)} \cdot \frac{z}{z+1} \\
&= \frac{z(-2z+1)}{(z-1)(z+1)} + \frac{z^2+2z}{(z-1)(z+1)^2} \\
&= \frac{z^2+2z+(z+1)(-2z^2+z)}{(z-1)(z+1)^2} \\
&= \frac{z(-2z^2+3)}{(z-1)(z+1)^2} \\
&= A\frac{z}{z-1} + B\frac{z}{z+1} + C\frac{z}{(z+1)^2}
\end{aligned}
$$

4. Risolvo con il *Metodo dei Fratti Semplici*

$$
\begin{aligned}
A &= (z-1)\frac{V(z)}{z}\bigg|_{z=1} \\
&= \cancel{(z-1)}\left(\frac{-2z^2+3}{\cancel{(z-1)}(z+1)^2}\right)\bigg|_{z=1} \\
&= \frac{-2z^2+3}{(z+1)^2}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \left(\cancel{(z+1)^2}\left(\frac{-2z^2+3}{(z-1)\cancel{(z-1)^2}}\right)\right)'\bigg|_{z=-1} \\
&= \frac{-4z^2+4z+2z^2-3}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1} \\
&= \frac{-2z^2+4z-3}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1} = -\frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= \cancel{(z+1)^2}\left(\frac{-2z^2+3}{(z-1)\cancel{(z+1)^2}}\right)\bigg|_{z=-1} \\
&= \frac{-2z^2-3}{z-1}\bigg|_{z=-1} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

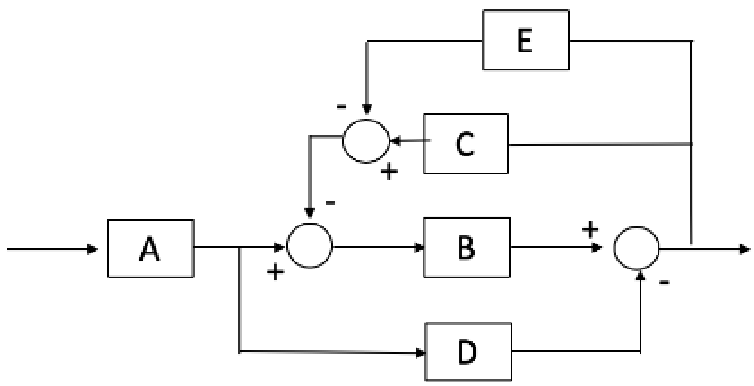
Quindi

$$
V(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{z}{z-1}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{z}{z+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{(z+1)^2}\right)
$$

5. Applico l'*Antitrasformata Zeta*

$$
\begin{aligned}
v[n] &= \mathcal{Z}^{-1}[V(z)] \\
&= \left(\frac{1}{4}(1)^n - \frac{9}{4}(-1)^n - \frac{1}{2}n(-1)^n\right)\delta_{-1}[n]
\end{aligned}
$$

12.6 Metodo di Mason Semplificazione Schemi a Blocchi



1. Cerco tutti i *percorsi* P_i e tutti i *cicli* P_{ij} nel grafo

$P_1 = AB$	$P_{11} = -BC$
$P_2 = -AD$	$P_{12} = BE$

2. Calcolo Δ

$$\Delta = 1 - (BE - BC) = 1 - BE + BC$$

3. Calcolo la *Funzione di Trasferimento*

$$FdT = \frac{AB - AD}{1 - BE + BC}$$