Università degli Studi di Verona

Algebra Lineare

Riassunto dei principali argomenti

Matteo Marzio

3 luglio 2019

Indice

1 Matrice

Una matrice e' una tabella ordinata di elementi. Puo' essere definita come una funzione

$$A = \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \rightarrow \mathbb{K}$$

dove m e n sono interi positivi e $\mathbb{K}$ e' un qualunque insieme fissato. Le righe orizzontali di una matrice sono chiamate righe, mentre quelle verticali colonne. Una matrice $m \times n$ e' descritta come sopra e si rappresenta come:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Indicando con $[a_{ij}]$ l'elemento posizionato alla riga i-esima e nella colonna j-esima, con $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

1.1 Uguaglianza tra due matrici

Due matrici si dicono uguali se

- Hanno la stessa forma (ovvero stesse colonne e stesse righe)
- In ogni posizione della matrice le matrici hanno lo stesso coefficiente

Ad esempio, le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

non sono uguali, visto che $a_{12} \neq b_{12}$, quindi con coefficienti diversi.

1.2 Somma tra due matrici aventi stessa forma

Siano A, B due matrici di forma $m \times n$, con $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
Si definisce $A + B = [c_{ij}]$ di forma $m \times n$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ come la somma di matrici.
Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$C = A + B \rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3 Proprietà associativa della somma

Siano A, B, C matrici di forma $m \times n$. Sia $(A + B) + C = A + (B + C)$. Allora, posta la validità della proprietà associativa anche per la somma tra matrici, $(a_ij + b_ij) + c_ij = a_ij + (b_ij + c_ij)$

1.4 Matrice Nulla

Sia A una matrice di forma $m \times n$.
0_{mn} e' la matrice nulla di forma $m \times n$, in cui tutti i coefficienti sono nulli (o zero), ovvero $A + 0_{mn} = A$.
Inoltre, $A + (-A) = 0_{mn}$

1.5 Moltiplicare una matrice per uno scalare

Una grandezza **scalare**, abbreviata in $scalare$, e' una grandezza che viene descritta unicamente, dal punto di vista matematico, associata agli spazi vettoriali costruiti sul corpo attraverso l'operazione di moltiplicazione.
Sia $A = [a_{ij}]$, con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Sia c scalare. Allora $cA = [b_{ij}]$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ tale che $b_{ij} = ca_{ij}$
Inoltre:

- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(\alpha + \beta)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij}$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + b_{ij}$
- $(\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta \cdot A)$
- $1 \cdot A = A$

1.6 Tipologie di Matrici

- Matrice $n \cdot n$: quadrata
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- Matrice $m \cdot 1$: vettore colonna
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
- Matrice Triangolare Superiore : quadrata con i coefficienti, con indice di riga maggiore dell'indice di colonna, uguali a zero, ovvero ogniqualvolta $i > j$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Se A, B sono triangolari superiori, allora AB e' triangolare superiore
- Matrice Triangolare Inferiore : quadrata con i coefficienti, con indice di colonna superiore dell'indice di riga, uguali a zero, ovvero ogniqualvolta $i < j$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Se A, B sono triangolari inferiori, allora AB e' triangolare inferiore
- Una matrice quadrata e' diagonale se i coefficienti, con indice di riga diverso dall'indice di colonna, equivalgono a zero.
- La somma di matrici triangolari superiori e' uguale a una matrice triangolare superiore, analogo per matrici triangolari inferiori.

1.7 Trasposta di una matrice

Sia $A = [a_ij]$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. La trasposta della matrice A e' la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne della matrice originaria e si rappresenta come $A^T = [b_{ij}]$ con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, dove $b_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Inoltre:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

1.8 Simmetria e AntiSimmetria di una matrice

Una matrice A si dice **simmetrica** se $A = A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matrice A si dice **antisimmetrica** se $A = -A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema: Ogni matrice quadrata e' somma, in modo unico, di una simmetrica e una antisimmetrica:

Dimostrazione : Supponiamo $A = B + C$, con $B = B^T, C = -C^T$.

$$\begin{aligned} A &= B + C \\ A^T &= (B + C)^T = B^T + C^T = B + (-C) = B - C \\ A + A^T &= (B + C) + (B - C) = B + B + C - C = B + B = 2B \\ B &= \frac{1}{2} \cdot (2B) = \frac{1}{2} \cdot (A + A^T) \\ A - A^T &= (B + C) - (B - C) = B + C - B + C = 2C \\ C &= \frac{1}{2} \cdot (A - A^T) \end{aligned}$$

Prendiamo B: si noti come $\frac{1}{2}(A + A^T)$ sia simmetrica.

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}(A + A^T)^T &= \frac{1}{2}(A + A^T)^T \\ &= \frac{1}{2}(A^T + A^{TT}) = \frac{1}{2}(A + A^T) \\ &= \frac{1}{2}(A + A^T) \end{aligned}$$

Prendiamo C: si noti come $\frac{1}{2}(A - A^T)$ sia antisimmetrica.

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}(A - A^T)^T) &= \frac{1}{2}(A^T - A) \\ &= \frac{1}{2}((-1)(A - A^T)) \\ &= -\frac{1}{2}(A - A^T) \end{aligned}$$

Concludiamo affermando che:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Abbiamo quindi dimostrato il teorema.

1.9 Moltiplicazione tra matrici

Si definisce il prodotto di una matrice A $m \times n$ per una matrice B $n \times p$ come la matrice AB $m \times p$ in cui il coefficiente di posto (i, j) e' il prodotto della i-esima riga di A per la j-esima colonna di B.
Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato della moltiplicazione tra la matrice $A : 2 \times 3$ e la matrice $B : 3 \times 4$ e' una matrice AB : 2×4

$$Posto(1,1) : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = (1 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot 0) = 11$$

$$Posto(1,2) : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (1 \cdot -1) + (2 \cdot 2) + (3 \cdot 3) = 12$$

$$Posto(1,3) : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = (1 \cdot 0) + (2 \cdot -2) + (3 \cdot -4) = -16$$

$$Posto(1,4) : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (1 \cdot -1) + (2 \cdot 2) + (3 \cdot 1) = 6$$

$$Posto(2,1) : \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 32 \qquad Posto(2,2) : \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 24$$

$$Posto(2,3) : \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = -34 \qquad Posto(2,4) : \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 12$$

Il risultato della moltiplicazione sarà:

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -16 & 6 \\ 32 & 24 & -34 & 12 \end{bmatrix}$$

Attenzione! Non si può sempre affermare che $A \cdot B = B \cdot A$. Per rendere vera questa uguaglianza si richiede che $m = n$
Inoltre:

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $A \cdot (\alpha B) = \alpha(AB) = (\alpha A) \cdot B$

1.10 Matrice Identità (o Identica)

La matrice Identità, anche detta matrice identica o matrice unità, e' una matrice quadrata in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono costituiti dal numero 1, mentre i restanti coefficienti sono 0. Viene indicata con I o con I_n, dove n e' il numero di righe della matrice.

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice identità I_n di forma $n \times n$ si rappresenta in questo modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Per ogni $A\ m \times n : AI_n = A$. Per ogni $B\ n \times p : I_nB = B$.

1.11 Matrice Inversa

La matrice L si dice inversa **sinistra** di A $(m \times n)$ se $LA = I_n$, con L $(m \times n)$

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$LA = 1 = I_1$$

La matrice R si dice inversa **destra** di A $(m \times n)$ se $AR = I_m$, con R $(m \times n)$
Se A ha inversa sinistra L e inversa destra R, allora $L = R$
Se la matrice dei coefficienti di un sistema ha inversa destra, il sistema ha almeno una soluzione
Se la matrice dei coefficienti di un sistema ha inversa sinistra, il sistema ha al più una soluzione

1.12 Trasposta di più matrici

Siano $A\ m \times n$, $B\ n \times p$ matrici. Sappiamo che $AB\ m \times p$. Consideriamo le trasposte $A^T\ n \times m$, $B^T\ p \times n$. Allora $B^TA^T = (AB)^T$.
Dimostrazione
Consideriamo $B = [b_{ij}]$, $B^T = [b^{'}_{ij}]$. Quindi $b^{'}_{ij} = b_{ji}$.
Posto (i, j) in B^TA^T:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \le k \le n} b^{'}_{ik}a^{'}_{kj} &= \sum_{1 \le k \le n} b_{ki}a_{jk} \\ &= \sum_{1 \le k \le n} a_{jk}b_{ki} \end{aligned}$$

Possiamo confermare che il coefficiente di posto (i, j) in (AB) e' uguale al coefficiente di posto (i, j) in $(AB)^T$.
Quindi, $(AB)^T = B^TA^T$. Abbiamo dimostrato il teorema.

1.13 Numeri Complessi

Aggiungiamo ora ai numeri reali un nuovo numero i con la proprietà che $i^2 = -1$.
Alcune proprietà dei numeri immaginari sono:

- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^3 \cdot i = (-i)i$
- $(-i)^4 = 1$
- $i^4 = (-i)^4 = 1$

Definiamo z come la **somma** della parte reale a e la parte immaginaria bi

$$z = a + bi$$

Definiamo $\bar{z}$ come il coniugato di z ed e' la **differenza** tra la parte reale a e la parte immaginaria bi

$$\bar{z} = a - bi$$

Se il modulo di $|z| = 1$, allora $z\bar{z} = 1$ e quindi $z^{-1} = \bar{z}$
Se $z \neq 0$, allora $||z|^{-1}z| = 1$, perché $||z|^{-1}| = |z|^{-1}$ Inoltre:

- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\bar{z_2}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

Se $z \neq 0$: definisco $u = |z|^{-1}z$. Allora $z = |z|u$ e $|u| = 1$.
Avremmo quindi $u = a + bi$, $a^2 + b^2 = 1$.

1.14 Formula di De Moivre

La formula di De Moivre e' una delle basi dell'analisi dei numeri complessi. Essa permette di esprimere la potenza di un numero complesso nella sua forma trigonometrica :

$$(cos\alpha + isin\alpha)^n = cos(n\alpha) + isin(n\alpha)$$

valida per ogni numero reale x, con n intero e i immaginaria.
In generale, se z e w sono numeri complessi, allora per $\alpha = z$ e $n = w$

$$(cosz + isinz)^w$$

assume più di un valore, mentre

$$cos(wz) + isin(wz)$$

ha un solo valore.
Esercizio
Dati $z \neq 0$ e $n > 0$ intero, trovare tutti i numeri complessi w tali che $w^n = z$
Caso speciale : $|z| = 1$
Risolvere $(cos\gamma + isin\gamma)^n = cos\alpha + isin\alpha$

$$cos(n\gamma) + isin(n\gamma) = cos\alpha + isin\alpha$$
$$n\gamma = \alpha + 2k\pi$$
$$\gamma = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Abbiamo quindi n soluzioni distinte per $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

$$\begin{aligned}
w^3 &= 1 \\
(cos\gamma + isin\gamma)^3 &= cos0 + isin0 \\
3\gamma &= 0 + 2k\pi (k = 0, 1, 2) \\
\gamma_1 &= 0 : w_1 = 1 \\
\gamma_2 &= \frac{2}{3}\pi : w_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\gamma_3 &= \frac{4}{3}\pi : w_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^3 - 1 &= 0 \\
(w-1)(w^2 + w + 1) &= 0
\end{aligned}$$

Otteniamo che $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $w_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
Caso generale :

$$w^n = z = |z|u$$

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} w_1$$

$$w_1^n = u$$

1.15 Teorema fondamentale dell'Algebra

Ogni polinomio di grado maggiore di zero a coefficienti complessi ha una radice complessa

1.16 Rango di una matrice

Sia A una qualsiasi matrice, quadrata o rettangolare, a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ (per esempio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), con m righe e n colonne. Il suo rango, o **caratteristica**, si indica con $rango(A), rk(A), rg(A), p(A), r(A)$ e ha le seguenti definizioni:

- E' il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A
- E' il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A
- E' la dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare

1.17 Vettori linearmente indipendenti

Consideriamo uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$, e siano $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vettori di V.
Si dice che gli n vettori $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sono **linearmente indipendenti tra loro** se, prendendo n scalari $a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$ e imponendo

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$$

risulta che la precedente uguaglianza e' soddisfatta se e solo se

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Esempio Consideriamo due vettori $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$.
Consideriamo inoltre due generici scalari $a, b \in \mathbb{R}$ e imponiamo che sia nulla la generica combinazione lineare $av_1 + b_v2$.

$$a(1, 0) + b(0, 1) = (0, 0)$$

Svolgendo le operazioni tra vettori otteniamo

$$\begin{aligned}
(a \cdot 1, b \cdot 0) + (0 \cdot a, 1 \cdot b) &= (0, 0) \\
(a, 0) + (0, b) &= (0, 0) \\
(a, b) &= (0, 0)
\end{aligned}$$

La precedente uguaglianza e' soddisfatta se e solo se $a = b = 0$, il che ci permette di concludere che i vettori sono linearmente indipendenti.

1.18 Algoritmo di Gauss per il calcolo del Rango

L'algoritmo di Gauss, definita anche come **eliminazione** di Gauss oppure anche come la semplificazione di una matrice tramite operazioni elementari, permette di calcolare il rango di una matrice.
Sia A una matrice qualsiasi di tipo $m \times n$. Sulle righe di A si possono eseguire le cosiddette operazioni elementari sulle righe. Tali operazioni sono di tre tipi, e sono definite come segue:

- L'operazione P_{ij}, che significa scambiare la riga A_i di A con la riga A_j
- L'operazione $E_{ij}(n)$, che significa **sommare** alla riga A_i di A la riga A_j, moltiplicata per lo scalare n, con $i \neq j$. In altre parole, alla riga A_i si sostituisce la riga $A_i + kA_j$.
- L'operazione $E_i(n)$, che significa moltiplicare la riga A_i per lo scalare n, con $k \neq 0$

Inoltre, l'operazione E_{ij} significa che la riga i viene sostituita con la riga j e viceversa.
Obiettivo dell'algoritmo di Gauss e' di trasformare la matrice A nella matrice a scala S, cercando di ottenere più' colonne linearmente indipendenti.
Esempio : consideriamo la matrice $A(3 \times 4)$ descritta come segue

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Notiamo che a_{11} non e' uguale a 1, quindi dobbiamo applicare $E_1(\frac{1}{2})$.
Proseguiamo poi con $E_{21}(-1)$ e $E_{31}(1)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \stackrel{E_1(\frac{1}{2})}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \stackrel{E_{21}(-1)}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \stackrel{E_{31}(1)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Possiamo notare che la prima colonna e' diventata linearmente indipendente.
Proseguiamo con la seconda colonna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & \frac{12}{5} \end{bmatrix} \stackrel{E_2(-\frac{1}{5})}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 4 & 1 & \frac{12}{5} \end{bmatrix} \stackrel{E_{32}(-4)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

Anche la seconda colonna e' diventata linearmente indipendente.
Passiamo alla terza colonna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \stackrel{E_3(5)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

La nostra nuova matrice S sarà

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

L'algoritmo finisce qui, in quanto la matrice S che abbiamo trovato e' a scala.

1.19 Trovare le Soluzioni dell'Algoritmo di Gauss

Consideriamo la matrice $A(3 \times 5)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss in modo tale da ottenere la base S :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Otteniamo le equazioni derivanti dalla matrice: possiamo notare come non sia presente l'equazione per x_4 che ci serve per risolvere il sistema.
Allora possiamo aggiungere $x_4 = h$ in modo tale da poter risolvere il sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 + -\frac{1}{4} = \frac{1}{5} \\ x_3 + 5x_4 = 8 \\ x_4 = h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 + -\frac{1}{4} = \frac{1}{5} \\ x_3 = 8 - 5h \\ x_4 = h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 = -\frac{7}{5} + \frac{5}{4}h \\ x_3 = 8 - 5h \\ x_4 = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{29}{4} + \frac{11}{4}h \\ x_2 = -\frac{7}{5} + \frac{5}{4}h \\ x_3 = 8 - 5h \\ x_4 = h \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{29}{4} \\ -\frac{7}{5} \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha **infinite soluzioni**.
In generale, esistono tre casi:

- [0] : se l'ultima colonna e' dominante, allora **non** esiste soluzione
- [1] : se l'ultima colonna e l'unica non dominante, allora **esiste una** (e una sola) soluzione
- [∞]: se l'ultima colonna non e' dominante e ci sono altre colonne non dominanti, allora esistono **infinite** soluzioni

1.20 Proprietà delle Matrici Invertibili

- La matrice A $(m \times n)$ si dice invertibile se ha inversa destra **e** sinistra
- Se A, B $(n \times n)$ sono invertibili, allora AB e' invertibile.
- Se A e' invertibile, A^{-1} indica l'unica inversa destra e sinistra di A
- **Attenzione:** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Se A e' una matrice $m \times n$, allora esiste E invertibile tale che

$$EA = \begin{bmatrix} a \cdots\cdots \\ 0 \cdots\cdots \\ \vdots \ddots \vdots \\ 0 \cdots \vdots \end{bmatrix}$$

- Supponiamo che $A(m \times n)$ abbia inversa destra R. Allora R e' anche inversa sinistra di A.
- Sia $A(m \times n)$, con $m > n$. Allora A non ha inversa destra.
- Se $A(m \times n)$ ha inversa destra, allora $m \leq n$.
- Se $A(m \times n)$ ha inversa sinistra, allora $m \geq n$.
- Se $A(m \times n)$ ha inversa destra e sinistra, allora $m = n$.

1.21 Matrice Invertibile

Una matrice quadrata A di ordine n, ovvero di forma $n \times n$, si dice invertibile se esiste una matrice quadrata B di ordine n tale che $AB = BA = I$. In tal caso B si dice la matrice inversa di A, e si denota con il simbolo $A^{-1} := B$

Teorema Per una matrice $A(m \times n)$ le seguenti sono equivalenti:

- (a) A ha inversa destra
- (b) Ogni sistema lineare $Ax = b$ ha soluzione
- (c) A ha rango m

Teorema Per una matrice $A(m \times n)$ le seguenti sono equivalenti:

- (a) A ha inversa sinistra
- (b) Il sistema $Ax = 0$ ha soluzione unica
- (c) A ha rango n
- (d) $A^H A$ e' invertibile

Nota
$\overline{A}$ e' la matrice che si ottiene coniugando tutti i coefficienti di A tale che

$$A^H = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)} \qquad (H - trasposta)$$

Svolgimento dell'algoritmo
Si consideri $[A|I_n]$ e si esegua l'eliminazione in avanti e all'indietro. La matrice finale sarà della forma $[I_n|B]$. Allora $B = A^{-1}$
Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{E_{31}(1)}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{E_{2}(\frac{1}{2})}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{E_{32}(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \overset{E_{3}(2)}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{\substack{E_{13}(-2) \\ E_{23}(-\frac{1}{2})}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{E_{12}(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$I_n \qquad\qquad A^{-1}$$

Teorema Sia A una matrice 2×2, costruita come segue :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

La matrice A e' invertibile se e solo se $ad - bc \neq 0$, e in tal caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

1.22 Matrici Elementari

Una matrice elementare e' una matrice quadrata a coefficienti reali o complessi. Si indica con

- $E_i(c)$, con $c \neq 0$, la matrice che si ottiene eseguendo $E_i(c)$ sulla matrice identità I_n. Analogamente, indica una matrice ottenuta effettuando la moltiplicazione della riga i-esima di I_n per un numero c. Eseguire $E_i(c)$ sulla matrice A equivale a calcolare $E_i(c)A$.

$$E_i(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- $E_{ij}(d)$, con $i \neq j$, la matrice che si ottiene dalla matrice identità I_n eseguendo $E_{ij}(d)$. Analogamente, indica una matrice ottenuta dalla matrice identità I_n aggiungendo alla riga i-esima della matrice identità I_n la riga j-esima di I_n moltiplicata per m. Eseguire $E_{ij}(d)$ sulla matrice A equivale a calcolare $E_{ij}(d)A$.

$$E_{ij}(d) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & d & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- E_{ij}, con $i \neq j$ la matrice che si ottiene dall'identità eseguendo E_{ij}. Analogamente, indica una matrice ottenuta dalla matrice identità I_n scambiando le righe i-esima e j-esima. Eseguire E_{ij} sulla matrice A equivale a calcolare $E_{ij}A$.

  Essa viene definita anche come **matrice di permutazione elementare**.

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$E_i(c)(c \neq 0)$, $E_{ij}(A)(i \neq j$ e $E_{ij}(i \neq j)$ sono invertibili.

- $E_i(c)^{-1} = E_i(c^{-1})$
- $E_{ij}(d)^{-1} = E_i(-d)$
- $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$

1.23 Decomposizione LU

Una decomposizione LU, o decomposizione LUP o decomposizione di Doolittle, e' una fattorizzazione di una matrice A in una matrice triangolare inferiore L, una matrice triangolare superiore U e una matrice di permutazione P.

Teorema Sia A una matrice **invertibile**. Allora A può essere decomposta come

$$A = LU$$

Svolgimento dell'algoritmo
Usiamo l'algoritmo di Gauss per trovare la matrice triangolare superiore U

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \overset{E_1(\frac{1}{2})}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \overset{\substack{E_{31}(1) \\ E_{21}(-1)}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -5 & -1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{E_2(-\frac{1}{5})}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{E_{32}(4)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \overset{E_3(5)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = U$$

Sappiamo che i passaggi necessari per applicare l'algoritmo di Gauss sono:

$$U = E_3(5) \cdot E_{32}(-4) \cdot E_2(-\frac{1}{5}) \cdot E_{31}(1) \cdot E_{21}(-1) \cdot E_1(\frac{1}{2}) \cdot A$$

Ora consideriamo F come

$$F = E_3(5) \cdot E_{32}(-4) \cdot E_2(-\frac{1}{5}) \cdot E_{31}(1) \cdot E_{21}(-1) \cdot E_1(\frac{1}{2})$$

In modo tale da avere $U = FA$, con F invertibile. Per avere F^{-1} dobbiamo fare l'inversa dei passaggi fatti, partendo dall'ultimo passaggio con ogni elemento del passaggio invertito :

$$\begin{aligned} F^{-1} &= E_1(\frac{1}{2})^{-1} \cdot E_{21}(-1)^{-1} \cdot E_{31}(1)^{-1} \cdot E_2(-\frac{1}{5})^{-1} \cdot E_{32}(-4)^{-1} \cdot E_3(5)^{-1} \\ &= E_1(2) \cdot E_{21}(1) \cdot E_{31}(-1) \cdot E_2(-5) \cdot E_{32}(4) \cdot E_3(\frac{1}{5}) \end{aligned}$$

Applichiamo i passaggi per ottenere F^{-1} alla matrice identità in modo tale da ottenere L:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{E_3(\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xRightarrow{E_{32}(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xRightarrow{E_2(-5)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xRightarrow{E_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xRightarrow{E_{21}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xRightarrow{E_1(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = L(= F^{-1})$$

1.24 Decomposizione con la matrice di permutazione P

Nel caso in cui si applichi E_{ij} alla matrice A per calcolare LU, si deve anche considerare la matrice di permutazione P, definita dai passaggi E_{ij} (scambio di riga)

$$P = \prod E_{ij}$$

Dopodiché, otteniamo P^T, ovvero l'inversa della matrice di permutazione (o trasposta della matrice)

$$P^T = P^{-1} \cdot I_n = (\prod E_{ij})^{-1}$$

Infine, per svolgere la decomposizione con la matrice di permutazione bisogna svolgere

$$PA = LU$$

Esempio
Consideriamo una matrice $A(4 \times 5)$ a cui e' stata applicata E_{34}, E_{23}. Allora:

$$\begin{aligned} PA &= LU \\ P &= E_{34} \cdot E_{23} \\ P^{-1} &= E_{23}E_{34} = P^T \\ A &= P^T LU \end{aligned}$$

$$P^T = E_{23} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ogni matrice invertibile e' prodotto di matrici elementari.

2 Spazi Vettoriali

Uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e' un insieme V dotato di due funzioni che soddisfano una certa lista di assiomi. Gli elementi di V sono detti **vettori** e quelli di $\mathbb{K}$ **scalari**.
Le operazioni sono:

$$V \times V \longrightarrow V \qquad (u, v) \mapsto u + v$$
$$\mathbb{C} \times V \longrightarrow V \qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$$

2.1 Proprietà degli Spazi Vettoriali

A_1 $(u + v) + w = u + (v + w)$

A_1 Esiste $\mathbf{0} \in V$ tale che $v + \mathbf{0} =, \mathbf{0} + v = v$

A_3 Per ogni $v \in V$ esiste $w \in V$ tale che $v + w = \mathbf{0}, w + v = \mathbf{0}$

Proprietà Supponiamo di trovare $z \in V$ tale che $v + z = v$, $z + v = v$ per ogni $v \in V$. In particolare $\mathbf{0} + z = \mathbf{0}$ ma anche $z + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Allora $z = \mathbf{0}$

Proprietà Supponiamo che $v + w = \mathbf{0}$, $w + v = \mathbf{0}$, $v + w^{'} = \mathbf{0}$, $w^{'} + v = \mathbf{0}$. Allora

$$\begin{aligned} w^{'} &= w^{'} + \mathbf{0} = w^{'} + (v + w) \\ (A_1) \rightarrow &= (w^{'} + v) + w = \mathbf{0 + w} \\ &= w \end{aligned}$$

Convenzione : $x - y = x + (-y)$

M_1 $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, v \in V$

M_2 $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, v \in V$

M_3 $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$, con $\alpha \in \mathbb{C}, v, w \in V$

M_4 $1v = v$

Proprietà Se $w + w = w$, allora $w = \mathbf{0}$

2.2 Sottospazi

Si consideri uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$. Si dice che un sottoinsieme U **non vuoto** U di V ($U \subseteq V$) e' un sottospazio vettoriale se U e' uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto alle stesse operazioni di somma tra vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare definite da V, ovvero:

S_1 $\mathbf{0} \in U$

S_2 Se $u_1, u_2 \in U$, allora $u_1 + u_2 \in U$

S_3 Se $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, allora $\alpha u \in U$

2.3 Proprietà dei Sottospazi

- $Am \times n : N(A) = \{v \in \mathbb{C}^n | Av = 0\}$ e' uno sottospazio di $\mathbb{C}^n$
- $\{\mathbf{0}\}, V$ sono sottospazi di V
- $v \in V; < v >= \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{C}\}$

S_1 $\mathbf{0} = 0v$

S_2 $u_1, u_2 \in < v >$: $u_1 = \lambda_1 v, u_2 = \lambda_2 v; u_1 + u_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)v$

S_3 $u \in < v >, \alpha$ scalare, $u = \lambda v$. Allora $\alpha u = \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda)v$

Teorema Sia $u \subseteq V$. Allora U e' un sottospazio di V se e solo se

1. $U \neq \emptyset$
2. Se $u_1, u_2 \in U, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, allora $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$

Prendo $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$. $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ si chiama **insieme finito di vettori di V**.

2.4 Combinazione Lineare

Sia a un insieme finito di vettori di V, ovvero $a = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.
Una combinazione lineare di a e' un vettore della forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ con scalari $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

- L'insieme delle combinazioni lineari di a si denota con $< a >$.
- $\{\}$ e' un insieme finito di vettori.

- Per convenzione, **0** e' (l'unica) combinazione lineare di $\{\}$

Proposizione Se $a = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e' un insieme finito di vettori in V, allora $< a >$ e' uno sottospazio di V

Proposizione Se $V \neq \{\mathbf{0}\}$, allora V e' un insieme infinito.

Proposizione Se $\alpha v = \mathbf{0}$, allora $\alpha = 0$ oppure $v = \mathbf{0}$

Proposizione Se $v \neq 0$ e α, β sono scalari distinti, allora $\alpha v \neq \beta v$

2.5 Spazio delle Colonne

Sia $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n] m \times n$. Si definisce lo spazio delle colonne $C(A)$ di A come

$$C(A) =< a_1; a_2; \cdots; a_n > \qquad \textit{sottospazio di } \mathbb{C}^m$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$a = \{v_1; v_2; v_3\}$$

$$C(A) =< a > =< v_1; v_2; v_3 >$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 + v_2 + \alpha_3 + v_3 = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 4\alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proposizione Sia $\mathbb{C}^3 =< e_1; e_2; e_3 >$. Sia inoltre

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Non esistono insiemi a con meno di tre elementi tali che $< a >= \mathbb{C}^3$

2.6 Linearità dipendente e indipendente

- $a = \{v_1; v_2; \cdots; v_n\}$ e' **linearmente dipendente** se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ non tutti nulli, tali che
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$
- Se si permutano gli elementi di un insieme linearmente dipendente, si ottiene un insieme linearmente dipendente
- $a = \{v_1; v_2; \cdots; v_n\}$ e' linearmente dipendente se e solo se uno dei vettori di a e' combinazione lineare dei rimanenti
- L'insieme $a = \{v_1; v_2; \cdots; v_n\}$ e' **linearmente indipendente** se, da
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$
segue
$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$$
- Diremo che B e' un sottoinsieme di a se si ottiene da a eliminando qualche elemento. Se $B \subseteq a$ e a e' linearmente indipendente, allora B e' linearmente indipendente, analogo se a e' linearmente dipendente
- $\{v\}$ e' linearmente indipendente se e solo se $v \neq \mathbf{0}$

Teorema L'insieme delle colonne dominanti di una matrice in forma ridotta e' linearmente indipendente.

Dimostrazione

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{u_1; u_3; u_6; u_7\}$ e' linearmente indipendente, in quanto

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_3 + \alpha_3 u_6 + \alpha_4 u_7 = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 8\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 9\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice del sistema e' $\begin{bmatrix} u_1 & u_3 & u_6 & u_7 & | & 0 \end{bmatrix}$. Essa e' in forma ridotta e le colonne delle incognite sono dominanti:

$$\rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0$$

Ogni colonna non dominante di una matrice in forma ridotta e' combinazione lineare delle colonne dominanti che la precedono

Proposizione Supponiamo che $a = \{v_1; \cdots; v_n\}$ sia linearmente dipendente e sia B l'insieme che si ottiene da a rimuovendo un vettore che sia combinazione lineare dei rimanenti. Allora $< B >=< a >$.

Corollario Se $B \subseteq a$, allora $< B > \subseteq < a >$

2.7 Insieme (o sistema) di Generatori

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$.
Un insieme di vettori $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subseteq V$ e' un sistema di generatori (o insieme di generatori) di V se ogni elemento di V si può esprimere mediante una combinazione lineare di tali vettori.

- Diremo quindi che a e' un insieme di generatori di V se $< a >= V$
- V e' finitamente generato se ha un insieme di generatori

Proposizione Se $a = \{v_1; \cdots; v_n\}$ e' un insieme di generatori di V e $B = \{w_1; \cdots; w_m\}$ e' linearmente indipendente (in V), allora $m \leq n$ (Steinitz)

- Un insieme di generatori di V che sia linearmente indipendente si chiama una **base** di V
- Ogni spazio vettoriale finitamente generato ha una base

Teorema Se $a = \{v_1; \cdots; v_n\}$ e $B = \{w_1; \cdots; w_m\}$ sono basi si V, allora $m = n$

Dimostrazione

$$m \leq n \begin{cases} a & ins.generatori \\ B & lin.indip. \end{cases} \qquad n \leq m \begin{cases} a & lin.indip \\ B & ins.generatori \end{cases}$$

2.8 Dimensione di V

Se V e' uno spazio vettoriale finitamente generato, il numero di elementi in una base di V si chiama **dimensione di V** e si rappresenta come $dimV$

Esempio $dim\mathbb{C}^n = n$ in quanto $\{e_1; \cdots ; e_n\}$ e' una base di $\mathbb{C}^n$

Esempio $dim\{\mathbf{0}\} = 0$ perché $\{\}$ e' una base

Esempio $dimM_{m\times n}(\mathbb{C}) = mn.$

Si supponga V finitamente generato. Il minimo numero di elementi in un insieme di generatori e' $dimV$

Teorema Sia $dimV = n.$

- Se $\{v_1; \cdots ; v_n\}$ e' un insieme di generatori, allora e' una base
- Se $\{v_1; \cdots ; v_n\}$ e' linearmente indipendente, allora e' una base

Dimostrazione Ad esempio, se $\{v_1; \cdots ; v_n\}$ non fosse una base, sarebbe linearmente dipendente. Ma allora troverei una base di V con meno di n elementi.

Esercizio Si dimostri che

$$\{v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\}$$

e' una base di $\mathbb{C}^3$.
Devo vedere chi e' linearmente **indipendente**: suppongo

$$\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 + v_2 + \alpha_3 + v_3 = 0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2(\frac{1}{3})]{E_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposizione Se U e' un sottospazio di V (finitamente generato), allora U e' finitamente generato e $dimU \leq dimV$

Corollario $U = V$ se e solo se $dimU = dimV$

2.9 Formula di Grassmann

Enunciato Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. dotato di dimensione finita, ovvero dotato di una base finita. Siano W e U due sottospazi di V. Indicando con $W + U$ il sottospazio somma di W e U dato da

$$W + U := \{\mathbf{w} + \mathbf{u} | \mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U\}$$

e con $W \cap U$ il loro sottospazio intersezione, la formula di Grassmann afferma che

$$dim(W + U) = dim(W) + dim(U) - dim(W \cap U)$$

Somma diretta Due sottospazi U e W sono in somma diretta se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. La formula di Grassmann asserisce che

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W)$$

Se inoltre $V = U + W$, si dice che V si decompone in somma diretta di U e W e si scrive:

$$V = U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

In questo caso il sottospazio W e' un **supplementare** di U (e viceversa)

Condizioni Equivalenti Per due sottospazi U, K di V le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $U + K = U \oplus K \Leftrightarrow U \cap K = \{\mathbf{0}\}$
- Ogni elemento di $U + K$ si scrive **in modo unico** come $u + k$, con $u \in U, k \in K$.
- Se $u \in U, k \in K, u + k = 0$, allora $u = 0, k = 0$

3 Basi

Si dice base di uno spazio vettoriale un insieme di vettori grazie ai quali si può ricostruire in modo unico tutti i vettori dello spazio mediante combinazioni lineari.

3.1 Applicazione Lineare

Una trasformazione lineare, detta anche **applicazione lineare** o **mappa lineare** e' una funzione lineare tra due spazi vettoriali sullo stesso campo, preservandone le combinazioni lineari.

Enunciato Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Una funzione

$$f : V \to W$$

e' una trasformazione lineare se soddisfa le seguenti proprietà:

- Additività : $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- Omogeneità di grado 1 : $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

per ogni coppia di vettori x e y in V e per ogni scalare α in $\mathbb{K}$.
Nota Se $f : V \to W$ e' lineare, allora $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

3.2 Proprietà delle applicazioni Lineari

- Sia $f : V \to W$. f e' lineare se, per $u, v \in V$, α scalare
$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$
$$f(\alpha v) = \alpha f(v)$$
- Sia $f : U \to V, g : V \to W$, con (U, V, W spazi vettoriali) e siano f, g lineari. Allora $g \circ f : U \to W$ e' lineare.
- $f : V \to W$ e' iniettiva se, da $v_1 \neq v_2 (v_1, v_2 \in V)$ segue $f(v_1) \neq f(v_2)$
- $f : V \to W$ e' iniettiva se, da $f(v_1) = f(v_2)(v_1, v_2 \in V)$ segue $v_1 = v_2$
- Sia $f : V \to W$. Lo spazio nullo (o nucleo) di f e'
$$N(f) = \{v \in V | f(v) = 0\}$$
- Sia $f : V \to W$ lineare. Allora f e' iniettiva se e solo se $N(f) = \{0\}$
- Sia $f : V \to W$ lineare, $Im(f) = \{f(v) | v \in V\}$. $Im(f)$ e' uno sottospazio di W
  1. $0 = f(0) \in Im(f)$
  2. $w_1, w_2 \in Im(f), \alpha_1, \alpha_2$ scalari. Allora:
$$\begin{aligned} w_1 = f(v1), w_2 &= f(v_2) \\ \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 &= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \\ &= f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \in Im(f) \end{aligned}$$
- $f : V \to W$ e' suriettiva se $Im(f) = \mathbf{W}$
- Supponiamo $f : V \to W$ lineare e biettiva (ovvero iniettiva e suriettiva). Si può definire $f^{-1} : W \to V$ con $f^{-1}(w) = v$ se e solo se $f(v) = w$. Allora f^{-1} e' lineare
- $f \circ f^{-1} = id_w; f \circ f^{-1}(w) = w; f^{-1} \circ f = id_v; f^{-1}(f(v)) = v$
- Sia $f : U \to V, g : V \to W$, con g biettiva. Allora $rk(g \circ f) = rk(f)$
- $f = g^{-1} \circ g \circ f$
- Se f e' biettiva, allora $rk(g) = rk(g \circ f)$

3.3 Teorema nullità più rango

Definizione Il teorema del rango, detto anche teorema nullità più rango, o teorema della dimensione, afferma che la somma tra la dimensione dell'immagine e la dimensione del nucleo di una trasformazione lineare e' uguale alla dimensione del dominio. In modo equivalente, la somma del rango e della nullità di una matrice e' uguale al numero di colonne della matrice.

Enunciato Se $f : V \to W$ e' lineare e V e' finitamente generato, allora $Im(f)$ e' linearmente generato e

$$dimV = dimN(f) + dimIm(f)$$

con $dimN(f)$ la nullità e $dimN(f)$ il rango.

- $dimIm(f)$ si chiama rango di f. Siccome $Im(f_A) = C(A)$, il rango di A e' $dimC(A)$.
- Il rango della matrice A e' $dimC(A)$
- f e' iniettiva se $dimN(f) = 0$
- f e' suriettiva se $dimIm(f) = dimV$
- Il rango di f si può descrive come $rk = dimIm(f)$
- $rk(g \circ f) \leq rk(g)$

Proprietà del rango

- Un insieme di colonne di A e' linearmente dipendente se e solo se il corrispondente insieme di colonne di B e' linearmente dipendente, analogo con "indipendente"
- Enunciato U in forma ridotta:
  - Le colonne dominanti formano un insieme linearmente indipendente
  - Le colonne non dominanti sono combinazione lineare delle colonne dominanti
- Sia A matrice $m \times n$, F una matrice $m \times m$ invertibile. Poniamo B = FA. $rk(f_A) = rk(f_F \circ f_A) = rk(f_{FA}) = rk(f_B)$
- Siano $A(m \times n)$, $U = FA$ con F invertibile. Allora $rk(A) = rk(U) =$ numero di colonne dominanti. Una base di $C(A)$ e' l'insieme delle colonne di A corrispondenti alle colonne dominanti di U.

  Esempio

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{21}(1)]{E_2(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C(A) = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

- Si supponga A $m \times n$, $Gn \times n$ invertibile. Allora $C(A) = C(AG)$
- Sia $B = FA, F$ invertibile. Allora $B^H = A^H F^H, F^H$ invertibile. Quindi $dimC(A^H) = dimC(B^H) \Leftrightarrow rkA^H = rkB^H$
- Se U e' in forma ridotta, allora $dimC(U) = dimC(U^H)$, con $dimC(U)$ il numero di colonne dominanti e $dimC(U^H)$ il numero di righe non nulle in U

Esempio

$$U = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \\ *\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \\ *\alpha_1 + *\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

- Sia A una matrice, $U = FA, U$ ridotta. Allora

$$rkA = rkU = rkU^H = rkA^H$$

lo stesso con A^T)

Esercizio Sia

$$a = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; [0//1//0//1] \}$$

Voglio estenderlo a una base di $\mathbb{C}^4$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} : \mathbb{C}^4 = C(A) \oplus N(A^H)$$

Una base di $C(A)$ e' a. Basta trovare quindi una base di $N(A^H)$

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{E_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$$

Scriviamo B come la base di $N(A^H)$

$$B = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

Quindi

$$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

e' una base di $\mathbb{C}^4$

Esercizio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 6 & 8i \\ 2i & -2 & 0 & 9 \\ 1 & i & 6 & 8i \end{bmatrix} \xRightarrow[E_{21}(-2i)]{E_2(\frac{1}{12i}) \; E_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & i & 6 & 8i \\ 0 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La prima e la terza colonna sono linearmente indipendenti, quindi $rkA = 2$. Calcoliamo quindi $C(A)$

$$C(A) = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \}$$

Calcoliamo ora $N(A)$

$$\overset{E_{12}(-6)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & -4i \\ 0 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 = -ix_2 + 4ix_4 \\ x_3 = -2ix_4 \end{cases}$$

$$N(A) = \{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 4i \\ 0 \\ -2i \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

Possiamo dire che $dim\mathbb{C}^4 = dimN(A) + rkA = 2 + 2 = 4$. Calcoliamo ora il rango di A^H

$$A^H = \begin{bmatrix} 1 & -2i & 1 \\ -i & -2 & -i \\ 6 & 0 & 6 \\ -8i & 8 & -8i \end{bmatrix} \overset{\substack{E_{41}(8i) \\ E_{31}(-6) \\ E_{21}(i)}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12i & 0 \\ 0 & 24 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{E_{42}(-24) \\ E_2(\frac{1}{12i}) \\ E_{23}}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2i & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango di A^H e' equivalente a 2 $\Longrightarrow rkA^H = 2$. Calcoliamo $C(A^H)$

$$C(A^H) = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 6 \\ -8i \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -2i \\ -2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \}$$

Infine calcoliamo $N(A^H)$.

$$\overset{E_{12}(2i)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$N(A^H) = \{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

3.4 Applicazione delle coordinate rispetto alla base

Sia V uno spazio vettoriale, $B = \{v_1; \cdots ; v_n\}$ una base. Se $v \in V$, allora

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

in modo **unico**.

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

Quindi per ogni valore compreso tra 1 e n, $\alpha = \beta$. Perciò posso definire

$$C_B : V \to \mathbb{C}^n$$

tramite

$$C_B(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

se e solo se

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Si definisce quindi C_B come l'applicazione delle coordinate rispetto alla base B.

3.5 Proprietà delle coordinate rispetto alla base

- C_B e' lineare e biettiva.

$$\begin{aligned} v, w \in V : v &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \\ &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \\ v + w &= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) v_n \end{aligned}$$

- C_B e' iniettiva: se $C_B = \mathbf{0}$, allora $v = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = 0$. Ma allora $dimV = n = dim\mathbb{C}^n$. Perciò C_B e' anche suriettiva.

Esercizio Sia $V = P_4(\mathbb{C})$, con P rappresentante polinomi di grado inferiore al 4. Una base e' sicuramente

$$\{1; x; x^2; x^3\} = B$$

Consideriamo ora a : essa e' una base di $P_4(\mathbb{C})$?

$$a = \{1 - x; 1 + x; 2 - x^2; x^2 - x^3\}$$

.

Svolgimento (parziale) Calcoliamo C_B in base agli elementi di a:

$$C_B(1-x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C_B(1+x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B(2-x^2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C_B(x^2-x^3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Partendo dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(ovvero l'insieme dei vettori colonna calcolati precedentemente) sfruttiamo l'algoritmo di Gauss per calcolare la matrice diagonalmente superiore. Troveremo quindi che il rango e' uguale a 4. Quindi, possiamo dire che a e' una base per $P_4(\mathbb{C})$.

3.6 Base Canonica

Qualunque sia $N \in \mathbb{R}^n$, si definisce base canonica di $\mathbb{R}^n$ l'insieme

$$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

formato dai seguenti vettori :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \cdots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \cdots, 0) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0, 0, \cdots, 1) \end{aligned}$$

3.7 Matrice del Cambiamento di Base

Definizione La matrice di cambiamento di base e' una matrice quadrata e invertibile che permette di effettuare il passaggio da una base di uno spazio vettoriale a un'altra base dello stesso spazio vettoriale.

Enunciato Siano

$$B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$
$$B^{'} = \{v_1^{'}, v_2^{'}, \cdots, v_n^{'}\}$$

basi dello spazio vettoriale V di dimensione n. Per definizione di base di uno spazio vettoriale, un qualunque vettore $\mathbf{w} \in V$ si può scrivere come

$$\mathbf{w} = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots + w_n v_n (*)$$

dove $w_1, w_2, \cdots, w_n$ sono le componenti (o coordinate) di **w** rispetto alla base B. Anche $B^{'}$ e' una base di V, dunque

$$\mathbf{w} = \{w_1^{'} v_1^{'} + \cdots + w_n^{'} v_n^{'}\}(**)$$

dove $w_1^{'}, \cdots, w_n^{'}$ sono le coordinate di **w** rispetto alla base $B^{'}$. Nella relazione $(*)$ al posto dei vettori $v_1, \cdots, v_n$ sostituiamo le precedenti combinazioni lineari. Con il confronto con $(**)$ otteniamo che

$$\begin{aligned}
w_1^{'} &= \alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2 + \cdots + \alpha_{1n} w_n \\
w_2^{'} &= \alpha_{21} w_1 + \alpha_{22} w_2 + \cdots + \alpha_{2n} w_n \\
&\cdots\cdots \\
w_n^{'} &= \alpha_{n1} w_1 + \alpha_{n2} w_2 + \cdots + \alpha_{nn} w_n
\end{aligned}$$

Esse forniscono le relazioni che legano le coordinate del vettore $\mathbf{w} \in V$ rispetto alle basi B e $B^{'}$. La matrice

$$M_{B \to B'} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

la cui i-esima colonna e' costituita dalle coordinate del vettori v_i della base B rispetto alla base $B^{'}$ e' detta **matrice del cambiamento di base** dalla base B alla base $B^{'}$, e' una matrice invertibile e la si indica con $M_{B \to B'}$

3.8 Cambiamenti di Base

Sia $f : V \to W$, con $B, B^{'}$ basi di V, $D, D^{'}$ basi di W.
Supponiamo di conoscere $A^{'}$ tale che

$$C_D^{'}(f(v)) = A^{'} C_B^{'}(v)$$

. Vogliamo trovare A tale che

1. $C_D(f(v)) = AC_B(v)$
2. $C_D^{'}(f(v)) = A^{'} C_{B'}(v)$
3. $C_B(v) = M_{B \leftarrow B'} C_{B'}(v)$

Sappiamo che

$$\begin{aligned}
C_D(f(v)) &= M_{D \leftarrow D'} C_{D'}(f(v)) \\
&= M_{D \leftarrow D'} A^{'} C_{B'}(v) \\
&= M_{D \leftarrow D'} A^{'} M_{B \leftarrow B'}^{-1} \\
A &= M_{D \leftarrow D'} A^{'} M_{B \leftarrow B'}^{-1}
\end{aligned}$$

3.9 Rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari

Definizione Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione m e n rispettivamente e sia $T : V \to W$ una applicazione lineare di V in W. Siano inoltre $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base dello spazio vettoriale V e $C = \{w_1, \cdots, w_n$ una base di W.
La matrice associata ad una applicazione lineare $T : V \to W$ rispetto alle basi $\{v_1, \cdots, v_n\}$ di V e $\{w_1, \cdots, w_n\}$ di W e la matrice che ha per j-esima colonna il vettore delle coordinate dell'immagine $T(v_j)$ rispetto alla base di W.

Enunciato Avendo

$$T(v_1) = \alpha_{11}w_1 + \cdots + \alpha_{n1}w_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T(v_m) = \alpha_{1m}w_1 + \cdots + \alpha_{nm}w_n$$

La matrice

$$A_T^{B,C} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Si dice matrice associata alla applicazione lineare T rispetto alle base B e C. In altri termini, la matrice associata alla applicazione lineare $T : V \to W$ rispetto alle basi $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ di V e $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ di W e' quella matrice che ha per j-esima colonna il vettore delle coordinate dell'immagine di $T(v_j)$ rispetto alla base di W.

Esercizio Sia

$$T : \underbrace{\mathbb{R}^3}_{V} \to \underbrace{\mathbb{R}^2}_{W}$$

l'applicazione lineare definita come segue:

$$T(x, y, z) = (x + y, z)$$

Vogliamo trovare la matrice associata a tale applicazione lineare rispetto alle basi

$$B = \{\underbrace{(1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,0)}_{v_2}, \underbrace{(1,1,1)}_{v_3}\} \;\; di \;\; \mathbb{R}^3$$
$$C = \{\underbrace{(0,1)}_{w_1}, \underbrace{(1,1)}_{w_2}\} \;\; di \;\; \mathbb{R}^2$$

Troviamo innanzitutto le immagini $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ dei vettori della base B tramite l'applicazione lineare:

$$T(v_1) = T(1,0,1) = (\underbrace{1+0}_{x+y}, \underbrace{1}_{z}) = (1,1)$$
$$T(v_2) = T(1,0,0) = (1+0,0) = (1,0)$$
$$T(v_3) = T(1,1,1) = (1+1,1) = (2,1)$$

Scriviamo ora i vettori immagine appena scritti come combinazione lineare dei vettori della base C

$$T(v_1) = T(1,0,1) = (1,1) = \underbrace{0}_{\alpha_{11}} \cdot \underbrace{(0,1)}_{w_1} + \underbrace{1}_{\alpha_{21}} \cdot \underbrace{(1,1)}_{w_2}$$
$$T(v_2) = T(1,0,0) = (1,0) = \underbrace{-1}_{\alpha_{12}} \cdot \underbrace{(0,1)}_{w_1} + \underbrace{1}_{\alpha_{22}} \cdot \underbrace{(1,1)}_{w_2}$$
$$T(v_3) = T(1,1,1) = (2,1) = \underbrace{-1}_{\alpha_{13}} \cdot \underbrace{(0,1)}_{w_1} + \underbrace{2}_{\alpha_{23}} \cdot \underbrace{(1,1)}_{w_2}$$

Di conseguenza la matrice associata alla applicazione lineare T rispetto alle basi B e C sarà

$$A_T^{B,C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4 Spazi Euclidei

4.1 Lunghezza di un vettore

La lunghezza di un vettore solitamente dovrebbe essere:

- un numero reale maggiore di zero
- 0 solo se il vettore e' nullo
- compatibile con il prodotto per scalari

4.2 Norma su uno spazio vettoriale

Una norma e' una funzione che assegna ad ogni vettore di uno spazio vettoriale, tranne lo zero, una lunghezza positiva.
Una norma su uno spazio vettoriale reale o complesso V e' una funzione

$$V \to \mathbb{R}, v \longmapsto ||v||$$

tale che

1. $||v|| \geq 0$; se $||v|| = 0$, allora $v = 0$
2. $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

4.3 Spazio vettoriale Euclideo (prodotto interno)

Definizione Uno spazio euclideo e' uno spazio affine (ovvero con una struttura strettamente collegata a quella dello spazio vettoriale) in cui valgono gli assiomi (principi) e i postulati (assiomi considerati veri senza dimostrazione) della geometria euclidea.

Enunciato Un prodotto interno su V e' una funzione

$$V \times V \to \mathbb{C}$$

$$(v, w) \longmapsto (v|w)$$

1. $(v|w) = \overline{(w|v)}$
2. $(u|\alpha v + \beta w) = \alpha(u|v) + \beta(u|w)$
3. $(v|v) \geq 0$; se $(v|v) = 0$, allora $v = 0$

Uno spazio vettoriale si dirà euclideo se e' fissato un certo prodotto interno su V

Esempio Fondamentale Il prodotto interno **standard** su $\mathbb{C}^n$ e'

$$(v|w) = v^H w$$

1. $\overline{(w|v)} = \overline{(w^H v)} = (w^H v)^H = v^H w^{HH} = v^H w = (v|w)\checkmark$
2. $\cdots\checkmark$
3. $v^H v \geq 0\checkmark \implies v^H v = 0 : v = 0\checkmark$

4.4 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Se V e' uno spazio vettoriale euclideo e $v, w \in V$, allora

$$|(v|w)| \leq \sqrt{(v|v)}\sqrt{(w|w)}$$

con $\sqrt{(v|v)} = ||v||$

4.5 Complemento Ortogonale di un Sottospazio

Enunciato Sia $U \subseteq V$ un sottospazio di un dato spazio vettoriale euclideo V: si definisce il **complemento ortogonale** di U in V, e lo si indica con $U^{\perp}$, come il sottoinsieme di V definito da

$$U^{\perp} := \{v \in V \ \ t.c. \ \ (u|v) = 0 \ \ per \ \ ogni \ \ u \in U\}$$

Proprietà

- $\{0\}^{\perp} = V$
- $V^{\perp} = \{0\}$
- $u \neq 0 :< u > \bigoplus < u >^{\perp} = V$
- Se $U =< u_1; \cdots ; u_n >$, allora $V = U \bigoplus U^{\perp}$
- Se U_1
  $subseteq U_2$ (sottospazi di V), allora $U_1^{\perp} \supseteq U_2^{\perp}$
- $U \subseteq U^{\perp\perp}$
- $U^{\perp\perp\perp} = U^{\perp}$
- $C(A)^{\perp} = N(A^H)$
- $C(A^H)^{\perp} = N(A)$
- Se V e' finitamente generato e U e' un sottospazio di V, allora $U \bigoplus U^{\perp} = V$

Enunciato Ogni vettore $V \in V$ si scrive, in modo unico, come

$$v = v^{'} + v^{"}$$

con $v^{'} \in U, v^{"} \in U^{\perp}$. Questo definisce una funzione

$$P_U : V \to V$$

che associa $v^{'}$ a v (proiezione ortogonale a U)

5 Altre operazioni con le matrici

5.1 Determinante

Definizione Il determinante di una matrice e' un numero associato a ciascuna matrice **quadrata**, e ne esprime alcune proprietà algebriche e geometriche. Se A e' una matrice quadrata, il suo determinante si indica con $det(A)$ o $|A|$, e si calcola in modi differenti a seconda della dimensione della matrice.

Determinante di matrici 1×1 Il determinante di una matrice formata da un solo elemento e' uguale all'elemento stesso

$$det \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = a$$

Determinante di matrici 2×2 Il determinante di una matrice quadrata di ordine 2 (ovvero 2×2) e' dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale meno il prodotto degli elementi dell'antidiagonale (diagonale opposta). Dunque, se abbiamo una matrice 2×2 possiamo calcolarne il determinante con la formula

$$det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a\dot{d}) - (b\dot{c})$$

Determinante di matrici 3×3 **- Regola di Sarrus** Per calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine 3 possiamo applicare la **regola di Sarrus**, secondo cui

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$$

Per semplificare il calcolo, basta riscrivere la matrice accostando la matrice stessa sulla sua destra per poi

1. sommare i prodotto lungo le prime tre diagonali complete da sinistra verso destra
2. sommare i prodotti lungo le ultime tre antidiagonali complete percorse da destra verso sinistra
3. calcolare la differenza tra i risultati ottenuti dai punti (1) e (2)

Determinante di matrici di ordine n **- Teorema di Laplace** Il teorema di Laplace permette di calcolare il determinante di una matrice quadrata attraverso formule ricorsive, dette **sviluppi di Laplace**, che possono essere applicate per righe o per colonne, e si possono applicare a matrici quadrate di ordine n qualsiasi.

Sviluppo di Laplace per righe Fissata una qualsiasi riga della matrice A, il determinante di A e' pari alla somma dei prodotti degli elementi della riga scelta per i rispettivi complementi algebrici. In formula :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} [a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot det(A_{ij}]$$

(ci si muove lungo la i-esima riga)

Sviluppo di Laplace per colonne Fissata una qualsiasi riga della matrice A, il determinante di A e' pari alla somma dei prodotto degli elementi della colonna scelta per i rispettivi complementi algebrici. In formula :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} [a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot det(A_{ij}]$$

(ci si muove lungo la j-esima colonna)

5.2 Autovalori e Autovettori

Sia A una matrice quadrata di ordine n a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$, ossia $A \in Math(n, n, \mathbb{K}$. Si dice che lo scalare $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ e' un **autovalore** della matrice quadrata A se esiste un vettore colonna non nullo $v \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}$$

Il vettore v e' detto **autovettore relativo all'autovalore** λ_0

5.3 Autospazio relativo a un autovalore

Gli autovettori relativi a uno stesso autovalore λ_0 di una matrice quadrata A di ordine n, insieme al vettore nullo, formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Tale sottospazio prende il nome di **autospazio relativo all'autovalore** λ_n, si indica con V_{λ_0} ed e' definito come segue:

$$V_{\lambda_0} := \{v \in \mathbb{K}^n \quad t.c. \quad A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}\}$$

Osservazione Se $v_1, v_2, \cdots, v_k$ sono $k \leq n$ autovettori associati ad autovalori distinti di una matrice quadrata $A \in Mat(n, n, \mathbb{K}$ allora $v_1, v_2, \cdots v_k$ sono linearmente indipendenti

5.4 Teorema di Rouche' Capelli

5.5 Polinomio caratteristico e calcolo di autovalori e autovettori di una matrice

Enunciato Sia A una matrice quadrata di ordine n a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Dalla definizione di autovalore si sa che lo scalare $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ e' un autovalore di A se esiste un vettore (colonna) **non nullo** $v \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}$$

da cui segue che

$$A\mathbf{v} - \lambda_0\mathbf{v} = 0$$

ovvero vale a dire che

$$(A - \lambda_0 Id_n)\mathbf{v} = 0$$

dove con Id_n rappresenta la matrice identità avente lo stesso ordine della matrice A. Dalla teoria sui sistemi lineari, per poter ammettere una soluzione banale la matrice incompleta associata al sistema deve avere determinante uguale a zero, ovvero

$$det(A - \lambda_0 Id_n) = 0$$

Se si considera λ una incognita, allora l'espressione

$$det(A - \lambda Id_n)$$

corrisponde a un polinomio, che viene chiamato per definizione **polinomio caratteristico** associato alla matrice A.
Siano $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ gli autovalori distinti di A, con $0 < m \leq n$. Per ogni autovalore λ_i, si calcola il corrispondente autospazio, cioè lo spazio degli autovettori associati a λ_i. Per farlo, si deve considerare il sistema lineare omogeneo

$$(A - \lambda_i Id_n)\mathbf{v} = 0$$

ed estrarne una base per l'insieme delle soluzioni. Si trova cosi una base per l'autospazio relativo a λ_i e l'insieme dei vettori che formano la base sono gli autovettori associati all'autovalore λ_i.

Esercizio Calcolare gli autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Svolgimento: calcoliamo il polinomio caratteristico associato ad A

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(A - \lambda I_3) = \\ &= det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \\ &= det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Applicando la regola di Sarrus si ricava che

$$P_A(\lambda) = det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8$$

Troviamo quindi gli zeri scomponendolo con la regola di Ruffini

$$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow -(\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

Dunque $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$ sono gli autovalori della matrice A.
Per determinare gli autovettori associati a $\lambda_1 = 1$ consideriamo il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{v} = 0$, ossia $(A - I_3)\mathbf{v} = 0$
Per ottenere il sistema lineare in forma estesa sostituiamo A con la matrice fornita, Id_3 con la matrice identità di ordine 3, **v** col vettore colonna

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e **0** col vettore colonna formato da soli zero.

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + y \\ x + 2y + z \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Due matrici sono uguali se hanno le stesse componenti (coefficienti), quindi l'uguaglianza diventerà un sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

di cui dobbiamo ricavare una base per lo spazio delle soluzioni. La matrice incompleta associata al sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango uguale a 2. Infatti ha determinante nullo ed e' immediato trovare una sottomatrice di ordine 2 con determinante diverso da zero. Per il teorema di Rouche' Capelli il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Assegniamo a una delle incognite il ruolo di parametro libero.
Ponendo ad esempio $y = a$, con $a \in \mathbb{R}$, ricaviamo la generica soluzione del sistema col metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} y = a \\ x + y = 0 \to x = -a \\ y + z = 0 \to z = -a \end{cases}$$

Le ∞^1 soluzioni del sistema sono

$$(x, y, z) = (-a, a, -a) = a(-1, 1, -1)$$

Possiamo dire che

$$B_{V_{\lambda_1}} = \{(-1, 1, -1)\}$$

e' una base per l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ che $(-1, 1, -1)$ e' un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$

5.6 Molteplicità algebrica di un autovalore

Enunciato Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia λ_0 un suo autovalore. Si dice **molteplicita algebrica dell'autovalore** λ_0 il numero che esprime quante volte l'autovalore λ_0 annulla il polinomio caratteristico e si indica con $m_a(\lambda_0)$

Esercizio Calcolare la molteplicità algebrica degli autovalori associati alla seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgimento: il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ e' dato da

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(A - \lambda Id_3) = det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ = det(A - \lambda Id_3) = det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \\ = det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) \\ = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora gli zeri del polinomio:

$$P_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = (1 - \lambda)(\lambda - 1)\lambda + 1)$$

e quindi gli autovalori della matrice A sono $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1$.
Qual e' la loro molteplicità algebrica?

- $m_a(1) = 2$ in quanto $\lambda_0 = 1$ annulla due volte il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$
- $m_a(-1) = 1$ in quanto $\lambda_1 = -1$ annulla una sola volta il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$

5.7 Molteplicità geometrica di un autovalore

Enunciato Data una matrice quadrata A di ordine n e sia λ_0 un suo autovalore, si definisce **molteplicità geometrica** di λ_0 la dimensione dell'autospazio relativo a λ_0, cioè il numero di elementi di una qualsiasi base dell'autospazio relativo a λ_0, e si indica con $m_g(\lambda_0)$
In termini pratici, la molteplicità geometrica dell'autovalore λ_0 si calcola con la formula

$$m_g(\lambda_0) = n - rk(A - \lambda_0 Id_n)$$

dove n e' l'ordine della matrice quadrata A e $rk(A - \lambda_0 Id_n)$ indica il rango della matrice $(A - \lambda_0 Id_n)$ ottenuta sottraendo ad A la matrice $\lambda_0 Id_n$, data dal prodotto dell'autovalore λ_0 per la matrice identità di ordine n.

Esercizio Sia A una matrice 3×3 definita come segue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo già calcolato che i suoi autovalori sono $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1$. Sappiamo inoltre che l'ordine della matrice e' 3. Dunque

$$\begin{aligned} m_g(\lambda_0) &= n - rk(A - \lambda_0 Id_3) = \\ &= 3 - rk\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= 3 - rk\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= 3 - rk\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Con $\lambda_0 = 1$ otteniamo che la molteplicità geometrica e' uguale a 2

$$\begin{aligned} m_g(\lambda_1) &= n - rk(A - \lambda_1 Id_3) = \\ &= 3 - rk\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= 3 - rk\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= 3 - rk\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Con $\lambda_1 = -1$ otteniamo che la molteplicità geometrica e' uguale a 1
Nota: $1 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0) \leq n$

5.8 Matrice Diagonalizzabile

Definizione Una matrice diagonalizzabile e' una matrice quadrata simile a una matrice diagonale. In altri termini, una matrice A e' diagonalizzabile se esiste una matrice invertibile P tale che

$$PD = AP$$

dove D e' una matrice diagonale dello stesso ordine di A.

Enunciato Sia A una matrice quadrata di ordine n a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Si dice che A e' una matrice diagonalizzabile se e' simile ad una matrice diagonale D di ordine n. Stando alla definizione di matrici simili, ciò equivale ad affermare che $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ e' diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice invertibile P tale che

$$D = P^{-1}AP$$

ossia

$$PD = AP$$

La matrice P e' detta matrice diagonalizzante di A

5.9 Teorema di Diagonalizzabilità

Definizione Una matrice quadrata A e' diagonalizzabile in un campo $\mathbb{K}$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

1. Il numero degli autovalori di A appartenenti al campo $\mathbb{K}$ e contati con la loro molteplicità e' pari all'ordine della matrice
2. La molteplicità geometrica di ciascun autovalore coincide con la relativa molteplicità algebrica

Casi particolari

- Se $A = (a_{ij})$ e' una matrice simmetrica, cioe' se $a_{ij} = a_{ji}$, per ogni $i \neq j$, allora A e' diagonalizzabile
- Se A e' una matrice quadrata di ordine n che ammette esattamente n autovalori distinti in $\mathbb{K}$, allora A e' diagonalizzabile nel campo $\mathbb{K}$
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o se $\mathbb{K}$ e' un campo algebricamente chiuso, il primo punto del teorema di diagonalizzabilità e' verificato in automatico

Esercizio Stabilire se la seguente matrice e' diagonalizzabile

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgimento : dobbiamo verificare la validità delle condizioni (1) e (2) del teorema di diagonalizzabilità. Iniziamo calcolando gli autovalori della matrice, che sono gli zeri del polinomio caratteristico.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(A - \lambda Id_3) = det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ = det(A - \lambda Id_3) = det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \\ = det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) = \\ = (1-\lambda)(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

Le radici (o zeri) del polinomio caratteristico sono $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.
Possiamo concludere che la matrice **non** e' diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ perche' per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ non e' soddisfatta la prima condizione del teorema di diagonalizzabilità. Tale matrice e' pero diagonalizzabile in $\mathbb{C}$,infatti in campo complesso ammette 3 autovalori distinti, tinti quant'è l'ordine della matrice.

Esercizio Stabilire se la matrice A e' diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e in caso affermativo calcolare la matrice diagonalizzante e la matrice diagonale a cui essa e' simile.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgimento Prima parte : calcoliamo gli autovalori della matrice A, dati dagli zeri del polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) := det(A - \lambda Id_3) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$$

I suoi zeri, e quindi gli autovalori della matrice, sono

- $\lambda_0 = 0$ con molteplicità algebrica $1 : m_a(0) = 1$
- $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica $1 : m_a(2) = 2$

Entrambi appartengono a $\mathbb{R}$ e la somma delle loro molteplicità e' uguale all'ordine della matrice, ma ciò non basta per concludere che A e' diagonalizzabile. Dobbiamo individuare le molteplicità geometriche di λ_0 e λ_1.

- Dal momento che $m_a(0) = 1$, la sua molteplicità geometrica e' automaticamente 1, e quindi $m_a(0) = m_g(0) = 1$
- Per $\lambda_1 = 2$ bisogna calcolare $m_g(2) = 3 - rk(A - 2Id_3)$. Otterremo che $m_g(2) = 2 = m_a(2)$.

Possiamo concludere dicendo che la matrice A e' diagonalizzabile

Svolgimento Seconda parte Per trovare la matrice diagonalizzante dobbiamo determinare gli autovettori relativi a ciascun autovalore. A tal fine calcoliamo una base per l'autospazio V_{λ_0} relativo all'autovalore $\lambda_0 = 0$ e una base per l'autospazio V_{λ_1} associato a $\lambda_1 = 2$.
Poiché $\lambda_0 = 0, (A - 0Id_n)x = 0$, dove $x \in \mathbb{R}^3$ e' il vettore colonna delle incognite e **0** $\in R^3$ e' il vettore colonna formato da soli zero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + z \\ 2y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

In riferimento alla matrice A sappiamo che la molteplciita' geometrica dell'autovalore $\lambda_0 = 0$ e' $m_g(0) = 1$, dunque il precedente sistema ammette ∞^1 soluzioni. Assegniamo allora a 1 delle incognite il ruolo di parametro libero.
Ponendo ad esempio $z = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, le soluzioni del sistema sono

$$(x, y, z) = (-\alpha, 0, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1)$$

Una base per l'autospazio relativo a $\lambda_0 = 0$ e' $B_{v_0} = \{(-1, 0, 1)\}$, ragion per cui v_0 e' un autovettore relativo a $\lambda_0 = 0$.
Lo stesso processo deve essere applicato per $\lambda_1 = 2$
Determiniamo quindi una base per lo spazio delle soluzioni:

$$(A - 2Id_3)x = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 2$ e' $m_g(2) = 2$, dunque il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Poniamo $y = \alpha, z = \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e calcoliamo le soluzioni del sistema ricavando il valore dell'incognita x in funzione di α e β.

$$x - 2y - z = 0 \Rightarrow x = 2y + z \Rightarrow x = 2\alpha + \beta$$

Le soluzione del sistema sono

$$(x, y, z) = (2\alpha + \beta, \alpha, \beta) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(1, 0, 1)$$

Una base dell'autospazio B_{V_2} relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ e'

$$B_{V_2} = \{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

e quindi $v_1 = (2, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ autovettori.
La matrice diagonalizzante P, e quindi la nostra soluzione, sara' uguale a

$$P = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora non resta che calcolare

$$D = P^{-1}AP$$