Università degli Studi di Verona

Fondamenti di Analisi e Verifica del Software

Dispensa del Corso

Mattia Zorzan
Davide Bianchi
Marco Colognese
Mattia Rossini

1 febbraio 2022

Indice

1 Introduzione

Diamo la definizione di semantica:

Semantica. Una descrizione (tipicamente formale) del comportamento a *tempo di esecuzione* di un programma.

Da questo definiamo **proprietà semantica** qualsiasi proprietà che riguardi il comportamento a tempo di esecuzione di un dato programma.
L'idea alla base di tutto è quella di *automatizzare* l'analisi di queste proprietà, per fare questo sarà necessario *rilassare* l'analisi ammettendo la possibilità di ottenere risultati **inaccurati**.

2 Linguaggio e semantica

Introduciamo in questa sezione il linguaggio che verrà usato nel resto della dispensa e la sua semantica.

Statement	**Codice**
Variabili	x
Espressioni aritmetiche	e
Assegnamenti	$x \leftarrow e$
Condizionali	if (e) S_1 else S_2

2.1 Control Flow Graph (CFG)

E costituito da:

- **nodi**: corrispondono ai *program points*;
- **archi**: passi di computazione etichettati con la corrispondente azione; sono della forma $K = (u, lab, v)$, dove u è il nodo sorgente, v è il nodo di destinazione e lab è l'etichetta.

Statement	**Label**
Test	$NonZero(e)$ or $Zero(e)$
Assegnamenti	$x \leftarrow e$
Input	$input(x)$
Statement vuoto	;

Ognuno di questi statement produce un *effetto*:

- $[\![;]\!](m) = m$
- $[\![NonZero(e)]\!](m) = m$ **if** $[\![e]\!](m) =$ **true**
- $[\![Zero(e)]\!](m) = m$ **if** $[\![e]\!](m) =$ **false**

- $[\![x \leftarrow e]\!](m) = m[x \mapsto [\![e]\!](m)]$
- $[\![input(x)]\!](m) = m[x \mapsto m(x)]$

Basic Block. *Sequenza massima di statements consecutivi con un singolo entry point, un singolo exit point e nessun branch interno.*

I *basic block* si identificano facilmente poiché iniziano con un *leader* che può essere dei seguenti tipi:

- l'*entry point* del programma (il primo statement);
- ogni statement che è target di branch (condizionali o non condizionali) che contengono dei *GoTo*
- ogni statement che segue un branch (condizionale o non condizionale) o un *return*.

Dopo aver diviso il codice in *basic block* (individuati tramite i *leader* di ciascun blocco), essi verranno collegati dagli archi, in corrispondenza di:

- *GoTo* non condizionali;
- branch condizionali / archi multipli;
- flusso di programma (il controllo passa ad un altro blocco se non ci sono branch alla fine).

Se non c'è un unico *entry-node* n_0 ed un unico *exit-node* n_f, si aggiungono *dummy nodes* e gli archi necessari (nessun arco entrante in n_0 e nessun arco uscende da n_f).

3 Approssimare

Ma cos'è una *proprietà*? Formalmente

Proprietà. L'insieme delle proprietà $\mathcal{P}(\Sigma)$ di oggetti in Σ è l'insieme di elementi che gode di quella proprietà. Questo insieme di proprietà costituisce un reticolo completo

$$\langle \mathcal{P}(\Sigma), \subseteq, \emptyset, \cup, \cap, \neg \rangle$$

dove:

- $\subseteq$ è l'implicazione logica;
- Σ è `true`;
- $\cup$ è la disgiunzione (oggetti che godono di P o di Q appartengono a $P \cup Q$);
- $\cap$ è la congiunzione (oggetti che godono di P e di Q appartengono a $P \cap Q$);

- $\neg$ è la negazione (oggetti che non godono di P stanno in $\Sigma \setminus P$).

Lo scopo è quello di trovare un'approssimazione di una semantica $\langle P \rangle$ di $[\![P]\!]$ tale per cui valgano:

- *correttezza:* $[\![P]\!] \subseteq \langle P \rangle$;
- *decidibilità:* $\langle P \rangle \subseteq Q$ è decidibile (Q è un insieme di semantiche che soddisfa la proprietà di interesse).

Se entrambe le proprietà sono soddisfatte, allora vale che

$$(\langle P \rangle \subseteq Q) \Rightarrow ([\![P]\!] \subseteq Q)$$

La semantica è data da una coppia $\langle D, f \rangle$ dove D è una coppia $\langle D, \leq_D \rangle$ rappresentante un dominio semantico e $f : D \to D$ è una funzione di trasferimento con una soluzione a punto fisso.
Dato un oggetto concreto, definiamo:

- un **oggetto astratto** come una rappresentazione matematica sovrapprossimata del corrispondente concreto;
- un **dominio astratto** come un insieme di oggetti astratti con delle operazioni astratte, che approssimano quelle concrete;
- una funzione di **astrazione** α che mappa oggetti concreti in oggetti astratti;
- una funzione di **concretizzazione** γ che mappa oggetti astratti in oggetti concreti.

La caratteristica peculiare delle astrazioni è che solo alcune proprietà vengono osservate con esattezza, le altre vengono solo approssimate. In sostanza, dato un dominio astratto A, gli elementi di A sono osservati con esattezza, gli altri sono approssimati o l'informazione è persa del tutto.

Direzione dell'astrazione. Quando si approssima una proprietà concreta $P \in \mathcal{P}(\Sigma)$ usando una proprietà astratta $\overline{P}$, deve essere stabilito un criterio per definire quando $\overline{P}$ è un'approssimazione di P.

Si distinguono quindi i seguenti casi:

- approssimazione *da sopra*: $P \subseteq \overline{P}$;
- approssimazione *da sotto*: $P \supseteq \overline{P}$.

Dato un oggetto o, si vuole quindi sapere se $o \in P$:

$$P \supseteq \overline{P} : \begin{cases} \text{"Si"} & o \in \overline{P} \\ \text{"Non lo so"} & o \notin \overline{P} \end{cases} \qquad P \subseteq \overline{P} : \begin{cases} \text{"No"} & o \notin \overline{P} \\ \text{"Non lo so"} & o \in \overline{P} \end{cases}$$

Migliore approssimazione. Definiamo come *migliore approssimazione* di una proprietà P in A il glb delle over-approximation di P in A, ossia:

$$\overline{P} = \bigcap\{\overline{P'} \in A \mid P \subseteq \overline{P'}\} \in A$$

3.1 Collecting Semantics

È l'insieme dei comportamenti osservabili nella semantica operazionale. La *Collecting Semantics* è il punto di partenza per ogni tipo di analisi (non ne esiste una universale).
Definiamo un **sitema di transizioni** come una coppia $\langle \Sigma, \tau \rangle$, dove:

- Σ è un insieme non vuoto di stati
- $\tau \subseteq \Sigma \times \Sigma$ è la funzione di trasferimento tra gli stati in Σ

La ***trace semantics*** di un programma accumula informazioni temporali riguardo l'esecuzione: una traccia tiene conto dell'ordine in cui i *program states* sono raggiunti durante l'esecuzione. Le tracce analizzate possono essere dei seguenti tipi:

- L'insieme di tutti i discendenti dello stato iniziale.
- L'insieme di tutti i discendenti dello stato iniziale che può raggiungere uno stato finale.
- Lo stato di tutte le tracce finite dallo stato iniziale.
- L'insieme di tutte le tracce infinite e finite dallo stato iniziale ecc.

Però non sempre siamo interessati alle informazioni temporali ma solamente agli invarianti presenti ad ogni *program point*. Questi invarianti possono essere astratti dalle informazioni temporali attraverso la ***collecting semantics***.
Più formalmente, un invariante del programma P al punto di programma l è una qualsiasi proprietà $I \in P$ (store) che è presente ogni talvolta che l viene raggiunto.
La *collecting semantics* di P è semplicemente l'associazione tra i vari *program point* e le corrispondenti invarianti ben precise.
Lo stato di input non è noto al momento della compilazione, quindi vengono collezionati tutti gli stati raggiungibili da tutti i possibili ingressi del programma. Si tratta di una collezione di stati che possono apparire su alcune tracce nei diversi program point. Trattandosi di un'astrazione, non è più possibile risalire alle tracce di esecuzione del programma conoscendo solamente i vari *program states*.

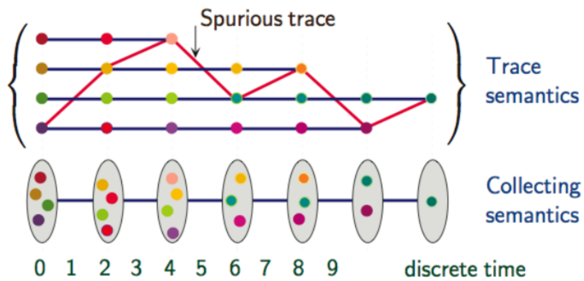


Figura 1: Esiste la traccia rossa? *Trace semantics*: NO; *collecting semantics*: NON LO SO.

4 Analisi Statica

4.1 Introduzione

L'obiettivo dell'analisi statica è quello di dire, osservando le proprietà semantica di un programma, se una certa proprietà vale o meno. Esistono diverse tipologie di analisi statica:

- Control flow Analysis;
- Data flow Analysis (distributive e non-distributive);

4.2 Analisi sul CFG

Viene generato un CFG per ogni procedura. Le analisi che vengono eseguite sono localizzate a 3 livelli:

1. **Locali al blocco**: sono eseguite all'interno di uno stesso *basic block*;
2. **Intra-procedurali**: considerano il flusso di informazioni nel singolo CFG;
3. **Inter-procedurali**: considerano il flusso di informazioni tra le procedure (con archi che rappresentano le chiamate di funzione).

L'analisi di *data-flow* dice come l'informazione viene manipolata in un blocco. L'informazione è caratterizzata dalla soluzione dell'equazione di punto fisso definita per ogni blocco.
In alcuni casi questa equazione è ottenuta in 3 passaggi:

- definendo l'informazione entrante in un blocco, che è l'unione dell'informazione di uscita del blocco precedente;
- definendo l'informazione in uscita dal blocco che è l'informazione in ingresso, modificata dalle operazioni eseguite nel blocco;
- queste definizioni vengono poi combinate nell'equazione del punto fisso.

Le analisi di *data-flow* seguono il seguente schema:

- Forward

$$FAin(n) = \begin{cases} \iota & n = n_0 \\ \bigoplus_{m \in Pred(n)} FAout(m) & \end{cases} \qquad \begin{array}{c} FAout(m) = \tau(FAin(m)) \\ \tau(FAin(m) = gen(m) \cup (FAout(m) \setminus kill(m) \end{array}$$

- Backward

$$BAout(n) = \begin{cases} \iota & n = n_f \\ \bigoplus_{m \in Succ(n)} BAin(m) & \end{cases} \qquad \begin{array}{c} BAin(m) = \tau(BAout(m)) \\ \tau(BAout(m) = gen(m) \cup (BAin(m) \setminus kill(m) \end{array}$$

- Possible analyses —> $\bigoplus = \bigcup$
- Definite analyses —> $\bigoplus = \bigcap$

4.3 Soluzioni MFP - MOP - IDEAL

Per le equazioni di *data-flow analysis* esistono 3 tipi di soluzioni:

- ***MFP*** *(maximum fixed point)*: è la soluzione che combina i valori dell'analisi quando il CFG ha dei nodi in cui convergono due o più percorsi; questa soluzione approssima la *MOP*.
- ***MOP*** *(merge over all paths)*: è la soluzione più precisa rispetto alla *MFP* ($MOP \sqsupseteq MFP$) poiché combina i valori dell'analisi di tutti i possibili percorsi del CFG dopo averli attraversati tutti. In generale, questa soluzione non è computabile perché ci posso essere un numero esponenziale (o infinito) di percorsi possibili:
  - loop con guardia sempre vera;
  - un programma che contiene N *if* statement avrà 2^N percorsi di esecuzione;
- ***IDEAL***: è la soluzione migliore ma non è computabile. A differenza della *MOP*, prende in considerazione solamente i percorsi che verrano attraversati sicuramente da almeno qualche esecuzione. Calcola il valore alla fine di ogni possibile percorso di esecuzione e calcola poi il *meet* di questi valori.
  - ogni soluzione più grande di *IDEAL* è scorretta;
  - ogni soluzione più piccola di *IDEAL* è conservativa (*safe*);

Se la funzione di trasferimento di ogni arco è ***distributiva*** ($f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$) (e ogni program point è raggiungibile dall'entry point), allora la soluzione delle equazioni di *data-flow* è la stessa per *MOP* e *MFP* ($MOP = MFP$). Dunque per le funzioni di trasferimento distributive, è possibile calcolare la soluzione *MOP* attraverso l'algoritmo iterativo del punto fisso.
I **problemi *distributivi*** sono i cosiddetti problemi "*semplici*", come ad esempio: ***live variables***, ***available expressions***, ***reaching definitions*** e ***very busy expressions*** (tutte proprietà che ci dicono *COME* un programma viene eseguito).
I **problemi *non-distributivi*** sono quelli che ci dicono *COSA* calcola un programma (ad esempio che l'output è costante, valori positivi, intervalli etc.). Un esempio di problema non distributivo è la ***constant propagation analysis***.

4.4 Data Flow Analysis

Insieme di tecniche che raccolgono informazione su come i dati fluiscono durante l'esecuzione.

4.4.1 Available Expressions

L'espressione e è *available* se è valutata e assegnata ad una variabile prima di v (uso della variabile). Tra la valutazione e v non vengono ridefinite le variabili dell'espressione e x ($x{:=}e$).

Proprietà: Forward & Definite

Punto fisso:

$$AvailIn(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = n_0 \\ \bigcap_{m \in pred(n)} AvailOut(m) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} AvailOut(n) &= Gen(n) \cup (AvailIn(n) \backslash Kill(n)) \\ AvailIn(n) &= \bigcap_{m \in pred(n)} Gen(m) \cup (AvailIn(m) \backslash Kill(m)) \end{aligned}$$

Semantica: Dominio astratto = Ass = {assegnamenti $x \leftarrow e \mid x \notin Var(e)$}
$A \subseteq Ass$

$$\begin{aligned} [\![;]\!]^\sharp A &= A \\ [\![NonZero(e)]\!]^\sharp A &= [\![Zero(e)]\!]^\sharp A = A \\ [\![x \leftarrow e]\!]^\sharp A &= \begin{cases} (A \backslash Occ(x)) \cup \{x \leftarrow e\} & \text{se } x \notin Var(e) \\ A \backslash Occ(x) & \text{altrimenti} \end{cases} \\ [\![x \leftarrow M[e]]\!]^\sharp A &= A \backslash Occ(x) \\ [\![M[e_1] \leftarrow e_2]\!]^\sharp A &= A \end{aligned}$$

$Occ(x)$ = {Assegnamenti che coinvolgono x a destra o a sinistra}
$Gen(n)$ = {espressioni valutate nel blocco ne nessun operando di e è definito nuovamente tra l'ultima valutazione di e in ne la fine di n}
$Kill(n)$ = {espressioni uccise da una nuova definizione di n}

4.4.2 Liveness

x è *live* all'uscita del blocco b se verrà usata successivamente. x non è *live* (o *dead*) se viene ridefinita prima di un successivo uso.
x è *live* in un cammino π ($v \to exit$) se:

- π non contiene *Def(x)*
- esiste almeno un uso di x in π che segue la *Def(x)*;

x è *live* se si trova tra una definizione ed un uso.
Dice se a e b possono essere memorizzate nella stessa locazione, cioè se a e b non sono mai *live* insieme, allora posso sostituire a con b.

- $x \in Use(n) \Rightarrow$ x *LiveIn* in n
- x è *LiveOut* in n e $x \notin$ *VarKill(n)* $\Rightarrow$ x *LiveIn* in n;
- x è *LiveIn* in almeno un *Succ(n)* $\Rightarrow$ x *LiveOut(n)*;

Falsi positivi:

- x è accessibile attraverso altri nomi $\Rightarrow$ Liveness fallisce;
- analizzi anche cammini non possibili;
- inizializzazione in altre procedure (perché questa analisi è intra-procedurale);

Proprietà: Backward & Possible

Punto fisso:

$$\begin{aligned}
LiveOut(n) &= \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = exit \\ \bigcup_{m \in Succ(n)} LiveIn(m) & \text{altrimenti} \end{cases} \\
LiveIn(n) &= Use(n) \cup (LiveOut(n) \backslash VarKill(n)) \\
LiveOut(n) &= \bigcup_{m \in Succ(n)} Use(m) \cup (LiveOut(m) \backslash VarKill(m))
\end{aligned}$$

Semantica:
Dominio astratto = $\mathcal{P}(Var)$
$L \subseteq Var$

$$\begin{aligned}
[\![;]\!]^\sharp L &= L \\
[\![NonZero(e)]\!]^\sharp L = [\![Zero(e)]\!]^\sharp L &= L \cup Var(e) \\
[\![x \leftarrow e]\!]^\sharp L &= Var(e) \cup (L \backslash \{x\}) \\
[\![x \leftarrow M[e]]\!]^\sharp L &= Var(e) \cup (L \backslash \{x\}) \\
[\![M[e_1] \leftarrow e_2]\!]^\sharp L &= L \cup Var(e_1) \cup Var(e_2)
\end{aligned}$$

$LiveIn(n) = \{$sono le variabili *live* in n, *live* su almeno un arco entrante$\}$
$LiveOut(n) = \{$sono le variabili *live* in n che sono *live* su almeno un arco uscente$\}$
$VarKill(n) = Def(n)$, cioè le definizioni presenti in n

True Liveness: un *true use* è un uso in un assegnamento ad una variabile *live*.
Se assegno x ad una variabile *non-live*, allora anche x non è *live*.

4.4.3 Very Busy Expressions

Un assegnamento è *busy* su un cammino π se $\pi = \pi_1\ k\ \pi_2$ con:

- k è un assegnamento $x \leftarrow e$;

- π_1 non contiene usi di x;
- π_2 non contiene modifiche di $\{x\} \cup Var(e)$.

Un assegnamento è *very busy* se è *busy* su ogni percorso da v a *exit*.
Dice come e quali espressioni anticipare.
Un assegnamento è ucciso in un blocco n se una delle sue variabili è modificata o se e viene usata.
Un assegnamento è generato in un blocco n se si trova nel blocco e l'espressione non contiene la variabile che si sta assegnando.
Proprietà: Backward & Definite

Punto fisso:

$$VB_{exit}(p) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } p = v_{exit} \\ \bigcap_{q \in succ(p)} VB_{entry}(q) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} VB_{entry}(p) &= Gen(p) \cup (VB_{exit}(p) \backslash Kill(p)) \\ VB_{exit}(p) &= \bigcap_{q \in succ(p)} Gen(q) \cup (VB_{exit}(q) \backslash Kill(q)) \end{aligned}$$

Semantica:
$B = 2^{Ass} = \mathcal{P}(Ass)$

$$\begin{aligned} [\![;]\!]^\sharp B &= B \\ [\![NonZero(e)]\!]^\sharp B &= [\![Zero(e)]\!]^\sharp B = B \backslash Ass(e) \\ [\![x \leftarrow e]\!]^\sharp B &= \begin{cases} B \backslash (Occ(x) \cup Ass(e)) \cup \{x \leftarrow e\} & \text{se } x \notin Var(e) \\ B \backslash (Occ(x) \cup Ass(e)) & \text{altrimenti} \end{cases} \\ [\![x \leftarrow M[e]]\!]^\sharp B &= B \backslash (Occ(x) \cup Ass(e)) \\ [\![M[e_1] \leftarrow e_2]\!]^\sharp B &= B \backslash (Ass(e_1) \cup Ass(e_2)) \end{aligned}$$

$Use(n) = \{\text{occorrenza di una variabile sul lato destro di uno statement}\}$

Copy Propagation

L'analisi ad ogni program point tiene traccia delle copie di x.
Se ho un assegnamento $T \leftarrow x + 1$ e poi $y \leftarrow T$, allora quest'ultimo è inutile.

Proprietà: Forward & Definite

Punto fisso:

$$Copie_{entry}(n) = \bigcap_{m \in Pred(n)} Copie_{exit}(m)$$
$$Copie_{exit}(n) = \bigcap_{m \in Pred(n)} Gen(m) \cup (Copie_{exit}(m) \backslash Kill(m))$$

Semantica: Dominio astratto $= \mathcal{V}_x = \{V \subseteq Var \mid x \in V\}$ perché x è copia di se stesso.

$V \subseteq Var$

Entry $V_0 = \{x\}$ perché x è copia di se stesso e cerco le altre sue copie.

$$[\![;]\!]^\sharp V = V$$
$$[\![NonZero(e)]\!]^\sharp V = [\![Zero(e)]\!]^\sharp V = V$$
$$[\![x \leftarrow e]\!]^\sharp V = [\![x \leftarrow M[e]]\!]^\sharp V = \{x\}$$
$$[\![z \leftarrow y]\!]^\sharp V = \begin{cases} V \cup \{z\} & \text{se } y \in V \text{(y è copia di x)} \\ V \backslash \{z\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$[\![y \leftarrow e]\!]^\sharp V = V \backslash \{y\}$$
$$[\![M[e_1] \leftarrow e_2]\!]^\sharp V = V$$

$Gen(n) = \{(x == y) \mid n \text{ contiene } x \leftarrow y\}$
$Kill(n) = \{(x == y) \mid x \text{ è ridefinita in } n\}$

4.4.4 Reaching Definition

Dato un program point p vogliamo identificare le definizioni di variabili che raggiungono p.
Viene usata in *code motion*: se uso un assegnamento in tutto il ciclo senza modificarlo, allora lo sposto all'entrata del ciclo.

Proprietà: Forward & Possible

Punto fisso (non c'è la semantica):

$$RD_{entry}(n) = \begin{cases} i = \{(x, ?) \mid x \in Var\} & \text{se } n = entry \\ \bigcup_{m \in Pred(n)} RD_{exit}(m) & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$RD_{exit}(n) = Gen(n) \cup (RD_{entry}(n) \backslash Kill(n))$$

$\{(x, p) \mid x \in Vars, p \text{ punto di programma}\}$

Inizializzazione: $i = \{(x, ?) \mid x \in Vars$, variabile non inizializzata) $\}$
$Gen(n) = \{$definizioni (x, l) dentro n e disponibili alla fine di n $\}$
$Kill(n) = \{(x, p) \mid x \text{ è ridefinita in } n\}$

4.4.5 Riepilogo

	Possible ($\bigcup$)	**Definite** ($\bigcap$)
Forward	Reaching Definition	Available Expr, Copy Propagation
Backward	Liveness	Very Busy Expr

Available Expressions:

$$AvailIn(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = n_0 \\ \bigcap_{m \in pred(n)} AvailOut(m) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$AvailOut(n) = Gen(n) \cup (AvailIn(n) \backslash Kill(n))$$

Very Busy:

$$VB_{exit}(p) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } p = v_{exit} \\ \bigcap_{q \in succ(p)} VB_{entry}(q) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$VB_{entry}(p) = Gen(p) \cup (VB_{exit}(p) \backslash Kill(p))$$

Liveness:

$$LiveOut(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = exit \\ \bigcup_{m \in Succ(n)} LiveIn(m) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$LiveIn(n) = Use(n) \cup (LiveOut(n) \backslash VarKill(n))$$

Reaching Definition:

$$RD_{entry}(n) = \begin{cases} i = \{(x, ?) \mid x \in Var\} & \text{se } n = entry \\ \bigcup_{m \in Pred(n)} RD_{exit}(m) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$RD_{exit}(n) = Gen(n) \cup (RD_{entry}(n) \backslash Kill(n))$$

5 Interpretazione astratta

5.1 Connessione di Galois

Imponiamo il vincolo che α e γ siano monotone, allora concludiamo che:

- $\gamma \circ \alpha : C \to C$ è **estensiva**: $\gamma(\alpha(c)) \geq c$;
- $\alpha \circ \gamma : A \to A$ è **riduttiva**: $\alpha(\gamma(a)) \leq a$.

Le definizioni qui sopra dicono rispettivamente che:

- α perde informazione, e γ non la può recuperare;
- γ non perde informazione.

Definizione 5.1.1 (Connessione di Galois)**.** *Dati due poset $\langle A, \leq_A \rangle$ e $\langle C, \leq_C \rangle$, e due funzioni monotone $\alpha : C \to A$ e $\gamma : A \to C$, diciamo che $\langle C, \alpha, \gamma, A \rangle$ è una connessione di Galois se:*

- $\forall c \in \mathcal{C} : c \leq_C \gamma(\alpha(c))$
- $\forall a \in \mathcal{A} : \alpha(\gamma(a)) \leq_A a$

Se inoltre vale che $\forall a \in \mathcal{A} : \alpha(\gamma(a)) = a$, allora $\langle C, \alpha, \gamma, A \rangle$ è un'inserzione di Galois.

Una connessione e un'inserzione di Galois sono rappresentate rispettivamente come

$$C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A \qquad C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}}\!\!\!\twoheadrightarrow A$$

La funzione α è detta *aggiunta sinistra*, mentre la funzione γ è detta *aggiunta destra.*

Teorema 5.1.1. *Data una connessione di Galois $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$, sono equivalenti:*

- $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}}\!\!\!\twoheadrightarrow A$*;*
- α *è suriettiva;*
- γ *è iniettiva.*

Inoltre, dati due domini astratti, non esistono due coppie (α, γ) che formino una connessione di Galois; quindi la connessione di Galois tra due domini è **unica**, e le funzioni sono identificabili attraverso:

$$\alpha(c) = \bigwedge \{a \in A | c \leq_C \gamma(a)\}$$
$$\gamma(a) = \bigvee \{c \in C | \alpha(c) \leq_A a\}$$

5.2 Famiglie di Moore

Definizione 5.2.1 (Famiglia di Moore)**.** *Sia L un reticolo completo. $X \subseteq L$ è una famiglia di Moore di L se*

$$X = \mathcal{M}(X) = \left\{ \bigwedge S \mid S \subseteq X \right\}$$

dove

$$\bigwedge \emptyset = \top \in \mathcal{M}(X)$$

Da questa definizione segue che, ipotizzando che ogni proprietà concreta abbia una migliore astrazione $\overline{P} \in A$, implica che il dominio A è una famiglia di Moore.

5.3 Upper closure operator

Definizione 5.3.1 (Upper closure operator)**.** *Una funzione $f : P \to P$ su un poset $\langle P, \leq_P \rangle$ è un upper closure operator (uco) se soddisfa le seguenti proprietà:*

- *estensività:* $\forall x \in P : x \leq_P \rho(x)$
- *monotonia:* $\forall x, y \in P : (x \leq_P y) \Rightarrow (\rho(x) \leq_P \rho(y)$
- *idempotenza:* $\forall x \in P : \rho(x) = \rho(\rho(x))$

I lower closure operator sono definiti in modo duale, specificando che ρ deve essere *riduttiva*, ovvero che $\forall x \in P : x \geq_P \rho(x)$.

Teorema 5.3.1. *Data una connessione di Galois $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$ si ha che $\gamma \circ \alpha$ è un uco e $\alpha \circ \gamma$ è un lco.*

Teorema 5.3.2. *$C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$ se e solo se A è isomorfo [1] ad una Moore family di C.*

Teorema 5.3.3. *Sia $\rho \in uco(c)$. Allora $\forall A \simeq \rho(C)$ si ha che $\exists \alpha, \gamma : C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$*

5.4 Reticolo delle interpretazioni astratte

I vari domini astratti possono essere comparati sulla base della loro precisione. In generale si può dire che un dominio astratto A_1 è più preciso di A_2 (indicato attraverso $A_1 \sqsubseteq A_2$) quando

$$\forall a_2 \in A_2, \exists a_1 \in A_1 \quad \text{tali che} \quad \gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$$

ovvero quando

$$\gamma(A_2) \subseteq \gamma(A_1)$$

Collegando agli uco, possiamo dire che

$$A_1 \sqsubseteq A_2 \Leftrightarrow \rho_1 \sqsubseteq \rho_2 \Leftrightarrow \rho_2(C) \subseteq \rho_1(C)$$

[1] Con isomorfismo si intendono reticoli con la stessa struttura.

Definizione 5.4.1 (Reticolo delle int. astratte)**.** *Se C è un reticolo completo o un cpo, allora*

$$\langle uco(C), \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \lambda x.\top, \lambda x.x \rangle$$

è un reticolo completo dove $\forall \rho, \eta \in uco(C), \{\rho_i\}_{i \in I} \subseteq uco(C)$ e $x \in C$:

- $\rho \sqsubseteq \eta \Leftrightarrow \forall y \in C.\rho(y) \leq \eta(y) \Leftrightarrow \eta(C) \subseteq \rho(C)$
- $\Big(\prod_{i \in I} \rho_i\Big)(x) = \bigwedge_{i \in I} \rho_i(x)$
- $\Big(\bigsqcup_{i \in I} \rho_i\Big)(x) = x \Leftrightarrow \forall i \in I.\rho_i(x) = x$
- *$\lambda x.\top, \lambda x.x$ sono rispettivamente top e bottom.*

5.5 Computazioni astratte e concrete

Definizione 5.5.1 (Correttezza)**.** *Data un'inserzione di Galois $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$, una funzione concreta $f : C \to C$ e una funzione astratta $f^\sharp : A \to A$ diciamo che $f^\sharp$ è un'approssimazione corretta di f se*

$$\forall c \in C : \alpha(f(c)) \leq_A f^\sharp(\alpha(c)) \quad \textit{backward}$$

o equivalentemente

$$\forall a \in A : f(\gamma(a)) \leq_C \gamma(f^\sharp(a) \quad \textit{forward}$$

Rinforzando la definizione e imponendo uguaglianza si perde l'equivalenza delle due espressioni sopra.

Definizione 5.5.2 (Completezza)**.** *Data un'inserzione di Galois $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$, una funzione concreta $f : C \to C$ e una funzione astratta $f^\sharp : A \to A$ diciamo che $f^\sharp$ è:*

- *backward-completa per f se $\forall c \in C : \alpha(f(c)) = f^\sharp(\alpha(c))$*
- *forward-completa per f se $\forall a \in A : f(\gamma(a)) = \gamma(f^\sharp(a)$*

La definizione rappresenta una situazione ideale in cui non si ha perdita di precisione durante il calcolo astratto. Inoltre la backward-completezza lavora sull'astrazione dell'input delle operazioni, la forward-completezza sull'output.

Le definizioni di completezza possono essere date anche usando gli uco:

- $\rho \in uco(C)$ è backward-completo per f se $\rho \circ f = \rho \circ f \circ \rho$
- $\rho \in uco(C)$ è forward-completo per f se $f \circ \rho = \rho \circ f \circ \rho$

Inoltre quando ρ è sia backward che forward-completo allora vale che $\rho \circ f = f \circ \rho$.

Teorema 5.5.1. *Data* $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$*, una funzione concreta* $f : C \to C$ *e una funzione astratta* $f^\sharp : A \to A$ *allora*

$$\forall c \in C : \alpha(f(c)) \leq_A f^\sharp(\alpha(c)) \Leftrightarrow \alpha \circ f \circ \gamma \sqsubseteq f^\sharp$$

Definizione 5.5.3 (Best correct approximation)**.** *Data* $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$ *e una funzione concreta* $f : C \to C$ *allora* $\alpha \circ f \circ \gamma : A \to A$ *è la best correct approximation di* f *in* A*.*

5.6 Correttezza

Consideriamo $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$, una funzione concreta $f : C \to C$ e una funzione astratta $f^\sharp : A \to A$. Possiamo dire che $f^\sharp$ è un'approssimazione corretta di f in A se:

$$\forall c \in C : \alpha(f(c)) \leq_A f^\sharp(\alpha(c))$$

oppure, equivalentemente:

$$\forall a \in A : f(\gamma(a)) \leq_C \gamma(f^\sharp(a))$$

Nel processo di astrazione è ammessa una perdita di informazioni, ciò non è possibile nel processo di concretizzazione, dunque possiamo dire che se $c \in C$. Possiamo dire che $\alpha(c)$ è l'elemento astratto più preciso che rappresenta c.

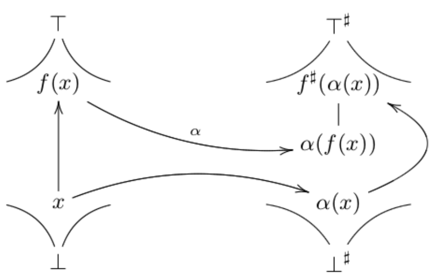


Figura 2: Condizione di correttezza: $\alpha(f(c)) \leq_A f^\sharp(\alpha(c))$

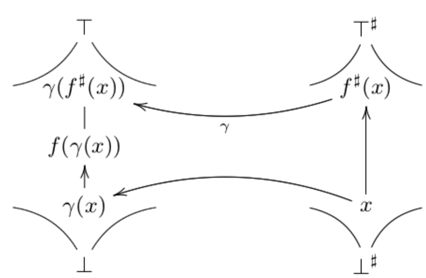


Figura 3: Condizione di correttezza: $f(\gamma(a)) \leq_C \gamma(f^\sharp(a))$

5.7 Completezza

Consideriamo $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$, una funzione concreta $f : C \to C$ e una funzione astratta $f^\sharp : A \to A$. Possiamo dire che:

- $f^\sharp$ è backward-complete per f se: $\forall c \in C : \alpha(f(c)) = f^\sharp(\alpha(c))$;
- $f^\sharp$ è forward-complete per f se: $\forall a \in A : f(\gamma(a)) = \gamma(f^\sharp(a))$.

I due tipi di completezza rappresentano una situazione in cui non si verifica nessuna perdita di precisione durante l'astrazione. In particolare:

- La **B**-completezza considera l'astrazione sull'output delle operazioni e non si accumula nessuna perdita di precisione astraendo in p gli argomenti di f;
- La **F**-completezza considera l'astrazione sull'input delle operazioni e non si accumula nessuna perdita di precisione approssimando il risultato della funzione f calcolata in p.

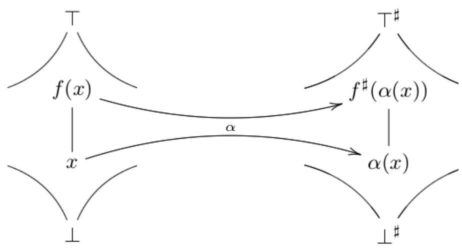


Figura 4: Condizione di ***B**-completezza*

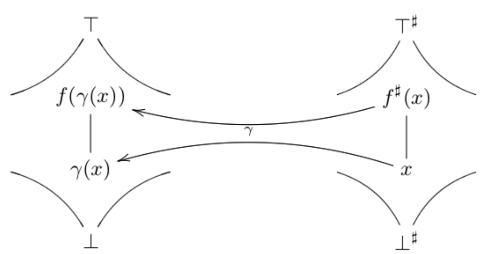


Figura 5: Condizione di ***F**-completezza*

5.8 Accelerazione della convergenza

5.8.1 Widening

Un widening

$$\nabla : P \times P \to P$$

su un poset $\langle P, \leq_P \rangle$ è una funzione che soddisfa:

- $\forall x, y \in P : x \sqsubseteq (x \nabla y) \wedge y \sqsubseteq (x \nabla y)$
- per ogni catena ascendente $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq ... \sqsubseteq x_n$ la catena definita come $y_0 = x_0, ..., y_{n+1} = y_n \nabla x_{n+1}$ non è strettamente crescente.

Dato che in interpretazione astratta è necessario garantire/accelerare la convergenza, viene usato il widening (che si sostituisce al least upper bound), dal momento che anche il calcolo astratto può divergere. Il risultato di un widening è un post-puntofisso di F^{∇}, ovvero una sovra-approssimazione del punto fisso più piccolo di f $lfp^{\sqsubseteq}F$.

Ad esempio, il widening su intervalli funziona come segue:

$$[a, b] \ \nabla \ [c, d] = [e, f] \qquad \text{tale che}$$

$$e = \begin{cases} -\infty & \text{se } c < a \\ a & \text{altrimenti} \end{cases} \text{ e } f = \begin{cases} +\infty & \text{se } b < d \\ b & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5.8.2 Narrowing

Dato che il widening raggiunge un post-fixpoint, piuò capitare che si abbiano eccessive perdite di informazione, in questo caso viene usato il narrowing.

Definizione 5.8.1. *Il narrowing è una funzione $\triangle : P \times P \to P$ tale che:*

- $\forall x, y \in \mathcal{P} : y \leq x \implies y \leq x \triangle y \leq x$
- *Per ogni catena discendente $x_0 \geq x_1 \geq ...$, la catena discendente $y_0 = x_0, ..., y_{i+1} = y_i \triangle x_{i+1}$ non è strettamente decrescente.*

Per gli intervalli il narrowing funziona come segue:

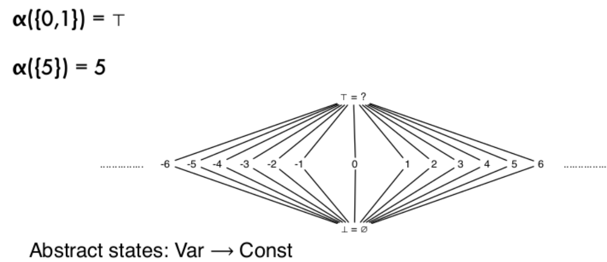
$$[a, b] \triangle [c, d] = [e, f] \qquad \text{tale che}$$

$$e = \begin{cases} c & \text{se } a = -\infty \\ a & \text{altrimenti} \end{cases} \text{ e } f = \begin{cases} d & \text{se } b = +\infty \\ b & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5.9 Problemi Non-Distributivi

5.9.1 Costanti

Ogni singoletto non è confrontabile con gli altri. Se una costante assume due valori va in $\top$. È un reticolo completo poiché contiene $\emptyset$ ed è ACC perché è finito in altezza.



Dominio concreto: $\mathbb{V} \to \mathbb{Z}$
Dominio astratto: $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

Semantica astratta delle espressioni:

$$op = operatore$$

$$a\ op\ b = \begin{cases} a\ op\ b & \text{se a e b sono costanti} \\ \top & \text{se } a = \top \lor\ \ b = \top \end{cases}$$

$$[\![c]\!]^\sharp D = c$$

$$[\![op\ e]\!]^\sharp D = op^\sharp [\![e]\!]^\sharp D$$

$$[\![e_1\ op\ e_2]\!]^\sharp D = [\![e_1]\!]^\sharp D\ op^\sharp\ [\![e_2]\!]^\sharp D$$

$$[\![x]\!]^\sharp D = D(x)$$

Semantica astratta dei comandi:
D = memoria

$$[\![;]\!]^\sharp D = D$$

$$[\![NonZero(e)]\!]^\sharp D = \begin{cases} \bot & \text{se } [\![e]\!]^\sharp D = 0 \\ D & \text{se } [\![e]\!]^\sharp D \neq 0 \end{cases}$$

$$[\![Zero(e)]\!]^\sharp D = \begin{cases} D & \text{se } 0 \subseteq [\![e]\!]^\sharp D \\ \bot & \text{se } 0 \not\subseteq [\![e]\!]^\sharp D \end{cases}$$

$$[\![x \leftarrow e]\!]^\sharp D = D[x \mapsto [\![e]\!]^\sharp D]$$

$$[\![x \leftarrow M[e]]\!]^\sharp D = D[x \mapsto \top] \qquad \text{non so cos'è M[e] perché lo valuterò dopo}$$

$$[\![M[e_1] \leftarrow e_2]\!]^\sharp D = D$$

5.9.2 Segni

Dominio rappresentato da un semipiano (un insieme di punti), quindi non va subito a $\top$.

5.9.3 Intervalli

Il dominio degli Intervalli non è ACC, dunque non garantisce la terminazione: per questo viene introdotto il *widening*.

$$[a, b] \text{ dove } a \leq x \leq b \text{ (convessi)}$$
$$\mathbb{I} = \{[l, u] \mid l \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, u \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\},\ l \leq u\}$$

Semantica astratta delle espressioni:

- $[l_1, u_1] +^\sharp [l_2, u_2] = [l_1 + l_2, u_1 + U_2]$
- $-^\sharp[l, u] = [-u, -l]$
- $[l_1, u_1] *^\sharp [l_2, u_2] = [a, b]$ dove:
  - $a = min(l_1 * l_2, l_1 * u_2, l_2 * u_1, l_2 * u_2)$
  - $b = max(l_1 * l_2, l_1 * u_2, l_2 * u_1, l_2 * u_2)$
- $[l_1, u_1] =^\sharp [l_2, u_2] = \begin{cases} [1,1] & \text{se } l_1 = l_2 = u_1 = u_2 (costanti) \\ [0,0] & \text{se } u_1 < l_2 \lor\ u_2 < l_1 \\ [0,1] & \text{altrimenti (intervalli uguali che approssimano valori diversi)} \end{cases}$
- $[l_1, u_1] <^\sharp [l_2, u_2] = \begin{cases} [1,1] & \text{se } u_1 < l_2 \\ [0,0] & \text{se } u_2 \leq l_1 \\ [0,1] & \text{altrimenti} \end{cases}$

Semantica astratta dei comandi:
$D : \mathbb{V} \to \mathbb{I}$

$$[\![;]\!]^\sharp D = D$$
$$[\![NonZero(e)]\!]^\sharp D = \begin{cases} \perp & \text{se } [0,0] = [\![e]\!]^\sharp D \\ D & \text{se } [0,0] \neq [\![e]\!]^\sharp D \quad \text{(contiene anche altri valori)} \end{cases}$$
$$[\![Zero(e)]\!]^\sharp D = \begin{cases} D & \text{se } [0,0] \subseteq [\![e]\!]^\sharp D \quad \text{(lo 0 è uno dei possibili valori)} \\ \perp & \text{se } [0,0] \not\subseteq [\![e]\!]^\sharp D \quad \text{(l'intervallo } e \text{ non contiene 0)} \end{cases}$$
$$[\![x \leftarrow e]\!]^\sharp D = D[x \mapsto [\![e]\!]^\sharp D]$$
$$[\![x \leftarrow M[e]]\!]^\sharp D = D[x \mapsto [-\infty, +\infty] \quad \text{(elemento } \top \text{ degli intervalli)}$$
$$[\![M[e_1] \leftarrow e_2]\!]^\sharp D = D$$

6 Analisi Dinamica

L'analisi dinamica di un programma si basa sulla sua esecuzione e viene utilizzati in vari ambiti: *testing*, *debugging*, *emulation/virtualization*, *profiling/tracing*, *monitoring*, *dynamic slicing*.
Nelle sezioni seguenti ne analizziamo alcuni nel dettaglio.

6.1 Testing

Si tratta principalmente dell'esecuzione di un programma basata su un campione di dati (molto piccolo) passato come input.

L'**obiettivo** è la ricerca di bug/errori/difetti del software, senza correggerli. Questa operazione viene svolta nella fase di testing da professionisti con un'esperienza nella ricerca e identificazione dei bug.

Durante la fase di testing si devono ricercare:

- **mistake**: un'azione umana che ha prodotto un risultato scorretto;
- **fault**: un passaggio scorretto (una definizione di variabile...) all'interno del programma;
- **failure**: la mancata abilità da parte del sistema di svolgere le funzioni richieste;
- **errori**: la differenza tra il valore atteso e il valore effettivamente calcolato/osservato;
- **specifiche**: un documento che specifica, in modo completo e preciso, le richieste e le caratteristiche del sistema e/o dei componenti e spesso delle procedure per verificare quali delle disposizioni sono state soddisfatte.

6.2 Debugging

L'**obiettivo** è l'identificazione, l'isolamento e la risoluzione dei problemi/bug. Questa operazione si può svolgere durante la fase di sviluppo del software oppure in una fase apposita in cui vengono sistemati i bug riportati dopo i test.

6.3 Program Slicing

Si tratta di una tecnica di decomposizione che trasforma un programma originale, cancellandone alcune istruzioni che non hanno alcun effetto sulle *variabili di interesse* nei *punti di interesse*.

Lo *slice* è il programma trasformato secondo il *criterio di slicing* che descrive i parametri di interesse: V (insieme delle variabili di interesse) e n (punti di interesse del programma).

Ci sono diversi motivi per i quali effettuare il *program slicing*: *program debugging*, *testing* (lo slicing riduce i costi del *regresssion testing* dopo una trasformazione del codice), *parallelizzazione*, *compresione di una programma* (effettuare lo slicing aiuta a comprendere come viene eseguito un programma e quali variabili verranno modificate nei vari percorsi) e *mantenimento del software* (per modificare il codice senza *side effects* indesiderati in giro per il programma).

Esistono **diversi tipi di program slicing**:

- ***Static slicing***: l'equivalenza tra programma originale e slice deve, implicitamente, essere valida per ogni possibile input;
- ***Conditioned slicing***: preserva il significato del programma originale per un insieme di input che soddisfa una particolare condizione ϕ;
- ***Dynamic slicing***: considera una particolare computazione, e dunque un particolare input, in modo da preservare il significato del programma unicamente per quell'input.

Esistono, inoltre, **diverse forme di program slicing**:

- ***Korel & Laski*** *(KL)*: è una forma di slicing molto forte in cui il programma e lo slice devono seguire *paths* identici. Il programma e lo slice hanno la stessa semantica operazionale. Il *path* seguito dallo slice deve essere un *subpath* dell'esecuzione originale.
- ***Iteration Count*** *(IC)*: richiede che lo slice e il programma si pareggino solo ad una certa iterazione k di un program point n (cioè quando lo statement al program point n viene eseguito per la k-esima volta), e non per tutte le iterazioni dello stesso program point.
- ***KL-IC***(combinazione dei precedenti): richiede che il programma e lo slice seguano *paths* identici e siano uguali solamente ad una particolare iterazione di un certo program point.