Università degli Studi di Verona

Analisi II

Come risolvere gli esercizi

Mattia Zorzan

April 3, 2019

Contents

1 Parte I

1.1 Problema di Cauchy (Non Lineare)

$$y' = f(x) \cdot g(y(x)) \;\; con \;\; y' = \frac{dy}{dx}$$

Risolvo nella forma

$$\int \frac{1}{g(y(x))}\, dy = \int f(x)\, dx + C$$

Per trovare C, con C $\in \mathbb{R}$, impongo la condizione iniziale.
Questa nella forma: $y(valore\ da\ sostituire\ con\ x) = valore\ da\ sostituire\ con\ y$.
Infine cerco I_{max} imponendo la C.E. della funzione.

1.2 Problema di Cauchy (Lineare)

1.2.1 Primo Ordine

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$$

Risolvo nella forma

$$e^{A(x)} \cdot y'(x) + e^{A(x)} \cdot a(x) \cdot y(x) = e^{A(x)} \cdot f(x)$$

Con $A(x)$ antiderivata di $a(x)$.
Con le dovute semplificazioni si arriva alla forma:

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot f(x)\, dx + C$$

Per trovare C, con $C \in R$, impongo la condizione iniziale.
N.B. Condizione iniziale nella forma: $y(valore\ da\ sostituire\ con\ x) = valore\ da\ sostituire\ con\ y$.

1.2.2 Secondo Ordine

$$f_1(x) \cdot y'' + f_2(x) \cdot y' + f_3(x) \cdot y = f_4(x)$$

La vedo come

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$$

E risolvo

$$a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

Se le radici sono:

Distinte	$y = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}$
Uguali	$y = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{r_2 \cdot x}$
Complesse	$y = e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x))$

con r_1, r_2 radicali.

Questa forma è detta Integrale Generale Parziale.

Cerco ora la soluzione particolare, se:

$f(x) = polinomio$	$y_p(x) =$ polinomio di grado $grado\ f(x) + 1$
$f(x) = Ae^{rx}$	$y_p(x) = A \cdot x \cdot e^{r \cdot x}$
$f(x) = Acos(wx) + Bsin(wx)$	$y_p(x) = C \cdot \cos(\omega \cdot x) + D \cdot \sin(\omega \cdot x)$

Sommo quindi la soluzione particolare all'Integrale Generale, mi trovo nella forma:

$$y(x) = Integrale\ Generale\ Parziale + y_p(x)$$

sostituendo in $y_p(x)$ i vari A, B, C o D trovati risolvendo la soluzione particolare.
Derivo quindi $y(x)$ trovando $y'(x)$.
Metto a sistema $y(x)$ e $y'(x)$ imponendo le condizioni iniziali per trovare C_1 e C_2.
N.B. Condizioni iniziali nella forma: $y(valore\ da\ sostituire\ con\ x\ di\ y(x)) = valore\ da\ sostituire\ con\ y\ di\ y(x)$ e $y'(valore\ da\ sostituire\ con\ x\ di\ y'(x)) = valore\ da\ sostituire\ con\ y\ di\ y'(x)$.

1.3 Punti interni, esterni e di frontiera

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} : f(x)\} \ \ e \ \ P = (x_p, y_p)$$

Mi ricavo il grafico di $f(x)$.

1.3.1 Circonferenza

$$x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c$$
$$x_c = \tfrac{-a}{2} \qquad y_c = \tfrac{-b}{2} \qquad r = \sqrt{{x_c}^2 + {y_c}^2 - c}$$

1.3.2 Ellisse

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$
$$V_1(x_c + a;\ y_c) \quad V_2(x_c - a;\ y_c) \quad V_3(x_c;\ y_c + b) \quad V_4(x_c;\ y_c - b)$$

1.3.3 Iperbole

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$
$$A_1 \ \ y = \tfrac{b}{a} \cdot (x - x_c) + y_c \qquad A_2 \ \ y = \tfrac{-b}{a} \cdot (x - x_c) + y_c$$

$$V_1(x_c + a;\ y_c) \qquad V_2(x_c - a;\ y_c)$$

Controllo nel grafico se $P \in$ Int, Est, Fr.

1.4 Limiti in due variabili

1.4.1 Esistenza (Teorema del Confronto)

$$0 \ \leq \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x) \ \leq \ g(x)$$

Poniamo, per esempio, $f(x) = \frac{x \cdot y}{x+y}$
La si può vedere come $\frac{1}{x+y} \cdot x \cdot y \ \Rightarrow \ f(x) \cdot g(x)$
Se

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} g(x) = 0$$

allora anche

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x) = 0$$

1.4.2 Non Esistenza

Sostituisco $(x,\ y)$ con valori arbitrari per dimostrare

$$\lim_{x\to n} f(x,\ y) \neq \lim_{y\to n} f(x,\ y)$$

1.5 Lunghezza di una curva

$$\gamma : [x,\ y] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (x_t,\ y_t)$$

Soluzione

$$\mathit{Lunghezza}(\gamma) \ = \int_x^y \|\gamma'(t)\|\ dt \ = \ \int_x^y \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\ dt$$

dove

$$\gamma'(t) \ = \ (x_t',\ y_t')$$

2 Parte II

2.1 Max e Min in Ω

Date

$$f(x,\ y) \qquad \Omega = ProdottoVettoriale\ \subseteq\ \mathbb{R}^2$$

Cerco eventuali punti stazionari

$$\begin{cases} f'_x(x,\ y) = 0 \\ f'_y(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

Tramite il prodotto vettoriale (*Esempio*: $[a,\ b]\times[c,\ d]$) trovo i vertici dell'intervallo per conoscere la frontiera.
Per ogni lato:

- Se orizzontale cerco $g(x) = f(x,\ [valore\ comune\ ai\ vertici])$, lo derivo e pongo $= 0$
  Se il risultato è verosimile, oltre ai vertici di Ω, avrò $P(f',\ [valore\ comune\ ai\ vertici])$

- Se orizzontale cerco $g(y) = f([valore\ comune\ ai\ vertici],\ y)$, lo derivo e pongo $= 0$
  Se il risultato è verosimile, oltre ai vertici di Ω, avrò $P([valore\ comune\ ai\ vertici],\ f')$

Sostituisco i valori dei vertici a degli eventuali P in $f(x,\ y)$, il risultato più alto è MAX, quello più basso è min.

2.2 Moltiplicatori di Lagrange

Dati

$$f(x,\ y) \qquad g(x,\ y)$$

$$M\ =\ \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ condizione\}$$

Scrivo funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x,\ y,\ \lambda)$

$$\mathcal{L}(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) - \lambda(g(x,\ y))$$

Risolvo

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,\ y,\ \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,\ y,\ \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda(x,\ y,\ \lambda) = -g(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

per trovare i punti stazionari.
Matrice Hessiana Orlata

$$B_{\mathcal{L}}(x,\ y,\ \lambda)\ =\ \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & \mathcal{L}'_{xx} & \mathcal{L}'_{xy} \\ g'_y & \mathcal{L}'_{yx} & \mathcal{L}'_{yy} \end{bmatrix}$$

Cerco l'Hessiana Orlata di ogni P sostituendo gli $(x,\ y,\ \lambda)$ dei punti con i valori nella corrispondente matrice.
Per ogni P, calcolo $det(B_{\mathcal{L}}(x_P,\ y_P,\ \lambda_P))$, se

- $det > 0$, MAX locale
- $det < 0$, min locale

2.3 Integrali doppi con cambio di coordinate

Sia Ω parallelogramma.
Consideriamo una trasformazione

$$T : \Omega \to D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(u,\ v) \mapsto (g(u,\ v),\ h(u,\ v))$$

Per ottenere $(g(u,\ v),\ h(u,\ v)$

- Prendo il punto A del parallelogramma
- Sommo $u((x_B\ -\ x_A),\ (y_B\ -\ y_A))$
- Sommo $v((x_D\ -\ x_A),\ (y_D\ -\ y_A))$

Ottengo un risultato nella forma

$$(x_A,\ y_A)\ +\ u((x_B\ -\ x_A),\ (y_B\ -\ y_A))\ +\ v((x_D\ -\ x_A),\ (y_D\ -\ y_A))$$

Li divido successivamente in x e y ottenendo

$$\underbrace{x_A\ +\ (x_B\ -\ x_A)u\ +\ (x_D\ -\ x_A)v}_{g(u,\ v)},\ \underbrace{y_A\ +\ (y_B\ -\ y_A)u\ +\ (y_D\ -\ y_A)v}_{h(u,\ v)}$$

Creo la matrice di trasformazione DT

$$DT\ =\ \begin{bmatrix} (x_B\ -\ x_A) & (x_D\ -\ x_A) \\ (y_B\ -\ y_A) & (y_D\ -\ y_A) \end{bmatrix}$$

Posso a questo punto risolvere l'integrale

$$\int \int_{\Omega} f(x,\ y)\ dx\ dy$$

Portandolo nella forma

$$|det(DT)| \cdot \int_0^1 \int_0^1 f(g(u,\ v),\ h(u,\ v))\ du\ dv$$

N.B. Integro per $[0,\ 1]$ in quanto rappresentano il vettore spostamento in x e y

2.4 Integrali tripli per strati

Dato un insieme Ω definito

$$\Omega\ =\ \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ :\ intervallo,\ piano\}$$

in cui

- Intervallo è un qualsiasi intervallo nella forma $z \in [a,\ b]$ o $a \leq z \leq b$
- Piano è un qualsiasi piano nella forma $x^2\ +\ y^2\ =\ c$

In caso manchi una funzione su cui calcolare l'integrale lo si calcolerà per 1
L'integrale triplo

$$\int\int\int_{\Omega(z)} f\ dx\ dy\ dz$$

va risolto nella forma

$$\int_a^b \left(\int\int_{\Omega(z)} f\ dx\ dy \right) dz$$

dove

$$\Omega(z)\ =\ \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ piano\}$$

va convertito in coordinate polari, quindi

$$\begin{cases} x\ =\ \rho \cdot \cos\vartheta & \rightarrow \vartheta \in [0,\ 2\pi] \\ y\ =\ \rho \cdot \sin\vartheta & \rightarrow \rho \in [0,\ \sqrt{c}] \end{cases}$$

Per semplificare, ogni $x \pm y$ di f va sostituito con ρ e tutto va moltiplicato per ρ.
Se $f\ =\ 1$ si dovrà risolvere l'integrale per ρ nella forma

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{c}} f(con\ sostituzione\ coordinate) \cdot \rho\ d\rho\ d\vartheta\ dz$$

2.5 Integrali tripli per fili

Dato un insieme Ω definito

$$\Omega\ =\ \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ :\ g_1(x,\ y) \leq z \leq g_2(x,\ y),\ piano\}$$

in cui

- $g_1(x,\ y),\ g_2(x,\ y)$ sono funzioni
- Piano è un qualsiasi piano nella forma $x^2\ +\ y^2\ \leq\ c$

In caso manchi una funzione su cui calcolare l'integrale lo si calcolerà per 1.
L'integrale triplo

$$\int\int\int_{\Omega} f\ dx\ dy\ dz$$

va risolto nella forma

$$\int\int_{\Omega(x,\ y)} \left(\int_{g_1(x,\ y)}^{g_2(x,\ y)} f\ dz \right) dx\ dy$$

dove

$$\Omega(x,\ y)\ =\ \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ piano\}$$

va convertito in coordinate polari, quindi

$$\begin{cases} x\ =\ \rho \cdot \cos\vartheta & \rightarrow \vartheta \in [0,\ 2\pi] \\ y\ =\ \rho \cdot \sin\vartheta & \rightarrow \rho \in [0,\ \sqrt{c}] \end{cases}$$

Per semplificare, ogni $x \pm y$ di f va sostituito con ρ e tutto va moltiplicato per ρ.
Se $f\ =\ 1$ si dovrà risolvere l'integrale per ρ nella forma

$$\int_0^{\sqrt{c}} \int_0^{2\pi} \left(\int_{g_1(x,\ y)}^{g_2(x,\ y)} f\ dz \right) d\vartheta\ d\rho$$

2.6 Integrali tripli con cambio di variabili

Data una trasformazione

$$\begin{aligned} T:\ \Omega\ &\to\ D\ \subseteq\ \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w)\ &\mapsto\ (x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w)) \end{aligned}$$

devo applicare cambio di coordinate alle mie variabili.
Più nello specifico

2.6.1 Coordinate Sferiche

$$\begin{cases} x\ =\ u\ \cdot\ sin(v)\ \cdot\ cos(w) & \to u\ \in\ [0,\ +\infty] \\ y\ =\ u\ \cdot\ sin(v)\ \cdot\ sin(w) & \to v\ \in\ [0,\ \pi] \\ z\ =\ u\ \cdot\ cos(v) & \to w\ \in\ [0,\ 2\pi] \end{cases}$$

risolvo l'integrale

$$\int\int\int_D f(x,\ y,\ z)\ dx\ dy\ dz$$

come

$$\int\int\int_\Omega f(u,\ v,\ w)\ \cdot\ u^2\ \cdot\ sin(v)\ du\ dv\ dw$$

2.6.2 Coordinate Cilindriche

$$\begin{cases} x\ =\ u\ \cdot\ cos(v) & \to u\ \in\ [0,\ +\infty] \\ y\ =\ u\ \cdot\ sin(v) & \to v\ \in\ [0,\ 2\pi] \\ z\ =\ z & \to z\ \in\ \mathbb{R} \end{cases}$$

risolvo l'integrale

$$\int\int\int_D f(x,\ y,\ z)\ dx\ dy\ dz$$

come

$$\int\int\int_\Omega f(u,\ v,\ w)\ \cdot\ u\ du\ dv\ dw$$

2.7 Area di una superficie

Data una superficie Σ

$$\sigma\ :\ \overbrace{[a,\ b]\times[c,\ d]}^{\Omega\subseteq\mathbb{R}^2}\to\mathbb{R}^3$$

$$(u,\ v)\mapsto(t_1,\ t_2,\ t_3)$$

l'area della superficie si calcola

$$\int\int_\Omega \|\sigma'_u\times\sigma'_v\|\ du\ dv$$

dove

$$\sigma'_u\times\sigma'_v\ =\ det(DT)$$

dove DT matrice quadrata 3x3

$$DT \;=\; \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ (t_1)'_u & (t_2)'_u & (t_3)'_u \\ (t_1)'_v & (t_2)'_v & (t_3)'_v \end{bmatrix}$$

quindi espresso nella forma

$$\begin{aligned} \sigma'_u \times \sigma'_v \;=\; & (\hat{i} \cdot (t_2)'_u \cdot (t_3)'_v \;+\; \hat{j} \cdot (t_3)'_u \cdot (t_1)'_v \;+\; \hat{k} \cdot (t_1)'_u \cdot (t_2)'_v) \;- \\ & (\hat{i} \cdot (t_3)'_u \cdot (t_2)'_v \;+\; \hat{j} \cdot (t_1)'_u \cdot (t_3)'_v \;+\; \hat{k} \cdot (t_2)'_u \cdot (t_1)'_v) \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \sigma'_u \times \sigma'_v \;=\; & (\\ & \quad ((t_2)'_u \cdot (t_3)'_v) \;-\; ((t_3)'_u \cdot (t_2)'_v), \\ & \quad ((t_3)'_u \cdot (t_1)'_v) \;-\; ((t_1)'_u \cdot (t_3)'_v), \\ & \quad ((t_1)'_u \cdot (t_2)'_v) \;-\; ((t_2)'_u \cdot (t_1)'_v) \\ &) \end{aligned}$$

2.8 Campo Vettoriale

Sia $\overrightarrow{F} \;:\; \Omega \to \mathbb{R}^2$ campo vettoriale t.c.

$$\overrightarrow{F}(x,\ y) = (F_1(x,\ y),\ F_2(x,\ y))$$

- Per dire se è conservativo:
  - $(F_1)'_y \;=\; (F_2)'_x$ (sufficiente)
  - Se il campo $\overrightarrow{F}$ è $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- Cerco $U(x,\ y)$ potenziale di $\overrightarrow{F}$

  $$\int F_1(x,\ y)\, dx$$

  $$\int F_2(x,\ y)\, dy$$

  Sommo $C(y)$ al risultato del primo integrale.
  Sommo $D(x)$ al risultato del secondo integrale.
  Cerco dei valori per $C(y)$ e $D(x)$ che rendano i risultati uguali.
- Data una curva

  $$\gamma \;:\; [a,\ b] \;\to \Omega$$

  L'integrale di linea di seconda specie è

  $$\int_\gamma \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{\gamma} \;=\; U(\gamma(b)) \;-\; U(\gamma(a))$$

  se il campo è conservativo.

  Per calcolare $\gamma(b)$ e $\gamma(a)$:

– Data una curva $\gamma \ : \ [a,\ b] \to \Omega$

$$t \mapsto (t_1,\ t_2)$$

ottengo $\gamma(b)$ sostituendo b in t e ottengo $\gamma(a)$ sostituendo a in t.

Se il campo non è conservativo la formula è la seguente

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\ d\overrightarrow{\gamma} \ = \ \int_a^b F_1(a(t),\ b(t)) \cdot a'(t) \ + \ F_2(a(t),\ b(t)) \cdot b'(t)\ dt$$

oppure, scritto come un prodotto vettoriale

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\ d\overrightarrow{\gamma} \ = \ \int_a^b \langle \overrightarrow{F}(\gamma(t)),\ \gamma'(t) \rangle\ dt$$