

UNIVERSITÀ DI PISA



FACOLTÀ DI MATEMATICA

Connessioni olomorfe su varietà

TESI DI LAUREA TRIENNALE
IN MATEMATICA

CANDIDATO
Luca Casarin

RELATORE
Andrea Maffei
Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2018 - 2019

*Ringrazio la mia famiglia per la fiducia
e il sostegno di tutti questi anni*

*Ringrazio il professor Andrea Maffei per i molti stimoli
che mi ha dato in questo periodo di tesi*

*Ringrazio i miei amici che non mi hanno fatto perdere
la sanità mentale in questi anni*

Indice

| | |
|---|-----------|
| Indice | 2 |
| 1 Introduzione | 3 |
| 1.1 Connessioni olomorfe su varietà complesse | 3 |
| 1.2 Notazioni e risultati noti | 4 |
| 2 Connessioni e Corrispondenza di Riemann-Hilbert | 7 |
| 2.1 Definizioni e prime proprietà | 7 |
| 2.2 Corrispondenza di Riemann-Hilbert | 9 |
| 3 Coomologia di Čech | 11 |
| 3.1 Classificazione di Fibrati Vettoriali, un esempio motivazionale | 11 |
| 3.2 Coomologia Abelliana | 15 |
| 3.3 Fasci aciclici e coomologia di de Rham | 18 |
| 4 Fibrati principali e criterio di Atiyah | 21 |
| 4.1 Prime definizioni e proprietà | 21 |
| 4.2 Connessioni e fibrati orizzontali | 25 |
| 4.3 Criterio di Atiyah | 32 |
| 5 Teorema di Weil | 41 |
| 5.1 Alcune sequenze esatte | 41 |
| 5.2 Classe di Chern di un fibrato vettoriale | 43 |
| 5.3 Dualità di Serre | 44 |
| 5.4 Calcolo di $\langle c(E), \text{id} \rangle$ | 45 |
| 5.5 Endomorfismi e teorema di Weil | 47 |
| Bibliografia | 53 |

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Connessioni olomorfe su varietà complesse

Un concetto che nasce in maniera del tutto naturale nel contesto della geometria differenziale, reale e complessa, è quello di connessione su un fibrato vettoriale su una varietà. Storicamente nasce dalla necessità di trasportare campi di vettori lungo curve in modo parallelo ad esse, il trasporto parallelo. È una naturale generalizzazione della differenziazione, che permette di dare una nozione di derivazione lungo campi vettoriali di una sezione di un fibrato vettoriale e non solo, infatti le sezioni piate di una connessione sono interpretabili come soluzioni di equazioni differenziali.

Uno dei problemi posti da Hilbert nel rinomato congresso tenutosi alla Sorbona l'8 agosto 1900, il ventunesimo, riguardava l'esistenza di equazioni differenziali su un aperto del piano complesso con prescritta azione di monodromia del gruppo fondamentale. Il problema posto in tal modo da Hilbert non trovò soluzione ma sue generalizzazioni portarono a sviluppi teorici molto interessanti. In questo contesto le connessioni olomorfe rappresentano una prima generalizzazione alle equazioni differenziali che fornisce una soluzione naturale al problema. La corrispondenza di Riemann-Hilbert determina infatti un'equivalenza tra la categoria dei fibrati vettoriali con connessione su una superficie di Riemann X e quella delle rappresentazioni finito dimensionali del suo gruppo fondamentale, risolvendo il problema originale anche se in una formulazione diversa. Tale argomento verrà trattato nel primo capitolo della tesi, affrontando le definizioni e le proprietà elementari delle connessioni, arrivando infine a dimostrare la corrispondenza sopra esposta.

Una differenza fondamentale tra connessioni nel caso liscio e nel caso olomorfo riguarda l'esistenza delle stesse. Nel primo caso l'esistenza è banale: infatti è sempre possibile costruire connessioni localmente ed estenderle a tutta la varietà mediante partizioni dell'unità. La mancanza di quest'ultime nel contesto olomorfo rende non solo non banale l'esistenza di connessioni ma anzi molto interessante lo studio di un criterio che ne stabilisca l'esistenza. Lo studio affrontato per questa tesi gira attorno ad un seminario Bourbaki di Alexandre Grothendieck pubblicato nel dicembre 1956: 'Sur le mémoire de Weil, généralisation de fonctions abéliennes' che riprende l'omonimo articolo di Weil del 1938. Nell'articolo viene considerato un caso più generale da quello che verrà qui esposto che sarà invece contenuto nel contesto delle varietà complesse, in ogni caso si arriverà alla descrizione di due criteri riguardanti l'esistenza di connessioni olomorfe: il criterio di Atiyah e il criterio di Weil.

L'argomento centrale di questa tesi sarà quindi andare a descrivere e a dimostrare tali criteri: il tutto verrà trattato negli ultimi tre capitoli. Nel primo di questi si introdurrà la coomologia di Čech che sarà uno strumento fondamentale anche solo per enunciare i criteri, la quale nel caso

delle varietà dà una descrizione molto concreta dei funtori derivati di $\Gamma(X, -)$. Se ne studierà la costruzione e le proprietà di funtorialità, dimostrando la sequenza esatta lunga in coomologia con opportune ipotesi sullo spazio topologico X , che saranno sempre rispettate nel caso in cui X sia una varietà. Nello stesso capitolo si daranno alcune nozioni di coomologia non abeliana, la quale richiede costruzioni del tutto simili alla coomologia di Čech per essere definita.

Scopo del terzo capitolo è presentare il criterio di Atiyah che caratterizza l'esistenza di connessioni olomorfe su un dato fibrato vettoriale E in termini molto generali ma anche molto astratti. Si individuerà un elemento

$$c(E) \in H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes \text{End}(E)))$$

il cui svanimento è equivalente all'esistenza di una connessione su E . Per dimostrarlo sarà necessario un grande *excursus* sui G -fibrati principali, i quali, nel caso $G = GL(n, \mathbb{C})$, verranno dimostrati essere in naturale corrispondenza con i fibrati vettoriali di rango n . Tale corrispondenza trasporta anche il concetto di connessione che nel caso dei fibrati principali assume una forma molto elegante. Si descriveranno quindi i fibrati principali su un gruppo di Lie generico G e se ne studieranno le proprietà base con lo scopo di arrivare a dimostrare l'equivalenza tra $GL(n, \mathbb{C})$ -connessioni e connessioni su fibrati vettoriali. Si studieranno poi due fibrati vettoriali su X naturalmente associati ad un fibrato principale P , $\text{ad}(P)$ e $l(P)$. L'analisi di questi porterà ad una semplice dimostrazione del criterio di Atiyah e metterà in luce la loro stretta relazione con le connessioni.

Nell'ultimo capitolo si arriverà a dimostrare il teorema di Weil. Quest'ultimo riguarda un caso più specifico che è quello dei fibrati vettoriali su superfici di Riemann compatte. La mancanza di generalità rispetto al criterio di Atiyah permetterà di arrivare ad enunciare un risultato molto più concreto:

Teorema 1.1.1 (Weil). *Sia E un fibrato vettoriale su una superficie di Riemann compatta X . Allora E ammette una connessione se e soltanto per ogni decomposizione $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ si ha che $c(E_i) = 0$ per ogni i (classi di Chern).*

Per poter dimostrare il teorema utilizzeremo una forma di dualità tra gli spazi di coomologia dei fasci delle sezioni di alcuni fibrati vettoriali che va sotto il nome di dualità di Serre, la quale però non verrà dimostrata qui. Quest'ultima, insieme ad uno studio precedente sui cocicli che definiscono i fibrati sopra citati $\text{ad}(P)$ e $l(P)$, permette di portare a termine dei conti espliciti che saranno il fulcro della dimostrazione del teorema di Weil.

1.2 Notazioni e risultati noti

Diamo qui una breve lista delle notazioni che verranno utilizzate durante l'esposizione, riportiamo inoltre un paio di costruzioni geometriche che verranno date come pregresse durante il resto della trattazione.

- Dove non diversamente specificato con $f \in \mathcal{F}$ si indicherà una sezione locale di un fascio \mathcal{F} su un opportuno aperto $U \subseteq X$, con $\Gamma(X, \mathcal{F})$ si intenderà l'insieme delle sezioni globali del fascio. $\Gamma(X, -)$ è un funtore esatto a sinistra;
- Data una varietà complessa verrà denotato con \mathcal{O}_X il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su di essa e con Ω_X^1 il fascio delle 1-forme differenziali, con \mathbb{Z} e \mathbb{C} si denoteranno i fasci delle funzioni localmente costanti a valori in rispettivamente in \mathbb{Z} e \mathbb{C} ;
- Si darà per buona l'equivalenza tra la categoria dei fibrati vettoriali e la categoria degli \mathcal{O}_X -moduli localmente liberi, questa verrà trattata in parte comunque nel Capitolo 2;

- Data una varietà complessa si indicherà con d il suo differenziale olomorfo, e se non diversamente specificato tutte le mappe da e verso essa saranno da considerarsi olomorfe, così come i fibrati vettoriali costruitivi sopra;
- Le lettere greche minuscole come α, β, γ indicheranno generalmente degli indici e dato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ si indicherà con $U_{\alpha_1 \dots \alpha_n} := U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}$ l'intersezione multipla;
- Con G si denoterà usualmente un gruppo di Lie e con \mathfrak{g} la sua algebra di Lie associata;
- Se non altrove specificato il prodotto tensoriale di fibrati vettoriali sarà operato lungo \mathbb{C} mentre il prodotto tensoriale su fasci di \mathcal{O}_X -moduli sarà fatto lungo \mathcal{O}_X ;
- Dato un fibrato $\pi : E \rightarrow X$ e una mappa $f : Y \rightarrow X$ denoteremo con f^*E il pullback di E lungo f , definito come

$$f^*E := \{(y, e) \in Y \times E : f(y) = \pi(e)\}$$

Se E è un fibrato vettoriale su X allora f^*E è in modo naturale un fibrato vettoriale dello stesso rango su Y .

- Dati due spazi su X , con morfismi $\pi_1 : E_1 \rightarrow X$, $\pi_2 : E_2 \rightarrow X$ il loro prodotto fibrato si denoterà con $E_1 \times_X E_2$:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times_X E_2 & \longrightarrow & E_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_1 & \longrightarrow & X \end{array}$$

Come insieme per noi sarà $E_1 \times_X E_2 = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}$. In tal modo il prodotto fibrato si identifica con il pullback di fibrati;

- Dato un fibrato $\pi : E \rightarrow X$ e un aperto $i : U \hookrightarrow X$ denoteremo con $E|_U$ la restrizione di E a U che è pari a i^*E ;

Capitolo 2

Connessioni e Corrispondenza di Riemann-Hilbert

In questo primo capitolo introdurremo la nozione di connessione olomorfa su una varietà complessa. In particolare si studierà il caso delle superfici di Riemann, si descriveranno le definizioni e le proprietà base delle connessioni e si vedrà come queste in un certo senso generalizzino la nozione di equazione differenziale lineare al caso delle varietà. Scopo del capitolo oltre a quello di introdurre tutti questi concetti è dimostrare la corrispondenza di Riemann-Hilbert un teorema classico che lega le connessioni alle rappresentazioni del gruppo fondamentale della superficie.

2.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 2.1.1. Sia $E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale olomorfo su una varietà complessa X . \mathcal{E} il fascio delle sezioni olomorfe di tale fibrato e Ω_X^1 il fascio delle 1-forme olomorfe su X . Una connessione è un morfismo di fasci \mathbb{C} lineare:

$$\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$$

Che date $f \in \mathcal{O}_X$ e $\sigma \in \mathcal{E}$ definite su uno stesso aperto U soddisfi la seguente regola di Leibnitz:

$$\nabla(f\sigma) = f\nabla(\sigma) + df \otimes \sigma$$

Tale definizione si applica anche al contesto \mathcal{C}^∞ nel quale compare come naturale definizione di derivazione di una sezione di un fibrato vettoriale rispetto ad un campo di vettori. In quest'ultimo contesto è sufficiente dare la connessione a livello globale e da questa si deduce la descrizione in termini di fasci in modo univoco. Questo nel caso olomorfo non succede e la ragione è essenzialmente dovuta all'esistenza delle partizioni dell'unità nel caso liscio le quali permettono di estendere funzioni definite localmente a tutta la varietà.

Vediamo subito come tale definizione astratta si riporta al caso locale, ovvero al caso in cui $\mathcal{E} = X \times \mathbb{C}^n$, in particolare studiando tale caso si evincerà immediatamente in quale senso le connessioni generalizzano l'idea di derivazione.

Proposizione 2.1.1. *Sia X una varietà complessa e $E = X \times \mathbb{C}^n$ il fibrato vettoriale banale di rango n . Allora tutte le connessioni su E sono del tipo*

$$\nabla = d - A$$

per un opportuna matrice $A \in M(n, \Omega_X^1)$.

Dimostrazione. Osserviamo in primo luogo che i fasci coinvolti nella definizione di connessione in questo caso sono molto semplici, si ha infatti $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^n$ e $\Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} = (\Omega_X^1)^n$. Con tali identificazioni è naturale considerare la derivazione usuale $d : \mathcal{O}_X^n \rightarrow (\Omega_X^1)^n$ che ad una n -upla di funzioni olomorfe associa la n -upla dei loro differenziali. Non è difficile constatare che sia una connessione, essa è infatti banalmente \mathbb{C} -lineare, mentre la regola di Leibnitz equivale in questo caso alla comune regola di derivazione del prodotto. Osserviamo ora che in virtù della regola di Leibnitz la differenza di due connessioni è un morfismo di fasci \mathcal{O}_X -lineare. Consideriamo per un momento il caso globale, data una connessione generica ∇ si prendano le n -uple di forme differenziali date da $(d - \nabla)(e_i)$ dove e_i è la sezione olomorfa di E costantemente pari a 1 sulla i -esima coordinata e nulla sulle altre e sia $A \in M(n, \Omega_X^1(X))$ la matrice data dalla giustapposizione di tali n -uple. Per \mathcal{O}_X -linearità si ha:

$$\nabla(f) = \nabla(\sum f_i e_i) = \sum df_i e_i - (d - \nabla)(\sum f_i e_i) = \sum df_i e_i - \sum f_i (d - \nabla)(e_i) = df - Af$$

Questo ragionamento è chiaramente valido per ogni aperto U di X , inoltre la matrice A_U relativa ad U è sempre data dalle $(d - \nabla)(e_i|_U)$ che però siccome tutti i morfismi sono di fasci sono proprio $(d - \nabla)(e_i)|_U$ pertanto $A_U = A|_U$ e la matrice A determina la connessione. \square

Definizione 2.1.2. Una sezione σ di un fibrato con connessione (E, ∇) si dice **piatta** se $\nabla\sigma = 0$. Con \mathcal{E}^∇ si indicherà il fascio delle sezioni piatte.

Osservazione 2.1.1. Dalla descrizione locale delle connessioni, nel caso in cui X sia una superficie di Riemann, segue che esistono sempre sezioni piatte locali in quanto un'equazione differenziale del tipo $\partial f / \partial z = Af$ ammette sempre soluzioni, inoltre queste sono univocamente determinate dal loro valore in un punto. Segue che in un aperto banalizzante di E , U si ha che $\mathcal{E}_U^\nabla \simeq \mathbb{C}_U^n$ pertanto \mathcal{E}^∇ è un fascio localmente costante su \mathbb{C}^n .

Esempio 1. Segue dalla proposizione appena enunciata che nel caso delle superfici di Riemann, se X è un aperto di \mathbb{C} allora lo studio delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria al primo ordine lineare (anche in dimensione > 1) ovvero del tipo

$$\frac{\partial f}{\partial z} = Af$$

con $A \in M(n, \mathcal{O}_X(X))$ è equivalente allo studio delle sezioni piatte della connessione $d - A$ sul fibrato banale $X \times \mathbb{C}^n$.

Lemma 2.1.1. Due connessioni su uno stesso fibrato vettoriale su una superficie di Riemann $(E, \nabla_1), (E, \nabla_2)$ sono uguali se e soltanto se hanno le stesse sezioni piatte.

Dimostrazione. La matrice A nella descrizione locale delle connessioni è univocamente determinata dai differenziali delle sezioni piatte nel punto pertanto localmente le due connessioni hanno le stesse matrici e pertanto sono uguali. \square

Discutiamo ora brevemente la nozione di morfismo di fibrati vettoriali con connessione e in particolare come trasportare connessioni lungo isomorfismi di fibrati vettoriali.

Definizione 2.1.3. Siano $(E_1, \nabla_1), (E_2, \nabla_2)$ due fibrati vettoriali con connessione. Si dice morfismo di fibrati vettoriali con connessione un morfismo di fibrati vettoriali $f : E_1 \rightarrow E_2$ che commuti con le rispettive connessioni, ovvero tale che

$$\nabla_2 \circ f_* = (1 \otimes f_*) \circ \nabla_1$$

Dove $f_* : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ è il morfismo indotto tra i fasci delle sezioni.

2.2 Corrispondenza di Riemann-Hilbert

Consideriamo la mappa sopra definita $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}^\nabla$ che associa ad un fibrato vettoriale con connessione il fascio delle sezioni piatte, il quale ricordiamo essere localmente costante. Siccome i morfismi di fibrati vettoriali con connessione preservano le sezioni piatte tale mappa risulta in modo naturale un funtore tra la categoria dei fibrati vettoriali di rango n con connessione e i fasci localmente costanti con fibra \mathbb{C}^n . D'altro canto ad un fascio localmente costante con fibra \mathbb{C}^n , \mathcal{L} si può associare in modo naturale un fibrato vettoriale con connessione procedendo come segue. In maniera più intrinseca si può considerare il fascio $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}$ e mediante l'isomorfismo $\Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}) = \Omega_X^1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{L}$ la connessione $d \otimes \text{id} : \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{L}$, questi sono, in virtù della locale costanza di \mathcal{L} , fasci di \mathcal{O}_X -moduli localmente liberi.

La costruzione dei fibrati vettoriali associati procede come segue: aperti banalizzanti per \mathcal{L} forniscono dei cocicli $g_{\alpha\beta} \in H^1(X, GL(n, \mathbb{C}))$ il fibrato definito come segue

$$E := \coprod_{\alpha} U_{\alpha} \times \mathbb{C}^n / \sim$$

con la relazione $U_{\alpha} \times \mathbb{C}^n \ni (p, v) \sim (q, w) \in U_{\beta} \times \mathbb{C}^n \iff p = q \wedge w = g_{\beta\alpha}(p)v$, con la proiezione naturale su X risulta un fibrato vettoriale. Si può definire una connessione localmente tramite gli isomorfismi

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}|_{U_{\alpha}} & \dashrightarrow & \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E}|_{U_{\alpha}} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathcal{O}_{U_{\alpha}}^n & \xrightarrow{d} & (\Omega_{U_{\alpha}}^1)^n \end{array}$$

Non è inoltre difficile constatare che tale definizione locale coincide sulle intersezioni, dato che le mappe di transizione sono localmente costanti, e pertanto definisce una connessione su tutto il fascio. È immediato anche che considerando i morfismi \mathbb{C} lineari tra i fasci localmente costanti su \mathbb{C}^n l'associazione appena descritta è funtoriale. Constatando inoltre che $E \simeq E_{\mathcal{E}^\nabla}$ e $\mathcal{L} \simeq (E_{\mathcal{L}})^\nabla$ in modo naturale si ottiene la seguente proposizione.

Proposizione 2.2.1. *Le due associazioni sopra descritte determinano un'equivalenza tra la categoria dei fibrati vettoriali di rango n con connessione e la categoria dei fasci localmente costanti su \mathbb{C}^n .*

Un risultato più classico riguarda invece l'equivalenza tra le categorie dei fasci localmente costanti con fibra V e le rappresentazioni del gruppo fondamentale su V . Prima di introdurre tale equivalenza definiamo l'azione di monodromia rispetto a un fascio localmente costante. Prentiamo il seguente semplice lemma riguardante i fasci localmente costanti.

Lemma 2.2.1. *Valgono le seguenti:*

- I fasci localmente costanti su $[0, 1]$ sono costanti;
- I fasci localmente costanti su $[0, 1]^2$ sono costanti.

Questi ultimi consentono di definire l'azione di monodromia. Si consideri quindi un punto $x_0 \in X$ e un cappio $[\gamma] \in \pi^1(X, x_0)$, considerando inoltre $\gamma^{-1}\mathcal{L}$ il pullback di fasci tramite γ che è un fascio costante su $[0, 1]$. I seguenti isomorfismi:

$$\mathcal{L}_{x_0} \rightarrow (\gamma^{-1}\mathcal{L})_0 \simeq (\gamma^{-1}\mathcal{L})_1 \rightarrow \mathcal{L}_{x_0}$$

Ad un fascio localmente costante \mathcal{L} su V è naturalmente associata una rappresentazione del gruppo fondamentale su V , difatti osservando che un fascio localmente costante sul segmento $[0, 1]$ è effettivamente costante si ottengono dato un cammino γ gli isomorfismi

Tale mappa dipende solo dalla classe di omotopia di γ grazie al secondo lemma e dà luogo ad un'azione del gruppo fondamentale su $\mathcal{L}_{x_0} \simeq V$. Data invece un'azione del gruppo fondamentale su uno spazio V si può costruire un fascio localmente costante. Consideriamo il rivestimento universale $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ e \tilde{V} il fascio costante su \tilde{X} con fibra V , definiamo inoltre un'azione di $\pi_1(X)$ su tale fascio facendo agire sulle fibre il gruppo fondamentale con l'azione data su V , considerando poi

$$\mathcal{L}(U) := \tilde{V}(\pi^{-1}(U))^{\pi_1(X)}$$

si ottiene un fascio localmente costante su X , la cui azione di monodromia è proprio l'azione prescritta su V . Le due associazioni sono di nuovo funtoriali e determinano un'equivalenza di categorie.

Combinando queste equivalenze si ottiene che la categoria dei fibrati vettoriali di rango n con connessione è equivalente alla categoria delle rappresentazioni del gruppo fondamentale su \mathbb{C}^n che è la tesi della corrispondenza di Riemann-Hilbert.

Teorema 2.2.1. *Sia X una superficie di Riemann. Le applicazioni funtoriali sopra descritte determinano un'equivalenza tra la categoria dei fibrati vettoriali di rango n e la categoria delle rappresentazioni di dimensione n del gruppo fondamentale $\pi_1(X)$.*

Capitolo 3

Coomologia di Čech

3.1 Classificazione di Fibrati Vettoriali, un esempio motivazionale

In questo capitolo introdurremo la coomologia di fasci, che sarà uno strumento fondamentale in quanto segue. Per motivarne lo studio tratteremo in primo luogo la classificazione dei fibrati vettoriali a meno di isomorfismo definiti su una varietà olomorfa X . La trattazione userà una terminologia piuttosto generale dalla quale si deduce facilmente, semplicemente modificando la classe delle mappe considerate sulla nostra varietà, la classificazione dei fibrati vettoriali lisci o anche solamente continui su X , considerata rispettivamente come varietà liscia o come spazio topologico. Cominciamo introducendo un po' di notazione, X rimarrà per tutta la trattazione una varietà olomorfa:

- Un fascio di gruppi abeliani \mathcal{F} su X viene detto fascio di \mathcal{O}_X -moduli (o più semplicemente \mathcal{O}_X -modulo) se questo è dotato di una struttura aggiuntiva data da un morfismo di fasci $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ che renda $\mathcal{F}(U)$ un $\mathcal{O}_X(U)$ -modulo
- Un fascio \mathcal{F} di \mathcal{O}_X -moduli si dice localmente libero di rango n se esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ di X e isomorfismi di \mathcal{O}_X -moduli $f_\alpha : \mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathcal{O}_{U_\alpha}^n$

Si osserva facilmente che dato un fibrato vettoriale $E \rightarrow X$ il fascio \mathcal{E} delle sezioni olomorfe di tale fibrato è in modo naturale un fascio di \mathcal{O}_X -moduli. Infatti è un fascio di gruppi abeliani in quanto la struttura di fibrato vettoriale consente di eseguire la somma di due sezioni puntualmente definendo una nuova sezione che risulta olomorfa, inoltre è possibile moltiplicare punto per punto una sezione σ con una funzione olomorfa f ponendo $(f\sigma)(p) := f(p)\sigma(p)$ e $f\sigma$ rimane una sezione olomorfa. Inoltre per definizione di fibrato esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ e isomorfismi di fibrati $f_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ il quale induce un isomorfismo che indicheremo sempre con f_α di \mathcal{O}_X -moduli $f_\alpha : \mathcal{E}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathcal{O}_{U_\alpha}^n$. Pertanto un fibrato vettoriale di rango n su X dà luogo a un \mathcal{O}_X -modulo localmente libero di rango n su X , il suo fascio delle sezioni olomorfe. Vediamo ora che nell'accezione della proposizione seguente vale anche il viceversa:

Proposizione 3.1.1. *Dato \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -modulo localmente libero di rango n esiste un fibrato vettoriale $F \rightarrow X$ il cui fascio delle sezioni è isomorfo come \mathcal{O}_X -modulo a \mathcal{F} .*

Dimostrazione. Consideriamo gli isomorfismi dati $f_\alpha : \mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathcal{O}_{U_\alpha}^n$ e osserviamo che ogni qualvolta che $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ le f_α danno luogo a isomorfismi di $\mathcal{O}_{U_{\alpha\beta}}$ -moduli $f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : \mathcal{O}_{U_{\alpha\beta}}^n \rightarrow \mathcal{O}_{U_{\alpha\beta}}^n$. Si nota che la mappa indotta sulle sezioni globali essendo $\mathcal{O}_{U_{\alpha\beta}}$ lineare invertibile è rappresentata da una matrice $g_{\beta\alpha} \in GL(n, \mathcal{O}_{U_{\alpha\beta}})$, si verifica inoltre che tutto il morfismo di fasci

è univocamente determinato dalla matrice $g_{\beta\alpha}$ in quanto questa determina anche il morfismo tra le spighe. Va notato che le matrici $g_{\beta\alpha}$ soddisfano la seguente relazione, detta **relazione di cociclo**: $g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta}g_{\beta\alpha}$ dove l'uguaglianza è da intendersi in $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$ e dove le matrici sono ristrette a tale aperto.

Osserviamo ora che esiste un isomorfismo canonico di gruppi tra $GL(n, \mathcal{O}_{\alpha\beta}) = \{f : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), f \text{ olomorfa}\}$. Vale a dire che una matrice invertibile a coefficienti in $\mathcal{O}_{U_{\alpha\beta}}$ può essere interpretata come una funzione olomorfa da $U_{\alpha\beta}$ in $GL(n, \mathbb{C})$. Definiamo quindi il seguente spazio:

$$F := \coprod_{\alpha} U_{\alpha} \times \mathbb{C}^n / \sim$$

dove

$$U_{\alpha} \times \mathbb{C}^n \ni (p, v) \sim (q, w) \in U_{\beta} \times \mathbb{C}^n \iff p = q \in U_{\alpha\beta} \wedge w = g_{\beta\alpha}v$$

Questa risulta una relazione di equivalenza proprio in virtù delle relazioni di cociclo sopra introdotte. □

Corollario 3.1.1. *Dalla dimostrazione segue anche che dato un ricoprimento $\mathcal{U} = (U_{\alpha})$ e delle funzioni olomorfe $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ ogni qual volta che $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ che soddisfano la relazione di cociclo, esiste un fibrato vettoriale associato ad esse e viceversa, dato un fibrato vettoriale questo è rappresentato dalla costruzione precedente di un preciso cociclo.*

Osservazione 3.1.1. Non è difficile constatare che dati due fibrati vettoriali E_1, E_2 si ha che

$$\text{Hom}(E_1, E_2) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$$

Difatti un omomorfismo di fibrati vettoriali dà luogo ad un morfismo di \mathcal{O}_X -moduli tra i fasci delle sezioni e non è difficile vedere che un morfismo di \mathcal{O}_X -moduli induce un morfismo di fibrati vettoriali.

Corollario 3.1.2. *Il funtore che associa ad un fibrato vettoriale il fascio delle sue sezioni determina un'equivalenza tra la categoria dei fibrati vettoriali su X e la categoria degli \mathcal{O}_X -moduli localmente liberi. Infatti grazie all'osservazione precedente questo determina una biezione tra i morfismi ed è essenzialmente suriettivo grazie alla proposizione appena discussa.*

In virtù di tale corollario d'ora in avanti si tratteranno le due categorie indistintamente.

Portiamo ora avanti l'analisi dei fibrati vettoriali con i cocicli. Abbiamo già dimostrato che dato un fibrato vettoriale e un ricoprimento aperto banalizzante si ottiene un cociclo $g_{\alpha\beta}$ e che dato un cociclo su un fissato ricoprimento aperto si può costruire un fibrato vettoriale che si banalizza su tale ricoprimento avente il cociclo fissato. Studiamo ora la relazione di isomorfismo esplicitando in termini di cocicli quando due fibrati sono isomorfi. Da un semplice controllo sugli aperti banalizzanti segue la prossima osservazione:

Osservazione 3.1.2. Siano E_1 ed E_2 due fibrati vettoriali su X e $f : E_1 \rightarrow E_2$ un isomorfismo. Sia inoltre $\mathcal{U} = (U_{\alpha})$ un ricoprimento che banalizzi entrambi e $g_{\alpha\beta}^1, g_{\alpha\beta}^2$ i cocicli relativi ad E_1 ed E_2 rispettivamente. Allora denotando $f_{\alpha} : U_{\alpha} \times \mathbb{C}^n \rightarrow U_{\alpha} \times \mathbb{C}^n$ la lettura sull'aperto banalizzante U_{α} di f si ottiene

$$g_{\alpha\beta}^2 = f_{\alpha} \circ g_{\alpha\beta}^1 \circ f_{\beta}^{-1}$$

Viceversa non è difficile constatare che dati due cocicli e delle f_{α} che soddisfino la relazione sopra riportata esiste un isomorfismo tra i fibrati costruiti dai cocicli.

Lemma 3.1.1. *Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto e consideriamo*

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(GL(n, \mathbb{C}))) \subset \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{O}_X(GL(n, \mathbb{C}))(U_{\alpha\beta})$$

il sottogruppo dato dagli elementi che soddisfano la relazione di cociclo. Diciamo che $g^1 \sim g^2$ se esistono $f_\alpha \in \mathcal{O}_X(GL(n, \mathbb{C}))(U_\alpha)$ per cui $g_{\alpha\beta}^2 = f_\alpha g_{\alpha\beta}^1 f_\beta^{-1}$. Questa è una relazione di equivalenza inoltre l'insieme $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(GL(n, \mathbb{C}))) = Z^1 / \sim$ si deduce dalle osservazioni precedenti essere in biezione con i fibrati vettoriali che si banalizzano su \mathcal{U} .

Quanto appena dimostrato classifica i fibrati vettoriali che si banalizzano su un fissato ricoprimento aperto \mathcal{U} . Per classificarli tutti occorre un processo di limite sui ricoprimenti che verrà trattato in un contesto leggermente diverso e più generale più avanti. Per evitare ripetizioni non lo riportiamo qui.

Per avere una leggera generalità che dia luogo anche a una interpretazione geometrica di quanto si andrà a fare premettiamo qualche definizione e costruzione.

Definizione 3.1.1. Dato \mathcal{G} un fascio di gruppi su X , si dice \mathcal{G} -fascio principale un fascio \mathcal{F} sul quale \mathcal{G} opera a destra e che localmente sia isomorfo a \mathcal{G} . Più formalmente si richiedono i seguenti dati:

- Per ogni aperto $U \subseteq X$ sia data una azione destra $\mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ che sia compatibile con le operazioni di restrizione ovvero che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) \times \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

- Esista un ricoprimento aperto $X = \bigcup U_\alpha$ per cui esistano isomorfismi di \mathcal{G} -equivarianti $f_\alpha : \mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_\alpha}$, dove su $\mathcal{G}|_{U_\alpha}$ si considera come azione la naturale moltiplicazione a destra.

I morfismi di fasci \mathcal{G} -equivarianti tra \mathcal{G} -fasci destri si diranno morfismi di \mathcal{G} -fasci destri.

Esempio 2. Se G è un gruppo di Lie complesso $\mathcal{O}_X(G)$ il fascio delle funzioni olomorfe a valori in G è un fascio di gruppi. Gli $\mathcal{O}_X(G)$ -fibrati principali possono essere descritti geometricamente come segue. Essi sono infatti fibrati in senso classico $P \rightarrow X$ sui quali G opera a destra e con fibra isomorfa a G . Chiameremo questi ultimi G -fibrati principali. A un $\mathcal{O}_X(G)$ fascio principale è naturalmente associato un G -fibrato principale costruito incollando copie di $U_\alpha \times G$ in modo analogo a quanto fatto per i fibrati vettoriali, mentre ad un G -fibrato principale possiamo associare il fascio delle sue sezioni olomorfe che costituisce un $\mathcal{O}_X(G)$ -fascio. Torneremo su queste definizioni più avanti.

Sui \mathcal{G} fasci principali può essere condotta un analisi del tutto simile nello spirito a quella fatta per i fibrati vettoriali, un osservazione chiave è che le mappe di transizione $f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : \mathcal{G}|_{U_{\alpha\beta}} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_{\alpha\beta}}$ sono univocamente determinate dall'immagine della sezione $1 \in \mathcal{G}(U_{\alpha\beta})$.

Infatti dato $V \subseteq U_{\alpha\beta}$ un aperto e $g \in \mathcal{G}(V)$ per \mathcal{G} -invarianza delle mappe abbiamo

$$f_{\beta\alpha}(g) = f_{\beta\alpha}(1|_V \cdot g) = f_{\beta\alpha}(1|_V) \cdot g = f_{\beta\alpha}(1)|_V \cdot g$$

Con un'analisi del tutto analoga si arriva alla deduzione che vengono definiti dei cocicli a valori in \mathcal{G} . In particolare siccome il nostro obiettivo è una descrizione dei \mathcal{G} -fasci principali a meno di isomorfismo è naturale osservare come si comportano i cocicli rispetto agli isomorfismi.

Osservazione 3.1.3. Siano \mathcal{F} e \mathcal{F}' due \mathcal{G} -fasci principali e sia $\mathcal{U} = (U_\alpha)_\alpha$ un ricoprimento aperto che banalizzi entrambi. Allora se $g_{\alpha\beta}$ e $g'_{\alpha\beta}$ sono i cocicli relativi a \mathcal{F} e \mathcal{F}' rispetto al ricoprimento \mathcal{U} rispettivamente e $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ è un isomorfismo di \mathcal{G} -fasci allora esistono sezioni $f_\alpha \in \mathcal{G}(U_\alpha)$ tali che $g'_{\alpha\beta} = f_\alpha g_{\alpha\beta} f_\beta^{-1}$.

Viceversa dati due cocicli $g_{\alpha\beta}$ e $g'_{\alpha\beta}$ per cui esista una collezione di morfismi $f_\alpha \in \mathcal{G}(U_\alpha)$ tali che $g'_{\alpha\beta} = f_\alpha g_{\alpha\beta} f_\beta^{-1}$ allora i \mathcal{G} -fasci principali associati sono isomorfi e l'isomorfismo è ottenuto 'incollando' le f_α .

In quello che segue si farà una costruzione piuttosto immediata date le precedenti osservazioni che però sarà davvero utile e interessante in tutto il resto della trattazione. Vogliamo definire un oggetto chiamato $H^1(X, \mathcal{G})$ chiamato primo gruppo di coomologia di X a valori in \mathcal{G} , il quale classificherà i \mathcal{G} -fasci principali.

Consideriamo in prima istanza un ricoprimento $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ del nostro spazio topologico X e indichiamo con $U_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} := U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ come al solito. Consideriamo i gruppi

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) := \prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \mathcal{G}(U_{\alpha_1, \dots, \alpha_p})$$

Che chiamiamo gruppi di cocatene, qui siamo interessati in particolare a $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ e $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Indicheremo con f un elemento generico di C^0 e con g un elemento di C^1 . Consideriamo il sottoinsieme (che in generale non sarà un sottogruppo) di C^1 degli 1-cocicli. Che soddisfano

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \quad \text{su } U_{\alpha\beta\gamma}$$

Notiamo che in particolare risulta che $g_{\alpha\alpha} = e$ e $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$. L'insieme dei cocicli lo denotiamo con $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Osserviamo inoltre che abbiamo un'azione naturale del gruppo $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ sul nostro $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ ponendo $d(f)(g)_{\alpha\beta} = f_\alpha g_{\alpha\beta} f_\beta^{-1}$ e notiamo che se g sta in Z^1 anche $d(f)(g) \in Z^1$ infatti $d(f)(g)_{\alpha\beta} d(f)(g)_{\beta\gamma} = f_\alpha g_{\alpha\beta} f_\beta^{-1} f_\beta g_{\beta\gamma} f_\gamma^{-1} = f_\alpha g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} f_\gamma^{-1} = d(f)(g)_{\beta\gamma}$.

Chiamiamo $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ il quoziente di Z^1 modulo l'azione del gruppo $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, è evidente da quanto discusso sopra che quello che è appena stato costruito classifica i \mathcal{G} -fasci principali che si banalizzano sul ricoprimento \mathcal{U} .

Sia ora \mathcal{V} un ricoprimento aperto di X che sia un raffinamento di \mathcal{U} ovvero tale che per ogni aperto $V \in \mathcal{V}$ sia contenuto in qualche aperto di \mathcal{U} abbiamo quindi una mappa $\nu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ chiamata mappa di raffinamento che descrive l'associazione appena illustrata, questa però in generale non sarà unica. La mappa di raffinamento induce in modo naturale una mappa in coomologia.

$$\nu^* : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{G})$$

Questa associa alla classe di un cociclo $g_{\alpha\beta}$ il cociclo $\nu^*(g)_{ij} = (g_{\nu(i)\nu(j)})|_{V_{ij}}$. Questa con l'interpretazione geometrica dei \mathcal{G} -fasci associa semplicemente ad un \mathcal{G} -fascio banalizzato su \mathcal{U} la sua banalizzazione sul raffinamento \mathcal{V} rispetto alla mappa μ , ma la sua classe di isomorfismo non dipende dalla scelta del raffinamento e pertanto la mappa $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ non dipende da μ . Otteniamo quindi un sistema induttivo di insiemi indicizzato sui ricoprimenti di X . Siccome la classe dei ricoprimenti di X non costituisce un insieme e quindi formalmente non possiamo

fare il limite induttivo, possiamo considerare per esempio i ricoprimenti costituiti da tutti aperti diversi e fare il limite su questi. Siccome la famiglia di questi ultimi ricoprimenti è cofinale nella classe dei ricoprimenti aperti otteniamo lo stesso risultato.

Definizione 3.1.2. Si chiama primo gruppo di coomologia a valori nel fascio \mathcal{G} l'insieme

$$H^1(X, \mathcal{G}) := \varinjlim H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

Risulta inoltre che $H^1(X, \mathcal{G})$ è un funtore in \mathcal{G} .

Enunciamo qui il seguente teorema che verrà dimostrato in seguito nel caso abeliano in una versione più generale.

Teorema 3.1.1. Sia $1 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 1$ una sequenza esatta di fasci di gruppi. Allora esiste una mappa, chiamata mappa di bordo $\omega : H^0(X, \mathcal{G}'') \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}')$ in modo tale che la seguente sequenza di insiemi puntati sia esatta:

$$1 \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}') \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}'') \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}') \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}'')$$

3.2 Coomologia Abeliana

In questa sezione procederemo con lo studio dei gruppi di coomologia a valori nei fasci, restringendoci però al caso di fasci di gruppi abeliani. In quest'ultimo caso è infatti possibile definire i gruppi di coomologia di ordine superiore, che con modeste ipotesi sullo spazio topologico di partenza soddisferanno la classica sequenza esatta lunga in coomologia. Sia quindi \mathcal{G} un fascio di gruppi abeliani e in primo luogo riconsideriamo i gruppi di cocatene $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ e osserviamo che nel caso abeliano questi formano in modo naturale un complesso con mappe di bordo $\partial^p : \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ definite da

$$\partial^p(g_{\alpha_1 \dots \alpha_p})_{\beta_1 \dots \beta_{p+1}} = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i (g_{\beta_1 \dots \hat{\beta}_i \dots \beta_{p+1}})_{|U_{\beta_1 \dots \beta_{p+1}}}$$

Indicheremo $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) := \ker \partial^p$, il gruppo dei cocicli, $B^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) := \text{Im } \partial^{p-1}$ il gruppo dei cobordi e con $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})/B^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ la coomologia di tale complesso. Osserviamo in primo luogo che grazie alla proprietà di fascio $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{G})$ per ogni ricoprimento \mathcal{U} , infatti possiamo considerare la mappa $\Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ che associa ad una sezione globale g la tupla $g_\alpha = g|_{U_\alpha}$ la quale chiaramente sta nel nucleo di ∂^0 , d'altro se $g_\alpha \in \ker \partial^0$ si ha che $g_\alpha = g_\beta$ nell'intersezione $U_{\alpha\beta}$ ogni volta che questa è non vuota, pertanto le g_α si possono incollare ad una sezione globale g , questo dimostra la suriettività. L'iniettività segue invece dal fatto che se due sezioni coincidono una volta ristrette agli aperti di un fissato ricoprimento allora sono uguali. Considerando ora come nel caso non abeliano un raffinamento $\nu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ si osserva che questo definisce in modo naturale un morfismo di complessi $\nu^* : \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{G})$.

Osservazione 3.2.1. Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X e $\nu, \mu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, allora le mappe indotte sui complessi $\nu^*, \mu^* : \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ sono omotope e pertanto determinano la stessa mappa in coomologia.

Dimostrazione. Trovare un omotopia vale a dire trovare mappe $h^p : \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ per cui valga

$$\mu^p - \nu^p = h^p \partial_{\mathcal{U}}^p + \partial_{\mathcal{V}}^{p-1} h^{p-1}$$

Un conto mostra che la mappa $h^p(g)_{\alpha_1 \dots \alpha_p} := \sum_{i=1}^p (-1)^i g_{\mu(\alpha_1) \dots \mu(\alpha_i) \nu(\alpha_i) \dots \nu(\alpha_p)}$ soddisfa l'equazione appena scritta. \square

Definizione 3.2.1. Dato un fascio di gruppi abeliani \mathcal{G} si definisce il p -esimo gruppo di coomologia come il limite induttivo dei p -esimi gruppi di coomologia dei complessi $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

$$H^p(X, \mathcal{G}) := \varinjlim H^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

In quello che segue andremo a dimostrare e a descrivere la sequenza esatta lunga in coomologia. Consideriamo quindi una sequenza esatta corta di fasci di gruppi abeliani $0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ e osserviamo che questa dà luogo ad una sequenza di complessi:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^3(\mathcal{U}, \mathcal{H}) & \longrightarrow & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^3(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^3(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Le cui colonne sono esatte, ma l'ultima mappa che in generale non è suriettiva. Chiamiamo $\bar{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ l'immagine di tale mappa. Questi gruppi costituiscono a loro volta un complesso e denoteremo con $\bar{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ la sua coomologia. Osserviamo qui che notazioni analoghe si ha $\bar{Z}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cap \bar{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e che $\bar{B}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cap \bar{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. È pure vero che questi ultimi formano un sistema induttivo. La sequenza esatta di complessi $0 \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow 0$ dà luogo alla sequenza esatta lunga in coomologia

$$\dots H^i(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow H^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \bar{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \dots$$

Descriviamo il morfismo $\omega : \bar{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ senza dimostrare che quanto andremo a descrivere definisce un morfismo e tanto meno senza dimostrare la sequenza esatta lunga le quali sono tutte verifiche meccaniche.

$$\begin{array}{ccc} & & h \\ & & \downarrow \\ g & \longrightarrow & \partial g \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Consideriamo un cociclo $[f] \in \bar{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e un suo rappresentante $f \in \bar{Z}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, siccome la mappa $\mathcal{C}^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \bar{\mathcal{C}}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è suriettiva esiste una cocatena g che mappa in f . Essendo f un cociclo è facile vedere che il bordo di g mappa a 0 in $\bar{\mathcal{C}}^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e quindi per esattezza viene da un cociclo in $h \in Z^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ la classe di questo oggetto è il valore di $\omega([g])$.

Passando ai limiti, siccome la famiglia dei ricoprimenti aperti con l'ordinamento di raffinamento è filtrante si ottiene la sequenza lunga in coomologia

$$\dots H^i(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{G}) \rightarrow \bar{H}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{H}) \rightarrow \dots$$

Teorema 3.2.1. *Se X è uno spazio topologico paracompatto e di Hausdorff allora la mappa naturale $\bar{H}^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$ è un isomorfismo. Pertanto con le stesse ipotesi i gruppi di coomologia come da noi definiti soddisfano la sequenza esatta lunga.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che le condizioni sopra osservate $\bar{Z}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cap \bar{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e che $\bar{B}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cap \bar{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ implicano che l'inclusione $\bar{Z}^p \hookrightarrow Z^p$ induce morfismi in coomologia $\bar{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ i quali chiaramente commutano con le mappe di bordo. Passando al limite si ottiene quindi una mappa

$$\bar{H}^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$$

Mostriamone l'iniettività e la suriettività nelle ipotesi del teorema. Per prima cosa osserviamo che per concludere è sufficiente dimostrare che data una cocatena $g \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ esiste un raffinamento $\mu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ e una cocatena $f \in C^p(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ per cui μ^*g è immagine di f . Mostriamo che è effettivamente sufficiente:

- **Suriettività:** sia $[\xi] \in H^p(X, \mathcal{F})$ e consideriamo un suo rappresentante $\xi \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Sappiamo che esiste un raffinamento $\mu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ per cui $\mu^*\xi$ è immagine di una cocatena in $C^p(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ essendo un cociclo allora sta pure in $\bar{Z}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ e quindi appartiene all'immagine di $\bar{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{G})$. Pertanto siccome $[\xi] = [\mu^*\xi] \in H^p(X, \mathcal{F})$ per definizione di limite si conclude;
- **Iniettività :** Supponiamo di avere $[\eta] \in \bar{H}^p(X, \mathcal{F})$ che mappa in 0. Preso un suo rappresentante questo vuol dire che esiste un ricoprimento aperto \mathcal{U} per cui $\eta = \partial\xi$ raffinando il ricoprimento si può supporre che ξ sia in $\bar{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e pertanto la classe di η in $H^p(X, \mathcal{F})$ è nulla dato che la sua immagine in $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ lo è.

Dimostriamo quindi l'ultima tesi alla quale ci siamo ricondotti. Sia \mathcal{U} un ricoprimento, che grazie alle ipotesi può essere preso localmente finito. $g \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ una cocatena. Essendo X paracompatto e Hausdorff e quindi normale si può trovare un ricoprimento aperto W_α per cui $\bar{W}_\alpha \subseteq U_\alpha$. Per ogni punto $x \in X$ scegliamo un intorno V_x sufficientemente piccolo da rispettare le seguenti condizioni:

- $V_x \subseteq W_\alpha$ per almeno un α ;
- Quando $V_x \cap W_\alpha \neq \emptyset$ si ha $V_x \subseteq U_\alpha$;
- Ogni qualvolta che $x \in U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ allora $V_x \subseteq U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ e $g_{\alpha_1 \dots \alpha_p}|_{V_x}$ è immagine di $\mathcal{G}(V_x)$.

Si consideri infatti un aperto \bar{V}_x che interseca un numero finito di U_α . A questo punto basta intersecarlo con i W_α che contengono x e con il complementare dei \bar{W}_α che non contengono x . A questo punto per ogni V_x si scelga un aperto $V_x \subseteq W_x \subseteq U_x$ il che è possibile per la condizione 1 e si consideri $(V_x)_x$ come raffinamento di \mathcal{U} . Osserviamo ora che se $\emptyset \neq V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n} \subseteq W_{x_1} \cap \dots \cap W_{x_n}$ si ha che $V_{x_i} \subseteq U_{x_j}$ per ogni i e j . Questo perchè $V_{x_i} \cap W_{x_j} \neq \emptyset$ per il fatto $\emptyset \neq V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ e dall'ipotesi 2 segue che $V_{x_i} \subseteq U_{x_j}$. Ne segue che $V_{x_i} \subseteq \cap_j U_{x_j}$ e dall'ipotesi 3 segue che $g|_{V_{x_1}}$ è immagine di $\mathcal{G}(V_{x_1})$ ma allora a maggior ragione g ristretto all'intersezione è nell'immagine e questo conclude la dimostrazione. \square

In virtù di quest'ultimo teorema la mappa di bordo $H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{H})$ può essere così descritta. Consideriamo un cociclo g definito su un ricoprimento aperto \mathcal{U} , l'isomorfismo $\bar{H}^p(X, \mathcal{F}) \simeq H^p(X, \mathcal{F})$ implica che esiste un raffinamento di \mathcal{U} per cui il cociclo g considerato su questo raffinamento è immagine di una cocatena. A questo punto la descrizione procede come nella descrizione della mappa di bordo $\bar{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$.

Osservazione 3.2.2. Siccome tutte le varietà sono spazi topologici paracompatti di Hausdorff, per i fini di questa trattazione avremo sempre a disposizione la sequenza esatta lunga in coomologia.

Osservazione 3.2.3. La coomologia di fasci qui introdotta assume lo stesso ruolo dei funtori derivati a destra del funtore $\Gamma(X, -) : \mathbf{AbSh} \rightarrow \mathbf{Grp}$. Infatti abbiamo osservato in precedenza che $H^0(X, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{G})$.

3.3 Fasci aciclici e coomologia di de Rham

In questa sezione trattiamo brevemente alcuni risultati coomologici, in particolare mostreremo come si lega la coomologia di de Rham alla coomologia di fasci. Questo ci tornerà utile in seguito dato che permetterà di dimostrare che per esempio per una superficie di Riemann compatta X vale $H^2(X, \mathbb{C}) \simeq H_{dR}^2(X) \simeq \mathbb{C}$. Iniziamo col dare qualche definizione. Terremo inizialmente la discussione abbastanza generale e assumeremo sempre che gli spazi topologici trattati siano paracompatti e di Hausdorff, il che come già osservato in precedenza è sempre vero per le varietà.

Definizione 3.3.1. Un fascio \mathcal{F} di gruppi abeliani su uno spazio topologico X si dice *aciclico* se per ogni $i > 0$ $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.

Definizione 3.3.2. Sia \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico X . Si dice *risoluzione aciclica* di \mathcal{F} una sequenza esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathcal{F}^3 \rightarrow \dots$$

in cui gli \mathcal{F}^i sono aciclici per ogni $i \geq 1$. Queste in analogia con i complessi verranno indicate con $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\bullet$

Nella proposizione che segue dimostriamo che in un certo senso i fasci aciclici possono essere utilizzati per calcolare la coomologia

Proposizione 3.3.1. Sia \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani e $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\bullet$ una sua risoluzione aciclica. Consideriamo il complesso di gruppi abeliani

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^1) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^2) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^3) \rightarrow \dots$$

e prendiamone la coomologia

$$H^i(X, \mathcal{F}^\bullet) := \frac{\ker(\Gamma(X, \mathcal{F}^i) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{i+1}))}{\operatorname{Im}(\Gamma(X, \mathcal{F}^{i-1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^i))}$$

Esistono allora degli isomorfismi canonici indotti dalle mappe tra i fasci in questione

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(X, \mathcal{F}^\bullet)$$

Dimostrazione. Denotiamo con $\mathcal{K}^i := \ker(\mathcal{F}^i \rightarrow \mathcal{F}^{i+1})$ il quale è un fascio e osserviamo subito che siccome il funtore $\Gamma(X, -)$ è esatto a sinistra si ha $\Gamma(X, \mathcal{K}^i) = \ker(\Gamma(X, \mathcal{F}^i) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{i+1}))$. La sequenza esatta lunga della risoluzione aciclica si può decomporre in sequenze esatte corte come segue:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{K}^2 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathcal{K}^i \rightarrow \mathcal{F}^i \rightarrow \mathcal{K}^{i+1} \rightarrow 0 \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

La sequenza esatta lunga in coomologia applicata alla prima fornisce

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^1) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^2) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0$$

Dato che $H^1(X, \mathcal{F}^1) = 0$ per ipotesi, pertanto si ha che $H^1(X, \mathcal{F}) \simeq \frac{\Gamma(X, \mathcal{K}^2)}{\text{Im}(\Gamma(X, \mathcal{F}^1) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^2))}$. Si osserva che $\text{Im}(\Gamma(X, \mathcal{F}^1) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^2)) = \text{Im}(\Gamma(X, \mathcal{F}^1) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^2))$, pertanto si ha la tesi per $i = 1$ dato che l'uguaglianza $\Gamma(X, \mathcal{K}^i) = \ker(\Gamma(X, \mathcal{F}^i) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{i+1}))$ era già stata osservata. I pezzi successivi della sequenza lunga, sempre dato che $H^i(X, \mathcal{F}^1) = 0$ per tutti gli $i \geq 1$ sono del tipo $0 \rightarrow H^i(X, \mathcal{K}^2) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0$ e la mappa di mezzo è un isomorfismo. La sequenza esatta lunga in coomologia applicata alle sequenze esatte corte del secondo tipo fornisce in modo totalmente analogo i seguenti isomorfismi:

$$H^1(X, \mathcal{K}^i) \simeq \frac{\Gamma(X, \mathcal{K}^{i+1})}{\text{Im}(\Gamma(X, \mathcal{F}^i) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^{i+1}))} = H^i(X, \mathcal{F}^\bullet)$$

dove l'ultima uguaglianza è ottenuta con argomentazioni simili a quelle appena fatte sopra. In aggiunta si hanno in maniera analoga al caso $i = 1$ isomorfismi $H^j(X, \mathcal{K}^{i+1}) \simeq H^{j+1}(X, \mathcal{K}^i)$. Da questi ultimi si deduce immediatamente che

$$H^i(X, \mathcal{F}^\bullet) \simeq H^1(X, \mathcal{K}^i) \simeq H^{i-1}(X, \mathcal{K}^2) \simeq H^i(X, \mathcal{F})$$

E questo dimostra la tesi. \square

Rimane il fatto che non è affatto banale a priori determinare quali fasci siano aciclici, fortunatamente però esiste un criterio piuttosto semplice che si applica ad una grande maggioranza dei fasci che compaiono in modo naturale nelle varietà liscie. Diamo prima qualche altra definizione.

Definizione 3.3.3. Sia \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico X e $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un ricoprimento aperto localmente finito. Si dice *partizione dell'unità* subordinata al ricoprimento \mathcal{U} una collezione di morfismi di fasci $\rho_\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ che soddisfino le seguenti proprietà:

- $\rho_\alpha(\mathcal{F}_p) = 0$ per ogni punto $p \in X \setminus U_\alpha$;
- $\sum_\alpha \rho_\alpha = \text{id}$ Questa somma è ben definita in quanto spiga per spiga compaiono solamente un numero finito di termini non nulli dato che il ricoprimento è localmente finito.

Un fascio che ammette una partizione dell'unità rispetto a qualunque ricoprimento aperto localmente finito verrà chiamato *fine*.

Esempio 3. L'esempio fondamentale di fasci fini sono i fasci di $\mathcal{C}^\infty(X)$ -moduli su una varietà liscia X . Infatti preso un ricoprimento localmente finito \mathcal{U} esiste sempre una partizione dell'unità in senso liscio subordinata a tale ricoprimento $\rho_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ e le moltiplicazioni per le ρ_α su un fascio di questo tipo danno luogo a morfismi additivi di fasci che rispettano la definizione di partizione dell'unità per i fasci proprio in virtù delle proprietà di partizioni delle unità in senso liscio delle ρ_α .

Proposizione 3.3.2. Sia \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico X , \mathcal{U} un ricoprimento localmente finito e ρ_α una partizione dell'unità per \mathcal{F} subordinata ad \mathcal{U} . Allora per ogni $q \geq 1$ si ha $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi mostriamo esplicitamente che ogni cociclo $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è in realtà un cobordo. Fissiamo un indice β e consideriamo per ogni $q - 1$ upla di indici $\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ l'elemento $\rho_\beta(f_{\beta, \alpha_1 \dots \alpha_{q-1}}) \in \Gamma(U_{\beta, \alpha_1 \dots \alpha_{q-1}}, \mathcal{F})$. Questo grazie alle proprietà di ρ_β

si può estendere a 0 a tutto $U_{\alpha_1 \dots \alpha_{q-1}}$. Denotiamo con $g_{\alpha_1 \dots \alpha_{q-1}}^\beta$ tale estensione, che al variare degli indici ai pedici determina una cocatena in $\mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Osserviamo inoltre che

$$\partial(g^\beta)_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \sum_{i=1}^q (-1)^i g_{\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_q}^\beta = \rho_\beta(f_{\alpha_1 \dots \alpha_q}) - \partial \rho_\beta(f)_{\beta \alpha_1 \dots \alpha_q} = \rho_\beta(f_{\alpha_1 \dots \alpha_q})$$

Pertanto denotando con $g := \sum_\beta g_\beta$ che ha sempre senso dato che il ricoprimento è localmente finito si ottiene $\partial g = \sum_\beta \rho_\beta(f) = f$ il che conclude la dimostrazione. \square

Corollario 3.3.1. *Sia X uno spazio topologico paracompatto di Hausdorff e \mathcal{F} un fascio fine su X . Si ha che $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $q \geq 1$ dato che i ricoprimenti localmente finiti sono cofinali nei ricoprimenti aperti e per questi la coomologia è sempre nulla grazie alla proposizione precedente.*

Concludiamo questa sezione mostrando quindi che la coomologia di de Rham coincide con la coomologia di fasci. Sia quindi X una varietà liscia indichiamo con Ω_X^k il fascio delle k -forme differenziali lisce e seguendo la nomenclatura standard denotiamo con $d_k : \Omega_X^k \rightarrow \Omega_X^{k+1}$ la derivata esterna. Il nucleo di d_k sono le forme differenziali chiuse mentre la sua immagine sono le forme differenziali esatte. Classici teoremi di analisi dimostrano che per un intorno diffeomorfo a \mathbb{R}^n forme chiuse e esatte coincidono pertanto la seguente è una sequenza esatta di fasci:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_X^n \rightarrow 0$$

Siccome tutti quelli sopra riportati, eccezion fatta per \mathbb{R} , sono fasci di $\mathcal{C}^\infty(X)$ -moduli e quindi fasci fini per quanto osservato nell'esempio 3 tale sequenza è una risoluzione aciclica per il fascio \mathbb{R} . Come conseguenza della proposizione 3.3.1 si ottiene

$$H^q(X, \mathbb{R}) \simeq \frac{\ker d_q}{\operatorname{Im} d_{q-1}} = H_{dR}^q(X) \quad q \geq 1$$

In particolare se consideriamo le funzioni lisce a valori in \mathbb{C} anzichè a valori in \mathbb{R} tutte le considerazioni fatte fin'ora continuano a valere dato che stiamo semplicemente considerando coppie di funzioni. Pertanto riportiamo un caso particolare che ci sarà utile in futuro

Proposizione 3.3.3. *Sia X una superficie di Riemann compatta. Si ha che $H^2(X, \mathbb{C}) \simeq H_{dR}^2(X) \simeq \mathbb{C}$. Dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto noto che per varietà compatte connesse la coomologia n -dimensionale è di dimensione 1.*

Capitolo 4

Fibrati principali e criterio di Atiyah

Scopo principale di questo capitolo è quello di descrivere un criterio molto generale e di conseguenza molto astratto e poco concreto che riguarda l'esistenza di connessioni su un fibrato vettoriale E , il criterio di Atiyah che è dato in termini di coomologia. Per dimostrarlo introdurremo la nozione di G -fibrato principale che nel caso in cui $G = GL(n, \mathbb{C})$ è strettamente legata alla classica nozione di fibrato vettoriale. Studieremo e vedremo alcune elementari proprietà dei fibrati principali, una loro classificazione in termini di cocicli e vedremo come la nozione di connessione si trasporta in modo semplice. Quest'ultima mostreremo essere equivalente allo spezzamento di una certa sequenza esatta di spazi vettoriali su X , questo ci permetterà di dare una descrizione coomologica dell'esistenza di connessioni e di dimostrare il criterio di Atiyah.

4.1 Prime definizioni e proprietà

L'analisi dei fibrati vettoriali del capitolo precedente mostra che questi sono classificati dall'insieme $H^1(X, \mathcal{O}_X(GL(n, \mathbb{C})))$, è possibile però considerare un'altra classe di fibrati sulla varietà X i quali dimostreremo essere classificati dal medesimo insieme. Questi si riveleranno particolarmente profittevoli per lo studio delle connessioni. Con poco sforzo in più si può utilizzare un linguaggio più generale che permette la trattazione anche per gruppi diversi da $GL(n, \mathbb{C})$ come notazione indicheremo quindi con G un generico gruppo di Lie complesso.

Definizione 4.1.1. Dato G un gruppo di Lie complesso, si dice G -fibrato principale su X una varietà complessa P con un'azione olomorfa destra di G insieme ad un'applicazione suriettiva $\pi : P \rightarrow X$ che sia invariante per l'azione del gruppo. Si richiede inoltre che esista un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ e degli isomorfismi $f_\alpha : P|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times G$ che siano G -equivarianti (dove G opera a destra nel modo naturale su $U \times G$) e che facciano commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} P|_{U_\alpha} & \xrightarrow{f_\alpha} & U_\alpha \times G \\ \downarrow \pi|_{U_\alpha} & \searrow \pi_1 & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

Dove π_1 è la proiezione sulla prima coordinata.

I ricoprimenti introdotti nella precedente definizione verranno chiamati **ricoprimenti banalizzanti** e se non diversamente specificato saranno sempre accompagnati dagli isomorfismi $f_\alpha : P|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times G$.

Noi saremo particolarmente interessati al caso in cui $G = GL(n, \mathbb{C})$, dato che rispecchia il caso dei fibrati vettoriali, ma si terrà la discussione il più generale possibile, trattando quindi gruppi di Lie complessi generici e dove necessario specificando la necessità dell'ipotesi $G = GL(n, \mathbb{C})$. In ogni caso per non appesantire la notazione si denoterà con $\mathcal{G} := \mathcal{O}_X(G)$ il fascio delle funzioni olomorfe da X in G che è un fascio di gruppi in modo naturale il quale è abeliano se anche G lo è. La classificazione dei G -fibrati principali può essere affrontata in maniera analoga a quanto fatto per i fibrati vettoriali, il tutto è semplificato dalla seguente osservazione

Osservazione 4.1.1. Sia X una varietà complessa e G un gruppo di Lie complesso. Allora per ogni $\varphi : X \times G \rightarrow X \times G$ che sia equivariante e che commuti con le proiezioni su X esiste una funzione olomorfa $g : X \rightarrow G$ per cui $\varphi(p, h) = (p, g(p)h)$

Dimostrazione. Consideriamo infatti l'applicazione $g(p) := \pi_G \circ \varphi(p, 1)$ che è olomorfa da $X \rightarrow G$, in particolare dato che φ commuta con le proiezioni si avrà $\varphi(p, 1) = (p, g(p))$. Per G -invarianza però si ha $\varphi(p, h) = \varphi(p, 1) \cdot h = (p, g(p)h)$. \square

Proposizione 4.1.1. I G -fibrati principali a meno di isomorfismo sono in biezione con l'insieme $H^1(X, \mathcal{G})$.

Dimostrazione. 1) Dato un fibrato principale vogliamo associargli un cociclo in $H^1(X, \mathcal{G})$. Sia $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un ricoprimento banalizzante e consideriamo ogni qualvolta che $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ le mappe $f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : U_{\alpha\beta} \times G \rightarrow U_{\alpha\beta} \times G$. Dall'osservazione appena fatta segue che esistono mappe olomorfe $g_{\beta\alpha} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G$ tali che $f_\beta \circ f_\alpha^{-1}(p, h) = (p, g_{\beta\alpha}(p)h)$, queste le chiameremo *mappe di transizione*. È chiaro che queste soddisfano la relazione di cociclo e pertanto definiscono un elemento in $H^1(X, \mathcal{G})$. Si dimostra che dati due ricoprimenti banalizzanti arbitrari dello stesso fibrato principale la costruzione precedente definisce lo stesso elemento in $H^1(X, \mathcal{G})$.

2) Viceversa dato un cociclo vogliamo definire un fibrato principale il cui cociclo associato sia proprio quello di partenza. Sia quindi $g \in H^1(X, \mathcal{G})$ e sia $g_{\beta\alpha}$ un suo rappresentante per un certo ricoprimento $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ consideriamo allora

$$P := \coprod_\alpha U_\alpha \times G / \sim$$

Con l'usuale relazione $U_\alpha \times G \ni (p, g_1) \sim (q, g_2) \in U_\beta \times G \iff p = q \wedge g_2 = g_{\beta\alpha}(p)g_1$. La moltiplicazione a destra per G passa al quoziente, il quale risulta una varietà complessa che è anche un fibrato principale su X che si banalizza sul ricoprimento \mathcal{U} e per il quale le mappe di transizione sono proprio le $g_{\alpha\beta}$. \square

In virtù della proposizione precedente, posto $G = GL(n, \mathbb{C})$ sussistono quindi le seguenti biezioni:

$$\{\text{fibrati vettoriali di rango } n\} / \simeq \longleftrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(G)) \leftrightarrow \{G\text{-fibrati principali su } X\} / \simeq$$

Tale corrispondenza può essere resa geometricamente più esplicita come dimostra la seguente proposizione.

Proposizione 4.1.2. Valgono le seguenti due affermazioni, la prima vera per G generico con V una G -rappresentazione fedele, mentre la seconda richiede di limitarsi al caso in cui $G = GL(n, \mathbb{C})$ e $V = \mathbb{C}^n$:

- Sia P un G -fibrato principale. Allora il prodotto $P \times V$ è munito di un'azione sinistra di G : $g \cdot (p, v) = (pg^{-1}, gv)$ e inoltre $(P \times V)/G$ è un fibrato vettoriale di rango $\dim V$ su X definito dallo stesso cociclo di P ;

- Sia E un fibrato vettoriale di rango n su X . Allora $P = \{(v_1, \dots, v_n) \in \oplus_{i=1}^n E : (v_i) \text{ è una base di } E_x\}$ è un G -fibrato principale definito dallo stesso cociclo di E dove l'azione di G è la seguente. Data una matrice $A = (a_{ij})$ si pone $(v_1, \dots, v_n) \cdot A := (\sum a_{i1} v_i, \dots, \sum a_{in} v_i)$.

Dimostrazione. • Diamo una struttura di fibrato vettoriale a $(P \times V)/G$ e osserviamo in primo luogo che la proiezione $\pi : P \rightarrow X$ passa al quoziente (una volta estesa a $P \times V$ in modo banale). Sia ora $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un ricoprimento banalizzante. Consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} P_{|U_\alpha} \times V & \xrightarrow{\quad} & (P \times V)/G_{|U_\alpha} \\ \downarrow f_\alpha \times \text{id} & & \downarrow \pi \times \text{id} \\ U_\alpha \times G \times V & \xrightarrow{(p, g, v) \mapsto (p, gv)} & U_\alpha \times V \end{array}$$

La mappa $\pi \times \text{id}$ dal quoziente $(P \times V)/G_{|U_\alpha}$ è un omeomorfismo con l'immagine $U_\alpha \times V$ dato che localmente il fibrato è $U_\alpha \times G \times V$, se prendiamo queste come carte per lo spazio topologico quoziente $(P \times V)/G$ si dimostra facilmente che le mappe di transizione sono descritte dal cociclo che definiva P e pertanto determinano una struttura di fibrato vettoriale con fibra V su X .

- Verifichiamo che l'operazione definita nell'enunciato definisce effettivamente un'azione destra di $GL(n, \mathbb{C})$ su P , si ha:

$$\begin{aligned} ((v_1, \dots, v_n) \cdot A) \cdot B &= \left(\sum a_{i1} v_i, \dots, \sum a_{in} v_i \right) \cdot B \\ &= \left(\sum b_{i1} a_{ji} v_j, \dots, \sum b_{in} a_{ji} v_j \right) = (v_1, \dots, v_n) \cdot (AB) \end{aligned}$$

il che verifica che quella appena definita è un'azione di $GL(n, \mathbb{C})$ su P .

Sia ora $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un ricoprimento banalizzante per E , le $f_\alpha : E_{|U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ danno luogo a isomorfismi anche tra $E \oplus \dots \oplus E_{|U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times (\mathbb{C}^n)^n$. Quest'ultimo può essere identificato con $U_\alpha \times M(n, \mathbb{C})$ e con questa identificazione è chiaro che $P_{|U_\alpha}$ è in biiezione con $U_\alpha \times GL(n, \mathbb{C})$. La mappa è allora equivariante per l'azione appena definita in quanto le f_α erano lineari. Controlliamo che il cociclo che definisce il fibrato principale appena costruito sia lo stesso che definisce E . Questo però si rivela molto facile in quanto dette $g_{\alpha\beta}^n$ le mappe di transizione per $E \oplus E \dots \oplus E$ hanno una descrizione molto semplice $g_{\alpha\beta}^n(p)(z_1, \dots, z_n) = (g_{\alpha\beta}(p)z_1, \dots, g_{\alpha\beta}(p)z_n)$ che interpretando la sequenza di vettori come una matrice è esattamente la moltiplicazione a sinistra per matrice $g_{\alpha\beta}(p)$ il che conclude la dimostrazione. □

In virtù di tali associazioni è naturale chiedersi se il concetto di connessione si può trasportare ai fibrati principali in modo compatibile. Sarebbe naturale richiedere che dare una connessione su un fibrato principale fosse equivalente a dare una connessione nel senso usuale sul fibrato vettoriale associato. Si dà il caso che la nozione che soddisfa la precedente esista, come vedremo a breve.

Introduciamo prima un po' di notazioni:

- Con TP indicheremo il fibrato tangente olomorfo a P . Notiamo che l'azione di G su P si trasporta ad un'azione di G su TP semplicemente differenziando la prima delle due, la quale agisce permutando tra loro le fibre di TP ;

- La proiezione $\pi : P \rightarrow X$ dà luogo ad un'applicazione suriettiva, grazie all'ipotesi di fibrazione, $d\pi : TP \rightarrow TX$ il cui nucleo risulta essere un fibrato vettoriale su P dato che la mappa ha rango costante. Lo denoteremo con VP detto anche spazio verticale;
- Siccome π è G -invariante anche $d\pi$ lo è per l'azione di G su TP , in particolare il suo nucleo verrà mandato in se stesso dall'azione di G , pertanto l'azione di G su TP si restringe a VP ;
- Chiameremo spazio orizzontale un sottofibrato vettoriale $HP \subseteq TP$ che sia G -invariante e tale per cui $TP = HP \oplus VP$. L'esistenza di un tale complementare non solo non è ovvia ma non è nemmeno sempre vera: questo sarà l'argomento principale della discussione che segue.

Osservazione 4.1.2. VP risulta essere uno spazio molto semplice. In particolare esiste un isomorfismo di fibrati vettoriali su P tra VP e $P \times \mathfrak{g}$.

Dimostrazione. Sia $\sigma : P \times G$ l'azione strutturale. Definiamo la mappa $f : P \times \mathfrak{g} \rightarrow VP$ come segue:

$$f(p, \omega) := d\sigma_{p,1}(0, \omega)$$

Questa ha immagine in VP . Infatti considerando il tangente definito in termini di curve si ha che se $g(t)$ è una curva che rappresenta ω si ha che $\sigma(p, g(t)) \in \pi^{-1}(\pi(p))$ e pertanto rappresenta una curva che proiettata su X è costante che sta quindi in VP . Consideriamo ora un aperto banalizzante U per P e un isomorfismo G -invariante $P|_U \rightarrow U \times G$. In questo contesto si ha semplicemente $V(U \times G) = U \times TG = U \times G \times \mathfrak{g}$ e la mappa descritta sopra viene dal differenziale di

$$U \times G \times G \rightarrow U \times G \quad (u, g, h) \mapsto (u, gh)$$

Pertanto è immediato constatare che si legga come l'identità nel caso locale. f pertanto risulta un isomorfismo di fibrati vettoriali su P . \square

Definizione 4.1.2. Sia P un G -fibrato principale. Una G -connessione su P è un morfismo di P -fibrati vettoriali $\nabla : TP \rightarrow VP$ che sia una proiezione su VP (ovvero $\nabla|_{VP} = \text{id}$) e che sia G equivariante rispetto alle azioni introdotte in precedenza. In particolare se chiamiamo $\nabla_p : T_p P \rightarrow V_p P$ la mappa sulle fibre richiediamo che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} T_p P & \xrightarrow{dg_p} & T_{pg} P \\ \downarrow \nabla_p & & \downarrow \nabla_{pg} \\ V_p P & \xrightarrow{dg_p} & V_{pg} P \end{array}$$

Per dare un po' più di concretezza a questa definizione studiamo per un momento il caso locale, ovvero il caso in cui $P = X \times G$. In questo caso il tangente si può pensare come prodotto $TX \times TG$, e con tale notazione si ha naturalmente $VP = X \times TG$. Ricordiamo brevemente alcune proprietà elementari dei gruppi di Lie:

Proposizione 4.1.3. Sia G un gruppo di Lie olomorfo. Indichiamo con $R_g : G \rightarrow G$ l'applicazione olomorfa $h \mapsto hg$ e con dR_g il suo differenziale. Si ha che $TG \simeq G \times \mathfrak{g}$ dove $\mathfrak{g} := T_1 G$ è l'algebra di Lie del gruppo.

Dimostrazione. Il differenziale $d(R_g)_1 : T_1G \rightarrow T_gG$ dà luogo ad un isomorfismo per ogni g in quanto l'inversa è data da $d(R_{g^{-1}})_g$. La mappa $G \times \mathfrak{g} \rightarrow TG$ data da $(g, \omega) \mapsto d(R_g)_1(\omega)$ è allora biettiva e un morfismo di fibrati vettoriali il che conclude la dimostrazione. \square

Si vede quindi che una connessione è in questo caso equivalente a un morfismo $TX \rightarrow X \times \mathfrak{g}$. Diamo ora una caratterizzazione di G -connessione più geometrica che ci permetterà più avanti di stabilire l'equivalenza tra G -connessioni e connessioni in senso classico.

Lemma 4.1.1. *Dare una G connessione $\nabla : TP \rightarrow VP$ è equivalente a fornire un sottospazio orizzontale $HP \subset TP$ stabile per l'azione di G sul tangente. Osserviamo inoltre che un sottofibrato è orizzontale se e soltanto la proiezione $d\pi_p : H_pP \rightarrow T_{\pi(p)}X$ è un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $p \in X$.*

Dimostrazione. Data una G -connessione $\nabla : TP \rightarrow VP$ il suo nucleo $\ker \nabla$ risulta un sottofibrato di TP dato che essendo ∇ una proiezione questa ha rango costante. Come osservato prima inoltre, essendo ∇ un morfismo G -equivariante, il suo \ker è necessariamente uno spazio invariante.

Viceversa dato $HP \subseteq TP$ come nelle ipotesi della proposizione risulta chiaro che fibra per fibra si ha $T_pP = H_pP \oplus V_pP$ dato che V_pP è il nucleo di $d\pi_p$ mentre H_pP è un sottospazio sul quale $d\pi_p$ induce un isomorfismo con l'immagine. Si vede facilmente che dato che sono forniti entrambi i sottofibrati che $TP = VP \oplus HP$ pertanto definendo ∇ come la proiezione su VP secondo questa decomposizione otteniamo una G -connessione proprio grazie alla G -invarianza di HP .

Notiamo inoltre che essendo $\nabla_p : T_pP \rightarrow V_pP$ una proiezione questa è univocamente determinata dal suo nucleo, di conseguenza il sottospazio HP definito sopra caratterizza completamente la connessione. \square

4.2 Connessioni e fibrati orizzontali

Vediamo ora che questa caratterizzazione lega in modo piuttosto semplice il concetto di G -connessione al concetto usuale di connessione. Per farlo serve però un'ulteriore caratterizzazione di connessione su un fibrato vettoriale. Per prima cosa introduciamo brevemente delle notazioni analoghe a quelle appena usate. Consideriamo quindi un fibrato vettoriale $E \rightarrow X$ con proiezione π e per semplificare la trattazione assumiamo che X sia una superficie di Riemann.

- Indichiamo con TE il tangente di E e con $d\pi : TE \rightarrow TX$ il differenziale della proiezione che è suriettivo per l'ipotesi di fibrazione. Pertanto $\ker d\pi \subseteq TE$ è un sottofibrato vettoriale che denoteremo con VE ;
- VE è un fibrato vettoriale su E di rango pari al rango di E su X ;
- Un sottofibrato $HE \subseteq TE$ si dirà *orizzontale* se $TE = HE \oplus VE$, notiamo che tale condizione è equivalente al fatto che il differenziale della proiezione induca isomorfismi $d\pi_v : H_vE \rightarrow T_{\pi(v)}X$. Verrà denotata con $\kappa : TE \rightarrow VE$ la proiezione associata;
- Dato $v \in E$ indicheremo con κ_v la restrizione di κ alla fibra sopra v , in altre parole $\kappa_v : T_vE \rightarrow V_vE$;
- Indichiamo con $s : E \times_X E \rightarrow E$ l'applicazione olomorfa che definisce la somma sul fibrato vettoriale e con $\mu_\lambda : E \rightarrow E$ l'applicazione che definisce la moltiplicazione per lo scalare $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposizione 4.2.1. *Il fibrato vettoriale VE si identifica in modo canonico con il pullback π^*E in particolare $VE \simeq E \times_X E$:*

$$\begin{array}{ccc} VE = \pi^*E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione $\Phi : E \times_X E \rightarrow VE$ definita nel seguente modo:

$$\Phi(v, w) := [v + tw]$$

Dove con $[v + tw]$ indichiamo la classe della curva $t \mapsto v + tw$ come elemento in T_vE . Tale curva è però in realtà in V_vE dato che la sua proiezione è la curva costante $\pi(v)$. È inoltre piuttosto facile vedere che in carta, una volta identificato $E \times_X E|_U \simeq U \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ e $VE|_U \simeq U \times T\mathbb{C}^n \simeq U \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, tale mappa si legge come l'identità e pertanto definisce un biolomorfismo. Tale mappa risulta immediatamente lineare stabilisce quindi un isomorfismo di fibrati vettoriali su E . \square

Osservazione 4.2.1. Il comportamento di Φ rispetto ai differenziali di μ_λ e s è molto semplice:

- Dato $w \in V_vE$ vale che $\Phi^{-1}(d(\mu_\lambda)_v(w)) = \lambda\Phi^{-1}(w)$;
- Dati $w_i \in V_{v_i}E$ per $i = 1, 2$ si ha che $\Phi^{-1} \circ ds_{(v_1, v_2)}(w_1, w_2) = \Phi^{-1}(w_1) + \Phi^{-1}(w_2)$, dove quest'ultima somma è da intendersi su entrambe le componenti di $E \times_X E$

in questo contesto si intende che le operazioni di somma e prodotto per scalari sono operate su entrambe le componenti di $E \times_X E$.

Dimostrazione. Sappiamo già che $VE \simeq E \times_X E$ mediante Φ , pertanto ogni elemento $w \in V_vE$ è rappresentabile dalla classe di una curva del tipo $t \mapsto v + tw$ per un opportuno $w \in E_{\pi(v)}$ che con leggero abuso denoteremo sempre con w . Vediamo allora i punti con ordine:

- Utilizzando la rappresentazione discussa sopra si vede facilmente che $d(\mu_\lambda)_v([v + tw]) = [\lambda v + t\lambda w]$ e pertanto $\Phi^{-1}(d(\mu_\lambda)_v(w)) = (\lambda v, \lambda w) = \lambda\Phi^{-1}(w)$;
- Come sopra se $w_i = [v_i + tw_i]$ si ha $ds_{(v_1, v_2)}(w_1, w_2) = [v_1 + v_2 + t(w_1 + w_2)]$ ma allora è chiaro che $\Phi^{-1} \circ ds_{(v_1, v_2)}(w_1, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) = \Phi^{-1}(w_1) + \Phi^{-1}(w_2)$.

\square

Definizione 4.2.1. Un fibrato orizzontale $HE \subseteq TE$ si dice **lineare** se la proiezione associata κ commuta con i differenziali di somma e moltiplicazione per scalari, più precisamente se valgono le seguenti proprietà:

- $\kappa_{\mu_\lambda(v)} \circ d(\mu_\lambda)_v = d(\mu_\lambda)_v \circ \kappa_v$;
- $\kappa_{s(v, w)} \circ ds_{(v, w)} = ds_{(v, w)} \circ ((\kappa_v, \kappa_w))$

Dove con (κ_v, κ_w) si intende la mappa $T_{(v, w)}(E \times_X E) \rightarrow T_{(v, w)}(E \times_X E)$ che letta con gli isomorfismi $T_{(v, w)}(E \times_X E) = T_vE \times T_wE$ è proprio la coppia di κ_v e κ_w . D'ora in avanti parleremo indistintamente di fibrato orizzontale lineare e proiezione lineare con l'accezione data da questa definizione.

Diamo una descrizione locale di tale definizione, trattando quindi il caso in cui $E = X \times \mathbb{C}^n$, in questo caso valgono le seguenti identificazioni: $TE = TX \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ e $VP = X \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Indicheremo gli elementi di TX come coppie (p, v) con $v \in T_p X$ per chiarezza. Sia ora $\kappa : TE \rightarrow VE$ una proiezione lineare, osserviamo in primo luogo che dato che κ è una proiezione si ha che $\kappa_{p, \underline{z}} : T_p X \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ è della forma $\kappa_{p, \underline{z}}(v, w) = w - \varphi_{p, \underline{z}}(v)$ e pertanto è univocamente determinata dalla restrizione di κ a $T_p X$ che in ogni caso dipenderà anche dal punto $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$. In particolare possiamo vedere φ come un'applicazione $\varphi_p : T_p X \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. L'ipotesi di linearità in quest'ottica diventa molto chiara come la seguente proposizione dimostra.

Proposizione 4.2.2. *Sia $HE \subseteq TE$ un fibrato orizzontale, $\kappa : TE \rightarrow VE$ la proiezione associata e φ_p l'applicazione appena introdotta subordinata ad un aperto banalizzante arbitrario contenente p . Allora HE è lineare se e solo se per ogni $p \in X$ φ_p è bilineare.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che essendo la linearità una proprietà locale può essere controllata in un qualsiasi aperto banalizzante e viceversa se esiste un ricoprimento di aperti banalizzanti in cui è vera questa sarà vera anche globalmente. Supponiamo in primo luogo che κ sia lineare. Mostriamo che $\varphi_p(v, \lambda \underline{z}) = \lambda \varphi_p(v, \underline{z})$ e $\varphi_p(v, \underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \varphi_p(v, \underline{z}_1) + \varphi_p(v, \underline{z}_2)$.

- Sappiamo che $\kappa_{\mu_\lambda(v)} \circ d(\mu_\lambda)_v = d(\mu_\lambda)_v \circ \kappa_v$, osserviamo inoltre che nella nostra notazione se $v = (p, \underline{z})$ si ha $\lambda v = (p, \lambda \underline{z})$ che $d(\mu_\lambda)_{p, \underline{z}}(v, 0) = (v, 0)$ e $d(\mu_\lambda)(0, w) = (0, \lambda w)$. Pertanto

$$\begin{aligned} \varphi_p(v, \lambda \underline{z}) &= \kappa_{p, \lambda \underline{z}}(v, 0) = \kappa_{\mu_\lambda(p, \underline{z})} \circ d(\mu_\lambda)_{p, \underline{z}}(v, 0) = \\ &= d(\mu_\lambda)_{p, \underline{z}} \circ \kappa_{p, \underline{z}}(v, 0) = d(\mu_\lambda)_{p, \underline{z}}(\varphi_p(v, \underline{z})) = \lambda \varphi_p(v, \underline{z}) \end{aligned}$$

Dato che $\varphi(p, \underline{z})(v) \in T_{\underline{z}} \mathbb{C}^n$.

- In modo analogo si dimostra la proprietà della somma, utilizzando la seconda condizione nella definizione di linearità.

$$\begin{aligned} \varphi_p(v, \underline{z}_1 + \underline{z}_2) &= \kappa_{p, \underline{z}_1 + \underline{z}_2}(v, 0) = \kappa_{s((p, \underline{z}_1), (p, \underline{z}_2))} \circ ds_{((p, \underline{z}_1), (p, \underline{z}_2))}((v, 0), (v, 0)) = \\ &= ds_{((p, \underline{z}_1), (p, \underline{z}_2))}(\kappa_{p, \underline{z}_1}(v), \kappa_{p, \underline{z}_2}(v)) = ds_{((p, \underline{z}_1), (p, \underline{z}_2))}(\varphi_p(v, \underline{z}_1), \varphi_p(v, \underline{z}_2)) = \varphi_p(v, \underline{z}_1) + \varphi_p(v, \underline{z}_2) \end{aligned}$$

Supponiamo ora che φ_p sia bilineare e dimostriamo che pure κ lo è, questo però è semplice in quanto basta considerare equazioni simili a quelle appena scritte.

- Usiamo $\varphi_p(v, \lambda \underline{z}) = \lambda \varphi_p(v, \underline{z})$:

$$\begin{aligned} \kappa_{\mu_\lambda(p, \underline{z})} \circ d(\mu_\lambda)_{(p, \underline{z})}(v, 0) &= \kappa_{\mu_\lambda(p, \underline{z})}(v, 0) = \kappa_{(p, \lambda \underline{z})}(v, 0) = \varphi_p(v, \lambda \underline{z}) = \lambda \varphi_p(v, \underline{z}) = \\ &= d(\mu_\lambda)_{p, \underline{z}}(\varphi_p(v, \underline{z})) = d(\mu_\lambda)_{p, \underline{z}}(\kappa_{p, \underline{z}}(v)) \end{aligned}$$

- E analogamente supponendo $\varphi_p(v, \underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \varphi_p(v, \underline{z}_1) + \varphi_p(v, \underline{z}_2)$:

$$\begin{aligned} \kappa_{s((p, \underline{z}_1), (p, \underline{z}_2))} \circ ds_{((p, \underline{z}_1), (p, \underline{z}_2))}(v, 0) &= \kappa_{s((p, \underline{z}_1), (p, \underline{z}_2))}(v, 0) = \kappa_{p, \underline{z}_1 + \underline{z}_2}(v, 0) \\ &= \varphi_p(v, \underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \varphi_p(v, \underline{z}_1) + \varphi_p(v, \underline{z}_2) = ds_{((p, \underline{z}_1), (p, \underline{z}_2))}(\varphi_p(v, \underline{z}_1), \varphi_p(v, \underline{z}_2)) = \\ &= ds_{((p, \underline{z}_1), (p, \underline{z}_2))}(\kappa_{p, \underline{z}_1}(v), \kappa_{p, \underline{z}_2}(v)) \end{aligned}$$

□

Siamo pronti adesso a vedere la relazione tra fibrati orizzontali lineari e connessioni. In particolare dimostreremo che dato un fibrato orizzontale lineare HE sarà possibile associargli una connessione $\nabla(HE)$ e viceversa che ad ogni connessione ∇ è associato un fibrato orizzontale lineare $H(\nabla)$ e che tali associazioni sono una l'inversa dell'altra e pertanto determinano una corrispondenza tra fibrati orizzontali lineari e connessioni.

Proposizione 4.2.3. *Sia HE un fibrato orizzontale lineare per E con proiezione κ , U un aperto di X , $\sigma \in \mathcal{E}(U)$ e v un campo vettoriale definito su U . Allora $\nabla_v(\sigma) \in \mathcal{E}(U)$ definita dal seguente diagramma definisce una connessione su E :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 TE & \xrightarrow{\kappa} & VE & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & E \times_X E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\
 \uparrow d\sigma & & & & & & \nearrow \nabla_v(\sigma) \\
 TU & & & & & & \\
 \uparrow v & & & & & & \\
 U & & & & & &
 \end{array}$$

Tale connessione la denoteremo con $\nabla(HE)$

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che quanto appena definito definisce un morfismo \mathbb{C} -bilineare di fasci $\mathcal{E} \times \mathcal{T}X \rightarrow \mathcal{E}$ che è anche \mathcal{O}_X -lineare nella seconda coordinata.

- Sia σ una sezione e $\lambda \in \mathbb{C}$ uno scalare. Calcoliamo $\nabla_v(\lambda\sigma)$ fissato un campo vettoriale generico, l'osservazione fondamentale da fare è che $d(\lambda\sigma)_p = d(\mu_\lambda)_{\sigma(p)} \circ d\sigma_p$ e pertanto possiamo applicare le ipotesi di linearità di κ e quanto osservato nell'osservazione 4.2.1:

$$\begin{aligned}
 \nabla_v(\lambda\sigma)(p) &= \pi_2 \circ \Phi^{-1} \circ \kappa_{\lambda\sigma(p)} \circ d(\lambda\sigma)(v_p) = \\
 &= \pi_2 \circ \Phi^{-1} \circ \kappa_{\lambda\sigma(p)} \circ d(\mu_\lambda)_{\sigma(p)} \circ d(\sigma)(v_p) = \\
 &= \pi_2 \circ \Phi^{-1} \circ d(\mu_\lambda)_{\sigma(p)} \circ \kappa_{\sigma(p)} \circ d(\sigma)(v_p) = \\
 &= \lambda \pi_2 \circ \Phi^{-1} \circ \kappa_{\sigma(p)} \circ d(\sigma)(v_p) = \lambda \nabla_v(\sigma)(p)
 \end{aligned}$$

- Siano ora σ_1, σ_2 due sezioni definite sullo stesso aperto. Calcoliamo $\nabla_v(\sigma_1 + \sigma_2)$ con V generico. Di nuovo le osservazioni fondamentali sono che $\sigma_1 + \sigma_2 = s((\sigma_1, \sigma_2))$ e la seconda parte dell'osservazione 4.2.1:

$$\begin{aligned}
 \nabla_v(\sigma_1 + \sigma_2)(p) &= \pi_2 \circ \Phi^{-1} \circ \kappa_{\sigma_1(p) + \sigma_2(p)} \circ d(\sigma_1 + \sigma_2)_p(v_p) = \\
 &= \pi_2 \circ \Phi^{-1} \circ \kappa_{\sigma_1(p) + \sigma_2(p)} \circ ds_{(\sigma_1(p), \sigma_2(p))} \circ d(\sigma_1, \sigma_2)_p(v_p) = \\
 &= \pi_2 \circ \Phi^{-1} \circ ds_{(\sigma_1(p), \sigma_2(p))} \circ (\kappa_{\sigma_1(p)}, \kappa_{\sigma_2(p)}) \circ d(\sigma_1, \sigma_2)_p(v_p) = \\
 &= \pi_2 \circ \Phi^{-1} \circ ds_{(\sigma_1(p), \sigma_2(p))} \circ (\kappa_{\sigma_1(p)}(d\sigma_{1,p}(v_p)), \kappa_{\sigma_2(p)}(d\sigma_{2,p}(v_p))) = \\
 &= \nabla_v(\sigma_1)(p) + \nabla_v(\sigma_2)(p)
 \end{aligned}$$

- La \mathcal{O}_X -linearità nella seconda componente segue invece dalla linearità delle mappe considerate negli argomenti.

Aver stabilito che la mappa tra fasci è \mathbb{C} -bilineare e \mathcal{O}_X -lineare nella seconda componente la rende equivalente ad una mappa che per semplicità chiameremo sempre $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E}$. Rimane quindi da verificare la regola di Leibnitz che nella traduzione bilineare si legge come

$$\nabla_v(f\sigma) = df(V)\sigma + f\nabla_v(\sigma)$$

Le proprietà di fascio rendono possibile verificare quest'ultima anche solo localmente possiamo quindi farlo su aperti banalizzanti. Pertanto è sufficiente studiare il caso $E = X \times \mathbb{C}^n$, in cui come sempre ricordiamo che $TE = TX \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ e $VE = X \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, inoltre come sopra per $v \in T_p X$ e $w \in T_z \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$ scriveremo $\kappa(v, w) = \varphi_p(v, \underline{z}) + w$ con φ_p bilineare in quanto κ è lineare. In questo contesto date $f \in \mathcal{O}_X$ e $\sigma \in \mathcal{E}$ vale banalmente la seguente proprietà:

$$d(f\sigma)_p(v) = (v, f(p)\sigma(p), df_p(v)\sigma(p) + f(p)d\sigma_p(v))$$

Venendo ora al calcolo vero e proprio si ha:

$$\begin{aligned} \nabla_v(f\sigma)(p) &= \pi_2 \circ \Phi^{-1} \circ \kappa \circ d(f\sigma)_p(v_p) = \\ &= \pi_2 \circ \Phi^{-1} \circ \kappa_{f(p)\sigma(p)}(v_p, f(p)\sigma(p), df_p(v_p)\sigma(p) + f(p)d\sigma_p(v_p)) = \\ &= df_p(v_p)\sigma(p) + f(p)d\sigma_p(v_p) + \varphi_p(v_p, f(p)\sigma(p)) = \\ &= df_p(v_p)\sigma(p) + f(p)[d\sigma_p(v_p) + \varphi_p(v_p, \sigma(p))] = df_p(v_p)\sigma(p) + f(p)\nabla_v(\sigma)(p) \end{aligned}$$

Dove l'ultima uguaglianza è ottenuta dalla precedente sostituendo $f = 1$. \square

Proposizione 4.2.4. *Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale E . Allora valgono le seguenti:*

- *Data una sezione piatta ovvero tale che $\nabla f = 0$ in un intorno U di un punto p il sottospazio $df_p(T_p X) \subseteq T_{f(p)}E$ non dipende dalla sezione scelta;*
- *Ponendo $H_p E := df_p(T_p X)$ per una qualunque f piatta in un intorno di p , si ottiene un fibrato orizzontale lineare $HE \subseteq TE$.*

Il fibrato orizzontale appena descritto verrà denotato con $H(\nabla)$.

Dimostrazione. La discussione è sempre locale pertanto a meno di studiarla in un aperto banalizzante possiamo supporre $E = X \times \mathbb{C}^n$. In questo caso come già osservato nei primi capitoli la connessione sarà della forma $\nabla = d - A$ per un opportuna matrice $A \in M(n, \Omega_X^1)$, in particolare abbiamo l'esistenza locale di sezioni piatte e per ognuna di queste vale $d\sigma_p(v) = A(p)(v)\sigma(p)$ pertanto $d\sigma_p(T_p X)$ non dipende da σ . D'altro canto è proprio il differenziale della funzione a parametrizzare il tangente quindi è un sottofibrato. In particolare con la solita identificazione $TE = TX \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ risulta

$$H_{p,\underline{z}}E = \{(v, \underline{z}, A(p)(v)\underline{z})\}$$

La proiezione associata ha quindi come φ_p associata la mappa

$$\varphi_p(v, \underline{z}) = A(p)(v)\underline{z}$$

Che è bilineare e pertanto in virtù della proposizione 4.2.2 il fibrato orizzontale appena definito è lineare. \square

Proposizione 4.2.5. *Nel caso di fibrati su una superficie di Riemann le associazioni appena descritte $HE \mapsto \nabla(HE)$ e $\nabla \mapsto H(\nabla)$ sono una l'inversa dell'altra*

Dimostrazione. Tutte le descrizioni possono essere fatte localmente come al solito. Ricordiamo inoltre che in virtù del lemma 2.1.1 due connessioni definite sullo stesso fibrato sono uguali se e solo se possiedono le stesse sezioni piatte.

- $(HE = H(\nabla(HE)))$ Osserviamo che una sezione definita su un aperto che banalizza sia il fibrato che il tangente è piatta per una connessione definita a partire da un fibrato orizzontale se e soltanto se $\kappa \circ d\sigma = 0$ dato che possiamo trovare campi vettoriali che assumono valori arbitrari dato che il tangente si banalizza. Ora $d\sigma : T_p X \rightarrow T_{\sigma(p)} E$ è iniettiva ma si deve anche avere $d\sigma_p(T_p X) \subseteq \ker \kappa_{\sigma(p)} = H_p E$ ma siccome i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione sono uguali. Abbiamo dimostrato che la connessione definita a partire da HE ha come fibrato orizzontale associato proprio HE ;
- $(\nabla = \nabla(H(\nabla)))$ Si osserva che le due connessioni in questione hanno le medesime sezioni piatte (localmente) pertanto per quanto sopra sono uguali. Infatti sia σ una sezione piatta per ∇ , per quanto osservato prima essa risulta piatta localmente anche per $\nabla(H(\nabla))$ se e soltanto se $\kappa \circ d\sigma = 0$, ma il nucleo di κ è proprio pari all'immagine del differenziale di una qualunque sezione piatta, pertanto tale condizione è verificata. Viceversa se σ è piatta per $\nabla(H(\nabla))$ questa soddisfa $d\sigma(v) = A(p)(v)\sigma(p)$ dove $\nabla = d - A$ per quanto costruito sopra. Questa è però esattamente la condizione $\nabla(\sigma) = 0$.

□

Abbiamo quindi dimostrato, come nel caso dei fibrati principali, che le connessioni sono equivalenti in entrambi i casi a quelli che abbiamo denotato con fibrati orizzontali. Questa sarà l'idea motrice della prossima dimostrazione.

Teorema 4.2.1. *Siano P un $GL(n, \mathbb{C})$ -fibrato principale ed E un fibrato vettoriale definiti dallo stesso cociclo. Allora gli spazi orizzontali di $HP \subseteq TP$ sono in biezione con i fibrati orizzontali lineari $HE \subseteq TE$. Pertanto i concetti di $GL(n, \mathbb{C})$ -connessione e connessione su un fibrato vettoriale sono equivalenti.*

Dimostrazione. Procediamo nella dimostrazione mostrando prima le varie associazioni e poi provando che queste danno luogo effettivamente ad una corrispondenza. Ricordiamo che in virtù della proposizione 4.1.2 E è isomorfo al quoziente di $P \times \mathbb{C}^n$ per l'azione di G mentre P può essere visto come sottovarietà aperta di $\oplus_{i=1}^n E$.

1. Dato $HP \subseteq TP$ costruiamo HE . Consideriamo la proiezione $\theta : P \times \mathbb{C}^n \rightarrow E$ e osserviamo subito che data la $GL(n, \mathbb{C})$ -invarianza di HP e di θ si ha che $d\theta_{(p,v)}(H_p \times 0) = d\theta_{(pg, g^{-1}v)}(H_{pg} \times 0)$, definiamo quindi $HE := d\theta(HP)$. Inoltre sempre in virtù della proposizione 4.1.2 questa si legge su opportuni aperti banalizzanti nel modo seguente:

$$U \times G \times \mathbb{C}^n \rightarrow U \times \mathbb{C}^n \quad (p, g, v) \mapsto (p, gv)$$

Poichè HP è G -invariante è determinato univocamente dalla sua descrizione in $T_{u,1}(U \times G)$. Essendo inoltre il nucleo di morfismo di fibrati si avrà $H_{u,1} = \{(v, \varphi_p(v)) : v \in T_u U\}$ per delle opportune applicazioni lineari $\varphi_u : T_u U \rightarrow \mathfrak{g}$ tali che la mappa globale $\varphi : TU \rightarrow U \times \mathfrak{g}$ sia olomorfa. L'immagine è allora descritta in modo semplice : $d\theta_{(u,1,\underline{z})}(H_{p,1} \times 0) = \{(v, \varphi_u(v)\underline{z}) : v \in T_u U\}$ dove ricordiamo che $\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{C})$ e pertanto il prodotto $\varphi_u(v)\underline{z}$ è da intendersi come prodotto matrice vettore.

Da tale descrizione è evidente che l'insieme HE appena definito è un sottofibrato orizzontale di TE inoltre grazie alla proposizione 4.2.2 risulta anche lineare.

2. Dato $HE \subseteq TE$ costruiamo HP . Come scritto sopra interpretiamo P come un aperto di $\oplus_{i=1}^n E$ e osserviamo che $T(\oplus_{i=1}^n E) = TE \times_{TX} \cdots \times_{TX} TE$. Definiamo allora detto $x = \pi(v_1) = \cdots = \pi(v_n)$:

$$H_{v_1 \dots v_n} P := H_{v_1} E \times_{T_x X} \cdots \times_{T_x X} H_{v_n} E$$

Che è effettivamente un sottospazio di $T_{v_1 \dots v_n} E$ ristretto al quale $d\pi_{v_1 \dots v_n}$ risulta un isomorfismo. Mostriamo ora che è effettivamente un sottofibrato e che è lineare e per farlo lavoriamo su un aperto banalizzante U . Qui si ha $\oplus_{i=1}^n E|_U \simeq U \times \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n$ e sempre in virtù della proposizione 4.2.2 HE è descritto da

$$H_{u, \underline{z}} E = \{(v, \varphi_u(v, \underline{z})) : v \in T_u U\}$$

Dove come al solito $\varphi_u(v, \underline{z}) \in T_{\underline{z}} \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$. HP è allora immediatamente parametrizzato da

$$H_{u, \underline{z}_1 \dots \underline{z}_n} P = \{(v, \varphi_u(v, \underline{z}_1), \dots, \varphi_u(v, \underline{z}_n)) : v \in T_u U\}$$

Quindi eventualmente in un aperto più piccolo che banalizza anche TU si ottiene immediatamente una parametrizzazione per HP . Da tale descrizione risulta anche chiaro che HP è G -invariante, infatti se $g = (a_{ij})$

$$\begin{aligned} dg_{u, \underline{z}_1 \dots \underline{z}_n}((v, \varphi_u(v, \underline{z}_1), \dots, \varphi_u(v, \underline{z}_n))) &= \\ (v, \sum a_{i1} \varphi_u(v, \underline{z}_i), \dots, \sum a_{in} \varphi_u(v, \underline{z}_i)) &= \\ (v, \varphi_u(v, \sum a_{i1} \underline{z}_i), \dots, \varphi_u(v, \sum a_{in} \underline{z}_i)) &\in H_{g(\underline{z}_1 \dots \underline{z}_n)} \end{aligned}$$

Concludiamo ora la dimostrazione mostrando che le associazioni espone sono una l'inversa dell'altra, per farlo usiamo le descrizioni su aperti banalizzanti appena espone il che è chiaramente sufficiente. Pertanto Fissiamo un aperto U banalizzante. Notiamo inoltre che siccome $\varphi_u : T_u U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ (la mappa che parametrizza $H_{u, \underline{z}}$) è bilineare può essere scritta come $\varphi_i(v, \underline{z}) = \varphi_u(v) \underline{z}$ per un opportuna $\varphi_u : T_u U \rightarrow M(n, \mathbb{C})$, che con un leggero abuso denoteremo sempre con φ_u .

- ($HE \rightarrow HP \rightarrow HE$) Denotiamo con $\bar{H}E$ il risultato della composizione delle due associazioni. Si ha che $H_{u, \underline{z}}(U \times \mathbb{C}^n) = \{(v, \varphi_u(v) \underline{z}) : v \in T_u U\}$ e quindi come costruito prima

$$H_{u, \underline{z}_1 \dots \underline{z}_n} P = \{(v, \varphi_u(v) \underline{z}_1, \dots, \varphi_u(v) \underline{z}_n) : v \in T_u U\}$$

In particolare $H_{u, e_1 \dots e_n} P = \{(v, \varphi_u(v) e_1, \dots, \varphi_u(v) e_n) : v \in T_u U\}$ dove e_i denotano la base canonica di \mathbb{C}^n . E identificando $U \times \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n = U \times M(n, \mathbb{C})$ si ottiene

$$H_{u, \text{id}} P = \{(v, \varphi_u(v)) : v \in T_u U\}$$

Pertanto la costruzione del punto 1) porta a $\bar{H}_{u, \underline{z}}(U \times \mathbb{C}^n) = \{(v, \varphi_u(v) \underline{z}) : v \in T_u U\} = H_{u, \underline{z}}(U \times \mathbb{C}^n)$ come volevasi.

- $(HP \rightarrow HE \rightarrow HP)$ Come prima denotiamo con $\bar{H}P$ il risultato delle due associazioni e dimostriamo che $\bar{H}P = HP$ sugli aperti banalizzanti. Ricordiamo che $H(U \times GL(n, \mathbb{C}))$, così come $\bar{H}(U \times GL(n, \mathbb{C}))$ siccome entrambi G -invarianti sono univocamente determinati dagli $H_{u,1}(U \times GL(n, \mathbb{C}))$ al variare di $u \in U$. Questi come al solito sono descritti come segue:

$$H_{u,1}(U \times GL(n, \mathbb{C})) = \{(v, \varphi_u(v)) : v \in T_u U\}$$

Con le usuali $\varphi_u : T_u U \rightarrow \mathfrak{g}$. In base alla costruzione del punto 2. $H_{u,z}(U \times \mathbb{C}^n) = \{(v, \varphi_u(v)z) : v \in T_u U\}$ e quindi

$$\bar{H}_{u,e_1 \dots e_n}(U \times \mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n) = \{(v, \varphi_u(v)e_1, \dots, \varphi_u(v)e_n) : v \in T_u U\}$$

Che identificando $U \times \mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n = U \times M(n, \mathbb{C})$ è proprio

$$\bar{H}_{u,\text{id}}(U \times GL(n, \mathbb{C})) = \{(v, \varphi_u(v)) : v \in T_u U\} = H_{u,\text{id}}(U \times GL(n, \mathbb{C}))$$

Come volevasi dimostrare

□

Avendo dimostrato l'equivalenza dei due concetti, d'ora in avanti parleremo indistintamente di $GL(n, \mathbb{C})$ -connessioni su un fibrato principale o di connessioni usuali sul fibrato vettoriale associato. L'esposizione procederà dimostrando il criterio di Atiyah che concerne l'esistenza di connessioni su un dato fibrato vettoriale. Riportiamo qui un'ulteriore formulazione dell'esistenza del sottospazio HE .

Osservazione 4.2.2. Per costruzione di VP i seguenti fibrati vettoriali su P formano una sequenza esatta:

$$0 \rightarrow VP \rightarrow TP \rightarrow \pi^*TX \rightarrow 0$$

Con π^*TX il pullback del fibrato tangente a X mediante la proiezione $\pi : P \rightarrow X$ il quale è in modo naturale un G -spazio. Andiamo brevemente a descrivere meglio la mappa $TP \rightarrow \pi^*TX$ ricordando che π^*TX può essere visto come sottoinsieme di $P \times TX$ e la mappa in questione è esattamente $(p, v) \mapsto (p, d\pi_p(v))$ per $v \in T_p P$ e pertanto è chiaramente G -equivariante. Per definizione l'esistenza di una connessione su P è equivalente allo spezzamento di tale sequenza, fornito da una proiezione equivariante $\nabla : TP \rightarrow VP$. Lo stesso spezzamento può essere indotto in maniera simmetrica da una sezione equivariante $\pi^*TX \rightarrow TP$, l'immagine della quale determina il sottofibrato orizzontale invariante.

Punto fondamentale della prossima sezione sarà quello di riportare la sequenza appena scritta ad una sequenza di fibrati vettoriali su X in modo tale che lo spezzamento di quest'ultima sia equivalente ad uno spezzamento G -invariante della prima sequenza esposta.

4.3 Criterio di Atiyah

Scopo di questa sezione è quello di dimostrare il **criterio di Atiyah** che riguarda l'esistenza di connessioni olomorfe su un fibrato vettoriale su una superficie di Riemann $E \rightarrow X$. Il teorema afferma l'esistenza di un elemento $c(E) \in H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes \text{End } E))$ la cui nullità è equivalente all'esistenza di connessioni sul fibrato E . Tale criterio risulta per certi versi tautologico, ma

permetterà poi nel capitolo seguente di dimostrare il teorema di Weil, molto più concreto, nel caso in cui X sia una superficie compatta.

D'ora in avanti E denoterà un fissato fibrato vettoriale su X mentre P indicherà il fibrato principale associato. Come dimostrato nella sezione precedente l'esistenza di una connessione su E è equivalente all'esistenza di una connessione su P e noi studieremo in particolare quest'ultimo aspetto.

Per procedere nella dimostrazione è necessario introdurre due fibrati vettoriali su X , chiamati $\text{ad}(P)$ e $l(P)$. Per motivare quanto si andrà a studiare nelle prossime pagine premettiamo qualche osservazione.

Per definizione una G -connessione è una proiezione di fibrati vettoriali G -invariante $\nabla : TP \rightarrow VP$. Questa passa dunque ai quozienti topologici $\nabla : TP/G \rightarrow VP/G$ e sembra opportuno studiare quando esiste una mappa tra questi ultimi oggetti che venga da una connessione. I due quozienti in questione risultano essere dei fibrati vettoriali su X e sono descritti in maniera efficace da $l(P)$ e $\text{ad}(P)$ rispettivamente.

Definizione 4.3.1. Costruiamo e definiamo qui due fibrati vettoriali su X che denoteremo con $\text{ad}(P)$ e $l(P)$.

- $\text{ad}(P)$: Consideriamo lo spazio topologico quoziente $\text{ad}(P) := P \times \mathfrak{g} / G$ dove l'azione di G è data da

$$g \cdot (p, \omega) := (pg^{-1}, \text{Ad}_g(\omega))$$

Questo si proietta su X con la stessa $\pi : P \times \mathfrak{g} \rightarrow X$, che passa al quoziente in quanto mappa G -invariante. Definiamone ora una struttura di fibrato vettoriale su X e quindi anche una struttura olomorfa. Osserviamo subito che la fibra di un punto $x \in X$ di $\text{ad}(P)$ ammette una struttura di spazio vettoriale che la rende isomorfa (anche se non in modo canonico) a \mathfrak{g} . La fibra in x è descritta facilmente : $\text{ad}(P)_x = \{[p, \omega] \in \text{ad}(P) : \pi(p) = x\}$. Fissando un $p \in \pi^{-1}(x)$ diamo una struttura di spazio vettoriale sulla fibra come segue : $\lambda[p, \omega_1] + \mu[p, \omega_2] := [p, \lambda\omega_1 + \mu\omega_2]$. L'operazione è ben posta in quanto per qualunque elemento $\omega \in \text{ad}(P)_x$ esiste un unico ω_p per cui $\omega = [p, \omega_p]$. Questa inoltre non dipende dalla scelta di p : sia infatti $q \in \pi^{-1}(x)$, $q = pg$ e $v, w \in \text{ad}(P)_x$ allora abbiamo :

$$\begin{aligned} \lambda v + \mu w &= [p, \lambda v_p + \mu w_p] = [q, \text{Ad}_{g^{-1}}(\lambda v_p + \mu w_p)] = \\ &= [q, \lambda \text{Ad}_{g^{-1}}(v_p) + \mu \text{Ad}_{g^{-1}}(w_p)] = [q, \lambda v_q + \mu w_q] = v + w \end{aligned}$$

Per definire la struttura olomorfa consideriamo invece in un aperto U banalizzante per P , letto tramite l'isomorfismo $f : P|_U \rightarrow U \times G$, $\text{ad}(P)$ diventa il quoziente di $U \times G \times \mathfrak{g}$ per l'azione di G il quale si identifica con $U \times \mathfrak{g}$ mediante la composizione

$$U \times \mathfrak{g} \hookrightarrow U \times G \times \mathfrak{g} \rightarrow (U \times G \times \mathfrak{g})/G$$

Dove $(u, \omega) \mapsto (u, 1, \omega)$ Inoltre è piuttosto chiaro che la struttura additiva è proprio quella di questo prodotto in quanto è quella che deriva dal scegliere $x, 1$ come punto di riferimento per fare la somma. Questo definisce quindi delle carte che rispettano la struttura di fibrato per $\text{ad}(P)$ e pertanto una struttura di varietà complessa e di fibrato vettoriale su X .

- $l(P)$: Questo oggetto lo definiamo in termini di fascio in particolare poniamo dato un aperto $U \subseteq X$

$$l(P)(U) := \{v : P|_U \rightarrow TP|_U : v \text{ olomorfo e } G\text{-invariante}\}$$

Dobbiamo far vedere che si identifica localmente con le sezioni di un fibrato vettoriale su X , questo implica che $l(P)$ è un fascio di \mathcal{O}_X -moduli localmente libero e quindi il fascio associato ad un fibrato vettoriale. Consideriamo allora U un aperto banalizzante per P , come al solito mediante l'isomorfismo $f : P|_U \rightarrow U \times G$ possiamo considerare i campi di vettori su $P|_U$ come i campi di vettori su $U \times G$, in particolare siccome l'isomorfismo è G equivariante questa corrispondenza preserverà i campi di vettori G -invarianti. Osserviamo allora che un campo di vettori G -invariante sul prodotto è univocamente determinato una volta che conosciamo il suo valore in $(u, 1)$ al variare di $u \in U$, inoltre una volta dati questi valori il campo si prolunga lungo il prodotto definendo $\bar{v}(u, g) = dL_g(v(u, 1))$. L'applicazione $l(P)(U) \rightarrow \{v : U \rightarrow TU \times \mathfrak{g}, v \text{ olomorfo}\}$ che associa ad un campo di vettori i suoi valori in $(u, 1)$ è quindi biettiva, pertanto $l(P)$ localmente si identifica con $TU \times \mathfrak{g}$.

Riprendiamo ora l'osservazione fatta all'inizio della sezione dimostrando che effettivamente $\text{ad}(P) \simeq VP/G$ e $l(P) \simeq TP/G$. La prima delle due è effettivamente banale dato che avevamo dimostrato in precedenza che $VP \simeq P \times \mathfrak{g}$, vediamo quindi l'altra in dettaglio. Osserviamo in primo luogo che dalla descrizione in termini di fascio le fibre di $l(P)$ possono essere descritte come segue:

$$l(P)_x = \{(v_p)_p : p \in \pi^{-1}(x), v_p \in T_p P \text{ e } v_{pg} = d(g)_p(v_p)\}$$

come collezione di vettori invarianti. Osserviamo che la proiezione $P \rightarrow X$ ne induce un'altra: $TP \rightarrow X$ la quale passa al quoziente essendo G -invariante, TP/G si proietta quindi su X nel modo naturale. Le sue fibre sono così descritte:

$$(TP/G)_x = \{[v_p] : p \in \pi^{-1}(x) \text{ e } v_p \in T_p P\}$$

Dove la classe $[v_p]$ è chiaramente da intendersi come una classe del quoziente TP/G . Notiamo che la fibra ha quindi una struttura naturale di spazio vettoriale, fissato infatti $p \in \pi^{-1}(x)$ si ha che per ogni $v \in (TP/G)_x$ esiste un unico $v_p \in T_p P$ tale che $v = [v_p]$ in modo analogo a quanto fatto per $\text{ad}(P)$ possiamo definire la somma come $\lambda v + \mu w = [\lambda v_p + \mu w_p]$ e tale operazione non dipende dal punto p scelto. Consideriamo ora la mappa fibra per fibra:

$$l(P)_x \rightarrow (TP/G)_x \quad (v_p)_p \mapsto [v_p]$$

Per una qualunque scelta di $p \in \pi^{-1}(x)$. Anche questa mappa chiaramente non dipende dal punto p scelto. Osserviamo che su TP/G esiste una struttura naturale di fibrato vettoriale su X , infatti preso un aperto banalizzante U per P esiste un omeomorfismo canonico $TU \times \mathfrak{g} \rightarrow (TU \times \mathcal{G} \times \mathfrak{g})/G$ che rispetta la nozione di linearità appena data. Su questi aperti banalizzanti il morfismo appena definito si legge proprio come l'identità e determina quindi un biomorfismo tra i due fibrati vettoriali su X .

Precisiamo ulteriormente quanto affermato con il seguente lemma.

Lemma 4.3.1. *Dato un G -fibrato principale P su X gli spazi TP/G e VP/G sono in modo naturale dei fibrati vettoriali su X , inoltre $TP = \pi^*(TP/G)$ e $VP = \pi^*(VP/G)$.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che i due spazi costituiscono in modo naturale dei fibrati vettoriali su X , dobbiamo dimostrare quindi solo la seconda parte del lemma.

- Osserviamo subito che per costruzione il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{p} & TP/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Inoltre siccome il gruppo G agisce semplicemente permutando le fibre di TP il morfismo p è biiettivo fibra per fibra e pertanto risulta immediato il fatto che $TP = \pi^*(TP/G)$

- In modo totalmente analogo si dimostra l'affermazione riguardante VP difatti il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} VP & \xrightarrow{p} & VP/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Inoltre l'azione di G permuta sempre le fibre peranto p è un isomorfismo sulle fibre, il che rende $VP = \pi^*(VP/G)$.

□

Descriviamo ora brevemente i cocicli che da queste parametrizzazioni definiscono $\text{ad}(P)$ e $l(P)$ nel caso in cui $G = GL(n, \mathbb{C})$ e quindi $\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{C})$. Dato che questi dipendono unicamente dai cocicli che definiscono P è evidente che è sufficiente studiare, dato un isomorfismo equivariante $\varphi : U \times G \rightarrow U \times G$, l'isomorfismo indotto su $\text{ad}(U \times G) = G \times \mathfrak{g}$ e $l(P) = TU \times \mathfrak{g}$. Con un leggero abuso, in virtù dell'osservazione 4.1.1, denoteremo $\varphi(p, w) = (p, \varphi(p)w)$ e dove non ci sarà possibilità di fraintendimento non preciseremo quale φ si sta intendendo.

- ($\text{ad}(P)$) Ricordiamo che l'isomorfismo $\text{ad}(U \times G) = U \times \mathfrak{g}$ è indotto dall'inclusione $U \times \mathfrak{g} \rightarrow U \times G \times \mathfrak{g}$ che manda $(u, \omega) \mapsto (u, 1, \omega)$. Si ha quindi il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} U \times \mathfrak{g} & & U \times \mathfrak{g} & & (p, \omega) & & (p, \text{Ad}_{\varphi(p)} \omega) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ U \times G \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{\cong} & U \times G \times \mathfrak{g} & & (p, 1, \omega) & & (p, 1, \text{Ad}_{\varphi(p)} \omega) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ U \times G \times \mathfrak{g}/G & \xrightarrow{\cong} & U \times G \times \mathfrak{g}/G & & [p, 1, \omega] & \longrightarrow & [p, \varphi(p), \omega] = [p, 1, \text{Ad}_{\varphi(p)} \omega] \end{array}$$

Pertanto identificando $\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{C})$ e $G = GL(n, \mathbb{C})$ se P è definito dal cociclo $g_{\alpha\beta}$ risulta che $\text{ad}(P)$ è definito dal cociclo $\text{Ad}_{g_{\alpha\beta}} \in GL(M(n, \mathbb{C}))$ dove $\text{Ad}_{g_{\alpha\beta}} A = g_{\alpha\beta} A g_{\alpha\beta}^{-1}$. È pertanto chiaro che, detto E il fibrato vettoriale associato a P si ha un isomorfismo:

$$\text{ad}(P) \simeq \text{End}(E)$$

- $l(P)$ Come prima ricordiamo l'isomorfismo dato come fasci

$$l(U \times G)(V) \simeq \{v : U \rightarrow TU \times \mathfrak{g}\}$$

ottenuto restringendo un campo vettoriale G -invariante lungo $U \times \{1\}$. Questo isomorfismo si può descrivere lungo le fibre come segue. Notiamo che la fibra

$$l(U \times G)_p = \{(v, \omega_g)_g : g \in G, (v, \omega_g) \in T_p X \times T_g G \text{ e } \omega_g = d(R_g)_1(\omega_1)\}$$

È descritta dalle G -uple di vettori invarianti per l'azione di G . Con questa descrizione l'isomorfismo si legge come segue, preso un elemento $(v, \omega) \in T_p X \times \mathfrak{g}$:

$$(v, \omega) \mapsto ((v, d(R_g)_1 \omega))_g$$

Dato un isomorfismo di fibrati principali $\Phi : U \times G \rightarrow U \times G$ della forma $\Phi(p, g) = (p, \varphi(p)g)$, l'isomorfismo indotto su $l(U \times G)$ è ottenuto operando il pushforward dei campi in questione. Pertanto denotando con Φ_* quest'ultimo isomorfismo si ha preso $(v, \omega_g)_g \in l(U \times G)_p$

$$\Phi_*((v, \omega_g)_g) = (d\Phi_{p, \varphi(p)^{-1}g}(v, \omega_{\varphi^{-1}(p)g}))_g$$

Pertanto letto nelle carte $TU \times \mathfrak{g}$ questo diventa

$$\begin{aligned} (v, \omega) \mapsto d\Phi_{p, \varphi(p)^{-1}}(v, \omega_{\varphi^{-1}(p)}) = \\ (v, dR_{\varphi(p)^{-1}} dL_{\varphi(p)} \omega + dR_{\varphi(p)^{-1}}(d\varphi_p(v))) = \\ (v, \text{Ad}_{\varphi(p)} \omega + dR_{\varphi(p)^{-1}}(d\varphi_p(v))) \end{aligned}$$

Nel caso in cui $G = GL(n, \mathbb{C})$ considerando un ricoprimento aperto U_α che banalizza sia P che TX , detto $g_{\alpha\beta}$ il cociclo che definisce P e $t_{\alpha\beta}$ il cociclo che definisce TX e considerando inoltre gli isomorfismi $t_\alpha : TX|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$. Il cociclo che definisce $l(P)$ è descritto dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} t_{\alpha\beta} & 0 \\ dg_{\alpha\beta}(t_\alpha^{-1}(\cdot))g_{\alpha\beta}^{-1} & \text{Ad}_{g_{\alpha\beta}} \end{pmatrix}$$

Abbiamo dimostrato la seguente proposizione:

Proposizione 4.3.1. *Sia P un fibrato principale su X , $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un ricoprimento aperto che banalizzi P e il fibrato tangente TX . Siano $g_{\alpha\beta}$ e $t_{\alpha\beta}$ i cocicli relativi rispettivamente a P e TX rispetto a tale ricoprimento. Allora*

- $\text{ad}(P)$ e $l(P)$ vengono banalizzati dal ricoprimento \mathcal{U} ;
- Il cociclo relativo a $\text{ad}(P)$ è $\text{Ad}_{g_{\alpha\beta}}$;
- Il cociclo relativo a $l(P)$ è dato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} t_{\alpha\beta} & 0 \\ dg_{\alpha\beta}(t_\alpha^{-1}(\cdot))g_{\alpha\beta}^{-1} & \text{Ad}_{g_{\alpha\beta}} \end{pmatrix}$$

Da tale descrizione è chiaro che i fibrati vettoriali $\text{ad}(P)$, $l(P)$ e TX soddisfano una sequenza esatta in cui compaiono in questo ordine. Questa può essere descritta globalmente come dimostra il seguente lemma.

Lemma 4.3.2. *La sequenza esatta $0 \rightarrow VP \rightarrow TP \rightarrow \pi^*TX \rightarrow 0$ induce una sequenza esatta di fibrati vettoriali su X :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & VP & \longrightarrow & TP & \longrightarrow & \pi^*TX \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{ad}(P) & \longrightarrow & l(P) & \longrightarrow & TX \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dimostrazione. L'inclusione $VP \rightarrow TP$ essendo un morfismo equivariante determina un'inclusione $VP/G \rightarrow TP/G$ inoltre il differenziale $d\pi : TP \rightarrow TX$ essendo G invariante determina un morfismo $l(P) \rightarrow TX$. Tali morfismi commutano ovviamente con le proiezioni dei loro pull-back siccome sono definiti a partire da queste, pertanto siccome π è suriettiva l'esattezza della sequenza superiore determina l'esattezza della sequenza inferiore. \square

Descriviamo ora la sequenza in termini di fasci di \mathcal{O}_X -moduli il che è equivalente a definire morfismi di fibrati vettoriali e poi verificheremo in carta l'esattezza.

- $\text{ad}(P) \rightarrow l(P)$: consideriamo una sezione $s : U \rightarrow \text{ad}(P)|_U$, vogliamo dare un campo di vettori stabile su $P|_U$. Consideriamo per prima cosa l'azione strutturale $\sigma : P \times G \rightarrow P$, ora data s ad un punto $p \in P$ tale che $\pi(p) = u \in U$ detto ω_p l'elemento in \mathfrak{g} per cui $s(u) = [p, \omega_p]$, associo il vettore $d\sigma_{(p,1)}(0, \omega_p)$. Verificheremo dopo in carte che questo è effettivamente un campo di vettori G -invariante
- $l(P) \rightarrow TX$: sia $v : P|_U \rightarrow TP|_U$ un campo di vettori in $l(P)(U)$, vogliamo associargli un campo di vettori su U . Osserviamo che fissato $x \in U$ il vettore $d\pi_p(v(p))$ non dipende da $p \in \pi^{-1}(x)$, in quanto preso un altro $q \in \pi^{-1}(x)$ tale che $pg = q$ si ha per G -invarianza $d\pi_{pg}(v(pg)) = d\pi_{pg}(dg_p(v(p))) = d\pi_p(v(p))$. Al campo v associo allora il campo di vettori su U che manda $x \in U$ in $d\pi_p(v(p))$ dove p è un qualunque elemento in $\pi^{-1}(x)$

Traduciamo tutto ciò in termini di fibrati facendolo localmente sugli aperti banalizzanti per P e denotiamo con $f : P|_U \rightarrow U \times G$ l'isomorfismo banalizzante. Sia poi U un aperto banalizzante, consideriamo gli isomorfismi descritti sopra tra $\text{ad}(P)|_U \simeq U \times \mathfrak{g}$ e $l(P)|_U \simeq TU \times \mathfrak{g}$ e mostriamo che le mappe sopra definite si leggono in questo contesto come inclusione e proiezione determinando quindi sia l'olomorfia che l'esattezza.

Scriviamo gli isomorfismi esplicitamente in termini di fasci:

$$\begin{aligned} \text{ad}(P)(V) &\rightarrow (U \times \mathfrak{g})(V) \\ s(p) &= [f^{-1}(p, 1), \omega_p] \mapsto (p \mapsto (p, \omega_p)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(P)(V) &\rightarrow (TU \times \mathfrak{g})(V) \\ s &\mapsto (p \mapsto s(f^{-1}(p, 1))) \end{aligned}$$

La sequenza si scrive quindi in carta come segue:

$$0 \longrightarrow U \times \mathfrak{g} \xrightarrow{i} TU \times \mathfrak{g} \xrightarrow{p} TU \longrightarrow 0$$

Dove $i : U \times \mathfrak{g} \rightarrow TU \times \mathfrak{g}$ è l'inclusione canonica e $p : TU \times \mathfrak{g} \rightarrow TU$ è la proiezione canonica, il morfismo così definito risulta quindi un morfismo di fibrati vettoriali olomorfo.

Teorema 4.3.1. *Dare una connessione su P è equivalente a dare una sezione della mappa sopra descritta $l(P) \rightarrow TX$.*

Dimostrazione. Ricordiamo qui che dare una connessione su P è equivalente a dare un sottofibrato G stabile tale che $d\pi_p : H_p P \rightarrow T_{\pi(p)} X$ sia un isomorfismo su ogni fibra.

- Fibrato orizzontale su P implica sezione:

Diamo la sezione in termini di fasci dato un campo di vettori $v : U \rightarrow TU$ devo associargli un campo di vettori definito su $P|_U$ che sia G invariante. Questo lo costruisco così ad ogni $p \in P|_U$ associo il vettore in $H_p P$ dato da $d\pi_{p,|H_p P}^{-1}(v(\pi(p)))$ questo è G invariante perchè lo costruisco tramite $d\pi$. L'olomorfia si controlla facilmente su aperti banalizzanti. Infatti dato un aperto banalizzante in cui $P|_U \simeq U \times G$ si ha che $H_{x,g}(U \times G)$ è della forma $\{(v, d(L_g)_1 \varphi_p(v)) : v \in T_x U\}$ per un opportuna $\varphi : TU \rightarrow U \times \mathfrak{g}$ e la sezione appena descritta non è altro se non la mappa:

$$\text{id} \times \varphi : TU \rightarrow TU \times \mathfrak{g}$$

Che è pertanto olomorfa.

- Sezione implica fibrato orizzontale:

Come descritto in precedenza la fibra di $l(P)_x = \{(v_p)_p : \pi(p) = x, v_p \in T_p P \text{ e } dg_p(v_p) = v_{pg}\}$ è costituita da π^{-1} -uple di vettori invarianti. Pertanto una sezione $s : TX \rightarrow l(P)$ determina, guardando l'immagine di $T_x X$, una collezione di sottospazi $(H_p P)_p := s(T_x X)$ con $p \in \pi^{-1}(x)$ i quali soddisfano $dg(H_p P) = H_{pg} P$ vista la descrizione delle fibre di $l(P)$. Inoltre questi costituiscono un sottofibrato dato che provengono da una sezione olomorfa $s : TX \rightarrow l(P)$ e sempre poichè vengono da una sezione si ha che $d\pi_p : H_p P \rightarrow T_x X$ è un isomorfismo. Questi determinano quindi un sottofibrato orizzontale.

□

Siamo pronti ora per dimostrare il criterio di Atiyah, per farlo vorremmo caratterizzare l'esistenza di sezioni del morfismo $l(P) \rightarrow TX$ in termini coomologici. Per fare questo consideriamo in primo luogo la sequenza esatta del lemma 4.3.2 e applichiamo il funtore $\text{Hom}(TX, -)$. Trattandosi di una sequenza esatta di fibrati vettoriali questa rimarrà esatta:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(TX, \text{ad}(P)) \rightarrow \text{Hom}(TX, l(P)) \rightarrow \text{End}(TX) \rightarrow 0$$

Lemma 4.3.3. *Sia $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ una sequenza esatta di fibrati vettoriali su una varietà complessa X , allora la sequenza associata di fasci di sezioni:*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{O}_X(F) \rightarrow \mathcal{O}_X(G) \rightarrow 0$$

è esatta.

Dimostrazione. Siccome l'esattezza di una sequenza fasci è locale possiamo limitarci a dimostrare il caso in cui tutti e tre i fibrati sono banali. Abbiamo pertanto una sequenza esatta di fibrati vettoriali:

$$0 \longrightarrow X \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{a} X \times \mathbb{C}^{n+m} \xrightarrow{b} X \times \mathbb{C}^m \longrightarrow 0$$

Questa sarà descritta da due matrici $A \in M(n, n+m, \mathcal{O}_X)$ e $B \in M(n+m, m, \mathcal{O}_X)$ in modo tale che si abbia

$$a(p, z_1, \dots, z_n) = A(p) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b(p, z_1, \dots, z_{n+m}) = B(p) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n+m} \end{pmatrix}$$

La condizione di esattezza si traduce sulle matrici A e B nel fatto che per ogni $p \in X$ $\ker A(p) = 0$, $\text{Im } A(p) = \ker B(p)$ e $\text{Im } B(p) = \mathbb{C}^m$. La sequenza di morfismi \mathcal{O}_X -lineari tra i fasci associati $0 \rightarrow \mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{O}_X^{n+m} \rightarrow \mathcal{O}_X^m \rightarrow 0$ è descritta dalle medesime matrici. Notiamo in primo luogo che l'iniettività e l'esattezza centrali sono piuttosto banali. Infatti data una sezione del primo fibrato, punto per punto la sua immagine ha come valore 0 se e soltanto se anche la sezione di partenza si annullava. Allo stesso modo, data una sezione in $s \in \ker(X \times \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow X \times \mathbb{C}^m)$ è necessario che $s(p) \in \ker B(p) = \text{Im } A(p)$ per tutti i p e pertanto s può essere vista come sezione di $X \times \mathbb{C}^n$.

Siccome l'esattezza è, per definizione, equivalente all'esattezza sulle spighe controlliamo le mappe tra queste, ricordando che $\mathcal{O}_{X,p}$ è un anello locale con ideale massimale \mathfrak{m} pari ai germi delle funzioni che si annullano in p .

È una facile conseguenza del lemma di Nakayama il fatto che dati M, N degli A moduli con (A, \mathfrak{m}) anello locale allora un morfismo $M \rightarrow N$ è suriettivo se e soltanto se $M/\mathfrak{m}M \rightarrow N/\mathfrak{m}N$ è suriettivo. Questo si applica al nostro caso in maniera immediata in quanto la sequenza in questione è una sequenza di $\mathcal{O}_{X,p}$ -moduli che letta sui quozienti è proprio

$$\mathbb{C}^{n+m} \xrightarrow{B(p)} \mathbb{C}^m$$

Che è suriettiva per ipotesi. Questo conclude la dimostrazione. □

Dato l'ultimo lemma, la sequenza esatta corta mostrata in precedenza dà luogo alla sequenza esatta corta dei fasci delle loro sezioni, che per non appesantire ulteriormente la notazione verranno indicati con lo stesso nome dei fibrati dai quali provengono. Dalla sequenza esatta corta di fasci si ricava una sequenza esatta lunga in coomologia di cui un frammento è il seguente:

$$\dots \rightarrow H^0(X, \text{Hom}(TX, l(P))) \longrightarrow H^0(X, \text{End}(TX)) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \text{Hom}(TX, \text{ad}(P))) \rightarrow \dots$$

Identificando $H^0(X, \text{Hom}(TX, l(P)))$ con i morfismi di fibrati $TX \rightarrow l(P)$ così come $\text{End}(TX)$ con gli endomorfismi di fibrati di TX , la mappa $H^0(X, \text{Hom}(TX, l(P))) \rightarrow \text{End}(TX)$ è data dalla composizione con il morfismo $l(P) \rightarrow TX$ della sequenza esatta di partenza. L'esistenza di una connessione, ovvero l'esistenza di una sezione del morfismo $l(P) \rightarrow TX$ è quindi equivalente al fatto che $\text{id}_{TX} \in \text{Im } H^0(X, \text{Hom}(TX, l(P)))$ il che per esattezza è equivalente al fatto che $\partial(\text{id}_{TX}) = 0$. Chiamiamo quindi $c(P) := \partial(\text{id}_{TX})$ la classe caratteristica del fibrato P . Abbiamo dimostrato il seguente criterio:

Teorema 4.3.2 (Criterio di Atiyah). *Sia P un G -fibrato principale su una superficie di Riemann X e sia $c(P) \in H^1(X, \mathcal{O}_X(\text{Hom}(TX, \text{ad}(P))))$ la sua classe caratteristica. Allora l'esistenza di una G -connessione su P è equivalente all'annullarsi di $c(P)$.*

Capitolo 5

Teorema di Weil

Dopo aver studiato nel capitolo precedente il criterio di Atiyah e aver caratterizzato l'esistenza delle connessioni sui fibrati vettoriali attraverso lo svanimento della classe di Atiyah, in questo capitolo si andrà a studiare nel caso in cui X è una superficie di Riemann compatta una diversa caratterizzazione dell'annullamento di tale classe. Per fare ciò si userà la dualità di Serre la quale stabilisce una dualità perfetta tra $H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes \text{End}(E)))$ e $H^0(X, \mathcal{O}_X(\text{End}(E)))$. Questo permette di affermare che un elemento $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes \text{End}(E)))$ è nullo se e soltanto se per ogni $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(\text{End}(E)))$ si ha che $\langle \xi, \sigma \rangle = 0$. Tutto ciò dà luogo ad una nuova caratterizzazione dell'esistenza di connessioni che si rivelerà molto interessante e molto concreta, come vedremo.

5.1 Alcune sequenze esatte

In questa prima sezione andremo a descrivere brevemente due sequenze esatte di fasci su una superficie di Riemann X che saranno di fondamentale importanza in quanto segue. Queste riguarderanno \mathbb{Z} e \mathbb{C} , i fasci delle funzioni localmente costanti a valori interi e complessi, rispettivamente, \mathcal{O}_X il fascio delle funzioni olomorfe, \mathcal{O}_X^* il fascio delle funzioni olomorfe mai nulle e Ω_X^1 il fascio delle 1-forme differenziali olomorfe. Ricordiamo che quest'ultimo può essere visto come fascio delle sezioni del fibrato vettoriale $T^*X \rightarrow X$.

Descriviamo quindi le due sequenze, che chiameremo rispettivamente sequenza esponenziale e sequenza differenziale.

1) Osserviamo in primo luogo che la mappa esponenziale $\exp(2\pi i) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ può essere composta con una qualunque funzione olomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ dando luogo ad una nuova mappa olomorfa. Si ottiene quindi un morfismo di fasci:

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i)} \mathcal{O}_X^*$$

il quale è suriettivo. Sia infatti $p \in X$ un punto e $U \simeq \mathbb{D}$ un suo intorno biolomorfo al disco. Un classico teorema di analisi complessa dimostra che tutte le mappe $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^*$ possiedono un logaritmo complesso, da questo segue la suriettività locale e quindi la suriettività della mappa tra fasci. \exp inoltre determina un morfismo fasci di gruppi, munendo \mathcal{O}_X della struttura additiva e \mathcal{O}_X^* della struttura moltiplicativa. Il suo nucleo, costituito dalle funzioni che composte con $\exp(2\pi i)$ sono costantemente uno, è chiaramente il fascio delle funzioni olomorfe a valori in \mathbb{Z} e quindi localmente costanti. Abbiamo dimostrato l'esistenza della seguente sequenza esatta:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{e} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$$

2) Data una funzione olomorfa $f \in \mathcal{O}_X$ il suo differenziale df determina una 1-forma olomorfa. Non è difficile constatare che tale associazione determina un morfismo di fasci \mathbb{C} -lineare $\mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1$. Quest'ultimo inoltre risulta essere suriettivo dato che su un aperto banalizzante biolomorfo al disco $U \simeq \mathbb{D}$ le forme differenziali possono sempre essere identificate con funzioni olomorfe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ e queste ammettono sempre una primitiva e pertanto sono il differenziale di una funzione olomorfa. Considerando la struttura additiva su entrambi i fasci il nucleo di tale morfismo, come nel caso precedente, è facilmente descritto: si tratta infatti delle funzioni localmente costanti (a valori in \mathbb{C}), dato che queste sono tutte e sole quelle con differenziale nullo ovunque. Abbiamo quindi determinato la sequenza esatta corta di fasci su X seguente:

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \rightarrow 0$$

L'importanza delle sequenze esatte sopra descritte risiede nei morfismi in coomologia indotti dalle stesse. In particolare saranno per noi fondamentali le mappe:

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) &\rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \\ H^1(X, \Omega_X^1) &\rightarrow H^2(X, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Andiamo a descriverle brevemente, ricordando la costruzione delle mappe di bordo fatta nel capitolo 2.

- Sia $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ rappresentato da un cociclo $\xi_{\alpha\beta}$ per un certo ricoprimento $\mathcal{U} = (U_\alpha)$. In base a quanto studiato nel capitolo 2 possiamo inoltre supporre, a meno di raffinamento, che per il ricoprimento \mathcal{U} $\xi_{\alpha\beta} \in \text{Im}(\Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathbb{C}))$, ovvero che esistano logaritmi complessi sulle intersezioni per le applicazioni $\xi_{\alpha\beta}$. Chiamiamo quindi $\eta_{\alpha\beta}$ le funzioni olomorfe che esponenziate forniscono il nostro cociclo. Le applicazioni $n_{\alpha\beta\gamma} := \eta_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\gamma} + \eta_{\beta\gamma}$ soddisfano chiaramente la condizione di cociclo in $C^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$, inoltre queste una volta esponenziate, in virtù della proprietà di cociclo delle $\xi_{\alpha\beta}$ sono costantemente 1, pertanto in realtà sono funzioni localmente costanti a valori in \mathbb{Z} . Questa è proprio la descrizione delle mappe di bordo, pertanto:

$$\partial(\xi_{\alpha\beta}) = (n_{\alpha\beta\gamma}) \in H^2(X, \mathbb{Z})$$

Osserviamo qui che siccome quella appena fatta è esattamente la descrizione della mappa di bordo, la classe di $n_{\alpha\beta\gamma} \in H^2(X, \mathbb{Z})$ **non** dipende dalla scelta dei logaritmi complessi utilizzati per le sollevare le $\xi_{\alpha\beta}$;

- La descrizione è totalmente parallela nel secondo caso. Dato un cociclo $\tau_{\alpha\beta} \in H^1(X, \Omega_X^1)$ possiamo supporre, sempre a meno di raffinare che $\tau_{\alpha\beta} = df_{\alpha\beta}$ per delle opportune funzioni olomorfe. Le mappe definite $c_{\alpha\beta\gamma} := f_{\alpha\beta} - f_{\alpha\gamma} + f_{\beta\gamma}$ hanno differenziale nullo ovunque pertanto sono localmente costanti e determinano un cociclo in $H^2(X, \mathbb{C})$. Si ha, nuovamente:

$$\partial(\tau_{\alpha\beta}) = (c_{\alpha\beta\gamma})$$

E la classe di quest'ultimo cociclo **non** dipende dalle 'primitive' scelte per $\tau_{\alpha\beta}$

5.2 Classe di Chern di un fibrato vettoriale

Introduciamo in questa sezione un invariante numerico di notevole rilevanza nello studio dei fibrati vettoriali a meno di isomorfismo su una superficie di Riemann (in questo contesto compatta) X . Restringiamoci per un momento ai fibrati lineari e ricordiamo l'ormai usuale corrispondenza:

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longleftrightarrow \{\text{Fibrati lineari su } X\} / \simeq$$

In virtù di tale corrispondenza è possibile parlare indistintamente di fibrati lineari e di elementi $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Ricordando quanto descritto nella sezione appena precedente la mappa di bordo:

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\partial} H^2(X, \mathbb{Z})$$

può essere considerata come una mappa che associa ad un fibrato lineare ξ un cociclo in $H^2(X, \mathbb{Z})$.

Definizione 5.2.1. Dato un fibrato lineare $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ si definisce allora la sua **classe di chern** o **classe caratteristica** l'elemento $\mathfrak{c}(\xi) := \partial(\xi) \in H^2(X, \mathbb{Z})$

Precisiamo ora in che senso la classe di Chern è un invariante numerico. Notiamo per prima cosa che come visto nel capitolo 2 abbiamo un isomorfismo $H^2(X, \mathbb{C}) \simeq H_{dR}^2(X) \simeq \mathbb{C}$ visto come varietà differenziale. La mappa indotta dall'inclusione $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$ sulla coomologia $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ può essere letta allora come l'inclusione $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Osserviamo inoltre che quando descritto nella sezione precedente da una descrizione esplicita in termini di cocicli alla classe di Chern di un fibrato.

Vale la seguente proposizione, che non dimostreremo e che non verrà utilizzata in quanto segue, che caratterizza in modo molto concreto la classe di Chern di un fibrato lineare. Una referenza può essere trovata in [2].

Proposizione 5.2.1. *Sia dato un fibrato lineare ξ e una sua sezione meromorfa non costante f . Allora vedendo $\mathfrak{c}(\xi) \in \mathbb{C} = H^2(X, \mathbb{C})$ si ha che*

$$\mathfrak{c}(\xi) = \text{ord}(f) := \sum_{x \in X} v_x(f)$$

Dove v_x indica l'usuale valutazione di ordine di 0 e poli di f .

Il concetto di classe di Chern si può generalizzare in un certo senso al caso di fibrati vettoriali di rango maggiore di 1. Per fare questo dato un fibrato vettoriale $E \rightarrow X$ rappresentato da un cociclo $\Phi_{\alpha\beta} \in H^1(X, GL(n, \mathbb{C}))$ chiamiamo *fibrato lineare determinante* associato il fibrato lineare dato dal cociclo $\det(\Phi)_{\alpha\beta} := \det(\Phi_{\alpha\beta})$ che corrisponde al fibrato lineare dato da $\wedge^n E$, la potenza esterna di rango massimo di E .

Definizione 5.2.2. Dato un fibrato vettoriale di rango n su X , $\Phi \in H^1(X, GL(n, \mathbb{C}))$ definiamo la sua classe di Chern come la classe di Chern della sua fibrato lineare determinante:

$$\mathfrak{c}(\Phi) := \mathfrak{c}(\det(\Phi))$$

Osservazione 5.2.1. In quest'ultimo contesto vale ovviamente la stessa descrizione della classe di Chern nel caso dei fibrati lineari sostituendo $\xi_{\alpha\beta}$ con $\det(\Phi_{\alpha\beta})$.

5.3 Dualità di Serre

Scopo di quello che seguirà è dimostrare nel caso in cui X sia una superficie di Riemann compatta che la classe di Atiyah introdotta nel capitolo precedente $c(E) \in H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes \text{End}(E)))$ è nulla se e soltanto se la classe di Chern del fibrato e di suoi opportuni sottofibrati sono nulle, arrivando quindi a una descrizione praticamente completa dei fibrati vettoriali che ammettono connessioni. Per procedere avremo bisogno di un teorema dovuto a Serre, che però non dimostreremo, che descrive il duale di uno spazio come $H^1(X, \mathcal{O}_X(E))$, una referenza può essere trovata in [2]

Teorema 5.3.1 (Dualità di Serre). *Sia X una superficie di Riemann compatta e E un fibrato vettoriale su di essa. Esiste allora un accoppiamento perfetto tra gli spazi:*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(E)) \times H^0(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes E^*)) \rightarrow \mathbb{C}$$

Dove con accoppiamento perfetto di due spazi vettoriali V, W su \mathbb{C} si intende una mappa bilineare $V \times W \rightarrow \mathbb{C}$ che induca isomorfismi $W \rightarrow V^*$ e $V \rightarrow W^*$ rendendo gli spazi uno duale dell'altro.

Non ci è sufficiente essere a conoscenza dell'esistenza dell'accoppiamento e sarà di fondamentale importanza la descrizione della mappa che lo definisce. Andiamo dunque a descriverla:

Notiamo in primo luogo che esiste una mappa di fibrati vettoriali olomorfi:

$$T^*X \otimes E^* \otimes E \rightarrow T^*X$$

Definita sulle fibre in modo naturale $\text{id} \otimes \text{tr} : T_p^*X \otimes E_p^* \otimes E_p \rightarrow T_p^*X$ che associa quindi ai tensori decomponibili $\tau \otimes \varphi \otimes \sigma \mapsto \varphi(\sigma)\tau$ ed estesa per linearità. Questa induce una mappa \mathcal{O}_X -bilineare

$$\mathcal{O}_X(T^*X \otimes E^*) \times \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{O}_X(T^*X)$$

Che denoteremo con \langle, \rangle come se fosse una sorta di prodotto scalare. In modo analogo possiamo definire una forma bilineare

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(E)) \times H^0(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes E^*)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X))$$

La quale manda un cociclo $s_{\alpha\beta} \in H^1(X, \mathcal{O}_X(E))$ e una sezione $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes E^*))$ nel cociclo definito da $\tau_{\alpha\beta} := \langle s_{\alpha\beta}, \sigma|_{U_{\alpha\beta}} \rangle$ Componendo quanto appena costruito con il morfismo canonico introdotto nella prima sezione

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X)) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$$

si ottiene un'applicazione bilineare $H^1(X, \mathcal{O}_X(E)) \times H^0(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes E^*)) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$. La dualità di Serre afferma che l'applicazione appena descritta è a tutti gli effetti un accoppiamento perfetto. Nel nostro caso, quello di una superficie compatta, ricordando che $T^*X \otimes TX = X \times \mathbb{C}$ e sostituendo ad E il fibrato $T^*X \otimes E$ si ottiene la seguente forma di dualità, che è del tutto equivalente a quella appena esposta:

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes E)) \times H^0(X, \mathcal{O}_X(E^*)) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$$

La classe di Atiyah introdotta nel capitolo precedente è proprio un elemento

$c(E) \in H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes \text{End}(E)))$, pertanto la sua nullità, in virtù della dualità di Serre è equivalente al fatto che $\langle c(E), \sigma \rangle = 0$ per ogni $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(\text{End}(E)^*))$. Andremo quindi a studiare meglio tale prodotto scalare e a esplicitare il tutto. Cominciamo con un piccolo lemma che semplicemente estende un risultato noto di algebra lineare.

Lemma 5.3.1. *Sia $E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale. Allora $\text{End}(E)^* \simeq \text{End}(E)$ in modo canonico, in particolare la seguente mappa bilineare sulle fibre definisce un accoppiamento perfetto, ricordando $\text{End}(E)_p = \text{End}(E_p)$*

$$\text{tr} : \text{End}(E_p) \times \text{End}(E_p) \rightarrow \mathbb{C}$$

Che manda $(\varphi, \psi) \mapsto \text{tr}(\varphi \circ \psi)$.

Nei seguenti lemma andiamo ad esplicitare quanto più possibile la dualità di Serre nel nostro caso.

Osservazione 5.3.1. Sia $E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale, $\xi_{\alpha\beta} \in H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes \text{End}(E)))$ un cociclo decomponibile, ovvero tale che esistano cocicli $\tau_{\alpha\beta} \in H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X))$ e $\varphi_{\alpha\beta} \in H^1(X, \mathcal{O}_X(\text{End}(E)))$ tali che $\xi_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} \otimes \varphi_{\alpha\beta}$. Sia $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(\text{End}(E)))$ e $\sigma_{\alpha\beta}$ la sua restrizione agli aperti $U_{\alpha\beta}$. Allora si ha

$$\langle \xi_{\alpha\beta}, \sigma \rangle_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} \text{tr}(\varphi_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta})$$

Come elemento in $H^1(X, \Omega_X^1)$.

Lemma 5.3.2. *Il prodotto scalare definito a livello delle sole sezioni, al di fuori del contesto cociclico, può essere fatto tra matrici una volta riportatisi al caso banale nell'accezione seguente. Sia U un aperto banalizzante sia per T^*X che per E e $\kappa : T^*U \rightarrow U \times \mathbb{C}$, $f : \text{End}(E)|_U \rightarrow U \times M(n, \mathbb{C})$ e $\kappa \otimes f : T^*U \otimes \text{End}(E)|_U \rightarrow U \times M(n, \mathbb{C})$ sono banalizzazioni fissate, allora per ogni sezione $\sigma \in \Gamma(U, \text{End}(E))$ e ogni sezione $\eta \in \Gamma(U, T^*X \otimes \text{End}(E))$ si ha*

$$\langle \eta, \sigma \rangle = \kappa^{-1}(\text{tr}((\kappa \otimes f \circ \eta)(f \circ \sigma))) \in \Gamma(U, \Omega_X^1)$$

Dimostrazione. Il fatto è sicuramente vero per i tensori decomponibili, per come si è definito il prodotto, e si estende a tutti i tensori per linearità. \square

Quest'ultimo lemma permette concretamente di riportare il prodotto scalare appena definito al contesto locale in cui i fibrati sono tutti banali.

5.4 Calcolo di $\langle c(E), \text{id} \rangle$

In questa sezione si andrà a calcolare la quantità $\langle c(E), \text{id} \rangle$. Ripercorriamo i passi necessari, tenendo a mente la descrizione cociclica fatta nel capitolo precedente. Denoteremo con $\mathcal{U} = (U_\alpha)_\alpha$ un ricoprimento fissato che banalizzi P e TX , e chiamiamo e_α , l_α e κ_α i morfismi banalizzanti dei fibrati vettoriali $T^*X \otimes \text{End}(E)$, $T^*X \otimes l(P)$ e T^*X rispettivamente. Siccome il primo si immerge nel secondo e viene banalizzato dagli stessi aperti (sono quelli che banalizzano E) possiamo pensare e_α come restrizione di l_α a $T^*X \otimes \text{End}(E)$. Inoltre e_α e l_α li scegliamo in modo tale che siano ottenuti tensorizzando κ_α con isomorfismi banalizzanti per $\text{End}(E)$ e $l(P)$. Denotiamo con t_α inoltre il morfismo banalizzante del tangente, considerando κ_α come il suo duale. Ribadiamo brevemente qui la relazione tra gli isomorfismi banalizzanti del tangente e del cotangente.

Osservazione 5.4.1. Sia TX il tangente olomorfo a X e $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un ricoprimento aperto banalizzante $t_\alpha : TX|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$ gli isomorfismi. Si ha che il cotangente T^*X è banalizzato dallo stesso ricoprimento, inoltre gli isomorfismi $\kappa_\alpha : T^*X|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$ sono indotti in modo naturale dai t_α e sono della seguente forma:

$$\kappa_\alpha(f) = f(t_\alpha^{-1}(1))$$

Dove con f si intende un funzionale $f \in T_p^*X$.

- La classe $c(E)$ in base alla definizione delle mappe di bordo è costruita prendendo delle sezioni locali di $l(P)$ che mappano sull'identità. Dalla descrizione che abbiamo fatto risulta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & T^*X \otimes \text{End}(E)|_{U_\alpha} & \longrightarrow & T^*X \otimes l(P)|_{U_\alpha} & \longrightarrow & \text{End}(TX)|_{U_\alpha} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow e_\alpha & & \downarrow l_\alpha & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & U_\alpha \times M(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C} \times M(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Ed è pertanto chiaro che tali sezioni locali possano essere scelte come segue:

$$s_\alpha := l_\alpha^{-1}(1, 0)$$

Dove con $(1, 0)$ si intende la funzione costante 1 sulla prima coordinata del fibrato $U_\alpha \times \mathbb{C} \times M(n, \mathbb{C})$

- Il cociclo che definisce $c(E)$ in $H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes \text{End}(E)))$ è pertanto sempre per costruzione il cociclo $\xi_{\alpha\beta} = s_\alpha - s_\beta$ il quale letto con le banalizzazioni e_α risulta:

$$e_\alpha \circ \xi_{\alpha\beta} = (1, 0) - l_\alpha \circ l_\beta^{-1}(1, 0) = dg_{\alpha\beta}(t_\alpha^{-1}(1))g_{\alpha\beta}^{-1}$$

Pertanto una volta scontrato con l'identità questo dà il cociclo in $H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X))$ $\tau_{\alpha\beta}(v) = \text{tr}(dg_{\alpha\beta}(v)g_{\alpha\beta}^{-1})$ infatti l'immagine di tale cociclo mediante la carta k_α è esattamente $\text{tr}(dg_{\alpha\beta}(t_\alpha^{-1}(1))g_{\alpha\beta}^{-1})$.

Per procedere nel trovarne l'immagine in $H^2(X, \mathbb{C})$ è necessario integrare tale cociclo il che in generale è sempre possibile in un eventuale sottoricoprimento, ma come vedremo nel prossimo lemma questo non è necessario.

Lemma 5.4.1. *Sia U una superficie di Riemann e $g : U \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ una funzione olomorfa. Allora si ha*

$$d(\log(\det g)) = \text{tr}(dg \cdot g^{-1})$$

Per un qualunque scelta del logaritmo (anche locale) in questione, a patto che questo esista.

Dimostrazione. A meno di operare in carta possiamo supporre che g mappi da un aperto di \mathbb{C} in $GL(n, \mathbb{C})$ e dimostrare l'uguaglianza con le derivate. Utilizziamo la formula di Leibnitz per lo sviluppo del determinante. Ci si riconduce facilmente, usando il fatto che $g^{-1} = \frac{1}{\det g} g^{\text{ad}}$ a dimostrare che $(\det g)' = \text{tr}(g' g^{\text{ad}})$. Ricordiamo che:

$$g_{ij}^{\text{ad}} = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(j)=i}} (-1)^\sigma \prod_{k=1}^n g_{k\sigma(k)}$$

Otteniamo che

$$\text{tr}(g' g^{\text{ad}}) = \sum_i (g' g^{\text{ad}})_{ii} = \sum_{i,j} g'_{ij} g_{ji}^{\text{ad}} = \sum_{i,j} g'_{ij} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i)=j}} (-1)^\sigma \prod_{k=1}^n g_{k\sigma(k)} = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{k=1}^n g_{k\sigma(k)} \right)' = (\det g)'$$

□

Da ciò deduciamo che $d(\log(\det g_{\alpha\beta})) = \text{tr}(dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1})$ segue subito dalla descrizione fatta sopra allora che il cociclo che si ottiene in $H^2(X, \mathbb{C})$ è esattamente la classe di Chern del fibrato.

Proposizione 5.4.1. *Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X sul quale per ogni intersezione esiste un logaritmo di $\det(g_{\alpha\beta})$. Allora si ha*

$$\langle c(E), \text{id} \rangle = \mathfrak{c}(\det(E))$$

Come elementi di $H^2(X, \mathbb{C})$.

Dimostrazione. Infatti fissato un ricoprimento che banalizzi E e sul quale le mappe $\det(g_{\alpha\beta})$ ammettono un logaritmo abbiamo la stessa descrizione della classe di Chern di E , ottenuta tramite la mappa di bordo della sequenza esponenziale $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \mapsto H^2(X, \mathbb{Z})$ e della classe $\langle c(E), \text{id} \rangle$. La prima si ottiene infatti determinando dei logaritmi per $\det(g_{\alpha\beta})$ e poi associandone un cociclo in $H^2(X, \mathbb{Z})$ ma questo è esattamente lo stesso cociclo, a meno di cambiare scelta dei logaritmi (anche se abbiamo visto che questo non cambia la classe in $H^2(X, \mathbb{Z})$ che il conto appena fatto mostra essere $\langle c(E), \text{id} \rangle$). \square

In particolare segue per esempio la seguente osservazione che in seguito renderemo più generale:

Osservazione 5.4.2. Se $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ è una sequenza esatta di fibrati vettoriali, detti $g_{\alpha\beta}^1, g_{\alpha\beta}^2$ i cocicli che definiscono E_1 e E_2 in uno stesso ricoprimento banalizzante. Si ha che esistono matrici $\Lambda_{\alpha\beta}$ a coefficienti in $\mathcal{O}(U_{\alpha\beta})$ per cui E è banalizzato dal medesimo ricoprimento e inoltre il cociclo che definisce E è pari a:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}^1 & \Lambda_{\alpha\beta} \\ 0 & g_{\alpha\beta}^2 \end{pmatrix}$$

Si ha allora banalmente $\langle c(E), \text{id}_E \rangle = \langle c(E_1), \text{id}_{E_1} \rangle + \langle c(E_2), \text{id}_{E_2} \rangle$.

5.5 Endomorfismi e teorema di Weil

Andremo qui a dimostrare che dato un endomorfismo u , la quantità $\langle c(E), u \rangle$ dipende solo dalle classi di Chern di opportuni sottofibrati. In particolare andremo a studiare brevemente alcune proprietà degli endomorfismi su fibrati vettoriali su una superficie di Riemann compatta. D'ora in poi denoteremo con E un fissato fibrato vettoriale di rango n e con $u : E \rightarrow E$ un fissato morfismo di fibrati.

- Per ogni $t \in \mathbb{C}$ possiamo considerare il morfismo $\wedge^n(u - t \text{id}) : \wedge^n E \rightarrow \wedge^n E$ questo può essere visto come un elemento di $\Gamma(X, \text{End}(\wedge^n E))$, inoltre il fibrato lineare $\text{End}(\wedge^n E)$ è banale e quindi isomorfo a $X \times \mathbb{C}$, essendo la superficie compatta $\wedge^n(u - t \text{id})$ è quindi costante e si può trattare come un numero complesso. Più intrinsecamente tale numero è esattamente la traccia di $\wedge^n(u - t \text{id})$.
- La mappa $t \mapsto \text{tr}(\wedge^n(u - t \text{id}))$ si verifica in carta essere polinomiale e corrispondere proprio al polinomio caratteristico di $\wedge^n u_p$ in un qualunque punto p della superficie. Questo consente di definire il polinomio caratteristico per un qualunque morfismo di fibrati vettoriali, le sue radici verranno chiamate autovalori del morfismo, come nel caso degli spazi vettoriali.

Lemma 5.5.1. *Sia $u : E \rightarrow E$ un endomorfismo di un fibrato vettoriale di rango n su una superficie di Riemann X . Supponiamo che $\wedge^n u = 0$ e sia $r = \max\{k : \wedge^k u \neq 0\}$, allora esiste un sottofibrato vettoriale di E di rango $n - r$ $K \subseteq E$ per cui $u|_K = 0$. Inoltre tranne in un sottoinsieme finito l'endomorfismo u_p ha nucleo di dimensione $n - r$ mentre negli altri punti potrebbe avere dimensione maggiore. Questo verrà chiamato **nucleo** del morfismo.*

Dimostrazione. Discutiamo brevemente le condizioni imposte sulle potenze esterne di u . Assumere che $\wedge^n u = 0$ equivale a richiedere che in ogni punto $p \in X$ il rango di u_p sia minore o uguale a $n - 1$. r d'altro canto rappresenta il rango 'generico' di u_p infatti il luogo dei punti $\Sigma := \{p : \wedge^r u_p = 0\}$ è discreto in quanto luogo di zeri di una funzione olomorfa e coincide col luogo dei punti p dove $\text{rk } u_p < r$, la condizione $\wedge^{r+1} u = 0$ invece assicura che per tutti i punti u_p abbia rango minore o uguale a r , come prima. Dato che le dimensioni di nucleo e immagine sono complementari si ottiene che la dimensione del nucleo generico di u è esattamente $k = n - r$, nei punti in cui $\wedge^r u = 0$ sarà invece strettamente maggiore. Per trovare il K della tesi parametrizzeremo in modo olomorfo il nucleo del morfismo in intorni in cui il rango è costante e poi estenderemo tale parametrizzazione ai punti di Σ mostrando quindi che possiamo ottenere un sottofibrato. Il tutto è chiaramente riconducibile ad uno studio in carta pertanto ci riconduciamo ai seguenti casi:

1. Data una funzione $A : \mathbb{D} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$ olomorfa di rango costante, esiste allora una parametrizzazione olomorfa del suo nucleo;
2. Data una funzione $A : \mathbb{D} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$ olomorfa di rango costante r su $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ (il cui rango in 0 può solo che diminuire quindi) esiste una parametrizzazione olomorfa del suo nucleo, intendendo che in 0 si può scegliere in modo coerente un sottospazio del nucleo di $A(0)$ di dimensione $n - r$

Osserviamo subito che in entrambi i casi la matrice A può essere supposta, a meno di moltiplicazione a destra e a sinistra per matrici di permutazione (anche se diverse) e di restringere l'intorno, avente la prima sottomatrice principale $r \times r$ invertibile ovunque (caso 1) o invertibile ovunque meno che in 0 nel caso 2.

1. A si può scrivere nella forma

$$\begin{pmatrix} X(z) & X(z)Y(z) \\ Z(z) & Z(z)Y(z) \end{pmatrix}$$

Con $X(z)$ invertibile, infatti questa assunzione già l'avevamo fatta mentre l'esistenza di $Y \in M(r, k, \mathcal{O}_D)$ olomorfa segue dal fatto che il rango della matrice è esattamente r ovunque e pertanto le altre colonne si scrivono come combinazione lineare delle prime e i coefficienti risultano olomorfi. Una parametrizzazione del nucleo è data allora da

$$\begin{pmatrix} -Y(z)e_i \\ e_i \end{pmatrix}$$

$i = 1 \dots k$ dove con e_i si intende il vettore lungo k che ha 1 sulla i -esima componente e nullo altrove.

2. Nel secondo caso la scrittura riportata sopra è sempre attuabile in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, in particolare si può verificare che la matrice Y è meromorfa in 0. La scelta del nucleo può essere vista come una mappa

$$\mathbb{D} \rightarrow \text{Gr}(k, \mathbb{C}^n)$$

dal disco allo spazio delle grassmaniane che è una varietà complessa compatta. Nella nostra situazione abbiamo una funzione meromorfa in 0 dal disco alle grassmaniane ma queste si estende olomorficamente a tutto il disco dato che lo spazio in arrivo è compatto. Otteniamo così la parametrizzazione voluta.

□

Proposizione 5.5.1 (Forma di Jordan per endomorfismi). *Sia $u : E \rightarrow E$ un morfismo di fibrati vettoriali su una superficie di Riemann compatta $p_u(t)$ il polinomio caratteristico sopra definito e λ_1, λ_m le sue radici. Il fibrato E si decompone allora come $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ in modo tale che $u(E_i) \subseteq E_i$ e detto $u_i := u|_{E_i}$ si abbia $u_i = \lambda_i \text{id} + v_i$ con v_i nilpotente.*

Dimostrazione. Fissiamo un autovalore λ , per il quale per definizione si ha $\wedge^n(u - \lambda \text{id}) = 0$. Consideriamo K_λ il nucleo di $(u - \lambda \text{id})^n$, questo esiste perchè anche $\wedge^n(u - \lambda \text{id})^n = 0$ grazie al lemma precedente. K_λ è inoltre caratterizzato dall'essere u -stabile e sul quale u agisce come $\lambda + v$ con v nilpotente. In particolare punto per punto si avrà che i K_λ sono in somma diretta.

Fissato ora un punto p per cui $\dim(\ker(u - \lambda \text{id})^n) = \text{rk } K_\lambda$ per ogni λ questo si trova perchè l'insieme dei punti dove questo non è vero per qualche λ è finito. Otteniamo che $\sum \text{rk } K_\lambda = n$ perciò in realtà questi generano globalmente e si ha

$$E = \bigoplus_{\lambda} K_\lambda$$

□

Riportiamo qui un lemma molto utile che è una generalizzazione al caso di un endomorfismo generico dell'osservazione 5.4.2.

Lemma 5.5.2. *Sia $u : E \rightarrow E$ un endomorfismo. $E' \subset E$ un sottofibrato stabile per u . Allora u passa al quoziente come endomorfismo $\bar{u} : E/E' \rightarrow E/E'$ e vale*

$$\langle c(E), u \rangle = \langle c(E'), u \rangle + \langle c(E/E'), \bar{u} \rangle$$

Dimostrazione. Una decomposizione simile per un fibrato vettoriale da luogo ad una scrittura in termini di cocicli come segue:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}^1 & \Lambda_{\alpha\beta} \\ 0 & g_{\alpha\beta}^2 \end{pmatrix}$$

E l'endomorfismo u come sezione del fibrato $\text{End}(E)$ si legge come:

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & C_\alpha \\ 0 & B_\alpha \end{pmatrix}$$

per opportune matrici $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ a coefficienti in $\mathcal{O}_X(U_\alpha)$ in modo tale che si abbia $u_\beta = g_{\beta\alpha} u_\alpha$ sulle intersezioni. Inoltre u_α ristretto a E' è rappresentato dalle matrici A_α mentre una volta passato al quoziente E/E' è rappresentato dalle matrici B_α . Ripercorrendo la costruzione di $c(E)$ fatta nel paragrafo precedente si ottiene che $c(E)$ è dato dal cociclo

$$e_\alpha^{-1}(dg_{\alpha\beta}(t_\alpha^{-1}(1))g_{\alpha\beta}^{-1}) \in H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X \otimes \text{End}(E)))$$

Per scontrarlo con $u|_{U_{\alpha\beta}}$ si può leggere tutto in carta grazie al lemma 5.3.2 e così facendo si ottiene che

$$\langle c(E), u \rangle = (\kappa_\alpha^{-1}(\text{tr}(dg_{\alpha\beta}(t_\alpha^{-1}(1))g_{\alpha\beta}^{-1}u_\alpha)))_{\alpha\beta} = (\text{tr}(dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1}u_\alpha))$$

Siccome tutte le matrici sono triangolari superiori (in particolare $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$) la traccia spezza come somma di due termini:

$$\text{tr}(dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1}u_\alpha) = \text{tr}(dg_{\alpha\beta}^1g_{\alpha\beta}^{1-1}A_\alpha) + \text{tr}(dg_{\alpha\beta}^2g_{\alpha\beta}^{2-1}B_\alpha)$$

Pertanto già al livello di $H^1(X, \mathcal{O}_X(T^*X))$ si ha $\langle c(E), u \rangle = \langle c(E'), u \rangle + \langle c(E/E'), \bar{u} \rangle$ \square

Corollario 5.5.1. *Sia $u : E \rightarrow E$ un endomorfismo nilpotente, ovvero tale per cui $u^n = 0$. Allora si ha $\langle c(E), u \rangle = 0$.*

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione sul rango di E . Osserviamo in primo luogo che se un endomorfismo è nilpotente allora esiste un sottofibrato $K \subseteq E$ non banale stabile per u ristretto al quale l'endomorfismo sia nullo. K è non banale in quanto essendo l'endomorfismo nilpotente, u_p ha rango minore o uguale a $n - 1$ per ogni $p \in X$ pertanto $\wedge^n u = 0$ e si può applicare il lemma 5.5.1. Per $n = 1$ la tesi è banale in quanto un endomorfismo è nilpotente se e soltanto se è nullo. Per il passo induttivo consideriamo un sottofibrato K come sopra. Grazie al lemma precedente $\langle c(E), u \rangle = \langle c(K), u \rangle + \langle c(E/K), \bar{u} \rangle$, siccome $u|_K = 0$ il primo termine è banalmente nullo mentre il secondo si annulla per ipotesi induttiva, osservando che \bar{u} è un endomorfismo nilpotente di E/K . \square

Teorema 5.5.1 (Weil). *Sia E un fibrato vettoriale su una superficie di Riemann compatta X . Allora E ammette una connessione se e soltanto per ogni decomposizione $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ si ha che $c(E_i) = 0$ per ogni i .*

Dimostrazione. Come osservato in precedenza il fibrato ammette una connessione se e soltanto se la sua classe $c(E)$ è nulla. Mostriamo che quest'ultima condizione è equivalente a quella espressa nel teorema.

- Sia $E = \bigoplus E_i$ una qualunque decomposizione in sottofibrati. A tale decomposizione sono associati dei morfismi di fibrati ρ_i che agiscono come l'identità ristretti a E_i e sono nulli se ristretti agli E_j con $j \neq i$. Se $c(E) = 0$ allora $\langle c(E), \rho_i \rangle = 0$ ma quest'ultimo grazie ai risultati sopra esposti è proprio pari alla classe di Chern del sottofibrato E_i . Infatti considerando la sequenza $0 \rightarrow \bigoplus_{j \neq i} E_j \rightarrow E \rightarrow E_i \rightarrow 0$ si ha $\langle c(E), \rho_i \rangle = \langle c(\bigoplus_{j \neq i} E_j \rho_i) + \langle c(E_i), \rho_i \rangle = 0 + c(E_i)$. Dato che ρ_i è nullo se ristretto a $\bigoplus_{j \neq i} E_j$ ed è l'identità su E_i .
- Supponiamo ora che per ogni decomposizione $E = \bigoplus E_i$ si abbia che le classi di chern dei sottofibrati E_i sono nulle. Vogliamo dimostrare che $\langle c(E), u \rangle = 0$ per ogni endomorfismo u , in tal modo la dualità di Serre ci permette di concludere che $c(E) = 0$. Sia quindi u un endomorfismo di E . Come visto nella proposizione 5.5.1 quest'ultimo si decompone come $E = \bigoplus E_i$ sottofibrati invarianti per l'azione di u per i quali detto $u_i = u|_{E_i}$ si abbia $u_i = \lambda_i \text{id} + v_i$ con v_i nilpotente. Applicando induttivamente il lemma 5.5.2 si ottiene che:

$$\langle c(E), u \rangle = \sum_i \langle c(E_i), u_i \rangle$$

I termini di questa somma sono del tipo $\langle c(E_i), \lambda_i \text{id} + v_i \rangle = \langle c(E_i), \lambda_i \text{id} \rangle$ dato che v_i è nilpotente. D'altro canto questi ultimi sono nulli in quanto sono multipli delle classi di Chern degli E_i che per ipotesi sono nulle. \square

In quello che segue osserveremo che con una versione del teorema di Krull-Schmidt si può riformulare il teorema di Weil come segue. Dimostriamo quindi i passaggi chiave.

Lemma 5.5.3. *Sia E un fibrato vettoriale indecomponibile su una superficie di Riemann X e u un endomorfismo di E . Allora u è un isomorfismo oppure u è nilpotente.*

Dimostrazione. Utilizzando la decomposizione di Jordan affrontata in precedenza si ottiene sfruttando l'indecomponibilità di E che u ammette un unico autovalore λ . Non è difficile osservare che se $\lambda = 0$ allora u è nilpotente mentre se $\lambda \neq 0$ allora u è un isomorfismo. \square

Lemma 5.5.4. *Siano E_1 ed E_2 due fibrati vettoriali non banali indecomponibili su una superficie compatta X , $f : E_1 \rightarrow E_2$ e $g : E_2 \rightarrow E_1$ due morfismi. Allora se $g \circ f : E_1 \rightarrow E_1$ è un isomorfismo allora lo sono anche f e g .*

Dimostrazione. Si ottiene immediatamente che f è iniettiva e g è suriettiva pertanto ha rango costante. Consideriamo la sequenza $0 \rightarrow \ker g \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow 0$ dove la mappa $E_2 \rightarrow E_1$ è $(g \circ f)^{-1} \circ g$. Questa spezza dato che $f : E_1 \rightarrow E_2$ determina una sezione di $E_2 \rightarrow E_1$ in particolare $E_2 \simeq \ker g \oplus E_1$, essendo E_1 non banale per indecomponibilità $\ker g = 0$ quindi g è un isomorfismo quindi lo è pure f . \square

Teorema 5.5.2 (Krull-Schmidt). *Sia E un fibrato vettoriale su X compatta. $E \simeq U_1 \oplus \dots \oplus U_n \simeq V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ due decomposizioni di E in sottofibrati indecomponibili. Allora $n = m$ e a meno di permutare gli indici $U_i \simeq V_i$.*

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione su $n + m$. Se $n + m = 2$ allora $n = 1, m = 1$ e la tesi è banale. Sia quindi $\varphi : U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ un isomorfismo, denotiamo con $\pi_i^U : U_1 \oplus \dots \oplus U_n \rightarrow U_i$ le proiezioni canoniche e $\iota_i^U : U_i \rightarrow U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ le inclusioni canoniche. Definiamo inoltre π_j^V e ι_j^V in modo analogo, denotiamo inoltre con $\rho_{ij} : U_i \rightarrow U_i$ la composizione di $\pi_i^U \circ \varphi^{-1} \circ \iota_j^V$ con $\pi_j^V \circ \varphi \circ \iota_i^U$. Osserviamo che si ha $\sum_{ij} \rho_{ij} = \sum_{ij} \pi_i^U \varphi^{-1} \iota_j^V \pi_j^V \varphi \iota_i^U = \sum_i \pi_i^U \varphi^{-1} (\sum_j \iota_j^V \pi_j^V) \varphi \iota_i^U = \sum_i \pi_i^U \varphi^{-1} \varphi \iota_i^U = \text{id}_{U_1 \oplus \dots \oplus U_n}$ pertanto almeno una delle ρ_{ij} deve essere un isomorfismo altrimenti sarebbero tutte nilpotenti e di conseguenza pure $\text{id}_{U_1 \oplus \dots \oplus U_n}$ il che è assurdo. Pertanto esiste una coppia (i, j) per cui ρ_{ij} sia un isomorfismo, per un lemma precedente allora si ha $U_i \simeq V_j$, a meno di riordinare il tutto possiamo supporre $i = j = 1$. Dimostriamo ora che la mappa indotta da $\varphi : \bigoplus_{i=2}^n U_i \rightarrow \bigoplus_{j=2}^m V_j$ è un isomorfismo, il che conclude il teorema per induzione. Vediamo l'iniettività: sia $(v_2, \dots, v_n) \mapsto 0$ equivalentemente $\varphi((0, v_2, \dots, v_n)) = (w, 0, \dots, 0) = \iota_1^V(w)$ applicando $\pi_1^U \circ \varphi^{-1}$ si ottiene $\pi_1^U \circ \varphi^{-1} \circ \iota_1^V(w) = 0$ quindi $w = 0$ dato che tale mappa è isomorfismo per quanto visto prima, infine per iniettività di φ si ottiene $(v_2, \dots, v_n) = 0$ dimostrando l'iniettività. La suriettività segue poichè i fibrati hanno lo stesso rango. \square

Essendo la decomposizione in indecomponibili è unica a meno di isomorfismo possiamo riformulare il teorema di Weil come segue:

Teorema 5.5.3 (Weil 2). *Sia E un fibrato vettoriale su una superficie di Riemann compatta X , $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ una sua decomposizione in sottofibrati indecomponibili. Allora E ammette una connessione se e soltanto se $\mathfrak{c}(E_i) = 0$ per ogni i .*

Dimostrazione. Riportiamo brevemente una versione leggermente diversa della dimostrazione già affrontata. Il fatto che se E ammette una connessione allora $\mathfrak{c}(E_i) = 0$ per ogni i è già stato discusso. Viceversa sia $u \in \text{End}(E)$ un endomorfismo, ci è sufficiente dimostrare che la decomposizione di Jordan $E = \bigoplus K_\lambda$ soddisfa $\mathfrak{c}(K_\lambda) = 0$, ma questo è facilmente vero decomponendo ulteriormente i K_λ in indecomponibili e utilizzando il fatto che la decomposizione è unica a meno di isomorfismo. \square

Bibliografia

- [1] Grothendieck, A. *Sur le mémoire de Weil, généralisation de fonctions abéliennes* Sem., 1956.
- [2] Gunning, Robert C. *Lectures on Riemann Surfaces* Princeton University Press, 1966.
- [3] Gunning, Robert C. *Lectures on vector bundles over Riemann surfaces*. Vol. 6. Princeton University Press, 1967.
- [4] Abate, Marco, and Francesca Tovena. *Geometria Differenziale*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [5] Heckman, Gert. *Tsinghua Lectures on Hypergeometric Functions*. 2015.