Homework 1

1. Si consideri il seguente problema di PL

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & x_1 + cx_2 \\ \text{soggetto a} & \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & & & \geq & 2 \\ x_1 & - & x_2 & \geq & -2 \\ x_1 & - & 3x_2 & \leq & -4 \end{array} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   che dipende dal parametro c.

   (a) Disegnare la regione ammissibile.
   (b) Identificare tutti i vertici della regione ammissibile.
   (c) Calcolare il valore della funzione obiettivo (in funzione di c) in ciascuno dei vertici.
   (d) Calcolare il valore ottimo e la/e soluzione/i ottime al variare del parametro c.
   (e) Disegnare la funzione valore ottimo in funzione del parametro c.

2. Disegnare la regione ammissibile del seguente Problema di Programmazione Lineare.

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & 6x_1 - 4x_2 \\ \text{soggetto a} & x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 9 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

   Identificare i vertici di tale regione. Calcolare in ognuno dei vertici il valore della funzioni obiettivo ed identificare la soluzione ottima del problema (1).

3. Sia

$$X := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 \geq 2,\ x_1 - x_2 \leq 5,\ x_1 + 2x_2 \leq 8, x_1 \geq 0 \right\}$$

   la regione ammissibile di un problema di programmazione lineare. Identificare i vertici di tale regione.

   Calcolare in ognuno dei vertici il valore delle seguenti funzioni obiettivo

   (1) $\max 3x_1 + 2x_2$
   (2) $\min x_1 + 5x_2$

   ed identificare le soluzioni ottime per ciascuno dei due casi.

4. Si consideri il poliedro

$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : Mx \leq q \right\}$$

dove

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad q = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Sia inoltre $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Fissato $\alpha = 0$, identificare i valori di β per i quali il punto $\bar{x}$ è un vertice per P.

(b) Fissato $\beta = 0$, identificare i valori di α per i quali il punto $\bar{x}$ è un vertice per P.

5. Si consideri il poliedro

$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : Mx \leq q \right\}$$

dove

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & \alpha \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad q = \begin{bmatrix} \beta \\ 6 \\ \alpha + 12 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sia inoltre $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Identificare valori di α e β per cui $\bar{x} \in P$.

(b) Fissato $\beta = 1$, identificare eventuali valori di α per i quali il punto $\bar{x}$ un vertice per P.

(c) Fissato $\alpha = 8$, identificare i valori di β per i quali il punto $\bar{x}$ un vertice per P.