TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG I : KHÁI NIỆM CƠ BẢN
Tập hợp và hàm

Lecturer: PhD. Ngo Huu Phuc
Tel: 0438 326 077
Mob: 098 5696 580
Email: ngohuuphuc76@gmail.com

TẬP HỢP VÀ HÀM

NỘI DUNG

1. Khái niệm về tập hợp.
2. Tập hợp bằng nhau.
3. Các phép toán.
4. Tính chất của các phép toán.
5. Khái niệm về lực lượng của tập hợp.
6. Khái niệm hàm.

1. Khái niệm về tập hợp (1/2)

Khái niệm về tập hợp:

- Một cách đơn giản có thể hiểu tập hợp là kết hợp các đối tượng có bản chất (hay thuộc tính) tuỳ ý, gọi là các phần tử của tập hợp.
- Ví dụ:
  - Các số tự nhiên là một tập hợp, kí hiệu là **N**.
  - Các số nguyên trong khoảng từ 1 đến 250 mà chia hết cho một trong các số nguyên tố *2,3,5,7* là một tập hợp.
  - Học viên K8 học Toán rời rạc là một tập hợp.

1. Khái niệm về tập hợp (2/2)

Ký hiệu:

- Ký hiệu *{a,b,c}* để chỉ tập hợp do các đối tượng (gọi là phần tử hay thành phần) *a,b,c* tạo nên.
- Mỗi tập hợp thường có 1 tên gọi riêng, thường dùng các chữ cái hoa *A, B, C*,...để kí hiệu.

- ***Lưu ý:***
  - Tập hợp là một khái niệm không định nghĩa mà chỉ có thể mô tả.
  - Một tập hợp được xác định khi ta đưa ra quy tắc, quy luật để phân biệt các đối tượng hoặc phần tử thuộc nó hoặc không thuộc.

2. Tập hợp bằng nhau (1/5)

Khái niệm:

- Tập A được gọi là bằng tập B, nếu mọi phần tử của A là phần tử của B và ngược lại mọi phần tử của B đều là phần tử của A.

$$(\forall x \in A) \leftrightarrow (\forall x \in B)$$

- *Một số khái niệm khác:*
  a. *Tập con.*
  b. *Tập rỗng.*
  c. *Tập các tập con.*

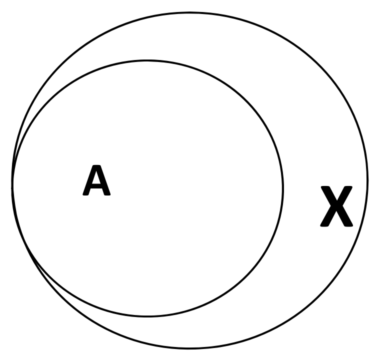
2. Tập hợp bằng nhau (2/5) – Tập con

Khái niệm:

- Tập *A* được gọi là tập con của tập hợp X, nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của X, kí hiệu là $A \subseteq X$.

$$(A \subseteq X) \leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in X)$$

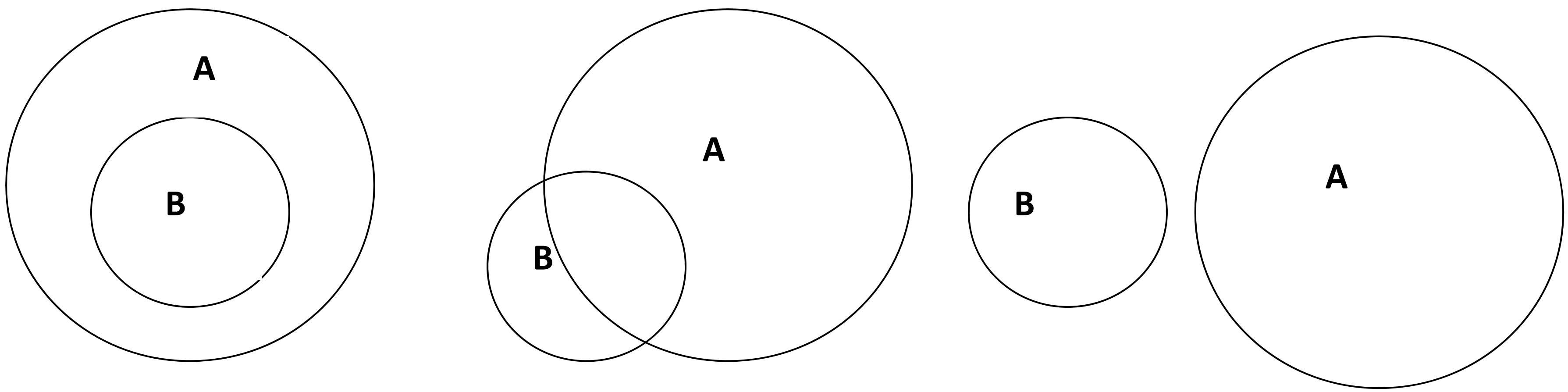
- *Ví dụ:*
  - A = { a, b, c, d }, X = { a, b, c, d, x, y, z } khi đó $A \subseteq X$
  - Z_2 = { Tập các số chẵn }, Z = { Tập các số nguyên } khi đó $Z_2 \subseteq Z$.
  - Nếu A là tập con của X và A không bằng X, thì A được gọi là tập con thực sự của X, kí hiệu là $A \subset X$.



Tập con

2. Tập hợp bằng nhau (3/5) – Tập con

- Một số ví dụ $A \not\subset B$, có thể minh hoạ sau:



$A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{3, 5\}$

$A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{2, 3, 4, 5\}$

$A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{2, 4, 6\}$

Các tập khác nhau

2. Tập hợp bằng nhau (4/5) – Tập rỗng

Khái niệm:

- Tập hợp không chứa phần tử nào gọi là tập rỗng, kí hiệu là $\varnothing$**. Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.**

- *Ví dụ:*
  - A = { Tập các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ }, khi đó: $A = \varnothing$.

2. Tập hợp bằng nhau (5/5) – Tập các tập con

Khái niệm:

- Cho A là một tập hợp, một trường hợp đặc biệt thường được xem xét là tập các tập con của A bao gồm cả tập rỗng và A , kí hiệu là **p(A)**, ***trong tập này mỗi phần tử là một tập con của A***.
- *Ví dụ:*
  - *A = {2, 4, 6 }*
  - *Khi đó: p (A) = {{2} , {4}, {6}, {2,4}, {2,6}, {4,6}, {2,4,6}, {∅} }*

3. Các phép toán (1/7)

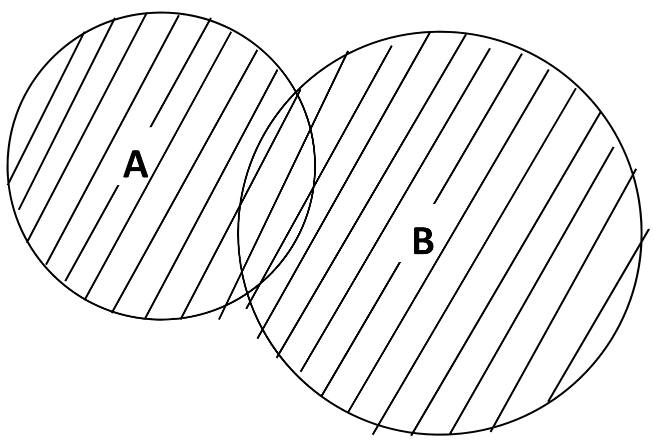
- Trong phần này, xem xét một số phép toán trên tập hợp:
  a. *Phép hợp.*
  b. *Phép giao.*
  c. *Phép hiệu.*
  d. *Phần bù.*
  e. *Hiệu đối xứng.*
  f. *Tích đề các.*

3. Các phép toán (2/7) - *Phép hợp*

Khái niệm:

- Hợp (tổng) của hai tập hợp A và B là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp đã cho. Kí hiệu là $A \cup B$

$$(x \in A \cup B) \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$



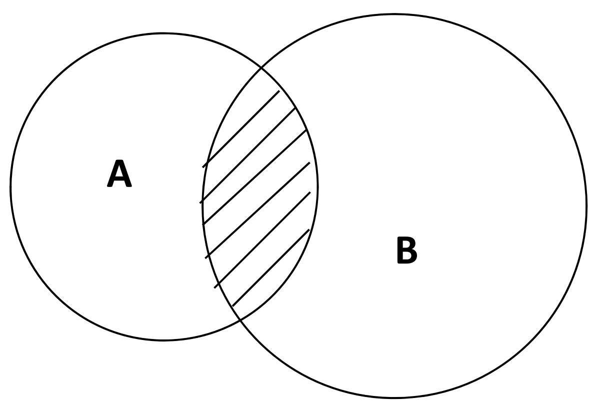
Phép hợp các tập

3. Các phép toán (3/7) - *Phép giao*

Khái niệm:

- Giao của hai tập hợp A và B là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp đã cho. Kí hiệu là $A \cap B$

$$(x \in A \cap B) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$



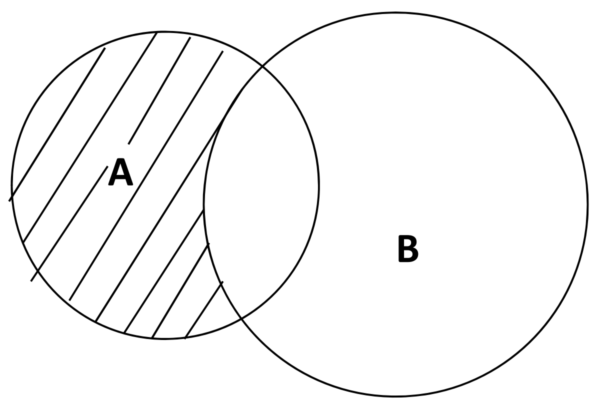
Phép giao các tập

3. Các phép toán (4/7) - *Phép hiệu*

Khái niệm:

- Hiệu của hai tập hợp A và B là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Kí hiệu là $A \setminus B$

$$(x \in A \setminus B) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

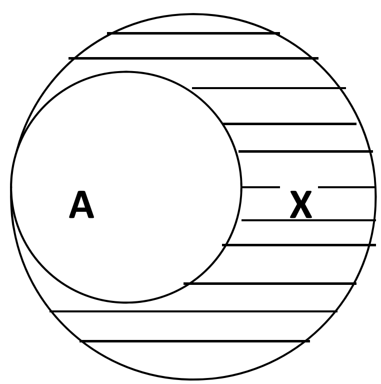


Phép hiệu các tập

3. Các phép toán (5/7) – *Phần bù*

Khái niệm:

- Cho A là tập con thực sự của X, phần bù của tập A trong X, kí hiệu $\overline{A}$ = X \ A



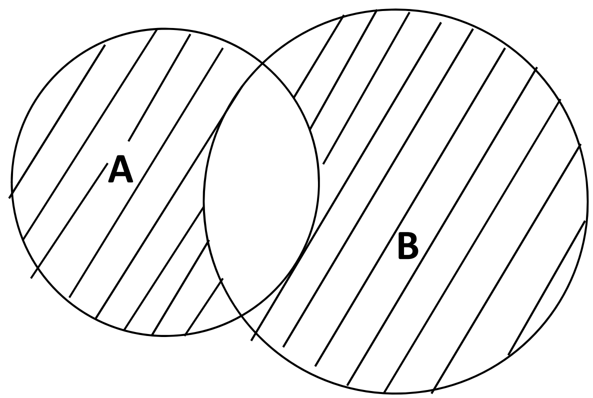
Phần bù của tập

3. Các phép toán (6/7) – *Hiệu đối xứng*

Khái niệm:

- Hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B là một tập hợp. Ký hiệu là:

$$A \nabla B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Phép hiệu đối xứng

3. Các phép toán (7/7) – *Tích đề các*

Khái niệm:

- Tích Đề các của hai tập hợp A và B là một tập hợp bao gồm các phần tử có dạng (a,b) trong đó a thuộc A và b thuộc B. Kí hiệu là $A \times B$
- *Ví dụ:*
  - $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{ 4, 5, 6 \}$ $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6 \}$
  - $A \cap B = \{ 5 \}$; $A \setminus B = \{1, 3 \}$; $B \setminus A = \{ 4, 6 \}$; $A \nabla B = \{1, 3, 4, 6 \}$
  - $A \times B = \{(1,4), (1,5), (1,6), (3,4), (3,5), (3,6), (5,4), (5,5), (5,6)\}$

4. Tính chất của các phép toán (1/6)

I. *Tính giao hoán*

- Phép hợp có tính giao hoán : $A \cup B = B \cup A$
- Phép giao có tính giao hoán : $A \cap B = B \cap A$
- Phép hiệu đối xứng có tính giao hoán : $A \nabla B = B \nabla A$
- Phép tích hiệu *không có tính giao hoán :* $(A \setminus B) \neq (B \setminus A)$
- Phép tích Đề các *không có tính giao hoán :* $A \times B \neq B \times A$

II. *Tính kết hợp*

- Phép hợp có tính kết hợp : $A \cup (B \cup C) = (B \cup A) \cup C$
- Phép giao có tính kết hợp : $A \cap (B \cap C) = (B \cap A) \cap C$
- Phép hiệu đối xứng có tính kết hợp : $A \nabla (B \nabla C) = (B \nabla A) \nabla C$

4. Tính chất của các phép toán (2/6)

III. *Tính phân phối*

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

IV. *Công thức De Morgan*

- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

4. Tính chất của các phép toán (3/6)

Ví dụ, chứng minh một số công thức trên:

- Giả sử ta cần chứng minh công thức

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Quá trình chứng minh gồm hai bước.
  - Bước 1:
    - Trước hết ta phải chứng minh $A \cap (B \cup C)$ là tập con của $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
    - Thật vậy, giả sử x là một phần tử của $A \cap (B \cup C)$, nghĩa là $x \in A$ đồng thời $x \in B$ hoặc $x \in C$. Nếu $x \in B$, tức là $x \in A \cap B$, còn nếu $x \in C$, tức $x \in A \cap C$, do vậy ta có

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

    - Nói cách khác $A \cap (B \cup C)$ là tập con của $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - Bước 2:
    - Bằng cách tương tự như vậy ta chứng minh ngược lại $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ là tập con của $A \cap (B \cup C)$.
    - Giả sử $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, nghĩa là $x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap C$, như vậy theo định nghĩa $x \in A$ đồng thời $x \in B$ hoặc $x \in C$, từ đó ta có

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

4. Tính chất của các phép toán (4/6)

Ví dụ, chứng minh một số công thức trên:

- Ta chứng minh tính chất $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
- Bước 1:
  - Giả sử (x,y) là phần tử bất kỳ của $A \times (B \cup C)$, nghĩa là $x \in A$ và $y \in B \cup C$, khi đó hoặc $y \in B$ hoặc $y \in C$. Nếu $y \in B$, tức là $(x,y) \in A \times B$ hoặc $y \in C$, thì $(x,y) \in A \times C$, do vậy ta có

$$A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C).$$

- Bước 2:
  - Ngược lại, nếu (x,y) là phần tử bất kỳ của $(A \times B) \cup (A \times C)$ thì hoặc $(x,y) \in A \times B$ hoặc $(x,y) \in (A \times C)$ suy ra $x \in A$ và $y \in B$ hoặc $y \in C$, hay $(x,y) \in A \times (B \cup C)$, do vậy ta sẽ có

$$(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$$

4. Tính chất của các phép toán (5/6)

Ví dụ, chứng minh một số công thức trên:

- Chứng minh công thức De Morgan sau

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

- Bước 1:
  - Giả sử phần tử bất kỳ $x \in X \setminus (A \cup B)$, tức là $x \in X$ và x không thuộc cả A và B điều này tương đương với $x \in X$, $x \notin A$ và $x \in X$, $x \notin B$ có nghĩa là

$$x \in X \setminus A \text{ và } x \in X \setminus B \text{ hay } x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

- Bước 2:
  - Ngược lại nếu y là phần tử bất kỳ thuộc $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ thì $y \in X \setminus A$ và $y \in X \setminus B$ tức là $y \in X$, $y \notin A$ và $y \notin B$ hay $y \in X$ và $y \notin (A \cup B)$.
- Mở rộng các phép toán trên cho nhiều tập ta kí hiệu như sau

$$\coprod_{1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \qquad \bigcap_{1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \qquad \bigcup_{1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

4. Tính chất của các phép toán (6/6)

V. *Các hệ quả*

- $A \cap B \subset B$, $A \cap B \subset A$
- $A \cap (A \cup B) = A$, $B \cap (A \cup B) = B$
- $A \setminus B \subset A$
- $A \setminus (A \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \setminus (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
- $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

5. Khái niệm về lực lượng của tập hợp (1/3)

Khái niệm:

- Đánh giá định lượng số lượng các phần tử của một tập hợp được gọi là lực lượng của tập hợp. Ký hiệu lực lượng của tập là N(A).
  a. *So sánh lực lượng của hai tập.*
  b. *Tập hợp hữu hạn và tập hợp vô hạn.*

5. Khái niệm về lực lượng của tập hợp (2/3)

So sánh lực lượng của hai tập:

- ***Các khái niệm:***
  - Cho A, B là 2 tập, nếu ứng với $x \in A$ có thể chọn tương ứng $x' \in B$ và với $x_1, x_2 \in A$, $(x_1 \neq x_2)$ ứng với $x_1', x_2' \in B$, khi đó ta nói: lực lượng của A nhỏ hơn lực lượng của B.
  - Cho A, B là 2 tập, nếu ứng với $x \in A$ có thể chọn tương ứng $x' \in B$ và với $x_1, x_2 \in A$ $(x_1 \neq x_2)$ ứng với $x_1', x_2' \in B$; Ngược lại, ứng với $x' \in B$ có thể chọn tương ứng $x \in A$ và $x_1', x_2' \in B$ $(x_1' \neq x_2')$ ứng với $x_1, x_2 \in A$, khi đó ta nói rằng giữa tập A và B xác lập phép tương ứng 1-1. Lực lượng của tập A tương đương (bằng) lực lượng của tập B.

5. Khái niệm về lực lượng của tập hợp (3/3)

Tập hợp hữu hạn và tập hợp vô hạn:

- Tập hợp có lực lượng hữu hạn gọi là tập hữu hạn.
  - Ví dụ: T= {a,b,c}   N(T) = 3
  - Tập các ước số của số 36 là U = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 }, N(U) = 9.
- Tập hợp có lực lượng vô hạn gọi là tập vô hạn.
  - Ví dụ: Z= {Tập các số nguyên} , N(Z) là một số vô hạn
  - R= {Tập các số thực} , N(R) là một số vô hạn.
- Để phân biệt các tập vô hạn, sử dụng khái niệm ***đếm được*** và ***không đếm được***.
- Tập hợp A có lực lượng tương đương với tập các số nguyên N gọi là các tập có lực lượng đếm được, ngoài ra gọi là các tập vô hạn không đếm được.

6. Khái niệm hàm (1/7)

Nhắc lại một số khái niệm về hàm:

a. *Hàm.*
b. *Miền xác định, miền giá trị.*
c. *Các phép toán.*
d. *Đơn ánh và toàn ánh.*
e. *Hàm ngược.*
f. *Hợp thành của hàm.*

6. Khái niệm hàm (2/7)

a. Hàm:

- Cho hai tập X, Y bất kỳ nếu ta xác định một quy luật (quy tắc) f để ứng với các phần tử của tập X ta có thể xác định tương ứng các phần tử của tập Y , thì khi đó ta nói có xác định một phép ánh xạ hàm từ X sang Y và ký hiệu:

$$f: X \rightarrow Y$$

- Ví dụ: X=Z= {tập các số nguyên} và Y=R = {Tập các số thực} ánh xạ f xác định như sau

$$f(x) = \sqrt{x}$$

6. Khái niệm hàm (3/7)

b. Miền xác định, miền giá trị:

- Nếu f là một hàm từ X đến Y, tập các phần tử của $x \in X$ có tương ứng các phần tử $y \in Y$ gọi là miền xác định của f.
- Tập các phần tử $y \in Y$ mà tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$ gọi là miền giá trị của f, khi đó y là ảnh của x và x là nghịch ảnh của y.

6. Khái niệm hàm (4/7)

c. Các phép toán :

- f_1 và f_2 là các hàm từ X đến R. Khi đó $f_1 + f_2$ và $f_1 f_2$ cũng là các hàm từ X đến R được xác định như sau:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

- Ví dụ:
  - Cho f_1 và f_2 là các hàm từ R sang R với $f_1 = x^2$ và $f_2 = x - x^2$ khi đó:
  - $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + (x - x^2) = x$
  - $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = x^2 (x - x^2) = x^3 - x^4$

6. Khái niệm hàm (5/7)

d. Đơn ánh và toàn ánh:

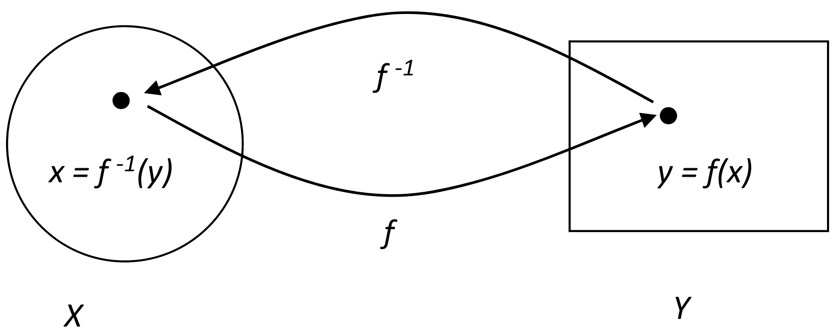
- Hàm f được gọi là đơn ánh (hay một - một) khi và chỉ khi $f(x_1) = f(x_2)$ suy ra $x_1 = x_2$ với mọi x_1 , x_2 nằm trong miền xác định của hàm.
- Hàm f được gọi là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $y \in Y$ tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.
- Hàm f được gọi là song ánh khi nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

- ***Ví dụ:***
  - Hàm $f_1 = x^2$ không phải là hàm song ánh;
  - Hàm $f_2 = x + 1$ là một hàm song ánh.

6. Khái niệm hàm (6/7)

e. Hàm ngược:

- Cho f là hàm song ánh từ X đến Y. Hàm ngược của f là một hàm gán cho mỗi phần tử $y \in Y$ một phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho f(x)=y . Hàm ngược của f được ký hiệu là f^{-1}. Từ đó $f^{-1}(y) = x$ khi $f(x) = y$.



Hàm ngược f^{-1}.

Ví dụ:

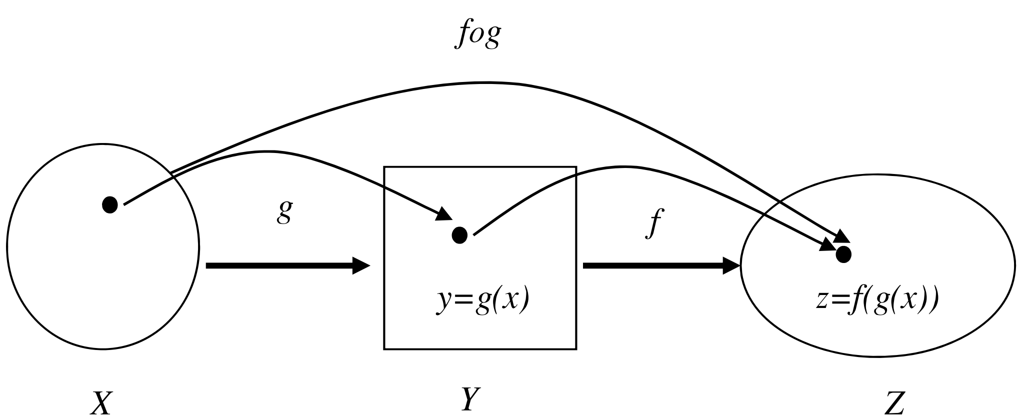
- Hàm $f_2 = x + 1$ có hàm ngược là $f_2^{-1} = y - 1$.
- Hàm $f : [a, b, c] \rightarrow [1, 2, 3]$ xác định như sau f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3. Khi đó $f^{-1} : [1, 2, 3] \rightarrow [a, b, c]$ xác định như sau f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c.

6. Khái niệm hàm (7/7)

e. Hợp thành của hàm:

- Cho *g là hàm từ X đến Y và f là hàm từ Y đến Z . Hợp thành của các hàm f và g được ký hiệu là fog xác định như sau:*

$$fog(x) = f(g(x))$$



Hợp thành của hàm

Ví dụ:

Cho hai hàm

$f(x) = 2x + 3$ và

$g(x) = 3x + 2$

Khi đó

$fog(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2(3x +2)+3 = 6x + 7$

và

$gof(x) =g(f(x)) = g(2x+3) = 3(2x +3)+2 = 6x + 11$