**Bài 1.** Tính các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\sin 2x(e^{2022x} - 1)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{3x} - 1)\ln(1+2x)}{1 - \cos 6x}$

3. $\lim\limits_{x\to 2} (8 - x^3)\tan\dfrac{\pi x}{4}$

1. Giới hạn I có dạng $\frac{0}{0}$.

Khi $x \to 0$ thì $\begin{cases} \sin 2x \sim 2x \\ e^{2022x} - 1 \sim 2022x \end{cases}$

$\to \sin 2x\,(e^{2022x} - 1) \sim 2x \cdot 2022 \cdot x = 4044 \cdot x^2$

$I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{4044x^2} \overset{\text{LPT}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{8088 \cdot x} =$ (L'Hopital)

$\overset{\text{LPT}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{8088} = \dfrac{1}{8088}$.

$1 - \cos 6x$

(Thay) $1 - \cos 6x = 2 \cdot \sin^2(3x)$

$\sim 2 \cdot (3x)^2 = 18x^2$

$u \to 0$

$. \; 1 - \cos 2u = 2\sin^2 u \sim 2u^2$

2.

I có dạng $\frac{0}{0}$

Khi $x \to 0$ thì $\begin{cases} e^{3x} - 1 \sim 3x \\ \ln(1+2x) \sim 2x \end{cases} \to (e^{3x} - 1)\ln(1+2x) \sim 6x^2$

$1 - \cos 2u \sim 2u^2$

(phải có)

$. \; 1 - \cos 6x = 2 \cdot \sin^2(3x) \sim 2 \cdot (3x)^2 = 18x^2.$

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2}{18x^2} = \frac{1}{3}.$$

$\cdot \; \cot' u = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

3. Giới hạn I có dạng $0.\infty$:

$$I = \lim_{x\to 2} \frac{8-x^3}{\cot\frac{\pi x}{4}} \overset{LPT}{=\!=} \lim_{x\to 2} \frac{-3x^2}{\frac{-\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}}$$

$$= \frac{-12}{-\frac{\pi}{4}} = \frac{48}{\pi}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{3x} - 3x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 - 2 + 3\ln x}{e^x - e}$

4. Giới hạn I có dạng $1^\infty$, $I = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x} - 3x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

C1.

$$I = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(e^{3x} - 3x\right)^{\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(e^{3x} - 3x)}{x^2}} \quad \left(= e^J\right)$$

$\ln' u = \frac{u'}{u}$

Xét $J = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(e^{3x} - 3x)}{x^2} \overset{LPT}{\underset{0/0}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{3e^{3x} - 3}{e^{3x} - 3x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3e^{3x} - 3}{(e^{3x} - 3x).2x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3(e^{3x}-1)}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\underbrace{e^{3x}-3x}_{1}} = \lim_{x\to 0} \frac{3(e^{3x}-1)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{9 \cdot e^{3x}}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

$$\Rightarrow I = e^{J} = e^{9/2}$$

Cách 1: Khi $x \to 0$ thì $3(e^{3x}-1) \sim 3 \cdot 3x = 9x$

$$J = \lim_{x\to 0} \frac{3(e^{3x}-1)}{(e^{3x}-3x)\cdot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{9x}{(e^{3x}-3x)\cdot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{9}{2(e^{3x}-3x)} = \frac{9}{2}$$

Cách 2: $\ln I = \lim_{x\to 0} \ln \left(e^{3x}-3x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{3x}-3x)}{x^2}$

$$\overset{LPT}{=} \ldots = \frac{9}{2} \Rightarrow I = e^{\frac{9}{2}}$$

6.

4. $\lim_{x\to 0} (e^{3x} - 3x)^{\frac{1}{x^2}}$

5. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$

6. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 - 2 + 3\ln x}{e^x - e}$

6, I có dạng $\frac{\infty}{\infty}$

. AD Quy tắc L'Hopital

$$I = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x + \frac{3}{x}}{e^x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x^2}}{e^x} =$$

$$= 0 \quad \text{vì} \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \left(4 - \frac{3}{x^2}\right) = 4 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

**Bài 3.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^3} - 1}{x - \sin x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ m & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ Với giá trị nào của tham số $m$ thì hàm số liên tục tại $x = 0$?

Tìm đk để hàm số liên tục tại $x = x_0$

Cách 1: (Sử dụng đn) $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$C_2$: (Sd đkỳ) $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

VD: $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{với } x > x_0 \\ h(x) & \text{với } x \le x_0 \end{cases}$

Giải:

h/s liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

. $f(0) = m$

. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^3} - 1}{x - \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x}$ do $e^{x^3} - 1 \sim x^3$ (khi $x \to 0$

$\overset{LPT}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{1 - \cos x} \overset{LPT}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x}{+\sin x} \overset{LPT}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6}{\cos x} = 6.$

KL: h/số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow m = 6$

**Bài 5.** Tìm $a$ để hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^6 - 3x^4 + 1}{(x-1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \text{—} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

+) Với $\forall x \neq 1$ thì $f(x) = \dfrac{2x^6 - 3x^4 + 1}{(x-1)^2}$ xác định và liên tục. (với $\forall a$)

+) hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ liên tục tại $x = 1$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$, $f(1) = a$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^6 - 3x^4 + 1}{(x-1)^2} \underset{0/0}{\overset{LPT}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{12x^5 - 12x^3}{2(x-1)} \underset{0/0}{\overset{LPT}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{12 \cdot 5x^4 - 12 \cdot 3x^2}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

h số liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{a = 12}$

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4x^3+1}{(3x+1)\sqrt{x^5+1}}dx$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{e^{\sqrt{1-x}}-1}dx$

4. $\displaystyle\int_0^{3} \frac{dx}{x^3-27}$

6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{\sqrt{2x}}-1}{2x+\sin 3x}dx$

7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\ln(1+2x)^2}$

8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\ln(1+\sqrt[3]{1-x})}$

9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin x}{x^2}dx$

2, Tích phân I đã là TPSR loại 1

Tách $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3+1}{(3x+1)\sqrt{x^5+1}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{4x^3+1}{(3x+1)\sqrt{x^5+1}}dx$

$= I_1 + I_2$

+ $I_1$ là TP xác định, có giá trị hữu hạn.

+ $I_2$ là TPSR loại 1.

Khi $x \to +\infty$ thì $4x^3+1 \sim 4x^3$

$(3x+1)\sqrt{x^5+1} \sim 3x \cdot \sqrt{x^5} = 3.x^{\frac{7}{2}}$

$f(x) = \dfrac{4x^3+1}{(3x+1)\sqrt{x^5+1}} \sim \dfrac{4x^3}{3x^{7/2}} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{x^{1/2}}$ khi $x \to +\infty$

mà $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4}{3}\frac{1}{x^{1/2}}dx = \frac{4}{3}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{1/2}}dx$ là TP Riemann phân kỳ do $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

Vậy TP đã cho phân kỳ theo TC So sánh 2

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{4x^3+1}{(3x+1)\sqrt{x^5+1}}\, dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}\, dx$$

$\downarrow$ So

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

6, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{2x}}-1}{2x+\sin 3x}\, dx$

$f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{2x}}-1}{2x+\sin 3x}$ $\in X$, đạt khi $2x+\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vì $I$ là TP suy rộng loại 2 có điểm bất thường $x = 0$.

Khi $x \to 0^+$ thì
$$\begin{cases} e^{\sqrt{2x}} - 1 \sim \sqrt{2x} \\ \sin 3x \sim 3x \\ 2x + \sin 3x \sim 5x \end{cases} \Rightarrow f(x) \sim \frac{\sqrt{2x}}{5x} = \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}$$

mà $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{5}\int_0^1 \frac{1}{(x-0)^{1/2}}\, dx$

hội tụ do $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1$ $\Rightarrow$ $I$ cũng hội tụ theo TC SS.

9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin x}{x^2}\,dx$

Lời giải sai:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx = I_1 + I_2$$

$I_1$ là TP Riemann hội tụ do $\alpha = 2 > 1$.

$I_2$ là TP SS loại 2: Ta có $f(x) = \frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ $(x \to 0)$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ là TP Riemann phân kỳ do $\alpha = 1$

$\Rightarrow$ $I_2$ phân kỳ $\Rightarrow$ $I$ phân kỳ.

Giải: $\forall x \in [1;+\infty)$

$$0 \le \frac{1+\sin x}{x^2} \le \frac{2}{x^2}$$

$$(0 \le f(x) \le g(x))$$

$-1 \le \sin x \le 1$ khi $x \to \infty$

$\sin x$ $\quad$ $x \to \infty$

$$\int_1^{18500} \frac{1+\sin x}{x^2}\,dx$$

(mà $\int_a^{+\infty} g(x)$ hội tụ $\rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ ).

mà $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ là TP Riemann hội tụ do $\alpha = 2 > 1$

$\Rightarrow$ I cũng hội tụ theo TC SS 1.

$=$

14. $$\int_0^{+\infty} \frac{x + 2\arctan x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} = I_1 + I_2$$

. $I_1$ là TP xác định, có giá trị hữu hạn (vì $f(x) = \frac{x + 2\arctan x}{x^2+1}$ xác định liên tục trên $[0,1]$ ).

. $I_2$ là TP SR loại 1

$\arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Khi $x \to +\infty$ thì $x + 2\arctan x \sim x$, $x^2+1 \sim x^2$ $\rightarrow f(x) = \frac{x + 2\arctan x}{x^2+1} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ là TP Riemann phân kỳ do $\alpha = 1$

$\Rightarrow I_2$ cũng phân kỳ

$\Rightarrow$ I là TP phân kỳ

5. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2-x+1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-x+1}}_{I_2} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

- $I_2$ là TP xác định có giá trị hữu hạn vì $f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$ có $x^2-x+1 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \neq 0, \forall x$.

$\Rightarrow f(x)$ xác định, liên tục trên $[-1,1]$

- Xét $I_3$: $I_3$ là TP SR loại 1

Có $f(x) = \frac{1}{x^2-x+1} \sim \frac{1}{x^2}$ khi $x \to +\infty$

mà $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ là TP Riemann hội tụ do $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow I_3$ cũng hội tụ

Tương tự $I_1$ là TP SR loại 1.

Có $f(x) = \frac{1}{x^2-x+1} \sim \frac{1}{x^2}$ khi $x \to -\infty$

mà $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$ ______ h.tụ $\rightarrow I_1$ cũng h.tụ.

$\rightarrow I$ là TP hội tụ.

**Bài 7.** Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

TC Những chuỗi dương

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)(n+2)..(n+2020)}{(2n+1)^{2022}}$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n+1)3^n}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)3^n}{n^3}$

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2+\sin\frac{1}{n}}{2+\cos\frac{1}{n}}\right)^n$

Dalembe

6, $u_n = \left(\frac{2+\sin\frac{1}{n}}{2+\cos\frac{1}{n}}\right)^n > 0$

$\forall n \geq 1$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\sin\frac{1}{n}}{2+\cos\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} < 1$

vì khi $n \to \infty$ thì $\frac{1}{n} \to 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty}(2+\sin\frac{1}{n}) = 2 \\ \lim_{n\to\infty}(2+\cos\frac{1}{n}) = 3 \end{cases}$ $\to$ chuỗi hội tụ TC Cosi

1. Đây là chuỗi số dương có $u_n = \frac{n+1}{n^3+n+1}$

Khi $n \to +\infty$ thì $\begin{cases} n+1 \sim n \\ n^3+n+1 \sim n^3 \end{cases} \to u_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ là chuỗi Riemann hội tụ do $\alpha = 2 > 1$

$\to$ chuỗi đã cho hội tụ theo TC So sánh.

2) Thấy tử chuỗi số đúng có $U_n = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+2020)}{(2n+1)^{2022}}$

Khi $n \to +\infty$ thì $n.(n+1)\ldots(n+2020) \sim n.n\ldots n = n^{2021}$

$(2n\cancel{+1})^{2022} \sim (2n)^{2022} = 2^{2022}.n^{2022}$

$\Rightarrow U_n \sim \dfrac{n^{2021}}{2^{2022}.n^{2022}} = \dfrac{1}{2^{2022}}.\dfrac{1}{n}$ mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2022}}.\frac{1}{n} = \frac{1}{2^{2022}}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \infty\right.$ và $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k.U_n = k.\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \infty$ $(k \neq 0)$ $k.S$ cùng tính hội tụ. $\Big)$

là chuỗi $R$ phân kỳ.

$\rightarrow$ chuỗi đã cho phân kỳ.

12. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2\sqrt{n}-1}{n}$

13. $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\ldots$

12, Chuỗi đan dấu dạng $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . u_n$

với $u_n = \frac{2\sqrt{n}-1}{n}$

Xét $f(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{x}$ với $x \geq 1$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} . x - (2\sqrt{x}-1) . 1}{x^2} = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2} \leq 0, \quad \forall x \geq 1$

→ hàm $f(x)$ NB trên $[1, +\infty)$ mà $f(n) = u_n$, $\forall n \in N^*$

→ $(u_n)$ là dãy giảm.

và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ → chuỗi đan dấu hội tụ theo TC Leibniz.

(nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ → chuỗi phân kỳ).

13, Chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{2n-1}$ có $u_n = \frac{1}{2n-1}$ giảm khi $n$ tăng

→ dãy $(u_n)$ là dãy giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ khi $n \to \infty$

Vậy chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.