TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG 6
ĐẠI SỐ BOOLE VÀ MẠCH TỔ HỢP

Lecturer: PhD. Ngo Huu Phuc
Tel: 0438 326 077
Mob: 098 5696 580
Email: ngohuuphuc76@gmail.com

NỘI DUNG

6.1. Giới thiệu chung

- Giới thiệu một số khái niệm cơ bản của ***mạch tổ hợp*** và ***đại số Boole***.
- Mối liên hệ giữa các hàm Boole và các mạch tổ hợp.
- Dùng các hàm Boole để ***phân tích và thiết kế các mạch trong thực tế***.
- Phương pháp ***tối ưu hoá biểu thức Boole*** - phương pháp Quine-McClusky.

6.2. Hàm Boole (1/10)

6.2.1. Giới thiệu (1/2):

- Đại số Boole đưa ra quy tắc, phép toán làm việc với tập

B = {0,1}

- Sử dụng đại số Boole trong:
  - Các chuyển mạch điện tử,
  - Quang học có thể nghiên cứu.
- 3 phép toán cơ bản được dùng nhiều nhất:
  1. Phép lấy tổng Boole;
  2. Phép lấy tích Boole;
  3. Phép lấy phần bù.

6.2. Hàm Boole (2/10)

6.2.1. Giới thiệu (2/2):

- Phép lấy tổng Boole:
  - Ký hiệu **+** hoặc **∨**,
  - Được định nghĩa : **1 + 1 = 1**; **1 + 0 = 1**; **0 + 1 = 1**; **0 + 0 = 0**
- Phép lấy tích Boole:
  - Ký hiệu **.** hoặc **∧**,
  - Được định nghĩa: **1 . 1 = 1**; **1 . 0 = 0**; **0 . 1 = 0**; **0 . 0 =0**
- Phép lấy phần bù:
  - Ký hiệu $\overline{}$,
  - Được định nghĩa: $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$

6.2. Hàm Boole (3/10)

6.2.2. Biểu thức Boole và hàm Boole (1/4):

- Cho B = {0, 1}, khi đó:
  - **Biến x** được gọi là **biến Boole** nếu nó nhận **giá trị** $\in \boldsymbol{B}$.
  - **Một ánh xạ f:** $\boldsymbol{B^n} \rightarrow \boldsymbol{B}$ – được gọi là hàm Boole bậc n.
- Biểu thức Boole, với các biến Boole, được định nghĩa một cách đệ quy như sau:
  - Các ký hiệu **0**,**1** và các biến Boole $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ là các biểu thức Boole.
  - Nếu $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}$ là các biểu thức Boole nào đó,

thì $\overline{\mathbf{X_1}}$, $(\mathbf{X_1} \, . \, \mathbf{X_2})$, $(\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2})$ cũng là các biểu thức Boole.

6.2. Hàm Boole (4/10)

6.2.2. Biểu thức Boole và hàm Boole (2/4):

- **Ví dụ:** Tìm các giá trị của hàm Boole của hàm Boole được biểu diễn: $F(x,y,z) = x.y + \bar{z}$.
- Giải: các giá trị được cho dạng bảng:

x	y	z	x.y	$\bar{z}$	$F(x,y,z) = x.y + \bar{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

6.2. Hàm Boole (5/10)

6.2.2. Biểu thức Boole và hàm Boole (3/4):

- Cho hàm Boole **F**, **G** với **n** biến, khi đó:
  - **F và G được gọi là bằng nhau** nếu:

    $F(b_1, b_2, \dots, b_n) = G(b_1, b_2, \dots, b_n)$ với $\forall\ b_1, b_2, \dots, b_n \in$ B={0,1}
  - **Hai biểu thức Boole khác nhau biểu diễn cùng một hàm** được gọi là **tương đương**.
  - **Phần bù của hàm Boole F**, ký hiệu $\bar{\mathbf{F}}$, được định nghĩa:

    $$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$
  - **Tổng Boole của F và G** được định nghĩa:

    $$(F+G)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
  - **Tích Boole của F và G** được định nghĩa:

    $$(F.G)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,.\,G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

6.2. Hàm Boole (6/10)

6.2.2. Biểu thức Boole và hàm Boole (4/4):

- **Ví dụ**: Có bao nhiêu hàm Boole khác nhau bậc n?
- Giải:

Có 2^n bộ n phần tử khác nhau gồm các số 0 và 1.

Vì hàm Boole là sự gán 0 hoặc 1 cho mỗi bộ trong số 2^n bộ n phần tử.

Theo quy tắc nhân, số hàm Boole bậc n sẽ có:

2^{2^n} hàm Boole.

6.2. Hàm Boole (7/10)

6.2.3. Các hằng đẳng thức của đại số Boole:

CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC BOOLE	
Hằng đẳng thức	**Tên gọi**
$\overline{\overline{x}} = x$	Luật phần bù kép
$x + x = x$ $x \, . x = x$	Luật lũy đẳng
$x + 0 = x$ $x \, . 1 = x$	Luật đồng nhất
$x + 1 = 1$ $x \, . 0 = 0$	Luật nuốt
$x + y = y + x$ $x \, . y = y . x$	Luật giao hoán
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x \, . (y . z) = (x . y) . z$	Luật kết hợp
$x + y . z = (x + y) . (x + z)$ $x \, . (y + z) = x . y + x . z$	Luật phân phối
$\overline{x . y} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{x + y} = \overline{x} . \overline{y}$	Luật De Morgan

6.2. Hàm Boole (8/10)

Ví dụ:

Chứng minh $x.(x + y) = x$ bằng các phương pháp sau:

- Sử dụng bảng giá trị.
- Sử dụng hằng đẳng thức của đại số Boole.

6.2. Hàm Boole (9/10)

a. Chứng minh bằng bảng giá trị (học viên tự làm).

b. Chứng minh bằng hằng đẳng thức Boole:

Ta có:

$x.(x+y) = (x+0).(x+y)$ − luật đồng nhất đối với tổng Boole.

$= x + 0.y$ − luật phân phối của tổng Boole đối với tích Boole.

$= x + y.0$ − luật giao hoán của tích Boole.

$= x + 0$ − luật nuốt đối với tích Boole.

$= x$ − luật nuốt đối với tổng Boole.

ĐPCM.

6.2. Hàm Boole (10/10)

6.2.4. Định nghĩa đại số Boole:

- **Đại số Boole** là một tập B có hai phần tử 0 và 1 với hai phép toán hai ngôi ∨ và ∧, và một phép toán 1 ngôi $\overline{}$ sao cho các tính chất sau đây đúng với mọi x,y,z ∈ B:
  - $x \vee 0 = x \,;\, x \wedge 1 = x$ – luật đồng nhất.
  - $x \vee \bar{x} = 1 \,;\, x \wedge \bar{x} = 0$ – luật nuốt.
  - $\begin{array}{l}(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)\end{array}$ – luật kết hợp.
  - $x \vee y = y \vee x \,;\, x \wedge y = y \wedge x$ – luật giao hoán.
  - $\begin{array}{l}x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)\end{array}$ – luật phân phối.

6.3. Biểu diễn các hàm Boole (1/7)

6.3.1. Đặt vấn đề:

- Có hai bài toán quan trọng của đại số Boole được nghiên cứu:
  - **Bài toán thứ nhất**:
    - **Cho các giá trị của một hàm Boole, làm thế nào tìm được biểu thức Boole biểu diễn hàm đó**.
    - Bài toán này được giải bằng cách chứng minh mọi hàm Boole đều có thể được biểu diễn bởi tổng và tích Boole của các biến và phần bù của chúng.
  - **Bài toán thứ 2**:
    - **Liệu có thể dùng một tập nhỏ hơn các toán tử để biểu diễn các hàm Boole không?**
    - Bài toán này có thể giải bằng cách chứng minh mọi hàm Boole đều có thể được biểu diễn bằng cách dùng chỉ 1 toán tử.

6.3. Biểu diễn các hàm Boole (2/7)

6.3.2. Khai triển tổng các tích (1/6):

- **Định nghĩa 6.3.2**:
  - Một biến Boole hoặc phần bù của nó được gọi là một ***tục biến***.
  - Tích Boole $y_1.y_2 \ldots y_n$ trong đó $y_i = x_i$ hoặc $y_i = \overline{x_i}$ với x_1, x_2,...,x_n là các biến Boole được gọi là một ***tiểu hạng*** (minterm). (tiểu hạng là tích của n tục biến).

- ***Chú ý:***
  - Một tiểu hạng có giá trị 1 đối với một và chỉ một tổ hợp giá trị của các biến của nó.
  - Hay, tiểu hạng $\mathbf{y_1.y_2 \ldots y_n}$ bằng 1 khi và chỉ khi mọi **y_i=1** và điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi **x_i=1** nếu $\mathbf{y_i = x_i}$ và **x_i=0** khi $\mathbf{y_i = \overline{x_i}}$.

6.3. Biểu diễn các hàm Boole (3/7)

6.3.2. Khai triển tổng các tích (2/6):

- Có thể lập được biểu thức Boole bằng cách lấy tổng Boole của các tiểu hạng phân biệt với tập các giá trị đã được cho trước.
- Tổng Boole các tiểu hạng biểu diễn hàm được gọi là khai triển tổng các tích Boole hay dạng tuyển chuẩn tắc.
- Tích Boole của các tổng Boole đối với một hàm Boole được gọi là khai triển tích các tổng Boole hay dạng hội chuẩn tắc.

6.3. Biểu diễn các hàm Boole (4/7)

6.3.2. Khai triển tổng các tích (3/6):

Ví dụ 3.1: Tìm các biểu thức Boole biểu diễn các hàm $F(x, y, z)$ và $G(x, y, z)$ được cho bởi bảng sau:

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	**1**	**0**	**0**	**1**
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	**1**	**0**	**0**	**1**
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

6.3. Biểu diễn các hàm Boole (5/7)

6.3.2. Khai triển tổng các tích (4/6):

Lời giải:

- **Đối với hàm F:** F = 1 khi x=z=1 và y=0 và có F = 0 khi ngược lại. Có thể lập được bằng tích Boole của các biến x, $\bar{y}$, z, ta có:

$$\mathbf{F(x, y, z) = x \wedge \bar{y} \wedge z}$$

- **Đối với hàm G:** G = 1 khi x=y=1 và z=0 hoặc khi x=z=0 và y=1.

Ta có 2 biểu thức:

$$x \wedge y \wedge \bar{z} \text{ hoặc } \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$$

Tổng Boole của 2 tích là biểu diễn của hàm G:

$$\mathbf{G(x, y, z) = (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})}$$

6.3. Biểu diễn các hàm Boole (6/7)

6.3.2. Khai triển tổng các tích (5/6):

Ví dụ 3.2:

Tìm khai triển tổng các tích của hàm

$$\mathbf{F(x, y, z) = (x \vee y) \wedge \bar{z}}$$

6.3. Biểu diễn các hàm Boole (7/7)

6.3.2. Khai triển tổng các tích (6/6):

Lời giải:

- Lập bảng giá trị của F, ta có:

x	y	z	$x \vee y$	$\bar{z}$	$(x \vee y) \wedge \bar{z}$
1	1	1	1	0	0
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	0	1	1	0	0
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	1	1	1	0	0
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

$$F(x, y, z) = (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$$

6.4. Các cổng logic (1/18)

6.4.1. Giới thiệu chung (1/5)

- Đại số Boole được dùng để mô hình hóa so đồ mạch trong các dụng cụ điện tử.
- Mỗi một đầu vào và mỗi một đầu ra của một dụng cụ điện tử có thể được xem là một phần tử của tập {0,1}.
- Với một thiết bị điện tử, có thể có nhiều mạch, mỗi một mạch có thể được thiết kế bằng cách dùng các quy tắc của đại số Boole.
- Các mạch mà chúng ta xét ở đây có đầu ra chỉ phụ thuộc vào các tổ hợp đầu vào mà không phụ thuộc vào trạng thái hiện thời của mạch (không có khả năng nhớ).

6.4. Các cổng logic (2/18)

6.4.1. Giới thiệu chung (2/5)

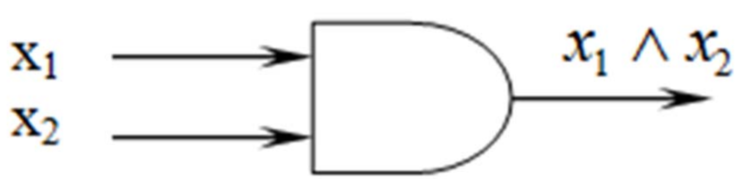
- Các mạch tổ hợp có thể được xây dựng trên cơ sở sử dụng ba loại phần tử/mạch cơ bản, còn được gọi là các cổng logic.
- Các cổng được xem xét:
  - **cổng AND**,
  - **cổng OR ,**
  - **cổng NOT (bộ đảo)**.

6.4. Các cổng logic (3/18)

6.4.1. Giới thiệu chung (3/5)

- ***Định nghĩa 6.4.1***: Cổng AND nhận các giá trị vào là các bit x_1, x_2 là các bit và cho đầu ra là một bit được ký hiệu là $x_1 \wedge x_2$. Giá trị được định nghĩa như sau:

$$x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1, \text{nếu } x_1 = 1 \text{ và } x_2 = 1 \\ 0, \text{trong các trường hợp ngược lại} \end{cases}$$



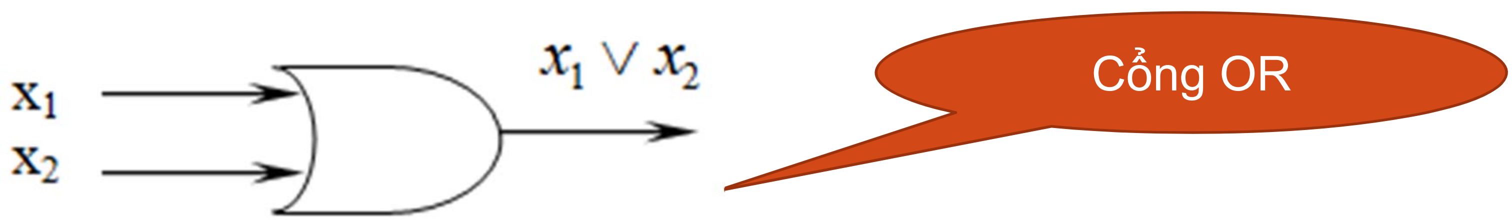
Cổng AND

6.4. Các cổng logic (4/18)

6.4.1. Giới thiệu chung (4/5)

- ***Định nghĩa 6.4.2***: Cổng OR nhận các giá trị vào là các bit x_1, x_2 là các bit và cho đầu ra là một bit được ký hiệu là $x_1 \vee x_2$. Giá trị được định nghĩa như sau:

$$x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 1, \text{nếu } x_1 = 1 \text{ hoặc } x_2 = 1 \\ 0, \text{trong các trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

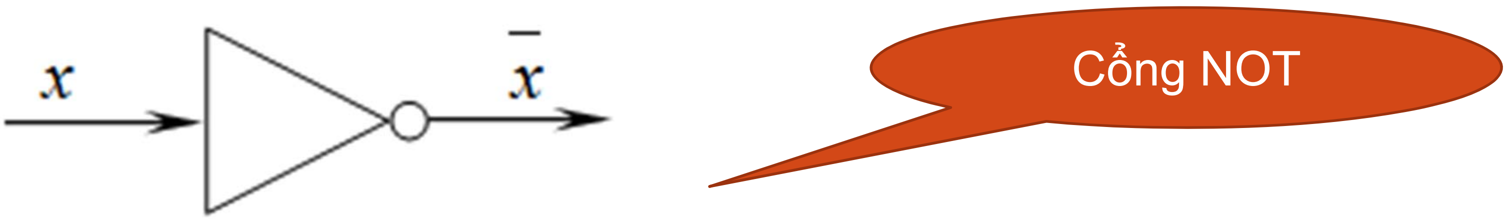


6.4. Các cổng logic (5/18)

6.4.1. Giới thiệu chung (5/5)

- ***Định nghĩa 6.4.3***: Cổng NOT (bộ đảo) nhận giá trị vào là bit x và cho đầu ra là 1 bit ký hiệu là $\bar{x}$. Giá trị được định nghĩa như sau:

$$\bar{x} = \begin{cases} 1, \text{nếu } x = 0 \\ 0, \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$



6.4. Các cổng logic (6/18)

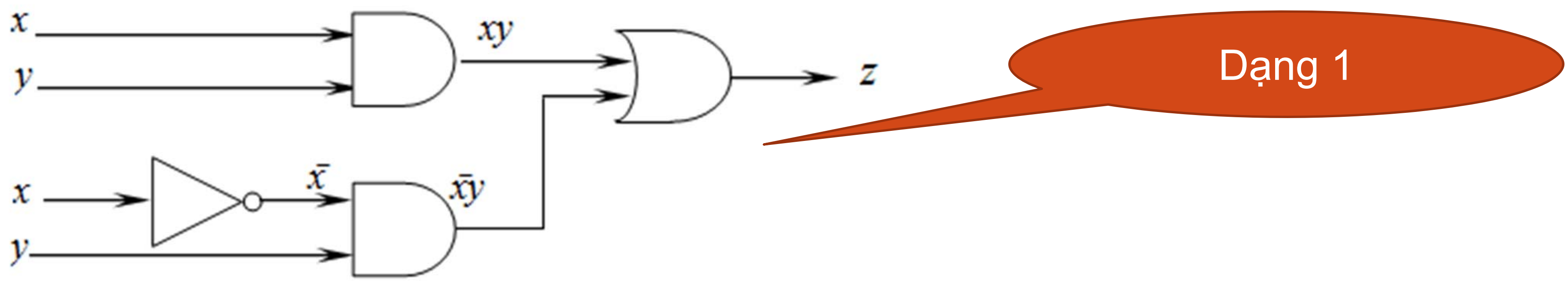
6.4.2. Tổ hợp các cổng (1/9)

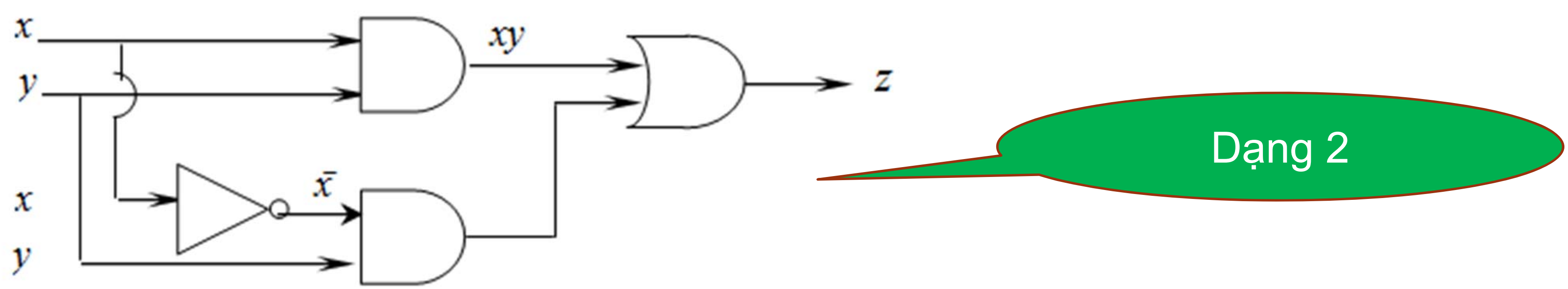
- Các mạch tổ hợp phức tạp có thể được xây dựng bằng cách dùng tổ hợp các bộ đảo, các cổng AND và OR.
- Khi lập tổ hợp các mạch, một số cổng có thể dùng chung đầu vào.
- Lưu ý rằng đầu ra của một cổng có thể được dùng làm đầu vào đối với một hoặc nhiều phần tử mạch khác.

6.4. Các cổng logic (7/18)

6.4.2. Tổ hợp các cổng (2/9)

Ví dụ về vẽ mạch logic cho: $z = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y)$





6.4. Các cổng logic (8/18)

6.4.2. Tổ hợp các cổng (3/9)

Ví dụ 6.4.1: Tìm mạch tổ hợp tương ứng với biểu thức Boole sau đây:

$$(\mathrm{x}_1 \wedge (\overline{\mathrm{x}_2} \vee \mathrm{x}_3)) \vee \mathrm{x}_2$$

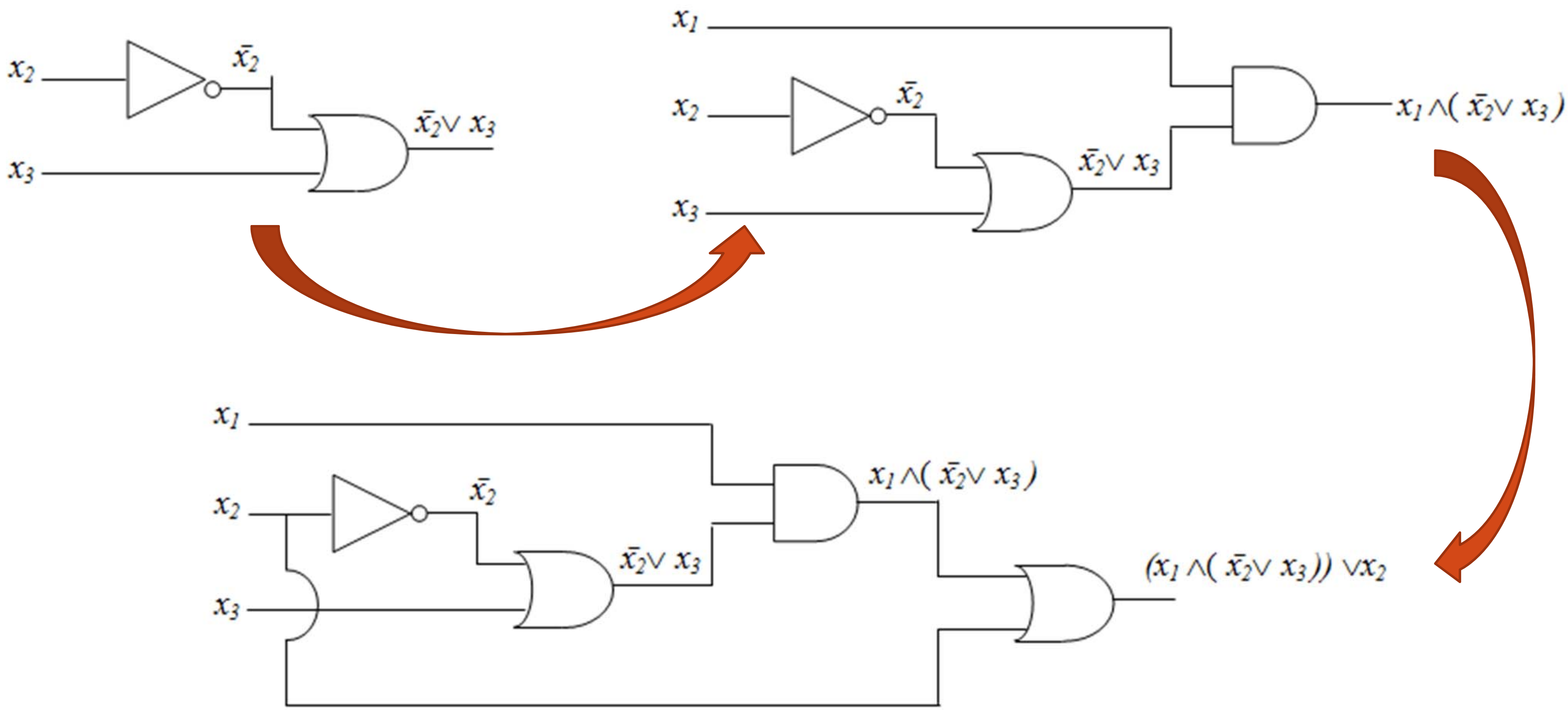
Giải:

- Các bước xây dựng:
  - Xây dựng mạch tổ hợp cho $\overline{x_2} \vee x_3$, dùng cổng OR và cổng NOT.
  - Xây dựng mạch tổ hợp cho $x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3)$, dùng thêm cổng AND.
  - Xây dựng mạch tổ hợp cho cả biểu thức, dùng thêm cổng OR.

6.4. Các cổng logic (9/18)

6.4.2. Tổ hợp các cổng (4/9)

Mạch tổ hợp của $(x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3)) \vee x_2$



6.4. Các cổng logic (10/18)

6.4.2. Tổ hợp các cổng (5/9)

Ví dụ 6.4.2:

Một ủy ban gồm 3 thành viên phải quyết định các vấn đề của một tổ chức.

Một thành viên bỏ phiếu tán thành hoặc không tán thành cho một đề nghị được đưa ra. Một đề nghị được thông qua nếu được ít nhất 2 phiếu tán thành.

Hãy thiết kế một mạch cho phép xác định được một đề nghị có được thông qua hay không.

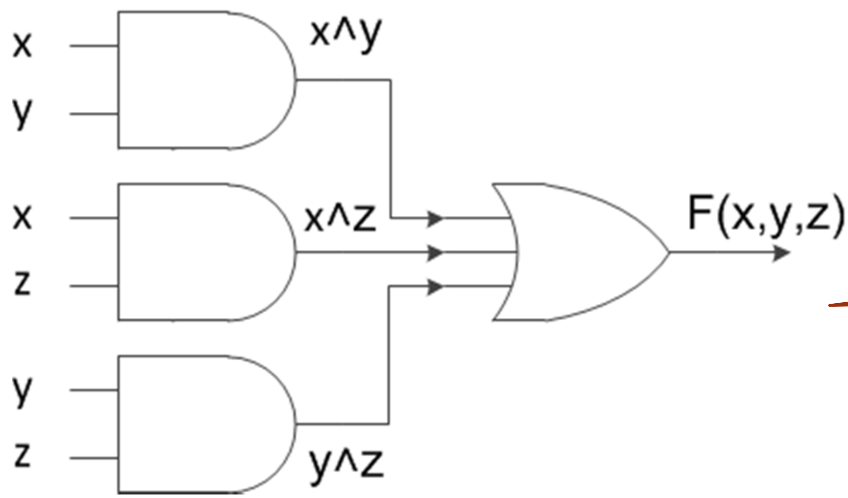
6.4. Các cổng logic (11/18)

6.4.2. Tổ hợp các cổng (6/9)

Lời giải ví dụ 6.4.2:

- Gọi x,y,z tương ứng với trạng thái của phiếu ứng với mỗi ủy viên.
- Khi đó, ta có x,y,z ∈ $B = \{0,1\}$.
- Hàm Boole biểu diễn có dạng:

$$F(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)$$



Mạch bỏ phiếu theo đa số

6.4. Các cổng logic (12/18)

6.4.2. Tổ hợp các cổng (7/9)

Ví dụ 6.4.3:

Tại một hệ thống đèn được điều khiển bởi nhiều công tắc. Các mạch cần được thiết kế sao cho khi ấn một công tắc bất kỳ hệ thống đèn chuyển trạng thái từ tắc sang bật hoặc ngược lại. Hãy thiết kế một mạch thực hiện điều này khi:

- Có 2 công tắc.
- Có 3 công tắc.

6.4. Các cổng logic (13/18)

6.4.2. Tổ hợp các cổng (8/9)

Lời giải ví dụ 6.4.3:

- Gọi x,y tương ứng với trạng thái của 2 công tắc.
- Khi đó, ta có x,y ∈ $\mathrm{B} = \{0,1\}$.
- Giả sử,
  - F(x,y) – hàm trạng thái của bóng đèn.
  - F(x,y)=1 – đèn sáng, F(x,y)=0 – đèn tắt.
  - x=1 – công tắc 1 đóng, x=0 – công tắc 1 mở.
  - y=1 – công tắc 2 đóng, y=0 – công tắc 2 mở.
  - Có thể chọn **F(1,1) = F(0,0) = 1 và F(1,0) = F(0,1) = 0**.
- Hàm Boole biểu diễn có dạng:

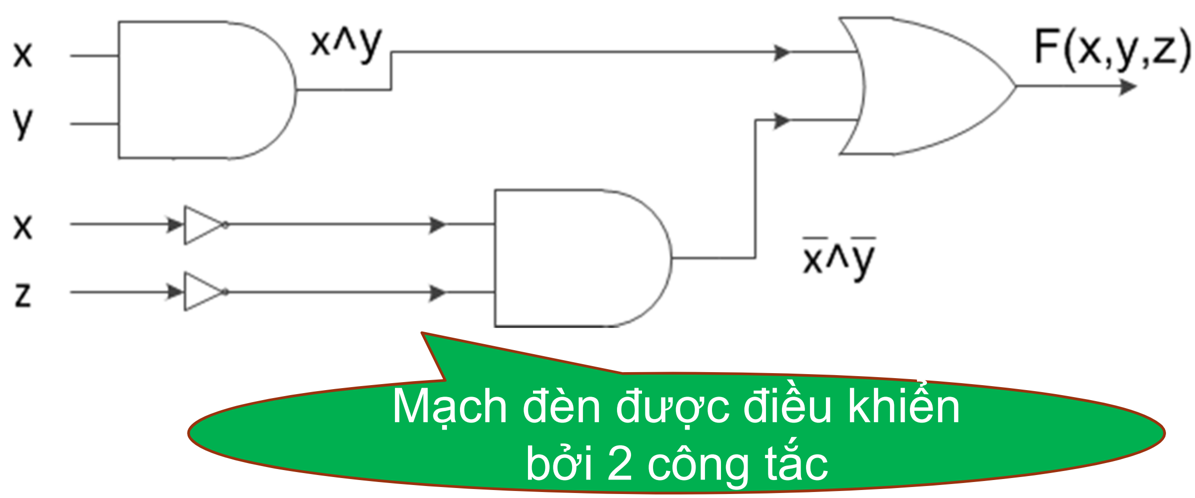
$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \vee (\bar{\mathbf{x}} \wedge \bar{\mathbf{y}})$$

6.4. Các cổng logic (14/18)

6.4.2. Tổ hợp các cổng (9/9)

Lời giải ví dụ 6.4.3 (tiếp):

x	y	F
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



BTVN: Mạch đèn được điều khiển bởi 3 công tắc.

6.4. Các cổng logic (15/18)

6.4.3. Mạch tổ hợp tương đương (1/4)

Khái niệm về mạch tổ hợp tương đương:

- **Khái niệm 1**: Hai biểu thức Boole trên cùng các biến Boole x_1, x_2,..., x_n được gọi là bằng nhau nếu giá trị của chúng trên mọi bộ giá trị có thể có của các biến là như nhau.
- **Khái niệm 2**: Các mạch tổ hợp tương ứng với các biểu thức Boole bằng nhau được gọi là các mạch tổ hợp tương đương.

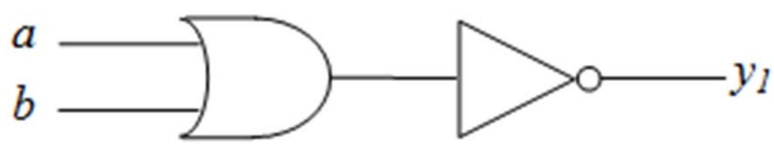
- Nói cách khác, hai mạch tổ hợp được gọi là tương đương nếu hai mạch đó với các đầu vào như nhau sẽ cho đầu ra cũng như nhau.

6.4. Các cổng logic (16/18)

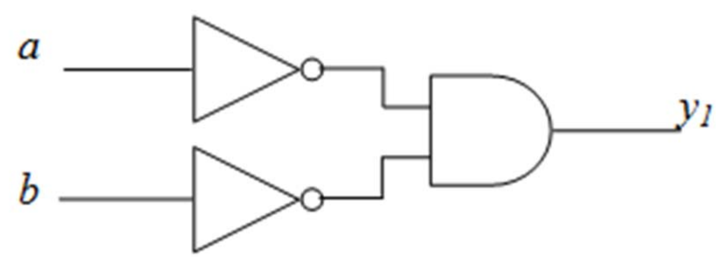
6.4.3. Mạch tổ hợp tương đương (2/4)

Ví dụ 6.4.4.

- Mạch tổ hợp ở hình (a) có biểu thức Boole tương ứng là $\overline{a \vee b}$,
- Mạch tổ hợp ở hình (b) có biểu thức Boole tương ứng là $\bar{a} \wedge \bar{b}$.
- Hai biểu thức Boole đó bằng nhau, do vậy hai mạch tổ hợp ở hình dưới là các mạch tổ hợp tương đương.



Hình a



Hình b

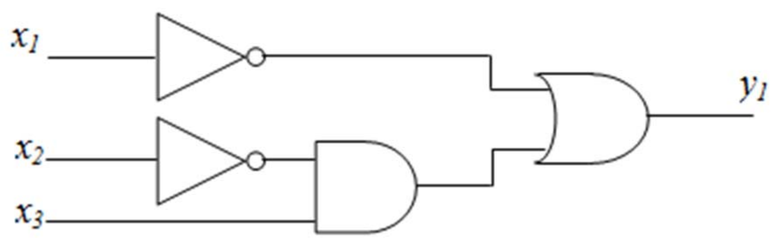
6.4. Các cổng logic (17/18)

6.4.3. Mạch tổ hợp tương đương (3/4)

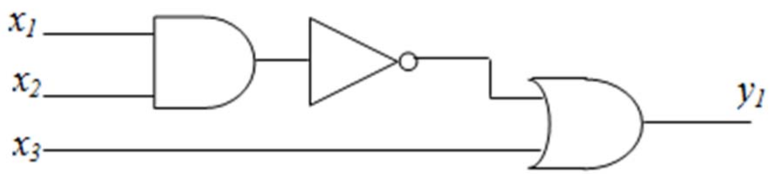
Ví dụ 6.4.5. Có thể kiểm tra các biểu thức Boole sau bằng nhau

$$\overline{x}_1 \vee (\overline{x}_2 \vee x_3); \quad \overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee x_3$$

Do đó: mạch tổ hợp tương ứng với chúng trên hình sau là các mạch tổ hợp tương đương.



Hình a



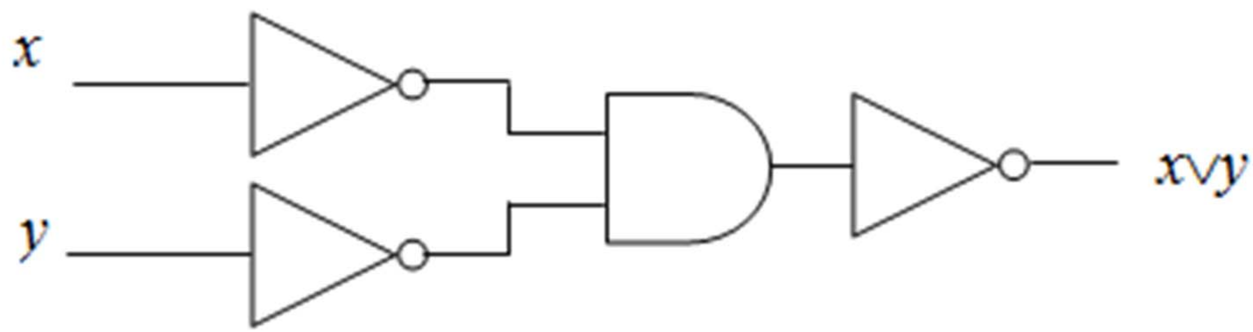
Hình b

6.4. Các cổng logic (18/18)

6.4.3. Mạch tổ hợp tương đương (4/4)

Ví dụ 6.4.6. Có thể thấy rằng $x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$, do vậy cổng OR có thể được biểu diễn qua các cổng AND và NOT như trên hình sau:

Biểu diễn cổng OR qua các cổng AND và NOT



6.5. Một số ứng dụng (1/19)

6.5.1. Bộ cộng (1/5)

- Thiết kế các mạch logic để thực hiện phép cộng hai số nguyên dương từ các khai triển nhị phân của chúng.
- Sơ đồ mạch đó sẽ được xây dựng từ một số mạch thành phần.
- Để đơn giản trong cách viết, chúng ta sẽ thay các ký hiệu $\wedge, \vee$ bằng các dấu . và +.

6.5. Một số ứng dụng (2/19)

6.5.1. Bộ cộng (2/5)

- Trước hết, xây dựng một mạch được dùng để tìm:

  giá trị x+y với x, y là các bit.

- ***Đầu vào***: x,y nhận giá trị 0 hoặc 1.
- ***Đầu ra***: có 2 bít s – bít tổng, c – bít nhớ.
- Mạch đang thiết kế có nhiều đầu ra, gọi là **bộ nửa cộng** (vì thực hiện phép cộng 2 bít nhưng không xét đến số nhớ của phép cộng trước).

6.5. Một số ứng dụng (3/19)

6.5.1. Bộ cộng (3/5)

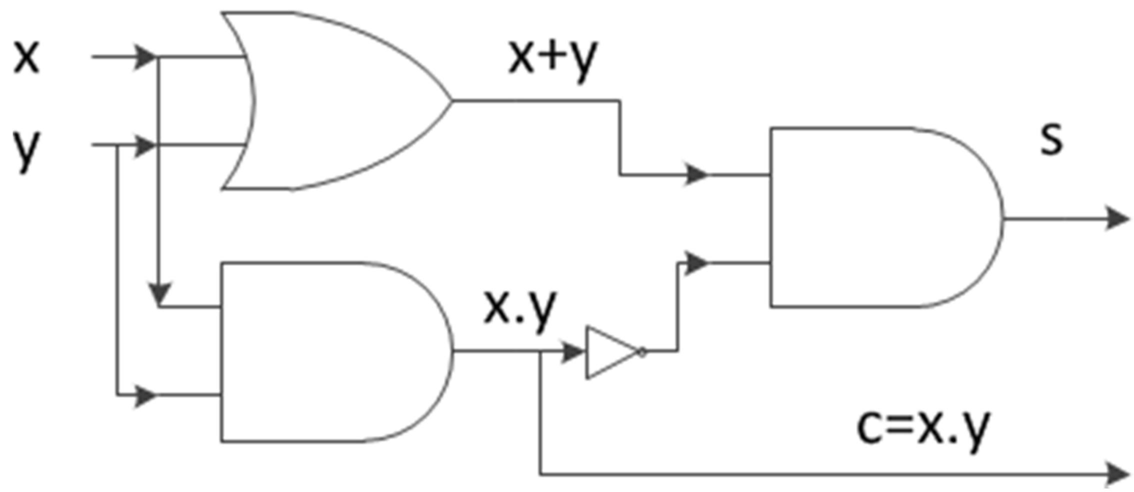
- Bảng các giá trị đầu vào và đầu ra của bộ nửa cộng có dạng như sau:

x	y	s	c
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Từ bảng bên, ta thấy:

$c = x.y$ và $s = x.\bar{y} + \bar{x}.y = (x + y).(\overline{x.y})$

Do đó, ta có mạch của bộ nửa cộng:



6.5. Một số ứng dụng (4/19)

6.5.1. Bộ cộng (4/5)

- Bước tiếp theo, xây dựng **bộ cộng đầy đủ** để tính tổng và bit nhớ khi hai bit được cộng cùng với số nhớ.
- ***Đầu vào***: đối với bộ cộng đầy đủ:
  - các bit x, y và số nhớ c_i,
- ***Đầu ra:*** đối với bộ cộng đầy đủ:
  - bit tổng s và bit nhớ mới c_{i+1}.

6.5. Một số ứng dụng (5/19)

6.5.1. Bộ cộng (5/5)

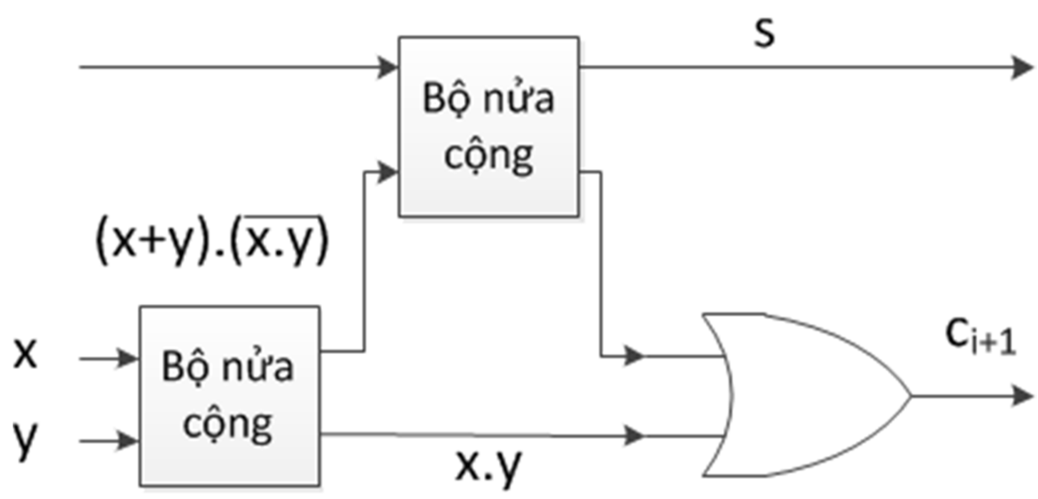
Đầu vào			Đầu ra	
x	y	c_i	s	c_{i+1}
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

Từ bảng bên, ta có:

$$s = x.y.c_i + x.\overline{y}.\overline{c_i} + \overline{x}.y.\overline{c_i} + \overline{x}.\overline{y}.c_i$$

$$c_{i+1} = x.y.c_i + x.y.\overline{c_i} + x.\overline{y}.c_i + \overline{x}.y.c_i$$

Như vậy, mạch có sử dụng bộ nửa cộng:



6.5. Một số ứng dụng (6/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (1/14)

6.5.2.1. Cực tiểu hóa các mạch (1/2)

- Cùng một hàm số có thể có nhiều công thức biểu diễn khác nhau → có nhiều thiết kế cho 1 hàm.
- Hiệu quả của một mạch tổ hợp phụ thuộc rất nhiều vào số lượng các cổng và sự bố trí các cổng đó.
- Quá trình thiết kế một mạch có thể dùng khai triển tổng các tích của mạch (dạng tuyển chuẩn tắc) để tìm ra tập các cổng logic thực hiện mạch đó.
- Tuy nhiên, khai triển này có thể chứa các số hạng nhiều hơn mức cần thiết và bằng các biến đổi tương đương chúng ta có thể rút gọn dạng tuyển chuẩn tắc của mạch.

6.5. Một số ứng dụng (7/19)

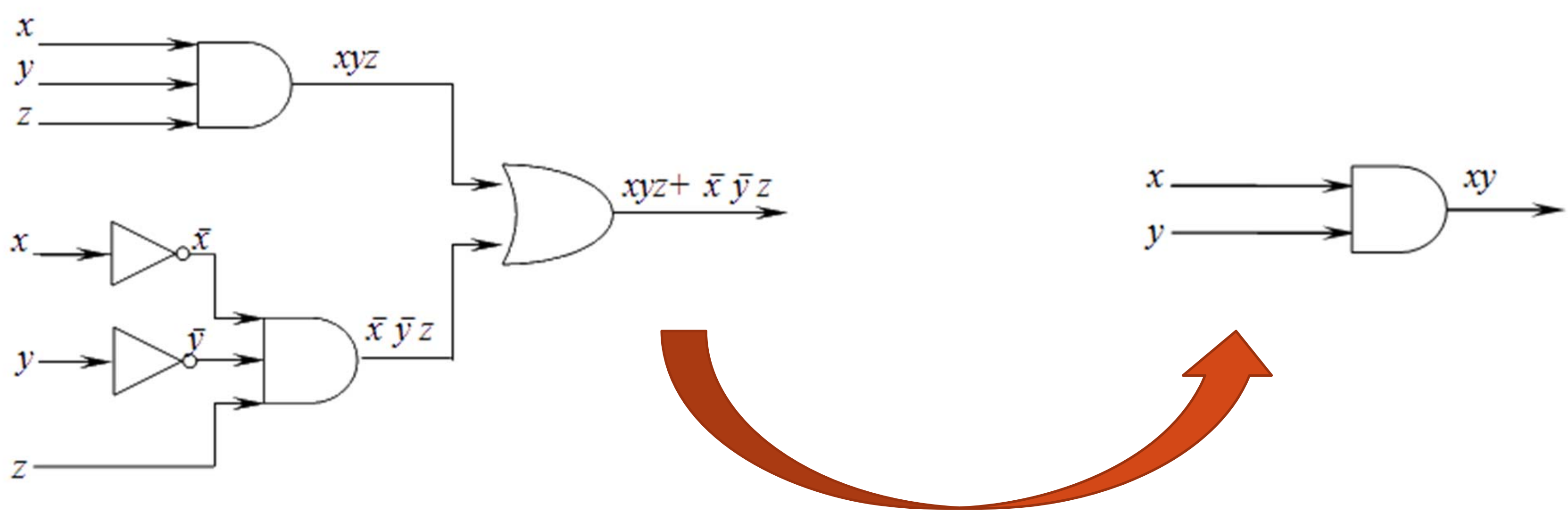
6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (2/14)

6.5.2.1. Cực tiểu hóa các mạch (2/2)

Ví dụ: Mạch tổ hợp có dạng tuyển chuẩn tắc $x.y.z + x.y.\bar{z}$ có thể được rút gọn:

$$x.y.z + x.y.\bar{z} = x.y.(z + \bar{z}) = x.y.1 = x.y$$

Do đó, có thể có được mạch với ít phép toán hơn như sau:



6.5. Một số ứng dụng (8/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (3/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (1/12)

- Ý tưởng của phương pháp: có hai thủ tục chính như sau:
  - ***Thủ tục thứ nhất***: xác định các số hạng là ứng viên để đưa vào khai triển cực tiểu như một tổng các tích Boole.
  - ***Thủ tục thứ hai***: xác định trong số các ứng viên đó, các số hạng nào là thực sự dùng được.

6.5. Một số ứng dụng (9/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (4/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (2/12)

Xem xét ví dụ sau:

- Dùng phương pháp Quine-McCluskey để tìm biểu thức cực tiểu tương đương với tổng các tích Boole sau:

$$\mathbf{F = x.y.z + x.\bar{y}.z + \bar{x}.y.z + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}}$$

6.5. Một số ứng dụng (10/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (5/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (3/12)

Biểu diễn:

- Biểu diễn các tiểu hạng trong tổng trên bằng các xâu bit.
- Bit thứ nhất sẽ là 1 nếu xuất hiện x và là 0 nếu xuất hiện $\bar{x}$.
- Bit thứ hai sẽ là 1 nếu xuất hiện y và là 0 nếu xuất hiện $\bar{y}$.
- Bit thứ hai sẽ là 1 nếu xuất hiện z và là 0 nếu xuất hiện $\bar{z}$.
- Nhóm các số hạng theo số lượng các trị 1 trong các xâu bit tương ứng.
- Thông tin được ghi trong bảng.

6.5. Một số ứng dụng (11/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (6/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (4/12)

Bảng thông tin biểu diễn hàm F

Tiểu hạng	Xâu bit	Số các số 1
$x.y.z$	111	3
$x.\bar{y}.z$ $\bar{x}.y.z$	101 011	2 2
$\bar{x}.\bar{y}.z$	001	1
$\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$	000	0

6.5. Một số ứng dụng (12/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (7/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (5/12)

- Các tiểu hạng có thể được tổ hợp lại là những số hạng chỉ khác nhau một tục biến.
- Hai số hạng có thể tổ hợp được sẽ chỉ khác nhau một con số 1 trong các xâu bit biểu diễn các số hạng đó.
- Khi hai tiểu hạng được tổ hợp thành một tích, tích này sẽ chứa hai tục biến. Tích có hai tục biến được biểu diễn bằng một dấu gạch ngang để chỉ biến không xuất hiện.

6.5. Một số ứng dụng (13/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (8/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (6/12)

Ví dụ: vì $x.\bar{y}.z + \bar{x}.\bar{y}.z = (x + \bar{x}).\bar{y}.z = 1.\bar{y}.z = \bar{y}.z$, do đó:

$x.\bar{y}.z$ và $\bar{x}.\bar{y}.z$ với biểu diễn 101 và 001 có thể tổ hợp thành $\bar{y}.z$ và có biểu diễn là -01.

- Tiếp theo, tất cả các cặp tích có hai tục biến có thể tổ hợp được sẽ được tổ hợp thành số hạng có một tục biến.
- Hai tích như vậy có thể tổ hợp được nếu chúng chứa tục biến của cùng hai biến. Các tục biến này chỉ khác nhau đối với một trong hai biến đó.

6.5. Một số ứng dụng (14/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (9/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (7/12)

- Tất cả các cặp tiểu hạng tổ hợp được và tích tạo thành từ các tổ hợp đó được cho trong bảng sau:

Khởi tạo			Bước 1			Bước 2		
KH	Số hạng	Xâu bít	KH	Số hạng	Xâu bít	KH	Số hạng	Xâu bít
1	$x.y.z$	111	(1,2)	$x.z$	1-1	(1,2,3,4)	z	--1
2	$x.\bar{y}.z$	101	(1,3)	$y.z$	-11			
3	$\bar{x}.y.z$	011	(2,4)	$\bar{y}.z$	-01			
4	$\bar{x}.\bar{y}.z$	001	(3,4)	$\bar{x}.z$	0-1			
5	$\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$	000	(4,5)	$\bar{x}.\bar{y}$	00-			

6.5. Một số ứng dụng (15/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (10/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (8/12)

- Những số hạng đã được dùng để tạo ra các tích có số tục biến nhỏ hơn.
- Nhận dạng tập cực tiểu các tích cần thiết có mặt trong biểu diễn cần tìm?
- Công việc này được bắt đầu với tất cả các **tích chưa được dùng để xây dựng các tích có số tục biến ít hơn** (trong ví dụ đang xét đó là $z, \bar{x}.\bar{y}$).
- Trong bảng tiếp theo, xác định tích ứng viên **phủ** tiểu hạng gốc.
- Nếu chỉ có **một tích ứng viên** phủ tiểu hạng gốc thì **tích ứng viên đó phải** sử dụng trong biểu diễn cần tìm.

6.5. Một số ứng dụng (16/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (11/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (9/12)

	$x.y.z$	$x.\bar{y}.z$	$\bar{x}.y.z$	$\bar{x}.\bar{y}.z$	$\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$
z	x	x	x	x	
$\bar{x}.\bar{y}$				x	x

Trong bảng trên, ta thấy cả z và $\bar{x}.\bar{y}$ đều cần thiết.

Vậy, đáp án cuối cùng:

$$\mathbf{F = \bar{x}.\bar{y} + z}$$

6.5. Một số ứng dụng (17/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (12/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (10/12)

Các bước của giải thuật Quine-McCluskey:

1. Biểu diễn mỗi tiểu hạng n bit bằng một xâu bit có độ dài n với số 1 ở vị trí thứ i nếu x_i xuất hiện và với số 0 nếu $\overline{x_i}$ xuất hiện.
2. Nhóm các xâu bit theo số các số 1 có mặt trong chúng.
3. Xác định tất cả các tích n-1 biến có thể tạo thành bằng cách lấy tổng Boole các tích trong khai triển đó, Các tiểu hạng có thể tổ hợp được biểu diễn bằng các xâu bit chỉ khác nhau ở một vị trí. Biểu diễn các tích n-1 biến này bằng các xâu bit có số 1 ở vị trí thứ i nếu ở đó có x_i , hoặc số 0 nếu ở vị trí đó có $\overline{x_i}$ hoặc là một dấu gạch ngang nếu ở đó không có không có một tục biến nào liên quan đến x_i trong tích.

6.5. Một số ứng dụng (18/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (13/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (11/12)

Các bước của giải thuật Quine-McCluskey (tiếp):

4. Xác định tất cả các tích n-2 biến có thể được tạo thành bằng cách lấy tổng Boole của các tích n-1 biến đã tìm được ở bước trước. Các tích n-1 biến có thể tổ hợp được biểu diễn bằng các xâu bit có dấu gạch ngang ở cùng vị trí và khác nhau chỉ ở một vị trí trong số các vị trí còn lại.
5. Tiếp tục tiến hành tổ hợp các tích Boole thành các tích có số biến ít hơn theo cách tương tự ở bước 4 cho tới khi nào không thể rút gọn được nữa.
6. Tìm tất cả các tích Boole xuất hiện nhưng không được dùng để lập tích Boole với số tục biến bớt đi 1.

6.5. Một số ứng dụng (19/19)

6.5.2. Phương pháp Quine-McCluskey - cực tiểu hóa các mạch (14/14)

6.5.2.2. Phương pháp Quine-McCluskey (12/12)

Các bước của giải thuật Quine-McCluskey (tiếp):

7. Lập bảng xác định mỗi tích thu được đã phủ những tiểu hạng gốc ban đầu nào với điều kiện mỗi tiểu hạng phải được phủ ít nhất bởi một tích. Trên cơ sở đó xác định tập nhỏ nhất các tích Boole sao cho tổng của chúng biểu diễn hàm đã cho ban đầu.