Chương 1. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

A. Kiến thức cơ bản

1.Một số giới hạn cơ bản:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\approx 2,71828 \text{ (hay } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\text{)}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$

2.Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L,\ (|L|<+\infty)$ là $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L.$

3.Nguyên lý kẹp: Giả sử ba hàm số $f(x),\ g(x),\ h(x)$ thoả mãn bất đẳng thức:

$$f(x)\le g(x)\le h(x);\ \forall x\in(a,b).$$

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$

4.Sử dụng vô cùng bé (VCB), vô cùng lớn (VCL) để tính giới hạn

Cho $f(x), g(x), \overline{f}(x), \overline{g}(x)$ đều là các VCB (hoặc VCL) khi $x\to x_0$

- Nếu $f(x)\sim\overline{f}(x),\ g(x)\sim\overline{g}(x)$ khi $x\to x_0\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)}$

-Nếu $f(x)=f_1(x)+\cdots+f_n(x)$ là tổng các VCL trong đó $f_n(x)$ bậc cao nhất và $g(x)=g_1(x)+\cdots+g_m(x)$ là tổng các VCL trong đó $g_m(x)$ có bậc cao nhất thì

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_n(x)}{g_m(x)}}$$

-Nếu $f(x)=f_1(x)+..+f_n(x)$ là tổng các VCB trong đó $f_1(x)$ bậc thấp nhất và $g(x)=g_1(x)+..+g_m(x)$ là tổng các VCB trong đó $g_1(x)$ có bậc thấp nhất thì

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}}$$

Ghi nhớ: $\boxed{x\sim\sin x\sim\tan x\sim e^x-1\sim\ln(x+1)\sim\arcsin x\sim\arctan x,\text{ khi } x\to 0}$

5. Quy tắc L'Hospital

Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ xác định, khả vi tại lân cận của $x=a,\ a\in\mathbb{R}$, có thể không xác định tại $x=a$. Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0,\quad g'(x)\ne 0$ ở lân cận $x=a$. Nếu

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A \text{ hữu hạn thì } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

Chú ý:

(1) Trường hợp $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ định lý L'Hospital (Lôpitan) vẫn đúng.

(2) Trường hợp $x\to\infty$ quy tắc L'Hospital vẫn đúng.

(3) Trường hợp $f(x),\ g(x)$ khả vi tại lân cận $x=a$ trừ ra tại $x=a$;

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=+\infty,\quad g'(x)\ne 0 \text{ ở lân cận } x=a.$$

Khi đó nếu $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ thì cũng có $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

Tức là có thể áp dụng quy tắc khi giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

(4) Có thể áp dụng nhiều lần quy tắc L'Hospital

(5) Trong trường hợp áp dụng quy tắc L'Hospital mà $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại thì chưa thể kết luận giới hạn $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng không tồn tại.

6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a,b). Ta nói rằng $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0\in(a,b)$ nếu:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Hàm $f(x)$ gọi là liên tục trên (a,b) nếu nó liên tục tại mọi điểm $x\in(a,b)$

7. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a,b), $x_0\in(a,b)$. Điều kiện cần và đủ để $f(x)$ liên tục tại x_0 là nó liên tục trái tại x_0 và liên tục phải tại x_0. Nghĩa là:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

hay $\quad f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$

8. **Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản.**

Thứ tự	Hàm số	Đạo hàm
1	$y=c,\quad c=const$	$y'=0$
2	$y=x^\alpha,\quad \alpha\in R$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
3	$y=e^x$	$y'=e^x$
4	$y=a^x,\quad (0<a\neq 1)$	$y'=a^x\ln a$
5	$y=\log_a x,\quad (0<a\neq 1)$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$
6	$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
7	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
8	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
9	$y=\tan x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$y=\cot x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13	$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14	$y = \text{arc}\cot x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

B. Các ví dụ

I. Tính giới hạn

1) Phương pháp so sánh tương đương

Ví dụ 1 Tính các giới hạn sau:

a) $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.\ln(1-2x^2)+\sin^2 x}{e^{2\sin^2 x}-1}$.

b) $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x - \sin x}$.

c) $I = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x}+1}$.

Hướng dẫn:

a) Tách giới hạn đã cho thành tổng của hai giới hạn. Nhận thấy, khi $x \to 0$:

$e^{2\sin^2 x} - 1 \sim 2\sin^2 x \sim 2x^2, \sin^2 x \sim x^2$ và

$\ln(1-2x^2) \sim (-2x^2) \Rightarrow x\ln(1-2x^2) \sim (-2x^3)$.

Đáp số: $I = \dfrac{1}{2}$.

b) $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{\tan x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x}.\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x} = 1$.

c) Khi $x \to +\infty$ thì

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$; $\quad 2\sqrt{x}+1 \sim 2\sqrt{x} \Rightarrow I = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$.

2) Dùng quy tắc L'Hopital

Ví dụ 2 Tính các giới hạn sau:

a. $I = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^{100}-10x^{50}+5}{5x^6-6x^5+1}$

b. $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{\sin x - x}$

c. $I = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)$

d. $I = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

f. $I = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

g. $I = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

h. $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{\sqrt[3]{x^3+8}-2}$

e. $I=\lim\limits_{x\to 0}(2+x-e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

Giải:

a) I có dạng $\frac{0}{0}$. Áp dụng quy tắc L'Hospital

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{500x^{99}-500x^{49}}{30x^5-30x^4}=\frac{50}{3}\lim_{x\to 1}\frac{99x^{98}-49x^{48}}{5x^4-4x^3}=\frac{2500}{3}.$$

b)

I có dạng $\frac{0}{0}$. Áp dụng quy tắc L'Hospital ta có

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1}{\cos^2 x}=2$$

c) I có dạng $0.\infty$. Ta có

$I=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$, khi $x\to\infty$ thì $\frac{1}{x}\to 0$, giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$.

Áp dụng quy tắc L'Hopital ta có $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{3}{x^2}e^{\frac{3}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}3\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}=3.$

d) I có dạng $0.\infty$. Ta chuyển về dạng $\frac{\infty}{\infty}$: $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^2}{2}=0.$

e) Nếu giới hạn $I=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$ có dạng 1^∞ ta thường dùng phép biến đổi sau

$I=\lim\limits_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}$.

Áp dụng: $I=\lim\limits_{x\to 0}(2+x-e^{2x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(2+x-e^{2x})}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2+x-e^{2x})}{x}}=e^J$;

$$J=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+x-e^{2x})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-2e^{2x}}{2+x-e^{2x}}}{1}=-1\Rightarrow I=\frac{1}{e}.$$

f) I có dạng $\infty-\infty$. Quy đồng mẫu số rồi áp dụng quy tắc L'Hospital (nhiều lần):

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

g) Đặt $t=\dfrac{1}{x}$ khi $x\to\infty$ thì $t\to 0$. Ta được $I=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^2}(1-\cos t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{2t}=\dfrac{1}{2}$.

h) $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sqrt[3]{x^3+8}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}(\sqrt[3]{(x^3+8)^2}+2\sqrt[3]{x^3+8}+4)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}.\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{(x^3+8)^2}+2\sqrt[3]{x^3+8}+4)=12.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=12\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$=12\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=2$

II. Xét tính liên tục của hàm số

Ví dụ 3. Xác định $f(0)$ để $f(x)=\dfrac{\arcsin(x^2-2x)}{3x}\ (x\neq 0)$ liên tục tại điểm $x=0$.

Giải: Hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x^2-2x)}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{3x}=-\dfrac{2}{3}$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow f(0)=-\dfrac{2}{3}$.

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên toàn trục số

a. $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1\\ |x-1| & \text{khi } |x|>1\end{cases}$

b. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$

c. $f(x)=\begin{cases}3a+x & \text{khi } x>-2\\ \sqrt{x^2-2ax+a^2} & \text{khi } x\le -\end{cases}$

d. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\sin x}{\ln(x+1)} & \text{khi } x>(\\ \dfrac{bx}{2^{2x}-1} & \text{khi } x<0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$

Giải:

a. Ta viết lại hàm số như sau: $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } x\in[-1;1]\\ |x-1| & \text{khi } x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\end{cases}$

Dễ thấy hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$; $(-1;1)$; $(1;+\infty)$

Tại $x=-1$ ta có $f(-1)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ và

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}|x-1|=2\neq f(-1)$$

Do đó hàm số không liên tục tại $x=-1$

Tại $x=1$ ta có $f(1)=\cos\frac{\pi}{2}=0$ và

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\cos\frac{\pi x}{2}=0;\quad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}|x-1|=0$$

Do đó hàm số liên tục tại $x=1$

Vậy hàm số liên tục tại mọi $x\neq-1$

b. Dễ thấy hàm số xác định và liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;+\infty)$

Tại $x=1$ ta có $f(1)=0$ và

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to1^-}3^{\frac{1}{x-1}}}=1\neq f(1)$$

Do đó hàm số không liên tục tại $x=1$

Vậy hàm số liên tục tại mọi $x\neq1$

c. Dễ thấy hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-2),(-2;+\infty)$

Tại $x=-2$ ta có $f(-2)=\sqrt{4+4a+a^2}=|a+2|$ và

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\sqrt{x^2-2ax+a^2}=|a+2|;\quad \lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}(3a+x)=3a-2$$

Do đó hàm số liên tục tại $x=-2$ khi và chỉ khi

$$|a+2|=3a-2\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2=a+2 & \text{khi } a\geq-2\\ 3a-2=-a-2 & \text{khi } a<-2\end{cases}\Leftrightarrow a=2$$

Vậy với $a=2$ hàm số liên tục tại mọi x, với $a\neq2$ hàm số liên tục với mọi $x\neq-2$

d. Dễ thấy hàm số xác định và liên tục trên các khoảng $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$

-Tại $x=0$ ta có $f(0)=1$ nên với $a=0$ hoặc $b=0$ hàm số không liên tục.

Ta xét trường hợp $a\neq0, b\neq0$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{bx}{2^{2x}-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{b}{2.2^{2x}\ln2}=\frac{b}{2\ln2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{a\sin x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a\cos x}{\frac{1}{x+1}} = a.$$

Do đó hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Leftrightarrow a = \frac{b}{2\ln 2} = 1$

$a=1, b=2\ln 2.$

Tóm lại hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow a=1, b=2\ln 2$

Nếu $a \neq 1$ hoặc $b \neq 2\ln 2$ thì hàm số liên tục với mọi $x \neq 0$

Chương 2. TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

A. Kiến thức cơ bản

1. $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

2.*Bảng tích phân các hàm số thông dụng*

STT	Công thức
1	$\int 0dx = C$
2	$\int dx = x + C$
3	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$
4	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$
5	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$
6	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$
7	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
8	$\int e^x dx = e^x + C$
9	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
10	$\int \cos x dx = \sin x + C$

11	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
13	$\int df(x) = f(x) + C$
14	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + C$
15	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \ (a \neq 0)$
16	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \ (a > 0)$
17	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C \ (a \neq 0)$
18	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \ln\|x + \sqrt{x^2 + k}\| + C$

3. Công thức Newton-Leibniz

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)\Big|_a^b \text{ hay } \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

-Nếu hàm số hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ hoặc chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn, đồng thời bị chặn trên $[a;b]$ thì khả tích trên $[a;b]$.

4. Tích phân suy rộng

a) Tích phân suy rộng loại 1 (có cận vô hạn)

Tiêu chuẩn so sánh:

(1) Cho các hàm $f(x), g(x)$ khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a;A]$ và $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \geq a$

Khi đó

+Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

+Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

(2) Giả sử các hàm $f(x), g(x)$ khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a;A]$ và

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\ (0<k<+\infty)$ thì các tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng tính hội tụ tức là sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chú ý: Khi so sánh các tích phân suy rộng loại 1 ta thường so sánh với tích phân $I=\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}\ (a>0)$ hoặc $I=\int\limits_{-\infty}^{b}\dfrac{dx}{x^\alpha}\ (b<0)$ là các tích phân hội tụ khi và chỉ khi $\alpha>1$ và phân kỳ khi và chỉ khi $\alpha\le 1$.

b) Tích phân suy rộng loại 2

Tiêu chuẩn so sánh:

(1) Cho các hàm xác định, không âm trên $[a;b)$ khả tích trên mọi đoạn con $[a;c],(a\le c<b)$ và $0\le f(x)\le g(x),\forall x\in[a;b)$

Khi đó:

+ Nếu tích phân $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ.

+ Nếu tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^b g(x)dx$ phân kỳ.

(2) Cho các hàm $f(x),g(x)$ xác định, không âm trên $[a;b)$ khả tích trên mọi đoạn con $[a;c],(a<c<b)$ có điểm bất thường $x=b$. Khi đó:

Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\ (0<k<+\infty)$ thì các tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chú ý: Để xét sự hội tụ của tích phân suy rộng loại 2 ta thường so sánh với các tích phân sau:

$I=\int\limits_a^b\dfrac{dx}{(x-a)^\alpha}\quad(b>a)$ hội tụ $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$, phân kỳ $\Leftrightarrow \alpha\ge 1$.

$J=\int\limits_a^b\dfrac{dx}{(b-x)^\alpha}\ (b>a)$ hội tụ $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$, phân kỳ $\Leftrightarrow \alpha\ge 1$.

B. Các ví dụTích phân suy rộng

a. Tích phân suy rộng loại 1

Ví dụ 1.Tính các tích phân sau:

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}\quad J=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}\qquad K=\int\limits_a^{+\infty}\sin x dx$$

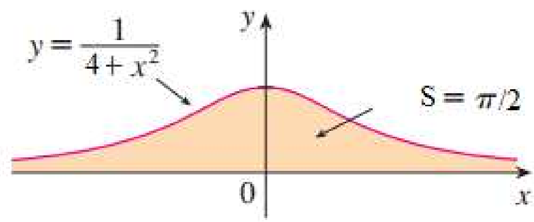
Giải:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4};\ J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$K = \int_a^{+\infty} \sin x dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A \sin x dx = -\lim_{A\to+\infty} \cos x\Big|_a^A$$

Không tồn tại do giới hạn $\lim\limits_{A\to+\infty}\cos A$ không xác định.

Về mặt hình học tích phân J chính là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\dfrac{1}{x^2+4}$ với trục hoành



Hình 1

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{x+1-\arctan x}{x^2+x+1}dx$$

Giải:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx = \int_0^{1} \frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx = I_1 + I_2$$

Trong đó

+ I_1 là tích phân xác định (giá trị hữu hạn)

+ I_2 là tích phân suy rộng loại 1, ta có $0 \le f(x) = \dfrac{x^3}{(x^3+1)^2} < \dfrac{x^3}{x^6} = \dfrac{1}{x^3}$

Mà $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ hội tụ do $\alpha = 3 > 1$ nên I_2 cũng hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Vậy $I = I_1 + I_2$ là tích phân hội tụ.

$$J = \int_0^{1} \frac{x+1-\arctan x}{x^2+x+1}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x+1-\arctan x}{x^2+x+1}dx = J_1 + J_2$$

Trong đó

+ J_1 là tích phân xác định

+ J_2 là tích phân suy rộng có

$$f(x) = \frac{x+1-\arctan x}{x^2+x+1} \sim \frac{1}{x} = g(x) \text{ khi } x \to +\infty$$

Thật vậy, áp dụng quy tắc Lôpitan có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+1-\arctan x)}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1-\arctan x-\dfrac{x}{x^2+1}}{2x+1}=1$$

Mà tích phân $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ là tích phân phân kỳ (do $\alpha=1$) nên J_2 phân kỳ.

Vậy tích phân $J=J_1+J_2$ phân kỳ.

Chú ý: -Khi xét sự hội tụ của tích phân suy rộng dạng $I=\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}dx$ để dùng được tiêu chuẩn so sánh với tích phân $J=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx\ (a>0,\alpha>0)$ ta phải tách I thành tổng hai tích phân $I=\int_0^{a}\frac{f(x)}{g(x)}dx+\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}dx=I_1+I_2$ để tránh cận "0" (thường thì chọn $a=1$).

- Tương tự, với tích phân suy rộng dạng $I=\int_{-\infty}^{0}\frac{f(x)}{g(x)}dx$ để dùng được tiêu chuẩn so sánh với tích phân $J=\int_{-\infty}^{b}\frac{1}{x^\alpha}dx\ (b<0,\alpha>0)$ ta phải tách I thành tổng 2 tích phân $I=\int_{-\infty}^{b}\frac{f(x)}{g(x)}dx+\int_b^{0}\frac{f(x)}{g(x)}dx=I_1+I_2$ để tránh cận "0" (thường thì chọn $b=-1$).

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+x+1)^2}$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)dx$

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2}dx$

Đáp số. a) Hội tụ b) Hội tụ c) Phân kỳ d) Hội tụ

b. Tích phân suy rộng loại 2

Ví dụ 4. Tính các tích phân suy rộng sau:

a) $I=\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ b) $J=\int_{-2}^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Giải:

a) Hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ không bị chặn khi $x\to 2^-$.

Do vậy I là tích phân suy rộng loại 2 có điểm bất thường $x=2$.

Ta có $I=\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{b\to2^-}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{b\to2^-}\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^b=\frac{\pi}{2}.$

b) Tích phân J có 2 điểm bất thường là $x=2$ và $x=-2$.

Ta tách $J = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{\pi}{2}.$

Tương tự, sử dụng định nghĩa ta tính được $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow J = \pi.$

Ngoài ra, thấy nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ là hàm $F(x) = \arcsin\frac{x}{2}$ xác định trên đoạn [-2;2] nên tích phân suy rộng trên có thể được tính trực tiếp như sau: $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2} = \pi.$

Ví dụ 5.Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

a) $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ b) $J = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}}$

Giải:

a) Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ không bị chặn khi $x \to 1^-$.

Khi $x \to 1^-$ ta có:

$$1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2) \sim 3(1-x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}.(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

Vì tích phân $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh, tích phân $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ cũng hội tụ.

b) Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}}$ không bị chặn khi $x \to 0^+$ và $x \to 1^-$ vì thế tích phân có tới 2 điểm bất thường.

Để cho đơn giản khi xét tính hội tụ ta tách thành 2 tích phân (mỗi tích phân chỉ có 1 điểm bất thường).

$$J = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} = J_1 + J_2$$

Xét tích phân J_1. Khi $x \to 0^+$ ta có :

$x(1-x^3) \sim x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$

vì tích phân $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-0)^{\frac{1}{2}}}$ $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh tích phân J_1 cũng hội tụ.

Xét tích phân J_2. Khi $x \to 1^-$ ta có :

$$x(1-x^3) = x(1-x)(1+x+x^2) \sim 3(1-x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}.(1-x)^{\frac{1}{2}}},$$

.

vì tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh, tích phân J_2 cũng hội tụ.

Do vậy tích phân $J = J_1 + J_2$ là tích phân hội tụ.

Ví dụ 7. Xét sự hội tụ của tích phân sau :

a) $I = \int_0^2 \frac{1}{e^{\sqrt[3]{2-x}} - 1} dx$ **b)** $J = \int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^{\sin x} - 1} dx$

Giải: a) I là tích phân suy rộng loại 2, hàm $f(x)$ không xác định khi $e^{\sqrt[3]{2-x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$ Do vậy $x = 2$ là điểm bất thường. Khi $x \to 2^-$ thì

$e^{\sqrt[3]{2-x}} - 1 \sim \sqrt[3]{2-x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt[3]{2-x}} - 1} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2-x}} = g(x)$ mà $\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}} dx$ hội tụ do $\alpha = \frac{1}{3} < 1$. Do vậy tích phân I cũng hội tụ.

b)

J là tích phân suy rộng loại 2, trên đoạn [0,2] hàm $f(x)$ không xác định khi $e^{\sin x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ Do vậy $x = 0$ là điểm bất thường. Khi $x \to 0^+$ thì

$\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right) \sim \sqrt[3]{x^2};$

$e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^{\sin x} - 1} \sim \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = g(x)$$

Mà $\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx$ hội tụ do $\alpha = \frac{1}{3} < 1$. Do vậy tích phân $\boldsymbol{J}$ cũng hội tụ.

Ví dụ 8. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln(\sqrt{x}+1)^2}$

b) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}-2}$

c) $\int_0^2 \frac{dx}{e^{\sqrt{2-x}} - 1}$

d) $\int_0^2 \frac{x\sqrt{x}}{e^{\sin^2 x} - 1} dx$

e) $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[4]{x^3})}{e^{\sin x}-1}dx$ f)* $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}-1}$

Đáp số. a) Hội tụ b) Phân kỳ c) Hội tụ d) Hội tụ e) Hội tụ f) Phân kỳ (nhân liên hợp ở mẫu số)

Chương 3. CHUỖI

3.1. CHUỖI SỐ

1. Định nghĩa

Tổng vô hạn $u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\,(u_n\in\mathbb{R})$ được gọi là một chuỗi số.

u_n gọi là số hạng thứ n (số hạng tổng quát) của chuỗi,

$S_n=u_1+u_2+...+u_n$ gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi

Khi đó $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}S_n$ nếu giới hạn tồn tại, hữu hạn thì ta nói chuỗi hội tụ, trái lại ta nói chuỗi phân kỳ (tức là giới hạn bằng vô cùng hoặc không tồn tại giới hạn). Trong trường hợp chuỗi hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$ thì $R_n=S-S_n$ gọi là phần dư thứ n của chuỗi.

2. Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Định lý 3.1. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ thì số hạng tổng quát phải dần tới 0 khi $n\to\infty$.

Chú ý: Điều ngược lại của định lý trên nói chung không đúng.

Từ định lý trên có thể suy ra chuỗi phân kỳ nếu $u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}c\neq 0$ hoặc không có giới hạn của u_n.

3. Tính chất của chuỗi

(1) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}ku_n=k.S,\forall k\in\mathbb{R}$

(2) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S_1,\sum_{n=1}^{\infty}v_n=S_2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=S_1+S_2$

(3) Tổng hữu hạn các chuỗi hội tụ là một chuỗi hội tụ, tổng của một chuỗi phân kỳ với một số hữu hạn các chuỗi hội tụ là một chuỗi phân kỳ

(4) Nếu bớt đi một hữu hạn số hạng của chuỗi thì tính chất hội tụ của chuỗi không thay đổi.

3.2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

1. Định nghĩa

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ gọi là chuỗi số dương nếu $u_n>0$ với mọi n

2. Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương

- Tiêu chuẩn so sánh

Định lý 3.2. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là 2 chuỗi số dương thỏa mãn điều kiện: Tồn tại số tự nhiên n_0 và một hằng số $c > 0$ sao cho $u_n \le c.v_n, \forall n \ge n_0$. Khi đó

1) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

2) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

Định lý 3.3. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là 2 chuỗi số dương thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$

Nếu $0 < k < +\infty$ thì cả 2 chuỗi cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Trong trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ thì 2 số hạng tổng quát là tương đương, kí hiệu là $u_n \sim v_n$

Khi đó 2 chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

- Tiêu chuẩn Đalembe (D'Alembert)

Định lý 3.4. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = c$:

+ Nếu $c < 1$ thì chuỗi hội tụ
+ Nếu $c > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Chú ý: Trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ chưa kết luận được. Tuy nhiên trong trường hợp này nếu tồn tại chỉ số n_0 sao cho với mọi $n \ge n_0$ lại có $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì chuỗi đang xét là chuỗi phân kỳ.

-Tiêu chuẩn Côsi (Cauchy)

Định lý 3.5. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = c$

+ Nếu $c < 1$ thì chuỗi hội tụ
+ Nếu $c > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

-.Tiêu chuẩn so sánh với tích phân

Định lý 3.6. Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử hàm $f(x)$ liên tục, đơn điệu giảm và dương trên nửa khoảng $[1;\infty)$ sao cho $f(n) = u_n, \forall n \ge 1$. Khi đó tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chú ý: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\ (\alpha\in\mathbb{R})$ gọi là chuỗi Riemann. Chuỗi này có cùng tính chất hội tụ với tích phân suy rộng $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, tích phân này hội tụ $\Leftrightarrow \alpha>1$, phân kỳ $\Leftrightarrow \alpha\le 1$.

Với $\alpha=1$ chuỗi còn được gọi là *chuỗi điều hòa*.

Khi dùng tiêu chuẩn so sánh ta thường so sánh một chuỗi dương với chuỗi Riemann. Phương pháp chung thường dùng như sau:

Để xét sự hội tụ của chuỗi dương dạng phân thức $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$. Ta tìm số thực α sao cho $\frac{f(n)}{g(n)}\sim\frac{1}{n^{\alpha}}$ khi $n\to\infty$. Khi đó theo tiêu chuẩn so sánh tổng quát chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Theo lưu ý ở trên, nếu $\alpha>1$ thì chuỗi hội tụ, còn nếu $\alpha\le 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$

Giải:

a) Ta có : $0<\frac{1}{n.2^n}\le\left(\frac{1}{2}\right)^n,\forall n\ge 1$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ có $q=\frac{1}{2}<1$ nên hội tụ.

Từ đó suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

b) Ta có:

$$0<\frac{\pi}{n^2}\le\pi,\forall n\Rightarrow\sin\frac{\pi}{n^2}>0,\forall n>1$$

nên chuỗi đã cho là chuỗi dương, đồng thời khi $n\to+\infty$ thì

$$u_n=\sin\frac{\pi}{n^2}\sim\frac{\pi}{n^2}=v_n$$

Cách 1: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ có tổng riêng

$$S_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+..+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+..+\frac{1}{(n-1).n}=2-\frac{1}{n}<2,\forall n$$

bị chặn nên chuỗi hội tụ, từ đó suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ và chuỗi ban đầu cũng hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Cách 2: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ là chuỗi Riemann hội tụ do $\alpha=2>1$ nên chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.5} + \frac{1.3.5}{2.5.8} + \dots$

Giải:

a) Ta có : $u_n = \frac{n^2}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$

Do vậy chuỗi số dương hội tụ.

c) Số hạng tổng quát là

$$u_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.5.8...(3n-1)} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{2.5.8...(3n-1)(3n+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Do vậy chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Dalembe.

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} . \frac{1}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \sin^n \frac{1}{n}}{n^n}$

Giải:

a) Ta có :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} . \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} . \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1$$

Do vậy chuỗi phân kỳ.

b) Tách chuỗi đã cho thành tổng 2 chuỗi, ta có

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}, u_n = \frac{2^n}{n^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ hội tụ.

Tương tự,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n \frac{1}{n}}{n^n}, v_n = \frac{\sin^n \frac{1}{n}}{n^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} = 0 < 1$$

Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \sin^n \frac{1}{n}}{n^n}$ hội tụ.

Ví dụ 4. Xét tính hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2-n+1}$

Giải:

a) Chuỗi đang xét là chuỗi dương có $u_n=\frac{1}{n\ln n}>0,\forall n\geq 2.$ Xéthàm $f(x)=\frac{1}{x\ln x},x\geq 2$ là một hàm liên tục, đơn điệu giảm và dương trên $[2;+\infty)$ và $f(n)=\frac{1}{n\ln n}=u_n,\forall n\geq 2$ do vậy chuỗi đã cho cùng tính hội tụ với tích phân

$$I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}.$$

Mặt khác

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)\right)=+\infty$$

là tích phân phân kỳ do vậy chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ phân kỳ.

b) Chuỗi đã cho là chuỗi số dương có $u_n=\frac{n+1}{n^2-n+1}\sim\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}=v_n$ khi $n\to+\infty$ nên 2 chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ cùng tính hội tụ, mặt khác chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ phân kỳ (chuỗi điều hòa) nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2-n+1}$ phân kỳ.

Chú ý: Tương tự, theo tiêu chuẩn tích phân có thể chứng tỏ được chuỗi số

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}\text{ hội tụ}\Leftrightarrow\alpha>1$$

3.3. CHUỖI CÓ SỐ HẠNG VỚI DẤU BẤT KÌ

1. Định nghĩa

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ trong đó u_n có thể dương hoặc âm tùy theo n thì chuỗi được gọi là có dấu bất kì.

Chuỗi dạng

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\quad\text{hoặc}\quad -u_1+u_2-u_3+u_4-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$$

trong đó $u_n>0,\forall n$ được gọi là chuỗi đan dấu, 2 chuỗi trên trái dấu và cùng tính hội tụ nên ta chỉ cần xét chuỗi đan dấu thứ nhất với số hạng đầu tiên dương.

2. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Định lý 3.7. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ cũng hội tụ.

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ ta nói $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ tuyệt đối, trong trường hợp $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ gọi là bán hội tụ.

Trong trường hợp chuỗi có dấu bất kì ta thường xét chuỗi trị tuyệt đối trước từ đó suy ra sự hội tụ của chuỗi đã cho.

Lưu ý: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ theo tiêu chuẩn Dalembe hoặc tiêu chuẩn Côsi thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ cũng phân kỳ do số hạng tổng quát u_n không tiến đến 0.

3. Sự hội tụ của chuỗi đan dấu

Định lý 3.8 (Leibniz). Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ nếu dãy $\{u_n\}$ giảm và $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ khi đó chuỗi hội tụ và có tổng bằng $S\le u_1$.

Chú ý : Định lý Leibniz chỉ cho ta điều kiện đủ để chuỗi hội tụ. Trong một số trường hợp chuỗi vẫn hội tụ mặc dù không thỏa mãn cả 2 điều kiện của định lý.
Tuy nhiên nếu điều kiện $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ mà không thỏa mãn thì chắc chắn chuỗi phân kỳ !

Ví dụ 5.Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2-n+1}$

Giải:

a) Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu có dạng $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ với $u_n=\frac{1}{n\ln n}$ là một dãy đơn điệu, giảm về 0 khi $n\to+\infty$ nên chuỗi hội tụ theo định lý Lepnit (Leibniz).

b) Chuỗi đang xét đang xét đan dấu có $u_n=\frac{n+1}{n^2-n+1}$.

Xét hàm $f(x)=\frac{x+1}{x^2-x+1}, x\ge 1$ có $f'(x)=\frac{-x^2+2(1-x)}{(x^2-x+1)^2}<0, \forall x\ge 1$ do vậy hàm số nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

Chứng tỏ $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, dần về 0 (dễ thấy), do đó chuỗi hội tụ theo định lý Lepnit.

Lưu ý rằng định lý Lepnit có thể phát biểu lại ở dạng sau: Nếu chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ có dãy $\{u_n\}$ giảm kể từ chỉ số n_0 nào đó, tức là $u_{n_0}>u_{n_0+1}>...>u_n>...$ và $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ thìchuỗi hội tụ.

Ví dụ 6. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$.

Giải: Đây là chuỗi có dấu bất kỳ và $|u_n|=\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n^3}}=v_n$ mà $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ là chuỗi Riemann có $\alpha=\frac{3}{2}>1$ nên hội tụ. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$ hội tụ tuyệt đối và do vậy nó cũng là một chuỗi hội tụ.

Ví dụ 7. Xét tính hội tụ của các chuỗi số sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n^2+1)^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1).2^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\cos 2n}{n^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}5^n}{2^n(n+1)^{n^2}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n(n+2)}$

h) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\frac{8}{3^4}+\dots$

Đáp số. a) hội tụ b) phân kỳ c) hội tụ d) phân kỳ e) hội tụ
f) hội tụ g)hội tụ h) hội tụ

3.4. CHUỖI LŨY THỪA

1. Định nghĩa

Chuỗi có dạng $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+\dots$ hay viết ở dạng $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$. Nếu đặt $X=x-x_0$ thì chuỗi trở thành $\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n$ vì thế không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét các chuỗi lũy thừa dạng $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

Chuỗi lũy thừa chính là một dạng đặc biệt của chuỗi hàm.

2. Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

Định lý 3.9. Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_n.x^n$. Khi đó chỉ có một trong 3 khả năng sau xảy ra:

(i) Chuỗi chỉ hội tụ tại điểm $x=0$.
(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x.

(iii) Tồn tại một số thực dương R sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x|< R$ và phân kỳ nếu $|x|> R$.

Số thực dương ở trường hợp (iii) được gọi là *bán kính hội tụ* của chuỗi lũy thừa.
Để cho tiện lợi, nếu trường hợp (i) xảy ra ta quy ước bán kính hội tụ là $R=0$, trường hợp (ii) xảy ra thì $R=+\infty$. $(-R;+R)$ được gọi là *khoảng hội tụ* của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Như thế, miền hội tụ là khoảng hội tụ và đầu mút của khoảng (nếu tại đó chuỗi hội tụ), miền hội tụ do vậy sẽ có một trong 4 dạng sau:

$$(-R;R);[-R;R);(-R;R];[-R;R]\ .$$

3. Quy tắc tìm bán kính hội tụ

Định lý 3.10. Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$ thì bán kính hội tụ R của chuỗi sẽ được xác định bởi

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ 0, & \rho=+\infty\\ +\infty, & \rho=0\end{cases}$$

Như vậy, để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa ta làm như sau:

-*Bước 1*: Tìm bán kính hội tụ R theo quy tắc trên, suy ra khoảng hội tụ là $(-R;R)$

-*Bước 2:* Xét sự hội tụ của chuỗi tại 2 đầu mút $-R$ và R

-*Bước 3*: Kết luận miền hội tụ

Ví dụ 8.Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2x}}$

Giải:

a) Chuỗi còn viết dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(e^x)^n$ là tổng của cấp số nhân với công bội $q=e^x>0$ chuỗi hội tụ $\Leftrightarrow |q|<1\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow x<0$. Do đó miền hội tụ là $(-\infty;0)$.

Ngoài cách làm ở trên ra ta cũng có thể tìm miền hội tụ của chuỗi theo tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương.

Thật vậy, số hạng $u_n=e^{nx}$ có $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^x=e^x$ nếu $e^x<1\Leftrightarrow x<0$ thì chuỗi hội tụ, còn nếu $e^x>1\Leftrightarrow x>0$ thì chuỗi phân kì. Trường hợp $x=0$ chuỗi hàm trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}1=+\infty$ chuỗi phân, do vậy chuỗi hàm hội tụ khi và chỉ khi $x<0$.

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$ là chuỗi Riemann, do đó hội tụ $\Leftrightarrow \alpha = 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Miền hội tụ là $(\frac{1}{2};+\infty)$

Ví dụ 9. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+5)^n}{n2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{3n}}{\sqrt{n^2+n+1}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2nx}{2n+1}\right)^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n}}{\sqrt{3n+1}}$

Giải:

1. Đặt $X = \frac{x+5}{2}$ khi đó chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}X^n}{n}$ (*) với $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

+ Tìm BKHT, khoảng hội tụ của (*)

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{(n+1)(-1)^{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|-\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

$\Rightarrow$ BKHT: R=$\frac{1}{\rho}$ =1

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ của chuỗi (*) là (-1;1) **(1)**

+ Xét sự hội tụ của chuỗi (*) tại *X*=-1; *X*=1

- Tại *X*=1 chuỗi (*) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ là chuỗi đan dấu với $u_n = \frac{1}{n}$

  +Ta thấy khi n tăng thì $u_n = \frac{1}{n}$ giảm và $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

  Chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz => Chuỗi (*) hội tụ tại *X*=1.

  -Tại *X*=-1 chuỗi (*) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(-1)^{2n}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là 1 chuỗi âm phân kỳ do chuỗi dương tương ứng là chuỗi điều hòa. Vậy chuỗi (*) phân kỳ tại *X*=-1

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ Chuỗi (*) có miền hội tụ (-1 ;1] ứng với

$$-1 < X = \frac{x+5}{2} \le 1$$

$$\Leftrightarrow -7 < x \le -3$$

Kết luận: Vậy chuỗi lũy thừa ban đầu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x+5)^n}{n2^n}$ có miền hội tụ là (-7; -3]

2. Đặt $X = x - 2$

+ Khi đó chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{\sqrt{n}}$ (*) , với $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

+ Tìm BKHT, khoảng hội tụ của (*)

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right| = 1$$

$\Rightarrow$ BKHT: R=$\frac{1}{\rho}$ =1

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ của chuỗi (*) là (-1;1)

+ Xét sự hội tụ của chuỗi (*) tại X=-1; X=1

- Tại X=1 chuỗi (*) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ là Riemann với $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

  phân kì do $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

  $\Rightarrow$ Chuỗi (*) phân kỳ tại X=1.

- Tại X=-1 chuỗi (*) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ là chuỗi đan dấu với $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

  +)là dãy giảm

  ++)$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\Rightarrow$ Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz $\Rightarrow$ Chuỗi (*) hội tụ tại $X = -1$.

Miền hội tụ của chuỗi (*) là [-1;1) ứng với

$$-1 \le X = x - 2 < 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \le x < 3$$

KL: Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$ là [1; 3)

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n \quad (1)$$

Đặt $X=\dfrac{x-1}{2}\Rightarrow x=2X+1$ Ta có $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n+2}X^n$ (2)

Xét chuỗi (2) ta có : $a_n=\dfrac{n+1}{n+2},\ a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+3}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}=1$$

$\Rightarrow R=1$

Chuỗi luỹ thừa (2) hội tụ trên khoảng (-1;1)

Tại X=-1 ta có chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n+2}(-1)^n$ (*)

Tại X=1 ta có chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n+2}$ (**)

Ta có $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}\to 1\neq 0,\ n\to\infty$

Suy ra chuỗi số (*) và (**) phân kỳ

KL: chuỗi luỹ thừa (2) hội tụ trên khoảng (-1;1)

Chuỗi luỹ thừa (1) hội tụ trên khoảng (-1;3)

4. Đặt X= (x-1)^3 Khi đó chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}X^n}{\sqrt{n^2+n+1}}$ (*) với

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+n+1}},\ a_{n+1}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3n+3}}$$

+ Tìm BKHT, khoảng hội tụ

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n\sqrt{n^2+n+1}}{(-1)^{n-1}\sqrt{n^2+3n+3}}\right|=1$$

$\Rightarrow$ BKHT: R=$\dfrac{1}{\rho}$ =1

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ của chuỗi (*) là (-1;1) **(1)**

+ Xét sự hội tụ tại *X*=1, *X*=-1

- Tại *X*=1 chuỗi (*) trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+n+1}}$

  Là chuỗi đan dấu với $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

  +Giảm khi *n* tăng

  + $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}=0$

  Suy ra chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz

  $\Rightarrow$ Chuỗi (*) hội tụ tại *X*=1 **(2)**

- Tại *X*= -1 chuỗi (*) trở thành

  $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{n^2+n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

là chuỗi âm với $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

Khi $n \to +\infty$ ta có $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \sim \dfrac{1}{n} = v_n$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa phân kỳ nên chuỗi (*) phân kỳ tại X=-1

Miền hội tụ của chuỗi (*) là [-1;1) ứng với

$$-1 \le -1 \le X = (x-1)^3 < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < 2.$$

KL: Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(x-1)^{3n}}{\sqrt{n^2+n+1}}$ là [0; 2)

5.

Có $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, suy ra bán kính hội tụ R=1

Khoảng hội tụ là (-1;1).

Tại $x = 1$ ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n$ có

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)}\right]^{\frac{-n}{2n+1}} = e^{-\frac{1}{2}} \ne 0 \text{ chuỗi phân kỳ}$$

Tại $x = -1$ ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n (-1)^n$ chuỗi phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty} |u_n| = e^{-\frac{1}{2}} \ne 0$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-1,1)$

6.Chuỗi chưa ở dạng chuẩn, ta đặt $X = 2x^2$ $(X \ge 0)$ ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{X^n}{\sqrt{3n+1}}$ (*)

Có $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3n+4}}, \rho = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}} = 1$,

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{\rho} = 1$. Khoảng hội tụ của chuỗi (*) là [0;1).

-Xét tại đầu mút:

+ $X = 0$ chuỗi hội tụ.

+ $X = 1$, chuỗi (*) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ cùng tính hội tụ với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ nên chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi (*) là [0;1) ứng với $0 \le X = 2x^2 < 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy miền hội tụ của chuỗi đầu là $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Ví dụ 10.Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau:

a) $\frac{1}{2}(2x+1)^2+\frac{3}{4}(2x+1)^4+\frac{5}{8}(2x+1)^6+\frac{7}{16}(2x+1)^8+\ldots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{(4n-1)^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+1)^{2n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{(n+1)^2}$

Đáp số. a) Miền hội tụ (MHT) là $(-\sqrt{2}-1;\sqrt{2}-1)$ b) MHT là [-1/3 ;1/3] c) MHT là $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ d) MHT $(-\infty;0]$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Dùng tiêu chuẩn Dalembe xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1).2^{2n-1}}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.5.9...(4n-3)}{2.5.8...(3n-1)}$

2. Dùng tiêu chuẩn Côsi xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos\frac{1}{n}}{1+\tan\frac{1}{n}}\right)^{n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

3. Dùng tiêu chuẩn tích phân xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{(n+3)^2}$ 3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{3n^2}$

4. Dùng tiêu chuẩn so sánh xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{(n^2+1)^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n+1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$

5. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1) $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+1}$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}+\ldots$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n}$

6) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots$

6. Tìm khoảng hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nx}}{\sqrt{n+1}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x+1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

3. $\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{3}{4}(x+1)^4+\frac{5}{8}(x+1)^6+\ldots$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{4^n(2n-1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$

7. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.2^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n.3^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1).x^n}{n^2+2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n.(x-2)^{2n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n+1)^3\sqrt{5^n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{3n}}{\sqrt{n^2+n+1}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^{2n}}{\sqrt{4n+1}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}\left(\frac{2x+1}{3}\right)^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{n+1}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}.x^{2n}}$

14.

$(x-1)+\frac{1}{2^2}(x-1)^2+\frac{1}{2^3}(x-1)^3+\ldots$

15.

$2(x-1)^3+\frac{4(x-1)^6}{3}+\frac{8(x-1)^9}{5}+\ldots$