Chương 1

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

1.1. Một số khái niệm.

1.1.1. Định nghĩa: Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$, hàm số f là một *quy tắc* cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ một phần tử duy nhất $y \in Y$. Ký hiệu:

$$\begin{array}{l} f : X \to Y \\ \quad x \mapsto y \end{array} \quad \text{hoặc } y = f(x)$$

x: Biến số

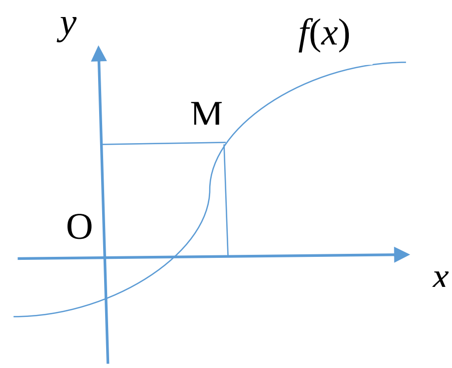
y: Hàm số

X: Tập xác định

f (*X*): Tập giá trị

1.1.2. Đồ thị của hàm số một biến số thực.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập các điểm M(x,$f(x)$), $x \in X$ trong mặt phẳng toạ độ O*xy*.



1.1.3. Hàm số hợp.

Cho $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$ và các hàm số g: $X \longrightarrow Y$, f: $Y \longrightarrow Z$, hàm số h: $X \longrightarrow Z$ xác định bởi **$h(x) = f\,[g(x)]$** gọi là **hàm số hợp của *f* và *g*.** Ký hiệu: $h = f_0 g$

Ví dụ: cho $X = Y = Z = \mathbb{R}$, xét các hàm số $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$

$$h_1(x) = f[g(x)] = [g(x)]^2 = 2^{2x}$$

$$h_2(x) = g[f(x)] = 2^{f(x)} = 2^{x^2}$$

Nhận xét: $f_0 g \neq g_0 f$

1.1.4. Hàm số ngược.

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$, hàm số f: $X \to Y$ thỏa mãn

i. $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ii. $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y \ \Leftrightarrow Y = f(X)$

Khi đó tồn tại hàm số $f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x$ gọi là hàm số ngược của hàm số *f*.

Ký hiệu: $x = f^{-1}(y)$

Nhận xét: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Chú ý: Nếu $x = f^{-1}(y)$ là hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$ thì ta viết là $y = f^{-1}(x)$

***Ví dụ*:** Xét hàm số $y = 2x+1$ $(X = Y = \mathbb{R})$

$$y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

Vậy hàm số ngược của hàm số $y = 2x+1$ là $y = \frac{x-1}{2}$

Tương tự: +) Hàm số $y = x^2$, $(x \geq 0, y \geq 0)$ có hàm số ngược là $y = \sqrt{x}$

+) Hàm số $y = \log_a x$, $(x > 0)$ có hàm số ngược là $y = a^x$, $0 < a \neq 1$

1.1.5. Hàm số sơ cấp.

+) *Các hàm số sau gọi là **hàm số sơ cấp cơ bản**:*

$$y = x^{\alpha},\ y = a^{x},\ y = \log_a x,\ y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \tan x,\ y = \cot x$$
$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \arctan x,\ y = \text{arccot}\, x$$

+) *Tổng, hiệu, tích, thương, phép lấy căn, phép lấy hàm hợp của các hàm số sơ cấp cơ bản với hàm hằng gọi là **hàm số sơ cấp**.*

Ví dụ: $y = 2x+1$, $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sin 2x$, $y = \cos(1-2x)$, … là các hàm số sơ cấp.

Hàm số $y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ không là hàm số sơ cấp.

1.2. Giới hạn của hàm số một biến số.

1.2.1. Giới hạn của hàm số tại x_0 hữu hạn.

Định nghĩa 1: Cho $x_0 \in (a,b)$ và hàm số *f* xác định trên khoảng (a,b) hoặc $(a,b) \setminus \{x_0\}$.

Ta nói *f* có giới hạn là L (hữu hạn) khi *x* dần đến x_0 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x \in (a,b): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ $(x \to x_0)$

Ví dụ: CMR: $\lim\limits_{x \to 1}(3x+4) = 7$

Chứng minh: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ sao cho $0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |(3x+4) - 7| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1}(3x+4) = 7$

Định nghĩa 2: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N>0, \exists \delta = \delta(N) > 0, \forall x \in (a,b): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > N$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N>0, \exists \delta = \delta(N) > 0, \forall x \in (a,b): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -N$$

Ví dụ: CMR $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$

<u>Thật vậy:</u> $\forall N>0,\ \exists \delta = \frac{1}{\sqrt{N}} > 0$ sao cho $0 < |x-0| < \frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > N \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$

1.2.2. Giới hạn của hàm số tại vô cực.

Định nghĩa 3: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0 : x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) < 0 : x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ví dụ: CMR $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

<u>Thật vậy:</u> $\forall \varepsilon > 0; \exists N = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ sao cho $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

Tương tự $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

Định nghĩa 4: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0, \exists M = M(N) > 0 : x > M \Rightarrow f(x) > N$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ cũng có phát biểu tương tự

Chú ý: **Dễ kiểm tra các giới hạn sau:**

$$+)\ a > 1: \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

$$+)\ 0 < a < 1: \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

$$+)\ \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

1.2.3. Giới hạn một phía

Định nghĩa : $f^-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$ (Giới hạn trái)

$$f^+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) \text{ (Giới hạn phải)}$$

Định lý : $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow f^-(x_0) = f^+(x_0) = L$

Ví dụ : Xét hàm số $f(x)=\begin{cases} 0\,;\; x\le 0 \\ 2x^2\,;\, 0<x\le 0,5 \\ 1\,;\, 0,5<x\le 1 \end{cases}$

$f^-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 0=0,\; f^+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x^2=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$f^-(0,5)=\lim\limits_{x\to 0,5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0,5^-} 2x^2=0,5,\; f^+(0,5)=\lim\limits_{x\to 0,5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0,5^+} 1=1\;\; f^-(0,5)\ne f^+(0,5)\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0,5} f(x)$

1.2.4. Các tính chất của giới hạn:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\mathrm{C}=\mathrm{C}\,;\quad \mathrm{C}=const$

2. *Cho* $\lim\limits_{x\to x_0} f(\mathrm{x})=\mathrm{L}_1\,;\, \lim\limits_{x\to x_0} g(\mathrm{x})=\mathrm{L}_2$

   $\lim\limits_{x\to x_0}[f(\mathrm{x})\pm \mathrm{g(x)}]=L_1\pm L_2$

   $\lim\limits_{x\to x_0} C.f(\mathrm{x})=C.L_1$

   $\lim\limits_{x\to x_0}[f(\mathrm{x}).\mathrm{g(x)}]=L_1.L_2$

   $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(\mathrm{x})}{\mathrm{g(x)}}=\dfrac{L_1}{L_2}\,;\, L_2\ne 0$

Các giới hạn vô định : $\infty-\infty\,;\,0.\infty\,;\,\dfrac{0}{0}\,;\,\dfrac{\infty}{\infty}\,;1^\infty$

1.2.5. Các phương pháp khử giới hạn dạng vô định

a. Phương pháp biến đổi phổ thông (thêm, bớt, tách, đặt ẩn phụ).

Ví dụ:

(1) Xét $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^n-1}{x^m-1}\right)$; Giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$

Ta có:

$$\frac{x^n-1}{x^m-1}=\frac{(x-1)(x^{n-1}+...+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+...+x+1)}=\frac{x^{n-1}+...+x+1}{x^{m-1}+...+x+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^n-1}{x^m-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{n-1}+...+x+1}{x^{m-1}+...+x+1}\right)=\frac{n}{m}$$

(2) Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-2x+1}{2x^3+x^2-2}\right)$; Giới hạn dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-2x+1}{2x^3+x^2-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}}=\frac{1}{2}$$

(3) Xét $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$; Giới hạn dạng $\infty-\infty$

Ta có thể thực hiện phép đổi biến $y=\sqrt[6]{x}$ khi $x\to1$ thì $y\to1$ và

$$\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{1-y^3}-\frac{2}{1-y^2}=\frac{1+2y}{(1+y)(1+y+y^2)}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=\lim_{y\to1}\frac{1+2y}{(1+y)(1+y+y^2)}=\frac{1}{2}$$

b. Phương pháp sử dụng nguyên lý giới hạn kẹp.

Định lý 1.7: (Nguyên lý kẹp) Giả sử ba hàm số $f(x),\ g(x),\ h(x)$ thoả mãn bất đẳng thức:

$$f(x)\le g(x)\le h(x);\ \forall x\in(a,b).$$

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=L$

***Ví dụ*:** Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}=0$

Giải: Với mọi x luôn có $0\le\left|\dfrac{x\sin x}{x^2+1}\right|\le\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\to0$ khi $x\to\infty$

Suy ra $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{x\sin x}{x^2+1}\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}=0$

c. Phương pháp sử dụng các giới hạn đặc biệt.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim_{x\to0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

Ví dụ :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\left(1-\dfrac{2}{x^2+1}\right)^{-\frac{x^2+1}{2}}\right\}^{\left(\frac{-2x^2}{x^2+1}\right)}$

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{-\frac{x^2+1}{2}}\right\}=e;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x^2}{x^2+1}\right)=-2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=e^{-2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left\{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right\}^{\frac{\sin x}{x}} = e$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left\{(1-2\sin^2 x)^{-\frac{1}{2\sin^2 x}}\right\}^{-\frac{2\sin^2 x}{x^2}}$

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\left\{(1-2\sin^2 x)^{-\frac{1}{2\sin^2 x}}\right\}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right)=-2$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$

d. Phương pháp sử dụng vô cùng bé (VCB) và vô cùng lớn (VCL)

Định nghĩa 1.

+) Hàm số $f(x)$ được gọi là vô cùng bé, viết tắt là VCB khi $x\to x_0$ nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

+) Hàm số $g(x)$ được gọi là vô cùng lớn, viết tắt là VCL khi $x\to x_0$ nếu

$$\lim_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty .$$

Ví dụ:

(1) sin$x$ là một vô cùng bé khi $x \to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$

(2) $\ln(1+x)$ là một vô cùng bé khi $x \to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$

(3) $e^x - 1$ là một vô cùng bé khi $x \to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$

(4) $\frac{1}{x}$ là một vô cùng lớn khi $x \to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$.

Nhận xét : Nếu $f(x)$ là VCB khi $x \to x_0$ thì $\frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \to x_0$.

Và ngược lại nếu $g(x)$ là VCL khi $x \to x_0$ thì $\frac{1}{g(x)}$ là VCB khi $x \to x_0$.

Tính chất :

+) Tổng, tích của các VCB là các VCB .

+) Tổng hữu hạn các VCL (cùng dấu) là các VCL.

+) Tích của một VCB với một hằng số là một VCB .

+) Tích của một VCL với một hằng số khác 0 là một VCL.

+) Tích của một VCB với một hàm số bị chặn là một VCB.

+) Tổng của một VCL với một hàm số bị chặn là một VCL.

Định nghĩa 2: Cho $f_1(x),\ f_2(x)$ là hai VCB (hai VCL) khi $x \to x_0$,và

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = C$$

+) Nếu $C = 0\ (\infty)$ ta nói $f_1(x)$ là VCB (VCL) bậc cao hơn $f_2(x)$.

+) Nếu $C \neq 0$, hữu hạn ($C \neq \infty$) ta nói $f_1(x),\ f_2(x)$ là hai VCB (VCL) cùng bậc.

Đặc biệt nếu $C = 1$ ta nói $f_1(x),\ f_2(x)$ là hai VCB (VCL) tương đương.

Viết là : $f_1(x) \sim f_2(x)$

Ví dụ: +) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\Rightarrow \sin x\sim x\quad (x\to 0)$

+) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=1\Rightarrow \sqrt{x+\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}\quad (x\to+\infty)$

Nhận xét: $f_1(x)\sim f_2(x)$; $f_2(x)\sim f_3(x); x\to x_0\Rightarrow f_1(x)\sim f_3(x); x\to x_0$.

Các VCB (VCL)tương đương thường gặp.

$$\sin x\sim \arcsin x\sim \tan x\sim \arctan x\sim \ln(1+x)\sim e^x-1\sim x,\ x\to 0$$

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\sim a_nx^n\quad (x\to\infty),\quad (a_n\neq 0)$$

Định lý: Nếu $f(x), g(x), \overline{f}(x), \overline{g}(x)$ là những VCB (VCL) khi $x\to x_0$.

Nếu $f(x)\sim\overline{f}(x)$, $g(x)\sim\overline{g}(x)$ thì:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)}$$

Ví dụ: **Tính các giới hạn**

$$I_1=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{(1+x)\ln(1+x^2)}\left(\frac{0}{0}\right)\qquad I_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+2018x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Giải: +) $\sin x\sim x,\ \ln(1+x^2)\sim x^2\ \ (x\to 0)\Rightarrow x^2\sin x\sim x^3,\ (1+x)\ln(1+x^2)\sim(1+x)x^2\ \ (x\to 0)$

$$\Rightarrow I_1=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(1+x)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x}=0$$

+) $2x^3+2018x\sim 2x^3,\ \sqrt{x+\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}\ \ (x\to+\infty)\Rightarrow I_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^{\frac{5}{2}}=+\infty$

Chú ý: Đối với các giới hạn dạng 0.∞, ∞ - ∞, 1^{∞}, ta đưa về dạng $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ rồi áp dụng định lý trên, kết hợp với việc sử dụng các giới hạn đặc biệt và định lý sau.

Định lý: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\text{a},\ \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\text{b}$ với a,b hữu hạn. Khi đó:

$$\lim_{x\to x_0}\left[u(x)\right]^{v(x)}=a^b$$

Ví dụ: Tính các giới hạn sau:

$$I_1 = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ (0.\infty) \qquad I_2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)\ (\infty-\infty)$$

$$I_3 = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}\ (1^\infty) \qquad I_4 = \lim_{x\to 0}(2+\text{x}-e^{2x})^{\frac{1}{x}}\ (1^\infty)$$

Giải: +) $I_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ (vì $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x},\quad x\to\infty$)

+) $I_2 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ (mà $\sin x\sim x, 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2,\ x\to 0$)

$$\Rightarrow I_2 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x = 0$$

$$+)\ I_3 = \lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \text{e}$$

$$+)\ I_4 = \lim_{x\to 0}[1+(1+x-e^{2x})]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left\{[1+(1+x-\text{e}^{2x})]^{\frac{1}{1+x-e^{2x}}}\right\}^{\frac{1+x-e^{2x}}{x}} = \text{e}^{-1}$$

vì $\lim\limits_{x\to 0}[1+(1+x-e^{2x})]^{\frac{1}{1+x-e^{2x}}} = e,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^{2x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(e^{2x}-1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x} = -1$

Chú ý: Vì một VCB (VCL) tương đương với chính nó nên khi áp dụng định lý trên có thể chỉ thay thế VCB tương đương ở tử hoặc mẫu.

***Ví dụ*: Tính giới hạn**

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(e^x-1)\ln(1+3x)}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x^2} = 3$ b. $I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin^2 x+\tan^3 x}{2x+\ln(1+2x^2)}$

c. $I = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{2x+1}$ d. $I = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^{10}-x^5+1)}{\ln(x^4-x^2+1)}$

Giải:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(e^x-1)\ln(1+3x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

b. vì $\sin^2 x\sim x^2, \tan^3 x\sim x^3, x+\sin^2 x+\tan^3 x\sim x$ khi $x\to 0$ và

$\ln(1+2x^2)\sim 2x^2 \Rightarrow 2x+\ln(1+2x^2)\sim 2x$.

Suy ra $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

c. Ta thấy khi $x\to +\infty$ thì

$$1+x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=1+x+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\sim x,\quad 2x+1\sim 2x$$

Suy ra $I=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

d. Khi $x\to\infty$ thì $x^{10}-x^5+1\sim x^{10}$, $x^4-x^2+1\sim x^4$,

Suy ra $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^{10}-x^5+1)}{\ln(x^4-x^2+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^{10})}{\ln(x^4)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10.\ln|x|}{4.\ln|x|}=\dfrac{5}{2}$

1.3. Tính liên tục của hàm số một biến số thực.

1.3.1. Các định nghĩa.

Định nghĩa 1: Cho hàm số *f* xác định trong (a,b). Ta nói *f* liên tục tại $x_0\in(a,b)$ nếu:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

Hàm số *f* không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm ấy.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x = 1$.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{khi } x=1\\ \dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\end{cases}$$

Giải: Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

$f(1)=0,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln[1+(x-1)^2]}{x-1}$

Mà $\ln[1+(x-1)^2]\sim(x-1)^2$, $x\to 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-1) = 0$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$. Vậy hàm số liên tục tại $x = 1$.

Ví dụ 2: Xét tính liên tục của hàm số sau tại các điểm $x = 0$ và $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \le 0 \\ 2x^2 & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{khi } x \ge 1 \end{cases}$$

Giải: Hàm số liên tục tại các điểm $x = 0$ và $x = 1$

$$\Leftrightarrow f^-(0) = f^+(0) = f(0) \text{ và } f^-(1) = f^+(1) = f(1)$$

Ta có: $f^-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0,\ \ f^+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2) = 0,\ \ f(0) = 0$

$f^-(0) = f^+(0) = f(0) = 0$

Vậy hàm số liên tục tại $x = 0$.

Lại có: $f^-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2) = 2,\ \ f^+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1,\ \ f(1) = 1$

$f^-(1) \ne f^+(1) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

1.3.2. Các tính chất của hàm số liên tục

***Định lý 1*:** cho $f(x)$, $g(x)$ là 2 hàm số liên tục tại điểm $x_0 \in (a,b)$. Khi đó các hàm số $f(x)+g(x)$, $f(x).g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \ne 0)$, $C.f(x)$ (C=const), liên tục tại $x_0 \in (a,b)$.

Định lý 2: Xét hàm số hợp $y = f[g(x)]$ với $u = g(x) \to y = f(u)$.

Nếu $g(x)$ liên tục tại $x_0 \in (a,b)$, $f(u)$ liên tục tại $u_0 = g(x_0)$ thì $f[g(x)]$ liên tục tạiđiểm $x_0 \in (a,b)$

Nhận xét: Các hàm số sơ cấp liên tục tại mọi điểm nằm trong các khoảng mở xác định của nó.

Ví dụ 3: Xác định a để hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \le 1 \\ ax & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Giải: Ta thấy $f(x)$ liên tục với mọi $x \ne 1$, do đó để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì f phải liên tục tại $x = 1$ tức là $f^-(1) = f^+(1) = f(1)$ (*)

Ta có: $f^-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2$, $f^+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax = a$, $f(1) = 2$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow$ a = 2

Vậy a = 2 thì *f* liên tục trên $\mathbb{R}$.

BÀI TẬP CỦNG CỐ

1. Nhận dạng và tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x-\sin x}$

2. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra

a. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} & ; x\neq 1\\ 3 & ; x=1\end{cases}$ tại $x=1$ b. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{\sin x^2} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ tại $x=0$

Gợi ý: 1) a. Dạng 1^∞ sử dụng giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$. Đ/S: e^{-1}

b. Dạng $\dfrac{0}{0}$, sử dụng các VCB tương đương. Đ/S:1

2) a. Tính các **giới hạn trái** và **giới hạn phải** tại $x = 1$ và $f(1)$.

b. Tính $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ và $f(0)$.

1.4. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1.4.1. Đạo hàm cấp 1.

a. Định nghĩa *:* Cho hàm số *f* xác định trong khoảng (a,b). Ta nói ***f* khả vi tại** nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$$

Số **A được gọi là đạo hàm của hàm số *f*** tại điểm x_0.

Ký hiệu: $f'(x_0)$

Như vậy, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1)

Nếu *f* khả vi tại mọi điểm $x_0\in(a,b)$ thì ta nói *f* khả vi trong khoảng (a,b).

Nhận xét: +) Đặt $\Delta x=x-x_0$ khi đó $x\to x_0\Leftrightarrow \Delta x\to 0$ và $x=x_0+\Delta x$

$$(1)\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad (2)$$

$$\Leftrightarrow\ f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0).\Delta x+o(\Delta x)\quad (3)$$

+) Nếu *f* khả vi tại $x_0\in(a,b)$ thì *f* liên tục tại x_0, điều ngược lại không đúng.

Ví dụ 1: Xét hàm số *f*(*x*) = C (C=const), $x_0\in\mathbb{R}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{C-C}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0$$

Vậy *f*(*x*) = C (C = const) $\Rightarrow\ f'(x)=0\,;\forall x$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số *y* = sin*x*

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

Vậy (sin*x*)’ = cos*x*

Tương tự: (cos*x*)’ = - sin*x*, (e^x)’ = e^x

b. Các quy tắc lấy đạo hàm.

Định lý 1: Cho *f* và *g* là hai hàm số xác định và khả vi trong khoảng (a,b).

Khi đó các hàm số $f(x)\pm g(x), Cf(x), f(x).g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cũng khả vi trong khoảng (a,b) và ta có:

+) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

+) $[Cf(x)]'=Cf'(x)\quad (C=const)$

+) $[f(x).g(x)]'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

+) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Định lý 2: (Đạo hàm của hàm số hợp)

Cho hàm số *u* = *u*(*x*) khả vi tại *x* và hàm số *y* = *f*(*u*) khả vi tại *u* = *u*(*x*). Khi đó hàm số hợp *y* = *f*[*u*(*x*)] khả vi tại *x* và ta có:

$$[f(u)]'_x=f_u'.u'_x$$

Ví dụ : Tính đạo hàm của hàm số $y = a^x$

Giải: Ta có: $y = a^x = e^{x.\ln a}$, đặt $u = x\ln a \Rightarrow a^x = e^u$ và $u' = \ln a$

$$(a^x)'_x = (e^u)'_x = (e^u)'_u.u'_x = e^u.\ln a = a^x.\ln a \Rightarrow (a^x)' = a^x.\ln a$$

***Định lý 3*:** (Đạo hàm của hàm số ngược).

Cho f là hàm số xác định và khả vi tại $x_0 \in (a,b)$, có hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ và $f'(x_0) \neq 0$. Khi đó hàm số ngược có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và

$$(f^{-1})'_y(y_0) = \frac{1}{f'_x(x_0)}$$

Ví dụ: Xét hàm số $y = \log_a x \quad (0 < a \neq 1)$

Vì $y = \log_a x$ có hàm số ngược là $x = a^y$

Mà $x'_y = a^y.\ln a = x\ln a \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} \Leftrightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ Khi $a = e$ thì $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

1	$y = C \quad (C = const) \Rightarrow y' = 0$	8	$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$
2	$y = x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow y' = \alpha.x^{\alpha-1}$	9	$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
3	$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$	10	$y = \cot x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
4	$y = a^x \ (0 < a \neq 1) \Rightarrow y' = a^x \ln a$	11	$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$y = \log_a x \ (0 < a \neq 1) \Rightarrow y' = \frac{1}{x\ln a}$	12	$y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$	13	$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$
7	$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$	14	$y = \text{arccot}\, x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$

BẢNG ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

c. Đạo hàm một phía, đạo hàm vô cùng.

Kí hiệu: $f'_{-}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *là đạo hàm trái tại* x_0 .

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ là đạo hàm phải tại } x_0 .$$

Mệnh đề: f khả vi tại $x_0 \Leftrightarrow f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$

Ví dụ: CMR hàm số $y = f(x) = |x|$ không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.

Giải: $y = f(x) = |x| = \begin{cases} -x \text{ khi } x < 0 \\ x \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1,\ f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

$$f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0) \Rightarrow \nexists\ f'(0)$$

Chú ý: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ thì ta nói tại x_0 *f có đạo hàm vô cùng, viết là* $f'(x_0) = \pm\infty$

1.4.2. Vi phân toàn phần.

Định nghĩa: Nếu hàm số *f* khả vi tại *x* thì ta có

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + o(\Delta x)$$

Biểu thức $f'(x).\Delta x$ được gọi là *vi phân toàn phần của f* tại *x*.

Kí hiệu: $df(x) = f'(x).\Delta x$

Đặc biệt: $f(x) = x \Rightarrow dx = df(x) = 1.\Delta x = \Delta x$

Do đó; $df(x) = f'(x)dx$ hay $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$

1.4.3. Đạo hàm và vi phân cấp cao.

a. Định nghĩa đạo hàm cấp cao.

Đạo hàm cấp *n* của hàm số *f* ký hiệu là $f^{(n)}(x)$ là đại lượng được xác định bởi

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

b. Định nghĩa vi phân cấp cao.

Vi cấp *n* của *f* kí hiệu $d^n f$ xác định bởi

$$d^n f = d(d^{n-1} f)$$

Nếu *x* là biến độc lập thì $d^n f = f^{(n)}(x)\, d\, x^n$

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow d^n(\sin x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)dx^n$$

Tương tự $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow d^n(\cos x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)dx^n$

c. Các quy tắc lấy đạo hàm cấp cao.

Cho 2 hàm số *f* và *g* khả vi cấp n, khi đó ta có:

1. $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

2. $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . f^{(k)} . g^{(n-k)} \quad (f^{(0)} = f)$ - Quy tắc Leibnitz

Ví dụ: Tính $y^{(n)}$

1. $y = x^2 + e^x$ 2. $y = x^2.e^x$

Giải: Đặt: $f(x) = x^2,\ g(x) = e^x$

$\Rightarrow f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2 \Rightarrow f^{(n)}(x) = 0 \quad (\forall n > 2)$

$g'(x) = e^x, g''(x) = e^x, ..., g^{(n)}(x) = e^x \quad (\forall n)$

1. $y' = 2x + e^x,\ y'' = 2 + e^x$

   $y^{(n)} = e^x,\ n > 2$

2. $y^{(n)} = (x^2.e^x)^{(n)} = C_n^0.x^2.e^x + C_n^1.2x.e^x + C_n^2.2.e^x$

   $= \left[x^2 + 2nx + n(n-1)\right].e^x$

1.4.4. Ứng dụng của đạo hàm và vi phân.

1.4.4.1. Tính đạo hàm theo tham số.

Cho các hàm số $x = f(t)$, $y = g(t)$ khả vi đối với $t \in (a, b)$. Nếu tồn tại hàm số ngược $t = f^{-1}(x)$ và $f'(t) \neq 0$ thì ta có:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Ví dụ: Xét hàm số: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = b(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in (0, 2\pi)$

Khi đó $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{2b\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = \dfrac{b}{a}\cot\dfrac{t}{2}$

1.4.4.2. Công thức Taylor.

Nếu hàm số *f* xác định, có đạo hàm cấp *n*+1 trong (a,b) thì $\forall c \in (a,b)$ ta có:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(\overline{c})}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Với $\overline{c}$ là số nằm giữa *x* và c tức là $\overline{c} = \theta x + (1-\theta)c, \quad 0 < \theta < 1.$

Đặc biệt khi c = 0 ta có **khai triển Maclaurin**

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

Ví dụ: Khai triển Maclaurin các hàm số ***y* = sin*x*** và ***y* = cos*x***

Giải:

$$y = \sin x \Rightarrow y(0) = 0, \ y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0\ ; n = 2k \\ (-1)^k\ ; n = 2k+1 \end{cases}$$

Vậy $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1}\dfrac{\sin\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}, \quad (0 < \theta < 1)$

Tương tự $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\dfrac{\sin\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$

1.4.4.3. Tính giới hạn dạng vô định.

Quy tắc L'Hospital

Nếu hai hàm số *f và g* xác định và khả vi tại lân cận của điểm *x=a* có thể trừ tại *x=a*.

Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0, \ g'(x) \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Chú ý: +) Ta có thể sử dụng quy tắc **L'Hospital** nhiều lần.

+) Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ thì quy tắc **L'Hospital** vẫn đúng.

Ví dụ 1: Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

Giải: Giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$

Ta có: $I\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$

Ví dụ 2: Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{x+e^x}$

Giải: Giới hạn dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$I\overset{L}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+xe^x}{1+e^x}\overset{L}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+xe^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}(2+x)=+\infty$$

Nhận xét: Đối với giới hạn vô định dạng $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞} ***thì ta có thể đưa về dạng*** $\dfrac{0}{0}$ ***hoặc*** $\dfrac{\infty}{\infty}$ ***rồi áp dụng quy tắc L'Hospital.***

Ví dụ 3: Tính các giới hạn

a. $I_1=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ (dạng $0.\infty$)

b. $I_2=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ (dạng $\infty-\infty$)

c. $I_3=\lim\limits_{x\to 0}(2+x-e^{2x})^{\frac{1}{x}}$ (dạng 1^{∞})

Giải: a. $I_1=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\cot\dfrac{\pi x}{2}}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}}=-\dfrac{2}{\pi}$

b. $I_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2e^x+xe^x}=\dfrac{1}{2}$

c. Đặt $A=(2+x-e^{2x})^{\frac{1}{x}}\Rightarrow \ln A=\ln(2+x-e^{2x})^{\frac{1}{x}}=\dfrac{\ln(2+x-e^{2x})}{x}$

$$\lim_{x\to 0}(\ln A)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+x-e^{2x})}{x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-2e^{2x}}{2+x-e^{2x}}=-1\Rightarrow I_3=\lim_{x\to 0}A=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\ln A)}=e^{-1}$$

1.4.4.4. Đường cong cho dưới dạng tham số. Đường cong trong hệ tọa độ cực.

a. Đường cong cho dưới dạng tham số.

Phương trình dạng tham số của đường cong .

$$\begin{cases} x = x(\mathrm{t}) \\ y = y(\mathrm{t}) \end{cases} \quad \mathrm{t} \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$$

Ví dụ: +) Phương trình tham số của đường tròn tâm O bán kính R là:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad \mathrm{t} \in [0, 2\pi]$$

+) Tương tự phương trình tham số của đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ là:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \mathrm{t} \in [0, 2\pi]$$

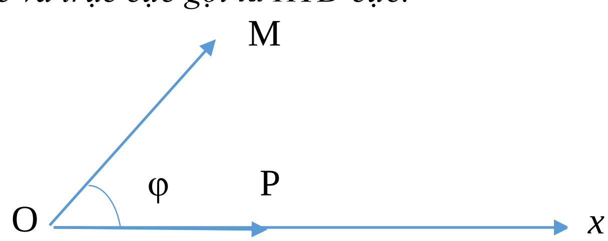
b. Đường cong trong hệ tọa độ cực.

(1) Hệ tọa độ cực.

Trong mặt phẳng chọn một điểm O cố định làm gốc cực (cực)và vectơ đơn vị $\overrightarrow{OP}$.

Tia O*x* chứa vectơ $\overrightarrow{OP}$ gọi là trục cực.

Hệ tọa độ gồm cực và trục cực gọi là HTĐ cực.



Mỗi điểm M trong mặt phẳng xác định bởi độ dài $r = |\overrightarrow{OM}|$ và $\varphi = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM})$

φ gọi là góc cực.

r là bán kính cực.

Nếu $r > 0$ và $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ thì cặp (r, φ) được gọi là tọa độ cực của M.

Đối với HTĐ cực mở rộng thì các góc φ có thể sai khác nhau k2π.

M ≡ O → $r = 0$, φ tùy ý.

(2) Mối quan hệ giữa tọa độ cực và tọa độ Đề các.

Gọi (x,y) và (r,φ) lần lượt là tọa độ của M đối với hệ tọa độ Đề các và hệ tọa độ cực.

Ta có: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$ $(r > 0\,,\, 0 \le \varphi \le 2\pi)$ (2)

Chú ý: *Trong công thức* (2) *có hai góc φ tương ứng, ta chọn góc φ sao cho y và* sin*φ cùng dấu.*

Ví dụ: Tìm tọa độ cực của $M(1,-\sqrt{3})$

Giải: Giả sử $M(r,\varphi)$. Ta có:

$$\begin{cases} r^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4 \\ \tan\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi_1 = \dfrac{2\pi}{3}\ (\text{L});\ \varphi_2 = \dfrac{5\pi}{3}\ (\sin\dfrac{5\pi}{3} < 0) \end{cases}$$

→ ***M*(2,5π/3)**

(3) Phương trình đường cong trong hệ tọa độ cực.

$$\boldsymbol{r = f(\varphi)}$$

Ví dụ 1: Viết phương trình đường thẳng $y = 2x+4$ trong hệ tọa độ cực.

Giải: Từ công thức $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow y = 2x + 4 \Leftrightarrow r\sin\varphi = 2r\cos\varphi + 4$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{4}{\sin\varphi - 2\cos\varphi}$$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ trong hệ tọa độ cực.

Giải: Từ công thức $r^2 = x^2 + y^2$

Suy ra $\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2 \leftrightarrow r^2 = R^2 \leftrightarrow r = R}$

Tương tự đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ có phương trình trong hệ tọa độ cực là:

$$r=2\cos\varphi$$

BÀI TẬP CỦNG CỐ

1. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a. $f(x)=\dfrac{1-2x}{3+x}$ b. $f(x)=\dfrac{1}{(2x+3)(2-x)}$

2. Khai triển Maclaurin hàm số $y=\ln(1+2x)$.

3. Dùng quy tắc L'Hospital tính các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\arcsin x^2}}$

4. Viêt phương trình của các đường sau trong hệ tọa độ cực.

a. $y=x$ b. $x^2+y^2=x$

Đáp số: **1**. a. Áp dụng quy tắc nhân b. Áp dụng quy tắc cộng

2. $\ln(1+2x)=2x-2x^2+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2x)^n}{n}+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}.\dfrac{(2x)^{n+1}}{[1+\theta(2x)]}$

3. *a*. 1 *b*. 1

4. *a.* $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ *b.* $r=cosx$

Chương 2
TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

2.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH VÀ TÍCH PHÂN XÁCĐỊNH
2.1.1. Tích phân bất định
2.1.1.1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a,b). Ta nói rằng hàm số $F(x)$ xác định trên khoảng (a,b) là một nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F(x)$ khả vi trong khoảng (a,b) và $F'(x) = f(x)$ hay $dF(x) = f(x)dx,$ với mọi $x \in (a,b).$

Ví dụ:

(1) $\dfrac{x^5}{5}$ là nguyên hàm của $x^4, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $\left(\dfrac{x^5}{5}\right)' = x^4$.

(2) $\dfrac{x^5}{5} + C$ là nguyên hàm của $x^4, \forall x \in \mathbb{R}, \forall C = const$ vì $\left(\dfrac{x^5}{5} + C\right)' = x^4$.

(3) $\sin x$ là nguyên hàm của $\cos x, \forall x \in \mathbb{R}$, vì $(\sin x)' = \cos x.$

(4) $\sin x + C$ là nguyên hàm của $\cos x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall C = const$ vì $(\sin x + C)' = \cos x$

Định lý: Giả sử $f(x)$ khả vi trong khoảng (a,b) và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x), \forall x \in (a,b).$ Khi đó:

(1) Với mọi hằng số $C,$ $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x), \forall x \in (a,b).$

(2) Ngược lại, mọi nguyên hàm của $f(x), \forall x \in (a,b)$ đều có dạng $F(x) + C$.

2.1.1.2. Định nghĩa tích phân bất định

Họ các hàm số $F(x) + C$ trong đó C là hằng số tùy ý và $F(x)$ là một nguyên hàm bất kỳ của $f(x)$ trong khoảng (a,b) được gọi là *họ nguyên hàm* hay *tích phân bất định* của $f(x)$ trong khoảng (a,b), kí hiệu là

$$\int f(x)dx$$

$\int$: Dấu tích phân.

x: Biến lấy tích phân.

$f(x)$: Hàm số lấy tích phân.

$f(x)dx$: Biểu thức dưới dấu tích phân.

Như vậy, $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

2.1.1.3. Các tính chất đơn giản

(1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x), \forall x \in (a,b)$ thì

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$, với k là hằng số tùy ý.

(2) Nếu $F(x), G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x), g(x), \forall x \in (a,b)$ thì

$$\int (Af(x) + Bg(x))dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx = AF(x) + BG(x) + C$$

(3) Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = \varphi(x)$ thì $\int f(u(x)).u'(x)dx = F(u(x)) + C$ hay

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

với A, B, C là các hằng số tùy ý.

2.1.1.4. Bảng tích phân các hàm số thông dụng

1	$\int 0dx = C$	10	$\int \cos xdx = \sin x + C$
2	$\int dx = x + C$	11	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$
4	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	13	$\int df(x) = f(x) + C$
5	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$	14	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\| + C$
6	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$	15	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ (a \neq 0)$
7	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$	16	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \ (a > 0)$
8	$\int e^x dx = e^x + C$	17	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C \ (a \neq 0)$
9	$\int \sin xdx = -\cos x + C$	18	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx = \ln\|x + \sqrt{x^2+k}\| + C$

Chứng minh.

$$(15)\ \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$(16)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$(17)\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

(18) Chú ý rằng $\left(\ln|u|\right)' = \frac{u'}{u}\ (u\neq 0) \Rightarrow \left(\ln|x+\sqrt{x^2+k}|\right)' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$.

Do vậy ta có $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C$.□

Ví dụ :**Tính các tích phân sau**

(1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \arctan(x+1)+C$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(3x+1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{\sqrt{9-(3x+1)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{3}+C$

2.1.1.5. Phương pháp tính tích phân bất định

a. Phép đổi vi phân

Phép đổi vi phân $du = u'.dx$ cho phép chúng ta biến đổi tích phân biến x thành tích phân biến u đơn giản hơn, từ đó có thể áp dụng các công thức trong bảng tích phân thông dụng. Chẳng hạn như các phép biến đổi sau :

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b)\ (a\neq 0),\ dx = \frac{1}{a}d(e^{ax}),\ xdx = \frac{1}{2}d(x^2),\ \frac{dx}{x} = d(\ln x),\ldots$$

Sau đó chúng ta dùng tính chất sau $\int f(u).u'dx = \int f(u)du = F(u(x))+C$

trong đó $\int f(x)dx = F(x)+C$

Ví dụ**: Tính các tích phân sau:**

a) $I = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ b) $I = \int e^{2x}dx$ c) $I = \int \cos 3x dx$

Giải:

a) $I=\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$ (do $\int \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+C$)

b) $I=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C.$

c) $I=\int \cos 3xdx=\frac{1}{3}\int \cos 3xd(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$

b. Phép đổi biến

Phép đổi biến 1: Giả sử cần tính $\int f(x)dx,$ ta thực hiện phép đổi biến $t=\varphi(x)$, biểu thức dưới dấu tích phân trở thành

$$f(x)dx=g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=g(t)dt$$

Khi đó ta có: $\int f(x)dx=\int g(t)dt=G(t)+C=G(\varphi(x))+C$.

Ví dụ: **Tính các tích phân sau:**

a) $I=\int \sin^2 2x.\cos xdx$ b) $I=\int \frac{dx}{x\ln x.\ln(\ln x)}$.

Giải:

a) Phân tích $I=\int \sin^2 2x.\cos xdx=4\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos xdx$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx\Rightarrow I=4\int (t^2-t^4)dt=\frac{4t^3}{3}-\frac{4t^5}{5}+C$

$=\frac{4\sin^3 x}{3}-\frac{4\sin^5 x}{5}+C$

b) Đặt

$t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}\Rightarrow I=\int \frac{dt}{t.\ln t}=\int \frac{d\ln t}{\ln t}=\frac{\ln^2 t}{2}+C=\frac{\ln^2(\ln x)}{2}+C$

Phép đổi biến 2: Ta thực hiện phép đổi biến $x=\varphi(t),$ trong đó $\varphi(t)$ là hàm khả vi liên tục, có hàm ngược trong khoảng $(\alpha;\beta)$ nào đó:

$$f(x)dx=f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt=g(t)dt$$

Khi đó ta có: $\int f(x)dx=\int g(t)dt=G(t)+C=G(\varphi^{-1}(x))+C.$

***Ví dụ:* Tính các tích phân sau:**

1) $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\ (a > 0)$

Đặt $x = a\sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = a\cos t dt;\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$ ta có:

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t) dt$$
$$= \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2}\sin t \cos t + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

2) $I = \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$.

Đặt $x = 2\tan t,\ t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt.$ Thay vào và rút gọn ta được

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{8}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{16}(\text{t} + \frac{\sin 2t}{2}) + C$$

$$= \frac{1}{16}(t + \frac{\tan t}{\tan^2 t + 1}) + C = \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + \frac{x}{8(x^2 + 4)} + C$$

c. Phương pháp tính tích phân từng phần

Giả sử $u = f(x), v = g(x)$ là hai hàm số khả vi và có đạo hàm $u' = f'(x), v' = g'(x)$ là hai hàm số liên tục. Khi đó:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Dạng 1. $f(x)$ là hàm lôgarit, hàm lượng giác ngược, $g(x)$ là một hàm loại khác thì đặt

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx \end{cases}$$

Dạng 2. Tích phân có dạng $\int P_n(x).g(x)dx$ trong đó $P_n(x)$ là hàm đa thức bậc *n*, $g(x)$ là một hàm khác mà không là hàm lôgarit hay hàm lượng giác ngược thì ta đặt

$$\begin{cases} u = P_n(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P_n^{'}(x)dx \\ v = \int g(x)dx \end{cases}$$

Ví dụ: **Tính các tích phân sau**

a) $\int \frac{\arctan x}{x^2}dx$ b) $\int \sqrt{x^2+k}\,dx$

Giải:

a) Đặt $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{\arctan x}{x^2}dx = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = -\frac{\arctan x}{x} + I$$

Để tính I ta đặt

$$t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow I = \int \frac{xdx}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1)t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} + C$$

Vậy: $\int \frac{\arctan x}{x^2}dx = -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

b) Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+k} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+k}}dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}dx$

$$I = x\sqrt{x^2+k} - \int \left(\sqrt{x^2+k} - \frac{k}{\sqrt{x^2+k}}\right)dx = x\sqrt{x^2+k} - I + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$$
$$= x\sqrt{x^2+k} - I + k\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + 2C \Rightarrow 2I = x\sqrt{x^2+k} + k\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + 2C$$

Do đó $I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C$

2.1.2. Tích phân xác định

2.1.2.1. Định nghĩa tích phân xác định

tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, kí hiệu là:

$$\int_a^b f(x)dx \,.$$

Công thức Newton-Leibnitz

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)|_a^b \text{ hay } \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

2.1.2.2. Các tính chất của tích phân xác định

Nếu không chú thích gì, các tích phân trong các tính chất dưới đây đều giả thiết là khả tích.

Tính chất 1. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Tính chất 2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Tính chất 3. $f(x) \le g(x), \forall x \in [a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Hệ quả:

(1) *Nếu* $f(x) \ge 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$

(2) Nếu f là hàm khả tích trên $[a;b]$ thì $|f|$ khả tích trên $[a;b]$ và

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

2.1.2.3. Phương pháp tính tích phân xác định

a. Phương pháp đổi biến

Giống như tích phân bất định. Ta có 2 kiểu đổi biến:

+ *Đ*ổi biến $x = \varphi(t))$ hoặc

+ Đổi biến $t = \varphi(x))$

Chú ý: + Đổi biến sang biến mới thì tích phân nói chung phải dễ tính toán hơn.

+ Đổi biến trong tích phân xác định phải đổi cận lấy tích phân

Ví dụ: Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + 1} dx$$

Giải:

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận tương ứng được:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x d(\sin x)}{\sin^2 x + 1} = \int_0^1 \frac{(1-t^2)dt}{t^2+1} = \int_0^1 \left(\frac{2}{t^2+1} - 1 \right) dt = \left(2\arctan t - t \right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

b. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $u(x), v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó ta có

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

***Ví dụ*: Tính các tích phân sau**

a) $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$ b) $\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx$

Giải:

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x^2+1} dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} + c \end{cases}$$

Chọn $c = \frac{1}{2} \Rightarrow v = \frac{x^2+1}{2} \Rightarrow I = \arctan x . \frac{x^2+1}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Ta có:

$$I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \int_e^{e^2} \frac{dx}{\ln^2 x} - \int_e^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = I_1 - I_2$$

Để tính I_2 ta đặt:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\ln x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-1}{x \ln^2 x} \\ v = x \end{cases}$$

Suy ra

$I_2 = \frac{x}{\ln x}\Big|_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx = \frac{e^2}{2} - e + I_1 \Rightarrow I = I_1 - I_2 = e - \frac{e^2}{2}.$

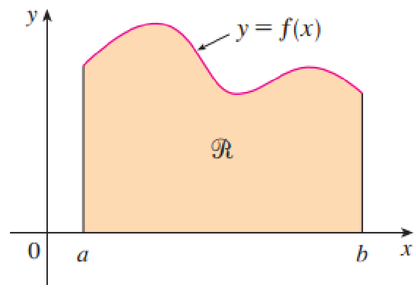
2.2. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN XÁCĐỊNH

2.2.1. Tính diện tích hình phẳng

2.2.1.1. Đường cong trong hệ tọa độ Đềcác (Descartes)

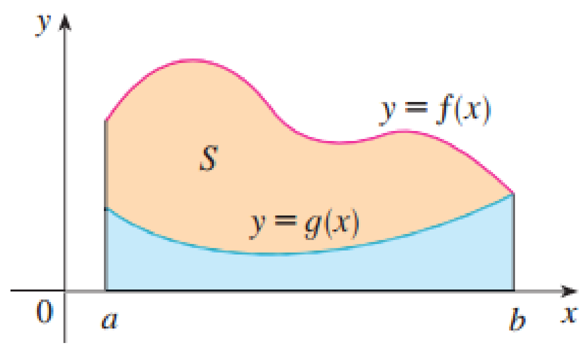
a. Diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường thẳng $x = a,\ x = b,\ y = 0$ và đồ thị của hàm số liên tục $y = f(x),\ x \in [a;b]$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |\ f(x)\ |\ dx$$



b. Trong trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x = a,\ x = b$ và đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ trong đó $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a;b]$thì diện tích được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |\ f(x) - g(x)\ |dx$$



c. Tương tự, diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường thẳng $y = c,\ y = d\ (c < d),\ x = 0$

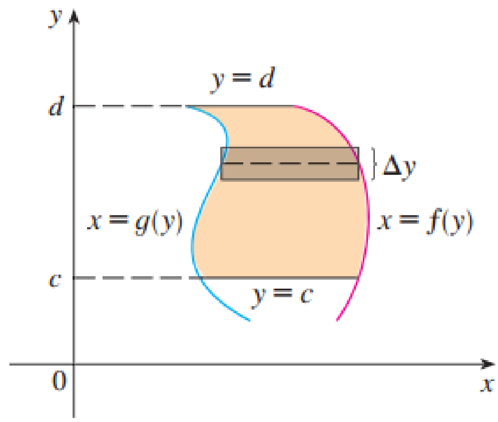
và đồ thị hàm số cho dưới dạng $x = g(y)$với $g(y)$ liên tục trên$[c;d]$ có diện tích được tính theo công thức

$$S = \int_c^d |\ g(y)\ |\ dy$$

d. Trong trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = c, y = d\ (c < d)$ và đồ thị của

các hàm số $x = f(y), x = g(y)$ trong đó $f(y), g(y)$ là các hàm số liên tục trên $[c;d]$ thì diện tích được tính theo công thức

$$S = \int_c^d | f(y) - g(y) | dy$$



Chú ý: Để tính các tích phân có trị tuyệt đối trên ta có thể phá trị tuyệt đối bằng cách xét dấu của biểu thức trong trị tuyệt đối trên đoạn lấy tích phân **hoặc vẽ hình**, chẳng hạn trên đoạn lấy tích phân $[a;b]$ đường cong $y = f(x)$ nằm phía trên đường cong $y = g(x)$ thì

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in [a;b] \Rightarrow S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

2.2.1.2. Đường cong ở dạng tham số

Trong trường hợp hình thang cong được giới hạn bởi trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b$ ứng với dạng tham số là

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}; \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

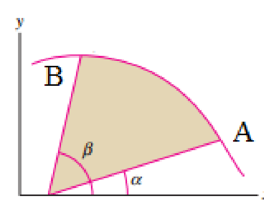
trong đó $x(t)$ là hàm đơn điệu và liên tục trên đoạn $[t_1;t_2]$, có diện tích là:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} | y(t).x'(t) | dt.$$

2.2.1.3. Đường cong trong hệ tọa độ cực

Diện tích S của hình quạt cong giới hạn bởi 2 tia $\varphi = \alpha, \varphi = \beta \ (\alpha < \beta)$ và cung AB của đường cong $r = r(\varphi)$ trong đó $r = r(\varphi)$ là một hàm liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$.

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

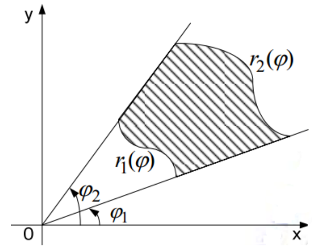


Hình 3.4

Trong trường hợp miền phẳng bị giới hạn bởi 2 hình quạt chứa nhau

$$r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} | r_1^2(\varphi) - r_2^2(\varphi) | \, d\varphi.$$



Ví dụ: Tính diện tích của các hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

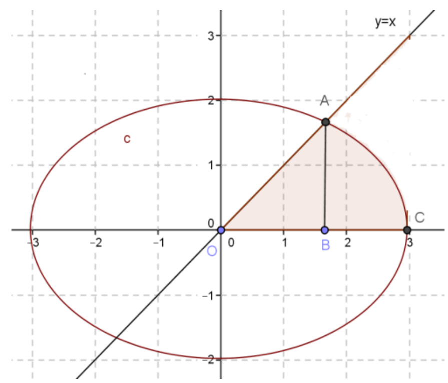
$$\text{a)} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 \le y \le x \; (a, b > 0)$$

$$\text{b)} x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = 0, y = \sqrt{3}x$$

Giải:

a. Chuyển sang hệ toạ độ cực

Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} (0 \le \varphi < 2\pi, r \ge 0)$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow r^2(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}$$

Ứng với $y = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

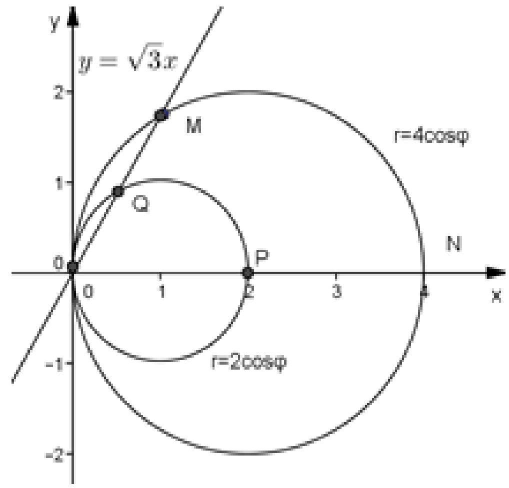
Ứng với $y = x \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} d\varphi$$

Chia cả tử và mẫu của phân thức cho $\cos^2\varphi$ được:

$$S = \frac{a^2b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\tan\varphi}{b^2 + a^2\tan^2\varphi} = \frac{ab^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(a\tan\varphi)}{b^2 + a^2\tan^2\varphi} = \frac{ab}{2}.\arctan\left(\frac{a\tan\varphi}{b}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{ab}{2}\arctan\frac{a}{b}$$

b) Chuyển sang hệ tọa độ cực:



Miền D cần tính diện tích là MNPQ

Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ trong tọa độ cực là : $r = 2\cos\varphi$

Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 4x$ trong tọa

độ cực là : $r = 4\cos\varphi$

Miền cần tính diện tích

$D = \{(x,y); x^2 + y^2 = 2x;\ x^2 + y^2 = 4x; 0 \le y \le \sqrt{3}x$

Chuyển sang tọa độ cực ta được $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Diện tích miền cần tính:

$$S_{D'} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} |(4\cos\varphi)^2 - (2\cos\varphi)^2| d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\varphi)d\varphi = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

2.3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

2.3.1. Tích phân suy rộng với cận lấy tích phân là vô hạn

2.3.1.1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng $[a;+\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a;A]$. Ta định nghĩa:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$$

là tích phân suy rộng (loại 1) của hàm $f(x)$ trong khoảng $[a;+\infty)$. Nếu giới hạn bên phải tồn tại thì ta nói tích phân suy rộng *hội tụ*,trái lại nếu giới hạn là vô

hạn hoặc không tồn tại thì ta nói tích phân *phân kỳ*.

tương tự, ta cũng định nghĩa tích phân suy rộng với cận dưới vô hạn

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^a f(x)dx$$

và tích phân với 2 cận vô hạn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ A'\to-\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx$$

Ngoài ra cũng có thể viết

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

Tích phân suy rộng vế trái hội tụ khi và chỉ khi 2 tích phân vế phải hội tụ với a là số thực tùy ý.

Trong suốt phần này, để cho tiện ta có thể viết

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty), \lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty)$$

Nếu các giới hạn là hữu hạn và khi đó có thể viết

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

Ví dụ 1: Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a>0)$

Giải :

Với $\alpha \neq 1$ ta có

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.x^{1-\alpha}\Big|_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty \;\; khi\ \alpha < 1 \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\ khi\ \alpha > 1 \end{cases}$$

Với $\alpha = 1$ ta có $I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_a^{+\infty} = +\infty$

Vậy: $I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\ (a>0)$ hội tụ $\Leftrightarrow \alpha > 1$, phân kỳ $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} \qquad K = \int_a^{+\infty} \sin x dx$$

Giải:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4};\ J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

$$K=\int_a^{+\infty}\sin xdx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\sin x\mathrm{d}x=-\lim_{A\to+\infty}\cos x\Big|_a^A$$

Không tồn tại do giới hạn $\lim\limits_{A\to+\infty}\cos A$ không xác định.

Ví dụ 3: Tính tích phân sau

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\ (\alpha \text{ là tham số bất kỳ})$$

Giải: Ta có

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=I_1+I_2$$

Để tính I_2 đặt $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt,$

$$I_2=\int_1^0\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\alpha})}=\int_0^1\frac{t^\alpha dt}{(t^2+1)(t^\alpha+1)}=\int_0^1\frac{x^\alpha dx}{(x^2+1)(x^\alpha+1)}$$

Suy ra $I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^1\frac{x^\alpha \mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\,|_0^1=\frac{\pi}{4}$

2.3.1.2. Tiêu chuẩn so sánh

Định lý 1:

(1) Cho các hàm $f(x),g(x)$ khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a;A]$ và

$0\le f(x)\le g(x),\forall x\ge a$

Khi đó

+ Nếu $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ

+ Nếu $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ phân kỳ thì tích phân $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ phân kỳ.

(2) Giả sử các hàm $f(x), g(x)$ không âm, khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a;A]$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k\ (0<k<+\infty)$ thì các tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng tính hội tụ tức là sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả: Cho các hàm số dương $f(x), g(x)$ khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a;A]$

Khi đó

+ Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ và tích phân $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

+ Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và tích phân $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng phân kỳ.

Chú ý: Khi so sánh các tích phân suy rộng loại 1 ta thường so sánh với tích phân

$$I = \int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\ (a>0)\ \ (I \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \alpha>1,\ \text{phân kỳ } \Leftrightarrow \alpha\le 1)$$

Ví dụ 4: Xét sự hội tụ của các tích phân sau

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx \qquad J = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x+1-\arctan x}{x^2+x+1}dx$$

Giải:

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx = \int\limits_0^{1}\frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx + \int\limits_1^{+\infty}\frac{x^3}{(x^3+1)^2}dx = I_1 + I_2$$

Trong đó

+ I_1 là tích phân xác định (giá trị hữu hạn)

+ I_2 là tích phân suy rộng loại 1, ta có $0 \le f(x) = \frac{x^3}{(x^3+1)^2} < \frac{x^3}{x^6} = \frac{1}{x^3}$

Mà $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ hội tụ do $\alpha = 3 > 1$ nên I_2 cũng hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Vậy $I = I_1 + I_2$ là tích phân hội tụ.

$$J=\int_0^1 \frac{x+1-\arctan x}{x^2+x+1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x+1-\arctan x}{x^2+x+1}dx=J_1+J_2$$

Trong đó

+ J_1 là tích phân xác định

+ J_2 là tích phân suy rộng có

$$f(x)=\frac{x+1-\arctan x}{x^2+x+1}\sim\frac{1}{x}=g(x) \text{ khi } x\to+\infty$$

Thật vậy, áp dụng quy tắc Lôpitan có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+1-\arctan x)}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1-\arctan x-\dfrac{x}{x^2+1}}{2x+1}=1$$

Mà tích phân $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ là tích phân phân kỳ (do $\alpha=1$) nên J_2 phân kỳ.

Vậy tích phân $J=J_1+J_2$ phân kỳ.

2.3.1.3. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Định lý 3: Nếu tích phân $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ cũng hội tụ.

Khi đó ta nói rằng tích phân $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối*, còn nếu tích phân $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ nhưng $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ phân kỳ thì ta nói tích phân $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ là *bán hội tụ*.

2.3.2 Tích phân suy rộng với hàm số lấy tích phân không bị chặn

2.3.2.1. Định nghĩa

Giả sử $f(x)$ xác định trong khoảng $[a;b)$ và không bị chặn trong lân cận điểm $x=b$. Giả thiết rằng $f(x)$ khả tích trong mọi đoạn $[a;c]$ với $a<c<b$.

Khi đó ta định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là *tích phân suy rộng loại 2* của $f(x)$ trong khoảng $[a;b)$ và $x=b$ gọi là điểm bất thường.

Tích phân hội tụ nếu giới hạn bên phải hội tụ, trái lại ta nói tích phân phân kỳ (nếu giới hạn bên phải không tồn tại hoặc bằng $+\infty, -\infty$)

Tương tự, nếu điểm bất thường là $x=a$ thì định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

Trường hợp điểm bất thường là $x=c\in(a;b)$ thì ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Tích phân suy rộng hội tụ khi và chỉ khi 2 tích phân bên phải hội tụ.

Trường hợp tích phân suy rộng có 2 điểm bất thường $x=a, x=b$ ta có thể chèn cận để tách thành tổng 2 tích phân dạng trên.

Ví dụ 5: Tính các tích phân suy rộng sau

a) $I=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ b) $J=\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Giải:

a) Hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ không bị chặn khi $x\to 2^-$.

Do vậy I là tích phân suy rộng loại 2 có điểm bất thường $x=2$.

Ta có $I=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{b\to 2^-}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{b\to 2^-} \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^b = \frac{\pi}{2}.$

b) Tích phân J có 2 điểm bất thường là $x=2$ và $x=-2$.

Ta tách $J=\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{\pi}{2}.$

Tương tự, sử dụng định nghĩa ta tính được $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow J=\pi.$

Ngoài ra, thấy nguyên hàm của hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ là hàm $F(x)=\arcsin\frac{x}{2}$ xác định trên đoạn [-2;2] nên tích phân suy rộng trên có thể được tính trực tiếp như sau: $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}=\pi.$

Ví dụ 6: Tính tích phân $I=\int_{a}^{b}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\quad (a<b)$

Giải:

Hàm $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ không bị chặn khi $x\to a^{+}$ và $x\to b^{-}$ nên tích phân có 2 điểm bất thường $x=a,\ x=b.$

Phân tích mẫu số để đưa về dạng khuyết được

$$(x-a)(b-x)=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-(x-\frac{a+b}{2})^2.$$

Đặt $u=x-\frac{a+b}{2}\Rightarrow du=dx,\ x:a\to b\Leftrightarrow u:\frac{a-b}{2}\to\frac{b-a}{2}$.

Ta được

$$I=\int_{a}^{b}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int_{a}^{b}\frac{d(x-\frac{a+b}{2})}{\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-(x-\frac{a+b}{2})^2}}=\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-u^2}}=2.\int_{0}^{\frac{b-a}{2}}\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-u^2}}$$

$$=\lim_{c\to\left(\frac{b-a}{2}\right)^-}2\arcsin\frac{2u}{b-a}\Big|_{0}^{c}=2.\frac{\pi}{2}-0=\pi.$$

Ngoài ra, chúng ta cũng có thể giải bài toán theo cách khác.

Trong miền lấy tích phân $a\le x\le b$ nên có thể đặt

$$x=a.\cos^2 t+b.\sin^2 t=a+(b-a)\sin^2 t\Rightarrow dx=2(b-a)\sin t.\cos t dt$$

và $x:a\to b\Leftrightarrow t:0\to\frac{\pi}{2}$ đồng thời $\sqrt{(x-a)(b-x)}=(b-a)\sin t.\cos t$.

Thay vào tích phân được

$$I=\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(b-a)\sin t.\cos t}{(b-a)\sin t.\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt=\pi.$$

2.3.2.2. Tiêu chuẩn so sánh

Định lý 4:

(1) Cho các hàm xác định, không âm trên $[a;b)$ khả tích trên mọi đoạn con $[a;c], (a \le c < b)$ và $0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a;\mathrm{b})$

Khi đó:

+ Nếu tích phân $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ

+ Nếu tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ

(2) Cho các hàm $f(x), g(x)$ xác định, không âm trên $[\mathrm{a};\mathrm{b})$ khả tích trên mọi đoạn con $[a;c], (a < c < b)$ có điểm bất thường $x=b.$ Khi đó:

Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=k\ (0<k<+\infty)$ thì các tích phân $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả: Cho các hàm số dương $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a,c], a<c<b$ có cùng điểm bất thường $x=b.$

Khi đó:

+ Nếu $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ và tích phân $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ

+ Nếu $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ và tích phân $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Chú ý: Tích phân suy rộng

$$I=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} \quad (b>a) \text{ hội tụ } \Leftrightarrow 0<\alpha<1 \text{, phân kỳ } \Leftrightarrow \alpha \ge 1.$$

$$J = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\ (b > a) \text{ hội tụ } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1, \text{ phân kỳ } \Leftrightarrow \alpha \ge 1.$$

Bạn đọc tự chứng minh, xem như bài tập.

Ví dụ 7: Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ b) $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}}$

Giải:

a. Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ không bị chặn khi $x \to 1^-$.

Khi $x \to 1^-$ ta có:

$$1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2) \sim 3(1-x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}.(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

Vì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh, tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ cũng hội tụ.

b. Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}}$ không bị chặn khi $x \to 0^+$ và $x \to 1^-$ vì thế tích phân có tới 2 điểm bất thường.

Để cho đơn giản khi xét tính hội tụ ta tách thành 2 tích phân (mỗi tích phân chỉ có 1 điểm bất thường).

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} = J_1 + J_2$$

Xét tích phân J_1. Khi $x \to 0^+$ ta có :

$$x(1-x^3) \sim x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

vì tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-0)^{\frac{1}{2}}}$ $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh tích phân J_1 cũng hội tụ.

Xét tích phân J_2. Khi $x \to 1^-$ ta có :

$$x(1-x^3) = x(1-x)(1+x+x^2) \sim 3(1-x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}.(1-x)^{\frac{1}{2}}}, .$$

vì tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh, tích phân J_2 cũng hội tụ.

Do vậy tích phân $J = J_1 + J_2$ là tích phân hội tụ.

Ví dụ 8: Xét sự hội tụ của tích phân sau

$$I = \int_0^2 \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\sin x} - 1} dx, \quad J = \int_0^4 \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$$

Giải:

Tích phân I là tích phân suy rộng loại 2 có một điểm bất thường $x = 0$

Khi $x \to 0^+$ có $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\sin x} - 1} \sim \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

Mà tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$ hội tụ do $\alpha = \frac{2}{3} < 1$ nên I cũng hội tụ.

Đối với tích phân *J*, trên đoạn [0;4] : $e^{\sin x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pi$ là 2 nghiệm, cũng là 2 điểm bất thường của tích phân.

Tách $$J = \int_0^2 \frac{\sqrt[3]{x}dx}{e^{\sin x} - 1} + \int_2^{\pi} \frac{\sqrt[3]{x}dx}{e^{\sin x} - 1} + \int_{\pi}^{4} \frac{\sqrt[3]{x}dx}{e^{\sin x} - 1} = J_1 + J_2 + J_3.$$

Theo trên J_1 hội tụ. Khi $x \to \pi$ thì

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\sin x} - 1} \sim \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sin x} = \frac{-\sqrt[3]{\pi}}{\sin(x-\pi)} \sim \frac{-\sqrt[3]{\pi}}{x-\pi}$$

và $\int_{2}^{\pi} \frac{dx}{\pi - x}$, $\int_{\pi}^{4} \frac{dx}{x-\pi}$ phân kỳ

Do đó các tích phân $\int_{2}^{\pi} \frac{\sqrt[3]{x}dx}{e^{\sin x}-1}, \int_{\pi}^{4} \frac{\sqrt[3]{x}dx}{e^{\sin x}-1}$ đều phân kỳ.

Do vậy J phân kỳ

2.3.2.3. Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Định lý 5: Giả sử $f(x)$ xác định trong khoảng $[a;b)$, có điểm bất thường $x=b$ khả tích trên mọi đoạn con $[a;c]\,(c<b)$. Khi đó nếu tích phân $\int_{a}^{b} |f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$ cũng hội tụ.

Định nghĩa: Nếu tích phân $\int_{a}^{b} |f(x)|dx$ hội tụ thì ta nói tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối*, nếu tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$ hội tụ nhưng $\int_{a}^{b} |f(x)|dx$ phân kỳ thì ta nói tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$ *bán hội tụ*.

Ví dụ 9: Xét sự hội tụ của tích phân $I=\int_{0}^{1} \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}}$

Giải:

Ta thấy $\frac{|\cos 2x|}{\sqrt{1-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in [0;1)$. Mặt khác, tích phân $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ hội tụ, do vậy tích phân I hội tụ (tuyệt đối).

BÀI TẬP CỦNG CỐ

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

1) Parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$

2) Các Parabol $y^2 = x, y^2 = 2x$ và $y = \frac{1}{2}x$

3) Đường tròn $x^2 + y^2 = 4x$ và Parabol $y^2 = 2x$

4) Các đường tròn $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x$ và các đường thẳng $y = -x,\ y = \sqrt{3}x.$

5) Elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, -\frac{3}{4}x \le y \le 0.$

2. Tính các tích phân suy rộng sau:

1) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

3) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx$

3. Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}dx$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

3) $\int_0^{+\infty} e^{x^2}dx$

4) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$

5) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx$

6) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x + e^{2x}}dx$

7) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{1+x^2}dx$

8) $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^p dx$

11) $\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx$

12) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

Chương III

CHUỖI

3.1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

3.1.1. Định nghĩa

Tổng vô hạn $u_1 + u_2 + ... + \mathrm{u}_n + ...$ gọi là một chuỗi số và được kí hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Trong đó u_n gọi là số hạng thứ n (số hạng tổng quát) của chuỗi,

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi. Khi đó $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$

nếu giới hạn tồn tại, hữu hạn thì ta nói chuỗi số hội tụ, trái lại ta nói chuỗi số phân kỳ (tức là giới hạn bằng vô cùng hoặc không tồn tại giới hạn).

Ví dụ 3.1**:** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ b) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + .. + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} + ...$

Giải: a) Chuỗi trên là tổng của cấp số nhân có công bội q, có tổng riêng

$$S_n = q + q^2 + .. + q^n = \frac{q(1-q^n)}{1-q}$$

+ Nếu $|q| < 1, q^n \to 0 \ (n \to \infty) \Rightarrow S_n \to \frac{q}{1-q}$ chuỗi hội tụ.

+ Nếu $|q| > 1$ thì $q^n \to \infty \Rightarrow S_n \to \infty$ chuỗi phân kỳ.

+ Nếu $q = 1, S_n = n \to \infty$ chuỗi phân kỳ,

+ Nếu $q = -1, S_{2k} = -1+1-1+1-..-1+1 = 0, S_{2k+1} = -1+1-1+..-1 = -1$

S_n có thể bằng 0 hoặc -1 tùy theo tính chẵn lẻ của n , do đó S_n không có giới hạn vì thế chuỗi phân kỳ .

Tóm lại: chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ $\Leftrightarrow |q| < 1$.

b)

$$u_n = \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \Rightarrow S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + .. + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}) \to \frac{1}{2}\ (n \to \infty) \Rightarrow \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + .. + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} + ... = \frac{1}{2}$$

Chuỗi đã cho hội tụ.

3.1.2. Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Định lý 3.1: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì số hạng tổng quát phải dần tới 0 khi $n \to \infty$.

Ví dụ 3.2*:* Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+5}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{2n}$

Giải: a) Chuỗi có $u_n = \frac{n+1}{2n+5} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$ nên chuỗi phân kỳ

b) Chuỗi có số hạng tổng quát:

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{2n} = \left(\left(1 - \frac{2}{n+3}\right)^{-\frac{n+3}{2}}\right)^{\frac{-4n}{n+3}}$$

trong đó

$$u = -\frac{2}{n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{n+3}\right)^{-\frac{n+3}{2}} \to e \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-4} \neq 0$$

Nên chuỗi phân kỳ.

3.1.3. Tính chất của chuỗi

(1) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k u_n = k.S, \forall k \in \mathbb{R}$

(2) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = S_1 + S_2$

(3) Tổng hữu hạn các chuỗi hội tụ là một chuỗi hội tụ, tổng của một chuỗi phân kỳ với một số hữu hạn các chuỗi hội tụ là một chuỗi phân kỳ

(4) Nếu bớt đi một số hữu hạn số hạng của chuỗi thì tính chất hội tụ hay phân kỳ của chuỗi không thay đổi.

3.2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

3.2.1. Định nghĩa: Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gọi là chuỗi số dương nếu $u_n > 0$ với mọi n

Nhận xét. Chuỗi số dương có các tổng riêng

$$S_1 = u_1 < S_2 = u_1 + u_2 < S_3 = u_1 + u_2 + u_3 < \ldots < S_n < S_{n+1} < \ldots$$

lập thành một dãy số tăng (bị chặn dưới bởi 0) hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng bị chặn trên. Tức là chuỗi hội tụ $\Leftrightarrow S_n < M < +\infty, \forall n$ trong đó M là một số dương hữu hạn.

3.2.2 Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương

3.2.2.1. Tiêu chuẩn so sánh

Định lý 3.2: Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là 2 chuỗi số dương thỏa mãn điều kiện:

Tồn tại số tự nhiên n_0 và một hằng số $c > 0$ sao cho $u_n \le c.v_n, \forall n \ge n_0$. Khi đó

1) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

2) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

Định lý 3.3: Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là 2 chuỗi số dương thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$

+ Nếu $0 < k < +\infty$ thì cả 2 chuỗi cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ

+ Nếu $k = 0$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

+ Nếu $k = +\infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ

Ví dụ 3.3: Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}$

Giải: a) Ta có : $0 < \frac{1}{n.2^n} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \ge 1$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ có $q = \frac{1}{2} < 1$ nên hội tụ.

Từ đó suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

b) Ta có:

$$0 < \frac{\pi}{n^2} \le \pi, \forall n \Rightarrow \sin \frac{\pi}{n^2} > 0, \forall n > 1$$

nên chuỗi đã cho là chuỗi dương, đồng thời khi $n \to +\infty$ thì

$$u_n = \sin \frac{\pi}{n^2} \sim \frac{\pi}{n^2} = v_n$$

Mặt khác chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ có tổng riêng

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .. + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + .. + \frac{1}{(n-1).n} = 2 - \frac{1}{n} < 2, \forall n$$

bị chặn nên chuỗi hội tụ, từ đó suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ và chuỗi ban đầu cũng hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

3.2.2.2. Tiêu chuẩn Dalembe (D'Alembert)

Định lý 3.4: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử tồn tại $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = c$

+ Nếu $c < 1$ thì chuỗi hội tụ

+ Nếu $c > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 3.4: Xét sự hội tụ của các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Giải : Ta có : $u_n = \frac{n^2}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$

Do vậy chuỗi số dương hội tụ.

3.2.2.3. Tiêu chuẩn Côsi (Cauchy)

Định lý 3.5**:** Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = c$

+ Nếu $c < 1$ thì chuỗi hội tụ

+ Nếu $c > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 3.5: Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$

Giải: Ta có :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1$$

Do vậy chuỗi phân kỳ.

3.2.2.4.Tiêu chuẩn so sánh với tích phân

Định lý 3.6*:* Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử hàm $f(x)$ liên tục, ***đơn điệu giảm và dương*** trên nửa khoảng $[1;\infty)$ sao cho $f(n) = u_n, \forall n \ge 1.$ Khi đó tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chú ý: **Chuỗi** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ **gọi là chuỗi Riemann. Chuỗi này có cùng tính chất hội tụ với tích phân suy rộng** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ **, tích phân này hội tụ** $\Leftrightarrow \alpha > 1$**, phân kỳ** $\Leftrightarrow \alpha \le 1$**.**

Với $\alpha = 1$ chuỗi còn được gọi là *chuỗi điều hòa.*

Ví dụ 3.6: Xét tính hội tụ của các chuỗi sau

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - n + 1}$

Giải : a. Chuỗi đang xét là chuỗi dương có $u_n = \dfrac{1}{n\ln n} > 0, \forall n \geq 2.$

Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}, x \geq 2$ là hàm số liên tục, đơn điệu giảm và dương trên $[2;+\infty)$ và $f(n) = \dfrac{1}{n\ln n} = u_n, \forall n \geq 2$ do vậy chuỗi đã cho cùng tính hội tụ với tích phân $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

Mặt khác

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\right) = +\infty$$

là tích phân phân kỳ do vậy chuỗi $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ phân kỳ.

b. Chuỗi đã cho là chuỗi số dương có $u_n = \dfrac{n+1}{n^2 - n + 1} \sim \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} = v_n$ khi $n \to +\infty$ nên 2 chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng tính hội tụ, mặt khác chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ (chuỗi điều hòa) nên chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - n + 1}$ phân kỳ.

3.3. CHUỖI CÓ SỐ HẠNG VỚI DẤU BẤT KÌ

3.3.1 Định nghĩa

Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ trong đó u_n có thể dương hoặc âm tùy theo n thì chuỗi được gọi là có dấu bất kì.

Chuỗi dạng : $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ hoặc $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - ... = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$

trong đó $u_n > 0, \forall n$ **được gọi là chuỗi đan dấu**, 2 chuỗi trên trái dấu và cùng tính hội tụ nên ta chỉ cần xét chuỗi đan dấu thứ nhất với số hạng đầu tiên dương.

3.3.2. Sự hội tụ của chuỗi đan dấu

***Định lý 3.8* (*Leibniz*):** Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ nếu dãy $\{u_n\}$ giảm và $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ khi đó chuỗi hội tụ và có tổng bằng $S \le u_1$

Ví dụ 3.8: Xét sự hội tụ của các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2-n+1}$

Giải: Chuỗi đang xét đang xét đan dấu có $u_n = \dfrac{n+1}{n^2-n+1}$.

Xét hàm $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-x+1}, x \ge 1$ có $f'(x) = \dfrac{-x^2+2(1-x)}{(x^2-x+1)^2} < 0, \forall x \ge 1$ do vậy hàm số nghịch biến trên $[1;+\infty)$. Chứng tỏ $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, dần về 0 (dễ thấy), do đó chuỗi hội tụ theo định lý Lepnit.

3.5. CHUỖI HÀM SỐ

3.5.1. Các khái niệm

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$ được gọi là chuỗi hàm số.

$u_n(x)$ là một hàm số theo x.

3.6. CHUỖI LŨY THỪA

3.6.1. Định nghĩa : Là chuỗi có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

3.6.2. Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

Nhận xét : Chuỗi lũy thừa luôn hội tụ tại điểm $x = 0$ (vì tại $x = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0$ hữu hạn)

Định lý 3.10 (Định lý Abel): Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại điểm $x_0 \neq 0$ thì cũng hội tụ tuyệt đối tại mọi x thỏa mãn $|x| < |x_0|$.

Hệ quả. Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại điểm x^* nào đó thì phân kỳ với mọi x thỏa mãn

$$|x| > |x^*|.$$

Nhận xét: Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$. Khi đó chỉ có một trong 3 khả năng sau xảy ra:

(i) Chuỗi chỉ hội tụ tại điểm $x = 0$.

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x.

(iii)Tồn tại một số thực dương R sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x| < R$ và phân kỳ nếu $|x| > R$.

Số thực dương R được gọi là *bán kính hội tụ* của chuỗi lũy thừa.

$(-R; +R)$ được gọi là *khoảng hội tụ* của chuỗi lũy thừa

Tại các đầu mút $\pm R$, chuỗi lũy thừa có thể hội tụ hoặc phân kỳ

3.6.3. Các bước tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

B1: Tìm bán kính hội tụ R

B2: Chỉ ra khoảng hội tụ $(-R; +R)$

B3: Xét sự hội tụ của chuỗi lũy thừa tại các đầu mút $x = \pm R$

3.6.4. Quy tắc tìm bán kính hội tụ

Định lý 3.12: Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ thì bán kính hội tụ R của chuỗi sẽ được xác định bởi

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3.12: Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

Giải: Chuỗi lũy thừa có $a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$

Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $R = \frac{1}{\rho} = 1.$

Khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa là (-1;1).

+ Tại điểm $x = 1$ thay vào chuỗi lũy thừa ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, đây là chuỗi Riemann hội tụ (do số mũ $\alpha = 2 > 1$) do đó chuỗi lũy thừa hội tụ tại điểm $x = 1$.

+ Tại điểm $x = -1$ thay vào chuỗi lũy thừa ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, đây là chuỗi đan dấu dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ với $u_n = \frac{1}{n^2}$ giảm khi n tăng và $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, tức là dãy $(u_n)_n$ đơn điệu giảm dần về 0, do đó chuỗi đan dấu hội tụ. Vậy chuỗi lũy thừa hội tụ tại điểm $x = -1.$.

Từ đó có thể thấy rằng miền hội tụ của chuỗi là đoạn [-1;1].

Ví dụ 3.13:Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{(3n+1).2^n}$

ĐS: Miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2})$

BÀI TẬP CỦNG CỐ

1. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1).2^{2n-1}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{(n^2+1)^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

2. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n.2^n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n.(x-2)^{2n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n.3^n}$