TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG 4
BÀI TOÁN TỒN TẠI

Lecturer: PhD. Ngo Huu Phuc

Tel: 0438 326 077

Mob: 098 5696 580

Email: ngohuuphuc76@gmail.com

Nội dung chương 4

4.1. Giới thiệu bài toán.

4.2. Nguyên lý Dirichlet.

4.3. Hệ đại diện phân biệt.

4.4. Bài tập

4.1. Giới thiệu bài toán (1/6)

- Trong nội dung chương 3, đếm số lượng các phần tử của tập hợp, số các cấu hình tổ hợp thoả mãn những tính chất nào đó, với giả thiết sự tồn tại của cấu hình là hiển nhiên.
- Trong chương 4, xét sự tồn tại của các cấu hình tổ hợp, phương án với các tính chất cho trước.
- Các bài toán thuộc dạng này được gọi là ***bài toán tồn tại***.

4.1. Giới thiệu bài toán (2/6)

4.1.1. Các ví dụ mở đầu

1. Bài toán về 36 sĩ quan (Euler đề nghị)

- Có một lần người ta triệu tập từ 6 trung đoàn mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau: thiếu uý, trung uý, thượng uý, đại uý, thiếu tá, trung tá về tham gia duyệt binh ở sư đoàn bộ.
- Hỏi rằng có thể xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi một hàng ngang cũng như mỗi một hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn và của cả 6 cấp bậc?

4.1. Giới thiệu bài toán (3/6)

4.1.1. Các ví dụ mở đầu

2. Bài toán 4 mầu

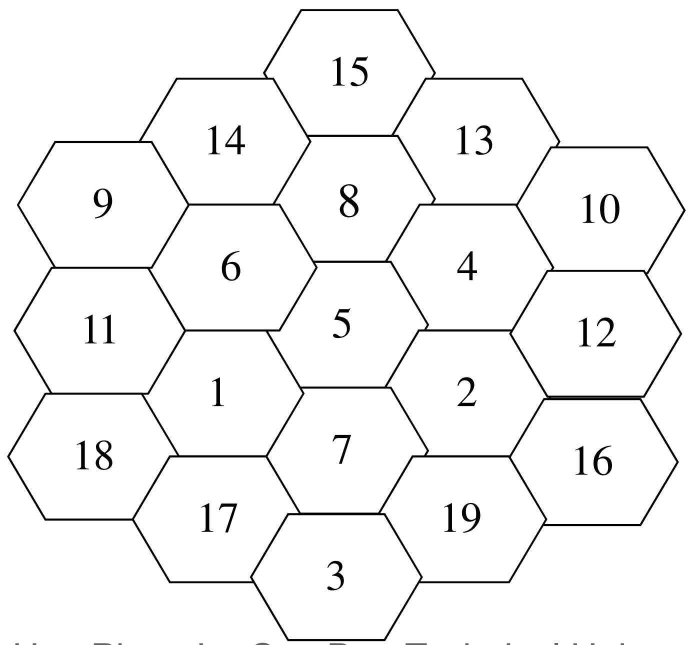
- Chứng minh rằng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có thể tô bằng 4 mầu, sao cho không có hai nước láng giềng nào lại bị tô bởi cùng một màu.
- Chú ý rằng ta xem như mỗi nước là một vùng liên thông và hai nước gọi là láng giềng nếu chúng chung một đường biên giới là một đường liên tục.

4.1. Giới thiệu bài toán (4/6)

4.1.1. Các ví dụ mở đầu

3. Hình lục giác thần bí

- Năm1910 Clifford Adams đề ra bài toán hình lục giác thần bí sau: Trên 19 ô lục giác hãy điền vào các số từ 1 đến 19 sao cho tổng theo cả 6 hướng của lục giác là bằng nhau (và đều bằng 38).



4.1. Giới thiệu bài toán (5/6)

4.1.2. Một số phương pháp giải quyết bài toán tồn tại đơn giản

1. Phương pháp chứng minh trực tiếp.

- Để giải quyết các bài toán tồn tại, phương pháp đơn giản nhất là chỉ ra một cấu hình, một phương án thoả mãn các điều kiện đã cho.

4.1. Giới thiệu bài toán (6/6)

4.1.2. Một số phương pháp giải quyết bài toán tồn tại đơn giản

2. Phương pháp phản chứng

- Một trong những cách giải bài toán tồn tại là dùng lập luận phản chứng giả thiết điều định chứng minh là sai từ đó dẫn đến mẫu thuẫn.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (1/12)

4.2.1. Mở đầu

- Nguyên lý Dirichlet được phát biểu như sau:
  - *Nếu xếp nhiều hơn n đối tượng vào n cái hộp thì tồn tại ít nhất một hộp chứa không ít hơn 2 đối tượng.*

4.2. Nguyên lý Dirichlet (2/12)

- ***Ví dụ 01:***
  - Một năm có nhiều nhất 366 ngày. Do vậy trong số 367 người bất kỳ bao giờ cũng có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh.
- ***Ví dụ 02:***
  - Thang điểm bài kiểm tra được cho từ 0 đến 10, tức là có 11 thang điểm khác nhau. Do vậy, trong số 12 sinh viên bất kỳ của lớp sẽ có ít nhất 2 người có kết quả bài kiểm tra giống nhau.
- ***Ví dụ 03:***
  - Cấp bậc quân hàm của sỹ quan có 8 cấp từ thiếu uý đến đại tá. Do vậy trong một đơn vị có 9 sỹ quan thì sẽ có ít nhất hai người cùng cấp bậc.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (3/12)

- ***Ví dụ 04:***
  - Có 20 thành phố, giữa các thành phố có thể có đường giao thông nối trực tiếp với nhau hoặc không. Chứng minh rằng có ít nhất 2 thành phố có số thành phố khác nối trực tiếp với chúng là như nhau.
- ***Lời giải:***
  - Ta gọi a_i là số thành phố có đường giao thông nối trực tiếp với thành phố thứ i và $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_{20}\}$ là tập các giá trị đó, khi đó mỗi giá trị $0 \leq a_i \leq 19$,
  - Không thể đồng thời có mặt giá trị 0 và 19 vì nếu trong tập Ω có giá trị 0 tức là có một thành phố cô lập thì sẽ không có thành phố nào được nối với cả 19 thành phố còn lại, ngược lại cũng vậy.
  - Do đó tập Ω chỉ có tối đa 19 giá trị khác nhau. Theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại ít nhất một cặp $i \neq j$ sao cho $a_i = a_j$.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (4/12)

- ***Ví dụ 05:***
  - Cho năm điểm $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$, $M_5(x_5,y_5)$ có các toạ độ nguyên trên mặt phẳng toạ độ Decac. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm mà có toạ độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó là các số nguyên.
- ***Lời giải:***
  - Đặt $\Omega = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$.
  - Xây dựng ánh xạ $f(M_i)=(x_i \bmod 2, y_i \bmod 2)$ tức là $f : \Omega \to B_2$.
  - Ta có $N(\Omega) =5$, $N(B_2)=4$, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại $M_i \neq M_j$ sao cho $f(M_i) = f(M_j)$ tức là các toạ độ của hai điểm theo trục x và y đều cùng chẵn hoặc cùng lẻ.
  - Vậy trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm này có tạo độ là các số nguyên.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (5/12)

- ***Ví dụ 06:***
  - Khi kiểm kê danh mục 80 chi tiết.
  - Mỗi chi tiết có thể được đánh giá là “tốt” hoặc “không tốt”.
  - Có 50 chi tiết được đánh giá là “tốt”.
  - Chứng minh rằng có ít nhất hai chi tiết được đánh giá là “không tốt” có số thứ tự cách nhau 3 hoặc 6 đơn vị.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (6/12)

- ***Lời giải ví dụ 06:***
  - $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_{30}\}$, $1 \le a_i \le 80$ là tập các số thứ tự khác nhau của các chi tiết được đánh giá là "không tốt",
  - Xây dựng tập $\Omega^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1+3, a_2+3, \ldots, a_{30}+3, a_1+6, a_2+6, \ldots, a_{30}+6\} = \Omega \cup \Omega' \cup \Omega''$ và ký hiệu là $\Omega^* = \{b_1, b_2, \ldots, b_{90}\}$.
  - Theo đầu bài, có $1 \le b_i \le 80$.
  - Tập Ω^* có 90 số nguyên nhận 80 giá trị khác nhau, theo nguyên lý Dirichlet tồi tại ít nhất một cặp hai số $b_i = b_j$,
  - Các số b_i, b_j không đồng thời nằm trong Ω, b_i, b_j cũng không đồng thời nằm trong Ω' và b_i, b_j cũng không đồng thời nằm trong Ω''.
  - Vậy chỉ có thể là $b_i = a_i \in \Omega$ và $b_j = a_k + 3 \in \Omega'$, tức là $a_i = a_k + 3$ hoặc $b_i = a_i \in \Omega$ và $b_j = a_q + 6 \in \Omega''$, tức là $a_i = a_k + 6$ hoặc $b_i = a_k + 3 \in \Omega'$ và $b_j = a_q + 6 \in \Omega''$, tức là $a_k = a_q + 3$.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (7/12)

4.2.2. Nguyên lý Dirichlet tổng quát

- Nếu xếp n đối tượng vào k hộp, thì tồn tại ít nhất một hộp chứa không ít hơn $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ đối tượng.
- Trong đó: ký hiệu $\lceil n \rceil$ cận trên của phép chia nguyên của x, là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn x.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (8/12)

4.2.2. Nguyên lý Dirichlet tổng quát

- Theo ngôn ngữ tập hợp và ánh xạ, nguyên lý Dirichlet tổng quát có thể phát biểu như sau :
  - Cho X và Y là tập hữu hạn f : X -> Y là ánh xạ từ X vào Y, gọi N(X) = n, N(Y) = m và k = [n/m], khi đó tồn tại không ít hơn k phần tử của tập X : $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_k$ sao cho $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_k)$.
  - Chứng minh. Ta dùng phương pháp phản chứng, không giảm tính tổng quát ta ký hiệu ta ký hiệu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ và $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, $X_i = \{x \in X \mid f(x)= y_i\}$. Giả sử $N(X_i) \leq k-1$ với $1 \leq i \leq m$, $n= N(X) = N(\cup X_i) \leq (k-1)m < km < n$, từ đó suy ra tồn tại $N(X_i) \geq k$.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (9/12)

- **Ví dụ 07**: Trong 150 người có ít nhất $\left\lceil\frac{150}{12}\right\rceil = 13$ người cùng tháng sinh.
- **Ví dụ 08**:
  - Cần phải có tối thiểu bao nhiêu sinh viên ghi tên vào lớp toán học Rời rạc để chắc chắn rằng sẽ có ít nhất 6 người đạt cùng một điểm thi, nếu thang điểm gồm 6 bậc 0,1,2,3,4,5?
  - **Lời giải**. Để có ít nhất 6 người cùng điểm thi số sinh viên tối thiểu là số nguyên nhỏ nhất sao cho $\left\lceil\frac{N}{6}\right\rceil = 6$. Số đó là N = 6.5 + 1 = 31.
- **Ví dụ 09**:
  - Chứng minh rằng có p số 1 và q số 0 xếp thành vòng tròn theo trật tự ngẫu nhiên, nếu p, q, k là các số nguyên dương thoả mãn điều kiện p ≥ kq thì tồn tại ít nhất một dãy không ít hơn k số 1 đi liền nhau.
  - **Lời giải**: Xếp q số 0 tạo thành q khe để đưa p các số 1 vào. Khi đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất một khe có không ít hơn $\left\lceil\frac{p}{q}\right\rceil \geq$ k số 1.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (10/12)

- **Ví dụ 10**:
  - Trong một tháng 30 ngày một công nhân làm ít nhất mỗi ngày một sản phẩm, nhưng cả tháng làm không quá 45 sản phẩm.
  - Chứng minh rằng có những này liên tiếp người này làm ra đúng 14 sản phẩm.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (11/12)

Lời giải ví dụ 10:

- Gọi a_j là số sản phẩm người đó đã làm kể từ ngày đầu tháng tới hết ngày j.
- Khi đó $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ là một dãy số nguyên dương phân biệt và tăng dần với $1 \leq a_j \leq 45$.
- Hơn thế nữa $a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ cũng là một dãy các số nguyên dương phân biệt và tăng dần với $15 \leq a_i + 14 \leq 59$.
- Sáu mươi số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 59.
- Theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai trong 60 số này bằng nhau. Vì các dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ và $a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ gồm các số phân biệt nên tồn tại các chỉ số i, j để sao cho $a_i = a_j + 14$ $(j < i)$.
- Điều này có nghĩa là từ ngày j + 1 tới hết ngày i người đó đã làm đúng 14 sản phẩm.

4.2. Nguyên lý Dirichlet (12/12)

Ví dụ 11:

- Chứng tỏ rằng trong n + 1 số nguyên dương không vượt quá 2n tồn tại ít nhất một số chia hết cho một số khác.

Lời giải:

- Ta viết mỗi số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ dưới dạng tích của một luỹ thừa cơ số 2 với một số lẻ.
- Nói cách khác ta có $a_j = 2^{k_j}.q_j$ trong đó k_j là một số nguyên không âm còn q_j là một số dương lẻ nhỏ hơn 2n.
- Vì chỉ có n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 2n nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai trong số lẻ $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ bằng nhau, tức là có hai chỉ số i và j sao cho $q_i = q_j = q$ (q là giá trị chung của chúng).
- Khi đó $a_i = 2^{k_i}.q$ và $a_j = 2^{k_j}.q$. Suy ra nếu $k_i \le k_j$ thì a_j chia hết cho a_i còn trong trường hợp ngược lại a_i chia hết cho a_j.

4.3. Hệ đại diện phân biệt (1/15)

4.3.1. Khái niệm về hệ đại diện phân biệt

Định nghĩa:

- Giả sử $S_1, S_2 ... S_m$ là một họ các tập con của tập hợp S (các S_i không nhất thiết khác nhau).
- Ta gọi một bộ có thứ tự $a_1, a_2, ..., a_m$ các phần của S là ***một hệ đại diện phân biệt*** của họ này nếu $a_i \in S_i$ và $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$.
- Hệ đại diện phân biệt được viết tắt là TRAN (transversal) và thành phần a_i của hệ được gọi là ***đại diện của tập con S_i*** (i=1,...,m).

4.3. Hệ đại diện phân biệt (2/15)

4.3.1. Khái niệm về hệ đại diện phân biệt (tiếp)

Ví dụ:

$S=\{1,2,3,4,5\}$,

$S_1 = \{2,5\}$,

$S_2 =\{2,5\}$,

$S_3 =\{1,2,3,4\}$,

$S_4=\{1,2,5\}$

Vậy, ta có một TRAN là (2,5,3,1).

4.3. Hệ đại diện phân biệt (3/15)

4.3.1. Khái niệm về hệ đại diện phân biệt (tiếp)

Chú ý:

- Nếu một họ các tập con tồn tại một TRAN thì mọi ***hợp*** của k tập bất kỳ trong hợp phải có ít nhất k phần tử (vì luôn tìm được k đại diện khác nhau của k tập đó).
- Hay nếu tìm được k tập nào đó của họ mà hợp của chúng có ít hơn k phần tử thì chắn chắn họ đang xét sẽ không có TRAN.
- Ví dụ:
  - $S=\{1,2,3,4,5\}$, $S_1 = \{2,5\}$,$S_2 =\{2,5\}$,$S_3 =\{1,2,3,4\}$, $S_4=\{2,5\}$
  - Họ này không tồn tại TRAN vì $S_1 \cup S_2 \cup S_4=\{2,5\}$ có ít hơn 3 phần tử.

4.3. Hệ đại diện phân biệt (4/15)

4.3.2. Định lý Hall

- Giả sử các tập con $S_1,S_2,...S_m$ thoả mãn điều kiện :

$$N\left(S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k}\right) \geq k \qquad (1)$$

với mọi $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i_1 < i_2 <...<i_k \leq m$ và mỗi tập con này chứa ít nhất **t** phần tử khi đó:

- Nếu $t \leq m$ thì họ đang xét có ít nhất **t!** TRAN.
- Nếu $t > m$ thì họ đang xét có ít nhất **t!/(t-m)!** TRAN.

4.3. Hệ đại diện phân biệt (5/15)

4.3.2. Định lý Hall (tiếp)

Định nghĩa.

- Điều kiện (1) ($N(S_{i1} \cup S_{i2} \cup ... \cup S_{ik}) \geq k$) được gọi là điều kiện Hall.
- Gọi một họ con của họ $S_1, S_2, ..., S_m$ gọi là ***họ con tới hạn*** nếu đối với nó bất đẳng thức (1) trở thành đẳng thức.

4.3. Hệ đại diện phân biệt (6/15)

4.3.2. Định lý Hall (tiếp)

Chứng minh:

- Quy nạp theo m.
- Với m=1 ta có **t = t!/(t-1)!** TRAN, định lý đúng.
- Giả sử định lý đúng cho mọi họ tập con của S_i có ít hơn m tập, cần chứng minh định lý dùng cho họ tập con gồm m tập chia làm hai trường hợp:
  - Trường hợp 1. ***Không có họ con tới hạn***.
  - Trường hợp 2. ***Có một họ con tới hạn***.

4.3. Hệ đại diện phân biệt (7/15)

4.3.2. Định lý Hall (tiếp)

Trường hợp 1: Không có họ con tới hạn:

- Chọn a_1 là một phần tử của S_1 loại nó ra khỏi S_2, S_3,...S_m (nếu có mặt) và gọi họ nhận được là S_2',S_3',...S_m'.
- Họ này thoả mãn điều kiện Hall và mỗi tập thuộc họ có ít nhất **t-1** phần tử.
- Theo giả thiết qui nạp họ này có ít nhất **(t-1)!** TRAN khi $t-1 \leq m-1$ hay $t \leq m$ và có ít nhất **(t-1)!/(t-m)!** khi $t-1>m-1$ hay $t > m$.
- Mặt khác mỗi TRAN của S_2',S_3',...,S_m',cùng với a_1, xác định một TRAN của S_2',S_3',...,S_m' (a_1 đại diện cho S_1).
- Điều này đúng cho mỗi cách chọn a_1 trong số ít nhất t cách chọn nó từ S_1.Từ đó nhận được đánh giá cần chứng minh.

4.3. Hệ đại diện phân biệt (8/15)

4.3.2. Định lý Hall (tiếp)

Trường hợp 2: Có họ con tới hạn:

- Không mất tính tổng quát có thể giả thiết họ con đó là S_1, S_2 ... S_k (k<m).
- Từ sự tồn tại của họ con tới hạn suy ra $t \leq k$ vì vậy theo giả thiết qui nạp, họ S_1, S_2 ... S_k có ít nhất t! TRAN.
- Gọi T = (a_1, a_2,...a_k) là một TRAN thỏa mãn.

4.3. Hệ đại diện phân biệt (9/15)

4.3.2. Định lý Hall (tiếp)

Trường hợp 2: Có họ con tới hạn:

- Bỏ các phần tử của T, nếu có mặt ra khỏi các tập $S_{k+1},\ldots,S_m$ và gọi các tập thu được là $S_{k+1}',\ldots,S_m'$.
- Khi đó họ $S_{k+1}',\ldots,S_m'$ sẽ thoả mãn điều kiện Hall.
- Như vậy họ $S_{k+1}',\ldots, S_m'$ có ít nhất một TRAN.
- Lấy ít nhất **t!** TRAN của họ S_1, S_2,..., S_k ghép với TRAN này ta được ít nhất **t!** TRAN của họ S_1, S_2 ... S_k .
- Định lý được chứng minh.

4.3. Hệ đại diện phân biệt (10/15)

Ví dụ: Bài toán người thi hành

- Có m người thi hành và n công việc giả sử với mỗi người thứ i, ta biết được tập S_i là tập hợp các công việc mà người đó có thể làm. Hỏi có thể phân công mỗi người làm một việc không?
- Lời giải của bài toán dẫn về việc xét sự tồn tại TRAN của họ (S_i) và việc xây dựng một TRAN chính là xây dựng một sự phân công như thế

4.3. Hệ đại diện phân biệt (11/15)

Ví dụ: Bài toán đám vưới vùng quê

- Tại một làng quê nọ có m chàng trai đến tuổi lấy vợ với mỗi chàng trai **i** ta biết tập $\mathbf{S_i}$ các cô gái mà chàng ta thích.
- Hỏi rằng có thể ghép mỗi cô cho mỗi chàng mà chàng nào cũng vừa ý hay không?

- Lời giải dẫn đến việc xét sự tồn tại TRAN của họ (S_i) Trong trường hợp tồn tại mỗi TRAN sẽ tương ứng với một cách ghép mong muốn.

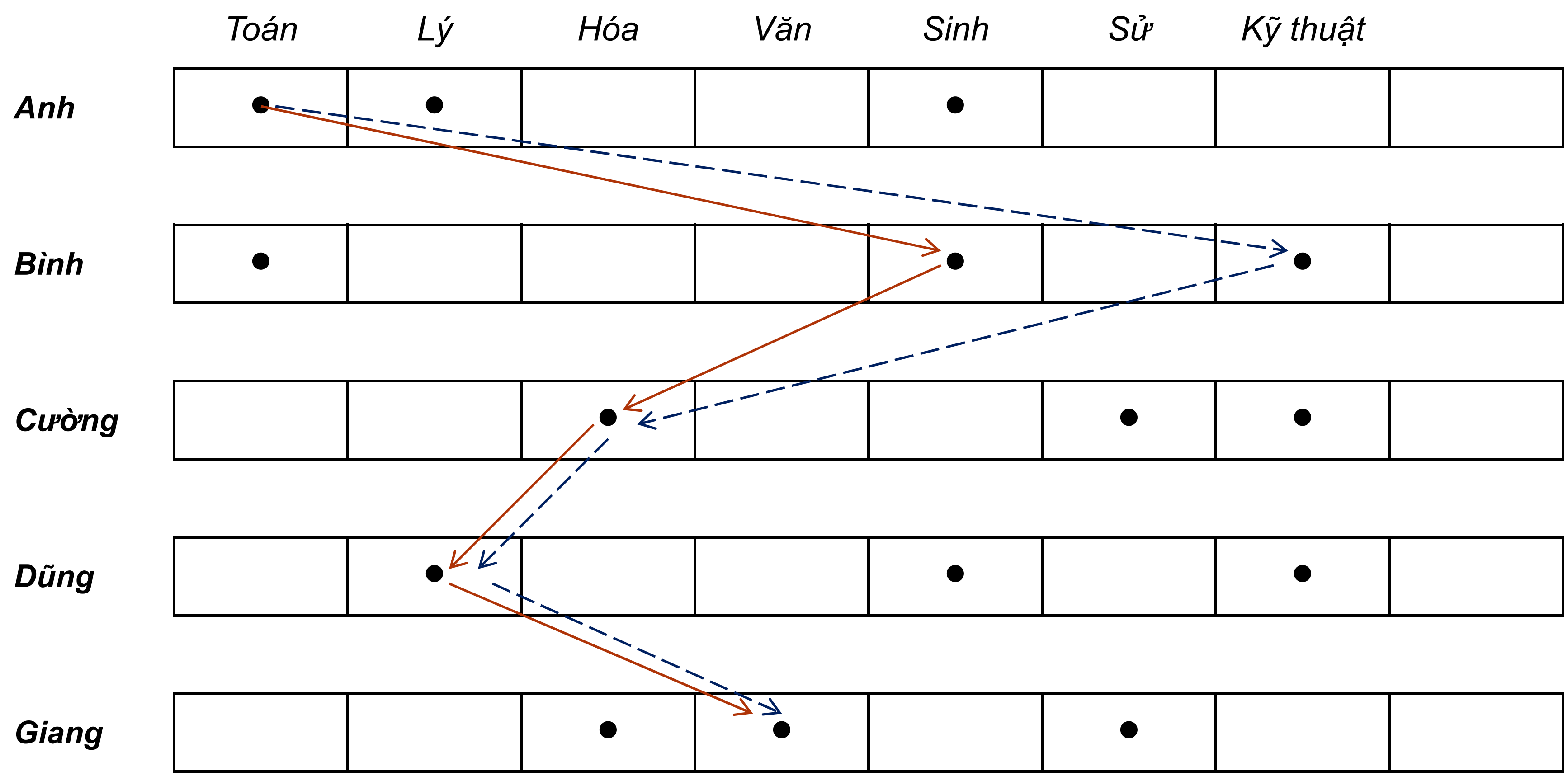
4.3. Hệ đại diện phân biệt (12/15)

Ví dụ 01:

- Có 5 giáo viên là Anh, Bình, Cường, Dũng, Giang mỗi giáo viên có thể giảng dạy một số môn học sau:
- Anh dạy được các môn {Toán, Lý, Sinh}=S_1,
- Bình dạy được {Toán, Sinh, Kỹ thuật}=S_2,
- Cường dạy được {Kỹ thuật, Sử, Hoá}=S_3,
- Dũng dạy được {Lý, Sinh, Kỹ thuật}=S_4,
- Giang dạy được {Sử, Hoá,Văn}=S_5 .
- Hỏi nếu mỗi giáo viên chỉ dạy một môn theo khả năng của mình thì có bao nhiêu phương án phân công giảng dạy?

4.3. Hệ đại diện phân biệt (13/15)

Lời giải ví dụ 01: Liệt kê các trường hợp của bài toán



4.3. Hệ đại diện phân biệt (14/15)

Ví dụ 02:

- Xét tập {1,2,...,n}, đếm số TRAN của họ các tập con

  $S_i, = A \setminus \{i\}, 1 \leq i \leq n.$

- ***Lời giải:***
  - Mỗi TRAN là một hoán vị $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ của {1,2,...,n} sao cho $a_i \neq i$ với $\forall$ i
  - Do vậy có thể đồng nhất mỗi TRAN với một mất thứ tự trên tập đang xét.
  - Từ đó nhận được số TRAN cần đếm là D_n, (bài toán bỏ thư)

4.3. Hệ đại diện phân biệt (15/15)

Ví dụ 03:

- Đếm số TRAN của họ các tập con của tập S = {1,2,...,n}:

  S_1={1,2}, S_2={1,2,3}, S_3={2,3,4}, ...,S_{n-1} ={n-2, n-1,n}, S_n={n-1,n}.

- ***Lời giải:***
  - Để bài toán xác định cả với n=1 ta xem trong trường hợp này S_1={1}.
  - Gọi Fn là số TRAN cần đếm (ứng với n >1). Chia các TRAN này thành 2 loại :
  - {1} là đại diện cho S1 khi đó các thành phần còn lại sẽ là một hệ đại diện của họ {2,3},{2,3,4},...,{n-1,n} do vậy loại này có Fn-1 TRAN.
  - {2} là đại diện cho S1 khi đó bắt buộc {1} phải là đại diện cho S2 và các thành phần còn lại sẽ là một hệ đại diện của họ {3,4},{4,5},...,{n-1,n}do vậy loại này có Fn-2 TRAN.
  - Từ đó nhận được hệ thức Fn=Fn-1+Fn-2. Các giá trị F1=1, F2=2 được tính trực tiếp đây cũng là hệ thức truy hồi xác định các số Fibonaci.

4.4. Bài tập (1/2)

Bài 1: Chứng minh rằng, nếu lấy 6 số khác nhau từ tập S = {1,2,..,9} chắc chắn tồn tại 2 số có tổng bằng 10.

Gợi ý: chia thành nhóm có tổng 10, dùng nguyên lý Dirichlet.

Bài 2: Có 16 cầu thủ bóng rổ, số áo của mỗi người được đánh từ 1 đến 16 đứng thành vòng tròn theo thứ tự bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 3 cầu thủ đứng liền nhau có tổng các số áo ít nhất là 26.

Gợi ý: dùng phương pháp phản chứng dạng tổng của $x_1, x_2, x_3 \ldots$

4.4. Bài tập (2/2)

Bài 3: Cho (X_i, Y_i, Z_i) $i=1,\ldots,9$ là toạ độ nguyên của *9* điểm trong không gian ba chiều. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đoạn thẳng nối *2* điểm trong số đó có trung điểm toạ độ nguyên.

Bài 4: Chỉ ra rằng trong dãy m số nguyên dương bất kỳ tồn tại ít nhất một dãy các số hạng liên tiếp có tổng chia hết cho m.