Ôn tập

Một số VCB tương đương

$$\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x$$

$$\sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x,\ x \to 0$$

Ôn tập

Một số VCB tương đương

$$Khi\quad x \to 0 : \sin x \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\ln(1 + x) \sim x$$

B1. Tìm giới hạn

$$I_1 = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2cos2x}{3x^2} (\text{Dang} \frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\sin 2x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{8cos2x}{6} = \frac{4}{3}$$

$$I_2 = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos5x}{\left(e^x - 1\right)\sin x} \quad (\frac{0}{0})$$

$$I_2 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\left(e^x-1\right)\sin x} \quad (\frac{0}{0})$$

$$\sin x \sim x;\ e^x - 1 \sim x\left(x \to 0\right)$$

$$\Rightarrow \left(e^x-1\right)\sin x \sim x^2 \qquad (x \to 0)$$

$$I_2 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{25\cos 5x}{2} = \frac{25}{2}$$

$$I3 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^3-2x^2+1)}{e^{x^2}-1} \quad Dang\frac{0}{0}$$

$$I3 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^3 - 2x^2 + 1)}{e^{x^2} - 1} \quad Dang\frac{0}{0}$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0)$$

$$\ln\left(x^3 - 2x^2 + 1\right) \sim x^3 - 2x^2 \ (x \to 0)$$

$$e^x - 1 \sim x\left(x \to 0\right)$$

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2\left(x \to 0\right)$$

$$I3 = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0}\left(x - 2\right) = -2$$

$$I_4 = \lim_{x \to 0} (2 + x - e^{2x})^{\frac{1}{x}} \qquad = \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{\ln(2+x-e^{2x})^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to 0} e^{\frac{\ln(2+x-e^{2x})}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(2+x-e^{2x})}{x}} = e^{J};$$

$$J = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(2 + x - e^{2x})}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - 2e^{2x}}{2 + x - e^{2x}}}{1} = -1 \Rightarrow I = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$I4=\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} \quad (0.\infty)$$

$$I4=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$I4=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{(\cot\frac{\pi x}{2})'}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{-\pi/2}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}=2/\pi$$

$$I5=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 4x-e^{2x^2}}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\ln(1+x^2)\sim \mathrm{x}^2\quad (x\to 0)$$

$$I5=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos 4x-e^{2x^2}}$$

Áp dụng QT Lôpitan

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-4\sin 4x-4xe^{2x^2}}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{-4\sin 4x - 4xe^{2x^2}} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{-16\cos 4x - 4(e^{2x^2} + x.4xe^{2x^2})}$$

$$= \frac{-1}{10}$$

Bài 2.Tìm a để hs liên tục tại x=1

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{5x^{100}-10x^{50}+5}{5x^{6}-6x^{5}+1} & khi\, x\neq 1\\ a & khi\, x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{500x^{99}-500x^{49}}{30x^{5}-30x^{4}}$$

$$=\frac{50}{3}\lim_{x\to 1}\frac{99x^{98}-49x^{48}}{5x^{4}-4x^{3}}=\frac{2500}{3}$$

$$\mathrm{f(1)=a}$$

$$KL: a=\frac{2500}{3}$$

Tích phân suy rộng loại 1

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \,(a > 0) \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \alpha > 1,$$

$$\text{phân kỳ} \Leftrightarrow \alpha \le 1$$

Bài 3: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2+1}{(3x^3+2)^2}dx$$

$$I_1 = \int_0^{1} \frac{2x^2+1}{(3x^3+2)^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{(3x^3+2)^2}dx$$

$$= J_1 + J_2$$

J_1 là tích phân xác định nên hữu hạn

Xét J2

$$J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{(3x^3+2)^2}dx$$

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{(3x^3+2)^2}\sim g(x)=\frac{2x^2}{9x^6}=\frac{2}{9x^4}\left(x\to+\infty\right)$$

$$Do\int_1^{+\infty}\frac{2}{9x^4}dx\ \ (\alpha=4>1)\,HT$$

$$\Rightarrow J_2\ HT$$

$$\Rightarrow I_1\ HT$$

$$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{2x^2+1}{(3x^3+2)\left(5x+1\right)}dx$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2+1}{(3x^3+2)(5x+1)}dx$$

$$I_2 = \int_0^{1} \frac{2x^2+1}{(3x^3+2)(5x+1)}dx + \int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{(3x^3+2)(5x+1)}dx$$

$$= J_1 + J_2$$

J_1 là tích phân xác định nên hữu hạn

Xét J2

$$J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{(3x^3+2)(5x+1)}dx$$

$$f\left(x\right)=\frac{2x^2+1}{(3x^3+2)\left(5x+1\right)}\sim g\left(x\right)=\frac{2x^2}{15x^4}=\frac{2}{15x^2}\left(x\to+\infty\right)$$

$$Do\int_{1}^{+\infty}\frac{2}{15x^2}dx\ \ (\alpha=2>1)\,HT$$

$$\Rightarrow J_2\,HT$$

$$\Rightarrow I_2\ HT$$

Tích phân suy rộng loại

+ x=a là điểm bt

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (b > a)$$

+ x=b là điểm bt

$$J = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (b > a)$$

+ x=0 là điểm bt

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$$

hội tụ $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$, phân kỳ $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

Khảo sát sự hội tụ của tp suy rộng loại 2

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$$ hội tụ $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$, phân kỳ $\Leftrightarrow \alpha \ge 1$.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sin 2x}dx$$

x=0 là điểm bất thường

$$\text{Khi } x \to 0^+ : \ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right) \sim \sqrt[3]{x^2}$$

$$\sin 2x \sim 2x$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} \left(x \to 0^+\right)$$

Mà $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}}dx$ HT

$$\Rightarrow I_1 \text{ HT}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{e^{\sin x^2} - 1}{3x^4} dx$$

x=0 là điểm bất thường

$$x \to 0^+ : e^{\sin x^2} - 1 \sim \sin x^2 \sim x^2$$

$$f(x) \sim \frac{x^2}{3x^4} = \frac{1}{3x^2}$$

Mà $\int_0^1 \frac{1}{3x^2} dx \text{ PK}$

$$\Rightarrow I_3 \text{ PK}$$

$$J = \int_0^1 \frac{\ln\left(1+2\sqrt{x}\right)}{e^{2\sin x - 1}}\,dx$$ x=0 là điểm bất thường

$$x \to 0^+ : e^{2\sin x} - 1 \sim 2\sin x \sim 2x$$

$$\ln\left(1+2\sqrt{x}\right) \sim 2\sqrt{x}$$

$$f(x) \sim \frac{2\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

Mà $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ HT

$$\Rightarrow J \text{ HT}$$

$$I_3 = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt[3]{x-1}} - 1}{x-1} dx$$

x=1 là điểm bất thường

$$\text{Khi } x \to 1^+ : e^{\sqrt[3]{x-1}} - 1 \sim \sqrt[3]{x-1}$$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$\text{Ma } \int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx \ \ \text{HT} \Rightarrow I_2 \ \text{HT}$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{e^{\sin x^2} - 1}{3x^4} dx$$

$$I_4 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx$$ x = 4 là điểm bất thường

$$\text{Khi } x \to 4^- : \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} \sim \frac{1}{2(4-x)^{1/2}}$$

$$\text{Ta co'} \int_1^4 \frac{1}{2(x-4)^{1/2}}dx \quad \text{HT} \Rightarrow I_4 \text{ HT}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\,(\alpha\in\mathbb{R})$$ goi là chuỗi Riemann

hội tụ $\Leftrightarrow \alpha > 1$, phân kỳ $\Leftrightarrow \alpha \le 1$

Bài 4. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(3n^2+2)}{(5n^2+1)(n^2+2)^2} \quad (1)$$

(1) là chuỗi số dương

$$u_n=\frac{(2n+1)(3n^2+2)}{(5n^2+1)(n^2+2)^2}\sim\frac{6n^3}{5n^6}=\frac{6}{5n^3}(n\to+\infty)$$

$$\text{Do }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{5n^3}\text{ HT nen chuoi (1) HT}$$

Tiêu chuẩn Dalembe

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$

Nếu $D < 1$ thì chuỗi hội tụ

Nếu $D > 1$ thì chuỗi phân kỳ

$$b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1).5^{2n-1}} \qquad u_n=\frac{1}{(2n+1).5^{2n-1}}>0\,\forall n\geq 1$$

$$u_{n+1}=\frac{1}{(2n+3).5^{2n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1).5^{2n-1}}{(2n+3).5^{2n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1).5^{2n-1}}{(2n+3).5^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n+3).5^2}=\frac{1}{25}<1$$

Suy ra chuỗi đã cho HT

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Tiêu chuẩn Côsi

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = c$

Nếu $c < 1$ thì chuỗi hội tụ

Nếu $c > 1$ thì chuỗi phân kỳ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.\frac{1}{2^n}$$

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.\frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{u_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{2}>1$$

vậy chuỗi phân kỳ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+3}{3n^2+4} \qquad u_n = \frac{5n^2+3}{3n^2+4}$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{5}{3} \neq 0$$

Suy ra chuỗi đã cho PK

2. Sự hội tụ của chuỗi đan dấu

Định lý (Leibniz) Lép nít

Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

nếu dãy $\{u_n\}$ giảm và $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

khi đó chuỗi hội tụ và có tổng bằng $S \le u_1$

$$VD: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3n^2+n+1}}$$ là chuỗi đan dấu

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{3n^2+n+1}}$$ +) Dãy số $\{u_n\}$ là giảm vì

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{3n^2+n+1}} > u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3(n+1)^2+(n+1)+1}}$$

$$+ \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2+n+1}} = 0$$

Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^3}$$

Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \text{ hoặc } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \end{cases}$$

khoảng hội tụ là $(-R;R)$

Bài 5.Tìm khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+3)^n}{n3^n} \quad (1)$$

Đặt $X=\dfrac{x+3}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}X^n}{n} \quad (2)$$

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad a_{n+1}=\frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{(n+1)(-1)^{n-1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1$$

BKHT: $R=\dfrac{1}{\rho}=1$ Khoảng hội tụ của chuỗi (2) là (-1;1)

$$-1<\frac{x+3}{3}<1 \Leftrightarrow -6<x<0$$

Khoảng hội tụ của chuỗi (1) là (-6; 0).

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n \quad (1)$$ Đặt $$X=\frac{x-1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{2n+1}X^n \quad (2) \qquad a_n=\frac{3n+2}{2n+1} \qquad a_{n+1}=\frac{3n+5}{2(n+1)+1}=\frac{3n+5}{2n+3}$$

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1 \qquad \Rightarrow R=\frac{1}{\rho}=1$$

Khoảng hội tụ của chuỗi (2) là (-1;1)

$$-1<X<1$$

$$\Leftrightarrow -1<\frac{x-1}{3}<1 \Leftrightarrow -2<x<4$$

Khoảng hội tụ của chuỗi (1) là (-2; 4).

VD: $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{3n+1}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n x^n$$

$$a_n=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{n}{3n+1}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1/3, R=\frac{1}{\rho}=3$$

Bán kính hội tụ R=3

Khoảng hội tụ là (-3;3)

3) $2(x-1)^3 + \frac{4(x-1)^6}{3} + \frac{8(x-1)^9}{5} + \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^{3n}}{2n-1}$$

$$X = (x-1)^3$$

$$a_n = \frac{2^n}{2n-1}$$

4) $$\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{3}{4}(x+1)^4+\frac{5}{8}(x+1)^6+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(x+1)^{2n}}{2^n}$$

$$X=(x+1)^2\left(X\geq 0\right)$$

$$5)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{6n+1}\right)^{n}x^{n}$$