

Arquitectura de Computadoras

(Cód. 5561)
1° Cuatrimestre 2018

Dra. Dana K. Urribarri
DCIC - UNS



Minimización

Criterios de costo

- La complejidad del circuito está directamente relacionada con la expresión que implementa.
- La tabla de verdad (*en ppio*) es única
- Diferentes expresiones algebraica son equivalentes.

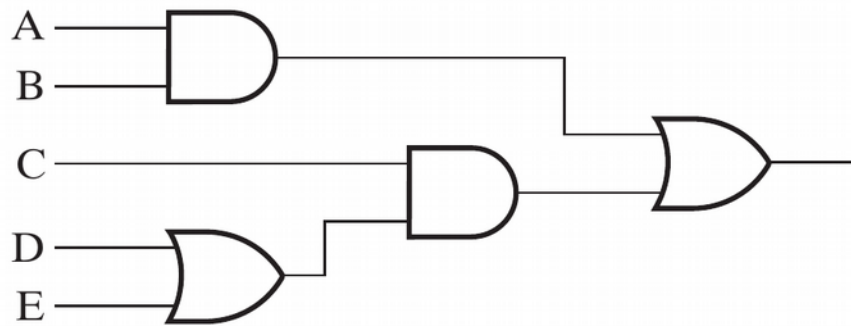
Criterios de evaluación del costo de una implementación

- Literales
- Entradas

Criterios de costo

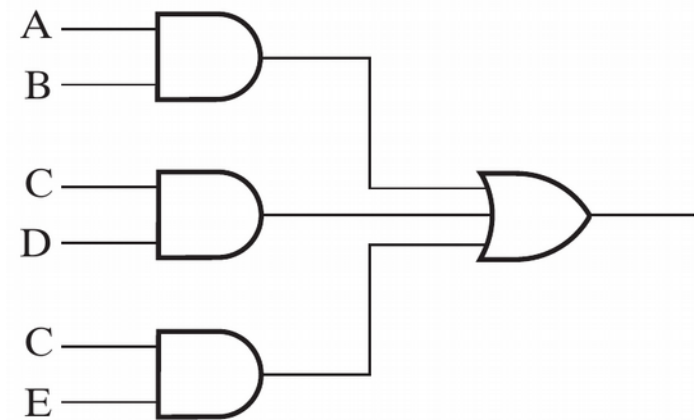
Literales

- Número de literales que aparecen en la expresión y tienen una correspondencia exacta en el diagrama lógico.



(a) $AB + C(D + E)$

5 literales



(b) $AB + CD + CE$

6 literales

Criterios de costo

- El costo en literales es muy simple de evaluar.
- No representa bien la complejidad del circuito en todos los casos.

$$G = ABCD + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} \text{ and } G = (\overline{A} + B)(\overline{B} + C)(\overline{C} + D)(\overline{D} + A)$$

8 literales
2 términos

8 literales
4 términos

Criterios de costo

Entradas

- Número de entradas de las compuertas de la implementación que se corresponda exactamente con la expresión lógica.
- A partir del diagrama lógico: contar el total de entradas a las compuertas
- A partir de la función:
 - Todas las apariciones de literales
 - + El número de términos con 2 o más literales
 - + Número de literales distintos complementados

Criterios de costo

$$G = ABCD + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} \text{ and } G = (\overline{A} + B)(\overline{B} + C)(\overline{C} + D)(\overline{D} + A)$$

8 literales
2 términos
4 literales complementados

$$8+2+4 = 14$$

Costo en literales: 8
Costo en entradas: 14

8 literales
4 términos
4 literales complementados

$$8+4+4 = 16$$

Costo en literales: 8
Costo en entradas: 16



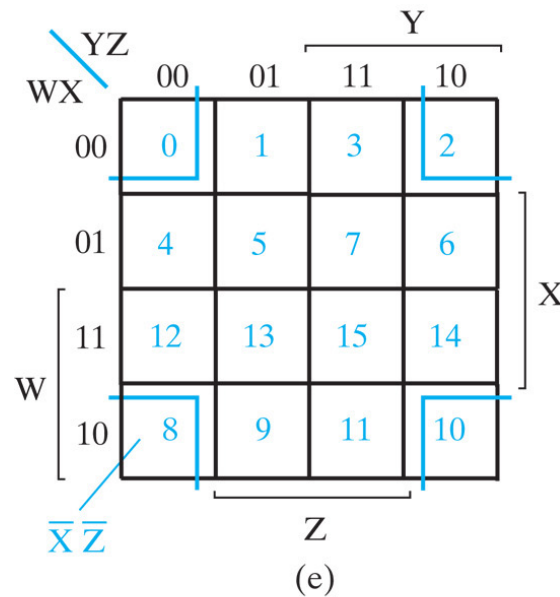
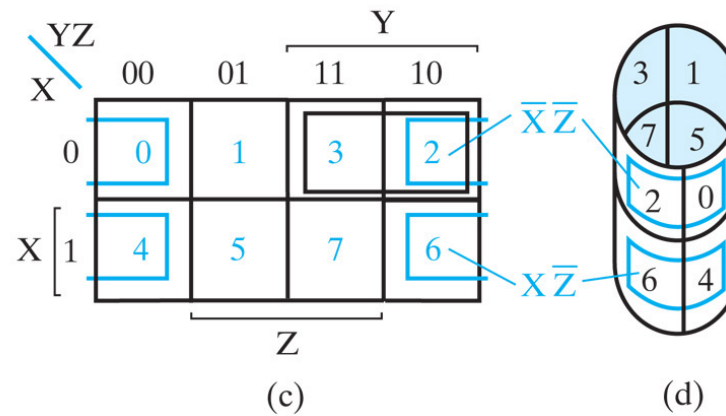
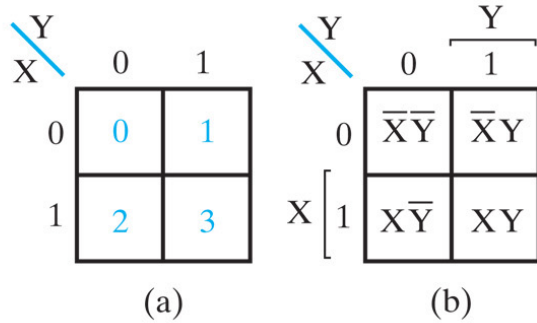
Métodos

- La *minimización a nivel de compuertas* es la tarea de encontrar **una** implementación óptima de la función booleana que describe el circuito digital.
- Método Gráfico
 - Diagrama de Karnaugh
 - Diagrama de Veitch
- Método Tabular

Método gráfico

- Consideramos mapas de 2, 3 y 4 variables
- El número de cuadrados en el mapa es igual a la cantidad de posibles minitérminos con esa cantidad de variables.
- Casilleros *adyacentes* difieren en exactamente una variable. (*código Gray*)
- Dos términos productos son *adyacentes* si difieren en exactamente un literal, que aparece complementado en uno y sin complementar en el otro.

Método gráfico



Copyright ©2016 Pearson Education, All Rights Reserved

Método gráfico

Karnaugh

A \ BC				
	00	01	11	10
0				
1				

Veitch

		B		B'	
A					
A'					
		C			

Método gráfico

Adyacencia ¿para qué sirve?

$$A'B + AB = (A' + A) B = B$$

$$A'BC + A'BC' = A'B (C + C') = A'B$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{A'BC + A'B'C}_{\text{red}} + \underbrace{A'BC' + A'B'C'}_{\text{blue}} = \\
 & A'C(B+B') + A'C'(B+B') = \\
 & A'C + A'C' = \\
 & A'
 \end{aligned}$$

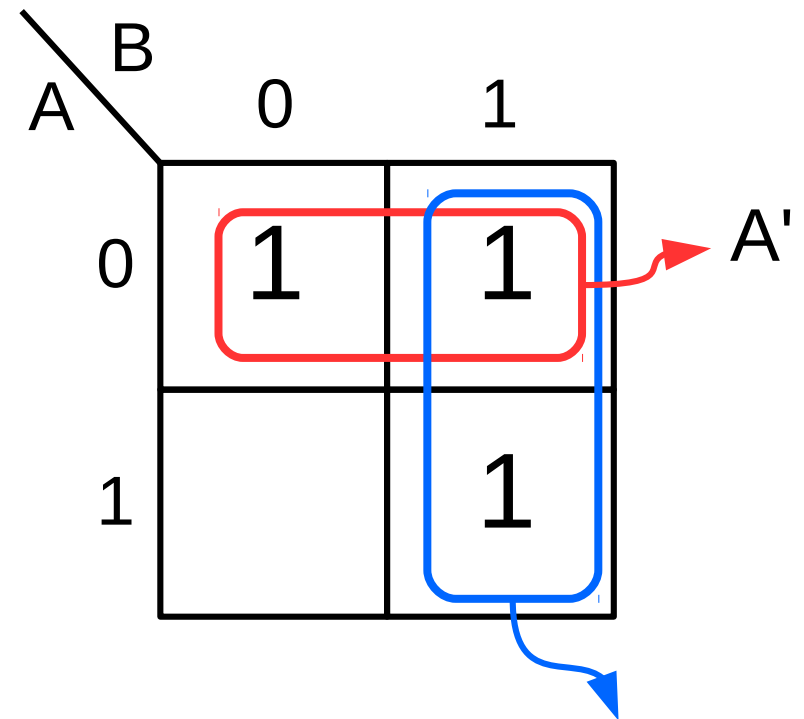
Ejemplo 1

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

	B	0	1
A	0	1	1
1			1

Ejemplo 1

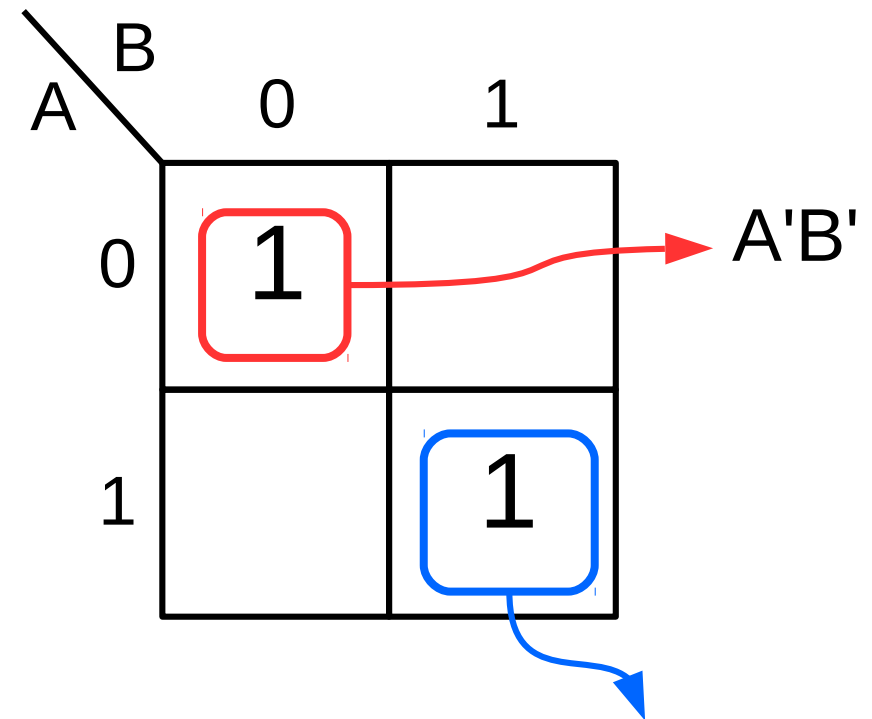
A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



$$F(A,B) = \Sigma m(0,1,3) = A' + B$$

Ejemplo 2

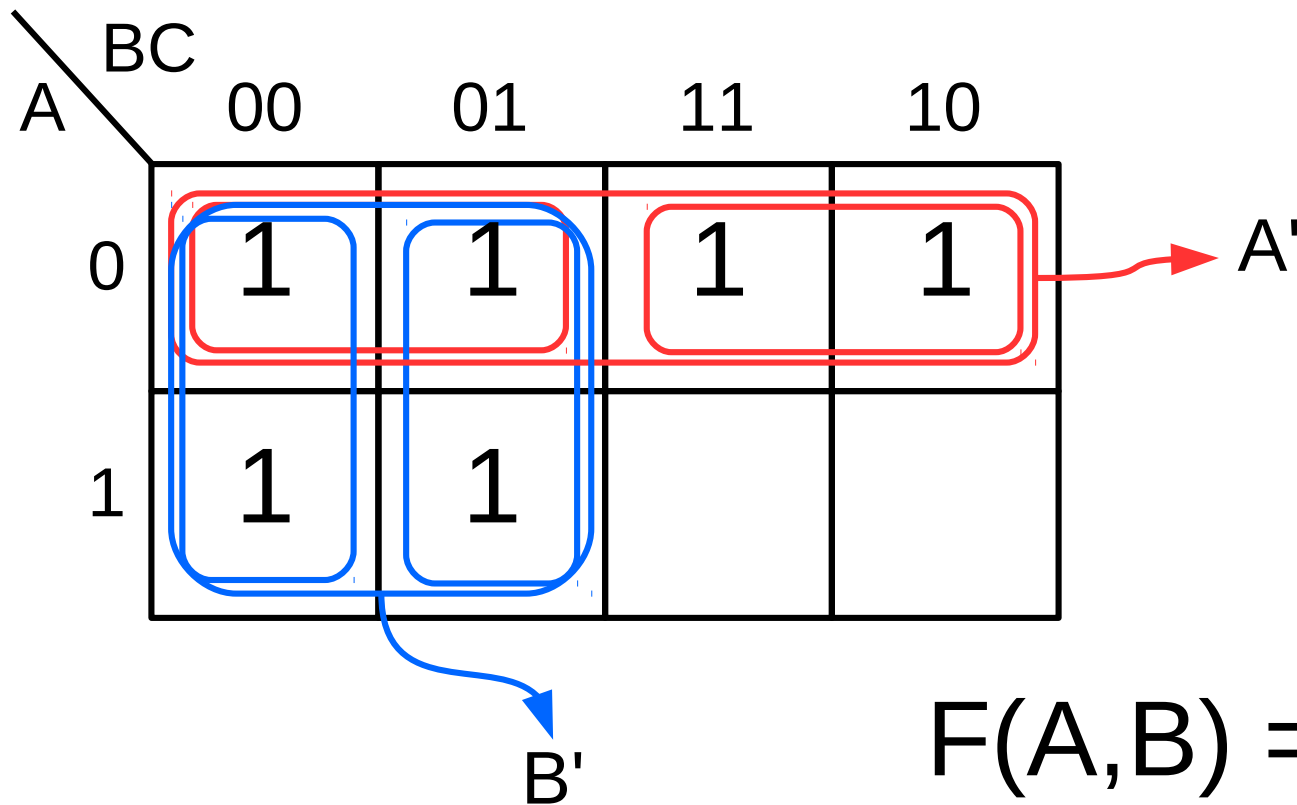
A	B	F
0	0	1
0	1	1 0
1	0	0
1	1	1



$$F(A,B) = \Sigma m(0,3) = A'B' + AB$$

Ejemplo 3

- Simplificar la función $F(A,B,C) = \Sigma m(0,1,2,3,4,5)$



$$F(A,B) = A' + B'$$

Implicantes Primos Esenciales

- Implicante de una función
Término producto para el cuál la función tiene valor 1 para todos los minitérminos del término producto.
- Implicante primo
Implicante tal que para todo literal que se elimina deja de ser un implicante de la función.
- Implicante primo esencial
Implicante primo para el cual existe un minitérmino de la función solamente incluido en él.

Implicantes Primos Esenciales

¡No implicantes!

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1	1	1
11	1			1
10				

Implicantes Primos Esenciales

Implicantes

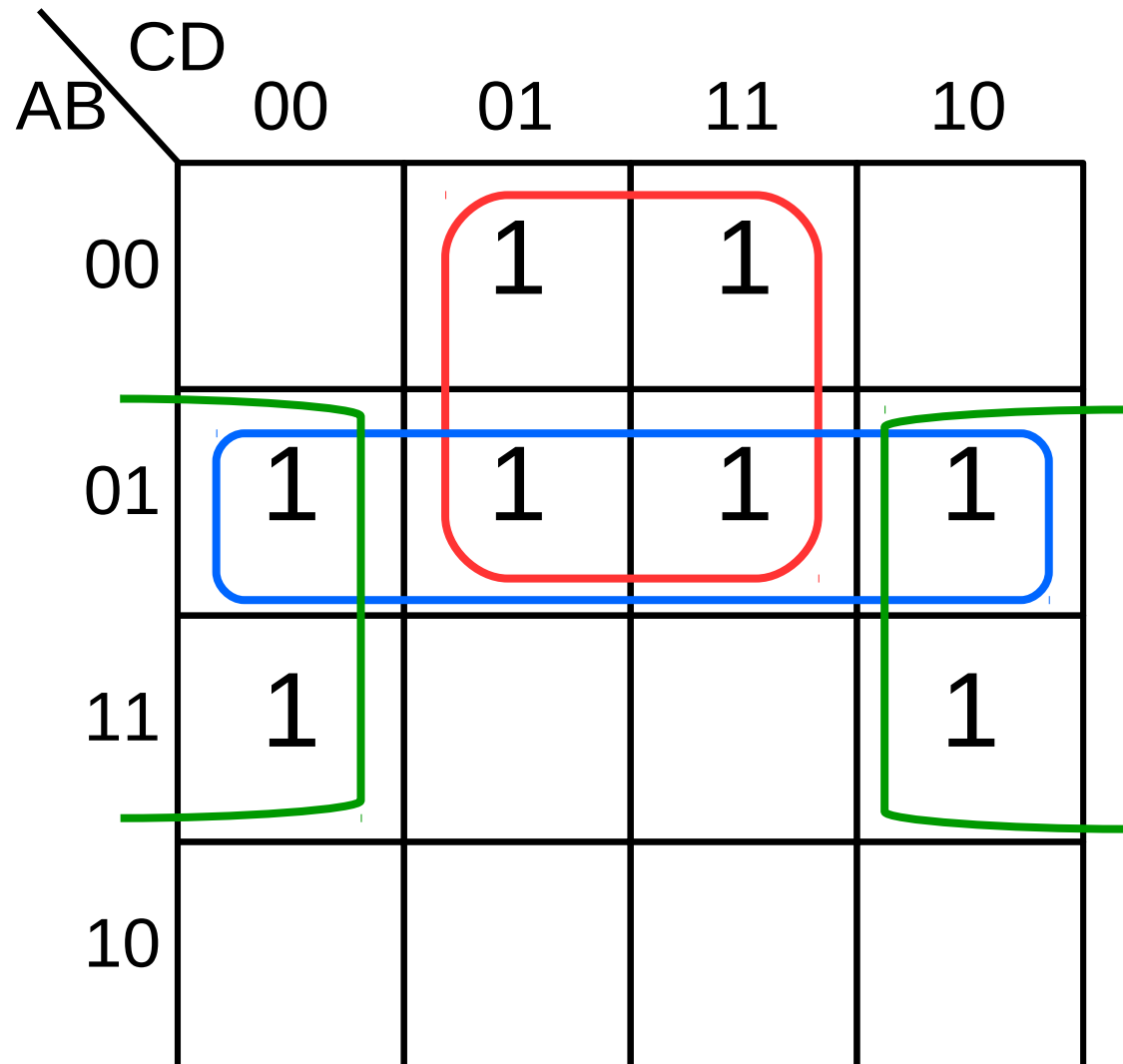
AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1	1	1
11	1			1
10				

The Karnaugh map shows the following prime implicants:

- Red circles: (0,1), (1,1), (1,0), and (1,1).
- Blue circles: (0,1), (1,1), (1,0), and (1,1).
- Green lines: (0,1), (1,1), (1,0), and (1,1).

Implicantes Primos Esenciales

Implicantes
primos

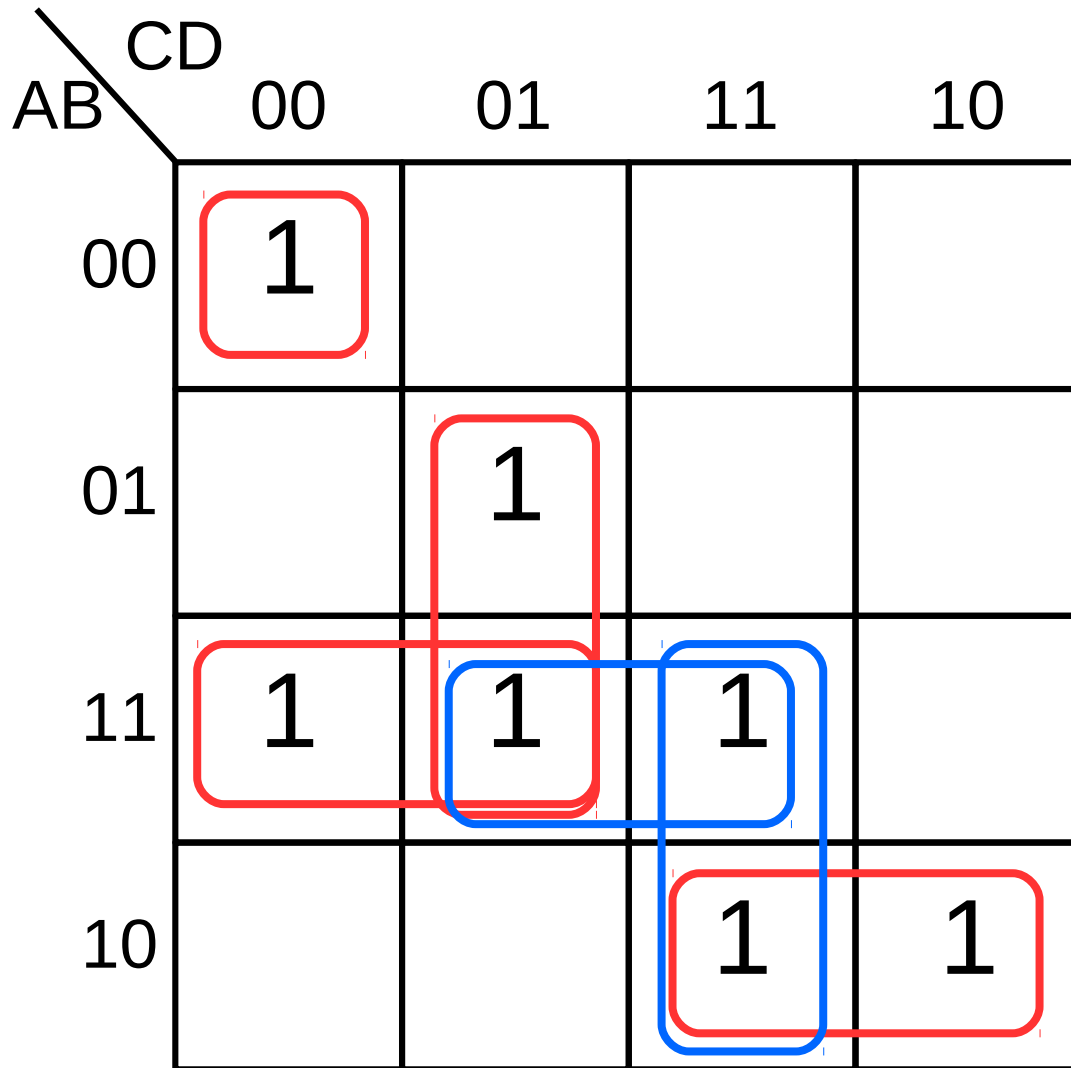


Implicantes Primos Esenciales

Implicantes
primos
esenciales

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1	1	1
11	1			1
10				

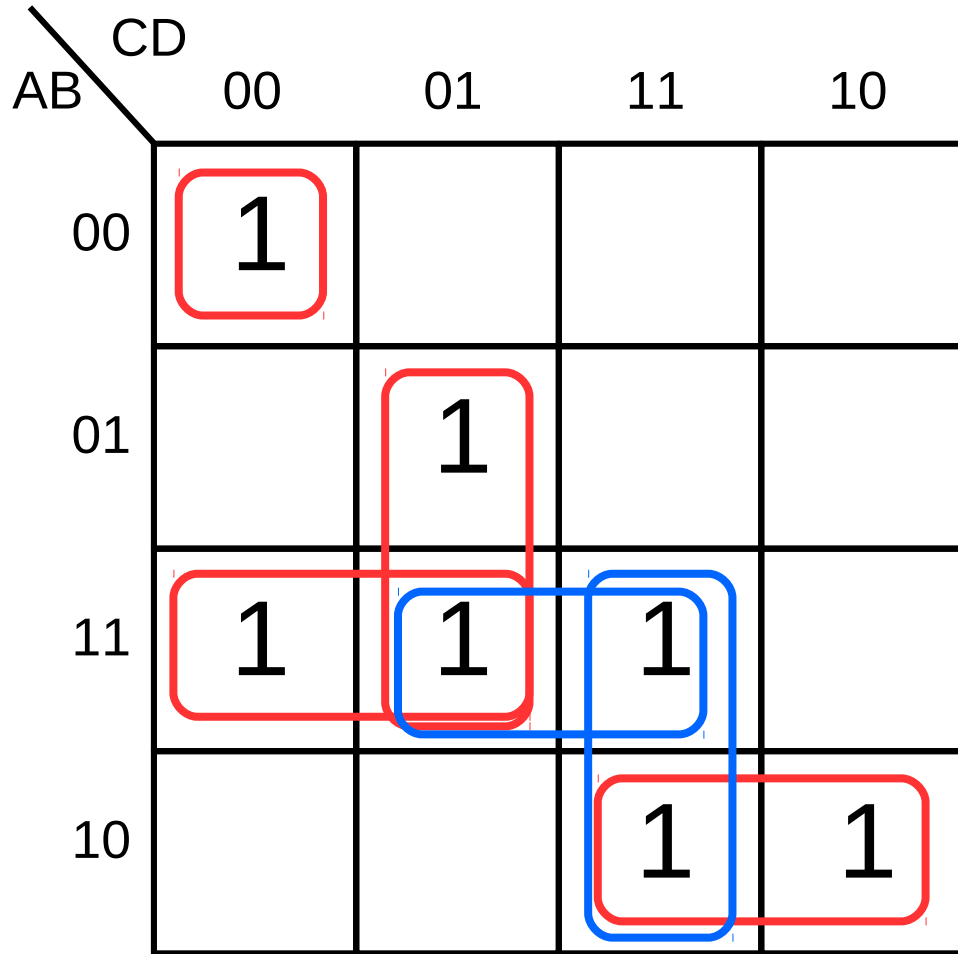
Implicantes Primos No esenciales



7 minitérminos
6 implicantes
primos

4 implicantes
primos esenciales

Implicantes Primos No esenciales



$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + B\overline{C}D + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \begin{pmatrix} ACD \\ \text{or} \\ ABD \end{pmatrix}$$

Don't cares

CD

AB

	00	01	11	10	
00	X	1	1	X	
01	0	X	1	0	
11	0	0	1	0	
10	0	0	1	0	

A

B

D

(a) $F = CD + \bar{A} \bar{B}$

CD

AB

	00	01	11	10	
00	X	1	1	X	
01	0	X	1	0	
11	0	0	1	0	
10	0	0	1	0	

A

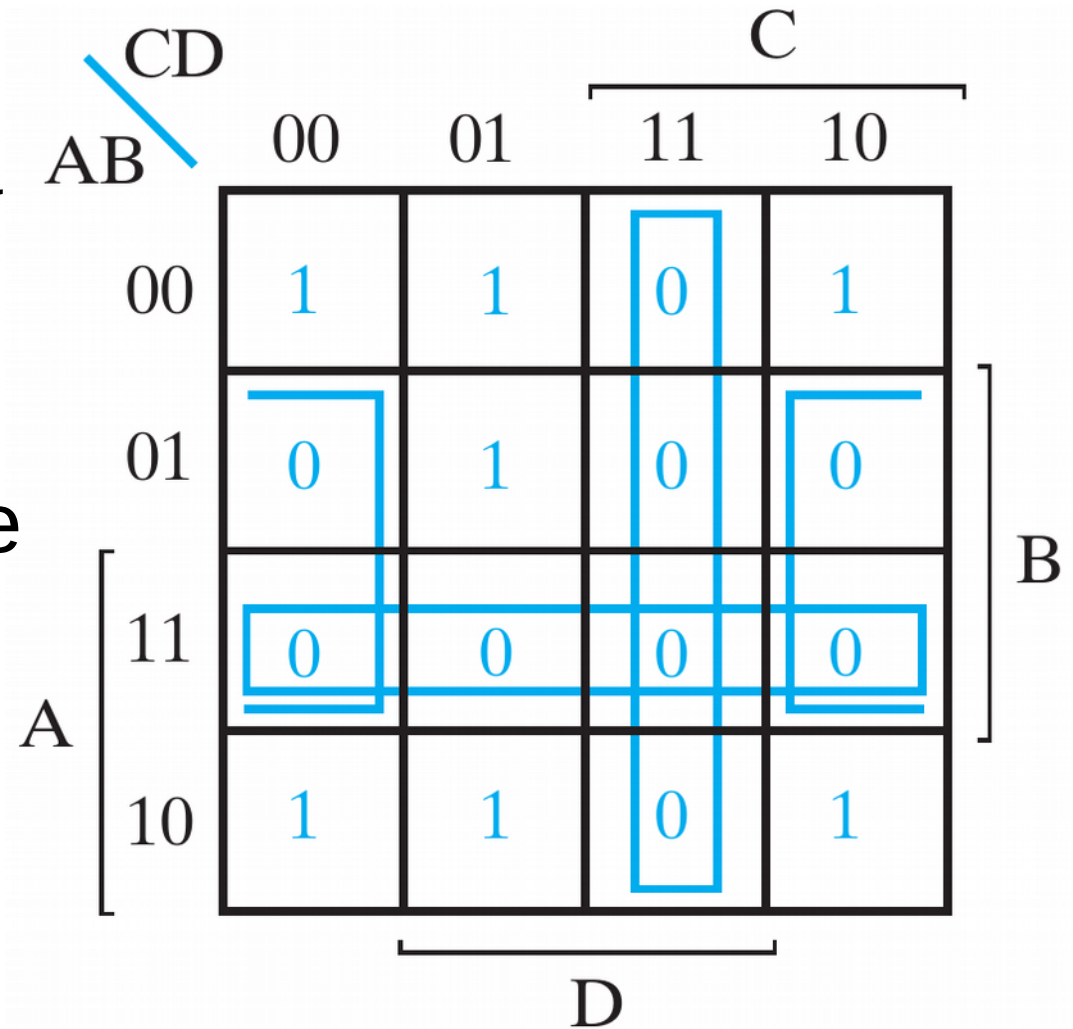
B

D

(b) $F = CD + \bar{A} D$

Productos de sumas

- Hallar la mínima suma de productos de la función complemento.
- Complementar el resultado utilizando De Morgan



Método tabular

- El método gráfico se puede extender para 5 y 6 variables usando múltiples mapas de 4 variables.
- ¿Y para más variables?

El método tabular

Método tabular

- 1) $i = 0$
Crear la lista inicial L_i de implicantes: minitérminos y opcionales.
- 2) Separar L_i en grupos según la cantidad de 1s: ninguno, uno, dos...
- 3) Ordenar los grupos según la cantidad de unos.
- 4) Crear una lista vacía L_{i+1} .
- 5) Por cada par de implicantes en L_i en grupos consecutivos:
 - 1) Si difieren en una única variable, simplificalos y marcalos.
 - 2) Si no está, agregar a la lista el L_{i+1} el nuevo implicante simplificado.
- 6) Si L_{i+1} no está vacía, $i \leftarrow i+1$ y volver al paso 2.
- 7) Los términos que no marcados son los implicantes primos.

Método tabular

1) Expandir la función

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00			1	
	01	1	1		*
	11	1	1		1
	10		1	1	1

Minitérminos

0011

0100

0101

0110

1001

1010

1011

1100

1101

1110

Método tabular

2) Minitérminos

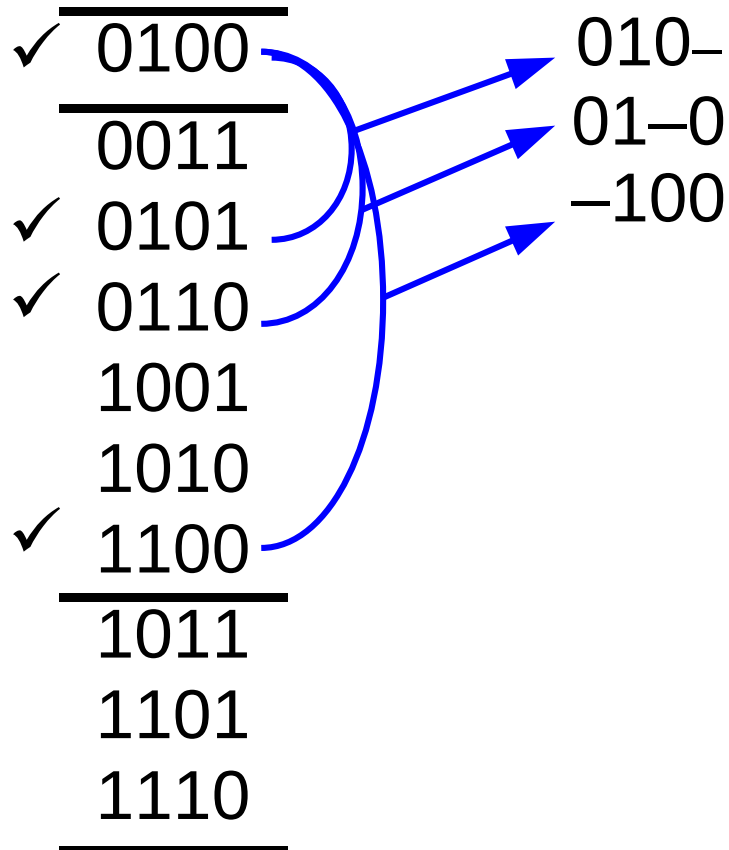
0011
0100
0101
0110
1001
1010
1011
1100
1101
1110

3) Minitérminos en orden

0100
0011
0101
0110
1001
1010
1100
1011
1101
1110

Método tabular

5)



Comparar los términos en **grupos consecutivos** todos contra todos.

Si difieren en una **única variable**, se simplifica.

Marcar los términos simplificados.

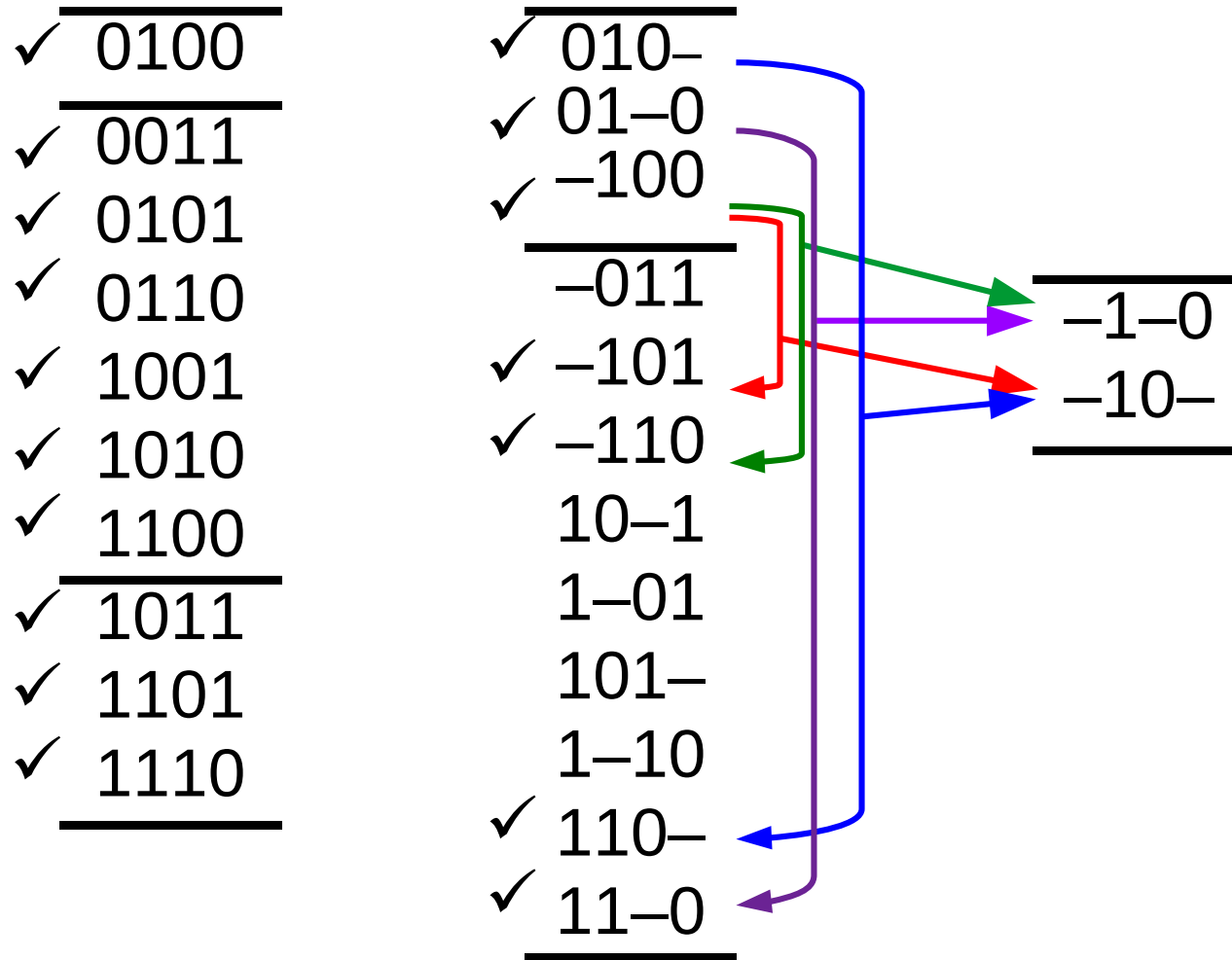
Método tabular

5)

✓ <u>0100</u>	<u>010-</u>
✓ <u>0011</u>	01-0
✓ 0101	-100
✓ 0110	<u>-011</u>
✓ 1001	-101
✓ 1010	-110
✓ 1100	10-1
✓ <u>1011</u>	1-01
✓ 1101	101-
✓ <u>1110</u>	1-10
	110-
	<u>11-0</u>

Método tabular

5)



Método tabular

7)

✓ 0100
 ✓ 0011
 ✓ 0101
 ✓ 0110
 ✓ 1001
 ✓ 1010
 ✓ 1100
 ✓ 1011
 ✓ 1101
 ✓ 1110

✓ 010-
 ✓ 01-0
 ✓ -100

 X -011
 ✓ -101
 ✓ -110
 Y 10-1
 Z 1-01
 T 101-
 U 1-10
 ✓ 110-
 ✓ 11-0

-1-0 V
-10- W

Método tabular

Tabla de implicantes primos

	ABCD	0011	0100	0101	1001	1010	1011	1100	1101	1110
X	-011									
Y	10-1									
Z	1-01									
T	101-									
U	1-10									
V	-1-0									
W	-10-									

Minitérminos 1
No opcionales

Marcamos con una X el minitérmino cubierto por cada implicante

Método tabular

Tabla de implicantes primos

	ABCD	0011	0100	0101	1001	1010	1011	1100	1101	1110	
X	-011	X					X				
Y	10-1				X		X				
Z	1-01				X				X		
T	101-					X	X				
U	1-10					X				X	
V	-1-0		X					X		X	
W	-10-		X	X				X	X		

Minitérminos 1
No opcionales

Identificamos los minitérminos cubiertos por un único implicante.
Esos implicantes son esenciales.
Tildamos los minitérminos cubiertos por los implicantes esenciales.

Método tabular

Tabla de implicantes primos

	ABCD	0011	0100	0101	1001	1010	1011	1100	1101	1110	
X	-011	X					X				← Minitérminos 1 No opcionales
Y	10-1				X		X				← Esenciales
Z	1-01				X				X		
T	101-					X	X				
U	1-10					X				X	
V	-1-0		X					X		X	
W	-10-		X	X				X	X		
		✓	✓	✓			✓	✓	✓		

Método tabular

Tabla de implicantes primos

	ABCD	0011	0100	0101	1001	1010	1011	1100	1101	1110	
X	–011	X					X				B'CD
Y	10–1				X		X				AB'D
Z	1–01				X				X		AC'D
T	101–					X	X				AB'C
U	1–10					X				X	ACD'
V	–1–0		X					X		X	BD'
W	–10–		X	X				X	X		BC'
		✓	✓	✓			✓	✓	✓		

La función que determina todas las posibles soluciones es:

$$H = X \cdot W \cdot (Y + Z) \cdot (T + U) \cdot (U + V)$$

Método tabular

X, Y, Z, T, U : implicantes de 3 literales
V, W : implicantes de 2 literales

$$\begin{aligned}
 H &= X \cdot W \cdot (Y + Z) \cdot (T + U) \cdot (U + V) \\
 &= XW \cdot (Y + Z) \cdot (TU + TV + U + UV) \\
 &= XW \cdot (Y + Z) \cdot (U + TV) \\
 &= XW \cdot (\underbrace{YU}_6 + \underbrace{YTV}_8 + \underbrace{ZU}_6 + \underbrace{ZTV}_8)
 \end{aligned}$$

literales

Soluciones equivalentes

$$XWYU \rightarrow B'CD + BC' + AB'D + ACD'$$

$$XWZU \rightarrow B'CD + BC' + AC'D + ACD'$$

Bibliografía



- Capítulo 2. Morris Mano, Kime & Martin. *Logic and computer design fundamentals*. Prentice Hall (5ta Ed, 2015)
- Capítulo 3. M. Rafiquzzaman. *Fundamentals of Digital Logic And Microcontrollers*. Wiley (2014, 6ta Ed.)
- Capítulo suplementario “More Optimization”. Morris Mano, Kime & Martin. *Logic and computer design fundamentals*.
http://wps.pearsoned.com/ecs_mano_lcdf_5/248/63706/16308896.cw/index.html