Departamento de Cs. e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur

Algoritmos y Complejidad

Trabajo Práctico 1

Inducción

Primer cuatrimestre de 2019

1. Probar por inducción las siguientes fórmulas

   a) $1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$

   b) $1^2 + 2^2 + \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Probar por inducción que la suma de los cubos de los primeros n naturales es igual al cuadrado de la suma de los primeros n naturales, esto es:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

3. Probar utilizando inducción generalizada que para todo $n > k$, con $k \in \mathbb{N}^+$, $fib(n) > (\frac{3}{2})^n$. ¿Cuál es el menor valor de k que satisface esta propiedad?

4. Probar que $\binom{n}{r} \leq 2^{n-1}$ para todo $n > 0$ y $0 \leq r \leq n$.
   Pista: Recordar que $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$.

5. Determinar cuáles son los errores en las siguientes pruebas por inducción.

   a) Sentencia: *Para todo entero $n \geq 0$, $6n = 0$* .
   Claramente la sentencia se cumple para el caso $n = 0$; en ese caso $6n = 0$.
   Ahora tomemos un $n > 0$. Si $n = a + b$, por hipótesis inductiva tenemos $6a = 0$ y $6b = 0$. Luego,

$$6n = 6(a + b) = 6a + 6b = 0 + 0 = 0$$

   b) Sentencia: *Para todo entero $n \geq 3$, $Fibonacci(n)$ es un número par* .
   Claramente la sentencia se verifica para $n = 3$, pues $Fibonacci(3) = 2$.
   Supongamos ahora que $n \geq 4$ y que $Fibonacci(m)$ es par para todo $m < n$. Luego,

$$Fibonacci(n) = Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2)$$

   y, como la suma de dos números pares da como resultado otro número par, la sentencia queda probada.

6. Probar por inducción sobre $n > 0$ que $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

7. Sea $t : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida mediante la siguiente recurrencia:

$$t(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 3n + n\ t(n-1) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

La estructura de esta recurrencia es similar a la estructura de la recurrencia para $n!$. Por lo tanto, es natural conjeturar que su crecimiento también es similar. Probar por inducción constructiva que para enteros n suficientemente grandes, existen $u, v \in \mathbb{R}^+$ tales que $un! \leq t(n) \leq vn!$.

Notar que para la cota superior esta conjetura es demasiado general para poder probarla directamente. Probar con una conjetura más fuerte que establece que existen $v, w \in \mathbb{R}^+$ tales que $t(n) \leq vn! - wn$, para enteros n suficientemente grandes.

8. Probar por inducción constructiva que para enteros n suficientemente grandes, existen $u, v \in \mathbb{R}^+$ tales que $un! \leq t(n) \leq vn!$.

$$t(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 3n^2 + n\ t(n-1) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

9. Considere la siguiente función:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 2 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Probar por inducción que $T(n) \leq 3n$.