Arquitectura de Computadoras

(Cód. 5561)
1° Cuatrimestre 2018

Dra. Dana K. Urribarri
DCIC - UNS

Álgebra de Boole

Álgebra de Boole

Un álgebra de Boole es un conjunto no vacío A, junto a dos operaciones $\wedge$ y $\vee$ (definidas sobre A), una operación unaria ' y dos elementos particulares 0 y 1 ($0 \in A$ y $1 \in A$), tales que satisfacen los siguientes axiomas $\forall p,q,r \in A$:

- Ley de identidad:

  $p \wedge 1 = p$ y $p \vee 0 = p$

- Existencia de complemento:

  $p \wedge p' = 0$ y $p \vee p' = 1$

- Ley conmutativa:

  $p \wedge q = q \wedge p$ y $p \vee q = q \vee p$

- Leyes distributivas:

  $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ y $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Álgebra de Boole

Se pueden probar los siguientes teoremas:

- Ley de idempotencia:

  $p \wedge p = p \vee p = p$

- Ley del doble complemento *(involución)*:

  $(p')' = p$

- Ley del complemento:

  $p \vee p' = 1$ y $p \wedge p' = 0$

- Leyes asociativas:

  $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ y $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

- Leyes de De Morgan:

  $(p \wedge q)' = p' \vee q'$ y $(p \vee q)' = p' \wedge q'$

- Ley de Absorción:

  $p \wedge (p \vee q) = p$ y $p \vee (p \wedge q) = p$

- $0' = 1$ y $1' = 0$

Álgebra de Boole

En 1938 Shannon demostró que:

- El álgebra de Boole de dos valores (0 y 1 o *falso* y *verdadero*) podía ser utilizado para el análisis y síntesis de circuitos digitales.
- La combinación de estos circuitos podía representar operaciones aritméticas y lógicas complejas.

Variables y literales

- *Variable*: cada elemento de la expresión con distinto nombre.
  - A . B' + A' C + A (D+E)   → 5 variables

  Determinan los grados de libertad de la expresión.

- *Literal*: cada aparición de una variable o de su complemento.
  - A . B' + A' C + A (D+E)   → 7 literales

  Determinan la complejidad de la expresión.

Principio de dualidad

Cualquier expresión algebraica deducible de los postulados del álgebra de Boole permanece válida si los operadores binarios y los elementos identidad son intercambiados.

¿Cómo se obtiene el dual?

- Se intercambian ANDs y ORs
- Dual[(a+b') · (c·b+d)] = (a·b') + ((c+b) · d)

Principio de dualidad

$$\text{Dual}[\ (a+b') \cdot (c \cdot b+d)\ ] = (a \cdot b') + ((c+b) \cdot d)$$

No hay relación lógica entre una expresión y su dual.

Si dos expresiones son equivalente, entonces sus duales también lo son.

Complemento de una expresión

- A través de la ley de De Morgan

$$F_1 = \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z$$

$$\overline{F}_1 = \overline{\overline{X}Y\overline{Z} \; + \; \overline{X}\,\overline{Y}Z} \; = \; \overline{(\overline{X}Y\overline{Z})} \cdot \overline{(\overline{X}\,\overline{Y}Z)}$$

$$= (X + \overline{Y} + Z)(X + Y + \overline{Z})$$

Complemento de una expresión

- A través del dual y complementando cada literal

- El dual de F_1 es

$$F_1 = \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z = (\overline{X}Y\overline{Z}) + (\overline{X}\,\overline{Y}Z)$$

- Complementando cada literal

$$(\overline{X} + Y + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$$

$$(X + \overline{Y} + Z)(X + Y + \overline{Z}) = \overline{F}_1$$

Precedencia de los operadores

- El orden de precedencia de los operadores es:
  1) Paréntesis
  2) Complemento
  3) And
  4) Or

Precedencia de los operadores

$$(\boxed{A + B})' \,.\, C + \boxed{B'}$$

$$\boxed{(\ \alpha\ )'} \,.\, C + \theta$$

$$\boxed{\beta \quad .\, C} + \theta$$

$$\boxed{\delta \qquad + \ \theta} \longrightarrow \text{resultado}$$

Álgebra de Boole bivaluada

- Un álgebra de Boole bivaluada *(en adelante álgebra de Boole)* se define sobre un conjunto de dos elementos B={0,1}.
- Los operadores binarios son **·** (AND) y **+** (OR).
- El operador unario es **'** (NOT).

- AND: ·, ∧, ∩
- OR: +, ∨, ∪
- NOT: ¯, '

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	x'
0	1
1	0

Tabla de verdad

(a) $F = \overline{X}YZ + \overline{X}Y\overline{Z} + XZ$

(b) $F = \overline{X}Y + XZ$

X	Y	Z	(a) F	(b) F
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Formas estándares

- Término suma:
  - Suma lógica. Consiste de la operación OR entre literales
  - $X + Y + Z'$
- Término producto:
  - Producto lógico. Consiste de la operación AND entre los literales
  - XYZ'

Observación: ¡suma y producto NO hacen referencia a las operaciones aritméticas!

Formas canónicas y estándares

- Formas canónicas
  - Suma expandida de productos
  - Producto expandido de sumas
- Formas estándares
  - Mínima suma de productos
  - Mínimo producto de sumas

Minitérminos y maxitérminos

- Minitérmino:
  - *Término producto* donde todas las variables aparecen exactamente una vez.
    Pueden estar complementadas o no.

- Maxitérmino
  - *Término suma* donde todas las variables aparecen exactamente una vez.
    Pueden estar complementadas o no.

Minitérminos y maxitérminos

- Para n variables hay hasta
  - 2^n minitérminos posibles
  - 2^n maxitérminos posibles.
- Para 2 variables A y B
  - Los minitérminos posibles son AB, AB', A'B y A'B'
  - Los maxitérminos posibles son A+B, A'+B, A+B' y A'+B'

- M_j denota el maxitérmino para el cual su combinación binaria se corresponde al decimal j.
- m_j denota el minitérmino para el cual su combinación binaria se corresponde al decimal j.

Minitérminos

- Minitérminos para tres variables

X	Y	Z	Product Term	Symbol	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	m_0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	$\overline{X}\overline{Y}Z$	m_1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m_2	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m_3	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	$X\overline{Y}\overline{Z}$	m_4	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m_5	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m_6	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	XYZ	m_7	0	0	0	0	0	0	0	1

- Notar que m_j vale 1 para la combinación j y 0 para todas las demás

Maxitérminos

- Maxitérminos para tres variables

X	Y	Z	Sum Term	Symbol	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
0	0	0	$X+Y+Z$	M_0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	$X+Y+\overline{Z}$	M_1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	$X+\overline{Y}+Z$	M_2	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_3	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	$\overline{X}+Y+Z$	M_4	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$	M_5	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$	M_6	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_7	1	1	1	1	1	1	1	0

- Notar que M_j vale 0 para la combinación *j* y 1 para todas las demás.

Minitérminos

Una función booleana puede representarse algebraicamente a través de la tabla de verdad formando la suma de todos los minitérminos que producen un 1 en la función.

X	Y	Z	F	
0	0	0	1	$m_0 = X'Y'Z'$
0	0	1	0	
0	1	0	1	$m_2 = X'YZ'$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$m_5 = XY'Z$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$m_7 = XYZ$

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XYZ$$
$$= m_0 + m_2 + m_5 + m_7$$

$$F(X, Y, Z) = \Sigma m(0, 2, 5, 7)$$

Suma expandida de productos

Maxitérminos

También puede representarse a través del producto de todos los maxitérminos que produzcan un 0 en la función.

Para esto hallamos la suma de productos del complemento de F, F'.

Maxitérminos

X	Y	Z	F	$\overline{F}$	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	1	m_1 = X'Y'Z
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	m_3 = X'YZ
1	0	0	0	1	m_4 = XY'Z'
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	1	m_6 = XYZ'
1	1	1	1	0	

$$\overline{F}(X,Y,Z) = \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}YZ + X\overline{Y}\,\overline{Z} + XY\overline{Z}$$
$$= m_1 + m_3 + m_4 + m_6$$

$$\overline{F}(X, Y, Z) = \Sigma m(1, 3, 4, 6)$$

Notar la relación entre

$$F(X, Y, Z) = \Sigma m(0, 2, 5, 7)$$

y

$$\overline{F}(X, Y, Z) = \Sigma m(1, 3, 4, 6)$$

Maxitérminos

- Luego F = (F')'. Aplicando De Morgan:

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{m_1 + m_3 + m_4 + m_6} = \overline{m_1} \cdot \overline{m_3} \cdot \overline{m_4} \cdot \overline{m_6} \\
&= M_1 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 \; (\text{since } \overline{m_j} = M_j) \\
&= (X + Y + \overline{Z})(X + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + Y + Z)(\overline{X} + \overline{Y} + Z)
\end{aligned}
$$

$$F(X, Y, Z) = \prod M(1, 3, 4, 6)$$

Producto expandido de sumas

A partir de la tabla de verdad

X	Y	Z	F	
0	0	0	1	$m_0 = X'Y'Z'$
0	0	1	0	$M_1 = X+Y+Z'$
0	1	0	1	$m_2 = X'YZ'$
0	1	1	0	$M_3 = X'+Y+Z$
1	0	0	0	$M_4 = X'+Y+Z$
1	0	1	1	$m_5 = XY'Z$
1	1	0	0	$M_6 = X'+Y'+Z$
1	1	1	1	$m_7 = XYZ$

$$F(X, Y, Z) = \prod M(1, 3, 4, 6)$$

$$F(X, Y, Z) = \Sigma m(0, 2, 5, 7)$$

Propiedades de los minitérminos (maxitérminos)

1) Para *n* variables Booleanas hay 2^n minitérminos (maxitérminos) que se pueden generar a partir de los números binarios entre 0 y 2^n-1.
2) Cualquier función booleana puede expresarse como suma expandida de productos (producto expandido de sumas).
3) El complemento de una función contiene los minitérminos (maxitérminos) no incluidos en la función original.
4) La función que incluye todos los 2^n minitérminos (maxitérminos) es lógicamente igual a 1 (0).

Suma de productos

- Suma lógica de términos productos.
- Cada términos producto puede tener cualquier cantidad de literales.

Ejemplo:

- $E = Y' + X'Z'$ no está expresado como suma expandida de productos.
- Puede expandirse:
  - a través de la tabla de verdad
  - de manera algebraica.

Suma de productos

X	Y	Z	E	
0	0	0	1	$m_0 = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$
0	0	1	1	$m_1 = \overline{X}\,\overline{Y}Z$
0	1	0	1	$m_2 = X\overline{Y}Z$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$m_4 = X\overline{Y}\,\overline{Z}$
1	0	1	1	$m_5 = X\overline{Y}Z$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

$$E(X, Y, Z) = \Sigma m(0, 1, 2, 4, 5)$$

Suma de productos

- De manera algebraica:

$$
\begin{aligned}
E &= Y' + X'Z' \\
&= (X + X')Y' + X'(Y + Y')Z' \\
&= XY' + X'Y' + X'YZ' + X'Y'Z' \\
&= XY'(Z+Z') + X'Y'(Z+Z') + X'YZ' + X'Y'Z' \\
&= XY'Z+XY'Z' + X'Y'Z+X'Y'Z' + X'YZ' + X'Y'Z'
\end{aligned}
$$

Producto de sumas

- Producto lógico de sumas.
- Cada suma puede tener cualquier cantidad de literales.

$$F = X(\overline{Y} + Z)(X + Y + \overline{Z})$$

- Se puede expandir utilizando tanto la tabla de verdad como de manera algebraica.

Valores de la salida

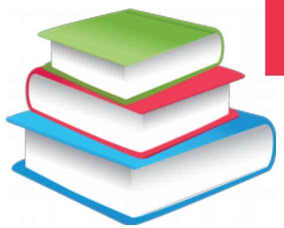
- Dada una combinación de entrada, hay 3 posibles valores de salida:
  - Que esa combinación valide la salida (valor 1)
  - Que esa combinación invalide la salida (valor 0)
  - Que no importe el valor de salida (opcional, *don't care*)
- La salida podrá ser opcional si:
  - Para ciertas combinaciones de entrada no importa el valor de salida.
  - Ciertas combinaciones de entrada son imposibles.

Ejemplo

- Una función F que es verdadero si el mes es parte del invierno
- Los meses se representan con números de 1 a 12 en binario.

	D	C	B	A	F
	0	0	0	0	*
Enero	0	0	0	1	0
Febrero	0	0	1	0	0
Marzo	0	0	1	1	0
Abril	0	1	0	0	0
Mayo	0	1	0	1	0
Junio	0	1	1	0	1
Julio	0	1	1	1	1
Agosto	1	0	0	0	1
Septiembre	1	0	0	1	1
Octubre	1	0	1	0	0
Noviembre	1	0	1	1	0
Diciembre	1	1	0	0	0
	1	1	0	1	*
	1	1	1	0	*
	1	1	1	1	*

Bibliografía



- *Capítulo 2.* Morris Mano, Kime & Martin. *Logic and computer design fundamentals.* Prentice Hall (2015, 5ta Ed)
- *Capítulo 2.* M. Morris Mano & Michael D. Celetti. *Digital Design: With an Introduction to the Verilog HDL*. Pearson. (2012, 5ta Ed.)
- *Capítulo suplementario "More Optimization".* Morris Mano, Kime & Martin. *Logic and computer design fundamentals.* http://wps.pearsoned.com/ecs_mano_lcdf_5/248/63706/16308896.cw/index.html