



ALGORITMOS Y COMPLEJIDAD

TRABAJO PRÁCTICO 2

Notación Asintótica

Primer cuatrimestre de 2019

1. Dada una función $f(n)$, definir formalmente los siguientes conjuntos: $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$ y $\Theta(f(n))$. ¿Qué representa cada uno de estos conjuntos?.
2. ¿Qué dice la *Regla del Límite*? [BB96, Sección 3.2]
3. Enunciar y demostrar la *Regla del Umbral* (**threshold rule**) y la *Regla del Máximo*. [BB96, Sección 3.2]
4. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, justificando adecuadamente en cada caso.

- a) $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$
- b) $n^3 \in O(n^2)$
- c) $n^2 \in \Omega(n^3)$
- d) $2^n \in \Theta(2^{n+1})$
- e) $n! \in O((n+1)!)$
- f) para toda función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(n) \in O(n)$ implica $[f(n)]^2 \in O(n^2)$
- g) para toda función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(n) \in O(n)$ implica $2^{f(n)} \in O(2^n)$
- h) para toda función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ y todo $k \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $kf(n) \in O(f(n))$
- i) para todo polinomio $p(n)$ de grado m , $p(n) \in O(n^m)$
- j) si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha < \beta$ entonces $n^\alpha \in O(n^\beta)$

5. Dada la función $f_k(n)$ definida como

$$f_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$$

Demostrar que $f_k(n) \in \Theta(n^{k+1})$.

6. Demostrar que para cualquier par de funciones $g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ se verifica:
Si $g(n) \in O(h(n))$ entonces $O(g(n)) \subseteq O(h(n))$
7. Hallar dos funciones $f(n)$ y $g(n)$ tales que $f(n) \notin O(g(n))$ y $g(n) \notin O(f(n))$.
8. Probar las siguientes afirmaciones para todo $a, b \in \mathbb{R}^{>1}$:

- a) $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$
- b) $2^{\log_a n} \notin \Theta(2^{\log_b n})$, si $a \neq b$.

9. Considere la siguiente función:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 2 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Demostrar que $T(n) \in O(n)$, para ello demostrar por inducción constructiva que existen constantes b y d tales que $T(n) = bn + d$.

Referencias

- [BB96] Gilles Brassard and Paul Bratley. *Fundamentals of Algorithmics*. Prentice Hall, 1996.
- [CLRS09] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction To Algorithms*. The MIT Press, 3rd edition, 2009.