Arquitectura de Computadoras

(Cód. 5561)
1° Cuatrimestre 2018

Dra. Dana K. Urribarri
DCIC - UNS

Operaciones Aritméticas

Implementación de las operaciones aritméticas básicas:

1) Suma
2) Resta
3) Multiplicación
4) División

Divisores

División

Es la más compleja y que consume tiempo de las operaciones básicas.

El resultado tiene dos partes:

- Dados un dividendo X y un divisor D,
  el resultado de X/D consta de un cociente Q y un resto R, tales que:

$$X = Q \cdot D + R \quad \text{con} \quad 0 \leq R < D.$$

División

- El producto de un número de *n* dígitos por un número de *m* dígitos da como máximo un resultado de *m* + *n* dígitos.
- La división de un número de *n* + *m* dígitos por un número de *n* dígitos da como máximo un cociente de *m* + 1 dígitos y un resto de *n* dígitos.

División $b = 2$

Si consideramos $n = m$

- Tenemos
  - Dividendo X de 2*n* bits.
  - Divisor D y resto R de *n* bits.
  - Cociente Q de n + 1 bits

- Si se trabaja con registros de *n* bits, que el cociente resulte de *n* + 1 bits genera overflow.

Posibles errores

- División por cero
  - Debe ser D ≠ 0
- Overflow
  - D y Q enteros no signados positivos
    - El máximo valor posible en un registro de *n* bits es $2^n - 1$
      $\therefore$ Q, D, R < 2^n y R < D.

      $$X = Q \cdot D + R < Q \,.\, D + D \leq (2^n - 1)\, D + D = 2^n\, D$$
    - Por lo tanto, debe ser X < $2^n \cdot D$
  - La parte alta de X debe ser menor estricto que D.
  - Esto también sirve para detectar división por cero.

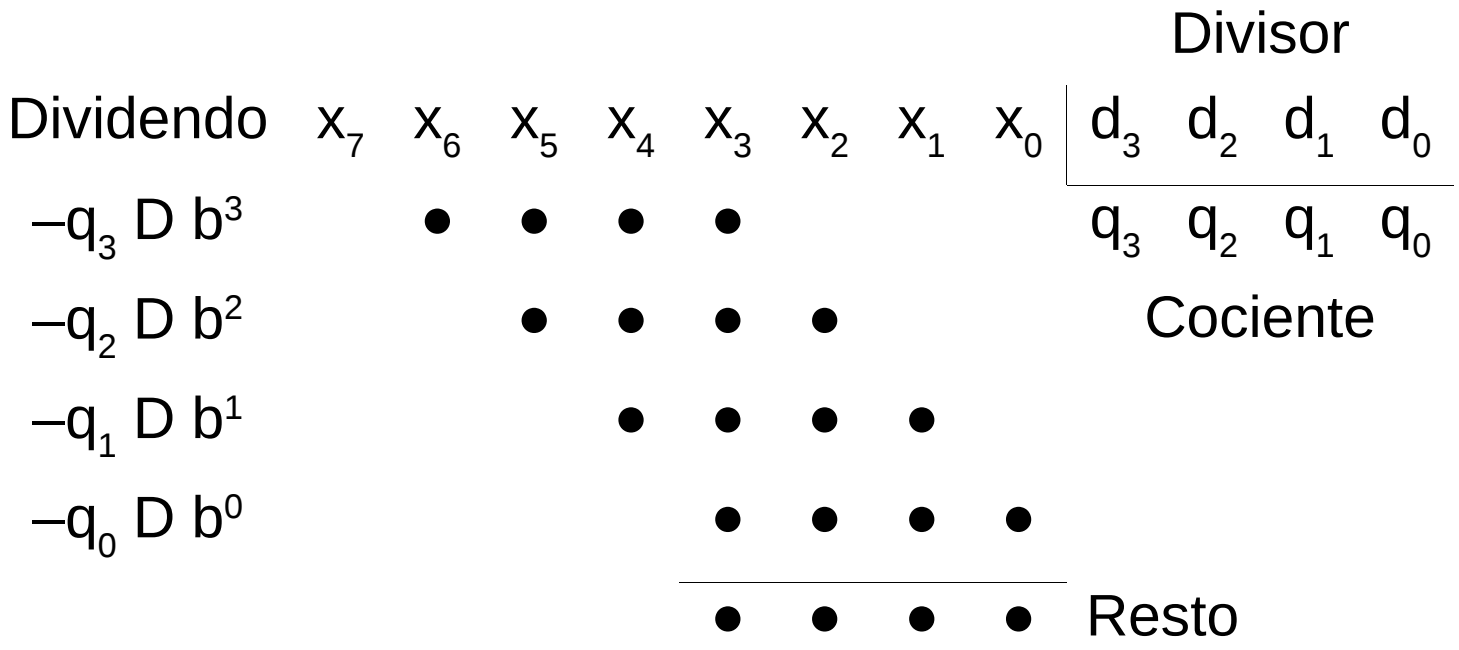
División secuencial

- La multiplicación secuencial se resolvía con sumas sucesivas.
- La división secuencial se resuelve con restas sucesivas.

  Pero requiere elegir o estimar el próximo dígito del cociente.
- La división es un proceso de prueba y error.

División secuencial X/D

1) Inicializar el resto parcial $R^{(0)}$ en X
2) Restar sucesivamente q_{k-j} D desplazado.



División secuencial $b = 2$

- Asumiendo *n* bits para el dividendo X y *k* bits para el cociente Q.
- $R^{(0)} = X$
- Para *j* desde k – 1 hasta 0
  - $R^{(k-j)} = R^{(k-j-1)} - q_j \, 2^j \, D$
  - Donde $q_j \in \{0,1\}$ es tal que $0 \leq R^{(k-j)} < D$

- Finalmente, $R^{(k)} = R$

División secuencial $b = 2$

- Cada resta está desplazada un bit con respecto a la anterior.
- Alternativa:
  - Fijar el desplazamiento de $q_{k-j}D$ en 2^k
  - Desplazar sucesivamente el resto parcial un lugar a izquierda.

$$R^{(j)} = 2R^{(j-1)} - q_{k-j}\, 2^k D$$

$$R^{(0)} = X \quad y \quad R^{(k)} = 2^k R$$

División con restauración

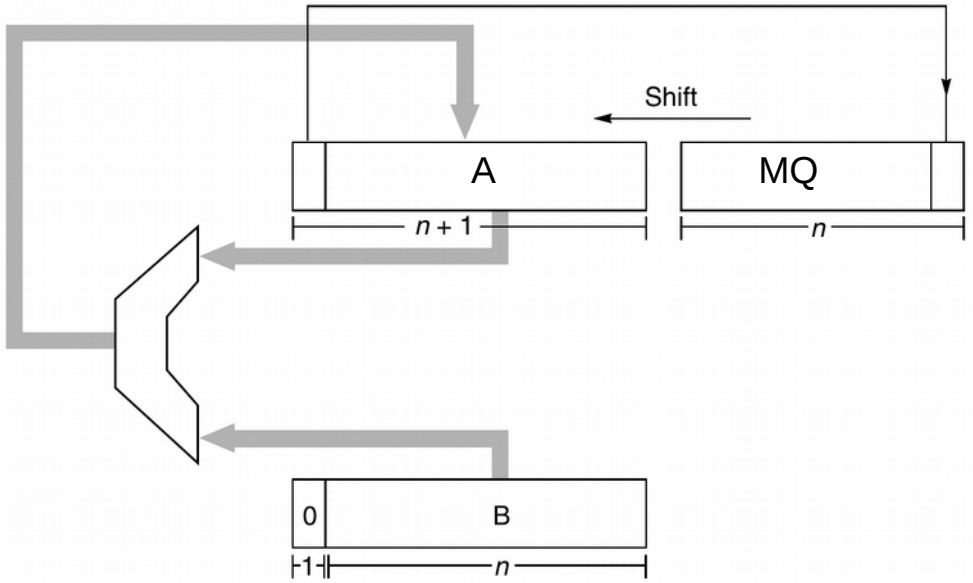
En base dos, los bits q_i pueden ser 0 o 1.

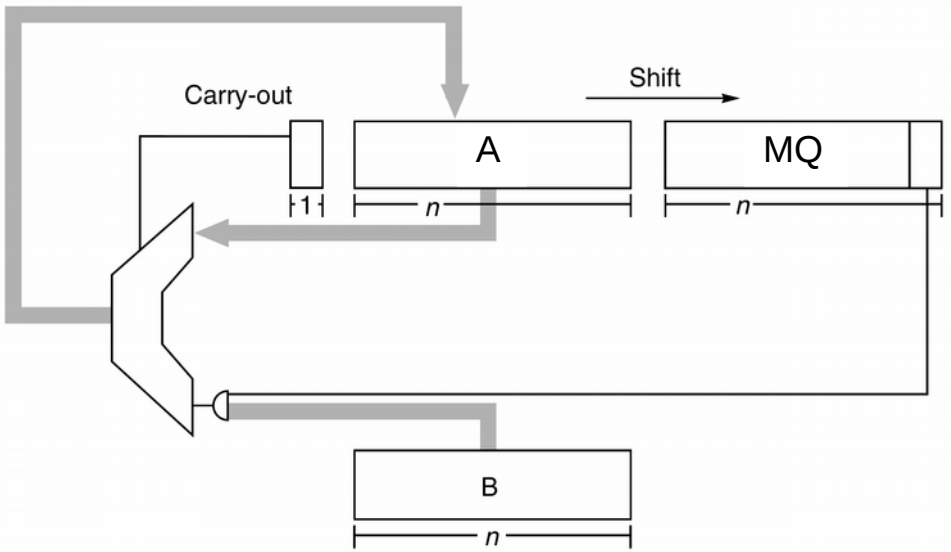
- La división con restauración (*restoring division*) encuentra los bits del cociente por prueba y error.
- Para cada bit q_i del cociente asume valor 1.
  Si no era la elección correcta porque la resta dio un resultado negativo, restaura el valor anterior y q_i debía valer 0.

- La restauración del valor puede hacerse:
  - Manteniendo registros separados para el resto de prueba y el resto real.
  - Con un único registro y realizando la suma para restaurar.

Hardware de división

- La división y la multiplicación pueden compartir parte del hardware

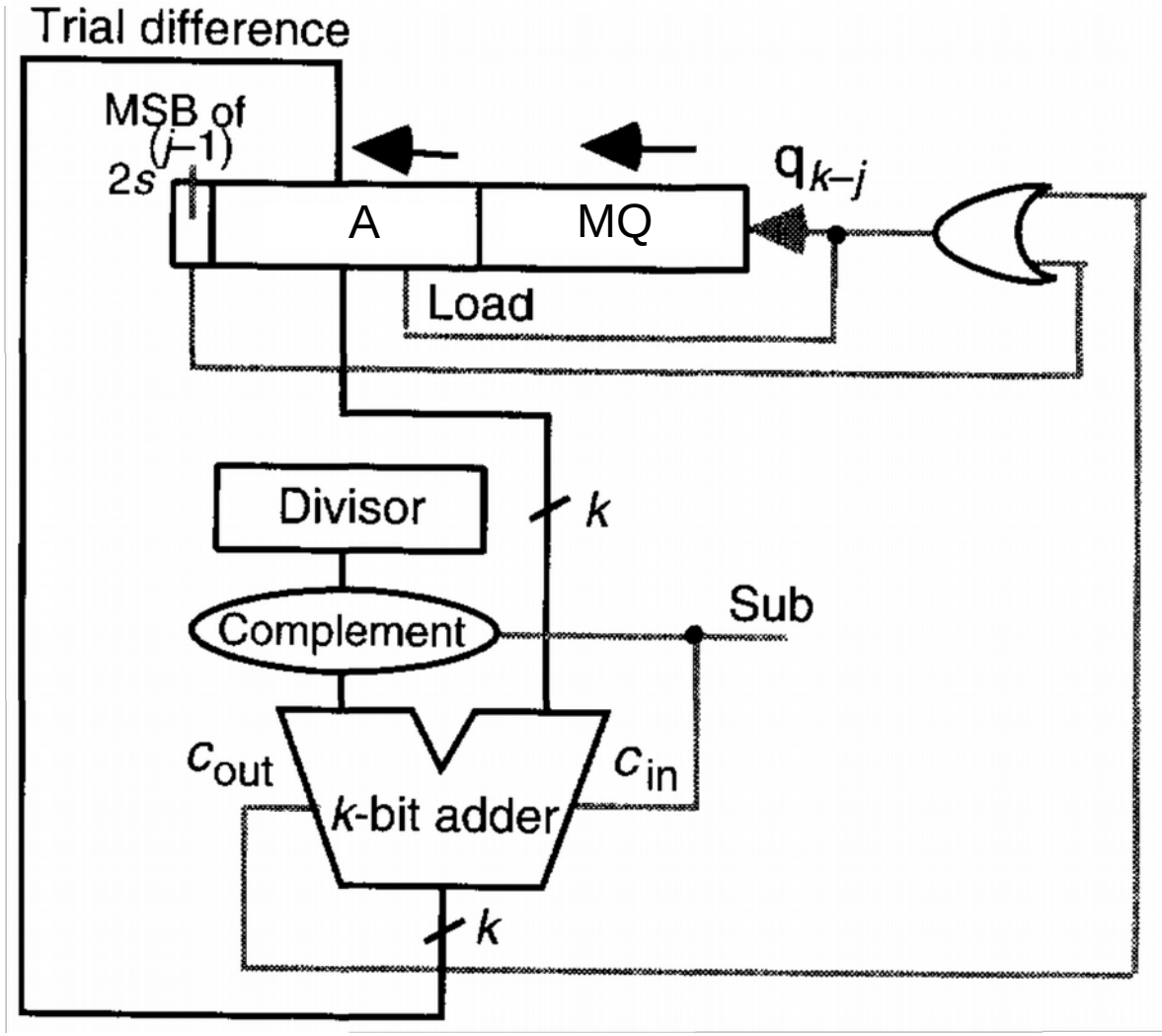




- Dado que los bits del cociente ingresan a medida que se desplaza el resto parcial, ambos pueden compartir los mismos registros.

División con restauración

- Calcular X/D
- En el registro A|MQ se carga con X y se completa con 0 a la izquierda.



División con restauración

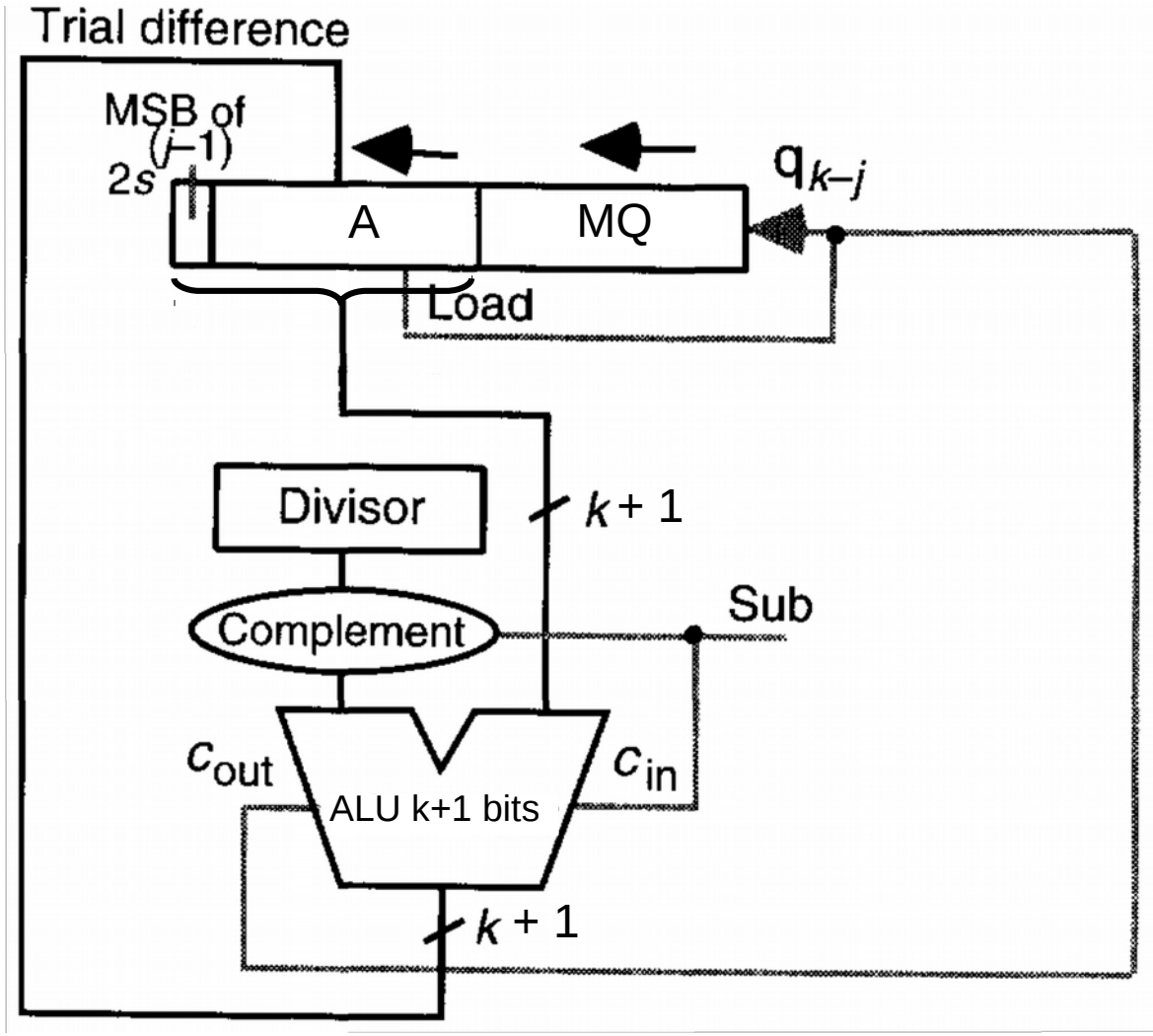
Desplazar A|MQ un lugar a izquierda.
(El MSB se almacena en un FF especial)

En cada ciclo *j*:

1) Calcular el resto de prueba $2\ R^{(j-1)} - q_{k-j}\ 2^k\ D$
2) Si FF = 1 o la resta dio positivo ($C_{OUT} = 1$)
    1) El resto de prueba se carga en A
    2) $q_{k-j} = 1$
3) Cualquier otro caso, $q_{k-j} = 0$
4) Desplazar A|MQ a izquierda entrando q_{k-j}.
   En el último ciclo desplazar solamente MQ.

División con restauración

- Se puede simplificar asumiendo
  - A de $n + 1$ bits y
  - ALU de $n + 1$ bits.



División con restauración

Desplazar A|MQ un lugar a izquierda

En cada ciclo *j*:

1) Calcular el resto de prueba $2\ R^{(j-1)} - q_{k-j}\ 2^k\ D$
2) Si el resto de prueba es positivo o cero ($C_{OUT} = 1$),
   1) El resto de prueba se carga en A
   2) $q_{k-j} = 1$
3) Si el resto de prueba es negativo, $q_{k-j} = 0$
4) Desplazar A|MQ a izquierda entrando q_{k-j}.
   En el último ciclo desplazar solamente MQ.

Ejemplo

X = 26
D = 4

X = 11010
D = 000100
–D = 111100

	A	MQ
	000000	11010
1er desplazamiento.	000001	1010-
-4	111100	
< 0	111101	
Restauro. Shift, $q_i = 0$	000011	010-0
-4	111100	
< 0	111111	
Restauro. Shift, $q_i = 0$	000110	10-00
-4	111100	
≥ 0	000010	
Shift, $q_i = 1$	000101	0-001
-4	111100	
≥ 0	000001	
Shift, $q_i = 1$	000010	-0011
-4	111100	
< 0	111110	
Restauro. Shift MQ, $q_i = 0$	000010	00110
	R	Q

Ejemplo

X = 117
D = 10

X = 1110101
D = 001010
–D = 110110

	A	MQ
	000011	10101
1er desplazamiento.	000111	0101-
-10	110110	
< 0	111101	
Restauro. Shift, $q_i = 0$	001110	101-0
-10	110110	
> 0	000100	
Shift, $q_i = 1$	001001	01-01
-10	110110	
< 0	111111	
Restauro. Shift, $q_i = 0$	010010	1-010
-10	110110	
≥ 0	001000	
Shift, $q_i = 1$	010001	-0101
-10	110110	
≥ 0	000111	
Shift MQ, $q_i = 1$	000111	01011
	R	Q

División sin restauración

- La implementación con restauración tienen problemas de temporizado.
- Cada ciclo de reloj debe ser lo suficientemente largo como para:
  - Desplazar registros
  - Propagar señales al sumador
  - Determinar y almacenar el próximo dígito del cociente
  - Eventualmente, almacenar el resto de prueba
- Además, los últimos eventos dependen de los primeros.

División sin restauración

- La división sin restauración (*nonrestoring division*) busca evitar esos problemas de temporizado.
- Siempre asume que $q_i = 1$, resta y almacena el resto parcial aunque sea incorrecto.
  Se corrige en el próximo ciclo.

División sin restauración

- Sea U el resto parcial ya desplazado.
- Si la resta $U - 2^k D < 0$ hay dos opciones:

1) Restaurar el valor inicial de U, desplazar a izquierda nuevamente y volver a restar $2^k D$ para obtener: $2U - 2^k D$

2) Mantener el valor negativo, desplazar izquierda y sumar $2^k D$: $2(U - 2^k D) + 2^k D = 2U - 2^k D$

- Si el resto final queda negativo, hay que corregir
  - $R \leftarrow R + D$

No hay próximo paso para corregir.

Ejemplo

X = 117
D = 10

X = 1110101
D = 001010
–D = 110110

	A	MQ
	000011	10101
1er desplazamiento.	000111	0101-
-10	110110	
< 0	111101	
Shift, $q_i = 0$	111010	101-0
+10	001010	
≥ 0	000100	
Shift, $q_i = 1$	001001	01-01
-10	110110	
< 0	111111	
Shift, $q_i = 0$	111110	1-010
+10	001010	
≥ 0	001000	
Shift, $q_i = 1$	010001	-0101
-10	110110	
≥ 0	000111	
Shift MQ, $q_i = 1$	000111	01011
	R	Q

División rápida

- Hay dos formas diferentes de lograr acelerar la división:
  - Con sumas/restas y desplazamientos O(n)
  - Con multiplicación O(log(n))

División por convergencia

- Sea X y D el dividendo y el divisor.
- Se puede escribir como una fracción donde X es el numerador y D el denominador.

$$Q = \frac{X}{D} = \frac{X \cdot R_0 \cdot R_1 \cdots R_{m-1}}{D \cdot R_0 \cdot R_1 \cdots R_{m-1}} \rightarrow \frac{Q}{1}$$

- Se calcula solamente el cociente.
- Adecuado para división en punto flotante.

División por convergencia

- Supongamos *D* una fracción normalizada 0.1•••
- ½ ≤ *D* < 1 y además *D* = 1 – *y* donde *y* ≤ ½.
- Si se selecciona $R_0 = 1 + y$
  - $D_1 = D\ R_0 = (1 - y)\ (1 + y) = 1 - y^2$
  - Como $y^2 \leq ¼$, $D_1 = 0.11\bullet\bullet\bullet \geq ¾$
- Si se selecciona $R_1 = 1 + y^2$
  - $D_2 = D_1\ R_1 = (1 - y^2)\ (1 + y^2) = 1 - y^4$
  - Como $y^4 \leq 1/16$, $D_2 = 0.1111\bullet\bullet\bullet \geq 15/16$

División por convergencia

Convergencia

- En general $D_i = 1 - y^{2^i}$
- Como $y \leq 2^{-1}$ entonces $y^{2^i} \leq 2^{-2^i}$

$$y^{2^i} = 0.\underbrace{0\ldots0}_{i}\ldots$$

$$D_i = 1 - y^{2^i} = 0.\underbrace{1\ldots1}_{i}\ldots$$

$$\lim_{i \to \infty} D_i = 1$$

División por convergencia

Cálculo del factor de multiplicación R_i

- Para obtener R_i a partir de D_i

$$D_i = 1 - y^{2^i} \qquad R_i = 1 + y^{2^i}$$

$$R_i = 1 + 1 - D_i = 2 - D_i$$

- R_i es el complemento a 2 de D_i

Ejemplo

$X = 0.1101 \quad D = 0.11$

$R_0 = 2 - D = 1.01$

- $D_1 = D \cdot R_0 = 0.1111$
- $X_1 = X \cdot R_0 = 0.1000001$

$R_1 = 2 - D_1 = 1.0001$

- $D_2 = D_1 \cdot R_1 = 0.11111111$
- $X_2 = X_1 \cdot R_1 = 0.1000101$

$R_2 = 2 - D_2 = 1.00000001$

- $D_3 = D_2 \cdot R_2 = 0.1111111111111$
- $X_3 = X_2 \cdot R_2 = 0.100010101010101$

División SRT

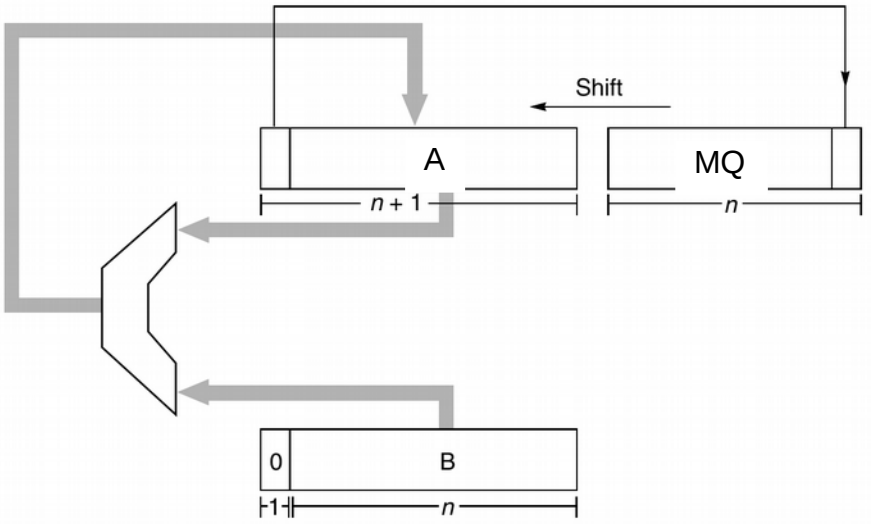
- Acelera la división sin restauración.
- Para el cociente usa los dígitos {-1, 0, 1}
  - -1: sumar
  - 0: no operar
  - 1: restar
- Busca evitar sumar/restar cuando el resto parcial está entre [–D,D).
  - $q_i = 0$ y se desplaza el resto parcial a izquierda [–2D, 2D).

División SRT

- ¿Cómo se sabe que el resto parcial está entre [–D,D)?

  Restando
- La solución se conoce como algoritmo SRT.
- Sweeney, Robertson y Tocher llegaron independientemente al mismo algoritmo.

Algoritmo



- X/D
- MQ ← X B ← D
- Si B tiene k ceros adelante, desplazar todos los registros k lugares a izquierda.
- Para i = 0…*n*–1
  1) Si los tres MSB de A son iguales: $q_i \leftarrow 0$ y desplazar A|MQ 1 bit a izquierda.
  2) Si los tres MSB de A no son iguales y A < 0: $q_i \leftarrow -1$, desplazar A|MQ 1 bit a izquierda y sumar B.
  3) Si no: $q_i \leftarrow 1$, desplazar A|MQ 1 bit a izquierda y restar B.
- Si el resto final es negativo, sumar B y restar 1 a Q.
- Desplazar el resto final *k* lugares a derecha.

División SRT

X = 8
D = 3

X = 1000
D = 0011

D tiene 2 ceros adelante
$D_{5bits} \leftarrow 01100$
$-D_{5bits} \leftarrow 10100$

	A	MQ
	00000	1000
Shift A|MQ 2 lugares a izq.	00010	0000
[000] Shift, $q_i = 0$	00100	0000
[001 y A ≥ 0] Shift, $q_i = 1$	01000	0001
–D	10100	
	11100	0001
[111] Shift, $q_i = 0$	11000	0010
[110 y A < 0] Shift, $q_i = -1$	10000	010$\bar{1}$
+D	01100	
	11100	010$\bar{1}$
Resto < 0. +D y Q--	01100	
	01000	01$\bar{1}$0
Shift A 2 lugares a derecha	00010	Q_{DS}
	R	

R = 0010
Q = 0100 – 0010 = 0010

División SRT: Explicación

- X/D = Q implica

$$X = D \cdot Q + R \quad (0 \leq R < D)$$

- El resto parcial r_i $(0 \leq r_i < D)$

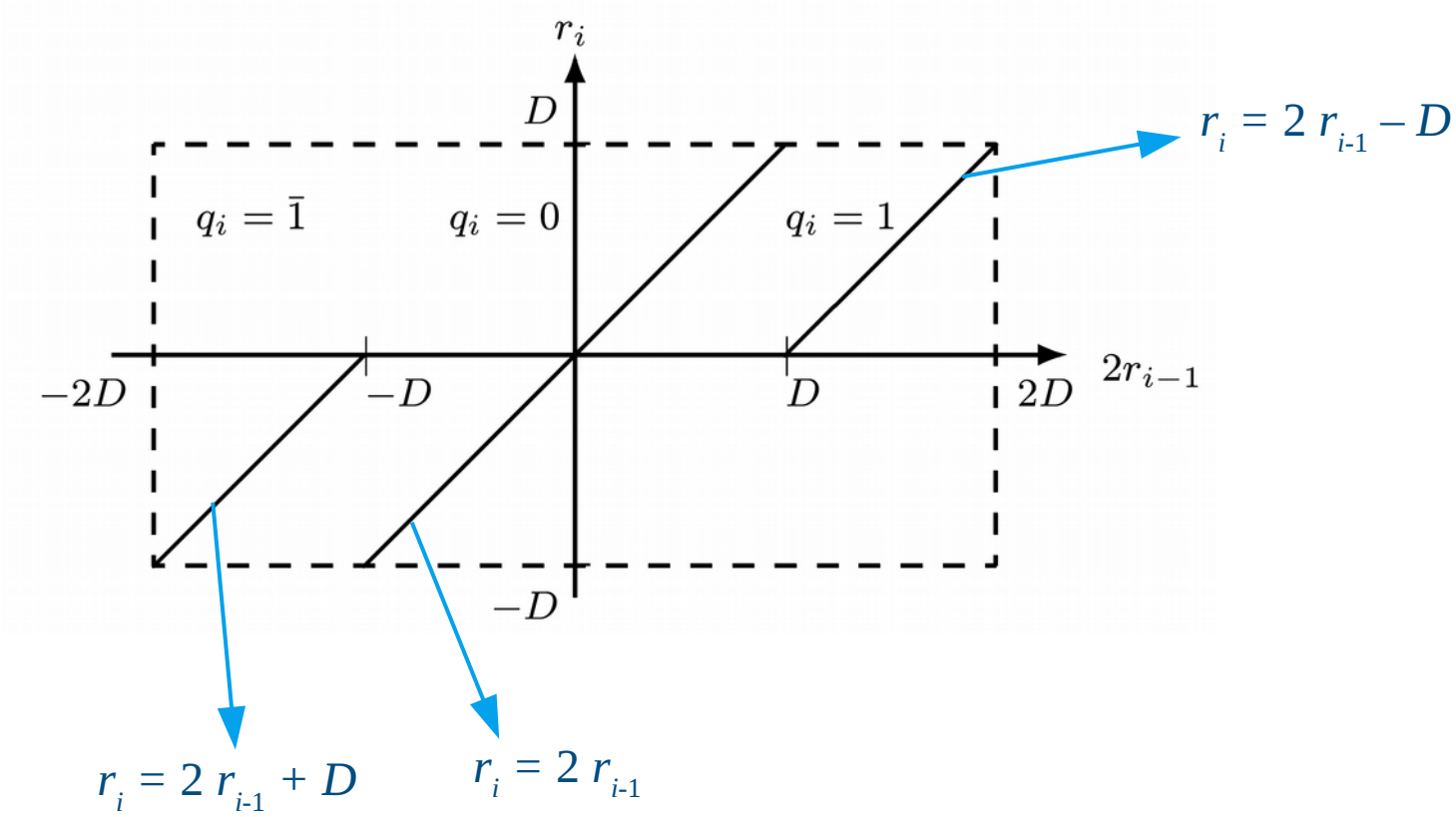
$$r_i = 2r_{i-1} - q_i \cdot D$$

- La selección de los bits del cociente es:

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{if } 2r_{i-1} \geq D \\ 0 & \text{if } -D \leq 2r_{i-1} < D \\ \bar{1} & \text{if } 2r_{i-1} < -D \end{cases}$$

División SRT: Explicación

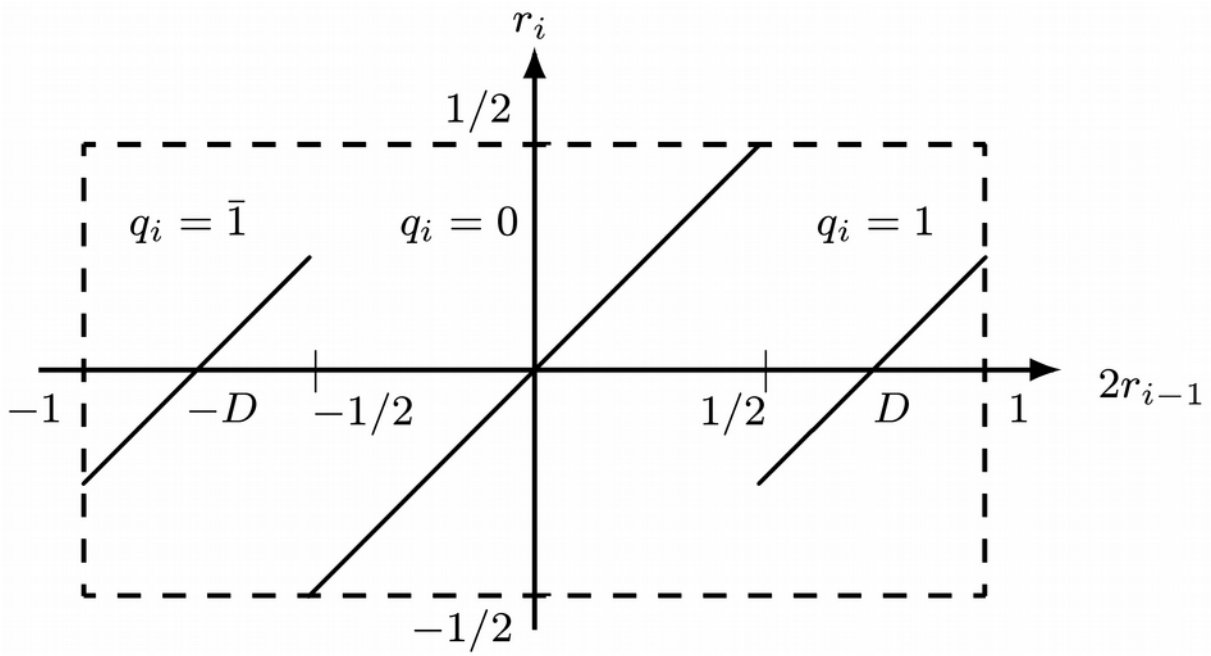
- La dificultad está en comparar $2r_{i-1}$ con D o $-D$



División SRT: Explicación

- Si restringimos *D* a que sea una fracción normalizada

$$\tfrac{1}{2} \leq |D| < 1$$



División SRT: Explicación

- Eso permite reducir la zona en la que $q_i = 0$ a:

$$-D \leq -\tfrac{1}{2} \leq 2\, r_i < \tfrac{1}{2} \leq D$$

$$-\tfrac{1}{4} \leq r_i < \tfrac{1}{4}$$

$$1.110_2 \leq r_i < 0.01_2$$

$$1.110_2 \leq r_i \leq 0.00111\ldots_2$$

¡3 primeros bits iguales!

En vez de analizar los primeros 3 bits alcanza con los primeros 2 excluyendo el signo. Esto permite usar la ALU de *n* bits.

División SRT: Explicación

¿Si D es entero?

- Para registros de *n* bits:

$$a = X/2^n \qquad \frac{X}{D} = \frac{a}{b} = \frac{X/2^n}{D/2^n} = Q \qquad r = R/2^n$$

$$b = D/2^n \qquad a = b \cdot Q + r$$

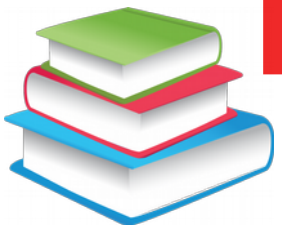
¿Si *D* no una fracción normalizada ($D \geq ½$)?

- Si *D* no está normalizado, desplazar *X* y *D* *k* lugares a izquierda para normalizar *D*.
- Desplazar el resto *k* lugares a derecha para corregirlo.

Acelerar la división

- Para acelerar la multiplicación
  - Carry-save adder
  - Bases mayores a 2 (higher radix)
- En la división
  - Se necesita el signo de A para elegir el próximo dígito y la operación de la ALU.
    El CSA no alcanza.
  - Al procesar más de un bit cada dígito del cociente puede tomar varios valores (no solo 0 o 1).
- La solución a ambos es el uso de dígito signado.

Bibliografía



- *Capítulo 13 y 14. Computer Arithmetic: Algorithms and Hardware Designs.* Behrooz Parhami, Oxford University Press, New York, 2002.
- *Capítulo 3 y 8*. *Computer Arithmetic Algorithms.* Israel Koren, 2da Edición, A K Peters, Natick, MA, 2002.

  Adapted from Koren, UMass. Copyright 2008 Koren, UMass and A.K. Peters.
- *Apéndice J*. J. Hennessy & D. Patterson. *Computer Architecture: A Quantitative Approach.* Morgan Kaufmann Publishers INC. 2011, 5ta Ed.

Suplementaria

- *Apéndice B.* David A. Patterson & John L. Hennessy. *Computer Organization and Design. The Hardware/Software Interface.* Elsevier. (5ta Ed. 2014)
- *Capítulo 43.* Editor Wai-Kai Chen. The VLSI Handbook. CRC Press. (2da Ed. 2007)