Algoritmos y Complejidad

Algoritmos *greedy*

Pablo R. Fillottrani

Depto. Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur

primer semestre 2024

Algoritmos *greedy*

Generalidades

- los algoritmos greedy son algoritmos que toman decisiones de corto alcance, basadas en información inmediatamente disponible, sin importar consecuencias futuras.
- se usan generalmente para resolver problemas de optimización.
- en general son algoritmos eficientes y fáciles de implementar, si es que funcionan (no siempre son correctos!!).

Ejemplo

Problema: Dado un conjunto de monedas, ¿cuál es la mínima cantidad de monedas necesarias para pagar n centavos?.
Solución *greedy*: Dar en lo posible monedas de denominación grande.

Características generales de todo algoritmo *greedy*

- se dispone de un conjunto C de candidatos de los cuales se debe seleccionar un subconjunto que optimice alguna propiedad.
- a medida que avanza el algoritmo, se van seleccionando candidatos y se los coloca en el conjunto S de candidatos aceptados, o R de candidatos rechazados.

Características generales de todo algoritmo *greedy*

- existe una función `esSolución()` que determina si un conjunto de candidatos es una solución, no necesariamente optimal, del problema.
- existe una función `esViable()` que determina si un conjunto de candidatos es posible de ser extendido para formar una solución, no necesariamente optimal, del problema.
- existe una función `selección()` que devuelve el candidato más promisorio del conjunto de aquellos que todavía no han sido considerados.

Esquema general para un algortimo *greedy*

```
C ::= conjunto de candidatos; S ::= {}
WHILE (C != {} and ! esSolución(S))
   x ::= selección(C);  C ::= C - {x}
   IF esViable(S + {x})
      S ::= S + {x}
   ENDIF
ENDWHILE
IF esSolución(S)
   RETURN S
ELSE
   RETURN "No encontré soluciones"
ENDIF
```

Problema de la mochila

Problema: se tienen n objetos (cada objeto i tiene un peso w_i y un valor v_i); y una mochila con capacidad máxima de W. Se pretende encontrar la manera de cargar la mochila de forma que se maximice el valor de lo transportado y se respete su capacidad máxima.

- se quiere encontrar valores $x_i, 0 \leq x_i \leq 1$ de forma que

$$\text{maximice} \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \qquad \text{siempre que} \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \leq W$$

- claramente, si $\sum_{i=1}^{n} w_i \leq W$ entonces $x_i = 1$ es optimal.
- los casos interesantes aparecen cuando $\sum_{i=1}^{n} w_i > W$.
- se puede implementar un algoritmo *greedy* con diversas estrategias de selección.

Algoritmo *greedy*

- datos de entrada: arreglos `w[1..n]`, y `v[1..n]` contienen con los pesos y valores de los objetos.
- datos de salida: arreglo `x[1..n]` con la porción de cada elemento que se carga en la mochila.
- `x[i]=1` significa que el objeto `i` se lleva completo; `x[i]=0` que nada se lleva del objeto `i`; y `x[i]=r`, $0 < r < 1$ significa que el elemento `i` se lleva fraccionado.

Algoritmo *greedy*

```
FOR i ::=1 TO n
   x[i] ::= 0
ENDFOR
peso ::= 0
WHILE peso<W
   i ::= seleccion()  //no definido cómo
   IF  peso+w[i]<W
      x[i] ::= 1; peso ::= peso+w[i]
   ELSE
      x[i] ::= (W-peso)/w[i]; peso ::= W
   ENDIF
ENDWHILE; RETURN x
```

- la función `selección()` no está especificada.
- para definirla se pueden considerar tres estrategias diferentes:
  1. seleccionar el elemento de mayor valor
  2. seleccionar el elemento de menor peso
  3. seleccionar el elemento que tenga mayor valor por unidad de peso

Ejemplo de aplicación

- sea $n = 5$, $W = 100$ y objetos con los siguientes pesos y valores:

	obj. 1	obj. 2	obj. 3	obj. 4	obj. 5
w	10	20	30	40	50
v	20	30	66	40	60

- las soluciones con las tres estrategias de selección son:

	obj. 1	obj. 2	obj. 3	obj. 4	obj. 5	Valor
Max v_i	0	0	0 1	0 0,5	0 1	146
Min w_i	0 1	0 1	0 1	0 1	0	156
Max v_i/w_i	0 1	0 1	0 1	0	0 0,8	164

- el ejemplo anterior demuestra que las dos primeras estrategias resultan en algoritmos que no son correctos.
- ¿es correcta la tercer estrategia?

Correctitud

Teorema 1 (Correctitud del algoritmo greedy para la mochila)

El algoritmo greedy *para el problema de la mochila con selección por mayor v_i/w_i siempre encuentra una solución optimal.*

Prueba.

Sea $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la solución que encuentra el algoritmo, y $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ cualquier otra solución viable (o sea tal que $\sum_{i=1}^{n} y_i w_i \leq W$). Se prueba que $valor(X) - valor(Y) \geq 0$, luego X es una solución optimal. $\square$

Análisis del tiempo de ejecución

- si se ordenan los elementos antes del ciclo *greedy*, la selección en cada iteración puede hacerse en tiempo constante y el algoritmo es entonces de $\Theta(n \log n)$, determinado por el ordenamiento.
- si se usa un *heap* ordenado por la estrategia de selección, el tiempo de inicialización cae a $\Theta(n)$, pero cada selección obliga a mantener la estructura (*heapify*) por lo que el algoritmo también resulta de $\Theta(n \log n)$.
- ¿Cuál de estas dos implementaciones es más conveniente?

Definición del problema

- se tiene un servidor (que puede ser un procesador, un cajero en un banco, un surtidor de nafta, etc.) que tiene n clientes que servir.
- el tiempo de servicio requerido por cada cliente es conocido previamente: $t_i, 1 \leq i \leq n$.
- Problema: SCHEDULING se quiere encontrar una secuencia de atención al cliente que minimice el tiempo total de espera de los clientes:

$$\textit{Tiempo de espera} = \sum_{i=1}^{n} (\text{tiempo del cliente } i \text{ en el sistema})$$

Ejemplo

- tres clientes numerados $1, 2, 3$ con tiempos $t_1 = 5, t_2 = 10, t_3 = 3$

Scheduling	Tiempo de espera	
123:	5+ (5+10) + (5+10+3) = 38	
132:	5+ (5+3) + (5+3+10) = 31	
213:	10+ (10+5) + (10+5+3) = 43	
231:	10+ (10+3) + (10+3+5) = 41	
312:	3+ (3+5) + (3+5+10) = 29	$\leftarrow$ optimal
321:	3+ (3+10) + (3+10+5) = 34	

Algoritmo *greedy*

- el ejemplo anterior sugiere un algoritmo *greedy* en donde la selección se hace en base el menor tiempo de servicio restante siempre devuelve un algoritmo optimal.

Teorema 2 (Correctitud del algoritmo greedy para scheduling)

El algoritmo greedy *para SCHEDULING es correcto.*

Prueba.

ejercicio Ayuda: se prueba por el absurdo, suponiendo que existe una mejor solución que la encontrada por el algoritmo greedy, y se llega a una contradicción. □

- **Implementación:**
  - se ordenan los procesos por orden creciente de tiempo de servicio, y se implementa el ciclo *greedy*.
  - como el cuerpo del ciclo *greedy* es de $\Theta(1)$, y el ciclo no se repite más de n veces, el tiempo del algoritmo en general estará dominado por el tiempo del ordenamiento: $\Theta(n \log n)$.

  (ejercicio)
- existen numerosas variantes de este problema (con más de un procesos, con límites a la espera de los procesos, con ganancia por la ejecución del proceso antes del límite, etc.), la mayoría de las cuales tienen algoritmos *greedy* correctos.

Definición del problema

- los códigos de Huffman se usan para comprimir información eficientemente, logrando una reducción del 20 % al 90 % (dependiendo de la información original)
- la información es representada como una secuencia de caracteres, donde cada caracter tiene una frecuencia conocida
- suponemos que cada caracter es representado en binario

Ejemplo

- se tienen 6 caracteres: `a`,..., `f`. Si se quiere codificar información escrita en estos caracteres con códigos de longitud fija se necesitan $\lceil \log_2 6 \rceil = 3$ bits por código.
- un archivo de 1.000 caracteres necesitará 3.000 bits
- si se permiten códigos de longitud variable, se pueden asignar códigos cortos a caracteres frecuentes y códigos más largos a caracteres poco frecuentes. Es necesario conocer de antemano la frecuencia con la que aparecen los caracteres

Ejemplo

- en el caso anterior, con código variable se puede tener por ejemplo:

	a	b	c	d	e	f
Frecuencia (%)	45	13	12	16	9	5
Código variable	`0`	`101`	`100`	`111`	`1101`	`1100`

- sólo $(45 \cdot 1 + 13 \cdot 3 + 12 \cdot 3 + 16 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 5 \cdot 4) \cdot 10 = 2{,}240$ bits son necesarios con esta codificación
- es importante conocer cuál es la mejor codificación, es decir la que minimiza la longitud de los mensajes

Definición del problema

- no todas las codificaciones variables son aceptables. Para que la decodificación no produzca ambigüedades, se debe asegurar que

  ningún codigo debe ser prefijo de otro

- se puede demostrar que siempre se puede alcanzar una compresión optimal usando estos códigos prefijos en los que ningún código es prefijo de otro código

Definición del problema

- es muy fácil representar los códigos prefijos con un árbol binario en donde cada camino representa el código de la hoja
- toda codificación optimal es representada por un árbol donde cada nodo interno está completo, es decir tiene exactamente dos hijos
- esto significa que si C son los caracteres, se necesita un árbol binario de $|C|$ hojas y $|C| - 1$ nodos internos (ejercicio)

Definición del problema

- sea para cada $c \in C$, $c.freq$ la frecuencia de c. Si usamos una codificación representada por un árbol T, entonces sea $\delta_T(c)$ la profundidad en T de la hoja con caracter c, o lo que es lo mismo la cantidad de dígitos de la codificación de c
- el número de bits necesarios para codificar usando T es

$$B(T) = \sum_{c \in C} c.freq * \delta_T(c)$$

- tomaremos a $B(T)$ como el costo de la codificación T
- el problema algorítmico HUFFMAN consiste entonces en dada una serie de caracteres C con sus frecuencias, encontrar una codificación T optimal en $B(T)$

Algoritmo de codificación de Huffman

- Huffman diseñó un algoritmo *greedy* de $O(n \log n)$ (ejercicio) basado en la E.D. heap

```
n ::= |C|; Q.construirHeap(C)
FOR i ::=1 TO n-1
   x ::=Q.extraerMin(); y ::=Q.extraerMin()
   z ::= nuevo Nodo
   z.left ::= x; z.right ::= y
   z.freq ::= x.freq+y.freq
   Q.insertar(z)
ENDFOR
RETURN Q
```

Correctitud

- sea C un alfabeto en donde cada $c \in C$ tiene frecuencia $c.freq$; y sean $x, y \in C$ los caracteres con menores frecuencias en C.

Lema 3

C tiene una codificación prefija optimal en la cual x e y son los hermanos de máxima profundidad.

Correctitud - demostración lema 3

Prueba.

Sea T una codificación optimal y $a, b \in C$ los caracteres hermanos de máxima profundidad en T. Suponemos $a.freq \leq b.freq$ y $x.freq \leq y.freq$, luego $x.freq \leq a.freq$ y $y.freq \leq b.freq$. Construimos T' intercambiando en T a con x; y T'' intercambiando en T' b con y. Se muestra $B(T) - B(T') \geq 0$ y $B(T') - B(T'') \geq 0$. Como T es optimal, entonces T'' también. $\square$

Correctitud

- sea C' el alfabeto basado en C que se obtiene eliminando x e y, y agregando un nuevo caracter z tal que $z.freq = x.freq + y.freq$.

Lema 4

Sea T' una codificación optimal para C'. Entonces se puede obtener una codificación optimal T para C reemplazando en T' el nodo hoja de z por un nodo interno con dos hijos x e y.

Prueba.

Se muestra por contradicción que a partir de T'' obtenido de aplicar el lema 3 a una codificación mejor que T en C, se obtiene una codificación mejor que T'. $\square$

Correctitud

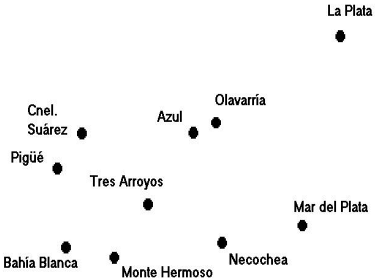
Teorema 5

El algoritmo de Huffman produce una codificación optimal.

Prueba.

Por inducción en las iteraciones aplicando el lema 4. □

Definición del problema



- se tienen *n* ciudades y las distancias entre cada par de ellas, representadas en una matriz.
- la ciudad de origen es 1.

- Problema: VIAJANTE se quiere partir de una de ellas y visitar exactamente una vez cada ciudad, regresando al punto de partida al final, y recorriendo la menor distancia posible.

Algoritmo *greedy*

- un algoritmo *greedy* obvio consiste en, empezando del punto de partida, elegir en cada paso la ciudad no visitada más próxima.
- su tiempo de ejecución sería de $O(n^2)$
- pero no es un algoritmo correcto

Ejemplo

- matriz de distancias

Ciudades	1	2	3	4	5	6
1	–	3	10	11	7	25
2		–	8	12	9	26
3			–	9	4	20
4				–	5	15
5					–	18

- solución *greedy*: 1,2,3,5,4,6,1, con distancia 60.
- solución optimal: 1,2,3,6,4,5,1, con distancia 58.

- pero, ¿no será VIAJANTE como MOCHILA donde varias estrategias de selección no funcionan, pero existe una estrategia que sí genera un un algoritmo correcto?
- se puede demostrar que ninguna estrategia de selección directa genera un algoritmo *greedy* correcto en todos los casos.
- es más, para cualquier estrategia se puede encontrar ejemplos de grafos cuya solución *greedy* es arbitrariamente muy mala.

Resumen

- los algoritmos greedy resuelven problemas de optimizacion, a traves de un ciclo donde se seleccionan o descartan elementos con estrategias sencillas
- no siempre funcionan, es necesario asegurarse que la estrategia elegida sea correcta para el problema en cuestión
- si funcionan, el tiempo de ejecución es del orden de la cantidad de elementos por el tiempo de selección y chequeo de viabilidad, lo que los hacen algoritmos muy eficientes