Ley de Ampère Generalizada

Con lo visto hasta ahora... podemos escribir las ec. de Maxwelll como:

Forma diferencial		Forma integral
$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$	← Ley de Gauss →	$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_o}$
$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$	← sin nombre →	$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$
$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	← Ley de Faraday →	$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \vec{\mathbf{J}}$	← Ley de Ampère →	$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_o I$

Ley de Ampère Generalizada

Matemáticamente $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{f}}) = 0 \longrightarrow$ ***Siempre!!!***

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) = -\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}})}{\partial t} = 0$ ✓ No existen monopolos magnéticos!

Ley de Ampère Generalizada

Matemáticamente $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{f}}) = 0 \longrightarrow$ ***Siempre!!!***

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) = -\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}})}{\partial t} = 0$ ✓ No existen monopolos magnéticos!

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) = \mu_o(\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}) \neq 0$ ✗ Solo en Corrientes Estacionarias $\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0$

Ley de Ampère Generalizada

Matemáticamente $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{f}}) = 0 \longrightarrow$ ***Siempre!!!***

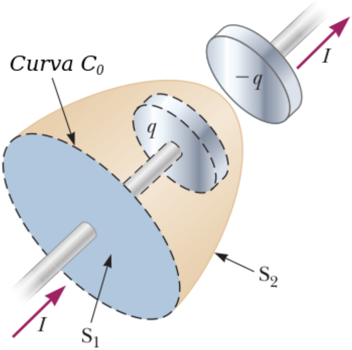
$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) = -\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}})}{\partial t} = 0$ ✓ No existen monopolos magnéticos!

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) = \mu_o(\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}) \neq 0$ ✗ Solo en Corrientes Estacionarias $\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0$

¿Qué pasa cuando las corrientes **NO** son estacionarias?

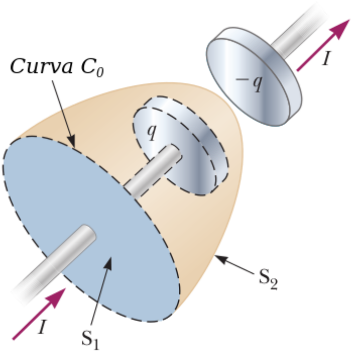
Ley de Ampère Generalizada

James Clerk Maxwell (1831–1879)
Físico Escocés



Ley de Ampère Generalizada

Mientras el capacitor está siendo cargado....



de la Ley de Ampère...

$$\oint_{Co} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_o \int_S \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \mu_o I$$

Para S_1:

$$\mu_o \int_{S_1} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \mu_o I$$

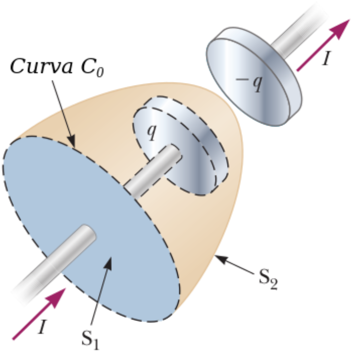
$$\oint_{Co} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_o I$$

Para S_2:

$$\mu_o \int_{S_2} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

$$\oint_{Co} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0$$

Mientras el capacitor está siendo cargado....



de la Ley de Ampère...

$$\oint_{Co} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_o \int_S \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \mu_o I$$

Para S_1:

$$\mu_o \int_{S_1} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \mu_o I$$

$$\oint_{Co} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_o I$$

Para S_2:

$$\mu_o \int_{S_2} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

$$\oint_{Co} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0$$

La corriente I se está almacenando en el capacitor!!

Ampère hasta ahora... es correcta para corrientes estacionarias: $\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0$

Ley de Ampère Generalizada

Maxwell modifica la Ley de Ampère para corrientes estacionarias...

(1) Ley de Ampêre $\longrightarrow \ \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \vec{\mathbf{J}}$

(2) Ecuación de continuidad $\longrightarrow \ \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

(3) Ley de Gauss $\longrightarrow \ \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\rho}{\epsilon_o}$

De (3): $\rho = \epsilon_o \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}$

Si sustituimos en (2):

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} + \epsilon_o \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}})}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{\mathbf{J}} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right) = 0$$

Redefiniendo (1):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) = \mu_o \nabla \cdot \left(\vec{\mathbf{J}} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right) = 0 \quad \checkmark$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \vec{\mathbf{J}} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}}$$

Ley de Ampère Generalizada

Integrando en una superfie arbitraria...

$$\int \nabla \times \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \mu_o \int \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} + \mu_o \epsilon_o \int \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

Recordando

$$\int \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = I$$

$$\int \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{d}{dt} \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Aplicando el teorema de Stokes: $\int \nabla \times \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}}$

$$\boxed{\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_o I + \mu_o \epsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt}}$$

Ley de Ampère Generalizada

- Esta ecuación **NO** modifica la magnetostática, ya que cuando $\vec{\mathbf{E}}$ es constante (*no depente del tiempo*) $\longrightarrow \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \vec{\mathbf{J}}$
- Así como un campo magnético variable en el tiempo induce un campo eléctrico, el término que agrega Maxwell predice que:

> Un $\vec{\mathbf{E}}(t)$ que *varía* en el tiempo induce un $\vec{\mathbf{B}}(t)$

- El término extra, que ha sido una propuesta teórica, fue verificado años después por **Hertz** y en experimentos relacionados con ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Forma diferencial		Forma integral
$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$	← Ley de Gauss →	$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_o}$
$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$	← sin nombre →	$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$
$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	← Ley de Faraday →	$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \vec{\mathbf{J}} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$	← Ley de Ampère →	$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_o I + \mu_o \epsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt}$

Las ec. de **Maxwell** junto con la ley de la **Fuerza de Lorentz** $\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}})$ describen por completo la ***Teoría Electrodinámica***

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Las ecuaciones de **Maxwell** para los campos $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en el vacío, y en ausencia de cargas eléctricas ($\rho = 0$) y corrientes ($I = 0$) resultan:

$$(1) \quad \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$(3) \quad \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

$\Longrightarrow$

Son ecuaciones diferenciales de 1^{er} orden donde $\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están acoplados en los rotores

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Aplicando el rotor ($\nabla \times \quad$) sobre (3) y (4) *para desacoplar...*

Recordando... $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

$$(3) \qquad \nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$-\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right)$$

$$(4) \qquad \nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) = \mu_o \epsilon_o \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right)$$

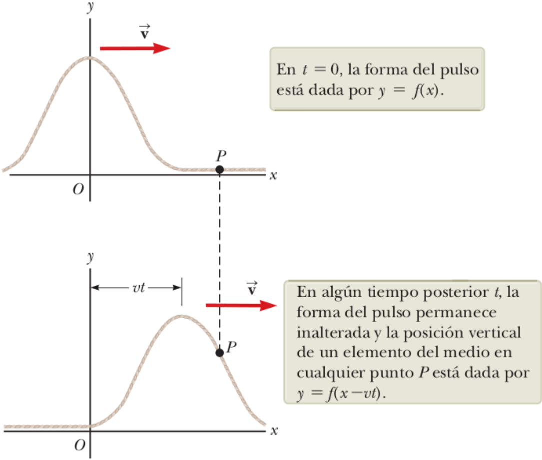
$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{\mathbf{E}} \right)$$

$$-\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}}$$

Propagación de una onda



$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

$$y(x,t) = A\sin[k(x - vt) + \delta]$$

$$\boxed{y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)}$$

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k}}$$

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Obtenemos la Ec. de ondas en 3D...

Ec. diferenciales de 2^{do} orden...

$$\boxed{\nabla^2\vec{\mathbf{E}} = \mu_o\epsilon_o\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{\mathbf{B}} = \mu_o\epsilon_o\frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}}$$

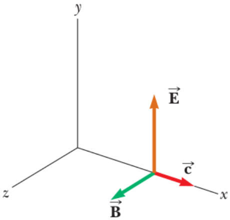
Donde la velocidad de propagación de la onda será $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_o\epsilon_o}}$

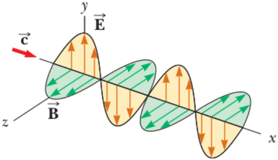
$$\epsilon_o = 8{,}854\times 10^{-12}[C^2/(N\cdot m^2)]$$
$$\mu_o = 1{,}257\times 10^{-6}[N/A^2]$$

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o\epsilon_o}} = 299792458\ \ [m/s] \approx 300000\ \ [km/s]}$$

Obtenemos la ***velocidad de la luz!!!***

Ondas electromagnéticas planas





Podemos escribir las soluciones como:

$$\vec{\mathbf{E}}(x,t) = \vec{\mathbf{E}}_o e^{i(kx-\omega t)} \qquad \vec{\mathbf{E}}_o \in \mathbb{C}$$

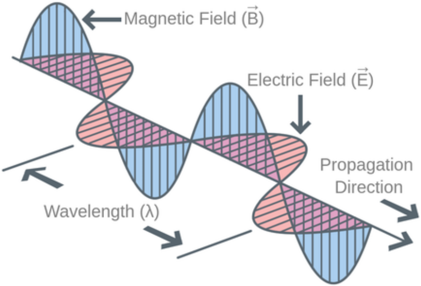
$$\vec{\mathbf{B}}(x,t) = \vec{\mathbf{B}}_o e^{i(kx-\omega t)} \qquad \vec{\mathbf{B}}_o \in \mathbb{C}$$

Donde $\mathbf{k} = \mathbf{2}\pi/\lambda$ es el n° de onda angular y λ la longitud de onda.
$\omega = \mathbf{2}\pi/\mathbf{f}$ es la frecuencia angular y f frecuencia lineal de la onda

$$v_{propagación} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi\lambda} = \lambda f = c$$

$\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ deben ser mutuamente perpendiculares y a su vez perpendiculares a la dirección de propagación de la onda (x en este caso)

Ondas electromagnéticas planas



$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \tilde{E}_o e^{i(\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}-\omega t)} \ \hat{\mathbf{n}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{c}\tilde{E}_o e^{i(\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}-\omega t)}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})$$

con $\tilde{E}_o$ y $\tilde{B}_o \in \mathbb{C}$

$\vec{\mathbf{E}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ deben ser mutuamente perpendiculares y a su vez perpendiculares a la dirección de propagación de la onda

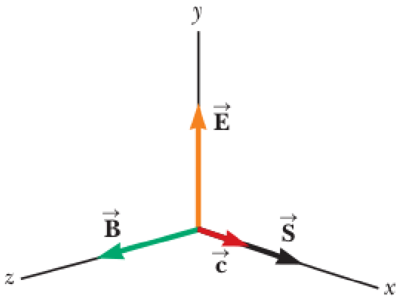
Energía transportada por ondas electromagnéticas

Vector de Poynting

La rapidez de flujo de la energía en una onda electromagnética se representa mediante un vector $\vec{\mathbf{S}}$, llamado ***vector de Poynting***

$$\boxed{\vec{\mathbf{S}} \equiv \frac{1}{\mu_o}\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}$$

$$[\vec{\mathbf{S}}] = \frac{[\vec{\mathbf{E}}][\vec{\mathbf{B}}]}{\mu_o} = \frac{W}{m^2}$$



Radiación electromagnética: un método de transferencia de energía a través de la frontera de un sistema