TEOREMA 1 el algoritmo greedy para el problema de la MOCHILA es correcto.

DEM: qpq la solución que retorna el algoritmo es optimal

qpq si X es la solución que retorna el algoritmo greedy y Y es cualquier otra solución viable, entonces

$$\text{valor}(X) \geq \text{valor}(Y) \qquad \text{peso}(Y) \leq W$$

$$\text{qpq} \quad \text{valor}(X) - \text{valor}(Y) \geq 0 \qquad \text{peso}(X) = W$$

DEM: $\text{valor}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \qquad 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i$

$$\text{valor}(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

$$\text{valor}(X) - \text{valor}(Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i v_i - y_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} ((x_i - y_i) v_i) \overset{*}{=}$$

Suponemos sin pérdida de generalidad que los elementos en X están ordenados por máximo $\frac{v_i}{w_i}$

$$X = \{1, 1, 1, \dots, 1, x_j, 0, 0, \dots 0\}$$
$$x_j > 0$$

$$\overset{*}{=} \sum_{i=1}^{j-1} ((\overbrace{1 - y_i}^{\geq 0}) v_i) + (x_j - y_j) v_j + \sum_{i=j+1}^{n} ((\overbrace{0 - y_i}^{\leq 0}) v_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \Big(\overbrace{(1-y_i)}^{\geq 0} v_i \Big) + (x_j - y_j)\, v_j + \sum_{i=j+1}^{n} \Big(\overbrace{(0-y_i)}^{\leq 0} v_i \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \Big((1-y_i)\, v_i \frac{w_i}{w_i} \Big) + (x_j - y_j)\, v_j \frac{w_j}{w_j} + \sum_{i=j+1}^{n} \Big((0-y_i)\, v_i \frac{w_i}{w_i} \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \Big((1-y_i) \frac{v_i}{w_i} w_i \Big) + (x_j - y_j) \frac{v_j}{w_j} w_j + \sum_{i=j+1}^{n} \Big((0-y_i) \frac{v_i}{w_i} w_i \Big) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{j-1} \Big((1-y_i) \frac{v_j}{w_j} w_i \Big) + (x_j - y_j) \frac{v_j}{w_j} w_j + \sum_{i=j+1}^{n} \Big((0-y_i) \frac{v_j}{w_j} w_i \Big) =$$

$$= \frac{v_j}{w_j} \left[\sum_{i=1}^{j-1} \Big((1-y_i)\, w_i \Big) + (x_j - y_j)\, w_j + \sum_{i=j+1}^{n} \Big((0-y_i)\, w_i \Big) \right] =$$

$$= \frac{v_j}{w_j} \left[\sum_{i=1}^{j-1} \Big((x_i - y_i)\, w_i \Big) + (x_j - y_j)\, w_j + \sum_{i=j+1}^{n} \Big((x_i - y_i)\, w_i \Big) \right] =$$

$$= \frac{v_j}{w_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \Big((x_i - y_i)\, w_i \Big) \right) =$$

$$= \frac{v_j}{w_j} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i w_i) - \sum_{i=1}^{n} (y_i w_i) \right) =$$

$$= \frac{v_j}{w_j} \Big(peso(x) - peso(y) \Big) = \underbrace{\frac{v_j}{w_j}}_{\geq 0} \underbrace{\big(W - peso(y) \big)}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq 0 \quad \square$$