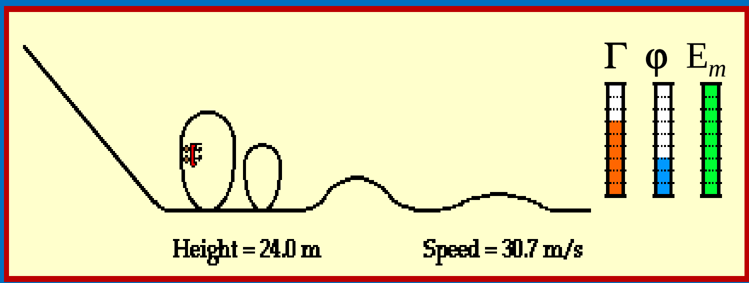
Fuerzas conservativas



$$\Delta E_m = 0$$

La Energía Mecánica se conserva

$$E_m = \Gamma + \varphi$$

Se define la Energía Potencial φ tal que sumada a la Energía Cinética Γ es igual la E Mecánica E_m.

$$\Delta\varphi = -\Delta\Gamma$$

En un proceso donde intervienen fuerzas conservativas, la variación de energía cinética es igual a menos la variación de la energía potencial.

Fuerzas conservativas

$$\Delta\Gamma = \Gamma_B - \Gamma_A = \int_A^B \overrightarrow{F}, \overrightarrow{dl}$$

Teorema de las Fuerzas Vivas: la variación de la energía Cinética de un cuerpo es igual al trabajo que realiza la fuerza que actúa sobre él.

$$\Delta\varphi = -\Delta\Gamma$$

En un proceso donde intervienen fuerzas conservativas, la variación de energía cinética es igual a menos la variación de la energía potencial.

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \overrightarrow{F_c}, \overrightarrow{dl}$$

La variación de Energía Potencial es independiente del camino que se haya elegido para calcular el trabajo que realiza una fuerza conservativa.

$$\nabla \wedge \overrightarrow{F_c} = 0$$

$$\overrightarrow{F_c} = -\nabla\varphi$$

Energía y Potencial Eléctrostático

$$\nabla \wedge \vec{F}_e = 0 \qquad \vec{F}_e = -\nabla U$$

La Fuerza Eléctrica es una Fuerza CONSERVATIVA

Es fácil verificar esto para carga puntual y coord. cartesianas

Se define el Potencial Eléctrico V como la U por unidad de carga

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_{ref}) = -\int_{ref}^{r} \vec{F}_e \cdot \vec{dl}$$

La diferencia de Energía Potencial Eléctrica U entre dos puntos, es el trabajo que realiza la fuerza eléctrica, independientemente del camino realizado.

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_{ref}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

La ΔV es independiente del camino tomado

$$\vec{E} = -\nabla V$$

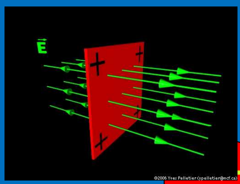
El V es una magnitud ESCALAR!

$$[V] = Volts = \frac{Joules}{C}$$

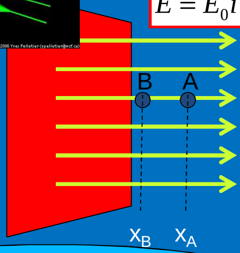
El potencial eléctrostático V…

- ✓ Es el trabajo *por unidad de carga* para llevar una partícula de un lugar a otro. Es independiente del camino tomado
- ✓ Una distribución de cargas tiene un potencial electrostático asociado
- ✓ Es una magnitud escalar…el cálculo del V es mucho más sencillo que el del campo (..cómo?)
- ✓ Está definido a menos de una constante (ref)

Potencial Electrostático de un campo eléctrico uniforme



$\vec{E} = E_0\breve{i}$

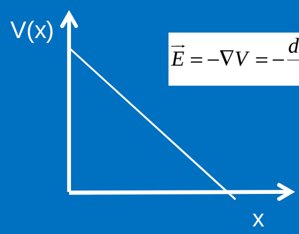


$V(\vec{r}) - V(\vec{r_{ref}}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E}, \vec{dl}$ $\vec{dl} = dx\breve{i}$

$$V_B - V_A = -\int_{x_A}^{x_B} \vec{E}, dx\breve{i} = -E_0(x_B - x_A)$$

$$V(x) - V_A = -E_0(x - x_A)$$

Al llevar una carga de prueba de x_A a x_B su Energía Potencial aumenta

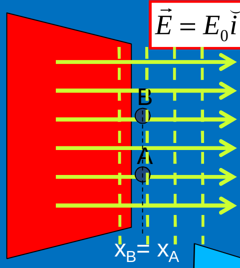


$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV(x)}{dx}\breve{i} = E_0\breve{i}$$

El Campo Eléctrico se dirige hacia donde el potencial decrece.

Potencial Electrostático de un campo eléctrico uniforme

$\vec{E} = E_0\breve{i}$



$\vec{dl} = dy\ \breve{j}$

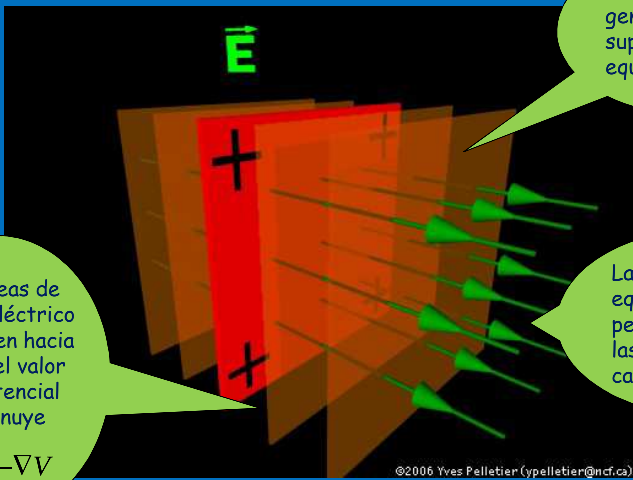
$$V_B - V_A = -\int_{y_A}^{y_B} \vec{E}, dy\breve{j} = 0$$

$$V_B = V_A$$

Al llevar una carga de prueba de y_A a y_B la energía potencial no cambia

Todos los puntos que están a la misma distancia del plano están al mismo potencial Eléctrostático y constituyen una SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL

Potencial Electrostático de un campo eléctrico uniforme



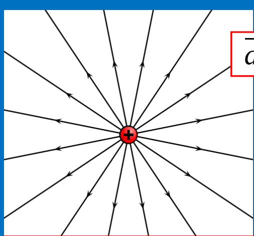
Un campo E genera superficies equipotenciales

Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo E

Las líneas de campo eléctrico se dirigen hacia donde el valor del potencial disminuye

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Potencial Electrostático para una carga puntual



$$\vec{dl} = dr\,\breve{e}_r$$

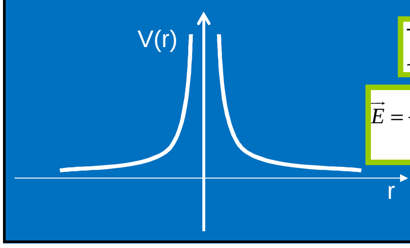
$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_{ref}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E}, \vec{dl}$$

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}, dr'\,\breve{e}_r = -\int_{\infty}^{r} k\frac{Q}{r'^2}\,dr' = k\frac{Q}{r'}\Big|_{\infty}^{r} = k\frac{Q}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\,\breve{e}_r$$

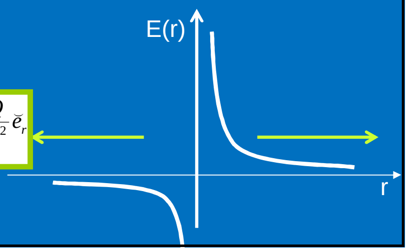
$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|}}$$

$$V(\infty) = 0$$

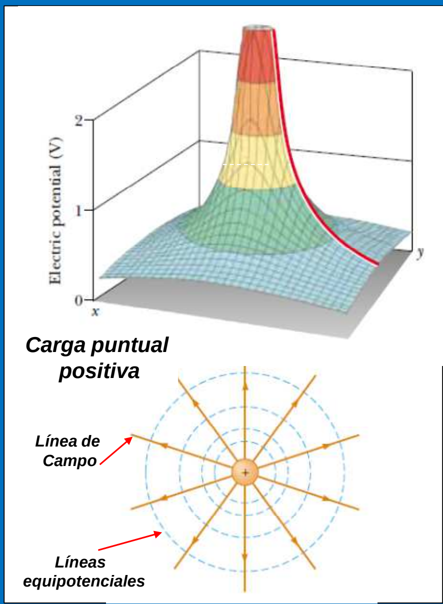


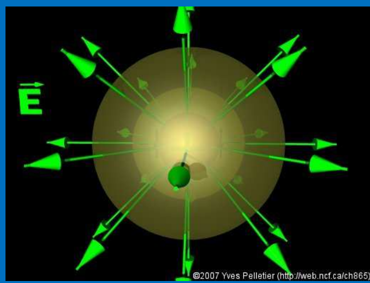
$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{E} = -\frac{dV(\vec{r})}{dr}\,\breve{e}_r = k\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\,\breve{e}_r$$



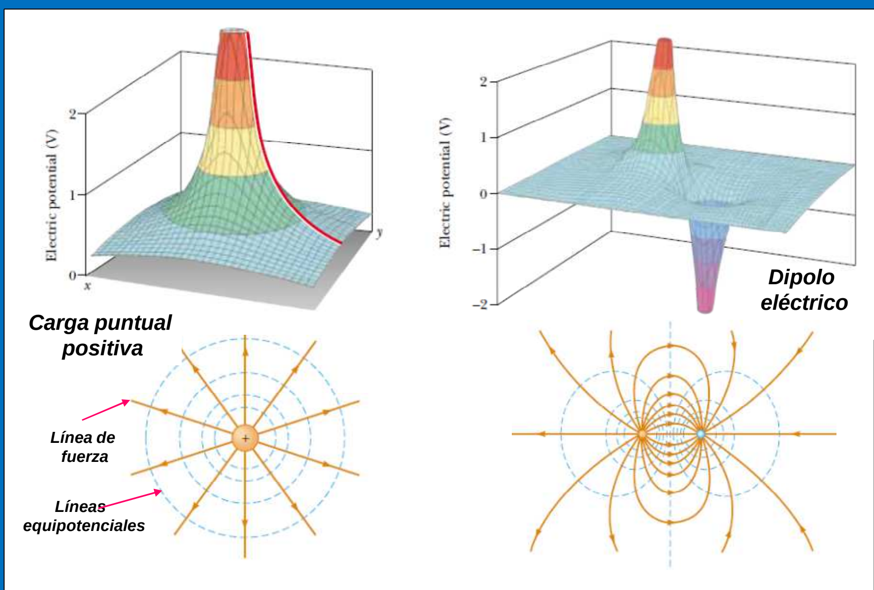
Potencial de una carga puntual





Las líneas de Campo E cortan las superficies equipotenciales en forma perpendicular

Otra visión del Potencial

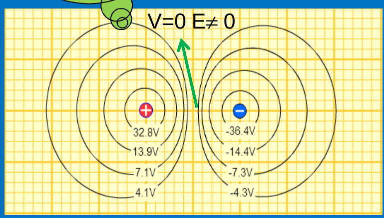


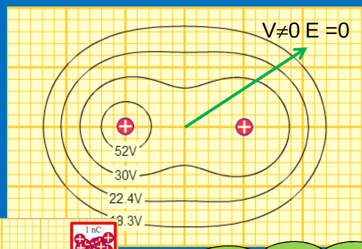
Para una distribución de cargas puntuales

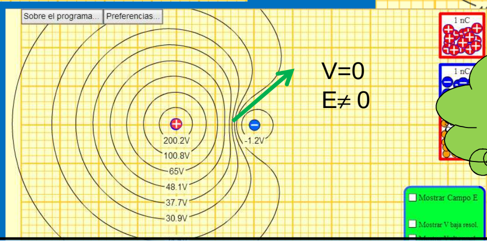
$\vec{E} = -\nabla V$

Que E=0 no implica que V=0 y viceversa!

$$V\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}\right]$$

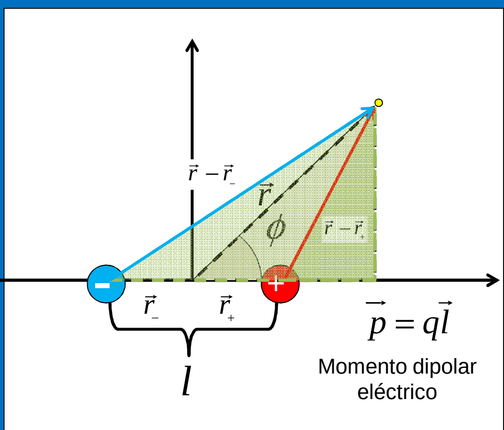






Lo que realmente interesa es la VARIACION del V

Potencial eléctrico de un dipolo



$$V(\vec{r}) = V_+(\vec{r}) + V_-(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left|\vec{r} - \vec{r}_+\right|} - \frac{q}{\left|\vec{r} - \vec{r}_-\right|}\right]$$

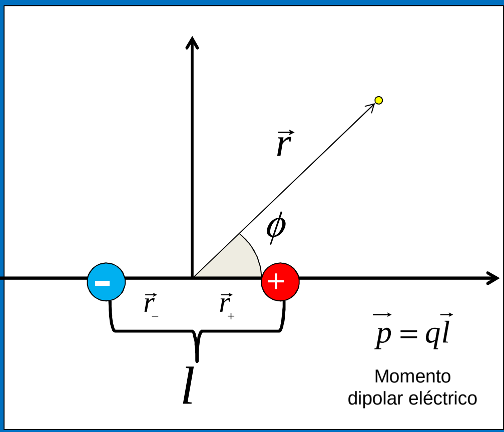
$$\left|\vec{r} - \vec{r}_+\right|^2 = \left(r\sin\phi\right)^2 + \left(r\cos\phi - \tfrac{l}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\tfrac{l}{2}\right)^2 - rl\cos\phi$$

$$\left|\vec{r} - \vec{r}_-\right|^2 = \left(r\sin\phi\right)^2 + \left(r\cos\phi + \tfrac{l}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\tfrac{l}{2}\right)^2 + rl\cos\phi$$

$$V(\vec{r}) = k\left[\frac{q}{\left(r^2 + \left(\tfrac{l}{2}\right)^2 - rl\cos\phi\right)^{1/2}} - \frac{q}{\left(r^2 + \left(\tfrac{l}{2}\right)^2 + rl\cos\phi\right)^{1/2}}\right] \approx k\frac{ql\cos\phi}{r^2}$$

Aprox. de Taylor y para r>>l

Potencial eléctrico de un dipolo



Para $\vec{r} \gg \vec{l}$

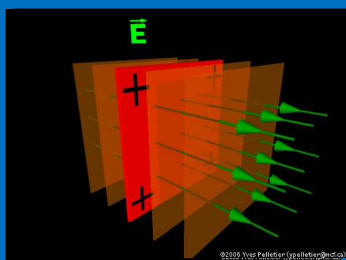
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos(\phi)}{r^2}$$

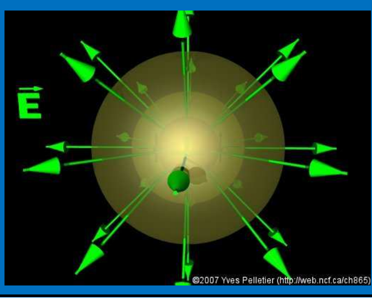
A grandes distancias el potencial eléctrico del dipolo decae como $1/r^2$

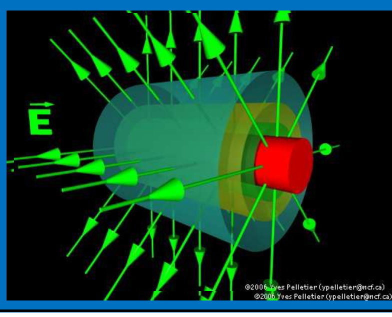
$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos(\phi)}{r^3}, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\,sen(\phi)}{r^3}\right)$$

A distancias muy grandes la intensidad del Campo Eléctrico decae como $1/r^3$

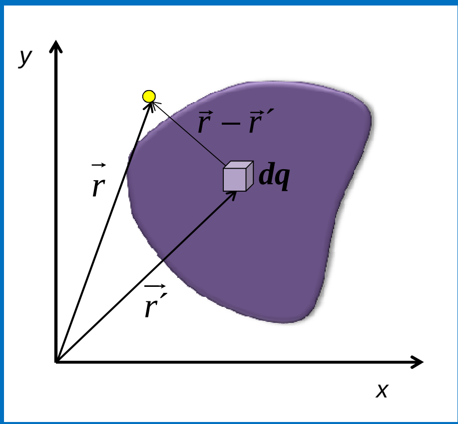
Líneas de campo y superficies EQUIPOTENCIALES







Potencial Eléctrico para distribuciones contínuas de carga



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$

La distr de carga no llega hasta infinito

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

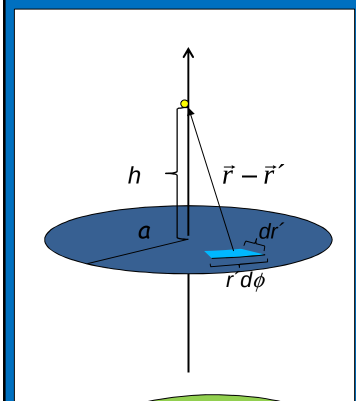
$dq = \lambda dl'$ $dq = \sigma dS'$ $dq = \rho dV'$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

El Campo E brinda información de cómo varía el potencial.

OJO! No basta con conocer el potencial en un punto!!

Potencial de un disco cargado calculado a lo largo del eje de simetría



$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r}) \qquad dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$dq = \sigma dS' = \sigma dr' r' d\phi$$

$\vec{r} = h\breve{e}_z$

$\vec{r}' = r'\cos\phi\,\breve{e}_x + r' sen\phi\,\breve{e}_y$

$\vec{r}-\vec{r}' = h\breve{e}_z - (r'\cos\phi\,\breve{e}_x + r' sen\phi\,\breve{e}_y)$

$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{h^2 + r'^2}$

$$V(h) = k\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sigma dr' r' d\phi}{\sqrt{h^2+r'^2}} = k\sigma 2\pi(\sqrt{h^2+a^2} - h)$$

Para conocer E_z tengo que conocer el valor del potencial a lo largo del eje Z, V(z)

$$\vec{E}_z = -\frac{\partial V(z)}{\partial z}\breve{e}_z = k\sigma 2\pi\left(1 - \frac{z}{(z^2+a^2)^{1/2}}\right)\breve{e}_z$$

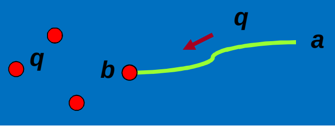
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Campo_y_potencial_en_el_eje_de_un_anillo_cargado_Primera_Convocatoria_Ordinaria_2010/11_(F2GIA)

Energía de una distribución de cargas puntuales

La Energía Potencial de una distribución de cargas es igual al trabajo que es necesario realizar para reunirlas

El trabajo requerido para llevar una carga Q de a hasta b es igual a la Energía potencial Electrostática entre ambos puntos

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = -Q\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q[V(b) - V(a)]$$



$$W_1 = 0$$

$$W_2 = q_2 V(r_{21}) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{21}}\right)$$

$$W_3 = q_3(V(r_{31}) + V(r_{32})) = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{31}} + \frac{q_2}{r_{32}}\right)$$

$$W_4 = q_4 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{41}} + \frac{q_2}{r_{42}} + \frac{q_3}{r_{43}}\right)$$

$$W_{tot} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = U$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i}$$