Guía N°0
Herramientas de Física y Matemática

Problema 1. Dadas dos partículas en el espacio ubicadas en los puntos $P_1 = (4, -2, 4)$ y $P_2 = (-2, 1, 2)$.

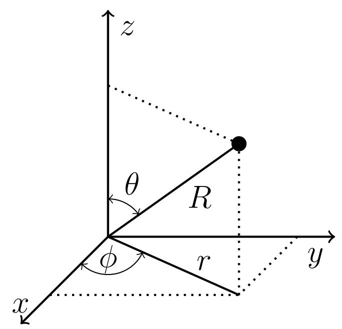
(a) Hallar los vectores posición de cada partícula ($\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$) y el vector posición de la partícula 1 respecto de la partícula 2 ($\vec{R_{12}}$).

(b) Determinar el modulo y el vector unitario (versor) de cada vector.

(c) Graficar los vectores $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$ y $\vec{R_{12}}$.

(d) Hallar los productos $\vec{R_1} \cdot \vec{R_2}$ y $\vec{R_1} \times \vec{R_2}$.

Problema 2. Escribir las ecuaciones que permiten describir la posición de un punto **P** en coordenadas cartesianas (x, y, z) a partir de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) y esféricas (R, θ, ϕ).



(a) La posición de un punto en coordenadas cilíndricas está indicada por $(3, 4\pi/3, -4)$. Especificar la situación del punto en coordenadas cartesianas, analítica y gráficamente, y en coordenadas esféricas.

(b) Transformar las coordenadas cartesianas (4, -6, 12) a coordenadas esféricas. Ubique el punto en un esquema tridimensional indicando los ángulos θ y ϕ.

(c) Describir las superficies que en coordenadas cilíndricas corresponden a solo $r = cte$, solo $\phi = cte$ y solo $z = cte$.

Problema 3. Calcular los *factores de escala* o *coeficientes métricos* $h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|$ para distintos sistemas de coordenadas ortogonales (cartesianos $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$, cilíndricos $(q_1, q_2, q_3) = (r, \phi, z)$ y esféricos $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi)$) y determinar:

(a) El diferencial de longitud vectorial para los tres sistemas de coordenadas.

(b) El vector diferencial de superficie para los tres planos determinados por el sistema de ejes cartesianos .¿Cómo sería para planos de ejes de simetría cilíndrica?¿es indistinto el orden en el que se realiza el producto vectorial?

(c) El diferencial de volumen dV para los tres sistemas de coordenadas.

Problema 4. Utilizando los diferenciales adecuados, obtener a través del cálculo integral:

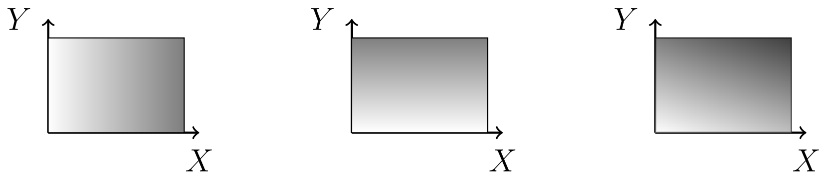
(a) el perímetro de un círculo de radio r.

(b) el área de un anillo de radio interno R_a y radio externo R_b.

(c) el área de una esfera de radio R.

(d) el volumen de una esfera de radio R.

Problema 5. ¿Cómo describiría matemáticamente la densidad superficial (σ) de tinta en las distintas figuras? ($A = cte$).

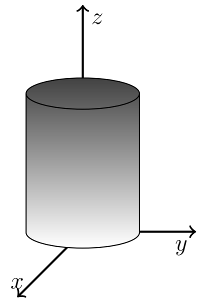


☐ $\sigma = A \cdot x$
☐ $\sigma = A \cdot y$
☐ $\sigma = A \cdot x \cdot y$
☐ $\sigma = A \cdot (x + y)$
☐ $\sigma = A$

Problema 6.

(a) ¿Cuál es la masa de cuerpo cilíndrico de plomo de 1 cm de radio y 10 cm de alto? (densidad del $Pb = 11340\ {}^{kg}/_{m^3}$)

(b) Un recipiente cilíndrico de radio R y altura L contiene un líquido cuya densidad varía linealmente con la altura $\rho(z) = A \cdot z$ como se muestra en la figura (A es una constante con unidad de ${}^{gr}/_{cm^4}$)¿Cuál será la masa total del líquido contenido en el recipiente?



Problema 7. Una ciudad de 500.000 habitantes y 10 km de radio presenta una distribución de población tal que es máxima en el centro geográfico de la misma y disminuye hacia las afueras. La densidad superficial de población que describe esta característica es $\sigma(r) = {}^{k}/_{r}$, siendo k una constante que está en unidades de habitantes/km. ¿Cuántos habitantes vivirán a una distancia de entre 2 km y 3 km del centro de la ciudad? Realice un esquema representativo de la densidad de población.

Problema 8. Encuentre la carga eléctrica total contenida en los siguientes arreglos:

(a) Un cuerpo cilíndrico de radio interno **a**, radio externo **b** y altura **L** cuya densidad de carga viene dada por $\rho(r, \phi, z) = C\frac{sen\phi}{r^3}$ (siendo C una constante con unidades apropiadas).

(b) Una nube de electrones confinada en una región entre dos esferas concéntricas de 2 cm y 5 cm de radio cuya densidad de carga viene dada por $\rho(R, \theta, \phi) = \frac{-3\times10^{-8}[C\cdot m]}{R^4}cos^2\phi$

Problema 9. Dadas las siguientes funciones, calcular el gradiente, divergencia o rotacional cuando corresponda. (*Nota: asegurarse de utilizar el sistema de coordenadas adecuado*).

(a) $V = V_0 e^{-x} sen(\frac{\pi y}{4})$

(b) $V = E_0 r cos\phi$

(c) $\vec{A} = r\hat{e_r}$

(d) $\vec{B} = -y\hat{i} + x\hat{j}$

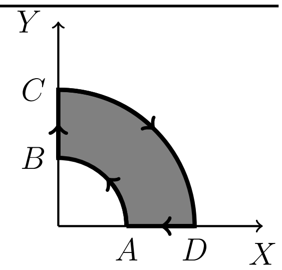
(e) $\vec{C} = -x\hat{i} - y\hat{j} + 2z\hat{k}$

(f) $\vec{D} = r^2 cos\phi \hat{e_r} + r^2 sen\phi \hat{e_\phi}$

(g) $\vec{E} = {}^{k}/_{r}\hat{e_\phi}$

Problema 10. Calcular el Laplaciano de la función escalar $f(x, y, z) = x^4 z - 3xy - zxy$

Problema 11. Suponga una función vectorial $\vec{F} = 5r \cdot sen\phi \hat{e_r} + r^2 cos\phi \hat{e_\phi}$

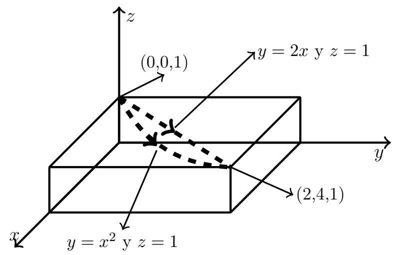


(a) Calcule la $\oint \vec{F} \cdot \vec{dl}$ a lo largo del contorno ABCDA en la dirección indicada en la figura.

(b) Calcule $\nabla \times \vec{F}$.

(c) Calcule $\int (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{dS}$ sobre el área sombreada y compare el resultado con el que obtuvo en la parte a)

Problema 12. Dados los campos de fuerza $\vec{F}(x, y, z) = 2y\hat{\imath} + 2x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ y $\vec{G}(x, y, z) = 3xy\hat{\imath} - 5z\hat{\jmath} + 10x\hat{k}$



(a) calcular el trabajo realizado por cada uno de ellos al mover un objeto desde un punto (0,0,1) hasta el punto (2,4,1) a través de los siguientes caminos: $C_1 : y = x^2, z = 1$ $C_2 : y = 2x, z = 1$

(b) Hallar el rotor de cada uno de los campos.

(c) Determinar cuál de estos campos es conservativo y hallar la función potencial correspondiente.

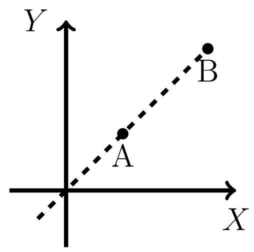
Problema 13. Hallar el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = 4xz\hat{\imath} - y^2\hat{\jmath} + yz\hat{k}$ a través de la superficie S del cubo limitado por x=0, x=1, y=0, y=1, z=0 y z=1:

(a) calculando la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS}$.

(b) haciendo uso del teorema de la divergencia de Gauss.

Problema 14. Calcular el flujo del campo $\vec{A}(R, \theta, \phi) = \frac{1}{R^2}\hat{e_R}$ sobre una esfera de radio R centrada en el origen. ¿Cómo varía el flujo a través de la esfera a medida que el radio R aumenta? ¿Es válida esta afirmación si el campo fuera de la forma $^1/_R$?¿Este resultado contradice el teorema de la divergencia? (*Nota: Ver Introduction to Electrodynamics de D.J. Griffiths, 4ta edición, Sección 1.5*)

Problema 15. Una partícula de masa m, cuando es liberada en el punto A experimenta una única fuerza $\vec{F} = C/_{R^2}\hat{e_R}$, que la mueve hacia el punto B.



(a) Calcular el trabajo que realiza la fuerza sobre la partícula cuando recorre la distancia $|r_B - r_A|$.

(b) Determinar la velocidad de la partícula al llegar al punto B (*ayuda: tome en consideración el Teorema de la Energía Cinética*).

Problema 16. Calcule el desarrollo en serie de Taylor para x=0 de la función $f(x) = \frac{1}{(1+x)^{1/2}}$ y de la función $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ hasta segundo orden.

Problema 17. Encuentre la función solución de la siguiente ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} + ax = b$ teniendo en cuenta que debe satisfacer que en t=0, x=0.

Problema 18. Se realiza una medición indirecta de una dada magnitud física. Los valores obtenidos con la calculadora son χ y ξ para el cálculo de la medida y para el cálculo de la incerteza respectivamente.

I) $\chi = 453$; $\xi = 0{,}51$
II) $\chi = 0{,}0237$; $\xi = 0{,}01$
III) $\chi = 56{,}789$; $\xi = 0{,}138$
IV) $\chi = 30{,}098$; $\xi = 0{,}05$
V) $\chi = 0{,}00003$; $\xi = 0{,}0000023$
VI) $\chi = 14000$; $\xi = 1201$

(a) Expresar χ en notación científica y determinar el número de cifras significativas.

(b) Expresar correctamente el resultado de la medición ($\chi \pm \xi$) escribiendo el error con una sola cifra significativa.

Problema 19. Considerando una medición indirecta donde $A = f(x, y, z, ...)$ y la incerteza absoluta asociada con dicha medición se calcula mediante la expansión en serie de Taylor de primer orden $\Delta A = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{r0} \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{r0} \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{r0} \Delta z + ...$ (incerteza máxima). Calcule la incerteza asociada a una medición indirecta donde $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2} \cdot sen(y)$, con $x = 4{,}5 \pm 0{,}1$ e $y = 1{,}57 \pm 0{,}01$ rad.

Problema 20. Calcular la pintura necesaria para pintar el techo de una habitación cuadrada de 20 m^2 de superficie y una altura de 3 m. (Una pintura de calidad rinde 100000 cm^2 por litro). ¿Cuánta pintura será necesaria para pintar el techo?

Problema 21. Exprese en litros y m^3 cada una las siguientes cantidades:

I) 32900 cm^3
II) 3 km^3
III) 1000 mm^3
IV) $0,5$ km^3

Problema 22. Dentro de un mismo sistema de unidades, cada magnitud puede ser escrita en función de otras unidades combinadas. Por ejemplo, dentro del sistema MKS, expresamos la fuerza en unidades de Newton, pero podríamos escribirla en $Kg.m/seg^2$. Sea cierto valor de presión expresado en Pascales (Pa), escribirlo en función otras magnitudes como:

I) Newton
II) Kg
III) Joules
IV) Watts

Bibliografía útil para resolver esta guía:

- *Fundamentos de Electromagnetismo para ingeniería* de D. Cheng, Cap. 2 (Biblioteca Central)

Algunas Identidades Vectoriales Útiles

- $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{C}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$
- $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{A}}) \cdot \vec{\boldsymbol{C}}) - \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{A}}) \cdot \vec{\boldsymbol{B}})$
- $\nabla(\phi V) = \phi \nabla V + V \nabla \phi$
- $\nabla \cdot (\phi \vec{\boldsymbol{A}}) = \phi \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \nabla \phi$
- $\nabla \times (\phi \vec{\boldsymbol{A}}) = \phi \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla \phi \times \vec{\boldsymbol{A}}$
- $\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) - \vec{\boldsymbol{A}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}})$
- $\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$
- $\nabla \times \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}$
- $\nabla \times \nabla V = 0$
- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = 0$
- $\int_V \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} dv = \oint_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{s}}$ (Teorema de la divergencia)
- $\int_S \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = \oint_C \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$ (Teorema de Stokes)

Operaciones de Gradiente, Divergencia, Rotacional y Laplaciano

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

- $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}$
- $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- $\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\boldsymbol{k}}$
- $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z)

- $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$
- $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- $\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$
- $\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Coordenadas esféricas (R, θ, ϕ)

- $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{R}} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{Rsen\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}$
- $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{Rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta sen\theta) + \frac{1}{Rsen\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
- $\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{R^2 sen\theta}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{R}} & R\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} & Rsen\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & (Rsen\theta)A_\phi \end{vmatrix} =$
  $\frac{1}{Rsen\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi sen\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{R}} + \frac{1}{R}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}$
- $\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial V}{\partial R}) + \frac{1}{R^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(sen\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{1}{R^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$