Algoritmos y Complejidad

Programación Dinámica

Pablo R. Fillottrani

Depto. Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur

primer semestre 2024

Programación Dinámica

Introducción

- Programación Dinámica (PD) resuelve problemas a través de combinar soluciones a subproblemas
- PD comienza resolviendo las instancias más simples de los problemas, y guardando sus resultados en alguna estructura de datos especial
- para construir soluciones de instancias más complejas, se divide la instancia en subproblemas más simples y se recuperan los resultados ya calculados de la estructura de datos
- PD se aplica cuando los subproblemas no son indenpendientes entre sí, es decir los subproblemas tienen subsubproblemas en común. Esto se denomina superposición de subproblemas

- PD se aplica generalmente a problemas de optimización, al igual que los algoritmos *greedy*.
- pasos en el desarrollo de un algoritmo PD:
    1. caracterizar la estructura de una solución optimal
    2. definir recursivamente el valor de la solución optimal
    3. computar el valor de las soluciones a los casos básicos
    4. construir las soluciones optimales para instancias grandes a partir de la soluciones ya computadas para instancias más pequeñas

Elementos necesarios para aplicar PD

- principio de optimalidad la estructura de una solución optimal a un problema debe contener soluciones optimales a los subproblemas
- aunque parezca obvio, no todos los problemas satisfacen este principio (por ejemplo, el camino simple más largo entre dos nodos de un grafo)
- superposición de subproblemas el "espacio" de subproblemas debe ser pequeño en el sentido de que los subproblemas se repiten una y otra vez, en vez de generar nuevos subproblemas
- PD generalmente toma ventaja de esta repetición solucionando una única vez cada subproblema

Coeficientes Binomiales

- $$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ o } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{si } 0 < k < n \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$
- como el caso base suma de a 1, el algoritmo recursivo directo tiene $\Omega(\binom{n}{k})$

- no se trata de un problema de optimización, pero la solución está formada por combinación de soluciones de subproblemas
- además, claramente se ve superposición de subinstancias:

$$\begin{aligned} C(5,3) &= C(4,3)+C(4,2) = \\ &= (C(3,3)+C(3,2))+(C(3,2)+C(3,1)) = \ldots \end{aligned}$$

- se puede suponer que es posible aplicar PD al problema.
- se puede usar una tabla para guardar resultados intermedios, donde la entrada (i,j) guarda el número $C(i,j)$

- se tiene

	0	1	2	3	4	$\cdots$	$k-1$	k
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
$\ldots$								
$n-1$							$C(n-1,k-1)$	$C(n-1,k)$
n								$C(n,k)$

- esta tabla se llama triángulo de Pascal, o triángulo de Tartaglia.

- el algoritmo para calcularla por filas es:

```
function CoeficientesBinomiales(n,k)
 array C[1..n,1..n]
 para todo k  C[k,0] ::= 1; C[k,k] ::= 1;
 FOR i ::= 1 TO TO n
    FOR j ::= 1 TO min(i,k)
       C[i,j] ::= C[i-1,j-1]+C[i-1,j]
    ENDFOR
 ENDFOR
 RETURN C[n,k]
```

Análisis del tiempo de ejecución

- su tiempo y espacio es claramente de $\Theta(nk)$.
- se puede modificar el algoritmo para que sólo use espacio $\Theta(k)$ (ejercicio)

Probabilidad de ganar una serie

- Problema: dos equipos A y B deben jugar hasta $2n-1$ juegos, siendo el ganador el primer equipo que llega a n victorias. Para cada juego existe una probabilidad p de que gane el equipo A, y una probabilidad $q = 1 - p$ de que gane el equipo B. Esta probabilidad es fija para todos los juegos, e independiente de los resultados anteriores. Se quiere encontrar la probabilidad de que el equipo A gane la serie
- se define $P(i, j)$ como la probabilidad de que A gane la serie dado que le faltan i victorias, mientras que a B le faltan j victorias
- entonces el valor buscado es $P(n, n)$

- la formulación de esta propiedad genera la recurrencia:

$$P(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ y } j > 0 \\ 0 & \text{si } j = 0 \text{ y } i > 0 \\ pP(i-1,j) + qP(i,j-1) & \text{si } i > 0 \text{ y } j > 0 \end{cases}$$

- sea $k = j + i$. El algoritmo de cálculo recursivo de P tomaría tiempo:

$$\begin{aligned} T(1) &= c \\ T(k) &\leq 2T(k-1) + d \end{aligned}$$

- la solución (usando la ecuación característica) es de $O(2^k)$, lo que equivale a $O(4^n)$ si $i = j = n$
- esta estructura del problema es similar a la de los coeficientes binomiles tomando $P(i,j)$ como $C(i+j,j)$

- es posible mejorar este tiempo en forma similar al triángulo de Pascal, calculando P por filas, columnas o diagonales
- para la cota inferior, da un tiempo de $\Omega\left(\binom{2n}{n}\right) \geq \frac{4^n}{n}$

- la matriz P resultaría:

	0	1	2	$\cdots$	$j-1$	j
0	$--$	1	1		1	1
1	0	p	$p+pq$			
2	0	p^2	p^2+2p^2q			
3	0	p^3	p^3+3p^3q			
$\cdots$						
$i-1$	0					$P(i-1,j)$
i	0				$P(i,j-1)$	$P(i,j)$

- esto demuestra la aplicación del principio de optimalidad en el problema
- se pueden calcular los elementos de la matriz por diagonales

```
function Serie(n,p)
 array P[0..n,0..n]
 FOR s ::= 1 TO n
  P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
  FOR k ::= 1 TO s-1
   P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k]+(1-p)*P[k,s-k-1]
  ENDFOR
 ENDFOR
 FOR s ::= 1 TO n
  FOR k ::= 0 TO n-s
   P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k]+
                  (1-p)*P[s+k,n-k-1]
  ENDFOR
 ENDFOR; RETURN P[n,n]
```

Análisis del tiempo de ejecución

- su tiempo y espacio es de $\Theta(n^2)$
- se puede hacer la misma modificación que en el caso anterior para que use espacio en $\Theta(n)$

Problema del Cambio

- Problema: se tiene que dar N centavos de cambio, usando la menor cantidad entre monedas de denominaciones $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$. Se supone cantidad ilimitada de monedas de cada denominación
- el algoritmo *greedy* visto sólo es correcto para ciertas denominaciones; en otras puede que ni siquiera encuentre una solución a pesar de que ésta exista
- para definir un algoritmo de PD para este problema, se define $C[i, j]$ la menor cantidad de monedas entre $d_1, d_2, \ldots, d_i$ para pagar j centavos

- la solución está entonces $C[n,N]$
- una de las dimensiones de la matriz es el conjunto de denominaciones usadas; esto es usual en problemas de PD donde existe una secuencia de objetos a considerar
- se satisface el principio de optimalidad Si la solución optimal $C[n,N]$ incluye una moneda de d_n entonces deberá estar formada por la solución optimal $C[n,N-d_n]$. En cambio si no incluye ninguna moneda de d_n, su valor será la solución optimal a $C[n-1,N]$

- la recurrencia quedaría:

$$C[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ +\infty & \text{si } i = 1 \text{ y } 0 < j < d_i \\ 1 + C[i, j - d_i] & \text{si } i = 1 \text{ y } j \geq d_i \\ C[i-1, j] & \text{si } i > 1 \text{ y } j < d_i \\ \min(C[i-1,j], 1 + C[i, j-d_i]) & \text{si } i > 1 \text{ y } j \geq d_i \end{cases}$$

- por ejemplo para $N = 8$ con $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ y $d_2 = 6$ se tiene:

Centavos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
$d_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2

Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
 array C[1..n,0..N] ::= 0
 FOR i::=1 TO n
  FOR j::=1 TO N
   CASE
     i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
     i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
     i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
     i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
           min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
  ENDFOR
 ENDFOR; RETURN C[n,N]
```

- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nN)$
- este algoritmo sólo encuentra el mínimo número de monedas necesarios, pero no dice cuáles son
- para encontrar las monedas que forman el cambio, se analiza cada la entrada $C[i,j]$: si es igual a $C[i-1,j]$ entonces no se usan monedas d_i; en caso contrario se usa una moneda d_i más las monedas de $C[i, j-d_i]$
- partiendo de $C[n.N]$ y retrocediendo por fila, o por columna, de acuerdo a su valor, hasta llegar a $C[0,0]$, se obtienen las $C[n,N]$ monedas que forman el cambio
- este recorrido agrega tareas por tiempo $\Theta(n + C[n,N])$ al algoritmo original

- Observación: la dependencia del tiempo y el espacio de ejecución en un dato de entrada N no es buena porque puede ser arbitrariamente grande
- ¿cómo se modificaría el programa si se dispone de una cantidad limitada de monedas de cada denominación? (ejercicio)

Definición del problema

- Problema: se tiene una varilla de madera de n centímetros de longitud, y los precios p_i correspondientes a varillas de $i = 1, 2, \ldots, n$ centímetros. El problema CORTES consisten en averiguar cómo cortar la varilla de forma de maximizar la ganancia obtenida G por la venta de todas las partes
- en cada una de las $n - 1$ posiciones de la varilla, está la posibilidad de cortar o no cortar. Se tienen por lo tanto 2^{n-1} cortes posibles. Ejercicio demostrar esta afirmación

Definición del problema

- denotaremos un corte como la descomposición de n en los sumandos correspondientes a las longitudes de las partes obtenidas. Por ejemplo, para una varilla de 7 cm que se corta en las posiciones 2 y 4, se denotará $7 = 2 + 2 + 3$
- sea k la cantidad de cortes, si $k \geq 1$ entonces por los cortes $n = i_1 + \ldots + i_k$ se obtiene $G = \sum_{i=1}^{k} p_i$
- si $k = 0$ vale $G = p_n$

Ejemplo

- si la varilla tiene 4 cm y los precios son $p_i = 1, 5, 8, 9$ entonces se tienen las siguientes posibilidades:

cortes	$xxxx$	$x\|xxx$	$xx\|xx$	$xxx\|x$
G	9	$1+8$	$5+5$	$8+1$
cortes	$x\|x\|xx$	$x\|xx\|x$	$xx\|x\|x$	$x\|x\|x\|x$
G	$1+1+5$	$1+5+1$	$5+1+1$	$1+1+1+1$

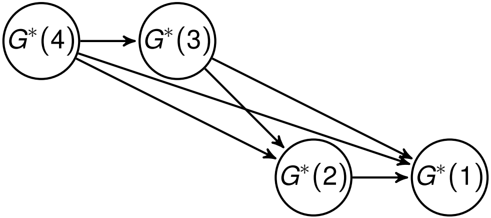
- está claro que la solución $4 = 2+2$ es la óptima ya que $G = 10$

Principio de optimalidad

- se puede observar que para $k \geq 1$, $G(n) = p_{i_1} + G(n - i_1)$ lo que da al problema una estructura recursiva
- sea $G^*(n)$ la ganancia óptima para una varilla de longitud n, entonces el problema satisface el principio de optimalidad, ya que por inducción generalizada se puede demostrar que $G^*(n)$ está formado por $p_i + G^*(n-i)$ para algún $i, 1 \leq i < n$
- el paso inductivo se muestra por el absurdo, se supone que $G^*(n) = p_i + G^*(n-i)$ no es optimal, entonces existe $G'(n) > G^*(n)$ y descomponiendo $G'(n) = p_i + G'(n-i)$ vale $G'(n-i) > G^*(n-i)$ contradiciendo la optimalidad de $G^*(n-i)$ que se sabe por HI (ejercicio completar la prueba)

Superposición de subinstancias

- se obtiene un grafo de dependencia de subinstancias que muestra la superposición de subinstancias



Algoritmo de Programación Dinámica

```
function Cortes(p[1..m], n)    - con m>=n
 array g.opt[0..n] ::= 0
 FOR j::=1 TO n
   aux ::= -maxint
   FOR i::=1 TO j
     aux ::= máx(aux,p[i]+g.opt[j-i])
   ENDFOR
   g.opt[j] ::= aux
 ENDFOR
 RETURN g.opt[n]
```

Análisis del algoritmo

- el tiempo de ejecución es de $\Theta(n^2)$ por los dos ciclos anidados
- el espacio de ejecución es de $\Theta(n)$ por el arreglo auxiliar
- el algoritmo solo devuelve el valor optimal, para saber cuáles cortes dan ese valor es necesario usar otro arreglo que contenga para cada posición i cual es la posición $j < i$ en la que hay que cortar (ejercicio), sin cambio en el tiempo ni en el espacio

Definición del problema

- Problema: se tienen n objetos indivisibles y una mochila. Cada objeto i tiene un peso w_i y un valor v_i; la mochila tiene una capacidad máxima de W. El objetivo es encontrar la carga de la mochila que maximice el valor de lo transportado y se respete su capacidad máxima
- es decir, encontrar valores $x_i = 0, 1$, de forma que

$$\text{maximice} \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \qquad \text{siempre que} \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \leq W$$

- en esta variante no se permite fraccionar los objetos (ejercicio: mostrar que el algoritmo *greedy* visto anteriormente no es correcto en este caso)

- para aplicar PD a este problema basta con mostrar que cumple con el principio de optimalidad y que tiene superposición de subinstanticas
- la función a optimizar es el valor de la carga de la mochila. Este valor depende de W y de la cantidad de objetos considerados
- sea entonces $V[i, j]$ el máximo valor de una carga de peso a lo sumo j con lo objetos $1, 2, \ldots, i$
- al igual que en el caso del problema del cambio, una de las dimensiones es el conjunto de objetos

- el valor de $V[i,j]$ depende de si se incluye o no el objeto i.
- la recurrencia es

$$V[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ -\infty & \text{si } i > 0 \text{ y } j < 0 \\ \max(V[i-1,j], & \\ \quad v_i + V[i-1,j-w_i]) & \text{si } i > 0 \text{ y } j > 0 \end{cases}$$

- la dependencia es con elementos de filas anteriores, a lo sumo en la misma columna

Ejemplo

- por ejemplo, si $W = 11$

Peso, Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_1 = 1, v_1 = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_2 = 2, v_2 = 6$	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$w_3 = 5, v_3 = 18$	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
$w_4 = 6, v_4 = 22$	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
$w_5 = 7, v_5 = 28$	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

Algoritmo

- el algoritmo para implementar este algoritmo es muy similar al algoritmo para el problema del cambio
- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nW)$
- para calcular cuáles objetos componen la carga optimal se puede hacer un recorrido adicional desde $C[n, W]$ hasta $C[0, 0]$ de $\Theta(n + W)$

Definición del problema

- Problema: Sea $G = \langle N, A \rangle$ un grafo dirigido, con pesos. El objetivo es hallar el camino con la mínima distancia entre todo par de nodos. Supondremos el grafo representado por una matriz de adyacencia, y los arcos numerados de 1 a n
- el resultado de resolver este problema sería entonces una matriz $D[1..n, 1..n]$, donde $D[i,j] = \delta(i,j)$ la distancia mínima entre i y j en G (recordar la definición en la parte de algoritmos greedy)
- una solución a este problema consiste en ejecutar n veces el algoritmo de Dijkstra cambiando el nodo origen, y llenando una fila de la matriz en cada iteración
- pero esta solución no es válida si existen arcos con pesos negativos

- vale el principio de optimalidad en este problema: si k es un nodo en el menor caminio entre i y j, entonces ese camino está formado por el menor camino de i a k y el menor camino de k a j, y estos caminos no contienen i, j, k (esta propiedad se demuestra por el absurdo)
- entonces, para ir calculando cada $D[i, j]$ se pueden considerar el conjunto de nodos intermedios $1, \ldots, k$ que pueden ir formando parte de posibles caminos intermedios
- para cada k, existen dos alternativas: o k pertence al menor camino entre i y j, o no pertenece, y es el mismo que para $1, \ldots, k-1$
- también se puede observar que hay superposición de instancias

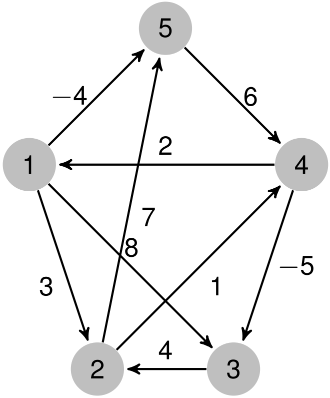
- sea entonces $D[i, j, k]$ la menor distancia entre i y j que tiene como nodos intermedios a $1, 2, \ldots, k$
- se debe comparar el camino más corto obtenido hasta entonces (con nodos intermedios $1, \ldots, k-1$), con el camino que va desde i hasta k, y luego de k a j, también sólo con nodos intermedios $1, \ldots, k-1$
- se tiene en cuenta implícitamente el hecho de que un camino optimal no puede pasar dos veces por un nodo
- los valores buscados serán entonces $D[i, j, n]$ que admiten cualquier nodo como nodo intermedio

- los valores iniciales, cuando $k = 0$ o sea no hay nodos intermedios, corresponden a los pesos de los arcos (i,j)
- la recurrencia queda entonces

$$D[i,j,k] = \begin{cases} G[i,j] & \text{si } k = 0 \\ \min(D[i,j,k-1], & \\ \quad D[i,k,k-1] + D[k,j,k-1]) & \text{sino} \end{cases}$$

- resultando en un algoritmo de programación dinámica conocido como algoritmo de Floyd-Warshall en $\Theta(n^3)$

Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall



$$\mathtt{D[i,j,0]} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \mathtt{D[i,j,1}$$

- el espacio del algoritmo anterior también es de $\Theta(n^3)$
- se puede mejorar el espacio para este cálculo tienendo en cuenta que en toda iteración k:
  - cada $D[i,j,k]$ sólo necesita conocer los valores en $D[*,*,k-1]$. Esto reduce en principio el espacio a $\Theta(n^2)$
  - para todo $i,j \neq k$, $D[k,j,k] = D[k,j,k-1]$ y $D[i,k,k] = D[i,k,k-1]$, es decir los valores de la fila k y la columna k no cambian en la iteración k
  - para todo $i,j \neq k$ para actualizar $D[i,j,k]$ sólo se necesita el valor anterior $D[i,j,k-1]$ y los valores de la fila k y la columna k, $D[i,k,k-1]$ y $D[k,j,k-1]$ que no cambian en esta iteración
  - se puede entonces trabajar sobre la misma matriz de salida, sin usar matrices auxiliares, lo que reduce el espacio a $\Theta(1)$

- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])
 array D[1..n,1..n]
 D::=G
 FOR k::=1 TO n
   FOR i::=1 TO n
     FOR j::=1 TO n
       D[i,j]::=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])
     ENDFOR
   ENDFOR
 ENDFOR
 RETURN D
```

- su tiempo es de $\Theta(n^3)$ y el espacio es de $\Theta(1)$
- el tiempo es comparable con n veces Dijsktra, pero su simplicidad hace que se prefiera implementar Floyd

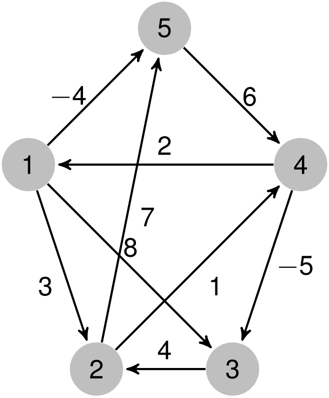
Cálculo de los caminos mínimos

- este algoritmo sólo encuentra las distancias mínimas entre cada par de nodos. Para obtener los nodos que implementan esa distancia es necesario recordar para cada (i, j) cuál es el k que proveyó la mínima distancia entre ellos
- es suficiente con actualizar una matriz adicional P cada vez que se modifica $D[i, j]$, reemplazando la línea interna de los `FOR` por

```
IF D[i,j]>D[i,k]+D[k,j]
  D[i,j]::=D[i,k]+D[k,j]
  P[i,j]::=k
ENDIF
```

- P debe ser inicializada con 0 en todos sus valores

Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall



$$\mathtt{D[i,j]} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathtt{D[i,j}$

$$\mathtt{P[i,j]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathtt{P[i}$

Clausura transitiva de un grafo

- un grafo sin pesos puede ser usado para representar una relación entre los nodos; si el arco (i, j) existe entonces i esta en relación con j
- entonces para determinar si existe un camino entre un dado par de nodos es necesario calcular la clausura transitiva de la relación
- para esto se asigna peso 1 para los arcos que existen, y se calculan mediante Floyd-Warshall los caminos mínimos del grafo. Se pueden usar operaciones binarias en lugar de sumas o mínimos en este caso
- la clausura transitiva se usa en compiladores para poder saber cuáles son los terminales iniciales para todos los símbolos no-terminales de una gramática dada

Definición del problema

- Problema: se tienen n matrices $M_1, M_2, \ldots, M_n$, no necesariamente cuadradas, y se quiere encontrar la mejor manera de hallar su producto $M_1 M_2 \ldots M_n$. Cada matriz M_i es de tamaño $d_{i-1} d_i$
- teniendo en cuenta que:
  - cada producto $M_i M_{i+1}$ se calcula con $d_{i-1} d_i d_{i+1}$ productos
  - el producto entre matrices es asociativo, luego $(M_i M_{i+1}) M_{i+2} = M_i (M_{i+1} M_{i+2})$
- entonces es relevante el orden en que se realiza el producto $M_1, M_2, \ldots, M_n$.
- ejemplo: M_1 de 5×10, M_2 de 10×20, M_3 de 20×2, entonces $M_1(M_2 M_3)$ lleva $400 + 100 = 500$ productos, y $(M_1 M_2) M_3$ lleva $1000 + 200 = 1200$ productos

- el problema entonces consiste en encontrar todas las parentizaciones posibles para $M_1, M_2, \ldots, M_n$, evaluar la cantidad de productos necesarios, y obtener el menor entre todos ellos
- la cantidad de parentizaciones posibles está definida por la recurrencia

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i)$$

  con $T(1) = 1$
- los $T(n)$ forman los llamados números de Catalan y se puede probar que $T(n) \in \Omega(4^n/n^2)$ por inducción
- luego el algoritmo directo toma tiempo de $\Omega(4^n/n)$ por lo que es inviable en la práctica para n medianos

- este problema satisface el principio de optimalidad
- y tiene también superposición de instancias
- es posible entonces aplicar PD

- la función a optimizar es la cantidad de productos de reales necesarios para multiplicar una secuencia de matrices. este valor depende de la cantidad de productos necesarios para multiplicar subsecuencias de matrices
- se define $m_{ij}, i \leq j$ como la mínima cantidad de productos necesarios para calcular $M_i \ldots M_j$. Claramente, si$i = j$ entonces $m_{ii} = 0$ y si $j = i + 1$ entonces $m_{ii+1} = d_{i-1} d_i d_{i+1}$
- en general, si $i < j$

$$m_{ij} = \min_{\substack{k \\ i \leq k < j}} (m_{ik} + m_{(k+1)j} + d_{i-1} d_k d_j)$$

- por ejemplo, si $d = (10, 5, 20, 30, 2)$:

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0	1000	4500	1500
2		0	3000	1400
3			0	1200
4				0

$$\begin{aligned}
m_{13} &= \min(m_{12} + m_{33} + d_0 d_2 d_3, m_{11} + m_{23} + d_0 d_1 d_3) = \\
&= \min(1000 + 6000, 3000 + 1500) = 4500 \\
m_{24} &= \min(m_{23} + m_{44} + d_1 d_3 d_4, m_{22} + m_{34} + d_1 d_2 d_4) = \\
&= \min(3000 + 300, 1200 + 200) = 1400 \\
m_{14} &= \min(m_{11} + m_{24} + d_0 d_1 d_4, m_{12} + m_{34} + d_0 d_2 d_4, \\
&\quad m_{13} + m_{44} + d_0 d_3 d_4) = \\
&= \min(1400 + 100, 1200 + 1000 + 400, 4500 + 600) = 1500
\end{aligned}$$

Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])
 array m[1..n,1..n]::=0;
 FOR s::=1 TO n-1
  FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint
   FOR k::=i TO i+s-1
    tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]
    IF tmp<menor THEN menor::=tmp
   ENDFOR
   m[i,i+s]::=menor
  ENDFOR
 ENDFOR
 RETURN m[1,n]
```

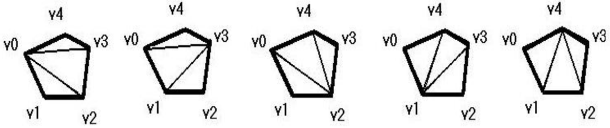
- el tiempo ejecución, tomando como barómetro cualquiera de la sentencias del ciclo interno, es:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-s}\sum_{k=i}^{i+s-1} c = \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-s} sc = \\
&= c\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-s} s = c\sum_{s=1}^{n-1}(n-s)s = nc\sum_{s=1}^{n-1} s - c\sum_{s=1}^{n-1} s^2 = \\
&= n\frac{c}{2}(n-1)n - (n-1)n(2n-1)\frac{c}{6} = \frac{c}{6}n^3 - \frac{c}{6}n \\
&\in \Theta(n^3)
\end{aligned}$$

- para obtener cuál es la mejor forma de multiplicar la matrices, es suficiente con recordar para cada (i,j) cuál es el k que determinó su menor valor (ejercicio).
- existen algoritmos más eficientes para este problema

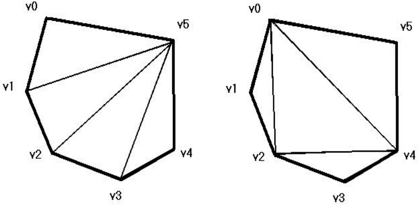
Definición del problema

- el algoritmo anterior tiene muchas aplicaciones, no directamente relacionadas con la multiplicación de matrices. Por ejemplo, para la triangularización de polígonos
- Problema: se tiene un polígono convexo $\langle v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ de n lados, siendo v_i los vértices y $\overline{v_{i-1} v_i}$ el lado i. Se quiere encontran una triangularización optimal, de acuerdo a algún criterio dado



- una cuerda $\overline{v_i v_j}$ es el segmento formado por un par de vértice no adyacentes
- toda cuerda divide al polígono en dos subpolígonos
- una triangularización es un conjunto de cuerdas que dividen al polígono en triángulos disjuntos
- si se tiene un peso $w(\triangle v_i v_j v_k)$ para cada triángulo $\triangle v_i v_j v_k$, entonces una triangularización optimal de un polígono es una triangularización que minimiza la sumatoria de los pesos de los triángulos resultantes

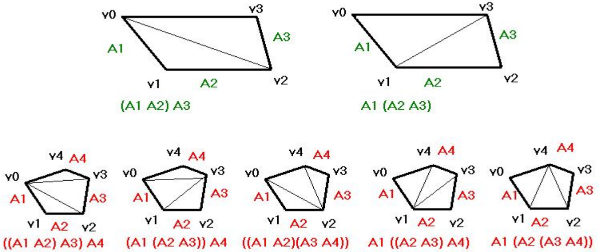
- una función común para pesar los triángulos es su perímetro: $w(\triangle v_i v_j v_k) = |v_i v_j| + |v_j v_k| + |v_k v_i|$. Otras pueden usarse
- cada triangularización de un polígono de n lados consta de $n-3$ cuerdas y $n-2$ triángulos (ejercicio)



Reducción

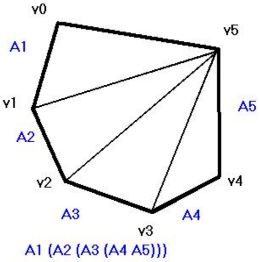
- la estructura de este problema es similar a la de la multiplicación cadena de matrices
- se define una reducción TRIANGULARIZACIÓN $\longrightarrow$ CADENAMATRICES
- dado un polígono $\langle v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$, se establece una correspondencia entre los lados (excepto $\overline{v_{n-1} v_0}$) y "matrices" A_i, cuyo "tamaño" es $v_{i-1} v_i$ y con "tiempo de multiplicación" $w(\triangle v_i v_j v_k)$

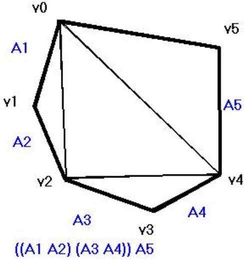
- luego cada forma de multiplicar las matrices $A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$ corresponde a una triangularización del polígono



- en el algoritmo, simplemente se reemplaza el costo de cada producto individual. Para las matrices era $d_i * d_j * d_k$, mientras que para la triangularización es $w(\triangle v_i v_j v_k)$

```
temp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+w(v[i],v[j],v[k])
```





- en bioinformática, es frecuente la necesidad de comparar el ADN de dos o más organismos
- una secuencia de ADN se representa como una cadena en la letras que representan cada una de las bases posible: A (adenina), G (guanina), C (citosina) y T (tiamina). Ejemplo: ACCGGTCGGGATGCACCTGAGAAAGCGG
- un posible criterio de "similitud" entre secuencias de DNA es encontrar la subsecuencia común más larga de bases que aparezca en las secuencias aún en forma no consecutiva
- por ejemplo, para AGCGTAG y GTCAGA la subsecuencia común más larga es GCGA
- no es lo mismo que la subcadena más larga, ya que se permiten otros caracteres en el medio

Formalización del problema

- formalmente, dadas una secuencia $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$, otra secuencia $Z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_k \rangle$ es una subsecuencia si existe una secuencia creciente de índices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tal que $x_{i_j} = z_j$ para todo $j, 1 \leq j \leq k$
- ejemplo, para $X = \langle A, G, C, G, T, A, G \rangle$, $Z = \langle G, C, T, G \rangle$ es una subsecuencia con índices $2, 3, 5, 7$
- dadas dos secuencias X, Y se dice que Z es una subsecuencia común de X, Y si Z es subsecuencia de X y Z es subsecuencia de Y
- dadas dos secuencias X, Y el problema de la subsecuencia común más larga (LCS) es el problema de encontrar una subsecuencia común de longitud máxima para X, Y

Estructura optimal

- un algoritmo de fuerza bruta para resolver LCS es enumerar todas las posibles subsecuencias de X, controlar si también es subsecuencia de Y, y recordar la más larga de ellas
- este algoritmo es de $O(2^m)$, y por lo tanto inviable para m grandes
- sin embargo, es posible comprobar que LCS tiene una subestructura optimal

Subestructura optimal de LCS

Teorema 1

Sean $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$ *e* $Y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$*. Luego si* $Z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_k \rangle$ *es LCS de* X, Y *y*

- $x_m = y_n$*, entonces* Z_{k-1} *es LCS de* X_{m-1}, Y_{n-1}
- $x_m \neq y_n$ *y* $z_k \neq x_m$*, entonces* Z *es LCS de* X_{m-1}, Y
- $x_m \neq y_n$ *y* $z_k \neq y_n$*, entonces* Z *es LCS de* X, Y_{n-1}

Demostración.

Se prueban los tres puntos por contradicción, llegando en todos los casos a mostrar que Z no es LCS de X, Y. $\square$

Solución recursiva

- el teorema anterior sugiere la siguiente recurrencia para resolver LCS, siendo $C[i,j]$ el LCS de X_i, Y_j

$$C[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ o } j = 0 \\ C[i-1, j-1] + 1 & \text{si } i > 0, j > 0 \text{ y } x_i = y_j \\ \textit{máx}(C[i-1,j], C[i,j-1]) & \text{si } i > 0, j > 0 \text{ y } x_i \neq y_j \end{cases}$$

- se puede ver fácilmente que existe superposición de problemas

Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])
 array C[1..m,1..n]::=0
 FOR i::=1 TO m
   FOR j::=1 TO n
     IF X[i]==Y[j]
       C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1
     ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]
       C[i,j]::=C[i-1,j]
     ELSE
       C[i,j]::=C[i,j-1]
     ENDIF
   ENDFOR
 ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```

Análisis del algoritmo

- el algoritmo anterior es de tiempo y espacio en $O(mn)$
- Ejercicio: retornar no sólo la longitud de la LCS entre dos cadenas, sino también una cadena que sea la LCS
- Ejercicio: ¿cómo modificaría el algoritmo para que compute todas las LCS entre dos cadenas, sin aumentar el orden del tiempo ni espacio?