Guía N°2

Ley de Gauss, Ecuación de Laplace y Método de las Imágenes

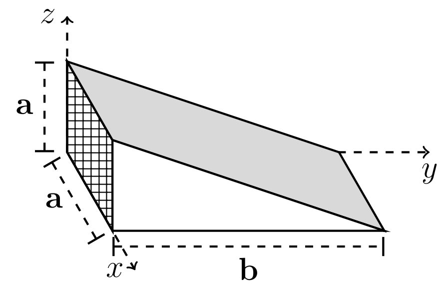
Problema 1. Dado un campo eléctrico uniforme de intensidad $E = 6{,}2 \times 10^5[N/C]$ y una superficie plana con un área de $3{,}2m^2$ que puede orientarse de distintas formas, calcular el flujo a través del área cuando la dirección del campo eléctrico es:

(a) Perpendicular a la superficie.

(b) Paralela a la superficie.

(c) Forma un ángulo de 75^o con el plano de la superficie.

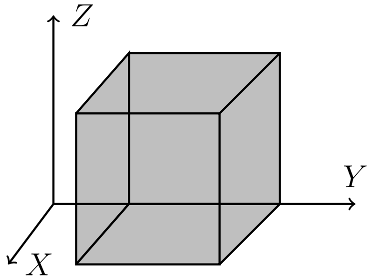
Problema 2. Sea un campo vectorial uniforme $\vec{F} = F_0\hat{j}$, calcule el flujo del mismo a través de la superficie sombreada y de la superficie cuadriculada indicadas en la figura. ¿Tiene sentido ese resultado? ¿Cuál es su significado?



Problema 3. Calcule el flujo neto que pasa por el cubo de lado a de la figura y la carga total encerrada dentro del cubo cuando:

(a) Se tiene un campo electrico uniforme $\vec{E} = E_0\hat{j}$

(b) Se tiene un campo electrico $\vec{E} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$



Problema 4.

(a) Calcule el flujo un campo vectorial $\vec{A} = \frac{A_0}{r^2}\hat{e}_r$ a través de una esfera de radio a y de otra esfera de radio b, donde $a > b$. Compare ambos resultados.

(b) Repita el inciso anterior pero considerando que el campo es $\vec{A} = \frac{A_0}{r}\hat{e}_r$.

Problema 5. Suponiendo que una carga positiva está uniformemente distribuida en un volumen esférico de radio a, siendo ρ la densidad de carga volumétrica.

(a) Por medio del Teorema de Gauss obtener una expresión para el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera y graficarlo como función de la distancia al centro de la esfera (r).

(b) Obtener el potencial dentro y fuera de la esfera y graficarlo como función de r.

Problema 6. Suponiendo una distribución volumétrica de carga esférica tal que $\rho(r) = {}^A/_r$ para $r < a$ y 0 para $r > a$.

(a) Por medio del Teorema de Gauss obtener una expresión para el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera y graficarlo como función de la distancia al centro de la esfera (r).

(b) Obtener el potencial dentro y fuera de la esfera y graficarlo como función de r.

Problema 7. De un volumen esférico con una cierta densidad volumétrica de carga ρ (no necesariamente constante) salen líneas de campo eléctrico en dirección radial con una densidad superficial constante. Proponga distintas distribuciones de carga ρ que darían lugar a esta configuración de líneas de campo.

Problema 8. ¿Por qué no es práctico usar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico en un punto que está a una distancia b de una barra cargada uniformemente cuya longitud es L, a menos que $L >> b$?

Problema 9. Considerar un dipolo eléctrico en el límite $l << r$, siendo l la separación entre las cargas, y mostrar que el flujo a través de una superficie Gaussiana esférica es cero (lo cual es consistente con el hecho que la carga encerrada por la superficie Gaussiana es cero también).

Recordar: Campo eléctrico del dipolo: $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{4ql}{r^3}cos\theta$; $E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2ql}{r^3}sen\theta$

Problema 10. Se tiene una carga neta positiva encerrada dentro de una superficie Gaussiana, ¿significa que el campo eléctrico esta dirigido hacia afuera de la superficie en todos los puntos? Justificar la respuesta.

Problema 11. Sea un generador de Van der Graaff tal que la carga máxima que puede ser retenida por el domo es de $6 \times 10^{-3}\ C$.

(a) Sabiendo que la rigidez dieléctrica del aire es de $3 \times 10^6\ V/m$, determine el radio del domo.

(b) Calcule el valor del campo eléctrico en un punto exterior a la esfera situado a 5 m de su centro.

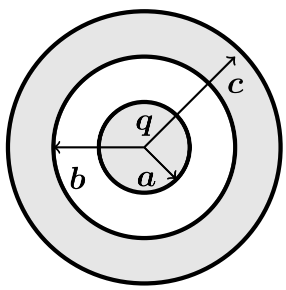
(c) Si se abandonara un electrón en este punto, ¿cuál sería el valor y la dirección de su aceleración inicial?

Problema 12.

(a) Se tiene un plano infinito cargado uniformemente con una densidad superficial de carga σ. Calcule la intensidad de campo eléctrico en todo el espacio haciendo uso de la ley de Gauss.

(b) Haciendo uso de distintas superficies de Gauss, encuentre el campo eléctrico en todo el espacio generado por dos planos infinitos uniformemente cargados con una densidad de carga $+\sigma$ y $-\sigma$ respectivamente. Indique claramente qué superficies utilizó para lograr su objetivo y justifique su elección.

Problema 13. Una esfera metálica de radio a y carga $q > 0$ está rodeada por un cascarón metálico esférico neutro de radio interior b y exterior c.



(a) Encontrar la densidad de carga superficial σ en las superficies de radio R, a y b.

(b) Calcular y graficar el campo eléctrico en las distintas regiones.

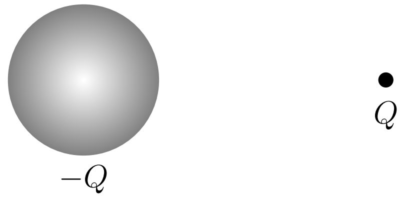
(c) Calcular y graficar el potencial en las distintas regiones.

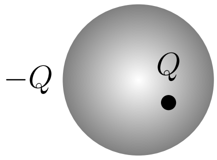
(d) Repetir los incisos anteriores si ahora la superficie exterior es tocada con un cable puesto a tierra que baja su potencial a cero.

(e) Repita nuevamente los incisos anteriores pero conectando la superficie exterior a un potencial V_1 gracias a una batería.

Problema 14.

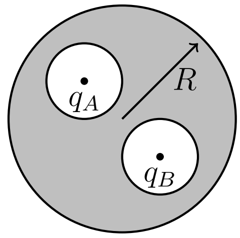
(a) La figura muestra una esfera metálica con una carga $-Q$ y una carga puntual $+Q$. Dibujar las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales en la proximidad de este sistema de cargas. Justifique su representación (intensidad y dirección de líneas de campo)





(b) La figura muestra un cascarón metálico con una carga $-Q$ y una carga puntual $+Q$ en su interior (*Obs*: la carga no está centrada en la esfera). Dibujar las líneas de campo eléctrico justificando su representación.

Problema 15. En un conductor esférico neutro de radio R se efectúan dos cavidades esféricas de radios a y b como indica la figura. En el centro de cada cavidad se coloca una carga puntual q_A y q_B. Suponiendo que $q_A = q_B > 0$



(a) Realice un esquema de las lineas de campo eléctrico para todo el espacio

(b) Encuentre las densidades de carga superficial de las dos cavidades σ_A y σ_B.

(c) ¿Cuál es el campo fuera del conductor esférico?.

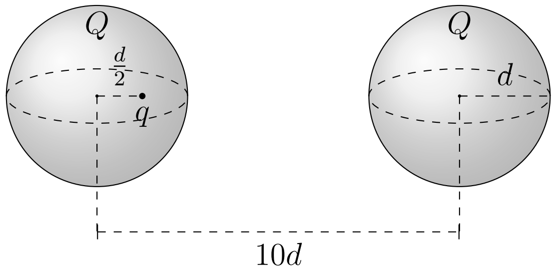
(d) ¿Cuál es el campo dentro de cada cavidad?

(e) ¿Cuál es el campo en el interior del conductor? (zona gris).

(f) Repita los incisos anteriores considerando que $q_A = -q_B$ con $q_A > 0$.

(g) Realice un esquema de las lineas de campo eléctrico en todo el espacio suponiendo que q_A y q_B no están centradas en las cavidades. ¿Podría, haciendo uso de la Ley de Gauss, calcular las densidades de carga y el campo eléctrico dentro de las cavidades?¿Y afuera?

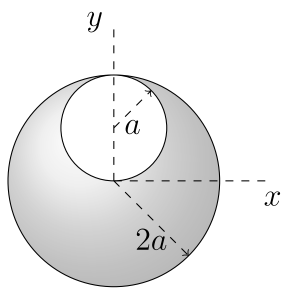
Problema 16. Dos cascarones esféricos *no conductores*, de radio d y muy delgados, tienen cada uno una carga Q distribuida uniformemente y se ubican de forma que sus centros queden separados una distancia 10 d. Se coloca una carga puntual positiva de magnitud q a una distancia $d/2$ del centro de uno de los cascarones, tal como se indica en la figura.



(a) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la carga q?.

(b) ¿Cuál hubiera sido la fuerza neta sobre la carga q si la carga Q de la izquierda hubiera estado distribuida en todo su volumen de modo que ρ fuera constante? (*Ayuda: utilice principio de superposición*).

Problema 17. Una esfera de radio $2a$ está hecha de un material no conductor con una densidad de carga volumétrica uniforme ρ. Se efectúa una cavidad de radio a en la esfera, como se muestra en la figura. Demuestre que el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y está dado por E_x=0 y E_y=$\rho\, a/(3\epsilon_0)$. (*Sugerencia: el campo en el interior de la cavidad es la superposición del campo eléctrico debido a la esfera original sin la perforación más el campo debido a una esfera del tamaño de la cavidad con una densidad de carga uniforme* $-\rho$).



Problema 18. La densidad electrónica en el átomo de H puede representarse como $\rho = \frac{e}{\pi}\ e^{-2r}$. Calcular:

(a) El campo eléctrico $E(r)$. Graficar.

(b) El potencial eléctrico $V(r)$. Graficar.

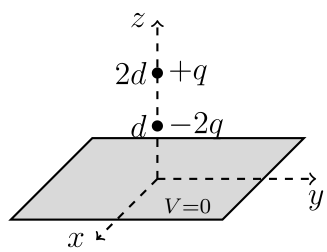
(Cuidado! Este caso no puede tratarse como el de ρ constante. La carga encerrada no es ρV).

Problema 19. Un cilindro infinito de radio R $[m]$ posee en su interior una densidad volumétrica de carga $\rho(r) = \rho_0(1 - r/R)$ $[C/m^3]$, donde ρ_0 es una constante positiva y siendo r la distancia medida desde el eje del cilindro. Encontrar a qué distancia del eje el campo eléctrico es máximo y calcule su magnitud bajo esta condición. Grafique $E(r)$ para todo r y $V(r)$ para todo r considerando que $V(5R) = 0$.

Problema 20. Considere un capacitor de placas paralelas, con una distancia entre placas igual a d. Una de las placas se encuentra a un potencial $V = 0$ y la otra a un potencial $V = V_d$. Encontrar la función potencial dentro del capacitor utilizando la ecuación de Laplace.

Problema 21. Se tienen dos cilindros metálicos coaxiales de radios A y B donde $A < B$. Encuentre el potencial eléctrico en la región comprendida entre los cilindros si el cilindro interior se encuentra a un potencial V_A y el cilindro exterior se encuentra a un potencial V_B.

Problema 22. Considere dos cargas, $-2q$ y $+q$, situadas frente a un plano conductor en $x - y$ con $V = 0$, a distancias $z = d$ y $z = 2d$ del mismo, respectivamente.

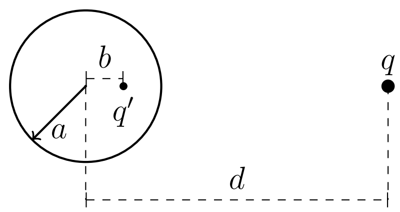


(a) Realizar un esquema del sistema de cargas equivalente que permitiría conocer el potencial para $z > 0$, basado en el método carga-imagen.

(b) Utilizando el principio de superposición, obtener una expresión del potencial eléctrico válida para $z > 0$.

(c) Encontrar la fuerza electrostática sobre la carga $+q$.

Problema 23. Considere una carga puntual a una distancia d de una esfera conductora de radio a con $V = 0$, como muestra la figura.



(a) Dibujar en forma cualitativa las líneas de campo para el sistema basándose en las propiedades de un conductor.

(b) Obtener una expresión para $V(r)$ (para $r > a$).

(c) Encontrar la densidad de carga inducida sobre la superficie de la esfera como función de θ.

(d) Integrar dicha densidad para obtener la carga total inducida.

(e) Calcular la magnitud de la fuerza atractiva entre la esfera y la carga.

Problema 24. ¿Qué pasaría si la esfera del problema anterior estuviera puesta a un potencial V_0 en vez de a tierra? ¿Dónde ubicaría una segunda carga imagen y cómo quedaría la expresión para $V(r)$ en este caso?. Repetir los incisos 23*c*) y 23*d*).

Problema 25. Explore qué pasaría si en el problema 23 se hubiera puesto un conductor de forma cúbica en vez de esférica. ¿Hubiera sido posible ubicar en algún lugar dentro del cubo una carga imagen q' que hubiera hecho $V = 0$ sobre toda la superficie del conductor? ¿Qué se puede concluir?
