Potencial Eléctrico

Introducción.

Potencial Eléctrico. Gradiente.

Potencial de una Carga Puntual.

Potencial de un Sistema de Cargas Puntuales.

Cálculo del Potencial Eléctrico.

Superficies Equipotenciales.

Potencial creado por un Dipolo Eléctrico.

Movimiento de una partícula en un Campo Eléctrico.

Conductor en Equilibrio Electrostático.

Bibliografía

- Alonso; Finn. "Física ". Cap. 21. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Gettys; Keller; Skove. "Física clásica y moderna". Cap. 22. McGraw-Hill.
- Halliday; Resnick. "Fundamentos de física". Cap. 29. CECSA.
- Roller; Blum. "Física". Cap. 28. Reverté.
- Serway. "Física". Cap. 25. McGraw-Hill.
- Tipler. "Física". Cap. 20. Reverté.

Introducción

Campo de fuerzas centrales: Caracterizados porque la dirección de los vectores fuerza pasan por un punto fijo llamado **Centro o Polo del Campo** y cuyo módulo sólo es función de la distancia r al centro.

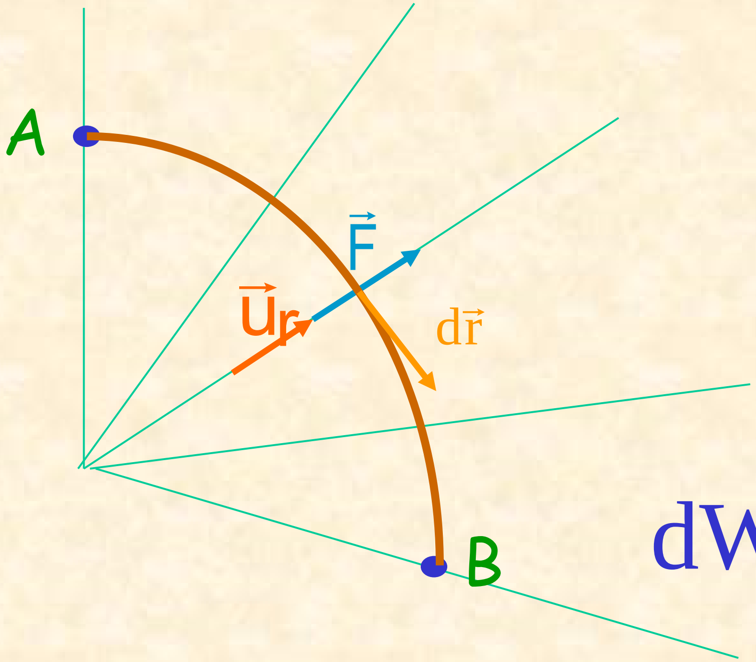
El campo eléctrico cumple estas condiciones, ya que

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

Como además es un campo conservativo, se dice que deriva de una función potencial escalar, de forma que se cumple

$$W_{AB}^{ext} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A)$$

Se puede demostrar que ***todos*** los Campo de Fuerzas centrales son ***Conservativos***:



Suponemos un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$. El trabajo desarrollado por esta fuerza cuando se desplaza del punto *A* al punto B será

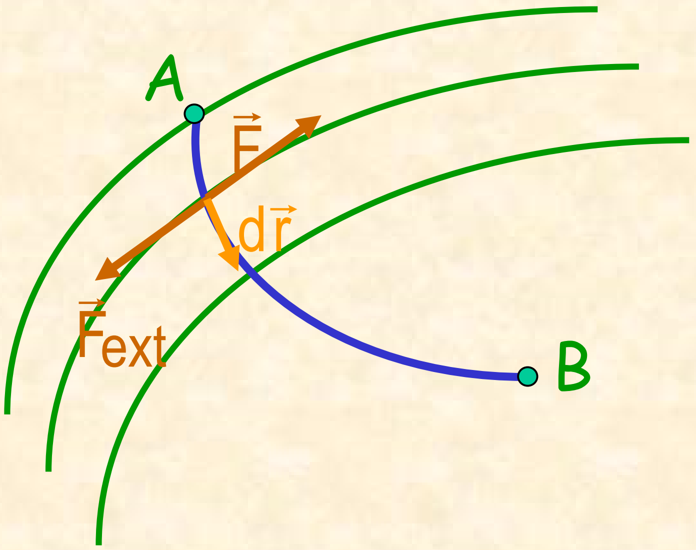
$$dW_{AB}^{c} = F_c(r)\,\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = F_c(r)\,dr$$

El trabajo total será

$$W_{AB}^{c} = F_c(r)\,dr = U(A) - U(B)$$

Energía Potencial: Es la Función Potencial asociada con el Campo Eléctrico.

Para comprender su significado, vamos a suponer una partícula en un campo de fuerzas conservativo al que es sensible.



Para que se encuentre en equilibrio es necesario aplicar una fuerza externa que compense la ejercida por el campo

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_c$$

En cualquier desplazamiento infinitesimal, se realiza un trabajo en contra del campo.

$$dW_{AB}^{ext} = \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_c \cdot d\vec{r}$$

El Trabajo total realizado por la Fuerza Externa será

$$W_{AB}^{ext} = -\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -W_c = \Delta U$$

Como el Trabajo realizado sobre una partícula libre se invierte en aumentar su Energía cinética, en un campo conservativo debe disminuir su energía potencial. Por esta razón se identifica la función potencial con la Energía Potencial.

La Energía cinética se vincula al movimiento, mientras que la Energía Potencial se asocia con la posición.

Energía Potencial Electrostática

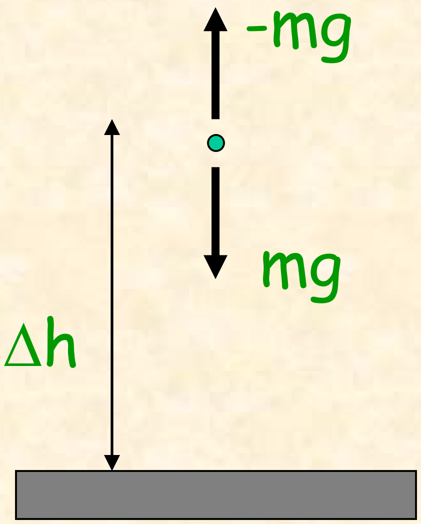
Energía Potencial:

Gravitatoria $\Delta E_{PG} = m\,g\,\Delta h$

Elástica $\Delta E_{PE} = \frac{1}{2} k\,\Delta x^2$

$$\Delta E_P = W(Fzas.Ext.) = -W(Fzas.propias)$$

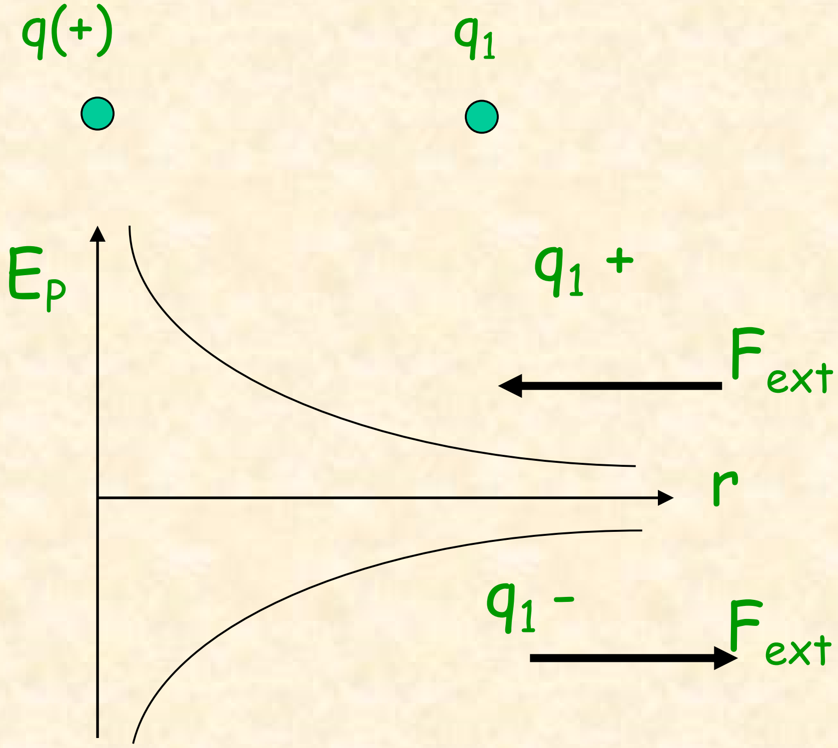
$$W = \int \vec{F} . d\vec{l}$$



Si cae (acción espontánea que no requiere intervención externa) el sistema (masa-Tierra) pierde energía potencial. Si sube (solo posible por acción de un agente externo) el sistema gana energía potencial

Como medir E_P?. Solo por el trabajo realizado para crear la situación concreta sin el agregado de ningún otro tipo de energía (E_C), o sea con F= - F(propia)

Energía Electrostática de un Sistema de 2 Cargas



$$\Delta W_{Fext} = \int_{\infty}^{r} \vec{F}_{ext}.d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} q_1\ \vec{E}.d\vec{r}$$

$$\Delta W_{Fext} = -\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} q\ \ q_1 \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Delta W_{Fext} = \Delta E_P = \frac{q\,q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

++ o -- : (fuerzas repulsivas) la energía potencial aumenta cuando acerco las cargas (solo posible por acción de un agente exterior)

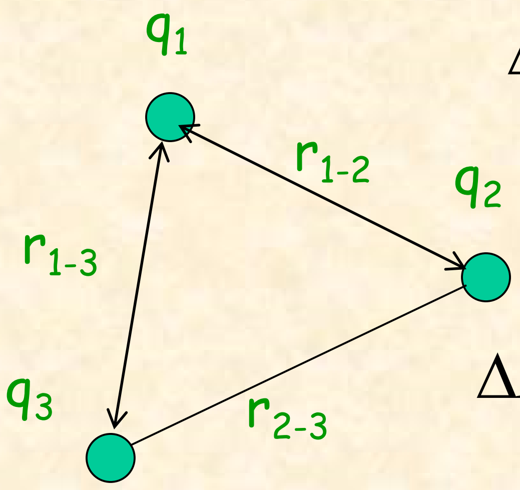
+ - : fuerzas atractivas) la energía potencial disminuye cuando acerco las cargas (Espontáneo)

Si cargas van de r_1 a r_2

$$\Delta E_P = \frac{q\,q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q\,q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

ΔE>0 si ++ o -- y acerco o si +- y alejo y <0 si ...

Energía Electrostática de un Sistema de Cargas



$$\Delta W = 0 \Rightarrow \Delta E_P = 0$$

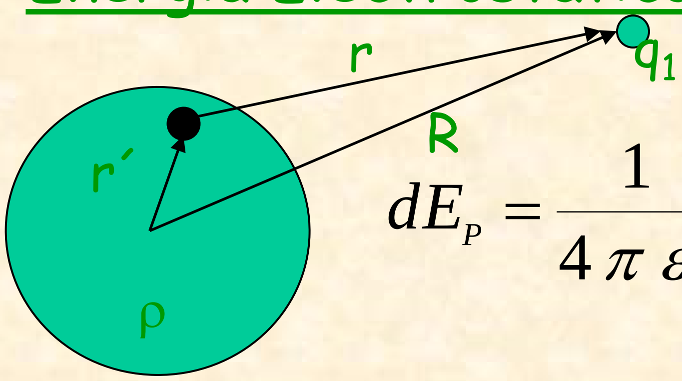
$$\Delta E_P = \frac{q_1\, q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1-2}}\right)$$

$$\Delta E_P = \frac{q_1\, q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1-2}}\right) + \frac{q_1\, q_3}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1-3}}\right) + \frac{q_2\, q_3}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{2-3}}\right)$$

E_P de un Sistema de Cargas Puntuales

$$\boxed{\Delta E_P = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_i\, q_j}{r_{i-j}}}$$

Energía Electrostática de Cargas Distribuidas

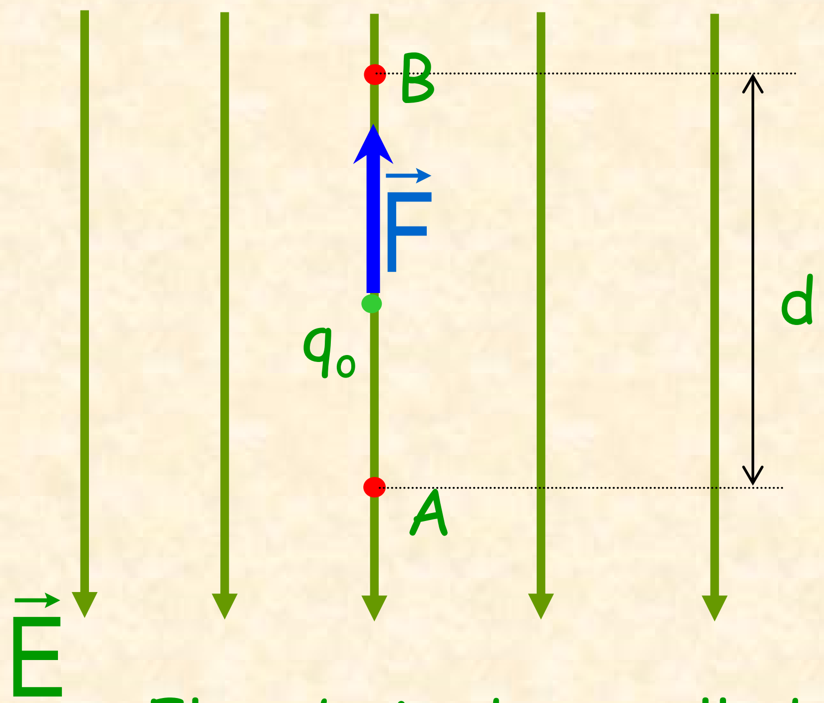


$$dE_P = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_1\,\rho\, dV}{r} \Rightarrow E_P = \frac{q_1\,\rho}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\iiint \frac{r'^2\,\mathrm{sen}\,\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\left|\vec{R} - \vec{r}\,'\right|}$$

$$\boxed{E_P = \frac{q\, q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, r}}$$

E igual al de Q en origen

Potencial Eléctrico. Gradiente



Como la Fuerza Eléctrica está dirigida hacia abajo, debemos ejercer sobre la carga una fuerza externa **F** hacia arriba si queremos que la partícula se mueva con velocidad constante

El trabajo desarrollado por esta fuerza será

$$W_{AB}^{ext} = F_{ext}\, d = -q_o E\, d$$

Potencial Eléctrico

Potencial Eléctrico: Es el trabajo desarrollado por la Fuerza Externa por unidad de carga puntual

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}^{ext}}{q_o}$$

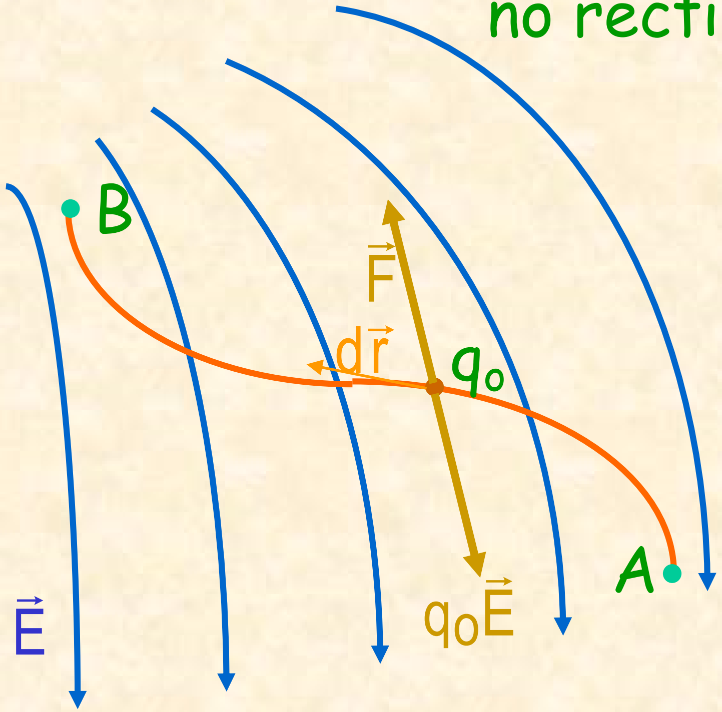
Caso particular de un Campo Uniforme $V_B - V_A = E\,d$

Unidades del Potencial: Voltio (V)

Unidades del Campo Eléctrico: V/m o N/C

Potencial Eléctrico

Caso general: Campo Eléctrico no uniforme y trayectoria no rectilínea



Debemos dividir la trayectoria en pequeños desplazamientos infinitesimales, de forma que

$$W_{AB}^{ext} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = -q_o \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

El Potencial en este caso será

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}^{ext}}{q_o} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Para un desplazamiento curvilíneo $d\vec{s} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

la variación de Potencial es $dV = -\vec{E}\,d\vec{s} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$

Con esta expresión, podemos, conocido el Potencial Eléctrico, calcular el Campo Eléctrico asociado

Si $dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x};E_y = -\frac{\partial V}{\partial y};E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

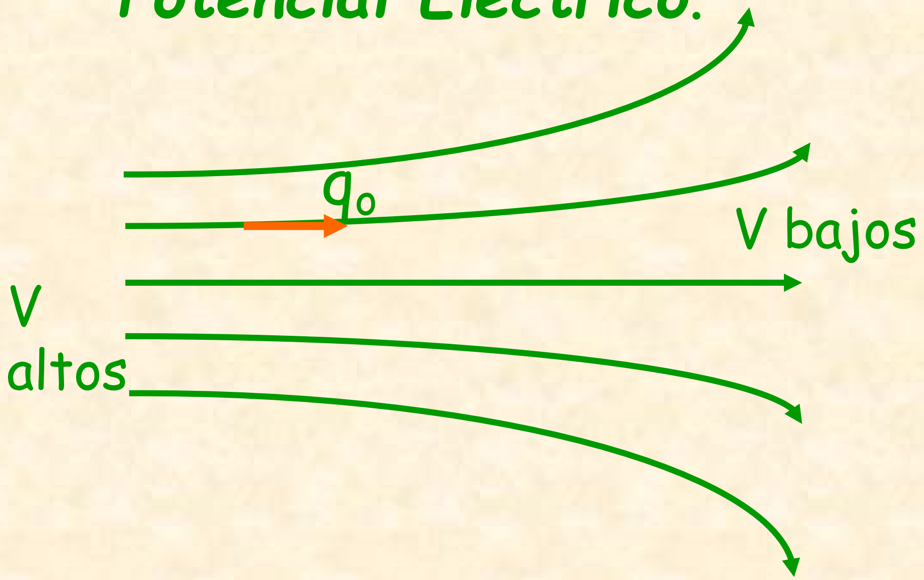
De esta forma

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Relación entre las Líneas de Campo y el Potencial Eléctrico

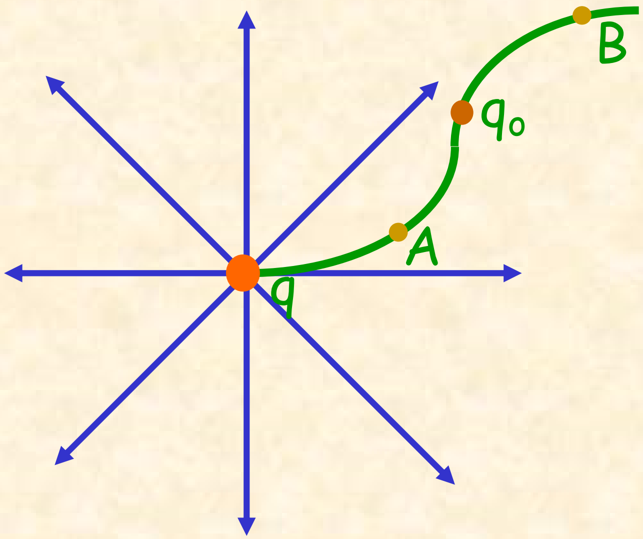
Si dejamos en libertad una carga de prueba en el seno de un campo eléctrico, se acelerará en el sentido de dicho campo a lo largo de las líneas de fuerza. El hecho de que se acelere hace que aumente su energía cinética, con lo cual, su energía potencial debe disminuir. Esto quiere decir que ***las Líneas de Campo señalan en la dirección en la que disminuye el Potencial Eléctrico***.



Visto en términos del gradiente, ya que su significado físico es la dirección de máxima variación de la función, el signo menos indica sentido decreciente del Potencial.

Potencial de una Carga Puntual

Se puede calcular el Potencial de una carga puntual a partir del Campo Eléctrico que produce.



I.- Calculemos el *Trabajo realizado por el Campo* para desplazar la carga desde el punto A al punto B

$$\underbrace{V(B)}_{0} - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$-V(r) = -\int_r^{\infty} k\frac{q}{r^2}\,dr = kq\frac{1}{r}$$

Tomando como origen de potenciales el infinito, podemos identificar el punto B= ∞ y A= r

$$V(r) = k\frac{q}{r}$$

II.- Un método alternativo es calcular el *Trabajo que debe realizar una Fuerza Exterior* para traer una carga desde el infinito hasta un punto r. En este caso el punto A coincide con el infinito.

$$W_{AB}^{ext} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_\infty^r k\frac{q}{r^2}dr$$

$V(A) = 0$

$$V(r) = k\frac{q}{r}$$

La Energía Potencial de una carga q_o, situada a una distancia r de q, será

$$U = q_o V = k\frac{qq_o}{r}$$

La Energía Potencial de un sistema de cargas puntuales será el trabajo necesario para llevar cada una de ellas desde el infinito hasta su posición final.

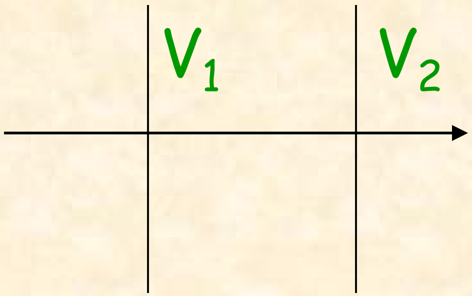
Diferencia de Potencial Eléctrico

$F \Rightarrow E = F/q$ $\qquad\qquad$ $E_P \Rightarrow V = E_P/q$

Diferencia de Potencial Eléctrico entre dos puntos: cambio de la Energía Potencial cuando una carga de prueba se mueve entre esos dos puntos dividido el valor de la carga

$$\Delta V_{a-b} = \frac{\Delta E_P}{q} = \frac{W_{b-a}}{q} = \int_a^b \vec{F}_{ext}.d\vec{l} = \int_a^b \frac{-q\,\vec{E}.d\vec{l}}{q}$$

$$\Delta V_{a-b} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}.d\vec{l}$$



E

$V_1 > V_2$

E apunta en la dirección que V decrece

De A a B el potencial decrece
de B a A el potencial aumenta

[V]=J/c=Volt (V)

Potencial de un Sistema de Cargas Puntuales

✓Para una distribución discreta de cargas

$$V = \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n}$$

✓Para una distribución continua de cargas

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{dq}{r}$$

Cálculo del Potencial Eléctrico

Existen dos métodos para calcular el Potencial Eléctrico asociado a una distribución continua de cargas:

I Conocido el Campo Eléctrico creado por la distribución

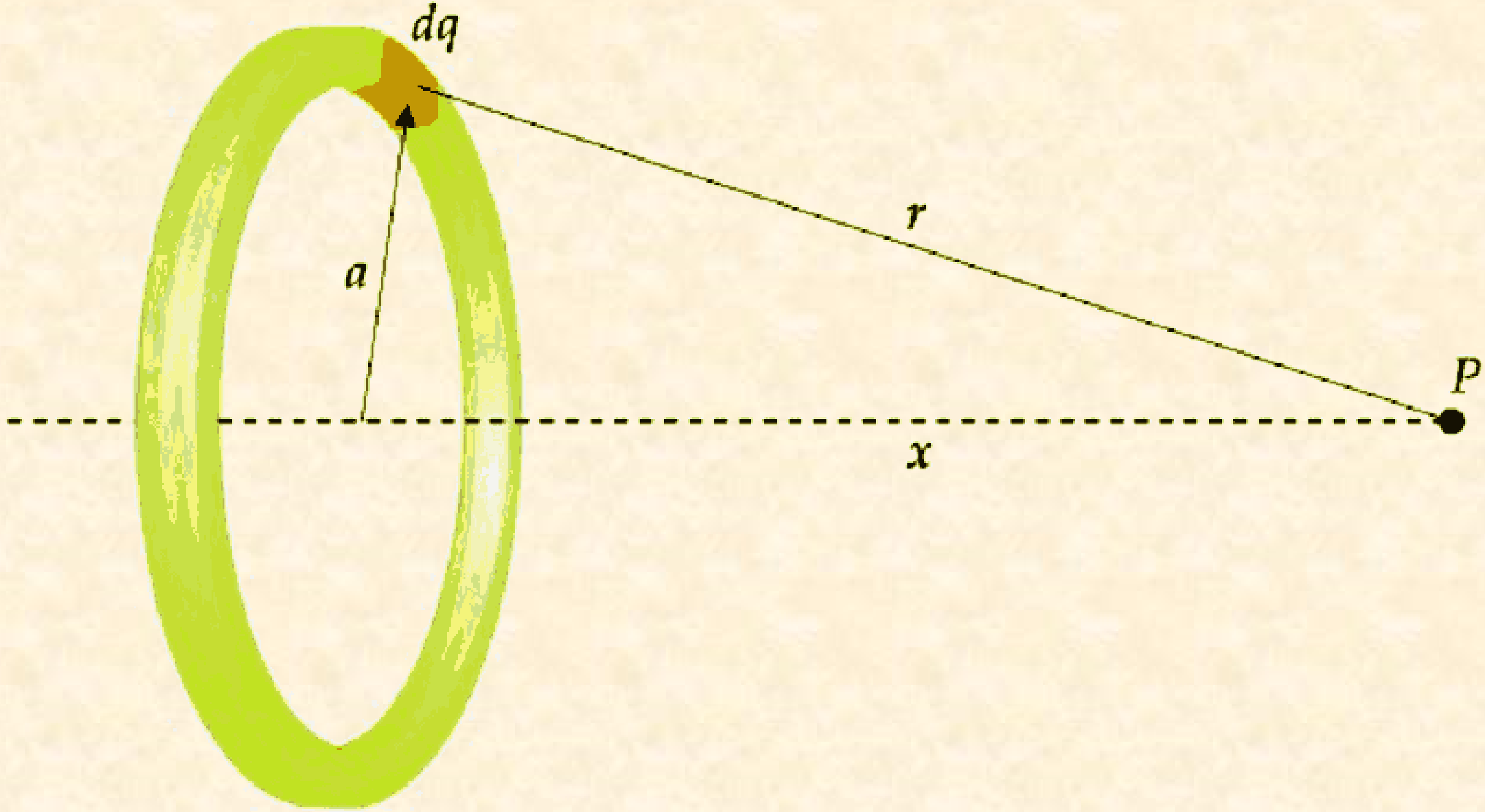
$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En este caso debemos tomar como origen de potenciales un punto de referencia arbitrario.

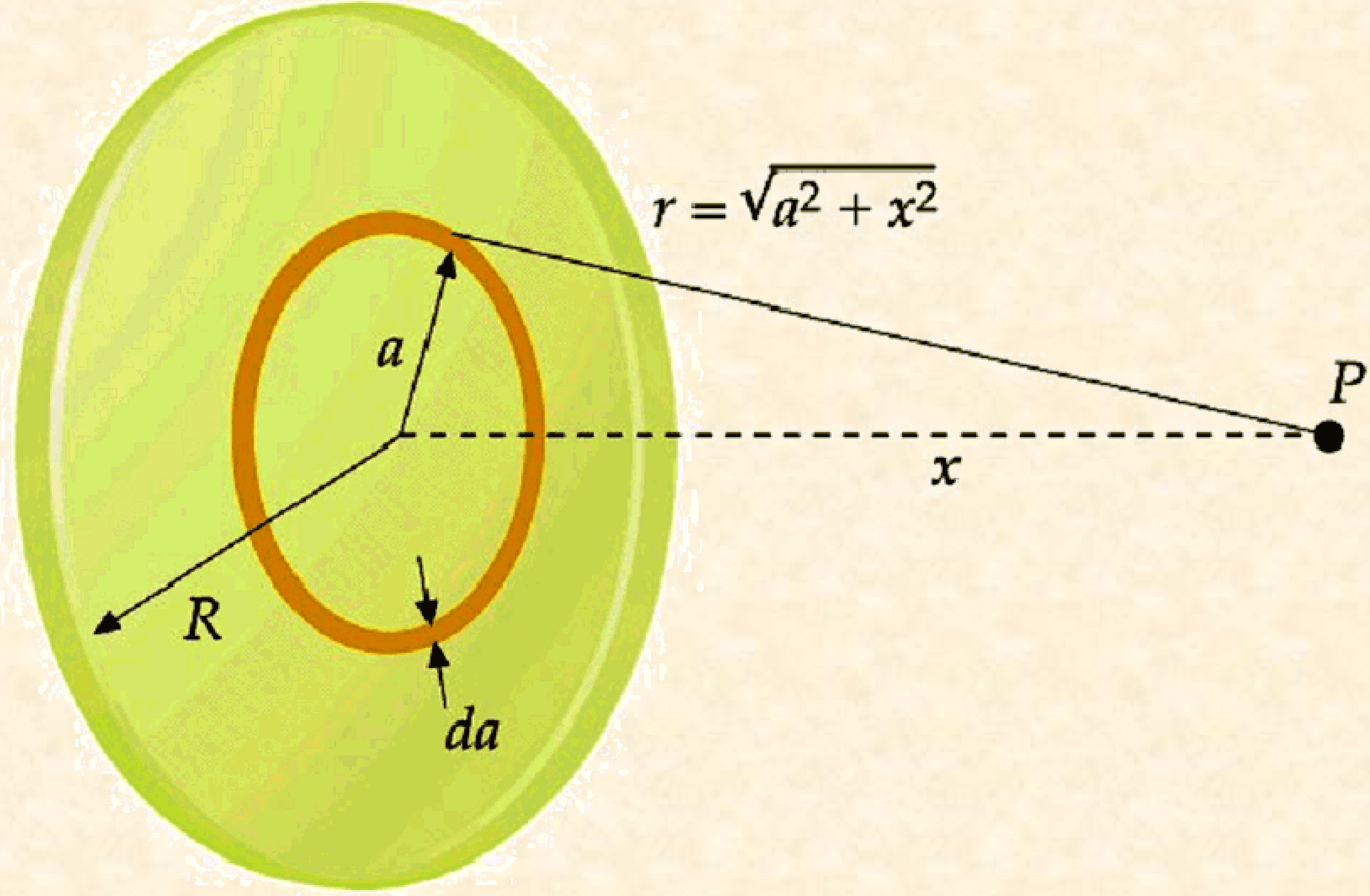
II Para el caso de distribuciones finitas de carga, para las cuales podemos suponer que $V(\infty) = 0$. En este caso podemos suponer conocido el V para la carga puntual y aplicar superposición

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{dq}{r}$$

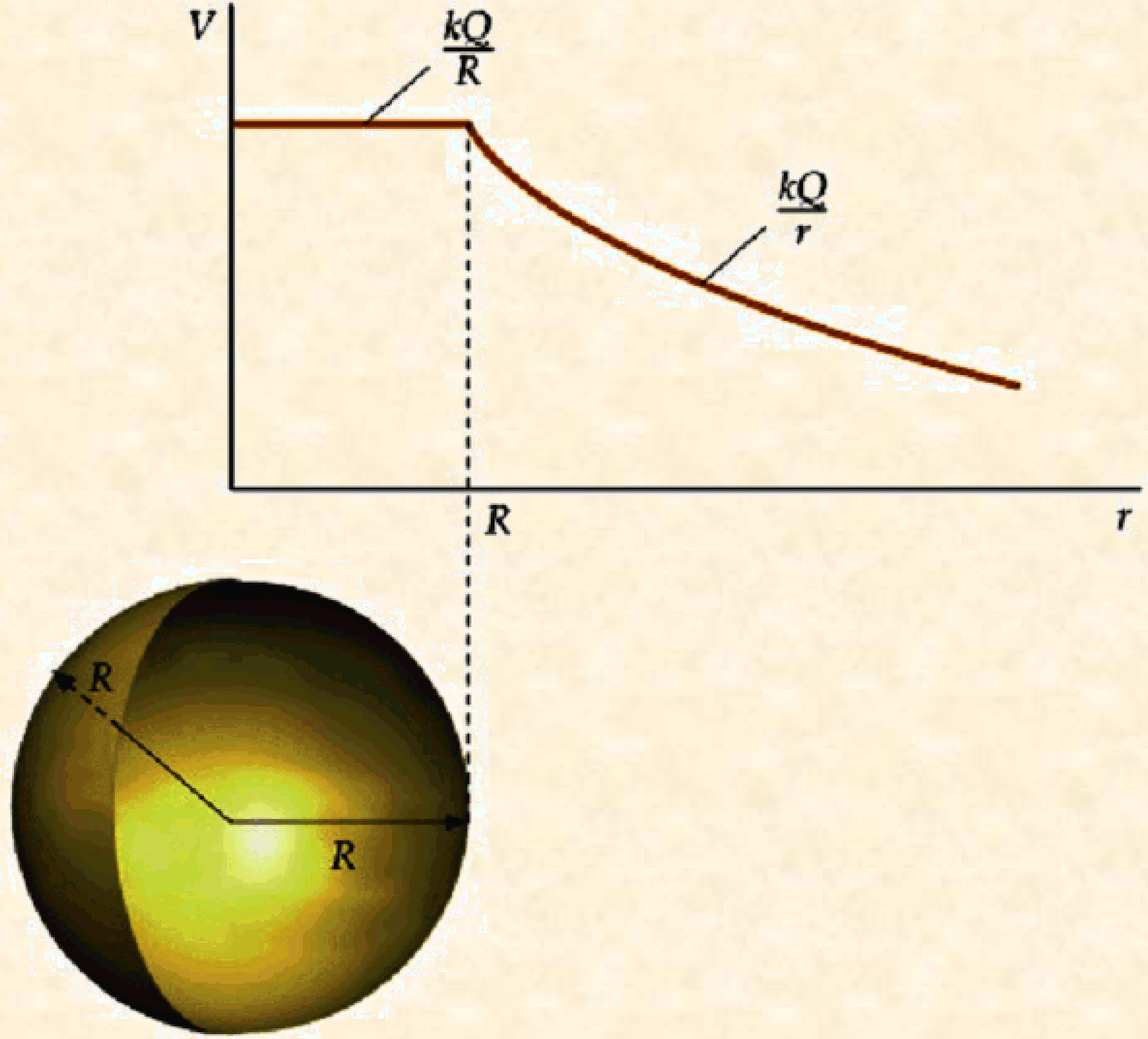
Ejemplo 1.- Potencial Eléctrico sobre el eje de un anillo cargado.



Ejemplo 2.- Potencial Eléctrico sobre el eje de un disco uniformemente cargado.



Ejemplo 3.- Potencial Eléctrico en el interior y el exterior de un Cascarón (corteza) Esférico de carga.



Superficies Equipotenciales

Vamos a suponer una región del espacio en la que existe un Campo Eléctrico, representado por sus Líneas de Campo. El trabajo necesario para desplazar una carga de prueba, q_o, una distancia infinitesimal a la largo de una de estas líneas será

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

En términos de incrementos

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \begin{cases} \Delta\vec{r} \text{ perpendicular a } \vec{E} \longrightarrow \Delta V = 0 \longrightarrow \text{V constante} \\ \Delta\vec{r} \text{ paralelo a } \vec{E} \longrightarrow \text{Variación máxima de Potencial} \end{cases}$$

Superficies Equipotenciales

Es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran al mismo potencial. Cumplen la condición de encontrarse en un plano perpendicular al Campo Eléctrico

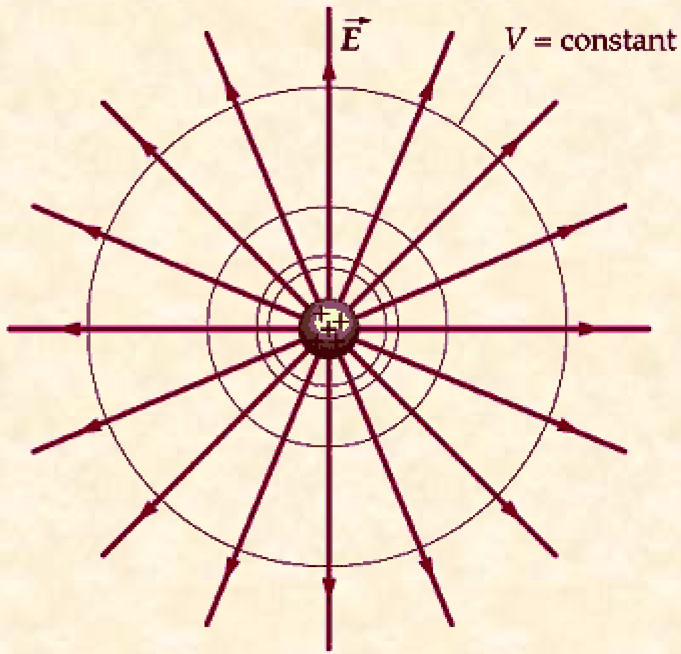
El trabajo desarrollado para mover una partícula de un punto A a otro punto B a lo largo de una superficie equipotencial es nulo, ya que

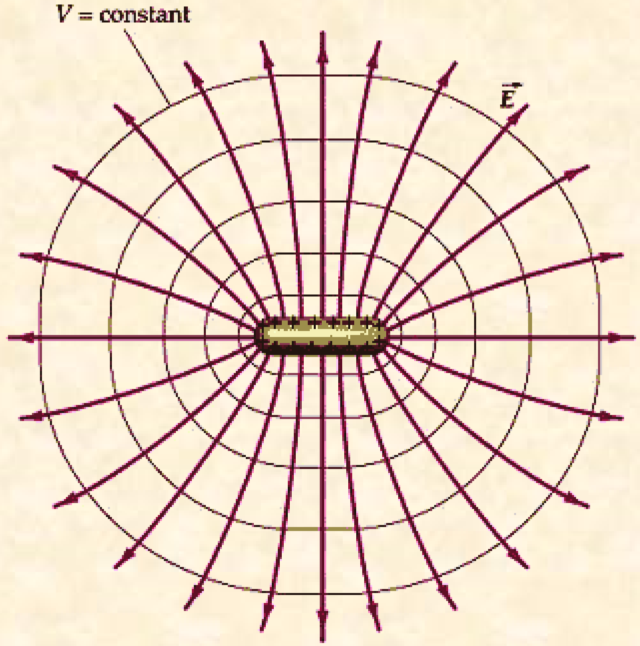
$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_o}$$

A lo largo de una superficie equipotencial

$$V_A = V_B \longrightarrow W_{AB} = 0$$

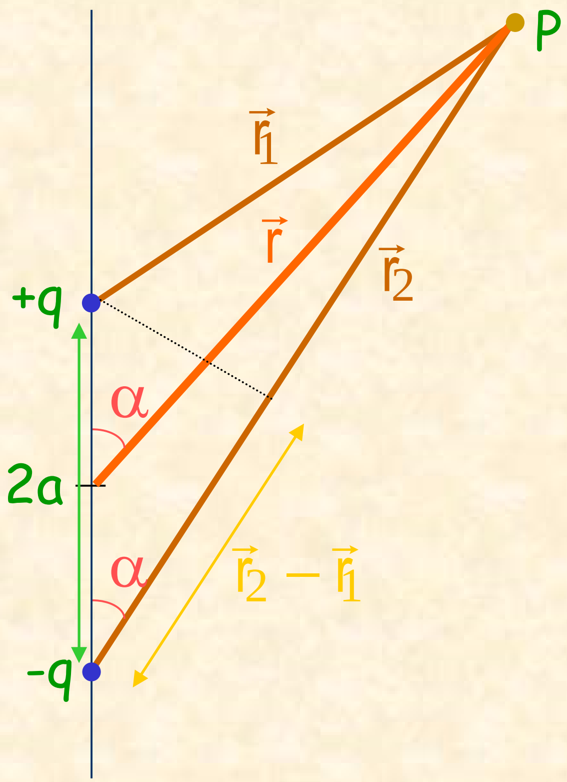
Ejemplos de Superficies Equipotenciales





Potencial creado por un Dipolo Eléctrico

Vamos a calcular el Potencial Eléctrico que produce un dipolo eléctrico en un punto del espacio.



$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

Para puntos muy alejados del dipolo, tales que r>>2a, se pueden hacer las siguientes aproximaciones

$$r_2 - r_1 \cong 2\,a\,\mathrm{Cos}\alpha$$

$$r_1 r_2 \cong r^2$$

Teniendo en cuenta estas dos aproximaciones, podemos escribir

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\,a\,\text{Cos}\,\alpha}{r^2}$$

Recordando la definición de momento dipolar eléctrico $\Rightarrow$ $P = 2\,a\,q$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{P\,\text{Cos}\,\alpha}{r^2}$$

- V = 0 para a = 90° $\rightarrow$ **No se requiere trabajo para llevar una carga de prueba desde el infinito hasta el dipolo a lo largo de la línea perpendicular al punto medio entre las dos cargas.**

Movimiento de una Partícula en un Campo Eléctrico

Cuando una Carga Eléctrica se coloca en el seno de un Campo Eléctrico, experimenta una Fuerza que viene dada por

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Si queremos calcular la aceleración que experimenta dicha carga, bastará con aplicar la Segunda Ley de Newton

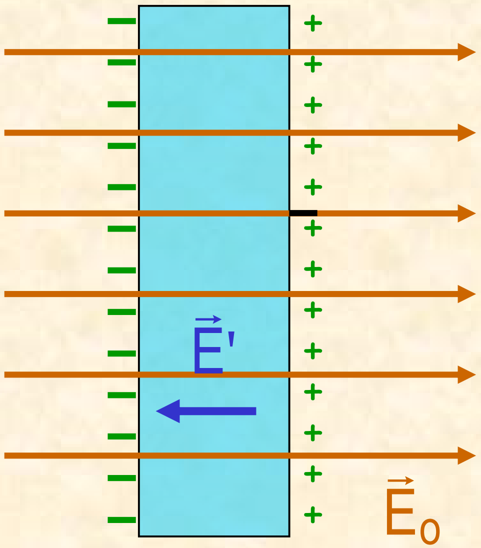
$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Por ejemplo, en el caso de un Campo Eléctrico uniforme, la trayectoria de una partícula es una parábola. Sería el mismo caso del movimiento de un proyectil en el seno del campo gravitatorio uniforme. La medida de la desviación de los electrones en un Campo Eléctrico uniforme fue utilizada por Thompson en 1897 para demostrar la existencia de dichas partículas y calcular su relación carga/masa.

Conductor en Equilibrio Electrostático

Conductor: Material que se caracteriza por tener cargas libres que pueden moverse en su interior.

Si sometemos un conductor a un Campo Eléctrico externo, su carga libre se redistribuye hasta anular el Campo Eléctrico en su interior. En estas condiciones se dice que el conductor está en **Equilibrio Electrostático ($E' = E_o$).**

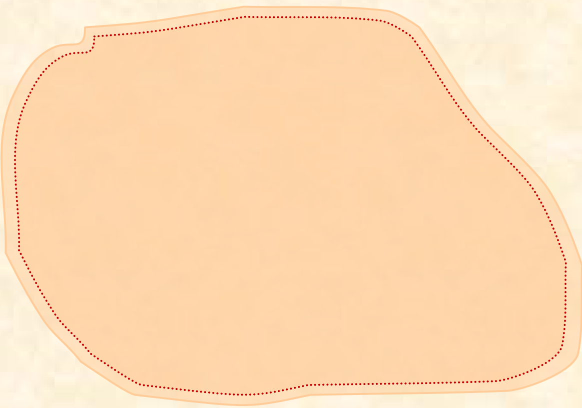


Cualquier exceso de carga se colocará en la superficie del conductor, ya que el Campo Eléctrico externo no es lo suficientemente intenso como para vencer las fuerzas de ligadura.

Conductor en Equilibrio Electrostático

Condiciones que se deben cumplir en todo conductor

I *Toda la carga libre de un conductor se coloca en su superficie.*



Dado un conductor, supongamos una superficie gaussiana justo en el interior de la superficie del conductor. Como E =0 dentro del conductor, también será nulo en todos los puntos de la superficie gaussiana. Por lo tanto el flujo a través de la superficie del conductor es cero.

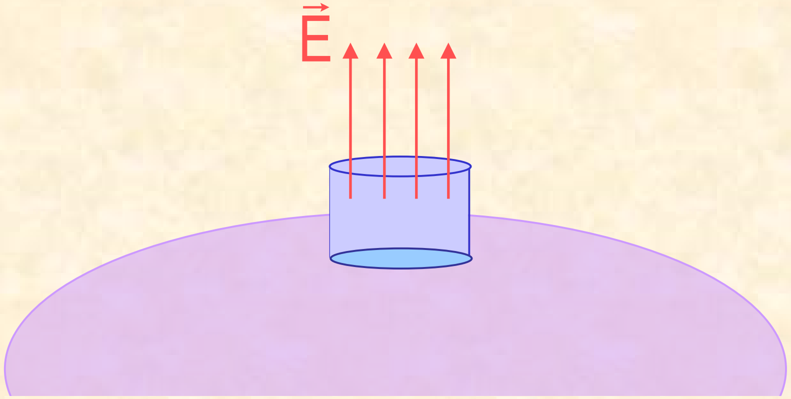
Por el Teorema de Gauss $\Phi = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ Como $\Phi = 0$ $q_{int} = 0$

Por lo tanto si existe carga debe estar en la superficie del conductor

Conductor en Equilibrio Electrostático

I
I

El Campo Eléctrico en la superficie del conductor es perpendicular a dicha superficie y vale $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$



Para hallar el Campo Eléctrico en la superficie del conductor consideremos un elemento infinitesimal plano, con densidad superficial de Carga σ. Como Superficie Gaussiana tomamos un cilindro con una cara en el exterior y otra en el interior del conductor

Si el conductor está en equilibrio electrostático, el E en la superficie debe ser perpendicular a dicha superficie. Así, sólo hay flujo a través de la cara superior.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\, s = \frac{q_{int}}{\varepsilon_o} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

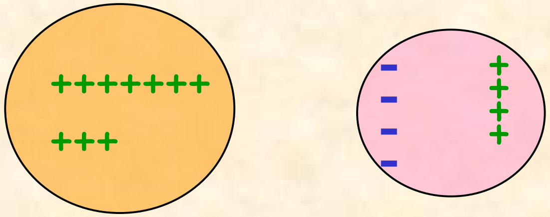
$$q_{int} = \sigma\, s$$

Conductor en Equilibrio Electrostático

➢Conductores en contacto

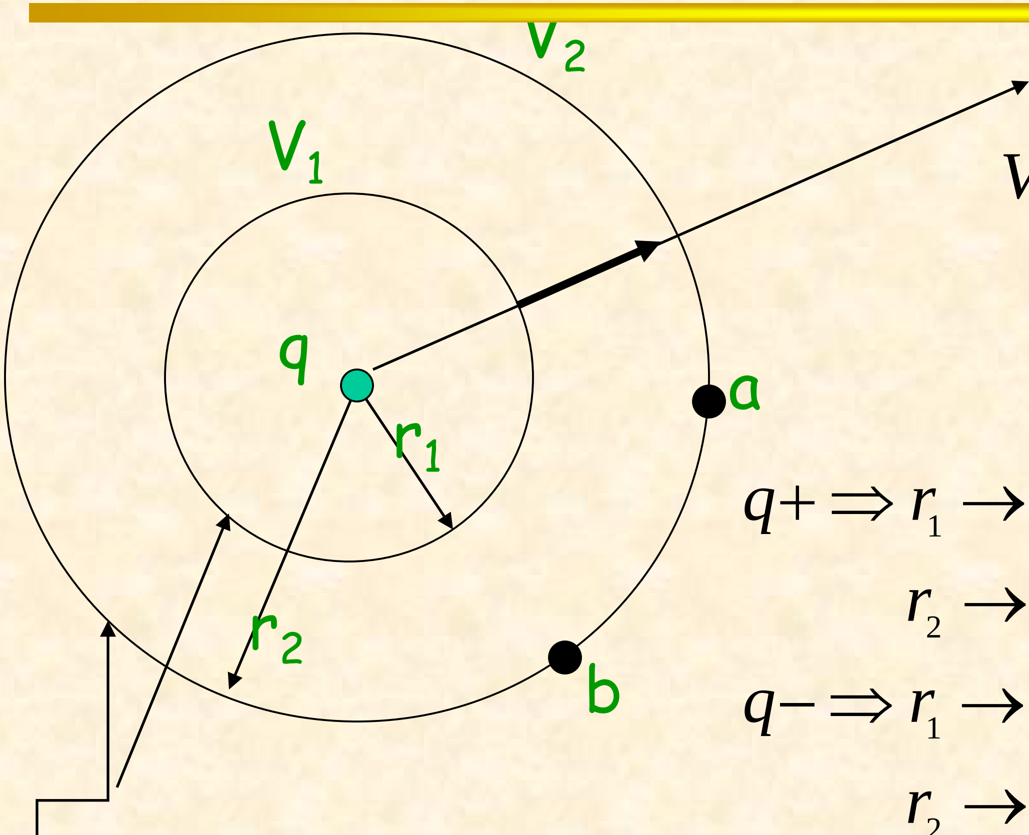
Cuando se ponen en contacto dos conductores, la carga de ambos se redistribuye hasta que el Campo Eléctrico en el interior de ambos conductores se anula y se restituye el equilibrio Electrostático. En estas condiciones, el Potencial de ambos conductores debe ser el mismo.

Supongamos un conductor con carga +q al cual se aproxima un conductor descargado. En éste último aparecerán cargas inducidas.



Como el Potencial disminuye a lo largo de las Líneas de Campo, en principio, el conductor cargado está a un Potencial más alto que el neutro. Cuando se ponen en contacto ambos conductores, la carga positiva fluye hacia el neutro hasta que ambos quedan al mismo Potencial.

Carga Puntual



$$V_2 = V_2 - V_\infty = \frac{\Delta E_{P(\infty-2)}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Delta V_{1-2} = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$q+ \Rightarrow r_1 \to r_2 \quad \Delta V < 0$$

$$r_2 \to r_1 \quad \Delta V > 0$$

$$q- \Rightarrow r_1 \to r_2 \quad \Delta V > 0$$

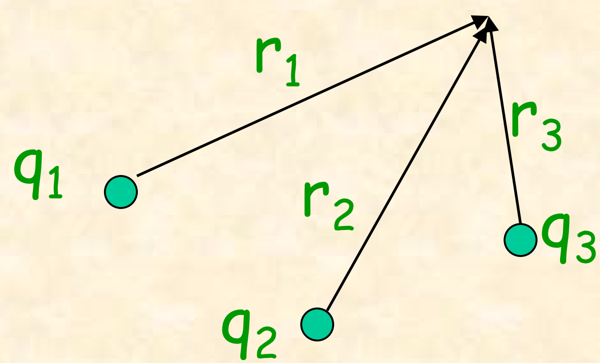
$$r_2 \to r_1 \quad \Delta V < 0$$

$$\Delta V_{a-b} = V_b - V_a = 0$$

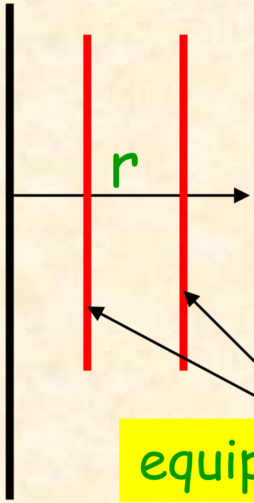
Superficies equipotenciales

Sistema de cargas puntuales

$$V = V - V_\infty = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



Potencial de una Línea Infinita con Carga λ [C/m]



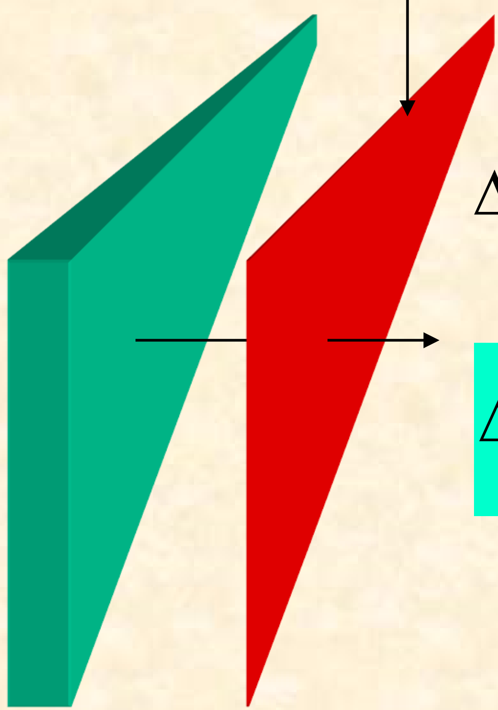
$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}.d\vec{r} \qquad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\breve{r}$$

$$\boxed{\Delta V_{2-1} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$V = 0 \;\; donde?$$

$$V = 0 \quad en \quad r = 1\,(arbitrario)$$

equipotenciales



Idem pared infinita con carga σ [C/m^2]

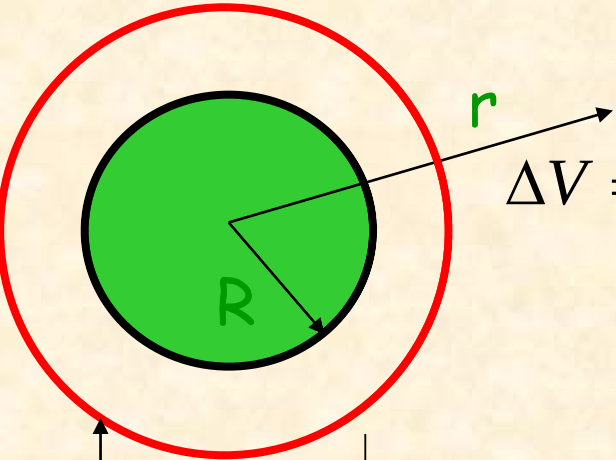
$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}.d\vec{r} \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Delta V_{2-1} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}(r_2 - r_1)}$$

$$V = 0 \;\; donde?$$

$$V = 0 \quad en \quad r = 1\,(arbitrario)$$

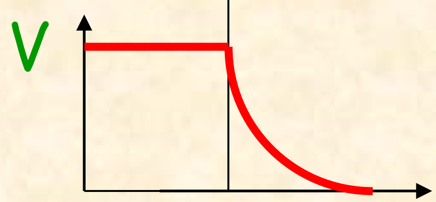
Potencial generado por Esfera Conductora (Carga en Superficie)



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}.d\vec{r}$$

$$\begin{cases} r > R & \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\breve{r} \\ r < R & E = 0 \end{cases}$$

$$r > R \quad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$



$$r < R \quad \Delta V = 0 \quad (V = cte)$$

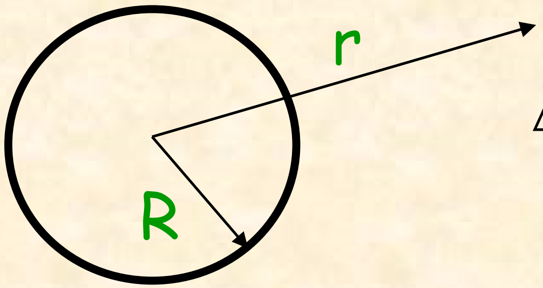
Superficie equipotencial

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

$$V(r = \infty) = 0$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Potencial de Esfera Cargada Uniformemente en V



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}.d\vec{r}$$

$$r > R \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\breve{r}$$

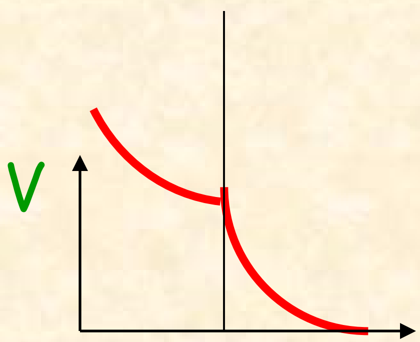
$$r < R \quad E = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}$$

$$\boxed{r > R \quad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

$$V(r=\infty) = 0$$

$$\boxed{V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$



$$r < R \quad V(r) = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}(r > R).d\vec{r} - \int_{R}^{r} \vec{E}(r < R).d\vec{r}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} - \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r^2 - R^2)}$$

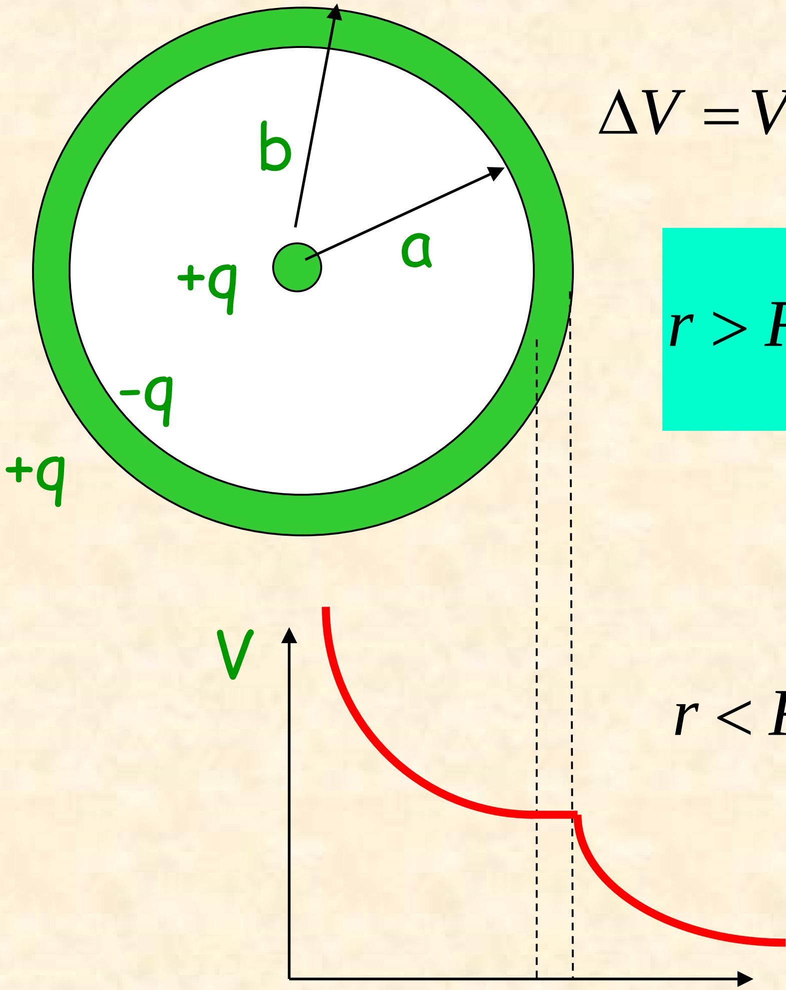
$$r = R \Rightarrow V(R)$$

$$q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}[1 - \frac{1}{2}(\frac{r^2}{R^2} - 1)]}$$

$$r = 0 \Rightarrow V = \frac{3V(R)}{2}$$

Potencial: Carga dentro de un cascarón Conductor



$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}.d\vec{r} \qquad r > R \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\breve{r}$$

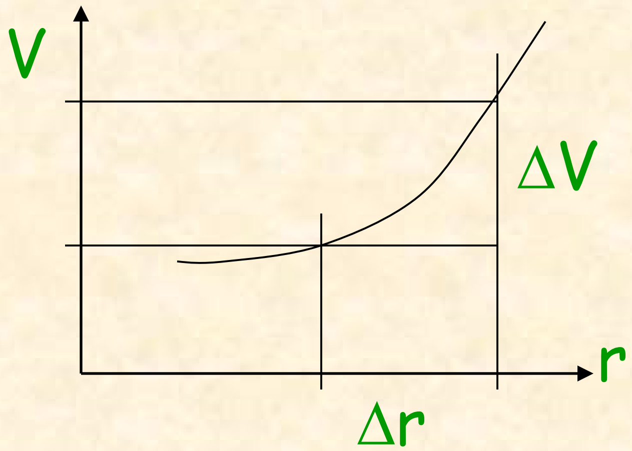
$$r > R \qquad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$V(r=\infty) = 0 \qquad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$r < R \qquad V = -\int_{\infty}^{b} \vec{E}.d\vec{l} - \int_{b}^{a} \vec{E}.d\vec{l} - \int_{a}^{r} \vec{E}.d\vec{l}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{b} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Relación entre E y V



$$\Delta V = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}.d\vec{r} \qquad dV = -\vec{E}.d\vec{r}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cartesianas $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\breve{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\breve{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\breve{k}$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

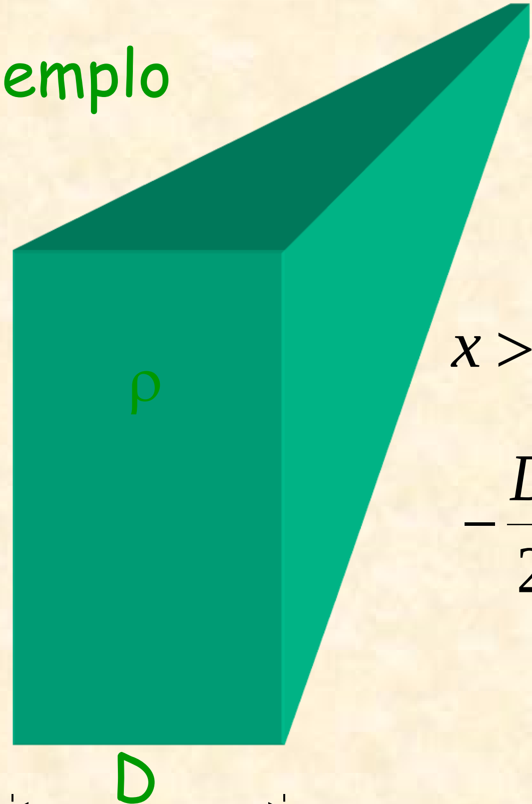
$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Ec.Poisson

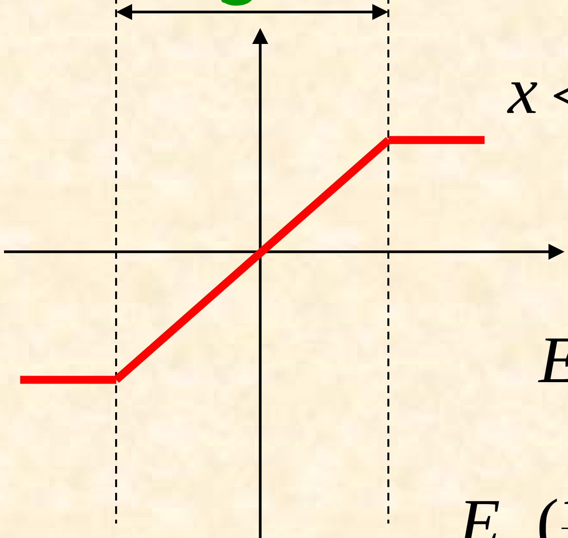
$\nabla^2 V = 0$ Ec.Laplace

Cilíndricas

Esféricas

Ejemplo





Dentro Ec. Poisson y fuera Ec. Laplace

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla^2 V = 0$$

$$x > \frac{D}{2} \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \Rightarrow E = a \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow V = b\,x + c$$

$$-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2} \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x + d$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow V = -\frac{\rho}{2\,\varepsilon_0} x^2 + e\,x + f$$

$$x < -\frac{D}{2} \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \Rightarrow E = g \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow V = h\,x + i$$

Condiciones de borde para E

$$E(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow E\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{\rho\, D}{2\,\varepsilon_0}$$

$$E_{ex}\left(\frac{D}{2}\right) = -E_{ex}\left(-\frac{D}{2}\right) = E_{in}\left(\frac{D}{2}\right) \Rightarrow$$

$$E_{in} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x$$

$$E_{ex} = \pm \frac{\rho\, D}{2\,\varepsilon_0}$$

$$x > \frac{D}{2} \quad V = b\,x + c$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2} \quad V = -\frac{\rho}{2\,\varepsilon_0} x^2 + e\,x + f$$

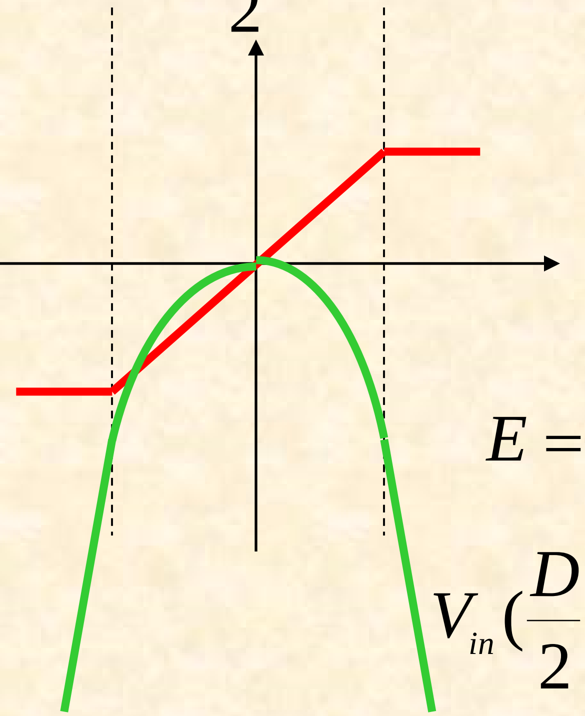
$$V_{in}(-\frac{D}{2}) = V_{in}(\frac{D}{2}) \Rightarrow$$

$$x < -\frac{D}{2} \quad V = h\,x + i$$

$$-\frac{\rho}{2\,\varepsilon_0}\frac{D^2}{4} - e\frac{D}{2} = -\frac{\rho}{2\,\varepsilon_0}\frac{D^2}{4} + e\frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow e = 0$$

$$\boxed{V_{in} = -\frac{\rho}{2\,\varepsilon_0} x^2}$$

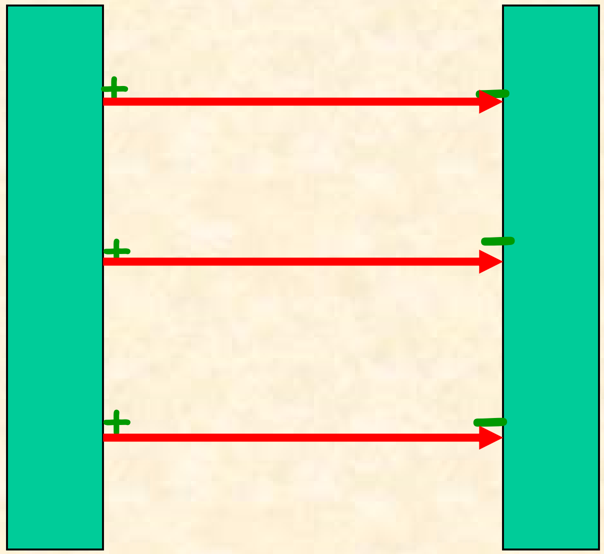


$$E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow en\; x = \frac{D}{2} \quad \frac{\rho\,D}{2\,\varepsilon_0} = -b \Rightarrow V = -\frac{\rho\,D}{2\,\varepsilon_0} x + c$$

$$V_{in}(\frac{D}{2}) = V_{ex}(\frac{D}{2}) \Rightarrow -\frac{\rho}{2\,\varepsilon_0}\frac{D^2}{4} = -\frac{\rho\,D}{2\,\varepsilon_0}\frac{D}{2} + c \Rightarrow c = \frac{\rho\,D^2}{8\,\varepsilon_0}$$

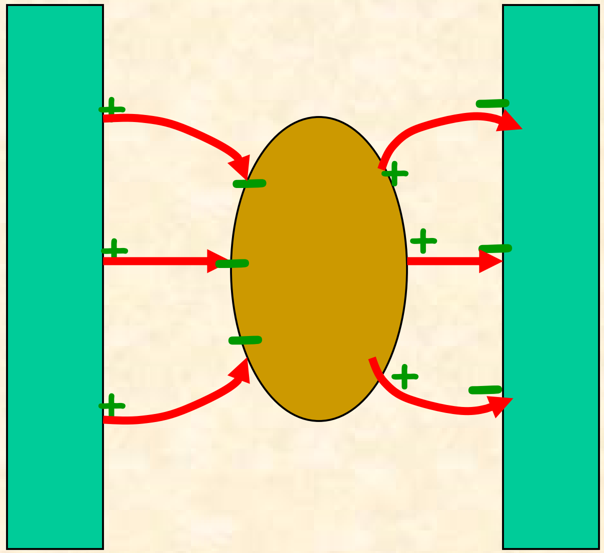
$$\boxed{V_{ex} = \mp\frac{\rho\,D}{2\,\varepsilon_0} x + \frac{\rho\,D^2}{8\,\varepsilon_0}}$$

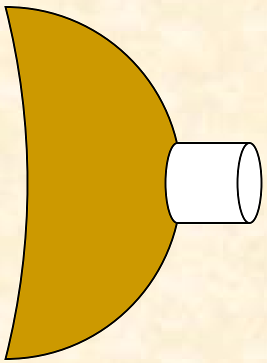
Conductor en un Campo Eléctrico



En conductor cargas en superficie, sino repeliéndose y en movimiento

Superficie de un conductor necesariamente debe ser equipotencial sino las cargas se estarían moviendo

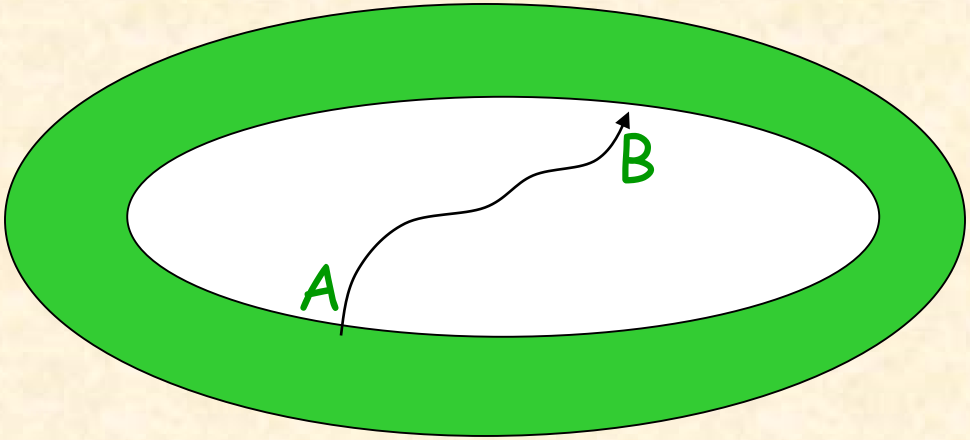




$$E\,S = \frac{\sigma\,S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E \perp S$$

Superficie interior es un Equipotencial



Si E dentro $\neq 0$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{r}$$

Si A-B se toma de forma que camino paralelo a E

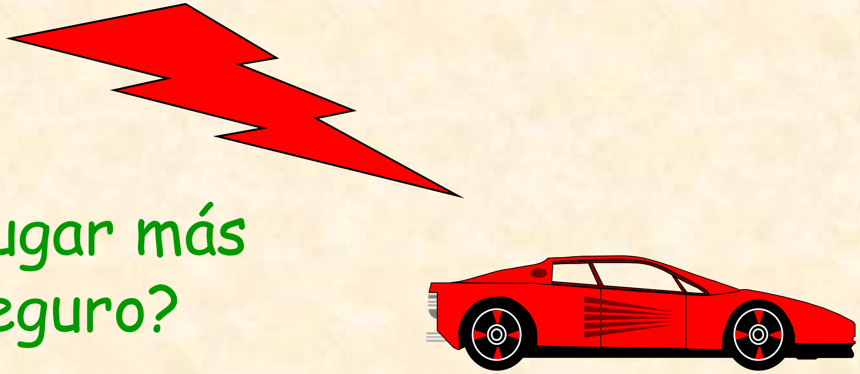
$$\vec{E}.d\vec{r} > 0 \Rightarrow V_A > V_B$$

Dentro de los conductores, sean macizos o huecos, E es nulo, independientemente de las cargas externas y su distribución

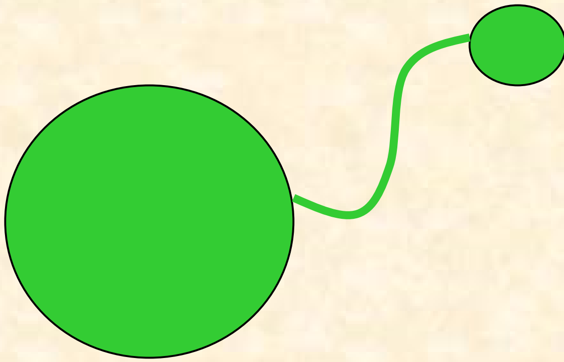
contradiciendo hipótesis

Apantallamiento

Lugar más seguro?



Influencia de la forma del Conductor



$\cancel{R_2 q'_1}$ $\cancel{\sigma'_1}$

$R_2 q_2$ σ_2

$\cancel{R_1 q'_1}$ $\cancel{\sigma'_1}$

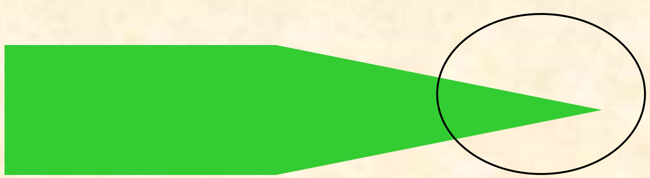
$R_1 q_1$ σ_1

Todos los conductores forman un equipotencial

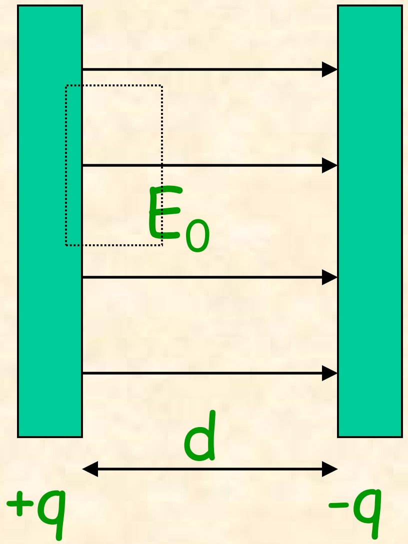
$$\frac{4\pi\sigma_1 R_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{4\pi\sigma_2 R_2^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

En los conductores las cargas se concentran en las zonas de menor radio de curvatura => pararrayos



Capacitores



$$E_0\, S = \frac{\sigma\, S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

$$\Delta V = -\int \vec{E}_0\, d\vec{r} = \frac{\sigma\, d}{\varepsilon_0}$$

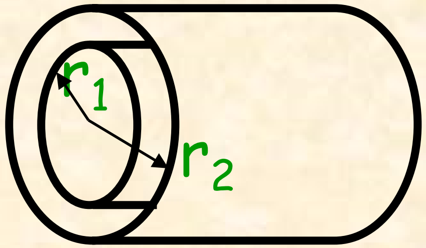
$$\boxed{\Delta V = \frac{\sigma\, d}{\varepsilon_0}}$$

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$ capacidad

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0\, S}{d}}$$ Capacitor plano

$$E\, 2\,\pi\, r\, l = \frac{2\,\pi\, r_1\, l\, \sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\, l}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\,\pi\, r\, \varepsilon_0} = \frac{r_1\, \sigma_1}{\varepsilon_0\, r}}$$



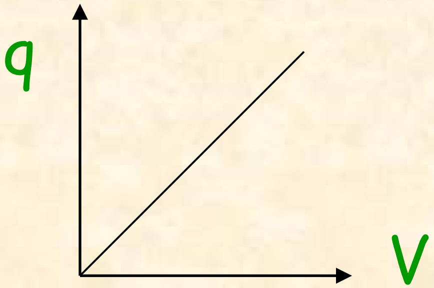
$$\Delta V = -\int \vec{E}.d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\,\pi\, \varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1\, \sigma_1}{\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\boxed{[C] = \frac{c}{V} = Faraday\,(F)}$$

$$\boxed{C = \frac{2\,\pi\, \varepsilon_0\, l}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\,\pi\, l\, \varepsilon_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}}$$ Capacitor cilíndrico

C depende solo de parámetros geométricos

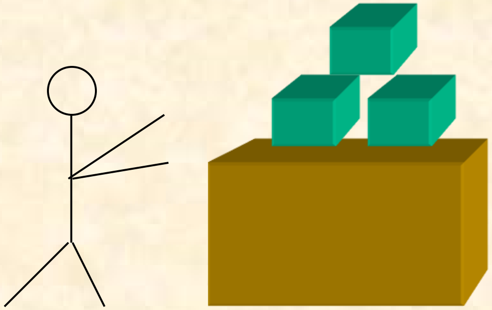
Significado de la Capacidad



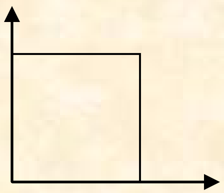
$$dE_P = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

$$E_P = \int_0^q \frac{1}{C}\,q\,dq$$

$$E_P = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}C\,V^2 = \frac{1}{2}q\,V$$



$$E_P = n\,(m\,g\,h)$$



C mide la capacidad de almacenar energía de un capacitor

Faraday: unidad muy grande

en condensador plano si $d = 1\,mm$ y $C = 1\,F$

$$S = \frac{C\,d}{\varepsilon_0} = 1{,}1\,10^8\ m^2$$

C en μF (10^{-6}) a pF (10^{-12})

Energía del Campo Eléctrico

$$u = \frac{E_P}{Vol.} = \frac{\frac{1}{2} C V^2}{d\, S} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\varepsilon_0 S}{d} E^2 d^2}{d\, S}$$

Densidad de Energía Potencial en vacío

$$E_P = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Deducida para Condensador plano pero vale en general

Ej. Capacitor cilíndrico

$$\frac{dE_P}{dVol} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

$$E_P = \frac{1}{2} C V^2$$

$$E_P = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \right)^2 2\pi\, l\, r\, dr$$

$$E_P = \frac{1}{2} \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \right)^2$$

$$E_P = \frac{\lambda^2 l}{4\pi \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad E_P = \frac{\lambda^2 l}{4\pi \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

¿Vacío absoluto? $Energía = m c^2$

Donde hay **E** hay Energía

Energía de una Esfera cargada en Volumen: ¡Complejo!

$$u = \frac{dE_P}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2$$

$$E_P = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2\, dV$$ en todo el espacio

dentro

$$E\, 4\pi\, r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi\, r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}$$

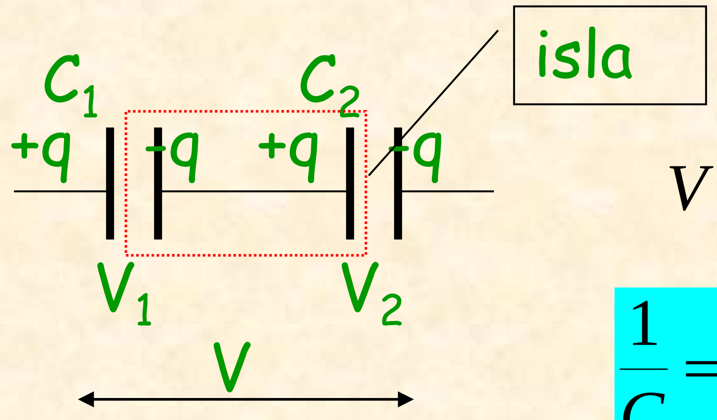
$$E_P = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^R \left(\frac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\right)^2 r^2\, dr + \int_R^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0\, r^2}\right)^2 r^2\, dr \right)$$

$$E_P = \frac{\rho^2}{18\,\varepsilon_0}\, 2\, 2\pi \int_0^R r^4\, dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0\, 4\pi\, \frac{q^2}{(4\pi\,\varepsilon_0)^2} \int_R^{\infty} r^{-2}\, dr$$

$$\boxed{E_P = \frac{4\pi\,\rho^2\, R^5}{18 . 5\,\varepsilon_0} + \frac{q^2}{8\pi\,\varepsilon_0\, R} = \frac{6\, q^2}{40\,\pi\,\varepsilon_0\, R}}$$

Conexión de Capacitores

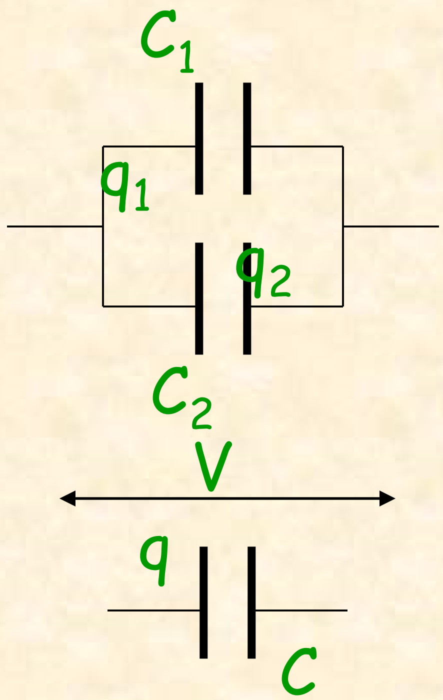
Serie



$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \frac{q}{C}$$

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}}$$

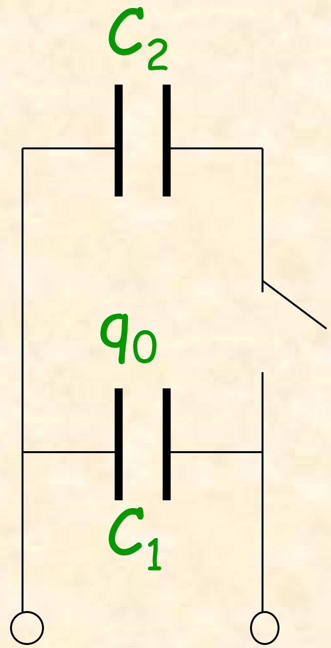
Paralelo



$$q = C\,V = q_1 + q_2 = V\,(C_1 + C_2)$$

$$\boxed{C = \sum C_i}$$

Capacitor Originalmente Cargado



$$V_0 = \frac{q_0}{C_1} \qquad E_{P0} = \frac{1}{2} q_0 V_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_1}$$

cuando se conecta las cargas se redis-tribuyen

$$q_1 + q_2 = q_0$$

y el conjunto equivale a tener un $C = C_1 + C_2$

$$V = \frac{q_0}{C_1 + C_2} \qquad q_1 = C_1 V \quad q_2 = C_2 V$$

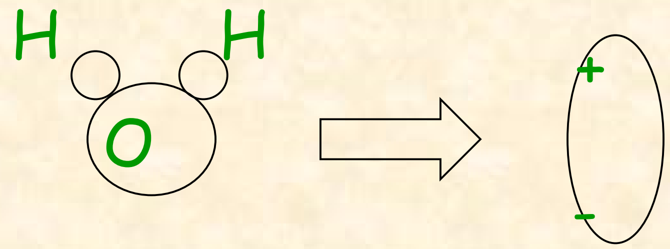
$$E_P = \frac{1}{2} q_1 V + \frac{1}{2} q_2 V = \frac{1}{2} q_0 V = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_1 + C_2} < E_{P0}$$

En el caso real (no en este modelo), una parte de la energía se disipa en los conductores cuando las cargas se distribuyen y otra se emite como radiación electromagnética

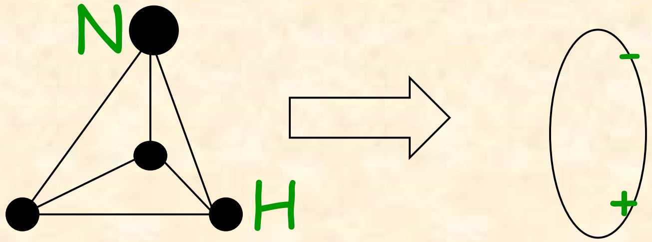
Dipolo Eléctrico

Moléculas Polares

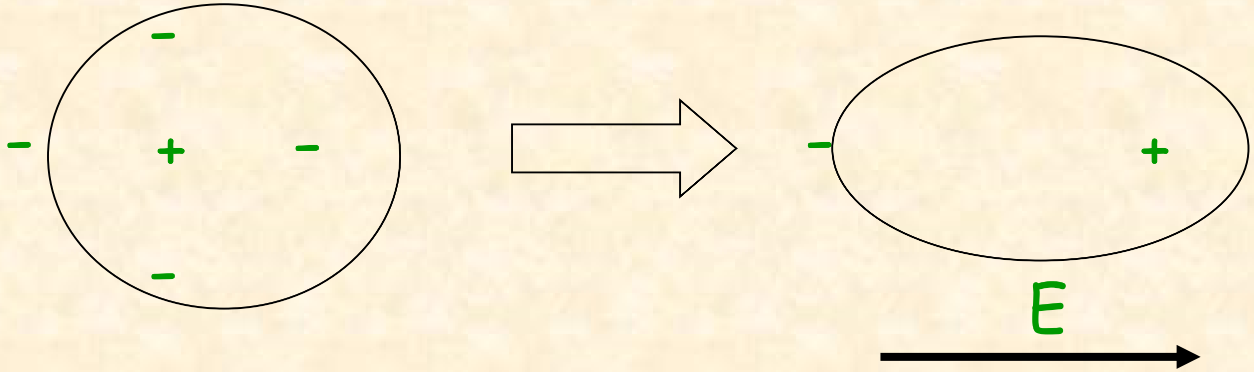
Agua H_2O



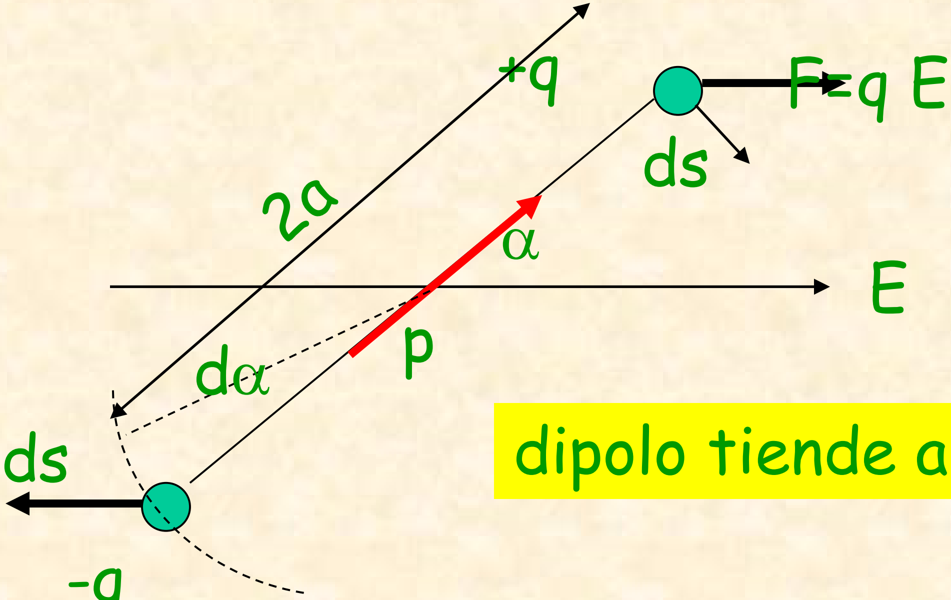
Amoníaco NH_3



Moléculas No Polares se polarizan en presencia de **E**



Dipolo en E



$$\tau = F\ 2\,a\,\mathrm{sen}\,\alpha = q\ E\ 2\,a\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

definimos $\vec{p} = q\,2\,a \quad -a+$

dipolo tiende a rotar alineándose con E

$$\tau = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$ds = a\ d\alpha$$

$$dE_P = dW = \vec{F}\,.\,d\vec{s} = q\ E\ a\ d\alpha\ \mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\Delta E_P = 2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q\ a\ E\ \mathrm{sen}\,\alpha\ d\alpha = -p\ E\,(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

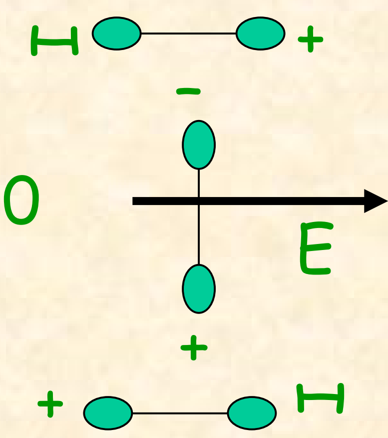
Si $E_P=0$ cuando α = 90°

$$E_P = -p\ E\cos\alpha$$

E_P min

$E_P=0$

E_P max



$$E_P = -\vec{p}\,.\,\vec{E}$$

Generadores Electrostáticos

- Un generador electrostático, o máquina electrostática, es un dispositivo mecánico que produce electricidad estática, o electricidad a alta tensión y corriente continua baja.
- Los generadores electrostáticos, son aquellos que producen una gran cantidad de electricidad estática y estos producen tensiones muy altas con una pequeña intensidad de corriente. Estos producen la electricidad estática por medio de los cuerpos no conductores apoyándose una sobre la otra.
- Funcionamiento: Al frotar dos objetos no conductores se genera una gran cantidad de electricidad estática. Habitualmente los aislantes son buenos para generar y para conservar cargas superficiales. Algunos ejemplos de estas sustancias son el caucho, los plásticos y el vidrio.

Generadores Electrostáticos

Máquina de Wimshurst

Ramsden

Generador Van de Graaff

Generador de Van de Graaff

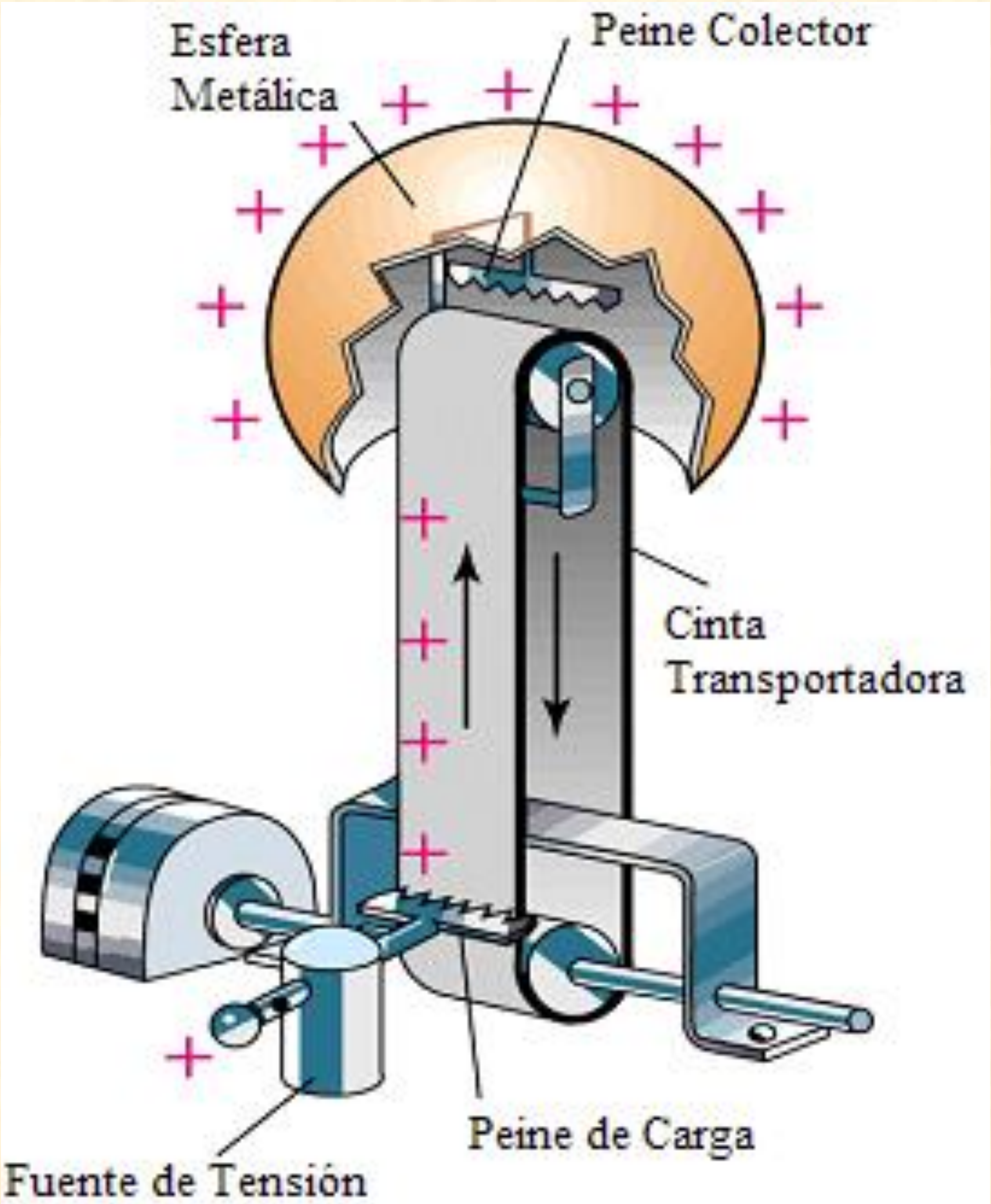
- Máquina electrostática empleada en física nuclear para producir tensiones muy elevadas.

- El generador fue desarrollado en 1931 por el físico estadounidense Robert Jemison Van de Graaff.

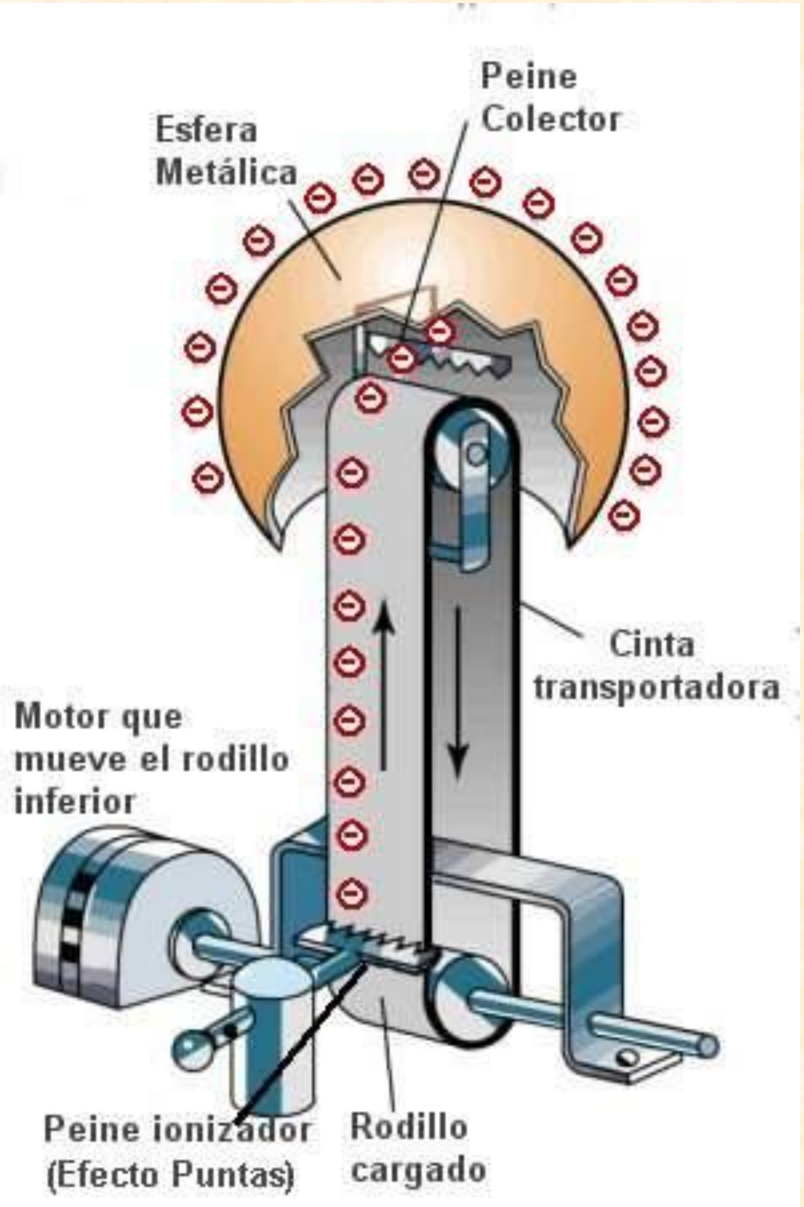
- Mediante una tensión eléctrica de unos 50.000 voltios se emiten electrones desde un peine metálico de púas afiladas, paralelo a la correa móvil.

- El generador Van de Graaff se usa para acelerar un haz de electrones, protones o iones destinado a bombardear núcleos atómicos.

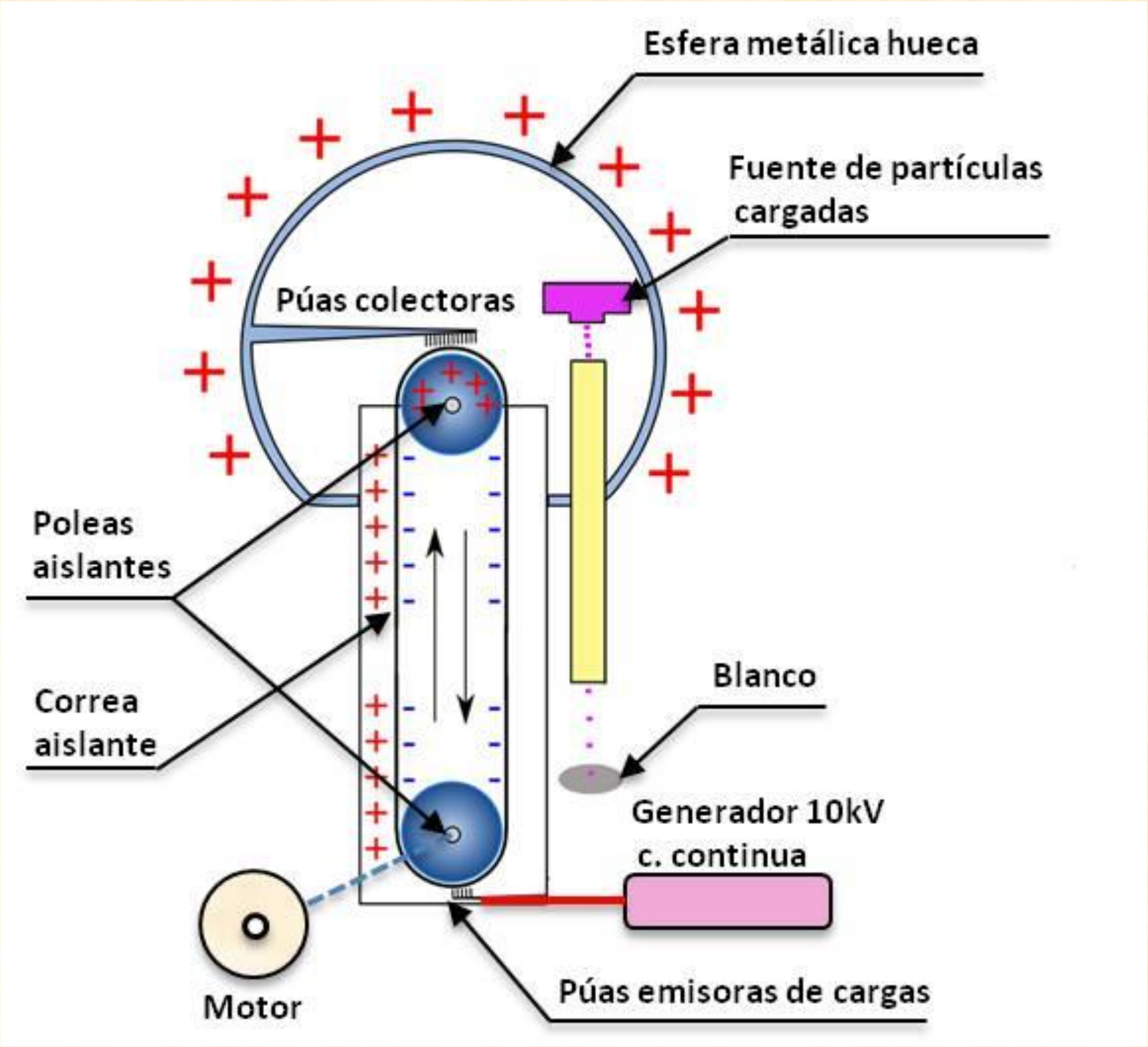
Generador de Van de Graaff

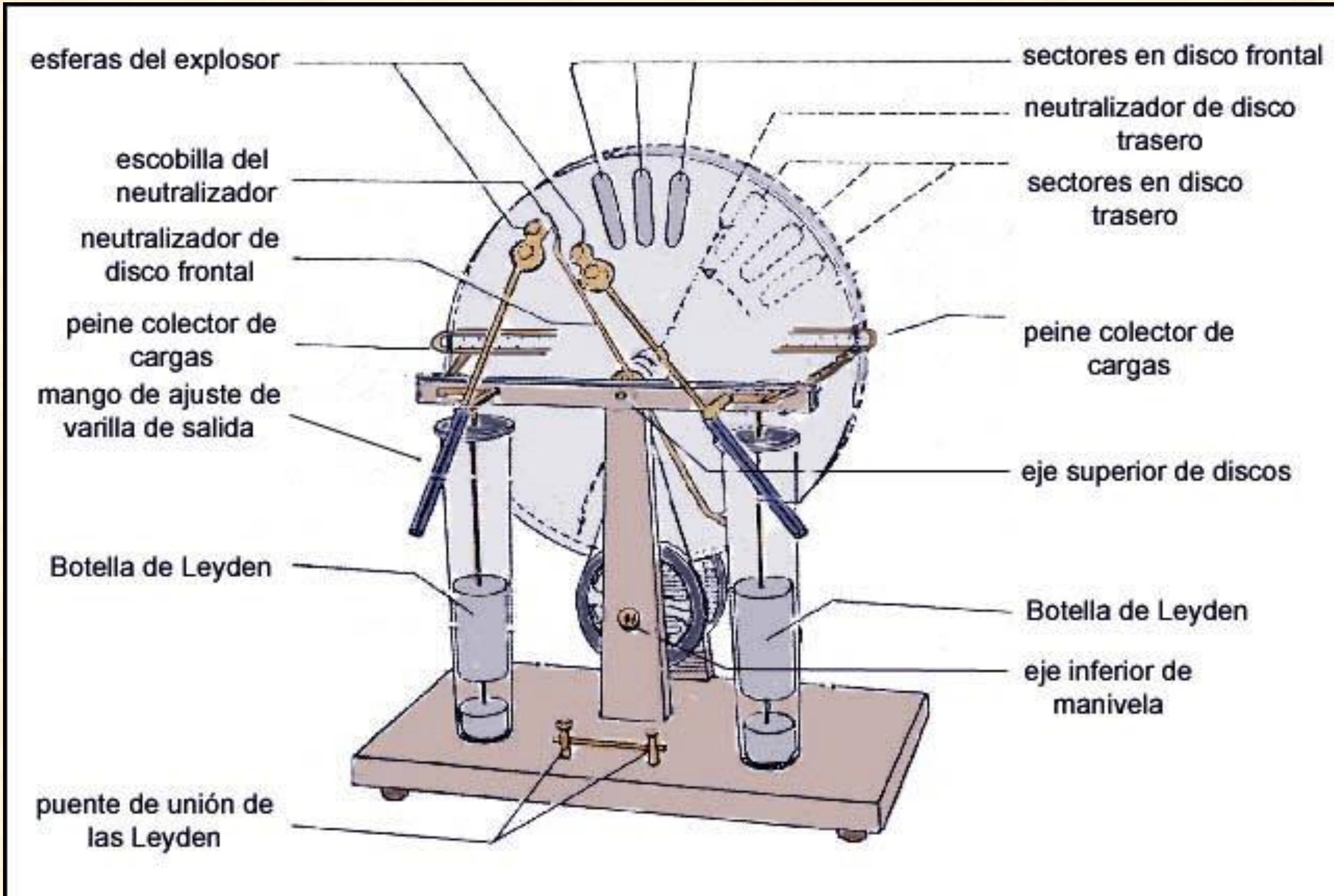


Generador de Van de Graaff



Generador de Van de Graaff




esferas del explosor
sectores en disco frontal
neutralizador de disco trasero
escobilla del neutralizador
sectores en disco trasero
neutralizador de disco frontal
peine colector de cargas
peine colector de cargas
mango de ajuste de varilla de salida
eje superior de discos
Botella de Leyden
Botella de Leyden
eje inferior de manivela
puente de unión de las Leyden