

Ecuación de Laplace y Método de Relajación

2^{do} Laboratorio Computacional

Física II – IS

Objetivo

El objetivo de este trabajo práctico es determinar teóricamente las líneas equipotenciales en un sistema de conductores en equilibrio electrostático utilizando el **método de relajación** para resolver la ecuación de Laplace. Se analizarán las diferencias y similitudes entre las condiciones de borde de Dirichlet y Neumann.

Introducción Teórica

El potencial electrostático, denotado por Φ , en ausencia de cargas libres verifica la **ecuación de Laplace**:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (1)$$

Dado que el campo electrostático \mathbf{E} está relacionado con el potencial por $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, la solución de la ecuación de Laplace en una región con condiciones de borde adecuadas nos permitirá obtener el potencial en cualquier punto dentro de la región de estudio.

Para resolver numéricamente esta ecuación, utilizaremos el **método de relajación**. Este método consiste en dividir la región de estudio en una malla de puntos y actualizar iterativamente el valor del potencial en cada punto como el promedio de los potenciales de sus puntos vecinos.

Introducción Teórica al Método de Relajación

La ecuación de Laplace es una ecuación diferencial parcial fundamental en la física y se utiliza para describir fenómenos que ocurren en ausencia de cargas o fuentes externas, como el comportamiento del potencial electrostático en una región sin cargas libres. En dos dimensiones, la ecuación de Laplace se expresa como:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

Esta ecuación establece que la suma de las derivadas segundas del potencial Φ con respecto a las coordenadas espaciales x e y debe ser cero en una región donde no existan cargas libres.

Dificultades de la Solución Analítica

Resolver la ecuación de Laplace analíticamente en sistemas con geometrías complejas y condiciones de borde arbitrarias suele ser muy complicado o incluso imposible. En estos casos, se recurre a métodos numéricos, como el **método de relajación**, que permite obtener soluciones aproximadas de la ecuación aplicando iteraciones sucesivas en una malla de puntos.

Concepto del Método de Relajación

El **método de relajación** se basa en una idea simple pero poderosa: dado que la ecuación de Laplace en dos dimensiones establece que la suma de las derivadas segundas debe ser cero, esto implica que el valor del potencial en un punto de una región dada es igual al promedio de los valores de los puntos vecinos que lo rodean. En términos numéricos, esto se traduce en la siguiente expresión aproximada para un punto en una malla bidimensional:

$$\Phi(i, j) \approx \frac{\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1)}{4}$$

Aquí, $\Phi(i, j)$ representa el valor del potencial en el punto (i, j) de la malla, y $\Phi(i+1, j)$, $\Phi(i-1, j)$, $\Phi(i, j+1)$ y $\Phi(i, j-1)$ son los valores del potencial en los cuatro puntos vecinos más cercanos (derecha, izquierda, arriba y abajo, respectivamente).

Esta relación sugiere que para resolver numéricamente la ecuación de Laplace, podemos inicializar una malla con valores de potencial y luego ir ajustando el valor de cada punto como el promedio de sus vecinos, repitiendo este proceso hasta que los cambios en los valores de potencial sean lo suficientemente pequeños (es decir, hasta que la solución converja).

Discretización del Espacio

Para aplicar el método de relajación, el espacio continuo se reemplaza por una malla discreta de puntos. En lugar de trabajar con derivadas continuas, trabajamos con diferencias finitas. Si consideramos una malla bidimensional con un espaciado uniforme $\Delta x = \Delta y = d$, podemos aproximar las derivadas parciales con diferencias finitas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2d}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j-1)}{2d}$$

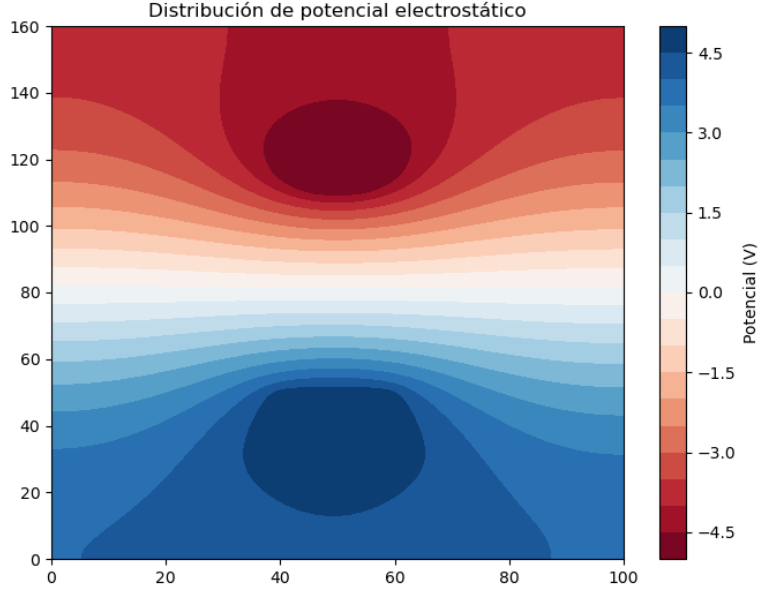


Figura 1: Ejemplo de visualización de la gráfica de contorno generada a partir del método de relajación de un conductor cuadrado a 5V y un conductor esférico a -5V.

Análogamente, las derivadas segundas se aproximan como:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{d^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \approx \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{d^2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Laplace y reorganizando términos, obtenemos la expresión iterativa para el potencial en el punto (i, j) :

$$\Phi(i, j) = \frac{\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1)}{4}$$

Esta es la base del método de relajación: el valor de $\Phi(i, j)$ se actualiza como el promedio de los valores de sus cuatro vecinos más cercanos. Este procedimiento se repite para todos los puntos de la malla en cada iteración hasta que el sistema converja a una solución estable, es decir, hasta que los cambios en el potencial entre una iteración y la siguiente sean insignificantes.

Condiciones de Borde

Para que el método de relajación funcione correctamente, es necesario imponer **condiciones de borde**, que definen cómo se comporta el poten-

cial en los límites de la región de estudio. Existen dos tipos principales de condiciones de borde que se utilizan con frecuencia:

Condiciones de Dirichlet

Las condiciones de Dirichlet imponen valores fijos de potencial en los bordes de la región de análisis. En este caso, los potenciales en los bordes son conocidos, y no cambian durante las iteraciones del método de relajación.

Por ejemplo, si tenemos un conductor conectado a un electrodo de una batería con un potencial fijo de 0V en un lado y 12V en el otro, estas serían las condiciones de Dirichlet. En este caso, se imponen valores fijos de 0V en el borde izquierdo y 12V en el borde derecho de la región a analizar.

Condiciones de Neumann

Las condiciones de Neumann establecen que la derivada normal del potencial en el borde es igual a cero, lo que significa que no hay flujo de corriente a través del borde. En términos del campo eléctrico, esto implica que las líneas de campo eléctrico son tangentes al borde, y que las líneas equipotenciales son perpendiculares al borde.

En el método de relajación, para imponer condiciones de Neumann en los bordes, se requiere que el valor del potencial en una celda de borde sea igual al valor del potencial en su vecino inmediato. Por ejemplo, si (i, j) es un punto en el borde izquierdo, su valor se puede imponer como:

$$\Phi(0, j) = \Phi(1, j)$$

Este tipo de condición es útil cuando se quiere modelar una región donde el borde actúa como una barrera aislante.

Iteraciones y Convergencia

El método de relajación es un proceso iterativo. En cada iteración, se actualizan los valores de potencial en cada punto de la malla de acuerdo con el promedio de sus vecinos. El proceso continúa hasta que los cambios en el potencial entre iteraciones sean menores que una tolerancia predeterminada, lo que indica que la solución ha convergido.

El criterio de convergencia puede definirse como:

$$\max |\Phi_{\text{nueva}}(i, j) - \Phi_{\text{anterior}}(i, j)| < \varepsilon$$

donde ε es una pequeña constante que define la precisión deseada de la solución. Cuanto más pequeña sea ε , más precisa será la solución, pero se requerirá un mayor número de iteraciones.

Aplicación del Método de Relajación

El método de relajación es particularmente útil en situaciones donde las soluciones analíticas no están disponibles o son muy complicadas de obtener. En este trabajo práctico, utilizaremos este método para resolver la ecuación de Laplace en una región con condiciones de borde específicas, representando un sistema de conductores en equilibrio electrostático. A través de iteraciones sucesivas, determinaremos el potencial eléctrico en cada punto de la malla y trazaremos las líneas equipotenciales.

El uso de una hoja de cálculo o software numérico nos permitirá implementar fácilmente este método y obtener una representación gráfica del potencial en la región de estudio, ver la Figura 1 y 2 a modo de ejemplo.

Superficie del Potencial Electrostático

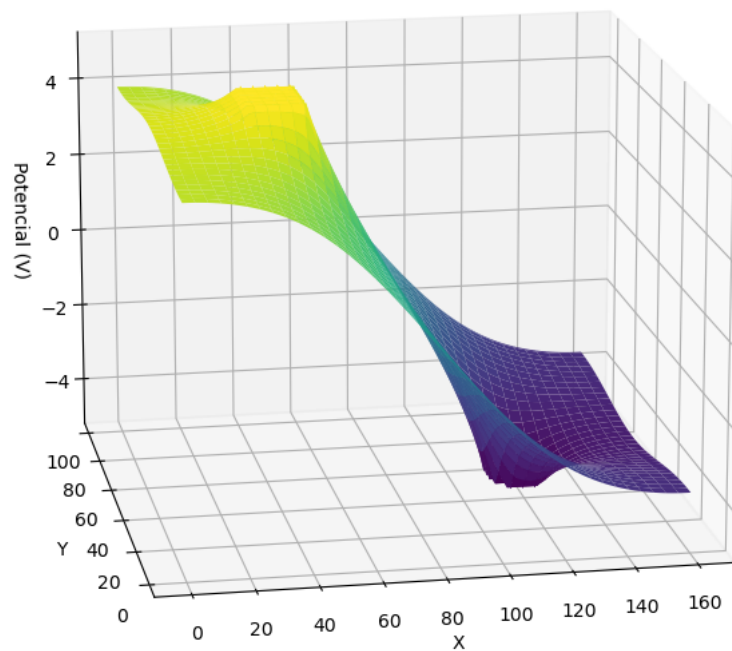


Figura 2: Ejemplo de visualización de la gráfica de superficie 3D de la misma configuración de la Fig. 1.

Procedimiento Teórico - Método Numérico

- Se utilizará el método de relajación para resolver numéricamente la ecuación de Laplace en una grilla de tamaño mínimo de 101×161 puntos.
- Se elegirán 2 o 3 “bornes” a diferentes potenciales, a los cuales se les impondrá las condiciones de Dirichlet. En los bordes perimetrales se impondrán condiciones de Neumann.
- Realizar iteraciones hasta que el cambio en el potencial de todos los puntos sea menor a un valor de tolerancia previamente definido.
- Graficar las líneas equipotenciales en un gráfico de contorno, como el mostrado en la Figura 1, y un gráfico de superficie en 3D similar al mostrado en la Figura 2.
- Analizar el comportamiento físico en función con las condiciones de borde impuestas:
 1. ¿Cómo se comportan las líneas equipotenciales cerca de los conductores en las condiciones de Dirichlet? ¿Y cerca de los bordes en las condiciones de Neumann?
 2. ¿Qué diferencias observas entre los efectos de las condiciones de Dirichlet y Neumann en la forma de las líneas equipotenciales?
 3. ¿Qué puede decir de las líneas de campo eléctrico en la configuración?
 4. Estudie el efecto punta en algunos de los bornes.

Condiciones y Fecha de entrega

- El trabajo debe realizarse en los grupos ya conformados.
- El trabajo debe ser entregado antes del **15 – 10 – 2024**.
- Los comentarios, consultas y sugerencias respecto al Laboratorio se realizarán en horario de Práctica.
- Los trabajos se entregarán vía email a cariatore@gmail.com.