AyC - 20241C

Tipo actividad: Explicación
Tema: Inducción constructiva
Autor del documento: Telma
Versión : 1.0.0

Contexto.
Se dejó a los alumnos, un documento de repaso de técnicas matemáticas de utilidad que serán usadas frecuentemente durante el cursado.
Se presenta la noción de Inducción Constructiva. No es un concepto que se aborde en materias anteriores. Si bien el documento explica el tema, se desarrollará un ejercicio propuesto en el práctico de repaso, para ilustrar su aplicación.

Enunciado

9. Considere la siguiente función:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 2 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Demostrar que $T(n) \in O(n)$, para ello demostrar por inducción constructiva que existen constantes b y d tales que $T(n) = bn + d$.

El enunciado del problema describe la estrategia para resolver el problema: para mostrar que la función T(n) está en O(n) se prueba que en realidad T(n)=bn+d, lo cual hace más fácil justificar lo pedido.
En este punto, no contamos con ninguna herramienta en particular para resolver la recurrencia dada (estudiaremos esto más adelante en la materia) . Un análisis del comportamiento de la función podría darnos un indicio de que la función en cuestión es lineal (en n). Eso hace que la hipótesis sea esa: T(n)=bn+d. Para corroborarlo hay que probarlo. No se conocen a priori las constantes b y d.
Se realizará una prueba por inducción (constructiva) y en el desarrollo de dicha prueba se terminarán de determinar los valores de estas constantes.

Desarrollo de la prueba
Queremos probar la siguiente propiedad: T(n) = bn+d para todo n mayor o igual a 1.
En el desarrollo de la prueba por inducción se deberá, en algún momento, probar que la propiedad es válida en el valor de base. Cuando n=1 la función da como resultado 1. Pues, según la definición de la función dada en el enunciado T(1)=1. Por lo tanto, la propiedad será válida si se da el caso que 1 = b+d. Con esa sola información, no podemos determinar aún valores adecuados (y únicos) para b y d. Luego volveremos a analizar esta ecuación.

Vamos a tratar de probar que la propiedad es válida para el caso de n=k, asumiendo (Hipótesis Inductiva) que la propiedad se verifica para todo m, tal que 1<=m<k. Entonces, debemos probar que T(k)=bk+d.

Comenzamos:

T(k) = T(piso(k/2)) + T(techo(k/2)) +2 [por definición de T(.)]

= b(piso(k/2)) +d + b(techo(k/2))+d +2 [por HI]

= b(piso(k/2) + techo(k/2)) +2d + 2

= bk +2d +2 (*)

Recordamos que el objetivo es probar que T(k)=bk+d. Entonces, con lo razonado hasta (*) , si esa última expresión es igual a bk+d habremos probado lo que necesitamos.

Entonces,

bk +2d +2	=	bk + d	si
2d + 2	=	d	si
d	=	-2	

Esto significa que con un valor d=-2, se puede probar la propiedad para el caso general (del razonamiento inductivo) en base a la hipótesis inductiva. Esto es, vale T(k) = bk-2.

Hasta este punto, sigue sin determinarse el valor de b. Para ello, volvemos a analizar la propiedad en el caso base (n=1) sabiendo ya que d=-2. Como se dijo anteriormente la propiedad será válida si se da el caso que 1 = b+d. Eso sucede si 1=b -2, o sea b=3.

Entonces, llegamos a la conclusión que hay valores para b y d que hacen válida la propiedad.

La propiedad completamente enunciada establece: T(n) = 3n - 2, para todo n>=1.

Luego, es fácil ver que T(n) está en O(n) *[ejercicio: completar este paso por definición de O(.)]*