Apuntes - Guía 0
Factores de Escala

El apunte que se muestra a continuación tiene como objetivo repasar conceptos previos de álgebra vectorial. En caso de poseer conocimiento del tema, este apunte le resultará un resumen del mismo. En caso de que este apunte sea su introducción al tema en cuestión, se recomienda fuertemente previamente recurrir a algún libro de matemática donde pueda leer una introducción formal al tema. La cátedra recomienda el libro de Cheng (*Fundamentos de Electromagnetismo para ingeniería* de D. Cheng, Cap. 2), el mismo se encuentra disponible en la biblioteca central y en la página de moodle de la cátedra podrá bajar un pdf del capítulo donde se introducen estos temas.

Definiciones

- Llamaremos a una coordenada generalizada con la letra q de manera que el vector posición de una coordenada vendrá dado por $\vec{\boldsymbol{r}} = (q_1, q_2, q_3)$. Cuando queramos hacer referencia a una componente cualquiera la llamaremos q_i
- El vector posición en coordenadas cartesianas $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$ vendrá dado por:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = (x, y, z) \tag{1}$$

- El vector posición en coordenadas cilíndricas $(q_1, q_2, q_3) = (r, \phi, z)$ vendrá dado por:

$$\vec{\boldsymbol{r}} \begin{cases} x = rcos\phi \\ y = rsen\phi \\ z = z \end{cases} \tag{2}$$

- El vector posición en coordenadas esféricas $(q_1, q_2, q_3) = (R, \theta, \phi)$ vendrá dado por:

$$\vec{\boldsymbol{r}} \begin{cases} x = Rsen\theta cos\phi \\ y = Rsen\theta sen\phi \\ z = Rcos\theta \end{cases} \tag{3}$$

Notación: Cuidado con la notación, en Análisis I y II se suele usar para nombrar al ángulo polar de coordenadas cilíndricas a la letra griega θ en Electromagnetismo se utiliza a la letra ϕ. De manera similar, en coordenadas esféricas se invierte el nombre de los ángulos. Vea la figura 1 para ver a qué ángulo corresponde ϕ y θ. Bajo esta convención $\phi \in [0, 2\pi)$ y $\theta \in [0, \pi)$

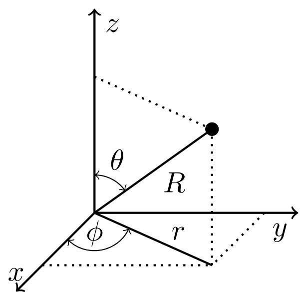


Figura 1: Convención de ángulos para las coordenadas cilíndricas y esféricas.

Factores de Escala

Los **Factores de Escala** o **Coeficientes Métricos** definen la métrica de un sistema de coordenadas generalizadas q_i. En el caso de que la coordenada generalizada no represente una distancia sino alguna otra magnitud, por ejemplo un ángulo como es el caso de la coordenada ϕ en las coordenadas cilíndricas, el factor de escala nos indica **cómo convertir un cambio diferencial de ángulo en una de longitud**.

En el caso de las coordenadas cartesianas, los factores de escala son todos unitarios ya que estas coordenadas ya representan longitudes. En cambio en las coordenadas cilíndricas o esféricas no todos los factores de escala son unitarios. Para calcular estos factores de escala (h_i) se utiliza la siguiente definición:

$$h_i = \left| \frac{d\vec{r}}{dq_i} \right| \tag{4}$$

Aplicando esta definición y recordando que el vector posición en coordenadas cartesianas viene dado por la ecuación 1 podemos encontrar rápidamente los factores de escala. Repitiendo el proceso para los vectores posición pero en coordenadas cilíndricas (ecuación 2) o esféricas (ecuación 3) encontraremos sus correspondientes factores de escala. En la tabla 1 se representan los tres factores de escala para cada una de las tres coordenadas mencionadas.

	Coordenadas Cartesianas (x, y, z)	Coordenadas Cilíndricas (r, ϕ, z)	Coordenadas Esféricas (R, θ, ϕ)
h_1	1	1	1
h_2	1	r	R
h_3	1	1	$Rsen\theta$

Tabla 1: Factores de Escala para las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Diferenciales de Línea, Superficie y Volumen

Una vez conocidos los factores de escala de un sistema de coordenadas es posible definir los diferenciales de Linea, Superficie y Volumen. Estos diferenciales jugarán un rol crucial en las integrales que utilizaremos a lo largo de todo el curso, por lo cual es de vital importancia entender cómo se definen y como trabajar con ellos.

Diferencial de Línea

Se lo define, en términos de las coordenadas generalizadas, como:

$$d\vec{l} = \sum_{1}^{3} h_i dq_i \hat{e_i} \tag{5}$$

En el caso de coordenadas cartesianas, el diferencia de linea quedaría como:

$$d\vec{l} = 1 * dx\hat{\imath} + 1 * dy\hat{\jmath} + 1 * dz\hat{k} \tag{6}$$

Diferencial de Superficie

Para cada sistema de coordenadas existen tres diferenciales de superficie. Los mismos están definidos por dos de las variables y son siempre ortogonales a las superficies definidas por estas variables. Por lo que el diferencial de superficie tiene la dirección de la tercer variable.

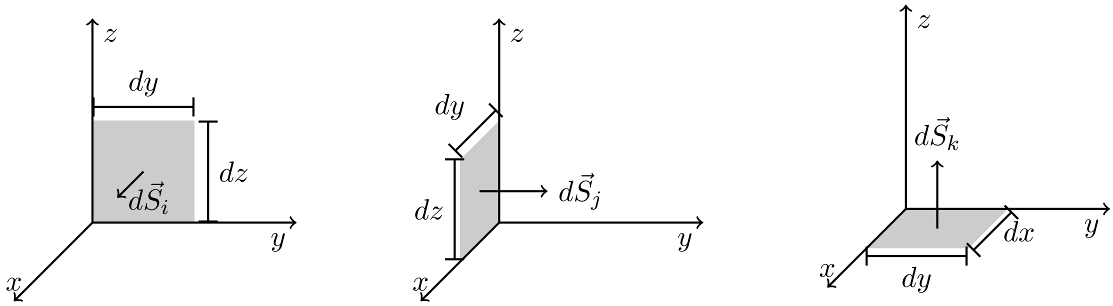
$$d\vec{S}_k = h_i dq_i \hat{e_i} \times h_j dq_j \hat{e_j} \tag{7}$$

Donde los subíndices i, j y k solo pueden tomar valores de 1 a 3 y no pueden estar repetidos. En el caso de coordenadas cartesianas, los diferenciales de superficie quedarían como:

$$d\vec{S}_i = 1 * dy * 1 * dz\hat{i} \tag{8}$$

$$d\vec{S}_j = 1 * dx * 1 * dz\hat{j} \tag{9}$$

$$d\vec{S}_k = 1 * dx * 1 * dy\hat{k} \tag{10}$$



Diferencial de Volumen

Se lo define, en términos de las coordenadas generalizadas, como:

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \tag{11}$$

En esta definición intervienen todos los factores de escala y al producto $h_1 h_2 h_3$ se lo conoce como el Jacobiano.