

Algoritmos y Complejidad

Programación Dinámica

Pablo R. Fillottrani

Depto. Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur

Primer Cuatrimestre 2019



Programación Dinámica

- 1 Introducción
- 2 Problema de la mochila
- 3 Caminos más Cortos entre todo par
- 4 Multiplicación de matrices en cadena
- 5 Triangulación optimal de polígonos
- 6 Subsecuencia común más larga



Programación Dinámica

- 1 Introducción
- 2 Problema de la mochila
- 3 Caminos más Cortos entre todo par
- 4 Multiplicación de matrices en cadena
- 5 Triangulación optimal de polígonos
- 6 Subsecuencia común más larga



Introducción

- Programación Dinámica (PD) resuelve problemas a través de combinar soluciones a subproblemas
- PD comienza resolviendo las instancias más simples de los problemas, y guardando sus resultados en alguna estructura de datos especial
- para construir soluciones de instancias más complejas, se divide la instancia en subproblemas más simples y se recuperan los resultados ya calculados de la estructura de datos
- PD se aplica cuando los subproblemas **no son independientes** entre sí, es decir los subproblemas tienen subsubproblemas en común. Esto se denomina **superposición de subproblemas**



Introducción

- Programación Dinámica (PD) resuelve problemas a través de combinar soluciones a subproblemas
- PD comienza resolviendo las instancias más simples de los problemas, y guardando sus resultados en alguna estructura de datos especial
- para construir soluciones de instancias más complejas, se divide la instancia en subproblemas más simples y se recuperan los resultados ya calculados de la estructura de datos
- PD se aplica cuando los subproblemas **no son independientes** entre sí, es decir los subproblemas tienen subsubproblemas en común. Esto se denomina **superposición de subproblemas**



Introducción

- Programación Dinámica (PD) resuelve problemas a través de combinar soluciones a subproblemas
- PD comienza resolviendo las instancias más simples de los problemas, y guardando sus resultados en alguna estructura de datos especial
- para construir soluciones de instancias más complejas, se divide la instancia en subproblemas más simples y se recuperan los resultados ya calculados de la estructura de datos
- PD se aplica cuando los subproblemas **no son independientes** entre sí, es decir los subproblemas tienen subsubproblemas en común. Esto se denomina **superposición de subproblemas**



Introducción

- Programación Dinámica (PD) resuelve problemas a través de combinar soluciones a subproblemas
- PD comienza resolviendo las instancias más simples de los problemas, y guardando sus resultados en alguna estructura de datos especial
- para construir soluciones de instancias más complejas, se divide la instancia en subproblemas más simples y se recuperan los resultados ya calculados de la estructura de datos
- PD se aplica cuando los subproblemas **no son independientes** entre sí, es decir los subproblemas tienen subsubproblemas en común. Esto se denomina **superposición de subproblemas**



Introducción

- **Programación Dinámica (PD)** resuelve problemas a través de combinar soluciones a subproblemas
- PD comienza resolviendo las instancias más simples de los problemas, y guardando sus resultados en alguna estructura de datos especial
- para construir soluciones de instancias más complejas, se divide la instancia en subproblemas más simples y se recuperan los resultados ya calculados de la estructura de datos
- PD se aplica cuando los subproblemas **no son independientes** entre sí, es decir los subproblemas tienen subsubproblemas en común. Esto se denomina **superposición de subproblemas**



Comparación

- “dividir y conquistar” (DYC) resuelve las instancias siempre dividiendo, sin importar cálculos previos. En este contexto, se resolverían **varias veces** el mismo subproblema (como el primer algoritmo para Fibonacci)
- DYC se usa cuando **no hay superposición de subproblemas**, o es casi nula
- un algoritmo de PD resuelve cada subproblema una vez, guardando sus resultados y **evitando el trabajo de calcularlo otra vez**
- entonces para que se aplique PD tiene que ser eficiente (en tiempo y espacio) almacenar resultados de subproblemas previamente resueltos
- DYC es una técnica **top-down**; PD por el contrario es **bottom-up**



Comparación

- “dividir y conquistar” (DYC) resuelve las instancias siempre dividiendo, sin importar cálculos previos. En este contexto, se resolverían **varias veces** el mismo subproblema (como el primer algoritmo para Fibonacci)
- DYC se usa cuando **no hay superposición de subproblemas**, o es casi nula
- un algoritmo de PD resuelve cada subproblema una vez, guardando sus resultados y **evitando el trabajo de calcularlo otra vez**
- entonces para que se aplique PD tiene que ser eficiente (en tiempo y espacio) almacenar resultados de subproblemas previamente resueltos
- DYC es una técnica **top-down**; PD por el contrario es **bottom-up**



Comparación

- “dividir y conquistar” (DYC) resuelve las instancias siempre dividiendo, sin importar cálculos previos. En este contexto, se resolverían **varias veces** el mismo subproblema (como el primer algoritmo para Fibonacci)
- DYC se usa cuando **no hay superposición de subproblemas**, o es casi nula
- un algoritmo de PD resuelve cada subproblema una vez, guardando sus resultados y **evitando el trabajo de calcularlo otra vez**
- entonces para que se aplique PD tiene que ser eficiente (en tiempo y espacio) almacenar resultados de subproblemas previamente resueltos
- DYC es una técnica **top-down**; PD por el contrario es **bottom-up**



Comparación

- “dividir y conquistar” (DYC) resuelve las instancias siempre dividiendo, sin importar cálculos previos. En este contexto, se resolverían **varias veces** el mismo subproblema (como el primer algoritmo para Fibonacci)
- DYC se usa cuando **no hay superposición de subproblemas**, o es casi nula
- un algoritmo de PD resuelve cada subproblema una vez, guardando sus resultados y **evitando el trabajo de calcularlo otra vez**
- entonces para que se aplique PD tiene que ser eficiente (en tiempo y espacio) almacenar resultados de subproblemas previamente resueltos
- DYC es una técnica **top-down**; PD por el contrario es **bottom-up**



Comparación

- “dividir y conquistar” (DYC) resuelve las instancias siempre dividiendo, sin importar cálculos previos. En este contexto, se resolverían **varias veces** el mismo subproblema (como el primer algoritmo para Fibonacci)
- DYC se usa cuando **no hay superposición de subproblemas**, o es casi nula
- un algoritmo de PD resuelve cada subproblema una vez, guardando sus resultados y **evitando el trabajo de calcularlo otra vez**
- entonces para que se aplique PD tiene que ser eficiente (en tiempo y espacio) almacenar resultados de subproblemas previamente resueltos
- DYC es una técnica **top-down**; PD por el contrario es **bottom-up**

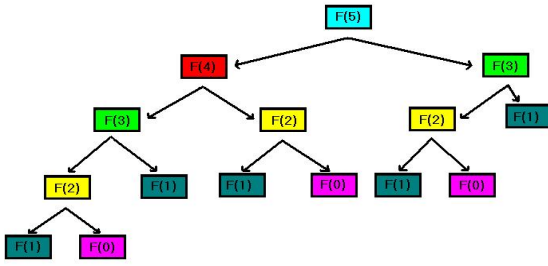


Comparación

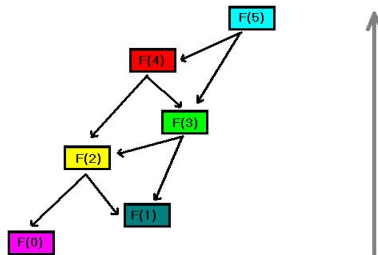
- “dividir y conquistar” (DYC) resuelve las instancias siempre dividiendo, sin importar cálculos previos. En este contexto, se resolverían **varias veces** el mismo subproblema (como el primer algoritmo para Fibonacci)
- DYC se usa cuando **no hay superposición de subproblemas**, o es casi nula
- un algoritmo de PD resuelve cada subproblema una vez, guardando sus resultados y **evitando el trabajo de calcularlo otra vez**
- entonces para que se aplique PD tiene que ser eficiente (en tiempo y espacio) almacenar resultados de subproblemas previamente resueltos
- DYC es una técnica **top-down**; PD por el contrario es **bottom-up**



- subproblemas en el algoritmo DYC de Fibonacci para $n = 5$



- subproblemas en el algoritmo PD de Fibonacci para $n = 5$



- PD se aplica generalmente a problemas de **optimización**, al igual que los algoritmos *greedy*.
- pasos en el desarrollo de un algoritmo PD:
 - 1 caracterizar la **estructura** de una solución optimal
 - 2 definir **recursivamente** el valor de la solución optimal
 - 3 computar el valor de las soluciones a los **casos básicos**
 - 4 construir las **soluciones optimales** para instancias grandes a partir de la soluciones ya computadas para instancias más pequeñas



- PD se aplica generalmente a problemas de **optimización**, al igual que los algoritmos *greedy*.
- pasos en el desarrollo de un algoritmo PD:
 - ❶ caracterizar la **estructura** de una solución optimal
 - ❷ definir **recursivamente** el valor de la solución optimal
 - ❸ computar el valor de las soluciones a los **casos básicos**
 - ❹ construir las **soluciones optimales** para instancias grandes a partir de la soluciones ya computadas para instancias más pequeñas



- PD se aplica generalmente a problemas de **optimización**, al igual que los algoritmos *greedy*.
- pasos en el desarrollo de un algoritmo PD:
 - 1 caracterizar la **estructura** de una solución optimal
 - 2 definir **recursivamente** el valor de la solución optimal
 - 3 computar el valor de las soluciones a los **casos básicos**
 - 4 construir las **soluciones optimales** para instancias grandes a partir de la soluciones ya computadas para instancias más pequeñas



- PD se aplica generalmente a problemas de **optimización**, al igual que los algoritmos *greedy*.
- pasos en el desarrollo de un algoritmo PD:
 - 1 caracterizar la **estructura** de una solución óptima
 - 2 definir **recursivamente** el valor de la solución óptima
 - 3 computar el valor de las soluciones a los **casos básicos**
 - 4 construir las **soluciones óptimas** para instancias grandes a partir de las soluciones ya computadas para instancias más pequeñas



- PD se aplica generalmente a problemas de **optimización**, al igual que los algoritmos *greedy*.
- pasos en el desarrollo de un algoritmo PD:
 - 1 caracterizar la **estructura** de una solución optimal
 - 2 definir **recursivamente** el valor de la solución optimal
 - 3 computar el valor de las soluciones a los **casos básicos**
 - 4 construir las **soluciones optimales** para instancias grandes a partir de la soluciones ya computadas para instancias más pequeñas



- PD se aplica generalmente a problemas de **optimización**, al igual que los algoritmos *greedy*.
- pasos en el desarrollo de un algoritmo PD:
 - 1 caracterizar la **estructura** de una solución óptima
 - 2 definir **recursivamente** el valor de la solución óptima
 - 3 computar el valor de las soluciones a los **casos básicos**
 - 4 construir las **soluciones óptimas** para instancias grandes a partir de las soluciones ya computadas para instancias más pequeñas



- PD se aplica generalmente a problemas de **optimización**, al igual que los algoritmos *greedy*.
- pasos en el desarrollo de un algoritmo PD:
 - 1 caracterizar la **estructura** de una solución optimal
 - 2 definir **recursivamente** el valor de la solución optimal
 - 3 computar el valor de las soluciones a los **casos básicos**
 - 4 construir las **soluciones optimales** para instancias grandes a partir de la soluciones ya computadas para instancias más pequeñas



Elementos necesarios para aplicar PD

- **principio de optimalidad** la estructura de una solución optimal a un problema debe contener soluciones optimales a los subproblemas
- aunque parezca obvio, no todos los problemas satisfacen este principio (por ejemplo, el camino simple más largo entre dos nodos de un grafo)
- **superposición de subproblemas** el “espacio” de subproblemas debe ser pequeño en el sentido de que los subproblemas se repiten una y otra vez, en vez de generar nuevos subproblemas
- PD generalmente toma ventaja de esta repetición solucionando **una única vez cada subproblema**



Elementos necesarios para aplicar PD

- **principio de optimalidad** la estructura de una solución óptima a un problema debe contener soluciones óptimas a los subproblemas
- aunque parezca obvio, no todos los problemas satisfacen este principio (por ejemplo, el camino simple más largo entre dos nodos de un grafo)
- **superposición de subproblemas** el “espacio” de subproblemas debe ser pequeño en el sentido de que los subproblemas se repiten una y otra vez, en vez de generar nuevos subproblemas
- PD generalmente toma ventaja de esta repetición solucionando **una única vez cada subproblema**



Elementos necesarios para aplicar PD

- **principio de optimalidad** la estructura de una solución óptima a un problema debe contener soluciones óptimas a los subproblemas
- aunque parezca obvio, no todos los problemas satisfacen este principio (por ejemplo, el camino simple más largo entre dos nodos de un grafo)
- **superposición de subproblemas** el “espacio” de subproblemas debe ser pequeño en el sentido de que los subproblemas se repiten una y otra vez, en vez de generar nuevos subproblemas
- PD generalmente toma ventaja de esta repetición solucionando **una única vez cada subproblema**



Elementos necesarios para aplicar PD

- **principio de optimalidad** la estructura de una solución optimal a un problema debe contener soluciones optimales a los subproblemas
- aunque parezca obvio, no todos los problemas satisfacen este principio (por ejemplo, el camino simple más largo entre dos nodos de un grafo)
- **superposición de subproblemas** el “espacio” de subproblemas debe ser pequeño en el sentido de que los subproblemas se repiten una y otra vez, en vez de generar nuevos subproblemas
- PD generalmente toma ventaja de esta repetición solucionando una única vez cada subproblema



Elementos necesarios para aplicar PD

- **principio de optimalidad** la estructura de una solución óptima a un problema debe contener soluciones óptimas a los subproblemas
- aunque parezca obvio, no todos los problemas satisfacen este principio (por ejemplo, el camino simple más largo entre dos nodos de un grafo)
- **superposición de subproblemas** el “espacio” de subproblemas debe ser pequeño en el sentido de que los subproblemas se repiten una y otra vez, en vez de generar nuevos subproblemas
- PD generalmente toma ventaja de esta repetición solucionando **una única vez cada subproblema**



Coeficientes Binomiales



$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ o } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{si } 0 < k < n \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- como el caso base suma de a 1, el algoritmo recursivo directo tiene $\Omega\left(\binom{n}{k}\right)$



Coeficientes Binomiales



$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ o } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{si } 0 < k < n \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- como el caso base suma de a 1, el algoritmo recursivo directo tiene $\Omega\left(\binom{n}{k}\right)$



Coeficientes Binomiales



$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ o } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{si } 0 < k < n \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- como el caso base suma de a 1, el algoritmo recursivo directo tiene $\Omega\left(\binom{n}{k}\right)$



- no se trata de un problema de optimización, pero la solución está formada por combinación de soluciones de subproblemas
- además, claramente se ve superposición de subinstancias:

$$\begin{aligned}
 C(5,3) &= C(4,3) + C(4,2) = \\
 &= (C(3,3) + C(3,2)) + (C(3,2) + C(3,1)) = \dots
 \end{aligned}$$

- se puede suponer que es posible aplicar PD al problema.
- se puede usar una **tabla** para guardar resultados intermedios, donde la entrada (i,j) guarda el número $C(i,j)$



- no se trata de un problema de optimización, pero la solución está formada por combinación de soluciones de subproblemas
- además, claramente se ve superposición de subinstancias:

$$\begin{aligned}C(5,3) &= C(4,3) + C(4,2) = \\ &= (C(3,3) + C(3,2)) + (C(3,2) + C(3,1)) = \dots\end{aligned}$$

- se puede suponer que es posible aplicar PD al problema.
- se puede usar una **tabla** para guardar resultados intermedios, donde la entrada (i,j) guarda el número $C(i,j)$



- no se trata de un problema de optimización, pero la solución está formada por combinación de soluciones de subproblemas
- además, claramente se ve superposición de subinstancias:

$$\begin{aligned}C(5,3) &= C(4,3) + C(4,2) = \\ &= (C(3,3) + C(3,2)) + (C(3,2) + C(3,1)) = \dots\end{aligned}$$

- se puede suponer que es posible aplicar PD al problema.
- se puede usar una **tabla** para guardar resultados intermedios, donde la entrada (i,j) guarda el número $C(i,j)$



- no se trata de un problema de optimización, pero la solución está formada por combinación de soluciones de subproblemas
- además, claramente se ve superposición de subinstancias:

$$\begin{aligned} C(5,3) &= C(4,3) + C(4,2) = \\ &= (C(3,3) + C(3,2)) + (C(3,2) + C(3,1)) = \dots \end{aligned}$$

- se puede suponer que es posible aplicar PD al problema.
- se puede usar una **tabla** para guardar resultados intermedios, donde la entrada (i,j) guarda el número $C(i,j)$



- no se trata de un problema de optimización, pero la solución está formada por combinación de soluciones de subproblemas
- además, claramente se ve superposición de subinstancias:

$$\begin{aligned}C(5,3) &= C(4,3) + C(4,2) = \\&= (C(3,3) + C(3,2)) + (C(3,2) + C(3,1)) = \dots\end{aligned}$$

- se puede suponer que es posible aplicar PD al problema.
- se puede usar una **tabla** para guardar resultados intermedios, donde la entrada (i,j) guarda el número $C(i,j)$



- se tiene

	0	1	2	3	4	...	$k-1$	k
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
...								
$n-1$							$C(n-1, k-1)$	$C(n-1, k)$
n								$C(n, k)$

- esta tabla se llama **triángulo de Pascal**, o **triángulo de Tartaglia**



- se tiene

	0	1	2	3	4	...	$k-1$	k
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
...								
$n-1$							$C(n-1, k-1)$	$C(n-1, k)$
n								$C(n, k)$

- esta tabla se llama triángulo de Pascal, o triángulo de Tartaglia



- se tiene

	0	1	2	3	4	...	$k-1$	k
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
...								
$n-1$							$C(n-1, k-1)$	$C(n-1, k)$
n								$C(n, k)$

- esta tabla se llama **triángulo de Pascal**, o **triángulo de Tartaglia**.



- el algoritmo para calcularla por **filas** es:

```
function CoeficientesBinomiales(n,k)
  array C[1..n,1..n]
  para todo k  C[k,0] ::= 1; C[k,k] ::= 1;
  FOR i ::= 1 TO n
    FOR j ::= 1 TO min(i,k)
      C[i,j] ::= C[i-1,j-1]+C[i-1,j]
    ENDFOR
  ENDFOR
  RETURN C[n,k]
```



- el algoritmo para calcularla por **filas** es:

```
function CoeficientesBinomiales(n,k)
  array C[1..n,1..n]
  para todo k  C[k,0] ::= 1; C[k,k] ::= 1;
  FOR i ::= 1 TO n
    FOR j ::= 1 TO min(i,k)
      C[i,j] ::= C[i-1,j-1]+C[i-1,j]
    ENDFOR
  ENDFOR
  RETURN C[n,k]
```



- el algoritmo para calcularla por **filas** es:

```
function CoeficientesBinomiales(n,k)
  array C[1..n,1..n]
  para todo k  C[k,0] ::= 1; C[k,k] ::= 1;
  FOR i ::= 1 TO n
    FOR j ::= 1 TO min(i,k)
      C[i,j] ::= C[i-1,j-1]+C[i-1,j]
    ENDFOR
  ENDFOR
  RETURN C[n,k]
```



- el algoritmo para calcularla por **filas** es:

```
function CoeficientesBinomiales(n,k)
  array C[1..n,1..n]
  para todo k  C[k,0] ::= 1; C[k,k] ::= 1;
  FOR i ::= 1 TO n
    FOR j ::= 1 TO min(i,k)
      C[i,j] ::= C[i-1,j-1]+C[i-1,j]
    ENDFOR
  ENDFOR
  RETURN C[n,k]
```



- el algoritmo para calcularla por **filas** es:

```
function CoeficientesBinomiales(n,k)
  array C[1..n,1..n]
  para todo k  C[k,0] ::= 1; C[k,k] ::= 1;
  FOR i ::= 1 TO n
    FOR j ::= 1 TO min(i,k)
      C[i,j] ::= C[i-1,j-1]+C[i-1,j]
    ENDFOR
  ENDFOR
  RETURN C[n,k]
```



- el algoritmo para calcularla por **filas** es:

```
function CoeficientesBinomiales(n,k)
  array C[1..n,1..n]
  para todo k  C[k,0] ::= 1; C[k,k] ::= 1;
  FOR i ::= 1 TO n
    FOR j ::= 1 TO min(i,k)
      C[i,j] ::= C[i-1,j-1]+C[i-1,j]
    ENDFOR
  ENDFOR
  RETURN C[n,k]
```



- el algoritmo para calcularla por **filas** es:

```
function CoeficientesBinomiales(n,k)
  array C[1..n,1..n]
  para todo k  C[k,0] ::= 1; C[k,k] ::= 1;
  FOR i ::= 1 TO n
    FOR j ::= 1 TO min(i,k)
      C[i,j] ::= C[i-1,j-1]+C[i-1,j]
    ENDFOR
  ENDFOR
  RETURN C[n,k]
```



- el algoritmo para calcularla por **filas** es:

```
function CoeficientesBinomiales(n,k)
  array C[1..n,1..n]
  para todo k  C[k,0] ::= 1; C[k,k] ::= 1;
  FOR i ::= 1 TO n
    FOR j ::= 1 TO min(i,k)
      C[i,j] ::= C[i-1,j-1]+C[i-1,j]
    ENDFOR
  ENDFOR
  RETURN C[n,k]
```



- el algoritmo para calcularla por **filas** es:

```
function CoeficientesBinomiales(n,k)
  array C[1..n,1..n]
  para todo k  C[k,0] ::= 1; C[k,k] ::= 1;
  FOR i ::= 1 TO n
    FOR j ::= 1 TO min(i,k)
      C[i,j] ::= C[i-1,j-1]+C[i-1,j]
    ENDFOR
  ENDFOR
  RETURN C[n,k]
```



Análisis del tiempo de ejecución

- su tiempo y espacio es claramente de $\Theta(nk)$.
- se puede modificar el algoritmo para que sólo use espacio $\Theta(k)$ (ejercicio)



Análisis del tiempo de ejecución

- su tiempo y espacio es claramente de $\Theta(nk)$.
- se puede modificar el algoritmo para que sólo use espacio $\Theta(k)$
(ejercicio)



Análisis del tiempo de ejecución

- su tiempo y espacio es claramente de $\Theta(nk)$.
- se puede modificar el algoritmo para que sólo use espacio $\Theta(k)$ (ejercicio)



Probabilidad de ganar una serie

- Problema: dos equipos A y B deben jugar hasta $2n - 1$ juegos, siendo el ganador el primer equipo que llega a n victorias. Para cada juego existe una probabilidad p de que gane el equipo A , y una probabilidad $q = 1 - p$ de que gane el equipo B . Esta probabilidad es fija para todos los juegos, e independiente de los resultados anteriores. Se quiere encontrar la probabilidad de que el equipo A gane la serie
- se define $P(i, j)$ como la probabilidad de que A gane la serie dado que le faltan i victorias, mientras que a B le faltan j victorias
- entonces el valor buscado es $P(n, n)$



Probabilidad de ganar una serie

- Problema: dos equipos A y B deben jugar hasta $2n - 1$ juegos, siendo el ganador el primer equipo que llega a n victorias. Para cada juego existe una probabilidad p de que gane el equipo A , y una probabilidad $q = 1 - p$ de que gane el equipo B . Esta probabilidad es fija para todos los juegos, e independiente de los resultados anteriores. Se quiere encontrar la probabilidad de que el equipo A gane la serie
- se define $P(i, j)$ como la probabilidad de que A gane la serie dado que le faltan i victorias, mientras que a B le faltan j victorias
- entonces el valor buscado es $P(n, n)$



Probabilidad de ganar una serie

- Problema: dos equipos A y B deben jugar hasta $2n - 1$ juegos, siendo el ganador el primer equipo que llega a n victorias. Para cada juego existe una probabilidad p de que gane el equipo A , y una probabilidad $q = 1 - p$ de que gane el equipo B . Esta probabilidad es fija para todos los juegos, e independiente de los resultados anteriores. Se quiere encontrar la probabilidad de que el equipo A gane la serie
- se define $P(i, j)$ como la probabilidad de que A gane la serie dado que le faltan i victorias, mientras que a B le faltan j victorias
- entonces el valor buscado es $P(n, n)$



Probabilidad de ganar una serie

- Problema: dos equipos A y B deben jugar hasta $2n - 1$ juegos, siendo el ganador el primer equipo que llega a n victorias. Para cada juego existe una probabilidad p de que gane el equipo A , y una probabilidad $q = 1 - p$ de que gane el equipo B . Esta probabilidad es fija para todos los juegos, e independiente de los resultados anteriores. Se quiere encontrar la probabilidad de que el equipo A gane la serie
- se define $P(i, j)$ como la probabilidad de que A gane la serie dado que le faltan i victorias, mientras que a B le faltan j victorias
- entonces el valor buscado es $P(n, n)$



- la formulación de esta propiedad genera la recurrencia:

$$P(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ y } j > 0 \\ 0 & \text{si } j = 0 \text{ y } i > 0 \\ pP(i-1, j) + qP(i, j-1) & \text{si } i > 0 \text{ y } j > 0 \end{cases}$$



- la formulación de esta propiedad genera la recurrencia:

$$P(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ y } j > 0 \\ 0 & \text{si } j = 0 \text{ y } i > 0 \\ pP(i-1,j) + qP(i,j-1) & \text{si } i > 0 \text{ y } j > 0 \end{cases}$$



- sea $k = j + i$. El algoritmo de cálculo recursivo de P tomaría tiempo:

$$T(1) = c$$

$$T(k) \leq 2T(k-1) + d$$

- la solución (usando la ecuación característica) es de $O(2^k)$, lo que equivale a $O(4^n)$ si $i = j = n$
- esta estructura del problema es similar a la de los coeficientes binomiales tomando $P(i, j)$ como $C(i + j, j)$



- sea $k = j + i$. El algoritmo de cálculo recursivo de P tomaría tiempo:

$$T(1) = c$$

$$T(k) \leq 2T(k-1) + d$$

- la solución (usando la ecuación característica) es de $O(2^k)$, lo que equivale a $O(4^n)$ si $i = j = n$
- esta estructura del problema es similar a la de los coeficientes binomiales tomando $P(i, j)$ como $C(i+j, j)$



- sea $k = j + i$. El algoritmo de cálculo recursivo de P tomaría tiempo:

$$T(1) = c$$

$$T(k) \leq 2T(k-1) + d$$

- la solución (usando la ecuación característica) es de $O(2^k)$, lo que equivale a $O(4^n)$ si $i = j = n$
- esta estructura del problema es similar a la de los coeficientes binomiales tomando $P(i, j)$ como $C(i+j, j)$



- sea $k = j + i$. El algoritmo de cálculo recursivo de P tomaría tiempo:

$$T(1) = c$$

$$T(k) \leq 2T(k-1) + d$$

- la solución (usando la ecuación característica) es de $O(2^k)$, lo que equivale a $O(4^n)$ si $i = j = n$
- esta estructura del problema es similar a la de los coeficientes binomiales tomando $P(i, j)$ como $C(i + j, j)$



- es posible mejorar este tiempo en forma similar al triángulo de Pascal, calculando P por filas, columnas o diagonales
- para la cota inferior, da un tiempo de $\Omega\left(\binom{2n}{n}\right) \geq \frac{4^n}{n}$



- es posible mejorar este tiempo en forma similar al triángulo de Pascal, calculando P por **filas**, **columnas** o **diagonales**
- para la cota inferior, da un tiempo de $\Omega\left(\binom{2n}{n}\right) \geq \frac{4^n}{n}$



- es posible mejorar este tiempo en forma similar al triángulo de Pascal, calculando P por **filas**, **columnas** o **diagonales**
- para la cota inferior, da un tiempo de $\Omega\left(\binom{2n}{n}\right) \geq \frac{4^n}{n}$



- la matriz P resultaría:

	0	1	2	...	$j-1$	j
0	—	1	1		1	1
1	0	p	$p + pq$			
2	0	p^2	$p^2 + 2p^2q$			
3	0	p^3	$p^3 + 3p^3q$			
...						
$i-1$	0					$P(i-1, j)$
i	0				$P(i, j-1)$	$P(i, j)$

- esto demuestra la aplicación del principio de optimalidad en el problema
- se pueden calcular los elementos de la matriz por diagonales



- la matriz P resultaría:

	0	1	2	...	$j-1$	j
0	—	1	1		1	1
1	0	p	$p + pq$			
2	0	p^2	$p^2 + 2p^2q$			
3	0	p^3	$p^3 + 3p^3q$			
...						
$i-1$	0					$P(i-1, j)$
i	0				$P(i, j-1)$	$P(i, j)$

- esto demuestra la aplicación del principio de optimalidad en el problema
- se pueden calcular los elementos de la matriz por diagonales



- la matriz P resultaría:

	0	1	2	...	$j-1$	j
0	—	1	1		1	1
1	0	p	$p + pq$			
2	0	p^2	$p^2 + 2p^2q$			
3	0	p^3	$p^3 + 3p^3q$			
...						
$i-1$	0					$P(i-1, j)$
i	0				$P(i, j-1)$	$P(i, j)$

- esto demuestra la aplicación del principio de optimalidad en el problema

- se pueden calcular los elementos de la matriz por diagonales



- la matriz P resultaría:

	0	1	2	...	$j-1$	j
0	—	1	1		1	1
1	0	p	$p + pq$			
2	0	p^2	$p^2 + 2p^2q$			
3	0	p^3	$p^3 + 3p^3q$			
...						
$i-1$	0					$P(i-1, j)$
i	0				$P(i, j-1)$	$P(i, j)$

- esto demuestra la aplicación del principio de optimalidad en el problema
- se pueden calcular los elementos de la matriz por diagonales



```
function Serie(n,p)
  array P[0..n,0..n]
  FOR s ::= 1 TO n
    P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
    FOR k ::= 1 TO s-1
      P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k]+(1-p)*P[k,s-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR
  FOR s ::= 1 TO n
    FOR k ::= 0 TO n-s
      P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k]+
                    (1-p)*P[s+k,n-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR; RETURN P[n,n]
```



```
function Serie(n,p)
    array P[0..n,0..n]
    FOR s ::= 1 TO n
        P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
        FOR k ::= 1 TO s-1
            P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k]+(1-p)*P[k,s-k-1]
        ENDFOR
    ENDFOR
    FOR s ::= 1 TO n
        FOR k ::= 0 TO n-s
            P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k]+
                (1-p)*P[s+k,n-k-1]
        ENDFOR
    ENDFOR; RETURN P[n,n]
```



```
function Serie(n,p)
    array P[0..n,0..n]
    FOR s ::= 1 TO n
        P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
        FOR k ::= 1 TO s-1
            P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k]+(1-p)*P[k,s-k-1]
        ENDFOR
    ENDFOR
    FOR s ::= 1 TO n
        FOR k ::= 0 TO n-s
            P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k]+
                (1-p)*P[s+k,n-k-1]
        ENDFOR
    ENDFOR; RETURN P[n,n]
```



```
function Serie(n,p)
  array P[0..n,0..n]
  FOR s ::= 1 TO n
    P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
    FOR k ::= 1 TO s-1
      P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k]+(1-p)*P[k,s-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR
  FOR s ::= 1 TO n
    FOR k ::= 0 TO n-s
      P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k]+
        (1-p)*P[s+k,n-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR; RETURN P[n,n]
```




```
function Serie(n,p)
  array P[0..n,0..n]
  FOR s ::= 1 TO n
    P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
    FOR k ::= 1 TO s-1
      P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k]+(1-p)*P[k,s-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR
  FOR s ::= 1 TO n
    FOR k ::= 0 TO n-s
      P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k]+
        (1-p)*P[s+k,n-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR; RETURN P[n,n]
```



```
function Serie(n,p)
  array P[0..n,0..n]
  FOR s ::= 1 TO n
    P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
    FOR k ::= 1 TO s-1
      P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k]+(1-p)*P[k,s-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR
  FOR s ::= 1 TO n
    FOR k ::= 0 TO n-s
      P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k]+
        (1-p)*P[s+k,n-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR; RETURN P[n,n]
```



```
function Serie(n,p)
    array P[0..n,0..n]
    FOR s ::= 1 TO n
        P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
        FOR k ::= 1 TO s-1
            P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k] + (1-p)*P[k,s-k-1]
        ENDFOR
    ENDFOR
    FOR s ::= 1 TO n
        FOR k ::= 0 TO n-s
            P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k] +
                (1-p)*P[s+k,n-k-1]
        ENDFOR
    ENDFOR; RETURN P[n,n]
```



```
function Serie(n,p)
  array P[0..n,0..n]
  FOR s ::= 1 TO n
    P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
    FOR k ::= 1 TO s-1
      P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k] + (1-p)*P[k,s-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR
  FOR s ::= 1 TO n
    FOR k ::= 0 TO n-s
      P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k] +
        (1-p)*P[s+k,n-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR; RETURN P[n,n]
```



```
function Serie(n,p)
  array P[0..n,0..n]
  FOR s ::= 1 TO n
    P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
    FOR k ::= 1 TO s-1
      P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k] + (1-p)*P[k,s-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR
  FOR s ::= 1 TO n
    FOR k ::= 0 TO n-s
      P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k] +
        (1-p)*P[s+k,n-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR; RETURN P[n,n]
```



```

function Serie(n,p)
  array P[0..n,0..n]
  FOR s ::= 1 TO n
    P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
    FOR k ::= 1 TO s-1
      P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k] + (1-p)*P[k,s-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR
  FOR s ::= 1 TO n
    FOR k ::= 0 TO n-s
      P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k] +
                    (1-p)*P[s+k,n-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR; RETURN P[n,n]

```



```
function Serie(n,p)
  array P[0..n,0..n]
  FOR s ::= 1 TO n
    P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
    FOR k ::= 1 TO s-1
      P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k] + (1-p)*P[k,s-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR
  FOR s ::= 1 TO n
    FOR k ::= 0 TO n-s
      P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k] +
                    (1-p)*P[s+k,n-k-1]
    ENDFOR
  ENDFOR; RETURN P[n,n]
```



```
function Serie(n,p)
    array P[0..n,0..n]
    FOR s ::= 1 TO n
        P[0,s] ::= 1; P[s,0] ::= 0
        FOR k ::= 1 TO s-1
            P[k,s-k] ::= p*P[k-1,s-k] + (1-p)*P[k,s-k-1]
        ENDFOR
    ENDFOR
    FOR s ::= 1 TO n
        FOR k ::= 0 TO n-s
            P[s+k,n-k] ::= p*P[s+k-1,n-k] +
                (1-p)*P[s+k,n-k-1]
        ENDFOR
    ENDFOR; RETURN P[n,n]
```



Análisis del tiempo de ejecución

- su tiempo y espacio es de $\Theta(n^2)$
- se puede hacer la misma modificación que en el caso anterior para que use espacio en $\Theta(n)$



Análisis del tiempo de ejecución

- su tiempo y espacio es de $\Theta(n^2)$
- se puede hacer la misma modificación que en el caso anterior para que use espacio en $\Theta(n)$



Análisis del tiempo de ejecución

- su tiempo y espacio es de $\Theta(n^2)$
- se puede hacer la misma modificación que en el caso anterior para que use espacio en $\Theta(n)$



Problema del Cambio

- Problema: se tiene que dar N centavos de cambio, usando la menor cantidad entre monedas de denominaciones $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$. Se supone cantidad ilimitada de monedas de cada denominación
- el algoritmo *greedy* visto sólo es correcto para ciertas denominaciones; en otras puede que ni siquiera encuentre una solución a pesar de que ésta exista
- para definir un algoritmo de PD para este problema, se define $C[i, j]$ la menor cantidad de monedas entre d_1, d_2, \dots, d_i para pagar j centavos



Problema del Cambio

- Problema: se tiene que dar N centavos de cambio, usando la menor cantidad entre monedas de denominaciones $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$. Se supone cantidad ilimitada de monedas de cada denominación
- el algoritmo *greedy* visto sólo es correcto para ciertas denominaciones; en otras puede que ni siquiera encuentre una solución a pesar de que ésta exista
- para definir un algoritmo de PD para este problema, se define $C[i, j]$ la menor cantidad de monedas entre d_1, d_2, \dots, d_i para pagar j centavos



Problema del Cambio

- Problema: se tiene que dar N centavos de cambio, usando la menor cantidad entre monedas de denominaciones $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$. Se supone cantidad ilimitada de monedas de cada denominación
- el algoritmo *greedy* visto sólo es correcto para ciertas denominaciones; en otras puede que ni siquiera encuentre una solución a pesar de que ésta exista
- para definir un algoritmo de PD para este problema, se define $C[i, j]$ la menor cantidad de monedas entre d_1, d_2, \dots, d_i para pagar j centavos



Problema del Cambio

- Problema: se tiene que dar N centavos de cambio, usando la menor cantidad entre monedas de denominaciones $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$. Se supone cantidad ilimitada de monedas de cada denominación
- el algoritmo *greedy* visto **sólo es correcto para ciertas denominaciones**; en otras puede que ni siquiera encuentre una solución a pesar de que ésta exista
- para definir un algoritmo de PD para este problema, se define $C[i, j]$ la menor cantidad de monedas entre d_1, d_2, \dots, d_i para pagar j centavos



- la solución está entonces $C[n, N]$
- una de las dimensiones de la matriz es el conjunto de denominaciones usadas; esto es usual en problemas de PD donde existe una secuencia de objetos a considerar
- se satisface el **principio de optimalidad** Si la solución optimal $C[n, N]$ incluye una moneda de d_n entonces deberá estar formada por la solución optimal $C[n, N - d_n]$. En cambio si no incluye ninguna moneda de d_n , su valor será la solución optimal a $C[n - 1, N]$



- la solución está entonces $C[n, N]$
- una de las dimensiones de la matriz es el conjunto de denominaciones usadas; esto es usual en problemas de PD donde existe una secuencia de objetos a considerar
- se satisface el principio de optimalidad Si la solución óptima $C[n, N]$ incluye una moneda de d_n entonces deberá estar formada por la solución óptima $C[n, N - d_n]$. En cambio si no incluye ninguna moneda de d_n , su valor será la solución óptima a $C[n - 1, N]$



- la solución está entonces $C[n, N]$
- una de las dimensiones de la matriz es el conjunto de denominaciones usadas; esto es usual en problemas de PD donde existe una secuencia de objetos a considerar
- se satisface el principio de optimalidad Si la solución óptima $C[n, N]$ incluye una moneda de d_n entonces deberá estar formada por la solución óptima $C[n, N - d_n]$. En cambio si no incluye ninguna moneda de d_n , su valor será la solución óptima a $C[n - 1, N]$



- la solución está entonces $C[n, N]$
- una de las dimensiones de la matriz es el conjunto de denominaciones usadas; esto es usual en problemas de PD donde existe una secuencia de objetos a considerar
- se satisface el **principio de optimalidad** Si la solución optimal $C[n, N]$ incluye una moneda de d_n entonces deberá estar formada por la solución optimal $C[n, N - d_n]$. En cambio si no incluye ninguna moneda de d_n , su valor será la solución optimal a $C[n - 1, N]$



- la recurrencia quedaría:

$$C[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ +\infty & \text{si } i = 1 \text{ y } 0 < j < d_i \\ 1 + C[i, j - d_i] & \text{si } i = 1 \text{ y } j \geq d_i \\ C[i-1, j] & \text{si } i > 1 \text{ y } j < d_i \\ \min(C[i-1, j], 1 + C[i, j - d_i]) & \text{si } i > 1 \text{ y } j \geq d_i \end{cases}$$



- la recurrencia quedaría:

$$C[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ +\infty & \text{si } i = 1 \text{ y } 0 < j < d_i \\ 1 + C[i, j - d_i] & \text{si } i = 1 \text{ y } j \geq d_i \\ C[i-1, j] & \text{si } i > 1 \text{ y } j < d_i \\ \min(C[i-1, j], 1 + C[i, j - d_i]) & \text{si } i > 1 \text{ y } j \geq d_i \end{cases}$$



- por ejemplo para $N = 8$ con $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ y $d_3 = 6$ se tiene:

Centavos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
$d_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2



- por ejemplo para $N = 8$ con $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ y $d_3 = 6$ se tiene:

Centavos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
$d_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2



- por ejemplo para $N = 8$ con $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ y $d_3 = 6$ se tiene:

Centavos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
$d_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2



- por ejemplo para $N = 8$ con $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ y $d_3 = 6$ se tiene:

Centavos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
$d_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2



- por ejemplo para $N = 8$ con $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ y $d_3 = 6$ se tiene:

Centavos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
$d_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2



- por ejemplo para $N = 8$ con $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ y $d_3 = 6$ se tiene:

Centavos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
$d_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2



- por ejemplo para $N = 8$ con $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ y $d_3 = 6$ se tiene:

Centavos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
$d_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2



- por ejemplo para $N = 8$ con $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ y $d_3 = 6$ se tiene:

Centavos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_2 = 4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
$d_3 = 6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2



Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
  array C[1..n,0..N] ::= 0
  FOR i::=1 TO n
    FOR j::=1 TO N
      CASE
        i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
        i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
        i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
        i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
          min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
      ENDFOR
    ENDFOR; RETURN C[n,N]
```



Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
  array C[1..n,0..N] ::= 0
  FOR i::=1 TO n
    FOR j::=1 TO N
      CASE
        i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
        i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
        i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
        i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
          min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
      ENDFOR
    ENDFOR; RETURN C[n,N]
```



Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
  array C[1..n,0..N] ::= 0
  FOR i::=1 TO n
    FOR j::=1 TO N
      CASE
        i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
        i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
        i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
        i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
          min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
      ENDFOR
    ENDFOR; RETURN C[n,N]
```



Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
  array C[1..n,0..N] ::= 0
  FOR i::=1 TO n
    FOR j::=1 TO N
      CASE
        i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
        i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
        i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
        i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
          min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
      ENDFOR
    ENDFOR; RETURN C[n,N]
```



Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
  array C[1..n,0..N] ::= 0
  FOR i::=1 TO n
    FOR j::=1 TO N
      CASE
        i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
        i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
        i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
        i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
          min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
      ENDFOR
    ENDFOR; RETURN C[n,N]
```



Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
  array C[1..n,0..N] ::= 0
  FOR i::=1 TO n
    FOR j::=1 TO N
      CASE
        i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
        i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
        i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
        i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
          min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
      ENDFOR
    ENDFOR; RETURN C[n,N]
```



Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
  array C[1..n,0..N] ::= 0
  FOR i::=1 TO n
    FOR j::=1 TO N
      CASE
        i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
        i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
        i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
        i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
          min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
      ENDFOR
    ENDFOR; RETURN C[n,N]
```



Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
  array C[1..n,0..N] ::= 0
  FOR i::=1 TO n
    FOR j::=1 TO N
      CASE
        i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
        i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
        i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
        i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
          min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
      ENDFOR
    ENDFOR; RETURN C[n,N]
```



Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
  array C[1..n,0..N] ::= 0
  FOR i::=1 TO n
    FOR j::=1 TO N
      CASE
        i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
        i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
        i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
        i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
          min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
      ENDFOR
    ENDFOR; RETURN C[n,N]
```



Algoritmo

```
function Cambio(D[1..n],N)
  array C[1..n,0..N] ::= 0
  FOR i::=1 TO n
    FOR j::=1 TO N
      CASE
        i=1 y j<d[i]: C[i,j]::=+maxint
        i=1 y j>=d[i]: C[i,j]::=1+C[i,j-d[i]]
        i>1 y j<d[i]: C[i,j]::=C[i-1,j]
        i>1 y j>=d[i]: C[i,j]::=
          min(C[i-1,j], 1+C[i,j-d[i]])
      ENDFOR
    ENDFOR; RETURN C[n,N]
```



- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nN)$
- este algoritmo sólo encuentra el **mínimo número de monedas** necesarios, pero no dice cuáles son
- para encontrar las monedas que forman el cambio, **se analiza cada la entrada $C[i, j]$** : si es igual a $C[i - 1, j]$ entonces no se usan monedas d_i ; en caso contrario se usa una moneda d_i más las monedas de $C[i, j - d_i]$
- partiendo de $C[n, N]$ y retrocediendo por fila, o por columna, de acuerdo a su valor, hasta llegar a $C[0, 0]$, se obtienen las $C[n, N]$ monedas que forman el cambio
- este recorrido agrega tareas por tiempo $\Theta(n + C[n, N])$ al algoritmo original



- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nN)$
- este algoritmo sólo encuentra el **mínimo número de monedas** necesarios, pero no dice cuáles son
- para encontrar las monedas que forman el cambio, **se analiza cada la entrada $C[i, j]$** : si es igual a $C[i - 1, j]$ entonces no se usan monedas d_i ; en caso contrario se usa una moneda d_i más las monedas de $C[i, j - d_i]$
- partiendo de $C[n, N]$ y retrocediendo por fila, o por columna, de acuerdo a su valor, hasta llegar a $C[0, 0]$, se obtienen las $C[n, N]$ monedas que forman el cambio
- este recorrido agrega tareas por tiempo $\Theta(n + C[n, N])$ al algoritmo original



- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nN)$
- este algoritmo sólo encuentra el **mínimo número de monedas necesarios**, pero no dice cuáles son
- para encontrar las monedas que forman el cambio, **se analiza cada la entrada $C[i, j]$** : si es igual a $C[i - 1, j]$ entonces no se usan monedas d_i ; en caso contrario se usa una moneda d_i más las monedas de $C[i, j - d_i]$
- partiendo de $C[n, N]$ y retrocediendo por fila, o por columna, de acuerdo a su valor, hasta llegar a $C[0, 0]$, se obtienen las $C[n, N]$ monedas que forman el cambio
- este recorrido agrega tareas por tiempo $\Theta(n + C[n, N])$ al algoritmo original



- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nN)$
- este algoritmo sólo encuentra el **mínimo número de monedas** necesarios, pero no dice cuáles son
- para encontrar las monedas que forman el cambio, **se analiza cada la entrada $C[i, j]$** : si es igual a $C[i - 1, j]$ entonces no se usan monedas d_i ; en caso contrario se usa una moneda d_i más las monedas de $C[i, j - d_i]$
- partiendo de $C[n, N]$ y retrocediendo por fila, o por columna, de acuerdo a su valor, hasta llegar a $C[0, 0]$, se obtienen las $C[n, N]$ monedas que forman el cambio
- este recorrido agrega tareas por tiempo $\Theta(n + C[n, N])$ al algoritmo original



- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nN)$
- este algoritmo sólo encuentra el **mínimo número de monedas** necesarios, pero no dice cuáles son
- para encontrar las monedas que forman el cambio, **se analiza cada la entrada $C[i, j]$** : si es igual a $C[i - 1, j]$ entonces no se usan monedas d_i ; en caso contrario se usa una moneda d_i más las monedas de $C[i, j - d_i]$
- partiendo de $C[n, N]$ y retrocediendo por fila, o por columna, de acuerdo a su valor, hasta llegar a $C[0, 0]$, se obtienen las $C[n, N]$ monedas que forman el cambio
- este recorrido agrega tareas por tiempo $\Theta(n + C[n, N])$ al algoritmo original



- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nN)$
- este algoritmo sólo encuentra el **mínimo número de monedas** necesarios, pero no dice cuáles son
- para encontrar las monedas que forman el cambio, **se analiza cada la entrada $C[i, j]$** : si es igual a $C[i - 1, j]$ entonces no se usan monedas d_i ; en caso contrario se usa una moneda d_i más las monedas de $C[i, j - d_i]$
- partiendo de $C[n, N]$ y retrocediendo por fila, o por columna, de acuerdo a su valor, hasta llegar a $C[0, 0]$, se obtienen las $C[n, N]$ monedas que forman el cambio
- este recorrido agrega tareas por tiempo $\Theta(n + C[n, N])$ al algoritmo original



- **Observación:** la dependencia del tiempo y el espacio de ejecución en un dato de entrada N no es buena porque puede ser arbitrariamente grande
- ¿cómo se modificaría el programa si se dispone de una cantidad limitada de monedas de cada denominación? (**ejercicio**)



- **Observación:** la dependencia del tiempo y el espacio de ejecución en un dato de entrada N no es buena porque puede ser arbitrariamente grande
- ¿cómo se modificaría el programa si se dispone de una cantidad limitada de monedas de cada denominación? (ejercicio)



- **Observación:** la dependencia del tiempo y el espacio de ejecución en un dato de entrada N no es buena porque puede ser arbitrariamente grande
- ¿cómo se modificaría el programa si se dispone de una cantidad limitada de monedas de cada denominación? (**ejercicio**)



Programación Dinámica

- 1 Introducción
- 2 Problema de la mochila**
- 3 Caminos más Cortos entre todo par
- 4 Multiplicación de matrices en cadena
- 5 Triangulación optimal de polígonos
- 6 Subsecuencia común más larga



Definición del problema

- Problema: se tienen n objetos indivisibles y una mochila. Cada objeto i tiene un peso w_i y un valor v_i ; la mochila tiene una capacidad máxima de W . El objetivo es encontrar la carga de la mochila que maximice el valor de lo transportado y se respete su capacidad máxima
- es decir, encontrar valores $x_i = 0, 1$, de forma que

$$\text{maximice } \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \text{siempre que } \sum_{i=1}^n x_i w_i \leq W$$

- en esta variante no se permite fraccionar los objetos (**ejercicio:** mostrar que el algoritmo *greedy* visto anteriormente no es correcto en este caso)



Definición del problema

- Problema: se tienen n objetos indivisibles y una mochila. Cada objeto i tiene un peso w_i y un valor v_i ; la mochila tiene una capacidad máxima de W . El objetivo es encontrar la carga de la mochila que maximice el valor de lo transportado y se respete su capacidad máxima
- es decir, encontrar valores $x_i = 0, 1$, de forma que

$$\text{maximice } \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \text{siempre que } \sum_{i=1}^n x_i w_i \leq W$$

- en esta variante no se permite fraccionar los objetos (**ejercicio:** mostrar que el algoritmo *greedy* visto anteriormente no es correcto en este caso)



Definición del problema

- Problema: se tienen n objetos indivisibles y una mochila. Cada objeto i tiene un peso w_i y un valor v_i ; la mochila tiene una capacidad máxima de W . El objetivo es encontrar la carga de la mochila que maximice el valor de lo transportado y se respete su capacidad máxima
- es decir, encontrar valores $x_i = 0, 1$, de forma que

$$\text{maximice } \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \text{siempre que } \sum_{i=1}^n x_i w_i \leq W$$

- en esta variante no se permite fraccionar los objetos (ejercicio: mostrar que el algoritmo *greedy* visto anteriormente no es correcto en este caso)



Definición del problema

- Problema: se tienen n objetos indivisibles y una mochila. Cada objeto i tiene un peso w_i y un valor v_i ; la mochila tiene una capacidad máxima de W . El objetivo es encontrar la carga de la mochila que maximice el valor de lo transportado y se respete su capacidad máxima
- es decir, encontrar valores $x_i = 0, 1$, de forma que

$$\text{maximice } \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \text{siempre que } \sum_{i=1}^n x_i w_i \leq W$$

- en esta variante no se permite fraccionar los objetos (**ejercicio:** mostrar que el algoritmo *greedy* visto anteriormente no es correcto en este caso)



- para aplicar PD a este problema basta con mostrar que cumple con el **principio de optimalidad** y que tiene superposición de subinstancias
- la función a optimizar es el valor de la carga de la mochila. Este valor depende de W y de la cantidad de objetos considerados
- sea entonces $V[i, j]$ el máximo valor de una carga de peso a lo sumo j con lo objetos $1, 2, \dots, i$
- al igual que en el caso del problema del cambio, una de las dimensiones es el conjunto de objetos



- para aplicar PD a este problema basta con mostrar que cumple con el **principio de optimalidad** y que tiene superposición de subinstancias
- la función a optimizar es el valor de la carga de la mochila. Este valor depende de W y de la cantidad de objetos considerados
- sea entonces $V[i, j]$ el máximo valor de una carga de peso a lo sumo j con lo objetos $1, 2, \dots, i$
- al igual que en el caso del problema del cambio, una de las dimensiones es el conjunto de objetos



- para aplicar PD a este problema basta con mostrar que cumple con el **principio de optimalidad** y que tiene superposición de subinstancias
- la función a optimizar es el valor de la carga de la mochila. Este valor depende de W y de la cantidad de objetos considerados
- sea entonces $V[i, j]$ el máximo valor de una carga de peso a lo sumo j con lo objetos $1, 2, \dots, i$
- al igual que en el caso del problema del cambio, una de las dimensiones es el conjunto de objetos



- para aplicar PD a este problema basta con mostrar que cumple con el **principio de optimalidad** y que tiene superposición de subinstancias
- la función a optimizar es el valor de la carga de la mochila. Este valor depende de W y de la cantidad de objetos considerados
- sea entonces $V[i, j]$ el máximo valor de una carga de peso a lo sumo j con lo objetos $1, 2, \dots, i$
- al igual que en el caso del problema del cambio, una de las dimensiones es el conjunto de objetos



- para aplicar PD a este problema basta con mostrar que cumple con el **principio de optimalidad** y que tiene superposición de subinstancias
- la función a optimizar es el valor de la carga de la mochila. Este valor depende de W y de la cantidad de objetos considerados
- sea entonces $V[i, j]$ el máximo valor de una carga de peso a lo sumo j con lo objetos $1, 2, \dots, i$
- al igual que en el caso del problema del cambio, una de las dimensiones es el conjunto de objetos



- el valor de $V[i, j]$ depende de si se incluye o no el objeto i .
- la recurrencia es

$$V[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ -\infty & \text{si } i > 0 \text{ y } j < 0 \\ \max(V[i-1, j], & \\ v_i + V[i-1, j-w_i]) & \text{si } i > 0 \text{ y } j > 0 \end{cases}$$

- la dependencia es con elementos de filas anteriores, a lo sumo en la misma columna



- el valor de $V[i, j]$ depende de si se incluye o no el objeto i .
- la recurrencia es

$$V[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ -\infty & \text{si } i > 0 \text{ y } j < 0 \\ \max(V[i-1, j], & \\ v_i + V[i-1, j-w_i]) & \text{si } i > 0 \text{ y } j > 0 \end{cases}$$

- la dependencia es con elementos de filas anteriores, a lo sumo en la misma columna



- el valor de $V[i, j]$ depende de si se incluye o no el objeto i .
- la recurrencia es

$$V[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ -\infty & \text{si } i > 0 \text{ y } j < 0 \\ \max(V[i-1, j], & \\ v_i + V[i-1, j-w_i]) & \text{si } i > 0 \text{ y } j > 0 \end{cases}$$

- la dependencia es con elementos de filas anteriores, a lo sumo en la misma columna



- el valor de $V[i, j]$ depende de si se incluye o no el objeto i .
- la recurrencia es

$$V[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \\ -\infty & \text{si } i > 0 \text{ y } j < 0 \\ \max(V[i-1, j], & \\ v_i + V[i-1, j-w_i]) & \text{si } i > 0 \text{ y } j > 0 \end{cases}$$

- la dependencia es con elementos de filas anteriores, a lo sumo en la misma columna



Ejemplo

- por ejemplo, si $W = 11$

Peso, Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_1 = 1, v_1 = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_2 = 2, v_2 = 6$	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$w_3 = 5, v_3 = 18$	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
$w_4 = 6, v_4 = 22$	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
$w_5 = 7, v_5 = 28$	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40



Ejemplo

- por ejemplo, si $W = 11$

Peso, Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_1 = 1, v_1 = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_2 = 2, v_2 = 6$	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$w_3 = 5, v_3 = 18$	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
$w_4 = 6, v_4 = 22$	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
$w_5 = 7, v_5 = 28$	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40



Ejemplo

- por ejemplo, si $W = 11$

Peso, Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_1 = 1, v_1 = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_2 = 2, v_2 = 6$	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$w_3 = 5, v_3 = 18$	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
$w_4 = 6, v_4 = 22$	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
$w_5 = 7, v_5 = 28$	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40



Ejemplo

- por ejemplo, si $W = 11$

Peso, Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_1 = 1, v_1 = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_2 = 2, v_2 = 6$	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$w_3 = 5, v_3 = 18$	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
$w_4 = 6, v_4 = 22$	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
$w_5 = 7, v_5 = 28$	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40



Ejemplo

- por ejemplo, si $W = 11$

Peso, Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_1 = 1, v_1 = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_2 = 2, v_2 = 6$	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$w_3 = 5, v_3 = 18$	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
$w_4 = 6, v_4 = 22$	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
$w_5 = 7, v_5 = 28$	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40



Ejemplo

- por ejemplo, si $W = 11$

Peso, Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_1 = 1, v_1 = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_2 = 2, v_2 = 6$	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$w_3 = 5, v_3 = 18$	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
$w_4 = 6, v_4 = 22$	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
$w_5 = 7, v_5 = 28$	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40



Ejemplo

- por ejemplo, si $W = 11$

Peso, Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_1 = 1, v_1 = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_2 = 2, v_2 = 6$	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$w_3 = 5, v_3 = 18$	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
$w_4 = 6, v_4 = 22$	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
$w_5 = 7, v_5 = 28$	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40



Ejemplo

- por ejemplo, si $W = 11$

Peso, Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_1 = 1, v_1 = 1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_2 = 2, v_2 = 6$	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$w_3 = 5, v_3 = 18$	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
$w_4 = 6, v_4 = 22$	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
$w_5 = 7, v_5 = 28$	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40



Algoritmo

- el algoritmo para implementar este algoritmo es muy similar al algoritmo para el problema del cambio
- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nW)$
- para calcular cuáles objetos componen la carga optimal se puede hacer un recorrido adicional desde $C[n, W]$ hasta $C[0, 0]$ de $\Theta(n + W)$



Algoritmo

- el algoritmo para implementar este algoritmo es muy similar al algoritmo para el problema del cambio
- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nW)$
- para calcular cuáles objetos componen la carga optimal se puede hacer un recorrido adicional desde $C[n, W]$ hasta $C[0, 0]$ de $\Theta(n + W)$



Algoritmo

- el algoritmo para implementar este algoritmo es muy similar al algoritmo para el problema del cambio
- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nW)$
- para calcular cuáles objetos componen la carga optimal se puede hacer un recorrido adicional desde $C[n, W]$ hasta $C[0, 0]$ de $\Theta(n + W)$



Algoritmo

- el algoritmo para implementar este algoritmo es muy similar al algoritmo para el problema del cambio
- el tiempo y el espacio es de $\Theta(nW)$
- para calcular cuáles objetos componen la carga optimal se puede hacer un recorrido adicional desde $C[n, W]$ hasta $C[0, 0]$ de $\Theta(n + W)$



Programación Dinámica

- 1 Introducción
- 2 Problema de la mochila
- 3 Caminos más Cortos entre todo par
- 4 Multiplicación de matrices en cadena
- 5 Triangulación optimal de polígonos
- 6 Subsecuencia común más larga



Definición del problema

- Problema: Sea $G = \langle N, A \rangle$ un grafo dirigido, con pesos. El objetivo es hallar el camino con la mínima distancia entre todo par de nodos. Supondremos el grafo representado por una matriz de adyacencia, y los arcos numerados de 1 a n
- el resultado de resolver este problema sería entonces una matriz $D[1..n, 1..n]$, donde $D[i, j] = \delta(i, j)$ la **distancia mínima** entre i y j en G (recordar la definición en la parte de algoritmos greedy)
- una solución a este problema consiste en ejecutar **n veces el algoritmo de Dijkstra** cambiando el nodo origen, y llenando una fila de la matriz en cada iteración
- pero esta solución no es válida si existen arcos con pesos negativos



Definición del problema

- Problema: Sea $G = \langle N, A \rangle$ un grafo dirigido, con pesos. El objetivo es hallar el camino con la mínima distancia entre todo par de nodos. Supondremos el grafo representado por una matriz de adyacencia, y los arcos numerados de 1 a n
- el resultado de resolver este problema sería entonces una matriz $D[1..n, 1..n]$, donde $D[i, j] = \delta(i, j)$ la **distancia mínima** entre i y j en G (recordar la definición en la parte de algoritmos greedy)
- una solución a este problema consiste en ejecutar **n veces el algoritmo de Dijkstra** cambiando el nodo origen, y llenando una fila de la matriz en cada iteración
- pero esta solución no es válida si existen arcos con pesos negativos



Definición del problema

- Problema: Sea $G = \langle N, A \rangle$ un grafo dirigido, con pesos. El objetivo es hallar el camino con la mínima distancia entre todo par de nodos. Supondremos el grafo representado por una matriz de adyacencia, y los arcos numerados de 1 a n
- el resultado de resolver este problema sería entonces una matriz $D[1..n, 1..n]$, donde $D[i, j] = \delta(i, j)$ la **distancia mínima** entre i y j en G (recordar la definición en la parte de algoritmos greedy)
- una solución a este problema consiste en ejecutar n veces el **algoritmo de Dijkstra** cambiando el nodo origen, y llenando una fila de la matriz en cada iteración
- pero esta solución no es válida si existen arcos con pesos negativos



Definición del problema

- Problema: Sea $G = \langle N, A \rangle$ un grafo dirigido, con pesos. El objetivo es hallar el camino con la mínima distancia entre todo par de nodos. Supondremos el grafo representado por una matriz de adyacencia, y los arcos numerados de 1 a n
- el resultado de resolver este problema sería entonces una matriz $D[1..n, 1..n]$, donde $D[i, j] = \delta(i, j)$ la **distancia mínima** entre i y j en G (recordar la definición en la parte de algoritmos greedy)
- una solución a este problema consiste en ejecutar **n veces el algoritmo de Dijkstra** cambiando el nodo origen, y llenando una fila de la matriz en cada iteración
- pero esta solución no es válida si existen arcos con pesos negativos



Definición del problema

- Problema: Sea $G = \langle N, A \rangle$ un grafo dirigido, con pesos. El objetivo es hallar el camino con la mínima distancia entre todo par de nodos. Supondremos el grafo representado por una matriz de adyacencia, y los arcos numerados de 1 a n
- el resultado de resolver este problema sería entonces una matriz $D[1..n, 1..n]$, donde $D[i, j] = \delta(i, j)$ la **distancia mínima** entre i y j en G (recordar la definición en la parte de algoritmos greedy)
- una solución a este problema consiste en ejecutar **n veces el algoritmo de Dijkstra** cambiando el nodo origen, y llenando una fila de la matriz en cada iteración
- pero esta solución no es válida si existen arcos con pesos negativos



- vale el **principio de optimalidad** en este problema: si k es un nodo en el menor camino entre i y j , entonces ese camino está formado por el menor camino de i a k y el menor camino de k a j , y estos caminos no contienen i, j, k (esta propiedad se demuestra por el absurdo)
- entonces, para ir calculando cada $D[i, j]$ se pueden considerar el conjunto de nodos intermedios $1, \dots, k$ que pueden ir formando parte de posibles caminos intermedios
- para cada k , existen dos alternativas: o k pertenece al menor camino entre i y j , o no pertenece, y es el mismo que para $1, \dots, k - 1$
- también se puede observar que hay superposición de instancias



- vale el **principio de optimalidad** en este problema: si k es un nodo en el menor caminio entre i y j , entonces ese camino está formado por el menor camino de i a k y el menor camino de k a j , y estos caminos no contienen i, j, k (esta propiedad se demuestra por el absurdo)
- entonces, para ir calculando cada $D[i, j]$ se pueden considerar el conjunto de nodos intermedios $1, \dots, k$ que pueden ir formando parte de posibles caminos intermedios
- para cada k , existen dos alternativas: o k pertenece al menor camino entre i y j , o no pertenece, y es el mismo que para $1, \dots, k - 1$
- también se puede observar que hay superposición de instancias



- vale el **principio de optimalidad** en este problema: si k es un nodo en el menor caminio entre i y j , entonces ese camino está formado por el menor camino de i a k y el menor camino de k a j , y estos caminos no contienen i, j, k (esta propiedad se demuestra por el absurdo)
- entonces, para ir calculando cada $D[i, j]$ se pueden considerar el conjunto de nodos intermedios $1, \dots, k$ que pueden ir formando parte de posibles caminos intermedios
- para cada k , existen dos alternativas: o k pertenece al menor camino entre i y j , o no pertenece, y es el mismo que para $1, \dots, k - 1$
- también se puede observar que hay superposición de instancias



- vale el **principio de optimalidad** en este problema: si k es un nodo en el menor caminio entre i y j , entonces ese camino está formado por el menor camino de i a k y el menor camino de k a j , y estos caminos no contienen i, j, k (esta propiedad se demuestra por el absurdo)
- entonces, para ir calculando cada $D[i, j]$ se pueden considerar el conjunto de nodos intermedios $1, \dots, k$ que pueden ir formando parte de posibles caminos intermedios
- para cada k , existen dos alternativas: o k pertenece al menor camino entre i y j , o no pertenece, y es el mismo que para $1, \dots, k - 1$
- también se puede observar que hay superposición de instancias



- vale el **principio de optimalidad** en este problema: si k es un nodo en el menor caminio entre i y j , entonces ese camino está formado por el menor camino de i a k y el menor camino de k a j , y estos caminos no contienen i, j, k (esta propiedad se demuestra por el absurdo)
- entonces, para ir calculando cada $D[i, j]$ se pueden considerar el conjunto de nodos intermedios $1, \dots, k$ que pueden ir formando parte de posibles caminos intermedios
- para cada k , existen dos alternativas: o k pertenece al menor camino entre i y j , o no pertenece, y es el mismo que para $1, \dots, k - 1$
- también se puede observar que hay superposición de instancias



- sea entonces $D[i, j, k]$ la menor distancia entre i y j que tiene como nodos intermedios a $1, 2, \dots, k$
- se debe comparar el camino más corto obtenido hasta entonces (con nodos intermedios $1, \dots, k - 1$), con el camino que va desde i hasta k , y luego de k a j , también sólo con nodos intermedios $1, \dots, k - 1$
- se tiene en cuenta implícitamente el hecho de que **un camino optimal no puede pasar dos veces por un nodo**
- los valores buscados serán entonces $D[i, j, n]$ que admiten cualquier nodo como nodo intermedio



- sea entonces $D[i, j, k]$ la menor distancia entre i y j que tiene como nodos intermedios a $1, 2, \dots, k$
- se debe comparar el camino más corto obtenido hasta entonces (con nodos intermedios $1, \dots, k - 1$), con el camino que va desde i hasta k , y luego de k a j , también sólo con nodos intermedios $1, \dots, k - 1$
- se tiene en cuenta implícitamente el hecho de que **un camino optimal no puede pasar dos veces por un nodo**
- los valores buscados serán entonces $D[i, j, n]$ que admiten cualquier nodo como nodo intermedio



- sea entonces $D[i, j, k]$ la menor distancia entre i y j que tiene como nodos intermedios a $1, 2, \dots, k$
- se debe comparar el camino más corto obtenido hasta entonces (con nodos intermedios $1, \dots, k - 1$), con el camino que va desde i hasta k , y luego de k a j , también sólo con nodos intermedios $1, \dots, k - 1$
- se tiene en cuenta implícitamente el hecho de que un camino optimal no puede pasar dos veces por un nodo
- los valores buscados serán entonces $D[i, j, n]$ que admiten cualquier nodo como nodo intermedio



- sea entonces $D[i, j, k]$ la menor distancia entre i y j que tiene como nodos intermedios a $1, 2, \dots, k$
- se debe comparar el camino más corto obtenido hasta entonces (con nodos intermedios $1, \dots, k - 1$), con el camino que va desde i hasta k , y luego de k a j , también sólo con nodos intermedios $1, \dots, k - 1$
- se tiene en cuenta implícitamente el hecho de que **un camino optimal no puede pasar dos veces por un nodo**
- los valores buscados serán entonces $D[i, j, n]$ que admiten cualquier nodo como nodo intermedio



- sea entonces $D[i, j, k]$ la menor distancia entre i y j que tiene como nodos intermedios a $1, 2, \dots, k$
- se debe comparar el camino más corto obtenido hasta entonces (con nodos intermedios $1, \dots, k - 1$), con el camino que va desde i hasta k , y luego de k a j , también sólo con nodos intermedios $1, \dots, k - 1$
- se tiene en cuenta implícitamente el hecho de que **un camino optimal no puede pasar dos veces por un nodo**
- los valores buscados serán entonces $D[i, j, n]$ que admiten cualquier nodo como nodo intermedio



- los valores iniciales, cuando $k = 0$ o sea no hay nodos intermedios, corresponden a los pesos de los arcos (i, j)
- la recurrencia queda entonces

$$D[i, j, k] = \begin{cases} G[i, j] & \text{si } k = 0 \\ \min(D[i, j, k-1], \\ D[i, k, k-1] + D[k, j, k-1]) & \text{sino} \end{cases}$$

- resultando en un algoritmo de programación dinámica conocido como **algoritmo de Floyd-Warshall** en $\Theta(n^3)$



- los valores iniciales, cuando $k = 0$ o sea no hay nodos intermedios, corresponden a los pesos de los arcos (i, j)
- la recurrencia queda entonces

$$D[i, j, k] = \begin{cases} G[i, j] & \text{si } k = 0 \\ \min(D[i, j, k-1], \\ D[i, k, k-1] + D[k, j, k-1]) & \text{sino} \end{cases}$$

- resultando en un algoritmo de programación dinámica conocido como **algoritmo de Floyd-Warshall** en $\Theta(n^3)$



- los valores iniciales, cuando $k = 0$ o sea no hay nodos intermedios, corresponden a los pesos de los arcos (i, j)
- la recurrencia queda entonces

$$D[i, j, k] = \begin{cases} G[i, j] & \text{si } k = 0 \\ \min(D[i, j, k-1], \\ D[i, k, k-1] + D[k, j, k-1]) & \text{sino} \end{cases}$$

- resultando en un algoritmo de programación dinámica conocido como **algoritmo de Floyd-Warshall** en $\Theta(n^3)$



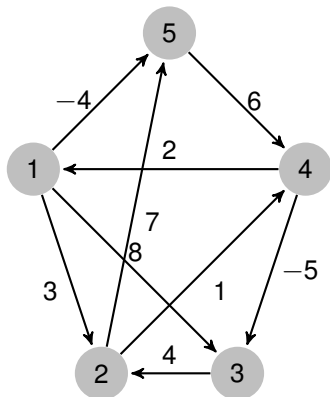
- los valores iniciales, cuando $k = 0$ o sea no hay nodos intermedios, corresponden a los pesos de los arcos (i, j)
- la recurrencia queda entonces

$$D[i, j, k] = \begin{cases} G[i, j] & \text{si } k = 0 \\ \min(D[i, j, k-1], \\ D[i, k, k-1] + D[k, j, k-1]) & \text{sino} \end{cases}$$

- resultando en un algoritmo de programación dinámica conocido como **algoritmo de Floyd-Warshall** en $\Theta(n^3)$



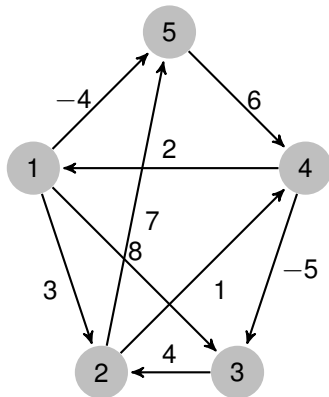
Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall



$$D[i, j, 0] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



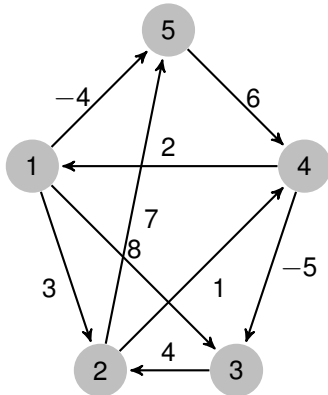
Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall



$$D[i, j, 1] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



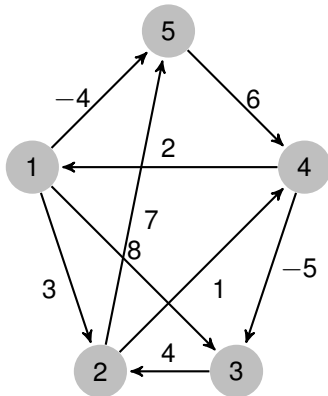
Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall



$$D[i, j, 2] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



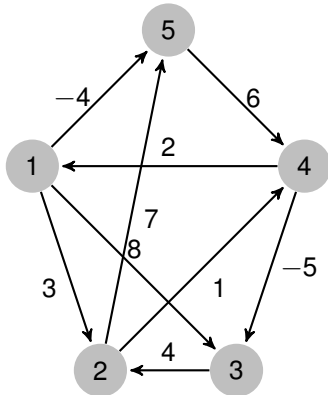
Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall



$$D[i, j, 3] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



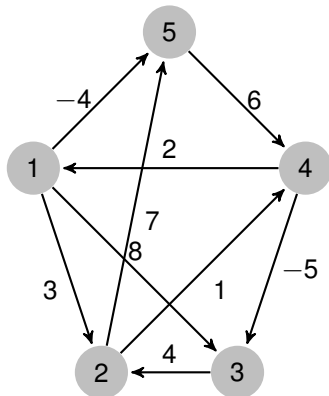
Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall



$$D[i, j, 4] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall



$$D[i, j, 5] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



- el espacio del algoritmo anterior también es de $\Theta(n^3)$
- se puede **mejorar el espacio** para este cálculo teniendo en cuenta que en toda iteración k :
 - cada $D[i, j, k]$ sólo necesita conocer los valores en $D[*, *, k - 1]$. Esto reduce en principio el espacio a $\Theta(n^2)$
 - para todo $i, j \neq k$, $D[k, j, k] = D[k, j, k - 1]$ y $D[i, k, k] = D[i, k, k - 1]$, es decir los valores de la fila k y la columna k no cambian en la iteración k
 - para todo $i, j \neq k$ para actualizar $D[i, j, k]$ sólo se necesita el valor anterior $D[i, j, k - 1]$ y los valores de la fila k y la columna k , $D[i, k, k - 1]$ y $D[k, j, k - 1]$ que no cambian en esta iteración
 - se puede entonces trabajar sobre la misma matriz de salida, sin usar matrices auxiliares, lo que reduce el espacio a $\Theta(1)$



- el espacio del algoritmo anterior también es de $\Theta(n^3)$
- se puede **mejorar el espacio** para este cálculo teniendo en cuenta que en toda iteración k :
 - cada $D[i, j, k]$ sólo necesita conocer los valores en $D[*, *, k - 1]$. Esto reduce en principio el espacio a $\Theta(n^2)$
 - para todo $i, j \neq k$, $D[k, j, k] = D[k, j, k - 1]$ y $D[i, k, k] = D[i, k, k - 1]$, es decir los valores de la fila k y la columna k no cambian en la iteración k
 - para todo $i, j \neq k$ para actualizar $D[i, j, k]$ sólo se necesita el valor anterior $D[i, j, k - 1]$ y los valores de la fila k y la columna k , $D[i, k, k - 1]$ y $D[k, j, k - 1]$ que no cambian en esta iteración
 - se puede entonces trabajar sobre la misma matriz de salida, sin usar matrices auxiliares, lo que reduce el espacio a $\Theta(1)$



- el espacio del algoritmo anterior también es de $\Theta(n^3)$
- se puede **mejorar el espacio** para este cálculo teniendo en cuenta que en toda iteración k :
 - cada $D[i, j, k]$ sólo necesita conocer los valores en $D[*, *, k - 1]$. Esto reduce en principio el espacio a $\Theta(n^2)$
 - para todo $i, j \neq k$, $D[k, j, k] = D[k, j, k - 1]$ y $D[i, k, k] = D[i, k, k - 1]$, es decir los valores de la fila k y la columna k no cambian en la iteración k
 - para todo $i, j \neq k$ para actualizar $D[i, j, k]$ sólo se necesita el valor anterior $D[i, j, k - 1]$ y los valores de la fila k y la columna k , $D[i, k, k - 1]$ y $D[k, j, k - 1]$ que no cambian en esta iteración
 - se puede entonces trabajar sobre la misma matriz de salida, sin usar matrices auxiliares, lo que reduce el **espacio a $\Theta(1)$**



- el espacio del algoritmo anterior también es de $\Theta(n^3)$
- se puede **mejorar el espacio** para este cálculo teniendo en cuenta que en toda iteración k :
 - cada $D[i, j, k]$ sólo necesita conocer los valores en $D[*, *, k - 1]$. Esto reduce en principio el espacio a $\Theta(n^2)$
 - para todo $i, j \neq k$, $D[k, j, k] = D[k, j, k - 1]$ y $D[i, k, k] = D[i, k, k - 1]$, es decir los valores de la fila k y la columna k no cambian en la iteración k
 - para todo $i, j \neq k$ para actualizar $D[i, j, k]$ sólo se necesita el valor anterior $D[i, j, k - 1]$ y los valores de la fila k y la columna k , $D[i, k, k - 1]$ y $D[k, j, k - 1]$ que no cambian en esta iteración
 - se puede entonces trabajar sobre la misma matriz de salida, sin usar matrices auxiliares, lo que reduce el **espacio a $\Theta(1)$**



- el espacio del algoritmo anterior también es de $\Theta(n^3)$
- se puede **mejorar el espacio** para este cálculo teniendo en cuenta que en toda iteración k :
 - cada $D[i, j, k]$ sólo necesita conocer los valores en $D[*, *, k - 1]$. Esto reduce en principio el espacio a $\Theta(n^2)$
 - para todo $i, j \neq k$, $D[k, j, k] = D[k, j, k - 1]$ y $D[i, k, k] = D[i, k, k - 1]$, es decir los valores de la fila k y la columna k no cambian en la iteración k
 - para todo $i, j \neq k$ para actualizar $D[i, j, k]$ sólo se necesita el valor anterior $D[i, j, k - 1]$ y los valores de la fila k y la columna k , $D[i, k, k - 1]$ y $D[k, j, k - 1]$ que no cambian en esta iteración
 - se puede entonces trabajar sobre la misma matriz de salida, sin usar matrices auxiliares, lo que reduce el **espacio a $\Theta(1)$**



- el espacio del algoritmo anterior también es de $\Theta(n^3)$
- se puede **mejorar el espacio** para este cálculo teniendo en cuenta que en toda iteración k :
 - cada $D[i, j, k]$ sólo necesita conocer los valores en $D[*, *, k - 1]$. Esto reduce en principio el espacio a $\Theta(n^2)$
 - para todo $i, j \neq k$, $D[k, j, k] = D[k, j, k - 1]$ y $D[i, k, k] = D[i, k, k - 1]$, es decir los valores de la fila k y la columna k no cambian en la iteración k
 - para todo $i, j \neq k$ para actualizar $D[i, j, k]$ sólo se necesita el valor anterior $D[i, j, k - 1]$ y los valores de la fila k y la columna k , $D[i, k, k - 1]$ y $D[k, j, k - 1]$ que no cambian en esta iteración
 - se puede entonces trabajar sobre la misma matriz de salida, sin usar matrices auxiliares, lo que reduce el **espacio a $\Theta(1)$**



- el espacio del algoritmo anterior también es de $\Theta(n^3)$
- se puede **mejorar el espacio** para este cálculo teniendo en cuenta que en toda iteración k :
 - cada $D[i, j, k]$ sólo necesita conocer los valores en $D[*, *, k - 1]$. Esto reduce en principio el espacio a $\Theta(n^2)$
 - para todo $i, j \neq k$, $D[k, j, k] = D[k, j, k - 1]$ y $D[i, k, k] = D[i, k, k - 1]$, es decir los valores de la fila k y la columna k no cambian en la iteración k
 - para todo $i, j \neq k$ para actualizar $D[i, j, k]$ sólo se necesita el valor anterior $D[i, j, k - 1]$ y los valores de la fila k y la columna k , $D[i, k, k - 1]$ y $D[k, j, k - 1]$ que no cambian en esta iteración
 - se puede entonces trabajar sobre la misma matriz de salida, sin usar matrices auxiliares, lo que reduce el **espacio a $\Theta(1)$**



- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])  
  array D[1..n,1..n]  
  D::=G  
  FOR k::=1 TO n  
    FOR i::=1 TO n  
      FOR j::=1 TO n  
        D[i,j]:=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])  
      ENDFOR  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN D
```



- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])  
  array D[1..n,1..n]  
  D::=G  
  FOR k::=1 TO n  
    FOR i::=1 TO n  
      FOR j::=1 TO n  
        D[i,j]:=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])  
      ENDFOR  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN D
```



- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])  
  array D[1..n,1..n]  
  D::=G  
  FOR k::=1 TO n  
    FOR i::=1 TO n  
      FOR j::=1 TO n  
        D[i,j]::=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])  
      ENDFOR  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN D
```



- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])  
  array D[1..n,1..n]  
  D::=G  
  FOR k::=1 TO n  
    FOR i::=1 TO n  
      FOR j::=1 TO n  
        D[i,j]::=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])  
      ENDFOR  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN D
```



- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])  
  array D[1..n,1..n]  
  D::=G  
  FOR k::=1 TO n  
    FOR i::=1 TO n  
      FOR j::=1 TO n  
        D[i,j]:=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])  
      ENDFOR  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN D
```



- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])  
  array D[1..n,1..n]  
  D::=G  
  FOR k::=1 TO n  
    FOR i::=1 TO n  
      FOR j::=1 TO n  
        D[i,j]:=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])  
      ENDFOR  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN D
```



- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])  
  array D[1..n,1..n]  
  D::=G  
  FOR k:=1 TO n  
    FOR i:=1 TO n  
      FOR j:=1 TO n  
        D[i,j]:=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])  
      ENDFOR  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN D
```



- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])  
  array D[1..n,1..n]  
  D::=G  
  FOR k:=1 TO n  
    FOR i:=1 TO n  
      FOR j:=1 TO n  
        D[i,j]:=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])  
      ENDFOR  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN D
```



- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])  
  array D[1..n,1..n]  
  D::=G  
  FOR k:=1 TO n  
    FOR i:=1 TO n  
      FOR j:=1 TO n  
        D[i,j]:=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])  
      ENDFOR  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN D
```



- el algoritmo resulta muy simple y fácil de implementar

```
function Floyd(G[1..n,1..n])  
  array D[1..n,1..n]  
  D::=G  
  FOR k::=1 TO n  
    FOR i::=1 TO n  
      FOR j::=1 TO n  
        D[i,j]::=min(D[i,j],D[i,k]+D[k,j])  
      ENDFOR  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN D
```



- su tiempo es de $\Theta(n^3)$ y el espacio es de $\Theta(1)$
- el tiempo es comparable con n veces Dijkstra, pero su **simplicidad** hace que se prefiera implementar Floyd



- su tiempo es de $\Theta(n^3)$ y el espacio es de $\Theta(1)$
- el tiempo es comparable con n veces Dijkstra, pero su **simplicidad** hace que se prefiera implementar Floyd



- su tiempo es de $\Theta(n^3)$ y el espacio es de $\Theta(1)$
- el tiempo es comparable con n veces Dijkstra, pero su **simplicidad** hace que se prefiera implementar Floyd



Cálculo de los caminos mínimos

- este algoritmo sólo encuentra las distancias mínimas entre cada par de nodos. Para obtener los nodos que implementan esa distancia es necesario recordar para cada (i, j) cuál es el k que proveyó la mínima distancia entre ellos
- es suficiente con actualizar una matriz adicional P cada vez que se modifica $D[i, j]$, reemplazando la línea interna de los FOR por

```
IF D[i, j] > D[i, k] + D[k, j]
    D[i, j] := D[i, k] + D[k, j]
    P[i, j] := k
ENDIF
```

- P debe ser inicializada con 0 en todos sus valores



Cálculo de los caminos mínimos

- este algoritmo sólo encuentra las distancias mínimas entre cada par de nodos. Para obtener los nodos que implementan esa distancia es necesario **recordar para cada (i,j) cuál es el k que proveyó la mínima distancia** entre ellos
- es suficiente con actualizar una matriz adicional P cada vez que se modifica $D[i,j]$, reemplazando la línea interna de los FOR por

```
IF D[i,j]>D[i,k]+D[k,j]
  D[i,j]:=D[i,k]+D[k,j]
  P[i,j]:=k
ENDIF
```

- P debe ser inicializada con 0 en todos sus valores



Cálculo de los caminos mínimos

- este algoritmo sólo encuentra las distancias mínimas entre cada par de nodos. Para obtener los nodos que implementan esa distancia es necesario **recordar para cada (i, j) cuál es el k que proveyó la mínima distancia** entre ellos
- es suficiente con actualizar una matriz adicional P cada vez que se modifica $D[i, j]$, reemplazando la línea interna de los FOR por

```
IF D[i, j] > D[i, k] + D[k, j]
    D[i, j] := D[i, k] + D[k, j]
    P[i, j] := k
ENDIF
```

- P debe ser inicializada con 0 en todos sus valores



Cálculo de los caminos mínimos

- este algoritmo sólo encuentra las distancias mínimas entre cada par de nodos. Para obtener los nodos que implementan esa distancia es necesario **recordar para cada (i, j) cuál es el k que proveyó la mínima distancia** entre ellos
- es suficiente con actualizar una matriz adicional P cada vez que se modifica $D[i, j]$, reemplazando la línea interna de los FOR por

```
IF D[i, j] > D[i, k] + D[k, j]
    D[i, j] := D[i, k] + D[k, j]
    P[i, j] := k
ENDIF
```

- P debe ser inicializada con 0 en todos sus valores



Cálculo de los caminos mínimos

- este algoritmo sólo encuentra las distancias mínimas entre cada par de nodos. Para obtener los nodos que implementan esa distancia es necesario **recordar para cada (i,j) cuál es el k que proveyó la mínima distancia** entre ellos
- es suficiente con actualizar una matriz adicional P cada vez que se modifica $D[i,j]$, reemplazando la línea interna de los FOR por

```
IF D[i,j]>D[i,k]+D[k,j]
    D[i,j]::=D[i,k]+D[k,j]
    P[i,j]::=k
ENDIF
```

- P debe ser inicializada con 0 en todos sus valores



Cálculo de los caminos mínimos

- este algoritmo sólo encuentra las distancias mínimas entre cada par de nodos. Para obtener los nodos que implementan esa distancia es necesario **recordar para cada (i, j) cuál es el k que proveyó la mínima distancia** entre ellos
- es suficiente con actualizar una matriz adicional P cada vez que se modifica $D[i, j]$, reemplazando la línea interna de los FOR por

```
IF D[i, j] > D[i, k] + D[k, j]
    D[i, j] := D[i, k] + D[k, j]
    P[i, j] := k
ENDIF
```

- P debe ser inicializada con 0 en todos sus valores



Cálculo de los caminos mínimos

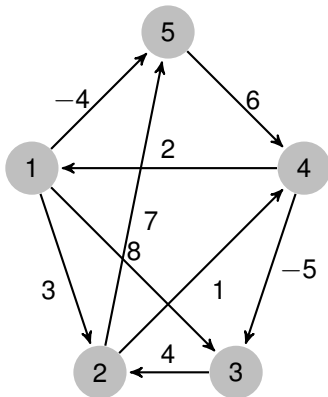
- este algoritmo sólo encuentra las distancias mínimas entre cada par de nodos. Para obtener los nodos que implementan esa distancia es necesario **recordar para cada (i, j) cuál es el k que proveyó la mínima distancia** entre ellos
- es suficiente con actualizar una matriz adicional P cada vez que se modifica $D[i, j]$, reemplazando la línea interna de los FOR por

```
IF D[i, j] > D[i, k] + D[k, j]
    D[i, j] := D[i, k] + D[k, j]
    P[i, j] := k
ENDIF
```

- P debe ser inicializada con 0 en todos sus valores



Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall

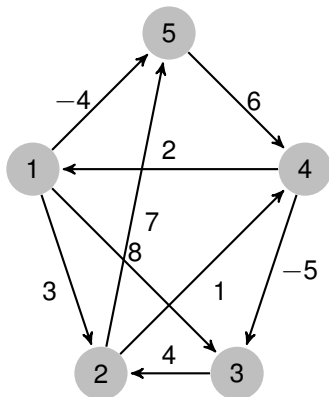


$$D[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall

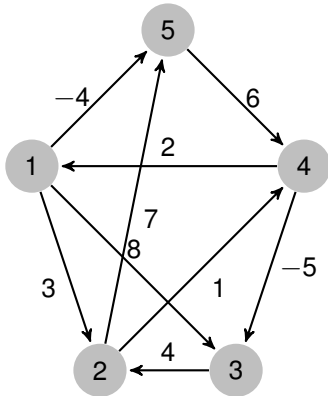


$$D[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall

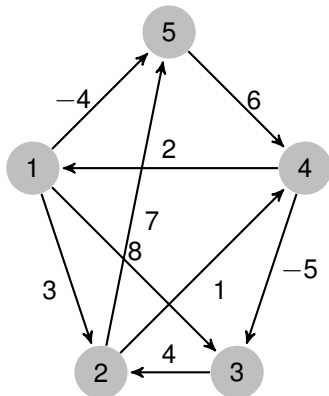


$$D[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall

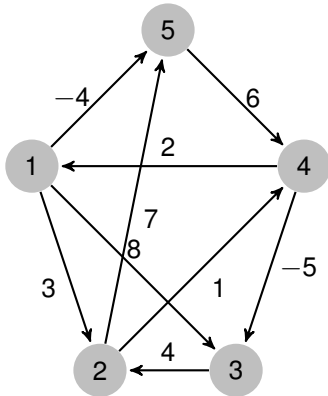


$$D[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall

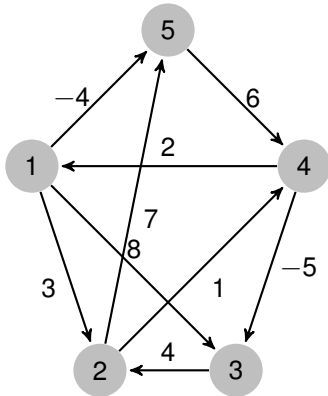


$$D[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejemplo de ejecución del algoritmo de Floyd-Warshall



$$D[i, j, 5] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P[i, j] = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Clausura transitiva de un grafo

- un grafo sin pesos puede ser usado para representar una **relación** entre los nodos; si el arco (i, j) existe entonces i está en relación con j
- entonces para determinar si existe un camino entre un dado par de nodos es necesario calcular la **clausura transitiva** de la relación
- para esto se asigna peso 1 para los arcos que existen, y se calculan mediante Floyd-Warshall los caminos mínimos del grafo. Se pueden usar operaciones binarias en lugar de sumas o mínimos en este caso
- la clausura transitiva se usa en compiladores para poder saber cuáles son los terminales iniciales para todos los símbolos no-terminales de una gramática dada



Clausura transitiva de un grafo

- un grafo sin pesos puede ser usado para representar una **relación** entre los nodos; si el arco (i, j) existe entonces i está en relación con j
- entonces para determinar si existe un camino entre un dado par de nodos es necesario calcular la **clausura transitiva** de la relación
- para esto se asigna peso 1 para los arcos que existen, y se calculan mediante Floyd-Warshall los caminos mínimos del grafo. Se pueden usar operaciones binarias en lugar de sumas o mínimos en este caso
- la clausura transitiva se usa en compiladores para poder saber cuáles son los terminales iniciales para todos los símbolos no-terminales de una gramática dada



Clausura transitiva de un grafo

- un grafo sin pesos puede ser usado para representar una **relación** entre los nodos; si el arco (i, j) existe entonces i está en relación con j
- entonces para determinar si existe un camino entre un dado par de nodos es necesario calcular la **clausura transitiva** de la relación
- para esto se asigna peso 1 para los arcos que existen, y se calculan mediante Floyd-Warshall los caminos mínimos del grafo. Se pueden usar operaciones binarias en lugar de sumas o mínimos en este caso
- la clausura transitiva se usa en compiladores para poder saber cuáles son los terminales iniciales para todos los símbolos no-terminales de una gramática dada



Clausura transitiva de un grafo

- un grafo sin pesos puede ser usado para representar una **relación** entre los nodos; si el arco (i, j) existe entonces i esta en relación con j
- entonces para determinar si existe un camino entre un dado par de nodos es necesario calcular la **clausura transitiva** de la relación
- para esto se asigna peso 1 para los arcos que existen, y se calculan mediante Floyd-Warshall los caminos mínimos del grafo. Se pueden usar operaciones binarias en lugar de sumas o mínimos en este caso
- la clausura transitiva se usa en compiladores para poder saber cuáles son los terminales iniciales para todos los símbolos no-terminales de una gramática dada



Clausura transitiva de un grafo

- un grafo sin pesos puede ser usado para representar una **relación** entre los nodos; si el arco (i, j) existe entonces i esta en relación con j
- entonces para determinar si existe un camino entre un dado par de nodos es necesario calcular la **clausura transitiva** de la relación
- para esto se asigna peso 1 para los arcos que existen, y se calculan mediante Floyd-Warshall los caminos mínimos del grafo. Se pueden usar operaciones binarias en lugar de sumas o mínimos en este caso
- la clausura transitiva se usa en compiladores para poder saber cuáles son los terminales iniciales para todos los símbolos no-terminales de una gramática dada



Programación Dinámica

- 1 Introducción
- 2 Problema de la mochila
- 3 Caminos más Cortos entre todo par
- 4 Multiplicación de matrices en cadena**
- 5 Triangulación optimal de polígonos
- 6 Subsecuencia común más larga



Definición del problema

- Problema: se tienen n matrices M_1, M_2, \dots, M_n , no necesariamente cuadradas, y se quiere encontrar la mejor manera de hallar su producto $M_1 M_2 \dots M_n$. Cada matriz M_i es de tamaño $d_{i-1} d_i$
- teniendo en cuenta que:
 - cada producto $M_i M_{i+1}$ se calcula con $d_{i-1} d_i d_{i+1}$ productos
 - el producto entre matrices es asociativo, luego
 $(M_i M_{i+1}) M_{i+2} = M_i (M_{i+1} M_{i+2})$
- entonces es **relevante el orden** en que se realiza el producto M_1, M_2, \dots, M_n .
- ejemplo: M_1 de 5×10 , M_2 de 10×20 , M_3 de 20×2 , entonces $M_1 (M_2 M_3)$ lleva $400 + 100 = 500$ productos, y $(M_1 M_2) M_3$ $1000 + 200 = 1200$ productos



Definición del problema

- Problema: se tienen n matrices M_1, M_2, \dots, M_n , no necesariamente cuadradas, y se quiere encontrar la mejor manera de hallar su producto $M_1 M_2 \dots M_n$. Cada matriz M_i es de tamaño $d_{i-1} d_i$
- teniendo en cuenta que:
 - cada producto $M_i M_{i+1}$ se calcula con $d_{i-1} d_i d_{i+1}$ productos
 - el producto entre matrices es asociativo, luego
 $(M_i M_{i+1}) M_{i+2} = M_i (M_{i+1} M_{i+2})$
- entonces es **relevante el orden** en que se realiza el producto M_1, M_2, \dots, M_n .
- ejemplo: M_1 de 5×10 , M_2 de 10×20 , M_3 de 20×2 , entonces $M_1 (M_2 M_3)$ lleva $400 + 100 = 500$ productos, y $(M_1 M_2) M_3$ $1000 + 200 = 1200$ productos



Definición del problema

- Problema: se tienen n matrices M_1, M_2, \dots, M_n , no necesariamente cuadradas, y se quiere encontrar la mejor manera de hallar su producto $M_1 M_2 \dots M_n$. Cada matriz M_i es de tamaño $d_{i-1} d_i$
- teniendo en cuenta que:
 - cada producto $M_i M_{i+1}$ se calcula con $d_{i-1} d_i d_{i+1}$ productos
 - el producto entre matrices es asociativo, luego
$$(M_i M_{i+1}) M_{i+2} = M_i (M_{i+1} M_{i+2})$$
- entonces es **relevante el orden** en que se realiza el producto M_1, M_2, \dots, M_n .
- ejemplo: M_1 de 5×10 , M_2 de 10×20 , M_3 de 20×2 , entonces $M_1 (M_2 M_3)$ lleva $400 + 100 = 500$ productos, y $(M_1 M_2) M_3$ $1000 + 200 = 1200$ productos



Definición del problema

- Problema: se tienen n matrices M_1, M_2, \dots, M_n , no necesariamente cuadradas, y se quiere encontrar la mejor manera de hallar su producto $M_1 M_2 \dots M_n$. Cada matriz M_i es de tamaño $d_{i-1} d_i$
- teniendo en cuenta que:
 - cada producto $M_i M_{i+1}$ se calcula con $d_{i-1} d_i d_{i+1}$ productos
 - el producto entre matrices es asociativo, luego
$$(M_i M_{i+1}) M_{i+2} = M_i (M_{i+1} M_{i+2})$$
- entonces es **relevante el orden** en que se realiza el producto M_1, M_2, \dots, M_n .
- ejemplo: M_1 de 5×10 , M_2 de 10×20 , M_3 de 20×2 , entonces $M_1 (M_2 M_3)$ lleva $400 + 100 = 500$ productos, y $(M_1 M_2) M_3$ $1000 + 200 = 1200$ productos



Definición del problema

- Problema: se tienen n matrices M_1, M_2, \dots, M_n , no necesariamente cuadradas, y se quiere encontrar la mejor manera de hallar su producto $M_1 M_2 \dots M_n$. Cada matriz M_i es de tamaño $d_{i-1} d_i$
- teniendo en cuenta que:
 - cada producto $M_i M_{i+1}$ se calcula con $d_{i-1} d_i d_{i+1}$ productos
 - el producto entre matrices es asociativo, luego
$$(M_i M_{i+1}) M_{i+2} = M_i (M_{i+1} M_{i+2})$$
- entonces es **relevante el orden** en que se realiza el producto M_1, M_2, \dots, M_n .
- ejemplo: M_1 de 5×10 , M_2 de 10×20 , M_3 de 20×2 , entonces $M_1 (M_2 M_3)$ lleva $400 + 100 = 500$ productos, y $(M_1 M_2) M_3$ $1000 + 200 = 1200$ productos



Definición del problema

- Problema: se tienen n matrices M_1, M_2, \dots, M_n , no necesariamente cuadradas, y se quiere encontrar la mejor manera de hallar su producto $M_1 M_2 \dots M_n$. Cada matriz M_i es de tamaño $d_{i-1} d_i$
- teniendo en cuenta que:
 - cada producto $M_i M_{i+1}$ se calcula con $d_{i-1} d_i d_{i+1}$ productos
 - el producto entre matrices es asociativo, luego
$$(M_i M_{i+1}) M_{i+2} = M_i (M_{i+1} M_{i+2})$$
- entonces es **relevante el orden** en que se realiza el producto M_1, M_2, \dots, M_n .
- ejemplo: M_1 de 5×10 , M_2 de 10×20 , M_3 de 20×2 , entonces $M_1 (M_2 M_3)$ lleva $400 + 100 = 500$ productos, y $(M_1 M_2) M_3$ $1000 + 200 = 1200$ productos



Definición del problema

- Problema: se tienen n matrices M_1, M_2, \dots, M_n , no necesariamente cuadradas, y se quiere encontrar la mejor manera de hallar su producto $M_1 M_2 \dots M_n$. Cada matriz M_i es de tamaño $d_{i-1} d_i$
- teniendo en cuenta que:
 - cada producto $M_i M_{i+1}$ se calcula con $d_{i-1} d_i d_{i+1}$ productos
 - el producto entre matrices es asociativo, luego
$$(M_i M_{i+1}) M_{i+2} = M_i (M_{i+1} M_{i+2})$$
- entonces es **relevante el orden** en que se realiza el producto M_1, M_2, \dots, M_n .
- ejemplo: M_1 de 5×10 , M_2 de 10×20 , M_3 de 20×2 , entonces $M_1 (M_2 M_3)$ lleva $400 + 100 = 500$ productos, y $(M_1 M_2) M_3$ lleva $1000 + 200 = 1200$ productos



- el problema entonces consiste en encontrar todas las **parentizaciones** posibles para M_1, M_2, \dots, M_n , evaluar la cantidad de productos necesarios, y obtener el menor entre todos ellos
- la cantidad de parentizaciones posibles está definida por la recurrencia

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i)$$

con $T(1) = 1$

- los $T(n)$ forman los llamados **números de Catalan** y se puede probar que $T(n) \in \Omega(4^n/n^2)$ por inducción
- luego el algoritmo directo toma tiempo de $\Omega(4^n/n)$ por lo que es inviable en la práctica para n medianos



- el problema entonces consiste en encontrar todas las **parentizaciones** posibles para M_1, M_2, \dots, M_n , evaluar la cantidad de productos necesarios, y obtener el menor entre todos ellos
- la cantidad de parentizaciones posibles está definida por la recurrencia

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i)$$

con $T(1) = 1$

- los $T(n)$ forman los llamados **números de Catalan** y se puede probar que $T(n) \in \Omega(4^n/n^2)$ por inducción
- luego el algoritmo directo toma tiempo de $\Omega(4^n/n)$ por lo que es inviable en la práctica para n medianos



- el problema entonces consiste en encontrar todas las **parentizaciones** posibles para M_1, M_2, \dots, M_n , evaluar la cantidad de productos necesarios, y obtener el menor entre todos ellos
- la cantidad de parentizaciones posibles está definida por la recurrencia

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i)$$

con $T(1) = 1$

- los $T(n)$ forman los llamados **números de Catalan** y se puede probar que $T(n) \in \Omega(4^n/n^2)$ por inducción
- luego el algoritmo directo toma tiempo de $\Omega(4^n/n)$ por lo que es inviable en la práctica para n medianos



- el problema entonces consiste en encontrar todas las **parentizaciones** posibles para M_1, M_2, \dots, M_n , evaluar la cantidad de productos necesarios, y obtener el menor entre todos ellos
- la cantidad de parentizaciones posibles está definida por la recurrencia

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i)$$

con $T(1) = 1$

- los $T(n)$ forman los llamados **números de Catalan** y se puede probar que $T(n) \in \Omega(4^n/n^2)$ por inducción
- luego el algoritmo directo toma tiempo de $\Omega(4^n/n)$ por lo que es inviable en la práctica para n medianos



- el problema entonces consiste en encontrar todas las **parentizaciones** posibles para M_1, M_2, \dots, M_n , evaluar la cantidad de productos necesarios, y obtener el menor entre todos ellos
- la cantidad de parentizaciones posibles está definida por la recurrencia

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i)$$

con $T(1) = 1$

- los $T(n)$ forman los llamados **números de Catalan** y se puede probar que $T(n) \in \Omega(4^n/n^2)$ por inducción
- luego el algoritmo directo toma tiempo de $\Omega(4^n/n)$ por lo que es inviable en la práctica para n medianos



- este problema satisface el principio de optimalidad
- y tiene también superposición de instancias
- es posible entonces aplicar PD



- este problema satisface el **principio de optimalidad**
- y tiene también **superposición de instancias**
- es posible entonces aplicar PD



- este problema satisface el principio de optimalidad
- y tiene también superposición de instancias
- es posible entonces aplicar PD



- este problema satisface el **principio de optimalidad**
- y tiene también **superposición de instancias**
- es posible entonces aplicar PD



- la función a optimizar es la **cantidad de productos de reales** necesarios para multiplicar una secuencia de matrices. este valor depende de la cantidad de productos necesarios para multiplicar subsecuencias de matrices
- se define $m_{ij}, i \leq j$ como la mínima cantidad de productos necesarios para calcular $M_i \dots M_j$. Claramente, si $i = j$ entonces $m_{ii} = 0$ y si $j = i + 1$ entonces $m_{ii+1} = d_{i-1} d_i d_{i+1}$
- en general, si $i < j$

$$m_{ij} = \min_{i \leq k < j} (m_{ik} + m_{(k+1)j} + d_{i-1} d_k d_j)$$



- la función a optimizar es la **cantidad de productos de reales** necesarios para multiplicar una secuencia de matrices. este valor depende de la cantidad de productos necesarios para multiplicar subsecuencias de matrices
- se define $m_{ij}, i \leq j$ como la mínima cantidad de productos necesarios para calcular $M_i \dots M_j$. Claramente, si $i = j$ entonces $m_{ii} = 0$ y si $j = i + 1$ entonces $m_{ii+1} = d_{i-1} d_i d_{i+1}$
- en general, si $i < j$

$$m_{ij} = \min_{i \leq k < j} (m_{ik} + m_{(k+1)j} + d_{i-1} d_k d_j)$$



- la función a optimizar es la **cantidad de productos de reales** necesarios para multiplicar una secuencia de matrices. este valor depende de la cantidad de productos necesarios para multiplicar subsecuencias de matrices
- se define $m_{ij}, i \leq j$ como la mínima cantidad de productos necesarios para calcular $M_i \dots M_j$. Claramente, si $i = j$ entonces $m_{ii} = 0$ y si $j = i + 1$ entonces $m_{ii+1} = d_{i-1} d_i d_{i+1}$
- en general, si $i < j$

$$m_{ij} = \min_{i \leq k < j} (m_{ik} + m_{(k+1)j} + d_{i-1} d_k d_j)$$



- la función a optimizar es la **cantidad de productos de reales** necesarios para multiplicar una secuencia de matrices. este valor depende de la cantidad de productos necesarios para multiplicar subsecuencias de matrices
- se define $m_{ij}, i \leq j$ como la mínima cantidad de productos necesarios para calcular $M_i \dots M_j$. Claramente, si $i = j$ entonces $m_{ii} = 0$ y si $j = i + 1$ entonces $m_{i,i+1} = d_{i-1} d_i d_{i+1}$
- en general, si $i < j$

$$m_{ij} = \min_{i \leq k < j} (m_{ik} + m_{(k+1)j} + d_{i-1} d_k d_j)$$



- por ejemplo, si $d = (10, 5, 20, 30, 2)$:

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0	1000	4500	1500
2		0	3000	1400
3			0	1200
4				0

$$\begin{aligned}
 m_{13} &= \min(m_{12} + m_{33} + d_0 d_2 d_3, m_{11} + m_{23} + d_0 d_1 d_3) = \\
 &= \min(1000 + 6000, 3000 + 1500) = 4500
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{24} &= \min(m_{23} + m_{44} + d_1 d_3 d_4, m_{22} + m_{34} + d_1 d_2 d_4) = \\
 &= \min(3000 + 300, 1200 + 200) = 1400
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{14} &= \min(m_{11} + m_{24} + d_0 d_1 d_4, m_{12} + m_{34} + d_0 d_2 d_4, \\
 &\quad m_{13} + m_{44} + d_0 d_3 d_4) = \\
 &= \min(1400 + 100, 1200 + 1000 + 400, 4500 + 600) = 1500
 \end{aligned}$$



- por ejemplo, si $d = (10, 5, 20, 30, 2)$:

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0	1000	4500	1500
2		0	3000	1400
3			0	1200
4				0

$$\begin{aligned} m_{13} &= \min(m_{12} + m_{33} + d_0 d_2 d_3, m_{11} + m_{23} + d_0 d_1 d_3) = \\ &= \min(1000 + 6000, 3000 + 1500) = 4500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{24} &= \min(m_{23} + m_{44} + d_1 d_3 d_4, m_{22} + m_{34} + d_1 d_2 d_4) = \\ &= \min(3000 + 300, 1200 + 200) = 1400 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{14} &= \min(m_{11} + m_{24} + d_0 d_1 d_4, m_{12} + m_{34} + d_0 d_2 d_4, \\ &\quad m_{13} + m_{44} + d_0 d_3 d_4) = \\ &= \min(1400 + 100, 1200 + 1000 + 400, 4500 + 600) = 1500 \end{aligned}$$



- por ejemplo, si $d = (10, 5, 20, 30, 2)$:

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0	1000	4500	1500
2		0	3000	1400
3			0	1200
4				0

$$\begin{aligned} m_{13} &= \min(m_{12} + m_{33} + d_0 d_2 d_3, m_{11} + m_{23} + d_0 d_1 d_3) = \\ &= \min(1000 + 6000, 3000 + 1500) = 4500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{24} &= \min(m_{23} + m_{44} + d_1 d_3 d_4, m_{22} + m_{34} + d_1 d_2 d_4) = \\ &= \min(3000 + 300, 1200 + 200) = 1400 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{14} &= \min(m_{11} + m_{24} + d_0 d_1 d_4, m_{12} + m_{34} + d_0 d_2 d_4, \\ &\quad m_{13} + m_{44} + d_0 d_3 d_4) = \\ &= \min(1400 + 100, 1200 + 1000 + 400, 4500 + 600) = 1500 \end{aligned}$$



Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])  
  array m[1..n,1..n]::=0;  
  FOR s::=1 TO n-1  
    FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint  
      FOR k::=i TO i+s-1  
        tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]  
        IF tmp<menor THEN menor::=tmp  
      ENDFOR  
      m[i,i+s]::=menor  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN m[1,n]
```



Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])  
  array m[1..n,1..n]::=0;  
  FOR s::=1 TO n-1  
    FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint  
      FOR k::=i TO i+s-1  
        tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]  
        IF tmp<menor THEN menor::=tmp  
      ENDFOR  
      m[i,i+s]::=menor  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN m[1,n]
```



Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])  
  array m[1..n,1..n]::=0;  
  FOR s::=1 TO n-1  
    FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint  
      FOR k::=i TO i+s-1  
        tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]  
        IF tmp<menor THEN menor::=tmp  
      ENDFOR  
      m[i,i+s]::=menor  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN m[1,n]
```



Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])  
  array m[1..n,1..n]::=0;  
  FOR s::=1 TO n-1  
    FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint  
      FOR k::=i TO i+s-1  
        tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]  
        IF tmp<menor THEN menor::=tmp  
      ENDFOR  
      m[i,i+s]::=menor  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN m[1,n]
```



Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])  
  array m[1..n,1..n]::=0;  
  FOR s::=1 TO n-1  
    FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint  
      FOR k::=i TO i+s-1  
        tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]  
        IF tmp<menor THEN menor::=tmp  
      ENDFOR  
      m[i,i+s]::=menor  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN m[1,n]
```



Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])  
  array m[1..n,1..n]::=0;  
  FOR s::=1 TO n-1  
    FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint  
      FOR k::=i TO i+s-1  
        tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]  
        IF tmp<menor THEN menor::=tmp  
      ENDFOR  
      m[i,i+s]::=menor  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN m[1,n]
```



Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])  
  array m[1..n,1..n]::=0;  
  FOR s::=1 TO n-1  
    FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint  
      FOR k::=i TO i+s-1  
        tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]  
        IF tmp<menor THEN menor::=tmp  
      ENDFOR  
      m[i,i+s]::=menor  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN m[1,n]
```



Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])  
  array m[1..n,1..n]::=0;  
  FOR s::=1 TO n-1  
    FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint  
      FOR k::=i TO i+s-1  
        tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]  
        IF tmp<menor THEN menor::=tmp  
      ENDFOR  
      m[i,i+s]::=menor  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN m[1,n]
```



Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])  
  array m[1..n,1..n]::=0;  
  FOR s::=1 TO n-1  
    FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint  
      FOR k::=i TO i+s-1  
        tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]  
        IF tmp<menor THEN menor::=tmp  
      ENDFOR  
      m[i,i+s]::=menor  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN m[1,n]
```



Algoritmo

```
function MultMatrices(d[0..n])  
  array m[1..n,1..n]::=0;  
  FOR s::=1 TO n-1  
    FOR i::=1 TO n-s; menor::= +maxint  
      FOR k::=i TO i+s-1  
        tmp::=m[i,k]+m[k+1,i+s]+d[i-1]*d[k]*d[i+s]  
        IF tmp<menor THEN menor::=tmp  
      ENDFOR  
      m[i,i+s]::=menor  
    ENDFOR  
  ENDFOR  
  RETURN m[1,n]
```



- el tiempo ejecución, tomando como barómetro cualquiera de la sentencias del ciclo interno, es:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} \sum_{k=i}^{i+s-1} c = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} sc = \\
 &= c \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} s = c \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)s = nc \sum_{s=1}^{n-1} s - c \sum_{s=1}^{n-1} s^2 = \\
 &= n \frac{c}{2} (n-1)n - (n-1)n(2n-1) \frac{c}{6} = \frac{c}{6} n^3 - \frac{c}{6} n \\
 &\in \Theta(n^3)
 \end{aligned}$$

- para obtener cuál es la mejor forma de multiplicar la matrices, es suficiente con recordar para cada (i, j) cuál es el k que determinó su menor valor (**ejercicio**).
- existen algoritmos más eficientes para este problema



- el tiempo ejecución, tomando como barómetro cualquiera de la sentencias del ciclo interno, es:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} \sum_{k=i}^{i+s-1} c = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} sc = \\
 &= c \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} s = c \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)s = nc \sum_{s=1}^{n-1} s - c \sum_{s=1}^{n-1} s^2 = \\
 &= n \frac{c}{2} (n-1)n - (n-1)n(2n-1) \frac{c}{6} = \frac{c}{6} n^3 - \frac{c}{6} n \\
 &\in \Theta(n^3)
 \end{aligned}$$

- para obtener cuál es la mejor forma de multiplicar la matrices, es suficiente con recordar para cada (i, j) cuál es el k que determinó su menor valor (**ejercicio**).
- existen algoritmos más eficientes para este problema



- el tiempo ejecución, tomando como barómetro cualquiera de la sentencias del ciclo interno, es:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} \sum_{k=i}^{i+s-1} c = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} sc = \\
 &= c \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} s = c \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)s = nc \sum_{s=1}^{n-1} s - c \sum_{s=1}^{n-1} s^2 = \\
 &= n \frac{c}{2} (n-1)n - (n-1)n(2n-1) \frac{c}{6} = \frac{c}{6} n^3 - \frac{c}{6} n \\
 &\in \Theta(n^3)
 \end{aligned}$$

- para obtener cuál es la mejor forma de multiplicar la matrices, es suficiente con recordar para cada (i, j) cuál es el k que determinó su menor valor (**ejercicio**).
- existen algoritmos más eficientes para este problema



- el tiempo ejecución, tomando como barómetro cualquiera de la sentencias del ciclo interno, es:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} \sum_{k=i}^{i+s-1} c = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} sc = \\
 &= c \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-s} s = c \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)s = nc \sum_{s=1}^{n-1} s - c \sum_{s=1}^{n-1} s^2 = \\
 &= n \frac{c}{2} (n-1)n - (n-1)n(2n-1) \frac{c}{6} = \frac{c}{6} n^3 - \frac{c}{6} n \\
 &\in \Theta(n^3)
 \end{aligned}$$

- para obtener cuál es la mejor forma de multiplicar la matrices, es suficiente con recordar para cada (i, j) cuál es el k que determinó su menor valor (**ejercicio**).
- existen algoritmos más eficientes para este problema



Programación Dinámica

- 1 Introducción
- 2 Problema de la mochila
- 3 Caminos más Cortos entre todo par
- 4 Multiplicación de matrices en cadena
- 5 Triangulación optimal de polígonos**
- 6 Subsecuencia común más larga



Definición del problema

- el algoritmo anterior tiene muchas aplicaciones, no directamente relacionadas con la multiplicación de matrices. Por ejemplo, para la **triangularización de polígonos**
- Problema: se tiene un polígono convexo $\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ de n lados, siendo v_i los vértices y $\overline{v_{i-1} v_i}$ el lado i . Se quiere encontrar una triangulación optimal, de acuerdo a algún criterio dado



Definición del problema

- el algoritmo anterior tiene muchas aplicaciones, no directamente relacionadas con la multiplicación de matrices. Por ejemplo, para la **triangularización de polígonos**
- Problema: se tiene un polígono convexo $\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ de n lados, siendo v_i los vértices y $\overline{v_{i-1}v_i}$ el lado i . Se quiere encontrar una triangulación optimal, de acuerdo a algún criterio dado



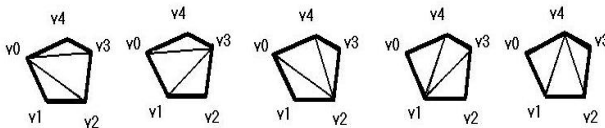
Definición del problema

- el algoritmo anterior tiene muchas aplicaciones, no directamente relacionadas con la multiplicación de matrices. Por ejemplo, para la [triangularización de polígonos](#)
- Problema: se tiene un polígono convexo $\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ de n lados, siendo v_i los vértices y $\overline{v_{i-1}v_i}$ el lado i . Se quiere encontrar una triangulación optimal, de acuerdo a algún criterio dado



Definición del problema

- el algoritmo anterior tiene muchas aplicaciones, no directamente relacionadas con la multiplicación de matrices. Por ejemplo, para la **triangularización de polígonos**
- Problema: se tiene un polígono convexo $\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ de n lados, siendo v_i los vértices y $\overline{v_{i-1} v_i}$ el lado i . Se quiere encontrar una triangulación óptima, de acuerdo a algún criterio dado



- una **cuerda** $\overline{v_i v_j}$ es el segmento formado por un par de vértice no adyacentes
- toda cuerda divide al polígono en dos subpolígonos
- una **triangularización** es un conjunto de cuerdas que dividen al polígono en triángulos disjuntos
- si se tiene un peso $w(\triangle v_i v_j v_k)$ para cada triángulo $\triangle v_i v_j v_k$, entonces una triangularización optimal de un polígono es una triangularización que minimiza la sumatoria de los pesos de los triángulos resultantes



- una **cuerda** $\overline{v_i v_j}$ es el segmento formado por un par de vértice no adyacentes
- toda cuerda divide al polígono en dos subpolígonos
- una **triangularización** es un conjunto de cuerdas que dividen al polígono en triángulos disjuntos
- si se tiene un peso $w(\triangle v_i v_j v_k)$ para cada triángulo $\triangle v_i v_j v_k$, entonces una triangularización optimal de un polígono es una triangularización que minimiza la sumatoria de los pesos de los triángulos resultantes



- una **cuerda** $\overline{v_i v_j}$ es el segmento formado por un par de vértice no adyacentes
- toda cuerda divide al polígono en dos subpolígonos
- una **triangularización** es un conjunto de cuerdas que dividen al polígono en triángulos disjuntos
- si se tiene un peso $w(\triangle v_i v_j v_k)$ para cada triángulo $\triangle v_i v_j v_k$, entonces una triangularización optimal de un polígono es una triangularización que minimiza la sumatoria de los pesos de los triángulos resultantes



- una **cuerda** $\overline{v_i v_j}$ es el segmento formado por un par de vértice no adyacentes
- toda cuerda divide al polígono en dos subpolígonos
- una **triangularización** es un conjunto de cuerdas que dividen al polígono en triángulos disjuntos
- si se tiene un peso $w(\triangle v_i v_j v_k)$ para cada triángulo $\triangle v_i v_j v_k$, entonces una triangularización optimal de un polígono es una triangularización que minimiza la sumatoria de los pesos de los triángulos resultantes



- una **cuerda** $\overline{v_i v_j}$ es el segmento formado por un par de vértice no adyacentes
- toda cuerda divide al polígono en dos subpolígonos
- una **triangularización** es un conjunto de cuerdas que dividen al polígono en triángulos disjuntos
- si se tiene un peso $w(\triangle v_i v_j v_k)$ para cada triángulo $\triangle v_i v_j v_k$, entonces una triangularización optimal de un polígono es una triangularización que minimiza la sumatoria de los pesos de los triángulos resultantes



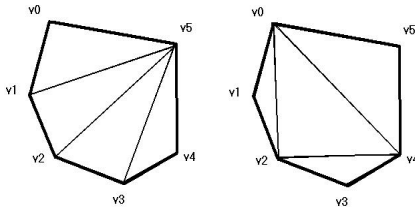
- una función común para pesar los triángulos es su perímetro:
 $w(\triangle v_i v_j v_k) = |v_i v_j| + |v_j v_k| + |v_k v_i|$. Otras pueden usarse
- cada triangularización de un polígono de n lados consta de $n - 3$ cuerdas y $n - 2$ triángulos (**ejercicio**)



- una función común para pesar los triángulos es su perímetro:
 $w(\triangle v_i v_j v_k) = |v_i v_j| + |v_j v_k| + |v_k v_i|$. Otras pueden usarse
- cada triangularización de un polígono de n lados consta de $n - 3$ cuerdas y $n - 2$ triángulos (ejercicio)



- una función común para pesar los triángulos es su perímetro:
 $w(\triangle v_i v_j v_k) = |v_i v_j| + |v_j v_k| + |v_k v_i|$. Otras pueden usarse
- cada triangularización de un polígono de n lados consta de $n - 3$ cuerdas y $n - 2$ triángulos ([ejercicio](#))



Reducción

- la estructura de este problema es similar a la de la **multiplicación cadena de matrices**
- se define una **reducción TRIANGULARIZACIÓN** \longrightarrow **CADENAMATRICES**
- dado un polígono $\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$, se establece una **correspondencia** entre los lados (excepto $\overline{v_{n-1}v_0}$) y “matrices” A_i , cuyo “tamaño” es $v_{i-1}v_i$ y con “tiempo de multiplicación” $w(\triangle v_i v_j v_k)$



Reducción

- la estructura de este problema es similar a la de la **multiplicación cadena de matrices**
- se define una **reducción TRIANGULARIZACIÓN** \longrightarrow **CADENAMATRICES**
- dado un polígono $\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$, se establece una **correspondencia** entre los lados (excepto $\overline{v_{n-1}v_0}$) y “matrices” A_i , cuyo “tamaño” es $v_{i-1}v_i$ y con “tiempo de multiplicación” $w(\triangle v_i v_j v_k)$



Reducción

- la estructura de este problema es similar a la de la **multiplicación cadena de matrices**
- se define una **reducción TRIANGULARIZACIÓN** \longrightarrow **CADENAMATRICES**
- dado un polígono $\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$, se establece una **correspondencia** entre los lados (excepto $\overline{v_{n-1}v_0}$) y “matrices” A_i , cuyo “tamaño” es $v_{i-1}v_i$ y con “tiempo de multiplicación” $w(\triangle v_i v_j v_k)$



Reducción

- la estructura de este problema es similar a la de la **multiplicación cadena de matrices**
- se define una **reducción TRIANGULARIZACIÓN** \longrightarrow **CADENAMATRICES**
- dado un polígono $\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$, se establece una **correspondencia** entre los lados (excepto $\overline{v_{n-1}v_0}$) y “matrices” A_i , cuyo “tamaño” es $v_{i-1}v_i$ y con “tiempo de multiplicación” $w(\triangle v_i v_j v_k)$



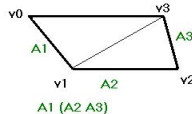
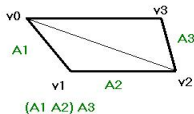
- luego cada forma de multiplicar las matrices $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ corresponde a una triangularización del polígono



- luego cada forma de multiplicar las matrices $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ corresponde a una triangularización del polígono



- luego cada forma de multiplicar las matrices $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ corresponde a una triangulación del polígono



- en el algoritmo, simplemente se reemplaza el costo de cada producto individual. Para las matrices era $d_i * d_j * d_k$, mientras que para la triangularización es $w(\triangle v_i v_j v_k)$

$temp := m[i, k] + m[k+1, i+s] + w(v[i], v[j], v[k])$



- en el algoritmo, simplemente se reemplaza el costo de cada producto individual. Para las matrices era $d_i * d_j * d_k$, mientras que para la triangularización es $w(\triangle v_i v_j v_k)$

```
temp := m[i, k] + m[k+1, i+s] + w(v[i], v[j], v[k])
```



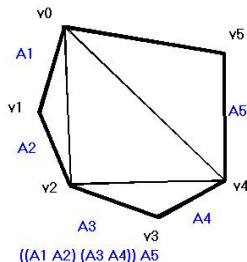
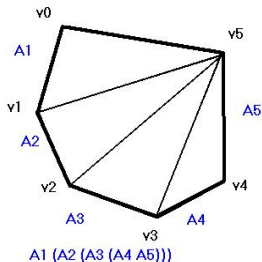
- en el algoritmo, simplemente se reemplaza el costo de cada producto individual. Para las matrices era $d_i * d_j * d_k$, mientras que para la triangularización es $w(\triangle v_i v_j v_k)$

$temp := m[i, k] + m[k+1, i+s] + w(v[i], v[j], v[k])$



- en el algoritmo, simplemente se reemplaza el costo de cada producto individual. Para las matrices era $d_i * d_j * d_k$, mientras que para la triangulación es $w(\triangle v_i v_j v_k)$

$temp := m[i, k] + m[k+1, i+s] + w(v[i], v[j], v[k])$



Programación Dinámica

- 1 Introducción
- 2 Problema de la mochila
- 3 Caminos más Cortos entre todo par
- 4 Multiplicación de matrices en cadena
- 5 Triangulación optimal de polígonos
- 6 Subsecuencia común más larga



- en bioinformática, es frecuente la necesidad de comparar el ADN de dos o más organismos
- una secuencia de ADN se representa como una cadena en la letras que representan cada una de las bases posible: A (adenina), G (guanina), C (citosina) y T (tiamina). Ejemplo: ACCGGTCGGGATGCACCTGAGAAAGCGG
- un posible criterio de “similitud” entre secuencias de DNA es encontrar la **subsecuencia común más larga** de bases que aparezca en las secuencias aún en forma no consecutiva
- por ejemplo, para AGCGTAG y GTCAGA la subsecuencia común más larga es GCGA
- no es lo mismo que la subcadena más larga, ya que se permiten otros caracteres en el medio



- en bioinformática, es frecuente la necesidad de comparar el ADN de dos o más organismos
- una secuencia de ADN se representa como una cadena en la letras que representan cada una de las bases posible: A (adenina), G (guanina), C (citosina) y T (tiamina). Ejemplo: ACCGGTCGGGATGCACCTGAGAAAGCGG
- un posible criterio de “similitud” entre secuencias de DNA es encontrar la **subsecuencia común más larga** de bases que aparezca en las secuencias aún en forma no consecutiva
- por ejemplo, para AGCGTAG y GTCAGA la subsecuencia común más larga es GCGA
- no es lo mismo que la subcadena más larga, ya que se permiten otros caracteres en el medio



- en bioinformática, es frecuente la necesidad de comparar el ADN de dos o más organismos
- una secuencia de ADN se representa como una cadena en la letras que representan cada una de las bases posible: A (adenina), G (guanina), C (citosina) y T (tiamina). Ejemplo: ACCGGTCGGGATGCACCTGAGAAAGCGG
- un posible criterio de “similitud” entre secuencias de DNA es encontrar la **subsecuencia común más larga** de bases que aparezca en las secuencias aún en forma no consecutiva
- por ejemplo, para AGCGTAG y GTCAGA la subsecuencia común más larga es GCGA
- no es lo mismo que la subcadena más larga, ya que se permiten otros caracteres en el medio



- en bioinformática, es frecuente la necesidad de comparar el ADN de dos o más organismos
- una secuencia de ADN se representa como una cadena en la letras que representan cada una de las bases posible: A (adenina), G (guanina), C (citosina) y T (tiamina). Ejemplo: ACCGGTCGGGATGCACCTGAGAAAGCGG
- un posible criterio de “similitud” entre secuencias de DNA es encontrar la **subsecuencia común más larga** de bases que aparezca en las secuencias aún en forma no consecutiva
- por ejemplo, para AGCGTAG y GTCAGA la subsecuencia común más larga es GCGA
- no es lo mismo que la subcadena más larga, ya que se permiten otros caracteres en el medio



- en bioinformática, es frecuente la necesidad de comparar el ADN de dos o más organismos
- una secuencia de ADN se representa como una cadena en la letras que representan cada una de las bases posible: A (adenina), G (guanina), C (citosina) y T (tiamina). Ejemplo: ACCGGTCGGGATGCACCTGAGAAAGCGG
- un posible criterio de “similitud” entre secuencias de DNA es encontrar la **subsecuencia común más larga** de bases que aparezca en las secuencias aún en forma no consecutiva
- por ejemplo, para AGCGTAG y GTCAGA la subsecuencia común más larga es GCGA
- no es lo mismo que la subcadena más larga, ya que se permiten otros caracteres en el medio



- en bioinformática, es frecuente la necesidad de comparar el ADN de dos o más organismos
- una secuencia de ADN se representa como una cadena en la letras que representan cada una de las bases posible: A (adenina), G (guanina), C (citosina) y T (tiamina). Ejemplo: ACCGGTCGGGATGCACCTGAGAAAGCGG
- un posible criterio de “similitud” entre secuencias de DNA es encontrar la **subsecuencia común más larga** de bases que aparezca en las secuencias aún en forma no consecutiva
- por ejemplo, para AGCGTAG y GTCAGA la subsecuencia común más larga es GCGA
- no es lo mismo que la subcadena más larga, ya que se permiten otros caracteres en el medio



Formalización del problema

- formalmente, dadas una secuencia $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$, otra secuencia $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ es una **subsecuencia** si existe una secuencia creciente de índices i_1, i_2, \dots, i_k tal que $x_{i_j} = z_j$ para todo $j, 1 \leq j \leq k$
- ejemplo, para $X = \langle A, G, C, G, T, A, G \rangle$, $Z = \langle G, C, T, G \rangle$ es una subsecuencia con índices 2, 3, 5, 7
- dadas dos secuencias X, Y se dice que Z es una **subsecuencia común** de X, Y si Z es subsecuencia de X y Z es subsecuencia de Y
- dadas dos secuencias X, Y el problema de la **subsecuencia común más larga (LCS)** es el problema de encontrar una subsecuencia común de longitud máxima para X, Y



Formalización del problema

- formalmente, dadas una secuencia $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$, otra secuencia $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ es una **subsecuencia** si existe una secuencia creciente de índices i_1, i_2, \dots, i_k tal que $x_{i_j} = z_j$ para todo $j, 1 \leq j \leq k$
- ejemplo, para $X = \langle A, G, C, G, T, A, G \rangle$, $Z = \langle G, C, T, G \rangle$ es una subsecuencia con índices 2, 3, 5, 7
- dadas dos secuencias X, Y se dice que Z es una **subsecuencia común** de X, Y si Z es subsecuencia de X y Z es subsecuencia de Y
- dadas dos secuencias X, Y el problema de la **subsecuencia común más larga (LCS)** es el problema de encontrar una subsecuencia común de longitud máxima para X, Y



Formalización del problema

- formalmente, dadas una secuencia $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$, otra secuencia $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ es una **subsecuencia** si existe una secuencia creciente de índices i_1, i_2, \dots, i_k tal que $x_{i_j} = z_j$ para todo $j, 1 \leq j \leq k$
- ejemplo, para $X = \langle A, G, C, G, T, A, G \rangle$, $Z = \langle G, C, T, G \rangle$ es una subsecuencia con índices 2, 3, 5, 7
- dadas dos secuencias X, Y se dice que Z es una **subsecuencia común** de X, Y si Z es subsecuencia de X y Z es subsecuencia de Y
- dadas dos secuencias X, Y el problema de la **subsecuencia común más larga (LCS)** es el problema de encontrar una subsecuencia común de longitud máxima para X, Y



Formalización del problema

- formalmente, dadas una secuencia $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$, otra secuencia $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ es una **subsecuencia** si existe una secuencia creciente de índices i_1, i_2, \dots, i_k tal que $x_{i_j} = z_j$ para todo $j, 1 \leq j \leq k$
- ejemplo, para $X = \langle A, G, C, G, T, A, G \rangle$, $Z = \langle G, C, T, G \rangle$ es una subsecuencia con índices 2, 3, 5, 7
- dadas dos secuencias X, Y se dice que Z es una **subsecuencia común** de X, Y si Z es subsecuencia de X y Z es subsecuencia de Y
- dadas dos secuencias X, Y el problema de la **subsecuencia común más larga (LCS)** es el problema de encontrar una subsecuencia común de longitud máxima para X, Y



Formalización del problema

- formalmente, dadas una secuencia $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$, otra secuencia $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ es una **subsecuencia** si existe una secuencia creciente de índices i_1, i_2, \dots, i_k tal que $x_{i_j} = z_j$ para todo $j, 1 \leq j \leq k$
- ejemplo, para $X = \langle A, G, C, G, T, A, G \rangle$, $Z = \langle G, C, T, G \rangle$ es una subsecuencia con índices 2, 3, 5, 7
- dadas dos secuencias X, Y se dice que Z es una **subsecuencia común** de X, Y si Z es subsecuencia de X y Z es subsecuencia de Y
- dadas dos secuencias X, Y el problema de la **subsecuencia común más larga (LCS)** es el problema de encontrar una subsecuencia común de longitud máxima para X, Y



Estructura optimal

- un algoritmo de fuerza bruta para resolver LCS es enumerar todas las posibles subsecuencias de X , controlar si también es subsecuencia de Y , y recordar la más larga de ellas
- este algoritmo es de $O(2^m)$, y por lo tanto inviable para m grandes
- sin embargo, es posible comprobar que LCS tiene una subestructura optimal



Estructura optimal

- un algoritmo de fuerza bruta para resolver LCS es enumerar todas las posibles subsecuencias de X , controlar si también es subsecuencia de Y , y recordar la más larga de ellas
- este algoritmo es de $O(2^m)$, y por lo tanto inviable para m grandes
- sin embargo, es posible comprobar que LCS tiene una subestructura optimal



Estructura optimal

- un algoritmo de fuerza bruta para resolver LCS es enumerar todas las posibles subsecuencias de X , controlar si también es subsecuencia de Y , y recordar la más larga de ellas
- este algoritmo es de $O(2^m)$, y por lo tanto inviable para m grandes
- sin embargo, es posible comprobar que LCS tiene una subestructura optimal



Estructura optimal

- un algoritmo de fuerza bruta para resolver LCS es enumerar todas las posibles subsecuencias de X , controlar si también es subsecuencia de Y , y recordar la más larga de ellas
- este algoritmo es de $O(2^m)$, y por lo tanto inviable para m grandes
- sin embargo, es posible comprobar que LCS tiene una subestructura optimal



Subestructura optimal de LCS

Teorema 1

Sean $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$. Luego si $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ es LCS de X, Y y

- $x_m = y_n$, entonces Z_{k-1} es LCS de X_{m-1}, Y_{n-1}*
- $x_m \neq y_m$ y $z_k \neq x_m$, entonces Z es LCS de X_{m-1}, Y*
- $x_m \neq y_m$ y $z_k \neq y_n$, entonces Z es LCS de X, Y_{n-1}*

Demostración.

Se prueban los tres puntos por el absurdo, llegando en todos los casos a mostrar que Z no es LCS de X, Y . □



Subestructura optimal de LCS

Teorema 1

Sean $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$. Luego si $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ es LCS de X, Y y

- $x_m = y_n$, entonces Z_{k-1} es LCS de X_{m-1}, Y_{n-1}
- $x_m \neq y_m$ y $z_k \neq x_m$, entonces Z es LCS de X_{m-1}, Y
- $x_m \neq y_m$ y $z_k \neq y_n$, entonces Z es LCS de X, Y_{n-1}

Demostración.

Se prueban los tres puntos por el absurdo, llegando en todos los casos a mostrar que Z no es LCS de X, Y . □



Subestructura optimal de LCS

Teorema 1

Sean $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$. Luego si $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ es LCS de X, Y y

- $x_m = y_n$, entonces Z_{k-1} es LCS de X_{m-1}, Y_{n-1}
- $x_m \neq y_n$ y $z_k \neq x_m$, entonces Z es LCS de X_{m-1}, Y
- $x_m \neq y_n$ y $z_k \neq y_n$, entonces Z es LCS de X, Y_{n-1}

Demostración.

Se prueban los tres puntos por el absurdo, llegando en todos los casos a mostrar que Z no es LCS de X, Y . □



Solución recursiva

- el teorema anterior sugiere la siguiente recurrencia para resolver LCS, siendo $C[i, j]$ el LCS de X_i, Y_j

$$C[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ o } j = 0 \\ C[i-1, j-1] + 1 & \text{si } i > 0, j > 0 \text{ y } x_i = y_j \\ \max(C[i-1, j], C[i, j-1]) & \text{si } i > 0, j > 0 \text{ y } x_i \neq y_j \end{cases}$$

- se puede ver fácilmente que existe superposición de problemas



Solución recursiva

- el teorema anterior sugiere la siguiente recurrencia para resolver LCS, siendo $C[i, j]$ el LCS de X_i, Y_j

$$C[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ o } j = 0 \\ C[i-1, j-1] + 1 & \text{si } i > 0, j > 0 \text{ y } x_i = y_j \\ \max(C[i-1, j], C[i, j-1]) & \text{si } i > 0, j > 0 \text{ y } x_i \neq y_j \end{cases}$$

- se puede ver fácilmente que existe superposición de problemas



Solución recursiva

- el teorema anterior sugiere la siguiente recurrencia para resolver LCS, siendo $C[i, j]$ el LCS de X_i, Y_j

$$C[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ o } j = 0 \\ C[i - 1, j - 1] + 1 & \text{si } i > 0, j > 0 \text{ y } x_i = y_j \\ \max(C[i - 1, j], C[i, j - 1]) & \text{si } i > 0, j > 0 \text{ y } x_i \neq y_j \end{cases}$$

- se puede ver fácilmente que existe superposición de problemas



Solución recursiva

- el teorema anterior sugiere la siguiente recurrencia para resolver LCS, siendo $C[i, j]$ el LCS de X_i, Y_j

$$C[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ o } j = 0 \\ C[i - 1, j - 1] + 1 & \text{si } i > 0, j > 0 \text{ y } x_i = y_j \\ \max(C[i - 1, j], C[i, j - 1]) & \text{si } i > 0, j > 0 \text{ y } x_i \neq y_j \end{cases}$$

- se puede ver fácilmente que existe superposición de problemas



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i::=1 TO m  
    FOR j::=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i::=1 TO m  
    FOR j::=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i:=1 TO m  
    FOR j:=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i::=1 TO m  
    FOR j::=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i::=1 TO m  
    FOR j::=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i::=1 TO m  
    FOR j::=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i::=1 TO m  
    FOR j::=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i::=1 TO m  
    FOR j::=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i::=1 TO m  
    FOR j::=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i::=1 TO m  
    FOR j::=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Algoritmo

```
function LCS(X[1..m], Y[1..n])  
  array C[1..m,1..n]::=0  
  FOR i::=1 TO m  
    FOR j::=1 TO n  
      IF X[i]==Y[j]  
        C[i,j]::=C[i-1,j-1]+1  
      ELSIF C[i-1,j]>=C[i,j-1]  
        C[i,j]::=C[i-1,j]  
      ELSE  
        C[i,j]::=C[i,j-1]  
      ENDIF  
    ENDFOR  
  ENDFOR ; RETURN C[m,n]
```



Análisis del algoritmo

- el algoritmo anterior es de tiempo y espacio en $O(mn)$
- **Ejercicio:** retornar no sólo la longitud de la LCS entre dos cadenas, sino también una cadena que sea la LCS
- **Ejercicio:** ¿cómo modificaría el algoritmo para que compute **todas** las LCS entre dos cadenas, sin aumentar el orden del tiempo ni espacio?



Análisis del algoritmo

- el algoritmo anterior es de tiempo y espacio en $O(mn)$
- **Ejercicio:** retornar no sólo la longitud de la LCS entre dos cadenas, sino también una cadena que sea la LCS
- **Ejercicio:** ¿cómo modificaría el algoritmo para que compute **todas** las LCS entre dos cadenas, sin aumentar el orden del tiempo ni espacio?



Análisis del algoritmo

- el algoritmo anterior es de tiempo y espacio en $O(mn)$
- **Ejercicio:** retornar no sólo la longitud de la LCS entre dos cadenas, sino también una cadena que sea la LCS
- **Ejercicio:** ¿cómo modificaría el algoritmo para que compute *todas* las LCS entre dos cadenas, sin aumentar el orden del tiempo ni espacio?



Análisis del algoritmo

- el algoritmo anterior es de tiempo y espacio en $O(mn)$
- **Ejercicio:** retornar no sólo la longitud de la LCS entre dos cadenas, sino también una cadena que sea la LCS
- **Ejercicio:** ¿cómo modificaría el algoritmo para que compute **todas** las LCS entre dos cadenas, sin aumentar el orden del tiempo ni espacio?

