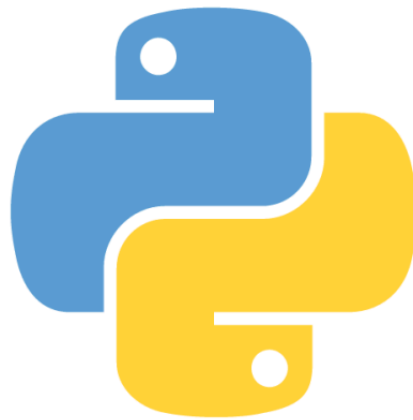


Ecuación de Laplace y Método de Relajación

2do Laboratorio Computacional



Grupo 13

Ferrante, Agustin Pedro

Giampietri, Gonzalo

Rosales Guinzburg, Santiago

Zarate, Eusebio Tomas

15/10/2024

Física II IS

Indice

Indice.....	1
Introduccion.....	2
Ecuación de Laplace.....	2
Método de Relajación.....	3
Discretización del espacio.....	3
Condiciones de borde.....	4
Condiciones de Dirichlet.....	4
Condiciones de Neumann.....	4
Iteraciones y Convergencia.....	4
Implementación.....	5
Función relajación.....	5
Condición de Neumann.....	6
Aplicación.....	6
Consignas.....	7
Distribución del potencial eléctrico de un capacitor de placas paralelas.....	7
Distribución del potencial eléctrico de un borne irregular.....	9
Análisis del comportamiento físico en función de las condiciones de borde.....	10

Introduccion

El objetivo de este trabajo práctico es determinar teóricamente las líneas equipotenciales en un sistema de conductores en equilibrio electrostático utilizando el método de relajación para resolver la ecuación de Laplace.

Se analizarán las diferencias y similitudes entre las condiciones de borde de Dirichlet y Neumann.

Ecuación de Laplace

El potencial electrostático, denotado por Φ , en ausencia de cargas libres verifica la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Dado que el campo electrostático E está relacionado con el potencial por $E = -\nabla\Phi$, la solución de la ecuación de Laplace en una región con condiciones de borde adecuadas nos permitirá obtener el potencial en cualquier punto dentro de la región de estudio.

Para resolver numéricamente esta ecuación, utilizaremos el método de relajación. Este método consiste en dividir la región de estudio en una malla de puntos y actualizar iterativamente el valor del potencial en cada punto como el promedio de los potenciales de sus puntos vecinos.

La ecuación de Laplace es una ecuación diferencial parcial fundamental en la física y se utiliza para describir fenómenos que ocurren en ausencia de cargas o fuentes externas, como el comportamiento del potencial electrostático en una región sin cargas libres. En dos dimensiones, la ecuación de Laplace se expresa como:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Esta ecuación establece que la suma de las derivadas segundas del potencial Φ con respecto a las coordenadas espaciales x e y debe ser cero en una región donde no existan cargas libres.

Método de Relajación

Resolver la ecuación de Laplace analíticamente en sistemas con geometrías complejas y condiciones de borde arbitrarias suele ser muy complicado o incluso imposible. En estos casos, se recurre a métodos numéricos, como el método de relajación, que permite obtener soluciones aproximadas de la ecuación aplicando iteraciones sucesivas en una malla de puntos.

El **método de relajación** se basa en una idea simple pero poderosa: dado que la ecuación de Laplace en dos dimensiones establece que la suma de las derivadas segundas debe ser cero, esto implica que el valor del potencial en un punto de una región dada es igual al promedio de los valores de los puntos vecinos que lo rodean. En términos numéricos, esto se traduce en la siguiente expresión aproximada para un punto en una malla bidimensional:

$$\Phi(i, j) \approx \frac{\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1)}{4}$$

$\Phi(i, j)$ representa el valor del potencial en el punto (i, j) de la malla, y $\Phi(i + 1, j)$, $\Phi(i - 1, j)$, $\Phi(i, j + 1)$ y $\Phi(i, j - 1)$ son los valores del potencial en los cuatro puntos vecinos más cercanos (derecha, izquierda, arriba y abajo, respectivamente).

Esta relación sugiere que para resolver numéricamente la ecuación de Laplace, podemos inicializar una malla con valores de potencial y luego ir ajustando el valor de cada punto como el promedio de sus vecinos, repitiendo este proceso hasta que los cambios en los valores de potencial sean lo suficientemente pequeños (es decir, hasta que la solución converja).

Discretización del espacio

Para aplicar el método de relajación, el espacio continuo se reemplaza por una malla discreta de puntos. En lugar de trabajar con derivadas continuas, trabajamos con diferencias finitas. Si consideramos una malla bidimensional con un espaciado uniforme $\Delta x = \Delta y = d$, podemos aproximar las derivadas parciales con diferencias finitas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2d}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j-1)}{2d}$$

Condiciones de borde

Para que el método de relajación funcione correctamente, es necesario imponer condiciones de borde, que definen cómo se comporta el potencial en los límites de la región de estudio. Existen dos tipos principales de condiciones de borde que se utilizan con frecuencia:

Condiciones de Dirichlet

Las condiciones de Dirichlet imponen valores fijos de potencial en los bordes de la región de análisis. En este caso, los potenciales en los bordes son conocidos, y no cambian durante las iteraciones del método de relajación.

Ejemplo, si tenemos un conductor conectado a un electrodo de una batería con un potencial fijo de 0V en un lado y 12V en el otro, estas serán las condiciones de Dirichlet. En este caso, se imponen valores fijos de 0V en el borde izquierdo y 12V en el borde derecho de la región a analizar

Condiciones de Neumann

Las condiciones de Neumann establecen que la derivada normal del potencial en el borde es igual a cero, lo que significa que no hay flujo de corriente a través del borde. En términos del campo eléctrico, esto implica que las líneas de campo eléctrico son tangentes al borde, y que las líneas equipotenciales son perpendiculares al borde.

En el método de relajación, para imponer condiciones de Neumann en los bordes, se requiere que el valor del potencial en una celda de borde sea igual al valor del potencial en su vecino inmediato. Por ejemplo, si (i, j) es un punto en el borde izquierdo, su valor se puede imponer como:

$$\Phi(0, j) = \Phi(1, j)$$

Este tipo de condición es útil cuando se quiere modelar una región donde el borde actúa como una barrera aislante.

Iteraciones y Convergencia

El método de relajación es un proceso iterativo. En cada iteración, se actualizan los valores de potencial en cada punto de la malla de acuerdo con el promedio de sus vecinos. El proceso continúa hasta que los cambios en el potencial entre iteraciones sean menores que una tolerancia predeterminada, lo que indica que la solución ha

convergado.

El criterio de convergencia puede definirse como:

$$\max(|\Phi_{nueva}(i, j) - \Phi_{anterior}(i, j)|) < \varepsilon$$

donde ε es una pequeña constante que define la precisión deseada de la solución. Cuanto más pequeña sea ε , más precisa será la solución, pero se requerirá un mayor número de iteraciones.

Implementación

A continuación se presenta una implementación en lenguaje de programación Python del método de relajación, con el fin de visualizar el potencial de forma gráfica. Se consideran condiciones de borde de Neumann para los bordes de la región de estudio, y de Dirichlet para los bornes.

Función relajación

Para la implementación de la función de relajación, se utilizan operaciones vectorizadas, que mejoran el rendimiento a la hora de operar con grandes matrices respecto de hacerlo mediante bucles *for* o *while*. Para ello, se desplaza la grilla original que representa los valores de potencial discretizados en una unidad hacia cada dirección. Para mejorar la eficiencia aún más, este es un buen lugar para considerar la aplicación de las condiciones de dirichlet a los bornes, para que no sea necesario calcular valores en puntos donde luego se sobrescribirá.

```
def relaxation(grid):
    result = grid.copy()

    # Desplaza la grilla de potenciales una unidad en cada dirección (creando 4
    # nuevas)
    left_shift = numpy.roll(grid, 1, axis=1)
    right_shift = numpy.roll(grid, -1, axis=1)
    up_shift = numpy.roll(grid, 1, axis=0)
    down_shift = numpy.roll(grid, -1, axis=0)

    # Los puntos correspondientes a los bornes mantienen su potencial
    # (CONDICIÓN DE DIRICHLET)
    left_shift[terminal_mask] = Terminals[terminal_mask]
    right_shift[terminal_mask] = Terminals[terminal_mask]
```

```

up_shift[terminal_mask] = Terminals[terminal_mask]
down_shift[terminal_mask] = Terminals[terminal_mask]

# Se calcula el promedio de potenciales
avg_neighbors = (left_shift + right_shift + up_shift + down_shift) / 4

# Se considera solo los puntos que no pertenecen al borde de la región de
# estudio
result[1:-1, 1:-1] = avg_neighbors[1:-1, 1:-1]

return result

```

Condición de Neumann

Para la aplicación de las condiciones de Neumann para los bordes de la región de estudio, simplemente se necesita igualar los valores en la primera y última columna y fila, con los de las inmediatamente más internas en la grilla.

```

def neumann(grid):
    border_values = grid.copy()

    # Se igualan los potenciales en los bordes con los puntos inmediatamente
    # lindantes
    border_values[0, :] = grid[1, :]      # Borde superior
    border_values[-1, :] = grid[-2, :]    # Borde inferior
    border_values[:, 0] = grid[:, 1]      # Borde izquierdo
    border_values[:, -1] = grid[:, -2]    # Borde derecho

    return border_values

```

Aplicación

Finalmente y con las dos funciones ya definidas, se define un bucle que iterará aplicando ambas sobre la configuración de bornes elegida, modificando la distribución de potencial y comprobando en cada iteración si el mayor cambio ocurrido en cada instancia es menor que la constante de precisión elegida, momento en el cual se corta el bucle y se obtiene el resultado.

```

while True:
    # Salva la distribución de potencial actual
    previousV = V

```

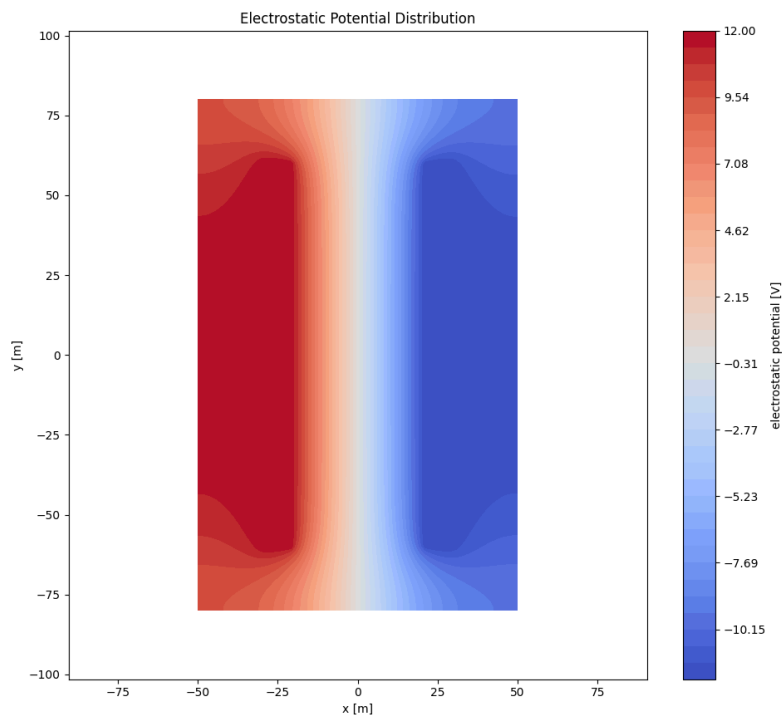
```
# Calcula la nueva distribución aplicando relajación y condiciones de borde
V = relaxation(V)
V = neumann(V)

# Comprueba si se cumple el criterio de convergencia
diff = numpy.abs(V - previousV).max()
if diff < e:
    break
```

Consignas

Distribución del potencial eléctrico de un capacitor de placas paralelas

Estudiando un capacitor de placas paralelas, vemos que las líneas equipotenciales son casi paralelas entre las placas, lo que indica una región con un campo eléctrico uniforme. El potencial cambia de forma lineal desde una placa con potencial más alto hacia la otra con potencial más bajo.

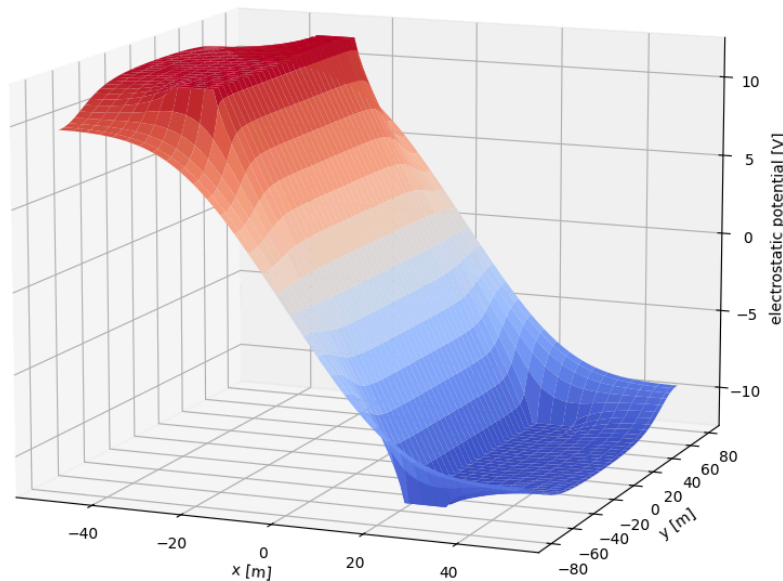


Las líneas equipotenciales tienden a curvarse en las zonas más alejadas de las placas. Esto indica que fuera del espacio entre las placas el campo eléctrico se debilita y no es completamente uniforme.

Aunque el gráfico muestra líneas equipotenciales, sabemos que las líneas de campo eléctrico serían perpendiculares a las líneas equipotenciales y se dirigirán desde la placa de mayor potencial hacia la de menor.

En los bordes exteriores del sistema (donde se aplican las condiciones de Neumann), las líneas de campo eléctrico serán paralelas al borde y las equipotenciales perpendiculares. Esto asegura que no haya flujo de campo hacia afuera del dominio de interés.

Electrostatic Potential Surface



La superficie 3D muestra una transición suave y casi lineal del potencial entre la placa de mayor potencial y la de menor potencial. La altura de la superficie en el gráfico corresponde al valor del potencial, así la placa de mayor potencial se visualiza como una zona elevada en la superficie, mientras que la de menor potencial aparece como una región baja.

Entre las placas del capacitor, la superficie tiene una pendiente constante, lo que indica que el potencial varía linealmente en esta región, reflejando un campo eléctrico uniforme.

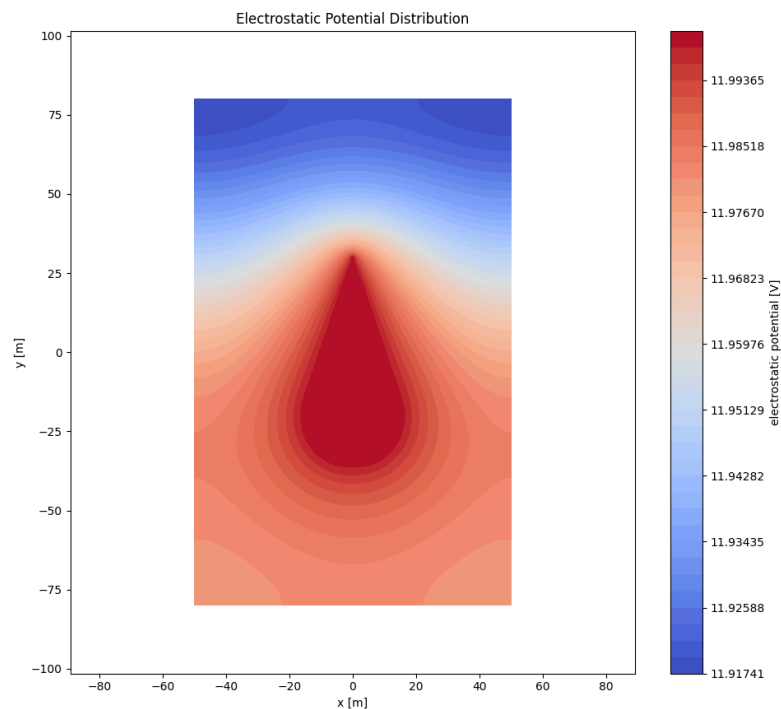
En los extremos de las placas, la superficie presenta curvaturas suaves hacia el exterior.

Esto refleja que, lejos del espacio entre las placas, el campo eléctrico se debilita y el potencial decae.

En los bordes del sistema donde se aplican condiciones de Neumann, la superficie se mantiene sin cambios bruscos (su pendiente es nula a lo largo de los bordes). Esto indica que no hay flujo de campo eléctrico hacia afuera y el potencial no cambia en la dirección normal al borde.

Distribución del potencial eléctrico de un borne irregular

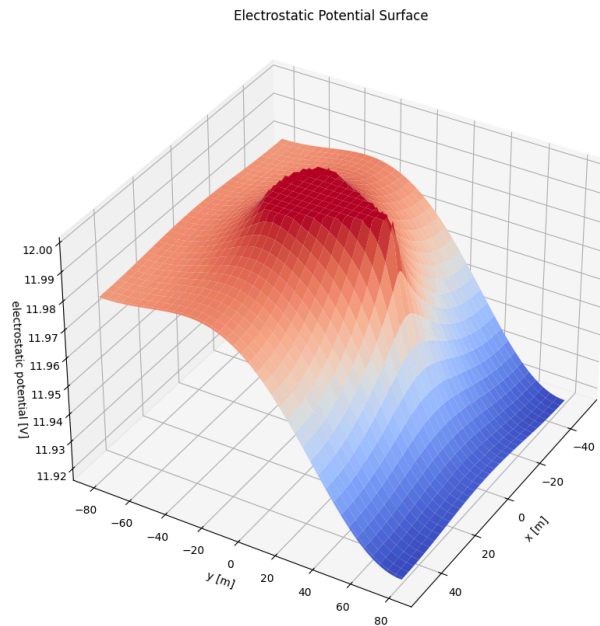
Estudiando ahora un borne irregular que presenta radios de curvatura distintos en ambos extremos, podemos observar más claramente el efecto de puntas.



En este caso se ve como en la parte inferior, con radio de curvatura más grande, las líneas equipotenciales son más distantes unas con otras, indicando una variación lenta del potencial, y por ende una menor intensidad del campo eléctrico. En cambio en la parte superior, que presenta una punta afilada, se observa una gran caída en el potencial, con líneas equipotenciales muy próximas unas de otras. Eso indica que el campo eléctrico en esta región es mucho mayor que en la anterior.

En el gráfico de superficie, la zona con el pico aparece con una pendiente muy pronunciada, mientras que en la zona con curvatura más suave, la pendiente es mucho

menor.



Análisis del comportamiento físico en función de las condiciones de borde

En el caso de las condiciones de Dirichlet, las líneas equipotenciales se alinean cerca de los conductores con potencial fijo y reflejan el valor impuesto en dichos conductores. Esto significa que las líneas equipotenciales se concentran más cerca de un conductor si su potencial es diferente al del entorno, formando contornos cerrados alrededor del conductor.

En las condiciones de Neumann, como se mencionó en ambos casos de estudio, la derivada del potencial en la dirección normal al borde es cero. Esto implica que no hay flujo de campo eléctrico a través de estos bordes. Las líneas equipotenciales serán perpendiculares al borde, y el campo eléctrico será paralelo al mismo.

Las **condiciones de Dirichlet** imponen valores fijos en los bordes, lo que obliga a las líneas equipotenciales a adaptarse a estos valores, concentrándose más cerca de los conductores con potencial alto o bajo. Las **condiciones de Neumann**, al imponer una derivada nula en la normal al borde, hacen que las líneas equipotenciales se alineen de forma perpendicular al borde, creando un patrón de distribución más uniforme en los límites, sin concentración del potencial en zonas específicas.

Las líneas de campo eléctrico son perpendiculares a las líneas equipotenciales. Donde las equipotenciales se encuentran más próximas entre sí, el campo eléctrico será más intenso. En los bordes con condiciones de Neumann, el campo eléctrico es tangente al borde, mientras que en los bordes con condiciones de Dirichlet, las líneas de campo emergerán o llegarán perpendicularmente.