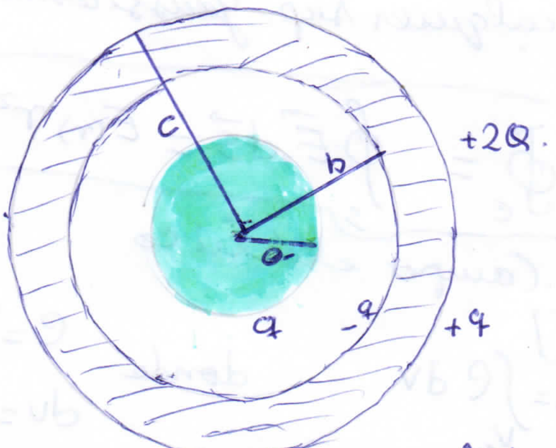
Problema 4.

Esfera cargada con $\rho = \rho_0 r$ con radio a. $\rho_0 > 0$

Casquete conductor de radio int. b y ext. c

↳ Excedente de carga +2Q

a) La esfera tendría una carga total $q > 0$;
Esa carga inducirá una carga $-q$ en la sup. interior del casquete conductor y debido a la conservación de la carga se produce una redistrib. de carga $+q$ en la sup. exterior.
Al ser la carga de la esfera del mismo signo que la carga excedente en el conductor, ésta se alojará en la superficie exterior del mismo.



b) El problema tiene simetría esférica. La esfera interior, tiene una densidad de carga que solo depende del radio. podemos decir que
$\vec{E} = E(r)\,\hat{e}_r$
El cascarón conductor por sus propiedades el campo será normal a su superficie e igual a $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ en la superficie.
En todo el espacio se cumpliría que $\vec{E} = E(r)\,\hat{e}_r$ y al ser una distribución finita podemos decir que $|\vec{E}| \to k\frac{Q_{neta}}{r^2}$

Si tomamos superficies gaussianas esféricas podemos (2) utilizar el teorema de Gauss para calcular el $\vec{E}$ en todo el espacio, si dichas superficies esféricas estan centradas en el centro de la esfera.

Por conveniencia trabajaremos con coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera (fijamos el S.R.).

En estas condiciones.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_N}{\varepsilon_0} \Rightarrow \text{Ley de Gauss.}$$

donde $\left.\begin{array}{l}\vec{E} = E(r)\,\breve{e}_r \\ d\vec{S} = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, \breve{e}_r\end{array}\right\} \therefore \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$

Luego para cualquier sup. Gaussiana esférica centrada en el origen

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)\, r^2\, 4\pi} \quad (1)$$

Calculo del Campo eléctrico

Para $\boxed{r < a}$ $\quad Q_N = \int_{V_0} \rho\, dV \quad$ donde $\rho = \rho_0 r$ con $\rho_0 > 0$

$dV = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, dr.$

$$\Rightarrow Q_N = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho_0 r' r'^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$$

$$\boxed{Q_N = \rho_0 \pi r^4} \quad (2)$$

Con (1) y (2) para 1 sup. Gaussiana int. a la esfera.

$$E(r)\, r^2\, 4\pi = \frac{\rho_0 \pi r^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2\, \breve{e}_r} \quad (3)$$

(3)

Para $\boxed{a<r<b}$ Tomando una sup. Gaussiana esferica centrada en el origen con un radio en esa zona

La carga neta encerrada es la total de la esfera. se obtiene a partir de (2) y resulta

$$\boxed{Q_N = \rho_0 \pi a^4 = q} \quad (4)$$

De (1) y (4).

$$E_{(r)} 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \pi a^4}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{\vec{E}_{(r)} = \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \breve{e}_r} \quad (5)$$

Para $\boxed{b<r<c}$ $\boxed{E=0}$ (6) por propiedad de los conductores y cumple la Ley de Gauss en cuanto

$Q_N = q - q = 0$. (carga inducida en la sup. int. del conductor)

Para $\boxed{r \geq c}$ Tomando una sup. gaussiana esferica centrada en el origen con ese radio

La carga neta encerrada es la total de la esfera mas la excedente en el conductor.

$$Q_N = 2Q + q \qquad \boxed{Q_N = 2Q + \rho_0 \pi a^4} \quad (7)$$

Con (1) y (7)

$$E_{(r)} 4\pi r^2 = \frac{2Q + \rho_0 \pi a^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{(r)} = \frac{2Q + \rho_0 \pi a^4}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}} \quad (8)$$

Entonces $\vec{E}(\vec{r})$ $\begin{cases} r<a & \vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2 \breve{e}_r \text{ ; en } r=a \quad \vec{E}(a) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} a^2 \\ a<r<b & \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \breve{e}_r \\ b\leq r<c & \vec{E}(r) = 0 \\ r\geq c & \vec{E}(r) = \frac{2Q+\rho_0 \pi a^4}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \breve{e}_r \\ & \vec{E}(c) = \frac{2Q+\rho_0\pi a^4}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \breve{e}_r \end{cases}$ (4)

c) Calculo del potencial

Por definición $\quad V(r) - V(\text{ref}) = -\int_{\text{ref.}}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

En esta situación
- $d\vec{l} = dr\, \breve{e}_r$
- Referencia $= \infty$ y considero $V(\infty) = 0$. (Me habilita que la distrib. de carga es finita)
- $\vec{E}\cdot d\vec{r} = E(r)\, dr$.

Para $\boxed{r \geq c}$

$$V(r) - \underbrace{V(\infty)}_{=0} = -\int_{\infty}^{r} \frac{(2Q+q)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2}.$$

$$\boxed{V(r) = \frac{2Q+q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}} \quad \text{con} \quad q = \rho_0 \pi a^4, \quad V(\infty) = 0 = V_{\text{ref}}.$$

$$V(c) = \frac{2Q+q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c}$$

Para $\boxed{b < r < c}$

$$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{c} \frac{(2Q+q)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} - \int_{c}^{r} \overbrace{\cancel{E}}^{=0}\, dr$$

$$\boxed{V(r) = V(c) = \frac{2Q+q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c}}$$

Se verifica potencial constante en todo el conductor

Mascarla lo nuevo

Para $\boxed{a < r < b}$

$$V(r) - V_\infty = \underbrace{-\int_\infty^c \bar{E}\cdot d\bar{r}}_{V(c)} \underbrace{-\int_c^b \bar{E}\cdot d\bar{r}}_{0} - \int_b^r \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$V(r) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{\overbrace{\rho_0 \pi a^4}^{q}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{b}$$

$$V(b) = \frac{2Q+q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c} = V(c)$$ Se verifica continuidad del potencial y el mismo valor para todo el conductor

Reordenando

$$\boxed{V(r) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

$V(b) = \frac{(2Q+q)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c} \rightarrow cte.$ verif. cont. de potencial

Para $r = a$

$$\boxed{V(a) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)}$$

$\boxed{\text{Para } r < a}$

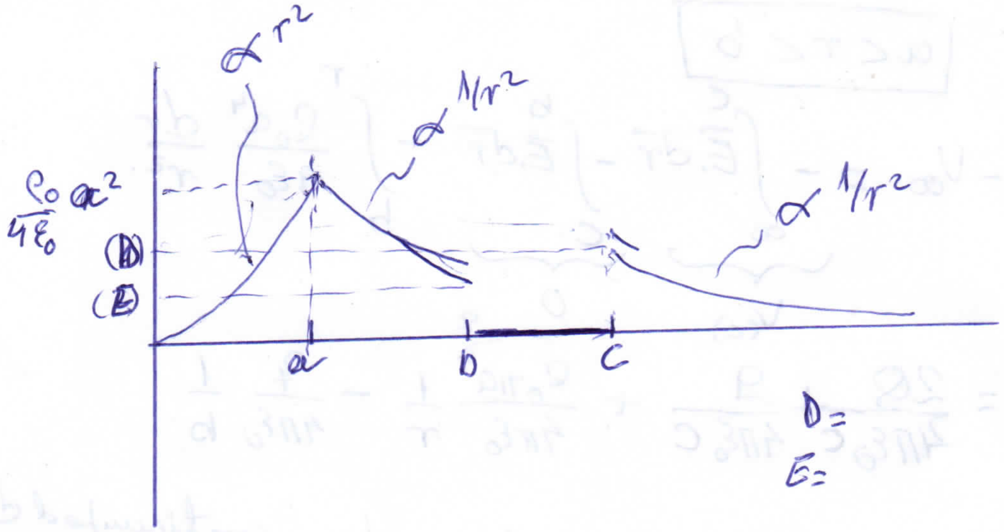
$$V(r) - V(\infty) = \underbrace{-\int_\infty^c \bar{E}(r)\, d\bar{r}}_{V(c)} - \int_c^b \overset{=0}{\bar{E}}\, d\bar{r} - \int_b^a \bar{E}\, d\bar{r} - \int_a^r \frac{4\rho_0 \pi r^2\, dr}{4\pi\varepsilon_0 a^4}$$

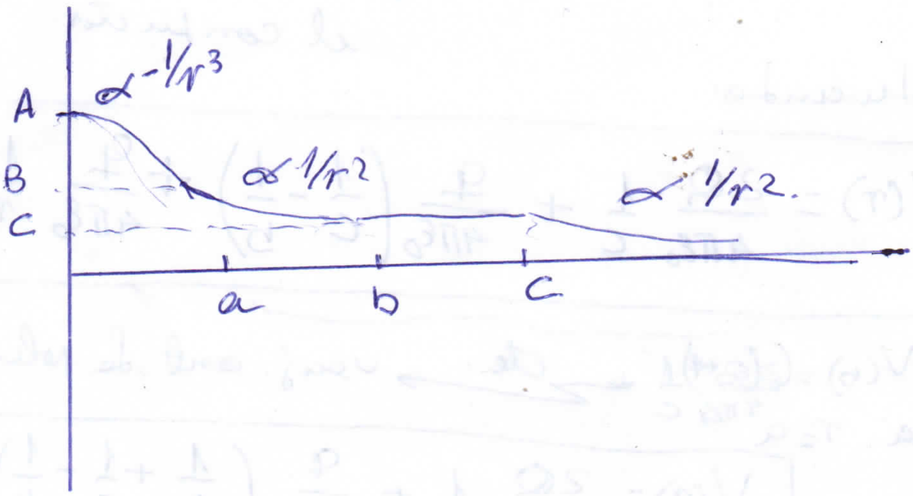
$V(a)$

$$V(r) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) - \frac{\rho_0 \pi}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^3}{3} + \frac{\overbrace{\rho_0 4\pi a^4}^{q}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^3}{3 a^4}$$

Como $q = \rho_0 \pi a^4$

$$\boxed{V(r) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^3}{3a^4}}$$





$$A = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$$

$$B = A - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b^3}{3a^4}$$

$$C = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$$