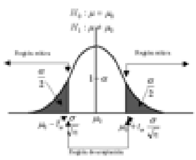
Probabilidad y Estadística 15

Actividades de Aprendizaje



Conceptos y definiciones de esta clase:

- Test de Hipótesis
- Pasos para realizar un test de hipótesis
- Errores de decisión
- Reglas de decisión

1.1 Test de Hipótesis

Una hipótesis estadística es una suposición acerca de un parámetro de la población. Esta suposición puede o no ser verdad. La ***prueba de hipótesis*** se refiere a los procedimientos formales utilizados por los estadísticos para aceptar o rechazar las hipótesis estadísticas.

La mejor manera de determinar si una hipótesis estadística es cierta sería examinar a toda la población, pero eso a menudo es poco práctico, cuando no imposible. Es así que los investigadores suelen examinar una muestra aleatoria de la población. Si los datos de muestra no son consistentes con la hipótesis estadística, entonces la hipótesis queda descartada.

Se presentan dos tipos de hipótesis estadísticas:

- La hipótesis nula, denotada por H_0, que por lo general es la hipótesis de que los resultados de las observaciones de la muestra son producto exclusivamente del azar.

- La hipótesis alternativa, denotada por H_1 o H_a, es la hipótesis de que las observaciones de la muestra se ven influidas por alguna causa no aleatoria, determinando entonces que el efecto que se sospecha puede llegar a ser cierto.

De esta manera, el proceso consistirá en determinar si la evidencia que se manifiesta en la muestra poblacional refuta la hipótesis nula y conlleva a la valoración de la hipótesis alternativa, o viceversa. Los pasos son:

- Plantear las dos hipótesis, H_0 y H_a

- Se extrae la muestra y se analiza, llegando a la conclusión de si los resultados son viables si la H_0 fuera cierta.

- Si esos resultados son poco probables de ocurrir cuando H_0 es cierta, se rechaza esa hipótesis y se sustenta la otra, que no queda automáticamente demostrada, pero por lo menos no tenemos evidencia **suficiente** para rechazarla.

Ahora bien, para decidir si los resultados son compatibles o no con H_0 se deberá establecer de antemano, una ***regla o criterio de decisión***, que se basa en la distribución muestral del estimador del parámetro sobre el cual estamos intentando establecer las hipótesis.

Para que quede claro, se comienza suponiendo que H_0 es válida. Si resulta cierta, los valores del estadístico para esta distribución, fueron una variación debida al azar.

Así y todo, habrá que tener mucho cuidado a la hora de plantear las hipótesis, y aún más a la hora de definir una regla de decisión, porque de otro modo se puede incurrir en errores muy graves, que nos pueden llevar a tomar decisiones equivocadas.

Ejemplo 1

Supongamos que queremos determinar si una moneda está trucada.

Aplicando todo lo anteriormente aprendido tendremos:

- La variable que expresa el resultado obtenido al arrojar la moneda, que llamaremos x.
- Dos valores para x, CARA (lo simbolizamos c), y ceca (cruz, lo simbolizamos +)
- Las probabilidades de c y ×, P(X=c) =p, P(X=×)=1-p
- Dos hipótesis que se basan en la confirmación (o refutación) de si la moneda está trucada

H_0: p = 0,5
H_a: p ≠ 0,5

Comenzamos nuestro experimento, que constará en arrojar 100 veces la moneda y anotar el resultado obtenido.

Por la teoría de probabilidad y de las variables aleatorias, se sabe que si p = ½, la distribución muestral de $\hat{p}$ tendrá distribución normal con media 0.5 y desviación típica 0.05. Esto quiere decir que, antes de realizar el experimento y calcular la proporción de caras entre las 100 tiradas, ya sabemos que, si la moneda no está trucada, encontraremos una distribución de los valores que cumple con lo teóricamente establecido.

Supongamos entonces que obtuvimos 61 caras ($\hat{p} = 0.61$). ¿Qué responderíamos a nuestra cuestión? ¿La moneda está trucada o no?

A primera vista pareciera que sí, pero… ¿cómo sabemos con seguridad que este resultado no es producto del azar y algo esperable al tirar 100 veces una moneda?

Afortunadamente contamos con un modelo para la distribución de los valores de p si en realidad p = ½. En este modelo se puede observar que $\hat{p}$ = 0,61 es un valor bastante extremo para su distribución. De hecho, ¿qué porcentaje de las muestras de tamaño 100, proporcionan un valor tanto más alejado del 0.5 esperado que 0.61? Para esto podemos calcular la probabilidad P $[\hat{p} \leq= 0.39$ ∪ $\hat{p} \geq 0.61$, que es aproximadamente igual a 0.028. Deduzco que, si en efecto p = ½ entonces tan sólo el 2.8% de las muestras de tamaño 100 resultarán en un valor tan o incluso más alejado de 0.5 como el valor que obtuvimos.

Esto último tiende a refutar la hipótesis nula y fortalecer la hipótesis alternativa.

Generalizando, podemos hablar de distintos planteos de pruebas de hipótesis para los parámetros de una población:

Considerando que θ es un parámetro de la población, y siendo θ_0 un posible valor del parámetro, se pueden plantear 3 tipos de pruebas típicas:

a) Prueba bilateral o de dos colas

Recuerde los pasos

Formular un plan de análisis. El plan de análisis se describe cómo utilizar los datos de muestra para evaluar la hipótesis nula. La evaluación se centra a menudo en torno a un estadístico de prueba única.

Analizar los datos de la muestra. Encuentra el valor del estadístico de prueba (puntuación media, proporción, etc.) que se describe en el plan de análisis.

Interpretar los resultados. Aplicar la regla de decisión que se describe en el plan de análisis. Si el valor de la prueba estadística es poco probable, sobre la base de la hipótesis nula, rechazar la hipótesis nula.

H_0) $\theta = \theta_0$ (El parámetro θ es igual a θ_0), contra
H_a) $\theta \neq \theta_0$ (el valor de θ se ha modificado)

b) Prueba unilateral de cola izquierda

H_0) $\theta \geq \theta_0$ (El parámetro θ es igual a θ_0 o mayor), contra
H_a) $\theta < \theta_0$ (el valor de θ ha disminuido)

c) Prueba unilateral de cola derecha

H_0) $\theta \leq \theta_0$ (El parámetro θ es igual a θ_0 o menor), contra
H_a) $\theta > \theta_0$ (el valor de θ ha aumentado)

1.2 Errores de decisión

Dos tipos de errores pueden resultar de una prueba de hipótesis.

- **Error de tipo I**

  Se produce cuando el investigador rechaza la hipótesis nula cuando es verdadera. La probabilidad de cometer un error de tipo I se llama nivel de significación. Esta probabilidad también se llama alfa, y con frecuencia se denota por α.

- **Error tipo II**

  Se produce cuando el investigador no puede rechazar una hipótesis nula que es falsa. La probabilidad de cometer un error de tipo II que se llama Beta, y con frecuencia se denota por β.

1.3 Reglas de decisión

El plan de análisis incluye las reglas de decisión para rechazar la hipótesis nula. En la práctica, los estadísticos describen estas reglas de decisión de dos maneras: con referencia a un valor de P o con referencia a una región de aceptación.

- **P-valor**

  En este caso la fuerza de la evidencia en apoyo de una hipótesis nula se mide por el valor de p. Supongamos que el estadístico de prueba es igual a S. El valor P es la probabilidad de observar un estadístico de prueba tan extrema como la S, suponiendo que la hipótesis nula es verdadera. Si el valor de p es menor que el nivel de significación, rechazamos la hipótesis nula.

- **Región de aceptación**

  La región de aceptación es un intervalo de valores. Si la estadística de prueba cae dentro de la región de aceptación, la hipótesis nula no se rechaza. La región de aceptación se define de modo que la posibilidad de incurrir en un error de tipo I es igual al nivel de significación. El conjunto de valores fuera de la región de aceptación se denomina la región de rechazo. Si la estadística de prueba cae dentro de la región de rechazo, la hipótesis nula es rechazada. En tales casos, se dice que la hipótesis ha sido rechazada en el nivel de significación α.

Ambos enfoques son equivalentes. Algunos textos de estadística utilizan el método del valor p, mientras que otros utilizan la región de aceptación.