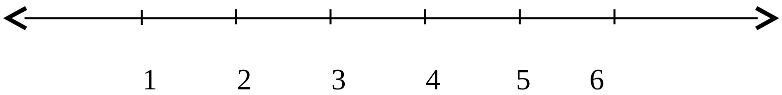
CONJUNTOS NUMÉRICOS

La noción de número es tan antigua como el hombre mismo ya que son necesarios para resolver situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, usamos números para *contar* una determinada cantidad de elementos (existen siete notas musicales, 9 planetas, etc.), para establecer un *orden* entre ciertas cosas (el tercer mes del año, el cuarto hijo, etc.), para establecer *medidas* (3,2 metros, 5,7 kg, -4ºC, etc.), etc.

NÚMEROS NATURALES

El conjunto de los ***números naturales*** está formado por aquellos que se utilizan para contar.
Se designa con la letra N y se representan: $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
Es un conjunto que tiene infinitos elementos pues si bien tiene primer término, el 1, que es el menor de todos, no tiene último ya que es suficiente con sumar 1 a un número para obtener otro mayor. Así, podemos afirmar también, que es un conjunto ordenado, por lo que podemos representarlo sobre una recta de la siguiente manera:



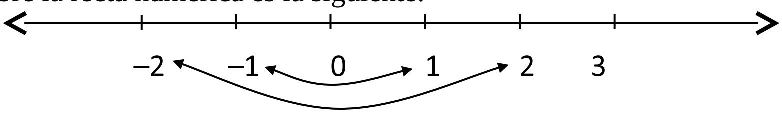
Como ya sabemos, sobre este conjunto de números se pueden definir ciertas operaciones como suma, resta, multiplicación y división.
Siempre que se sumen y se multipliquen dos números naturales se obtendrá otro número natural, mientras que muchas veces, no sucede lo mismo si se restan.

Observen: $8 - 5 = 3$ $\quad$ $20 - 7 = 13$
$7 - 20 = ?$ ¿Qué sucede?

NÚMEROS ENTEROS

Para solucionar el problema de la resta, se crean los números negativos $-1, -2, -3$, etc. como opuestos de los números naturales. Además, se incorpora el cero para dar solución a la resta de un número consigo mismo. El conjunto de los números naturales, sus opuestos negativos y el cero constituyen el conjunto de los ***números enteros***, que se indica con la letra Z. Notemos que $N \subset Z$.

Su representación sobre la recta numérica es la siguiente:



Veamos algunos ejemplos:

- El opuesto de 2 es –2.
- El opuesto de –5 es 5, es decir
- El opuesto de 0 es ....?

De esta manera, podemos redefinir la resta de dos números naturales como la suma de dos números enteros.

<u>Ejemplo</u>: Calcular:

1) $23 + (-12) =$ $\color{red}{Sumar - 12\ es\ lo\ mismo\ que\ restar\ su\ opuesto, o\ sea\ 12, es\ decir:}$

$$23 + (-12) = 23 - 12 = 11$$

2) $9 - (-20) =$ $\color{red}{Restar - 20\ es\ lo\ mismo\ que\ sumar\ su\ opuesto, o\ sea\ 20,}$ $\color{red}{\text{es decir:}}$

$$9 - (-20) = 9 + 20 = 29$$

Podemos observar que ahora la suma, la resta y la multiplicación de números enteros dan como resultado otro número entero.

¿Ocurrirá lo mismo en el caso de una división? Observen:

- $10 : (-5) = -2$
- $(-13) : (-1) = 13$
- $7 : 3 = ?$
- $10 : (-2) = ?$

¿Hay algún número entero que cumpla con esta condición?

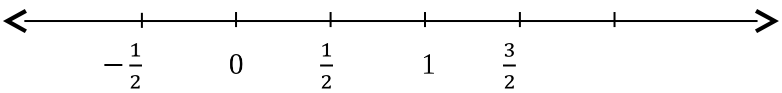
<u>NÚMEROS RACIONALES</u>

Para resolver esta situación habrá que introducir otro conjunto numérico, el conjunto de los ***números racionales*** al que denotaremos con la letra Q.
Un número racional es el cociente (división) de dos números enteros $m\ y\ n$, siendo n distinto de cero. Notemos que $Z \subset Q$.

De la definición de número racional surge que todo número entero es racional, pues podemos considerar al entero como un racional de denominador 1, por ejemplo:

$$-4 = -\frac{4}{1}, donde - 4 \in Z, 1 \in Z\ y\ 1 \neq 0$$

Representemos en la recta numérica algunos números racionales:



Veamos algunos ejemplos de números racionales:

- $\frac{13}{9}$ es racional, pues es el cociente de 13 y 9, que son números enteros.
- 4 es racional pues $4 = \frac{4}{1}$ y 4 y 1 son enteros.
- $0{,}3$ es la expresión decimal de un número racional porque $0{,}3 = \frac{3}{10}$ ya que 3 y 10 son números enteros.
- $0, \hat{5} = 0{,}555555 ....$ es la expresión decimal de un número racional porque $0, \hat{5} = \frac{5}{9}$ y ambos números (5 y 9) son enteros.

- $0{,}1\hat{5} = 0{,}15555$ es la expresión decimal de un número racional porque $0{,}1\hat{5} = \frac{14}{90}$ y 14 y 90 son números enteros.

Estos tres últimos ejemplos muestran los tres tipos diferentes de expresiones decimales que puede tener un número racional:

- ***Expresión decimal finita***
- ***Expresión decimal periódica pura***
- ***Expresión decimal periódica mixta***

> *Todo número racional puede escribirse como una expresión decimal cuya parte decimal puede tener un número finito de cifras o puede tener un número infinito de cifras, pero periódica, pura o mixta.*

Recordemos como se realizan las operaciones básicas en Q:

Adición y Sustracción	Multiplicación	División
Igual denominador: $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, $b \neq 0$ $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ Distinto denominador: Cuando las fracciones tienen distinto denominador se procede a reemplazar a cada una de estas por otras, respectivamente equivalentes a las dadas, con igual denominador. Luego se suman o se restan como en el caso anterior. Ejemplo: $\frac{5}{3}+1-\frac{7}{2}=\frac{10}{6}+\frac{6}{6}-\frac{21}{6}=$ $=\frac{10+6-21}{6}=-\frac{5}{6}$	$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$ $\quad b,d \neq 0$ Se multiplican los numeradores y los denominadores entre sí. ✓Inverso multiplicativo: Dos números racionales (distintos del cero) son inversos multiplicativos si el numerador de uno es el denominador del otro y viceversa. De tal forma que la multiplicación de ambos es 1. $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ donde $\frac{3}{2}.\frac{2}{3}=\frac{6}{6}=1$ Formalmente Definimos el *inverso* de un número $a \neq 0$ como el número racional que multiplicado por a nos da 1, es decir, $a \cdot \frac{1}{a}=1$ ▪ El inverso de $a=-\frac{27}{2}$ es $\frac{1}{a}=-\frac{2}{27}$ pues $-\frac{27}{2}\cdot\left(-\frac{2}{27}\right)=1$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}$ o $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}$ **Ejemplo:** $-\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=-\frac{3}{5}.\frac{7}{2}=-\frac{21}{10}$ $-\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{(-3).7}{5.2}=-\frac{21}{10}$

Se puede concluir que entre dos números racionales a y b, con $a < b$, existe otro racional de la forma $\frac{a+b}{2}$ que verifica: $a < \frac{a+b}{2} < b$

Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto Q es un conjunto **denso**, en contraposición a los naturales, N, y los enteros, Z, que son conjuntos **discretos**.

NÚMEROS IRRACIONALES

¿Se puede representar a todos los números que se conocen mediante una expresión decimal finita o periódica?

Para contestar a esta pregunta, se debe pensar en un número muy conocido, el número π . ¿Cuál es el valor de π? Una calculadora con 8 dígitos dirá que su valor es $3{,}141593$; una calculadora con 10 dígitos dará como valor de al $3{,}14159264$. En algún libro de matemática se puede encontrar, por ejemplo: $\pi = 3{,}14159265358979323846$.
A los números reales cuya expresión decimal no es finita ni periódica los llamaremos ***números irracionales***. A este conjunto se lo denota con I. Algunos ejemplos son:

- $\sqrt{2} = 1{,}414213562 \ldots$
- $-\sqrt{5} = -2{,}236067977 \ldots$
- $e = 2{,}7182828 \ldots$

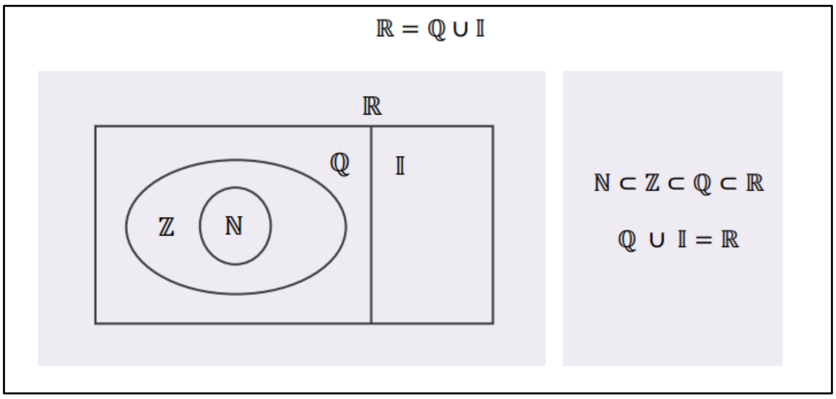
Los números irracionales también tienen su ubicación en la recta numérica.

Observemos que la suma de dos números irracionales no siempre da un número irracional y que el producto de dos números irracionales no siempre da un número irracional.

Actividad: Buscar ejemplos en donde se verifiquen dichas afirmaciones.

NÚMEROS REALES

El conjunto formado por los racionales y los irracionales se llama conjunto de ***números reales***, y se designa con la letra R. Notemos que, por esta definición $Q \subset R$. Los números reales llenan por completo la recta numérica, por eso se la llama *recta real*. Dado un origen y una unidad, a cada punto de la recta le corresponde un número real y, a cada número real, le corresponde un punto de la recta.
La relación existente entre los conjuntos numéricos la podemos graficar de la siguiente manera:



Operaciones en el conjunto de los números reales. Propiedades

- *SUMA Y MULTIPLICACION*

Las operaciones de suma y multiplicación definidas en R cumplen ciertas propiedades. Veamos algunas de ellas:

Propiedades	**de la Suma**	**del Producto**
Ley de cierre	$a+b\in\mathbb{R}$	$a\cdot b\in\mathbb{R}$
Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$ *	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ *
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Existencia de elemento neutro	Es el 0: $a+0=0+a=a$	Es el 1: $a\cdot 1=1\cdot a=a$
Existencia de inverso	Es el opuesto aditivo: $a+(-a)=(-a)+a=0$	Es el inverso multiplicativo: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1 \quad si\ a\neq 0$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$	

- <u>*POTENCIACIÓN*</u>

  Si a es un número real y n es un número natural, entonces decimos que a^n se obtiene multiplicando n veces el factor a, es decir: $a^n = a.a.a.a.....$

<u>Ejemplo</u>: $a^6 = a.a.a.a.a.a$

Decimos entonces que a^n es una ***potencia*** que tiene a a como ***base*** y a n como ***exponente***.

Extendemos la definición para exponentes enteros definiendo, para:

$$a \neq 0: \begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{-n} = (a^{-1})^n, n \in N \end{cases}$$

Sean a, b números reales distintos de 0 y sean m, n números enteros.

Propiedades de la Potencia	
Distributiva con respecto al producto	$(a.b)^m = a^m.b^m$
Distributiva con respecto al cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
Producto de potencias de igual base	$a^m.a^n = a^{m+n}$
División de potencias de igual base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Potencia de potencia	$(a^m)^n = a^{m.n}$
IMPORTANTE: La potencia no es distributiva respecto a la suma ni a la resta	

- **RADICALES**

Un **radical** es una expresión de la forma$\sqrt[n]{a}$, en la que $n \epsilon N$ y $a \epsilon R$; con la restricción de que cuando a sea negativo, n ha de ser impar.

$$k\sqrt[n]{a}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{64} = \mp 8$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$\sqrt{-64} =$ no pertenece a R

$\sqrt[3]{-8} = -2$Potencias y radicales

Un **radical** se puede expresar en forma de **potencia**:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

¨Por ejemplo: $\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$

Radicales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k.m}{k.n}}\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.k]{a^{m.k}}$$

Si se multiplican o dividen el **índice** y el **exponente** de un **radical** por un mismo **número natural**, se obtiene otro **radical equivalente**.

Por ejemplo: $\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$

Simplificación de radicales

Si existe un **número natural** que divida al **índice** y al **exponente** (o los exponentes) del radicando, se obtiene un **radical simplificado**.

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2.3^2} = \sqrt[2]{2.3} = \sqrt{6}$$

Reducción de radicales a índice común

1.- Hallamos el **mínimo común múltiplo de los índices**, que será el común índice.

2.- **Dividimos el común índice por cada uno de los índices** y cada resultado obtenido **se multiplica por sus exponentes** correspondientes.

Por ejemplo: $\sqrt[2]{2}\sqrt[3]{2^2.3^2}\sqrt[4]{2^2.3^3}$

M.C.M.(2; 3; 4) = 12

$$\sqrt[12]{2^6}\sqrt[12]{(2^2)^4.(3^2)^4}\sqrt[4]{2^2.3^3}$$

$$\sqrt[12]{2^6}\sqrt[12]{2^8.3^8}\sqrt[4]{2^6.3^9}$$

Extracción de factores fuera del signo radical

Se descompone el radicando **en factores**. Si:

1.-Un **exponente es menor** que el índice, el factor correspondiente **se deja en el radicando**.

Por ejemplo: $\sqrt{6} = \sqrt{2.3}$ ó $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$

2.- Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **sale fuera del radicando**.

Por ejemplo: $\sqrt{12} = \sqrt{2^2.3} = 2.\sqrt{3}$ ó $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3}$

3.- Un exponente **es mayor que el índice**, **se divide** dicho exponente **por el índice**. El **cociente** obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

Por ejemplo:

a) $\sqrt{48} = \sqrt{2^4.3} = 2^2.\sqrt{3}\,\frac{4}{2} = 2,$ resto 0

b) $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3.\sqrt[3]{3^2}\,\frac{5}{3} = 1,$ resto 2

c) $\sqrt{2.3^2.5^5} = 3.5^2.\sqrt{2.5}$

d) $\sqrt[4]{2^7.3^{14}.5^4} = 2.3^3.5.\sqrt[4]{2^3.3^2}$

Introducción de factores dentro del radical

Se **introducen** los **factores** elevados al **índice** correspondiente del **radical**.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n.b}$$

Por ejemplo:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2.3}$$

$2^2.3^3.\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{(2^2)^4.(3^3)^4.2.3} = \sqrt[4]{2^9.3^{13}}$

SUMA DE RADICALES

Solamente pueden **sumarse** (o **restarse**) **dos radicales** cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} + c\sqrt[n]{k} = (a+b+c).\sqrt[n]{k}$$

Por ejemplo:

$a)\ 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2-4+1).\sqrt{2}$

$b)\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

(Para la división se hace de forma análoga)

<u>Radicales del mismo índice</u>

Para **multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice**.

$$\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$$

Por ejemplo: $\sqrt{2}.\sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2.3} = 2\sqrt{3}$

Cuando terminemos de realizar una operación e**xtraeremos factores del radical**, si es posible.

<u>Radicales de distinto índice</u>

Primero se reducen a índice común y luego **se multiplican**.
Por ejemplo:

$\sqrt{3}.\sqrt[3]{9}.\sqrt[4]{27} =$

M.C.M.(2; 3; 4) = 12

$\sqrt[12]{3^6}.\sqrt[12]{(3^2)^4}.\sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6.3^8.3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\sqrt[12]{3^{11}}$

RAÍCES DE RADICALES

La **raíz de un radical** es otro **radical** de **igual radicando** y cuyo **índice** es el **producto de los dos índices**.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

Por ejemplo: $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$

TRABAJO PRÁCTICO – NÚMEROS REALES

1) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) La suma de dos números naturales es siempre un número natural.

b) La diferencia de dos números naturales es siempre un número natural.

c) El cuadrado de un número racional negativo es un racional positivo.

d) Existen infinitos números racionales comprendidos entre 0 $y\, \frac{1}{2}$.

e) El conjunto de los números naturales carece de primer elemento.

2) Completar con = ó ≠ y mencionar qué propiedades se cumplen o no se cumplen:

a) $(a+b)^n \dots\dots\dots a^n + b^n$

b) $a^b \dots\dots\dots b^a$

c) $a^{b^c} \dots\dots\dots \left(a^b\right)^c$

d) $(p.q)^a \dots\dots\dots p^a.q^a$

3) Resolver las siguientes operaciones entre radicales

a) $4\sqrt{2}+6\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}=$

b) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{108}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{32}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{4}=$

c) $4\sqrt{\frac{25}{112}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{81}{28}}-2\sqrt{\frac{36}{175}}+4\sqrt{\frac{4}{63}}=$

d) $\sqrt{a^2+2ax+x^2}+\sqrt{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3}-\sqrt{a^3+a^2x}=$

e) $\sqrt[5]{8m^2n^3}.\sqrt[5]{4m^4n}.\sqrt[5]{2mn}=$

f) $\sqrt[4]{\frac{2a^3b}{5m^2}}.\sqrt[6]{\frac{125b^4y}{8a^2m}}.\sqrt{\frac{2x}{ma}}=$

g) $\sqrt[3]{2\frac{x^2y}{m}}:\sqrt[3]{4\frac{xy^2}{m^2}}=$

4) Racionalización de denominadores

a) $\frac{5x}{\sqrt{x}}=$

b) $\frac{7}{\sqrt{8}-2}=$

c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$