ECUACIONES

Una **ecuación** es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas **miembros**, separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos (datos) y desconocidos (incógnitas), relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes y el término desconocido o **incógnita** se representa generalmente por las últimas letras del abecedario: “x”, “y” o “z”, aunque puede utilizarse cualquiera otra letra.

La expresión escrita a la izquierda del signo igual en una ecuación recibe el nombre de **primer miembro**, mientras que la expresión que está a la derecha del signo igual se llama **segundo miembro**.

$$\underbrace{2x+3}_{Primer\ miembro} = \underbrace{5x^2+8}_{Segundo\ miembro}$$

En una ecuación puede haber más de una incógnita, es decir, más de un valor desconocido.

La igualdad planteada por una ecuación será verdadera o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen las incógnitas.

Resolver una ecuación es calcular la o las soluciones de esta. Las soluciones de la ecuación son los valores numéricos que deben tomar las incógnitas para que la igualdad sea cierta. Es decir, al sustituir estos valores por las letras en la ecuación y operar, obtenemos una igualdad.

Después de resolver una ecuación conviene comprobar que la solución es válida, es decir que si reemplazamos en la ecuación obtenemos una identidad. Este paso se llama **verificación.**

Leyes de monotonía

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación tratamos de encontrar una ecuación equivalente que sea más simple, donde la variable se encuentre solo en un lado de la igualdad.

Para resolver una ecuación aplicamos propiedades, entre ellas:

1) **Propiedad de monotonía para la suma**: $A = B \leftrightarrow A + C = B + C$.

Es decir, si sumamos o restamos una misma cantidad en ambos miembros de una ecuación, la igualdad se mantiene.

2) **Propiedad de monotonía para el producto**: $A = B \leftrightarrow k.A = k.B, con\ k \neq 0$

Es decir, si multiplicamos o dividimos por una misma cantidad no nula en ambos miembros de una ecuación, la igualdad se mantiene.

3) **Propiedad cancelativa**: si $c \neq 0, y\ a.c = b.c$, entonces $a = b$.

Al aplicar estas propiedades a una ecuación obtenemos una ecuación equivalente.

Por ejemplo:

Resuelve la ecuación $4x - 5 = 27$ *utilizando las propiedades.*

Hallaremos el valor de la incógnita utilizando las propiedades ya estudiadas

$4x - 5 = 27$	Ecuación original
$4x - 5 + 5 = 27 + 5$	Monotonía para la suma
$4x = 32$	Asociativa
$4x.\frac{1}{4} = 32.\frac{1}{4}$	Monotonía para el producto
$x = 8$	Ecuación más simple

De la última ecuación deducimos que 8 es la solución de la ecuación original. Comprobemos que esto es verdad: $4.8 - 5 = 32 - 5 = 27$.
Entonces el conjunto solución es $S = \{8\}$

Consecuencias de las propiedades de monotonía

- Todo número o expresión que figura sumando en un miembro de una ecuación puede pasar al otro miembro restando, y recíprocamente, si está restando puede pasar sumando al otro miembro.
- Si un número está multiplicando a todo un miembro de una ecuación, puede pasar al otro miembro como divisor, y recíprocamente, si está dividiendo a todo un miembro puede pasar multiplicando a todo el otro.
- Se puede cambiar el signo a todos los términos de una ecuación, que sería lo mismo que multiplicar a ambos miembros por -1.
- Para suprimir los denominadores de una ecuación, alcanza con multiplicar a ambos miembros por el producto de los denominadores, o bien por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Una **ecuación de primer grado o lineal** es equivalente a una de la forma:

$$a.x + b = 0, \quad con\ a \neq 0$$

Para hallar las soluciones de una ecuación lineal se debe operar con ecuaciones equivalentes mediante el uso de propiedades hasta obtener una ecuación del tipo $x = c$.

Si $ax + b = 0$, tenemos que:

$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

Entonces: $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Se pide que $a \neq 0$, porque en caso contrario no sería una ecuación de primer grado o lineal. Si admitimos la posibilidad de que a sea 0, entonces obtenemos la ecuación $0x = -b$, de donde podemos tener dos casos:

- Si $b = 0$, la ecuación es válida para cualquier valor real que tome x por lo que la ecuación tiene infinitas soluciones y se denota $S = R$.
- Si $b \neq 0$, no existe ningún valor real que cumple la igualdad, por lo que la ecuación no tiene solución y se denota $S = \emptyset$.

Por ejemplo:

$$5x + 6 = -10$$
$$5x = -10 - 6$$
$$5x = -16$$
$$x = -\frac{16}{5}$$
$$S = \left\{-\frac{16}{5}\right\}$$

Verificación

$$5.\left(-\frac{16}{5}\right) + 6 = -10$$
$$-16 + 6 = -10$$
$$-10 = -10$$

Actividad 1: Resuelve las siguientes ecuaciones lineales explicitando el conjunto solución

a) $2x - 3 = 6 + x$
b) $2(2x - 3) = 6 + x$
c) $4(x - 10) = -6(2 - x) - 6x$
d) $3x + (2x - 3) = 7(x - 2) - x$
e) $\frac{2}{3}\left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)\right] + 1 = x$
f) $\frac{3(1+2x)+5}{2} = 2(x + 2) + x$
g) $2 - \left[-2.(x + 1) - \frac{x-3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$
h) $\frac{x+4}{2} = \frac{x}{11} + 11$
i) $\frac{x-1}{6} - \frac{3x+2}{3} + 1 = \frac{x}{12} + \frac{1}{6}$
j) $\frac{2x+12}{3} = \frac{10x-30}{15} + 1$
k) $-3(2x - 5) - 5x = 3x$

Actividad 2: Determina, si es posible, los valores reales de a y b para que la ecuación en la indeterminada x:

$$(x + 2)^2 - (b - 2)^2 = x(x - a) - (b^2 - 4b + 8)$$

b) Tenga solución única.
c) No tenga solución.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRÁTICAS

Se llama **ecuación cuadrática** a aquella ecuación que es equivalente a una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ , con } a \neq 0$$

Cada uno de los términos de la ecuación recibe un nombre en relación con el exponente al que está elevada la variable, y estos son:

$$\underbrace{ax^2}_{\substack{\text{Término}\\ \text{cuadrático}}} + \underbrace{bx}_{\substack{\text{Término}\\ \text{lineal}}} + \underbrace{c}_{\substack{\text{Término}\\ \text{independiente}}} = 0$$

Sin la condición de $a \neq 0$, sería una ecuación lineal.

Esta ecuación admite tres posibilidades para las soluciones: dos números reales y diferentes, dos números reales e iguales (por lo que la solución es solución doble), o sin solución en los reales, dependiendo del valor que tome $b^2 - 4ac$. A esta expresión la llamaremos **discriminante** y la denotaremos con la letra griega Δ (se lee delta).

Las tres posibilidades son que Δ sea positivo, cero o negativo:

- Si $\Delta > 0$, tenemos dos raíces reales distintas $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$, tenemos dos raíces coincidentes reales $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, no tenemos raíces reales, es decir, la ecuación cuadrática no tiene solución.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones veremos primero algunos casos sencillos.

- **El término independiente es 0:** Tenemos entonces $ax^2 + bx = 0$, de donde se puede sacar x como factor común, quedando $x(ax + b) = 0$.

  Si un producto es igual a cero, es porque alguno de los factores debe ser cero, por lo que sabemos que $x = 0$ ó $ax + b = 0$, es decir, $x = -\frac{b}{a}$. Entonces tenemos las dos soluciones de la ecuación de segundo grado $S = \left\{0;\ -\frac{b}{a}\right\}$.

Resuelve la ecuación cuadrática $3x^2 + 9x = 0$.

Si $3x^2 + 9x = 0$, *entonces tenemos* $x.(3x + 9) = 0$, *de donde* $x = 0$ *o* $3x + 9 = 0$, *es decir* $x = -\frac{9}{3} = -3$. *Por lo tanto* $S = \{0, -3\}$.

- **El término lineal es 0**: Tenemos entonces $ax^2 + c = 0$, y si despejamos x^2 nos queda $x^2 = -\frac{c}{a}$.

  En el caso que $-\frac{c}{a} > 0$, (eso sucede si el signo de c es distinto al signo de a) tenemos dos soluciones: $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ ó $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

  Es decir: $S = \left\{\sqrt{-\frac{c}{a}}, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$

  En el caso $-\frac{c}{a} < 0$, la ecuación cuadrática no tiene solución en el conjunto de los números reales (un número al cuadrado nunca puede ser negativo).

Resuelve las ecuaciones cuadráticas $2x^2 - 4 = 0$ *y* $2x^2 + 4 = 0$.

Si $2x^2 - 4 = 0$, *tenemos que* $x^2 = \frac{4}{2} = 2$, *por lo que* $x = \sqrt{2}$ *y* $x = -\sqrt{2}$ *son soluciones de la ecuación. Por lo tanto* $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
Si $2x^2 + 4 = 0$, *tenemos que* $x^2 = -\frac{4}{2} = -2$, *por lo que la ecuación no tiene solución.* $S = \emptyset$.

- ***Los términos lineal e independiente son 0***: Queda $ax^2 = 0$, donde la única solución es $x = 0$.Es decir, $S = \{0\}$.

Resuelve la ecuación cuadrática $9x^2 = 0$.

Si $9x^2 = 0$, *tenemos que* $x = 0$. *Por lo tanto* $S = \{0\}$.

En el caso que la ecuación de segundo grado sea completa, se puede determinar las soluciones utilizando la **fórmula de *Bhaskara***.

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Siendo:

- $\boldsymbol{a}$ *el coeficiente principal,*
- $\boldsymbol{b}$ *el coeficiente lineal,*
- $\boldsymbol{c}$ *el término independiente*

Por ejemplo:

Resolver la ecuación: $2x^2 + 7x + 3 = 0 \quad \rightarrow a = 2 \qquad b = 7 \qquad c = 3$

$$x_{1;2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.3}}{2.2}$$

$$x_{1;2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x_{1;2} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 5}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 5}{4} = -3$$

$$Solución = \left\{-\frac{1}{2};\ -3\right\}$$

Actividad 3: Calcula el discriminante de las siguientes ecuaciones y, sin resolver la ecuación, determina la existencia de soluciones reales. Si existen, halle los valores de las soluciones utilizando la fórmula de Bhaskara.

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$ b) $2x^2 - x + 3 = -1$ c) $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

d) $\frac{2}{3}x^2 - 2x = \frac{16}{3}$ e) $-x^2 = -4x - 21$

Actividad 4: Encuentra el valor de k para que la ecuación $x^2 - \frac{(k+1)}{3}x + \frac{k}{9} = 0$ admita una única solución real. Encuentra dicha solución.

Actividad 5: Encuentra él o los valores de k para que la ecuación $(k+3)x^2 - kx + 1 = 0$ tenga solución única. Para cada valor de k hallado, encuentra la única solución de la ecuación.

Actividad 6: Plantea y resuelve las siguientes situaciones problemáticas

a) Un triángulo equilátero tiene una altura de 20 cm. ¿Cuál es su perímetro?

b) Una pelota es lanzada hacia arriba y su altura h (con respecto del suelo) en cada instante de tiempo t está dada por la expresión $h(t) = -5t^2 + 15t + 50$. Encuentra el instante de tiempo en la que la pelota toca el suelo.

c) En un triángulo equilátero ABC el lado $AB = x^2 + x$ y el lado $BC = 5x + 5$. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

d) Dados tres números naturales pares consecutivos, se sabe que la suma de los cuadrados de los dos primeros supera en 84 al cuadrado del tercero. Determina cuales son esos números.

e) Dos bicicletas parten simultáneamente de un mismo punto, una hacia el sur y otra hacia el este. Al cabo de unos instantes, la distancia entre ellas es de 100 metros. ¿Cuánto recorrió cada bicicleta si se sabe que la que se dirige al sur hizo 20 metros más que la otra?

f) Determina el número entero del cual se sabe que si sumamos el tercio de su siguiente más el cuadrado de su anterior da como resultado dos unidades menos que su cuádruple.

g) La diferencia entre el cuadrado de la edad de Matías hace 5 años, y 10 veces su edad actual es 94, ¿Cuál era su edad hace 5 años?

h) Determinar un número entero cuyo producto por el opuesto de su consecutivo es igual al doble de su cuadrado.

i) Determina el número natural tal que el producto de él con su anterior sea igual a su doble, más 4.

ECUACIÓN BICUADRADA

Ciertas ecuaciones pueden transformarse en ecuaciones cuadráticas por medio de una sustitución adecuada.

En particular, una **ecuación bicuadrática** es una ecuación que se puede expresar en la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ donde a, b y c son tres números reales y $a \neq 0$.

Para resolver una ecuación bicuadrática hacemos el cambio de variable $x^2 = t$, por lo tanto, $x^4 = t^2$.

La ecuación expresada en función de t es $at^2 + bt + c = 0$.

Una vez resuelta esta ecuación sustituiremos sus soluciones en $x^2 = t$, y obtenemos así las soluciones de la ecuación en x.

Por ejemplo:

Determinar el conjunto solución de: $2x^4 + 17x^2 - 9 = 0$

$2{x^2}^2 + 17x^2 - 9 = 0$

$2t^2 + 17t - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad \textit{Realizamos la sustitución } t = x^2, \textit{ e identificamos los valores: } a = 2 \quad b = 17 \quad c = -9$

$$t_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1;2} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4.2.(-9)}}{2.2}$$

$$t_{1;2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 + 72}}{4}$$

$$t_1 = \frac{-17 + 19}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-17 - 19}{4} = -9$$

Con los valores de t obtenidos, sustituimos en $x^2 = t$

Si $t_1 = \frac{1}{2} \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$$x = \mp\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Si $t_2 = -9 \rightarrow x^2 = -9$

$x = \nexists \; en \; R$

$$\text{Conjunto solución } x = \left\{-\sqrt{\frac{1}{2}};\ \sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$$

Actividad 7: Encuentra, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones, utilizando la sustitución adecuada en el caso que haga falta.

a) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

b) $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$

c) $3x^4 - 7x^2 + 4 = 0$

d) $x^7 - 4x^6 + 4x^5 = 0$