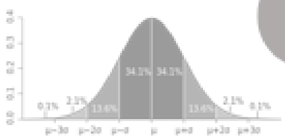
Probabilidad y Estadística 8

Actividades de Aprendizaje



Conceptos y definiciones de esta clase:

Distribuciones de Probabilidad Continua
Distribución Normal
La probabilidad y la distribución normal

Distribución Uniforme: función de densidad, función de distribución, gráficas, esperanza y varianza

1. Distribuciones de Probabilidad Continua

Si una variable aleatoria es una variable continua, su distribución de probabilidad se llama una **distribución de probabilidad continua**.

Una distribución de probabilidad continua difiere de una distribución de probabilidad discreta de varias maneras.

- La probabilidad de que una variable aleatoria continua asuma un valor particular es cero.
- Como resultado, una distribución de probabilidad continua no puede ser expresado en forma tabular.
- En su lugar, se utiliza una ecuación o fórmula para describir una distribución de probabilidad continua.

Muy a menudo, la ecuación que se utiliza para describir una distribución de probabilidad continua se llama una **función de densidad de probabilidad**. Para una distribución de probabilidad continua, la función de densidad tiene las siguientes propiedades:

- Puesto que la variable aleatoria continua se define sobre una gama continua de valores (llamado el dominio de la variable), la gráfica de la función de densidad también será continua durante ese intervalo.
- El área delimitada por la curva de la función de densidad y el eje x es igual a 1, cuando se calcula sobre el dominio de la variable.
- La probabilidad de que una variable aleatoria asuma un valor entre A y B es igual al área bajo la función de densidad limitada por A y B.

Algunas distribuciones continuas de probabilidad son:

- La distribución de probabilidad normal
- La distribución de la "t" de Student

- La distribución de Ji-cuadrado

1.1 La distribución normal

Se trata de una distribución – o mejor dicho, una familia de distribuciones - muy utilizada por el hecho de que muchas variables en biología, física, geología y otras ciencias, se ajustan con perfección a esta distribución. Hablamos de parámetros como la altura, el peso y la vida media, por ejemplo.

Toda distribución normal queda descrita por la siguiente ecuación normal.

1.2 La ecuación normal

En una Ecuación normal, el valor de la variable aleatoria viene dado por la expresión:

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

En donde

x es una variable aleatoria normal,

$\boldsymbol{\mu}$ es la media, y

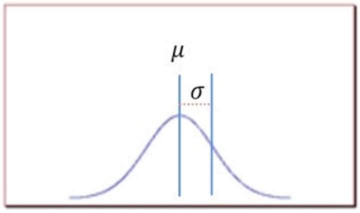
$\boldsymbol{\sigma}$ es la desviación estándar

Nota:

La variable aleatoria x en la ecuación normal se denomina la variable aleatoria normal.
La ecuación normal es la función de densidad de probabilidad de la distribución normal.

1.3 La curva normal

La gráfica de la distribución normal depende de dos factores: la media y la desviación estándar. La media de la distribución determina la localización del centro de la gráfica, y la desviación estándar determina la altura y la anchura de la gráfica. Cuando la desviación estándar es grande, la curva es corta y ancha; cuando la desviación estándar es pequeña, la curva es alta y estrecha. Todas las distribuciones normales son simétricas, en forma de campana curva, como se muestra a continuación:



La curva a la izquierda es má curva a la derecha, porque la curva de la izquierda tiene una desviación estándar más grande.

Nota:

El valor de σ es la distancia desde μ hasta los puntos de inflexión de la curva normal.

1.4 La probabilidad y la curva normal

La distribución normal es una distribución de probabilidad continua. Esto tiene varias implicaciones para la probabilidad.

- El área total bajo la curva normal es igual a 1.
- La probabilidad de que una variable aleatoria normal, **x** es igual a cualquier valor particular es 0.
- La probabilidad de que **x** sea menor que una valor **a** cualquiera, es igual al área bajo la curva normal comprendida entre menos infinito y **a**.
- La probabilidad de que **x** sea mayor que un valor específico **a** es igual al área bajo la curva normal comprendida entre **a** y más infinito.

Por otro lado, cualquier curva normal, independientemente de su media o desviación estándar, se ajusta a la siguiente "regla":

- Alrededor del 68.2% del área bajo la curva cae dentro de una desviación estándar de la media.
- Aproximadamente el 95.4% del área bajo la curva cae dentro de 2 desviaciones estándar de la media.
- Acerca de 99.7% del área bajo la curva cae dentro de 3 desviaciones estándar de la media.

1.5 La distribución normal estándar

La distribución normal estándar, que también se conoce como distribución tipificada o reducida, es aquella que tiene por media el valor cero μ = 0, y por desviación típica la unidad, σ =1.

Su función de densidad es:

$$f(x;0{,}1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1.6 El uso de tablas y calculadoras específicas

Para realizar los cálculos de forma práctica, se puede recurrir a tablas, calculadoras o software adecuados.

Haremos el cálculo de un ejemplo con una calculadora online y con funciones de Microsoft Excel, para luego pasar a explicar el mismo caso utilizando tablas.

Para ello veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 1

Consideremos una línea de producción de adaptadores de video para monitores, en la que se conoce que los productos defectuosos siguen una distribución normal con desviación típica igual a 0.5 y una media de 4. Se pide calcular la probabilidad de que haya:

a) Más de 6 adaptadores defectuosos en una hora.

b) Entre 2 y 5 adaptadores defectuosos en una hora.

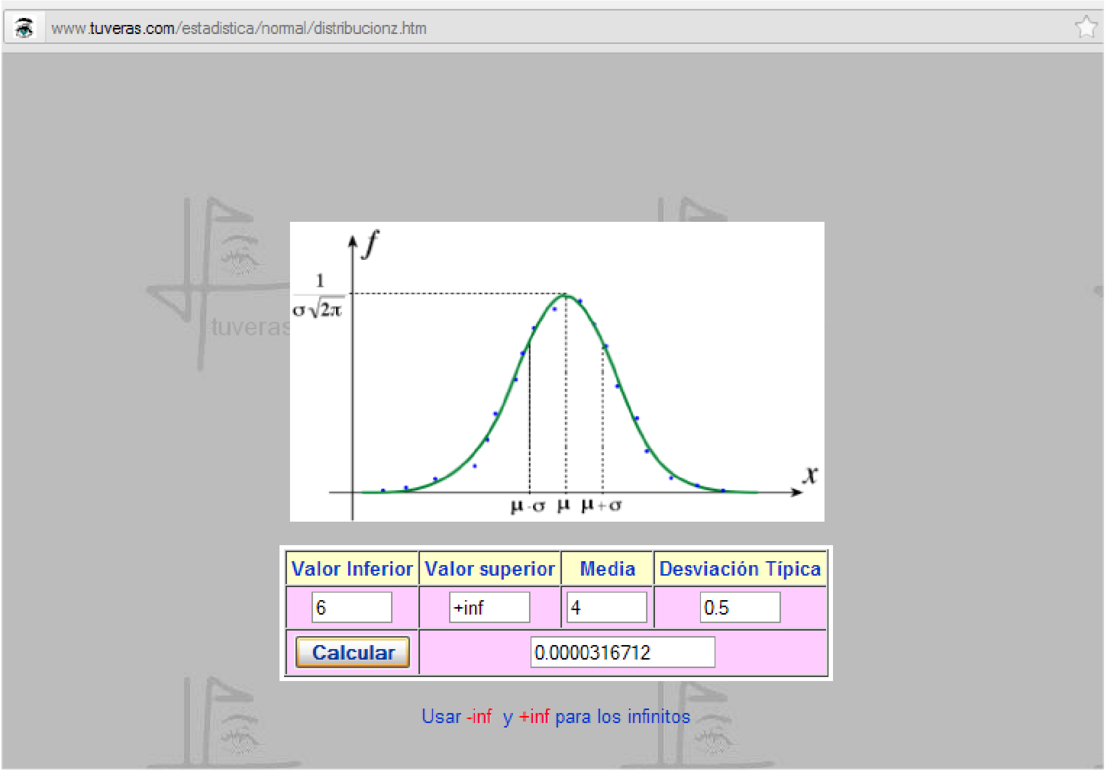
Solución:

- **Utilizando una calculadora online**

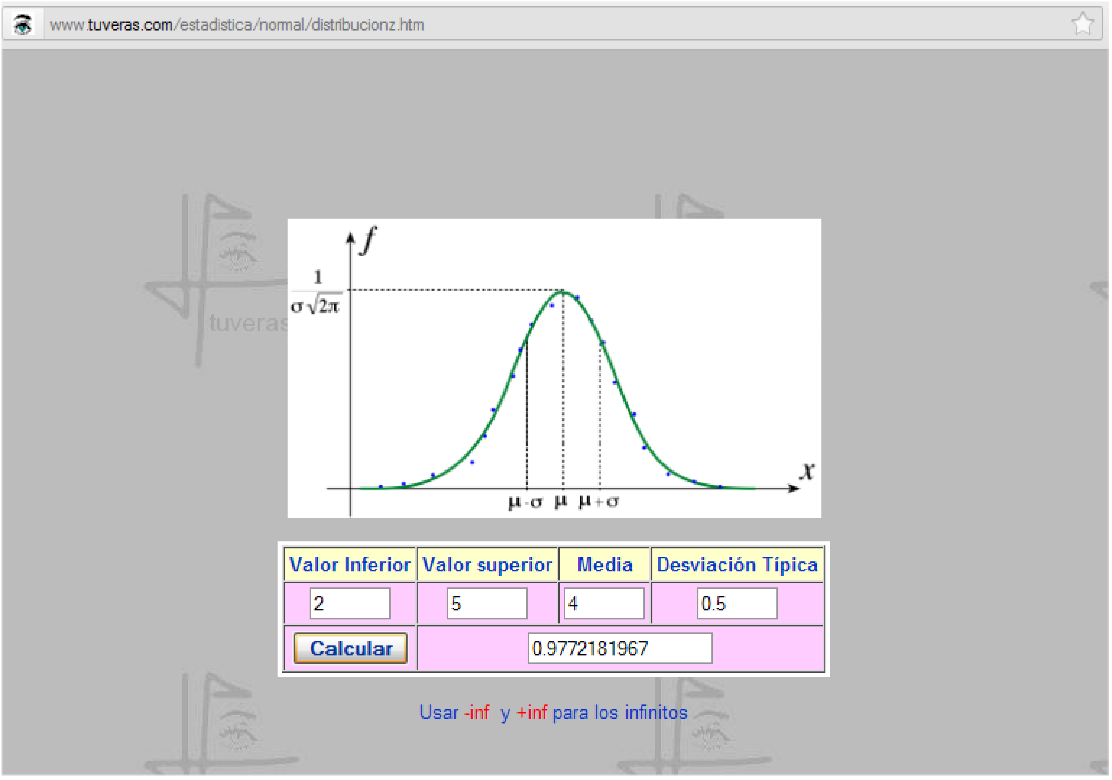
  a) En este caso utilizaremos la calculadora que se encuentra en el siguiente link:

  http://www.tuveras.com/estadistica/normal/distribucionz.htm

  Mostramos en la siguiente figura cómo se han introducido los valores y cuál es el resultado.



b) En el mismo link, ingresamos los valores correspondientes



- <u>**Utilizando Microsoft Excel**</u>

a) Se utiliza la función DISTR.NORM(x;media;desv_estándar;acum)

x es el valor de la variable, en nuestro caso 6

media es igual a 4

desv_estándar es 0.5

acum lo ingresamos con valor 1, porque es para x>6, y es por este mismo motivo que en la fórmula vamos a tener que restar a la probabilidad total el valor que nos devuelve la función.

Nos queda entonces ingresar en la celda lo siguiente

=1-DISTR.NORM(6;4;0,5;1)

El resultado que aparece es **3,16712E-05**, que coincide con el anterior método.

b) Procedemos con la misma fórmula, pero restando los valores de 2 a los de 5. Entonces quedará:

=DISTR.NORM(5;4;0,5;1) - DISTR.NORM(2;4;0,5;1)

Puede verificarse que se obtiene el mismo resultado que con el método anterior.

- **<u>Utilizando Tablas</u>**

Habitualmente se utiliza una tabla de distribución normal estándar, en la que se tipifica la variable, utilizando la siguiente fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Resolvamos para nuestro caso y ubiquemos el resultado en una tabla, en la que se accede con las unidades y decenas en la columna de la izquierda, y las centenas en la fila superior.

a) Calculamos z

$$z = \frac{6 - 4}{0.5} = 4$$

El valor buscado excede los de la tabla, porque su probabilidad es 1. Por lo tanto, al buscar su complemento (recordemos que era para x>6) la respuesta será 0, mientras que con las calculadoras nos daba 0.00003.

b) En este caso calculamos los dos valores de z, luego los ubicamos en la tabla, y por último restamos.

$$z_1 = \frac{2 - 4}{0.5} = -4$$

$$z_2 = \frac{5 - 4}{0.5} = 2$$

$$P(2 < x < 5) = P(-4 < z < 2) = P(z < 2) - P(z > -4) = P(z < 2) - P(z \leq 4) = 0.9772$$

En la página http://www.vitutor.com/pro/5/a_4.html podrá encontrar interesantes ejemplos de las propiedades aplicadas en estos últimos cálculos, así como muchos ejercicios resueltos.

Situación Problemática 1

Demuestre porqué se afirma que el 99.74% de los valores de x en una distribución normal se encuentran a menos de tres desviaciones típicas de la media.

Situación Problemática 2

En una distribución normal de media 3 y desviación típica 1, calcular el valor de a para que $P(3-a \leq x \leq 3+a) = 0.3616$

Situación Problemática 3

La media de los pesos de 500 personas adultas elegidas al azar, es de 74 kg y la desviación típica 4 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántas personas pesan:

a) Entre 68 y 79 kg
b) Exactamente 60 kg
c) Más de 100 kg
d) Menos de 40 kg
e) 40 kg o menos

2.1 La distribución uniforme

La distribución uniforme es aquella que puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo, todos ellos con la misma probabilidad.

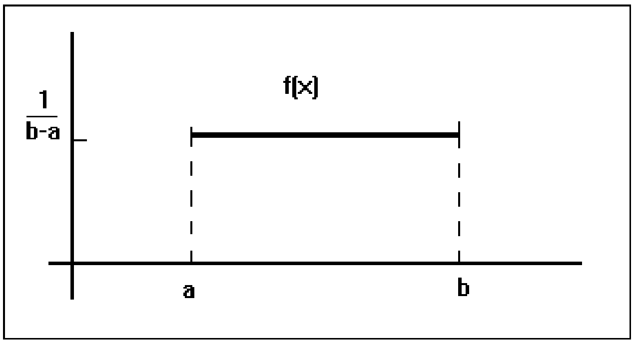
Es una distribución continua porque puede tomar cualquier valor y no únicamente un número determinado (como ocurre en las distribuciones discretas).

2.2 Función y gráfica de una distribución uniforme

La siguiente es la fórmula que representa la función de densidad de una distribución uniforme:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & para\ a \leq x \leq b \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Gráficamente, esa función se representa de la siguiente manera:



A simple vista podemos notar el valor "uniforme" que toma la función, para cualquier valor x comprendido entre a y b, que son los valores entre los cuales está definida la función. El área comprendida bajo esa gráfica vale 1, pues su base mide (b-a) y su altura mide 1/(b-a).

Cuando integramos la función de densidad, obtenemos la función de distribución para la variable x, que nos dará:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & para\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ x \geq b \end{cases}$$

2.3 Valor esperado y varianza en una distribución uniforme

El valor esperado y la varianza de una distribución uniforme quedan definidos por las siguientes fórmulas:

$$E(x) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Nótese que en ambos casos, la fórmula no depende del valor de la variable x. Recordemos que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.

Ejemplo 1

Supongamos que, por informes estadísticos, sabemos que la vida media de un disco rígido se establece entre 8 y 14 años.

a) Compruebe que el área encerrada bajo la curva de esta función uniforme vale 1.

b) Calcule la media y la distribución estándar de esta distribución.

c) ¿Qué probabilidad tenemos de que un determinado disco rígido dure entre 10 y 12 años?

Solución:

a) Esta función tendrá una base que mide 14-8=6 y una altura igual a 1/(14-8)=1/6, entonces 6*1/6=1

b) La media es (8+14)/2=11. La varianza es (14-8)^2/12=3 y su raíz es la desviación estándar, o sea 1.7320…

c) Podemos hallar por separado F(12)=(12-8)/(14-8)=4/6=0.666 y luego F(10)=(10-8)/(14-8)=2/6=0.333 y luego restamos, obteniendo 2/6=0.333

A continuación se muestra una calculadora online que nos brinda todos estos resultados, y las gráficas correspondientes.

ATENCIÓN - en lugar de una coma decimal debe usarse punto decimal!

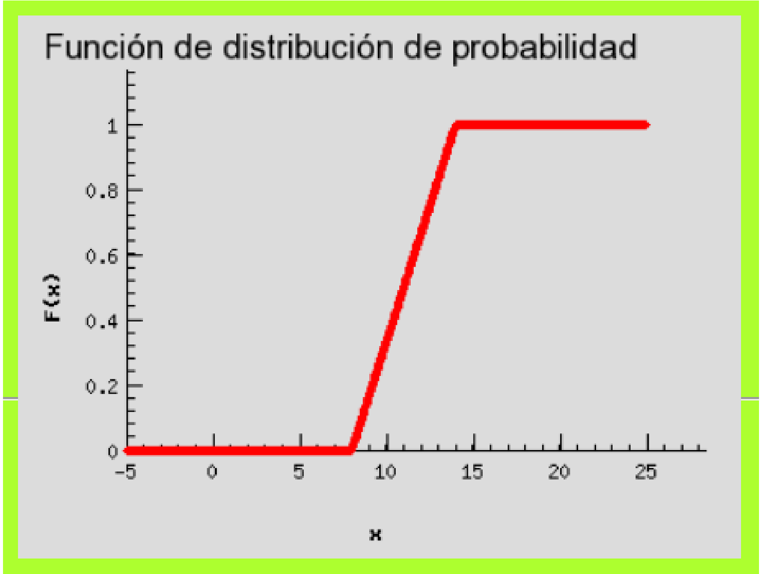
Introduzca los parámetros	a= 8	(a<b)
Introduzca los parámetros	b= 14	(b>a)
Introduzca los parámetros	x_1= 10	($a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$)
Introduzca los parámetros	x_2= 12	($a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$)
	Enviar	

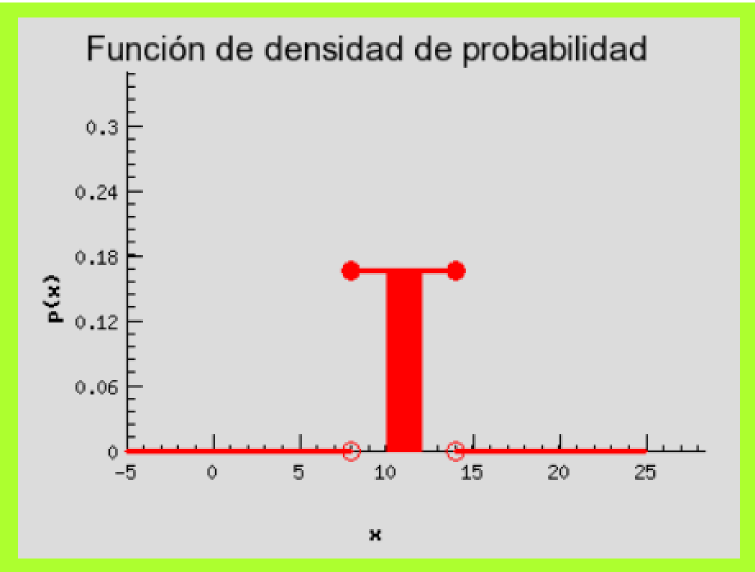
Fórmulas

$X \sim Ro(a,b)$	$P(x) = \begin{cases} 0 & \ldots & x < a \\ \frac{1}{b-a} & \ldots & x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & \ldots & x > b \end{cases}$
$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
$\gamma_1 = 0$	$\gamma_2 = -\frac{6}{5}$

Características de la distribución

Media	E(X)= 11
Varianza	D(X)= 3
Coeficiente de simetría	γ_1= 0
Curtosis	γ_2= -1.2
Probabilidad	P(X∈(10,12))= 0.330000





http://www.elektro-energetika.cz/calculations/ro.php

El siguiente es un ejercicio extraído del libro:

> *ANDERSON, David; SWEENEY, Dennis; WILLIAMS, Thomas - Estadística para Administración y Economía (10ma ed)*

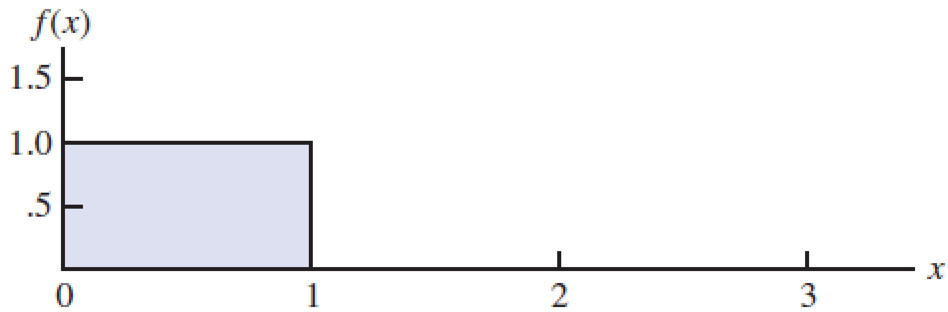
En el ejercicio se nos muestra una aplicación de esta distribución para una función muy conocida de Microsoft Excel, =ALEATORIO(), y que también encontramos en la mayoría de los lenguajes de programación (random, rand, etc.)

La mayoría de los lenguajes de computadora tienen una función para generar números aleatorios. En Excel, la función ALEATORIO se usa para generar números aleatorios entre 0 y 1. Si x denota un número aleatorio generado mediante ALEATORIO, entonces x es una variable aleatoria continua, cuya función de densidad de probabilidad es la siguiente.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a. Haga la gráfica de la función de densidad de probabilidad.
b. ¿Cuál es la probabilidad de generar un número aleatorio entre 0.25 y 0.75?
c. ¿De generar un número aleatorio menor o igual que 0.30?
d. ¿De generar un número aleatorio mayor o igual que 0.60?
e. Genere 50 números aleatorios ingresando = ALEATORIO() en 50 celdas de una hoja de cálculo de Excel.
f. Calcule la media y la desviación estándar de los números del inciso e.

Solución:



b. $P(.25 < x < 0.75) = 1(0.50) = 0.50$

c. $P(x \leq 0.30) = 1(0.30) = 0.30$

d. $P(x > 0.60) = 1(0.40) = 0.40$