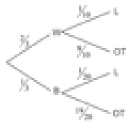
Probabilidad y Estadística 5

Actividades de Aprendizaje



Conceptos y definiciones de esta clase:

- Sucesos Independientes
- Teoría de Conteo
- Arreglos
- Combinaciones
- Permutaciones
- Regla de Bayes
- Variable aleatoria discreta
- Distribución Binomial

1. Probabilidad

1.11 Sucesos Independientes.

Dos o más sucesos pertenecientes a un mismo Espacio Muestral son sucesos independientes sí, y sólo si la presentación de uno de ellos no modifica el valor de la probabilidad del o de los otros.
En símbolos:
Dos sucesos A y B son independiente si se cumple que
$P(A/B) = P(A)$ *La primera expresión P(A/B) se lee: "Probabilidad de A sabiendo que ocurrió B". Entonces si es igual a la P(A) quiere decir que B no condiciono nada.*

Y

$P(B/A) = P(B)$. *Esta expresión P(B/A) se lee: "Probabilidad de B sabiendo que ocurrió A". Entonces si es igual a la P(B) quiere decir que A no condiciono nada.*

Si dos o más sucesos son independientes, entonces la probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades marginales de cada uno de ellos.
Para dos sucesos
$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
Para *k* sucesos,
$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \ldots P(A_k)$$

Ejemplo 1

En el departamento de reclamos de una empresa trabajan tres empleados, Andrés, Carlos y Juan. La probabilidad de que Andrés esté ausente un día cualquiera es 0,04, de que Carlos esté ausente un día cualquiera es 0,11 y de que Juan esté ausente un día cualquiera es 0,08. Calcular la probabilidad de que en un día cualquiera estén presente los tres.

Solución

Los sucesos aleatorios son
A: Suceso "Andrés está presente"
B: Suceso "Carlos está presente"
C: Suceso "Juan está presente"
Los datos que el problema nos brinda son:
$P(\overline{A}) = 0{,}04$ Es la probabilidad marginal de que Andrés no esté presente
$P(\overline{B}) = 0{,}11$ Es la probabilidad marginal de que Carlos no esté presente
$P(\overline{C}) = 0{,}08$ Es la probabilidad marginal de que Juan no esté presente

Hay que calcular la probabilidad conjunta de que ocurra el suceso A y que ocurra el suceso B y que ocurra C.

En el enunciado del problema no se hace ninguna referencia sobre las modificaciones de alguno de estos valores de probabilidad si previamente se verifica la presencia o ausencia de los otros empleados, por lo tanto, los sucesos son independientes.
De acuerdo a lo estudiado en el acápite correspondiente, la probabilidad conjunta de sucesos independientes es igual al producto de las probabilidades marginales de cada uno de ellos, luego,
$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
pero
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}11 = 0{,}89$
$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$
Luego,
$P(ABC) = 0{,}96 \cdot 0{,}89 \cdot 0{,}92 = 0{,}786048$
La probabilidad de que en un día cualquiera estén presentes los tres es de 0,786048

1.12 Regla de la Multiplicación.

Dados dos sucesos A y B definidos en un espacio muestral E.

$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$ que también se puede expresar como

$P(B \cap A) = P(B).P(A/B)$

Ejemplo 2:

Una caja contiene 3 bolas rojas y 2 bolas azules. Sea A el suceso definido como: "la primera bola que se saca es azul" y el suceso B definido como: "la segunda bola que se saca es azul". Las bolas no se regresan a la caja luego que se sacaron. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas extraídas sean azules?

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

P(A)= $\frac{2}{5}$ La probabilidad del segundo suceso B está condicionada, porque ya salió una bola azul, con lo cual esa probabilidad quedara planteada como:

P (A / B) = $\frac{1}{4}$ El 1 en el numerador es porque quedo solo una bola azul, y el 4 en el denominador es porque de 5 bolas en total, quedaron 4.

Luego: $P\ (A\ \cap B) = \ \frac{2}{5}.\frac{1}{4}$

1.13 Teoría de Conteo

Para obtener las probabilidades de los hechos complejos a menudo es difícil la enumeración de los casos y para facilitar la labor se suele recurrir a la teoría del conteo.

Esto se refiere a las formas en que pueden arreglarse los elementos de un conjunto.

Hay tres formas de hacerlo:

- **Variaciones**. Son los subgrupos de *n* objetos tomados de a 2 son $V_4^3 = 4 \cdot 3 = 12$
  Sean los objetos A, B, C y D. Las variaciones de estos objetos tomados de a 2 son:
  AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC
  La fórmula que se usa es:
  $$V_n^r = \frac{n!}{(\text{n - r})!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

- **Permutaciones.** Son los modos de clasificar todos los objetos de conjuntos o sea *n* objetos tomados de a *n*, lo que se indica con *factorial de n* ***En símbolos: n!***
  Por ejemplo: 5! =5.4.3.2.1=120
  3! =3.2.1=6
  La fórmula es:
  $P_n = n!$
  Si tenemos cuatro objetos A, B, C, D, las permutaciones $P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$. Así a continuación podemos ver los 24 grupos que se forman:

ABCD	BCDA	CDAB	DABC
ABDC	BCAD	CDBA	DACB
ACBD	BDAC	CBAD	DBAC
ACDB	BDCA	CBDA	DBCA
ADBC	BACD	CABD	DCBA
ADCB	BADC	CADB	DCAB

- **Combinaciones.** Son las variaciones de *n* objetos tomados de a *r,* pero sin tener en cuenta el orden.
  Es el cociente entre las variaciones de *n* objetos tomados de a *r* y las permutaciones de *r*:

$$C_n^r = \frac{V_n^r}{P_r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

Para cuatro objetos tomados de a 2 tenemos

$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!.2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = \frac{12}{2} = 6$$

Si los cuatro objetos son A, B, C, D, las combinaciones tomadas de a 2 serán: AB, AC, AD, BC, BD y CD.

El símbolo C_n^r es decir combinaciones de *n* tomados de a *r*, se puede simbolizar por $\binom{r}{n}$

1. Actividad para la Facilitación de los Aprendizajes

Situación Problemática 8

Se saca una bolilla al azar de una urna que contiene 6 bolillas rojas, 4 bolillas blancas y 5 bolillas azules. Determine la probabilidad de que:

a- sea roja
b- sea blanca
c- sea azul
d- no sea roja
e- sea roja o blanca

Situación Problemática 9

Se sacan dos cartas de un mazo común de 52. Halle la probabilidad de que ellas sean ambas ases si la primera carta: a) es reemplazada y b) no es reemplazada.

Situación Problemática 10

Halle la probabilidad de conseguir un 4 por lo menos una vez en 2 tiradas de un dado sano.

Situación Problemática 11

Cuántas son: a- las variaciones de 7 objetos tomados de a 3, b- las permutaciones de 7 objetos y c- las combinaciones de 7 objetos tomados de a 3.

1.14 Teorema de Bayes

El teorema de Bayes (o regla de Bayes) se utiliza para conocer la probabilidad de que un suceso ocurra cuando se conoce la probabilidad de otros sucesos (que deben cumplir con ciertos requisitos) y que de alguna manera condicionan al primero. En términos de Ciencias de la Computación, el teorema de Bayes ha devenido en modelos que se denominados de “Bayes Ingenuo” o “Naive Bayes” y que se han venido utilizando en la detección de posibles correos no deseados (spam) a partir de algunas palabras que aparecen en los mensajes.

Cabe señalar que, debido a las libertades y ciertas subjetividades en la aplicación y utilización de este teorema, se han desatado algunas polémicas a lo largo de la historia, llegando incluso a generar su propia rama de la estadística.

Desde un punto de vista práctico, este teorema recrea un proceso de ingeniería inversa respecto de lo estudiado sobre la probabilidad total. En el caso de la probabilidad total calculamos la probabilidad de que un determinado suceso ocurra, conociendo las probabilidades de todos sus antecedentes, y cuánto inciden cada uno de ellos sobre el suceso estudiado, mientras que, en Bayes, dado ese resultado, nos interesa saber qué probabilidad hay de que tenga como origen alguno de los antecedentes.

Aclararemos esto último con un ejemplo clásico antes de pasar a las fórmulas.

En una empresa contamos con tres máquinas (M1, M2 y M3) que fabrican un determinado tipo de sillas. Conocemos los porcentajes que cada máquina aporta al total de la producción y también la probabilidad de sillas defectuosas que produce cada máquina.

Si queremos calcular la probabilidad de que una silla salga defectuosa, utilizamos la probabilidad total. En cambio, si queremos conocer cuál es la probabilidad de que una silla defectuosa se haya fabricado con una determinada máquina, utilizaremos la regla de Bayes.

Entonces, partiendo de la fórmula para el cálculo de la probabilidad total de un suceso B

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

el teorema de Bayes nos propone encontrar:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$$

$P(A_i/B)$ se lee “Probabilidad de Ai sabiendo que se da B” o “Probabilidad de Ai conociendo B”, y recordemos que P(B) es la probabilidad total de un suceso B.

Ejemplo 3:

Para el caso que mencionamos anteriormente de las máquinas M1, M2, M3 que producen sillas sabemos que los porcentajes de la fabricación total son respectivamente 50%, 30% y 20%, y que la probabilidad de que fabriquen una silla defectuosa son 0,1 para la máquina M1, 0,25 para la M2 y 0,3 para la M3.

Si tomamos una silla y resulta que es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina M1?

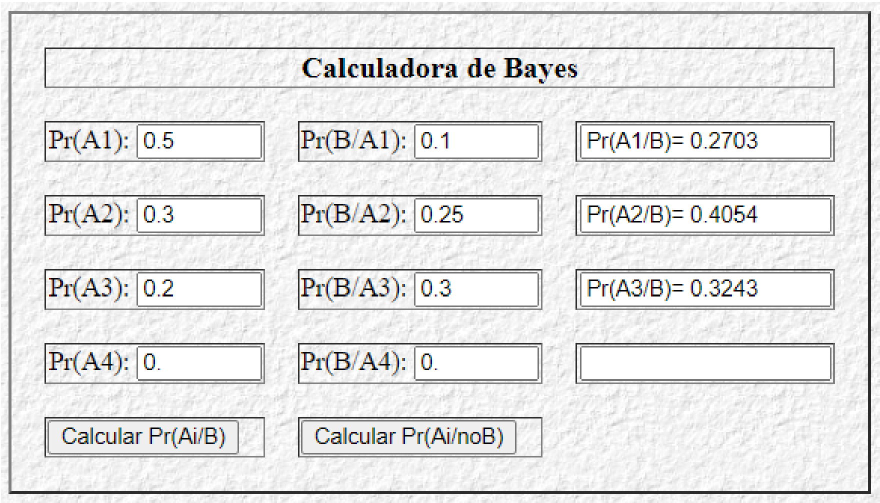
Entonces,

P (silla defectuosa) = P(M1). P (def en M1) + P(M2). P (def en M2) + P(M3). P (def en M3)

Llamando D al evento “silla defectuosa”

P(D) = 0,5. 0,1 + 0,3. 0,25 + 0,2. 0,3 = 0,185 (esta sería la probabilidad de que una silla se fabrique defectuosa en la fábrica)

Ahora bien, ¿cuál es la probabilidad de que una silla defectuosa provenga de la M1?



Utilizando la regla de Bayes

$$P(M1/D) = \frac{P(M1) \cdot P(D/M1)}{P(D)}$$

O sea

$P(M1/D) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}1}{0{,}185} = 0{,}2703$ lo cual quiere decir que hay un 27,03% de probabilidad de que provenga de la máquina 1.

Te invitamos a que pruebes realizar los cálculos para conocer qué probabilidad hay de que esa misma silla hubiera sido fabricada en la máquina 2, y en la máquina 3.

También te indicamos un enlace web en el que se pueden calcular esas probabilidades, aquí los resultados de utilizarlo: https://www.ugr.es/~jsalinas/bayes.htm

1.15 Variable Aleatoria Discreta

Si realizamos n pruebas o repeticiones de un experimento aleatorio, obtenemos un conjunto de n observaciones o resultados, que constituyen lo que se llama una muestra aleatoria de tamaño n. Este conjunto de resultados dará lugar a una tabla estadística en la cual a unos valores de la variable corresponden unas ciertas frecuencias. Así, si lanzamos un dado 10 veces, podríamos obtener la colección de resultados siguientes:

1, 5, 4, 2, 3, 4, 1, 3, 4, 5

La variable X que representa únicamente los n resultados de n realizaciones de un experimento aleatorio recibe el nombre de ***variable estadística***.
Si imaginamos que el experimento aleatorio se repite indefinidamente, la infinidad de resultados posibles da origen a la noción de ***variable aleatoria*** asociada al experimento. En el ejemplo que estamos considerando, si suponemos que se lanza el dado un número grande de veces, los resultados posibles serán 1, 2, 3, 4, 5, 6 y, además, las frecuencias relativas de cada resultado tienden a la probabilidad, que es $\frac{1}{6}$.
La variable, que representamos por ξ, y que toma los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, con probabilidad $\frac{1}{6}$ para cada valor, recibe el nombre de ***variable aleatoria***.
Podemos afirmar que una ***variable aleatoria*** es una variable cuyos valores dependen del resultado de un experimento aleatorio. Frecuentemente el resultado de un experimento se expresa de forma numérica y, en consecuencia, tal resultado es una variable aleatoria. Por ejemplo, observar la altura de un colectivo de individuos. De modo similar a las variables estadísticas, clasificamos las variables aleatorias en discretas o continuas según que el conjunto de valores que puedan tomar sea o no numerable.

Variable aleatoria discreta: Variable aleatoria cuantitativa que puede asumir un numero de valores que se pueden contar, que son numerables.

Variable aleatoria continua: Variable aleatoria cuantitativa que puede asumir un número incontable de valores.

1.16 Función de probabilidad para una variable aleatoria discreta.

En el capítulo anterior hablábamos de sucesos y eventos, y de sus probabilidades. Una función de probabilidad es una correspondencia que le asigna a los valores de una variable aleatoria probabilidades.

Ejemplo 4:

Consideremos el siguiente experimento: Se lanzan dos monedas y observamos el número de caras que salen. ¿Qué valores puede tomar el número de caras?
Si llamamos a la variable aleatoria discreta X, entonces X podrá ser 0, 1 o 2. Ahora hallemos según todo lo visto hasta ahora los valores de la probabilidad de los valores de la variable aleatoria. Es decir:

P(X=0); P(X=1) y P(X=2)
Que X=0 quiere decir que no salió ninguna cara, entonces es hallar la probabilidad de que haya salida las dos veces cecas. Luego:

P (X=0) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$

Si la variable aleatoria discreta X=1, entonces la debemos hallar la probabilidad de que haya salido una cara y luego ceca, pero también puede haber salido primero ceca y luego cara. Entonces:

P(X=1) = P (cara, ceca o ceca, cara) = P (cara, ceca) + P (ceca, cara) = …….

Completando los calculos y razonando de la misma manera, construimos la siguiente tabla, similar a la que armábamos para la frecuencia, pero con probabilidades

X	**P(X)**
0	0,25
1	0,50
2	0,25
	$\sum p(x) = 1$

Toda función de probabilidad debe cumplir dos propiedades:

1) $0 \leq P(X) \leq 1$

2) $\sum p(x) = 1$

En el Ejemplo 4 se cumplen ambas propiedades.

Como habrán observado la tabla anterior es similar a las tablas que armábamos en la Unidad de Aprendizaje 1, donde en lugar de probabilidad aparecía frecuencia. Es evidente que existe una relación.
Supongamos que estamos en una clase presencial o virtual que tuviera 30 alumnos. Se les solicita de tarea que realicen el siguiente experimento: "cada alumno tira un dado 100 veces y anota el numero que sale" Para recolectar los datos más fáciles, armamos una tabla, de dos columnas como la anterior, donde en la primera columna escribimos X que serán los valores que puedo obtener al tirar mi dado, o sea los resultados de mi experimento, por lo tanto, el espacio muestral. Luego realizo una marca al lado de cada número que va saliendo.

X	**frecuencia**
1	//////…
2	///////////…
3	///////…
4	//////…
5	////////////..
6	/////…

Por supuesto todas las marquitas que realice deben sumar 100, porque tire el dado 100 veces. Es decir, n=100

Luego cuando nos volvemos a encontrar tendremos 30 tablas similares a la que represente y organizamos los resultados. ¿El número de veces que repetí el experimento será cuánto?

Esta entonces será nuestra **Situación Problemática 12** que resolveremos como trabajo colaborativo.

Vamos a poder verificar lo que llamaremos la **Ley de los grandes números.**

Es comun que al conjunto de los pares ($X_i\,; P(X_{i)}$) se lo denomine "Distribución de Probabilidad"

1.17 Distribución Binomial

La distribución binomial es una **distribución discreta** muy significativa que surge en muchas aplicaciones industriales de control de calidad, bioestadísticas, sistemas de producción, etc. Esta distribución aparece al realizar repeticiones independientes de un experimento que tenga **respuesta binaria**, como aquellas que dan "verdadero" o "falso", "correcto" o "incorrecto", "éxito" o "fracaso", "encendido" o "apagado" y otros por el estilo.

La variable discreta que cuenta el número de éxitos en **n pruebas** independientes de ese experimento, cada una de ellas con la misma **probabilidad de "éxito" igual a p**, sigue una distribución binomial de parámetros **n** y **p**. Este modelo se aplica a poblaciones finitas en las que se toman elementos al azar con reemplazo, y también a poblaciones conceptualmente infinitas, como por ejemplo las piezas que produce una máquina, siempre que el proceso de producción sea: **estable** (la proporción de piezas defectuosas se mantiene constante a largo plazo), y **sin memoria** (el resultado de cada pieza no depende de las anteriores).

Ejemplo 2

Supongamos que en el día de hoy Usted se dirige a clases como de costumbre, y cuando llega, el profesor les propone realizar una pequeña evaluación como para verificar que los alumnos hayan repasado los contenidos, tal como se los ha pedido la clase anterior. Y para hacerlo, decide que una buena herramienta es tomar un pequeño cuestionario de cuatro preguntas que se contestan con opción múltiple, dando tres opciones para cada pregunta. Esta es la manera en que se vería la evaluación:

Evaluación

Pregunta 1: …

Respuestas: a) …

b) …

c)…

Pregunta 2: …

Respuestas: a) …

b) …

c)…

Pregunta 3: …

Respuestas: a) …

b) …

c)…

Pregunta 4: …

Respuestas: a) …

b) …

c)…

La verdad es que Usted no ha tenido mucho tiempo de repasar durante la semana, pero se considera una persona afortunada que saldrá exitosa del examen, aún sin haber estudiado.

Deténgase un minuto. ***¿Se ha puesto a pensar qué probabilidades de éxito tiene?***

Bueno, vamos a resolver esta situación con lo recientemente aprendido.

Para comenzar, ***anote en un papel cuáles serían las respuestas que elegiría***

A priori sabemos que nuestras posibilidades van desde el fracaso total (las cuatro preguntas incorrectas) hasta un rotundo éxito (las cuatro preguntas respondidas correctamente).

Ahora bien, de acuerdo a lo recién visto, tendremos que definir los dos parámetros **n** y **p**, a saber:

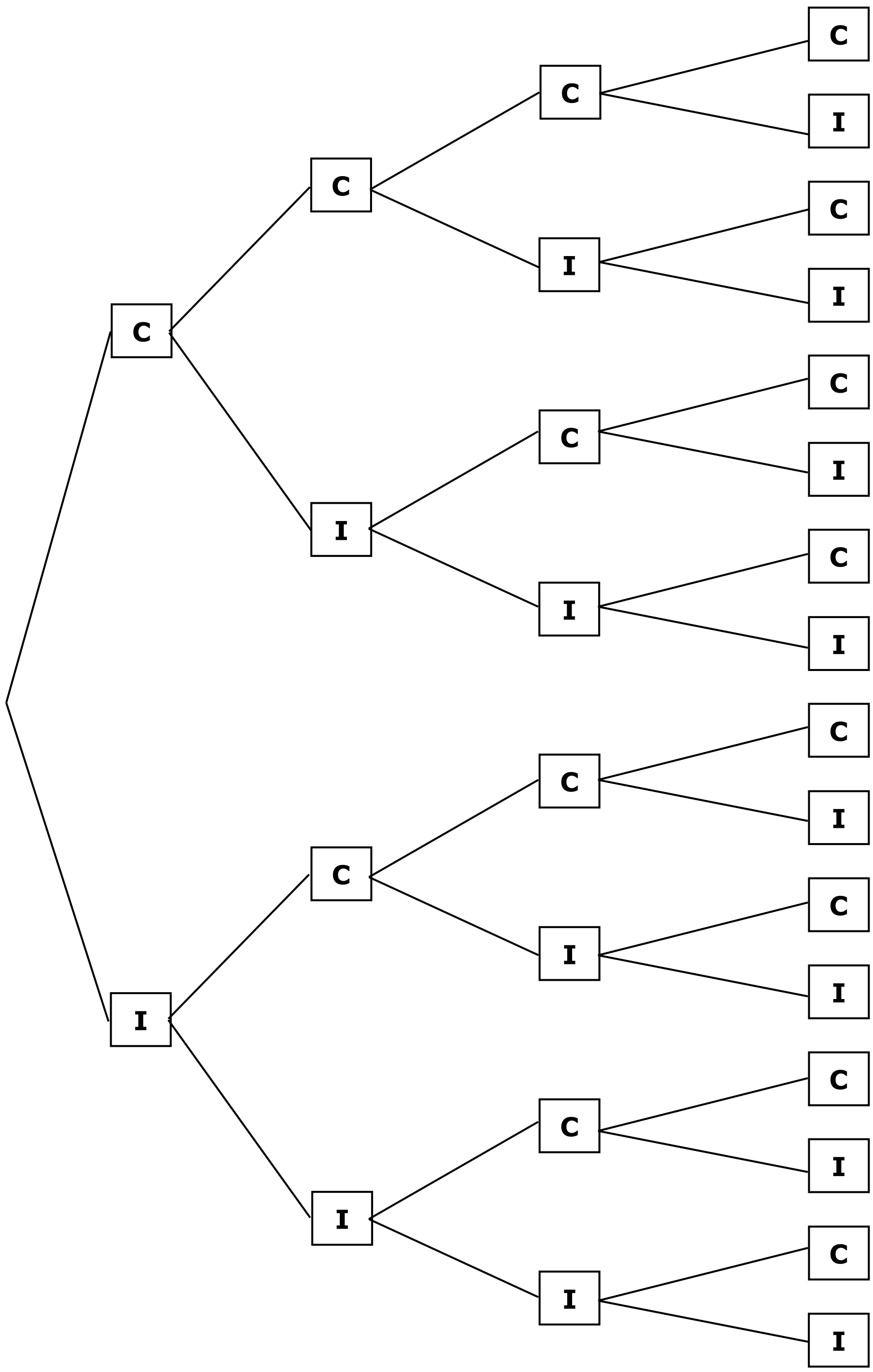
n será la cantidad de respuestas acertadas (respuestas correctas)

p será la probabilidad que tiene cada n

Con respecto a **n**, no habrá demasiadas dudas, sabemos que es un número entero, que en este caso tomará valores entre 0 (lo que anteriormente mencionamos como ninguna respuesta correcta), hasta un valor de 4 (las cuatro preguntas correctas).

Con respecto a **p**, tendremos que hallar las probabilidades de cada situación. Para comenzar, evaluemos cuáles son las posibilidades. Esto ha sido visto en unidades anteriores, y básicamente puede materializarse realizando un diagrama de árbol, o una tabla.

Si elegimos utilizar un diagrama de árbol, la situación se vería de la siguiente manera:



También podemos elegir otra manera de representación de esta situación. Por ejemplo, utilizar una tabla:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Total Correctas
C	C	C	C	4
C	C	C	I	3
C	C	I	C	3
C	C	I	I	2
C	I	C	C	3
C	I	C	I	2
C	I	I	C	2
C	I	I	I	1
I	C	C	C	3
I	C	C	I	2
I	C	I	C	2
I	C	I	I	1
I	I	C	C	2
I	I	C	I	1
I	I	I	C	1
I	I	I	I	0

Cualquiera sea el método elegido, enseguida podrá apreciarse, para cada caso posible, cuántas veces se logra el objetivo (que es dar una respuesta correcta.

Ahora bien, como cada pregunta contiene tres respuestas, la probabilidad de responder correctamente es de 1/3, mientras que la de responder incorrectamente es de 2/3.

De esta manera, para el caso de que usted acierte las cuatro, la probabilidad es:

$$P(n = 4) = \frac{1}{3} x \frac{1}{3} x \frac{1}{3} x \frac{1}{3} = \frac{1}{81} = 0.0123 \ldots$$

De manera similar, no acertar a ninguna tiene una probabilidad:

$$P(n = 0) = \frac{2}{3} x \frac{2}{3} x \frac{2}{3} x \frac{2}{3} = \frac{16}{81} = 0.1975 \ldots$$

Y así podemos calculas las probabilidades para n=1, n=2 y n=3. **¡¡Pero atención!!** En estos casos la ocurrencia deja de ser 1 como en las dos anteriores.

Por ejemplo, la probabilidad de n=1 es:

$$P(n = 1) = 4\, x \frac{1}{3} x \frac{2}{3} x \frac{2}{3} x \frac{2}{3} = \frac{32}{81} = 0.395 \ldots$$

Nótese que se multiplica por 4, puesto que hay cuatro posibilidades de responder una sola respuesta correcta.

Una vez realizados todos los cálculos, podremos completar la siguiente tabla:

n	P(n)
0	0.1975
1	0.3951
2	0.2963
3	0.0987
4	0.0123
Total	0.9999

Cabe observar que se ha preferido tomar cuatro decimales para aproximar el total de probabilidades a 1. Se pueden utilizar menos decimales sin problema, siempre y cuando se redondeen correctamente los resultados y se verifique que la suma de probabilidades de por resultado 1.

Nota importante para el alumno:

Es muy común, en este tipo de ejercicios confundir el tipo de respuesta con la cantidad de resultados. Recordemos que se trata de una distribución **binomial**, que tendrá **dos** opciones, por ejemplo "responder bien" y "responder mal", sin importar cuántos resultados tiene cada pregunta, si bien es este número el que dará mayores o menores probabilidades a cada situación.

Situación Problemática 13

En base al análisis realizado responda las siguientes preguntas:

a- Si la evaluación se aprueba con un mínimo de tres preguntas respondidas correctamente, ¿qué probabilidades tiene de aprobar?
b- ¿Cuál es el resultado más probable de obtener?
c- Si en la clase hay 23 alumnos y ninguno ha estudiado. ¿Cuántos habrán aprobado el examen "adivinando" las respuestas?
d- Suponiendo que las respuestas correctas son 1.c, 2.c, 3.a, 4.b. ¿Qué resultado obtuvo con el método de "adivinar" las respuestas?

Situación Problemática 14

Solicitar a varias personas (no menos de 10) que adivinen los resultados de esta evaluación, y luego construir una tabla con frecuencias relativas para n desde 0 a 4 y compararlo con los resultados obtenidos en nuestro análisis.

Situación Problemática 15

Repetir el ejercicio realizado como ejemplo, pero suponiendo 10 preguntas con posibilidades de verdadero (V) y falso (F), en el que se aprueba con 6 respuestas correctas. ¿Es más conveniente para un alumno que no estudió o menos conveniente?

Es natural que a estas alturas uno se pregunte cómo sabe si se encuentra frente a un experimento en el que podrá aplicar lo aprendido, o cómo diseñar correctamente un estudio para que puedan aplicarse estos conocimientos.

Para facilitar esta tarea enunciaremos brevemente algunas propiedades que se cumplen en un experimento de este tipo.

1. Hay sólo dos resultados posibles para la respuesta de cada prueba, que podemos generalizar como "correcto" o "incorrecto".
2. Se realiza una cantidad n de pruebas independientes unas de otras (los resultados de cada una de ellas no tienen influencia sobre el resultado de las restantes).
3. La probabilidad de éxito más la probabilidad de fracaso es 1.
4. La variable binomial aleatoria representa la cantidad de pruebas exitosas que se obtienen, y toma un valor de 0 a n.

Si analizamos nuestro ejemplo según estas propiedades, obtenemos que:

1. Se cumple porque hay sólo dos posibilidades para cada pregunta, aun cuando tenga tres posibilidades de respuesta. En otras palabras, la pregunta está bien o mal respondida.
2. Los resultados son independientes, porque no dependen de otros.
3. La probabilidad de éxito es 1/3 y la de fracaso es 2/3, y su suma es 1.
4. La cantidad de preguntas respondidas puede ir de 0 a 4.

La distribución discreta de probabilidad se suele denominar **distribución binomial** porque para *r=0, 1, 2, 3, …, n* corresponde a los sucesivos términos de la forma o expansión binomial. Todos conocemos la expansión del binomio:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

En general, si tenemos p = probabilidad del éxito y $q = 1 - p$ = probabilidad del fracaso, la expansión será:

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1} + C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + \ldots + q^n$$

y los valores de las combinaciones C_n^1, C_n^2, C_n^3, etc. se llaman coeficientes binomiales.
Así, por ejemplo, si queremos saber cuál es la probabilidad de obtener 3 caras tirando 5 monedas, como p=q=0,5 hacemos la expansión correspondiente:

$$(p+q)^5 = p^5 + 5 \cdot p^4 \cdot q + 10 \cdot p^3 \cdot q^2 + 10 \cdot p^2 \cdot q^3 + 5 \cdot p \cdot q^4 + q^5$$

buscamos el término correspondiente y obtenemos el cociente entre el coeficiente binomial correspondiente y la cantidad total de ensayos o tiradas de monedas y tenemos:

$$= 10 \cdot p^3 \cdot q^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32} = 0{,}31$$

Este calculo corresponde con la formula de la Distribución Binomial.

$$P_{(3)} = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5\,!}{2\,!\,3\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{120}{384} \cdot\cdot = 0{,}3125$$

Generalizando:

$$P_{(r)} = C_n^r \cdot p^r \cdot q^{n-r}$$

Esperanza Matemática de una distribución binomial.

Sabemos que cuando una variable aleatoria o sea al azar, puede tomar solo un conjunto finito de valores, es decir valores que son números enteros (por ejemplo, cantidad de hijos en una familia, caras de un dado, etc.) hablamos de una variable discreta. En este caso la distribución de probabilidad de que una familia tenga 2 o más hijos y una probabilidad de que tenga más de 2 hijos y menos de tres.
Siempre que tenemos una variable aleatoria discreta en la que haya valores de x_1 a

x_n la serie de las probabilidades de ocurrencia para los *n* valores es igual a 1, es decir que:

$$p(x_1)+p(x_2)+p(x_3)+\ldots+p(x_n)=1$$

La media aritmética de una distribución de probabilidad se llama **esperanza matemática**. Es decir, el valor esperado para una variable aleatoria X cuyo símbolo es E(X) se obtiene sumando el producto de cada uno de los valores en que puede darse la variable por su probabilidad, es decir:

$$E(X)=\sum X\cdot p(X)$$

Por ejemplo, si tenemos la siguiente distribución.

X = número de hijos	Familia	p(X)	X.p(X)
1	10	10/120	(1*10) /120
2	20	20/120	(2*20) /120
3	30	30/120	(3*30) /120
4	25	25/120	(4*25) /120
5	20	20/120	(5*20) /120
6	15	15/120	(6*15) /120
	120		430

$$E(X)=\sum X\cdot p(X)=\frac{430}{120}=3{,}58$$