PLP - Práctica 6: Resolución en Lógica

Gianfranco Zamboni

20 de marzo de 2018

Resolución en Lógica Proposicional

6.1. Ejercicio 1

Formula	FNC	FC
$p \supset p$	$\neg p \vee p$	$\{\neg p, p\}$
$(p \wedge q) \supset p$	$\neg p \vee \neg q \vee p$	$\{\neg p, \neg q, p\}$
$(p \vee q) \supset p$	$(\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)$	$\{\{\neg p, p\}, \{\neg q, p\}\}$
$\neg(p \iff \neg p)$	$\neg p \vee p$	$\{\{\neg p, p\}\}$
$\neg(p \wedge q) \supset (\neg p \vee \neg q)$	$(p \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q)$	$\{\{p, \neg p, \neg q\}, \{q, \neg p, \neg q\}\}$
$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee r)$	$\{\{p\}, \{p, r\}, \{q, p\}, \{q, r\}\}$
$(p \wedge q) \supset r$	$\neg p \vee \neg q \vee r$	$\{\neg p, \neg q, r\}$
$p \supset (q \supset r)$	$\neg p \vee \neg q \vee r$	$\{\neg p, \neg q, r\}$

6.2. Ejercicio 2

I. Para probar que una fórmula es una tatulogía hay que negarla, escribirla en forma clausal y ver que es insatisfactible agregando resolventes hasta llegar a la resolvente $\square$. Las tautologías son:

- $(p \supset p)$.

  Su negación $(p \wedge \neg p)$ escrita en forma clausal es $S = \{\{p\}, \{\neg p\}\}$. La resolvente entre $\{p\}$ y $\{\neg p\}\}$ es $\square$. Entonces S es insatisfacible.

- $(p \wedge q) \supset p$.

  Su negación $(p \wedge q \wedge \neg p)$ escrita en forma clausal es $S = \{\{p\}, \{q\}, \{\neg p\}\}$. Resolviendo $\{p\}$ y $\{\neg p\}\}$ obtenemos $\square$. Entonces S es insatisfactible.

- $\neg(p \iff \neg p)$.

  Su forma normal clausal es $(p \vee \neg p)$ y su negación $(p \wedge \neg p)$ que es el primer item, entonces es una tautología.

- $\neg(p \wedge q) \supset (\neg p \vee \neg q)$.

  Su negación $((\neg p \vee \neg q) \wedge p \wedge q$ escrita en forma clausal es $S = \{\{\neg p, \neg q\}, \{p\}, \{q\}\}$.

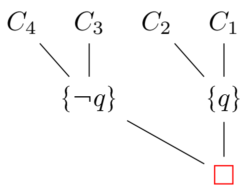
  De $\{p\}$ y $\{\neg p, \neg q\}$, obtenemos la resolvente $\{\neg q,\}$ y de $\{\neg q,\}$ y $\{\ q,\}$ obtenemos $\square$. Entonces es insatisfactible.

II. Queremos ver que $((\neg p \supset q) \wedge (p \supset q) \wedge (\neg p \supset \neg q)) \supset (p \wedge q)$. Osea que debemos negarla y usar resolución para ver que la fórmula negada es insatisfactible.

Paso a forma clausal de la fórmula:

$$\begin{array}{rl}
\neg[((\neg p \supset q) \wedge (p \supset q) \wedge (\neg p \supset \neg q)) \supset (p \wedge q)] & \text{Negación} \\
\neg[\neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee (p \wedge q)] & \text{Eliminación de implicas} \\
\neg\neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \wedge \neg(p \wedge q) & \\
(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) & \text{FNN y FNC} \\
\{\underbrace{\{p, q\}}_{C_1}, \underbrace{\{\neg p, q\}}_{C_2}, \underbrace{\{p, \neg q\}}_{C_3}, \underbrace{\{\neg p, \neg q\}}_{C_4}\} & \text{Forma Clausal}
\end{array}$$

Resolución:



6.3. Ejercicio 3

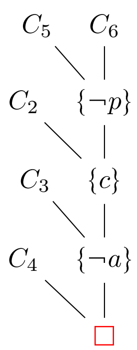
Valen las siguientes proposiciones:

- $p \supset a \rightsquigarrow \neg p \vee a \rightsquigarrow C_1 = \{\neg p, a\}$
- $\neg p \supset c \rightsquigarrow p \vee c \rightsquigarrow C_2 = \{p, c\}$
- $\neg(a \wedge c) \rightsquigarrow \neg a \vee \neg c \rightsquigarrow C_3 = \{\neg a, \neg c\}$
- $a \rightsquigarrow C_4 = \{a\}$
- $\neg l \rightsquigarrow C_5 = \{\neg l\}$

Queremos probar que vale $(p \wedge \neg l) \vee (\neg p \wedge l)$ usando resolución. Primero la negamos y la pasamos a forma clausal:

$$\begin{array}{rl}
\neg[(p \wedge \neg l) \vee (\neg p \wedge l)] & \text{Negación} \\
\neg(p \wedge \neg l) \wedge \neg(\neg p \wedge l) & \\
(\neg p \vee l) \wedge (p \vee \neg l) & \text{FNN y FNC} \\
\{\underbrace{\{\neg p, l\}}_{C_6}, \underbrace{\{p, \neg l\}}_{C_7}\} & \text{Forma Clausal}
\end{array}$$

Y resolvemos:



Unificación en Lógica de Primer Orden

6.4. Ejercicio 4

1. $P(f(x))$ unifica con:
   a) $P(f(a))$ si $\sigma = \{a/x\}$
2. $P(a)$ unifica con:
   a) $P(x)$ si $\sigma = \{a/x\}$
3. $P(y)$ unifica con:
   a) $P(x)$ si $\sigma = \{y/x\}$
   b) $P(f(a))$ si $\sigma = \{f(a)/y\}$
4. $Q(x, f(y))$ unifica con:
   a) $Q(f(y), x)$ si $\sigma = \{f(y)/x\}$
5. $Q(x, f(z))$ unifica con:
   a) $Q(f(y), x)$ si $\sigma = \{f(y)/x,\ y/z\}$
   b) $Q(f(y), f(x))$ si $\sigma = \{f(y)/x,\ f(y)/z\}$
   c) $Q(f(y), y)$ si $\sigma = \{f(z)/y,\ f(f(z))/x\}$
6. $Q(x, f(a))$ unifica con:
   a) $Q(f(y), x)$ si $\sigma = \{a/y,\ f(a)/x\}$
   b) $Q(f(y), y)$ si $\sigma = \{f(a)/y,\ f(f(a))/x\}$

6.5. Ejercicio 5

1. $f(x, x, y) \doteq f(a, b, z) \underset{x/a}{\rightsquigarrow} f(a, a, y) \doteq f(a, b, z) \rightsquigarrow$ falla (a no unifica con b)
2. $f(x) \doteq y \underset{f(x)/y}{\rightsquigarrow} f(x) \doteq f(x)$ y el MGU es $\{f(x)/y\}$.
3. $f(g(c, y), x) \doteq f(z, g(z, a)) \underset{g(c,y)/z}{\rightsquigarrow} f(g(c, y), x) \doteq f(g(c, y), g(g(c, y), a))$

   $\underset{g(g(c,y),a)/x}{\rightsquigarrow} f(g(c, y), g(g(c, y), a)) \doteq f(g(c, y), g(g(c, y), a))$

   $$MGU = \{g(g(c, y), a)/x,\ g(c, y)/z\}$$
4. $f(a) \doteq g(y) \rightsquigarrow$ falla (f y g son funciones distintas).
5. $f(x) \doteq x \rightsquigarrow$ falla ($x \in FV(f(x))$)
6. $g(x, y) \doteq g(f(y), f(x)) \underset{f(y)/x}{\rightsquigarrow} g(f(y), y) \doteq g(f(y), f(f(y))) \rightsquigarrow$ falla ($y \in FV(f(f(y)))$)

Resolución en Lógica de Primer Orden

6.6. Ejercicio 6

I.

$$\forall x.\forall y.(\neg Q(x,y) \supset \neg P(x,y))$$
$$\forall x.\forall y.(\neg\neg Q(x,y) \vee \neg P(x,y))$$
$$\forall x.\forall y.(Q(x,y) \vee \neg P(x,y))$$

II.

$$\forall x.\forall y.((P(x,y) \wedge Q(x,y)) \supset R(x,y))$$
$$\forall x.\forall y.(\neg(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \vee R(x,y))$$
$$\forall x.\forall y.(\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y) \vee R(x,y))$$

III.

$$\forall x.\exists y.(P(x,y) \supset Q(x,y))$$
$$\forall x.\exists y.(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$$

6.7. Ejercicio 7

I.

$$\exists x.\exists y.(x < y)$$
$$\exists y.(c < y)$$
$$c < d \qquad \text{FSK}$$
$$\{\{c < d\}\}$$

II.

$$\forall x.\exists y.(x < y)$$
$$\forall x.(x < f(x)) \qquad \text{FSK}$$
$$\{\{x < f(x)\}\} \qquad \text{FC}$$

III.

$$\forall x.\neg(P(x) \wedge \forall y.(\neg P(y) \vee Q(y)))$$
$$\forall x.\neg P(x) \vee \neg\forall y.(\neg P(y) \vee Q(y))$$
$$\forall x.\neg P(x) \vee \exists y.\neg(\neg P(y) \vee Q(y))$$
$$\forall x.\neg P(x) \vee \exists y.(\neg\neg P(y) \wedge \neg Q(y))$$
$$\forall x.\neg P(x) \vee \exists y.(P(y) \wedge \neg Q(y))$$
$$\forall x.\neg P(x) \vee (P(c) \wedge \neg Q(c))$$
$$\forall x.(\neg P(x) \vee P(c)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(c))$$
$$\{\{\neg P(x), P(c)\}, \{\neg P(z), \neg Q(c)\}\}$$

IV.

$$\exists x.\forall y.(P(x,y) \wedge Q(x) \wedge \neg R(y)) \qquad \text{FNN}$$
$$\forall y.(P(c,y) \wedge Q(c) \wedge \neg R(y))$$
$$\{\{P(c,y)\}, \{Q(c)\}, \{\neg R(z)\}\}$$

V.

$$\forall x.(P(x) \wedge \exists y.(Q(y) \vee \forall z.\exists w.(P(z) \wedge \neg Q(w)))$$
$$\forall x.(P(x) \wedge (Q(f(x)) \vee \forall z.\exists w.(P(z) \wedge \neg Q(w)))$$
$$\forall x.(P(x) \wedge (Q(f(x)) \vee \forall z.(P(z) \wedge \neg Q(f(x,z)))$$
$$\forall x.\forall z.(P(x) \wedge (Q(f(x)) \vee (P(z) \wedge \neg Q(f(x,z)))$$
$$\forall x.\forall z.(P(x) \wedge (Q(f(x)) \vee P(z)) \wedge (Q(f(x) \vee \neg Q(f(x,z))$$
$$\{\{P(x)\}, \{Q(f(x_1)), P(z)\}, \{Q(f(x_2)), \neg Q(f(x_2,z))\}\}$$

6.8. Ejercicio 8

I. La cláusula $\{p, \neg p\}$, si se resuelve consigo misma da la resolvente $\square$.

II. Las cláusulas $\{p, q\}$ y $\{\neg p, \neg q\}$ arrojan las siguientes resolventes:

- Si resolvemos los dos literales, entonces arroja $\square$.
- Si resolvemos solo con p, entonces arroja $\{q, \neg q\}$.
- Si resolvemos solo con q, entonces arroja $\{p, \neg p\}$.

III. Las clausulas de la forma$\{p, \neg p, q\}$ y $\{\neg p, p, \neg q\}$ deben unificar los tres literales al mismo tiempo para conseguir la clausula $\square$.

6.9. Ejercicio 9

I. $\exists x.\forall y.R(x,y) \supset \forall y.\exists x.R(x,y) \rightsquigarrow \exists x.\forall y.[R(x,y) \supset [\forall w.\exists z.R(z,w)]]$

Negación:

$$\neg\exists x.\forall y.[R(x,y) \supset [\forall w.\exists z.R(z,w)]]$$
$$\neg\exists x.\forall y.[\neg R(x,y) \vee [\forall w.\exists z.R(z,w)]]$$
$$\forall x.\neg\forall y.[\neg R(x,y) \vee [\forall w.\exists z.R(z,w)]]$$
$$\forall x.\exists y.\neg[\neg R(x,y) \vee [\forall w.\exists z.R(z,w)]]$$
$$\forall x.\exists y.[R(x,y) \wedge \neg[\forall w.\exists z.R(z,w)]]$$
$$\forall x.\exists y.[R(x,y) \wedge [\exists w.\neg\exists z.R(z,w)]]$$
$$\forall x.\exists y.[R(x,y) \wedge [\exists w.\forall z.\neg R(z,w)]]$$
$$\forall x.\exists y.\exists w.\forall z.[R(x,y) \wedge \neg R(z,w)]$$
$$\forall x.\exists w.\forall z.[R(x,f(x)) \wedge \neg R(z,w)]$$
$$\forall x.\forall z.[R(x,f(x)) \wedge \neg R(z,g(x))]$$
$$\{\{R(x_1,f(x_1))\},\{\neg R(z_2,g(x_2))\}\}$$

Resolución:

No podemos aplicar ningún paso de resolución a S porque las cláusulas no unifican: $R(x_1,f(x_1)) \doteq R(z,g(x_2)) \underset{x_1/x_2}{\rightsquigarrow}$ `falla` porque $f(x_2)$ y $g(x_2)$ no unifican.

II. $\forall x.\exists y.R(x,y) \supset \exists y.\forall x.R(x,y) \rightsquigarrow \forall x.\exists y.[R(x,y) \supset [\exists w.\forall z.R(z,w)]]$

Negación:

$$\neg\forall x.\exists y.[R(x,y) \supset [\exists w.\forall z.R(z,w)]]$$
$$\neg\exists x.\exists y.[\neg R(x,y) \vee [\exists w.\forall z.R(z,w)]]$$
$$\forall x.\neg\exists y.[\neg R(x,y) \vee [\exists w.\forall z.R(z,w)]]$$
$$\exists x.\forall y.\neg[\neg R(x,y) \vee [\exists w.\forall z.R(z,w)]]$$
$$\exists x.\forall y.[R(x,y) \wedge \neg[\exists w.\forall z.R(z,w)]]$$
$$\exists x.\forall y.[R(x,y) \wedge [\forall w.\neg\forall z.R(z,w)]]$$
$$\exists x.\forall y.[R(x,y) \wedge [\forall w.\exists z.\neg R(z,w)]]$$
$$\exists x.\forall y.\forall w.\exists z.[R(x,y) \wedge \neg R(z,w)]$$
$$\forall y.\forall w.\exists z.[R(c,y) \wedge \neg R(z,w)]$$
$$\forall y.\forall w.[R(c,y) \wedge \neg R(f(y,w),w)]$$
$$\{\{R(c,y_1)\},\{\neg R(f(y_2,w_2),w_2)\}\}$$

Resolución:

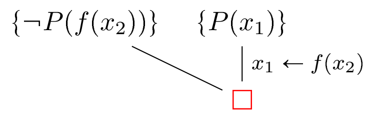
No podemos aplicar ningún paso de resolución a S porque c y $f(y_2,w_2)$ no unifican.

III. $\exists x.[P(x) \supset \forall x.P(x)] \rightsquigarrow \exists x.[P(x) \supset \forall y.P(y)]$

Negación:

$$\begin{aligned}
&\neg\exists x.[P(x) \supset \forall y.P(y)]\\
&\neg\exists x.[\neg P(x) \vee \forall y.P(y)]\\
&\forall x.\neg[\neg P(x) \vee \forall y.P(y)]\\
&\forall x.[P(x) \wedge \neg\forall y.P(y)]\\
&\forall x.[P(x) \wedge \neg\forall y.P(y)]\\
&\forall x.[P(x) \wedge \exists y.\neg P(y)]\\
&\forall x.[P(x) \wedge \exists y.\neg P(y)]\\
&\forall x.\exists y.[P(x) \wedge \neg P(y)]\\
&\forall x.[P(x) \wedge \neg P(f(x))]\\
&\{\{P(x_1)\}, \{\neg P(f(x_2))\}\}
\end{aligned}$$

Resolución:



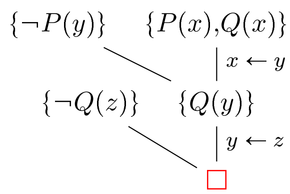
La negación de la formula es insatisfactible cuando $\sigma = \{f(x_2)/x\}$ por lo que la fórmula es valida.

IV. $\exists x.[P(x) \vee Q(x)] \supset [\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)] \rightsquigarrow \exists x.[P(x) \vee Q(x)] \supset [\exists y.P(y) \vee \exists z.Q(z)]$

Negación:

$$\begin{aligned}
&\neg\exists x.[P(x) \vee Q(x)] \supset [\exists y.P(y) \vee \exists z.Q(z)]\\
&\neg\exists x.\neg[P(x) \vee Q(x)] \vee [\exists y.P(y) \vee \exists z.Q(z)]\\
&\forall x.\neg\neg[P(x) \vee Q(x)] \wedge \neg[\exists y.P(y) \vee \exists z.Q(z)]\\
&\forall x.[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\forall y.\neg(P(y) \vee \exists z.Q(z))]\\
&\forall x.[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\forall y.\neg P(y) \wedge \neg\exists z.Q(z)]\\
&\forall x.[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\forall y.\neg P(y) \wedge \forall z.\neg Q(z)]\\
&\forall x.[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\forall y.\neg P(y) \wedge \neg\exists z.Q(z)]\\
&\forall x.\forall y.\forall z.[P(x) \vee Q(x)] \wedge \neg P(y) \wedge \neg Q(z)\\
&\{\{P(x), Q(x)\}, \{\neg P(y)\}, \{\neg Q(z)\}\}
\end{aligned}$$

Resolución:



La negación de la formula es insatisfactible con $\sigma = \{z/y,\ z/x\}$ por lo que la fórmula es valida.

V. $\forall x.[P(x) \vee Q(x)] \supset [\forall x.P(x) \vee \forall x.Q(x)] \rightsquigarrow \forall x.[[P(x) \vee Q(x)] \supset [\forall y.[P(y) \vee \forall z.Q(z)]]]$

Negación:

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x.[[P(x) \vee Q(x)] \supset [\forall y.[P(y) \vee \forall z.Q(z)]]]\\
&\neg\forall x.[\neg[P(x) \vee Q(x)] \vee [\forall y.[P(y) \vee \forall z.Q(z)]]]\\
&\exists x.[\neg\neg[P(x) \vee Q(x)] \wedge \neg[\forall y.[P(y) \vee \forall z.Q(z)]]]\\
&\exists x.[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\exists y.\neg[P(y) \vee \forall z.Q(z)]]\\
&\exists x.[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\exists y.\neg P(y) \wedge \neg\forall z.Q(z)]\\
&\exists x.[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\exists y.\neg P(y) \wedge \exists z.\neg Q(z)]\\
&\exists x.\exists y.\exists z.[P(x) \vee Q(x)] \wedge [\neg P(y) \wedge \neg Q(z)]\\
&\exists y.\exists z.[P(c) \vee Q(c)] \wedge [\neg P(y) \wedge \neg Q(z)]\\
&\exists z.[P(c) \vee Q(c)] \wedge [\neg P(d) \wedge \neg Q(z)]\\
&[P(c) \vee Q(c)] \wedge \neg P(d) \wedge \neg Q(e)\\
&\{\{P(c), Q(c)\}, \{\neg P(d)\}, \{\neg Q(e)\}\}
\end{aligned}$$

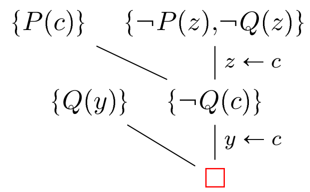
Resolución: Las clausulas no unifican entre si porque usan distintas constantes.

VI. $[\exists x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)] \supset \exists x.[P(x) \wedge Q(x)] \rightsquigarrow [\exists x.P(x) \wedge \forall y.Q(y)] \supset \exists z.[P(z) \wedge Q(z)]$

Negación:

$$\neg([\exists x.P(x) \wedge \forall y.Q(y)] \supset \exists z.[P(z) \wedge Q(z)])$$
$$\neg(\neg[\exists x.P(x) \wedge \forall y.Q(y)] \vee \exists z.[P(z) \wedge Q(z)])$$
$$\neg\neg[\exists x.P(x) \wedge \forall y.Q(y)] \wedge \neg\exists z.[P(z) \wedge Q(z)])$$
$$[\exists x.P(x) \wedge \forall y.Q(y)] \wedge \forall z.\neg[P(z) \wedge Q(z)])$$
$$\exists x.P(x) \wedge \forall y.Q(y) \wedge \forall z.[\neg P(z) \vee \neg Q(z)])$$
$$\exists x.\forall y.\forall z.P(x) \wedge Q(y) \wedge [\neg P(z) \vee \neg Q(z)])$$
$$\forall y.\forall z.P(c) \wedge Q(y) \wedge [\neg P(z) \vee \neg Q(z)])$$
$$\{\{P(c)\}, \{Q(y)\}, \{\neg P(z), \neg Q(z)\}\}$$

Resolución:



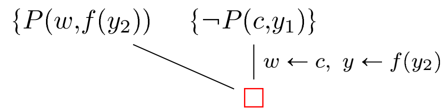
La negación de la formula es insatisfactible con $\sigma = \{c/y,\ c/z\}$ por lo que la fórmula es valida.

VII. $\forall x.\exists y.\forall z.\exists w.[P(x, y) \vee \neg P(w, z)]$

Negación:

$$\neg\forall x.\exists y.\forall z.\exists w.[P(x, y) \vee \neg P(w, z)]$$
$$\exists x.\neg\exists y.\forall z.\exists w.[P(x, y) \vee \neg P(w, z)]$$
$$\exists x.\forall y.\neg\forall z.\exists w.[P(x, y) \vee \neg P(w, z)]$$
$$\exists x.\forall y.\exists z.\neg\exists w.[P(x, y) \vee \neg P(w, z)]$$
$$\exists x.\forall y.\exists z.\forall w.\neg[P(x, y) \vee \neg P(w, z)]$$
$$\exists x.\forall y.\exists z.\forall w.[\neg P(x, y) \wedge \neg\neg P(w, z)]$$
$$\exists x.\forall y.\exists z.\forall w.[\neg P(x, y) \wedge P(w, z)]$$
$$\forall y.\exists z.\forall w.[\neg P(c, y) \wedge P(w, z)]$$
$$\forall y.\forall w.[\neg P(c, y) \wedge P(w, f(y))]$$
$$\forall y.\forall w.[\neg P(c, y) \wedge P(w, f(y))]$$
$$\{\{\neg P(c, y_1)\}, \{P(w, f(y_2))\}\}$$

Resolución:



La negación de la formula es insatisfactible con $\sigma = \{c/w,\ f(y_2)/y\}$ por lo que la fórmula es valida.

VIII. Este es muy largo, pero todos los literales terminan con constantes distintas y ninguno tiene variables.

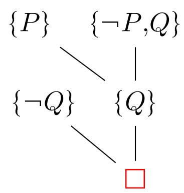
6.10. Ejercicio 10

I. Modus Ponens: $((P \supset Q) \wedge P) \supset Q$

Negación:

$$\neg[((P \supset Q) \wedge P) \supset Q]$$
$$\neg[\neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q]$$
$$\neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \wedge \neg Q$$
$$(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$$
$$\{\{\neg P, Q\}, \{P\}, \{Q\}\}$$

Resolución:

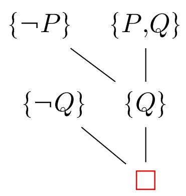


II. Modus Tollens: $((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q$

Negación:

$$\begin{aligned}
\neg[((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q] \\
\neg[\neg((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee Q] \\
\neg\neg((P \vee Q) \wedge \neg P) \wedge \neg Q \\
(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q \\
\{\{P, Q\}, \{\neg P\}, \{\neg Q\}\}\}
\end{aligned}$$

Resolución:



6.11. Ejercicio 11

I. $\{P(x), \neg P(x), Q(a)\}$ no es una cláusula de Horn.
Su fórmula de primer orden es $\forall x.P(x) \vee \neg P(x) \vee Q(a)$.

II. $\{P(x), \neg Q(y), \neg R(x, y)\}$ es una cláusula de de definición.
Su fórmula de primer orden es $\forall x \forall y.P(x) \vee \neg Q(y) \vee R(x, y)$

III. $\{\neg P(x, x, z), \neg Q(x, y), \neg Q(y, z)\}$ es una cláusula de Horn pero no de definición.
Su fórmula de primer orden: $\forall x.\forall z.\forall y.\neg P(x, x, z) \vee \neg Q(x, y) \vee \neg Q(y, z)$

IV. $\{M(1, 2, x)\}$ es una cláusula de definición.
Su fórmula de primer orden es $\forall x.M(1, 2, x)$.

6.12. Ejercicio 12

Condiciones son necesarias para que una demostración por resolución sea SLD:

1. Realizarse de manera lineal (utilizando en cada paso el resolvente obtenido en el paso anterior).
2. Utilizar únicamente cláusulas de Horn.
3. Empezar por una cláusula objetivo (sin literales positivos).
4. Empezar por una cláusula que provenga de la negación de lo que se quiere demostrar.
5. Utilizar la regla de resolución binaria en lugar de la general.

6.13. Ejercicio 13

Enunciado expresado en cláusulas:

- Alana es un robot japonés.

$$R(\texttt{alan}) \wedge J(\texttt{alan})$$
$$\{\underbrace{\{R(\texttt{alan})\}}_{C_1}, \underbrace{\{J(\texttt{alan})\}}_{C_2}\}$$

- Cualquier robot que puede resolver un problema lógico es `inteligente`.

$$\begin{aligned} \forall x.[R(x) \wedge \exists y.PL(y) \wedge Res(x,y)] \supset I(x) \\ \forall x.\neg[R(x) \wedge \exists y.PL(y) \wedge Res(x,y)] \vee I(x) \\ \forall x.\neg R(x) \vee \neg\exists y.PL(y) \vee \neg Res(x,y) \vee I(x) \\ \forall x.\neg R(x) \vee \neg\exists y.PL(y) \vee \neg Res(x,y) \vee I(x) \\ \forall x.\neg R(x) \vee \forall y.\neg PL(y) \vee \neg Res(x,y) \vee I(x) \\ \forall x.\forall y.\neg R(x) \vee \neg PL(y) \vee \neg Res(x,y) \vee I(x) \\ C_3 = \{\neg R(x_3), \neg PL(y_3), \neg Res(x_3,y_3), I(x_3)\} \end{aligned}$$

- Todos los robots japoneses pueden resolver todos los problemas de esta práctica.

$$\begin{aligned} \forall x.[R(x) \wedge J(x)] \supset [\forall y.Pr(y) \wedge Res(x,y)] \\ \forall x.\neg[R(x) \wedge J(x)] \vee [\forall y.Pr(y) \wedge Res(x,y)] \\ \forall x.\forall y.[\neg R(x) \vee \neg J(x)] \vee [Pr(y) \wedge Res(x,y)] \\ \forall x.\forall y.[\neg R(x) \vee \neg J(x) \vee Pr(y)] \wedge [\neg R(x) \vee \neg J(x) \vee Res(x,y)] \\ \{\underbrace{\{\neg R(x_4), \neg J(x_4), Pr(y_4)\}}_{C_4}, \underbrace{\{\neg R(x_5), \neg J(x_5), Res(x_5,y_5)\}}_{C_5}\} \end{aligned}$$

- Todos los problemas de esta práctica son lógicos.

$$\begin{aligned} \forall x.Pr(x) \supset PL(x) \\ \forall x.\neg Pr(x) \vee PL(x) \\ C_6 = \{\neg Pr(x_6), PL(x_6)\} \end{aligned}$$

- Existe al menos un problema en esta práctica.

$$\begin{aligned} \exists x.Pr(x) \\ Pr(c) \\ C_7 = \{Pr(c)\} \end{aligned}$$

Queremos ver para que x vale $I(x)$, entonces lo negamos y usamos resolución para conseguir alguna sustitución que lo haga.

Resolución:

$$\begin{array}{rl} C_3 & \neg I(x) \\ & \quad | \; x_3 \leftarrow x \\ C_5 & \{\neg R(x), \neg PL(y_3), \neg Res(x,y_3)\} \\ & \quad | \; x_5 \leftarrow x, \; y_5 \leftarrow y_3 \\ C_6 & \{\neg R(x), \neg J(x), \neg PL(y_3)\} \\ & \quad | \; x_6 \leftarrow y_3 \\ C_7 & \{\neg R(x), \neg J(x), \neg Pr(y_3)\} \\ & \quad | \; y_3 \leftarrow c \\ C_1 & \{\neg R(x), \neg J(x)\} \\ & \quad | \; x \leftarrow \mathtt{alan} \\ C_2 & \{\neg J(\mathtt{alan})\} \\ & \quad | \\ & \quad \square \end{array}$$

La sustitución resultante es $\sigma = \{alan/x,\ c/y3,\ c/x_6,\ alan/x_5,\ c/y_5,\ alan/x_3\}$. Entonces *alan* es un robot `inteligente`.

6.14. Ejercicio 14

Cláusulas:

- $C_1 = \{\neg suma(x_1, y_1, z_1), suma(x_1, suc(y_1), suc(z_1))\}$
- $C_2 = \{suma(x_2, cero, x_2)\}$
- $C_3 = \{\neg suma(x_3, y_3, z_3), par(y_3)\}$

Resolución:

$$C_3 \quad \{\neg par(suc(suc(cero)))\}$$
$$\mid\ y_3 \leftarrow suc(suc(cero))$$
$$C_1 \quad \{\neg suma(x_3, suc(suc(cero)), z_3)\}$$
$$\mid\ x_3 \leftarrow x_1,\ y_1 \leftarrow suc(cero), z_3 \leftarrow suc(z_1)$$
$$C_1 \quad \{\neg suma(x_1, suc(cero), z_1)\}$$
$$\mid\ x_1 \leftarrow x_1',\ y_1' \leftarrow cero, z_1 \leftarrow suc(z_1')$$
$$C_2 \quad \{\neg suma(x_1', cero, z_1')\}$$
$$\mid\ x_2 \leftarrow x_1',\ z_1' \leftarrow x_1'$$
$$\square$$

Y la sustitución resultante es

$$\begin{aligned}\sigma = \{&x_1'/x_2,\ x_1'/z_1',\ x_1'/x_1, cero/y_1', suc(x_1')/z_1, x_1'/x_3,\\ &suc(cero)/y_1, suc(suc(x_1'))/z_3, suc(suc(cero))/y_3\}\end{aligned}$$

La resolución usada es resolución SLD porque en cada paso resolvimos únicamente un literal (es lineal), comenzamos con un goal compuesto solo de negaciones y todas las cláusulas son fórmulas de Horn.

6.15. Ejercicio 15

I. Renombro las variables. $c \leftarrow x$ y $e \leftarrow y$ para que no sea confuso.

a) $\forall x.(V(x) \vee \exists y.(P(y, x)))$

$$\forall x.(V(x) \vee \exists y.(P(y, x)))$$
$$\forall x.\exists y.(V(x) \vee P(y, x))$$
$$C_1 = \{V(x_1), P(f(x_1), x_1)\}$$

b) $\neg\exists x.(V(x) \wedge \exists y.(P(y, x)))$

$$\neg\exists x.(V(x) \wedge \exists y.(P(y, x)))$$
$$\forall x.(\neg V(x) \vee \neg\exists y.(P(y, x)))$$
$$\forall x.(\neg V(x) \vee \forall y.\neg P(y, x))$$
$$\forall x.\forall y.(\neg V(x) \vee \neg P(y, x))$$
$$C_2 = \{\neg V(x_2), \neg P(y_2, x_2)\}$$

c) $\forall y.\forall x.(P(y, I(x)) \iff P(y, x))$

$$
\begin{aligned}
&\forall y.\forall x.(P(y, I(x)) \iff P(y, x))\\
&\forall y.\forall x.[P(y, I(x)) \supset P(y, x)] \wedge [P(y, x) \supset P(y, I(x))]\\
&\forall y.\forall x.[\neg P(y, I(x)) \vee P(y, x)] \wedge [\neg P(y, x) \vee P(y, I(x))]\\
&\{\underbrace{\{\neg P(y_3, I(x_3)), P(y_3, x_3)\}}_{C_3}, \underbrace{\{\neg P(y_4, x_4), P(y_4, I(x_4))\}}_{C_4}
\end{aligned}
$$

II. Queremos ver que vale $\forall x.(V(I(x)) \supset V(x))$, entonces lo negamos, lo pasamos a forma clausal usamos resolución para inferir la insatisfactibilidad de la negación.

Negación:

$$
\begin{aligned}
&\neg\forall x.(V(I(x)) \supset V(x))\\
&\neg\forall x.(\neg V(I(x)) \vee V(x))\\
&\exists x.(\neg\neg V(I(x)) \wedge \neg V(x))\\
&\exists x.(V(I(x)) \wedge \neg V(x))\\
&V(I(c)) \wedge \neg V(c)\\
&\{\underbrace{\{V(I(c))\}}_{G_1}, \underbrace{\{\neg V(c)\}}_{G_2}\}
\end{aligned}
$$

No vamos a poder usar resolución SLD, por que la cláusula C_1 no es una fórmula de Horn (tiene más de un literal positivo) y hay cláusulas de nuestro Goal que no están negadas. **Resolución:**

$$
\begin{array}{lll}
C_2 & G_1 & \\
 & & x_2 \leftarrow I(c)\\
C_4 & \{\neg P(y_2, I(c))\} & \\
 & & y_4 \leftarrow y_2,\ x_4 \leftarrow c\\
C_1 & \{\neg P(y_2, c)\} & \\
 & & x_1 \leftarrow c,\ y_2 \leftarrow f(c)\\
G_2 & \{V(c)\} & \\
 & \square &
\end{array}
$$

Luego vale que $\forall x.(V(I(x)) \supset V(x))$.

6.16. Ejercicio 16

No lo pude demostrar.

6.17. Ejercicio 17

- $C_1 = \{\texttt{esContacto}(x_1, f(x_1))\}$
- $C_2 = \{\neg\texttt{esContacto}(x_2, y_2), \texttt{esContacto}(y_2, x_2)\}$

I. La demostración no es correcta, en el último paso, realiza la sustitución $f(x) \leftarrow c$ pero $f(x)$ no unificia con c.

II. En el paso 4, la sustitución no es correcta, la resultante obtenida en ese paso debería ser $\{\neg\texttt{esContacto}(d, x)\}$.

III. Si, hay que seguir los mismos pasos que en el inciso anterior pero corrigiendo ese error:

$$C_2 \quad \{\neg\texttt{esContacto}(x,d)\}$$
$$y_2 \leftarrow x,\ x_2 \leftarrow d$$
$$C_1 \quad \{\neg\texttt{esContacto}(d,x)\}$$
$$x_1 \leftarrow d,\ x \leftarrow f(d)$$
$$\square$$

6.18. Ejercicio 18

- $C_1 = \{\neg\texttt{Progenitor}(x_1, y_1), \texttt{Desceneciente}(y_1, x_1)\}$
- $C_2 = \{\neg\texttt{Abuelo}(x_2, y_2), \texttt{Progenitor}(x_2, \texttt{medio}(x_2, y_2))\}$
- $C_3 = \{\neg\texttt{Desceneciente}(x_3, y_3), \neg\texttt{Desceneciente}(y_3, z_3), \texttt{Desceneciente}(x_3, z_3)\}$
- $C_4 = \{\neg\texttt{Abuelo}(x_4, y_4), \texttt{Progenitor}(\texttt{medio}(x_4, y_4), y_4)\}$

Queremos ver que: $\forall x.\forall y.(\texttt{Abuelo}(x, y) \supset \texttt{Desceneciente}(y, x))$ **Negación:**

$$\neg\forall x.\forall y.(\texttt{Abuelo}(x, y) \supset \texttt{Desceneciente}(y, x))$$
$$\neg\forall x.\forall y.(\neg\texttt{Abuelo}(x, y) \vee \texttt{Desceneciente}(y, x)$$
$$\exists x.\neg\forall y.(\neg\texttt{Abuelo}(x, y) \vee \texttt{Desceneciente}(y, x))$$
$$\exists x.\exists y.\neg(\neg\texttt{Abuelo}(x, y) \vee \texttt{Desceneciente}(y, x))$$
$$\exists x.\exists y.(\neg\neg\texttt{Abuelo}(x, y) \wedge \neg\texttt{Desceneciente}(y, x))$$
$$\exists x.\exists y.(\texttt{Abuelo}(x, y) \wedge \neg\texttt{Desceneciente}(y, x))$$
$$\exists y.(\texttt{Abuelo}(c, y) \wedge \neg\texttt{Desceneciente}(y, c))$$
$$\texttt{Abuelo}(c, d) \wedge \neg\texttt{Desceneciente}(d, c)$$
$$\{\underbrace{\{\texttt{Abuelo}(c, d)\}}_{G_1}, \underbrace{\{\neg\texttt{Desceneciente}(d, c)\}}_{G_2}\}$$

Resolución:

$$C_2 \quad G_1$$
$$x_2 \leftarrow c,\ y_2 \leftarrow d$$
$$C_1 \quad \{\texttt{Progenitor}(c,\texttt{medio}(c,d))\}$$
$$x_1 \leftarrow c,\ y_1 \leftarrow \texttt{medio}(c, d)$$
$$C_3 \quad \{\texttt{Desceneciente}(\texttt{medio}(c,d),c)\}$$
$$y_3 \leftarrow \texttt{medio}(c, d),\ z_3 \leftarrow c$$
$$C_1 \quad \{\neg\texttt{Desceneciente}(x_3,\texttt{medio}(c,d)),\texttt{Desceneciente}(x_3,c)\}\}$$
$$y_1' \leftarrow x_3,\ x_1' \leftarrow \texttt{medio}(c, d)$$
$$C_4 \quad \{\neg\texttt{Progenitor}(\texttt{medio}(c,d),x_3),\texttt{Desceneciente}(x_3,c)\}\}$$
$$x_4 \leftarrow c,\ y_4 \leftarrow d,\ x_3 \leftarrow d$$
$$G_1 \quad \{\neg\texttt{Abuelo}(c,d),\texttt{Desceneciente}(d,c)\}\}$$
$$G_2 \quad \{\texttt{Desceneciente}(d,c)\}$$
$$\square$$

6.19. Ejercicio 19

- R es **irreflexiva**

$$\forall x.\neg R(x,x)$$
$$C_1 = \{\neg R(x_1,x_1)\}$$

- R es **símetrica**

$$\forall x.\forall y.(R(x,y) \supset R(y,x))$$
$$\forall x.\forall y.(\neg R(x,y) \vee R(y,x))$$
$$C_2 = \{\neg R(x_2,y_2), R(y_2,x_2)\}$$

- R es **transitiva**

$$\forall x.\forall y.\forall z.((R(x,y) \wedge R(y,z)) \supset R(x,z))$$
$$\forall x.\forall y.\forall z.(\neg(R(x,y) \wedge R(y,z)) \vee R(x,z))$$
$$\forall x.\forall y.\forall z.((\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z)) \vee R(x,z))$$
$$C_3 = \{\neg R(x_3,y_3), \neg R(y_3,z_3), R(x_3,z_3)\}$$

R es vacía es $\forall x.\neg\exists y.R(x,y)$, y queremos probrar que no existe una relación no vacia que pueda cumplir todas las propiedades a la vez, osea que $\neg(\forall x.\neg\exists y.R(x,y))$ es insatisfactible si valen las primeras tres propiedades. Entonces lo pasamos a forma clausal y usamos resolución para probarlo.

$$\neg(\forall x.\neg\exists y.R(x,y))$$
$$\exists x.\neg\forall y.\neg R(x,y)$$
$$\exists x.\exists y.\neg\neg R(x,y)$$
$$\exists x.\exists y.R(x,y)$$
$$\exists y.R(c,y)$$
$$R(c,d)$$
$$G = \{R(c,d)\}$$

Resolución:

$$\begin{tikzcd}
C_3 \arrow[dr, dash] & G \arrow[d, dash, "x_3 \leftarrow c,\ y_3 \leftarrow d"] \\
C_2 \arrow[dr, dash] & \{R(d,z_3),R(c,z_3)\} \arrow[d, dash, "x_2 \leftarrow d,\ y_2 \leftarrow z_3"] \\
C_1 \arrow[dr, dash] & \{\neg R(z_3,d),R(c,z_3)\} \arrow[d, dash, "z_3 \leftarrow c"] \\
G \arrow[dr, dash] & \{\neg R(c,d)\} \arrow[d, dash] \\
 & \square
\end{tikzcd}$$

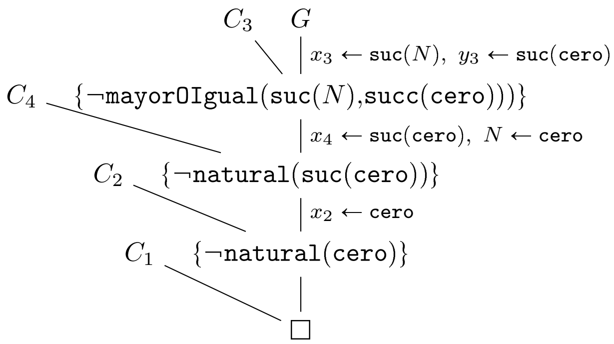
6.20. Ejercicio 20

I. El programa reducirá siempre usando la primer regla de `mayorOIgual`, sin embargo cuando llegue a la expresión `mayorOIgual(N,suc(cero))`, N no estará correctamente instanciada y podrá unificar con $succ(X)$ para cualquier X. Luego, intentará reducir la expresión `mayorOIgual(X,suc(cero))` y volverá a pasar lo mismo. Entonces el programa se cuelga.

II.

- $C_1 = \{\texttt{natural(cero)}\}$
- $C_2 = \{\texttt{natural(suc(}x_2\texttt{))}, \neg\texttt{natural(}x_2\texttt{)}\}$
- $C_3 = \{\texttt{mayorOIgual(suc(}x_3\texttt{)}, y_3\texttt{)}, \neg\texttt{mayorOIgual(}x_3, y_3\texttt{)}\}$
- $C_4 = \{\texttt{mayorOIgual(}x_4, x_4\texttt{)}, \neg\texttt{natural(}x_4\texttt{)}\}$

El goal es $G = \{\neg\texttt{mayorOIgual(suc(suc(}N\texttt{)), suc(cero))}\}$



La sustitución resultado es: $\sigma = \{\texttt{cero}/x_2,\ \texttt{suc(cero)}/x_4,\ \texttt{cero}/N,\ \texttt{suc(cero)}/x_3,\ \texttt{suc(cero)}/y_3\}$ Por lo que $N = \texttt{cero}$ es una solución.

III. Es resolución SLD porque usamos cláusulas de horn, resolución binaria y lineal. Sin embargo, no usamos la misma técnica de selección que usa Prolog.

6.21. Ejercicio 21

- $C_1 = \{\texttt{analfabeto(}x_1\texttt{)}, \neg\texttt{vivo(}x_1\texttt{)}, \neg\texttt{noSabeLeer(}x_1\texttt{)}\}$
- $C_2 = \{\texttt{vivo(}x_2\texttt{)}, \neg\texttt{delfin(}x_2\texttt{)}\}$
- $C_3 = \{\texttt{inteligente(flipper)}\}$
- $C_4 = \{\texttt{inteligente(alan)}\}$
- $C_5 = \{\texttt{noSabeLeer(}x_5\texttt{)}, \neg\texttt{mesa(}x_5\texttt{)}\}$
- $C_6 = \{\texttt{noSabeLeer(}x_6\texttt{)}, \neg\texttt{delfin(}x_6\texttt{)}\}$
- $C_7 = \{\texttt{delfin(flipper)}\}$

Queremos probar que existe alguien inteligente pero analfabeto, es decir que $\exists x.\texttt{inteligente(}x\texttt{)} \wedge \texttt{analfabeto(}x\texttt{)}$.

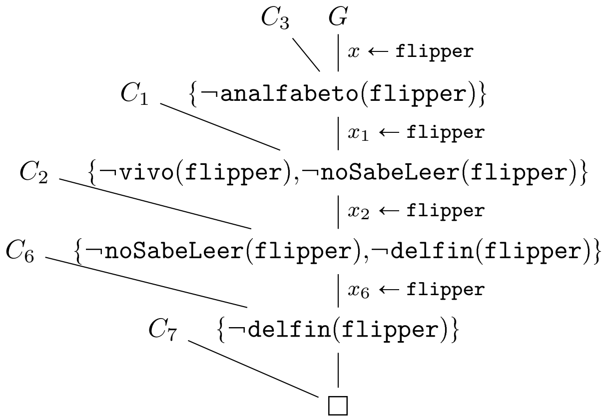
Negación:

$$\neg\exists x.\texttt{inteligente(}x\texttt{)} \wedge \texttt{analfabeto(}x\texttt{)}$$

$$\forall x.\neg\texttt{inteligente(}x\texttt{)} \vee \neg\texttt{analfabeto(}x\texttt{)}$$

$$G = \{\neg\texttt{inteligente(}x\texttt{)} \vee \neg\texttt{analfabeto(}x\texttt{)}\}$$

Resolución:


C_3
G
$x \leftarrow$ flipper
C_1
{¬analfabeto(flipper)}
$x_1 \leftarrow$ flipper
C_2
{¬vivo(flipper),¬noSabeLeer(flipper)}
$x_2 \leftarrow$ flipper
C_6
{¬noSabeLeer(flipper),¬delfin(flipper)}
$x_6 \leftarrow$ flipper
C_7
{¬delfin(flipper)}
□