# Apuntes Paradigmas de Lenguajes de Programación

Gianfranco Zamboni

10 de julio de 2019

## Índice

Estos son los apuntes de la clases de PLP que se dio en Verano 2018. Prácticamente es una combinación de las diapositivas con lo que anoté de la teórica y las prácticas pero puede tener errores. En caso de ser así estaría bueno que me avisen así los corrigo.

El tema de objetos en esta cursada se dió distinto a como se venía dando en cursadas anteriores. Vimos prototipado en vez de clasificación y además definimos el cálculo $\varsigma$ análogo al cálculo $\lambda$ en funcional. Los profesores no estaban seguros si estas modificaciones se iban a mantener o no durante las próximas cursadas.

# 1. Introducción

**Paradigma** Marco filosófico y teórico de una escuela científica o disciplina en la que se formulan teorías, leyes y generalizaciones y se llevan a cabo experimentos que les dan sustento.

**Lenguaje de programación** Es un lenguaje usado para comunicar instrucciones a una computadora. Éstas describen los cómputos que debe llevar a cabo.

Un lenguaje de programación es computacionalmente completo si puede expresar todas las funciones computables.

**Paradigma de lenguaje de programación** Marco filosófico y teórico en el que se formulan soluciones a problemas de naturaleza algorítmica. Lo entendemos como un estilo de programación en el que se escriben soluciones a problemas en términos de algoritmos.

Su ingrediente básico es el modelo de cómputo, que es la visión que tiene el usuario de cómo se ejecutan sus programas.

## 1.1. Aspectos del lenguaje

**Sintaxis** Descripción del conjunto de secuencias de símbolos considerados como programas válidos. Nos indica cuales son los símbolos del lenguaje y como combinarlos para que se les pueda dar una semántica.

### 1.1.1. Semántica

Descripción del significado de instrucciones y expresiones. Permite asignarle un significado a aquellas expresiones que formen parte de algún lenguaje, sea informal (e.g. Castellano) o formal (basado en técnicas matemáticas).

Dependiendo el tipo de semántica que se esté utilizando, podremos interpretar un programa de distintas maneras: Si $A$ es el dominio del problema y $B$ la imagen, entonces:

**Semántica operacional** Se ve a un programa como un mecanismo que, dado un elemento $a \in A$, sigue una sucesión de pasos para calcular el elemento que le corresponde en $B$ a $a$.

**Semántica axiomática** Interpreta a un programa como un conjunto de propiedades verdaderas que indican los estados que puede llegar a tomar ciertos valores.

**Semántica denotacional** Un programa es un valor matemático (función) que relaciona cada elemento de $A$ (expresiones que lo componen) con un único elemento de $B$ (significado de las expresiones).

### 1.1.2. Sistema de tipo

Es una herramienta que nos permite analizar código para prevenir errores comunes en tiempo de ejecución (e.g. evitar sumar booleanos, usar funciones con un número incorrecto de argumentos, etc). En general, requiere anotaciones de tipo en el código fuente.

Además sirve para que la especificación de un programa sea más clara.

Hay dos clases de análisis de tipos:

- **Estático**: En tiempo de compilación.
- **Dinámico**: En tiempo de ejecución.

## 1.2. Paradigmas

### 1.2.1. Paradigma Imperativo

**Estado global** Se usan variables que representan celdas de memoria en distintos momentos del tiempo. Se usan para ir almacenando resultados intermedios del problema.

**Asignación** Es la acción que modifica las variables.

**Control de flujo** Es la forma que tenemos de controlar el orden y la cantidad de veces que se repite un cómputo dentro del programa. En este paradigma, la repetición de cómputos se basa en la iteración.

Por lo general, los lenguajes de este paradigma son eficientes ya que el modelo de ejecución usado y la arquitectura de las computadoras (a nivel procesador) son parecidos. Sin embargo, el bajo nivel de abstracción que nos proveen hacen que la implementación de un problema sea difícil de entender.

### 1.2.2. Paradigma Funcional

No tiene un estado global. Un cómputo se expresa a través de la aplicación y composición de funciones y los resultados intermedios (salida de las funciones) son pasados directamente a otras funciones como argumentos. Todas las expresiones de este paradigma son tipadas y usa la recursión para repetir cómputos.

Ofrece un alto nivel de abstracción, es declarativo, usa una matemática elegante y se puede usar razonamiento algebraico para demostrar correctitud de programas.

### 1.2.3. Paradigma Lógico

Los programas son predicados de la lógica proposicional y la computación esta expresada a través de proof search (probar que el predicado expresado es verdadero bajo ciertos axiomas). No existe un estado global y los resultados intermedios son pasados por unificación. La repetición se basa en la recursión.

Ofrece un alto nivel de abstracción, es muy declarativo y, al ser predicados, tiene fundamentos lógicos robustos pero su ejecución es muy lenta.

### 1.2.4. Paradigma Orientado a Objetos

La computación se realiza a través del intercambio de mensajes entre objetos. Tiene dos enfoques: basados en clases o basados en prototipos.

Ofrece alto nivel de abstracción y arquitecturas extensibles pero usa una matemática de programas compleja.

# Parte I
# Parádigma Funcional

## 2. Programación Funcional

**Valor** Entidad matemática abstracta con ciertas propiedades.

**Expresión** Secuencia de símbolos utilizada para denotar un valor. Hay dos tipos de expresiones:

- **Atómicas ó formas formales**: Son expresiones que representan a un valor. Por ejemplo: 2, *false*, $(3, True)$.
- **Compuestas**: Se construyen combinando otras expresiones. Los valores que denotan estas expresiones pueden ser inferidos a partir de esta combinación.

Hay expresiones a las que, a pesar de contener símbolos válidos, no se les puede dar un significado debido a errores sintácticos (mal escritas) o a errores de tipo (que denotan operaciones sobre tipos incorrectos). A éstas las llamamos **expresiones mal formadas**.

La programación funcional, se basa en la tranformación de la información. Es decir, dada una expresión bien formada, se la va transformando (**reduciendo**) de manera iterativa por expresiones equivalentes más simples hasta obtener una que denote un valor.

**Transparencia referencial** Asi se llama a la propiedad que nos permite remplazar una expresión de un programa por otra con igual valor, sin modificar el comportamiento del mismo.

Ésta solo se puede asegurar en ambientes en los que una función siempre da el mismo valor sin importar el contexto en la que es usada (ejemplo son las funciones de haskell, siempre dan el mismo resultado para las mismas entradas).

En otros paradigmas, como imperativo, en donde los programas tienen efectos colaterales (se crea, modifican y destruyen variables constantemente) esto no es cierto. Por ejemplo, en el siguiente programa:

```
int x = 5;

int suma(int y) {
        x++;
        return  x + y;
}
```

Si llamamos dos veces a la función suma de la siguiente manera: `suma(1)`, la primera vez, el resultado será siete, la segunda vez será ocho. El resultado cambia porque depende del valor de $x$ que es modificado por la función cada vez que es llamada.

### 2.1. Tipos

Son una forma de particionar el universo de valores de acuerdo a ciertas propiedades. Se clasifican en dos categorias:

- **Básicos** ó primitivos: Son los tipos que ya vienen definidos en el lenguaje por literales y representan valores. Ej: Int, Bool, Float, etc.
- **Tipos compuestos** (pares, listas, etc.) Son aquellos que se definen a partir de otros tipos.

Cada tipo de dato tiene asociado distintas operaciones que nos permiten manipularlos. Y las expresiones bien formadas o son valores de algún tipo o son una composición de estas operaciones aplicadas a un valor del tipo adecuado (no todos los tipos soportan las mismas operaciones). Entonces, a toda expresión bien formada se le puede asignar un tipo que sólo depende los componentes de la expresión (strong-typing) y además puede ser inferido a partir de su constitución.

**Notación:** En haskell `e :: A` se lee "la expresión `e` tiene tipo `A`" y significa que el valor `e` pertenece al conjunto de valores denotado por `A`.

### 2.1.1. Propiedades deseables de un lenguaje funcional

Se busca que un lenguaje le asigne un tipo de manera automática al mayor número posible de expresiones "con sentido" y que no le asigne ningún tipo al mayor número posible de expresiones mal formadas. Además, se busca que el tipo de la expresión se mantenga si es reducida.

Otra cosa a tener en cuenta, es que los tipos ofrecidos por el lenguaje deben ser descriptivos y razonablemente sencillos de leer.

**Inferencia de tipos** Dada una expresión `e` determinar si tiene tipo o no y, si lo tiene, cuál es.

**Chequeo de tipos** Dada una expresión tipable `e` y un tipo `A`, determinar si `e :: A` o no.

## 2.2. Tipo Función

Un programa, en el paradigma funcional, es una función descripta por un conjunto de ecuaciones (expresiones) que definen uno o más valores. Estas ecuaciones son evaluadas (reducidas) hasta llegar a una expresión atómica que nos indique el valor de las mismas.

**Funciones** Son valores especiales que representan transformación de datos. Se aplican a elementos de un conjunto definido por el tipo de entrada y devuelve un elemento del tipo de salida. En haskell, este tipo se escribe: `A -> B`.

Al ser valores, las funciones, pueden ser pasadas como argumentos o ser resultado de otras.

**Funciones de alto orden** Son funciones que manipulan otras funciones. Es decir, no se límitan a funciones que tomen como parámetro a otras, sino que tambien incluye aquellas funciones que generan nuevas funciones.

**Lenguaje Funcional Puro** Lenguaje de expresiones con transparencia referencial y funciones como valores. Su modelo de cómputo es la reducción realizada mediante el reemplazo de iguales por iguales.

**Polimorfismo paramétrico** Se da cuando una función tiene un parámetro que puede ser instanciado de diferentes maneras. Es decir, cuando uno de sus parámetros puede ser de cualquier tipo. En este caso, el sistema puede asignarle un tipo que sea más general que todos los tipos que toma de tal manera que cada vez que la función sea llamada se la transforma para ese uso particular. Por ejemplo, una función que imprima un objeto en pantalla podría funcionar con cualquier tipo de dato.

Hay funciones que, a pesar de poseer polimorfismo paramétrico, no aceptan cualquier clase de tipo. Sino que requieren que los tipos con las que son llamadas tengan ciertas propiedades. Por ejemplo, que posean relaciones de igualdad (`Eq`) o relación de orden (`Ord`).

### 2.2.1. Evaluación

Cuando se computa el valor de una expresión, decimos que la estamos *evaluando*. Por lo general, dependiendo del orden de evaluación del lenguaje, el tipo de evaluación se clasifica en:

**Evaluación Estricta** Si una parte de una expresión se indefine, entonces la expresión se indefine. La evaluación eager, en la que un en lenguaje computa una expresión apenas es definida, es de este tipo.

**Evaluación no Estricta** Puede pasar que una expresión esté definida a pesar de que alguna de sus partes se haya indefinido. La evaluación lazy, en la que un lenguaje solo computa una expresión cuando es necesaria para saber el valor de otra, es de este tipo.

Haskell usa evaluación lazy de izquierda a derecha, resolviendo primero las partes más externas de la expresión y luego, si es necesario, sus partes.

**Currificación** Hay una correspondencia entre cada función de múltiples parámetros y una de alto orden que retorna una función intermedia que completa el trabajo. En otras palabras, por cada función $f$ definida como:

```
f :: (a,b) -> c
f (x,y) = e
```

existe un función $f'$ tal que:

```
f' :: a -> b -> c
f' x y = e
```

La currificación nos da la posibilidad de realizar funciones parciales y nos permite tratar el código de manera más modular al momento de inferir tipos y transformar programas.

**Evaluación parcial** En haskell, una expresión no es evaluada completamente, salvo que sea necesario.

Este tipo de evaluación, junto con la currificación, nos permiten llamar a las funciones con un subconjunto de sus parámetros de entrada para generar nuevas funciones que tomen solo los parámetros que no fueron especificados en esa llamada.

Un **ejemplo**: Supongamos que tenemos la función `suma`:

```
suma :: Int -> Int -> Int
suma x y = x + y
```

Podemos usarla crear una función `sumarUno :: Int -> Int` instanciando su primer parámetro en 1:

```
sumarUno :: Int -> Int
sumarUno y = suma 1
```

## 2.3. Inducción/Recursion

La inducción es un mecanismo que nos permite definir conjuntos infinitos, probar propiedades sobre sus elementos y definir funciones recursivas sobre ellos con garantía de terminación.

**Principio de extensionalidad:** Dadas dos expresiones A y B, si A y B denotan el mismo valor, entonces A puede ser remplazada por B y B por A sin que esto afecte al resultado de una equación.

### 2.3.1. Inducción estructural

Una definición inductiva de un conjunto $\mathcal{R}$ consiste en dar condiciones de dos tipos:

- reglas base ($z \in \mathcal{R}$) que afirman que algún elemento simple $x$ pertenece a $\mathcal{R}$
- reglas inductivas ($x_1 \in \mathcal{R}, \ldots, x_n \in \mathcal{R} \Rightarrow x \in \mathcal{R}$) que afirman que un elemento compuesto $x$ pertenece a $\mathcal{R}$ siempre que sus partes $x_1, \ldots, x_n$ pertenezcan a $\mathcal{R}$ (y $x$ no satisface ninguna de las otras regla dadas)

$\mathcal{R}$ debe ser el menor conjunto que satisfaga todas las reglas dadas.

### 2.3.2. Funciones recursivas

Sea `S` un conjunto inductivo, y `T` uno cualquiera. Una definición recursiva estructural de una función `f :: S -> T` es una definición de la siguiente forma:

- Por cada elemento base `z`, el valor de `(f z)` se da directamente usando valores previamente definidos
- Por cada elemento inductivo `y`, con partes inductivas `y1`, ..., `yn`, el valor de `(f y)` se da usando valores previamente definidos y los valores `(f y1)`, ..., `(f yn)`.

### 2.3.3. Principio de inducción

Sea $S$ un conjunto inductivo, y sea $P$ una propiedad sobre los elementos de S. Si se cumple que:

- para cada elemento $z \in S$ tal que $z$ cumple con una regla base, $P(z)$ es verdadero, y
- para cada elemento $y \in S$ construido en una regla inductiva utilizando los elementos $y_1, ..., y_n$, si $P(y_1), ..., P(y_n)$ son verdaderos entonces $P(y)$ lo es

entonces $P(x)$ se cumple para todo $x \in S$.

## 2.4. Parametrización

Dado un conjunto de funciones que se comportan de la misma manera buscamos encontrar alguna forma de crear una función que las genere automáticamente.

**Esquema de funciones** Dado un conjunto de funciones "parecidas", el esquema de estas funciones son los que no permiten parametrizar correctamente alguno de los parámetros.

La parametrización nos permitirá crear definiciones más concisas y modulares, reutilizar código y demostrar propiedades generales de manera más fácil. Un ejemplo de esto son los esquemas recursivos (Sección 2.7) que generalizan las funciones que hacen recursión sobre un tipo de datos.

## 2.5. Tipos algebraicos

### 2.5.1. Definición de tipos

Hay dos formas de definir un tipo de dato:

- **De manera algebraica:** Establecemos qué *forma* tendrá cada *elemento* y damos un mecanismo único para inspeccionar cada uno de ellos.
- **De manera abstracta:** Determinamos cuales serán las *operaciones* que manipularán los elementos, **SIN** decir cuál será la forma exacta del tipo ni de las operaciones que definimos.

### 2.5.2. Tipos algebraicos en Haskell

Los definimos mediante **constantes** llamadas *constructores* cuyos nombres comienzan con mayúscula. Éstas no tienen asociada una regla de reducción y pueden tener argumentos.

Para implementar un tipo algebraico nuevo en Haskell, usamos la clausula `data` que introduce su nombre, los nombres de su constructores y sus argumentos.

**Ejemplos:**

```
data Sensacion = Frio | Calor
```

El tipo `Sensacion` tiene como constructores a las constantes `Frio` y `Caliente`

```
data Shape = Circle Float | Rect Float Float
```

Los constructores del tipo `Forma` toman como parámetros elementos de tipo `Float`.

```
data Maybe = Nothing | Just a
```

`Maybe` tiene todos los elementos del tipo a con `Just` y la constante `Nothing`. En este caso `a` es un tipo génerico, es decir, puede ser cualquier tipo.

Son considerados tipos algebraicos porque:

- toda combinación válida de constructores y valores es elemento del tipo algebraico (y solo ellas lo son)
- y porque dos elementos de un tipo algebraico son iguales si y solo si están construidos utilizando los mismos constructores aplicados a los mismos valores.

Al principio de esta sección, dijimos que además de establecer la forma que tiene el tipo, debemos dar un mecanismo único de inspección. En Haskell, se usa **Pattern Matching** para esto.

### 2.5.3. Pattern Matching

El pattern matching es la búsqueda de patrones especiales (en nuestro caso, los constructores del tipo) dentro de una expresión. Cuando la búsqueda tiene éxito, nos permita inspeccionar el valor de la expresión analizada.

Por ejemplo:

```
value :: Maybe -> Int
value Nothing = 0
value (Just a) = 1
```

En esta función, la expresión `value (Just 2)` tiene valor 1. Haskell, analiza las reglas de pattern matching provistas una a una y cuando encuentra que la expresión coincide con la segunda, evalúa al valor indicado.

### 2.5.4. Tipos especiales

**Tupla** Este es un tipo algebraico con sintaxis especial. Una tupla es un estructura que posee varios elementos de distintos tipos. Por ejemplo: `(Float,Int)` es una tupla cuyo primer elemento es un `Float` y su segundo elemento es un `Int`.

**Maybe** El tipo `Maybe`, definido en el último ejemplo, nos permite expresar la posibilidad de que el resultado sea erróneo, sin necesidad de usar casos especiales. De esta forma, logramos evitar el uso de $\perp$ (indefinido) hasta que el programador lo decida, permitiendo controlar errores.

**Either** El tipo `Either` representa la unión disjunta de dos conjuntos (los elementos de uno se identifican con `Left` y los del otro con `Right`. Sirve para mantener el tipado fuerte y poder devolver elementos de distintos tipos o para representar el origen de un valor.

```
data Either = Left a | Right b
```

### 2.5.5. Expresividad

Los tipos algebraicos no pueden representar cualquier cosa, por ejemplo, los números racionales son pares de enteros (numerador, denominador) cuya igualdad puede no depender de los valores con los que fueron construidos o incluso pueden llegar a no ser validos. Esto es así porque no todo par de enteros es un número racional, por ejemplo el (1,0).

Además recordemos que la igualdad de dos elementos de un tipo algebraico solo se da si estos fueron construidos exactamente de la misma forma. Si seguimos con el ejemplo de los racionales, sabemos que hay valores iguales con distinto numerador y denominador como el (4,2) y el (2,1), sin embargo, estos dos pares no son iguales.

### 2.5.6. Clases de tipos algebraicos

**Enumerativos** Solo constructores sin argumentos.

**Productos** Un único constructor con varios argumentos.

**Sumas** Varios constructores con argumentos.

**Recursivos** Utilizan el tipo definido como argumento.

## 2.6. Tipos algebraicos recursivos

Un tipo algebraico recursivo tiene al menos uno de los constructores con el tipo que se define como argumento y es la concreción, en Haskell, de un conjunto definido inductivamente.

Cada constructor define un caso de una definición inductiva de un conjunto. Si tiene al tipo definido como argumento, entonces es un caso inductivo. Si no, es un caso base.

El pattern matching nos proporciona una forma de analizar estos casos y de acceder a los elementos inductivos que forman a un elemento dado. Por esta razón, se pueden definir funciones recursivas.

A estos tipos, les damos un significado a través de funciones definidas recursivamente. Éstas manipulan simbólicamente al tipo. Sin embargo, estas manipulaciones, por si solas no tienen un significado sino que se lo dan las propiedades que dichas manipulaciones deben cumplir.

**Naturales** Notación unaria para expresar tipos naturales.

```
data N = Z | S N
```

En este caso, `Z` y `S N` son el cero y el sucesor de un numero. (Notar que ese significado, es el que le damos nosotros y el que vamos a utilizar cuando escribamos funciones que nos permitan operar sobre este tipo. Para el lenguaje son solamente valores que pueden ser transformados por las funciones que nosotros definamos pero no tienen una semántica definida)

**Listas** Definición equivalente a las listas de Haskell

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
```

**Árboles** Un árbol es un tipo algebraico tal que al menos un elemento compuesto tiene dos componentes inductivas.

```
data Arbol a = Hoja a | Nodo a (Arbol a) (Arbol a)
```

## 2.7. Esquemas de recursión

Cuando tenemos un conjunto de funciones que manipulan ciertas estructuras de manera similar, podemos abstraer este comportamiento en funciones de alto orden que nos facilitarán su escritura.

A continuación, veremos unos ejemplos de esquemas sobre listas:

### 2.7.1. Map

Aplica una función a cada elemento de una lista:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map _ [] = []
map f (x:xs) = (f x) : (map f xs)
```

**Ejemplo:**

```
doble x = x + x
dobleL = map doble
```

`dobleL` calcula el doble de cada elemento de una lista.

### 2.7.2. Filter

Dada una lista `l` y un predicado `p`, selecciona todos los elementos de `l` que cumplen `p`.

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter _ [] = []
filter p (x:xs) | (p x)     = x : (filter p xs)
                | otherwise = filter p xs
```

**Ejemplo**

```
masQueCero = filter (>0)
```

`masQueCero` se queda con todos los elementos mayores de una lista

### 2.7.3. Fold

**fold** expresa el patrón de recursión estructural sobre listas como función de alto orden. Es decir, realiza recursión sobre una lista.

Dada una lista `l` y una función `f` que denota un valor que depende de todos los elementos de la lista `l` y un valor inicial `z`, aplica y combina las soluciones parciales obtenidas por `f` de manera "iterativa". Hay dos tipos de fold: `foldr` (acumula desde la derecha) y `foldl` (acumula desde la izquierda).

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr _ z [] = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
foldl f z [] = z
foldl f z (x : xs) = foldl f (f z x) xs
```

**Ejemplos**

```
sumatoria :: [Int] -> Int
sumatoria = foldr (\x rec -> x + rec ) 0
```

Para la sumatoria, la primer función que pasamos como parámetro toma el primer elemento de la lista y lo suma al resultado de la recursión. 0 es el valor de la sumatoria cuando la lista pasada como parámetro es la lista vacía.

Map y Filter pueden ser implementados usando recursión estructural, también:

```
map f = foldr (\x rec -> (f x): rec) []
filter p = foldr (\x rec -> if (p x) then x:rec else rec) []
```

### 2.7.4. Recursión primitiva

Recordemos de Logica y Computabilidad: una función h es recursiva primitiva si $h$ es de la forma:

$$h(x_1, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, \ldots, x_n)$$
$$h(x_1, \ldots, x_n, t+1) = g(h(x_1, \ldots, x_n, t), x_1, \ldots, x_n, t)$$

Es decir, el caso recursivo de $h$ no solo depende de la descomposición de sus parámetros, sino que también depende de ellos.

En Haskell, podemos definir una función que dada una lista `l`, un caso base `z` y un caso recursivo primitivo `f`, aplique la definición de `z` y `f` a la lista:

```
recr :: b -> (a -> [a] -> b -> b) -> [a] -> b
recr z _ []= z
recr z f (x:xs) = f x xs (recr z f xs)
```

En listas, este tipo de esquemas es difícil de ver. Como ejemplo, escibimos la función `insertar` de una lista con recursión primitiva:

```
-- Insert ordenado con pattern matching
insert :: a -> [a] -> [a]
insert x [] = [x]
insert x (y:ys) = if x<y then (x:y:ys) else (y:insert x ys)

-- Insert ordenado con recursión primitiva
insert x = recr [x] (\y ys zs -> if x<y then (x:y:ys) else (y:zs))
```

### 2.7.5. Divide & Conquer

La técnica de Divide & Conquer consiste en dividir un problema en problemas más fáciles de resolver y luego, combinando los resultados parciales, obtener un resultado general. En este caso, `DivideConquer` es un tipo de función, es decir define una familia de funciones, que toman como parámetro 4 funciones y un elemento de tipo `a` y devuelve un valor de tipo `b`:

```
type DivideConquer a b  = (a -> Bool) -> (a -> b) -> (a -> [a])
    -> ([b] -> b) -> a -> b
```

Las funciones que toma como parámetro son:

- `esTrivial :: a -> Bool` que devuelve verdadero si elemento de tipo `a` es el caso base del problema.
- `resolver :: a -> b` que resuelve el problema cuando el elemento de tipo `a` es el caso trivial
- `repartir :: a -> [a]` que divide al elemento de tipo `a` en la cantidad de subproblemas necesarios para resolver el problema.
- `combinar :: [b] -> b` que resuelve todos los subproblemas obtenidos por `repartir` y combina sus soluciones para obtener el resultado final.

**Ejemplo**

Vamos a definir el Divide & Conquer para listas:

```
divideConquerListas :: DivideConquer [a] b
-- Esto significa que DivideConquerLista es de tipo
-- ([a] -> Bool) -> ([a] -> b) -> ([a] -> [[a]]) -> ([b] -> b)
-- -> [a] -> b

divideConquerListas esTrivial resolver repartir combinar l =
if (esTrivial l) then resolver l
else combinar (map dc (repartir l))
where dc = divideConquerListas esTrivial resolver repartir combinar
```

Supongamos que queremos ordenar listas usando `mergesort`, un algoritmo que usa esta técnica, entonces una posible implementación sería:

```
mergesort :: Ord a => [a] -> [a]
mergesort = divideConquerListas ((<=1).length) id partirALaMitad
↪  (\[xs,ys] -> merge xs ys)
-- id es la función identidad

partirALaMitad :: [a] -> [[a]]
partirALaMitad xs = [ take i xs, drop i xs ]
where i = (div (length xs) 2)

merge :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
merge = foldr
(\y rec -> (filter (<= y) rec) ++ [y] ++ (filter (>y) rec))
```

**Otros esquemas de recursión** Los esquemas de recursión que nombramos, no son los únicos que existen y además, pueden ser definidos para otros tipos recursivos, no solo para listas.

### 2.7.6. La función fold y como definirla

Todo tipo algebraico tiene asociado un patrón de inducción estructural. En particular, dado un tipo algebraico recursivo `T`, podemos definir la función `foldrT:: * -> a` (donde * son los parámetros de la función) que representa a dicha induccion. A continuación damos algunas propiedades que debe cumplir `fold` para asegurarnos que la definimos correctamente:

- Por cada constructor base de `T` debe tomar un parámetro de tipo `a` que será el elemento devuelto por la función si cae en alguno de dichos casos.
- Por cada constructor recursivo debe tomar una función que tome como parámetros a cada elemento del constructor que no sea del tipo `T` y un parámetro de tipo `a` por cada elemento del tipo `T` del constructor. Esta función devuelve un elemento del tipo `a` y es la que resolverá recursivamente el caso planteado usando la segunda clase de parámetros.
- Por último, si la función está bien implementada, si remplazamos cada parámetro por el contructor correspondiente que tiene asignado, la función resultante debería ser la función identidad del tipo `T`.

Al momento de definir `fold` ayuda mucho plantear el esquema de recursión del tipo. A continuación un ejemplo:

**Ejemplo** Queremos definir el fold sobre el tipo `Arbol`.

```
data Arbol a = Hoja a | Nodo a (Arbol a) (Arbol a)

-- Primero debemos definir el tipo de fold. Sabemos que es una fución que va
↪  de algo a algun tipo b.

foldrArbol :: * -> b

-- ¿Que es *?  Los casos bases, en nuestro caso, será cuando el arbol sea de
↪  la forma Hoja x, con x :: a entonces necesitaremos una función que
↪  devuelva un valor de tipo b a partir del valor x.

foldrArbol :: * -> (a -> b) -> b

-- Ahora, debemos pensar el caso inductivo. El único constructor recursivo
↪  que tenemos es Nodo. Nodo toma un elemento de tipo a y dos árboles por lo
↪  que deberemos hacer doble recursión (una por cada subárbol). Osea que la
↪  solución de nuestra función depende del valor del primer parámetro (que
↪  es de tipo a) y de la soluciones dos recursiones (que son de tipo b):

foldrArbol :: (a -> b -> b -> b) -> (a -> b) -> b

-- Ya podemos implementarlo usando pattern matching, el caso base es aplicar
↪  la segunda función pasada como parámetro al valor de la hoja:

foldrArbol fcr fcb (Hoja x) = fcb x

-- El caso inductivo es aplicar la primer función al elemento y al resultado
↪  de las recursiones:

foldrArbol fcr fcb (Node x ai ad) =
    fcr x (foldrArbol fcr fcb ai) (foldrArbol fcr fcb ad)

-- fcr = funcion caso recursivo
-- fcb = funcion caso base
-- ai = arbol izquierdo
-- ad = arbol derecho
```

# 3. Cálculo Lambda Tipado

El cálculo lambda es un modelo de computación turing completo basado en **funciones** introducido por **Alonzo Church**. Este modelo consiste en un conjunto de expresiones o terminos que representan abstracciones o aplicaciones de funciones y cuyos valores pueden ser determinados aplicando ciertas reglas sintacticas hasta obtener lo que se dice su forma normal, una expresión que, a falta de reglas no puede ser reducida de ninguna manera. En nuestro caso, estamos estudiando cálculo lambda tipado, es decir que habrá expresiones que, a pesar de estar bien formadas, no tendrán sentido.

## 3.1. Expresiones de Tipos de $\lambda^b$

El primer lenguaje lambda que usamos en la materia tiene dos **tipos** $Bool$ y $\sigma \to \theta$ que son los tipos de los valores booelanos y las funciones que van de un tipo $\sigma$ a un tipo $\theta$, respectivamente. Y lo notamos:

$$\sigma, \theta \ ::= \ Bool \mid \sigma \to \theta$$

Una vez que definamos por completo el lenguaje lambda para estos dos tipos, esto es definir reglas de sintaxis, de tipado y de reducción de expresiones, vamos a extender el lenguaje con los naturales y, luego, con otros tipos de interés, como abstracciones de memoria y comandos.

### 3.1.1. Términos de $\lambda^b$

Ahora debemos definir los **términos** que nos permitirán escribir las expresiones válidas del tipado. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los **términos** de $\lambda^b$ están dados por:

$$\begin{aligned} M, P, Q \ ::= \ & true \\ & \mid false \\ & \mid if\ M\ then\ P\ else\ Q \\ & \mid M\ N \\ & \mid \lambda x : \sigma . M \\ & \mid x \end{aligned}$$

Esto significa que dados tres términos $M$, $P$ y $Q$, los términos válidos del lenguaje son:

- $true$ y $false$ que representan las **constantes de verdad**.
- $if\ M\ then\ P\ else\ Q$ que expresa el **condicional**.
- $M\ N$ que indica la **aplicación** de la función denotada por el termino $M$ al argumento $N$.
- $\lambda x : \sigma . M$ que es una **función** (abstracción) cuyo parámetro formal es $x$ y cuyo cuerpo es $M$
- $x$, una **variable de términos**.

### 3.1.2. Variables ligadas y libres

Por como definimos el lenguaje, una variable $x$ puede ocurrir de dos formas: **libre** o **ligada**. Decimos que $x$ ocurre **libre** si no se encuentra bajo el alcance de una ocurrencia de $\lambda x$. Caso contrario ocurre ligada.

Por ejemplo:

$$\lambda x : Bool.if\ true\ then\ \underbrace{x}_{ligada}\ else\ \underbrace{y}_{libre}$$

Para conseguir las variables ligadas de una expresión, vamos a definir la función $FV$ que toma como parámetro una expresión y devuelve el conjunto de variables libres de la misma.

$$\begin{aligned} FV(x) &\stackrel{def}{=} x \\ FV(true) = FV(false) &\stackrel{def}{=} \varnothing \\ FV(if\ M\ then\ P\ else\ Q) &\stackrel{def}{=} FV(M) \cup FV(P) \cup FV(Q) \\ FV(M\ N) &\stackrel{def}{=} FV(M) \cup FV(N) \\ FV(\lambda x : \sigma.M) &\stackrel{def}{=} FV(M) \backslash \{x\} \end{aligned}$$

### 3.1.3. Reglas de sustitución

Una de las operaciones que podemos realizar sobre las expresiones del lenguaje es la **sustitución** que, dado un término $M$, sustituye todas las ocurrencias **libres** de una variable $x$ en dicho término por un término $N$. La notamos:

$$M\{x \leftarrow N\}$$

Esta operación nos sirve para darle semántica a la aplicación de funciones y es sencilla de definir, sin embargo debemos tener en cuenta algunos casos especiales.

**$\alpha$-equivalencia** Dos terminos $M$ y $N$ que difieren solamente en el nombre de sus variables ligadas se dicen $\alpha$-equivalentes. Esta relación es una relación de equivalencia. Técnicamente, la sustitución está definida sobre clases de $\alpha$-equivalencia de términos

**Captura de variables** El primer problema se da cuando la sustitución que deseamos realizar sustituye una variable por otra con el mismo nombre que alguna de las variables ligadas de la expresión. Por ejemplo:

$$(\lambda z : \sigma.x)\{x \leftarrow z\} = \lambda z : \sigma.z$$

En estos casos, si realizamos la sustitución cambiariamos el significado de la expresión (en el caso mostrado, estariamos convirtiendo la función constante que devuelve $x$ en la función identidad). Por esta razón debemos asegurarnos que cuando realizemos la operación $\lambda y : \sigma.M\{x \leftarrow N\}$, la variable ligada $y$ sea renombrada de tal manera que **no** ocurra libre en $N$.

Entonces, teniendo en cuenta lo mencionado, definimos el comportamiento de la operación:

$$x\{x \leftarrow N\} \stackrel{def}{=} N$$
$$a\{x \leftarrow N\} \stackrel{def}{=} a \text{ si } a \in \{true, false\} \cup \mathcal{X}\backslash\{x\}$$
$$(if\ M\ then\ P\ else\ Q)\{x \leftarrow N\} \stackrel{def}{=} if\ M\{x \leftarrow N\}\ then\ P\{x \leftarrow N\}\ else\ Q\{x \leftarrow N\}$$
$$(M_1\ M_2)\{x \leftarrow N\} \stackrel{def}{=} M_1\{x \leftarrow N\}\ M_2\{x \leftarrow N\}$$
$$(\lambda y : \sigma.M)\{x \leftarrow N\} \stackrel{def}{=} \lambda y : \sigma.M\{x \leftarrow N\}\ x \neq y,\ y \notin\ FV(N)$$

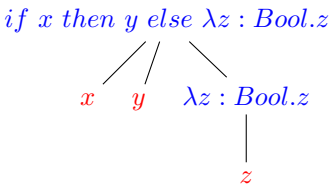
La condición $x \neq y,\ y \notin\ FV(N)$ está para que efectivamente no se produzca la situación mencionada en el parrafo anterior. Y **siempre** puede cumplirse, solo hay que renombrar las variables de manera apropiada.

### 3.1.4. Árbol sintáctico

Dada una expresión $M$, su árbol sintáctico es un árbol que tiene como raíz a $M$ y como hijos de la raíz a todos los subtérminos válidos de la expresión.

**Ejemplos** El árbol sintáctico de $true$ es:


El árbol sintáctico de $if\ x\ then\ y\ else\ \lambda z : Bool.z$ es:




## 3.2. Sistema de tipado

El sistema de tipado es un sistema formal de deducción (o derivación) que utiliza axiomas y reglas de tipado para caracterizar un subconjunto de los términos. A estos términos los llamamos **términos tipados**.

Como dijimos, vamos a estudiar lenguajes de cálculo lambda tipado, por lo que para que una expresión sea considerada una expresión válida del lenguaje no solo debe ser sintácticamente correcta sino que debemos poder inferir su tipo a través del sistema de tipado que definamos. Y si no es posible inferir el tipo de una expresión con el sistema dado, entonces no la consideraremos una expresión válida del lenguaje.

**Contexto de tipado** : Es un conjunto de pares $x_i : \sigma_i$, anotado $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n\}$ que nos indica los tipos de cada variable de un programa.

Dado un contexto de tipado $\Gamma$, un **juicio de tipado** es una expresion $\Gamma \rhd M : \sigma$ que se lee "el término M tiene tipo $\sigma$ asumiendo el contexto de tipado $\Gamma$".

### 3.2.1. Axiomas de tipado de $\lambda^b$

$$\frac{}{\Gamma \rhd \mathit{true} : \mathit{Bool}}(\text{T-True}) \qquad \frac{}{\Gamma \rhd \mathit{false} : \mathit{Bool}}(\text{T-False})$$

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \rhd x : \sigma}(\text{T-Var})$$

Los axiomas **T-True** y **T-False** nos dicen, que no importa el contexto en el que se encuentren los valores *true* y *false*, respectivamente, ambos valores serán de tipo *Bool*. El axioma **T-Var**, nos dice que una variable libre $x$ es de $\sigma$ en un contexto $\Gamma$ entonces el par $x : \sigma$ se encuentra en $\Gamma$

### 3.2.2. Reglas de tipado de $\lambda^b$

$$\frac{\Gamma \rhd M : \mathit{Bool} \quad \Gamma \rhd P : \sigma \quad \Gamma \rhd Q : \sigma}{\Gamma \rhd \mathit{if}\ M\ \mathit{then}\ P\ \mathit{else}\ Q : \sigma}(\text{T-If})$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \rhd M : \tau}{\Gamma \rhd \lambda x : \sigma . M : \sigma \to \tau}(\text{T-Abs}) \qquad \frac{\Gamma \rhd M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \rhd N : \sigma}{\Gamma \rhd M\ N : \tau}(\text{T-App})$$

**T-If** nos dice que si $\mathit{if}\ M\ \mathit{then}\ P\ \mathit{else}\ Q$ es de tipo $\sigma$ en $\Gamma$, entonces $M$ es de tipo *Bool* y $P$ y $Q$ son de tipo $\sigma$ en $\Gamma$.

**T-Abs** indica que si $\lambda x : \sigma . M$ es de tipo $\sigma \to \tau$ en $\Gamma$, entonces $M$ es de tipo $\tau$ y $x$ en de tipo $\sigma$ en $\Gamma$.

**T-App** significa que si $M\ N$ es de tipo $\sigma \to \tau$ en $\Gamma$, entonces $M$ es de tipo $\tau$ en el contexto $\Gamma, x : \sigma$. Este es el contexto formado por la unión disjunta entre $\Gamma$ y $x : \mathit{sigma}$, o en castellano, el contexto que remplaza el tipo de $x$ en *Gamma* por $\sigma$.

### 3.2.3. Resultados básicos

Si $\Gamma \rhd M : \sigma$ puede derivarse usando los axiomas y reglas de tipados decimos que el juicio es **derivable**. Además, si el juicio se puede derivar para algún $\Gamma$ y $\sigma$, entonces decimos que $M$ es **tipable**.

**Unicidad de tipos** Si $\Gamma \rhd M : \sigma$ y $\Gamma \rhd M : \tau$ son derivables, entonces $\sigma = \tau$

**Weakening + Strengthening** Si $\Gamma \rhd M : \sigma$ es derivable y $\Gamma \cap \Gamma'$ contiene a todas las variables libres de $M$, entonces $\Gamma' \rhd M : \sigma$

**Sustitución** Si $\Gamma, x : \sigma \rhd M : \tau$ y $\Gamma \rhd N : \sigma$ son derivables, entonces $\Gamma \rhd M\{x \leftarrow N\} : \tau$ es derivable.

### 3.2.4. Demostración de juicios de tipado

Dado un sistema tipado, queremos ver si un juicio de tipado es correcto. Para hacer esto, iremos aplicando, al juicio, las reglas del sistema hasta llegar a sus axiomas o hasta llegar a una contradicción o incertidumbre. Si pasa lo primero, entonces el juicio es correcto, si pasa lo segundo, el juicio está mal.

## 3.3. Semántica operacional

Ya definimos cuales serán los términos y expresiones válidas de nuestro lenguaje. El siguiente paso, es definir algún mecanismo que nos permita inferir el significado o **valor** de un término.

Para lograr este objetivo definimos lo que se llama **semántica operacional**, un mecanismo que interpreta a los **términos como estados** de una máquina abstracta y define una **función de transición** que indica, dado un estado, cual es el siguiente.

De esta forma, el significado de un término $M$ es el estado final que alcanza la máquina al comenzar con $M$ como estado inicial.

Tenemos dos formas de definir la semántica:

- **Small-step**: La función de transición describe un paso de computación, descomponiendo los términos compuestos en términos más simples y especificando el orden el que deben ser reducidos.
- **Big-step** (o **Natural Semantics**): La función de transición, en un paso, evalúa el termino a su resultado.

Nosotros vamos a usar la primer opción. Y la formulamos a través de **juicios de evaluación**

$$M \to N$$

que se leen "*el término $M$ reduce, en un paso, al término $N$*".

Para establecer el significado de estos juicios, vamos a definir **axiomas de evaluación** y **reglas de evaluación**. Los axiomas nos indicarán cuales juicios de evaluación son siempre derivables y las reglas nos dirán que juicios son derivables dado un contexto. Las reglas de la semántica asumen que las expresiones están bien tipadas.

### 3.3.1. Expresiones Booleanas

Los valores de las expresiones booleanas son:

$$V \ ::= \ true \mid false$$

y son usados para reducir el término $if\ M_1\ then\ M_2\ else\ M_3$ mediante los siguientes axiomas:

$$\frac{}{if\ true\ then\ M_1\ else\ M_2 \to M_1}\text{(E-IfTrue)}$$

$$\frac{}{if\ false\ then\ M_1\ else\ M_2 \to M_2}\text{(E-IfFalse)}$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{if\ M_1\ then\ M_2\ else\ M_3 \to if\ M_1'\ then\ M_2\ else\ M_3}\text{(E-If)}$$

Estas reglas nos indican que dado un término del tipo $if\ M_1\ then\ M_2\ else\ M_3$, si $M_1 = true$, entonces podemos remplazar la expresión por $M_2$, si $M_1 = false$ entonces podemos remplazar la expresión por $M_3$ y si $M_1$ es una expresión reducible a $M_1'$, entonces podemos remplazar la expresión por $if\ M_1'\ then\ M_2\ else\ M_3$.

Con estas reglas definimos la estrategia de evaluación del condicional que se corresponde el orden habitual en lenguajes de programación:

1. Primero evaluamos la guarda del condicional
2. y una vez que la guarda sea un valor, evaluamos la expresión del *then* o del *else* según corresponda.

### 3.3.2. Propiedades

**Determinismo** Si $M \to M'$ y $M \to M''$ entonces $M' = M''$, esto quiere decir que el valor que representa $M$ no cambia con las reducciones que le apliquemos.

**Valores en forma normal** Una **forma normal** es un término que no puede evaluarse más. Consideraremos que terminamos de evaluar un término cuando conseguimos su forma normal.

Todos los valores tiene una forma normal, sin embargo hay que tener en cuenta que como estamos definiendo un lenguaje tipado, habrá formas normales que no representen ningún valor.

### 3.3.3. Evaluación en muchos pasos

El juicio de **evualuación de muchos pasos** $\twoheadrightarrow$ es la clausura reflexiva, transitiva de $\to$. Es decir, la menor relación tal que:

1. Si $M \to M'$, entonces $M \twoheadrightarrow M'$
2. $M \twoheadrightarrow M$ para todo $M$
3. Si $M \twoheadrightarrow M'$ y $M' \twoheadrightarrow M''$, entonces $M \twoheadrightarrow M''$

**Unicidad de formas normales** Si $M \twoheadrightarrow U$ y $M \twoheadrightarrow V$ con $U$ y $V$ formas normales, entonces $U = V$

**Terminación** Para todo $M$ existe una forma normal $N$ tal que $M \twoheadrightarrow N$

## 3.4. Semántica operacional de $\lambda^b$

En la sección 3.3.1 definimos el comportamiento de las expresiones booleanas, sin embargo, nos falta definir como reducir términos del tipo $\lambda x : \sigma.M$ y $M\ N$.

Lo primero a tener en cuenta, es que vamos a considerar a los términos de $\lambda x : \sigma.M$ como valores, sin si $M$ es reducible o nó. Entonce, nuestro conjunto de valores del lenguaje sería:

$$V \ ::= \ true \mid false \mid \lambda x : \sigma.M$$

Por lo que todo término bien tipado y cerrado (sin variables libres) evalúa a alguna de estos términos. Si es de tipo *Bool* evalúa a $true$ o $false$, si es de tipo $\sigma \to \tau$ evalúa a $\lambda x : \sigma M$. A las reglas y axiomas definidos para los tipos booleanos agregamos los siguientes:

$$\frac{M_1 \to M_1'}{M_1\ M_2 \to M_1'\ M_2}(\text{E-App1 / } \mu)$$

$$\frac{M_2 \to M_2'}{V_1\ M_2 \to V_1\ M_2'}(\text{E-App2 / } v)$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma.M)\ V \to M\{x \leftarrow V\}}(\text{E-App2 / } \beta)$$

**Estado de error** Es un estado que **no es** un valor pero en el que la computación está trabada. Representa el estado en el cual el sistema de runtime de una implementación real generaría una excepción.

El sistema de tipado, nos garantiza que si un término cerrado está bien tipado entonces evalúa a un valor.

**Corrección** La corrección de un término nos asegura dos cosas: **Progreso** y **Preservación**.

El **progreso** asegura que si $M$ es un término cerrado y bien tipado, entonces $M$ es un valor o existe $M'$ tal que $M \to M'$. En otras palabras, nos asegura que la evaluación no puede trabarse para términos cerrados y bien tipados que no son valores. Y si un programa termina, entonces nos devuelve un valor.

La **preservación** asegura que la evaluación de un término $M$ cerrado y bien tipado preserva tipos. Es decir, no importa cuanta veces se reduzca $M$, el término resultante siempre es del tipo original.

$$\text{Si } \Gamma \rhd M : \sigma \text{ y } M \to N \text{ entonces } \Gamma \rhd N : \sigma$$

**Extendiendo el lenguaje** Cuando queramos extender el lenguaje, debemos realizar los mismos pasos que realizamos para definir el lenguaje $\lambda^b$, esto es decir, agregar el nuevo tipo al conjunto de tipos, definir los términos de ese tipo, sus reglas de tipado y sus reglas semánticas, asegurándonos de que las nuevas reglas no interfieran con las ya definidas. Esto es, no debemos definir reglas que las contradigan o que den nuevas formas de inferir algo que ya se podía inferir con otras reglas.

En el apéndice de extensiones, muestro algunas extensiones que servirán como ejemplo.

**Macros** Hay expresiones del lenguaje que usaremos con demasiada frecuencia, para estas expresiones podremos definir macros que simplificaran su escritura. Algunos ejemplos son:

$$Id_{Bool} \stackrel{def}{=} \lambda x : Bool.x$$

$$and \stackrel{def}{=} \lambda x : Bool.\lambda y : Bool.if\ x\ then\ y\ else\ false$$

## 3.5. Extensión Naturales ($\lambda^{bn}$)

**Tipos**

$$\sigma, \tau\ ::=\ Bool \mid Nat \mid \sigma \to \tau$$

**Términos**

$$M\ ::=\ \ldots \mid 0 \mid succ(M) \mid pred(M) \mid isZero(M)$$

Los términos significan:

- $succ(M)$: evaluar $M$ hasta arrojar un número e incrementarlo.

- $pred(M)$: evaluar $M$ hasta arrojar un número y decrementar.
- $iszero(M)$: evaluar $M$ hasta arrojar un número, luego retornar $true/false$ según sea cero o no.

**Axiomas y reglas de tipado**

$$\frac{}{\Gamma \rhd 0 : Nat}(\text{T-Zero})$$

$$\frac{\Gamma \rhd M : Nat}{\Gamma \rhd succ(M) : Nat}(\text{T-Succ}) \qquad \frac{\Gamma \rhd M : Nat}{\Gamma \rhd pred(M) : Nat}(\text{T-Pred})$$

$$\frac{\Gamma \rhd M : Nat}{\Gamma \rhd isZero(M) : Bool}(\text{T-IsZero})$$

**Valores**

$$V \ ::= \ \ldots \mid \underline{n} \text{ donde } \underline{n} \text{ abrevia } succ^n(0)$$

**Axiomas y reglas de evaluación**

$$\frac{M_1 \to M_1'}{succ(M_1) \to succ(M_1')}(\text{E-Succ})$$

$$\frac{}{pred(0) \to 0}(\text{E-PredZero}) \qquad \frac{}{pred(succ(\underline{n})) \to \underline{n}}(\text{E-PredSucc})$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{pred(M_1) \to pred(M_1')}(\text{E-Pred})$$

$$\frac{}{isZero(0) \to true}(\text{E-IsZeroZero}) \qquad \frac{}{isZero(succ(\underline{n})) \to false}(\text{E-isZeroSucc})$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{isZero(M_1) \to isZero(M_1')}(\text{E-isZero})$$

## 3.6. Simulación de lenugajes imperativos

Los lenguajes imperativos se caracterizan por su capacidad de asignar y modificar variables dentro de un programa. Esto lo hace a través de comandos, expresiones del lenguaje cuyo objetivo es crear un efecto sobre el estado de la computadora.

Queremos extender el lenguaje $\lambda$ para que poder simular comandos y efectos sobre la memoria.

En un lenguaje imperativo **todas** las variables son **mutables**, es decir, que hay operaciones que pueden modificar su valor. Para lograr esto, hace uso de tres operaciones básicas:

- **Asignación:** $x := M$ almacena en la referencia $x$ el valor de $M$

- **Alocación (Reserva de memoria)** $ref\ M$ genera una referencia fresca cuyo contenido es el valor de $M$
- **Derreferenciación (Lectura):** $!x$ sigue la referencia $x$ y retorna su contenido.

Notemos que una vez que agreguemos estas expresiones al lenguaje lambda, este dejará de ser un lenguaje funcional **puro** (un lenguaje en el todas sus expresiones carecen de efecto).

Nos gustaría agregar las expresiones mencionadas a nuestro lenguaje, para esto primero debemos asignarles un tipo.

**Asignacion** Lo primero que debemos tener en cuenta, es que la igualdad ($x := M$) es una expresión de la cual no nos interesa saber su valor sino el efecto que tiene la misma sobre el contexto. Entonces, debemos definir un nuevo tipo que nos permita identificar cuando una expresión evaluada solo fue evaluada para generar un efecto. Nombraremos este tipo $Unit$ y su conjunto de valores será solo el valor $unit$. Podemos decir que este tipo cumple el rol de *void* en C.

**Macro punto y coma ( ; )** En lenguajes con efectos laterales, como el que estamos definiendo, esta macro nos servirá para definir el orden de evaluación de varias expresiones en **secuencia**.

$$M_1; M_2 \stackrel{def}{=} (\lambda x : Unit.M_2)\ M_1 \qquad x \notin FV(M_2)$$

Por como definimos las reglas semánticas del lenguaje, esto significa que primero se evalúa $M_1$ y luego $M_2$.

### 3.6.1. Extensión con Referencias ($\lambda^{bnu}$)

**Referencias** Una referencia es una abstracción de una porción de memoria que se encuentra en uso. Usaremos el tipo $Ref\ \sigma$ para diferenciar las expresiones que representan referencias.

**Representación** Representaremos las posiciones con **direcciones simbólicas** o *locations* usando etiquetas $l, l_1$ y definiremos a la **memoria** o *store* como una función parcial $\mu$ que dada una dirección nos devuelve el valor almacenado en ella. Y notaremos:

- $\mu[l \to V]$ es el store resultante de **pisar** $\mu(l)$ con $V$.
- $\mu \oplus (l \to V)$ es el **store extendido** resultante de ampliar $\mu$ con una nueva asociación $l \to V$ asumiendo que $l \notin Dom(\mu)$.

**Uso en semántica** Ahora necesitamos una forma de usar estas nuevas definiciones en nuestras evaluaciones, por lo que agregaremos las etiquetas al conjunto de valores y, a partir de ahora, los juicios de evaluación, tendrán la siguiente forma:

$$M|\mu \to M'|\mu'$$

Esto significa que una expresión $M$ reduce a $M'$ y que afecta a $\mu$ de tal forma que pasa a ser $\mu'$, así reflejaremos los cambios de estado de la memoria.

Notemos que, a pesar de que agregamos las etiquetas $l$ como términos y valores, estás son solo producto de la formalización y **no** se pretende que sean usadas por el programador.

**Uso en tipado** Con la posibilidad de modificar la memoria durante la ejecución de un programa, se hace necesaria la definición de un contexto que nos permita inferir el tipo del valor almacenado en las posiciones usadas. Introducimos el **contexto de tipado** $\Sigma$ para direcciones como una función parcial de direcciones a tipos. Y los juicios de tipado serán de la siguiente forma:

$$\Gamma|\Sigma \rhd M : \sigma$$

Indicando esto, que $M$ es de tipo $\sigma$ en el contexto $\Gamma$ cuando el estado de la memoria se corresponde con el contexto de tipado $\Sigma$.

### 3.6.2. La extension

**Tipos**

$$\sigma, \tau \ ::= \ Bool \ | Nat \mid Unit \mid Ref \ \sigma \mid \sigma \to \tau$$

**Términos**

$$M \ ::= \ \ldots \mid unit \mid ref \ M \mid !M \mid M \ := \ N \mid l$$

**Axiomas y reglas de tipado**

$$\frac{}{\Gamma|\Sigma \rhd unit : Unit}(\text{T-Unit}) \qquad \frac{\Gamma|\Sigma \rhd M_1 : \sigma}{\Gamma|\Sigma \rhd ref \ M_1 : Ref \ \sigma}(\text{T-Ref})$$

$$\frac{\Gamma|\Sigma \rhd M_1 : Ref \ \sigma}{\Gamma \rhd !M_1 : \sigma}(\text{T-DeRef})$$

$$\frac{\Gamma|\Sigma \rhd M_1 : Ref \ \sigma \quad \Gamma|\Sigma \rhd M_2 : \sigma}{\Gamma \rhd M_1 \ := \ M_2 : Unit}(\text{T-Assing})$$

$$\frac{\Sigma(l) = \sigma}{\Gamma|Signa \rhd l : Ref \ \sigma}(\text{T-Loc})$$

**Valores**

$$V \ ::= \ \ldots \mid unit \mid l$$

**Axiomas y reglas semánticas**

$$\frac{M_1|\mu \to M_1'|\mu'}{M_1 \ M_2|\mu \to M_1' \ M_2|\mu'}(\text{E-App1}) \qquad \frac{M_2|\mu \to M_2'|\mu'}{V_1 \ M_2|\mu \to V_1 \ M_2'|\mu'}(\text{E-App2})$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma.M) \ V|\mu \to M\{x \leftarrow V\}|\mu'}(\text{E-AppAbs})$$

$$\frac{M_1|\mu \to M_1'|\mu'}{!M_1|\mu \to !M_1'|\mu'}(\text{E-DeRef}) \qquad \frac{\mu(l) = V}{!l|\mu \to V|\mu}(\text{E-DerefLoc})$$

$$\frac{M_1|\mu \to M_1'|\mu'}{M_1 \ := \ M_2|\mu \to M_1' \ := \ M_2|\mu'}(\text{E-Assign1})$$

$$\frac{M_2|\mu \to M_2'|\mu'}{V \ := \ M_2|\mu \to V \ := \ M_2'|\mu'}(\text{E-Assign2})$$

$$\frac{}{l \ := \ V|\mu \to unit|\mu[l \to V]}(\text{E-Assign})$$

$$\frac{M_1|\mu \to M_1'|\mu'}{ref \ M_1|\mu \to ref \ M_1'|\mu'}(\text{E-Ref}) \qquad \frac{l \notin Dom(\mu)}{ref \ V|\mu \to l|\mu \oplus (l \to V)}(\text{E-RefV})$$

### 3.6.3. Correción de tipos en un lenguaje con referencias

Al agregar referencia, hay consecuencias. Una de ellas es que no todo término cerrado y bien tipado termina. Por lo que debemos reformular las definiciones de corrección del lenguaje, es decir, debemos indicar que significa el **progreso** y la **preservación** cuando hay referencias.

### 3.6.4. Preservación

La preservación nos aseguraba que no importa cuantas veces reduzcamos una expresión, esta debería mantener su tipo. Sin embargo, con las asignaciones podemos cambiar el tipo de ciertos valores durante la ejecución de un programa, lo que implica que la expresión podria cambiar su tipo. Para definir la preservación precisamos una noción de compatibilidad entre el store y el contexto de tipado que nos permita asegurar que si los valores no cambian su tipo, entonces la expresión mantiene su tipo.

Decimos que $\Gamma|\Sigma \rhd \mu$ si y solo si $Dom(\Sigma) = Dom(\mu)$ y $\Gamma|Sigma \rhd \mu(l) : \Sigma(l)$ para todo $l \in Dom(\mu)$. Es decir, $\mu$ es compatible con $\Sigma$ si ambas funciones tiene el mismo dominio, y es cierto que los tipos de cada etiqueta de $\mu$ coinciden con los tipos que se les asignó en $\Sigma$.

Entonces definimos la preservación de la siguiente manera:

> **Si** $\Gamma|\Sigma \rhd M : \sigma$ y $M|\mu \to N|\mu'$ y $\Gamma|\Sigma \rhd \mu$ **entonces existe un** $\Sigma'$ **que contiene a** $\Sigma$ **tal que** $\Gamma|\Sigma' \rhd N : \sigma$ y $\Gamma|\Sigma' \rhd \mu'$

La nueva definición nos dice que dada una expresión $M$ de tipo $\sigma$ y un contexto $\Gamma\Sigma$ compatible con $\mu$, si pasa que cuando reducimos $M|\mu \to N|\mu'$, $mu'$ es compatible con $\Sigma'$, entonces la reducción tendrá el mismo tipo que $M$.

Para que $\mu'$ sea compatible con $\Sigma'$ puede haber dos posibilidad: O qué $\mu' = \mu$ y $\Sigma = \Sigma'$ o qué $\mu'$ sea una extensión de $\mu$, es decir que se haya creado una referencia nueva, en cuyo caso ninguno de los tipos fue modificado y $\Sigma'$ es $\Sigma$ extendido con el tipo de la nueva referencia.

### 3.6.5. Progreso

El progreso nos aseguraba que dada una expresión, entonces su ejecución termina en un valor o no termina. Para el nuevo lenguaje, hay que tener en cuenta el contexto de tipado:

Si $M$ es cerrado y bien tipado en un contexto de tipado de memoria $\Sigma$, entonces

- $M$ es un valor
- o bien para cualquier memoria $\mu$ que sea compatible con $\Sigma$, existe $M'$ y $\mu'$ tal que $M|\mu \to M'|\mu'$

Esto quiere decir que solo se puede asegurar progreso cuando $\mu$ es compatible con $\Sigma$.

## 3.7. Extensión con recursión

Queremos dar al lenguaje $\lambda$, la capacidad de interpretar expresiones recursivas. Definimos, entonces, la función $fixM$ que dado para función $M$ devuelve el punto fijo de dicha función, es decir, un valor $x$ tal que $Mx$ evalúa a $x$.

Veamos un ejemplo, supongamos que tenemos la función $f(n) = \textbf{If } n = 0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } n * f(n-1)$. Cuando evaluamos $f$ en 0, obtenemos su definición para el valor $O$, cuando la evaluamos en 1, la definimos para 0 y 1, con cada valor que tengamos, la iremos definiendo para ese valor y para todos los anteriores.

Podríamos pensar que cuando evaluamos $n \to$ ínf, obtenemos una función que se define para todos los valores naturales, es decir obtenemos la función factorial, propiamente dicha.

**Términos**

$$M \ := \ \ldots \mid fix\ M$$

**Regla de tipado**

$$\frac{\Gamma \rhd M : \sigma \to \sigma}{\Gamma \rhd fix\ M : \sigma}(\text{T-Fix})$$

**Reglas de evaluación**

$$\frac{M_1 \to M_1'}{fix\ M_1 \to fix\ M_1'}(\text{E-Fix})$$

$$\frac{}{fix\ (\lambda x : \sigma.M) \to M\{x \leftarrow fix\ \lambda x : \sigma.M\}}(\text{E-FixBeta})$$

# 4. Inferencia de tipos

Queremos modificar el lenguaje de cálculo lambda para que las expresiones no necesiten las notaciones de tipos explicitas. Para esto debemos definir términos sin información de tipos en los que la información faltante pueda ser **inferida** de manera sencilla. Esto es, debemos convertir dichos términos en términos bien tipados del cálculo lambda sin ningún problema.

Este nuevo lenguaje, nos evitará la sobrecarga de tener que declarar y manipular todos los tipos al momento de escribir un programa. Sin embargo, debemos tener en cuenta que, durante la compilación de los mismos, hay que hacer la inferencia de tipos, es decir, el compilador se deberá encargar de pasar el lenguaje que definamos a uno lambda tipado antes de poder compilar el programa.

### Términos

El lenguaje sin tipos tendrá todos los términos del lenguaje $\lambda$ con el que estuvimos trabajando hasta ahora, con la diferencia de que si en ellos había una notación de tipo, entonces la obviamos:

$$\begin{aligned} M \ ::= \ & x \\ | \ & true \mid false \mid if \ M \ then \ P \ else \ Q \\ | \ & 0 \mid succ(0) \mid isZero(M) \\ | \ & \lambda x.M \mid M \ N \mid fix \ M \end{aligned}$$

Ahora, si bien la mayoría de los términos son iguales a los términos originales, necesitariamos alguna forma de convertir los términos del lambda cálculo a términos no tipados y viceversa. Para el primer caso, definimos la función Erase que dado un término del lambda cálculo, **elimina** las anotaciones de tipos de las abstracciones que contenga. Por ejemplos:

$$\text{Erase}(\lambda x : Nat.\lambda f : Nat \to Nat.f \ x) = \lambda x.\lambda f.f \ x$$

**Chequeos de tipo** Realizar el chequeo de tipo es determinar, para un término estándar (del lenguaje $\lambda$ tipado) $M$, si existe $\Gamma$ y $\sigma$ tales que $\Gamma \rhd M : \sigma$ es derivable. Osea que nos indica si $M$ es un término tipable o no.

Este chequeo es facil de realizar, ya que solo hay que seguir la estructura sintáctica de $M$ para reconstruir una derivación de juicio.

### Definición de inferencia

En cambio, con la inferencia de tipos, dado un término $U$ sin notaciones de tipo, se trata hallar un término estándar (con anotaciones de tipos) $M$ tal que:

1. $\Gamma \rhd M : \sigma$ para algún $\Gamma$ y $\sigma$, y
2. $\text{Erase}(M) = U$

Lo que estamos diciendo es que queremos encontrar una expresión bien tipada $M$ del lenguaje lambda que sea equivalente a $U$. Si encontramos este $M$, $U$ será de tipo $\sigma$, sino $U$ será una expresión no tipable en nuestro lenguaje.

### 4.0.1. Variables de tipo

Supongamos que tenemos la expresión $U = \lambda x.x$. En este caso, si queremos tipar $U$, nos damos cuenta que puede ser la función identidad de cualquier tipo. Como cualquiera de estas expresiones es igual de válida necesitamos escribir esto en nuestra solución, para eso usamos las **variables de tipo**.

Una **variables de tipo** s es una variable que representa una expresión de tipo arbitraria e indica que no importa por que expresión de tipo la remplacemos, tendremos una solución válida. Esto nos permitirá escribir que la expresión $M$ resultante de inferir los tipos de $U$ será $M = \lambda x : \mathbf{s}.x$ donde **s** puede ser cualquier tipo de nuestro lenguaje.

Debemos agregar esta nueva expresión a las expresiones de tipo del cálculo lambda:

$$\sigma \ ::= \ \mathrm{s} \mid Nat \mid Bool \mid \sigma \to \tau$$

## 4.1. Sustitución de tipos

Una función $S$ de sustitución es una función que mapea variables de tipo en expresiones de tipo y puede ser aplicada a expresiones de tipos ($S\sigma$), términos ($SM$) y contextos de tipado ($S\Gamma$).

Describimos $S$ usando la notación $\{\sigma_1/t_1, \ldots, \sigma_n/t_n\}$ indicando que la variable $t_i$ debe ser remplazada por $\sigma_1$. Además, definimos el **conjunto soporte** de $S$ al conjunto $\{t_1, \ldots, t_n\}$ como el conjunto que representa las variables que afecta $S$.

Por ejemplo, si $S = \{Bool/t\}$, entonces $S(\lambda x : \mathrm{t}.x) = \lambda x : Bool.x$ y el tipo soporte de $S$ es $\{t\}$.

La sustitución cuyo soporte es $\varnothing$, es la **sustitución identidad**.

Si tenemos dos juicios de tipado $\Gamma \rhd M : \sigma$ y $\Gamma' \rhd M' : \sigma'$ tales que $\Gamma' \rhd M' : \sigma'$ es el resultado de aplicar alguna función de sustitución $S$ a $\Gamma \rhd M : \sigma$, entonces decimos que $\Gamma' \rhd M' : \sigma'$ es instancia de $\Gamma \rhd M : \sigma$

**Composición de sustituciones** La composición de sustituciones de $S$ y $T$, denotada $S \circ T$, es la sustitución que se comporta como sigue:

$$(S \circ T)(\sigma) = S(T\sigma)$$

**Preorden de sustituciones** Una sustitución $S$ es **más general** que $T$ si existe una sustitución $U$ tal que $T = U \circ S$, es decir, si $T$ es una instancia de $S$.

### 4.1.1. Unificación

El algoritmo de inferencia que vamos a proponer analiza un término (sin notaciones de tipos) a partir de sus subtérminos. Una vez obtenida la información para cada uno de los subtérminos debe determinar si la información de cada uno de ellos es consistente (**consistencia**)y, si lo es, sintetizar la información del término original a partir de esta (**Síntesis**).

Para realizar la síntesis debemos **compatibilizar** la información de tipos de cada subtérmino, por cada variable $x$ del término tenemos que tomar los tipos que le asigno cada súbtermino y unificarlos. Es decir, debemos encontrar una sustitución $S$ que nos permita remplazar los tipos que dió cada subexpresión por un tipo único. Veamos un ejemplo:

Sea $M = x\ y + x\ (y + 1)$, del primer súbtermino $x\ y$ ténemos que $x :: \mathrm{s} \to \mathrm{t}$ e $y :: \mathrm{s}$, del subtérmino $x\ (y + 1)$ tenemos que $x :: Nat \to \mathrm{u}$ e $y :: Nat$. Ahora, $x$ e $y$ pueden tener un solo tipo en $M$, por lo

que necesitamos una sustitución que nos permita unificar s $\to$ t con $Nat \to$ u y $s$ con $Nat$. En este caso podemos definir $S = \{Nat/\text{s},\ \text{u/t}\}$, concluyendo que $x :: Nat \to$ t e $y : Nat$.

**Ecuación de unificación** Es una expresión de la forma $\sigma_1 \doteq \sigma_2$ cuya solución es una sustitución tal que $S\sigma_1 = S\sigma_2$. Por lo general tendremos un conjunto de ecuaciones de unificación y la solución a dicho conjunto será la sustitución que unifica todas las expresiones.

En el ejemplo anterior, las ecuaciones de unificación hubiesen sido $\{\text{s} \to \text{t} \doteq Nat \to \text{u},\ \text{s} \doteq Nat\}$

Diremos que una sustitución $S$ es un **unificador más general (MGU)** de $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \ldots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$, si es solución de ese conjunto y es más general que cualquier otra de sus soluciones.

**Teorema** Si $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \ldots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$ tiene solución, entonces existe un MGU y además es único salvo renombre de variables.

### 4.1.2. Algoritmo de unificación de Martelli-Montanari

Dado un conjunto de ecuaciones de unifiación $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \ldots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$, vamos a presentar un algoritmo no-deterministico que consiste en **reglas de simplificación** que reescriben conjuntos de pares de tipos a unificar (*goals*).

Las secuencias que terminan en un *goal* vacío son **exitosas**, el resto, son **fallidas**. Si una secuencia es exitosa, entonces los pasos en los que realizamos sustituciones serán soluciones parciales al problema y la composición de todas ellas será el MGU.

### 4.1.3. Reglas de reducción

1. **Descomposición**

   $\{\sigma_1 \to \sigma_2 \doteq \tau_1 \to \tau_2\} \cup G \mapsto \{\sigma_1 \doteq \tau_1,\ \sigma_2 \doteq \tau_2\} \cup G$

2. **Eliminación de par trivial**

   $\{Nat \doteq Nat\} \cup G \mapsto G$

   $\{Bool \doteq Bool\} \cup G \mapsto G$

   $\{\text{s} \doteq \text{s}\} \cup G \mapsto G$

3. **Swap** Si $\sigma$ no es una variable,

   $\{\sigma \doteq \text{s}\} \cup G \mapsto \{\text{s} \doteq \sigma\} \cup G$

4. **Eliminación de variable** Si $s \notin FV(\sigma)$

   $\{\text{s} \doteq \sigma\} \cup G \mapsto_{\sigma/s} G[\sigma/s]$

5. **Falla**

   $\{\sigma \doteq \tau\} \cup G \mapsto$ `falla`, con $(\sigma, \tau) \in T \cup T^{-1}$ y $T = \{(Bool, Nat), (Nat, \sigma_1 \to \sigma_2), (Bool, \sigma_1 \to \sigma_2\}$. Acá, la notación $T^{-1}$ se refiere al conjunto con cada tupla de $T$ invertida.

6. **Occur Check** Si $s \neq \sigma$ y $s \in FV(\sigma)$

   $\{\text{s} \doteq \sigma\} \cup G \mapsto$ `falla`

### 4.1.4. Propiedades del algoritmo

El algoritmo de Martinelli-Montanari siempre termina. Sea $G$ un conjunto de pares, entonces:

- Si $G$ tiene un unificador, el algoritmo termina exitosamente y retorna un MGU.
- Si $G$ no tiene un unificador, el algoritmo termina con `falla`.

### 4.1.5. Ejemplo de aplicación

$$\{(Nat \to r) \to (r \to u) \doteq t \to (s \to s) \to t\} \mapsto^1 \{Nat \to r \doteq t,\ r \to u \doteq (s \to s) \to t\}$$
$$\mapsto^3 \{t \doteq Nat \to r,\ r \to u \doteq (s \to s) \to t\} \mapsto^4_{Nat \to r/t} \{r \to u \doteq (s \to s) \to (Nat \to r)\}$$
$$\mapsto^1 \{r \doteq (s \to s),\ u \doteq Nat \to r\} \mapsto^4_{s \to s/r} \{u \doteq Nat \to (s \to s)\} \mapsto^4_{Nat \to (s \to s)/u} \varnothing$$

Entonces, el MGU es
$\{Nat \to (s \to s)/u\} \circ \{s \to s/r\} \circ \{Nat \to r/t\} = \{Nat \to (s \to s)/u,\ s \to s/r,\ Nat \to (s \to s)/t\}$

## 4.2. Función de inferencia $\mathbb{W}$

Vamos a definir una función $\mathbb{W}$ que dada una expresión $U$ sin notación de tipos, nos devolverá un juicio de tipado con una expresión tipada $M$ que corresponde a $U$. Esta función, la ejecutaremos de manera recursiva sobre las sub-expresiones de $U$ y sustituirá, si es posible, los tipos de cada una de ellas para que tengan "sentido" en $U$.

### 4.2.1. Propiedades deseables de $\mathbb{W}$

Dado un término $U$, $\mathbb{W}(U)$ nos devolverá, si tiene éxito, una terna de tres elementos que serán un contexto de tipado $\Gamma$ una expresión $M$ y un $\sigma$ (notamos $\mathbb{W}(U) = \Gamma \rhd M : \sigma$).

Queremos que $\mathbb{W}$ sea **correcto** y **completo**.

**Correctitud** $\mathbb{W}(U) = \Gamma \rhd M : \sigma$ implica que $\text{Erase}(M) = U$ y $\Gamma \rhd M : \sigma$ es derivable. Osea que $M$ es una expresión de tipo $\sigma$ en un contexto $\Gamma$ tal que si le borramos las notaciones de tipo, se convierte en $U$.

**Completitud** Si $\Gamma \rhd M : \sigma$ es derivable y $\text{Erase}(M) = U$, entonces: $\mathbb{W}(U)$ tiene éxito y produce un juicio $\Gamma' \rhd M' : \sigma'$ que es instancia del mismo. En otras palabras, si $U$ se puede obtener a partir de una expresión $M$, entonces $\mathbb{W}$ deberá devolver el juicio de tipado que corresponde a $M$ o uno más general (esto es con variables de tipos, si resulta que $U$ podría ser de otros tipos).

### 4.2.2. Algoritmo de inferencia

El objetivo es definir $\mathbb{W}$ por recursión sobre la estructura de $U$, por lo que definirla, primero, para las construcciones más simples y luego para las expresiones compuetas. Además, el algoritmo se valdrá del algoritmo de unificación para combinar los resultados de los pasos recursivos y, así, obtener un tipado consistente.

### 4.2.3. Constantes y variables

$$\mathbb{W}(true) \stackrel{def}{=} \varnothing \rhd true : Bool$$
$$\mathbb{W}(false) \stackrel{def}{=} \varnothing \rhd false : Bool$$
$$\mathbb{W}(x) \stackrel{def}{=} \{x : s\} \rhd x : s,\ s \text{ variable fresca}$$
$$\mathbb{W}(0) \stackrel{def}{=} \varnothing \rhd 0 : Nat$$

### 4.2.4. Caso *succ*

$\mathbb{W}(succ(U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \rhd S\ succ(M) : Nat$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \rhd M : \tau$
- $S = MGU\{\tau \doteq Nat\}$

### 4.2.5. Caso *pred*

$\mathbb{W}(pred(U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \rhd S\ pred(M) : Nat$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \rhd M : \tau$
- $S = MGU\{\tau \doteq Nat\}$

### 4.2.6. Caso *isZero*

$\mathbb{W}(isZero(U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \rhd S\ isZero(M) : Bool$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \rhd M : \tau$
- $S = MGU\{\tau \doteq Nat\}$

### 4.2.7. Caso *ifThenElse*

$\mathbb{W}(if\ U\ then\ V\ else\ W) \stackrel{def}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_3 \rhd S\ (if\ M\ then\ P\ else\ Q) : S\sigma$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \rhd M : \rho$
- $\mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \rhd P : \sigma$
- $\mathbb{W}(W) = \Gamma_3 \rhd Q : \tau$
- $S = MGU\{\sigma_1 \doteq \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \ \wedge\ x : \sigma_2 \in \Gamma_j,\ i \neq j\} \cup \{\sigma \doteq \tau\ \ \rho \doteq Bool\}$

### 4.2.8. Caso aplicación

$\mathbb{W}(U\ V) \stackrel{def}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \rhd S\ (M\ N) : St$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \rhd M : \tau$
- $\mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \rhd N : \rho$
- $S = MGU\{\sigma_1 \doteq \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \ \wedge\ x : \sigma_2 \in \Gamma_j,\ i \neq j\} \cup \{\tau \doteq \rho \to t\}$ con $t$ variable fresca

### 4.2.9. Caso abstracción

$$\mathbb{W}(\lambda x.U) \stackrel{def}{=} \Gamma\backslash\{x:\tau\} \rhd \lambda x:\tau.M : \tau \to \rho$$

Sea $\mathbb{W}(U) = \Gamma \rhd M : \rho$, si $\Gamma$ tiene información de tipos para $x$, es decir $x : \tau \in \Gamma$ para algún $\tau$, entonces:

$$\mathbb{W}(\lambda x.U) \stackrel{def}{=} \Gamma\backslash\{x:\tau\} \rhd \lambda x:\tau.M : \tau \to \rho$$

Si $\Gamma$ no tiene información de tipos para $x$ ($x \notin \mathrm{Dom}(\Gamma)$), entonces elegimos una variable fresca $s$ y

$$\mathbb{W}(\lambda x.U) \stackrel{def}{=} \Gamma \rhd \lambda x:s.M : s \to \rho$$

### 4.2.10. Caso *fix*

$\mathbb{W}(fix\ (U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \rhd S\ fix\ (M) : St$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \rhd M : \tau$
- $S = MGU\{\tau \doteq t \to t\}$ con $t$ variable fresca

### 4.2.11. Complejidad del algoritmo

Tanto la unificación como la inferencia para cálculo lambda se puede realizar en tiempo lineal. Sin embargo, el tipo principal asociado a un término sin anotaciones puede ser exponencial en el tamaño del término.

### 4.2.12. Extensión del algoritmo a nuevos tipos

Para extender el algoritmo a otros tipos debemos agregar los casos correspondientes al nuevo tipo teniendo en cuenta que los llamados recursivos devuelven un contexto, un término y un tipo sobre los que no podemos asumir nada. Si la nueva regla tiene tipos iguales o contextos repetidos, debemos unificarlos. Y si la regla liga alguna variable, entonces vamos a poder dividir en dos casos: Si alguno de los contextos recursivos tiene información sobre esa variable, entonces sacamos su tipo del contexto que la contenga, sino le asignamos una variable fresca de tipo. Si la regla tiene restricciones adicionales, se incorporan como posibles fallas. Veamos un ejemplo para la extensión de listas (definida en el ejercicio 17 de la práctica 2).

### 4.2.13. Extensión del algoritmo para listas

$\mathbb{W}([]) = \varnothing \rhd [\ ]_t : t$ con $t$ variable fresca.
$\mathbb{W}(U_1 :: U_2) = S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \rhd S(M_1 :: M_2) : S[\sigma_1]$

- $\mathbb{W}(U_i) = \Gamma_i \rhd M_i : \sigma_i$
- $S = MGU\{\sigma_1 \doteq \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \ \wedge \ x : \sigma_2 \in \Gamma_j,\ i \neq j\} \cup \{[\sigma_1] \doteq \sigma_2\}$

$\mathbb{W}(\text{case } U \text{ of } \{[\ ] \rightsquigarrow U_2 \mid h :: t \rightsquigarrow U_3\}) =$
$S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_3\backslash\{h,t\} \rhd S(\text{case } M_1 \text{ of } \{[\ ] \rightsquigarrow M_2 \mid h :: t \rightsquigarrow M_3\}) : S\sigma_2$

- $\mathbb{W}(U_i) = \Gamma_i \rhd M_i : \sigma_i$ con $i = 1, 2, 3$
- $S = MGU\{\sigma_1 \doteq \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \ \wedge \ x : \sigma_2 \in \Gamma_j,\ i \neq j\} \cup \{\sigma_1 \doteq [t_1],\ t_1 \doteq \tau_h,\ \tau_t \doteq \sigma_1,\ \sigma_2 \doteq \sigma_3\}$ con

$$\tau_h = \begin{cases} \sigma_h & \text{si } h : \sigma_h \in \Gamma_3 \\ t_2 & \text{sino} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \tau_t = \begin{cases} \sigma_t & \text{si } t : \sigma_t \in \Gamma_3 \\ t_2 & \text{sino} \end{cases}$$

# 5. Subtipado

Muchos lenguajes nos ofrecen la posibilidad de trabajar con subtipos. Esto significa que definen una relación entre sus tipos que, en ciertos casos, nos permite usar a un elemento de un tipo como si fuese un elemento de otro. Por ejemplo, si tenemos una función que toma dos $Float$ (reales) y nos devuelve su suma, a esa función podriamos pasarle un $Nat$ (natural) o un $Int$ (entero) y podríamos ejecutarla sin problema ya que estos tipos, en realidad, son subconjuntos de los reales.

Hasta ahora, para nuestro lenguaje $\lambda$, definimos un sistema de tipado que descarta todos los programas que no tipen, sin embargo la definición de tipado que tenemos es demasiado rígida y no nos permite definir programas con este estilo. Por esta razón, vamos a extender nuestro sistema y definir nuevas reglas de tipado que nos permitan incluir este tipo de expresiones en el conjunto de expresiones tipables del lenguaje.

**Principio de sustitutividad** Primero definimos la relación $\sigma <: \tau$, que indica que en todo contexto donde se espera una expresión de tipo $\tau$, podemos utilizar una de tipo $\sigma$ en su lugar **sin** que ello genere un error. Y además agregamos la regla de subtipado (**Subsumption**) T-Subs:

$$\frac{\Gamma \rhd M : \sigma \qquad \sigma <: \tau}{\Gamma \rhd M : \tau}(\text{T-Subs})$$

Esta regla es la que nos dice que si tenemos una expresión de tipo $\sigma$ tal que $\sigma <: \tau$, entonces también podremos considerar a $M$ como una expresión de tipo $\tau$.

**El tipo máximo** Además, vamos a agregar, a nuestro lenguaje, el tipo $Top$ que contendrá a todos los tipos del lenguaje y lo llamaremos **supertipo universal** porque todo tipo es subtipo de $Top$:

$$\frac{}{\sigma <: Top}(S - Top)$$

**Tipos con constructores invariantes:** Son aquellos tipos que no pueden ser remplazados por ningún otro.

**Tipos con constructores covariantes:** Son aquellos que tipos cuyo subtipos se consiguen remplazando sus argumentos por un subtipo del argumento.

**Tipos con constructores contravariantes:** Son aquellos que tipos cuyo subtipos se consiguen remplazando sus argumentos por un supertipo del argumento.

## 5.1. Reglas de subtipado

### 5.1.1. Tipos básicos

$$\frac{}{Nat <: Float}(\text{S-NatFloat}) \qquad \frac{}{Int <: Float}(\text{S-IntFloat}) \qquad \frac{}{Bool <: Nat}(\text{S-BoolNat})$$

### 5.1.2. Subtipado del tipo función

Buscamos una función $g : \sigma \to \tau$ que pueda remplazar a otra función $f : \sigma' \to \tau'$ en cualquier contexto sin generar ningún error. Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que $g$ debe estar definida para todos los elementos del dominio de $f$, osea $Dom(f) \subseteq Dom(g)$ pues si pasara que existe un valor $x$ tal $f(x)$ está definida y $g(x)$ no lo está, entonces obtendríamos un error. Entonces, $\sigma' <: \sigma$.

Por otro lado, $g$ no debería poder devolver como resultado ningún valor que no esperamos que $f$ no devuelva ($Im(g) \subseteq Im(f)$). Podemos aclarar esto con un ejemplo, supongamos que tenemos la función esPar :: $Nat \to Nat$, cuando usemos esta función, el contexto en el que la usemos estará esperando conseguir un natural de su evaluación. Si la función $g$ devuelve algo que no sea un $Nat$, entonces obtendriamos un error. Sin embargo, si $g :: Nat \to Bool$, entonces podremos realizar el remplazo sin ningún problema porque $\{0, 1\}$ es un subconjunto de los naturales. Luego $\tau <: \tau'$.

Y la regla de subtipado queda:

$$\frac{\sigma' <: \sigma \qquad \tau <: \tau'}{\sigma \to \tau <: \sigma' \to \tau'} \text{(S-Func)}$$

El constructor de tipos función es **contravariante** en su primer argumento y **covariante** en el segundo.

Un programa $P$, deberá **coercionar** (transformar) el argumento que le pasan a la función para que coincida con el tipo de la nueva función, ejecutarla y luego coercionar su resultado al tipo del resultado que espera $P$.

### 5.1.3. Reglas de subtipado de términos

Las reglas de tipado sin subtipos son dirigidas por sintaxis, por lo que es inmediato implementar un algoritmo de chequeo de tipos a partir de ellas. Con el agregado de la regla T-Subs, el chequeo también pasa a estar dirigidas por la semántica de la relación <:, por lo que el algoritmo deja de ser tan directo.

Un juicio de subtipado $\Gamma \mapsto M : \sigma$, nos dice que $\Gamma \rhd M : \sigma$ y que existe existe $\tau$ tal que $\Gamma \mapsto M : \tau$ con $\tau <: \sigma$. Entonces las nuevas reglas quedarían así:

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \mapsto x : \sigma} \text{(T-Var)}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \mapsto M : \tau}{\Gamma \mapsto \lambda x : \sigma . M : \sigma \to \tau} \text{(T-Abs)} \qquad \frac{\Gamma \mapsto M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \mapsto N : \rho \qquad \rho <: \sigma}{\Gamma \mapsto M\ N : \tau} \text{(T-App)}$$

La mayoría de las reglas de subtipado son similares a las reglas de tipo y la única regla que usa la relación <: de manera explicita es T-App, porque los términos de aplicación son los únicos que al ser evaluados remplazan expresiones y, efectivamente, esta regla es la que nos da el poder que estabamos buscando.

### 5.1.4. Relación de preorden

La relación de subtipado <: define una relación de preorden, es decir es reflexiva y transitiva por lo que podriamos escribir las siguientes reglas:

$$\frac{}{\sigma <: \sigma}(\text{S-Refl}) \qquad \frac{\sigma <: \tau \quad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho}(\text{S-Trans})$$

Sin embargo, esta forma de descrbir la relación no es dirigida por semántica y no está claro como hacer un algoritmo de chequeo de subtipos que use estas reglas. Por esta razón vamos a considerar los siguientes tres axiomas:

$$\frac{}{Nat <: Nat}(\text{S-NatNat}) \qquad \frac{}{Bool <: Bool}(\text{S-BoolBool}) \qquad \frac{}{Float <: Float}(\text{S-FloatFloat})$$

Y ya con eso alcanza para derivar la reflexibidad de cualquier tipo del lenguaje, en el lenguaje $\lambda$ básico. Si agregasemos un nuevo tipo escalar (sin parámetros), entonces debemos declarar explicitamente que ese tipo es subtipo de si mismo, sino el preorden se rompe.

Por otro lado, la transitividad se puede demostrar aplicando varios pasos de subtipado, por lo que directamente no es necesaria.

### 5.1.5. Algoritmo de chequeo de tipos

Entonces logramos escribir todas las reglas del sistema de subtipado de manera tal que son dirigidas por la sintaxis y podemos definir el algoritmos $subtype(S,T)$ que nos indica si $S$ es subtipo de $T$. Al algoritmo mostrado le faltan los axiomas de $Nat$, $Bool$ y $Float$ que son triviales (hay que poner cada una de esas comparaciones una por una):

```
subtype(S, T) =
  if T==Top
    then true
    else
     if S==S1 → S2 and T==T1 → T2
        then subtype(T1, S1) and subtype(S2, T2)
        else
         if S=={kj : Sj, j ∈ 1..m} and T=={li : Ti, i ∈ 1..n}
            then {li, i ∈ 1..n} ⊆ {kj, j ∈ 1..m} and
               ∀ i ∃ j kj = li and subtype(Sj, Ti)
            else false
```

## 5.2. Subtipado de referencias

Queremos encontrar el tipo $Ref\ \tau$ que sea subtipo de $Ref\ \sigma$. Supongamos que $\tau <: \sigma$, si intentamos subtipar una referencia $M : Ref\ \sigma$ con $Ref\ \tau$, entonces cuando realicemos una asignación podremos usar un valor de tipo $\tau$ y no tendremos error. Ahora, cuando derreferenciemos $M$ estarémos esperando algo de tipo $\sigma$, pero como $\tau$ es más general que $\sigma$ puede tener valores que no son de ese tipo, por lo que si un contexto esperaba algo del primer tipo se obtendría un error.

Si $\sigma <: \tau$ y $M : Ref\ \sigma$, entonces podemos guardar en $M$ un elemento de tipo $\sigma$, sin embargo cuando querramos derreferenciar $M$, como $Ref\ \sigma$ es subtipo de $Ref\ \tau$, podremos usar la derreferencia del segundo tipo. El problema vuelve a ser el mismo, el contexto va a estar esperando un valor de tipo

$\tau$, pero $\sigma$ es más general, por lo que el valor almacenado en $M$ puede no ser de este tipo, lo que llevaría a un error.

A continuación dos ejemplos que muestran cada caso usando los tipos $Int <: Float$:

$$let\ r = \text{ref } 3\ in\ r := 2{,}1;$$
$$!r$$

Este es el primer caso, como definimos $r$ como una referencia de enteros en el let, cuando derreferenciemos $r$ esperamos conseguir un entero, sin embargo la regla covariante, hace que con la asignación podamos asignar a $r$ un $Float$

$$let\ r = \text{ref } 2{,}1\ in\ !r \tag{1}$$

Y este es el segundo caso, en el que definimos a $r$ como una referencia de $Float$, sin embargo, como $r$ es subtipable a $Ref\ Int$, podemos usar la derreferenciación de enteros para derreferenciarla, lo que provocaría el error en el programa.

Entonces, la regla de subtipado no es ni contravariante ni covariente, es variante. La única "sustitución"que podemos hacer es cuando $\sigma$ y $\tau$ son el mismo tipo.

$$\frac{\sigma <: \tau \qquad \tau <: \sigma}{Ref\ \tau <: Ref\ \sigma}$$

### 5.2.1. Refinando el tipo *Ref*

Extendemos el lenguaje, con los siguiente tipos $Source\ \sigma$ y $Sink\ \sigma$ que representan las referencias de lectura y las de escritura, respectivamente.

**Reglas de tipado**

$$\frac{\Gamma|\Sigma \rhd M : Source\ \sigma}{\Gamma|\Sigma \rhd !M : \sigma}\text{(T-DeRefSource)}$$

$$\frac{\Gamma|\Sigma \rhd M : Sink\ \sigma \qquad \Gamma|\Sigma \rhd N : \sigma}{\Gamma|\Sigma \rhd M := N : Unit}\text{(T-AssignSink)}$$

**Reglas de subtipado**

$$\frac{\sigma <: \tau}{Source\ \sigma <: Source\ \tau}\text{(S-Source)} \qquad \frac{\tau <: \sigma}{Sink\ \sigma <: Sink\ \tau}\text{(S-Sink)}$$

$$\frac{}{Ref\ \tau <: Source\ \tau}\text{(S-RefSource)} \qquad \frac{}{Ref\ \tau <: Sink\ \tau}\text{(S-RefSink)}$$

La regla S-Source es covariante, si esperamos leer de una referencia de tipo $\tau$, entonces podemos esperar una referencia de un tipo más especifico que $\tau$.

La regla S-Sink es contravariante, ya que cuando querramos guardar un valor de tipo $\tau$, podremos guardarlo en una referencia de este tipo o en una de un tipo más general.

Además, $Source\ \tau$ y $Sink\ \tau$ son mas generales que $Ref\ \tau$ ya que siempre podremos remplazar referencias de lecturas o de escritura por referencias de lectura y escritura.

# Parte II
# Paradigma orientado a objetos

## 6. Objetos y el modelo de cómputo

En el parádigma orientado a objetos, todo programa es una simulación representada por una entidad u **objeto** que asocia los objetos físicos o conceptuales de un dominio del mundo real en objetos del dominio del programa. Estos objetos tienen las características y capacidades del mundo real que nos interesa modelar y se comunican entre si a través de intercambios de mensajes.

Los mensajes intercambiados son solicitudes para que el objeto **receptor** del mismo lleve a cabo una de sus operaciones. El **receptor** determinara si puede llevar a cabo dicha operación y, si puede hacerlo la ejecutará.

### 6.1. Objetos

Entonces un objeto es una entidad del programa que puede recibir un conjunto de mensajes (al que llamaremos **interfaz** o **protocolo**) que le permiten determinar como llevar a cabo ciertas operaciones. Internamente, estará compuesto por un conjunto de **colaboradores internos** (tambien llamados **atributos** o **variables internas**) que determinan su **estado interno** y por un conjunto de **métodos** que describen (implementan) las operaciones que puede realizar y, si estas afectan a su estado interno, como lo hacen.

**Principio de ocultamiento de la información** El estado de un objeto es **privado** y solamente puede ser consultado o modificado por sus propios métodos, por lo que su implementación no depende de los detalles de implementación de otros objetos. Y la única forma que tenemos de interactuar con el mismo es enviándole los mensajes definidos en su interfaz.

**Method dispatch** Es el método mediante el cuál, un proceso, establece la asociación entre el mensaje y el método a ejecutar. Es decir, cuando un objeto recibe un mensaje, el **method dispatch** se encarga de hallar la **declaración del método** que se pretende ejecutar.

**Corrientes de organización** Por lo general,tratamos de agrupar los objetos en conjuntos compuestos por objetos que se comportan de manera similar para conseguir programas más concisos. Esto se puede hacer de dos formas: Mediante clasifiación o mediante prototipado.

# 7. Clasificación

Se usan **clases** que modelan **conceptos abstractos** del dominio del problema a resolver y definen el comportamiento y la forma de un conjunto de objetos (sus **instancias**). Todo **objeto** es una instancia de una clase.

**Componentes de una clase** Todas las clases tienen un **nombre** que usado para referenciarse a la misma. Dentro de ellas se definen las variables de instancias (colaboradores internos) de los objetos) y los métodos que saben responder esas instancias (sus nombres, sus parámetros y su cuerpo).

## 7.1. Self/This

Todas las clases tienen definida una pseudovariable que, durante la evaluación de un método, referencia al receptor del mensaje que activó dicha evaluación. No puede ser modificada por medio de una asignación y se liga automáticamente al receptor cuando comienza la evaluación del método.

```
!classDefinition: #Node
        instanceVariableNames: 'leftchild, rightchild'
        ...
sum:
        ^ (self leftchild) sum + (self rightchild) ! !

!classDefinition: #Leaf
        instanceVariableNames: 'value'
        ...
sum:
        ^self value ! !
```

Vemos que los métodos acceden a sus variables de instancia, enviándose a si mismos el mensaje asociado a cada una de ellas. En muchos lenguajes, para facilitar la escritura de un programa, la mención de `self` se hace implícitamente.

## 7.2. Jerarquía de clases

Cuando escribimos un programa en este paradigma, es común que creemos nuevas clases que extiendan a las ya existentes con nuevas variables de instancia o clase o que modifiquen el comportameiento de unos o varios métodos.

Para evitar tener que escribir toda una clase de cero, hacemos que la clase que estamos creando **herede** los atributos y los métodos de la clase pre-existente (la **super-clase**) que queremos extender. De esta forma, la nueva clase tendrá todo lo que tenía la super-clase y, además, las modificaciones que nosotros querramos agregarle.

La herencia define una relación transitiva. Si una clase $A$ tiene como super-tipo a otra clase $B$ y $C$ es super-tipo de $B$, entonces $C$ tambien es super-tipo de $A$. Llamaremos **ancestros** a todos los supertipos de $A$ y **descendientes** a todos los tipos que tienen a $A$ como ancestro.

## 7.3. Tipos de herencia

Hay dos tipos de herencia: **simple** y **múltiple**. La herencia simple permite que una clase tenga una única clase padre, mientras que la herencia múltiple deja que una clase tenga varios padres.

Además, todas las clases deben heredar de una clase `Object` que es la raíz del árbol o cadena de herencias.

La mayoría de los lenguajes orientados a objetos utilizan la herencia simple ya que la herencia múltiple complica el proceso de method dispath (que asocia los mensajes de un objeto con sus respectivos métodos).

Supongamos que tenemos dos clases $A$ y $B$ incomparables y una clase $C$ que es subclase de $A$ y $B$ simultaneamente. Si $A$ y $B$ definen (o heredan) dos métodos diferentes para un mismo mensaje $m$, entonces cuando enviemos dicho mensaje a $C$ deberemos decidir cuál de los dos métodos asociados debemos evaluar. Esta selección se puede realizar de dos formas:

- Estableciendo un **orden de búsqueda** sobre las superclases de un clase asignando un nivel de prioridad a cada una de ellas.
- U obligando al programador a **redefinir** el método en $C$ si $C$ hereda dos métodos distintos para el mismo mensaje.

### 7.3.1. Method Dispatch

Como dijimos, el **method Dispatch** es el método mediante el cual asociamos un mensaje a su método correspondiente en el objeto. Por lo general, este método se realiza de manera dinámica, es decir se realizan durante tiempo de ejecución. Sin embargo, dependiendo del contexto, hay situaciones en las que realizar este proceso de manera estática es necesario.

Un ejemplo de esto, es cuando el lenguaje nos permite hacer uso de `super`, una pseudovariable que **referencia al objeto que recibe el mensaje** y **cambia** su proceso de activación al momento de recibirlo. Cuando usamos una expresión de la forma `super msg` en el cuerpo de un método $m$, el **method lookup** (la búsqueda del método realizada por el method dispath), comienze a realizarse desde el padre de la **clase anfitriona** de m.

Algunos lenguajes, además, nos permiten pasarle como parámetro una clase a partir de la cual se debe empezar la búsqueda de la siguiente forma: `super[A] msg`, siempre y cuando $A$ sea un ancestro de la clase anfitriona del método.

# 8. Prototipado

Lo lenguajes basados en prototipado de objetos se caracterizan por la ausencia de clases. Proveen constructores para la creación de objetos particulares y la herramientas necesarias para crear procedimientos que generen objetos.

En este tipo de paradigma, creamos objetos concretos (llamados **prototipos**) que se interpretan como representantes canónicos de cierto conjunto de objetos y, a partir de ellos, generamos otras intancias (**clones**) que pueden ser modificadas sin afectar al prototipo.

Cuando clonamos realizamos lo que se llama una **shallow copy** del objeto clonado, es decir copiamos cada atributo, con su método, del objeto original en el nuevo. Esto significa que cada atributo tiene exactamente la misma definición en ambos objetos.

Una consecuencia de esto es que si un atributo es una referencia a un objeto $A$, entonces en el nuevo objeto será una referencia a $A$ y cualquier modificación que le hagamos se verá reflejada en ambos objetos.

## 8.1. Cálculo de objetos no tipado ($\varsigma$ cálculo)

Usaremos un lenguaje cuya única estructura computacional son los **Objetos**. Estos objetos son una colección de atributos nombrados (**registros**) que están asociados a métodos con una única variable ligada (que representa a `self`/`this`) y un cuerpo que produce un resultado.

Todos los objetos proveen dos operaciones:

**Envío de mensajes:** Que nos permite invocar un método para que el objeto ejecute.

**Redefinición de un método:** Que nos permite reemplazar el cuerpo de un atributo por otro.

### 8.1.1. Sintaxis

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a, b$ | ::= | $x$ | Variables |
| | \| | $[l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i\in 1..n}]$ | Objetos |
| | \| | $a.l$ | Selección/ Envío de mensajes |
| | \| | $a.l \Leftarrow \varsigma(x)b$ | Redefinición de un método. |

El objeto [ ] es el objeto vacío y no proporciona ningún método.

En este lenguajes, como todos los átributos son métodos, simulamos los colaboradores internos de un objeto con métodos que no utilizan el parámetro `self`. Por ejemplo:

$$o \stackrel{def}{=} [l_1 = \varsigma(x_1)[\,],\ l_2 = \varsigma(x_2)x_2.l_1]$$

$o.l_1$ retorna un objeto vacío. Y $o.l_2$ envia el mensaje $l_1$ a `self` (representado por el parámetro $x_2$).

**Notación** Cuando un objeto tenga un atributo de la forma $l = \varsigma(x)b$ y $x$ no se usa en $b$ podemos escribir $l = b$ y a la reasignación $o.l \Leftarrow \varsigma(x)b$ como $o.l := b$.

**Variables libres** $\varsigma$ es un ligador de variables, cuando lo usamos en una expresión de la forma $\varsigma(x)b$ siempre liga la variable $x$ que se le pasa como párametro a `self`.

De manera análoga a $FV$ del cálculo $\lambda$ definimos fv para objetos y diremos que un término $a$ es **cerrado** si $\text{fv}(a) = \varnothing$:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{fv}(\varsigma(x)b) & = \mathrm{fv}(b)\backslash\{x\} \\
\mathrm{fv}(x) & = \{x\} \\
\mathrm{fv}([l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i\in 1..n}]) & = \bigcup^{1\in 1..n} \mathrm{fv}(\varsigma(x)b) \\
\mathrm{fv}(a.l) & = \mathrm{fv}(a) \\
\mathrm{fv}(a.l \Leftarrow \varsigma(x)b) & = \mathrm{fv}(a.l) \cup \mathrm{fv}(\varsigma(x)b)
\end{array}
$$

**Sustitución** La función de sustitución de variables libres para objetos está definida de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{lll}
x\{x \leftarrow c\} & = c & \\
y\{x \leftarrow c\} & = y & \text{si } x \neq y \\
([l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i\in 1..n}])\{x \leftarrow c\} & = [l_i = (\varsigma(x_i)b_i)\{x \leftarrow c\}^{i\in 1..n}] & \\
(a.l)\{x \leftarrow c\} & = (a\{x \leftarrow c\}).l & \\
(a.l \Leftarrow \varsigma(x)b)\{x \leftarrow c\} & = (a\{x \leftarrow c\}).l \Leftarrow (\varsigma(x)b)\{x \leftarrow c\} & \\
(\varsigma(y)b)\{x \leftarrow c\} & = (\varsigma(y')(b\{y \leftarrow y'\}\{x \leftarrow c\})) & \text{si } y' \notin \mathrm{fv}(\varsigma(y)b) \cup \mathrm{fv}(c) \cup \{x\}
\end{array}
$$

Notemos que en el último caso, remplazamos $y$ por $y'$ por si $y = x$ asegurandonos, de esta manera, que no cambiamos el significado de la expresión.

**$\alpha$-conversión** En objetos decimos que dos objetos ($o_1 \equiv o_2$) son equivalentes si saben responder a los mismo mensajes y si los métodos asociados a cada uno de ellos son equivalentes en ambos objetos. Y dos métodos $\varsigma(x)b$ y $\varsigma(y)b_y$ son equivalente si $b_y\{y \leftarrow x\} \longrightarrow b$, es decir si la única diferencia entre ambos métodos es el nombre de las variables.

$$
\begin{array}{l}
o_1 \stackrel{def}{=} [l_1 = [\,],\ l_2 = \varsigma(x_2)x_2.l_1] \\
o_2 \stackrel{def}{=} [l_2 = \varsigma(x_3)x_3.l_1,\ l_1 = [\,]]
\end{array}
$$

son equivalentes porque ambos objetos tiene los atributos $l_1$ y $l_2$ y $\varsigma(x_2)x_2.l_1 =_\alpha \varsigma(x_3)x_3.l_1$.

### 8.1.2. Semántica operacional

Todos los objetos son considerados valores.

$$V \ ::= \ [l_i = \varsigma(x_i)b_i^{1\in 1..n}]$$

A diferencía del cálculo $\lambda$, usaremos el método de reducción **big-step** para evaluar expresiones. Este método nos permite saber el valor que representa la expresión en un solo paso.

$$\frac{}{v \longrightarrow v}[\mathrm{Obj}]$$

$$\frac{a \longrightarrow v' \qquad v' \equiv [l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i\in 1..n}] \qquad b_j\{x_j \leftarrow v'\} \longrightarrow v \qquad j \in 1..n}{a.l_j \longrightarrow v}[\mathrm{Sel}]$$

$$\frac{a \longrightarrow [l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i\in 1..n}] \qquad j \in 1..n}{a.l_j \Leftarrow \varsigma(x)b \longrightarrow [l_j = \varsigma(x)b,\ l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i\in 1..n-\{j\}}]}[\mathrm{Upd}]$$

La regla Obj nos dice que los objetos no reducen (o reducen a si mismos).

Sel nos indica que el resultado de enviar un mensaje es el valor que obtenemos al remplazar el párametro del método asociado por el mismo objeto (esto es la ligación a `self`).

Upd es el comportamiento de la redifinición, que devuelve un objeto con los mismos atributos que $a$ pero remplazando el $j-$ésimo atributo por la nueva definición.

**Ejemplo de reducción**

$$\dfrac{\dfrac{o \longrightarrow o \qquad \dfrac{}{[\,]\{x \leftarrow o\} \longrightarrow [\,]}\,[\text{Obj}]}{(x.a)\{x \leftarrow o\} \longrightarrow [\,]}\,[\text{Sel}] \qquad o \longrightarrow o}{[a = [\,],\ b = \varsigma(x)x.a].b \longrightarrow [\,]}\,[\text{Sel}]$$

**Indefinición** Similar al cálculo $\lambda$, podemos definir expresiones que se indefinen pero, en este caso, no es necesario que introduzcamos ninguna estructura nueva. Por ejemplos, si intentamos evaluar la expresión $[a = \varsigma(x)x.a].a$ nos daremos cuenta de que su reducción es infinita.

**Codificación de funciones (Cálculo $\lambda$)** Modelamos las expresiones del cálculo $\lambda$ como objetos con un atributo *val* que nos indica su valor, las funciones, además tiene el atributo *arg* que representa al argumento de la función. El argumento de una función permanecerá indefinido hasta que aparezca en una aplicación.

$$\begin{aligned}
[[x]] &\stackrel{def}{=} x \\
[[M\ N]] &\stackrel{def}{=} [[M]].arg := [[N]] \\
[[\lambda x.M]] &\stackrel{def}{=} [val = \varsigma(y)[[M]]\{x \leftarrow y.arg\},\ arg = \varsigma(y)y.arg]
\end{aligned}$$

Cuando querramos representar un método que espera parámetros, usaremos la definición de función para escribirlo: $\varsigma(x)[[\lambda y.M]]$.Podemos hacer abuso de notacion y escribir $\lambda(y)M$ en vez de $\varsigma(x)[[\lambda y.M]]$ y $M(N)$, en vez de $[[M\ N]]$.

### 8.1.3. Traits

Un trait es una colección de métodos que parametrizan cierto comportamientos. Estos objetos no especifican variables de estado ni acceden a su estado.

El trait y sus métodos por si solo no son utilizables, ya que el trait no provee los estados necesarios para evaluarlos correctamente. Solo lo usaremos para definir métodos que pueden ser evaluados por varios objetos con el objetivo de no tener que repetir siempre las mismas definiciones.

Los vamos a representar como una colección de **pre-metodos** (que no usan el parámetro self). Por lo que un trait tendrá la siguiente forma:

$$\mathtt{t} = [l_i = \lambda y_i.b_i^{i \in 1..n}]$$

Vamos a decir que un trait es completo cuando provea todos los atributos necesarios para que un objeto pueda ser utilizado. Y, cuando es completo, podremos definir una función *new* como un constructor

que crea un objeto con las mismas etiquetas que el trait y que asocia a cada una de ellas un método que invoca al método del trait correspondiente con su primer parámetro ligado a `self`:

$$new \stackrel{def}{=} \lambda z.[l_i = \varsigma(s)z.l_i(s)^{i \in 1..n}]$$

En el siguiente ejemplo trait `CompT` no es completo y, por lo tanto, si queremos hacer un *new* de un objeto, nos devolverá un objeto inutilizable:

$$\texttt{CompT} \stackrel{def}{=} [\; eq = \varsigma(t)\lambda(x)\lambda(y)if\ (x.comp(y)) == 0\ then\ \texttt{true}\ else\ \texttt{false},\; leq = \varsigma(t)\lambda(x)\lambda(y)if\ (x.comp(y)) < 0\ then\ \texttt{true}\ else\ \texttt{false}\;]$$

$$new\ \texttt{CompT} \longrightarrow [\; eq = \varsigma(x)\lambda(y)\texttt{CompT}.eq(x,y),\; leq = \varsigma(x)\lambda(y)\texttt{CompT}.leq(x,y)\;]$$

Podemos ver que a *new* `CompT` le falta el atributo *comp* que es utilizado dentro de las funciones del trait para realizar la comparación.

El trait `Contador` mostrado a continuación es un trait completo. Si bien no puede ser usado, cuando creamos un objeto se le asignan los atributos *get*, *inc* y *v*. *get* e *inc* usan a *v* cuando son evaluados, por lo que estos dos métodos podrán ser ejecutados desde el nuevo objeto.

$$\texttt{Contador} \stackrel{def}{=} [\; v = 0,\; inc = \lambda(s)s.v := s.v + 1,\; get = \lambda(s)s.v\;]$$

$$new\ \texttt{Contador} \stackrel{def}{=} [\; v = Contador.v,\; inc = \varsigma(s)Contador.inc(s),\; get = \varsigma(s)Contador.get(s)\;]$$

Cuando un trait completo tenga dentro suyo a la función *new*, diremos que ese trait es una **clase**:

$$\begin{array}{l} \texttt{C} \stackrel{def}{=} [ \\ \quad new = \varsigma(z)[l_i = \varsigma(s)z.l_i(s)^{i \in 1..n}] \\ \quad l_i = \lambda(x_1) \ldots \lambda(x_{n_i}) B_i \\ ] \end{array}$$

**Herencia** Cuando queremos que una clase "herede", lo que hacemos es crear un nuevo trait que contenga todas las etiquetas del trait original y asocie cada una de esas etiquetas al método correspondiente del trait original y le agregamos los atributos que deseamos para extenderlo. Además, modificamos el constructor *new* para que tome en cuenta los nuevos atributos.

$$\begin{array}{l} \texttt{Contador} \stackrel{def}{=} [\ new = \varsigma(z)[inc = \varsigma(s)z.inc(s),\ v = z.v,\ get = \varsigma(s)z.get(s)], \\ \quad v = \lambda(s)0, \\ \quad inc = \lambda(s)s.v := s.v + 1, \\ \quad get = \lambda(s)s.v \\ ] \end{array}$$

Y su sublcase `ContadorR`:

$$\begin{array}{l} \texttt{ContadorR} \stackrel{def}{=} [\ \ new = \varsigma(z)[ \\ \quad inc = \varsigma(s)z.inc(s), \\ \quad v = z.v, \\ \quad get = \varsigma(s)z.get(s), \\ \quad reset = \varsigma(\lambda(s))z.reset(s) \\ ], \\ v = Contador.v \\ inc = \lambda(y)\texttt{Contador}.inc(y) \\ get = \lambda(y)\texttt{Contador}.get(y) \\ reset = \lambda(s)s.v := 0, \\ ] \end{array}$$

**Otras consideraciones del lenguaje** El lenguaje que definimos se parece mucho al funcional. En la versión imperativa, donde se mantiene un store con referencias a objetos, se ofrece la función $\texttt{Clone}(a)$ que crea un nuevo objeto con las mismas etiquetas de $a$ y cada componente comparte los métodos con las componentes de $a$.

Además, el lenguaje no nos deja agregar o eliminar dinámicamente métodos en un objeto y no nos deja extraer sus métodos, es decir, no es posible tener un método fuera de un objeto.

Hay otras versiones de este cálculo que incluyen sistemas de tipado.

# Parte III
# Paradigma Lógico

En este paradigma, las programas son un conjunto **hechos** y **reglas de inferencia** que sirven para inferir si un **objetivo** o **goal** es consecuencia de ellos. Es decir que, cuando escribimos un programa, **declaramos** expresiones que sabemos que son verdad (hechos y reglas) que nos permitirán probar, a través del uso de la lógica, que una expresión (objetivo) es verdad.

En prolog, esta demostración, se hace a través de un motor de inferencia que se basa en el **método de resolución** para realizar la demostración. Vamos a ver métodos no deterministicos de resolución para expresiones de la lógica proposicional y de primer orden. Luego, agregaremos a estos métodos reglas que nos permitirán convertirlos en algoritmos determinísticos y las formas y condiciones que debe cumplir un programa para que sea compatible con estas reglas.

## 9. Lógica Proposicional

### Sintaxis

Dado un conjunto $\mathcal{V}$ de **variables proposionales** $P, P_0, P_1, \ldots$, el conjunto de **formulas proposicionales (o proposiciones)** se define como:

$$
\begin{array}{rll}
A, B & := & P \qquad \text{una variable proposicional} \\
& | & \neg A \qquad \text{negación} \\
& | & A \wedge B \qquad \text{conjunción} \\
& | & A \vee B \qquad \text{disjunción} \\
& | & A \supset B \qquad \text{implicación} \\
& | & A \iff B \qquad \text{si y solo si}
\end{array}
$$

### 9.1. Semántica

Una **evaluación** es una función $v : \mathcal{V} \to \mathbf{T}, \mathbf{F}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales. Decimos que $v$ **satisface** una proposicón $A$ si $V \models A$ donde:

$$
\begin{aligned}
v \models P \ sii \ v(P) = T \\
v \models \neg A \ sii \ v \not\models A \ (v \text{ no satisface } A) \\
v \models A \vee B \ sii \ v \models A \text{ o } v \models B \\
v \models A \wedge B \ sii \ v \models A \text{ y } v \models B \\
v \models A \supset B \ sii \ v \not\models A \text{ o } v \models B \\
v \models A \iff B \ sii \ (v \models A \text{ sii } v \models B)
\end{aligned}
$$

Una proposición es **satisfactible** si existe una valuación $v$ tal que $v \models A$. Cuando no existe $v$ qua satisfaga $A$, decimos que $A$ es **insatisfactible**.

Podemos extender estas definiciones a conjuntos de proposiciones. Si $S$ es un conjunto de proposiciones, entonces es **satisfactible** si existe una valuación $v$ tal que para todo $A \in S$, se tiene que $v \models A$. Y si no existe este $v$, entones $S$ es **insatisfactible**.

Dada una proposición $A$, si vale que $v \models A$ para toda valuación $v$, entonces decimos que $A$ es una **tautología**.

**Literales** Un literal es una variable proposicional $P$ o su negación $\neg P$.

### 9.1.1. Forma Normal Conjutiva (FNC)

Diremos que una proposición $A$ está en FNC si es una conjunción de disjunciones de literales. Es decir si tiene la siguiente forma:

$$C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$$

donde cada **claúsula** $C_i$ es una disyunción de literales:

$$B_{i1} \vee \cdots \vee B_{in_i}$$

**Teorema:** Para toda proposición $A$ puede hallarse una proposición $A'$ en FNC que es lógicamente equivalente a $A$.

**Nota:** $A$ es lógicamente equivalente a $B$ si y solo si la proposición $A \iff B$ es una tautología.

#### Notación conjuntista

Dada la siguiente expresión en forma normal conjuntiva:

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg B) \wedge (B \vee A) \wedge (C \vee D)$$

Trataremos de escribirla de manera más simple. Lo primero que notamos es que $(A \vee \neg A)$ es una tautología, ya que siempre vale una de las dos propocisiones. Entonces podemos eliminar esta clausula sin modificar su valor de verdad.

$$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B) \wedge (B \vee A)$$

Además, $(\neg B \vee \neg B) \iff \neg B$ ($\vee$ es idempotente):

$$(A \vee B) \wedge \neg B \wedge (B \vee A)$$

Como $\vee$ también es conmutativo, sabemos que $(A \vee B) \iff (B \vee A)$ por lo que podemos eliminar una de las dos:

$$(A \vee B) \wedge \neg B$$

Logramos escribir la proposición original con una expresión equivalente con todas las clausulas distintas. Donde las clausula son $C_1 = (A \vee B)$ y $C_2 = \neg B$.

Cuando sucede esto, podemos representar la proposición como un conjunto de clausulas $\{C_1, \ldots, C_n\}$ donde cada clausula $C_i$ es un conjunto de literales. Es decir que la expresión del ejemplo puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\{\{A, B\}, \{\neg B\}\}$$

## 9.2. Validez por refutación

**Teorema:** Una proposición $A$ es una tautología sii $\neg A$ es insastisfactible.

Entonces, dada una proposición $A$, si probramos que $\neg A$ es insatisfactible podemos probar que $A$ es una tautología. A pesar de que hay varias técnicas para hacer esto, vamos a concentrarnos en el método de **resolución** que fue introducipo por Alan Robinson en 1965.

Este método es simple de implementar y hace uso de una única regla de inferencia (**la regla de resolución**) para demostrar que una fórmula en forma normal conjuntiva es insatisfactible.

### 9.2.1. Principios fundamentales

El método, usa la regla de inferencia para expandir un conjunto $S$ hasta que el mismo contenga dos clausulas que se niegen entre si. Para esto, hace uso de la siguiente tautología:

$$(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P) \iff (A \vee P) \wedge (B \vee \neg P) \wedge (A \vee B)$$

**Demostración** Queremos ver que $(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P)$ y $(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P) \wedge (A \vee B)$ son equivalentes:
Si $(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P)$ es satisfactible, entonces valen las dos clausulas de la proposición. Por la primer clausula vale que $A$ es satisfactible o $P$ lo és. Si $P$ es satisfactible, entonces $B$ es satisfactible, pues $\neg P$ no lo es, entonces vale $(A \vee B)$.
Si $P$ no es satisfactible, entonces $A$ debe serlo para que $(A \vee P)$ lo sea y, además $\neg P$ es satisfactible por lo que la segunda clausula tambien lo és y como $A$ es satisfactible vale $(A \vee B)$.
Por otro lado, si $A$ y $B$ no son satisfactibles, entonces $(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P)$ no es satisfactible pues, para que lo sea, tendrían que valer $P$ y $\neg P$ al mismo tiempo.
Entonces, ambas expresiones son equivalentes.

Este resultado nos permite asegurar que los conjuntos de claúsulas

$$\{C_1, \ldots, C_n, \{A, P\}, \{B, \neg P\}\} \quad y \quad \{C_1, \ldots, C_n, \{A, P\}, \{B, \neg P\}, \{A, B\}\}$$

son equivalentes. Y si uno de ellos es insatisfactible, entonces el otro lo és.

Cuando esto suceda, diremos que la cláusula $\{A, B\}$ es la **resolvente** de las claúsulas $\{A, P\}$ y $\{B, \neg P\}$. Además generalizamos la definicion para clausulas con más de dos literales:

**Notación:** Dado un literal $L$, su opuesto $\overline{L}$ se define como

- $\neg P$ si $L = P$

- $P$ si $L = \neg P$.

Dadas dos cláusulas $C_1$, $C_2$, una claúsula $C$ se dice **resolvente de** $C_1$ **y** $C_2$ si y solo si, para algún literal $L$, $L \in C_1$ y $\overline{L} \in C_2$ y $C = (C_1 - \{L_1\}) \cup (C_2 - \{\overline{L}\})$. Notaremos la regla de resolución como

$$\frac{C_1 = \{A_1, \ldots, A_m, L\} \quad C_2 = \{B_1, \ldots, B_m, \overline{L}\}}{C = \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}}$$

El método de resolución ira agregando resolventes (que todavía no pertenezcan) al conjunto hasta conseguir un conjunto que contenga dos cláusulas de la forma $\{P\}$ y $\{\neg P\}$ cuya resolvente es la cláusula vacía notada como $\square$. Cuando esto suceda, diremos que conseguimos una **refutación**.

Entonces, en resumen, el método de resolución trata de construir una secuencia de conjuntos claúsales que termina en una refutación y, si lo logra, como todos los conjuntos de la secuencia son equivalentes el conjunto original no es satisfactible.

El método siempre termina, ya que las resolventes agregados se forman con los literales distintos que aparecen en el conjunto de partida y hay una cantidad finitas de literales en dicho conjunto.

En el peor de los casos, la regla de resolución podrá generar una nueva cláusula por cada combinación diferente de literales distintos de $S$.

**Teorema** Dado un conjunto finito $S$ de cláusulas, $S$ es insatisfactible si y solo si tiene una refutación.

**Ejemplo de resolución**

Vamos a probar que $\{\{P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\}$ es insatisfactible. Armamos la primer resolvente con $\{P, Q\}$,$\{P, \neg Q\}$ que nos queda $C = \{P\}$, entonces el nuevo conjunto es:

$$\{\{P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}\}$$

Armamos la segunda resolvente con $\{\neg P, Q\}$ y $\{\neg P, \neg Q\}$ entonces $C_1 = \{\neg P\}$:

$$\{\{P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}, \{\neg P\}\}$$

Y por útlimo usamos $\{P\}$ $\{\neg P\}$ y agregamos la resolvente $\square$ al conjunto, obteniendo de esta manera la refutación que buscabamos.

$$\{\{P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}, \{\neg P\}, \square\}$$

# 10. Lógica de primer orden

Definimos un método para probar que una proposición es una tautología. Sin embargo, todavía no tiene todo el poder que podría tener. Nos gustaría, dada una proposición con literales, saber que valor deberían tomar esos literales para que la proposición sea una tautología.

Para esto debemos dotar de semántica a los literales y proveer un mecanismo que nos permita inferir los valores que deben componer a cada uno de ellos.

## 10.1. Repaso

Un **lenguaje de primer orden** (LPO) $\mathcal{L}$ consiste en:

1. Un conjunto numerable de **constantes** $c_0, c_1, \ldots$
2. Un conjunto numerable de **símbolos de función** con aridad $n > 0$ $f_0, f_1, \ldots$
3. Un conjunto numerable de **símbolos de predicado** con aridad $n \geqslant 0$, $P_0, P_1, \ldots$.

### 10.1.1. Términos de primer orden

Sea $\mathcal{V} = \{x_0, x_1, \ldots\}$ un conjunto numerable de variables y $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. El conjunto de **$\mathcal{L}$-términos** se define inductivamente como:

- Toda constante de $\mathcal{L}$ y toda variable es un $\mathcal{L}$-término.
- Si $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{L}$-términos y $f$ es un símbolo de función de aridad $n$, entonces

$$f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{L}\text{-términos}$$

### 10.1.2. Fórmulas átomicas

Sea $\mathcal{V}$ un conjunto numerable de variables y $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. El conjunto de **$\mathcal{L}$-fórmulas átomicas** se define inductivamente como:

1. Todo símbolo de predicado de aridad $O$ es una $\mathcal{L}$-fórmula átomica.
2. Si $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{L}$-términos y $P$ es un símbolo de predicado de aridad $n$, entonces $P(t_1, \ldots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula átomica.

### 10.1.3. Fórmulas de primer orden

Sea $\mathcal{V}$ un conjunto numerable de variables y $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. El conjunto de **$\mathcal{L}$-fórmulas** se define inductivamente como:

1. Toda $\mathcal{L}$-fórmula átomica es $\mathcal{L}$-fórmula.
2. Si $A, B \in \mathcal{L}$-fórmula, entonces $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ y $A \iff B$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.
3. Para toda variable $x_i$ y cualquier $\mathcal{L}$-fórmula $A$, $\forall x_i.A$ t $\exists x_i.A$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.

**Variables libres y ligadas**

Las variables pueden ocurrir **libres** o **ligadas**. En este lenguaje, los cuantificadores ligan variable y usaremos $FV(A)$ y $BV(A)$ parar referirnos a las variables libres y ligadas, respectivamente, de $A$.

Cuando $FV(A) = \varnothing$ diremos que $A$ es una **sentencia**.

Una fórmula $A$ está **rectificada** si $FV(A)$ y $BV(A)$ son disjuntos, es decir si todos los cuantificadores que aparecen en $A$ ligan variables distintas. Además, toda fórmula se puede **rectificar** a una fórmula equivalente renombrando sus variables.

### 10.1.4. Estructuras de primer orden

Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, una **estructura para** $\mathcal{L}$, $\mathbf{M}$, es un par $\mathbf{M} = (M, I)$ donde

- $M$ (**dominio**) es un conjunto no vacío
- $I$ (**función de interpretación**) asigna funciones y predicados sobre $M$ a símbolos del lenguaje $\mathcal{L}$ de la siguiente manera:

  1. Para toda constante $c$, $I(c) \in M$.
  2. Para todo $f$ de aridad $n > O$, $I(f) : M^n \to M$
  3. Para todo predicado $P$ de aridad $n \geqslant 0$, $I(P) : M^n \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$

  Sea $M$ una estructura para $\mathcal{L}$. Una **asignación** es una función $s : \mathcal{V} \to M$ y, si $a \in M$, escribimos $s[x \leftarrow a]$ para denotar la asignación que se comporta igual que $s$ salvo en el elemento $x$, en cuyo caso retorna $a$.

### 10.1.5. Satisfactibilidad

La relación $s \models_M A$ establece que la asignación $s$ satisface la fórmula $A$ en la estructura $M$. Y se define usando inducción estructural en $A$:

| | |
|---|---|
| $s \models_{\mathbf{M}} P(t_1, \ldots, t_n)$ | *sii* $P(s(t_1), \ldots, s(t_n))$ |
| $s \models_{\mathbf{M}} \neg A$ | *sii* $s \not\models_{\mathbf{M}} A$ |
| $s \models_{\mathbf{M}} (A \vee B)$ | *sii* $s \models_{\mathbf{M}} A$ o $s \models_{\mathbf{M}} B$ |
| $s \models_{\mathbf{M}} (A \wedge B)$ | *sii* $s \models_{\mathbf{M}} A$ y $s \models_{\mathbf{M}} B$ |
| $s \models_{\mathbf{M}} (A \supset B)$ | *sii* $s \not\models_{\mathbf{M}} A$ o $s \models_{\mathbf{M}} B$ |
| $s \models_{\mathbf{M}} (A \iff B)$ | *sii* ($s \models_{\mathbf{M}} A$ sii $s \models_{\mathbf{M}} B$) |
| $s \models_{\mathbf{M}} (A \supset B)$ | *sii* $s \not\models_{\mathbf{M}} A$ o $s \models_{\mathbf{M}} B$ |
| $s \models_{\mathbf{M}} \forall x_i.A$ | *sii* $s[x_i \leftarrow a] \models_{\mathbf{M}} A$ para todo $a \in \mathbf{M}$ |
| $s \models_{\mathbf{M}} \exists x_i.A$ | *sii* $s[x_i \leftarrow a] \models_{\mathbf{M}} A$ para algún $a \in \mathbf{M}$ |

### 10.1.6. Validez

- Una fórmula $A$ es **satisfactible en M** si y solo si existe una asiganción $s$ tal que $s \models_{\mathbf{M}} A$
- Una fórmula $A$ es **satisfactible** si y solo si existe un **M** tal que A es satisfactible en **M**. En caso contrario se dice que $A$ es insatisfactible.
- Una fórmula $A$ es **válida en M** si y solo si $s \models_{\mathbf{M}} A$, para toda asigación $s$.
- $A$ es valida si y solo si $\neg A$ es insatisfactible.

## 10.2. El método de resolución

El **teorem de Church** asegura que **no** existe un algoritmo que pueda determinar si una fórmula de primer orden es válida. Por lo que el método de resolución será parcialmente computable, es decir que si la sentencia que deseamos resolver es insatisfactible entonces hallaremos una refutación a la misma, en caso contrario puede ser que no se detenga.

Para resolver una fórmula, el método tomará su forma clausal e irá agregando resolventes hasta que el conjunto contenga a la cláusula vacía.

### 10.2.1. Forma de la fórmula

Dada una fórmula $A$, el primer pasoe es escribirla en forma clausal siguiendo estos pasos:

1. Eliminar las implicaciones, es decir, si aparece una clausula de la forma $(A \supset B)$, reescribirla como $(\neg A \vee B)$.
2. Pasar a **forma normal negada**.
3. Pasar a **forma normal prenexa**.
4. Pasar a **forma normal de Skolem**.
5. Pasar a **forma normal conjuntiva**.
6. **Distribuir** cuantificadores universales.

#### Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en **forma normal negada** (NNF) se define inductivamente como:

1. Para cada fórmula atómica $A$, $A$ y $\neg A$ están en NNF.
2. Si $A, B \in$ NNF, etnoces $(A \vee B), (A \wedge B) \in$ NNF.
3. Si $A \in$ NNF, entonces $(\forall x.A), (\exists x.A) \in$ NNF.

En otras palabras, son todas las fórmulas en las que si aparece una negación, entonces esta está aplicada a una formula atómica del lenguaje.

Los remplazos que se hacen para pasar una formula a FNN son:

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \wedge \neg B \qquad \neg\neg A \iff A$$
$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \vee \neg B \qquad \neg\forall x.A \iff \exists x.\neg A$$
$$\neg\exists x.A \iff \forall x.\neg A$$

**Forma normal prenexa**

Son las fórmulas de la forma $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n.B$, $n \geqslant 0$, donde $B$ no tiene cuantificadores, $x_1, \dots, x_n$ son variables y $Q_i \in \{\forall, \exists\}$.

Sea $A$ una fórmula en forma normal negativa, entonces valen las siguientes equivalencias:

$$(\forall x.A) \wedge B \iff \forall x.(A \wedge B) \qquad (\forall x.A) \vee B \iff \forall x.(A \vee B)$$
$$(A \wedge \forall x.B) \iff \forall x.(A \wedge B) \qquad (A \vee \forall x.B) \iff \forall x.(A \vee B)$$
$$(\exists x.A) \wedge B \iff \exists x.(A \wedge B) \qquad (\exists x.A) \vee B \iff \exists x.(A \vee B)$$
$$(A \wedge \exists x.B) \iff \exists x.(A \wedge B) \qquad (A \vee \exists x.B) \iff \exists x.(A \vee B)$$

Cuando una fórmula tenga dos o más cuantificadores que liguen variables con el mismo nombre, entonces debemos renombrar cada una de esas variables con nombres distintos para poder realizar la transformación.

### 10.2.2. Forma normal de Skolem

Dada una fórmula en forma normal prenexa, debemos pasarla a forma normal de Skolem usando un proceso llamado **solemización**. El objetivo de esta transformación es eliminar los cuantificadores existenciales de un fórmula sin alterar su sastifactibilidad.

La idea es que al eliminar el existencial remplazemos cada aparición de la variable que ligaba por un "testigo" que es una constante nueva del lenguaje de primer orden que depende de las demás variables libres de la fórmula. Por ejemplo, si tenemos la fórmula $\exists x.P(x)$, su forma skolemizada será $P(c)$ con $c$ una nueva constante del lenguaje que llamaremos **parámetro**.

En fórmulas más grandes, cada ocurrencia de una subfórmula $\exists x.B$ en $A$ se remplaza por $B\{x \leftarrow f(x_1, \dots, x_n)\}$ donde:

- $\{\bullet \leftarrow \bullet\}$ es la operación usual de sustitución.
- $f$ es un símbolo de función nuevo y las $x_1, \dots, x_n$, son las variables libres en $B$ de las que depende $x$.

Ahora, si bien el resultado de skolemizar una fórmula preserva la sastifactibilidad, no preserva validez. Por ejemplo, la fórmula $\exists x.(P(a) \supset P(x))$ es válida, sin embargo, su skolemización
$P(a) \supset P(b)$ no lo es. (Ver la definición de validez en 10.1.6).

**Definición formal**

Sea $A$ una sentencia rectificada en forma normal negada, la **forma normal de Skolem de A (SK(A))** se define recursivamente como sigue:

Sea $A'$ cualquier subfórmula de $A$,

- Si $A'$ es una fórmula atómica o su negación, $\mathbf{SK}(A') = A'$.
- Si $A'$ es de la forma $(B \star C)$ con $\star \in \{\wedge, \vee\}$, entonces $\mathbf{SK}(A') = (\mathbf{SK}(B) \star \mathbf{SK}(C))$.
- Si $A'$ es de la forma $\forall x.B$, entonces $\mathbf{SK}(A') = \forall x.\mathbf{SK}(B)$.
- Si $A'$ es de la forma $\exists x.B$ y $\{x, y_1, \ldots, y_m\}$ son las variables libres de $B$, entonces:
  1. Si $m > 0$, crear un **símbolo de función de Skolem**, $f_x$ de aridad $m$ y definir:
  $$\mathbf{SK}(A') = \mathbf{SK}(B\{x \leftarrow f(y_1, \ldots, y_m)\})$$
  2. Si $m = 0$, crear una nueva **constante de Skolem** $c_x$ y
  $$\mathbf{SK}(A') = \mathbf{SK}(B\{x \leftarrow c_x\})$$

**Forma clausal**

Una vez que tenemos una formula en forma normal prenexa skolemizada, es decir tiene la siguiente forma:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n.B$$

Pasamos $B$ a **forma normal conjuntiva** 9.1.1 como si fuese una fórmula proposicional y distribuimos los cuantificadores sobre cada conjunción, obteniendo así una conjunción de **cláusulas**

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n.C_1 \wedge \cdots \wedge \forall x_1 \ldots \forall x_n.C_m$$

donde cada $C_i$ es una disyunción de literales. Luego, podemos escribirla de la siguiente forma:

$$\{C_1, \ldots, C_m\}$$

### 10.2.3. Regla de resolución

A diferencia de la lógica de primer orden, tendremos literales que cuando son negados podrían contradecir a otro literal que no sea exactamente el mismo. Por ejemplo, si tenemos la siguiente proposición $\{\{\{P(x)\}, \{\{\neg P(a)\}\}\}$. La primer cláusula, nos dice que vale $P(x)$ para todo $x$ y la segunda nos dice que $P(a)$ no vale, esto es una contradicción que deberíamos poder resolver.

Debemos **unificar** estas dos expresiones con el algoritmo de Martelli-Montanari. Por lo que en cada paso, elegiremos las cláusulas que queremos resolver, buscaremos un MGU que nos permita modificarlas y la resolvente será la resolvente de ambas expresiones con el MGU aplicado.

Entonces, la regla es:

$$\frac{\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_n\} \quad \{\neg D_1, \ldots, \neg D_k, A_1, \ldots, A_n\}}{\sigma(\{A_1, \ldots A_m, C_1, \ldots, C_n\})}$$

donde $\sigma$ es el **unificador más general** (MGU) de $\{B_1, \ldots, B_k, \neg D_1, \ldots, \neg D_k\}$ y $\sigma(\{A_1, \ldots A_m, C_1, \ldots, C_n\})$ es el **resolvente**.

Cuando usamos $\sigma$, debemos tener en cuenta que todas las cláusulas usan variables distintas, por lo que si hay dos cláusulas que usan variables con el mismo nombre es conveniente renombrarlas para evitar confusiones.

### 10.2.4. Método de resolución

Ya tenemos la regla de resolución para fórmulas de la lógica de primer orden. El método de resolución es análogo al de la lógica proposicional. En cada paso buscaremos una resolvente que podamos agregar al conjunto y haremos esto hasta que la resolvente que agregamos sea $\square$ (la cláusula vacía).

A diferencia del método de lógica de primer orden, en cada paso no solo agregaremos una resolvente al conjunto sino que además definimos una sustitución que nos permitirá unificar distintos términos de la expresiones.

**Ejemplo:** Queremos probar que $\{C_1, C_2, C_3\}$ es insatisfactible con

- $C_1 = \{\neg P(z_1, a), \neg P(z_1, x), \neg P(x, z_1)\}$
- $C_2 = \{P(z_2, f(z_2)), P(z_2, a)\}$
- $C_3 = \{P(f(z_3), z_3), P(z_3, a)\}$

1. De $C_1$ y $C_2$ con $\{z_1 \leftarrow a, x \leftarrow a, z_2 \leftarrow a,\}$ tenemos $C_4 = \{P(a, f(a))\}$
2. De $C_1$ y $C_2$ con $\{z_1 \leftarrow a, x \leftarrow a, z_3 \leftarrow a,\}$ tenemos $C_5 = \{P(f(a), a)\}$
3. De $C_1$ y $C_5$ con $\{z_1 \leftarrow f(a), x \leftarrow a\}$: $C_6 = \{\neg P(a, f(a))\}$
4. De $C_4$ y $C_6$: $\square$.

### 10.2.5. Regla de resolución binaria

$$\frac{\{B_1, A_1, \ldots, A_n\} \quad \{\neg D_1, A_1, \ldots, A_n\}}{\sigma(\{A_1, \ldots A_m, C_1, \ldots, C_n\})}$$

Si intentamos refutar $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}\}$ solo con esta regla nos encontraremos con que no podremos encontrar una secuencia de resolventes que termine en la cláusula $\square$.

#### Regla de factoriazción

La regla de factorización resuelve este problema permitiendonos extraer de una cláusula un literal represente a cada uno de los literales que la componen. Es decir, un literal que pueda ser unificado con cada uno de los literales de la cláusula.

$$\frac{\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_n\}}{\sigma(\{B_1, A_1, \ldots A_m\})}$$

Entonces con esta regla podemos usar $\{P(z)\}$ como resolvente para la cláusula $\{P(x), P(y)\}$ y la demostración del ejemplo anterior quedaría de la siguiente forma:

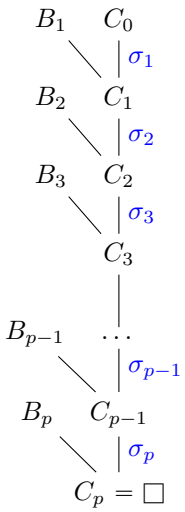
1. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}\}$
2. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}\}$ (por la regla de factorización sobre la primer cláusula)
3. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}, \{\neg P(u)\}\}$ (por la regla de factorización sobre la segunda cláusula)
4. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}, \{\neg P(u)\}, \square\}$

# 11. Resolución SLD

Si bien los métodos que propusimos hasta ahora son completos, hallar refutaciones es un proceso muy car en el caso general, el espacio de búsqueda que producen puede ser enorme y tienen un alto grado de no-determinismo. Debemos agregar ciertas restricciones que nos permitan reducir este espacio sin que esto afecte a la completitud del método.

## 11.1. Resolución lineal

Una secuencia de pasos de resolución a partir de $S$ es **lineal** si es de la forma:




donde $C_0$ y cada $B_i$ es un elemento de $S$ o algún $C_j$ con $j < i$.

Este tipo de resolución reduce el espacio de búsqueda considerablemente, sin embargo sigue siendo altamanente no-deterministico ya que no se se especificó ningún criterio de búsqueda ni selección de las cláusulas que debemos usar de este espacio.

## 11.2. Cláusulas de Horn

Podemos lograr una mayor eficiencia en el proceso de producir refutaciones si solo consideramos una **subclase** de fórmulas lo suficientemente expresivas. Es decir, que si bien existirán fórmulas que no podremos resolver con este método, las fórmulas que resolveremos tendrán el suficiente poder como para ser un método computacionalmente completo.

El subconjunto de clásulas que vamos a usar son las cláusulas de Horne:

Una cláusula $\forall x_1 \ldots \forall x_m.C$ tal que la disyunción de literales $C$ tiene **a lo sumo** un literal positivo. Y diremos que una cláusula de esta forma es una **cláusula de definición** cuando $C$ tiene **exactamente** un literal positivo.

El método de resolución SLD, tendrá como entrada un conjunto de cláusulas de Horn $S = P \cup \{G\}$ donde $P$ es nuestro programa (conjunto de axiomas y reglas de entrada o base de conocimiento) y $G$ es nuestro goal.

Una secuencia de pasos de **resolución SLD** para $S$ es una secuencia $< N_0, N_1, \ldots, N_p >$ de **cláusulas negativas** que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. $N_0$ es el goal $G$.
2. para todo $N_i$ en la secuencia, $0 < i < p$, si $N_i$ es

$$\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_n\}$$

entonces hay alguna **cláusula de definición** $C_i$ de la forma $\{A, \neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$ en $P$ tal que $A_k$ y $A$ son unificable con el MGU $\sigma$ y si :

- $m = 0$, entonces $N_{i+1}E$ es

$$\{\sigma(\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_n\})\}$$

- $m > 0$, entonces $N_{i+1}E$ es

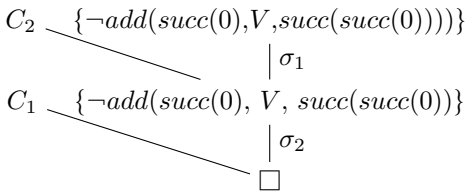
$$\{\sigma(\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_m, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_n\})\}$$

Esto significa que cada paso de la secuencia es la resolución del pase anterior con una cláusula de Horne definida en nuestro programa que tiene un literal positivo $A$ que unifica con algún literal $A_k$ negado en dicho paso. Llamaremos **átomo seleccionado** al literal $A_k$. Y **sustitución respuesta** a la composición de las sustituciones.

Este es el método que usa Prolog para extraer la salida del programa. Por ejemplo, si consideramom el siguiente programa:

- $C_1 = \{add(U, O, U)\}$
- $C_1 = \{add(X, succ(Y), succ(Z), \neg add(X, Y, Z)\}$

Y definimos nuestro goal $G = \{\neg add(succ(0), V, succ(succ(0)))\}$, entonces una resolución posible es la siguiente:




$\sigma_1 = \{X \leftarrow succ(0),\ Z \leftarrow succ(0),\ V \leftarrow succ(Y)\}$
$\sigma_2 = \{U \leftarrow succ(0),\ Y \leftarrow 0\}$
Y la sustitución resultado es:

$$\{X \leftarrow succ(0),\ Z \leftarrow succ(0),\ V \leftarrow succ(0), U \leftarrow succ(0),\ Y \leftarrow 0\}$$

### 11.2.1. Corrección y completitud

**Corrección** Si un conjunto de cláusulas de Horn tiene una refutación SLD, entonces es insatisfactible.

**Completitud** Dado un conjunto de cláusulas de Horn $P \cup \{G\}$, si $P \cup \{G\}$ es insatisfactible, existe una refutación SLD cuya primera cláusula es $G$.

## 11.3. Resolución SLD en Prolog

El método SLD todavía deja sin determinar como realizar la búsqueda y la selección de las cláusulas de nuestro programa para aplicar en la resolución. Para solucionar esto, se usan **estrategias** que determinan la forma de los árboles de búsqueda o **árbol SLD** de nuestra resolución.

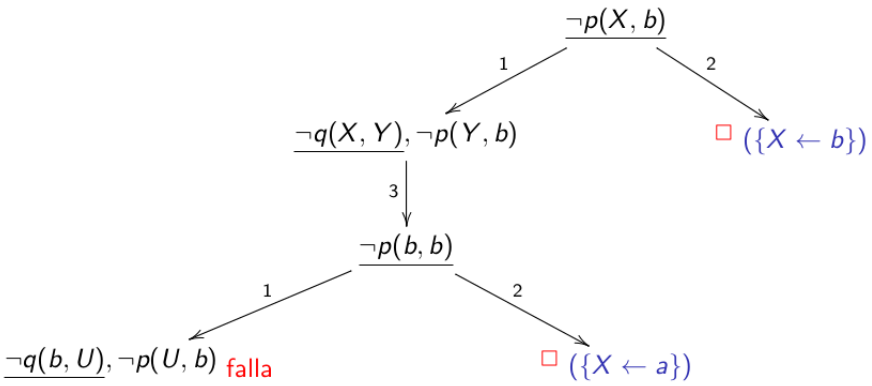
Esto quiere decir que cuando diseñamos un programa debemos tener en cuenta la estrategia que estamos usando para determinar el orden de las cláusulas que estamos definiendo. Hay que tratar de que el método consiga, primero, las soluciones de las ramas "mas interesante" y luego explore el resto del árbol.

Podría llegar a pasarnos que, debido a una mala elección de este orden (para la estrategia elegida), el método no encuentre una refutación para una expresión que es insatisfactible.

Prolog, en particular, selecciona las cláusulas del programa de arriba hacia abajo, es decir, en el orden en que fueron introducidas y el átomo seleccionado en cada paso es el átomo de más a la izquierda de la fórmula. Además, como puede haber varias resoluciones SLD, Prolog realiza backtracking sobre las reglas usadas para generar todas las soluciones posibles. Si consideramos el siguiente programa:

1. $\{p(X, Z),\ \neg q(X, Y), \neg p(Y, Z)\}$
2. $\{p(X, X)\}$
3. $\{q(a, b)\}$

Y nuestro goal es $\{\neg p(X, b)\}$, entonces, Prolog, realizaría el siguiente árobl SLD:




Otra posible estrategia de selección sería, por ejemplo, elegir resolver la cláusula más a la derecha, en cuyo caso el ejemplo que dimos dejaría de funcionar ya que la primer rama del árbol sería infinita y no encontrariamos nunca una refutación.

Y si decidiesemos seleccionar las cláusulas de abajo hacia arriba, entonces obtendriamos el árbol mostrado reflejado.

Hay que tener en cuenta que elegimos el ejemplo para que funcionase bien con la estrategia que sigue Prolog, sin embargo, hay ejemplos en lo que esta estrategia cae en el mismo caso que en la primer estrategia alternativa mencionada.

### 11.3.1. Implementación y otras cosas sobre Prolog

La estrategia usada por Prolog recorre el árbol SLD en **profundidad** (depth-first search). Las ventajas de esto es que puede ser implmentado de manera muy eficiente usando una **pila** para representar los átomos del goal. La idea es hacer un **push** del resolvente del átomo del tope de la pila con la cláusula de definición y hacer un **pop** cuando el átomo del top de la pila no unifica con ninguna cláusula de definición más.

#### Cut

Es una notación que nos permite **podar** el árbol SLD. Es de carácter extra-lógico y nos permite **hacer más eficientes** algunas consultas. El uso correcto de esta notación no debería modificar el universo de posibles soluciones a una consulta.

Cuando se selecciona un cut, tiene éxito **inmediatamente**. Si, debido a backtracking, se vuelve al mismo cut entonces se hace fallar el goal que le dio origen.

## Negación por falla

Se dice que un árbol SLD **falla finitamente** si es finito y no tiene ramas de éxito.

Dado un programa P el **conjunto de falla finita** de $P$ es

$$\{B \mid B \text{ es un átomo cerrado y existe un árbol SLD que falla finitamente con } B \text{ como raíz}\}$$

Esto significa que podemos inferir la insatisfactibilidad de una cláusula cerrada si la cantidad de chequeos que tenemos que hacer para probarlo es finita y si, además, tenemos un conjunto finito de símbolos sobre los que chequear.

En Prolog, tenemos el predicado **not** que nos permite realizar este tipo de resolución, sin embargo debemos asegurarnos de que los predicados que le pasemos sean cerrados, ya que al no ser un predicado lógico, no se instancias variables en ningún momento.

# Parte IV
# Apéndices

## A. Programación funcional en Haskell

### Tipos elementales

```
1               -- Int          Enteros
'a'             -- Char         Caracteres
1.2             -- Float        Números de punto flotante
True            -- Bool         Booleanos
[1,2,3]         -- [Int]        Listas
(1, True)       -- (Int, Bool)  Tuplas, pares
length          -- [a] -> Int   Funciones
length [1,2,3]  -- Int          Expresiones
\x -> x         -- a -> a       Funciones anónimas
```

### Guardas

```
signo n | n >= 0    = True
                | otherwise = False
```

### Pattern Matching

```
longitud [] = 0
longitud (x:xs) = 1 + (longitud xs)
```

### Polimorfismo paramétrico

```
todosIguales :: Eq a => [a] -> Bool
todosIguales [] = True
todosIguales [x] = True
todosIguales (x:y:xs) = x == y && todosIguales(y:xs)
```

### Clases de tipo

```
Eq a    -- Tipos con comparación de igualdad
Num a   -- Tipos que se comportan como los números
Ord a   -- Tipos orden
Show a  -- Tipos que pueden ser representados como strings
```

### Definición de listas

```
[1,2,3,4,5]                 -- Por extensión
[1 .. 4]                    -- Secuencias aritméticas
[ x | x <- [1..], esPar x ] -- Por compresión

cuando las usamos. Ejemplo de lista infinita:

infinitosUnos :: [Int]
infinitosUnos = 1 : infinitosUnos

puntosDelCuadrante :: [(Int, Int)]
puntosDelCuadrante = [ (x, s-x) | s <- [0..], x <-[0..s] ]
```

**Funciones de alto orden**

```
mejorSegun :: (a -> a -> Bool) -> [a] -> a
mejorSegun _ [x] = x
mejorSegun f (x : xs) | f x (mejorSegun f xs) = x
                      | otherwise = mejorSegun f xs
```

## A.1. Otros tipos útiles

**Formula**

```
data Formula = Proposicion String | No Formula
                    | Y Formula Formula
                    | O Formula Formula
                    | Imp Formula Formula

foldFormula :: (String -> a) -> (Formula -> a) ->
(Formula -> Formula -> a) -> (Formula -> Formula -> a)
-> (Formula -> Formula -> a) -> Formula -> a
foldFormula fp fn fy fo fImp form = case form of :
                    Proposicion s -> fp s
                    No sf -> fn (rec sf)
                    Y sf1 sf2 -> fy (rec sf1) (rec sf2)
                    O sf1 sf2 -> fo (rec sf1) (rec sf2)
                    Impl sf1 sf2 -> fImpl (rec sf1) (rec sf2)
                    where rec = foldForm fp fn fy fo fImp
```

**Rosetree**

```
data Rosetree = Rose a [Rosetree]
-- Hay varias formas de definir el fold para esta estructura
foldRose :: (a -> [b] -> b) -> Rosetree a -> b
foldRose f ( Rose x l ) = f x ( map ( foldRose f ) l )

foldRose2 :: ( a -> c -> b) -> ( b -> c -> c ) -> c
-> Rosetree a -> b
foldRose2 g f z (Rose x l) =
g x ( foldr f z ( map ( foldRose g f z ) l ) )
```

# B. Extensiones del lenguaje $\lambda^b$

## B.1. Registros $\lambda^{\cdots r}$

**Tipos**

$$\sigma, \tau \ ::= \ \ldots \mid \{l_i : \sigma_i \ ^{i \in 1..n}\}$$

El tipo $\{l_i : \sigma_i^{i \in 1..n}\}$ representan las estructuras con $n$ atributos tipados, por ejemplo: $\{nombre : String, edad : Nat\}$

**Términos**

$$M \ ::= \ \ldots \mid \{l_i = M_i \ ^{i \in 1..n}\} \mid M.l$$

Los términos significan:

- El registro $\{l_i = M_i \ ^{i \in 1..n}\}$ evalua $\{l_i = V_i \ ^{i \in 1..n}\}$ donde $V_i$ es el s al que evalúa $M_i$ para $i \in 1..n$.
- $M.l$: Proyecta el valor de la etiqueta $l$ del registro $M$

**Axiomas y reglas de tipado**

$$\frac{\Gamma \rhd M_i : \sigma_i \text{ para cada } i \in 1..n}{\Gamma \rhd \{l_i = M_i \ ^{i \in 1..n}\} : \{l_i : \sigma_i \ ^{i \in 1..n}\}} \text{(T-RCD)}$$

$$\frac{\Gamma \rhd \{l_i = M_i \ ^{i \in 1..n}\} : \{l_i : \sigma_i \ ^{i \in 1..n}\} \quad j \in 1..n}{\Gamma \rhd M.l_j : \sigma_j} \text{(T-Proj)}$$

**Axiomas y reglas de subtipado**

$$\frac{\{l_i | i \in 1..n\} \subseteq \{k_j | j \in 1..m\} \quad k_j = l_i \Rightarrow \sigma_j <: \tau_i}{\{k_j : \sigma_j | j \in 1..m\} <: \{l_i : \sigma_i | i \in 1..n\}} \text{(S-Rcd)}$$

Esta regla nos dice que un registro $N$ es subtipo de otro registro $M$, si el conjunto de etiquetas de $M$ está contenido en el conjunto de etiquetas de $N$ y, además, si los tipos de cada una de esas etiquetas, en $M$, es más general que en $N$.

Una de las consecuancias de esta regla es que $\sigma < \{\}$ para todo tipo registro $\sigma$. Esto es porque $\{\}$ no tiene etiquetas, osea que su conjunto de etiquetas es el conjunto $\varnothing$ que está contenido en todos los conjuntos.

**Valores**

$$V \ ::= \ \ldots \mid \{l_i = V_i \ ^{i \in 1..n}\}$$

**Axiomas y reglas de evaluación**

$$\frac{j \in 1..n}{\{l_i = V_i \ ^{i \in 1..n}\}.l_j \to V_j} \text{(E-ProjRcd)}$$

$$\frac{M \to M'}{M.l \to M'.l} \text{(E-Proj)}$$

$$\frac{M_j \to M'_j}{\{l_i = V_i \ ^{i\in 1..j-1}, l_j = M_j, l_i = M_i \ ^{i\in j+1..n}\} \to \{l_i = V_i \ ^{i\in 1..j-1}, l_j = M'_j, l_i = M_i \ ^{i\in j+1..n}\}}(\text{E-RCD})$$

## B.2. Declaraciones Locales ($\lambda^{\cdots let}$)

Con esta extensión, agregamos al lenguaje el término $let\ x : \sigma = M\ in\ N$, que evalúa $M$ a un valor, liga $x$ a $V$ y, luego, evalúa $N$. Este término solo mejora la legibilidad de los programas que ya podemos definir con el lenguaje hasta ahora definido.

**Términos**

$$M \ ::= \ \ldots \mid let\ x : \sigma = M\ in\ N$$

**Axiomas y reglas de tipado**

$$\frac{\Gamma \rhd M : \sigma_1 \qquad \Gamma, x : \sigma_1 \rhd N : \sigma_2}{\Gamma \rhd let\ x : \sigma_1 = M\ in\ N : \sigma_2}(\text{T-Let})$$

**Axiomas y reglas de evaluación**

$$\frac{M_1 \to M'_1}{let\ x : \sigma = M_1\ in\ M_2 \to let\ x : \sigma = M'_1\ in\ M_2}(\text{E-Let})$$

$$\frac{}{let\ x : \sigma = V_1\ in\ M_2 \to M_2\{x \leftarrow V_1\}}(\text{E-LetV})$$

### B.2.1. Construcción *let* recursivo (Letrec)

Una construcción alternativa para definir funciones recursivas es

$$letrec\ f : \sigma \to \sigma = \lambda x : \sigma.M\ in\ N$$

Y *letRec* se puede definir en base a *let* y $fix$ (definido en 3.7) de la siguiente forma:

$$let\ f : \sigma \to \sigma = (fix\ \lambda f : \sigma \to \sigma.\lambda x : \sigma.M)\ in\ N$$

## B.3. Tuplas

**Tipos**

$$\sigma, \tau \ ::= \ldots \mid \sigma \times \tau$$

**Términos**

$$M,\ N \ ::= \ \ldots \mid < M, N > \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$$

**Axiomas y reglas de tipado**

$$\frac{\Gamma \rhd M : \sigma \quad \Gamma \rhd N : \tau}{\Gamma \rhd < M, N >: \sigma \times \tau}(\text{T-Tupla})$$

$$\frac{\Gamma \rhd M : \sigma \times \tau}{\Gamma \rhd \pi_1(M) : \sigma}(\text{T-}\pi_1) \qquad \frac{\Gamma \rhd M : \sigma \times \tau}{\Gamma \rhd \pi_2(M) : \tau}(\text{T-}\pi_2)$$

**Valores**

$$V \ ::= \ \ldots \mid < V, V >$$

**Axiomas y reglas de evaluación**

$$\frac{M \to M'}{< M, N > \to < M', N >}(\text{E-Tuplas}) \qquad \frac{N \to N'}{< V, N > \to < V, N' >}(\text{E-Tuplas1})$$

$$\frac{M \to M'}{\pi_1(M) \to \pi_1(M')}(\text{E-}\pi_1) \qquad \frac{}{\pi_1(< V_1, V_2 >) \to V_1}(\text{E-}\pi_1')$$

$$\frac{M \to M'}{\pi_2(M) \to \pi_2(M')}(\text{E-}\pi_2) \qquad \frac{}{\pi_2(< V_1, V_2 >) \to V_2}(\text{E-}\pi_2')$$

## B.4. Árboles binarios

**Tipos**

$$\sigma, \tau \ ::= \ldots \mid AB_\sigma$$

**Términos**

$$M, \ N \ ::= \ \ldots \mid \text{Nil}_\sigma \mid \text{Bin}(M, N, O) \mid \text{raiz}(M) \mid \text{der}(M) \mid \text{izq}(M) \mid \text{esNil}(M)$$

**Axiomas y reglas de tipado**

$$\frac{}{\Gamma \rhd \text{Nil}_\sigma : AB_\sigma}(\text{T-Nil}) \qquad \frac{\Gamma \rhd M : AB_\sigma \quad \Gamma \rhd N : \sigma \quad \Gamma \rhd O : AB_\sigma}{\Gamma \rhd \text{Bin}(M, N, O) : AB_\sigma}(\text{T-Bin})$$

$$\frac{\Gamma \rhd M : AB_\sigma}{\Gamma \rhd \text{raiz}(M) : \sigma}(\text{T-raiz}) \qquad \frac{\Gamma \rhd M : AB_\sigma}{\Gamma \rhd \text{der}(M) : AB_\sigma}(\text{T-der})$$

$$\frac{\Gamma \rhd M : AB_\sigma}{\Gamma \rhd \text{izq}(M) : AB_\sigma}(\text{T-izq}) \qquad \frac{\Gamma \rhd M : AB_\sigma}{\Gamma \rhd \text{isNil}(M) : Bool}(\text{T-isNil})$$

**Valores**

$$V \ ::= \ \ldots \mid \text{Nil} \mid \text{Bin}(V, V, V)$$

**Axiomas y reglas de evaluación**

$$\frac{M \to M'}{\text{Bin}(M, N, O) \to \text{Bin}(M', N, O)}(\text{E-Bin1}) \qquad \frac{N \to N'}{\text{Bin}(V, N, O) \to \text{Bin}(V, N', O)}(\text{E-Bin2})$$

$$\frac{O \to O'}{\text{Bin}(V_1, V_2, O) \to \text{Bin}(V_1, V_2, O')}(\text{E-Bin3})$$

$$\frac{M \to M'}{\text{raiz}(M) \to \text{raiz}(M')}(\text{E-Raiz1}) \qquad \frac{}{\text{raiz}(\text{Bin}(V_1, V_2, V_3)) \to V_2}(\text{E-Bin3})$$

$$\frac{M \to M'}{\text{der}(M) \to \text{der}(M')}(\text{E-Der1}) \qquad \frac{}{\text{der}(\text{Bin}(V_1, V_2, V_3)) \to V_3}(\text{E-Der2})$$

$$\frac{M \to M'}{\text{izq}(M) \to \text{izq}(M')}(\text{E-Izq1}) \qquad \frac{}{\text{izq}(\text{Bin}(V_1, V_2, V_3)) \to V_1}(\text{E-Izq2})$$

$$\frac{}{\text{isNil}(M) \to \text{izq}(M')}(\text{E-isNil1}) \qquad \frac{}{\text{isNil}(\text{Bin}(V_1, V_2, V_3)) \to false}(\text{E-isNilBin})$$

$$\frac{}{\text{isNil}(\text{Bin}(V_1, V_2, V_3)) \to true}(\text{E-isNilNil})$$

# C. Javascript

### Declaración de variables

```
// Declaración de variables
let miVar = 1;
var suVar = 2;

// Declaración de constante, no pueden ser modificadas.
const miConstante = 3;
```

Y es **case-sensitive**, es decir `unavariable` y `unaVariable` no son las mismas variables.

### Tipos

- `number`: Los números, no hay distinción entre enteros y punto flotantes. Contiene a las constantes `-Infinity`,`+Infinity`, `NaN`.
- `boolean`: Los literales `true` y `false` con las operaciones \&\&, `!` y `||`.
- `string`: Secuencias de cero o más carácteres entre comillas simples o dobles.
- `null`: Un único valor `null` (nada, valor desconocido).
- `undefined`: Un único valor `undefined` (el valor no está definido).

Podemos usar `typeof` para saber el nombre del tipo de la expresión.

- `Arrays: [], [1,2,true], new Array()`

  `-[-] , push(-) , pop() , shift() , unshift(_)`

**Tipado** El tipado se hace de manera **dinámica** (en tiempo de ejecución) y **débil** (se pueden comparar cosas que no son del mismo tipo porque hay conversión automática).

Por ejemplo:

```
let a = 1  // a = 1
a += '1'
// a = '11' (El entero, se convierte automaticamente en un string)
```

```
1 == '1' // true
1 === '1' // false
0 == false // true
0 === false // false
1 == true // true
```

```
false == '' // true
false === 'false' // false
null == undefined // true
null === undefined // false
```

### Flujos de control

```
if (cond) { ... } else { ... }

while (cond) {
    //cuerpo
}

do {
    //cuerpo
} while (cond);
```

### Definición de funciones

```
function nombre(arg1, ..., argn){
    //cuerpo
}

let nombre = function(arg1, ..., argn){
    //cuerpo
}

let nombre = (arg1, ..., argn) => {
    //cuerpo
}
```

### Objetos

```
let o = {
    a : 1,
    b : function(n) {
        return this.a + n // this hace referencia a o
    }
}

o.a // 1 Proyeccion del atributo a

o['a'] // 1 (Proyeccion del atributo a)

o.b(1) // 2  (Proyeccion y ejecucion del metodo b)


o.b = function() { return this.a } // Redefinimos o.b

o.c = true // Agrega el atributo c a o.
o['c'] = false // Redefinimos el atributo c de o.
delete o.a // Elimina el atributo a de o.
```

```
'c' in o // true (Checkea si c es una propiedad de o)
'd' in o // false

// Iteracion sobre todas las propiedades de o.
for(let p in o){
    ...
}

let p = o // Creamos una referencia a o.

let f = o.b
// Extraemos el metodo b de f. Dejamos las variable this desligada.

let o2 = { i: f, a: true}
// Crea el objeto o2, con la función f en su atributo i.

o2.f() // true

let o3 = Object.assign({}, o, o2)
// Copia las propiedade de o y o2 en o3. Hace un shallow copy, es decir si
↪ una atributo de o2 u o3 es una referencia, entonces en o, ese atributo va
↪ a ser una referencia al mismo objeto que en o2
```

**Herencia** Todos los objetos tiene una propiedad privada llamada `[[Prototype]]` cuyo valor es `null` u otro objeto que es su **prototipo**. Esta propiedad induce una cadena de prototipado sin ciclos que finaliza con `null`.

Cuando intentamos acceder a un método inexistente de un objeto, el mismo se busca en la cadena de prototipado del mismo hasta encontrar el primer objeto de la cadena que lo define. Si llegamos a `null` y el método no fue encontrado, entonces hay un error.

```
Object.setPrototypeOf(o, prot) // Hace que el prototipo de o sea prot.
Object.getPrototypeOf(o) // Devuelve el objeto que es protipo de o.

o.__proto__ // Otra forma de conseguir el prototipo de o.
o.__proto__ = o1 // Otra forma de setear el prototipo de o
```

Cuando ejecutamos un método de la cadena de prototipado, el método evaluado liga `this` al objeto llamó al método, es decir, si tenemos:

```
let o1 = { a: 1}
let o2 = { b: function(){
        return this.a
    }
}
```

```
o1.__proto__= o2

o1.b();
// Busca b en o1 y no lo encuentra, el proximo objeto en la cadena es o2,
↪  encuentra b y liga this = o1, luego ejecuta el método.
```

Para crear una copia de un objeto y asignarle a esa copia el objeto original como prototipo usamos `Object.create`.

Además javascript provee el prototipo `Object.prototype` que es prototipo de todos los objetos y provee metodos básicos como `hasOwnProperty()` que indica si el objeto contiene una propiedad no heredada y `toString()` que devuelve un string que representa al receptor.

### Cadenas de prototipado

```
let o1 = { ... }
// o1 ---> Object.prototype ---> null

let o2 = Object.create(o1)
// o2 ---> o1 ---> Object.prototype ---> null

let o = Object.create(null)
// o ---> null
```

**Constructores** Son funciones que generan objetos. Cuando declaramos un constructor `C`, javascript crea un objeto llamado `C.prototype` que se asigna como prototipo de todos los objetos creados con dicha función. Por ejemplo:

```
// Constructor Punto, tiene la siguiente cadena de prototipado:
// Punto --> Function.prototype --> Object.prototype --> null
function Punto(x,y){
    this.x = x;
    this.y = y;
    this.mvx = function(d){
        this.x += d;
    }
}

// Objeto creado con el constructo punto
o = new Punto(1,2)
// o = Object{ x: 1, x:2, mvx: mvx()} y su cadena de prototipado es:
// o --> Punto.prototype --> Object.prototype --> null
```