PLP - Práctica 4: Subtipado

Zamboni, Gianfranco

3 de marzo de 2018

Reglas de subtipado

4.1. Ejercicio 1

1)

$$\dfrac{\{y\} \subseteq \{x, y, z\} \qquad y : Nat = y : Nat}{\{x : Nat,\ y : Nat,\ z : Nat\} <: \{y : Nat\}}\text{ S-Rcd}$$

Esta demostración no es única porque existe la regla $S - Trans$ que nos permite probar la transitividad de los tipos, si hubiesemos decidido usarla para primero conseguir un supertipo $\{x : Nat, y : Nat\}$ del primer término y luego probar que ese supertipo es subtipo de $\{y : Nat\}$ entonces también hubiese sido una demostración válida.

2)

$$\dfrac{\emptyset \subseteq \{x, y, z\}}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{\}}\text{ S-Rcd}$$

$$\dfrac{\dfrac{\{x\} \subseteq \{x, y\} \qquad x : Nat = x : Nat}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{x : Nat\}}\text{ S-Rcd} \qquad \dfrac{\emptyset \subseteq \{x, y, z\}}{\{x : Nat\} <: \{\}}\text{ S-Rcd}}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{\}}\text{ S-Trans}$$

4.2. Ejercicio 2

1) Los registros tienen subtipos infinitos porque dado el tipo de un registro $\omega = \{l_i : \sigma_i\}_{i\in 1..n}$, entonces cualquier tipo de la forma $\omega' = \{l_i : \tau_i\}_{i\in 1..k}$ con $k \geq n$ tal que $\tau_i <: \sigma_i^{i\in 1..n}$ es subtipo del tipo de ω.

Top tiene como subtipo a los registros y los registros tienen infinitos subtipos, entonces Top tiene infinitos subtipos.

Por S-Arrow, los subtipos de una función $\sigma \to \tau$ son los tipos de la forma $\sigma' \to \tau'$ tal que $\sigma <: \sigma'$ y $\tau' <: \tau$. En particular si τ es de tipo registro, entonces τ tiene infinitos subtipos, por lo que $\sigma \to \tau$ tambien los tiene (son las funciones que devuelven registros).

2) Top no tiene supertipos.

Los registros tiene una cantidad finita de supertipos, siendo el máximo registro $\{\} <: Top$

Otra vez, hay casos en que las funciones tienen infinitos supertipos y es cuando toman como parámetro a un registro. Esto es porque la regla S-Arrow es contravariante respecto del tipo del párametro de la función, es decir, para que un tipo $\sigma \to \tau$ sea supertipo de $\sigma' \to \tau$ tiene que valer que $\sigma <: \sigma'$. Y si $sigma'$ es un registro, entonces tiene infinitos subtipos.

4.3. Ejercicio 3

1) $S = Top$

2) Si solo consideramos los tipos básicos $Bool$, Nat, Int, $Float$, entonces $S = Bool$, pero cuando empezamos a considerar registros o listas u otros tipos, entonces, los "mínimos" de cada tipo no están relacionados de ninguna forma, incluso, en el caso de los registros, ese mínimo nisiquiera existe.

3) Por S-Arrow, tenemos que $S_1 \to S_2 <: T_1 \to T_2$ si $T_1 <: S_1$ y $T_2 <: S_2$.
El primer caso es el punto **1)**, el segundo es el punto **2)**.

4) Es similar al anterior pero con los casos invertidos.

4.4. Ejercicio 4

1) $T <: S \underset{\text{S-Trans}}{\iff} T <: T \ \wedge\ T <: S \underset{\text{S-Arrow}}{\iff} S \to T <: T \to T$

2) Si $S = Bool$ y $T = Top$, entonces $\{x : Bool, y : Top\}$ tiene 26 supertipos y el tipo $Bool \to Top$ solo tiene como supertipo a Top, porque $Bool$ no tiene subtipos y Top no tiene supertipos.

3) Si $S = Top$ y $T = Top$, entonces $\{x : Top, y : Top\}$ tiene como supertipos a $\{x : Top\}$, $\{y : Top\}$, $\{\}$ y a Top y el tipo $Top \to Top$ tiene infinitos por el ejercicio 2.

4.5. Ejercicio 5

subtipos de Bool: Bool -¿finitos subtipos de Nat: Bool Nat -¿finitos subtipos de a-¿b: supertipos de axsubtipos de b, con a y b en nat,bool,funciones

Subtipado en el contexto de tipado

4.6. Ejercicio 6

a)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{y : Nat \in \{x : Bool, y : Nat\}}{\{x : Bool, y : Nat\} \mapsto y : Nat}\text{T-Var}}{\{x : Bool, y : Nat\} \mapsto succ(y) : Nat}\text{T-Succ}}{\Gamma \mapsto \lambda y : Nat.succ(y) : Nat \to Nat}\text{T-Abs} \qquad \dfrac{x : Bool \in \Gamma}{\Gamma \mapsto x : Bool}\text{T-Var} \qquad \dfrac{}{Bool <: Nat}\text{S-BoolNat}}{\Gamma = \{x : Bool\} \mapsto (\lambda y : Nat.succ(y))\ x : Nat}}{\{\} \mapsto \lambda x : Bool.(\lambda y : Nat.succ(y))\ x : Bool \to Nat}\text{T-Abs}
$$

b)

$$
\dfrac{\textbf{(1)} \qquad \textbf{(2)} \qquad \dfrac{\{l_1, l_2\} \subseteq \{l_1, l_2, l_3\} \qquad l_1 \Rightarrow Bool = Bool \qquad \dfrac{}{l_2 \Rightarrow Int <: Float}\text{S-IntFloat}}{\{l_1 : Bool,\ l_2 = Int,\ l_3 = Float\} <: \{l_1 : Bool,\ l_2 : Float\}}\text{S-RCD}}{\{\} \mapsto (\lambda r : \{l_1 : Bool,\ l_2 : Float\}.\text{if } r.l_1 \text{ then } r.l_2 \text{ else } 5,5)\ \{l_1 = \texttt{true},\ l_2 = -8,\ l_3 = 9,0\} : Float}\text{T-App}
$$

(1)
$$
\dfrac{\{r : \{l1 : Bool, l2 : Float\}\} \mapsto 5,5 : Float \qquad \dfrac{r.l2 : Float \in \{r : \{l1 : Bool, l2 : Float\}\}}{\{r : \{l1 : Bool, l2 : Float\}\} \mapsto r.l2 : Float}\text{T-Var} \qquad \dfrac{r.l1 : Bool \in \Gamma}{\{r : \{l1 : Bool, l2 : Float\}\} \mapsto r.l1 : Bool}\text{T-Var}}{\{r : \{l1 : Bool, l2 : Float\}\} \mapsto if\ r.l1\ then\ r.l2\ else\ 5,5 : Float}\text{T-If}
$$

(2)
$$
\dfrac{\dfrac{}{\{l1 : Bool, l2 : Int, l3 : Float\} <: \{l1 : Bool, l2 : Float\}}\text{S-RCDWidth} \qquad \dfrac{\{\} \mapsto 9,0 : Float : \qquad \{\} \mapsto -8 : Int : \qquad \{\} \mapsto True : Bool :}{\{\} \mapsto \{l1 : True, l2 : -8, l3 : 9,0\} : \{l1 : Bool, l2 : Int, l3 : Float\}}\text{T-RCD}}{\{l1 : True, l2 : -8, l3 : 9,0\} : \{l1 : Bool, l2 : Int, l3 : Float\}}\text{T-Subs}
$$

4.7. Ejercicio 7

Inserte su explicación formal aquí :)
Por lo tanto, el término xx no es tipable en el cálculo λ clásico.

$$\dfrac{\dfrac{x:\sigma\to\tau\in\Gamma}{\Gamma\rhd x:\sigma\to\tau} \qquad \dfrac{x:\theta\in\Gamma}{\Gamma\rhd x:\theta} \qquad \theta <: \sigma}{\Gamma \mapsto x\ x:\tau}\text{T-App}$$

Si $\theta=\sigma\to\tau$ y $\sigma=Top$ entonces vale $\theta <: Top$, es decir, $Top\to\tau <: Top$.

4.8. Ejercicio 8

a)

$$\dfrac{U <: V \qquad S <: T}{T\to V <: S\to U}\text{S-Arrow'}$$

Sea $M = (\lambda x : Int.\text{if } x > 2 \text{ then } 2,5 \text{ else } 0,3 : Int- > Bool$, por la regla S-Arrow', podríamos tipar el término: M true, ya que podríamos ingresarle a M un elemento de un subtipo de Int. Pero esto no tenrdía sentido, ya que no se podría evaluar: true¿2.

Demostración:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\rhd 0,3:Float \qquad \Gamma\rhd 2,5:Float \qquad \Gamma\rhd x>2:Bool}{\Gamma=\{x:Int\}\rhd if\ (x>2)\ then\ 2,5\ else\ 0,3:Float}\text{T-if}}{\{\}\rhd \lambda x:Int.\text{if } x>2 \text{ then } 2,5 \text{ else } 0,3 : Int\to Float}\text{T-abs} \qquad \dfrac{\{\}\rhd True:Bool \qquad Bool <: Int}{\{\}\rhd True:Int}\text{T-Subs}}{\{\}\rhd (\lambda x:Int.\text{if } x>2 \text{ then } 2,5 \text{ else } 0,3\ True : Float}\text{T-app}$$

b)

$$\dfrac{U <: V \qquad S <: T}{S\to U <: T\to V}\text{S-Arrow''}$$

4.9. Ejercicio 9

4.10. Ejercicio 10

4.11. Ejercicio 11

4.12. Ejercicio 12

4.13. Ejercicio 13

4.14. Ejercicio 14