

PLP - Práctica 2: Introducción al Cálculo Lambda Tipado

Zamboni, Gianfranco

14 de febrero de 2018

Sintaxis

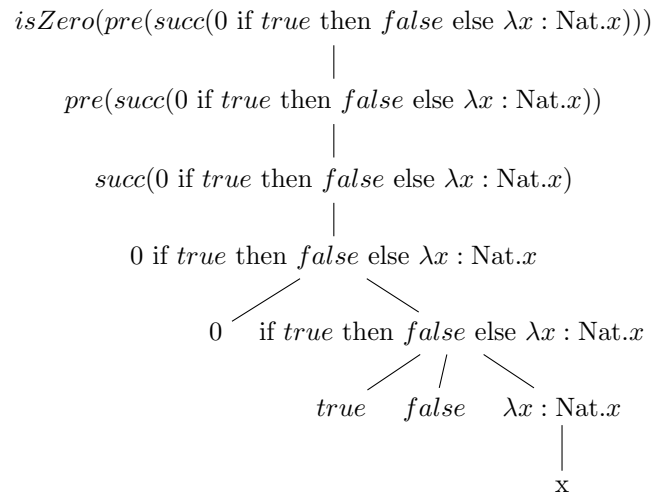
2.1. Ejercicio 1

En este ejercicio, nos piden identificar las expresiones sintacticamente válidas. Tenemos que tener cuidado de no confundir estas expresiones con las expresiones correctamente tipadas.

Todas las expresiones que nos permite escribir el conjunto de términos son expresiones válidas sintacticamente, aún si estas no pueden ser tipadas.

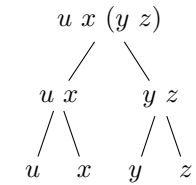
Expresiones de términos	Expresiones de tipo	No válidas
x	Bool	M
$x\ x$	$\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$	σ
$M\ M$	$\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}$	$\lambda x. \text{isZero}(x)$
$\text{true}\ \text{false}$	$(\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}) \rightarrow \text{Nat}$	$\lambda x : \text{if } \text{true} \text{ then Bool else Nat}.x$
$\text{true}\ \text{succ}(\text{true}\ \text{false})$		$\text{succ}\ \text{true}$
$\lambda x : \sigma. \text{succ}(x)$		
$\lambda x : \text{Bool}. \text{succ}(x)$		
$\lambda x : \text{Bool}. \text{if } 0 \text{ then } \text{true} \text{ else } 0\ \text{succ}(\text{true})$		

2.2. Ejercicio 2



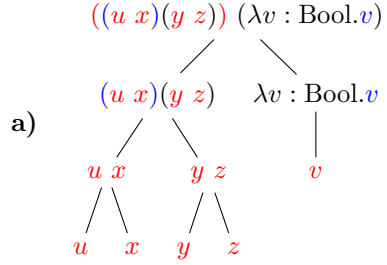
2.3. Ejercicio 3

1. $\lambda x : \text{Nat}.\text{succ}((\lambda x : \text{Nat}.\text{blue } x) \text{ red } x)$
2. En el término $\lambda x_1 : \text{Nat}.\text{succ}(x_2)$, x_1 no aparece como subtérmino.
3. La expresión $x (y z)$ no sucede en la expresión $u x (y z)$

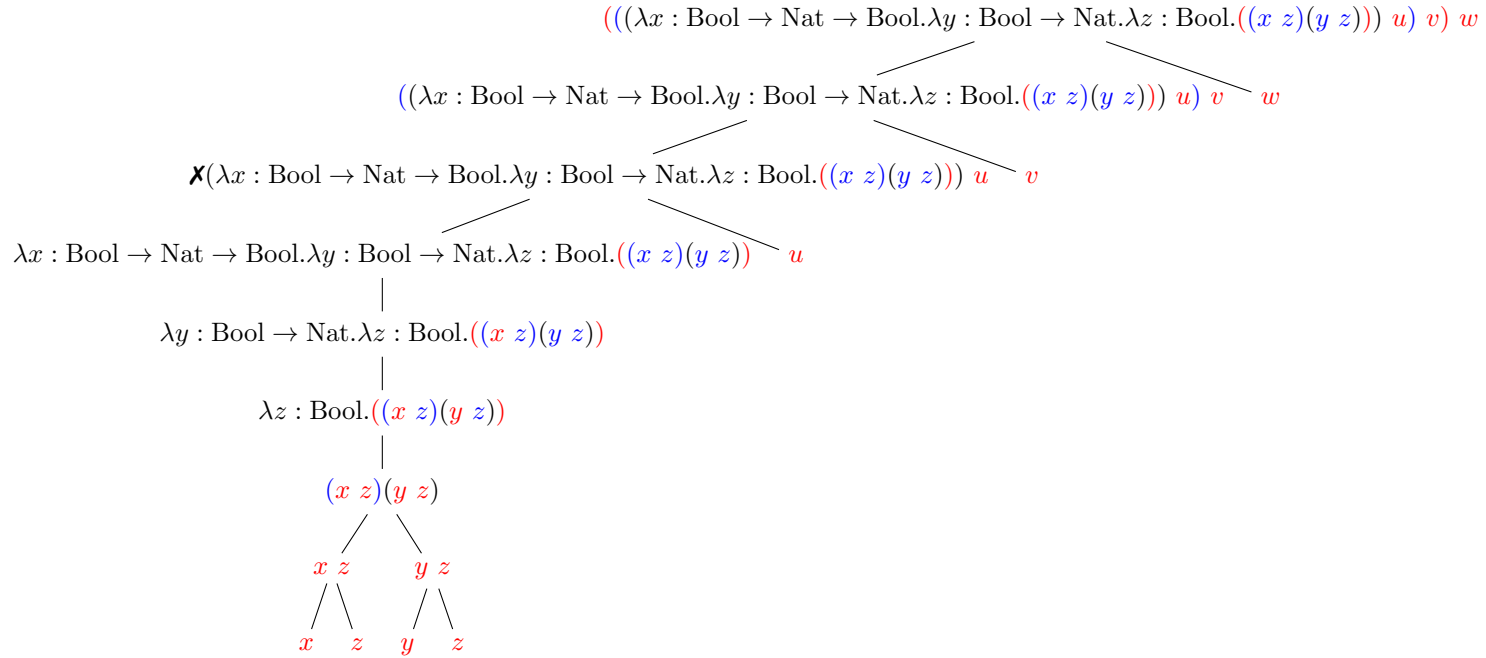


2.4. Ejercicio 4

Marcamos con **azul** las variables ligadas y con **rojo** las variables libres



b) En esta expresión aparece $(\lambda x : \text{Bool} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}.\lambda y : \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}.\lambda z : \text{Bool}.x\ z\ (y\ z))\ u$, la marco con una **X** cuando aparece.





Tipado

2.5. Ejercicio 5

$$1) \frac{\frac{}{\phi \triangleright true : Bool} \text{ T-True} \quad \frac{}{\phi \triangleright 0 : Nat} \text{ T-Zero} \quad \frac{\frac{}{\phi \triangleright 0 : Nat} \text{ T-Zero}}{\phi \triangleright succ(0) : Nat} \text{ T-Succ}}{\phi \triangleright \text{if } true \text{ then } 0 \text{ else } succ(0) : Nat}$$

2) En la siguiente demostración $\Gamma = \{x : Nat, y : Bool\}$

$$\frac{\frac{}{\Gamma \triangleright true : Bool} \text{ T-True} \quad \frac{}{\Gamma \triangleright false : Bool} \text{ T-False} \quad \frac{\frac{\frac{z : Bool \in \Gamma, z : Bool}{\Gamma, z : Bool \triangleright z : Bool} \text{ T-Var}}{\Gamma \triangleright \lambda z : Bool. z : Bool \rightarrow Bool} \text{ T-Abs} \quad \frac{}{\Gamma \triangleright true : Bool} \text{ T-True}}{\Gamma \triangleright (\lambda z : Bool. z) true : Bool} \text{ T-App}}{\Gamma \triangleright \text{if } true \text{ then } false \text{ else } (\lambda z : Bool. z) true : Bool} \text{ T-If}$$

$$3) \frac{\frac{\phi, x : Bool \triangleright x : Bool \Rightarrow \phi \triangleright \lambda x : Bool. x : Bool \rightarrow \tau}{\phi \triangleright \lambda x : Bool. x : Bool} \text{ T-Abs} \quad \phi \triangleright 0 : Nat \quad \phi \triangleright succ(0) : Nat}{\phi \triangleright \text{if } \lambda x : Bool. x \text{ then } 0 \text{ else } succ(0) : Nat} \text{ T-If}$$

4) En la próxima demostración $\Gamma = \{x : Bool \rightarrow Nat, y : Bool\}$

$$\frac{\frac{x : Bool \rightarrow Nat \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : Bool \rightarrow Nat} \text{ T-Var} \quad \frac{y : Bool \in \Gamma}{\Gamma \triangleright y : Bool} \text{ T-Var}}{\Gamma \triangleright \text{if } \lambda x : Bool. x \text{ then } 0 \text{ else } succ(0) : Nat} \text{ T-App}$$

2.6. Ejercicio 6

$$1) \quad \frac{\frac{\sigma = \text{Nat}}{\phi \triangleright 0 : \sigma} \text{T-Zero}}{\phi \triangleright \text{succ}(0) : \sigma} \text{T-Succ} \Rightarrow \sigma = \text{Nat}$$

$$2) \quad \frac{\frac{\phi \triangleright \text{succ}(0) : \text{Nat} \Rightarrow \sigma = \text{Bool}}{\phi \triangleright \text{isZero}(\text{succ}(0)) : \sigma} \text{T-IsZero}}{\text{Ejercicio 2.6}} \Rightarrow \sigma = \text{Bool}$$

$$3) \quad \frac{\frac{\frac{\phi \triangleright \text{true} : \text{Bool}}{\text{T-True}} \quad \frac{\phi \triangleright \text{false} : \text{Bool}}{\text{T-True}} \quad \frac{\phi \triangleright \text{false} : \text{Bool}}{\text{T-True}}}{\Gamma \triangleright \text{if } \text{true} \text{ then } \text{false} \text{ else } \text{false} : \text{Bool}} \text{T-If} \quad \frac{\frac{\sigma = \text{Nat}}{\phi \triangleright 0 : \sigma} \text{T-Zero} \quad \frac{\sigma = \text{Nat}}{\phi \triangleright \text{succ}(0) : \sigma} \text{Ejercicio 2.6}}{\phi \triangleright \text{if if } \text{true} \text{ then } \text{false} \text{ else } \text{false} \text{ then } 0 \text{ else } \text{succ}(0) : \sigma} \text{T-If} \Rightarrow \sigma = \text{Nat}$$

2.7. Ejercicio 7

1) En la próxima demostración $\Gamma = \{x : \sigma\}$

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{Nat} \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \text{Nat}} \text{T-Var}}{\Gamma \triangleright \text{succ}(x) : \text{Nat}} \text{T-Succ}}{\Gamma \triangleright \text{isZero}(\text{succ}(x)) : \tau} \text{T-Succ}$$

Entonces, $\sigma = \text{Nat}$ y $\tau = \text{Bool}$

$$2) \quad \frac{\frac{\{x : \sigma\} \triangleright x : \sigma}{\phi \triangleright \lambda x : \sigma.x : \sigma \rightarrow \sigma} \text{T-Abs} \quad \frac{\{y : \text{Bool}\} \triangleright 0 : \text{Nat}}{\phi \triangleright \lambda y : \text{Bool}.0 : \sigma} \text{T-Abs}}{\phi \triangleright (\lambda x : \sigma.x) (\lambda y : \text{Bool}.0) : \sigma} \text{T-App}$$

El árbol de la segunda abstracción nos dice que $\sigma = \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}$. Por lo que la primera abstracción sería la función identidad de funciones del tipo $\text{Bool} \rightarrow \text{Nat}$.

3) $\Gamma = \{y : \tau\}$

$$\frac{\frac{\Gamma, x : \sigma \triangleright x : \sigma \Rightarrow \Gamma, x : \sigma \triangleright \lambda x : \sigma.x : \sigma \rightarrow \text{Bool}}{\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma.x : \text{Bool}} \text{T-Abs} \quad \Gamma \triangleright y : \sigma \quad \Gamma \triangleright \text{succ}(0) : \sigma}{\Gamma \triangleright \text{if } (\lambda x : \sigma.x) \text{ then } y \text{ else } \text{succ}(0) : \sigma} \text{T-If}$$

Entonces, la expresión no es tipable.

4) $\Gamma = \{x : \sigma\}$

$$\frac{\frac{x : \sigma_1 \rightarrow \tau \in \Gamma \Rightarrow \sigma = \sigma_1 \rightarrow \tau}{\Gamma \triangleright x : \sigma_1 \rightarrow \tau} \text{T-Var} \quad \frac{y : \sigma_1 \in \Gamma}{\Gamma \triangleright y : \sigma_1} \text{T-Var}}{\Gamma \triangleright x y : \tau} \text{T-App}$$

Acá no podemos hacer juicio de tipado porque no podemos asegurar que y sea de tipo σ_1

5) $\Gamma = \{x : \sigma, y : \tau\}$

$$\frac{\frac{x : \sigma_1 \rightarrow \tau \in \Gamma \Rightarrow \sigma = \sigma_1 \rightarrow \tau}{\Gamma \triangleright x : \sigma_1 \rightarrow \tau} \text{T-Var} \quad \frac{y : \sigma_1 \in \Gamma \Rightarrow \sigma_1 = \tau}{\Gamma \triangleright y : \sigma_1} \text{T-Var}}{\Gamma \triangleright x y : \tau} \text{T-App}$$

Entonces $\sigma = \tau \rightarrow \tau$ para cualquier tipo τ

6) $\Gamma = \{x : \sigma\}$

$$\frac{\frac{x : \text{Bool} \rightarrow \tau \in \Gamma \Rightarrow \sigma = \text{Bool} \rightarrow \tau}{\Gamma \triangleright x : \text{Bool} \rightarrow \tau} \text{T-Var} \quad \Gamma \triangleright \text{true} : \text{Bool}}{\Gamma \triangleright x \text{ true} : \tau} \text{T-App}$$

Entonces $\sigma = \text{Bool} \rightarrow \tau$ para cualquier tipo τ

2.8. Ejercicio 8

La expresión más simple que se me ocurre es *true false*.

7) $\Gamma = \{x : \sigma\}$

$$\frac{\frac{x : \text{Bool} \rightarrow \sigma \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \text{Bool} \rightarrow \sigma} \text{T-Var} \quad \Gamma \triangleright \text{true} : \text{Bool}}{\Gamma \triangleright x \text{ true} : \sigma} \text{T-App}$$

Tenemos que x debe ser de tipo σ y $\text{Bool} \rightarrow \sigma$ al mismo tiempo, por lo que no es posible dar un tipo a esta expresión

8) $\Gamma = \{x : \sigma\}$

$$\frac{\frac{x : \sigma_1 \rightarrow \tau \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \sigma_1 \rightarrow \tau} \text{T-Var (1)} \quad \frac{x : \sigma_1 \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \sigma_1} \text{T-Var (2)}}{\Gamma \triangleright x x : \tau} \text{T-App}$$

Tenemos que x debe ser de tipo σ y $\text{Bool} \rightarrow \sigma$ al mismo tiempo, por lo que no es posible dar un tipo a esta expresión

2.9. Ejercicio 9

El juicio de tipado puede ser $\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma. x : \sigma \rightarrow \sigma$

Con T-Abs tenemos:

$$\frac{\frac{x : \sigma \in \Gamma, x : \sigma}{\Gamma, x : \sigma \triangleright x : \sigma} \text{ T-Var}}{\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma. x : \sigma \rightarrow \sigma} \text{ T-Abs}$$

Con T-Abs2:

$$\frac{\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \sigma} \text{ T-Var}}{\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma. x : \sigma \rightarrow \sigma} \text{ T-Abs2}$$

No hay nada que nos asegure que $x : \sigma$ pertenece a Γ

Semántica

2.10. Ejercicio 10

1) $(\lambda y : \sigma. x (\lambda x : \tau. x))\{x \leftarrow (\lambda y : \rho. x y)\} \xrightarrow[\substack{\alpha\text{-eq} \\ y=w; x=z}} (\lambda w : \sigma. x (\lambda z : \tau. z))\{x \leftarrow (\lambda y : \rho. x y)\} \stackrel{def}{=} \lambda w : \sigma. (\lambda y : \rho. x y) (\lambda z : \tau. z)$

2)

$$\begin{aligned} (y (\lambda v : \sigma. x v))\{x \leftarrow (\lambda y : \tau. v y)\} &\stackrel{def}{=} y\{x \leftarrow (\lambda y : \tau. v y)\} (\lambda v : \sigma. x v)\{x \leftarrow (\lambda y : \tau. v y)\} \stackrel{def}{=} y (\lambda v : \sigma. x v)\{x \leftarrow (\lambda y : \tau. v y)\} \\ &\xrightarrow[\substack{\alpha\text{-eq} \\ v=z}} y (\lambda z : \sigma. x z)\{x \leftarrow (\lambda y : \tau. v y)\} \stackrel{def}{=} y (\lambda z : \sigma. (\lambda y : \tau. v y) z) \end{aligned}$$

2.11. Ejercicio 11

Es un valor	No es un valor
$\lambda x : \text{Bool}. \underline{2}$	$(\lambda x : \text{Bool}. x) \text{ true}$
$\lambda x : \text{Bool}. \text{pred}(\underline{2})$	x
$\lambda y : \text{Nat}. (\lambda x : \text{Bool}. \text{pred}(\underline{2})) \text{ true}$	
$\text{succ}(\text{succ}(0))$	

2.12. Ejercicio 12

Los programas en **rojo** son los que dan error y los programas en **azul** los que son valores, el resto no están en forma normal.

Programas	No Programas
$(\lambda x : \text{Bool}. \text{pred}(\text{isZero}(x))) \text{ true}$	$\lambda x : \text{Nat}. \text{pred}(\text{succ}(y))$
$\lambda x : \text{Nat}. \text{pred}(\text{succ}(x))$	$(\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. x) (\lambda x : \text{Nat}. \text{isZero}(x))$
$(\lambda x : \text{Bool}. \text{pred}(\text{isZero}(x))) \text{ true}$	
$(\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. f \ 0) (\lambda x : \text{Nat}. \text{isZero}(x))$	
$(\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. f \ \text{pred}(0)) (\lambda x : \text{Nat}. \text{isZero}(x))$	
$\text{fix } (\lambda y : \text{Nat}. \text{succ}(y))$	
$\text{letrec } f = \lambda x : \text{Nat}. \text{succ}(f \ x) \text{ in } f \ 0$	

2.13. Ejercicio 13

Cuando definimos \rightarrow , lo hacemos como una función determinística que dada una expresión, siempre hay una única que regla que aplica para dar un paso en la reducción. Por lo que una expresión siempre reduce a la misma expresión, sin importar cuantos pasos hagamos.

2.14. Ejercicio 14

Cuando $M = 0$, tenemos que $\text{succ}(\text{pred}(0)) = 1$ y que $\text{pred}(\text{succ}(0)) = 0$, por lo que no siempre es lo mismo evaluar estas dos expresiones. $\text{isZero}(\text{succ}(M))$ evalúa a *false* solo cuando M es de tipo Nat y no evalúan a cero. Como dice el enunciado, hay infinitas expresiones que evalúan a cero, recordemos que las (infinitas) expresiones correctamente tipadas evalúan a un valor.³

2.15. Ejercicio 15

Con la nueva regla, las abstracciones $\lambda x : \sigma. M$ pasan a ser expresiones reducibles mientras M sea una expresión reducible, por lo que debemos con-

siderarla un valor solo cuando su expresión interna es un valor. Además, esta nueva regla nos da un nuevo camino para reducirla cuando ex aplicada a un valor, es decir, en una expresión del tipo $\lambda x : \sigma. M \ N$, podemos elegir entre usar esta regla o la regla E-Abs/ β , por lo que hay que modificar esta regla para que solo sea aplicable cuando M está en su forma normal F , o sea no es posible seguir reduciendola. Entonces:

$$V ::= \dots \mid \lambda x : \sigma. V$$

$$\frac{}{\lambda x : \sigma. F \ V \rightarrow F\{x \leftarrow V\}} (\text{E-Abs}/\beta)$$

Ahora, si tratamos de reducir $(\lambda x : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}. x \ \underline{23}) (\lambda x : \text{Nat}. 0)$ nos encontraremos con que la expresión dentro de la primer abstracción es reducible pues $x \ \underline{23}$ no es un valor. Sin embargo, x puede ser cualquier función de tipo $\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$, o sea que tiene una variable libre, pero no sabemos como ni cuanta veces ocurre dentro de ella. Esto evita que podamos reducirla, trabando la computación.

2.16. Ejercicio 16

Para poder utilizar la reducción *call-by-name* debemos eliminar la regla E-App/ v que nos dice que debemos reducir la expresión usada como parámetro hasta obtener un valor y remplazar E-App2/ β por:

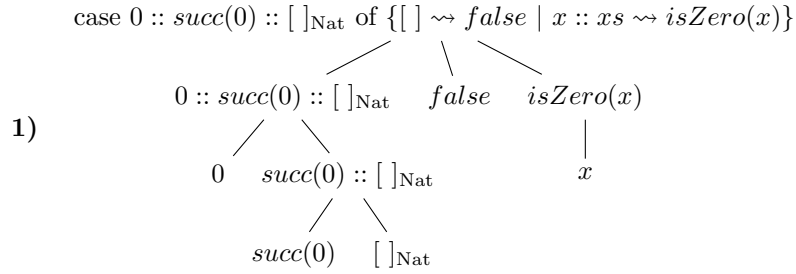
$$\frac{}{(\lambda x : \sigma.M) N \rightarrow M\{x \leftarrow N\}} \text{(E-App}/\beta\text{)}$$

Esta nueva regla, nos permite remplazar x por N , sin importar si N está en forma normal o no. La próxima reducción se hizo utilizando los cambios mencionados:

$$\begin{aligned} & (\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.\lambda g : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.\lambda x : \text{Nat}.f (g x)) (\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) (\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) \underline{5} \\ & \xrightarrow{\text{E-App}/\beta} ((\lambda g : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.\lambda x : \text{Nat}.\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) (g x)) (\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) \underline{5} \xrightarrow{\text{E-App}/\beta} (\lambda x : \text{Nat}.\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) ((\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) x) \underline{5} \\ & \xrightarrow{\text{E-App}/\beta} (\lambda x : \text{Nat}.\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) ((\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) x) \underline{5} \xrightarrow{\text{E-App}/\beta} (\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) ((\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) \underline{5}) \xrightarrow{\text{E-App}/\beta} succ((\lambda x : \text{Nat}.succ(x)) \underline{5}) \\ & \xrightarrow{\text{E-Succ; E-App}/\beta} succ(succ(\underline{5})) \end{aligned}$$

Extensiones

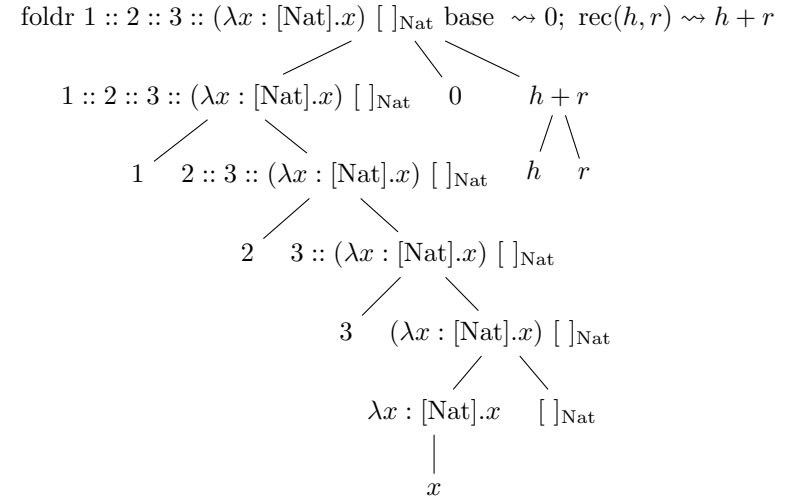
2.17. Ejercicio 17



2)

$$\frac{}{\Gamma \triangleright []_{\sigma} : [\sigma]} (\text{T-Vacio})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \Gamma \triangleright N : [\sigma]}{\Gamma \triangleright M :: N : [\sigma]} (\text{T-::})$$



$$\frac{\Gamma \triangleright M : [\sigma] \quad \Gamma \triangleright N : \tau \quad \Gamma, h : \sigma, xs : [\sigma] \triangleright O : \tau}{\Gamma \triangleright \text{case } M \text{ of } \{ [] \rightsquigarrow N \mid x :: xs \rightsquigarrow O \} : \tau} (T - \text{Case})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : [\sigma] \quad \Gamma \triangleright N : \tau \quad \Gamma, h : \sigma, r : \tau \triangleright O : \tau}{\Gamma \triangleright \text{foldr } M \text{ base } \rightsquigarrow N; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow O : \tau} (T - \text{Fold})$$

3) $\Gamma = \{x : \text{Bool}, y : [\text{Bool}]\}$

$$\frac{\text{Demostración de abajo (1)} \quad \frac{\Gamma \triangleright x :: x :: y : [\text{Bool}]}{\Gamma \triangleright x :: x :: y : [\text{Bool}]} \quad \frac{y : [\text{Bool}] \in \Gamma}{\Gamma \triangleright y : [\text{Bool}]} \text{T-Var} \quad \frac{\text{Demostración abajo (2)} \quad \Gamma, h : \text{Bool}, r : [\text{Bool}] \triangleright \text{if } h \text{ then } r \text{ else } []_{\text{Bool}} : [\text{Bool}]}{\Gamma, h : \text{Bool}, r : [\text{Bool}] \triangleright \text{if } h \text{ then } r \text{ else } []_{\text{Bool}} : [\text{Bool}]} \text{T-Fold}}{\Gamma \triangleright \text{foldr } x :: x :: y \text{ base } \rightsquigarrow y; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow \text{if } h \text{ then } r \text{ else } []_{\text{Bool}} : [\text{Bool}]}$$

$$(1) \quad \frac{\frac{x : \text{Bool} \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \text{Bool}} \text{T-Var} \quad \frac{\frac{x : \text{Bool} \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \text{Bool}} \text{T-Var} \quad \frac{y : [\text{Bool}] \in \Gamma}{\Gamma \triangleright y : [\text{Bool}]} \text{T-Var}}{\Gamma \triangleright x :: x :: y : [\text{Bool}]} \text{T-::}}{\Gamma \triangleright x :: x :: y : [\text{Bool}]} \text{T-::}$$

$$(2) \quad \frac{\frac{h : \text{Bool} \in \Gamma, h : \text{Bool}, r : [\text{Bool}]}{\Gamma, h : \text{Bool}, r : [\text{Bool}] \triangleright h : \text{Bool}} \text{T-Var} \quad \frac{r : [\text{Bool}] \in \Gamma, h : \text{Bool}, r : [\text{Bool}]}{\Gamma, h : \text{Bool}, r : [\text{Bool}] \triangleright r : [\text{Bool}]} \text{T-Var} \quad \frac{}{\Gamma, h : \text{Bool}, r : [\text{Bool}] \triangleright []_{\text{Bool}} : [\text{Bool}]} \text{T-Vacio}}{\Gamma, h : \text{Bool}, r : [\text{Bool}] \triangleright \text{if } h \text{ then } r \text{ else } []_{\text{Bool}} : [\text{Bool}]}$$

4) Los nuevos valores son $V ::= \dots \mid []_{\sigma} \mid V :: V$

5)

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1 :: M_2 \rightarrow M'_1 :: M_2} (\text{E-} :: 1)$$

$$\frac{M_2 \rightarrow M'_2}{V :: M_2 \rightarrow V :: M'_2} (\text{E-} :: 2)$$