PLP - Práctica 4: Subtipado

Zamboni, Gianfranco

3 de marzo de 2018

Reglas de subtipado

4.1. Ejercicio 1

1)

$$\dfrac{\{y\} \subseteq \{x, y, z\} \qquad y : Nat = y : Nat}{\{x : Nat,\ y : Nat,\ z : Nat\} <: \{y : Nat\}}\ \text{S-Rcd}$$

Esta demostración no es única porque existe la regla $S - Trans$ que nos permite probar la transitividad de los tipos, si hubiesemos decidido usarla para primero conseguir un supertipo $\{x : Nat, y : Nat\}$ del primer término y luego probar que ese supertipo es subtipo de $\{y : Nat\}$ entonces también hubiese sido una demostración válida.

2)

$$\dfrac{\emptyset \subseteq \{x, y, z\}}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{\}}\ \text{S-Rcd}$$

$$\dfrac{\dfrac{\{x\} \subseteq \{x, y\} \qquad x : Nat = x : Nat}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{x : Nat\}}\ \text{S-Rcd} \qquad \dfrac{\emptyset \subseteq \{x, y, z\}}{\{x : Nat\} <: \{\}}\ \text{S-Rcd}}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{\}}\ \text{S-Trans}$$

4.2. Ejercicio 2

1) Los registros tienen subtipos infinitos porque dado el tipo de un registro $\omega = \{l_i : \sigma_i\}_{i \in 1..n}$, entonces cualquier tipo de la forma $\omega' = \{l_i : \tau_i\}_{i \in 1..k}$ con $k \geq n$ tal que $\tau_i <: \sigma_i^{i \in 1..n}$ es subtipo del tipo de ω.

Top tiene como subtipo a los registros y los registros tienen infinitos subtipos, entonces Top tiene infinitos subtipos.

Por S-Arrow, los subtipos de una función $\sigma \to \tau$ son los tipos de la forma $\sigma' \to \tau'$ tal que $\sigma <: \sigma'$ y $\tau' <: \tau$. En particular si τ es de tipo registro, entonces τ tiene infinitos subtipos, por lo que $\sigma \to \tau$ tambien los tiene (son las funciones que devuelven registros).

2) Top no tiene supertipos.

Los registros tiene una cantidad finita de supertipos, siendo el máximo registro $\{\} <: Top$

Otra vez, hay casos en que las funciones tienen infinitos supertipos y es cuando toman como parámetro a un registro. Esto es porque la regla S-Arrow es contravariante respecto del tipo del párametro de la función, es decir, para que un tipo $\sigma \to \tau$ sea supertipo de $\sigma' \to \tau$ tiene que valer que $\sigma <: \sigma'$. Y si $sigma'$ es un registro, entonces tiene infinitos subtipos.

4.3. Ejercicio 3

1) $S = Top$

2) Si solo consideramos los tipos básicos $Bool$, Nat, Int, $Float$, entonces $S = Bool$, pero cuando empezamos a considerar registros o listas u otros tipos, entonces, los “mínimos” de cada tipo no están relacionados de ninguna forma, incluso, en el caso de los registros, ese mínimo nisiquiera existe.

3) Por S-Arrow, tenemos que $S_1 \to S_2 <: T_1 \to T_2$ si $T_1 <: S_1$ y $T_2 <: S_2$.

El primer caso es el punto **1)**, el segundo es el punto **2)**.

4) Es similar al anterior pero con los casos invertidos.

4.4. Ejercicio 4

1) $T <: S \underset{\text{S-Trans}}{\iff} T <: T \ \wedge\ T <: S \underset{\text{S-Arrow}}{\iff} S \to T <: T \to T$

2) Si $S = Bool$ y $T = Top$, entonces $\{x : Bool, y : Top\}$ tiene 26 supertipos y el tipo $Bool \to Top$ solo tiene como supertipo a Top, porque $Bool$ no tiene subtipos y Top no tiene supertipos.

3) Si $S = Top$ y $T = Top$, entonces $\{x : Top, y : Top\}$ tiene como supertipos a $\{x : Top\}$, $\{y : Top\}$, $\{\}$ y a Top y el tipo $Top \to Top$ tiene infinitos por el ejercicio 2.

4.5. Ejercicio 5

subtipos de Bool: Bool -¿finitos subtipos de Nat: Bool Nat -¿finitos subtipos de a-¿b: supertipos de axsubtipos de b, con a y b en nat,bool,funciones

Subtipado en el contexto de tipado

4.6. Ejercicio 6

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \mapsto \lambda y : Nat.succ(y) : Nat \to Nat}\,(1) \qquad \dfrac{x : Bool \in \Gamma}{\Gamma \mapsto x : Bool}\,\text{T-Var} \qquad \dfrac{}{Bool <: Nat}\,\text{S-BoolNat}}{\Gamma = \{x : Bool\} \mapsto (\lambda y : Nat.succ(y))\ x : Nat}}{\{\} \mapsto \lambda x : Bool.(\lambda y : Nat.succ(y))\ x : Bool \to Nat}\,\text{T-Abs}$$

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{y : Nat \in \{x : Bool, y : Nat\}}{\{x : Bool, y : Nat\} \mapsto y : Nat}\,\text{T-Var}}{\{x : Bool, y : Nat\} \mapsto succ(y) : Nat}\,\text{T-Succ}}{\{x : Bool\} \mapsto \lambda y : Nat.succ(y) : Nat \to Nat}\,\text{T-Abs}$$

b)

$$\dfrac{\text{Demo a)} \qquad \text{Demo b)}}{\{\} \mapsto (\lambda r : \{l_1 : Bool,\ l_2 : Float\}.\text{if } r.l_1 \text{ then } r.l_2 \text{ else } 5,5)\ \{l_1 = \texttt{true},\ l_2 = -8,\ l_3 = 9,0\} : Float}\,\text{T-App}$$

Demo a):

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \mapsto 5,5 : Float \qquad \dfrac{r.l2 : Float \in \Gamma}{\Gamma \mapsto r.l2 : Float}\,\text{T-Var} \qquad \dfrac{r.l1 : Bool \in \Gamma}{\Gamma \mapsto r.l1 : Bool}\,\text{T-Var}}{\Gamma = r : \{l1 : Bool, l2 : Float\} \mapsto if\ r.l1\ then\ r.l2\ else\ 5,5 : Float}\,\text{T-If}}{\{\} \mapsto \lambda r : \{l1 : Bool, l2 : Float\}.if\ r.l1\ then\ r.l2\ else\ 5,5 : \{l1 : Bool, l2 : Float\} \to Float}\,\text{T-Abs}$$

Demo b):

$$\dfrac{\dfrac{}{\{l1: Bool, l2: Int, l3: Float\} <: \{l1: Bool, l2: Float\}}\text{S-RCDWidth} \qquad \dfrac{\{\} \mapsto 9,0: Float: \qquad \{\} \mapsto -8: Int: \qquad \{\} \mapsto True: Bool:}{\{\} \mapsto \{l1: True, l2: -8, l3: 9,0\}: \{l1: Bool, l2: Int, l3: Float\}}\text{T-RCD}}{\{l1: True, l2: -8, l3: 9,0\}: \{l1: Bool, l2: Int, l3: Float\}}\text{T-Subs}$$

4.7. Ejercicio 7

Inserte su explicacion formal aquí :)

Por lo tanto, el término xx no es tipable en el cálculo λ clásico.

$$\dfrac{\dfrac{x : \sigma \to \tau \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \sigma \to \tau} \qquad \dfrac{x : \theta \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \theta} \qquad \theta <: \sigma}{\Gamma \mapsto x\ x : \tau}\ \text{T-App}$$

Si $\theta = \sigma \to \tau$ y $\sigma = Top$ entonces vale $\theta <: Top$, es decir, $Top \to \tau <: Top$.

4.8. Ejercicio 8

a)

$$\dfrac{U <: V \qquad S <: T}{T \to V <: S \to U}\ \text{S-Arrow'}$$

Sea $M = (\lambda x : Int.\text{if } x > 2 \text{ then } 2,5 \text{ else } 0,3 : Int- > Bool$, por la regla S-Arrow', podríamos tipar el término: M true, ya que podríamos ingresarle a M un elemento de un subtipo de Int. Pero esto no tenrdía sentido, ya que no se podría evaluar: true¿2.

Demostración:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \triangleright 0,3 : Float \qquad \Gamma \triangleright 2,5 : Float \qquad \Gamma \triangleright x > 2 : Bool}{\Gamma = \{x : Int\} \triangleright if\ (x > 2)\ then\ 2,5\ else\ 0,3 : Float}\ \text{T-if}}{\{\} \triangleright \lambda x : Int.\text{if } x > 2 \text{ then } 2,5 \text{ else } 0,3 : Int \to Float}\ \text{T-abs} \qquad \dfrac{\{\} \triangleright True : Bool \qquad Bool <: Int}{\{\} \triangleright True : Int}\ \text{T-Subs}}{\{\} \triangleright (\lambda x : Int.\text{if } x > 2 \text{ then } 2,5 \text{ else } 0,3\ True : Float}\ \text{T-app}$$

b)

$$\dfrac{U <: V \qquad S <: T}{S \to U <: T \to V}\ \text{S-Arrow''}$$

4.9. Ejercicio 9

4.10. Ejercicio 10

4.11. Ejercicio 11

4.12. Ejercicio 12

4.13. Ejercicio 13

4.14. Ejercicio 14