# PLP - Práctica 4: Subtipado

Zamboni, Gianfranco

2 de marzo de 2018

## Reglas de subtipado

### 4.1. Ejercicio 1

**1)**

$$\frac{\{y\} \subseteq \{x, y, z\} \qquad y : Nat = y : Nat}{\{x : Nat,\ y : Nat,\ z : Nat\} <: \{y : Nat\}} \text{ S-Rcd}$$

Esta demostración no es única porque existe la regla $S{-}Trans$ que nos permite probar la transitividad de los tipos, si hubiesemos decidido usarla para primero conseguir un supertipo $\{x : Nat, y : Nat\}$ del primer término y luego probar que ese supertipo es subtipo de $\{y : Nat\}$ entonces también hubiese sido una demostración válida.

**2)**

$$\frac{\emptyset \subseteq \{x, y, z\}}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{\}} \text{ S-Rcd}$$

$$\frac{\dfrac{\{x\} \subseteq \{x, y\} \qquad x : Nat = x : Nat}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{x : Nat\}} \text{ S-Rcd} \qquad \dfrac{\emptyset \subseteq \{x, y, z\}}{\{x : Nat\} <: \{\}} \text{ S-Rcd}}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{\}} \text{ S-Trans}$$

### 4.2. Ejercicio 2

**1)** Los registros tienen subtipos infinitos porque dado el tipo de un registro $\omega = \{l_i : \sigma_i\}_{i \in 1..n}$, entonces cualquier tipo de la forma $\omega' = \{l_i : \tau_i\}_{i \in 1..k}$ con $k \geq n$ tal que $\tau_i <: \sigma_i^{i \in 1..n}$ es subtipo del tipo de $\omega$.

$Top$ tiene como subtipo a los registros y los registros tienen infinitos subtipos, entonces $Top$ tiene infinitos subtipos.

Por S-Arrow, los subtipos de una función $\sigma \to \tau$ son los tipos de la forma $\sigma' \to \tau'$ tal que $\sigma <: \sigma'$ y $\tau' <: \tau$. En particular si $\tau$ es de tipo registro, entonces $\tau$ tiene infinitos subtipos, por lo que $\sigma \to \tau$ tambien los tiene (son las funciones que devuelven registros).

**2)** $Top$ no tiene supertipos.

Los registros tiene una cantidad finita de supertipos, siendo el máximo registro $\{\} <: Top$

Otra vez, hay casos en que las funciones tienen infinitos supertipos y es cuando toman como parámetro a un registro. Esto es porque la regla S-Arrow es contravariante respecto del tipo del párametro de la función, es decir, para que un tipo $\sigma \to \tau$ sea supertipo de $\sigma' \to \tau$ tiene que valer que $\sigma <: \sigma'$. Y si $sigma'$ es un registro, entonces tiene infinitos subtipos.

### 4.3. Ejercicio 3

**1)** $S = Top$

**2)** Si solo consideramos los tipos básicos $Bool$, $Nat$, $Int$, $Float$, entonces $S = Bool$, pero cuando empezamos a considerar registros o listas u otros tipos, entonces, los "mínimos" de cada tipo no están relacionados de ninguna forma, incluso, en el caso de los registros, ese mínimo nisiquiera existe.

**3)** Por S-Arrow, tenemos que $S_1 \to S_2 <: T_1 \to T_2$ si $T_1 <: S_1$ y $T_2 <: S_2$.
El primer caso es el punto **1)**, el segundo es el punto **2)**.

**4)** Es similar al anterior pero con los casos invertidos.

## 4.4. Ejercicio 4

**1)** $T <: S \underset{\text{S-Trans}}{\iff} T <: T \ \wedge\ T <: S \underset{\text{S-Arrow}}{\iff} S \to T <: T \to T$

**2)** Si $S = Bool$ y $T = Top$, entonces $\{x : Bool, y : Top\}$ tiene 26 supertipos y el tipo $Bool \to Top$ solo tiene como supertipo a $Top$, porque $Bool$ no tiene subtipos y $Top$ no tiene supertipos.

**3)** Si $S = Top$ y $T = Top$, entonces $\{x : Top, y : Top\}$ tiene como supertipos a $\{x : Top\}$, $\{y : Top\}$, $\{\}$ y a $Top$ y el tipo $Top \to Top$ tiene infinitos por el ejercicio 2.

## 4.5. Ejercicio 5

# Subtipado en el contexto de tipado