

Apuntes Paradigmas de Lenguajes de Programación

Gianfranco Zamboni

23 de diciembre de 2019

Índice

1. Introducción	1
1.1. Aspectos del lenguaje	1
1.2. Paradigmas	2
 I Paradigma Funcional	 4
2. Programación Funcional	4
2.1. Tipos	4
2.2. Tipo Función	5
2.3. Inducción/Recursion	7
2.4. Parametrización	7
2.5. Tipos algebraicos	8
2.6. Tipos algebraicos recursivos	10
2.7. Esquemas de recursión	10
 3. Cálculo Lambda Tipado	 15
3.1. Expresiones de Tipos de λ^b	15
3.2. Sistema de tipado	17
3.3. Semántica operacional	19
3.4. Semántica operacional de λ^b	20
3.5. Extensión Naturales (λ^{bn})	22
3.6. Simulación de lenguajes imperativos	23
3.7. Extensión con recursión	26
 4. Inferencia de tipos	 28
4.1. Sustitución de tipos	29
4.2. Función de inferencia \mathbb{W}	31
 5. Subtipado	 35
5.1. Reglas de subtipado	35
5.2. Subtipado de referencias	37

II	Paradigma orientado a objetos	39
6.	Objetos y el modelo de cómputo	39
6.1.	Objetos	39
7.	Clasificación	40
7.1.	Self/This	40
7.2.	Jerarquía de clases	40
7.3.	Tipos de herencia	41
8.	Prototipado	42
8.1.	Cálculo de objetos no tipado (ζ cálculo)	42
III	Paradigma Lógico	47
9.	Lógica Proposicional	47
9.1.	Semántica	47
9.2.	Validez por refutación	49
10.	Lógica de primer orden	51
10.1.	Repaso	51
10.2.	El método de resolución	53
11.	Resolución SLD	57
11.1.	Resolución lineal	57
11.2.	Cláusulas de Horn	57
11.3.	Resolución SLD en Prolog	59
IV	Apéndices	61
A.	Programación funcional en Haskell	61
A.1.	Otros tipos útiles	62
B.	Extensiones del lenguaje λ^b	64
B.1.	Registros $\lambda^{\dots r}$	64
B.2.	Declaraciones Locales ($\lambda^{\dots let}$)	65
B.3.	Tuplas	65
B.4.	Listas	66
B.5.	Árboles binarios	67
C.	Javascript	69

Estos son los apuntes de la clases de PLP que se dio en Verano 2018. Prácticamente es una combinación de las diapositivas con lo que anoté de la teórica y las prácticas pero puede tener errores. En caso de ser así estaría bueno que me avisen así los corrijo.

El tema de objetos en esta cursada se dió distinto a como se venía dando en cursadas anteriores. Vimos prototipado en vez de clasificación y además definimos el cálculo ζ análogo al cálculo λ en funcional. Los profesores no estaban seguros si estas modificaciones se iban a mantener o no durante las próximas cursadas.

1. Introducción

Paradigma Marco filosófico y teórico de una escuela científica o disciplina en la que se formulan teorías, leyes y generalizaciones y se llevan a cabo experimentos que les dan sustento.

Lenguaje de programación Es un lenguaje usado para comunicar instrucciones a una computadora. Éstas describen los cómputos que debe llevar a cabo.

Un lenguaje de programación es computacionalmente completo si puede expresar todas las funciones computables.

Paradigma de lenguaje de programación Marco filosófico y teórico en el que se formulan soluciones a problemas de naturaleza algorítmica. Lo entendemos como un estilo de programación en el que se escriben soluciones a problemas en términos de algoritmos.

Su ingrediente básico es el modelo de cómputo, que es la visión que tiene el usuario de cómo se ejecutan sus programas.

1.1. Aspectos del lenguaje

Sintaxis Descripción del conjunto de secuencias de símbolos considerados como programas válidos. Nos indica cuales son los símbolos del lenguaje y como combinarlos para que se les pueda dar una semántica.

1.1.1. Semántica

Descripción del significado de instrucciones y expresiones. Permite asignarle un significado a aquellas expresiones que formen parte de algún lenguaje, sea informal (e.g. Castellano) o formal (basado en técnicas matemáticas).

Dependiendo el tipo de semántica que se esté utilizando, podremos interpretar un programa de distintas maneras: Si A es el dominio del problema y B el conjunto de posibles resultados, entonces:

Semántica operacional Se ve a un programa como un mecanismo que, dado un elemento $a \in A$, sigue una sucesión de pasos para calcular el elemento $b \in B$ que le corresponde a a .

Semántica axiomática Interpreta a un programa como un conjunto de propiedades verdaderas que indican los estados que puede llegar a tomar ciertos valores.

Semántica denotacional Un programa es un valor matemático (función) que relaciona cada elemento de A (expresiones que lo componen) con un único elemento de B (significado de las expresiones).

1.1.2. Sistema de tipo

Es una herramienta que nos permite analizar código para prevenir errores comunes en tiempo de ejecución (e.g. evitar sumar booleanos, usar funciones con un número incorrecto de argumentos, etc). En general, requiere anotaciones de tipo en el código fuente.

Además sirve para que la especificación de un programa sea más clara.

Hay dos clases de análisis de tipos:

- **Estático:** En tiempo de compilación.
- **Dinámico:** En tiempo de ejecución.

1.2. Paradigmas

1.2.1. Paradigma Imperativo

Estado global Se usan variables que representan celdas de memoria en distintos momentos del tiempo. Se usan para ir almacenando resultados intermedios del problema.

Asignación Es la acción que modifica las variables.

Control de flujo Es la forma que tenemos de controlar el orden y la cantidad de veces que se repite un cómputo dentro del programa. En este paradigma, la repetición de cálculos se basa en la iteración.

Por lo general, los lenguajes de este paradigma son eficientes ya que el modelo de ejecución usado y la arquitectura de las computadoras (a nivel procesador) son parecidos. Sin embargo, el bajo nivel de abstracción que nos proveen hacen que la implementación de un problema sea difícil de entender.

1.2.2. Paradigma Funcional

No tiene un estado global. Un cómputo se expresa a través de la aplicación y composición de funciones y los resultados intermedios (salida de las funciones) son pasados directamente a otras funciones como argumentos. Todas las expresiones de este paradigma son tipadas y usa la recursión para repetir cálculos.

Ofrece un alto nivel de abstracción, es declarativo, usa una matemática elegante y se puede usar razonamiento algebraico para demostrar correctitud de programas.

1.2.3. Paradigma Lógico

Los programas son predicados de la lógica proposicional y la computación esta expresada a través de proof search (probar que el predicado expresado es verdadero bajo ciertos axiomas). No existe un estado global y los resultados intermedios son pasados por unificación. La repetición se basa en la recursión.

Ofrece un alto nivel de abstracción, es muy declarativo y, al ser predicados, tiene fundamentos lógicos robustos pero su ejecución es muy lenta.

1.2.4. Paradigma Orientado a Objetos

La computación se realiza a través del intercambio de mensajes entre objetos. Tiene dos enfoques: basados en clases o basados en prototipos.

Ofrece alto nivel de abstracción y arquitecturas extensibles pero usa una matemática de programas compleja.

Parte I

Paradigma Funcional

2. Programación Funcional

Valor Entidad matemática abstracta con ciertas propiedades.

Expresión Secuencia de símbolos utilizada para denotar un valor. Hay dos tipos de expresiones:

- **Atómicas ó formas formales:** Son expresiones que representan a un valor. Por ejemplo: 2, *false*, (3, *True*).
- **Compuestas:** Se construyen combinando otras expresiones. Los valores que denotan estas expresiones pueden ser inferidos a partir de esta combinación.

Hay expresiones a las que, a pesar de contener símbolos válidos, no se les puede dar un significado debido a errores sintácticos (mal escritas) o a errores de tipo (que denotan operaciones sobre tipos incorrectos). A éstas las llamamos **expresiones mal formadas**.

La programación funcional, se basa en la transformación de la información. Es decir, dada una expresión bien formada, se la va transformando (**reduciendo**) de manera iterativa por expresiones equivalentes más simples hasta obtener una que denote un valor.

Transparencia referencial Así se llama a la propiedad que nos permite reemplazar una expresión de un programa por otra con igual valor, sin modificar el comportamiento del mismo.

Ésta solo se puede asegurar en ambientes en los que una función siempre da el mismo valor sin importar el contexto en la que es usada (ejemplo son las funciones de haskell, siempre dan el mismo resultado para las mismas entradas).

En otros paradigmas, como imperativo, en donde los programas tienen efectos colaterales (se crea, modifican y destruyen variables constantemente) esto no es cierto. Por ejemplo, en el siguiente programa:

```
int x = 5;

int suma(int y) {
    x++;
    return x + y;
}
```

Si llamamos dos veces a la función suma de la siguiente manera: `suma(1)`, la primera vez, el resultado será siete, la segunda vez será ocho. El resultado cambia porque depende del valor de *x* que es modificado por la función cada vez que es llamada.

2.1. Tipos

Son una forma de particionar el universo de valores de acuerdo a ciertas propiedades. Se clasifican en dos categorías:

- **Básicos** ó primitivos: Son los tipos que ya vienen definidos en el lenguaje por literales y representan valores. Ej: Int, Bool, Float, etc.
- **Tipos compuestos** (pares, listas, etc.) Son aquellos que se definen a partir de otros tipos.

Cada tipo de dato tiene asociado distintas operaciones que nos permiten manipularlos. Las expresiones bien formadas o son valores de algún tipo, o son una composición de estas operaciones aplicadas a un valor del tipo adecuado (no todos los tipos soportan las mismas operaciones). Entonces, a toda expresión bien formada se le puede asignar un tipo que sólo depende de los componentes de la expresión (strong-typing) y además puede ser inferido a partir de su constitución.

Notación: En haskell $e :: A$ se lee “la expresión e tiene tipo A ” y significa que el valor e pertenece al conjunto de valores denotado por A .

2.1.1. Propiedades deseables de un lenguaje funcional

Se busca que un lenguaje le asigne un tipo de manera automática al mayor número posible de expresiones “con sentido” y que no le asigne ningún tipo al mayor número posible de expresiones mal formadas. Además, se busca que el tipo de la expresión se mantenga si es reducida.

Otra cosa a tener en cuenta es que los tipos ofrecidos por el lenguaje deben ser descriptivos y razonablemente sencillos de leer.

Inferencia de tipos Dada una expresión e determinar si tiene tipo o no y, si lo tiene, cuál es.

Chequeo de tipos Dada una expresión tipable e y un tipo A , determinar si $e :: A$ o no.

2.2. Tipo Función

Un programa, en el paradigma funcional, es una función descrita por un conjunto de ecuaciones (expresiones) que definen uno o más valores. Estas ecuaciones son evaluadas (reducidas) hasta llegar a una expresión atómica que nos indique el valor de las mismas.

Funciones Son valores especiales que representan transformación de datos. Se aplican a elementos de un conjunto definido por el tipo de entrada y devuelve un elemento del tipo de salida. En haskell, este tipo se escribe: $A \rightarrow B$.

Al ser valores, las funciones pueden ser pasadas como argumentos o ser resultado de otras.

Funciones de alto orden Son funciones que manipulan otras funciones. Es decir, no se limitan a funciones que tomen como parámetro a otras, sino que también incluye aquellas funciones que generan nuevas funciones.

Lenguaje Funcional Puro Lenguaje de expresiones con transparencia referencial y funciones como valores. Su modelo de cómputo es la reducción realizada mediante el reemplazo de iguales por iguales.

Polimorfismo paramétrico Se da cuando una función tiene un parámetro que puede ser instanciado de diferentes maneras. Es decir, cuando uno de sus parámetros puede ser de cualquier tipo. En este caso, el sistema puede asignarle un tipo que sea más general que todos los tipos que toma de tal manera que cada vez que la función sea llamada se la transforma para ese uso particular. Por ejemplo, una función que imprima un objeto en pantalla podría funcionar con cualquier tipo de dato.

Hay funciones que, a pesar de poseer polimorfismo paramétrico, no aceptan cualquier clase de tipo. Sino que requieren que los tipos con las que son llamadas tengan ciertas propiedades. Por ejemplo, que posean relaciones de igualdad ([Eq](#)) o relación de orden ([Ord](#)).

```
esMenor :: (Ord a) => a -> a -> Bool
esMenor x y = x < y
```

La función es menor toma cualquier tipo a que tenga definido una relación de orden.

2.2.1. Evaluación

Cuando se computa el valor de una expresión, decimos que la estamos *evaluando*. Dependiendo del orden en el que el lenguaje lo haga, el tipo de evaluación se clasifica en:

Evaluación Estricta Si una parte de una expresión se indefine, entonces la expresión se indefine. La evaluación eager, en la que un lenguaje computa una expresión apenas es definida, es de este tipo.

Evaluación no Estricta Puede pasar que una expresión esté definida a pesar de que alguna de sus partes se haya indefinido. La evaluación lazy, en la que un lenguaje solo computa una expresión cuando es necesaria para saber el valor de otra, es de este tipo.

Haskell usa evaluación lazy de izquierda a derecha: Resuelve primero las partes más externas de la expresión y luego, si es necesario, sus partes.

Currificación Hay una correspondencia entre cada función de múltiples parámetros y una de alto orden que retorna una función intermedia que completa el trabajo. En otras palabras, por cada función f definida como:

```
f :: (a,b) -> c
f (x,y) = e
```

existe un función f' tal que:

```
f' :: a -> b -> c
f' x y = e
```

La currificación nos da la posibilidad de realizar funciones parciales y nos permite tratar el código de manera más modular al momento de inferir tipos y transformar programas.

Evaluación parcial En haskell, una expresión no es evaluada completamente salvo que sea necesario.

Este tipo de evaluación, junto con la currificación, nos permiten llamar a las funciones con un subconjunto de sus parámetros de entrada para generar nuevas funciones que tomen solo los parámetros que no fueron especificados en esa llamada.

Un **ejemplo**: Supongamos que tenemos la función `suma`:


```
suma :: Int -> Int -> Int
suma x y = x + y
```

Podemos usarla para crear una función `sumarUno :: Int -> Int` instanciando su primer parámetro en uno:

```
sumarUno :: Int -> Int
sumarUno y = suma 1 y
```

2.3. Inducción/Recursion

La inducción es un mecanismo que nos permite definir conjuntos infinitos, probar propiedades sobre sus elementos y definir funciones recursivas sobre ellos con garantía de terminación.

Principio de extensionalidad: Dadas dos expresiones A y B , si ambas denotan el mismo valor entonces A puede ser remplazada por B y B por A sin que esto afecte al resultado de una ecuación.

2.3.1. Inducción estructural

Una definición inductiva de un conjunto \mathcal{R} consiste en dar condiciones de dos tipos:

- reglas base ($z \in \mathcal{R}$) que afirman que algún elemento simple x pertenece a \mathcal{R}
- reglas inductivas ($x_1 \in \mathcal{R}, \dots, x_n \in \mathcal{R} \Rightarrow x \in \mathcal{R}$) que afirman que un elemento compuesto x pertenece a \mathcal{R} siempre que sus partes x_1, \dots, x_n pertenezcan a \mathcal{R} (y x no satisface ninguna de las otras regla dadas)

\mathcal{R} debe ser el menor conjunto que satisfaga todas las reglas dadas.

2.3.2. Funciones recursivas

Sea S un conjunto inductivo, y T uno cualquiera. Una definición recursiva estructural de una función $f :: S \rightarrow T$ es una definición de la siguiente forma:

- Por cada elemento base z , el valor de $(f\ z)$ se da directamente usando valores previamente definidos
- Por cada elemento inductivo y con partes inductivas y_1, \dots, y_n , el valor de $(f\ y)$ se da usando valores previamente definidos y los valores $(f\ y_1), \dots, (f\ y_n)$.

2.3.3. Principio de inducción

Sea S un conjunto inductivo, y sea P una propiedad sobre los elementos de S . Si se cumple que:

- para cada elemento $z \in S$ tal que z cumple con una regla base, $P(z)$ es verdadero, y
- para cada elemento $y \in S$ construido en una regla inductiva utilizando los elementos y_1, \dots, y_n , si $P(y_1), \dots, P(y_n)$ son verdaderos entonces $P(y)$ lo es

entonces $P(x)$ se cumple para todo $x \in S$.

2.4. Parametrización

Dado un conjunto de funciones que se comportan de la misma manera buscamos encontrar alguna forma de crear una función que las genere automáticamente.

Esquema de funciones Dado un conjunto de funciones “parecidas”, el esquema de estas funciones son los que no permiten parametrizar correctamente alguno de los parámetros.

La parametrización nos permitirá crear definiciones más concisas y modulares, reutilizar código y demostrar propiedades generales de manera más fácil. Un ejemplo de esto son los esquemas recursivos (Sección 2.7) que generalizan las funciones que hacen recursión sobre un tipo de datos.

2.5. Tipos algebraicos

2.5.1. Definición de tipos

Hay dos formas de definir un tipo de dato:

- **De manera algebraica:** Establecemos qué *forma* tendrá cada *elemento* y damos un mecanismo único para inspeccionar cada uno de ellos.
- **De manera abstracta:** Determinamos cuales serán las *operaciones* que manipularán los elementos, **SIN** decir cuál será la forma exacta del tipo ni de las operaciones que definimos.

2.5.2. Tipos algebraicos en Haskell

Los definimos mediante **constantes** llamadas *constructores* cuyos nombres comienzan con mayúscula. Éstas no tienen asociada una regla de reducción y pueden tener argumentos.

Para implementar un tipo algebraico nuevo en Haskell, usamos la clausula `data` que introduce su nombre, los nombres de su constructores y sus argumentos.

Ejemplos:

```
data Sensacion = Frio | Calor
```

El tipo `Sensacion` tiene como constructores a las constantes `Frio` y `Caliente`

```
data Shape = Circle Float | Rect Float Float
```

Los constructores del tipo `Forma` toman como parámetros elementos de tipo `Float`.

```
data Maybe = Nothing | Just a
```

`Maybe` tiene todos los elementos del tipo `a` con `Just` y la constante `Nothing`. En este caso `a` es un tipo genérico, es decir, puede ser cualquier tipo.

Son considerados tipos algebraicos porque:

- toda combinación válida de constructores y valores es elemento del tipo algebraico (y solo ellas lo son)
- y porque dos elementos de un tipo algebraico son iguales si y solo si están contruidos utilizando los mismos constructores aplicados a los mismos valores.

Al principio de esta sección, dijimos que además de establecer la forma que tiene el tipo, debemos dar un mecanismo único de inspección. En Haskell, se usa **Pattern Matching** para esto.

2.5.3. Pattern Matching

El pattern matching es la búsqueda de patrones especiales (en nuestro caso, los constructores del tipo) dentro de una expresión. Cuando la búsqueda tiene éxito, nos permita inspeccionar el valor de la expresión analizada.

Por ejemplo:

```
value :: Maybe -> Int
value Nothing = 0
value (Just a) = 1
```

En esta función, la expresión `value (Just 2)` tiene valor 1. Haskell, analiza las reglas de pattern matching provistas una a una y cuando encuentra que la expresión coincide con la segunda, evalúa al valor indicado.

2.5.4. Tipos especiales

Tupla Este es un tipo algebraico con sintaxis especial. Una tupla es una estructura que posee varios elementos de distintos tipos. Por ejemplo: `(Float, Int)` es una tupla cuyo primer elemento es un `Float` y su segundo elemento es un `Int`.

Maybe El tipo `Maybe`, definido en el último ejemplo, nos permite expresar la posibilidad de que el resultado sea erróneo sin necesidad de usar casos especiales. De esta forma, logramos evitar el uso de \perp (indefinido) hasta que el programador lo decida lo que permite controlar errores.

Either El tipo `Either` representa la unión disjunta de dos conjuntos (los elementos de uno se identifican con `Left` y los del otro con `Right`). Sirve para mantener el tipado fuerte y poder devolver elementos de distintos tipos o para representar el origen de un valor.

```
data Either = Left a | Right b
```

2.5.5. Expresividad

Los tipos algebraicos no pueden representar cualquier cosa. Los números racionales son pares de enteros (numerador, denominador) cuya igualdad puede no depender de los valores con los que fueron contruidos o incluso pueden llegar a no ser validos. Esto es así porque no todo par de enteros es un número racional, por ejemplo el (1,0).

Además recordemos que la igualdad de dos elementos de un tipo algebraico solo se da si estos fueron contruidos exactamente de la misma forma. Si seguimos con el ejemplo de los racionales, sabemos que hay valores iguales con distinto numerador y denominador como el (4,2) y el (2,1).

2.5.6. Clases de tipos algebraicos

Enumerativos Solo constructores sin argumentos.

Productos Un único constructor con varios argumentos.

Sumas Varios constructores con argumentos.

Recursivos Utilizan el tipo definido como argumento.

2.6. Tipos algebraicos recursivos

Un tipo algebraico recursivo tiene al menos uno de los constructores con el tipo que se define como argumento y es la concreción, en Haskell, de un conjunto definido inductivamente.

Cada constructor define un caso de una definición inductiva de un conjunto. Si tiene al tipo definido como argumento, entonces es un caso inductivo, sino es un caso base.

El pattern matching proporciona una forma de analizar estos casos y de acceder a los elementos inductivos que forman a un elemento dado. Por esta razón, se pueden definir funciones recursivas.

A estos tipos, les damos un significado a través de funciones definidas recursivamente. Éstas manipulan simbólicamente al tipo. Sin embargo, estas manipulaciones, por si solas no tienen un significado sino que se lo dan las propiedades que dichas manipulaciones deben cumplir.

Naturales Notación unaria para expresar tipos naturales.

```
data N = Z | S N
```

En este caso, `Z` y `S N` son el cero y el sucesor de un numero. (Notar que ese significado, es el que le damos nosotros y el que vamos a utilizar cuando escribamos funciones que nos permitan operar sobre este tipo. Para el lenguaje son solamente valores que pueden ser transformados por las funciones que nosotros definamos pero no tienen una semántica definida).

Listas Definición equivalente a las listas de Haskell

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
```

Árboles Un árbol es un tipo algebraico tal que al menos un elemento compuesto tiene dos componentes inductivas.

```
data Arbol a = Hoja a | Nodo a (Arbol a) (Arbol a)
```

2.7. Esquemas de recursión

Cuando tenemos un conjunto de funciones que manipulan ciertas estructuras de manera similar, podemos abstraer este comportamiento en funciones de alto orden que nos facilitarán su escritura.

A continuación, veremos unos ejemplos de esquemas sobre listas:

2.7.1. Map

Aplica una función a cada elemento de una lista:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map _ [] = []
map f (x:xs) = (f x) : (map f xs)
```

Ejemplo:

```
doble x = x + x
dobleL = map doble
```

`dobleL` calcula el doble de cada elemento de una lista.

2.7.2. Filter

Dada una lista l y un predicado p , selecciona todos los elementos de l que cumplen p .

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter _ [] = []
filter p (x:xs) | (p x)      = x : (filter p xs)
                  | otherwise = filter p xs
```

Ejemplo

```
masQueCero = filter (>0)
```

`masQueCero` se queda con todos los elementos mayores de una lista

2.7.3. Fold

fold expresa el patrón de recursión estructural sobre listas como función de alto orden. Es decir, realiza recursión sobre una lista.

Dada una lista l y una función f que denota un valor que depende de todos los elementos de la lista l y un valor inicial z , aplica y combina las soluciones parciales obtenidas por f de manera “iterativa”. Hay dos tipos de fold: **foldr** (acumula desde la derecha) y **foldl** (acumula desde la izquierda).

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr _ z [] = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
foldl f z [] = z
foldl f z (x : xs) = foldl f (f z x) xs
```

Ejemplos

```
sumatoria :: [Int] -> Int
sumatoria = foldr (\x rec -> x + rec) 0
```

Para la sumatoria, la primer función que pasamos como parámetro toma el primer elemento de la lista y lo suma al resultado de la recursión. 0 es el valor de la sumatoria cuando la lista pasada como parámetro es la lista vacía.

Map y Filter pueden ser implementados usando recursión estructural:

```
map f = foldr (\x rec -> (f x): rec) []
filter p = foldr (\x rec -> if (p x) then x:rec else rec) []
```

2.7.4. Recursión primitiva

Recordemos de Logica y Computabilidad: una función h es recursiva primitiva si h es de la forma:

$$h(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$h(x_1, \dots, x_n, t + 1) = g(h(x_1, \dots, x_n, t), x_1, \dots, x_n, t)$$

Es decir, el caso recursivo de h no solo depende de la descomposición de sus parámetros, sino que también depende de ellos.

En Haskell, podemos definir una función que dada una lista l , un caso base z y un caso recursivo primitivo f , aplique la definición de z y f a la lista:

```
recr :: b -> (a -> [a] -> b -> b) -> [a] -> b
recr z _ [] = z
recr z f (x:xs) = f x xs (recr z f xs)
```

Como ejemplo, escribimos la función `insertar` de una lista con recursión primitiva:

```
-- Insert ordenado con pattern matching
insert :: a -> [a] -> [a]
insert x [] = [x]
insert x (y:ys) = if x < y then (x:y:ys) else (y:insert x ys)

-- Insert ordenado con recursión primitiva
insert x = recr [x] (\y ys rec -> if x < y then (x:y:ys) else (y:rec))
```

2.7.5. Divide & Conquer

La técnica de Divide & Conquer consiste en dividir un problema en problemas más fáciles de resolver y, luego, combinando los resultados parciales, obtener un resultado general. En este caso, `DivideConquer` es un tipo de función, osea que define una familia de funciones que toman como parámetro 4 funciones y un elemento de tipo a y devuelve un valor de tipo b :

```
type DivideConquer a b = (a -> Bool) -> (a -> b) -> (a -> [a])
                        -> ([b] -> b) -> a -> b
```

Las funciones que toma como parámetro son:

- `esTrivial :: a -> Bool` que devuelve verdadero si elemento de tipo a es el caso base del problema.
- `resolver :: a -> b` que resuelve el problema cuando el elemento de tipo a es el caso trivial
- `repartir :: a -> [a]` que divide al elemento de tipo a en la cantidad de subproblemas necesarios para resolver el problema.
- `combinar :: [b] -> b` que resuelve todos los subproblemas obtenidos por `repartir` y combina sus soluciones para obtener el resultado final.

Ejemplo

Vamos a definir el Divide & Conquer para listas:

```

divideConquerListas :: DivideConquer [a] b
-- Esto significa que DivideConquerLista es de tipo
-- ([a] -> Bool) -> ([a] -> b) -> ([a] -> [[a]]) -> ([b] -> b)
-- -> [a] -> b

divideConquerListas esTrivial resolver repartir combinar l =
  if (esTrivial l) then resolver l
  else combinar (map dc (repartir l))
  where dc = divideConquerListas esTrivial resolver repartir combinar

```

Supongamos que queremos ordenar listas usando mergesort, un algoritmo que usa esta técnica, entonces una posible implementación sería:

```

mergesort :: Ord a => [a] -> [a]
mergesort = divideConquerListas ((<=1).length)
              id
              partirALaMitad
              (\[xs,ys] -> merge xs ys)

-- id es la función identidad de haskell

partirALaMitad :: [a] -> [[a]]
partirALaMitad xs = [ take i xs, drop i xs ]
  where i = (div (length xs) 2)

merge :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
merge = foldr
  (\y rec -> (filter (<= y) rec) ++ [y] ++ (filter (>y) rec))

```

2.7.6. La función fold y como definirla

Todo tipo algebraico tiene asociado un patrón de inducción estructural. En particular, dado un tipo algebraico recursivo `T` podemos definir la función `foldrT :: * -> a` (donde `*` son los parámetros de la función) que representa a dicha inducción. A continuación damos algunas propiedades que debe cumplir `fold` para asegurarnos que la definimos correctamente:

- Por cada constructor base de `T` debe tomar un parámetro de tipo `a` que será el elemento devuelto por la función si cae en alguno de dichos casos.
- Por cada constructor recursivo debe tomar una función que tome como parámetros a cada elemento del constructor que no sea del tipo `T` y un parámetro de tipo `a` por cada elemento del tipo `T` del constructor. Esta función devuelve un elemento del tipo `a` y es la que resolverá recursivamente el caso planteado usando la segunda clase de parámetros.
- Por último, si la función está bien implementada, si remplazamos cada parámetro por el constructor correspondiente entonces la función resultante debería ser la función identidad del tipo `T`.

Al momento de definir `fold` ayuda mucho plantear el esquema de recursión del tipo. A continuación un ejemplo:

Ejemplo Queremos definir el fold sobre el tipo `Arbol`.

```
data Arbol a = Hoja a | Nodo a (Arbol a) (Arbol a)

-- Primero debemos definir el tipo de fold. Sabemos que es una función que va
-- ↪ de algo a algún tipo b.

foldrArbol :: * -> b

-- ¿Que es *? Los casos bases serán cuando el arbol sea de la forma Hoja x,
-- ↪ con x :: a entonces necesitaremos una función que devuelva un valor de
-- ↪ tipo b a partir del valor x.

foldrArbol :: * -> (a -> b) -> b

-- Ahora, debemos pensar el caso inductivo. El único constructor recursivo
-- ↪ que tenemos es Nodo. Nodo toma un elemento de tipo a y dos árboles por lo
-- ↪ que deberemos hacer doble recursión (una por cada subárbol). Osea que la
-- ↪ solución de nuestra función depende del valor del primer parámetro (que
-- ↪ es de tipo a) y de la soluciones dos recursiones (que son de tipo b):

foldrArbol :: (a -> b -> b -> b) -> (a -> b) -> b

-- Ya podemos implementarlo usando pattern matching, el caso base es aplicar
-- ↪ la segunda función pasada como parámetro al valor de la hoja:

foldrArbol fcr fcb (Hoja x) = fcb x

-- El caso inductivo es aplicar la primer función al elemento y al resultado
-- ↪ de las recursiones:

foldrArbol fcr fcb (Nodo x ai ad) =
    fcr x (foldrArbol fcr fcb ai) (foldrArbol fcr fcb ad)

-- fcr = funcion caso recursivo
-- fcb = funcion caso base
-- ai = arbol izquierdo
-- ad = arbol derecho
```

Otros esquemas de recursión Los esquemas de recursión que nombramos, no son los únicos que existen y además, pueden ser definidos para otros tipos recursivos, no solo para listas. En cada caso, debemos pensar como funciona el esquema con cada constructor del tipo.

3. Cálculo Lambda Tipado

El cálculo lambda es un modelo de computación turing completo basado en **funciones** introducido por **Alonzo Church**. Este modelo consiste en un conjunto de expresiones que representan abstracciones (aplicaciones de funciones) y cuyos valores pueden ser determinados aplicando ciertas reglas sintácticas de manera iterativa hasta obtener lo que se dice su forma normal. Ésta es una expresión que, a falta de reglas, no puede ser reducida de ninguna manera. En nuestro caso, estamos estudiando cálculo lambda tipado, es decir que habrá expresiones que, a pesar de estar bien formadas, no tendrán sentido.

3.1. Expresiones de Tipos de λ^b

El primer lenguaje lambda que usamos en la materia tiene dos **tipos** $Bool$ y $\sigma \rightarrow \theta$ que son los tipos de los valores booleanos y las funciones que van de un tipo σ a un tipo θ , respectivamente. Y lo notamos:

$$\sigma, \theta ::= Bool \mid \sigma \rightarrow \theta$$

3.1.1. Términos de λ^b

Debemos definir los **términos** que nos permitirán escribir las expresiones válidas del tipado. Sea \mathcal{X} un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los **términos** de λ^b están dados por:

$$\begin{aligned} M, P, Q ::= & \text{true} \\ & \mid \text{false} \\ & \mid \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q \\ & \mid M \ N \\ & \mid \lambda x : \sigma. M \\ & \mid x \end{aligned}$$

Esto significa que dados tres términos M , P y Q , los términos válidos del lenguaje son:

- true y false : Representan las **constantes de verdad**.
- $\text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q$: Expresa el **condicional**.
- $M \ N$: Indica la **aplicación** de la función denotada por el termino M al argumento N .
- $\lambda x : \sigma. M$: **Función** (abstracción) cuyo parámetro x es de tipo σ y cuyo cuerpo es M
- x , una **variable de términos**.

3.1.2. Variables ligadas y libres

Por como definimos el lenguaje, una variable x puede ocurrir de dos formas: **libre** o **ligada**. Decimos que x ocurre **libre** si no se encuentra bajo el alcance de una ocurrencia de λx . Caso contrario ocurre ligada.

Por ejemplo:

$$\lambda x : Bool. \text{if } \text{true} \text{ then } \underbrace{x}_{\text{ligada}} \text{ else } \underbrace{y}_{\text{libre}}$$

Definimos la función FV (free variables) que devuelve el conjunto de variables libres de una expresión dada:

$$\begin{aligned}
 FV(x) &\stackrel{def}{=} x \\
 FV(true) &= FV(false) \stackrel{def}{=} \emptyset \\
 FV(if\ M\ then\ P\ else\ Q) &\stackrel{def}{=} FV(M) \cup FV(P) \cup FV(Q) \\
 FV(M\ N) &\stackrel{def}{=} FV(M) \cup FV(N) \\
 FV(\lambda x : \sigma. M) &\stackrel{def}{=} FV(M) - \{x\}
 \end{aligned}$$

3.1.3. Reglas de sustitución

Una de las operaciones que podemos realizar sobre las expresiones del lenguaje es la **sustitución**. Dado un término M , sustituye todas las ocurrencias **libres** de una variable x por un término N . La notamos:

$$M\{x \leftarrow N\}$$

Esta operación nos sirve para darle semántica a la aplicación de funciones y es sencilla de definir, sin embargo debemos tener en cuenta algunos casos especiales.

α -equivalencia Dos términos M y N que difieren solamente en el nombre de sus variables ligadas se dicen α -equivalentes. Esta relación es una relación de equivalencia. Técnicamente, la sustitución está definida sobre clases de α -equivalencia de términos

Captura de variables El primer problema se da cuando la sustitución que deseamos realizar sustituye una variable por otra con el mismo nombre que alguna de las variables ligadas de la expresión. Por ejemplo:

$$(\lambda z : \sigma. x)\{x \leftarrow z\} = \lambda z : \sigma. z$$

En estos casos, si realizamos la sustitución cambiaríamos el significado de la expresión (aquí estaríamos convirtiendo la función constante que devuelve x en la función identidad). Por esta razón debemos asegurarnos que cuando realizemos la operación $(\lambda y : \sigma. M)\{x \leftarrow N\}$, la variable ligada y sea renombrada de tal manera que **no** ocurra libre en N .

Entonces, teniendo en cuenta lo mencionado, definimos el comportamiento de la operación:

$$\begin{aligned}
 x\{x \leftarrow N\} &\stackrel{def}{=} N \\
 a\{x \leftarrow N\} &\stackrel{def}{=} a \text{ si } a \in \{true, false\} \cup (\mathcal{X} - \{x\}) \\
 (if\ M\ then\ P\ else\ Q)\{x \leftarrow N\} &\stackrel{def}{=} if\ M\{x \leftarrow N\}\ then\ P\{x \leftarrow N\}\ else\ Q\{x \leftarrow N\} \\
 (M_1\ M_2)\{x \leftarrow N\} &\stackrel{def}{=} M_1\{x \leftarrow N\}\ M_2\{x \leftarrow N\} \\
 (\lambda y : \sigma. M)\{x \leftarrow N\} &\stackrel{def}{=} \lambda y : \sigma. M\{x \leftarrow N\} \text{ si } x \neq y, \ y \notin FV(N)
 \end{aligned}$$

La condición $x \neq y$, $y \notin FV(N)$ está para que efectivamente no se produzca la situación mencionada en el párrafo anterior. Y **siempre** puede cumplirse, solo hay que renombrar las variables de manera apropiada.

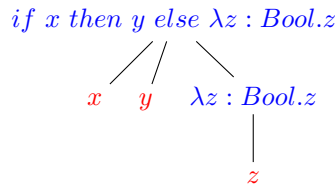
3.1.4. Árbol sintáctico

Dada una expresión M , su árbol sintáctico es un árbol que tiene como raíz a M y como hijos de la raíz a todos los subtérminos válidos de la expresión.

Ejemplos El árbol sintáctico de $true$ es:

$true$

El árbol sintáctico de $if\ x\ then\ y\ else\ \lambda z : Bool.z$ es:



Para que una expresión sea considerada válida dentro de un lenguaje no solo debe ser sintácticamente correcta sino que debemos poder inferir su tipo a través del sistema de tipado que definamos. Si no es posible realizar esta inferencia entonces no la consideraremos una expresión válida del lenguaje.

Contexto de tipado: Conjunto de pares $x_i : \sigma_i$ que indica los tipos de cada variable de un programa. Por lo general, se nota $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n\}$.

Juicio de tipado: Dado un contexto de tipado Γ , un **juicio de tipado** es una expresión $\Gamma \triangleright M : \sigma$ que se lee “el término M tiene tipo σ asumiendo el contexto de tipado Γ ”.

3.2.1. Axiomas de tipado de λ^b

$$\frac{}{\Gamma \triangleright true : Bool} (T-True) \qquad \frac{}{\Gamma \triangleright false : Bool} (T-False)$$

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \sigma} (T-Var)$$

- **T-True** y **T-False:** $true$ y $false$ son de tipo $Bool$ sin importar el contexto en el que se encuentren.
- **T-Var:** x es de tipo σ en Γ si el par $x : \sigma$ se encuentra en Γ .

3.2.2. Reglas de tipado de λ^b

$$\frac{\Gamma \triangleright M : Bool \quad \Gamma \triangleright P : \sigma \quad \Gamma \triangleright Q : \sigma}{\Gamma \triangleright \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q : \sigma} \text{(T-If)}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau}{\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{(T-Abs)}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \triangleright N : \sigma}{\Gamma \triangleright M N : \tau} \text{(T-App)}$$

- **T-If:** Si M es de tipo $Bool$ y P y Q son de tipo σ en Γ respecto de Γ , entonces $\text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q$ es de tipo σ en Γ .
- **T-Abs:** Si M es de tipo τ en el contexto $\Gamma \cup \{x : \sigma\}$, entonces $\lambda x : \sigma. M$ es de tipo $\sigma \rightarrow \tau$ en Γ .
- **T-App:** Si M es una función que va de σ a τ y N es de tipo σ en Γ , entonces $M N$ es de tipo τ .

3.2.3. Resultados básicos

Si $\Gamma \triangleright M : \sigma$ puede derivarse usando los axiomas y reglas de tipados decimos que el juicio es **derivable**. Además, si el juicio se puede derivar para algún Γ y σ , entonces decimos que M es **tipable**.

Unicidad de tipos Si $\Gamma \triangleright M : \sigma$ y $\Gamma \triangleright M : \tau$ son derivables, entonces $\sigma = \tau$. Osea una expresión M puede tener un único tipo dentro de un contexto dado.

Weakening + Strengthening Si $\Gamma \triangleright M : \sigma$ es derivable y $\Gamma \cap \Gamma'$ contiene a todas las variables libres de M , entonces $\Gamma' \triangleright M : \sigma$.

Sustitución Si $\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau$ y $\Gamma \triangleright N : \sigma$ son derivables, entonces $\Gamma \triangleright M\{x \leftarrow N\} : \tau$ es derivable.

3.2.4. Demostración de juicios de tipado

Dado un sistema tipado, queremos ver si un juicio de tipado es correcto. Para hacer esto, iremos aplicando, al juicio, las reglas del sistema hasta llegar a sus axiomas o hasta llegar a una contradicción o incertidumbre. Si pasa lo primero, entonces el juicio es correcto, si pasa lo segundo, el juicio está mal.

Sea $\Gamma = \{y : Bool\}$. Queremos ver si $\Gamma \triangleright \text{if } true \text{ then } false \text{ else } y : Bool$ es derivable. Como es un condicional, debemos fijarnos que cumpla con la regla **T-If**:

$$\frac{\Gamma \triangleright true : Bool \quad \Gamma \triangleright false : Bool \quad \Gamma \triangleright y : Bool}{\Gamma \triangleright \text{if } true \text{ then } false \text{ else } y : Bool} \text{T-If}$$

Para que se cumpla esta regla, entonces se debe cumplir cada una de sus condiciones. Dibujamos para cada una de ellas, las reglas que debemos aplicarle:

$$\frac{\frac{}{\Gamma \triangleright true : Bool} \text{T-True} \quad \frac{}{\Gamma \triangleright false : Bool} \text{T-False} \quad \frac{y : Bool \in \Gamma}{\Gamma \triangleright y : Bool} \text{T-Var}}{\Gamma \triangleright \text{if } true \text{ then } false \text{ else } y : Bool} \text{T-If}$$

En el último nivel dibujado, aplicamos **T-True**, **T-If** que por ser axiomas y no tener ninguna condición son verdaderas. Además, para la última, aplicamos **T-Var** que es verdadera porque ocurre $y : Bool \in \Gamma$. Entonces concluimos el juicio de tipado es derivable, es decir la expresión analizada es, efectivamente, de tipo *Bool*

Supongamos ahora que $\Gamma = \phi$, entonces la derivación quedaría:

$$\frac{\frac{}{\phi \triangleright true : Bool} \text{ T-True} \quad \frac{}{\phi \triangleright false : Bool} \text{ T-False} \quad \frac{y : Bool \in \phi}{\phi \triangleright y : Bool} \text{ T-Var}}{\phi \triangleright if \ true \ then \ false \ else \ y : Bool} \text{ T-If}$$

En este caso, sabemos que el par $y : Bool$ no se encuentra en el conjunto vacío, por lo que llegamos a una contradicción. Luego, el juicio no es derivable en este contexto.

3.3. Semántica operacional

Ya definimos cuales serán los términos y expresiones válidas de nuestro lenguaje. El siguiente paso, es definir algún mecanismo que nos permita inferir el significado o **valor** de un término.

Semántica operacional: Mecanismo que interpreta a los **términos como estados** de una máquina abstracta y define una **función de transición** que indica, dado un estado, cual es el siguiente.

De esta forma, el significado de un término M es el estado final que alcanza la máquina al comenzar con M como estado inicial.

Tenemos dos formas de definir la semántica:

- **Small-step:** La función de transición describe un paso de computación. Los términos compuestos se descomponen en términos más simples que deben ser reducidos en un orden específico.
- **Big-step** (o **Natural Semantics**): La función de transición evalúa el termino a su resultado en un paso.

Juicios de evaluación: Son expresiones de la forma $M \rightarrow N$ que se leen “*el término M reduce, en un paso, al término N* ”.

Axiomas de evaluación: Indican que juicios de evaluación son siempre derivables.

Reglas de evaluación: Dado un contexto, nos dirán que juicios son derivables.

Las reglas de la semántica asumen que las expresiones están bien tipadas.

3.3.1. Expresiones Booleanas

Los valores de las expresiones booleanas son:

$$V ::= true \mid false$$

y son usados para reducir el término $if \ M_1 \ then \ M_2 \ else \ M_3$ mediante los siguientes axiomas:

$$\frac{}{if \ true \ then \ M_1 \ else \ M_2 \rightarrow M_1} \text{ (E-IfTrue)}$$

$$\frac{}{if \text{ false then } M_1 \text{ else } M_2 \rightarrow M_2} \text{(E-IfFalse)}$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{if \ M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow if \ M'_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3} \text{(E-If)}$$

Si la expresión en la guarda, es un *true* o un *false* se reduce la expresión a M_1 o M_2 .

Si M_1 es una expresión reducible, entonces se la reduce una y la expresión se reemplaza por *if* M'_1 *then* M_2 *else* M_3 .

Con estas reglas definimos la estrategia de evaluación del condicional que se corresponde el orden habitual en lenguajes de programación:

1. Primero evaluamos la guarda del condicional
2. Una vez que la guarda sea un valor, evaluamos la rama que corresponda.

3.3.2. Propiedades

Determinismo Si $M \rightarrow M'$ y $M \rightarrow M''$ entonces $M' = M''$, esto quiere decir que el valor que no siempre hay una sola regla que nos permite realizar el siguiente paso en la reducción.

Valores en forma normal Una **forma normal** es un término que no puede evaluarse más. Consideraremos que terminamos de evaluar un término cuando conseguimos su forma normal.

Todos los valores tiene una forma normal, sin embargo hay que tener en cuenta que como estamos definiendo un lenguaje tipado habrá formas normales que no representen ningún valor.

3.3.3. Evaluación en muchos pasos

El juicio de **evaluación de muchos pasos** \twoheadrightarrow es la clausura reflexiva y transitiva de \rightarrow . Es decir, la menor relación tal que:

1. Si $M \rightarrow M'$, entonces $M \twoheadrightarrow M'$
2. $M \twoheadrightarrow M$ para todo M
3. Si $M \twoheadrightarrow M'$ y $M' \twoheadrightarrow M''$, entonces $M \twoheadrightarrow M''$

Unicidad de formas normales Si $M \twoheadrightarrow U$ y $M \twoheadrightarrow V$ con U y V formas normales, entonces $U = V$

Terminación Para todo M existe una forma normal N tal que $M \twoheadrightarrow N$

3.4. Semántica operacional de λ^b

En la sección 3.3.1 definimos el comportamiento de las expresiones booleanas, sin embargo, nos falta definir como reducir términos del tipo $\lambda x : \sigma.M$ y $M N$.

Vamos a considerar a los términos de $\lambda x : \sigma.M$ como valores, sea M reducible o no. Entonces, nuestro conjunto de valores del lenguaje sería:

$$V ::= true \mid false \mid \lambda x : \sigma. M$$

Por lo que todo término bien tipado y cerrado (sin variables libres) evalúa a alguna de estos términos. Si es de tipo *Bool* evalúa a *true* o *false*, si es de tipo $\sigma \rightarrow \tau$ evalúa a $\lambda x : \sigma. M$.

A las reglas de reducción agregamos los siguientes (V y V_1 son expresiones atómicas):

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1 M_2 \rightarrow M'_1 M_2} (\text{E-App1} / \mu)$$

$$\frac{M_2 \rightarrow M'_2}{V_1 M_2 \rightarrow V_1 M'_2} (\text{E-App2} / v)$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma. M) V \rightarrow M\{x \leftarrow V\}} (\text{E-App2} / \beta)$$

Estado de error Es un estado que **no es** un valor pero en el que la computación está trabada. Representa el estado en el cual el sistema de runtime de una implementación real generaría una excepción.

El sistema de tipado nos garantiza que si un término cerrado está bien tipado entonces evalúa a un valor.

Corrección La corrección de un término nos asegura dos cosas: **Progreso y Preservación**.

- **Progreso:** Si M es un término cerrado y bien tipado entonces M es un valor o existe M' tal que $M \rightarrow M'$. En otras palabras, la evaluación no puede trabarse para términos cerrados y bien tipados que no son valores. Además, si un programa termina entonces nos devuelve un valor.
- **Preservación:** La evaluación de un término M cerrado y bien tipado preserva tipos. Es decir, no importa cuanta veces se reduzca M , el término resultante siempre es del tipo original.

$$\text{Si } \Gamma \triangleright M : \sigma \text{ y } M \rightarrow N \text{ entonces } \Gamma \triangleright N : \sigma$$

Extendiendo el lenguaje Para extender el lenguaje debemos realizar los mismos pasos que realizamos para definir el lenguaje λ^b . Esto es:

1. Agregar el nuevo tipo al conjunto de tipos.
2. Definir los términos de ese tipo.
3. Definir reglas de tipado y de semántica asegurandonos de que no interfieran con las ya definidas (no deben contradecir, ni crear nuevas formas de inferir algo que ya podía ser inferido). En el apéndice de extensiones hay algunos ejemplos.

Macros Hay expresiones del lenguaje que usaremos con demasiada frecuencia, a estas expresiones les asignamos macros (**nombres**) que podremos usar en otras expresiones para evitar escribirlas.

$$\begin{aligned} Id_{Bool} &\stackrel{def}{=} \lambda x : Bool. x \\ \text{and} &\stackrel{def}{=} \lambda x : Bool. \lambda y : Bool. \text{if } x \text{ then } y \text{ else } false \end{aligned}$$

La expresión $Id_{Bool} true$ equivale a $(\lambda x : Bool. x) true$.

3.5. Extensión Naturales (λ^{bn})

Tipos

$$\sigma, \tau ::= Bool \mid Nat \mid \sigma \rightarrow \tau$$

Términos

$$M ::= \dots \mid 0 \mid succ(M) \mid pred(M) \mid isZero(M)$$

Los términos significan:

- $succ(M)$: Sucesor del valor que representa M .
- $pred(M)$: Predecesor del valor que representa M .
- $iszero(M)$: Indica si M es equivalente a cero o no.

Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \triangleright 0 : Nat} (T\text{-Zero})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : Nat}{\Gamma \triangleright succ(M) : Nat} (T\text{-Succ}) \quad \frac{\Gamma \triangleright M : Nat}{\Gamma \triangleright pred(M) : Nat} (T\text{-Pred})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : Nat}{\Gamma \triangleright isZero(M) : Bool} (T\text{-IsZero})$$

Valores

$$V ::= \dots \mid \underline{n} \text{ donde } \underline{n} \text{ abrevia } succ^n(0) \text{ (aplicar } n \text{ veces } succ \text{ a } 0)$$

Axiomas y reglas de evaluación

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{succ(M_1) \rightarrow succ(M'_1)} (E\text{-Succ})$$

$$\frac{}{pred(0) \rightarrow 0} (E\text{-PredZero}) \quad \frac{}{pred(succ(\underline{n})) \rightarrow \underline{n}} (E\text{-PredSucc})$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{pred(M_1) \rightarrow pred(M'_1)} (E\text{-Pred})$$

$$\frac{}{isZero(0) \rightarrow true} (E\text{-IsZeroZero}) \quad \frac{}{isZero(succ(\underline{n})) \rightarrow false} (E\text{-isZeroSucc})$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{isZero(M_1) \rightarrow isZero(M'_1)} (E\text{-isZero})$$

3.6. Simulación de lenguajes imperativos

Los lenguajes imperativos se caracterizan por su capacidad de asignar y modificar variables dentro de un programa.

Comandos: Expresiones del lenguaje cuyo objetivo es crear un efecto sobre el estado de la computadora.

Queremos extender el lenguaje λ para que poder simular comandos y efectos sobre la memoria.

3.6.1. Operaciones básicas

En un lenguaje imperativo **todas** las variables son **mutables**. Definimos tres operaciones básicas para modificar variables:

- **Asignación:** $x := M$ almacena en la referencia x el valor de M
- **Alocación (Reserva de memoria)** $ref\ M$ genera una referencia fresca cuyo contenido es el valor de M
- **Derreferenciación (Lectura):** $!x$ sigue la referencia x y retorna su contenido.

Notemos que una vez que agreguemos estas expresiones al lenguaje lambda, este dejará de ser un lenguaje funcional **puro** (un lenguaje en el todas sus expresiones carecen de efecto).

Nos gustaría agregar las expresiones mencionadas a nuestro lenguaje, para esto primero debemos asignarles un tipo.

Asignacion La igualdad ($x := M$) es una expresión de la cual no nos interesa saber su valor sino el efecto que tiene la misma sobre el contexto. Debemos definir un nuevo tipo que nos permita identificar cuando una expresión solo fue evaluada para generar un efecto. Nombraremos este tipo *Unit* y su conjunto de valores será solo el valor *unit*. Podemos decir que este tipo cumple el rol de *void* en C.

3.6.2. Extensión con Referencias (λ^{bnu})

Referencias Una referencia es una abstracción de una porción de memoria que se encuentra en uso. Usaremos el tipo *Ref* σ para diferenciar las expresiones que representan referencias.

Direcciones de memoria: Representaremos cada posición con **direcciones simbólicas** o *locations* usando etiquetas l, l_1 .

Memoria o store: La definimos como una función parcial μ que dada una dirección nos devuelve el valor almacenado en ella. Y notaremos:

- $\mu[l \rightarrow V]$ es el store resultante de **pisar** $\mu(l)$ con V .
- $\mu \oplus (l \rightarrow V)$ es el **store extendido** resultante de ampliar μ con una nueva asociación $l \rightarrow V$ asumiendo que $l \notin Dom(\mu)$.

Uso en semántica Agregaremos las etiquetas al conjunto de valores. A partir de ahora, los juicios de evaluación tendrán la siguiente forma:

$$M|\mu \rightarrow M'|\mu'$$

Esto significa que una expresión M reduce a M' y que afecta a μ de tal forma que pasa a ser μ' , así reflejaremos los cambios de estado de la memoria.

Notemos que, a pesar de que agregamos las etiquetas l como términos y valores, estas son solo producto de la formalización y **no** se pretende que sean usadas por el programador.

Uso en tipado Con la posibilidad de modificar la memoria durante la ejecución de un programa, se hace necesaria la definición de un contexto que nos permita inferir el tipo del valor almacenado en las posiciones usadas. Introducimos el **contexto de tipado** Σ para direcciones como una función parcial que toma direcciones y devuelve nombres de tipos. Los juicios de tipado serán de la siguiente forma:

$$\Gamma|\Sigma \triangleright M : \sigma$$

Indicando que M es de tipo σ en el contexto Γ cuando el estado de la memoria se corresponde con el contexto de tipado Σ .

3.6.3. La extension

Tipos

$$\sigma, \tau ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \text{Unit} \mid \text{Ref } \sigma \mid \sigma \rightarrow \tau$$

Términos

$$M ::= \dots \mid \text{unit} \mid \text{ref } M \mid !M \mid M := N \mid l$$

Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma|\Sigma \triangleright \text{unit} : \text{Unit}}(\text{T-Unit}) \quad \frac{\Gamma|\Sigma \triangleright M_1 : \sigma}{\Gamma|\Sigma \triangleright \text{ref } M_1 : \text{Ref } \sigma}(\text{T-Ref})$$

$$\frac{\Gamma|\Sigma \triangleright M_1 : \text{Ref } \sigma}{\Gamma \triangleright !M_1 : \sigma}(\text{T-DeRef})$$

$$\frac{\Gamma|\Sigma \triangleright M_1 : \text{Ref } \sigma \quad \Gamma|\Sigma \triangleright M_2 : \sigma}{\Gamma \triangleright M_1 := M_2 : \text{Unit}}(\text{T-Assign})$$

$$\frac{\Sigma(l) = \sigma}{\Gamma|\Sigma \triangleright l : \text{Ref } \sigma}(\text{T-Loc})$$

Valores

$$V ::= \dots \mid \text{unit} \mid l$$

Axiomas y reglas semánticas

$$\frac{M_1|\mu \rightarrow M'_1|\mu'}{M_1 \ M_2|\mu \rightarrow M'_1 \ M_2|\mu'} \text{(E-App1)} \quad \frac{M_2|\mu \rightarrow M'_2|\mu'}{\textcolor{red}{V}_1 \ M_2|\mu \rightarrow \textcolor{red}{V}_1 \ M'_2|\mu'} \text{(E-App2)}$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma. M) \ \textcolor{red}{V}|\mu \rightarrow M\{x \leftarrow \textcolor{red}{V}\}|\mu} \text{(E-AppAbs)}$$

$$\frac{M_1|\mu \rightarrow M'_1|\mu'}{!M_1|\mu \rightarrow !M'_1|\mu'} \text{(E-DeRef)} \quad \frac{\mu(l) = \textcolor{red}{V}}{!l|\mu \rightarrow V|\mu} \text{(E-DerefLoc)}$$

$$\frac{M_1|\mu \rightarrow M'_1|\mu'}{M_1 \ := \ M_2|\mu \rightarrow M'_1 \ := \ M_2|\mu'} \text{(E-Assign1)}$$

$$\frac{M_2|\mu \rightarrow M'_2|\mu'}{\textcolor{red}{V} \ := \ M_2|\mu \rightarrow \textcolor{red}{V} \ := \ M'_2|\mu'} \text{(E-Assign2)}$$

$$\frac{}{l \ := \ \textcolor{red}{V}|\mu \rightarrow \textit{unit}|\mu[l \rightarrow \textcolor{red}{V}]} \text{(E-Assign)}$$

$$\frac{M_1|\mu \rightarrow M'_1|\mu'}{\textit{ref} \ M_1|\mu \rightarrow \textit{ref} \ M'_1|\mu'} \text{(E-Ref)} \quad \frac{l \notin \textit{Dom}(\mu)}{\textit{ref} \ \textcolor{red}{V}|\mu \rightarrow l|\mu \oplus (l \rightarrow \textcolor{red}{V})} \text{(E-RefV)}$$

Macro punto y coma (;) En lenguajes con efectos laterales, como el que estamos definiendo, esta macro nos servirá para definir el orden de evaluación de varias expresiones en **secuencia**.

$$M_1; M_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x : \textit{Unit}. M_2) \ M_1 \quad x \notin \textit{FV}(M_2)$$

Por como definimos las reglas semánticas del lenguaje, esto significa que primero se evalúa M_1 y luego M_2 .

3.6.4. Corrección de tipos en un lenguaje con referencias

Debemos reformular las definiciones de corrección del lenguaje, es decir, debemos indicar que significa el **progreso** y la **preservación** cuando hay referencias.

3.6.5. Preservación

La preservación nos aseguraba que no importa cuantas veces reduzcamos una expresión, esta debería mantener su tipo. Con las asignaciones podemos cambiar el tipo de ciertos valores durante la ejecución de un programa, lo que implica que la expresión podría cambiar su tipo. Para definir la preservación precisamos una noción de compatibilidad entre el store y el contexto de tipado que nos permita asegurar que si los valores no cambian su tipo, entonces la expresión lo mantiene.

Compatibilidad: Diremos que μ es compatible con Σ ($\Gamma|\Sigma \triangleright \mu$) si ambas funciones tiene el mismo dominio, y los tipos de cada etiqueta de μ coinciden con los tipos que se les asignó en Σ .

$$\Gamma|\Sigma \triangleright \mu \iff Dom(\Sigma) = Dom(\mu) \wedge (\forall \mu) \Gamma|\Sigma \triangleright \mu(l) : \Sigma(l)$$

Preservación: Dada una expresión M tal que

- $\Gamma|\Sigma \triangleright M : \sigma$,
- $M|\mu \rightarrow N|\mu'$ y
- $\Gamma|\Sigma \triangleright \mu$

entonces existe un Σ' que contiene a Σ tal que:

- $\Gamma|\Sigma' \triangleright N : \sigma$ y
- $\Gamma|\Sigma' \triangleright \mu'$

Para que μ' sea compatible con Σ' puede haber dos posibilidad: O que $\mu' = \mu$ y $\Sigma = \Sigma'$ o que μ' sea una extensión de μ , es decir que se haya creado una referencia nueva, en cuyo caso ninguno de los tipos fue modificado y Σ' es Σ extendido con el tipo de la nueva referencia.

3.6.6. Progreso

El progreso asegura que dada una expresión, su ejecución termina en un valor o no termina. Para el nuevo lenguaje, hay que tener en cuenta el contexto de tipado:

Si M es cerrado y bien tipado en un contexto de tipado de memoria Σ , entonces

- M es un valor
- o bien para cualquier memoria μ que sea compatible con Σ , existe M' y μ' tal que $M|\mu \rightarrow M'|\mu'$

Esto quiere decir que solo se puede asegurar progreso cuando μ es compatible con Σ .

3.7. Extensión con recursión

Queremos dar al lenguaje λ la capacidad de interpretar expresiones recursivas. Definimos la función $fix\ M$ que, dada una función M , devuelve su punto fijo, es decir, un valor x tal que $M\ x$ evalúa a x .

Términos

$$M := \dots \mid fix\ M$$

Regla de tipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \rightarrow \sigma}{\Gamma \triangleright fix\ M : \sigma} (T-Fix)$$

Reglas de evaluación

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{fix\ M_1 \rightarrow fix\ M'_1} \text{(E-Fix)}$$

$$\frac{}{fix\ (\lambda x : \sigma. M) \rightarrow M\{x \leftarrow fix\ \lambda x : \sigma. M\}} \text{(E-FixBeta)}$$

Ejemplo: Queremos expresar la función factorial:

$$f(n) = \text{If } n = 0 \text{ then } 1 \text{ else } n * f(n - 1)$$

Lo logramos con:

$$fact = fix\ \lambda f : Nat \rightarrow Nat. (\lambda x : Nat. if\ isZero(x)\ then\ 1\ else\ x * (f\ pred(x)))$$

De adentro hacia afuera:

- La abstracción λx toma un natural y devuelve un natural. Si x es cero, entonces devuelve 1, sino $x * (f\ pred(x))$. En esta expresión f es una variable libre, puede ser cualquier cosa.
- La abstracción λf liga f a una función $Nat \rightarrow Nat$ y nos permite *parametrizarla*. Osea que f podría ser, por ejemplo, $(\lambda y : Nat. succ(y))$ y en ese caso estaríamos devolviendo el mismo x .
- Por último fix , nos dice que la función f debe ser $fact$.

Notemos que $fact$ es una abstracción que toma un Nat y devuelve un Nat . Esto es porque fix aplica $fact$ a λf , lo que devuelve λx con f remplazado por $fact$.

4. Inferencia de tipos

Queremos modificar el lenguaje de cálculo lambda para que las expresiones no necesiten las notaciones de tipos explícitas. Para esto, debemos definir términos a partir de los cuales se pueda **inferir** la información faltante. Esto es, debemos poder convertirlos en términos bien tipados del cálculo lambda sin ningún problema.

Este nuevo lenguaje nos evitará la sobrecarga de tener que declarar y manipular todos los tipos al momento de escribir un programa. Un compilador deberá realizar la inferencia de tipos antes de compilar el program.

Términos

El lenguaje sin tipos tendrá todos los términos del lenguaje λ con el que estuvimos trabajando hasta ahora, con la diferencia de que si en ellos había una notación de tipo, entonces la obviamos:

$$\begin{aligned}
 M ::= & x \\
 & | \text{ true } | \text{ false } | \text{ if } M \text{ then } P \text{ else } Q \\
 & | 0 | \text{ succ}(0) | \text{ isZero}(M) \\
 & | \lambda x.M | M N | \text{ fix } M
 \end{aligned}$$

Si bien la mayoría de los términos son iguales a los originales, necesitaríamos alguna forma de convertir los términos del lambda cálculo a no tipados y viceversa.

Función Erase: Dado un término del lambda cálculo, **elimina** las anotaciones de tipos de las abstracciones que contenga. Por ejemplos:

$$\text{Erase}(\lambda x : \text{Nat}. \lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}. f x) = \lambda x. \lambda f. f x$$

Chequeos de tipo: Realizar el chequeo de tipo es determinar, para un término estándar (del lenguaje λ tipado) M , si existe Γ y σ tales que $\Gamma \triangleright M : \sigma$ es derivable. Osea que nos indica si M es un término tipable o no. Solo hay que seguir la estructura sintáctica de M para reconstruir una derivación de juicio.

Inferencia de tipos:

Dado un término U sin notaciones de tipo, se trata hallar un término estándar (con anotaciones de tipos) M bien tipado que sea equivalente. Osea tal que:

1. $\Gamma \triangleright M : \sigma$ para algún contexto Γ y algún tipo σ , y
2. $\text{Erase}(M) = U$

Si encontramos este M , U será de tipo σ - Sino, U será una expresión no tipable en nuestro lenguaje.

4.0.1. Variables de tipo

Una **variables de tipo** s es una variable que representa una expresión de tipo arbitraria e indica que tendremos una solución válida sin importar por que expresión de tipo la remplacemos.

Debemos agregar esta nueva expresión a las expresiones de tipo del cálculo lambda:

$$\sigma, \tau ::= s \mid Nat \mid Bool \mid \sigma \rightarrow \tau$$

Supongamos que tenemos la expresión $U = \lambda x.x$. En este caso, U puede ser la función identidad de cualquier tipo. Entonces, la expresión $M = \lambda x : s.x$ es el resultado de la inferencia de U (s pudiendo ser cualquier tipo de nuestro lenguaje).

4.1. Sustitución de tipos

Una función S de sustitución es una función que mapea variables de tipo en expresiones de tipo y puede ser aplicada a expresiones de tipos, términos y contextos de tipado.

Describimos S usando la notación $\{\sigma_1/t_1, \dots, \sigma_n/t_n\}$. Esto significa que la variable t_i debe ser remplazada por σ_i .

Conjunto soporte de S : Conjunto $\{t_1, \dots, t_n\}$ que contiene a todas las variables que afecta S .

Ejemplos:

- Si $S = \{Bool/t\}$, entonces $S(\lambda x : t.x) = \lambda x : Bool.x$ y el conjunto soporte de S es $\{t\}$.
- La sustitución cuyo soporte es \emptyset , es la **sustitución identidad**

Instancia de juicio de tipado: Si tenemos dos juicios de tipado $\Gamma \triangleright M : \sigma$ y $\Gamma' \triangleright M' : \sigma'$ tales que

$$S(\Gamma \triangleright M : \sigma) = S\Gamma \triangleright SM : S\sigma = \Gamma' \triangleright M' : \sigma'$$

, entonces decimos que $\Gamma' \triangleright M' : \sigma'$ es instancia de $\Gamma \triangleright M : \sigma$.

Composición de sustituciones La composición de sustituciones de S y T , denotada $S \circ T$, es la sustitución que se comporta como sigue:

$$(S \circ T)(\sigma) = S(T\sigma)$$

Preorden de sustituciones Una sustitución S es **más general** que T si existe una sustitución U tal que $T = U \circ S$, es decir, si T es una instancia de S .

4.1.1. Unificación

El algoritmo de inferencia que vamos a proponer analiza un término (sin notaciones de tipos) a partir de sus subtérminos. Una vez obtenida la información de cada uno de ellos, debe determinar si es **consistente** y, si lo es, **sintetizar** la información del término original a partir de ésta.

Para realizar la síntesis, debemos **compatibilizar** la información de tipos de cada subtérmino. Por cada una de las variables del término, tenemos que tomar los tipos que le asigno cada uno de ellos y

unificarlos. Es decir, debemos encontrar una sustitución S que nos permita remplazar los tipos que dió cada subexpresión por un tipo único.

Ecuación de unificación Es una expresión de la forma $\sigma_1 \doteq \sigma_2$ cuya solución es una sustitución tal que $S\sigma_1 = S\sigma_2$. Por lo general tendremos un conjunto de ecuaciones de unificación y la solución a dicho conjunto será la sustitución que unifica todas las expresiones.

Unificador más general (MGU): Una sustitución S que resuelva $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \dots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$ y que es más general que cualquier otra sustitución que la resuelva.

Teorema Si $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \dots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$ tiene solución, entonces existe un MGU y además es único salvo renombre de variables.

4.1.2. Algoritmo de unificación de Martelli-Montanari

Es un algoritmo no determinístico que, a través de **reglas de simplificación**, nos permite reescribir un conjunto de ecuaciones de unificación (*goal*) $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \dots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$.

Si, cuando el algoritmo termina, conseguimos una secuencia de reescrituras que terminan en un *goal* vacío, entonces la corrida fue **exitosa**, los pasos en los que realizamos sustituciones serán soluciones parciales al *goal* original y la composición de todas ellas será su MGU. Si no sucede esto, entonces la secuencia será **fallida**.

4.1.3. Reglas de reducción

1. Descomposición

$$\{\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \doteq \tau_1 \rightarrow \tau_2\} \cup G \mapsto \{\sigma_1 \doteq \tau_1, \sigma_2 \doteq \tau_2\} \cup G$$

2. Eliminación de par trivial

$$\{Nat \doteq Nat\} \cup G \mapsto G$$

$$\{Bool \doteq Bool\} \cup G \mapsto G$$

$$\{s \doteq s\} \cup G \mapsto G$$

3. Swap Si σ no es una variable de tipo,

$$\{\sigma \doteq s\} \cup G \mapsto \{s \doteq \sigma\} \cup G$$

4. Eliminación de variable Si $s \notin FV(\sigma)$

$$\{s \doteq \sigma\} \cup G \mapsto_{\sigma/s} G[\sigma/s]$$

5. Falla Sea $T = \{(Bool, Nat), (Nat, \sigma_1 \rightarrow \sigma_2), (Bool, \sigma_1 \rightarrow \sigma_2)\}$ y T^{-1} el conjunto con cada tupla de T invertida. Si $(\sigma, \tau) \in T \cup T^{-1}$:

$$\{\sigma \doteq \tau\} \cup G \mapsto \text{falla.}$$

6. Occur Check Si $s \neq \sigma$ y $s \in FV(\sigma)$

$$\{s \doteq \sigma\} \cup G \mapsto \text{falla}$$

4.1.4. Propiedades del algoritmo

El algoritmo de Martinelli-Montanari siempre termina. Sea G un conjunto de pares, entonces:

- Si G tiene un unificador, el algoritmo termina exitosamente y retorna un MGU.
- Si G no tiene un unificador, el algoritmo termina con **falla**.

4.1.5. Ejemplo de aplicación

$$\begin{aligned} & \{(Nat \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow u) \doteq t \rightarrow (s \rightarrow s) \rightarrow t\} \mapsto^1 \{Nat \rightarrow r \doteq t, r \rightarrow u \doteq (s \rightarrow s) \rightarrow t\} \\ & \mapsto^3 \{t \doteq Nat \rightarrow r, r \rightarrow u \doteq (s \rightarrow s) \rightarrow t\} \mapsto^4_{Nat \rightarrow r/t} \{r \rightarrow u \doteq (s \rightarrow s) \rightarrow (Nat \rightarrow r)\} \\ & \mapsto^1 \{r \doteq (s \rightarrow s), u \doteq Nat \rightarrow r\} \mapsto^4_{s \rightarrow s/r} \{u \doteq Nat \rightarrow (s \rightarrow s)\} \mapsto^4_{Nat \rightarrow (s \rightarrow s)/u} \emptyset \end{aligned}$$

Entonces, el MGU es

$$\{Nat \rightarrow (s \rightarrow s)/u\} \circ \{s \rightarrow s/r\} \circ \{Nat \rightarrow r/t\} = \{Nat \rightarrow (s \rightarrow s)/u, s \rightarrow s/r, Nat \rightarrow (s \rightarrow s)/t\}$$

4.2. Función de inferencia \mathbb{W}

Dada una expresión U sin notación de tipos, la función \mathbb{W} , devolverá un juicio de tipado con una expresión tipada M que corresponde a U . Esta función será ejecutada de manera recursiva sobre las sub-expresiones de U y sustituirá, si es posible, los tipos de cada una de ellas para que tengan “sentido” en U .

4.2.1. Propiedades deseables de \mathbb{W}

Dado un término U , $\mathbb{W}(U)$ nos devolverá, si tiene éxito, una terna de tres elementos que contendrá un contexto de tipado Γ una expresión M y un σ (notamos $\mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \sigma$).

Queremos que \mathbb{W} sea **correcto** y **completo**.

Correctitud Si $\mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \sigma$ entonces vale que:

- $\text{Erase}(M) = U$ y
- $\Gamma \triangleright M : \sigma$ es derivable.

Complejidad Si $\Gamma \triangleright M : \sigma$ es derivable y $\text{Erase}(M) = U$ entonces $\mathbb{W}(U)$ tiene éxito y produce un juicio $\Gamma' \triangleright M' : \sigma'$ que es instancia de $\Gamma \triangleright M : \sigma$.

4.2.2. Algoritmo de inferencia

\mathbb{W} va a hacer recursión sobre la estructura de U . Primero la vamos a definir para las construcciones más simples y, luego, para las compuestas. Además, usaremos el algoritmo de unificación para combinar los resultados de los pasos recursivos y, así, obtener un tipado consistente.

4.2.3. Constantes y variables

$$\begin{aligned}\mathbb{W}(\text{true}) &\stackrel{def}{=} \emptyset \triangleright \text{true} : \text{Bool} \\ \mathbb{W}(\text{false}) &\stackrel{def}{=} \emptyset \triangleright \text{false} : \text{Bool} \\ \mathbb{W}(x) &\stackrel{def}{=} \{x : s\} \triangleright x : s, \text{ } s \text{ variable fresca} \\ \mathbb{W}(0) &\stackrel{def}{=} \emptyset \triangleright 0 : \text{Nat}\end{aligned}$$

4.2.4. Caso *succ*

$$\begin{aligned}\mathbb{W}(\text{succ}(U)) &\stackrel{def}{=} S\Gamma \triangleright S \text{ succ}(M) : \text{Nat} \\ &\quad \blacksquare \mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \tau \\ &\quad \blacksquare S = \text{MGU}\{\tau \dot{=} \text{Nat}\}\end{aligned}$$

4.2.5. Caso *pred*

$$\begin{aligned}\mathbb{W}(\text{pred}(U)) &\stackrel{def}{=} S\Gamma \triangleright S \text{ pred}(M) : \text{Nat} \\ &\quad \blacksquare \mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \tau \\ &\quad \blacksquare S = \text{MGU}\{\tau \dot{=} \text{Nat}\}\end{aligned}$$

4.2.6. Caso *isZero*

$$\begin{aligned}\mathbb{W}(\text{isZero}(U)) &\stackrel{def}{=} S\Gamma \triangleright S \text{ isZero}(M) : \text{Bool} \\ &\quad \blacksquare \mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \tau \\ &\quad \blacksquare S = \text{MGU}\{\tau \dot{=} \text{Nat}\}\end{aligned}$$

4.2.7. Caso *ifThenElse*

$$\begin{aligned}\mathbb{W}(\text{if } U \text{ then } V \text{ else } W) &\stackrel{def}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_3 \triangleright S \text{ (if } M \text{ then } P \text{ else } Q) : S\sigma \\ &\quad \blacksquare \mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \triangleright M : \rho \\ &\quad \blacksquare \mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \triangleright P : \sigma \\ &\quad \blacksquare \mathbb{W}(W) = \Gamma_3 \triangleright Q : \tau \\ &\quad \blacksquare S = \text{MGU}\{\sigma_1 \dot{=} \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \wedge x : \sigma_2 \in \Gamma_j, i \neq j\} \cup \{\sigma \dot{=} \tau \mid \rho \dot{=} \text{Bool}\}\end{aligned}$$

4.2.8. Caso aplicación

$$\begin{aligned}\mathbb{W}(U \text{ } V) &\stackrel{def}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \triangleright S (M \text{ } N) : St \\ &\quad \blacksquare \mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \triangleright M : \tau \\ &\quad \blacksquare \mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \triangleright N : \rho \\ &\quad \blacksquare S = \text{MGU}\{\sigma_1 \dot{=} \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \wedge x : \sigma_2 \in \Gamma_j, i \neq j\} \cup \{\tau \dot{=} \rho \rightarrow t\} \text{ con } t \text{ variable fresca}\end{aligned}$$

4.2.9. Caso abstracción

$$\mathbb{W}(\lambda x. U) \stackrel{def}{=} \Gamma \setminus \{x : \tau\} \triangleright \lambda x : \tau. M : \tau \rightarrow \rho$$

Sea $\mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \rho$, si Γ tiene información de tipos para x , es decir $x : \tau \in \Gamma$ para algún τ , entonces:

$$\mathbb{W}(\lambda x. U) \stackrel{def}{=} \Gamma \setminus \{x : \tau\} \triangleright \lambda x : \tau. M : \tau \rightarrow \rho$$

Si Γ no tiene información de tipos para x ($x \notin \text{Dom}(\Gamma)$), entonces elegimos una variable fresca s y

$$\mathbb{W}(\lambda x. U) \stackrel{def}{=} \Gamma \triangleright \lambda x : s. M : s \rightarrow \rho$$

4.2.10. Caso *fix*

$$\mathbb{W}(\text{fix } (U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \triangleright S \text{ fix } (M) : St$$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \triangleright M : \tau$
- $S = MGU\{\tau \doteq t \rightarrow t\}$ con t variable fresca

4.2.11. Complejidad del algoritmo

Tanto la unificación como la inferencia para cálculo lambda se puede realizar en tiempo lineal. Sin embargo, el tipo principal asociado a un término sin anotaciones puede ser **exponencial** en el tamaño del término.

4.2.12. Extensión del algoritmo a nuevos tipos

Para extender el algoritmo a otros tipos, debemos agregar los casos correspondientes teniendo en cuenta que los llamados recursivos devuelven un contexto, un término y un tipo sobre los que no podemos asumir nada. Si la nueva regla tiene tipos iguales o contextos repetidos, debemos unificarlos. Y si la regla liga alguna variable entonces vamos a poder dividir en dos casos:

- Si alguno de los contextos recursivos tiene información sobre esa variable, entonces sacamos su tipo del contexto que la contenga.
- Sino, le asignamos una variable fresca de tipo.

Si la regla tiene restricciones adicionales, se incorporan como posibles fallas.

4.2.13. Extensión del algoritmo para listas

$$\mathbb{W}([\]) = \emptyset \triangleright [\]_t : t \text{ con } t \text{ variable fresca.}$$

$$\mathbb{W}(U_1 :: U_2) = S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \triangleright S(M_1 :: M_2) : S[\sigma_1]$$

- $\mathbb{W}(U_i) = \Gamma_i \triangleright M_i : \sigma_i$
- $S = MGU\{\sigma_1 \doteq \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \wedge x : \sigma_2 \in \Gamma_j, i \neq j\} \cup \{[\sigma_1] \doteq \sigma_2\}$

$$\mathbb{W}(\text{case } U \text{ of } \{[\] \rightsquigarrow U_2 \mid h :: t \rightsquigarrow U_3\}) =$$

$$S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_3 \setminus \{h, t\} \triangleright S(\text{case } M_1 \text{ of } \{[\] \rightsquigarrow M_2 \mid h :: t \rightsquigarrow M_3\}) : S\sigma_2$$

- $\mathbb{W}(U_i) = \Gamma_i \triangleright M_i : \sigma_i$ con $i = 1, 2, 3$
- $S = MGU\{\sigma_1 \dot{=} \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \wedge x : \sigma_2 \in \Gamma_j, i \neq j\} \cup \{\sigma_1 \dot{=} [t_1], t_1 \dot{=} \tau_h, \tau_t \dot{=} \sigma_1, \sigma_2 \dot{=} \sigma_3\}$ con

$$\tau_h = \begin{cases} \sigma_h & \text{si } h : \sigma_h \in \Gamma_3 \\ t_2 & \text{sino} \end{cases} \quad \text{y} \quad \tau_t = \begin{cases} \sigma_t & \text{si } t : \sigma_t \in \Gamma_3 \\ t_2 & \text{sino} \end{cases}$$

5. Subtipado

Muchos lenguajes nos ofrecen la posibilidad de trabajar con subtipos. Esto significa que definen una relación entre sus tipos que, en ciertos casos, nos permite usar a un elemento de un tipo como si fuese un elemento de otro. Por ejemplo, si tenemos una función que toma dos *Float* (reales) y nos devuelve su suma, a esa función podríamos pasarle un *Nat* (natural) o un *Int* (entero) y podríamos ejecutarla sin problema ya que estos tipos, en realidad, son subconjuntos de los reales.

Principio de substitutividad Definimos la relación $\sigma <: \tau$, que indica que en todo contexto donde se espera una expresión de tipo τ , podemos utilizar una de tipo σ en su lugar **sin** que ello genere un error. Y además agregamos la regla de subtipado (**Subsumption**) T-Subs:

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \sigma <: \tau}{\Gamma \triangleright M : \tau} (\text{T-Subs})$$

Esta regla es la que nos dice que si tenemos una expresión de tipo σ tal que $\sigma <: \tau$, entonces también podremos considerar a M como una expresión de tipo τ .

El tipo máximo *Top*: Contiene a todos los tipos del lenguaje y lo llamaremos **supertipo universal** porque todo tipo es subtipo de éste:

$$\frac{}{\sigma <: Top} (S - Top)$$

Tipos con constructores invariantes: Son tipos que no pueden ser remplazados por ningún otro.

Tipos con constructores covariantes: Sus subtipos se consiguen remplazando los tipos de los argumentos de sus constructores por uno de sus subtipos.

Tipos con constructores contravariantes: Sus subtipos se consiguen remplazando los tipos de los argumentos de sus constructores por un supertipo del argumento.

5.1. Reglas de subtipado

5.1.1. Tipos básicos

$$\frac{}{Nat <: Float} (S\text{-NatFloat}) \quad \frac{}{Int <: Float} (S\text{-IntFloat}) \quad \frac{}{Bool <: Nat} (S\text{-BoolNat})$$

5.1.2. Subtipado del tipo función

Buscamos una función $g : \sigma \rightarrow \tau$ que pueda remplazar a otra función $f : \sigma' \rightarrow \tau'$ en cualquier contexto sin generar ningún error.

Dominio: g debe estar definida para todos los elementos del dominio de f , osea $Dom(f) \subseteq Dom(g)$. Si pasara que existe un valor x tal $f(x)$ está definida y $g(x)$ no lo está, cuando remplazemos a f , obtendríamos un error. Entonces, $\sigma' <: \sigma$.

Imagen: g no debería poder devolver como resultado ningún valor que no esperamos que f no devuelva ($Im(g) \subseteq Im(f)$). Si g devolviese algo elemento de un tipo que no estamos esperando cuando usamos f , podría ocasionar problemas. Luego $\tau <: \tau'$.

Ejemplo: Supongamos que tenemos la función $esPar :: Nat \rightarrow Nat$, cuando usemos esta función, el contexto en el que la usemos estará esperando conseguir un natural de su evaluación. Si la función g devuelve algo que no sea un Nat , entonces obtendríamos un error. Sin embargo, si $g :: Nat \rightarrow Bool$, entonces podremos realizar el remplazo sin ningún problema porque $\{0,1\}$ es un subconjunto de los naturales.

Regla de subtipado de funciones:

$$\frac{\sigma' <: \sigma \quad \tau <: \tau'}{\sigma \rightarrow \tau <: \sigma' \rightarrow \tau'} (\text{S-Func})$$

El constructor de tipos función es **contravariante** en su primer argumento y **covariante** en el segundo.

Un programa P , deberá **coercionar** (transformar) el argumento que le pasan a la función para que coincida con el tipo de la nueva función, ejecutarla y luego coercionar su resultado al tipo del resultado que espera P .

5.1.3. Reglas de subtipado de términos

Las reglas de tipado sin subtipos son dirigidas por sintaxis, por lo que es inmediato implementar un algoritmo de chequeo de tipos a partir de ellas. Con el agregado de la regla T-Subs, el chequeo también pasa a estar dirigido por la semántica de la relación $<:$ por lo que el algoritmo deja de ser tan directo.

Un juicio de subtipado $\Gamma \mapsto M : \sigma$, nos dice que $\Gamma \triangleright M : \sigma$ y que existe τ tal que $\Gamma \mapsto M : \tau$ con $\tau <: \sigma$. Entonces las nuevas reglas quedarían así:

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \mapsto x : \sigma} (\text{T-Var})$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \mapsto M : \tau}{\Gamma \mapsto \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau} (\text{T-Abs}) \quad \frac{\Gamma \mapsto M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \mapsto N : \rho \quad \rho <: \sigma}{\Gamma \mapsto M N : \tau} (\text{T-App})$$

La mayoría de las reglas de subtipado son similares a las reglas de tipo. La única regla que usa la relación $<:$ de manera explícita es T-App porque los términos de aplicación son los únicos que al ser evaluados rempazan expresiones y, efectivamente, esta regla es la que nos da el poder que estábamos buscando.

5.1.4. Relación de preorden

La relación de subtipado $<:$ define una relación de preorden, es decir es reflexiva y transitiva por lo que podríamos escribir las siguientes reglas:

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} (\text{S-Refl}) \quad \frac{\sigma <: \tau \quad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho} (\text{S-Trans})$$

Sin embargo, esta forma de describir la relación no es dirigida por semántica y no está claro como hacer un algoritmo de chequeo de subtipos que use estas reglas. Por esta razón vamos a considerar los siguientes tres axiomas:

$$\frac{}{Nat <: Nat} (S\text{-}NatNat) \quad \frac{}{Bool <: Bool} (S\text{-}BoolBool) \quad \frac{}{Float <: Float} (S\text{-}FloatFloat)$$

Y ya con eso alcanza para derivar la reflexibilidad de cualquier tipo del lenguaje, en el lenguaje λ básico. Si agregásemos un nuevo tipo escalar (sin parámetros), debemos declarar explícitamente que ese tipo es subtipo de si mismo, sino el preorden se rompe.

La transitividad se puede demostrar aplicando varios pasos de subtipado, por lo que directamente no es necesaria.

5.1.5. Algoritmo de chequeo de tipos

Como todas las reglas del sistema de subtipado fueron definidas de manera tal que son dirigidas por la sintaxis, podemos definir el algoritmo $subtype(S, T)$ que nos indica si S es subtipo de T . Al algoritmo mostrado le faltan los axiomas de Nat , $Bool$ y $Float$ que son triviales (hay que poner cada una de esas comparaciones una por una):

```

subtype(S, T) =
  if T==Top
  then true
  else
    if S==S1 → S2 and T==T1 → T2
    then subtype(T1, S1) and subtype(S2, T2)
    else
      if S=={kj : Sj, j ∈ 1..m} and T=={li : Ti, i ∈ 1..n}
      then {li, i ∈ 1..n} ⊆ {kj, j ∈ 1..m} and
        ∀ i ∃ j kj = li and subtype(Sj, Ti)
      else false

```

5.2. Subtipado de referencias

Queremos encontrar el tipo $Ref \tau$ que sea subtipo de $Ref \sigma$.

- Supongamos que $\tau <: \sigma$, si intentamos subtipar una referencia $M : Ref \sigma$ con $Ref \tau$, entonces cuando realicemos una asignación podremos usar un valor de tipo τ y no tendremos error. Sin embargo, cuando derreferenciamos M , estaremos esperando algo de tipo σ pero como τ es más general puede tener valores que no son de ese tipo y podríamos obtener un error.

Ejemplo:

```

let r = ref 3 in r := 2,1;
!r

```

Como definimos r como una referencia de enteros en el `let`, cuando derreferenciamos r esperamos conseguir un entero, sin embargo la regla covariante, hace que con la asignación podamos asignar a r un *Float*.

- Si $\sigma <: \tau$ y $M : Ref\ \sigma$, entonces podemos guardar en M un elemento de tipo σ . Cuando querramos derreferenciar M , como $Ref\ \sigma$ es subtipo de $Ref\ \tau$, podríamos usar la derreferencia del segundo tipo. El problema vuelve a ser el mismo, el contexto va a estar esperando un valor de tipo τ y σ es más general por lo que el valor almacenado en M puede no ser de este tipo, lo que llevaría a un error.

Ejemplo:

$$let\ r = ref\ 2,1\ in\ !r \quad (1)$$

Definimos a r como una referencia de *Float*. Como r es subtipable a $Ref\ Int$, podemos usar la derreferenciación de enteros para derreferenciarla, lo que provocaría el error en el programa.

Concluimos que la regla de subtipado de referencias no es ni contravariante ni covariante, es variante. La única “sustitución” que podemos hacer es cuando σ y τ son el mismo tipo.

$$\frac{\sigma <: \tau \quad \tau <: \sigma}{Ref\ \tau <: Ref\ \sigma}$$

5.2.1. Refinando el tipo *Ref*

Extendemos el lenguaje, con los siguiente tipos *Source* σ y *Sink* σ que representan las referencias de lectura y las de escritura, respectivamente.

Reglas de tipado

$$\frac{\Gamma|\Sigma \triangleright M : Source\ \sigma}{\Gamma|\Sigma \triangleright !M : \sigma} (T-DeRefSource)$$

$$\frac{\Gamma|\Sigma \triangleright M : Sink\ \sigma \quad \Gamma|\Sigma \triangleright N : \sigma}{\Gamma|\Sigma \triangleright M := N : Unit} (T-AssignSink)$$

Reglas de subtipado

$$\frac{\sigma <: \tau}{Source\ \sigma <: Source\ \tau} (S-Source) \quad \frac{\tau <: \sigma}{Sink\ \sigma <: Sink\ \tau} (S-Sink)$$

$$\frac{}{Ref\ \tau <: Source\ \tau} (S-RefSource) \quad \frac{}{Ref\ \tau <: Sink\ \tau} (S-RefSink)$$

La regla S-Source es covariante. Si esperamos leer de una referencia de tipo τ , entonces podemos esperar una referencia de un tipo más específico que τ .

La regla S-Sink es contravariante. Cuando querramos guardar un valor de tipo τ , podremos guardarlo en una referencia de este tipo o en una de un tipo más general.

Además, *Source* τ y *Sink* τ son menos generales que *Ref* τ ya que siempre podremos remplazar referencias de lecturas o de escritura por referencias de lectura y escritura.

Parte II

Paradigma orientado a objetos

6. Objetos y el modelo de cómputo

En el paradigma orientado a objetos, todo programa es una simulación representada por una entidad u **objeto** que asocia los objetos físicos o conceptuales de un dominio del mundo real en objetos del dominio del programa. Estos objetos tienen las características y capacidades del mundo real que nos interesa modelar y se comunican, entre sí, a través de intercambios de mensajes.

Los mensajes intercambiados son solicitudes para que, el objeto **receptor** del mismo, lleve a cabo una de sus operaciones. El **receptor** determinará si puede llevarla a cabo y, si puede hacerlo la ejecutará.

6.1. Objetos

Un objeto es una entidad del programa que puede recibir un conjunto de mensajes (al que llamaremos **interfaz** o **protocolo**) que le permiten determinar como llevar a cabo ciertas operaciones. Internamente, estará compuesto por:

- Un conjunto de **colaboradores internos** (también llamados **atributos** o **variables internas**) que determinan su **estado interno**.
- Un conjunto de **métodos** que describen (implementan) las operaciones que puede realizar y, si estas afectan a su estado interno, como lo hacen.

Principio de ocultamiento de la información El estado de un objeto es **privado** y solamente puede ser consultado o modificado por sus propios métodos. Su implementación no depende de los detalles de implementación de otros objetos y la única forma que tenemos de interactuar con él, es enviándole los mensajes definidos en su interfaz.

Method dispatch Es la forma mediante la cuál, un proceso, establece la asociación entre el mensaje y el método a ejecutar. Es decir, cuando un objeto recibe un mensaje, el **method dispatch** se encarga de hallar la **declaración del método** que se pretende ejecutar.

Corrientes de organización Por lo general, tratamos de agrupar los objetos en conjuntos compuestos por objetos que se comportan de manera similar para conseguir programas más concisos. Esto se puede hacer de dos formas: Mediante clasificación o mediante prototipado.

7. Clasificación

Se usan **clases** que modelan **conceptos abstractos** del dominio del problema a resolver y definen el comportamiento y la forma de un conjunto de objetos (sus **instancias**). Todo **objeto** es una instancia de una clase.

Componentes de una clase Todas las clases tienen un **nombre** que usado para referenciarse a la misma. Dentro de ellas se definen las variables de instancias (colaboradores internos) de los objetos) y los métodos que saben responder esas instancias (sus nombres, sus parámetros y su cuerpo).

7.1. Self/This

Todas las clases tienen definida una pseudovariable que, durante la evaluación de un método, referencia al receptor del mensaje que activó dicha evaluación. No puede ser modificada por medio de una asignación y se liga automáticamente al receptor cuando comienza la evaluación del método.

```
!classDefinition: #Node
    instanceVariableNames: 'leftchild, rightchild'
    ...
sum:
    ^ (self leftchild) sum + (self rightchild) ! !

!classDefinition: #Leaf
    instanceVariableNames: 'value'
    ...
sum:
    ^self value ! !
```

Vemos que los métodos acceden a sus variables de instancia, enviándose a si mismos el mensaje asociado a cada una de ellas. En muchos lenguajes, para facilitar la escritura de un programa, la mención de **self** se hace implícitamente.

7.2. Jerarquía de clases

Cuando escribimos un programa en este paradigma, es común que creamos nuevas clases que extiendan a las ya existentes con nuevas variables de instancia o clase o que modifiquen el comportamiento de unos o varios métodos.

Para evitar tener que escribir toda una clase de cero, hacemos que la clase que estamos creando **herede** los atributos y los métodos de la clase pre-existente (la **super-clase**) que queremos extender. De esta forma, la nueva clase tendrá todo lo que tenía la super-clase y, además, las modificaciones que nosotros querramos agregarle.

La herencia define una relación transitiva. Si una clase *A* tiene como super-tipo a otra clase *B* y *C* es super-tipo de *B*, entonces *C* también es super-tipo de *A*. Llamaremos **ancestros** a todos los supertipos de *A* y **descendientes** a todos los tipos que tienen a *A* como ancestro.

7.3. Tipos de herencia

Hay dos tipos de herencia: **simple** y **múltiple**. La herencia simple permite que una clase tenga una única clase padre, mientras que la herencia múltiple deja que una clase tenga varios padres.

Además, todas las clases deben heredar de una clase **Object** que es la raíz del árbol o cadena de herencias.

La mayoría de los lenguajes orientados a objetos utilizan la herencia simple ya que la herencia múltiple complica el proceso de method dispatch (que asocia los mensajes de un objeto con sus respectivos métodos).

Supongamos que tenemos dos clases *A* y *B* incomparables y una clase *C* que es subclase de *A* y *B* simultáneamente. Si *A* y *B* definen (o heredan) dos métodos diferentes para un mismo mensaje *m*, entonces cuando enviemos dicho mensaje a *C* deberemos decidir cuál de los dos métodos asociados debemos evaluar. Esta selección se puede realizar de dos formas:

- Estableciendo un **orden de búsqueda** sobre las superclases de un clase asignando un nivel de prioridad a cada una de ellas.
- U obligando al programador a **redefinir** el método en *C* si *C* hereda dos métodos distintos para el mismo mensaje.

7.3.1. Method Dispatch

Como dijimos, el **method Dispatch** es el método mediante el cual asociamos un mensaje a su método correspondiente en el objeto. Por lo general, este método se realiza de manera dinámica, es decir se realizan durante tiempo de ejecución. Sin embargo, dependiendo del contexto, hay situaciones en las que realizar este proceso de manera estática es necesario.

Un ejemplo de esto, es cuando el lenguaje nos permite hacer uso de **super**, una pseudovariante que **referencia al objeto que recibe el mensaje** y **cambia** su proceso de activación al momento de recibirlo. Cuando usamos una expresión de la forma **super msg** en el cuerpo de un método *m*, el **method lookup** (la búsqueda del método realizada por el method dispatch), comience a realizarse desde el padre de la **clase anfitriona** de *m*.

Algunos lenguajes, además, nos permiten pasarle como parámetro una clase a partir de la cual se debe empezar la búsqueda de la siguiente forma: **super[A] msg**, siempre y cuando *A* sea un ancestro de la clase anfitriona del método.

8. Prototipado

Los lenguajes basados en prototipado de objetos se caracterizan por la ausencia de clases. Proveen constructores para la creación de objetos particulares y la herramientas necesarias para crear procedimientos que generen objetos.

En este tipo de paradigma, creamos objetos concretos (llamados **prototipos**) que se interpretan como representantes canónicos de cierto conjunto de objetos y, a partir de ellos, generamos otras instancias (**clones**) que pueden ser modificadas sin afectar al prototipo.

Cuando clonamos realizamos lo que se llama una **shallow copy** del objeto clonado, es decir copiamos cada atributo, con su método, del objeto original en el nuevo. Esto significa que cada atributo tiene exactamente la misma definición en ambos objetos.

Una consecuencia de esto es que si un atributo es una referencia a un objeto A , entonces en el nuevo objeto será una referencia a A y cualquier modificación que le hagamos se verá reflejada en ambos objetos.

8.1. Cálculo de objetos no tipado (ζ cálculo)

Usaremos un lenguaje cuya única estructura computacional son los **Objetos**. Estos objetos son una colección de atributos nombrados (**registros**) que están asociados a métodos con una única variable ligada (que representa a **self/this**) y un cuerpo que produce un resultado.

Todos los objetos proveen dos operaciones:

Envío de mensajes: Que nos permite invocar un método para que el objeto ejecute.

Redefinición de un método: Que nos permite reemplazar el cuerpo de un atributo por otro.

8.1.1. Sintaxis

$a, b ::=$	x	Variables
	$ [l_i = \zeta(x_i)b_i^{i \in 1..n}]$	Objetos
	$ a.l$	Selección/ Envío de mensajes
	$ a.l \Leftarrow \zeta(x)b$	Redefinición de un método.

El objeto $[]$ es el objeto vacío y no proporciona ningún método.

En este lenguaje, como todos los atributos son métodos, simulamos los colaboradores internos de un objeto con métodos que no utilizan el parámetro **self**. Por ejemplo:

$$o \stackrel{def}{=} [l_1 = \zeta(x_1)[], l_2 = \zeta(x_2)x_2.l_1]$$

$o.l_1$ retorna un objeto vacío. Y $o.l_2$ envía el mensaje l_1 a **self** (representado por el parámetro x_2).

Notación Cuando un objeto tenga un atributo de la forma $l = \zeta(x)b$ y x no se usa en b podemos escribir $l = b$ y a la reasignación $o.l \Leftarrow \zeta(x)b$ como $o.l := b$.

Variables libres ζ es un ligador de variables, cuando lo usamos en una expresión de la forma $\zeta(x)b$ siempre liga la variable x que se le pasa como parámetro a **self**.

De manera análoga a FV del cálculo λ definimos fv para objetos y diremos que un término a es **cerrado** si $fv(a) = \emptyset$:

$$\begin{aligned}
\text{fv}(\varsigma(x)b) &= \text{fv}(b) \setminus \{x\} \\
\text{fv}(x) &= \{x\} \\
\text{fv}([l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i \in 1..n}]) &= \bigcup^{i \in 1..n} \text{fv}(\varsigma(x_i)b_i) \\
\text{fv}(a.l) &= \text{fv}(a) \\
\text{fv}(a.l \Leftarrow \varsigma(x)b) &= \text{fv}(a.l) \cup \text{fv}(\varsigma(x)b)
\end{aligned}$$

Sustitución La función de sustitución de variables libres para objetos está definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
x\{x \leftarrow c\} &= c \\
y\{x \leftarrow c\} &= y && \text{si } x \neq y \\
([l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i \in 1..n}])\{x \leftarrow c\} &= [l_i = (\varsigma(x_i)b_i)\{x \leftarrow c\}^{i \in 1..n}] \\
(a.l)\{x \leftarrow c\} &= (a\{x \leftarrow c\}).l \\
(a.l \Leftarrow \varsigma(x)b)\{x \leftarrow c\} &= (a\{x \leftarrow c\}).l \Leftarrow (\varsigma(x)b)\{x \leftarrow c\} \\
(\varsigma(y)b)\{x \leftarrow c\} &= (\varsigma(y')(b\{y \leftarrow y'\}\{x \leftarrow c\})) && \text{si } y' \notin \text{fv}(\varsigma(y)b) \cup \text{fv}(c) \cup \{x\}
\end{aligned}$$

Notemos que en el último caso, reemplazamos y por y' por si $y = x$ asegurandonos, de esta manera, que no cambiamos el significado de la expresión.

α -conversión En objetos decimos que dos objetos ($o_1 \equiv o_2$) son equivalentes si saben responder a los mismo mensajes y si los métodos asociados a cada uno de ellos son equivalentes en ambos objetos. Y dos métodos $\varsigma(x)b$ y $\varsigma(y)b_y$ son equivalente si $b_y\{y \leftarrow x\} \longrightarrow b$, es decir si la única diferencia entre ambos métodos es el nombre de las variables.

$$\begin{aligned}
o_1 &\stackrel{def}{=} [l_1 = [], l_2 = \varsigma(x_2)x_2.l_1] \\
o_2 &\stackrel{def}{=} [l_2 = \varsigma(x_3)x_3.l_1, l_1 = []]
\end{aligned}$$

son equivalentes porque ambos objetos tiene los atributos l_1 y l_2 y $\varsigma(x_2)x_2.l_1 =_\alpha \varsigma(x_3)x_3.l_1$.

8.1.2. Semántica operacional

Todos los objetos son considerados valores.

$$V ::= [l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i \in 1..n}]$$

A diferencia del cálculo λ , usaremos el método de reducción **big-step** para evaluar expresiones. Este método nos permite saber el valor que representa la expresión en un solo paso.

$$\begin{aligned}
&\frac{}{v \longrightarrow v} [\text{Obj}] \\
&\frac{a \longrightarrow v' \quad v' \equiv [l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i \in 1..n}] \quad b_j\{x_j \leftarrow v'\} \longrightarrow v \quad j \in 1..n}{a.l_j \longrightarrow v} [\text{Sel}] \\
&\frac{a \longrightarrow [l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i \in 1..n}] \quad j \in 1..n}{a.l_j \Leftarrow \varsigma(x)b \longrightarrow [l_j = \varsigma(x)b, l_i = \varsigma(x_i)b_i^{i \in 1..n - \{j\}}]} [\text{Upd}]
\end{aligned}$$

La regla Obj nos dice que los objetos no reducen (o reducen a si mismos).

Sel nos indica que el resultado de enviar un mensaje es el valor que obtenemos al remplazar el parámetro del método asociado por el mismo objeto (esto es la ligación a **self**).

Upd es el comportamiento de la redifinición, que devuelve un objeto con los mismos atributos que a pero remplazando el j -ésimo atributo por la nueva definición.

Ejemplo de reducción

$$\frac{o \longrightarrow o \quad \frac{\frac{}{[]\{x \leftarrow o\} \longrightarrow []} [\text{Obj}]}{[]\{x \leftarrow o\} \longrightarrow []} [\text{Sel}]}{[a = [], b = \zeta(x)x.a].b \longrightarrow []} [\text{Sel}]$$

Indefinición Similar al cálculo λ , podemos definir expresiones que se indefinen pero, en este caso, no es necesario que introduzcamos ninguna estructura nueva. Por ejemplos, si intentamos evaluar la expresión $[a = \zeta(x)x.a].a$ nos daremos cuenta de que su reducción es infinita.

Codificación de funciones (Cálculo λ) Modelamos las expresiones del cálculo λ como objetos con un atributo *val* que nos indica su valor, las funciones, además tiene el atributo *arg* que representa al argumento de la función. El argumento de una función permanecerá indefinido hasta que aparezca en una aplicación.

$$\begin{aligned} [[x]] &\stackrel{\text{def}}{=} x \\ [[M N]] &\stackrel{\text{def}}{=} [[M]].arg := [[N]] \\ [[\lambda x.M]] &\stackrel{\text{def}}{=} [val = \zeta(y)[[M]]\{x \leftarrow y.arg\}, arg = \zeta(y)y.arg] \end{aligned}$$

Cuando queramos representar un método que espera parámetros, usaremos la definición de función para escribirlo: $\zeta(x)[[\lambda y.M]]$. Podemos hacer abuso de notación y escribir $\lambda(y)M$ en vez de $\zeta(x)[[\lambda y.M]]$ y $M(N)$, en vez de $[[M N]]$.

8.1.3. Traits

Un trait es una colección de métodos que parametrizan cierto comportamientos. Estos objetos no especifican variables de estado ni acceden a su estado.

El trait y sus métodos por si solo no son utilizables, ya que el trait no provee los estados necesarios para evaluarlos correctamente. Solo lo usaremos para definir métodos que pueden ser evaluados por varios objetos con el objetivo de no tener que repetir siempre las mismas definiciones.

Los vamos a representar como una colección de **pre-métodos** (que no usan el parámetro self). Por lo que un trait tendrá la siguiente forma:

$$\mathbf{t} = [l_i = \lambda y_i.b_i^{i \in 1..n}]$$

Vamos a decir que un trait es completo cuando provea todos los atributos necesarios para que un objeto pueda ser utilizado. Y, cuando es completo, podremos definir una función *new* como un constructor

que crea un objeto con las mismas etiquetas que el trait y que asocia a cada una de ellas un método que invoca al método del trait correspondiente con su primer parámetro ligado a **self**:

$$new \stackrel{def}{=} \lambda z. [l_i = \varsigma(s)z.l_i(s)^{i \in 1..n}]$$

En el siguiente ejemplo trait **CompT** no es completo y, por lo tanto, si queremos hacer un *new* de un objeto, nos devolverá un objeto inutilizable:

$$\begin{aligned} \text{CompT} \stackrel{def}{=} [\\ &eq = \varsigma(t)\lambda(x)\lambda(y)if (x.comp(y)) == 0 \text{ then true else false}, \\ &leq = \varsigma(t)\lambda(x)\lambda(y)if (x.comp(y)) < 0 \text{ then true else false} \\] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} new \text{ CompT} \longrightarrow [\\ &eq = \varsigma(x)\lambda(y)\text{CompT}.eq(x, y), \\ &leq = \varsigma(x)\lambda(y)\text{CompT}.leq(x, y) \\] \end{aligned}$$

Podemos ver que a *new CompT* le falta el atributo *comp* que es utilizado dentro de las funciones del trait para realizar la comparación.

El trait **Contador** mostrado a continuación es un trait completo. Si bien no puede ser usado, cuando creamos un objeto se le asignan los atributos *get*, *inc* y *v*. *get* e *inc* usan a *v* cuando son evaluados, por lo que estos dos métodos podrán ser ejecutados desde el nuevo objeto.

$$\begin{aligned} \text{Contador} \stackrel{def}{=} [&v = 0, \\ &inc = \lambda(s)s.v := s.v + 1, \\ &get = \lambda(s)s.v \\] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} new \text{ Contador} \stackrel{def}{=} [&v = \text{Contador}.v, \\ &inc = \varsigma(s)\text{Contador}.inc(s), \\ &get = \varsigma(s)\text{Contador}.get(s) \\] \end{aligned}$$

Cuando un trait completo tenga dentro suyo a la función *new*, diremos que ese trait es una **clase**:

$$\mathbb{C} \stackrel{def}{=} [\begin{array}{l} new = \varsigma(z)[l_i = \varsigma(s)z.l_i(s)^{i \in 1..n}] \\ l_i = \lambda(x_1) \dots \lambda(x_{n_i})B_i \end{array}]$$

Herencia Cuando queremos que una clase “herede”, lo que hacemos es crear un nuevo trait que contenga todas las etiquetas del trait original y asocie cada una de esas etiquetas al método correspondiente del trait original y le agregamos los atributos que deseamos para extenderlo. Además, modificamos el constructor *new* para que tome en cuenta los nuevos atributos.

$$\text{Contador} \stackrel{def}{=} [\begin{array}{l} new = \varsigma(z)[inc = \varsigma(s)z.inc(s), v = z.v, get = \varsigma(s)z.get(s)], \\ v = \lambda(s)0, \\ inc = \lambda(s)s.v := s.v + 1, \\ get = \lambda(s)s.v \end{array}]$$

Y su subclase **ContadorR**:

$$\text{ContadorR} \stackrel{def}{=} [\begin{array}{l} new = \varsigma(z)[\\ inc = \varsigma(s)z.inc(s), \\ v = z.v, \\ get = \varsigma(s)z.get(s), \\ reset = \varsigma(\lambda(s))z.reset(s) \\], \\ v = \text{Contador}.v \\ inc = \lambda(y)\text{Contador}.inc(y) \\ get = \lambda(y)\text{Contador}.get(y) \\ reset = \lambda(s)s.v := 0, \end{array}]$$

Otras consideraciones del lenguaje El lenguaje que definimos se parece mucho al funcional. En la versión imperativa, donde se mantiene un store con referencias a objetos, se ofrece la función **Clone**(*a*) que crea un nuevo objeto con las mismas etiquetas de *a* y cada componente comparte los métodos con las componentes de *a*.

Además, el lenguaje no nos deja agregar o eliminar dinámicamente métodos en un objeto y no nos deja extraer sus métodos, es decir, no es posible tener un método fuera de un objeto.

Hay otras versiones de este cálculo que incluyen sistemas de tipado.

Parte III

Paradigma Lógico

En este paradigma, los programas son un conjunto **hechos** y **reglas de inferencia** que sirven para inferir si un **objetivo** o **goal** es consecuencia de ellos. Es decir que, cuando escribimos un programa, **declaramos** expresiones que sabemos que son verdad (hechos y reglas) que nos permitirán probar, a través del uso de la lógica, que una expresión (objetivo) es verdad.

En prolog, esta demostración, se hace a través de un motor de inferencia que se basa en el **método de resolución** para realizar la demostración. Vamos a ver métodos no determinísticos de resolución para expresiones de la lógica proposicional y de primer orden. Luego, agregaremos a estos métodos reglas que nos permitirán convertirlos en algoritmos determinísticos y las formas y condiciones que debe cumplir un programa para que sea compatible con estas reglas.

9. Lógica Proposicional

Sintaxis

Dado un conjunto \mathcal{V} de **variables proposicionales** P, P_0, P_1, \dots , el conjunto de **formulas proposicionales** (o **proposiciones**) se define como:

$A, B := P$	una variable proposicional
$\neg A$	negación
$A \wedge B$	conjunción
$A \vee B$	disjunción
$A \supset B$	implicación
$A \iff B$	si y solo si

9.1. Semántica

Una **evaluación** es una función $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{T}, \mathbf{F}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales. Decimos que v **satisface** una proposición A si $V \models A$ donde:

$$\begin{aligned}
 v \models P & \text{ sii } v(P) = T \\
 v \models \neg A & \text{ sii } v \not\models A \text{ (} v \text{ no satisface } A \text{)} \\
 v \models A \vee B & \text{ sii } v \models A \text{ o } v \models B \\
 v \models A \wedge B & \text{ sii } v \models A \text{ y } v \models B \\
 v \models A \supset B & \text{ sii } v \models A \text{ o } v \models B \\
 v \models A \iff B & \text{ sii } (v \models A \text{ sii } v \models B)
 \end{aligned}$$

Una proposición es **satisfactible** si existe una valuación v tal que $v \models A$. Cuando no existe v que satisfaga A , decimos que A es **insatisfactible**.

Podemos extender estas definiciones a conjuntos de proposiciones. Si S es un conjunto de proposiciones, entonces es **satisfactible** si existe una valuación v tal que para todo $A \in S$, se tiene que $v \models A$. Y si no existe este v , entonces S es **insatisfactible**.

Dada una proposición A , si vale que $v \models A$ para toda valuación v , entonces decimos que A es una **tautología**.

Literales Un literal es una variable proposicional P o su negación $\neg P$.

9.1.1. Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Diremos que una proposición A está en FNC si es una conjunción de disyunciones de literales. Es decir si tiene la siguiente forma:

$$C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$$

donde cada **cláusula** C_i es una disyunción de literales:

$$B_{i1} \vee \cdots \vee B_{in_i}$$

Teorema: Para toda proposición A puede hallarse una proposición A' en FNC que es lógicamente equivalente a A .

Nota: A es lógicamente equivalente a B si y solo si la proposición $A \iff B$ es una tautología.

Notación conjuntista

Dada la siguiente expresión en forma normal conjuntiva:

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg B) \wedge (B \vee A) \wedge (C \vee D)$$

Trataremos de escribirla de manera más simple. Lo primero que notamos es que $(A \vee \neg A)$ es una tautología, ya que siempre vale una de las dos proposiciones. Entonces podemos eliminar esta cláusula sin modificar su valor de verdad.

$$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B) \wedge (B \vee A)$$

Además, $(\neg B \vee \neg B) \iff \neg B$ (\vee es idempotente):

$$(A \vee B) \wedge \neg B \wedge (B \vee A)$$

Como \vee también es conmutativo, sabemos que $(A \vee B) \iff (B \vee A)$ por lo que podemos eliminar una de las dos:

$$(A \vee B) \wedge \neg B$$

Logramos escribir la proposición original con una expresión equivalente con todas las clausulas distintas. Donde las clausulas son $C_1 = (A \vee B)$ y $C_2 = \neg B$.

Cuando sucede esto, podemos representar la proposición como un conjunto de clausulas $\{C_1, \dots, C_n\}$ donde cada clausula C_i es un conjunto de literales. Es decir que la expresión del ejemplo puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\{\{A, B\}, \{\neg B\}\}$$

9.2. Validez por refutación

Teorema: Una proposición A es una tautología sii $\neg A$ es insatisfactible.

Entonces, dada una proposición A , si probamos que $\neg A$ es insatisfactible podemos probar que A es una tautología. A pesar de que hay varias técnicas para hacer esto, vamos a concentrarnos en el método de **resolución** que fue introducido por Alan Robinson en 1965.

Este método es simple de implementar y hace uso de una única regla de inferencia (**la regla de resolución**) para demostrar que una fórmula en forma normal conjuntiva es insatisfactible.

9.2.1. Principios fundamentales

El método, usa la regla de inferencia para expandir un conjunto S hasta que el mismo contenga dos clausulas que se niegan entre si. Para esto, hace uso de la siguiente tautología:

$$(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P) \iff (A \vee P) \wedge (B \vee \neg P) \wedge (A \vee B)$$

Demostración Queremos ver que $(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P)$ y $(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P) \wedge (A \vee B)$ son equivalentes:

Si $(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P)$ es satisfactible, entonces valen las dos clausulas de la proposición. Por la primera clausula vale que A es satisfactible o P lo es. Si P es satisfactible, entonces B es satisfactible, pues $\neg P$ no lo es, entonces vale $(A \vee B)$.

Si P no es satisfactible, entonces A debe serlo para que $(A \vee P)$ lo sea y, además $\neg P$ es satisfactible por lo que la segunda clausula también lo es y como A es satisfactible vale $(A \vee B)$.

Por otro lado, si A y B no son satisfactibles, entonces $(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P)$ no es satisfactible pues, para que lo sea, tendrían que valer P y $\neg P$ al mismo tiempo.

Entonces, ambas expresiones son equivalentes.

Este resultado nos permite asegurar que los conjuntos de cláusulas

$$\{C_1, \dots, C_n, \{A, P\}, \{B, \neg P\}\} \quad y \quad \{C_1, \dots, C_n, \{A, P\}, \{B, \neg P\}, \{A, B\}\}$$

son equivalentes. Y si uno de ellos es insatisfactible, entonces el otro lo es.

Cuando esto suceda, diremos que la cláusula $\{A, B\}$ es la **resolvente** de las cláusulas $\{A, P\}$ y $\{B, \neg P\}$. Además generalizamos la definición para clausulas con más de dos literales:

Notación: Dado un literal L , su opuesto \bar{L} se define como

- $\neg P$ si $L = P$

- P si $L = \neg P$.

Dadas dos cláusulas C_1, C_2 , una cláusula C se dice **resolvente de C_1 y C_2** si y solo si, para algún literal $L, L \in C_1$ y $\bar{L} \in C_2$ y $C = (C_1 - \{L\}) \cup (C_2 - \{\bar{L}\})$. Notaremos la regla de resolución como

$$\frac{C_1 = \{A_1, \dots, A_m, L\} \quad C_2 = \{B_1, \dots, B_m, \bar{L}\}}{C = \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\}}$$

El método de resolución ira agregando resolventes (que todavía no pertenezcan) al conjunto hasta conseguir un conjunto que contenga dos cláusulas de la forma $\{P\}$ y $\{\neg P\}$ cuya resolvente es la cláusula vacía notada como \square . Cuando esto suceda, diremos que conseguimos una **refutación**.

Entonces, en resumen, el método de resolución trata de construir una secuencia de conjuntos clausales que termina en una refutación y, si lo logra, como todos los conjuntos de la secuencia son equivalentes el conjunto original no es satisficible.

El método siempre termina, ya que las resolventes agregados se forman con los literales distintos que aparecen en el conjunto de partida y hay una cantidad finitas de literales en dicho conjunto.

En el peor de los casos, la regla de resolución podrá generar una nueva cláusula por cada combinación diferente de literales distintos de S .

Teorema Dado un conjunto finito S de cláusulas, S es insatisficible si y solo si tiene una refutación.

Ejemplo de resolución

Vamos a probar que $\{\{P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\}$ es insatisficible. Armamos la primer resolvente con $\{P, Q\}, \{P, \neg Q\}$ que nos queda $C = \{P\}$, entonces el nuevo conjunto es:

$$\{\{P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}\}$$

Armamos la segunda resolvente con $\{\neg P, Q\}$ y $\{\neg P, \neg Q\}$ entonces $C_1 = \{\neg P\}$:

$$\{\{P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}, \{\neg P\}\}$$

Y por último usamos $\{P\}$ $\{\neg P\}$ y agregamos la resolvente \square al conjunto, obteniendo de esta manera la refutación que buscábamos.

$$\{\{P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{P\}, \{\neg P\}, \square\}$$

10. Lógica de primer orden

Definimos un método para probar que una proposición es una tautología. Sin embargo, todavía no tiene todo el poder que podría tener. Nos gustaría, dada una proposición con literales, saber que valor deberían tomar esos literales para que la proposición sea una tautología.

Para esto debemos dotar de semántica a los literales y proveer un mecanismo que nos permita inferir los valores que deben componer a cada uno de ellos.

10.1. Repaso

Un **lenguaje de primer orden** (LPO) \mathcal{L} consiste en:

1. Un conjunto numerable de **constantes** c_0, c_1, \dots
2. Un conjunto numerable de **símbolos de función** con aridad $n > 0$ f_0, f_1, \dots
3. Un conjunto numerable de **símbolos de predicado** con aridad $n \geq 0$, P_0, P_1, \dots

10.1.1. Términos de primer orden

Sea $\mathcal{V} = \{x_0, x_1, \dots\}$ un conjunto numerable de variables y \mathcal{L} un lenguaje de primer orden. El conjunto de **\mathcal{L} -términos** se define inductivamente como:

- Toda constante de \mathcal{L} y toda variable es un \mathcal{L} -término.
- Si $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{L}$ -términos y f es un símbolo de función de aridad n , entonces

$$f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{L}\text{-términos}$$

10.1.2. Fórmulas atómicas

Sea \mathcal{V} un conjunto numerable de variables y \mathcal{L} un lenguaje de primer orden. El conjunto de **\mathcal{L} -fórmulas atómicas** se define inductivamente como:

1. Todo símbolo de predicado de aridad 0 es una \mathcal{L} -fórmula atómica.
2. Si $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{L}$ -términos y P es un símbolo de predicado de aridad n , entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una \mathcal{L} -fórmula atómica.

10.1.3. Fórmulas de primer orden

Sea \mathcal{V} un conjunto numerable de variables y \mathcal{L} un lenguaje de primer orden. El conjunto de **\mathcal{L} -fórmulas** se define inductivamente como:

1. Toda \mathcal{L} -fórmula atómica es \mathcal{L} -fórmula.
2. Si $A, B \in \mathcal{L}$ -fórmula, entonces $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ y $A \iff B$ son \mathcal{L} -fórmulas.
3. Para toda variable x_i y cualquier \mathcal{L} -fórmula A , $\forall x_i. A$ y $\exists x_i. A$ son \mathcal{L} -fórmulas.

Variables libres y ligadas

Las variables pueden ocurrir **libres** o **ligadas**. En este lenguaje, los cuantificadores ligan variable y usaremos $FV(A)$ y $BV(A)$ para referirnos a las variables libres y ligadas, respectivamente, de A .

Cuando $FV(A) = \emptyset$ diremos que A es una **sentencia**.

Una fórmula A está **rectificada** si $FV(A)$ y $BV(A)$ son disjuntos, es decir si todos los cuantificadores que aparecen en A ligan variables distintas. Además, toda fórmula se puede **rectificar** a una fórmula equivalente renombrando sus variables.

10.1.4. Estructuras de primer orden

Dado un lenguaje \mathcal{L} , una **estructura para \mathcal{L}** , \mathbf{M} , es un par $\mathbf{M} = (M, I)$ donde

- M (**dominio**) es un conjunto no vacío
- I (**función de interpretación**) asigna funciones y predicados sobre M a símbolos del lenguaje \mathcal{L} de la siguiente manera:
 1. Para toda constante c , $I(c) \in M$.
 2. Para todo f de aridad $n > 0$, $I(f) : M^n \rightarrow M$
 3. Para todo predicado P de aridad $n \geq 0$, $I(P) : M^n \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$

Sea M una estructura para \mathcal{L} . Una **asignación** es una función $s : \mathcal{V} \rightarrow M$ y, si $a \in M$, escribimos $s[x \leftarrow a]$ para denotar la asignación que se comporta igual que s salvo en el elemento x , en cuyo caso retorna a .

10.1.5. Satisfactibilidad

La relación $s \models_M A$ establece que la asignación s satisface la fórmula A en la estructura M . Y se define usando inducción estructural en A :

$s \models_{\mathbf{M}} P(t_1, \dots, t_n)$	<i>sii</i> $P(s(t_1), \dots, s(t_n))$
$s \models_{\mathbf{M}} \neg A$	<i>sii</i> $s \not\models_{\mathbf{M}} A$
$s \models_{\mathbf{M}} (A \vee B)$	<i>sii</i> $s \models_{\mathbf{M}} A$ o $s \models_{\mathbf{M}} B$
$s \models_{\mathbf{M}} (A \wedge B)$	<i>sii</i> $s \models_{\mathbf{M}} A$ y $s \models_{\mathbf{M}} B$
$s \models_{\mathbf{M}} (A \supset B)$	<i>sii</i> $s \not\models_{\mathbf{M}} A$ o $s \models_{\mathbf{M}} B$
$s \models_{\mathbf{M}} (A \iff B)$	<i>sii</i> ($s \models_{\mathbf{M}} A$ <i>sii</i> $s \models_{\mathbf{M}} B$)
$s \models_{\mathbf{M}} (A \supset B)$	<i>sii</i> $s \not\models_{\mathbf{M}} A$ o $s \models_{\mathbf{M}} B$
$s \models_{\mathbf{M}} \forall x_i. A$	<i>sii</i> $s[x_i \leftarrow a] \models_{\mathbf{M}} A$ para todo $a \in \mathbf{M}$
$s \models_{\mathbf{M}} \exists x_i. A$	<i>sii</i> $s[x_i \leftarrow a] \models_{\mathbf{M}} A$ para algún $a \in \mathbf{M}$

10.1.6. Validez

- Una fórmula A es **satisfactible en \mathbf{M}** si y solo si existe una asignación s tal que $s \models_{\mathbf{M}} A$
- Una fórmula A es **satisfactible** si y solo si existe un \mathbf{M} tal que A es satisfactible en \mathbf{M} . En caso contrario se dice que A es insatisfactible.
- Una fórmula A es **válida en \mathbf{M}** si y solo si $s \models_{\mathbf{M}} A$, para toda asignación s .
- A es válida si y solo si $\neg A$ es insatisfactible.

10.2. El método de resolución

El **teorem de Church** asegura que **no** existe un algoritmo que pueda determinar si una fórmula de primer orden es válida. Por lo que el método de resolución será parcialmente computable, es decir que si la sentencia que deseamos resolver es insatisfactible entonces hallaremos una refutación a la misma, en caso contrario puede ser que no se detenga.

Para resolver una fórmula, el método tomará su forma clausal e irá agregando resolventes hasta que el conjunto contenga a la cláusula vacía.

10.2.1. Forma de la fórmula

Dada una fórmula A , el primer paso es escribirla en forma clausal siguiendo estos pasos:

1. Eliminar las implicaciones, es decir, si aparece una cláusula de la forma $(A \supset B)$, reescribirla como $(\neg A \vee B)$.
2. Pasar a **forma normal negada**.
3. Pasar a **forma normal prenexa**.
4. Pasar a **forma normal de Skolem**.
5. Pasar a **forma normal conjuntiva**.
6. **Distribuir** cuantificadores universales.

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en **forma normal negada** (NNF) se define inductivamente como:

1. Para cada fórmula atómica A , A y $\neg A$ están en NNF.
2. Si $A, B \in \text{NNF}$, entonces $(A \vee B), (A \wedge B) \in \text{NNF}$.
3. Si $A \in \text{NNF}$, entonces $(\forall x.A), (\exists x.A) \in \text{NNF}$.

En otras palabras, son todas las fórmulas en las que si aparece una negación, entonces esta está aplicada a una fórmula atómica del lenguaje.

Los remplazos que se hacen para pasar una fórmula a FNN son:

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$$

$$\neg\neg A \iff A$$

$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg\forall x.A \iff \exists x.\neg A$$

$$\neg\exists x.A \iff \forall x.\neg A$$

Forma normal prenexa

Son las fórmulas de la forma $Q_1x_1 \dots Q_nx_n.B$, $n \geq 0$, donde B no tiene cuantificadores, x_1, \dots, x_n son variables y $Q_i \in \{\forall, \exists\}$.

Sea A una fórmula en forma normal negativa, entonces valen las siguientes equivalencias:

$$(\forall x.A) \wedge B \iff \forall x.(A \wedge B)$$

$$(\forall x.A) \vee B \iff \forall x.(A \vee B)$$

$$(A \wedge \forall x.B) \iff \forall x.(A \wedge B)$$

$$(A \vee \forall x.B) \iff \forall x.(A \vee B)$$

$$(\exists x.A) \wedge B \iff \exists x.(A \wedge B)$$

$$(\exists x.A) \vee B \iff \exists x.(A \vee B)$$

$$(A \wedge \exists x.B) \iff \exists x.(A \wedge B)$$

$$(A \vee \exists x.B) \iff \exists x.(A \vee B)$$

Cuando una fórmula tenga dos o más cuantificadores que ligen variables con el mismo nombre, entonces debemos renombrar cada una de esas variables con nombres distintos para poder realizar la transformación.

10.2.2. Forma normal de Skolem

Dada una fórmula en forma normal prenexa, debemos pasarla a forma normal de Skolem usando un proceso llamado **solemización**. El objetivo de esta transformación es eliminar los cuantificadores existenciales de una fórmula sin alterar su satisfactibilidad.

La idea es que al eliminar el existencial reemplazemos cada aparición de la variable que ligaba por un “testigo” que es una constante nueva del lenguaje de primer orden que depende de las demás variables libres de la fórmula. Por ejemplo, si tenemos la fórmula $\exists x.P(x)$, su forma skolemizada será $P(c)$ con c una nueva constante del lenguaje que llamaremos **parámetro**.

En fórmulas más grandes, cada ocurrencia de una subfórmula $\exists x.B$ en A se reemplaza por $B\{x \leftarrow f(x_1, \dots, x_n)\}$ donde:

- $\{\bullet \leftarrow \bullet\}$ es la operación usual de sustitución.
- f es un símbolo de función nuevo y las x_1, \dots, x_n , son las variables libres en B de las que depende x .

Ahora, si bien el resultado de skolemizar una fórmula preserva la satisfactibilidad, no preserva validez. Por ejemplo, la fórmula $\exists x.(P(a) \supset P(x))$ es válida, sin embargo, su skolemización $P(a) \supset P(b)$ no lo es. (Ver la definición de validez en 10.1.6).

Definición formal

Sea A una sentencia rectificada en forma normal negada, la **forma normal de Skolem de A** (**SK(A)**) se define recursivamente como sigue:

Sea A' cualquier subfórmula de A ,

- Si A' es una fórmula atómica o su negación, $\mathbf{SK}(A') = A'$.
- Si A' es de la forma $(B \star C)$ con $\star \in \{\wedge, \vee\}$, entonces $\mathbf{SK}(A') = (\mathbf{SK}(B) \star \mathbf{SK}(C))$.
- Si A' es de la forma $\forall x.B$, entonces $\mathbf{SK}(A') = \forall x.\mathbf{SK}(B)$.
- Si A' es de la forma $\exists x.B$ y $\{x, y_1, \dots, y_m\}$ son las variables libres de B , entonces:
 1. Si $m > 0$, crear un **símbolo de función de Skolem**, f_x de aridad m y definir:

$$\mathbf{SK}(A') = \mathbf{SK}(B\{x \leftarrow f(y_1, \dots, y_m)\})$$

2. Si $m = 0$, crear una nueva **constante de Skolem** c_x y

$$\mathbf{SK}(A') = \mathbf{SK}(B\{x \leftarrow c_x\})$$

Forma clausal

Una vez que tenemos una fórmula en forma normal prenexa skolemizada, es decir tiene la siguiente forma:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n. B$$

Pasamos B a **forma normal conjuntiva** 9.1.1 como si fuese una fórmula proposicional y distribuimos los cuantificadores sobre cada conjunción, obteniendo así una conjunción de **cláusulas**

$$\forall x_1 \dots \forall x_n. C_1 \wedge \dots \wedge \forall x_1 \dots \forall x_n. C_m$$

donde cada C_i es una disyunción de literales. Luego, podemos escribirla de la siguiente forma:

$$\{C_1, \dots, C_m\}$$

10.2.3. Regla de resolución

A diferencia de la lógica de primer orden, tendremos literales que cuando son negados podrían contradecir a otro literal que no sea exactamente el mismo. Por ejemplo, si tenemos la siguiente proposición $\{\{P(x)\}, \{\neg P(a)\}\}$. La primera cláusula, nos dice que vale $P(x)$ para todo x y la segunda nos dice que $P(a)$ no vale, esto es una contradicción que deberíamos poder resolver.

Debemos **unificar** estas dos expresiones con el algoritmo de Martelli-Montanari. Por lo que en cada paso, elegiremos las cláusulas que queremos resolver, buscaremos un MGU que nos permita modificarlas y la resolvente será la resolvente de ambas expresiones con el MGU aplicado.

Entonces, la regla es:

$$\frac{\{B_1, \dots, B_k, A_1, \dots, A_n\} \quad \{\neg D_1, \dots, \neg D_k, A_1, \dots, A_n\}}{\sigma(\{A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n\})}$$

donde σ es el **unificador más general** (MGU) de $\{B_1, \dots, B_k, \neg D_1, \dots, \neg D_k\}$ y $\sigma(\{A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n\})$ es el **resolvente**.

Cuando usamos σ , debemos tener en cuenta que todas las cláusulas usan variables distintas, por lo que si hay dos cláusulas que usan variables con el mismo nombre es conveniente renombrarlas para evitar confusiones.

10.2.4. Método de resolución

Ya tenemos la regla de resolución para fórmulas de la lógica de primer orden. El método de resolución es análogo al de la lógica proposicional. En cada paso buscaremos una resolvente que podamos agregar al conjunto y haremos esto hasta que la resolvente que agregamos sea \square (la cláusula vacía).

A diferencia del método de lógica de primer orden, en cada paso no solo agregaremos una resolvente al conjunto sino que además definimos una sustitución que nos permitirá unificar distintos términos de la expresiones.

Ejemplo: Queremos probar que $\{C_1, C_2, C_3\}$ es insatisfactible con

- $C_1 = \{\neg P(z_1, a), \neg P(z_1, x), \neg P(x, z_1)\}$
 - $C_2 = \{P(z_2, f(z_2)), P(z_2, a)\}$
 - $C_3 = \{P(f(z_3), z_3), P(z_3, a)\}$
1. De C_1 y C_2 con $\{z_1 \leftarrow a, x \leftarrow a, z_2 \leftarrow a\}$ tenemos $C_4 = \{P(a, f(a))\}$
 2. De C_1 y C_2 con $\{z_1 \leftarrow a, x \leftarrow a, z_3 \leftarrow a\}$ tenemos $C_5 = \{P(f(a), a)\}$
 3. De C_1 y C_5 con $\{z_1 \leftarrow f(a), x \leftarrow a\}$: $C_6 = \{\neg P(a, f(a))\}$
 4. De C_4 y C_6 : \square .

10.2.5. Regla de resolución binaria

$$\frac{\{B_1, A_1, \dots, A_n\} \quad \{\neg D_1, A_1, \dots, A_n\}}{\sigma(\{A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n\})}$$

Si intentamos refutar $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}\}$ solo con esta regla nos encontraremos con que no podremos encontrar una secuencia de resolventes que termine en la cláusula \square .

Regla de factorización

La regla de factorización resuelve este problema permitiendonos extraer de una cláusula un literal represente a cada uno de los literales que la componen. Es decir, un literal que pueda ser unificado con cada uno de los literales de la cláusula.

$$\frac{\{B_1, \dots, B_k, A_1, \dots, A_n\}}{\sigma(\{B_1, A_1, \dots, A_m\})}$$

Entonces con esta regla podemos usar $\{P(z)\}$ como resolvente para la cláusula $\{P(x), P(y)\}$ y la demostración del ejemplo anterior quedaría de la siguiente forma:

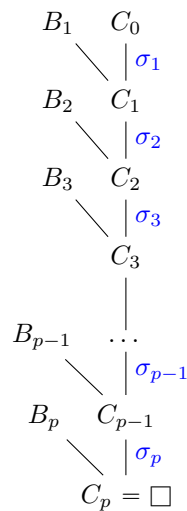
1. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}\}$
2. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}\}$ (por la regla de factorización sobre la primer cláusula)
3. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}, \{\neg P(u)\}\}$ (por la regla de factorización sobre la segunda cláusula)
4. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}, \{\neg P(u)\}, \square\}$

11. Resolución SLD

Si bien los métodos que propusimos hasta ahora son completos, hallar refutaciones es un proceso muy caro en el caso general, el espacio de búsqueda que producen puede ser enorme y tienen un alto grado de no-determinismo. Debemos agregar ciertas restricciones que nos permitan reducir este espacio sin que esto afecte a la completitud del método.

11.1. Resolución lineal

Una secuencia de pasos de resolución a partir de S es **lineal** si es de la forma:



donde C_0 y cada B_i es un elemento de S o algún C_j con $j < i$.

Este tipo de resolución reduce el espacio de búsqueda considerablemente, sin embargo sigue siendo altamente no-determinístico ya que no se especificó ningún criterio de búsqueda ni selección de las cláusulas que debemos usar de este espacio.

11.2. Cláusulas de Horn

Podemos lograr una mayor eficiencia en el proceso de producir refutaciones si solo consideramos una **subclase** de fórmulas lo suficientemente expresivas. Es decir, que si bien existirán fórmulas que no podremos resolver con este método, las fórmulas que resolveremos tendrán el suficiente poder como para ser un método computacionalmente completo.

El subconjunto de cláusulas que vamos a usar son las cláusulas de Horne:

Una cláusula $\forall x_1 \dots \forall x_m. C$ tal que la disyunción de literales C tiene **a lo sumo** un literal positivo. Y diremos que una cláusula de esta forma es una **cláusula de definición** cuando C tiene **exactamente** un literal positivo.

El método de resolución SLD, tendrá como entrada un conjunto de cláusulas de Horn $S = P \cup \{G\}$ donde P es nuestro programa (conjunto de axiomas y reglas de entrada o base de conocimiento) y G es nuestro goal.

Una secuencia de pasos de **resolución SLD** para S es una secuencia $\langle N_0, N_1, \dots, N_p \rangle$ de **cláusulas negativas** que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. N_0 es el goal G .
2. para todo N_i en la secuencia, $0 < i < p$, si N_i es

$$\{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_n\}$$

entonces hay alguna **cláusula de definición** C_i de la forma $\{A, \neg B_1, \dots, \neg B_m\}$ en P tal que A_k y A son unificable con el MGU σ y si :

- $m = 0$, entonces $N_{i+1}E$ es

$$\{\sigma(\{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_n\})\}$$

- $m > 0$, entonces $N_{i+1}E$ es

$$\{\sigma(\{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \dots, \neg B_m, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_n\})\}$$

Esto significa que cada paso de la secuencia es la resolución del pase anterior con una cláusula de Horne definida en nuestro programa que tiene un literal positivo A que unifica con algún literal A_k negado en dicho paso. Llamaremos **átomo seleccionado** al literal A_k . Y **sustitución respuesta** a la composición de las sustituciones.

Este es el método que usa Prolog para extraer la salida del programa. Por ejemplo, si consideramos el siguiente programa:

- $C_1 = \{add(U, O, U)\}$
- $C_1 = \{add(X, succ(Y), succ(Z)), \neg add(X, Y, Z)\}$

Y definimos nuestro goal $G = \{\neg add(succ(0), V, succ(succ(0)))\}$, entonces una resolución posible es la siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
C_2 & \{ \neg \text{add}(\text{succ}(0), V, \text{succ}(\text{succ}(0))) \} & \downarrow \sigma_1 \\
C_1 & \{ \neg \text{add}(\text{succ}(0), V, \text{succ}(\text{succ}(0))) \} & \downarrow \sigma_2 \\
& & \square
\end{array}$$

$$\sigma_1 = \{X \leftarrow succ(0), Z \leftarrow succ(0), V \leftarrow succ(Y)\}$$

$$\sigma_2 = \{U \leftarrow succ(0), Y \leftarrow 0\}$$

Y la sustitución resultado es:

$$\{X \leftarrow succ(0), Z \leftarrow succ(0), V \leftarrow succ(0), U \leftarrow succ(0), Y \leftarrow 0\}$$

11.2.1. Corrección y completitud

Corrección Si un conjunto de cláusulas de Horn tiene una refutación SLD, entonces es insatisfacible.

Compleitud Dado un conjunto de cláusulas de Horn $P \cup \{G\}$, si $P \cup \{G\}$ es insatisfactible, existe una refutación SLD cuya primera cláusula es G .

11.3. Resolución SLD en Prolog

El método SLD todavía deja sin determinar como realizar la búsqueda y la selección de las cláusulas de nuestro programa para aplicar en la resolución. Para solucionar esto, se usan **estrategias** que determinan la forma de los árboles de búsqueda o **árbol SLD** de nuestra resolución.

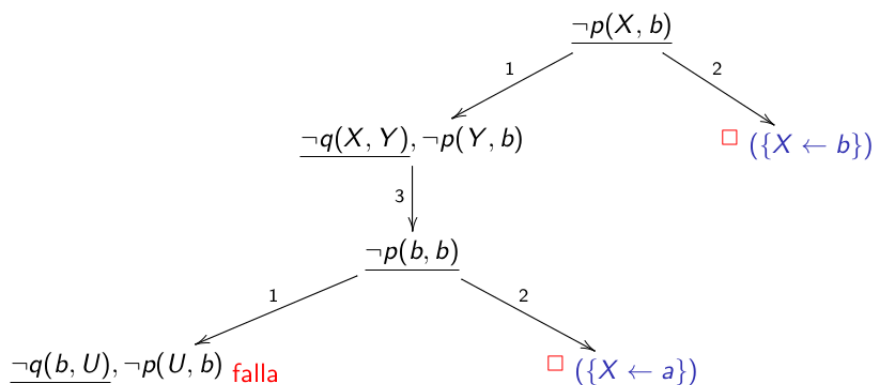
Esto quiere decir que cuando diseñamos un programa debemos tener en cuenta la estrategia que estamos usando para determinar el orden de las cláusulas que estamos definiendo. Hay que tratar de que el método consiga, primero, las soluciones de las ramas “mas interesante” y luego explore el resto del árbol.

Podría llegar a pasarnos que, debido a una mala elección de este orden (para la estrategia elegida), el método no encuentre una refutación para una expresión que es insatisfacible.

Prolog, en particular, selecciona las cláusulas del programa de arriba hacia abajo, es decir, en el orden en que fueron introducidas y el átomo seleccionado en cada paso es el átomo de más a la izquierda de la fórmula. Además, como puede haber varias resoluciones SLD, Prolog realiza backtracking sobre las reglas usadas para generar todas las soluciones posibles. Si consideramos el siguiente programa:

1. $\{p(X, Z), \neg q(X, Y), \neg p(Y, Z)\}$
2. $\{p(X, X)\}$
3. $\{q(a, b)\}$

Y nuestro goal es $\{\neg p(X, b)\}$, entonces, Prolog, realizaría el siguiente árbol SLD:



Otra posible estrategia de selección sería, por ejemplo, elegir resolver la cláusula más a la derecha, en cuyo caso el ejemplo que dimos dejaría de funcionar ya que la primer rama del árbol sería infinita y no encontraríamos nunca una refutación.

Y si decidiesemos seleccionar las cláusulas de abajo hacia arriba, entonces obtendríamos el árbol mostrado reflejado.

Hay que tener en cuenta que elegimos el ejemplo para que funcionase bien con la estrategia que sigue Prolog, sin embargo, hay ejemplos en los que esta estrategia cae en el mismo caso que en la primer estrategia alternativa mencionada.

11.3.1. Implementación y otras cosas sobre Prolog

La estrategia usada por Prolog recorre el árbol SLD en **profundidad** (depth-first search). Las ventajas de esto es que puede ser implementado de manera muy eficiente usando una **pila** para representar los átomos del goal. La idea es hacer un **push** del resolvente del átomo del tope de la pila con la cláusula de definición y hacer un **pop** cuando el átomo del top de la pila no unifica con ninguna cláusula de definición más.

Cut

Es una notación que nos permite **podar** el árbol SLD. Es de carácter extra-lógico y nos permite **hacer más eficientes** algunas consultas. El uso correcto de esta notación no debería modificar el universo de posibles soluciones a una consulta.

Cuando se selecciona un cut, tiene éxito **inmediatamente**. Si, debido a backtracking, se vuelve al mismo cut entonces se hace fallar el goal que le dio origen.

Negación por falla

Se dice que un árbol SLD **falla finitamente** si es finito y no tiene ramas de éxito.

Dado un programa P el **conjunto de falla finita** de P es

$$\{B \mid B \text{ es un átomo cerrado y existe un árbol SLD que falla finitamente con } B \text{ como raíz}\}$$

Esto significa que podemos inferir la insatisfactibilidad de una cláusula cerrada si la cantidad de chequeos que tenemos que hacer para probarlo es finita y si, además, tenemos un conjunto finito de símbolos sobre los que chequear.

En Prolog, tenemos el predicado **not** que nos permite realizar este tipo de resolución, sin embargo debemos asegurarnos de que los predicados que le pasemos sean cerrados, ya que al no ser un predicado lógico, no se instancias variables en ningún momento.

Parte IV

Apéndices

A. Programación funcional en Haskell

Tipos elementales

1	-- Int	Enteros
'a'	-- Char	Caracteres
1.2	-- Float	Números de punto flotante
True	-- Bool	Booleanos
[1,2,3]	-- [Int]	Listas
(1, True)	-- (Int, Bool)	Tuplas, pares
length	-- [a] -> Int	Funciones
length [1,2,3]	-- Int	Expresiones
\x -> x	-- a -> a	Funciones anónimas

Guardas

```
signo n | n >= 0    = True
        | otherwise = False
```

Pattern Matching

```
longitud [] = 0
longitud (x:xs) = 1 + (longitud xs)
```

Polimorfismo paramétrico

```
todosIguales :: Eq a => [a] -> Bool
todosIguales [] = True
todosIguales [x] = True
todosIguales (x:y:xs) = x == y && todosIguales(y:xs)
```

Clases de tipo

```
Eq a    -- Tipos con comparación de igualdad
Num a   -- Tipos que se comportan como los números
Ord a   -- Tipos orden
Show a  -- Tipos que pueden ser representados como strings
```

Definición de listas

```
[1,2,3,4,5]           -- Por extensión
[1 .. 4]              -- Secuencias aritméticas
[ x | x <- [1..], esPar x ] -- Por compresión
```

cuando las usamos. **Ejemplo** de lista infinita:

```
infinitosUnos :: [Int]
infinitosUnos = 1 : infinitosUnos

puntosDelCuadrante :: [(Int, Int)]
puntosDelCuadrante = [ (x, s-x) | s <- [0..], x <- [0..s] ]
```

Funciones de alto orden

```
mejorSegun :: (a -> a -> Bool) -> [a] -> a
mejorSegun _ [x] = x
mejorSegun f (x : xs) | f x (mejorSegun f xs) = x
                      | otherwise = mejorSegun f xs
```

A.1. Otros tipos útiles

Formula

```
data Formula = Proposicion String | No Formula
              | Y Formula Formula
              | O Formula Formula
              | Imp Formula Formula

foldFormula :: (String -> a) -> (Formula -> a) ->
  (Formula -> Formula -> a) -> (Formula -> Formula -> a)
  -> (Formula -> Formula -> a) -> Formula -> a
foldFormula fp fn fy fo fImp form = case form of :
  Proposicion s -> fp s
  No sf -> fn (rec sf)
  Y sf1 sf2 -> fy (rec sf1) (rec sf2)
  O sf1 sf2 -> fo (rec sf1) (rec sf2)
  Impl sf1 sf2 -> fImpl (rec sf1) (rec sf2)
  where rec = foldForm fp fn fy fo fImp
```

Rosetree


```
data Rosetree = Rose a [Rosetree]
-- Hay varias formas de definir el fold para esta estructura
foldRose :: (a -> [b] -> b) -> Rosetree a -> b
foldRose f ( Rose x l ) = f x ( map ( foldRose f ) l )

foldRose2 :: ( a -> c -> b) -> ( b -> c -> c ) -> c
-> Rosetree a -> b
foldRose2 g f z (Rose x l) =
g x ( foldr f z ( map ( foldRose g f z ) l ) )
```

B. Extensiones del lenguaje λ^b

B.1. Registros $\lambda^{\dots r}$

Tipos

$$\sigma, \tau ::= \dots \mid \{l_i : \sigma_i^{i \in 1..n}\}$$

El tipo $\{l_i : \sigma_i^{i \in 1..n}\}$ representan las estructuras con n atributos tipados, por ejemplo: $\{\text{nombre} : \text{String}, \text{edad} : \text{Nat}\}$

Términos

$$M ::= \dots \mid \{l_i = M_i^{i \in 1..n}\} \mid M.l$$

Los términos significan:

- El registro $\{l_i = M_i^{i \in 1..n}\}$ evalúa $\{l_i = V_i^{i \in 1..n}\}$ donde V_i es el s al que evalúa M_i para $i \in 1..n$.
- $M.l$: Proyecta el valor de la etiqueta l del registro M

Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M_i : \sigma_i \text{ para cada } i \in 1..n}{\Gamma \triangleright \{l_i = M_i^{i \in 1..n}\} : \{l_i : \sigma_i^{i \in 1..n}\}} \text{(T-RCD)}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright \{l_i = M_i^{i \in 1..n}\} : \{l_i : \sigma_i^{i \in 1..n}\} \quad j \in 1..n}{\Gamma \triangleright M.l_j : \sigma_j} \text{(T-Proj)}$$

Axiomas y reglas de subtipado

$$\frac{\{l_i \mid i \in 1..n\} \subseteq \{k_j \mid j \in 1..m\} \quad k_j = l_i \Rightarrow \sigma_j <: \tau_i}{\{k_j : \sigma_j \mid j \in 1..m\} <: \{l_i : \sigma_i \mid i \in 1..n\}} \text{(S-Rcd)}$$

Esta regla nos dice que un registro N es subtipo de otro registro M , si el conjunto de etiquetas de M está contenido en el conjunto de etiquetas de N y, además, si los tipos de cada una de esas etiquetas, en M , es más general que en N .

Una de las consecuencias de esta regla es que $\sigma <: \{\}$ para todo tipo registro σ . Esto es porque $\{\}$ no tiene etiquetas, osea que su conjunto de etiquetas es el conjunto \emptyset que está contenido en todos los conjuntos.

Valores

$$V ::= \dots \mid \{l_i = V_i^{i \in 1..n}\}$$

Axiomas y reglas de evaluación

$$\frac{j \in 1..n}{\{l_i = \textcolor{red}{V}_i^{i \in 1..n}\}.l_j \rightarrow \textcolor{red}{V}_j} \text{(E-ProjRcd)}$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{M.l \rightarrow M'.l} \text{(E-Proj)}$$

$$\frac{M_j \rightarrow M'_j}{\{l_i = \textcolor{red}{V}_i \mid i \in 1..j-1, l_j = M_j, l_i = M_i \mid i \in j+1..n\} \rightarrow \{l_i = \textcolor{red}{V}_i \mid i \in 1..j-1, l_j = M'_j, l_i = M_i \mid i \in j+1..n\}} \text{(E-RCD)}$$

B.2. Declaraciones Locales ($\lambda^{\dots let}$)

Con esta extensión, agregamos al lenguaje el término $let\ x : \sigma = M\ in\ N$, que evalúa M a un valor, liga x a V y, luego, evalúa N . Este término solo mejora la legibilidad de los programas que ya podemos definir con el lenguaje hasta ahora definido.

Términos

$$M ::= \dots \mid let\ x : \sigma = M\ in\ N$$

Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma_1 \quad \Gamma, x : \sigma_1 \triangleright N : \sigma_2}{\Gamma \triangleright let\ x : \sigma_1 = M\ in\ N : \sigma_2} \text{(T-Let)}$$

Axiomas y reglas de evaluación

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{let\ x : \sigma = M_1\ in\ M_2 \rightarrow let\ x : \sigma = M'_1\ in\ M_2} \text{(E-Let)}$$

$$\frac{}{let\ x : \sigma = \textcolor{red}{V}_1\ in\ M_2 \rightarrow M_2\{x \leftarrow \textcolor{red}{V}_1\}} \text{(E-LetV)}$$

B.2.1. Construcción let recursivo (Letrec)

Una construcción alternativa para definir funciones recursivas es

$$letrec\ f : \sigma \rightarrow \sigma = \lambda x : \sigma. M\ in\ N$$

Y $letRec$ se puede definir en base a let y fix (definido en 3.7) de la siguiente forma:

$$let\ f : \sigma \rightarrow \sigma = (fix\ \lambda f : \sigma \rightarrow \sigma. \lambda x : \sigma. M)\ in\ N$$

B.3. Tuplas

Tipos

$$\sigma, \tau ::= \dots \mid \sigma \times \tau$$

Términos

$$M, N ::= \dots \mid \langle M, N \rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$$

Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \Gamma \triangleright N : \tau}{\Gamma \triangleright \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau} (\text{T-Tupla})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \times \tau}{\Gamma \triangleright \pi_1(M) : \sigma} (\text{T-}\pi_1) \quad \frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \times \tau}{\Gamma \triangleright \pi_2(M) : \tau} (\text{T-}\pi_2)$$

Valores

$$V ::= \dots \mid \langle V, V \rangle$$

Axiomas y reglas de evaluación

$$\frac{M \rightarrow M'}{\langle M, N \rangle \rightarrow \langle M', N \rangle} (\text{E-Tuplas}) \quad \frac{N \rightarrow N'}{\langle \textcolor{red}{V}, N \rangle \rightarrow \langle \textcolor{red}{V}, N' \rangle} (\text{E-Tuplas1})$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M')} (\text{E-}\pi_1) \quad \frac{}{\pi_1(\langle \textcolor{red}{V}_1, \textcolor{red}{V}_2 \rangle) \rightarrow \textcolor{red}{V}_1} (\text{E-}\pi'_1)$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\pi_2(M) \rightarrow \pi_2(M')} (\text{E-}\pi_2) \quad \frac{}{\pi_2(\langle \textcolor{red}{V}_1, \textcolor{red}{V}_2 \rangle) \rightarrow \textcolor{red}{V}_2} (\text{E-}\pi'_2)$$

B.4. Listas**Tipos**

$$\sigma ::= \dots \mid [\sigma]$$

Términos

$$M, N, O ::= \dots \mid []_\sigma \mid M :: N \mid \text{case } M \text{ of } [] \rightsquigarrow N \mid h :: t \rightsquigarrow O \mid \text{foldr } M \text{ base } \rightsquigarrow N; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow O$$

Los términos son:

- $[]_\sigma$ es la lista vacía de tipo σ

Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \triangleright []_\sigma : [\sigma]} (\text{T-Vacio})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : [\sigma] \quad \Gamma \triangleright N : \tau \quad \Gamma, h : \sigma, t : [\sigma] \triangleright O : \tau}{\Gamma \triangleright \text{case } M \text{ of } \{ [] \rightsquigarrow N \mid h :: t \rightsquigarrow O \} : \tau} (\text{T-Case})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \Gamma \triangleright N : [\sigma]}{\Gamma \triangleright M :: N : [\sigma]} (\text{T-::})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : [\sigma] \quad \Gamma \triangleright N : \tau \quad \Gamma, h : \sigma, r : \tau \triangleright O : \tau}{\Gamma \triangleright \text{foldr } M \text{ base } \rightsquigarrow N; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow O : \tau} (\text{T-Fold})$$

$$\text{Valores } V ::= \dots \mid []_\sigma \mid V :: V$$

Axiomas y reglas de evaluación

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1 :: M_2 \rightarrow M'_1 :: M_2} (\text{E-} :: 1)$$

$$\frac{M_2 \rightarrow M'_2}{V :: M_2 \rightarrow V :: M'_2} (\text{E-} :: 2)$$

$$\frac{}{\text{case } [\]_\sigma \text{ of } \{[\] \rightsquigarrow N \mid h :: t \rightsquigarrow O\} \rightarrow N} (\text{E-Case}[\])$$

$$\frac{}{\text{case } V_1 :: V_2 \text{ of } \{[\] \rightsquigarrow N \mid h :: t \rightsquigarrow O\} \rightarrow O\{h \leftarrow V_1, t \leftarrow V_2\}} (\text{E-Case} ::)$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{case } M \text{ of } \{[\] \rightsquigarrow N \mid h :: t \rightsquigarrow O\} \rightarrow \text{case } M' \text{ of } \{[\] \rightsquigarrow N \mid h :: t \rightsquigarrow O\}} (\text{E-Case1})$$

$$\frac{}{\text{foldr } [\]_\sigma \text{ base } \rightsquigarrow N; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow O \rightarrow N} (\text{E-Fold}[\])$$

$$\frac{}{\text{foldr } V_1 :: V_2 \text{ base } \rightsquigarrow N; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow O \rightarrow O\{h \leftarrow V_1, r \leftarrow (\text{foldr } V_2 \text{ base } \rightsquigarrow N; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow O)\}} (\text{E-Fold} ::)$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{foldr } M \text{ base } \rightsquigarrow N; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow O \rightarrow \text{foldr } M' \text{ base } \rightsquigarrow N; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow O} (\text{E-Fold1})$$

B.5. Árboles binarios

Tipos

$$\sigma, \tau ::= \dots \mid AB_\sigma$$

Términos

$$M, N ::= \dots \mid \text{Nil}_\sigma \mid \text{Bin}(M, N, O) \mid \text{raiz}(M) \mid \text{der}(M) \mid \text{izq}(M) \mid \text{esNil}(M)$$

Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \triangleright \text{Nil}_\sigma : AB_\sigma} (\text{T-Nil}) \quad \frac{\Gamma \triangleright M : AB_\sigma \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \quad \Gamma \triangleright O : AB_\sigma}{\Gamma \triangleright \text{Bin}(M, N, O) : AB_\sigma} (\text{T-Bin})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_\sigma}{\Gamma \triangleright \text{raiz}(M) : \sigma} (\text{T-raiz})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_\sigma}{\Gamma \triangleright \text{der}(M) : AB_\sigma} (\text{T-der})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_\sigma}{\Gamma \triangleright \text{izq}(M) : AB_\sigma} (\text{T-izq})$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_\sigma}{\Gamma \triangleright \text{isNil}(M) : \text{Bool}} (\text{T-isNil})$$

Valores

$$V ::= \dots \mid \text{Nil} \mid \text{Bin}(V, V, V)$$

Axiomas y reglas de evaluación

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{Bin}(M, N, O) \rightarrow \text{Bin}(M', N, O)} (\text{E-Bin1}) \quad \frac{N \rightarrow N'}{\text{Bin}(V, N, O) \rightarrow \text{Bin}(V, N', O)} (\text{E-Bin2})$$

$$\frac{O \rightarrow O'}{\text{Bin}(V_1, V_2, O) \rightarrow \text{Bin}(V_1, V_2, O')} (\text{E-Bin3})$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{raiz}(M) \rightarrow \text{raiz}(M')} (\text{E-Raiz1}) \quad \frac{}{\text{raiz}(\text{Bin}(V_1, V_2, V_3)) \rightarrow V_2} (\text{E-Bin3})$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{der}(M) \rightarrow \text{der}(M')} (\text{E-Der1}) \quad \frac{}{\text{der}(\text{Bin}(V_1, V_2, V_3)) \rightarrow V_3} (\text{E-Der2})$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{izq}(M) \rightarrow \text{izq}(M')} (\text{E-Izq1}) \quad \frac{}{\text{izq}(\text{Bin}(V_1, V_2, V_3)) \rightarrow V_1} (\text{E-Izq2})$$

$$\frac{}{\text{isNil}(M) \rightarrow \text{izq}(M')} (\text{E-isNil1}) \quad \frac{}{\text{isNil}(\text{Bin}(V_1, V_2, V_3)) \rightarrow \text{false}} (\text{E-isNilBin})$$

$$\frac{}{\text{isNil}(\text{Bin}(V_1, V_2, V_3)) \rightarrow \text{true}} (\text{E-isNilNil})$$

C. Javascript

Declaración de variables

```
// Declaración de variables
let miVar = 1;
var suVar = 2;

// Declaración de constante, no pueden ser modificadas.
const miConstante = 3;
```

Y es **case-sensitive**, es decir `unavariabLe` y `unaVariable` no son las mismas variables.

Tipos

- **number**: Los números, no hay distinción entre enteros y punto flotantes. Contiene a las constantes `-Infinity`, `+Infinity`, `NaN`.
- **boolean**: Los literales `true` y `false` con las operaciones `&&`, `!` y `||`.
- **string**: Secuencias de cero o más caracteres entre comillas simples o dobles.
- **null**: Un único valor `null` (nada, valor desconocido).
- **undefined**: Un único valor `undefined` (el valor no está definido).

Podemos usar `typeof` para saber el nombre del tipo de la expresión.

- **Arrays**: `[]`, `[1,2,true]`, `new Array()`
`-[-]` , `push(-)` , `pop()` , `shift()` , `unshift(_)`

Tipado El tipado se hace de manera **dinámica** (en tiempo de ejecución) y **débil** (se pueden comparar cosas que no son del mismo tipo porque hay conversión automática).

Por ejemplo:

```
let a = 1 // a = 1
a += '1'
// a = '11' (El entero, se convierte automaticamente en un string)

1 == '1' // true
1 === '1' // false
0 == false // true
0 === false // false
1 == true // true

false == '' // true
false === 'false' // false
null == undefined // true
null === undefined // false
```

Flujos de control

```
if (cond) { ... } else { ... }
```

```
while (cond) {  
    //cuerpo  
}
```

```
do {  
    //cuerpo  
} while (cond);
```

Definición de funciones

```
function nombre(arg1, ..., argn){  
    //cuerpo  
}
```

```
let nombre = function(arg1, ..., argn){  
    //cuerpo  
}
```

```
let nombre = (arg1, ..., argn) => {  
    //cuerpo  
}
```

Objetos

```
let o = {  
    a : 1,  
    b : function(n) {  
        return this.a + n // this hace referencia a o  
    }  
}
```

```
o.a // 1 Proyeccion del atributo a
```

```
o['a'] // 1 (Proyeccion del atributo a)
```

```
o.b(1) // 2 (Proyeccion y ejecucion del metodo b)
```

```
o.b = function() { return this.a } // Redefinimos o.b
```

```
o.c = true // Agrega el atributo c a o.
```

```
o['c'] = false // Redefinimos el atributo c de o.
```

```
delete o.a // Elimina el atributo a de o.
```



```

'c' in o // true (Checkea si c es una propiedad de o)
'd' in o // false

// Iteracion sobre todas las propiedades de o.
for(let p in o){
    ...
}

let p = o // Creamos una referencia a o.

let f = o.b
// Extraemos el metodo b de f. Dejamos las variable this desligada.

let o2 = { i: f, a: true}
// Crea el objeto o2, con la función f en su atributo i.

o2.f() // true

let o3 = Object.assign({}, o, o2)
// Copia las propiedade de o y o2 en o3. Hace un shallow copy, es decir si
→ una atributo de o2 u o3 es una referencia, entonces en o, ese atributo va
→ a ser una referencia al mismo objeto que en o2

```

Herencia Todos los objetos tiene una propiedad privada llamada `[[Prototype]]` cuyo valor es `null` u otro objeto que es su **prototipo**. Esta propiedad induce una cadena de prototipado sin ciclos que finaliza con `null`.

Cuando intentamos acceder a un método inexistente de un objeto, el mismo se busca en la cadena de prototipado del mismo hasta encontrar el primer objeto de la cadena que lo define. Si llegamos a `null` y el método no fue encontrado, entonces hay un error.

```

Object.setPrototypeOf(o, prot) // Hace que el prototipo de o sea prot.
Object.getPrototypeOf(o) // Devuelve el objeto que es prototipo de o.

o.__proto__ // Otra forma de conseguir el prototipo de o.
o.__proto__ = o1 // Otra forma de setear el prototipo de o

```

Cuando ejecutamos un método de la cadena de prototipado, el método evaluado liga `this` al objeto llamó al método, es decir, si tenemos:

```

let o1 = { a: 1}
let o2 = { b: function(){
    return this.a
}
}

```

```
o1.__proto__= o2

o1.b();
// Busca b en o1 y no lo encuentra, el proximo objeto en la cadena es o2,
→ encuentra b y liga this = o1, luego ejecuta el método.
```

Para crear una copia de un objeto y asignarle a esa copia el objeto original como prototipo usamos `Object.create`.

Además javascript provee el prototipo `Object.prototype` que es prototipo de todos los objetos y provee metodos básicos como `hasOwnProperty()` que indica si el objeto contiene una propiedad no heredada y `toString()` que devuelve un string que representa al receptor.

Cadenas de prototipado

```
let o1 = { ... }
// o1 ---> Object.prototype ---> null

let o2 = Object.create(o1)
// o2 ---> o1 ---> Object.prototype ---> null

let o = Object.create(null)
// o ---> null
```

Constructores Son funciones que generan objetos. Cuando declaramos un constructor `C`, javascript crea un objeto llamado `C.prototype` que se asigna como prototipo de todos los objetos creados con dicha función. Por ejemplo:

```
// Constructor Punto, tiene la siguiente cadena de prototipado:
// Punto --> Function.prototype --> Object.prototype --> null
function Punto(x,y){
  this.x = x;
  this.y = y;
  this.mvx = function(d){
    this.x += d;
  }
}

// Objeto creado con el constructo punto
o = new Punto(1,2)
// o = Object{ x: 1, x:2, mvx: mvx()} y su cadena de prototipado es:
// o --> Punto.prototype --> Object.prototype --> null
```