# PLP - Práctica 4: Subtipado

Zamboni, Gianfranco

3 de marzo de 2018

## Reglas de subtipado

### 4.1. Ejercicio 1

**1)**

$$\dfrac{\{y\} \subseteq \{x, y, z\} \qquad y : Nat = y : Nat}{\{x : Nat,\ y : Nat,\ z : Nat\} <: \{y : Nat\}}\ \text{S-Rcd}$$

Esta demostración no es única porque existe la regla $S - Trans$ que nos permite probar la transitividad de los tipos, si hubiesemos decidido usarla para primero conseguir un supertipo $\{x : Nat, y : Nat\}$ del primer término y luego probar que ese supertipo es subtipo de $\{y : Nat\}$ entonces también hubiese sido una demostración válida.

**2)**

$$\dfrac{\emptyset \subseteq \{x, y, z\}}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{\}}\ \text{S-Rcd}$$

$$\dfrac{\dfrac{\{x\} \subseteq \{x, y\} \qquad x : Nat = x : Nat}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{x : Nat\}}\ \text{S-Rcd} \qquad \dfrac{\emptyset \subseteq \{x, y, z\}}{\{x : Nat\} <: \{\}}\ \text{S-Rcd}}{\{x : Nat,\ y : Nat\} <: \{\}}\ \text{S-Trans}$$

## 4.2. Ejercicio 2

**1)** Los registros tienen subtipos infinitos porque dado el tipo de un registro $\omega = \{l_i : \sigma_i\}_{i\in 1..n}$, entonces cualquier tipo de la forma $\omega' = \{l_i : \tau_i\}_{i\in 1..k}$ con $k \geq n$ tal que $\tau_i <: \sigma_i^{i\in 1..n}$ es subtipo del tipo de $\omega$.

$Top$ tiene como subtipo a los registros y los registros tienen infinitos subtipos, entonces $Top$ tiene infinitos subtipos.

Por S-Arrow, los subtipos de una función $\sigma \to \tau$ son los tipos de la forma $\sigma' \to \tau'$ tal que $\sigma <: \sigma'$ y $\tau' <: \tau$. En particular si $\tau$ es de tipo registro, entonces $\tau$ tiene infinitos subtipos, por lo que $\sigma \to \tau$ tambien los tiene (son las funciones que devuelven registros).

**2)** $Top$ no tiene supertipos.

Los registros tiene una cantidad finita de supertipos, siendo el máximo registro $\{\} <: Top$

Otra vez, hay casos en que las funciones tienen infinitos supertipos y es cuando toman como parámetro a un registro. Esto es porque la regla S-Arrow es contravariante respecto del tipo del párametro de la función, es decir, para que un tipo $\sigma \to \tau$ sea supertipo de $\sigma' \to \tau$ tiene que valer que $\sigma <: \sigma'$. Y si $sigma'$ es un registro, entonces tiene infinitos subtipos.

## 4.3. Ejercicio 3

**1)** $S = Top$

**2)** Si solo consideramos los tipos básicos $Bool$, $Nat$, $Int$, $Float$, entonces $S = Bool$, pero cuando empezamos a considerar registros o listas u otros tipos, entonces, los "mínimos" de cada tipo no están relacionados de ninguna forma, incluso, en el caso de los registros, ese mínimo nisiquiera existe.

**3)** Por S-Arrow, tenemos que $S_1 \to S_2 <: T_1 \to T_2$ si $T_1 <: S_1$ y $T_2 <: S_2$.

El primer caso es el punto **1)**, el segundo es el punto **2)**.

**4)** Es similar al anterior pero con los casos invertidos.

## 4.4. Ejercicio 4

**1)** $T <: S \underset{\text{S-Trans}}{\iff} T <: T \;\wedge\; T <: S \underset{\text{S-Arrow}}{\iff} S \to T <: T \to T$

**2)** Si $S = Bool$ y $T = Top$, entonces $\{x : Bool, y : Top\}$ tiene 26 supertipos y el tipo $Bool \to Top$ solo tiene como supertipo a $Top$, porque $Bool$ no tiene subtipos y $Top$ no tiene supertipos.

**3)** Si $S = Top$ y $T = Top$, entonces $\{x : Top, y : Top\}$ tiene como supertipos a $\{x : Top\}$, $\{y : Top\}$, $\{\}$ y a $Top$ y el tipo $Top \to Top$ tiene infinitos por el ejercicio 2.

## 4.5. Ejercicio 5

subtipos de Bool: Bool -¿finitos subtipos de Nat: Bool Nat -¿finitos subtipos de a-¿b: supertipos de axsubtipos de b, con a y b en nat,bool,funciones

# Subtipado en el contexto de tipado

## 4.6. Ejercicio 6

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$y : Nat \in \{x : Bool, y : Nat\}$}
\RightLabel{T-Var}
\UnaryInfC{$\{x : Bool, y : Nat\} \mapsto y : Nat$}
\RightLabel{T-Succ}
\UnaryInfC{$\{x : Bool, y : Nat\} \mapsto succ(y) : Nat$}
\RightLabel{T-Abs}
\UnaryInfC{$\{x : Bool\} \mapsto \lambda y : Nat.succ(y) : Nat \to Nat$}
\AxiomC{$x : Bool \in \{x : Bool\}$}
\RightLabel{T-Var}
\UnaryInfC{$\{x : Bool\} \mapsto x : Bool :$}
\AxiomC{}
\RightLabel{S-BoolNat}
\UnaryInfC{$Bool <: Nat$}
\RightLabel{T-Subs}
\BinaryInfC{$\{x : Bool\} \mapsto x : nat : Nat$}
\RightLabel{T-App}
\BinaryInfC{$\{x : Bool\} \mapsto \lambda y : Nat.succ(y)x : Nat$}
\RightLabel{T-Abs}
\UnaryInfC{$\{\} \mapsto \lambda x : Bool.\lambda y : Nat.succ(y)x : Bool \to Nat$}
\end{prooftree}
$$

$$\frac{\text{Demo a)} \qquad \text{Demo b)}}{\{\} \mapsto (\lambda r : \{l1 : Bool, l2 : Float\}.if\ r.l1\ then\ r.l2\ else\ 5,5)\ \{l1 : True, l2 : -8, l3 : 9,0\} : Float}\ \text{T-App}$$

Demo a):

$$\frac{\dfrac{\Gamma \mapsto 5,5 : Float \qquad \dfrac{r.l2 : Float \in \Gamma}{\Gamma \mapsto r.l2 : Float}\ \text{T-Var} \qquad \dfrac{r.l1 : Bool \in \Gamma}{\Gamma \mapsto r.l1 : Bool}\ \text{T-Var}}{\Gamma = r : \{l1 : Bool, l2 : Float\} \mapsto if\ r.l1\ then\ r.l2\ else\ 5,5 : Float}\ \text{T-If}}{\{\} \mapsto \lambda r : \{l1 : Bool, l2 : Float\}.if\ r.l1\ then\ r.l2\ else\ 5,5 : \{l1 : Bool, l2 : Float\} \to Float}\ \text{T-Abs}$$

Demo b):

$$\frac{\dfrac{}{\{l1 : Bool, l2 : Int, l3 : Float\} <: \{l1 : Bool, l2 : Float\}}\ \text{S-RCDWidth} \qquad \dfrac{\{\} \mapsto 9,0 : Float : \qquad \{\} \mapsto -8 : Int : \qquad \{\} \mapsto True : Bool :}{\{\} \mapsto \{l1 : True, l2 : -8, l3 : 9,0\} : \{l1 : Bool, l2 : Int, l3 : Float\}}\ \text{T-RCD}}{\{l1 : True, l2 : -8, l3 : 9,0\} : \{l1 : Bool, l2 : Int, l3 : Float\}}\ \text{T-Subs}$$

## 4.7. Ejercicio 7

Inserte su explicacion formal aquí :)

Por lo tanto, el término xx no es tipable en el cálculo $\lambda$ clásico.

$$\dfrac{\dfrac{x:\sigma\to\tau\in\Gamma}{\Gamma\triangleright x:\sigma\to\tau} \qquad \dfrac{x:\theta\in\Gamma}{\Gamma\triangleright x:\theta} \qquad \theta <: \sigma}{\Gamma \mapsto x\ x:\tau}\ \text{T-App}$$

Si $\theta = \sigma \to \tau$ y $\sigma = Top$ entonces vale $\theta <: Top$, es decir, $Top \to \tau <: Top$.

## 4.8. Ejercicio 8

a)

$$\dfrac{U <: V \qquad S <: T}{T \to V <: S \to U}\ \text{S-Arrow'}$$

Sea $M = (\lambda x : Int.\text{if } x > 2 \text{ then } 2,5 \text{ else } 0,3 : Int- > Bool$, por la regla S-Arrow', podríamos tipar el término: M true, ya que podríamos ingresarle a M un elemento de un subtipo de Int. Pero esto no tenrdía sentido, ya que no se podría evaluar: true¿2.

Demostración:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\triangleright 0,3:Float \qquad \Gamma\triangleright 2,5:Float \qquad \Gamma\triangleright x>2:Bool}{\Gamma=\{x:Int\}\triangleright if\ (x>2)\ then\ 2,5\ else\ 0,3:Float}\ \text{T-if}}{\{\}\triangleright\lambda x:Int.\text{if } x>2 \text{ then } 2,5 \text{ else } 0,3 : Int\to Float}\ \text{T-abs} \qquad \dfrac{\{\}\triangleright True:Bool \qquad Bool<:Int}{\{\}\triangleright True:Int}\ \text{T-Subs}}{\{\}\triangleright(\lambda x:Int.\text{if } x>2\text{ then } 2,5\text{ else } 0,3\ True:Float}\ \text{T-app}$$

b)

$$\dfrac{U <: V \qquad S <: T}{S \to U <: T \to V}\ \text{S-Arrow''}$$

### 4.9. Ejercicio 9

### 4.10. Ejercicio 10

### 4.11. Ejercicio 11

### 4.12. Ejercicio 12

### 4.13. Ejercicio 13

### 4.14. Ejercicio 14