

Resumen: Paradigmas de Lenguajes de Programación

Zamboni, Gianfranco

18 de febrero de 2018

Índice general

0.1. Introducción	1
1. Paradigma Funcional	3
1.1. Programación Funcional	3
1.2. Cálculo Lambda Tipado	10
1.3. Inferencia de tipos	20

0.1. Introducción

Paradigma Marco filosófico y teórico de una escuela científica o disciplina en la que se formulan teorías, leyes y generalizaciones y se llevan a cabo experimentos que les dan sustento.

Lenguaje de programación Es un lenguaje usado para comunicar instrucciones a una computadora. Estas instrucciones describen cálculos que llevará a cabo la computadora.

Un lenguaje de programación es computacionalmente completo si puede expresar todas las funciones computables.

Paradigma de lenguaje de programación Marco filosófico y teórico en el que se formulan soluciones a problemas de naturaleza algorítmica. Lo entendemos como un estilo de programación en el que se escriben soluciones a problemas en términos de algoritmos.

Su ingrediente básico es el modelo de cómputo que es la visión que tiene el usuario de cómo se ejecutan sus programas.

0.1.1. Aspectos del lenguaje

Sintaxis Descripción del conjunto de secuencias de símbolos considerados como programas válidos.

Semántica

Descripción del significado de instrucciones y expresiones puede ser informal (e.g. Castellano) o formal (basado en técnicas matemáticas).

Semántica operacional Un programa es un mecanismo que dado un elemento del conjunto de partida, sigue una sucesión de pasos para calcular el elemento correspondiente del conjunto de llegada.

Semántica axiomática Interpreta a un programa como un conjunto de propiedades verdaderas que indican los estados que puede llegar a tomar.

Semántica denotacional Un programa es un valor matemático (función) que relaciona cada elemento de un conjunto de partida (expresiones que lo componen) con un único elemento de otro conjunto de llegada (significado de las expresiones).

Sistema de tipo

Es una herramienta que nos permite analizar código para prevenir errores comunes en tiempo de ejecución (e.g. evitar sumar booleanos, aplicar función a número incorrecto de argumentos, etc). En general, requiere anotaciones de tipo en el código fuente.

Además sirve para que la especificación de un programa sea más clara.

Hay dos tipos de análisis de tipos:

- **Estático:** Análisis de tipos en tiempo de compilación.
- **Dinámico:** Análisis de tipos en tiempo de ejecución.

0.1.2. Paradigmas

Paradigma Imperativo

Estado global Se usan variables que representan celdas de memoria en distintos momentos del tiempo. En ellas vamos almacenando resultados intermedios del problema.

Asignación Es la acción que modifica las celdas de memoria

Control de flujo Es la forma que tenemos de controlar el orden y la cantidad de veces que se repite un cómputo dentro del programa. En este paradigma, la repetición de cálculos se basa en la iteración.

Por lo general, los lenguajes de este paradigma son eficientes ya que el modelo de ejecución usado y la arquitectura de las computadoras (a nivel procesador) son parecidos. Sin embargo, el bajo nivel de abstracción que nos proveen hacen que, por lo general, la implementación de un problema sea difícil de entender.

Paradigma Funcional

No tiene un estado global. Un cálculo se expresa a través de la aplicación y composición de funciones y los resultados intermedios (salida de las funciones) son pasados directamente a otras funciones como argumentos. Todas las expresiones de este paradigma son tipadas y usa la recursión para repetir cálculos.

Ofrece un alto nivel de abstracción, es declarativo, usa una matemática elegante y se puede usar razonamiento algebraico para demostrar correctitud de programas.

Paradigma Lógico

Los programas son predicados de la lógica proposicional y la computación está expresada a través de proof search. No existe un estado global y los resultados intermedios son pasados por unificación. La repetición se basa en la recursión.

Ofrece un alto nivel de abstracción, es muy declarativo y, al ser predicados, tiene fundamentos lógicos robustos pero su ejecución es muy lenta.

Paradigma Orientado a Objetos

La computación se realiza a través del intercambio de mensajes entre objetos. Tiene dos enfoques: basados en clases o basados en prototipos.

Ofrece alto nivel de abstracción y arquitecturas extensibles pero usa una matemática de programas compleja.

Capítulo 1

Paradigma Funcional

1.1. Programación Funcional

Los dos aspectos fundamentales de la programación son:

- Transformación de la información.
- Interacción con el medio (cargar datos, interfaces gráficas, etc).

La programación funcional se concentra en el primer aspecto.

Valor Entidad matemática abstracta con ciertas propiedades.

Expresión

Secuencia de símbolos utilizada para denotar un valor. Hay dos tipos de expresiones:

- **Atómicas ó formas formales:** Son las expresiones más simples y denotan un valor.
- **Compuestas:** Expresiones que se construyen combinando otras expresiones.

Puede haber expresiones incorrectas (mal formadas) debido a errores sintácticos (expresiones mal escritas) o a errores de tipo (expresiones que denotan operaciones sobre tipos incorrectos).

En funcional, computar significa tomar una expresión y reducirla hasta que sea atómica.

Transparencia referencial El valor que denota una expresión solo depende de los símbolos que la constituyen. Esto nos permite indicar. Esto nos permite hacer uso de un programa sin considerar la necesidad de considerar los detalles de su ejecución y nos permite demostrar propiedades usando las propiedades de las subexpresiones y métodos de deducción lógica.

1.1.1. Tipos

Son una forma de particionar el universo de valores de acuerdo a ciertas propiedades. Hay:

- **Tipos básicos** (Int, Bool, Float) ó primitivos que son los que ya vienen definidos en el lenguaje por literales y representan valores
- **Tipos compuestos** (pares,) que son aquellos que se definen a partir de otros tipos.

Cada tipo de dato tiene asociado operaciones que no tienen significado para otros tipos.

A toda expresión bien formada se le puede asignar un tipo que sólo depende los componentes de la expresión (strong-typing). Dada una expresión, se puede deducir su tipo a partir de su constitución.

Notación

$e :: A$ se lee “la expresión e tiene tipo A ” y significa que el valor denotado por e pertenece al conjunto de valores denotado por A .

Propiedades deseables de un lenguaje funcional

Se busca que un lenguaje le asigne un tipo de manera automática al mayor número posible de expresiones con sentido y que no le asigne ningún tipo al mayor número posible de expresiones mal formadas. Además, se busca que el tipo de la expresión se mantenga si es reducida.

Otra cosa a tener en cuenta, es que los tipos ofrecidos por el lenguaje deben ser descriptivos y razonablemente sencillos de leer.

Inferencia de tipos Dada una expresión e determinar si tiene tipo o no y, si lo tiene, cuál es ese tipo según las reglas.

Chequeo de tipos Dada una expresión tipable e y un tipo A , determinar si $e :: A$ o no.

1.1.2. Tipo Función

Un programa en el paradigma funcional es una función descrita por un conjunto de ecuaciones (expresiones) que definen uno o más valores. Estas ecuaciones son evaluadas (reducidas) hasta llegar a una expresión atómica que nos indique el valor de las mismas.

Funciones Las funciones son valores especiales que representan transformación de datos. En haskell el tipo de una función se escribe: \rightarrow . Las funciones se aplican a elementos de un conjunto de entrada definido por el tipo de entrada de la función y devuelve un elemento del tipo de salida.

Al ser valores, las funciones pueden ser argumentos y resultados de otras funciones, pueden almacenarse y pueden ser estructuras de datos.

Funciones de alto orden Son funciones que manipulan otras funciones.

Lenguaje Funcional Puro Lenguaje de expresiones con transparencia referencial y funciones como valores, cuyo modelo de cómputo es la reducción realizada mediante el reemplazo de iguales por iguales.

Polimorfismo paramétrico Cuando una función tiene un parámetro que puede ser instanciado de diferentes maneras en diferentes usos. Esta propiedad se da dentro de los sistemas de tipos.

Dada una expresión que puede ser tipada de infinitas maneras, el sistema puede asignarle un tipo que sea más general que todos ellos, y tal que en cada uso pueda transformarse en uno particular.

Hay funciones que a pesar de poseer polimorfismo paramétrico, no aceptan cualquier clase de tipo, sino que requieren que los tipos con las que son llamadas tengan ciertas propiedades. Por ejemplo, que tengan relaciones de igualdad (**Eq**), relación de orden (**Ord**), que se comporten como números (**Num**) o que puedan ser mostrados en pantalla (**Show**)

Evaluación

Por lo general, dependiendo del orden de evaluación del lenguaje, el tipo de evaluación se clasifica en:

Evaluación Estricta Si una parte de una expresión se indefine, entonces la expresión se indefine. La evaluación eager, en la que un lenguaje computa una expresión apenas es definida, es de este tipo.

Evaluación no Estricta Puede pasar que una expresión esté definida a pesar de que alguna de sus partes se haya indefinido. La evaluación lazy, en la que un lenguaje solo computa una expresión cuando de esta depende el valor de otra expresión, es de este tipo.

Haskell usa evaluación lazy de izquierda a derecha, resolviendo primero las partes más externas de la expresión y luego, si es necesario, sus partes.

Currificación Correspondencia entre cada función de múltiples parámetros y una de alto orden que retorna una función intermedia que completa el trabajo. Por cada f definida como:

```
f :: (a,b) -> c
f (x,y) = e
```

existe un función f' tal que se puede escribir:

```
f' :: a -> (b -> c)
(f' x) y = e
```

La currificación nos da mayor expresividad y la posibilidad de realizar evaluación parcial. Además, nos permite tratar el código de manera más modular al momento de inferir tipos y transformar programas.

Evaluación parcial Se evalúan las funciones parcialmente, lo que nos permite llamarlas con menos parámetros de los que necesitan. Esto nos devuelve una función con las expresiones asociadas a los valores pasados como parámetros y que toma como parámetros los parámetros faltantes de la función original.

1.1.3. Inducción/Recursion

La inducción es un mecanismo que nos permite definir conjuntos infinitos, probar propiedades sobre sus elementos y definir funciones recursivas sobre ellos con garantía de terminación.

Principio de extensionalidad: Dadas dos expresiones A y B, si A y B denotan el mismo valor, entonces A puede ser remplazada por B y B por A sin que esto afecte al resultado de una ecuación.

Inducción estructural

Una definición inductiva de un conjunto \mathcal{R} consiste en dar condiciones de dos tipos:

- reglas base ($z \in \mathcal{R}$) que afirman que algún elemento simple x pertenece a \mathcal{R}
- reglas inductivas ($y_1 \in \mathcal{R}, \dots, y_n \in \mathcal{R} \Rightarrow y \in \mathcal{R}$) que afirman que un elemento compuesto y pertenece a \mathcal{R} siempre que sus partes y_1, \dots, y_n pertenezcan a \mathcal{R} (e y no satisface otra regla de las dadas)

y pedir que \mathcal{R} sea el menor conjunto (en sentido de la inclusión) que satisfaga todas las reglas dadas.

Funciones recursivas

Sea S un conjunto inductivo, y T uno cualquiera. Una definición recursiva estructural de una función $f :: S \rightarrow T$ es una definición de la siguiente forma:

- Por cada elemento base z , el valor de $(f\ z)$ se da directamente usando valores previamente definidos
- Por cada elemento inductivo y , con partes inductivas y_1, \dots, y_n , el valor de $(f\ y)$ se da usando valores previamente definidos y los valores $(f\ y_1), \dots, (f\ y_n)$.

Principio de inducción

Sea S un conjunto inductivo, y sea P una propiedad sobre los elementos de S . Si se cumple que:

- para cada elemento $z \in S$ tal que z cumple con una regla base, $P(z)$ es verdadero, y
- para cada elemento $y \in S$ construido en una regla inductiva utilizando los elementos y_1, \dots, y_n , si $P(y_1), \dots, P(y_n)$ son verdaderos entonces $P(y)$ lo es

entonces $P(x)$ se cumple para todos los $x \in S$.

1.1.4. Parametrización

Dado un conjunto de funciones que se comportan de la misma manera buscamos encontrar alguna forma de crear una función que las genere automáticamente.

Esquema de funciones Dado un conjunto de funciones “parecidas”, el esquema de estas funciones son los que no permiten parametrizar correctamente alguno de los parámetros.

La parametrización nos permitirá crear definiciones más concisas y modulares, reutilizar código y demostrar propiedades generales de manera más fácil.

1.1.5. Tipos algebraicos

Definición de tipos

Hay dos formas de definir un tipo de dato:

- **De manera algebraica:** Establecemos qué *forma* tendrá cada *elemento* y damos un mecanismo único para inspeccionar cada elemento.
- **De manera abstracta:** Determinamos cuales serán las *operaciones* que manipularán los elementos, SIN decir cuál será la forma exacta del tipo ni de las operaciones que definimos.

Tipos algebraicos en Haskell

Los definimos mediante **constant**es llamadas *constructores* cuyos nombres comienzan con mayúscula. Los constructores no tienen asociada una regla de reducción y pueden tener argumentos.

Para implementarlos en Haskell, usamos la cláusula **data** que introduce un nuevo tipo algebraico, los nombres de sus constructores y sus argumentos.

Ejemplos:

```
data Sensacion = Frio | Calor
data Shape = Circle Float | Rect Float Float
```

Los tipos algebraicos pueden tener argumentos. Esto nos permite definir tipos que contienen al conjunto de elementos de otro tipo más los elementos del tipo que se están definiendo.

Ejemplo:

```
data Maybe = Nothing | Just a
```

Maybe tiene todos los elementos del tipo *a* con **Just** adelante más el elemento *Nothing*

Son considerados tipos algebraicos porque:

- toda combinación válida de constructores y valores es elemento del tipo algebraico (y solo ellas lo son)
- y porque dos elementos de un tipo algebraico son iguales si y solo si están contruidos utilizando los mismos constructores aplicados a los mismos valores.

Al principio de esta sección, dijimos que además de establecer la forma que tiene el tipo, debemos dar un mecanismo único de inspección. En Haskell, este mecanismo es el **Pattern Matching**.

Pattern Matching

El pattern matching es la búsqueda de patrones especiales (en nuestro caso, los constructores de nuestro tipo) dentro de una expresión en el lado izquierdo de una ecuación que, si tiene éxito, nos permita inspeccionar el valor de la misma.

Si el pattern matching resulta exitoso, entonces ligas las variables del patrón.

Tipos especiales

Tupla Este tipo es un tipo algebraico con sintaxis especial. Una tupla es una estructura que posee varios elementos de distintos tipos. Por ejemplo: **(Float, Int)** es una tupla cuyo primer elemento es un **Float** y tiene como segundo elemento a un **Int**.

Maybe El tipo `Maybe`, definido en el último ejemplo, nos permite expresar la posibilidad de que el resultado sea erróneo, sin necesidad de usar casos especiales. De esta forma, logramos evitar el uso de \perp hasta que el programador lo decida, permitiendo controlar errores.

Either El tipo `Either` representa la unión disjunta de dos conjuntos (los elementos de uno se identifican con `Left` y los del otro con `Right`). Sirve para mantener el tipado fuerte y poder devolver elementos de distintos tipos o para representar el origen de un valor.

```
data Either = Left a | Right b
```

Expresividad

Los tipos algebraicos no pueden representar cualquier cosa, por ejemplo, los números racionales son pares de enteros (numerador, denominador) cuya igualdad puede no depender de los valores con los que fueron construidos o incluso pueden llegar a no ser validos. Esto es así porque no todo par de enteros es un número racional, por ejemplo el (1,0).

Además recordemos que la igualdad de dos elementos de un tipo algebraico solo se da si estos fueron construidos exactamente de la misma forma. Si seguimos con el ejemplo de los racionales, sabemos que hay racionales iguales con distinto numerador y denominador como el (4,2) y el (2,1), sin embargo estos dos pares no podrían ser nunca iguales si fuesen tomados como un tipo algebraico.

Clases de tipos algebraicos

Enumerativos Solo constructores sin argumentos.

Productos Un único constructor con varios argumentos.

Sumas Varios constructores con argumentos.

Recursivos Utilizan el tipo definido como argumento.

1.1.6. Tipos algebraicos recursivos

Un tipo algebraico recursivo tiene al menos uno de los constructores con el tipo que se define como argumento y es la concreción, en Haskell, de un conjunto definido inductivamente.

Cada constructor define un caso de una definición inductiva de un conjunto. Si tiene al tipo definido como argumento, entonces es un caso inductivo, si no, es un caso base.

En estos caso, el pattern matching nos da una forma de realizar analizar los casos y de acceder a los elementos inductivos que forman a un elemento dado. Por esta razón, se pueden definir funciones recursivas.

A estos tipos, les damos un significado a través de funciones definidas recursivamente. Estas funciones manipulan simbólicamente al tipo. Sin embargo, estas manipulaciones, por si solas no tienen un significado, sino que el significado se lo dan las propiedades que dichas manipulaciones deben cumplir.

Enteros Notación unaria para expresar tipos enteros.

```
data N = Z | S N
```

Listas Definición equivalente a las listas de Haskell

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
```

Árboles Un árbol es un tipo algebraico tal que al menos un elemento compuesto tiene dos componentes inductivas.

```
data Arbol a = Hoja a | Nodo a (Arbol a) (Arbol a)
```

1.1.7. Esquemas de recursión

Cuando tenemos un conjunto de funciones que manipulan ciertas estructuras de manera similar, podemos abstraer este comportamiento en funciones de alto orden que nos facilitarán su escritura.

A continuación, veremos unos ejemplos de esquemas sobre listas:

Map

Dada una lista `l`, aplica una función `f` a cada elemento de `l`.

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map _ [] = []
map f (x:xs) = (f x) : (map f xs)
```

Ejemplo:

```
doble x = x + x
dobleL = map doble
```

`dobleL` calcula el doble de cada elemento de una lista.

Filter

Dada una lista `l` y un predicado `p`, selecciona todos los elementos de `l` que cumplen `p`.

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter _ [] = []
filter p (x:xs) | (p x)      = x : (filter p xs)
                 | otherwise = filter p xs
```

Ejemplo

```
masQueCero = filter (>0)
```

`masQueCero` se queda con todos los elementos mayores de una lista

Fold

La función fold es la función que expresa el patrón de recursión estructural sobre listas como función de alto orden. Dada una lista `l` y una función `f` que denota un valor que depende de todos los elementos de la lista `l` y un valor inicial `z`, aplica y combina las soluciones parciales obtenidas por `f` de manera “iterativa”. Hay dos tipos de fold: `foldr` (acumula desde la derecha) y `foldl` (acumula desde la izquierda).

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr _ z [] = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
foldl f z [] = z
foldl f z (x : xs) = foldl f (f z x) xs
```

Ejemplos

```
map f = foldr (\x rec -> (f x): rec) []
filter p = foldr (\x rec -> if (p x) then x:rec else rec) []
```

Recursión primitiva

Recordemos de Logica y Computabilidad: una función h es recursiva primitiva si h es de la forma:

$$\begin{aligned}h(x_1, \dots, x_n, 0) &= f(x_1, \dots, x_n) \\h(x_1, \dots, x_n, t + 1) &= g(h(x_1, \dots, x_n, t), x_1, \dots, x_n, t)\end{aligned}$$

Es decir, el caso recursivo de h no solo depende de la descomposición de sus parámetros, sino que, además, depende de sus parámetros.

En Haskell, podemos definir una función que dada una lista **l**, un caso base **z** y un caso recursivo primitivo **f**, aplique la definición de **z** y **f** a la lista:

```
recr :: b -> (a -> [a] -> b -> b) -> [a] -> b
recr z _ [] = z
recr z f (x:xs) = f x xs (recr z f xs)
```

En listas, este tipo de esquemas es difícil de ver. Como ejemplo, escribimos la función **insertar** de una lista con recursión primitiva:

```
-- Insert con pattern matching
insert :: a -> [a] -> [a]
insert x [] = [x]
insert x (y:ys) = if x<y then (x:y:ys) else (y:insert x ys)

-- Insert con recursión primitiva
insert x = recr [x] (\y ys zs -> if x<y then (x:y:ys) else (y:zs))
```

En el segundo caso, **insert** es una función que agrega el elemento **x** a una lista **xs** que se le pase como parámetro.

Divide & Conquer

La técnica de Divide & Conquer consiste en dividir un problema en problemas más fáciles de resolver y luego, combinando los resultados parciales, lograr obtener un resultado general. En este caso, **DivideConquer** es un tipo de función, es decir define una familia de funciones, que toman como parámetro 4 funciones y un elemento de tipo **a** y devuelve un elemento de tipo **b**:

```
type DivideConquer a b = (a -> Bool) -> (a -> b) -> (a -> [a]) ->
                        ([b] -> b) -> a -> b
```

Las funciones que toma como parámetro son:

- **esTrivial** :: **a** -> **Bool** que devuelve verdadero si elemento de tipo **a** es el caso base del problema.
- **resolver** :: **a** -> **b** que resuelve el problema cuando el elemento de tipo **a** es el caso trivial
- **repartir** :: **a** -> [**a**] que divide al elemento de tipo **a** en la cantidad de subproblemas necesarios para resolver el problema.
- **combinar** :: [**b**] -> **b** que resuelve todos los subproblemas obtenidos por **repartir** y combina sus soluciones para obtener el resultado final.

Ejemplo

Vamos a definir el Divide & Conquer para listas:

```

divideConquerListas :: DivideConquer [a] b
-- Esto significa que DivideConquerLista es de tipo
-- ([a] -> Bool) -> ([a] -> b) -> ([a] -> [[a]]) -> ([b] -> b)
-- -> [a] -> b

divideConquerListas esTrivial resolver repartir combinar l =
    if (esTrivial l) then resolver l
    else combinar (map dc (repartir l))
where dc = divideConquerListas esTrivial resolver repartir combinar

```

Otros esquemas de recursión Los esquemas de recursión que nombramos, no son los únicos que existen y además, pueden ser definidos para otros tipos recursivos, no solo para listas.

La función fold y como definirla

Todo tipo algebraico tiene asociado un patrón de inducción estructural. En particular, dado un tipo algebraico recursivo **T**, podemos definir la función `foldrT :: * -> a` donde `*` son los parámetros de la función. A continuación damos algunas propiedades que debe cumplir para asegurarnos de la definimos correctamente:

- Por cada constructor recursivo debe tomar una función que tome como parámetros a cada elemento del constructor que no sea del tipo **T** y un parámetro de tipo **a** por cada elemento del tipo **T** del constructor. Esta función devuelve un elemento del tipo **a** y es la que resolverá recursivamente el caso planteado usando la segunda clase de parámetros.
- Por cada constructor base de **T** debe tomar un parámetro de tipo **a** que será el elemento devuelto por la función si cae en alguno de dichos casos.
- Por último, si la función está bien implementada, si reemplazamos cada parámetro por el constructor correspondiente que tiene asignado, la función resultante debería ser la función identidad del tipo **T**.

Al momento de definir `fold` ayuda mucho plantear el esquema de recursión del tipo.

1.2. Cálculo Lambda Tipado

El cálculo lambda es un modelo de computación turing completo basado en **funciones** introducido por **Alonzo Church**. Este modelo consiste en un conjunto de expresiones o terminos que representan abstracciones o aplicaciones de funciones y cuyos valores pueden ser determinados aplicando ciertas reglas sintacticas hasta obtener lo que se dice su forma normal, una expresión que, a falta de reglas no puede ser reducida de ninguna manera. En nuestro caso, estamos estudiando cálculo lambda tipado, es decir que habrá expresiones que, a pesar de estar bien formadas, no tendrán sentido.

1.2.1. Expresiones de Tipos de λ^b

El primer lenguaje lambda que usamos en la materia tiene dos **tipos** *Bool* y $\sigma \rightarrow \theta$ que son los tipos de los valores booleanos y las funciones que van de un tipo σ a un tipo θ , respectivamente. Y lo notamos:

$$\sigma, \theta ::= \text{Bool} \mid \sigma \rightarrow \theta$$

Una vez que definamos por completo el lenguaje lambda para estos dos tipos, esto es definir reglas de sintaxis, de tipado y de reducción de expresiones, vamos a extender el lenguaje con los naturales y, luego, con otros tipos de interés, como abstracciones de memoria y comandos.

Términos de λ^b

Ahora debemos definir los **términos** que nos permitirán escribir las expresiones válidas del tipado. Sea \mathcal{X} un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los **términos** de λ^b están dados por:

$$\begin{aligned}
 M, P, Q &::= true \\
 &| false \\
 &| if\ M\ then\ P\ else\ Q \\
 &| M\ N \\
 &| \lambda x : \sigma. M \\
 &| x
 \end{aligned}$$

Esto significa que dados tres términos M , P y Q , los términos válidos del lenguaje son:

- $true$ y $false$ que representan las **constantes de verdad**.
- $if\ M\ then\ P\ else\ Q$ que expresa el **condicional**.
- $M\ N$ que indica la **aplicación** de la función denotada por el término M al argumento N .
- $\lambda x : \sigma. M$ que es una **función** (abstracción) cuyo parámetro formal es x y cuyo cuerpo es M
- x , una **variable de términos**.

Variables ligadas y libres

Por como definimos el lenguaje, una variable x puede ocurrir de dos formas: **libre** o **ligada**. Decimos que x ocurre **libre** si no se encuentra bajo el alcance de una ocurrencia de λx . Caso contrario ocurre ligada.

Por ejemplo:

$$\lambda x : Bool. if\ true\ then\ \underbrace{x}_{ligada}\ else\ \underbrace{y}_{libre}$$

Para conseguir las variables ligadas de una expresión, vamos a definir la función FV que toma como parámetro una expresión y devuelve el conjunto de variables libres de la misma.

$$\begin{aligned}
 FV(x) &\stackrel{def}{=} x \\
 FV(true) &= FV(false) \stackrel{def}{=} \emptyset \\
 FV(if\ M\ then\ P\ else\ Q) &\stackrel{def}{=} FV(M) \cup FV(P) \cup FV(Q) \\
 FV(M\ N) &\stackrel{def}{=} FV(M) \cup FV(N) \\
 FV(\lambda x : \sigma. M) &\stackrel{def}{=} FV(M) \setminus \{x\}
 \end{aligned}$$

Reglas de sustitución

Una de las operaciones que podemos realizar sobre las expresiones del lenguaje es la **sustitución** que, dado un término M , sustituye todas las ocurrencias **libres** de una variable x en dicho término por un término N . La notamos:

$$M\{x \leftarrow N\}$$

Esta operación nos sirve para darle semántica a la aplicación de funciones y es sencilla de definir, sin embargo debemos tener en cuenta algunos casos especiales.

α -equivalencia Dos términos M y N que difieren solamente en el nombre de sus variables ligadas se dicen α -equivalentes. Esta relación es una relación de equivalencia. Técnicamente, la sustitución está definida sobre clases de α -equivalencia de términos

Captura de variables El primer problema se da cuando la sustitución que deseamos realizar sustituye una variable por otra con el mismo nombre que alguna de las variables ligadas de la expresión. Por ejemplo:

$$(\lambda z : \sigma.x)\{x \leftarrow z\} = \lambda z : \sigma.z$$

En estos casos, si realizamos la sustitución cambiaríamos el significado de la expresión (en el caso mostrado, estaríamos convirtiendo la función constante que devuelve x en la función identidad). Por esta razón debemos asegurarnos que cuando realizemos la operación $\lambda y : \sigma.M\{x \leftarrow N\}$, la variable ligada y sea renombrada de tal manera que **no** ocurra libre en N .

Entonces, teniendo en cuenta lo mencionado, definimos el comportamiento de la operación:

$$\begin{aligned} x\{x \leftarrow N\} &\stackrel{def}{=} N \\ a\{x \leftarrow N\} &\stackrel{def}{=} a \text{ si } a \in \{true, false\} \cup \mathcal{X} \setminus \{x\} \\ (if\ M\ then\ P\ else\ Q)\{x \leftarrow N\} &\stackrel{def}{=} if\ M\{x \leftarrow N\}\ then\ P\{x \leftarrow N\}\ else\ Q\{x \leftarrow N\} \\ (M_1\ M_2)\{x \leftarrow N\} &\stackrel{def}{=} M_1\{x \leftarrow N\}\ M_2\{x \leftarrow N\} \\ (\lambda y : \sigma.M)\{x \leftarrow N\} &\stackrel{def}{=} \lambda y : \sigma.M\{x \leftarrow N\} \text{ si } x \neq y, y \notin FV(N) \end{aligned}$$

La condición $x \neq y, y \notin FV(N)$ está para que efectivamente no se produzca la situación mencionada en el parrafo anterior. Y **siempre** puede cumplirse, solo hay que renombrar las variables de manera apropiada.

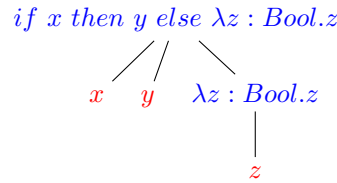
Árbol sintáctico

Dada una expresión M , su árbol sintáctico es un árbol que tiene como raíz a M y como hijos de la raíz a todos los subtérminos válidos de la expresión.

Ejemplos El árbol sintáctico de $true$ es:

true

El árbol sintáctico de $if\ x\ then\ y\ else\ \lambda z : Bool.z$ es:



1.2.2. Sistema de tipado

El sistema de tipado es un sistema formal de deducción (o derivación) que utiliza axiomas y reglas de tipado para caracterizar un subconjunto de los términos. A estos términos los llamamos **términos tipados**.

Como dijimos, vamos a estudiar lenguajes de cálculo lambda tipado, por lo que para que una expresión sea considerada una expresión válida del lenguaje no solo debe ser sintácticamente correcta sino que debemos poder inferir su tipo a través del sistema de tipado que definamos. Y si no es posible inferir el tipo de una expresión con el sistema dado, entonces no la consideraremos una expresión válida del lenguaje.

Contexto de tipado : Es un conjunto de pares $x_i : \sigma_i$, anotado $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n\}$ que nos indica los tipos de cada variable de un programa.

Dado un contexto de tipado Γ , un **juicio de tipado** es una expresión $\Gamma \triangleright M : \sigma$ que se lee “el término M tiene tipo σ asumiendo el contexto de tipado Γ ”.

Axiomas de tipado de λ^b

$$\frac{}{\Gamma \triangleright \text{true} : Bool}(\text{T-True}) \qquad \frac{}{\Gamma \triangleright \text{false} : Bool}(\text{T-False})$$

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \triangleright x : \sigma}(\text{T-Var})$$

Los axiomas **T-True** y **T-False** nos dicen, que no importa el contexto en el que se encuentren los valores *true* y *false*, respectivamente, ambos valores serán de tipo *Bool*. El axioma **T-Var**, nos dice que una variable libre x es de σ en un contexto Γ entonces el par $x : \sigma$ se encuentra en Γ

Reglas de tipado de λ^b

$$\frac{\Gamma \triangleright M : Bool \quad \Gamma \triangleright P : \sigma \quad \Gamma \triangleright Q : \sigma}{\Gamma \triangleright \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q : \sigma}(\text{T-If})$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau}{\Gamma \triangleright \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau}(\text{T-Abs}) \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \triangleright N : \sigma}{\Gamma \triangleright M N : \tau}(\text{T-App})$$

T-If nos dice que si $\text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q$ es de tipo σ en Γ , entonces M es de tipo *Bool* y P y Q son de tipo σ en Γ .

T-Abs indica que si $\lambda x : \sigma. M$ es de tipo $\sigma \rightarrow \tau$ en Γ , entonces M es de tipo τ y x es de tipo σ en Γ .

T-App significa que si $M N$ es de tipo $\sigma \rightarrow \tau$ en Γ , entonces M es de tipo τ en el contexto $\Gamma, x : \sigma$. Este es el contexto formado por la unión disjunta entre Γ y $x : \text{sigma}$, o en castellano, el contexto que reemplaza el tipo de x en Γ por σ .

Resultados básicos

Si $\Gamma \triangleright M : \sigma$ puede derivarse usando los axiomas y reglas de tipados decimos que el juicio es **derivable**. Además, si el juicio se puede derivar para algún Γ y σ , entonces decimos que M es **tipable**.

Unicidad de tipos Si $\Gamma \triangleright M : \sigma$ y $\Gamma \triangleright M : \tau$ son derivables, entonces $\sigma = \tau$

Weakening + Strengthening Si $\Gamma \triangleright M : \sigma$ es derivable y $\Gamma \cap \Gamma'$ contiene a todas las variables libres de M , entonces $\Gamma' \triangleright M : \sigma$

Sustitución Si $\Gamma, x : \sigma \triangleright M : \tau$ y $\Gamma \triangleright N : \sigma$ son derivables, entonces $\Gamma \triangleright M\{x \leftarrow N\} : \tau$ es derivable.

Demostración de juicios de tipado

Dado un sistema tipado, queremos ver si un juicio de tipado es correcto. Para hacer esto, iremos aplicando, al juicio, las reglas del sistema hasta llegar a sus axiomas o hasta llegar a una contradicción o incertidumbre. Si pasa lo primero, entonces el juicio es correcto, si pasa lo segundo, el juicio está mal.

1.2.3. Semántica operacional

Ya definimos cuales serán los términos y expresiones válidas de nuestro lenguaje. El siguiente paso, es definir algún mecanismo que nos permita inferir el significado o **valor** de un término.

Para lograr este objetivo definimos lo que se llama **semántica operacional**, un mecanismo que interpreta a los **términos como estados** de una máquina abstracta y define una **función de transición** que indica, dado un estado, cual es el siguiente.

De esta forma, el significado de un término M es el estado final que alcanza la máquina al comenzar con M como estado inicial.

Tenemos dos formas de definir la semántica:

- **Small-step**: La función de transición describe un paso de computación, descomponiendo los términos compuestos en términos más simples y especificando el orden el que deben ser reducidos.
- **Big-step** (o **Natural Semantics**): La función de transición, en un paso, evalúa el término a su resultado.

Nosotros vamos a usar la primer opción. Y la formulamos a través de **juicios de evaluación**

$$M \rightarrow N$$

que se leen “el término M reduce, en un paso, al término N ”.

Para establecer el significado de estos juicios, vamos a definir **axiomas de evaluación** y **reglas de evaluación**. Los axiomas nos indicarán cuales juicios de evaluación son siempre derivables y las reglas nos dirán que juicios son derivables dado un contexto. Las reglas de la semántica asumen que las expresiones están bien tipadas.

Expresiones Booleanas

Los valores de las expresiones booleanas son:

$$V ::= \text{true} \mid \text{false}$$

y son usados para reducir el término $\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3$ mediante los siguientes axiomas:

$$\frac{}{\text{if } \text{true} \text{ then } M_1 \text{ else } M_2 \rightarrow M_1} (\text{E-IfTrue})$$

$$\frac{}{\text{if } \text{false} \text{ then } M_1 \text{ else } M_2 \rightarrow M_2} (\text{E-IfFalse})$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow \text{if } M'_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3} (\text{E-If})$$

Estas reglas nos indican que dado un término del tipo $\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3$, si $M_1 = \text{true}$, entonces podemos remplazar la expresión por M_2 , si $M_1 = \text{false}$ entonces podemos remplazar la expresión por M_3 y si M_1 es una expresión reducible a M'_1 , entonces podemos remplazar la expresión por $\text{if } M'_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3$.

Con estas reglas definimos la estrategia de evaluación del condicional que se corresponde el orden habitual en lenguajes de programación:

1. Primero evaluamos la guarda del condicional
2. y una vez que la guarda sea un valor, evaluamos la expresión del *then* o del *else* según corresponda.

Propiedades

Determinismo Si $M \rightarrow M'$ y $M \rightarrow M''$ entonces $M' = M''$, esto quiere decir que el valor que representa M no cambia con las reducciones que le apliquemos.

Valores en forma normal Una **forma normal** es un término que no puede evaluarse más. Consideraremos que terminamos de evaluar un término cuando conseguimos su forma normal.

Todos los valores tiene una forma normal, sin embargo hay que tener en cuenta que como estamos definiendo un lenguaje tipado, habrá formas normales que no representen ningún valor.

Evaluación en muchos pasos

El juicio de **evaluación de muchos pasos** \rightarrow es la clausura reflexiva, transitiva de \rightarrow . Es decir, la menor relación tal que:

1. Si $M \rightarrow M'$, entonces $M \rightarrow M'$
2. $M \rightarrow M$ para todo M
3. Si $M \rightarrow M'$ y $M' \rightarrow M''$, entonces $M \rightarrow M''$

Unicidad de formas normales Si $M \rightarrow U$ y $M \rightarrow V$ con U y V formas normales, entonces $U = V$

Terminación Para todo M existe una forma normal N tal que $M \rightarrow N$

1.2.4. Semántica operacional de λ^b

En la sección 1.2.3 definimos el comportamiento de las expresiones booleanas, sin embargo, nos falta definir como reducir términos del tipo $\lambda x : \sigma.M$ y $M N$.

Lo primero a tener en cuenta, es que vamos a considerar a los términos de $\lambda x : \sigma.M$ como valores, sin si M es reducible o nó. Entonces, nuestro conjunto de valores del lenguaje sería:

$$V ::= true \mid false \mid \lambda x : \sigma.M$$

Por lo que todo término bien tipado y cerrado (sin variables libres) evalúa a alguna de estos términos. Si es de tipo *Bool* evalúa a *true* o *false*, si es de tipo $\sigma \rightarrow \tau$ evalúa a $\lambda x : \sigma.M$. A las reglas y axiomas definidos para los tipos booleanos agregamos los siguientes:

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1 M_2 \rightarrow M'_1 M_2} (\text{E-App1} / \mu)$$

$$\frac{M_2 \rightarrow M'_2}{\textcolor{red}{V}_1 M_2 \rightarrow \textcolor{red}{V}_1 M'_2} (\text{E-App2} / v)$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma.M) \textcolor{red}{V} \rightarrow M\{x \leftarrow \textcolor{red}{V}\}} (\text{E-App2} / \beta)$$

Estado de error Es un estado que **no es** un valor pero en el que la computación está trabada. Representa el estado en el cual el sistema de runtime de una implementación real generaría una excepción.

El sistema de tipado, nos garantiza que si un término cerrado está bien tipado entonces evalúa a un valor.

Corrección La corrección de un término nos asegura dos cosas: **Progreso** y **Preservación**.

El **progreso** asegura que si M es un término cerrado y bien tipado, entonces M es un valor o existe M' tal que $M \rightarrow M'$. En otras palabras, nos asegura que la evaluación no puede trabarse para términos cerrados y bien tipados que no son valores. Y si un programa termina, entonces nos devuelve un valor.

La **preservación** asegura que la evaluación de un término M cerrado y bien tipado preserva tipos. Es decir, no importa cuanta veces se reduzca M , el término resultante siempre es del tipo original.

$$\text{Si } \Gamma \triangleright M : \sigma \text{ y } M \rightarrow N \text{ entonces } \Gamma \triangleright N : \sigma$$

Extendiendo el lenguaje Cuando queramos extender el lenguaje, debemos realizar los mismos pasos que realizamos para definir el lenguaje λ^b , esto es decir, agregar el nuevo tipo al conjunto de tipos, definir los términos de ese tipo, sus reglas de tipado y sus reglas semánticas, asegurándonos de que las nuevas reglas no interfieran con las ya definidas. Esto es, no debemos definir reglas que las contradigan o que den nuevas formas de inferir algo que ya se podía inferir con otras reglas.

En el apéndice de extensiones, muestro algunas extensiones que servirán como ejemplo.

Macros Hay expresiones del lenguaje que usaremos con demasiada frecuencia, para estas expresiones podremos definir macros que simplificarán su escritura. Algunos ejemplos son:

$$Id_{Bool} \stackrel{def}{=} \lambda x : Bool. x$$

$$and \stackrel{def}{=} \lambda x : Bool. \lambda y : Bool. if\ x\ then\ y\ else\ false$$

1.2.5. Extensión Naturales (λ^{bn})

Tipos

$$\sigma, \tau ::= Bool \mid Nat \mid \sigma \rightarrow \tau$$

Términos

$$M ::= \dots \mid 0 \mid succ(M) \mid pred(M) \mid isZero(M)$$

Los términos significan:

- $succ(M)$: evaluar M hasta arrojar un número e incrementarlo.
- $pred(M)$: evaluar M hasta arrojar un número y decrementar.
- $iszero(M)$: evaluar M hasta arrojar un número, luego retornar *true/false* según sea cero o no.

Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \triangleright 0 : Nat} (T-Zero)$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : Nat}{\Gamma \triangleright succ(M) : Nat} (T-Succ) \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : Nat}{\Gamma \triangleright pred(M) : Nat} (T-Pred)$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : Nat}{\Gamma \triangleright isZero(M) : Bool} (T-IsZero)$$

Valores

$$V ::= \dots \mid \underline{n} \text{ donde } \underline{n} \text{ abrevia } succ^n(0)$$

Axiomas y reglas de evaluación

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{succ(M_1) \rightarrow succ(M'_1)} (E-Succ)$$

$$\frac{}{pred(0) \rightarrow 0} (E-PredZero) \qquad \frac{}{pred(succ(\underline{n})) \rightarrow \underline{n}} (E-PredSucc)$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{pred(M_1) \rightarrow pred(M'_1)} (E-Pred)$$

$$\frac{}{isZero(0) \rightarrow true} (E-IsZeroZero) \qquad \frac{}{isZero(succ(\underline{n})) \rightarrow false} (E-isZeroSucc)$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{isZero(M_1) \rightarrow isZero(M'_1)} (E-isZero)$$

1.2.6. Simulación de lenguajes imperativos

Los lenguajes imperativos se caracterizan por su capacidad de asignar y modificar variables dentro de un programa. Esto lo hace a través de comandos, expresiones del lenguaje cuyo objetivo es crear un efecto sobre el estado de la computadora.

Queremos extender el lenguaje λ para que poder simular comandos y efectos sobre la memoria.

En un lenguaje imperativo **todas** las variables son **mutables**, es decir, que hay operaciones que pueden modificar su valor. Para lograr esto, hace uso de tres operaciones básicas:

- **Asignación:** $x := M$ almacena en la referencia x el valor de M
- **Alocación (Reserva de memoria)** $ref\ M$ genera una referencia fresca cuyo contenido es el valor de M
- **Derreferenciación (Lectura):** $!x$ sigue la referencia x y retorna su contenido.

Notemos que una vez que agreguemos estas expresiones al lenguaje lambda, este dejará de ser un lenguaje funcional **puro** (un lenguaje en el todas sus expresiones carecen de efecto).

Nos gustaría agregar las expresiones mencionadas a nuestro lenguaje, para esto primero debemos asignarles un tipo.

Asignacion Lo primero que debemos tener en cuenta, es que la igualdad ($x := M$) es una expresión de la cual no nos interesa saber su valor sino el efecto que tiene la misma sobre el contexto. Entonces, debemos definir un nuevo tipo que nos permita identificar cuando una expresión evaluada solo fue evaluada para generar un efecto. Nombraremos este tipo *Unit* y su conjunto de valores será solo el valor *unit*. Podemos decir que este tipo cumple el rol de *void* en C.

Macro punto y coma (;) En lenguajes con efectos laterales, como el que estamos definiendo, esta macro nos servirá para definir el orden de evaluación de varias expresiones en **secuencia**.

$$M_1; M_2 \stackrel{def}{=} (\lambda x : Unit. M_2) M_1 \quad x \notin FV(M_2)$$

Por como definimos las reglas semánticas del lenguaje, esto significa que primero se evalúa M_1 y luego M_2 .

Extensión con Referencias (λ^{bnu})

Referencias Una referencia es una abstracción de una porción de memoria que se encuentra en uso. Usaremos el tipo *Ref* σ para diferenciar las expresiones que representan referencias.

Representación Representaremos las posiciones con **direcciones simbólicas** o *locations* usando etiquetas l, l_1 y definiremos a la **memoria** o *store* como una función parcial μ que dada una dirección nos devuelve el valor almacenado en ella. Y notaremos:

- $\mu[l \rightarrow V]$ es el store resultante de **pisar** $\mu(l)$ con V .
- $\mu \oplus (l \rightarrow V)$ es el **store extendido** resultante de ampliar μ con una nueva asociación $l \rightarrow V$ asumiendo que $l \notin Dom(\mu)$.

Uso en semántica Ahora necesitamos una forma de usar estas nuevas definiciones en nuestras evaluaciones, por lo que agregaremos las etiquetas al conjunto de valores y, a partir de ahora, los juicios de evaluación, tendrán la siguiente forma:

$$M|\mu \rightarrow M'|\mu'$$

Esto significa que una expresión M reduce a M' y que afecta a μ de tal forma que pasa a ser μ' , así reflejaremos los cambios de estado de la memoria.

Notemos que, a pesar de que agregamos las etiquetas l como términos y valores, éstas son solo producto de la formalización y **no** se pretende que sean usadas por el programador.

Uso en tipado Con la posibilidad de modificar la memoria durante la ejecución de un programa, se hace necesaria la definición de un contexto que nos permita inferir el tipo del valor almacenado en las posiciones usadas. Introducimos el **contexto de tipado** Σ para direcciones como una función parcial de direcciones a tipos. Y los juicios de tipado serán de la siguiente forma:

$$\Gamma | \Sigma \triangleright M : \sigma$$

Indicando esto, que M es de tipo σ en el contexto Γ cuando el estado de la memoria se corresponde con el contexto de tipado Σ .

La extension

Tipos

$$\sigma, \tau ::= \textit{Bool} \mid \textit{Nat} \mid \textit{Unit} \mid \textit{Ref } \sigma \mid \sigma \rightarrow \tau$$

Términos

$$M ::= \dots \mid \textit{unit} \mid \textit{ref } M \mid !M \mid M := N \mid l$$

Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma | \Sigma \triangleright \textit{unit} : \textit{Unit}} (\text{T-Unit}) \quad \frac{\Gamma | \Sigma \triangleright M_1 : \sigma}{\Gamma | \Sigma \triangleright \textit{ref } M_1 : \textit{Ref } \sigma} (\text{T-Ref})$$

$$\frac{\Gamma | \Sigma \triangleright M_1 : \textit{Ref } \sigma}{\Gamma \triangleright !M_1 : \sigma} (\text{T-DeRef})$$

$$\frac{\Gamma | \Sigma \triangleright M_1 : \textit{Ref } \sigma \quad \Gamma | \Sigma \triangleright M_2 : \sigma}{\Gamma \triangleright M_1 := M_2 : \textit{Unit}} (\text{T-Assing})$$

$$\frac{\Sigma(l) = \sigma}{\Gamma | \textit{Signa} \triangleright l : \textit{Ref } \sigma} (\text{T-Loc})$$

Valores

$$V ::= \dots \mid \textit{unit} \mid l$$

Axiomas y reglas semánticas

$$\frac{M_1 | \mu \rightarrow M'_1 | \mu'}{M_1 \textit{ } M_2 | \mu \rightarrow M'_1 \textit{ } M_2 | \mu'} (\text{E-App1}) \quad \frac{M_2 | \mu \rightarrow M'_2 | \mu'}{\textcolor{red}{V}_1 \textit{ } M_2 | \mu \rightarrow \textcolor{red}{V}_1 \textit{ } M'_2 | \mu'} (\text{E-App2})$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma. M) \textcolor{red}{V} | \mu \rightarrow M \{x \leftarrow \textcolor{red}{V}\} | \mu'} (\text{E-AppAbs})$$

$$\frac{M_1 | \mu \rightarrow M'_1 | \mu'}{!M_1 | \mu \rightarrow !M'_1 | \mu'} (\text{E-DeRef}) \quad \frac{\mu(l) = \textcolor{red}{V}}{!l | \mu \rightarrow V | \mu} (\text{E-DerefLoc})$$

$$\frac{M_1 | \mu \rightarrow M'_1 | \mu'}{M_1 := M_2 | \mu \rightarrow M'_1 := M_2 | \mu'} (\text{E-Assign1})$$

$$\frac{M_2|\mu \rightarrow M'_2|\mu'}{V := M_2|\mu \rightarrow V := M'_2|\mu'} \text{(E-Assign2)}$$

$$\frac{}{l := V|\mu \rightarrow \text{unit}|\mu[l \rightarrow V]} \text{(E-Assign)}$$

$$\frac{M_1|\mu \rightarrow M'_1|\mu'}{\text{ref } M_1|\mu \rightarrow \text{ref } M'_1|\mu'} \text{(E-Ref)} \quad \frac{l \notin \text{Dom}(\mu)}{\text{ref } V|\mu \rightarrow l|\mu \oplus (l \rightarrow V)} \text{(E-RefV)}$$

Corrección de tipos en un lenguaje con referencias

Al agregar referencia, hay consecuencias. Una de ellas es que no todo término cerrado y bien tipado termina. Por lo que debemos reformular las definiciones de corrección del lenguaje, es decir, debemos indicar que significa el **progreso** y la **preservación** cuando hay referencias.

Preservación

La preservación nos aseguraba que no importa cuantas veces reduzcamos una expresión, esta debería mantener su tipo. Sin embargo, con las asignaciones podemos cambiar el tipo de ciertos valores durante la ejecución de un programa, lo que implica que la expresión podría cambiar su tipo. Para definir la preservación precisamos una noción de compatibilidad entre el store y el contexto de tipado que nos permita asegurar que si los valores no cambian su tipo, entonces la expresión mantiene su tipo.

Decimos que $\Gamma|\Sigma \triangleright \mu$ si y solo si $\text{Dom}(\Sigma) = \text{Dom}(\mu)$ y $\Gamma|\Sigma \triangleright \mu(l) : \Sigma(l)$ para todo $l \in \text{Dom}(\mu)$. Es decir, μ es compatible con Σ si ambas funciones tiene el mismo dominio, y es cierto que los tipos de cada etiqueta de μ coinciden con los tipos que se les asignó en Σ .

Entonces definimos la preservación de la siguiente manera:

Si $\Gamma|\Sigma \triangleright M : \sigma$ y $M|\mu \rightarrow N|\mu'$ y $\Gamma|\Sigma \triangleright \mu$ entonces existe un Σ' que contiene a Σ tal que $\Gamma|\Sigma' \triangleright N : \sigma$ y $\Gamma|\Sigma' \triangleright \mu'$

La nueva definición nos dice que dada una expresión M de tipo σ y un contexto $\Gamma\Sigma$ compatible con μ , si pasa que cuando reducimos $M|\mu \rightarrow N|\mu'$, μ' es compatible con Σ' , entonces la reducción tendrá el mismo tipo que M .

Para que μ' sea compatible con Σ' puede haber dos posibilidad: O que $\mu' = \mu$ y $\Sigma = \Sigma'$ o que μ' sea una extensión de μ , es decir que se haya creado una referencia nueva, en cuyo caso ninguno de los tipos fue modificado y Σ' es Σ extendido con el tipo de la nueva referencia.

Progreso

El progreso nos aseguraba que dada una expresión, entonces su ejecución termina en un valor o no termina. Para el nuevo lenguaje, hay que tener en cuenta el contexto de tipado:

Si M es cerrado y bien tipado en un contexto de tipado de memoria Σ , entonces

- M es un valor
- o bien para cualquier memoria μ que sea compatible con Σ , existe M' y μ' tal que $M|\mu \rightarrow M'|\mu'$

Esto quiere decir que solo se puede asegurar progreso cuando μ es compatible con Σ .

1.2.7. Extensión con recursión

Queremos dar al lenguaje λ , la capacidad de interpretar expresiones recursivas. Definimos, entonces, la función $fixM$ que dado para función M devuelve el punto fijo de dicha función, es decir, un valor x tal que Mx evalúa a x .

Veamos un ejemplo, supongamos que tenemos la función $f(n) = \mathbf{If } n = 0 \mathbf{ then } 1 \mathbf{ else } n * f(n - 1)$. Cuando evaluamos f en 0, obtenemos su definición para el valor 0, cuando la evaluamos en 1, la definimos para 0 y 1, con cada valor que tengamos, la iremos definiendo para ese valor y para todos los anteriores.

Podríamos pensar que cuando evaluamos $n \rightarrow \text{inf}$, obtenemos una función que se define para todos los valores naturales, es decir obtenemos la función factorial, propiamente dicha.

Términos

$$M ::= \dots \mid fix\ M$$

Regla de tipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \rightarrow \sigma}{\Gamma \triangleright fix\ M : \sigma} (\text{T-Fix})$$

Reglas de evaluación

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{fix\ M_1 \rightarrow fix\ M'_1} (\text{E-Fix})$$

$$\frac{}{fix\ (\lambda x : \sigma. M) \rightarrow M\{x \leftarrow fix\ \lambda x : \sigma. M\}} (\text{E-FixBeta})$$

1.3. Inferencia de tipos

Queremos modificar el lenguaje de cálculo lambda para que las expresiones no necesiten las notaciones de tipos explícitas. Para esto debemos definir términos sin información de tipos en los que la información faltante pueda ser **inferida** de manera sencilla. Esto es, debemos convertir dichos términos en términos bien tipados del cálculo lambda sin ningún problema.

Este nuevo lenguaje, nos evitará la sobrecarga de tener que declarar y manipular todos los tipos al momento de escribir un programa. Sin embargo, debemos tener en cuenta que, durante la compilación de los mismos, hay que hacer la inferencia de tipos, es decir, el compilador se deberá encargar de pasar el lenguaje que definamos a uno lambda tipado antes de poder compilar el programa.

Términos

El lenguaje sin tipos tendrá todos los términos del lenguaje λ con el que estuvimos trabajando hasta ahora, con la diferencia de que si en ellos había una notación de tipo, entonces la obviaremos:

$$\begin{aligned} M ::= & x \\ & \mid true \mid false \mid if\ M\ then\ P\ else\ Q \\ & \mid 0 \mid succ(0) \mid isZero(M) \\ & \mid \lambda x. M \mid M\ N \mid fix\ M \end{aligned}$$

Ahora, si bien la mayoría de los términos son iguales a los términos originales, necesitaríamos alguna forma de convertir los términos del lambda cálculo a términos no tipados y viceversa. Para el primer caso, definimos la función Erase que dado un término del lambda cálculo, **elimina** las anotaciones de tipos de las abstracciones que contenga. Por ejemplos:

$$\text{Erase}(\lambda x : Nat. \lambda f : Nat \rightarrow Nat. f\ x) = \lambda x. \lambda f. f\ x$$

Chequeos de tipo Realizar el chequeo de tipo es determinar, para un término estándar (del lenguaje λ tipado) M , si existe Γ y σ tales que $\Gamma \triangleright M : \sigma$ es derivable. Osea que nos indica si M es un término tipable o no.

Este chequeo es facil de realizar, ya que solo hay que seguir la estructura sintáctica de M para reconstruir una derivación de juicio.

Definición de inferencia

En cambio, con la inferencia de tipos, dado un término U sin notaciones de tipo, se trata hallar un término estándar (con anotaciones de tipos) M tal que:

1. $\Gamma \triangleright M : \sigma$ para algún Γ y σ , y
2. $\text{Erase}(M) = U$

Lo que estamos diciendo es que queremos encontrar una expresión bien tipada M del lenguaje lambda que sea equivalente a U . Si encontramos este M , U será de tipo σ , sino U será una expresión no tipable en nuestro lenguaje.

Variables de tipo

Supongamos que tenemos la expresión $U = \lambda x.x$. En este caso, si queremos tipar U , nos damos cuenta que puede ser la función identidad de cualquier tipo. Como cualquiera de estas expresiones es igual de válida necesitamos escribir esto en nuestra solución, para eso usamos las **variables de tipo**.

Una **variables de tipo** s es una variable que representa una expresión de tipo arbitraria e indica que no importa por que expresión de tipo la remplacemos, tendremos una solución válida. Esto nos permitirá escribir que la expresión M resultante de inferir los tipos de U será $M = \lambda x : s.x$ donde s puede ser cualquier tipo de nuestro lenguaje.

Debemos agregar esta nueva expresión a las expresiones de tipo del cálculo lambda:

$$\sigma ::= s \mid Nat \mid Bool \mid \sigma \rightarrow \tau$$

1.3.1. Sustitución de tipos

Una función S de sustitución es una función que mapea variables de tipo en expresiones de tipo y puede ser aplicada a expresiones de tipos ($S\sigma$), términos (SM) y contextos de tipado ($S\Gamma$).

Describimos S usando la notación $\{\sigma_1/t_1, \dots, \sigma_n/t_n\}$ indicando que la variable t_i debe ser remplazada por σ_i . Además, definimos el **conjunto soporte** de S al conjunto $\{t_1, \dots, t_n\}$ como el conjunto que representa las variables que afecta S .

Por ejemplo, si $S = \{Bool/t\}$, entonces $S(\lambda x : t.x) = \lambda x : Bool.x$ y el tipo soporte de S es $\{t\}$.

La sustitución cuyo soporte es \emptyset , es la **sustitución identidad**.

Si tenemos dos juicios de tipado $\Gamma \triangleright M : \sigma$ y $\Gamma' \triangleright M' : \sigma'$ tales que $\Gamma' \triangleright M' : \sigma'$ es el resultado de aplicar alguna función de sustitución S a $\Gamma \triangleright M : \sigma$, entonces decimos que $\Gamma' \triangleright M' : \sigma'$ es instancia de $\Gamma \triangleright M : \sigma$

Composición de sustituciones La composición de sustituciones de S y T , denotada $S \circ T$, es la sustitución que se comporta como sigue:

$$(S \circ T)(\sigma) = S(T\sigma)$$

Preorden de sustituciones Una sustitución S es **más general** que T si existe una sustitución U tal que $T = U \circ S$, es decir, si T es una instancia de S .

Unificación

El algoritmo de inferencia que vamos a proponer analiza un término (sin notaciones de tipos) a partir de sus subtérminos. Una vez obtenida la información para cada uno de los subtérminos debe determinar si la información de cada uno de ellos es consistente (**consistencia**)y, si lo es, sintetizar la información del término original a partir de esta (**Síntesis**).

Para realizar la síntesis debemos **compatibilizar** la información de tipos de cada subtérmino, por cada variable x del término tenemos que tomar los tipos que le asigno cada subtérmino y unificarlos. Es decir, debemos encontrar una sustitución S que nos permita remplazar los tipos que dió cada subexpresión por un tipo único. Veamos un ejemplo:

Sea $M = x\ y + x\ (y + 1)$, del primer subtérmino $x\ y$ tenemos que $x :: s \rightarrow t$ e $y :: s$, del subtérmino $x\ (y + 1)$ tenemos que $x :: Nat \rightarrow u$ e $y :: Nat$. Ahora, x e y pueden tener un solo tipo en M , por lo que necesitamos una sustitución que nos permita unificar $s \rightarrow t$ con $Nat \rightarrow u$ y s con Nat . En este caso podemos definir $S = \{Nat/s, u/t\}$, concluyendo que $x :: Nat \rightarrow t$ e $y : Nat$.

Ecuación de unificación Es una expresión de la forma $\sigma_1 \doteq \sigma_2$ cuya solución es una sustitución tal que $S\sigma_1 = S\sigma_2$. Por lo general tendremos un conjunto de ecuaciones de unificación y la solución a dicho conjunto será la sustitución que unifica todas las expresiones.

En el ejemplo anterior, las ecuaciones de unificación hubiesen sido $\{s \rightarrow t \doteq Nat \rightarrow u, s \doteq Nat\}$

Diremos que una sustitución S es un **unificador más general (MGU)** de $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \dots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$, si es solución de ese conjunto y es más general que cualquier otra de sus soluciones.

Teorema Si $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \dots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$ tiene solución, entonces existe un MGU y además es único salvo renombre de variables.

Algoritmo de unificación de Martelli-Montanari

Dado un conjunto de ecuaciones de unificación $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \dots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$, vamos a presentar un algoritmo no-determinístico que consiste en **reglas de simplificación** que reescriben conjuntos de pares de tipos a unificar (*goals*).

Las secuencias que terminan en un *goal* vacío son **exitosas**, el resto, son **fallidas**. Si una secuencia es exitosa, entonces los pasos en los que realizamos sustituciones serán soluciones parciales al problema y la composición de todas ellas será el MGU.

Reglas de reducción

1. Descomposición

$$\{\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \doteq \tau_1 \rightarrow \tau_2\} \cup G \mapsto \{\sigma_1 \doteq \tau_1, \sigma_2 \doteq \tau_2\} \cup G$$

2. Eliminación de par trivial

$$\{Nat \doteq Nat\} \cup G \mapsto G$$

$$\{Bool \doteq Bool\} \cup G \mapsto G$$

$$\{s \doteq s\} \cup G \mapsto G$$

3. Swap Si σ no es una variable,

$$\{\sigma \doteq s\} \cup G \mapsto \{s \doteq \sigma\} \cup G$$

4. Eliminación de variable Si $s \notin FV(\sigma)$

$$\{s \doteq \sigma\} \cup G \mapsto_{\sigma/s} G[\sigma/s]$$

5. Falla

$$\{\sigma \doteq \tau\} \cup G \mapsto \text{falla}, \text{ con } (\sigma, \tau) \in T \cup T^{-1} \text{ y } T = \{(Bool, Nat), (Nat, \sigma_1 \rightarrow \sigma_2), (Bool, \sigma_1 \rightarrow \sigma_2)\}.$$

Acá, la notación T^{-1} se refiere al conjunto con cada tupla de T invertida.

6. Occur Check Si $s \neq \sigma$ y $s \in FV(\sigma)$

$$\{s \doteq \sigma\} \cup G \mapsto \text{falla}$$

Propiedades del algoritmo

El algoritmo de Martinelli-Montanari siempre termina. Sea G un conjunto de pares, entonces:

- Si G tiene un unificador, el algoritmo termina exitosamente y retorna un MGU.
- Si G no tiene un unificador, el algoritmo termina con **falla**.

Ejemplo de aplicación

$$\begin{aligned} & \{(Nat \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow u) \doteq t \rightarrow (s \rightarrow s) \rightarrow t\} \mapsto^1 \{Nat \rightarrow r \doteq t, r \rightarrow u \doteq (s \rightarrow s) \rightarrow t\} \\ & \mapsto^3 \{t \doteq Nat \rightarrow r, r \rightarrow u \doteq (s \rightarrow s) \rightarrow t\} \mapsto_{Nat \rightarrow r/t}^4 \{r \rightarrow u \doteq (s \rightarrow s) \rightarrow (Nat \rightarrow r)\} \\ & \mapsto^1 \{r \doteq (s \rightarrow s), u \doteq Nat \rightarrow r\} \mapsto_{s \rightarrow s/r}^4 \{u \doteq Nat \rightarrow (s \rightarrow s)\} \mapsto_{Nat \rightarrow (s \rightarrow s)/u}^4 \emptyset \end{aligned}$$

Entonces, el MGU es

$$\{Nat \rightarrow (s \rightarrow s)/u\} \circ \{s \rightarrow s/r\} \circ \{Nat \rightarrow r/t\} = \{Nat \rightarrow (s \rightarrow s)/u, s \rightarrow s/r, Nat \rightarrow (s \rightarrow s)/t\}$$

1.3.2. Función de inferencia \mathbb{W}

Vamos a definir una función \mathbb{W} que dada una expresión U sin notación de tipos, nos devolverá un juicio de tipado con una expresión tipada M que corresponde a U . Esta función, la ejecutaremos de manera recursiva sobre las sub-expresiones de U y sustituirá, si es posible, los tipos de cada una de ellas para que tengan “sentido” en U .

Propiedades deseables de \mathbb{W}

Dado un término U , $\mathbb{W}(U)$ nos devolverá, si tiene éxito, una terna de tres elementos que serán un contexto de tipado Γ una expresión M y un σ (notamos $\mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \sigma$).

Queremos que \mathbb{W} sea **correcto** y **completo**.

Correctitud $\mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \sigma$ implica que $\text{Erase}(M) = U$ y $\Gamma \triangleright M : \sigma$ es derivable. Osea que M es una expresión de tipo σ en un contexto Γ tal que si le borramos las notaciones de tipo, se convierte en U .

Complejitud Si $\Gamma \triangleright M : \sigma$ es derivable y $\text{Erase}(M) = U$, entonces: $\mathbb{W}(U)$ tiene éxito y produce un juicio $\Gamma' \triangleright M' : \sigma'$ que es instancia del mismo. En otras palabras, si U se puede obtener a partir de una expresión M , entonces \mathbb{W} deberá devolver el juicio de tipado que corresponde a M o uno más general (esto es con variables de tipos, si resulta que U podría ser de otros tipos).

Algoritmo de inferencia

El objetivo es definir \mathbb{W} por recursión sobre la estructura de U , por lo que definirla, primero, para las construcciones más simples y luego para las expresiones compuestas. Además, el algoritmo se valdrá del algoritmo de unificación para combinar los resultados de los pasos recursivos y, así, obtener un tipado consistente.

Constantes y variables

$$\mathbb{W}(\text{true}) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \triangleright \text{true} : Bool$$

$$\mathbb{W}(\text{false}) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \triangleright \text{false} : Bool$$

$$\mathbb{W}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : s\} \triangleright x : s, \text{ } s \text{ variable fresca}$$

$$\mathbb{W}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \triangleright 0 : Nat$$

Caso *succ*

$$\mathbb{W}(\textcolor{red}{succ}(U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \triangleright S \text{succ}(M) : Nat$$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \tau$
- $S = MGU\{\tau \dot{=} Nat\}$

Caso *pred*

$$\mathbb{W}(\textcolor{red}{pred}(U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \triangleright S \text{pred}(M) : Nat$$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \tau$
- $S = MGU\{\tau \dot{=} Nat\}$

Caso *isZero*

$$\mathbb{W}(\textcolor{red}{isZero}(U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \triangleright S \text{isZero}(M) : Bool$$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \tau$
- $S = MGU\{\tau \dot{=} Nat\}$

Caso *ifThenElse*

$$\mathbb{W}(\textcolor{red}{if } U \text{ then } V \text{ else } W) \stackrel{def}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_3 \triangleright S (if M then P else Q) : S\sigma$$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \triangleright M : \rho$
- $\mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \triangleright P : \sigma$
- $\mathbb{W}(W) = \Gamma_3 \triangleright Q : \tau$
- $S = MGU\{\sigma_1 \dot{=} \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \wedge x : \sigma_2 \in \Gamma_j, i \neq j\} \cup \{\sigma \dot{=} \tau \mid \rho \dot{=} Bool\}$

Caso aplicación

$$\mathbb{W}(U \ V) \stackrel{def}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \triangleright S (M \ N) : St$$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \triangleright M : \tau$
- $\mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \triangleright N : \rho$
- $S = MGU\{\sigma_1 \dot{=} \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \wedge x : \sigma_2 \in \Gamma_j, i \neq j\} \cup \{\tau \dot{=} \rho \rightarrow t\}$ con t variable fresca

Caso abstracción

$$\mathbb{W}(\textcolor{red}{\lambda}x.U) \stackrel{def}{=} \Gamma \setminus \{x : \tau\} \triangleright \lambda x : \tau. M : \tau \rightarrow \rho$$

Sea $\mathbb{W}(U) = \Gamma \triangleright M : \rho$, si Γ tiene información de tipos para x , es decir $x : \tau \in \Gamma$ para algún τ , entonces:

$$\mathbb{W}(\textcolor{red}{\lambda}x.U) \stackrel{def}{=} \Gamma \setminus \{x : \tau\} \triangleright \lambda x : \tau. M : \tau \rightarrow \rho$$

Si Γ no tiene información de tipos para x ($x \notin \text{Dom}(\Gamma)$), entonces elegimos una variable fresca s y

$$\mathbb{W}(\textcolor{red}{\lambda}x.U) \stackrel{def}{=} \Gamma \triangleright \lambda x : s. M : s \rightarrow \rho$$

Caso *fix*

$$\mathbb{W}(\textcolor{red}{fix} \ (U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \triangleright S \text{fix} \ (M) : St$$

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \triangleright M : \tau$
 - $S = MGU\{\tau \dot{=} t \rightarrow t\}$ con t variable fresca
-

Complejidad del algoritmo

Tanto la unificación como la inferencia para cálculo lambda se puede realizar en tiempo lineal. Sin embargo, el tipo principal asociado a un término sin anotaciones puede ser **exponencial** en el tamaño del término.

Extensión del algoritmo a nuevos tipos

Para extender el algoritmo a otros tipos debemos agregar los casos correspondientes al nuevo tipo teniendo en cuenta que los llamados recursivos devuelven un contexto, un término y un tipo sobre los que no podemos asumir nada. Si la nueva regla tiene tipos iguales o contextos repetidos, debemos unificarlos. Y si la regla liga alguna variable, entonces vamos a poder dividir en dos casos: Si alguno de los contextos recursivos tiene información sobre esa variable, entonces sacamos su tipo del contexto que la contenga, sino le asignamos una variable fresca de tipo. Si la regla tiene restricciones adicionales, se incorporan como posibles fallas. Veamos un ejemplo para la extensión de listas (definida en el ejercicio 17 de la práctica 2).

Extensión del algoritmo para listas

$\mathbb{W}([]) = \emptyset \triangleright []_t : t$ con t variable fresca.

$\mathbb{W}(U_1 :: U_2) = S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \triangleright S(M_1 :: M_2) : S[\sigma_1]$

- $\mathbb{W}(U_i) = \Gamma_i \triangleright M_i : \sigma_i$
- $S = MGU\{\sigma_1 \dot{=} \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \wedge x : \sigma_2 \in \Gamma_j, i \neq j\} \cup \{[\sigma_1] \dot{=} \sigma_2\}$

$\mathbb{W}(\text{case } U \text{ of } \{[] \rightsquigarrow U_2 \mid h :: t \rightsquigarrow U_3\}) =$

$S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_3 \setminus \{h, t\} \triangleright S(\text{case } M_1 \text{ of } \{[] \rightsquigarrow M_2 \mid h :: t \rightsquigarrow M_3\}) : S\sigma_2$

- $\mathbb{W}(U_i) = \Gamma_i \triangleright M_i : \sigma_i$ con $i = 1, 2, 3$
- $S = MGU\{\sigma_1 \dot{=} \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \wedge x : \sigma_2 \in \Gamma_j, i \neq j\} \cup \{\sigma_1 \dot{=} [t_1], t_1 \dot{=} \tau_h, \tau_t \dot{=} \sigma_1, \sigma_2 \dot{=} \sigma_3\}$ con

$$\tau_h = \begin{cases} \sigma_h & \text{si } h : \sigma_h \in \Gamma_3 \\ t_2 & \text{sino} \end{cases} \quad \text{y} \quad \tau_t = \begin{cases} \sigma_t & \text{si } t : \sigma_t \in \Gamma_3 \\ t_2 & \text{sino} \end{cases}$$