Resumen: Algebra 1

Gianfranco Zamboni

23 de febrero de 2018

Índice

1. Conjuntos, relaciones y funciones

1.1. Conjuntos

Conjunto: Es una colección de objetos tales que, dado un objeto cualquiera v, se puede determinar si v pertenece o no a la misma.

Conjunto vació: Es el conjunto que no tiene elementos y se lo denota con la letra ϕ.

Cardinal: de un conjunto A es el número de elementos distintos que posee el mismo y lo notamos $|A|$.

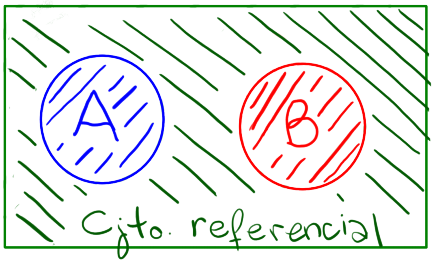
Subconjunto: Se dice que un conjunto B está contenido en un conjunto A si todo elemento de B es un elemento de A.

$$B \subseteq A \iff [(\forall\, x : \alpha)\ x \in B \Rightarrow x \in A]$$

Igualdad: Dos conjuntos A y B son iguales si tienen exactamente los mismos elementos.

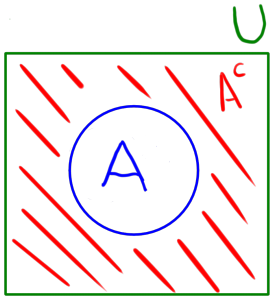
$$A = B \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Conjunto referencial: Conjunto que incluye a todos los conjuntos que se están considerando. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera:



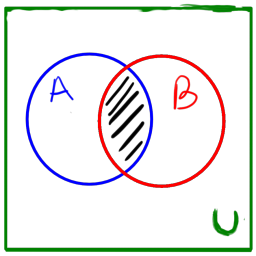
Complemento: Sea $A \subset U$ entonces, el complemento A^c de A es el conjunto que incluye todos los elementos de U que no pertenecen a A.

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$



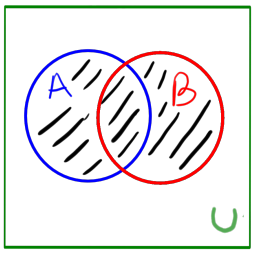
Intersección: Sean $A \subset U$ y $B \subset U$, la intersección de A y B es el cojunto de elementos que pertenecen tanto a A como a B.

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$



Union: Sean $A \subset U$ y $B \subset U$, la **union** de A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A o a B.

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$



Propiedades

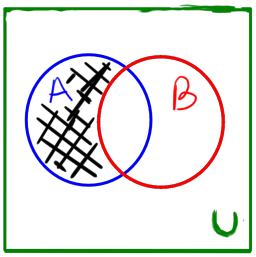
- ϕ está contenido en todos los conjuntos.
- Sean A y B dos conjuntos tal que $B \subseteq A \Rightarrow |B| \leq |A|$
- Si $A \cap B = \phi \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si U es finito, $|A^c| = |U| - |A|$
- Si $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$
- Si $A \subseteq B \wedge A \subseteq C$ entonces $A \subseteq (B \cap C)$
- $A \subseteq (A \cup B) \wedge B \subseteq (B \cup A) \Rightarrow A = B$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap A^c = \phi$
- $A \cap \phi = \phi$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup A^c = U$
- $A \cup \phi = A$

Leyes de Morgan: Sean A y B contenidos en U, entonces valen:

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Diferencia: Sean $A \subset U$ y $B \subset U$, la diferencia entre A y B se define como:

$$A - B = A \cap B^c$$
$$= \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$$

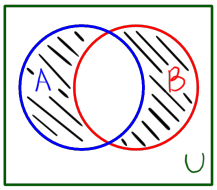


Propiedades:

- $A - B = A - (A \cap B)$
- $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

Diferencia simétrica: Sean $A \subset U$ y $B \subset U$, la diferencia simétrica entre A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A o a B pero no los dos a la vez.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$



Propiedades: Sean A, B y C subconjuntos de U:

- $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2 \times |A \cap B|$
- $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A \triangle B = B \triangle A$
- $A \triangle A = \phi$
- $A \triangle \phi = A$
- $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$
- $(A \triangle B) \subseteq (A \triangle C)$

Conjunto de partes: de A se nota $\mathcal{P}(A)$ y es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\} \wedge (B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A)$$

Propiedades :

- $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Producto cartesiano Sean A y B conjuntos, el producto cartesiano de A con B es el conjunto de pares ordenados $A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$

Propiedades:

- $|A \times B| = |A||B|$
- $|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times \cdots \times |A_n|$
- $A \neq B$ entonces $A \times B \neq B \times A$
- Si $A \subseteq U \wedge B \subseteq V$ entonces $A \times B \subseteq U \times V$

1.2. Relaciones

Sean A y B dos conjuntos. Un subconjunto $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$ se llama relación de A en B.

Dados $x \in A$ e $y \in B$ y una relación $\mathcal{R}$ de A en B, se dice que x esta relacionado con y si $(x, y) \in \mathcal{R}$. Y, en ese caso, se nota $x\mathcal{R}y$.

Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación en A cuando $\mathcal{R} \subseteq A \times A$. Una relación $\mathcal{R}$ en A puede ser:

- **Reflexiva:** si $(\forall\ x \in A)\ (x, x) \in \mathcal{R}$
- **Simétrica:** si $(\forall\ x, y \in A)\ (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$
- **Asimétrica:** si $(\forall\ x, y \in A)\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y)$.
- **Transitiva**: Si $(\forall\ x, y, z \in A)\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$.

1.2.1. Relaciones de equivalencia y de orden

$\mathcal{R}$ es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva.

$\mathcal{R}$ es una **relación de orden** cuando es una relación reflexiva, asimétrica y transitiva.

Dada $\sim$ una relación de equivalencia en A, la **clase de equivalencia** de un elemento $x \in A$, es el conjunto $C_x = \overline{x} = \{y \in A : y \sim x\}$

- Si $y \in C_x$ entonces $x \in C_y$
- $x \in C_x$
- $x \sim y \iff C_x = C_y$
- $x \not\sim y \iff C_x \cap C_y = \phi$

1.2.2. Partición de un conjunto

Sea A un conjunto y $\mathcal{P}$ un conjunto formado por subconjuntos de A. Decimos que $\mathcal{P}$ es una **partición** si cumple:

- $\mathcal{P} \neq \phi$
- Si $P, Q \in \mathcal{P} \wedge P \neq Q$ entonces $P \cap Q = \phi$
- Para todo elemento a de A, $(\exists\ P \in \mathcal{P})\ a \in P$

Para todo conjunto A, hay una manera natural de asociar una relación de equivalencia en A a una partición de A.

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto A:

- Sean $a, b \in A$, entonces $a \sim b \iff$ existe $c \in A$ tal que $a, b \in C_c$.
- $\mathcal{P} = \{C_a : a \in A\}$ es una partición de A.

Si $\mathcal{P}$ es una partición de A, entonces la relación $\sim$ en A definida por "$a \sim b \iff \exists\ P \in \mathcal{P}$ tal que $a, b \in P$" es de equivalencia.

Si A y B son conjuntos finitos con m y n elementos, respectivamente, entonces, la cantidad de relaciones que hay de A en B es igual a 2^{mn}

1.3. Funciones

Dada f una relación de A en B, se dice que f es una **función** cuando todo elemento $x \in A$ está relacionado con algún elemento $y \in B$ y además es el único elemento con el que se relaciona. Si pasa esto, se dice que y es la imagen de x por f ($y = f(x)$).

La $\mathcal{R} = \{(x, x) : x \in A\}$ para cualquier conjunto $A \neq \phi$, es la **función identidad** de A y se nota id_A. ($id_A(x) = x \ \forall x \in A$)

Si A es un conjunto, una sucesión de elementos de A puede ser tomada como una función $f : \mathbb{N} \to A$.

Sean $f, g : A \to B$, f y g son **iguales** ($f = g$) cuando $f(x) = g(x) \ \forall \ x \in A$

Sea $f : A \to B$:

- A se llama **dominio** de f
- B se llama **codominio** de f
- La **imagen** $\texttt{Im}(f)$ es el subconjunto de elementos de B que están relacionados con algún elemento de A
$$\texttt{Im}(f) = \{y \in B : \exists \ x \in A / f(x) = y\}$$
- f es **inyectiva** si $\forall \ y \in B$ existe a lo sumo un elemento $x \in A / f(x) = y$
- f es **sobreyectiva** si $\forall \ y \in B$ existe al menos un elemento de $x \in A / f(x) = y$.
- f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Sean A y B dos conjuntos de m y n elementos respectivamente, entonces hay n^m funciones de A en B distintas y dada una función $f : A \to B$ vale que:

- Si f es inyectiva $\Rightarrow |A| \leq |B|$
- Si f es sobreyectiva $\Rightarrow |A| \geq |B|$
- Si f es biyectiva $\Rightarrow |A| = |B|$

Además hay $n!$ funciones biyectivas de A en B y $\frac{n!}{(m-n)!}$ funciones inyectivas de A en B.

1.3.1. Composición de funciones y función inversa

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones, entonces la **composición** $g \circ f$ de f con g está definidad por:

$$g \circ f : A \to C, \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Si f es una función biyectiva, entonces para todo $y \in B$ existe exactamente un elemento $x \in A / f(x) = y$. Sea $\mathcal{R} = \{(y, x) : f(x) = y\}$ una relación de A en B, se puede ver que $\mathcal{R}$ satisface las propiedades para ser función. Notamos $\mathcal{R}$ con f^{-1} y se llama **función inversa**.

Propiedades: Sea $f : A \to B$ una función:

- Si f es biyectiva, entonces $f^{-1} \circ f = id_A$ es igual a la función identidad.
- Si existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_A$ y $g \circ f = id_B$, entonces f es biyectiva y $g = f^{-1}$.
- f es inversible si y solo si f es biyectiva.

2. Números naturales e inducción

2.1. Operaciones y propiedades básicas

Sean m, n y k tres números naturales, entonces valen:

- $m + n \in \mathbb{N}$ y $m - n \in \mathbb{N}$
- **Conmutatividad:** $m + n = n + m$ y $m \times n = n \times m$
- **Asociatividad:** $m + (n + k) = (m + n) + k$ y $m \times (n \times k) = (m \times n) \times k$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$
- $\prod_{i=1}^{n} a_i * \prod_{i=1}^{n} b_i = \prod_{i=1}^{n} (a_i * b_i)$

2.2. Sumatorias y sucesiones conocidas

Suma de Gauss

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Serie geométrica

$$\sum_{i=0}^{n} q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q}$$

Sucesión de Fibonacci

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

Sucesión de Lucas

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = 13$$
$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

2.3. Conjunto inductivo y principio de inducción

El **principio de inducción** funciona en dos pasos. El primero, conocido como **caso base**, es probar que la afirmación en cuestión es verdadera para el primer número natural. El segundo paso, conocido como **paso inductivo**, es probar que la afirmación para un número natural cualquiera implica la afirmación para el número natural siguiente.

Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto, se dice que H es un conjunto inductivo si se cumplen las siguientes condiciones:

- $1 \in H$
- $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ (x \in H \Rightarrow x + 1 \in H)$

Si $H \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, entonces $H = \mathbb{N}$.

Todos los conjuntos inductivos cumplen el **principio de buena ordenación**, o sea que contienen un elemento que es menor o igual que todos los demás elementos del conjunto.

2.3.1. Principio inductivo:

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $p(n)$ una afirmación sobre los números naturales, si p satisface:

- **Caso base**: $p(1)$ es verdadera y
- **Paso inductivo**: $(\forall\ n \in \mathbb{N})$ ($p(n)$ es verdadera $\Rightarrow p(n+1)$ es verdadera)

entonces p es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

La hipótesis "$p(n)$ es verdadera" se denomina **hipótesis inductiva**.

2.3.2. Principio de inducción corrido

Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n)$ tal que $n \geq n_0$ una afirmación sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si p satisface:

- **Caso base**: $p(n_0)$ es verdadera y
- **Paso inductivo**: $(\forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)$ ($p(n)$ es verdadera $\Rightarrow p(n+1)$ es veradera)

entonces p es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ que sea mayor o igual a n_0.

2.3.3. Principio de inducción global

Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n)$ una afirmación sobre $\mathbb{N}$. Si p satisface:

- **Caso base**: $p(n_0)$ es verdadera y
- **Paso inductivo**: $((\forall\ n \in \mathbb{N}, n \leq n_0)\ p(n)$ es verdadera$) \Rightarrow p(n+1)$ es verdadera)

entonces p es veradera para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.4. Propiedades y otras definiciones

- Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A \neq \phi$ tiene un primer elemento.
- Las sucesiones que dependen de valores ya conocidos se llaman **sucesiones recursivas** o sucesiones por recurrencia.
- Una **fórmula cerrada** es una formula en la que el elemento a_n de una sucesión no depende de los anteriores, sino solo de n.
- **Función cerrada**: Dado un conjunto A cualquiera, una *r-upla* $(a_1, \ldots, a_r)$ de elementos de A y una función $G : \mathbb{N} \times A \times \cdots \times A \to A$ es una función $f : \mathbb{N} \to A$ tal que:
  - $f(i) = a_i$ para $1 \leq i \leq r$ y
  - $f(n) = G(n, f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-r))$
- **Identidad de Casini:** $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$
- **Término general de la sucesión de Fibonacci:**

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \overline{\Phi}^n\right)$$

- **Término general de la sucesión de Lucas:**

$$a_n = 2^n + 3^n$$

2.5. Los números naturales

2.5.1. Axiomas de Peano

El conjunto de números naturales es un conjunto que cumple los siguientes axiomas:

1. 1 es un número natural
2. Existe una función *sucesor* S definida sobre los números naturales que satisface:
   - $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $S(n)$ es un número natural.
   - $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $S(n) = 1$ es falso. Es decir, 1 no es sucesor de ningún $n \in \mathbb{N}$
   - $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$, si $S(n) = S(m)$, entonces $n = m$. (S es inyectiva)
3. Si K es un conjunto cualquiera que satisface $1 \in K$ y $\forall n \in \mathbb{N}, n \in K \Rightarrow S(n) \in K$, entonces $K = \mathbb{N}$

2.6. El número combinatorio

El número combinatorio es la cantidad de subconjuntos distintos de k elementos que contiene un conjunto A de n elementos y se define de la siguiente manera:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.6.1. Propiedades

- $\binom{0}{0} = 1$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$
- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
- **Binomio de Newton**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

- $\binom{2n}{n} \leq (n+1)!$
- $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$

2.6.2. Ejemplo de ejercicio

Enunciado: Si tenemos n bolitas indistinguibles y las queremos repartir en k cajas, ¿Cuantas formas posibles hay de hacerlo?

Solución:

$$\binom{n+k-1}{n}$$

3. Números enteros

El grupo de números enteros ($\mathbb{Z}$) satisface las siguientes propiedades:

- **Conmutatividad:** $a+b=b+a$ y $a\cdot b=b\cdot a$
- **Asociatividad:** $(a+b)+c=a+(b+c)$ y $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
- **Tiene un elemento neutro:** Para la suma es el 0 ($a+0=a$) y para la multiplicación el 1 ($a\cdot 1=a$)
- **Existe el opuesto:** respecto de la suma $a+(-a)=0$
- $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
- $a\cdot b=0\Rightarrow a=0$ ó $b=0$
- $a\cdot b=a\cdot c$ y $a\neq 0\Rightarrow b=c$
- $\mathbb{Z}$ es un conjunto inductivo bien ordenado.

3.1. Divisibilidad

Sean $a,d\in\mathbb{Z}$, $d\neq 0$. Se dice que d divide a a ($d|a$) si existe un elemento $k\in\mathbb{Z}$ tal que $a=kd$.

$$d|a \iff \exists\ k\in\mathbb{Z}\ /\ a=kd$$

El conjunto de **divisores** de un elemento $a\in\mathbb{Z}$ es $\texttt{Div}(a)=\{d\in\mathbb{N}: d|a\}$ y el conjunto de **divisores positivos** del mismo elementos es $\texttt{Div}_+(a)=\{d\in\mathbb{N}: d|a\wedge d>0\}$

Propiedades

- $\forall\ d\in\mathbb{Z},\ d|0$
- $d|a \iff -d|a \iff d|-a \iff -d|-a$
- Si $a\neq 0$ y $d|a\Rightarrow |d|\leq|a|$
- $d|a$ y $a|d \iff a=\pm d$
- $(\forall\ a\in\mathbb{Z})\ 1|a\wedge -1|a\ \wedge\ a|a\ \wedge\ -a|a$
- $0|a \iff a=0$
- $a|b\wedge b|c\Rightarrow a|c$
- $a|b\wedge a|c\Rightarrow a|(a+b)\ \wedge\ a|(a-b)$
- $a|b\Rightarrow a|bc\ (\forall\ c\in\mathbb{Z})$
- $a|(b\pm c)\wedge a|b\Rightarrow a|c$
- $a|b \iff ac|bc\ (\forall\ c\in\mathbb{Z})$
- $d|a \iff d^n|a^n\ (\forall\ n\in\mathbb{N})$
- $n|m\Rightarrow (a^n-1)|(a^m-1)$

3.1.1. Números primos (Primera parte)

Se dice que $a\in\mathbb{Z}$ es un **número primo** si $a\neq 0,\pm 1$ y tiene únicamente 4 divisores (o 2 divisores). En cambio, se dice que a es **compuesto** si $a\neq 0,\pm 1$ y tiene más de 4 divisores (o más de 2 divisores positivos).

Propiedades

- Si $d\in\mathbb{Z}$ y $d|ab\Rightarrow d|a$ ó $d|b$
- Sea $a\in\mathbb{Z}$, $a\neq 0,\pm 1$, entonces $\exists\ p$ primo tal que $p|a$

- Existen infinitos primos
- Si a no es primo, entonces existe $p < a$ tal que $p|a$
- Si a no es primo, entonces existe p tal que $1 \leq p \leq \sqrt{a}$ y $p|a$.

3.2. Algoritmo de la división

Dados $a, d \in \mathbb{Z}$ con $d \neq 0$, existen $k, r \in \mathbb{Z}$ que satisfacen $a = k \cdot d + r$ con $0 \leq r \leq |d|$. Además, k y r son únicos en tales condiciones. Llamamos **cociente** a k, **resto** a r, **dividendo** a a y **divisor** a d. A partir de ahora notaremos $r_d(a)$ a r.

Propiedades

- $r_d(a + b) = r_d(r_d(a) + r_d(b))$
- $r_d(a \cdot b) = r_d(r_d(a) \cdot r_d(b))$
- $r_d(a^n) = r_d(r_d(a)^n)$

3.2.1. Codificación en base *d*

Sea $d \in \mathbb{N}$ con $d \geq 2$. Todo número $a \in \mathbb{N}$ admite un desarrollo en base d de la forma:

$$a = r_n \cdot d^n + r_{n-1} \cdot d^{n-1} + \cdots + r_1 \cdot d^1 + r_0$$

con $0 < r_i < d$ para todo $0 \leq i \leq n$ y $r_n \neq 0$ si $a \neq 0$

Propiedades

- El número más grande de tamaño n en base d es el número $d^n - 1$.
- Se pueden escribir d^n números usando n símbolos en base d.
- El tamaño (cantidad de dígitos) en base d de un número $a \in \mathbb{N}$ es $\lceil \log_d(a) \rceil + 1$

3.3. Relación de congruencia

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos que a **es congruente a** b **módulo** d si $d|(b-a)$. y notamos $a \equiv b \ (\texttt{mod}\ d)$ ó $a \equiv b \ (d)$.

$a \equiv b \ (\texttt{mod}\ d)$ es una relación de equivalencia que parte a los números enteros de la siguiente manera:

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} : r_d(b) = r_d(a)\}$$

Es decir, que la clase equivalencia está formada por todos los elementos de los enteros cuyo resto sea el mismo que el resto de a.

Propiedades

- $r_d(a) = 0 \iff d|a \iff a \equiv 0 \ (\texttt{mod}\ d)$
- $(\forall\ a \in \mathbb{Z})\ a \equiv r_d(a)\ (\texttt{mod}\ d)$
- $a \equiv r\ (\texttt{mod}\ d)$ con $0 < r < |d| \Rightarrow r = r_d(a)$
- $r_1 \equiv r_2\ (d)$ con $0 < r_1, r_2 < |d| \Rightarrow r_1 = r_2$
- $a \equiv b\ (\texttt{mod}\ d) \iff r_d(a) = r_d(b)$
- $(\forall\ a \in \mathbb{Z},\ d \in \mathbb{N})\ a \equiv a\ (d)$
- $a \equiv b\ (d) \Rightarrow b \equiv a\ (d)$
- $a \equiv b\ (d) \Rightarrow b \equiv a\ (d)$
- $a \equiv b\ (d)$ y $b \equiv c\ (d) \Rightarrow a \equiv c\ (d)$
- $a \equiv b\ (d) \Rightarrow a + c \equiv b + c\ (d)$ para todo $c \in \mathbb{Z}$
- $a \equiv b\ (d) \iff ac \equiv bc\ (d)$ para todo $c \in \mathbb{Z}$
- $a \equiv b\ (d) \Rightarrow a^n \equiv b^n\ (d)$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- $a \equiv a + dq\ (\texttt{mod}\ d)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$
- $a \equiv b\ (d)\ \wedge\ c \equiv e\ (d) \Rightarrow a + c \equiv e + b\ (d)\ \wedge\ a \cdot c \equiv b \cdot e\ (d)$
- Sea $c \in \mathbb{N}$, $a \equiv b\ (d) \iff ac \equiv bc\ (dc)$
- Dado $d \in \mathbb{Z}$, la relación $a \equiv b\ (\texttt{mod}\ d)$ define d clases de equivalencias distintas.

3.3.1. Criterios de divisibilidad

Sea $a = r_1 r_2 r_3 \dots r_n$ un desarrollo decimal de a, entonces:

- $3|a \iff 3|(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$
- $11|a \iff 11|((-1)^n r_n + (-1)^{n-1} r_{n-1} + \cdots + r_0)$

3.4. Máximo común divisor (MCD)

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, definimos el conjunto de **divisores comunes** como el conjunto elementos que dividen a a y a b al mismo tiempo:

$$DivCom(\{a, b\}) = \{d \in \mathbb{Z}\ :\ d|a\ \wedge\ d|b\}$$

Y el **máximo común divisor** entre a y b, que se nota $(a : b)$, es el mayor de los divisores comunes entre a y b. Es decir $(a : b)$

$$(a : b) = c\ /\ c \in DivCom(\{a, b\})\ \wedge\ (\forall\ d \in DivCom(\{a, b\}))\ d \leq c$$

Propiedades

- $(a : b) = (b : a)$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos
- $(a : b) = (|a| : |b|)$
- $(a : 1) = 1$ para todo $a \in \mathbb{Z}$
- $(a : 0) = |a|$ para todo $a \in (\mathbb{Z} - \{0\})$
- Si $c|a$ y $c|b \Rightarrow c|(a : b)$
- $(a : b)$ es único
- $(\forall\ a, b \in \mathbb{Z})\ (\ b|a \Rightarrow (a : b) = |b|\ )$

- Si p es un primo positivo, entonces, para todo $a \in \mathbb{Z}$ vale:

$$(a : p) = \begin{cases} p \text{ si } p|a \\ 1 \text{ sino} \end{cases}$$

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos y sea $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow DivCom(\{a, b\}) = DivCom(\{a, a - kb\})$
- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$. Si $a = bq + r$ con $q, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a : b) = (b : r)$

3.5. Algoritmo de euclídes

El algoritmo de euclídes hace usa de estas propiedades para calcular el MCD. Y propone lo siguiente:

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, existe $l \in \mathbb{N}_0$ tal que en una sucesión de $l + 1$ divisiones se llega por primera vez al resto nulo $r_{l+1} = 0$. Entonces $(a : b) = r_l$, el último resto no nulo.

$$\begin{gathered} a = k_1 b + r_1 \\ b = k_2 r_1 + r_2 \\ \vdots \\ r_{l-2} = k_l r_{l-1} + r_l \\ r_{l-1} = k_{l+1} r_l + r_{l+1} \end{gathered}$$

Propiedades/Consecuencias:

- $(a^m - 1 : a^n - 1) = a^{(m:n)} - 1$
- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos $\Rightarrow \exists\ t, s \in \mathbb{Z}\ /\ (a : b) = at + bs$
- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos y $c \in \mathbb{Z}$, existen $s', t' \in \mathbb{Z}$ tal que $c = s'a + t'b$ si y solo si $(a : b)|c$
- $(a : b)$ es el número natural más chico que se puede escribir como combinación enteras de a y b
- $d|a$ y $d|b \iff d|(a : b)$
- Sean $a, b, k \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $(ka : kb) = |k|(a : b)$
- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $d \in \mathbb{N}$, son equivalentes:
  - $d|a$, $d|b$ y si $c|a$ y $c|b$ entonces $c \leq d$
  - $d|a$, $d|b \Rightarrow \exists\ s, t \in \mathbb{Z}\ /\ d = sa + tb$
  - $d|a$, $d|b$ y si $c|a$ y $c|b$ entonces $c|d$

3.5.1. Números coprimos

Si $(a : b) = 1$ entonces se dice que a y b son **coprimos** y se nota $a \perp b$.

Propiedades

- Si $d = (a : b) \Rightarrow \frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ son enteros y son coprimos.
- $a \perp b \iff \exists\ s, t \in \mathbb{Z}\ /\ 1 = sa + tb$
- $d|a$ y $d|b$ y $\frac{a}{d} \perp \frac{b}{d}$ entonces $d = (a : b)$
- $c|a$ y $d|a$ y $c \perp d \iff cd|a$
- Sea p primo, si $p|ab \Rightarrow p|a$ ó $p|b$
- $d|ab$ y $d \perp a \Rightarrow d|b$
- $a \perp b$ y $a \perp c \iff a \perp bc$

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\frac{a}{(a:b)} \perp \frac{b}{(a:b)}$
- Sea $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m_1 \perp m_2$, entonces $a \equiv b\ (m_1)$ y $a \equiv b\ (m_2) \iff a \equiv b\ (m_1 m_2)$
- $(a:b) = 1 \Rightarrow (a^n : b^n) = 1$
- $(a:b) = d \Rightarrow (a^n : b^n) = d^n$
- Sea p un número primo y $a \in \mathbb{Z}$ entonces $Div_+(p) = \{1, p\}$ y por lo tanto $DivCom_+(\{p, a\}) \subset \{1, p\}$
- Si p y q son números primos, entonces $(p:q) = 1$.

3.6. Factorización

Sea p un número primo y $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq 2$, tal que $p | a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$ entonces $p | a_i$ para algún $0 \leq i \leq n$

Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, \pm 1$, entonces a se escribe en forma única (**factoriza**) como producto de números primos, es decir:

> $\forall\ a \in \mathbb{Z}\ /\ a \neq 0, \pm 1$, $\exists\ r \in \mathbb{N}$ tal que existen $p_1, \cdots, p_r$ primos distintos y $m_1, \ldots, m_r$ números naturales tales que $a = \pm p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \cdots \cdot p_r^{m_r}$

Propiedades

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos de la forma $a = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ y $b = \pm p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}$, entonces:
  - $a \cdot b = p_1^{m_1+n_1} p_2^{m_2+n_2} \ldots p_r^{m_r+n_r}$
  - $a^k = p_1^{km_1} p_2^{km_2} \ldots p_r^{km_r}$
  - $(a:b) = p_1^{min\{m_1,n_1\}} \ldots p_r^{min\{m_r,n_r\}}$
- Dado p primo, $p | a \iff p$ aparece en la factorización en primos de a.
- Cualquiera sea $a \in \mathbb{Z}$, a es divisible por un número finito de primos distintos.
- Sea $a \in \mathbb{Z}$ y $a = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ la factorización en primos de a, entonces:
  - $d | a \iff d = \pm p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}$ con $0 \leq n_1 \leq m_1, \ldots, 0 \leq n_r \leq m_r$
  - $|Div_+(a)| = \prod_{i=0}^{r} m_i$ y $|Div(a)| = 2 * |Div_+(a)|$
- $d | a \iff d^n | a^n$
- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos de la forma $a = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$ y $b = \pm q_1^{n_1} q_2^{n_2} \ldots q_r^{n_r}$, entonces $(a:b) = 1 \iff p_i \neq q_j\ \forall\ i, j$
- $(a:b) = 1 \iff (a^n : b^m) = 1\ \forall\ m, n \in \mathbb{N}$
- $(a^n : b^n) = (a:b)^n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

3.7. Mínimo Común Múltiplo (MCM)

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, el **mínimo común múltiplo** entre a y b ($[a:b]$) es el menor número natural que es múltiplo de a y de b.

Propiedades

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos de la forma $a = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$ y $b = \pm p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$, entonces:

$$[a : b] = p_1^{max\{m_1,n_1\}} \dots p_r^{max\{m_r,n_r\}}$$

- $a|m$ y $b|m \iff [a : b]|m$
- $|a \cdot b| = (a : b)[a : b]$
- Si $a|b \Rightarrow [a : b] = |b|$
- Si $(a : b) = 1 \Rightarrow [a : b] = |a \cdot b|$

3.8. Ecuaciones lineales diofánticas

Las **ecuaciones diofánticas** son las ecuaciones lineales de la forma $aX+bY = c$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$, a, b no ambos nulos de las cuales se buscan los pares (X, Y) de soluciones enteras.

Si $a = 0$ ó $b = 0$, el problema se vuelve un problema de divisibilidad. $aX + 0Y = c$ tiene solución entera $\iff a|c$ y, en ese caso, las soluciones son todos los pares $(\frac{c}{a}, j)$ con $j \in \mathbb{Z}$.

Propiedades

- Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ no nulos, la ecuación diofántica $aX + bY = c$ admite soluciones enteras si y solo si $(a : b)|c$.
- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos y coprimos, entonces la ecuación diofántica $aX + bY = c$ tiene soluciones enteras para todo $c \in \mathbb{Z}$

Sean $aX+bY = c$ y $a'X+b'Y = c'$ dos ecuaciones diofánticas, se dicen **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Y notamos

$$ax + by = c \leftrightsquigarrow a'X + b'Y = c'$$

Propiedades

- Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $(a : b)|c$, entonces:

$$ax + by = c \leftrightsquigarrow \frac{a}{(a:b)}X + \frac{b}{(a:b)}{}' Y = \frac{c}{(a:b)}$$

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, el conjunto S_0 de soluciones de la ecuación diofantica $aX + bY = c$ es:
  - $S_0 = \phi$ si $(a : b) \nmid c$
  - $S = \{(x, y) \ : \ x = x_0 + b'k, y = y_0 + a'k\}$ donde $a' = \frac{a}{(a:b)}$ y $b' = \frac{b}{(a:b)}$

3.9. Ecuaciones lineales de congruencia

Dado $m \in \mathbb{N}$ se puede aplicar el análisis realizado para las ecuaciones diofánticas a las ecuaciones de la forma $aX \equiv c \ (\texttt{mod} \ m)$ para $a, c \in \mathbb{Z}$.

Propiedades

- $aX \equiv c \ (\texttt{mod} \ m) \leftrightsquigarrow a'X \equiv c' \ (\texttt{mod} \ m')$ si tienen exactamente las mismas soluciones.
- Sea $m \in \mathbb{N}$, dados $a, c \in \mathbb{Z}$, la ecuación de congruencia $aX \equiv c \ (\texttt{mod} \ m)$ tiene soluciones si y solo si $(a : m)|c$. Además, si ese es el caso, vale que

$$aX \equiv c \ (\texttt{mod} \ m) \leftrightsquigarrow \frac{a}{(a:m)}X \equiv \frac{c}{(a:m)} \ (\texttt{mod} \ \frac{m}{(a:m)})$$

- Sean $m \in \mathbb{N}$, $a, c, d \in \mathbb{Z}$, entonces

$$(da)X \equiv dc \ (\texttt{mod} \ (dm)) \leftrightsquigarrow a \equiv c \ (\texttt{mod} \ m)$$

- Sean $m \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \perp m$, entonces la ecuación de congruencia $aX \equiv c \ (\texttt{mod} \ m)$ tiene soluciones enteras cualquiera sea $c \in \mathbb{Z}$
- El conjunto S de soluciones enteras de la ecuación de congruencia $aX \equiv c \ (\texttt{mod} \ m)$ es:
  - $S = \phi$ cuando $(a : m)|c$
  - $S = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x \equiv x_0 \ (\texttt{mod} \ m')\}$ donde $x_0 \in \mathbb{Z}$ es una solución particular cualquiera de la ecuación y $m' = \frac{m}{(a:m)}$

3.10. Sistemas equivalentes

Sean $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ coprimos dos a dos, entonces:

$$\begin{cases} x \equiv c \ (m_1) \\ x \equiv c \ (m_2) \\ \quad \vdots \\ x \equiv c \ (m_n) \end{cases} \leftrightsquigarrow x \equiv c \ (\texttt{mod} \ m_1 m_2 \ldots m_n)$$

Sean $m, m' \in \mathbb{N}$ tales que $m'|m$, entonces para todo $c, c' \in \mathbb{Z}$ vale:

- Si $c \not\equiv c' \ (\texttt{mod} \ m)$, entonces el siguiente sistema es incompatible (no tiene soluciónes enteras):

$$\begin{cases} x \equiv c' \ (\texttt{mod} \ m') \\ x \equiv c \ (\texttt{mod} \ m) \end{cases}$$

- Si $c \equiv c' \ (\texttt{mod} \ m)$ entonces:

$$\begin{cases} x \equiv c' \ (\texttt{mod} \ m') \\ x \equiv c \ (\texttt{mod} \ m) \end{cases} \leftrightsquigarrow X \equiv c \ (\texttt{mod} \ m)$$

3.11. Teorema chino del resto

Sean $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ coprimos dos a dos, entonces para todo $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$, el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv c \ (m_1) \\ x \equiv c \ (m_2) \\ \quad \vdots \\ x \equiv c \ (m_n) \end{cases}$$

tiene soluciónes enteras $S = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x \equiv x_0 \ (\texttt{mod} \ m_1 m_2 \ldots m_n)\}$

3.12. Pequeño teorema de fermat

Sea p un primo positivo, entonces $\forall\ a \in \mathbb{Z}$:

- $a^p \equiv a\ (\texttt{mod}\ p)$
- $p \nmid a \Rightarrow a^n \equiv a^{r_{p-1}(n)}\ (\texttt{mod}\ p)$

Consecuencias/Propiedades

- Sea p un primo positivo, entonces $\forall\ a \in \mathbb{Z}$ tal que $p \nmid a$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \equiv r\ (\texttt{mod}\ p-1) \Rightarrow a^n \equiv a^r\ (\texttt{mod}\ p)$.
- Sean p y q dos primos distintos y $a \in \mathbb{Z}$ coprimo con $p \cdot q$, entonces $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ (pq)$ y por lo tanto, para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

$$m \equiv r\ (\texttt{mod}\ (p-1)(q-1)) \Rightarrow a^m \equiv a^r\ (\texttt{mod}\ pq)$$

3.12.1. Teorema de Euler

Sea $m = p_1^{r_1} \dots p_s^{r-2}$ la factorización en primos de m, entonces definimos $\varphi(m) = \varphi(p_1^{r_1}) \dots \varphi(p_s^{r-2})$ y si p es un primo, $\varphi(p) = p - 1$.

Propiedades: Sea $m, a \in \mathbb{Z}$ tal que $(m : a) = 1$ y p un primo, entonces

- $a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (m)$
- $\varphi(a \cdot m) = \varphi(a)\varphi(m)$
- $\varphi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$

3.13. Anillos y cuerpos

Sea $m \in \mathbb{N}$, consideremos en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo m. Entonces:

1. Sea $0 \leq r \leq m$, la clase de equivalencia $\overline{r}$ de r es $\overline{r} = \{a \in \mathbb{Z} \ :\ a \equiv r\ (\texttt{mod}\ m)\}$ y $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \dots \cup \overline{r-1}$ es la partición de $\mathbb{Z}$ asociada esta relación de equivalencia.
2. Notamos $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{r-1}\}$ y si $+$ y $\cdot$ son las operaciones definidas por $\overline{r_1} + \overline{r_2} = \overline{r_1 + r_2}$ y $\overline{r_1} \cdot \overline{r_2} = \overline{r_1 \cdot r_2}$ entonces $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es un **anillo conmutativo**

Propiedad:

- Sean $m \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{Z}$, entonces la ecuación de congruencia $aX \equiv c\ (\texttt{mod}\ m)$ tiene solución si y solo si $(a : m) = 1$ y, en este caso, la solución x_0 es única y $1 \leq x_0 < m$.
- Sea p un primo positivo y sea $a \in \mathbb{N}$ tal que $p \nmid a$, entonces la ecuación de congruencia $aX \equiv 1\ (\texttt{mod}\ p)$ tiene solución única x_0 con $1 \leq x_0 \leq p$.

3.13.1. Elementos inversibles

El elemento $\overline{r}$ es inversible en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si y solo si existe $\overline{x} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tal que $r \cdot x = 1$.

Propiedad:

- En los enteros, los únicos elementos que tienen inverso multiplicativo son el -1 y el 1.
- Sea $m \in \mathbb{Z}$ y $r \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, entonces $\overline{r}$ es inversible en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si y solo si $(m : r) = 1$.
- Sea p un primo positivo, entonces $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un **cuerpo**, es decir, además de ser un anillo conmutativo, satisface que todo elemento no nulo de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es inversible.

4. Polinomios

4.1. Números complejos

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo en el que no se puede definir una relación $\geq$.

Dado $z \in \mathbb{C}$, la forma $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se llama la **forma binomial** de z, su **parte real** es $\text{Re}(z) = a$ y su **parte imaginaria** es $\text{Im}(z) = b$. Su **conjugado** $\overline{z} = a - bi \in \mathbb{C}$ y su **módulo** es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propiedades

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
- $|z \cdot w| = |z||w|$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2\text{Im}(z)i$
- Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
- Si $z \neq 0$, $|z^k| = |z|^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$
- $|\text{Re}(z)| \leq |z|$
- $|\text{Im(z)}| \leq |z|$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$

- Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces $\exists\ w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = (-w)^2 = z$. Y si $z \neq 0$ entonces z tiene dos raízes cuadradas distintas que son w y $-w$.

La **forma trigonométrica** de z es $z = r(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))$ donde $r = |z|$ y θ es tal que $cos(\theta) = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}$ y $\cos(\theta) = \frac{\text{Im}(z)}{|z|}$.

Si elegimos θ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, entonces θ está determinado de forma única y se denomina **argumento** de z ($\arg(z)$).

- **Formula de euler:** $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$
- Sea $z = r(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)) = re^{\theta i}$ con $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\theta \in \mathbb{R}$:
  - $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)) = re^{-\theta i}$
  - $z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)) = r^{-1}e^{-\theta i}$
- Sea $z = r(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)) = re^{\theta i}$ y $w = s(\cos(\psi) + i\,\text{sen}(\psi)) = se^{\psi i}$ con $r, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\psi, \theta \in \mathbb{R}$:
  - $z \cdot w = rs(\cos(\theta + \psi) + i\,\text{sen}(\theta + \psi)) = rse^{(\theta+\psi)i}$
  - $\arg(z+w) = \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi$ con k elegido de tal modo que $0 \leq \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi \leq 2\pi$
  - $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta - \psi) + i\,\text{sen}(\theta - \psi)) = \frac{r}{s}e^{(\theta-\psi)i}$

- $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)) = r^n e^{n\theta i}$
- $\arg(z^n) = n\arg(z) - 2k\pi$ con k elegido de tal modo que $0 \leq n\arg(z) - 2k\pi \leq 2\pi$
- $\arg(z^{-1}) = -\arg(z) + 2k\pi$
- $\arg(z+w) = \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi$

Otra forme de escribir $z = a + bi$ es en forma de tuplas: $z = (a, b)$

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

4.2. Raices n-ésimas

Sea $z \in \mathbb{C}$, hallar las **raíces n-ésimas** de z consiste en determinar los $w \in \mathbb{C}$ que cumplen $w^n = z$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $z = se^{\psi i} \in \mathbb{C}$ con $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $0 \leq \psi \leq 2\pi$, entonces z tiene n raíces n-ésimas $w_0, \ldots, w_{n-1}$ donde:

$$w_k = s^{\frac{1}{n}} e^{\theta_k i} \text{ donde } \theta_k = \frac{\psi + 2k\pi}{n} \text{ para } 0 \leq k \leq n-1$$

4.2.1. Raíces de la unidad

Cuando $z = 1$, el polinomio $x^n - z$ cumple que todas sus raíces $w_0, \ldots, w_n$ satisfacen $w^l = 1$ para $0 \leq l \leq n-1$. Estas raíces se denominan **raíces n-ésimas de la unidad** y cumplen que

$$w_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i} \texttt{ con } 0 \leq k \leq n-1$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, el conjunto G_n es el **conjunto de raíces n-ésimas de la unidad**, es decir:

$$G_n = \{w \in \mathbb{C} \ : \ w^n = 1\} = \{w_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i} \ : \ 0 \leq k \leq n-1\}$$

Propiedades Sea $n \in \mathbb{N}$:

- $w \in G_n \iff w^n = 1$
- $(G_n, \cdot)$ es un grupo abeliano, es decir que $\forall\ n \in \mathbb{N}$:
  - $\forall\ w, z \in G_n$ se tiene que $w \cdot z \in G_n$
  - $1 \in G_n$
  - $\forall\ w \in G_n,\ \exists w^{-1} \in G_n$
- $w \in G_n \Rightarrow |w| = 1$
- $\forall\ w \in G_n,\ w^{-1} = \overline{w} \in G_n$
- $-1 \in G_n \iff n$ es par
- Sea $m \in \mathbb{Z}$, $n|m \Rightarrow w^m = 1$
- $\forall\ w \in G_n,\ w^{-1} = \overline{w} = w^{n-1}$
- Sea $m \in \mathbb{N}$, $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
- Sea $m \in \mathbb{N}$, $n|m \iff G_n \subset G_m$
- Si $z \in G_n$, $\overline{z}^k = z^{-k} = z^{n-k}$
- Sea $m, m' \in \mathbb{Z}$, $m \equiv m' \ (\texttt{mod}\ n) \Rightarrow w^m = w^{m'}$
- Existe $w \in G_n$ tal que $G_n = \{w^0, w^1, \ldots, w^{n-1}\}$

4.2.2. Raíces primitivas

Sea $n \in \mathbb{N}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es una **raíz n-ésima primitiva de la unidad** si $G_n = \{w^k \ : \ 0 \leq k \leq n-1\}$

Propiedades Sea $n \in \mathbb{N}$ y $w \in \mathbb{C}$:

- w es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solo si vale que $\forall\, m \in \mathbb{Z}$, $w^m = 1 \iff n|m$.
- Si w es una raíz primitiva de la unidad, entonces w^k es una raíz primitiva de la unidad si y solo si $(n : k) = 1$
- Sea $w_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ con $0 \leq k \leq n-1$, entonces w_k es una raíz primitiva de la unidad si y solo si $(n : k) = 1$.
- Sea p un primo, entonces cualquiera sea k, $1 \leq k \leq p-1$, se tiene que $e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ es raíz p-ésima primitiva de la unidad. Es decir que $\forall\ w \in G_p$, $w \neq 1$ se tiene que w es una raíz p-ésima primitiva de la unidad.

4.3. Polinomios

Sea K un cuerpo, se dice que f es un **polinomio con coeficientes en** K si f es de la forma:

$$f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

para algún $n \in \mathbb{N}_0$, donde X es una indeterminada sobre K y $a_i \in K$ para $0 \leq i \leq n$. Los elementos a_i se llaman los **coeficientes** de f.

Dos polinomios son **iguales** si y solo si coinciden todos sus coeficientes, es decir, si $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, entonces $f = g \iff a_i = b_i$, $0 \leq i \leq n$.

El conjunto de todos los polinomios f con coeficientes en K se nota $K[X]$

Si f no es el polinomio nulo ($f \neq 0$), entonces se puede escribir para algún $n \in \mathbb{N}_0$, de la forma $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ con $a_n \neq 0$.

En ese caso, n es el **grado** de f y se nota $\mathrm{gr}(f)$ y a_n es el **coeficiente principal** de f.

El polinomio nulo no tiene grado. Cuando el coeficiente principal de f es igual a 1, entonces se dice que el polinomio es **mónico**.

Operaciones : Sean $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ polinomios en $K[X]$:

- La **suma** se define como:
$$f + g = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i$$
- La **multiplicación** como:
$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ donde } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Propiedades: Sea K un cuerpo y sean $f, g \in K[X]$ no nulos, entonces:

- Si $f + g \neq 0$, entonces $\text{gr}(f+g) \leq \max\{\text{gr}(f), \text{gr}(g)\}$
- $\text{gr}(f \cdot g)) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$
- $\text{cp}(f \cdot g) = \text{cp}(f) \cdot \text{cp}(g)$

Sea K un cuerpo, entonces $(K[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y vale que:

$$\forall\ f, g \in K[X],\ f \cdot g = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ ó } g = 0$$

$f \in K[X]$ es inversible si y solo si $f \in K^\times$, o sea que los elementos inversibles de $K[X]$ son los polinomios de grado 0.

4.3.1. Divisibilidad

Sean $f, g \in K[X]$ con $g \neq 0$, se dice que g **divide a** f, y se nota $g|f$, si existe un polinomio $q \in K[X]$ tal que $f = q \cdot g$

Propiedades

- Todo polinomio $g \neq 0$ satisface que $g|0$
- Si $f|g$ y $g \neq 0$, entonces $\text{gr}(f) \leq \text{gr}(g)$
- $g|f \iff cg|f, \forall\ c \in K^\times$
- $g|f$ y $f|g \iff f = cg$ para algún $c \in K^\times$
- $f|g$ y $\text{gr}(f) = \text{gr}(g) \Rightarrow f = k \cdot g$ para algun $k \in K$
- Para todo $f \in K[X]$, $f \notin K$ se tiene $c|f$ y $cf|f$, $\forall\ c \in K^\times$.

La **divisibilidad** de los polinomios cumple exactamente las mismas propiedades que la divisibilidad de los números enteros.

4.3.2. Reducibilidad

Sea $f \in K[X]$, se dice que f es **irreducible** en $K[X]$ cuando $f \notin K$ y los únicos divisores de f son de la forma $g = c$ ó $g = cf$ para algún $c \in K^\times$. O sea que f tiene únicamente dos divisores mónicos (distintos), que son 1 y $f/\text{cp(f)}$.

Y se dice que f es reducible en $K[X]$ cuando $f \notin K$ y f tiene algún divisor $g \in K[X]$ con $g \neq c$ y $g \neq cf$, $\forall\ c \in K^\times$, es decir, f tiene algún divisor $g \in K[X]$ (no nulo por definición) con $0 \leq \text{gr}(g) \leq \text{gr}(f)$.

4.3.3. Algoritmo de la división

Dados $f, g \in K[X]$ no nulos, existen únicos $q, r \in K[X]$ que satisfacen:

$$f = q \cdot g + r \text{ con } r = 0 \text{ ó } \text{gr}(r) < \text{gr}(g)$$

Se dice que q es el **cociente** y r es el **resto** de la división de f por g, que notaremos $r_g(f)$.

4.3.4. Máximo Común Divisor (MCD)

Sean $f, g \in K[X]$ no ambos nulos. El máximo común divisor entre f y g, que se nota $(f : g)$, es el polinomio mónico de mayor grado que divide simultáneamente a f y a g.

Prpiedades: Sean $f, g \in K[X]$,

- $(f : 0) = \frac{f}{\text{cp}(f)}$
- Sea g no nulo. Si $f = q \cdot g + r$ para $q, r \in K[X]$, entonces $(f : g) = (g : r)$.
- Sea $c \in K^\times$, $(c : g) = 1$
- Si $g|f$, entonces $(f : g) = \frac{g}{\text{cp}(g)}$
- Por el algoritmo de la división de euclides existen $s, t \in K[X]$ tal que $(f : g) = sf + tg$
- Si ni f ni g son nulos. El MCD entre f y g es el único polinomio mónico $h \in K[X]$ que satisface simultáneamente que $h|f$ y $h|g$.
- Si $\overline{h} \in K[X]$ satisface que $\overline{h}|g$ y $\overline{h}|f \Rightarrow \overline{h}|h$

4.3.5. Polinomios coprimos

Sean $f, g \in K[X]$ no ambos nulos, se dice que f y g son **coprimos** si satisfacen $(f : g) = 1$.

Propiedades :

- Si g y h son coprimos, entonces $g|f \ \wedge \ h|f \iff gh|f$
- Si g y h son coprimos, entonces $g|hf \iff g|h$

Sea $f \in K[X]$ un polinomio irreducible en $K[X]$, entonces:

- $\forall\ g \in K[X]$, $(f : g) = \frac{f}{\text{cp}(f)}$ si $f|g$ y $(f : g) = 1$ si $f \nmid g$.
- $\forall\ g \in K[X]$, $f|gh \Rightarrow f|g$ ó $f|h$.

4.3.6. Reducibilidad de un polinomio

Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X]$ un polinomio no constante, entonces existen únicos polinomios irreducible mónicos $g_1, \ldots, g_r$ tales que:

$$f = cg_1^{m_1} \ldots g_r^{m_r} \text{ donde } c \in K - \{0\} \text{ y } m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$$

Sea $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in K[X]$ un polinomio, entonces f define en forma natural una función $f : K \to K$, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ que se llama **función de evaluación**.

Propiedades:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Si $f = gq + r$ con $q, g, r \in K[X]$, entonces $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

4.3.7. Raíces de un polinomio

Sea $f \in K[X]$ y $x \in K$, si $f(x) = 0$ se dice que x es una **raíz** de f en K.

x es raíz de $f \iff f(x) = 0 \iff (X - x)|f \iff f = (X - x)q$ para algún $q \in K[X]$

Propiedades:

- Si $f \neq 0$, $X - x$ es un factor irreducible (mónico) en la descomposición en irreducibles de $f \in K[X]$.
- Si $g|f$ en $K[X]$, sea $x \in K$ una raíz de $g \Rightarrow x$ es raíz de f.
- $f(x) = 0$ y $g(x) = 0 \iff (f : g)(x) = 0$

4.3.8. Polinomios cuadráticos

Sea K un cuerpo y sea $f = aX^2 + bX + c \in K[x]$, con $a \neq 0$, un polinomio cuadrático. Entonces se define el **discriminante** de f como $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propiedades: Sea f un polinomio cuadrático en $K[X]$,

- f es reducible en $K[X]$ si y solo si f tiene una raíz en K
- Si existe $w^2 = \Delta$, entonces f tiene al menos una raíz en K.
- Si $2 \neq 0$ en K, f es reducible en $K[X] \iff$ existe $w^2 = \Delta$ y, en ese caso, las raíces de f en K son
$$x_{\pm} = \frac{-b \pm w}{2a}$$
y $f = a(X - x_+)(x - x_-)$ es la factorización de f en $K[X]$.

4.3.9. Multiplicad de raíces

Sean $f \in K[X]$ no nulo y sea $m \in \mathbb{N}_0$, se dice que $x \in K$ es una raíz de multiplicidad m de f si $(X - x)^m|f$ y $(X - x)^{m+1} \nmid f$. Y notamos $\text{mult}(x, f) = m$

Propiedades:

- $\text{mult}(x, f) \leq \text{gr}(f)$
- $\text{mult}(x, f) = 0 \iff x$ no es raíz de f.

4.3.10. Derivadas

Sea $f = a_n X^n + \cdots + a_0 \in K[X]$, definimos su **derivada** como:

$$f' = na_n X^{n-1} + a_1 \in K[X]$$

Propiedades:

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$
- $f'' = (f')'$ y $f^{(m)} = (f^{(m-1)})'$
- Sea $f \in K[X]$ y sea $x \in K$,
  - x es raíz múltiple de f si y solo si $f(x) = 0$ y $f'(x) = 0$.
  - x es raíz simple de f si y solo si $f(x) = 0$ y $f'(x) \neq 0$
- Sea $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $x \in K$ entonces:
  - $\text{mult}(x, f) = m \iff f(x) = 0$ y $\text{mult}(x, f') = m - 1$
  - $$\text{mult}(x, f) = m \iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)} = 0 \\ f^{(m)} = 0 \end{cases}$$
- Sean $x_1, \ldots, x_r \in K$ raíces distintas de f tales que $\text{mult}(x_1, f) = m_1, \ldots, \text{mult}(x_r, f) = m_r$, entonces $(X - x_1)^{m_1} \ldots (X - x_r)^{m_r} | f$.
- Sea K un cuerpo y sea $f \in K[x]$ un polinomio no nulo de grado n, entonces f tiene a lo sumo n raíces en K contadas con multiplicidad.

4.3.11. Polinomios en $\mathbb{C}$

Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio no constante, entonces $\exists\, z \in \mathbb{C}$ / $f(z) = 0$ y si $\text{gr}(f) = n$, entonces f tiene exactamente n raíces irreducibles contadas con multiplicidad en $\mathbb{C}$.

Propiedades : Sea $f \in \mathbb{C}[X]$,

- f es irreducible en $\mathbb{C}[X]$ si y solo si $\text{gr}(f) = 1$.
- La factorización en irreducibles de f en $C[X]$ es de la forma:

  $f = c(x - z_1)^{m_1} \ldots (x - z_r)$ donde $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ son distintos, $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{C}^\times$

No existe ninguna formula que describa las raíces complejas de un polinomio general cualquiera $f \in \mathbb{C}[X]$ de grado mayor igual a s a partir de sus coeficientes, de las operaciones elementales $+, -, \cdot, /$ y extracciones de raíces n-ésimas.

4.4. Polinomios en $\mathbb{R}$

Propiedades: Sea $f \in \mathbb{R}[X]$

- Si f es de grado impar, entonces f tiene al menos una raíz en $\mathbb{R}$.
- Sea $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, entonces:
  - $f(z) = 0 \iff f(\overline{z}) = 0$
  - $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\text{mult}(z, f) = m \iff \text{mult}(\overline{z}, f) = m$
  - $(X - z)(X - \overline{z})$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{R}[X]$
  - $f(z) = 0 \Rightarrow (X - z)(X - \overline{z}) | f$ en $R[X]$
  - $\text{mult}(z, f) = m \Rightarrow ((X - z)(X - \overline{z}))^m | f$ en $R[X]$
- Los polinomios irreducibles en $R[X]$ son exactamente los siguientes: los de grado 1 y los de grado dos con discriminante negativo.
- Sea $f \in \mathbb{R}[X] - \mathbb{R}$ entonces, la factorización en irreducibles de $f \in \mathbb{R}[X]$ es de la forma:

$$f = c(X - x_1)^{m_1} \dots (X - x_r)^{m_r}(x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1} \dots (x^2 + b_s x + c_s)^{n_s}$$

  donde $c \in \mathbb{R}^\times$, $r, s \in \mathbb{N}_0$, $m_i, n_j \in \mathbb{N}\ \forall\ 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$, $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ y $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$.
- Sea $f = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ con $a_n, a_0 \neq 0$, si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ es una raíz racional de f, con α y β coprimos, entonces $\alpha | a_0$ y $\beta | a_n$.

4.4.1. Lema de Gauss (Algoritmo)

1. Construir el conjunto de divisores positivos y negativos de a_0 ($\mathcal{N}$)
2. Construir el conjunto de divisores positivos y negativos de a_n ($\mathcal{D}$)
3. Las raíces del polionomio f se encuentran en el conjunto de todas las fracciones coprimas α/β, eligiendo α en $\mathcal{N}$ y β en $\mathcal{D}$.

Sea $m \in \mathbb{Q}$ tal $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$, y sean $a, b \in \mathbb{Q}$, con $b \neq 0$. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$, entonces:

- $g := (X - (a + b\sqrt{m}))\,(X - (a - b\sqrt{m}))$
- $f(a + b\sqrt{m}) = 0 \Rightarrow g | f \in \mathbb{Q}[X]$
- $f(a + b\sqrt{m}) = 0 \iff f(a - b\sqrt{m}) = 0$
- $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\text{mult}(a + b\sqrt{m}, f) = m \iff \text{mult}(a - b\sqrt{m}, f) = m$