Análisis Matemático II

Zamboni, Gianfranco

20 de enero de 2019

Este apunte no tiene demostraciones

Índice

1. Repaso **1**
1.1. Intervalos . . . 1
1.2. Sucesiones . . . 1
1.2.1. Binomio de Newton . . . 2
1.2.2. Propiedad . . . 2
1.2.3. Propiedades del límite . . . 2
1.3. Métricas y topologías $\mathbb{R}^n$ . . . 3

2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^k$ **5**
2.1. Continuidad . . . 6

3. Calculo diferencial en varias variables **7**
3.1. Repaso Álgebra . . . 7
3.1.1. Propiedades . . . 7
3.2. En los reales . . . 7
3.2.1. Polinomio de Taylor . . . 8
3.2.2. Otras propiedades . . . 8
3.3. En R^n . . . 8
3.4. Regla de la cadena . . . 10
3.4.1. Lemas Previos . . . 10
3.4.2. Regla de la cadena . . . 10
3.5. Polinomio de Taylor . . . 10
3.5.1. Propiedades . . . 11

4. Extremos de funciones de varias variables **12**
4.1. Criterio del Hessiano . . . 13
4.2. Teorema de la función inversa . . . 13
4.3. Teorema de la función implicita . . . 13
4.4. Multiplicadores de Lagrange . . . 13
4.4.1. Caso general . . . 14

5. Integrales dobles y triples **15**
5.1. Repaso . . . 15
5.1.1. Integral de Rienman . . . 15
5.1.2. Teorema fundamental del cálculo integral . . . 16
5.1.3. Regla de Barrow . . . 16
5.1.4. Integración por partes . . . 16
5.1.5. Sustitución . . . 16
5.1.6. Integrales impropias . . . 16
5.1.7. Criterios de comparación de integrales impropias . . . 17
5.1.8. Integrales con las que comparar: . . . 17
5.2. Integral doble . . . 17
5.2.1. Teorema de fubbini . . . 17
5.3. Principio de Cavalieri . . . 18
5.4. Integrales en $\mathbb{R}^n$ . . . 18
5.4.1. Dominios elementales en $\mathbb{R}$ . . . 18
5.4.2. Teorema del valor medio para integrales . . . 18
5.5. Cambio de variables . . . 18
5.5.1. Coordenadas polares . . . 19
5.5.2. Transformaciones lineales . . . 19
5.5.3. Coordenadas cilíndricas . . . 19
5.5.4. Coordenadas esféricas . . . 19

1. Repaso

1.1. Intervalos

Sea A un intervalo en los $\mathbb{R}$,

Cota superior: Es un número $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$, $a \leq M$.

Cota inferior: Es un número real m tal que para todo $a \in A$, $a \geq m$.

Supremo: Es un $s \in \mathbb{R}$ tal que es cota superior de A y además si s' es otra cota superior de A, entonces vale que $s \leq s'$. Notamos $\texttt{sup}A = s$.

Ínfimo: Es un $i \in \mathbb{R}$ tal que i es cota inferior de A y además si i' es otra cota inferior, entonces $i' \leq i$. Notamos $\texttt{inf}A = i$

Conjunto acotado superiormente: Es un conjunto que tiene cota superior.

Conjunto acotado inferiormente: Es un conjunto que tiene cota inferior.

Conjunto acotado: Es un conjunto que está acotado tanto superiormente como inferiormente.

Propiedades:

- Si $A \neq \phi \in \mathbb{R}$ está acotado superiormente, entonces A tiene supremo en $\mathbb{R}$
- El supremo de un conjunto es único
- Si $A \neq \phi \in \mathbb{R}$ está acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo en $\mathbb{R}$
- El ínfimo de un conjunto es único

1.2. Sucesiones

Suceción: Es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(k) = x_k$. Para indicar que f describe una sucesión la notamos como $(x_k)_{\leq 1}$

Sucesión convergente: X_k es una sucesión convergente si existe un $l \in \mathbb{R}$ tal que, dado un $\epsilon > 0$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k \geq k_0$, vale que $|x_k - l| < \epsilon$.

> En castellano: "Una sucesión es convergente a un número l, si a partir de cierto elemento x_k, los valores de la sucesión se acercan cada vez más a x".

Subsucesión: S'_n es una subsucesión de S_n si se puede construir a partir de una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $S'_n = S_{f(n)}$

Sucesión creciente: S es **creciente** si $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $x_k \leq x_{k+1}$.

Propiedades:

- Si S converge a un número l, entonces S está acotada y notamos:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = l$$

- Si (X_n) es monótona creciente y está acotada superiormente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \texttt{sup} X_n$$

- Si (X_n) es monótona decreciente y está acotada inferiormente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \texttt{inf} X_n$$

- La subsucesión de una sucesión convergente, si converge, converge al mismo punto.
- Si S está acotada superiormente, entonces existe una subsucesión creciente de elementos de S que converge hacia $\texttt{sup}S = s$.
- Toda sucesión $S = \{x_k\}_{k\geq 1}$ creciente y acotada es convergentes hacia $\texttt{sup}S$
- Toda sucesión $S = \{x_k\}_{k\geq 1}$ decreciente y acotada es convergentes hacia $\texttt{inf}S$
- Sean A y B dos sucesiones no vacias y acodtadas:
  - Si $A \subset B$ entonces, $\texttt{sup}A \leq \texttt{sup}B$ y $\texttt{inf}A \geq \texttt{inf}B$
  - $\texttt{sup}A + B \leq \texttt{sup}A + \texttt{sup}B$

1.2.1. Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \text{ donde } \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

1.2.2. Propiedad

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \text{ y } \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

1.2.3. Propiedades del límite

Sean X_n y Y_n sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} X_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} Y_n = y$ existen, entonces vale:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (X_n + Y_n) = x + y$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (X_n Y_n) = xy$
- Si $y \neq 0$, entonces, existe n_0 tal que $y_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ y la sucesión $\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)$ está definida y vale que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{Y_n} = \frac{x}{y}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = x \iff \lim\limits_{n\to\infty} (X_n - x) = 0$

1.3. Métricas y topologías $\mathbb{R}^n$

Dados $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$,

- $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$
- **Norma euclídea:** $\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_2^2$
- **Distancia:** $\vec{x}$ e $\vec{y}$ es $d(x, y) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$
- **Producto interno:** $v \cdot w = \sum_{i=0}^{n} v_i w_i$
- **Base canónica:** La base canónica de $\mathbb{R}^n$ son los vectores $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$
- **Norma infinito:** $\|x\|_\infty = max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$

Propiedades

- $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$
- $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = (0, \ldots, 0)$
- $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x}\vec{x}$
- $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x = y$
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- $\|xy\| \leq \|x\| + \|y\|$
- Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces $|x_i| \leq \|x\|$
- $v \cdot w = \|v\|\|w\| \cos\alpha$ con α el grado entre w y v.
- $v \cdot w = 0 \iff v \perp w$ (v y w son perpendiculares)

Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, definimos:

Bola abierta: $B(p, r) = B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x - p\| < r\}$ es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ que esta a distancia menor a r de p.

Conjunto abierto: Es un conjunto de puntos $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\forall\ x \in U$, $\exists\ B(x, r_x) \subset U$.
Sea $A \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, entonces a es:

- un **punto interior** de A si $\exists\ \epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subset A$.
- un **punto exterior** de A si a no es un punto interior.
- un **punto frontera** si $\forall\ \epsilon > 0$, $B_\epsilon(a) \cap A \neq \phi$ y $B_\epsilon(a) \cap A^c \neq \phi$.

Borde: $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x$ es frontera de $A\}$

Clausura: $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Conjunto cerrado: Es un conjunto de puntos tal que su complemento es abierto.

Conjunto acotado: Un conjunto A es acotado si existe $r > 0$ tal que $A \subset B_r(0)$

Conjunto compacto: Es un conjunto cerrado y acotado.

Sea $p \in \mathbb{R}^2$, $q \in \mathbb{R}^3$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$,

- $\partial B_r(p)$ es un círculo de radio r centrado en el punto p. Si $r = 1$, entonces se llama **círculo unidad**.
- $\partial B_r(q)$ es el conjunto de puntos que forman una esfera de radio r centrada en el punto q. Si $r = 1$, entonces se llama **esfera unidad**.
- $B_r(p) \subset \mathbb{R}^2$ es un **disco** en $\mathbb{R}^2$
- $B_r(p) \subset \mathbb{R}^2$, es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.
- A es cerrado $\iff$ A^c es abierto.
- Para todo $A \in \mathbb{R}^n$, $A \cup \partial A$ es cerrado.
- $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x_n > 0\}$ es un conjunto abierto de los $\mathbb{R}^n$.
- $\{U_j : j \in J\}$ un familia de conjunto abiertos, entonces $U = \bigcup\limits_{j \in J}$ es también un conjunto abierto.
- Si $\{U_1, \ldots, U_k\}$ es un conjunto finito de conjuntos abiertos, entonces $\bigcap\limits_{j=1}^{k} U_j$ es un conjunto abierto.
- Sea $x \in \partial A$, entonces, para todo $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x)$ contiene al menos un punto de A y al menos un punto $z \notin A$.

$X_k \subset \mathbb{R}^n$ es convergente si existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal para todo $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k \geq k_0$, $\|x_k - x\| < \epsilon$.

Propiedades

- Si existe $\lim\limits_{k \to 0} X_k = x \in \mathbb{R}^n$, entonces x es único.
- Una subsucesión de una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$, si converge, es convergente hacia el mismo límite.
- Toda sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$ es acotada.
- Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.
- F es un conjunto cerrado si para toda sucesión $(X_k)_{k \geq 1}$ contenida en F con $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = x$, vale que $x \in F$.

Teorema de compacidad: Sea C subconjunto ordenado y acotado en $\mathbb{R}^n$, entonces vale que toda sucesión $(X_k)_{k \geq 1} \in C$, tiene una subsucesión $X_{k'}$ convergente hacia un $x \in C$.

2. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^k$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definimos:

Dominio: Conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ para los cuales la función f está definida. Lo notamos $Dom(f)$

Imagen: Conjunto de puntos $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists\, x \in Dom(f) \text{ tal que } f(x) = y\}$

Composición de funciones: Si $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, entonces se puede definir $f \circ g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Curva: Función $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, donde I es algún subconjunto (en general un intervalo) de $\mathbb{R}$.

Gráfico: Subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por los pares ordenados $(X; f(X))$ donde $X \in Dom(f)$. Lo denotamos $Gr(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Superficie de nivel: Dada $f : R^n \to \mathbb{R}$ y un número real c, es el subconjunto del dominio dado por $S_c(f) = \{x \in Dom(f) : f(x) = c\}$

Límite: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $P \in \mathbb{R}^n$. $l \in \mathbb{R}$ es el límite de f cuando X tiende a P (y lo notamos $\lim_{X\to P} f(X) = l$) si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|X - P\| < \delta$ entonces $|f(X) - l| < \epsilon$.

Converge a : Se dice que f converge L cuando $X \to P$, si $\lim\limits_{X\to P} f(X) = L$

Diverge: Se dice que f diverge en P cuando $\lim\limits_{X\to P} f(X) = \infty$

Propiedades : Sea $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $\alpha : I \in \mathbb{R} \to A$ y $\beta : J \in \mathbb{R} \to A$ dos curvas en R^n:

- Sea $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ tal que $\lim\limits_{X\to P} g(X) = L_1 \in \mathbb{R}^n$, Si vale que $\lim\limits_{Y\to L_1} f(Y) = L_2$, entonces $\lim\limits_{X\to P} (f \circ g)(X) = L_2$, siempre y cuando $F(X) \neq L_1$ para $X \neq P$.
- Si A y B son tales que $\lim\limits_{t\to t_0} \alpha(t) = P$ y $\lim\limits_{t\to t_1} \beta(t) = P$ y $\alpha(t) \neq P$ para $t \neq t_0$ y $\beta(t) \neq P$ para $t \neq t_1$. Si pasa que $\lim\limits_{t\to t_0} F(\alpha(t)) \neq \lim\limits_{t\to t_1} f(\beta(t))$, entonces no existe el límite $\lim\limits_{X\to P} f(X)$

  En castellano: "Dadas dos curvas α y β que convergen a P tales que valen P en único punto, si $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$ tienen distintos limites, entonces no existe el límite de f en el punto P".
- Sean $P \in \overline{A}$, y $L \in \mathbb{R}^m$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - $\lim_{X\to P} f(X) = L$
  - Para toda sucesión de puntos $P_k \in A$ tal que $P_k \neq P$ y $P_k \to P$, se tiene que $\lim_{k\to\infty} P_k = L$
- Sean (P_k) y P'_k dos sucesiones de puntos de A tales que tienden a P,sucesiones de puntos de A, tales que ambas tienden a P, y las sucesiones $(Q_k) = f(P_k)$ y $(Q'_k) = f(P'k)$ tienen límites distintos, entonces no existe el límite $\lim_{X\to P} f(X)$.
- f tiende a L cuando $X \to P$ si y solo si cada coordenada de f converge a la coordenada correspondiente de L

2.1. Continuidad

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

Continuidad en un punto: f es continua en $P \in A$ si $\lim_{X \to P} f(X) = f(P)$.

Continuidad en el dominio: f es continua, si f es continua en P para todo $P \in A$.

Conjunto conexo por arcos: Conjunto C que verifica que para cualquier punto $p, q \in C$ hay una curva $\alpha : [a, b] \to C$ continua tal que $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.

Propiedades

- Si $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$, entonce f es continua en P si y solo si f_i es continua en P para $1 \leq i \leq n$.
- Sea $g : B \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, si g y f son continuas, entonces $f \circ g$ es continua en $Dom(f \circ g)$.
- La suma, producto y cociente de funciones continuas en P, resultan ser funciones continuas en P.
- Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f es continua en P si y solo sí para toda sucesión $\{X_k\}$ en $\mathbb{R}^n$, tal que $\lim_{k \to \infty} X_k = P$, se verifica que $\lim_{k \to \infty} f(X_k) = f(P)$.
- Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una función continua en $P \in \mathbb{R}^n$ y X_k una sucesión en los reales, entonces:
    - Si $X_k \to p$ con X_k una sucesión en A tal que $f(X_k) < 0$, entonces $f(P) \leq 0$.
    - Si $X_k \to p$ con X_k una sucesión en A tal que $f(X_k) > 0$, entonces $f(P) \geq 0$.
    - Si $f(p) > 0$, entonces existe una bola $B(x_0, r)$ con $r > 0$ tal que si $x \in B(x_0, r) \cap A$, $f(x) \geq 0$
    - Si $f(p) < 0$, entonces existe una bola $B(x_0, r)$ con $r > 0$ tal que si $x \in B(x_0, r) \cap A$, $f(x) \leq 0$
- **Teorema de Bolzano:** Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a)f(b) < 0$ ($f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
- **Teorema de Bolzano en $\mathbb{R}^n$:** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A arcoconexo y f continua en A, si existen $P, Q \in A$ tal que $f(P)f(Q) < 0$, entonces existe $R \in A$ tal que $f(R) = 0$
- **Teorema de valores intermedios:** Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ arco-conexo y $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(P) < d < f(Q)$ con $P, Q \in A$ y $d \in \mathbb{R}$, entonces existe $R \in A$ tal que $f(R) = d$

3. Calculo diferencial en varias variables

3.1. Repaso Álgebra

Recta: $L(x) = \lambda x + p$

Plano: $\Pi : \alpha v + \beta w + p$ donde v y w son linealmente independientes.

Transformación lineal: Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal si:

- $T(v + w) = T(v) + T(w)$
- $T(\lambda v) = \lambda T(w)$

3.1.1. Propiedades

- Sean $L_1(x) = \lambda v + p$ y $L_2(x) = \lambda' w + q$ son paralelas $\iff v = kw$
- Sean $L_1(x) = \lambda v + p$ y $L_2(x) = \lambda' w + q$ son perpendiculares $\iff v \perp w$
- Sea $\Pi : \alpha v + \beta w + p$ un plano, entonces $v \times w$ es ortogonal a v y a w.
- Sea $\Pi : \alpha v + \beta w + p$ un plano, entonces $x \in \Pi \iff (x - p) \perp N \iff N(x - p) = 0 \iff Nx = Np$ con N la normal del plano.
- Para describir una recta en $\mathbb{R}^3$ se necesitan dos ecuaciones.
- Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, $\exists!\ M \in \mathbb{R}^{m \times n}\ /\ T(v) = Mv$

3.2. En los reales

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en a si existe el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - a}{h} = l$$

.

En dicho caso l es la derivada de f en a y notamos $f'(a) = l$

Teorema de Fermat: Si f es derivable en $c \in (a, b)$ y c es un extremo local de f, entonces $f'(c) = 0$.

Teorema de Rolle: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)\ /\ f'(c) = 0$

Teorema de Lagrange: Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema de Cauchy: Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas y derivables en (a, b) entonces existe c tal que $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(a) - g(b))$

3.2.1. Polinomio de Taylor

Sea $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in I$, I intervalo abierto y f n-veces derivable en I, entonces, llamamos **polinomio de Taylor** de f de orden n en a al siguiente polinomio:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Propieades

- P_n es el único polinomio de grado n que verifica: $P_n(a) = f(A)$, $P_n'(a) = f'(a), \ldots, P_n^{(n)} = f^{(n)}(a)$
- Es el único polinomio que cumple que, dado $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ se verifica:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

3.2.2. Otras propiedades

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en a, entonces f es continua en a.

3.3. En R^n

Derivada de una curva: Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ una curva en el intervalo (a,b) entonces la derivada de α en t_0 es el vector que se obtiene derivando cada coordenada de $\alpha(t)$ en t_0.

Curva regular : Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva en $\mathbb{R}^n$, α es regular si cada una de sus coordenadas es una función derivable y ademas, para todo $t \in \mathbb{R}$, ninguna derivada es cero.

Dirección: Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es considerado una dirección si $\|v\| = 1$.

Derivadas direccionales: Sea $V \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $P \in A^0$, entonces el limite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P+tV) - f(P)}{t}$$

(si existe) es la derivada direccional de f en P en la dirección V y lo notamos:

$$\frac{\partial f}{\partial v} \text{ ó } f_V(P)$$

Derivadas parciales: Sean $E_1, \ldots, E_n$ los vectores de la base canónica, la i-ésima derivada parcial de f en P es la derivada direccional de f en la dirección E_i. Y la notamos como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

Hiperplano tangente: El hiperplano tangente en P de una función f es el plano generado por todas las derivadas parciales de f en P. En otras palabras es un plano que pasa por $(P, f(p))$ y está generado por $\{(E_0, f_{x_0}(P)), \ldots, (E_n, f_{x_n}(P))\}$. La fórmula de este plano es de la forma $\Pi_P :< N, Y - Q >= 0$ donde $N = (f_{x_0}(P), \ldots, f_{x_n}(P), -1)$ es la normal del plano y $Q = (X, x_{n+1}) - (P, f(P))$

Deferenciabilidad: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $P \in A^0$, si existen las derivadas parciales de f en P, decimos que f es diferenciable en P si existe

$$\lim_{X \to P} \frac{|f(X) - f(P) - f_{x_1}(P)(x_1 - p_1) - \cdots - f_{x_n}(P)(x_n - p_n)|}{\|X - P\|}$$

En este caso a la función $(x_1, \ldots, x_n) \to f_{x_1}(P)(x_1 - p_1) + \cdots + f_{x_n}(P)(x_n - p_n)$ la denominamos **diferencial de** f en P y la notamos Df_p

Si A es abierto y f es diferenciable en en todos los puntos de A, entonces f es diferenciable en A.

Gradiente: Vector formado por todas las derivadas parciales de f en un punto P, lo notamos $\nabla f(P)$

Propiedades

- $Df_P(X) =< \nabla f(P), X >$
- La ecuación del plano tangente a P es $\Pi_P : f(P)+ < \nabla f(P), X - P >$
- **Cauchy-Schwartz:** $|Df_p(X)| = | < \nabla f(P), X > | \leq \|\nabla f(P)\| \|X\|$
- Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable $p = (x_0, y_0)$, entonces la dirección de máximo crecimiento es $\nabla f(p)$ y la dirección de mínimo crecimiento es $-\nabla f(p)$
- Que f sea diferenciable en P es un requisito necesario para que existan las derivadas parciales de f en P.
- Si $n = 1$, entonces vale que f es diferenciable en $a \in A^0 \iff$ existe $f'(a)$
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en x_0, entonces el gráfico de f admite una recta tangente en $(x_0, f(x_0))$
- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0), entonces el gráfico de f admite un plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in A^\circ$, entonces f es continua en P.
- Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in A^0$, si existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que f es aproximable al punto p por T ($\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - T(x-p)}{\|x-p\|} = 0$) entonces $T = Df_p$ y existen todas las derivadas parciales de f en P.
- Si f es diferenciable en p, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, entonces $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p) = Df_p(v) =< \nabla f(P), v >$
- Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $p \in A^0$ diferenciables en p:
    - $f + g$ es diferenciable en p
    - $f \cdot g$ es diferenciable en p
    - Si $g(p) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ es diferenciable en p
- Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una transformación lineal, entonces T es diferenciable en $p \; \forall \; p \in \mathbb{R}^n$ y $DT_p = T$
- Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto tal que en cada $q \in A$, existen $f_{x_1}(q), f_{x_2}(q), \ldots, f_{x_n}(q)$. Sea $p \in A$, si $f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}$ son continuas en p, entonces f es diferenciable en p.

- Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, el $Df_p \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y

$$Df_p = \begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \nabla f_2(p) \\ \vdots \\ \nabla f_m(p) \end{pmatrix}$$

3.4. Regla de la cadena

3.4.1. Lemas Previos

- Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces existe $c \geq 0$ / $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|T\| \leq c\|x\|$
- $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en p entonces existen una $B_r(p)$ y una constante $c_p \geq 0$ tal que $\|F(X) - F(P)\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in B_r(p)$

3.4.2. Regla de la cadena

Sean $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ difereniable en $p \in A^0$ y $G : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ diferenciable en $q = F(p) \in B$. Entonces $G \circ F$ es diferenciable en p y vale:

$$D(G \circ F)(p) = DG(q) \circ DF(p)$$

Esta composición, se puede ver como la multiplicación de las matrices que representan a dichos diferenciales.

3.5. Polinomio de Taylor

Definición: Decimos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es C^2 en p si f tiene derivadas primeras (todas) y segundas (todas) y todas son continuas en p. Y decimos que f es C^3 en p si existen sus derivadas terceras y estas son continuas en p.

Matriz Hessiana: Si f tiene derivadas segundas en p, llamaremos matriz de derivadas segundas de f en p ó matriz Hessiana de $f(p)$ a:

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_2(p)} & \cdots & f_{x_1x_n(p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_1x_2(p)} & \cdots & f_{x_1x_n(p)} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Polinomio de Taylor de grado 2:

$$P_2(x) = f(p) + \nabla f(p)(x-p) + \frac{1}{2}(x-p)^t f(p)(x-p)$$

3.5.1. Propiedades

- Si f es C^2 en p, entonces $f_{x_i x_j}(p) = f_{x_j x_i}(p)$
- f es C^3 en $p \iff f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}$ son C^2.
- **Teorema de Lagrange:** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A convexo y abierto y f diferenciable en A. Si $p, q \in A$ entonces hay un punto c en el segmento que une a p con q ($c \neq p, q$) tal que $f(q) - f(p) = Df(c)(q - p)$
- Sea $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si f es C^3 en B, entonces el error $R_2(x) = f(x) - P_2(x)$ verifica que

$$\lim_{x \to p} \frac{R_2(x)}{\|x - p\|^2} = 0$$

  y además

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{n} f_{x_i x_j x_k}(c)(x_i - p_i)(x_j - p_j)(x_k - p_k)$$

  siendo c algún punto del segmento que une a x con p.
- $\int_a^b h(t)g(t)dt = h(c)\int_a^b g(t)dt$ para algún c en el intervalo $[a, b]$

4. Extremos de funciones de varias variables

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, decimos que en $p \in A$ hay un **máximo** para f si $f(p) \geq f(x)$ para todo $x \in A$. Y es **máximo estricto**, global o absoluto si $f(p) > f(x)\ \forall\ x \in A$.

Máximo local: En $g \in A$ hay un máximo local (o relativo) de f si hay $r > 0$ tal que f restringida a $B_r(g) \cap A$, tiene un máximo en g.

Mínimos: Analogamente se definen los mínimos globales, locales y estrictos.

Puntos críticos: $p \in A$ es un punto crítico en f si f es diferenciable en p y $\triangledown f(p) = (0, \ldots, 0)$

Matriz definida positiva: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, A es definida positiva si para todo $X \in \mathbb{R}^n$ vale que $X^t AX > 0$ si $X \neq 0$

Matriz semidefinida positiva: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, A es definida positiva si para todo $X \in \mathbb{R}^n$ vale que $X^t AX \geq 0$ si $X \neq 0$

Matriz semidefinida/definida negativa: Definiciónes análogas a las anteriores.

Matriz indefinida: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, A es indefinida si existen $X, X_1 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $X^t AX > 0$ y $X_1^t AX < 0$

Punto Silla: p es un punto silla si existen dos trayectorias α, β que tienden a p (o sea son continuas y $\alpha(0) = \beta(0) = p$), y tales que $f \circ \alpha(t)$ tiene un máximo en $t = 0$ y $f \circ \beta$ tiene un mínimo en $t = 0$. Es decir, si hay dos trayectorias continuas de manera que f tiene máximo y mínimo a lo largo de ellas en p. En este caso p no es ni máximo ni mínimo de f.

Difeomorfismo: Sea A y B conjuntos abiertos y $\varphi : A \to B$ una función biyectiva, entonces φ es un difeomorfismo si φ es diferenciable en A y $\varphi^{-1} : B \to A$ es diferenciable en B.

Teorema de Weierstrass: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A compacto y f continua en A. Entonces existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M\ \forall\ x \in A$. Además existen $P_m, P_M \in A$ tales que f alcanza su mínimo y máximo respectivos en A en dichos puntos.

Propiedades

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, A es definida negativa si y solo si existe $c > 0$ tal que $X^t AX \geq -d\|X\|$
- A es definida negativa si y solo si $-A$ es definida positiva.
- Sea $\varphi : A \to B$ un difeomorfismo y $p \in A$ tal que $\varphi(p) = q$, entonces $D\varphi(p)$ es una matriz inversible y $(D\varphi(p))^{-1} = D\varphi^{-1}(q)$
- Si $\varphi : A \to B$ es un difeomorfismo entonces A y B pertenecen al mismo espacio dimensional.

4.1. Criterio del Hessiano

Sea $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ una matriz simétrica, entonces:

- B es definida positiva si y solo si todos sus autovalores son positivos. Y esto sucede si y solo si las determinantes de sus submatrices son todas positivas.
- B es definida negativa si y solo si todos sus autovalores son negativos. Y esto sucede si y solo si las determinantes de sus submatrices van intercalando signos (la pimera es negativa, la segunda es positiva, la tercera es negativa, etc).
- B es indefinida si y solo si hay dos autovalores λ_i y λ_j tal que $\lambda_i > 0$ y $\lambda_j < 0$. Y esto sucede si los signos de las determinantes de sus submatrices no cumplen con los patrones mencionados en los casos anteriores.

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con A abierto, f C^3 en A y sea $p \in A$, un punto crítico de f, entonces:

- Si $Hf(p)$ es definida positiva entonces, en p, f tiene un mínimo local y estricto.
- Si $Hf(p)$ es definida negativa entones, en p, f tiene un máximo local y estricto
- Si $Hf(p)$ es indefinida, entonces p es un punto silla (no es máximo ni mínimo)

4.2. Teorema de la función inversa

Sea $\varphi : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con A abierto y φ diferenciable en A. Si existe $p \in A$ tal que $D\varphi(p)$ es inversible, entonces hay dos conjuntos $U \subset A$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

- $p \in U$ y $\varphi(p) \in V$
- $\varphi\big|_U : U \to V$ es un difeormofismo diferenciable.

4.3. Teorema de la función implicita

Dada $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función $C^{(k)}$ y $S = \{X \in \mathbb{R}^n : f(X) = 0\}$ una curva de nivel de f. Si existe $P \in S$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \neq 0$. Entonces existen $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, un entorno de $X_i = (x_0, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n)$, y $V \in \mathbb{R}$, un entorno de x_i, y una función $\varphi : U \to V$ tal que:

- $\varphi(X_i) = x_i$
- $\varphi \in C^{(k)}$ en U
- $$\varphi_{x_j}\Big|_{X_i} = \frac{-f_{x_j}(X)}{f_{x_i}(X)}$$

4.4. Multiplicadores de Lagrange

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in D : g(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ una superficie de nivel y $P \in S$ tal que f y g son diferenciables en P. Si $\nabla g(p) \neq (0, \dots, 0)$ y $f\big|_S$ tiene un extremo global o local en P, entonces $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

4.4.1. Caso general

Si S es un sistema de ecuaciones y restringimos f a S entonces:

$$S = \begin{cases} g_1(x_1, \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

Si $p \in S$ es un extremo de $f\big|_S$, $f, g_1, \dots, g_n$ son diferenciables en p, $\nabla g_i(p) \neq 0$ para algún $1 \leq i \leq n$ y $\nabla f(p) \neq 0$, vale que:

$$\nabla f(p) = \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \cdots + \lambda_n g_n(x_1, \dots, x_n)$$

Cada λ_i es llamado *multiplicador de Lagrange*

5. Integrales dobles y triples

5.1. Repaso

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, si f es positiva, la integral de la misma mide el área comprendida entre $[a,b]$ y la gráfica de f. Si f es arbitraria, la integral sirve para calcular el promedio de f.

5.1.1. Integral de Rienman

Partición de un intervalo : Conjunto $\Pi = \{a, t_1, \ldots, t_n, b\}$ tal que $a < t_1 < \ldots < t_n < b$

Aproximación del área por defecto : $s_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})m_i$ donde m_i es el mínimo valor de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. $s_\Pi(f)$ se denomina *suma inferior de f en* Π

Aproximación del área por exceso : $S_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})M_i$ con M_i el maximo valor de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. $S_\Pi(f)$ se denomina *suma superior de f en* Π

Refinamiento : Sean Π y Π' dos particiones de $[a,b]$, entonces, Π' es más fina que Π si $S_{\Pi'}(f) \leq S_\Pi(f)$ y $s'_\Pi(f) \geq s_\Pi(f)$

Partición regular : Sea $\Pi = \{a, t_1, \ldots, t_n, b\}$ una partición de $[a,b]$, entonces Π es regular si $t_{i-1} - t_i = k$ para todo i

Integral inferior : $I_*(f) = sup\{s_\Pi(f) : \Pi \text{ partición de } [a,b]\}$

Integral superior : $I^*(f) = inf\{S_\Pi(f) : \Pi \text{ partición de } [a,b]\}$

Integrabilidad : f es integrable en $[a,b]$ si $I_*(f) = I^*(f)$. Si esto sucede, entonces llamamos a este número $\int_a^b f(x)dx$

Propiedades :

- $S_\Pi(f) \geq s_\Pi(f)$ para todo Π partición de un intervalo.
- Sean Π_1 y Π_2 dos particiones cualesquiera, entonces:

  $$m(a,b) \leq s_{\Pi_1}(f) \leq s_{\Pi_2}(f) \leq M(b-a)$$

  con m y M el mínimo y máximo de f, respectivamente.
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable si y solo si para cada $\epsilon > 0$ hay una partición Π_ϵ de $[a,b]$ tal que $S_{\Pi_\epsilon}(f) - s_{\Pi_\epsilon}(f) < \epsilon$
- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona creciente (decreciente), entonces f es integrable en $[a,b]$
- Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a,b]$ y

  $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

- Si f es integrable en $[a, b]$ y $c \in (a, b)$, entonces f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y vale que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- Si f es integrale en $[a, b]$, entonces $|f|$ es integrable y

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

- Si f es continua en $[a, b]$ entonces es integrable en ese intervalo

5.1.2. Teorema fundamental del cálculo integral

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces F es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$

5.1.3. Regla de Barrow

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y existe $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ tal que $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

5.1.4. Integración por partes

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)g'(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

5.1.5. Sustitución

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y $U : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable, entonces:

$$\int_{U(a)}^{U(b)} f(U(x))U'(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

5.1.6. Integrales impropias

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ integrable con $a \to \infty$ ó $b \to \infty$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \to b^-} \int_a^r f(x)dx \text{ si } b \text{ tiende a infinito}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \to a^+} \int_r^a f(x)dx \text{ si } a \text{ tiende a infinito}$$

En el caso que tanto a como b tiendan a infinito, separamos el intervalo en $(a, c]$ y $[c, b)$ para algún $c \in (a, b)$ finito y calculamos las integrales de cada intervalo por separado.

Convergencia absoluta: La integral impropia de f en $[a,b)$ converge absolutamente si la integral respectiva de $|f|$ converge.

Propiedades:

- Si la integral impropia de $|f|$ en un intervalo converge entonces la integral de f converge en ese intervalo.

5.1.7. Criterios de comparación de integrales impropias

Sean $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ continuas tal que $f\geq g\geq 0$

- Si $\int_a^b f(x)dx$ converge, entonces $\int_a^b g(x)dx$ converge.
- Si $\int_a^b g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

En, general, si $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$:

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0\Rightarrow\left(\int_a^\infty f(x)dx<\infty\iff\int_a^\infty g(x)dx<\infty\right)$$
- $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0\Rightarrow\left(\int_a^\infty g(x)dx<\infty\Rightarrow\int_a^\infty f(x)dx<\infty\right)$$
- $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty\Rightarrow\left(\int_a^\infty g(x)dx=\infty\Rightarrow\int_a^\infty f(x)dx=\infty\right)$$

5.1.8. Integrales con las que comparar:

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\text{converge} & \text{si } p>1\\ \text{diverge} & \text{si } p\leq 1\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\text{converge} & \text{si } p\leq 1\\ \text{diverge} & \text{si } p>1\end{cases}$$

5.2. Integral doble

5.2.1. Teorema de fubbini

Sea $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $B_x=\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in A\}$ y $C_y=\{x\in\mathbb{R}:(x,y)\in A\}$. Si $f_{y_0}:C_{y_0}\to\mathbb{R}$, $f_{y_0}(x)=f(x,y_0)$ es inyectiva para todo y_0 y $f_{x_0}:B_{x_0}$, $f_{x_0}(y)=f(x_0,y)$ es integrable para todo x_0, entonces:

$$\int\int_A f(x,y)dx=\int_{B_x}\left(\int_{C_y}f(x,y)dy\right)dx=\int_{C_y}\left(\int_{B_x}f(x,y)dx\right)dy$$

Observación :

$$\int_c^d\int_a^b f(x)g(y)dxdy=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

5.3. Principio de Cavalieri

Sean dos regiones en un espacio tridimensional incluidas entre dos planos paralelos. Si cada plano paralelo a estos dos planot interseca ambas regiones en secciones de igual area, entonces las dos regiones tienen el mismo volumen.

5.4. Integrales en $\mathbb{R}^n$

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada. Sea Q un (hiper) cubo en $\mathbb{R}^n$ tal que $D \subset Q$, se define $\bar{f} : Q \to \mathbb{R}$ acotada de la siguiente forma:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \in Q - D \end{cases}$$

y f es integrable en D si y solo si $\bar{f}$ es integrable en Q. En tal caso vale que:

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int \cdots \int_Q \bar{f}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

Propiedad : $\bar{f}$ es integrable en Q si para cada $\epsilon > 0$ hay una partición P tal que $S_P(f) - s_P(f) < \epsilon$

5.4.1. Dominios elementales en $\mathbb{R}$

Tipo 1: $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \;\wedge\; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$

$$\int\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx$$

Tipo 2: $D = \{(x, y) : a \leq y \leq b \;\wedge\; \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$

$$\int\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx dy$$

Tipo 3: Regiones que son del tipo **1** y **2** simultaneamente.

5.4.2. Teorema del valor medio para integrales

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, D compacto, arcoconexo. Entonces hay $x_0 \in D$ tal que

$$\int\int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = f(x_0)\mu(D)$$

donde $\mu(D)$ es el área de D.

5.5. Cambio de variables

Jacobiano de una transformación lineal: Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ derivable, llamamos *jacobiano* JT de T en (x_0, y_0)

Cambio de variable: Sea $D, D* \subset \mathbb{R}^2$ y sea $T : D* \to D$ derivable y biyectiva, entonces dado $f : D \to \mathbb{R}$ integrable se tiene que

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D*} f \circ T(u,v)|JT(u,v)|dudv$$

5.5.1. Coordenadas polares

Dado un vector (x_0, y_0) en el plano, el cambio de variables a coordenadas polares está dado por:

$$\begin{cases} u = r \times \mathtt{cos}\ \theta \\ v = r \times \mathtt{sen}\ \theta \end{cases}$$

donde θ es el ángulo entre el eje x y (x_0, y_0) y r es el módulo del vector (x_0, y_0). En este caso queda que

$$JT(r,\theta) = \left| \mathtt{det} \begin{pmatrix} \mathtt{cos}\ \theta & -r\mathtt{sen}\ \theta \\ \mathtt{sen}\ \theta & r\mathtt{cos}\ \theta \end{pmatrix} \right| = r$$

5.5.2. Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (inversibles) buscan transformar rectángulos en paralelogramos.

5.5.3. Coordenadas cilíndricas

Dado un vector (x, y, z) en el espacio, el cambio de variables a coordenadas cilíndricas está dado por:

$$\begin{cases} u = r \times \mathtt{cos}\ \theta \\ v = r \times \mathtt{sen}\ \theta \\ w = z \end{cases}$$

donde θ es el ángulo entre el eje x y la proyección del vector (x_0, y_0, z_0) en el plano xy y r es el módulo del vector (x_0, y_0, z_0). En este caso queda que:

$$JT(r,\theta) = \left| \mathtt{det} \begin{pmatrix} \mathtt{cos}\ \theta & -r\mathtt{sen}\ \theta & 0 \\ \mathtt{sen}\ \theta & r\mathtt{cos}\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = r$$

5.5.4. Coordenadas esféricas

Dado un vector (x_0, y_0, z_0) en el espacio, el cambio de variables a coordenadas esféricas está dado por:

$$\begin{cases} x = r\mathtt{sen}\ \phi\ \mathtt{cos}\ \theta \\ y = r\mathtt{sen}\ \phi\ \mathtt{sen}\ \theta \\ z = r\mathtt{cos}\ \phi \end{cases}$$

donde θ es el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano xy del vector (x_0, y_0, z_0), ϕ es el angulo entre el eje z y la proyección en xz del vector (x_0, y_0, z_0) y r es el módulo del vector (x_0, y_0, z_0). En este caso queda que:

$$JT(r,\theta) = \left|\mathtt{det}\begin{pmatrix} (\mathtt{cos}\ \theta)(\mathtt{sen}\ \phi) & -r(\mathtt{sen}\ \theta)(\mathtt{sen}\ \phi) & r(\mathtt{sen}\ \theta)(\mathtt{cos}\ \phi) \\ (\mathtt{sen}\ \theta)(\mathtt{cos}\ \phi) & r(\mathtt{cos}\ \theta)(\mathtt{sen}\ \phi) & r(\mathtt{sen}\ \theta)(\mathtt{cos}\ \phi) \\ \mathtt{cos}\ \phi & 0 & -r\mathtt{sen}\ \theta \end{pmatrix}\right| = r^2 sen\ \phi$$