Lucas Ribeiro Navarro - 178181 - Resolução do Exercício 1

Felipe Lopes Bueno - 178087 - Organização e formatação do relatório em PDF.

Gianlucca Portelo Magnussen Vidotto - 176494 - Resolução do Exercício 2

Projeto Computacional 2 — Cálculo Numérico

Turma IC — 2º semestre de 2025

Exercício 1:

1. Demonstração de que x* = [1, 1, ..., 1]^T é solução exata.
Considere o sistema linear Ax = b no qual a matriz A apresenta:

- valor α na diagonal principal,
- valor −β na subdiagonal e superdiagonal,
- zeros fora dessas posições.

Tomando o vetor x* formado apenas por unidades, temos:

$$Ax^* = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta & \alpha & -\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & -\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha - 2\beta \\ \alpha - 2\beta \\ \dots \\ \alpha - \beta \end{bmatrix}$$

Esse vetor é exatamente o lado direito b definido no problema, portanto:

x* é de fato uma solução exata do sistema.
2. Usando métodos de Gauss–Jacobi e de Gauss–Seidel com $\alpha = 4$ e $\beta = 1$ temos uma solução aproximada:

Como $\alpha > 2\beta$, a matriz é diagonal dominante e ambos os métodos convergem.

>>> CASO A: alpha=4, beta=1 (Matriz Diagonal Dominante)

--- Gauss-Jacobi (a=4) ---

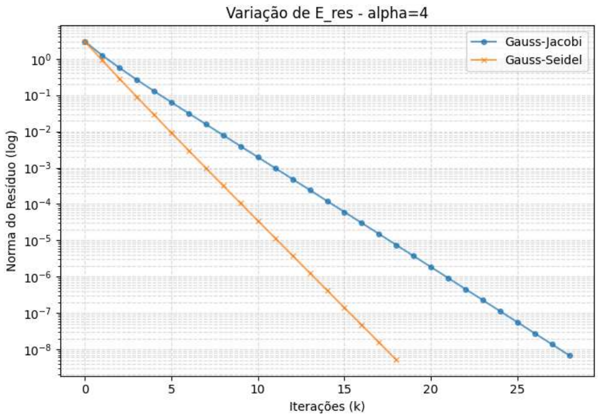
k	normres	normrel
1	3.00e+00	1.00e+00
2	1.25e+00	1.00e+00
3	5.62e-01	3.57e-01
4	2.66e-01	1.48e-01
5	1.29e-01	6.80e-02
6	6.35e-02	3.25e-02
7	3.15e-02	1.59e-02
8	1.57e-02	7.89e-03
9	7.86e-03	3.94e-03
10	3.92e-03	1.97e-03
25	1.12e-07	5.67e-08
26	5.58e-08	2.80e-08
27	2.76e-08	1.40e-08
28	1.37e-08	6.90e-09
29	6.78e-09	3.43e-09

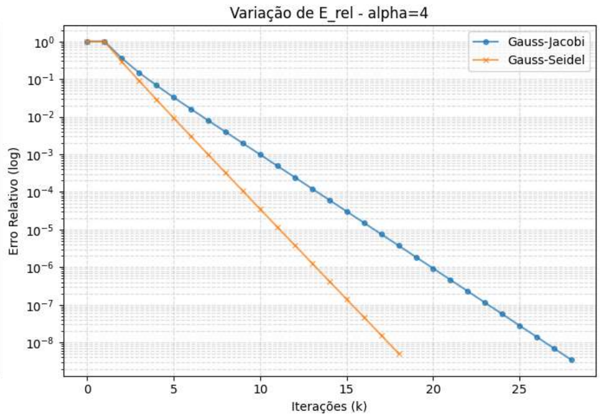
Total: 29 iterações

--- Gauss-Seidel (a=4) ---

k	normres	normrel
1	3.00e+00	1.00e+00
2	9.17e-01	1.00e+00
3	2.85e-01	2.88e-01
4	8.97e-02	8.99e-02
5	2.86e-02	2.86e-02
6	9.21e-03	9.21e-03
7	2.99e-03	2.99e-03
8	9.76e-04	9.76e-04
9	3.20e-04	3.20e-04
10	1.05e-04	1.05e-04
11	3.48e-05	3.48e-05
12	1.15e-05	1.15e-05
13	3.82e-06	3.82e-06
14	1.27e-06	1.27e-06
15	4.22e-07	4.22e-07
16	1.40e-07	1.40e-07
17	4.67e-08	4.67e-08
18	1.55e-08	1.55e-08
19	5.12e-09	5.12e-09

Total: 19 iterações





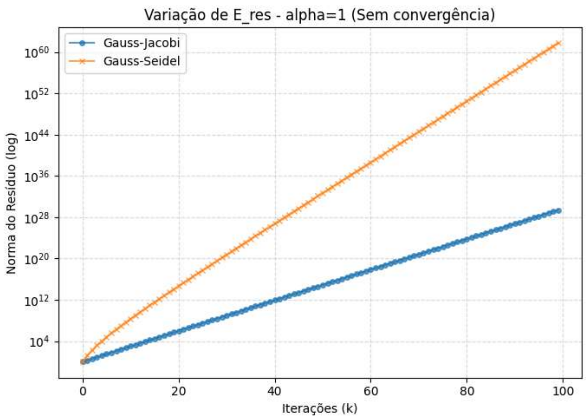
3. Caso α = 1 e β = 1 (análise da divergência). Repetindo o processo utilizando os valores α = β = 1. As tabelas mostram que o erro cresce rapidamente, indicando ausência de convergência:

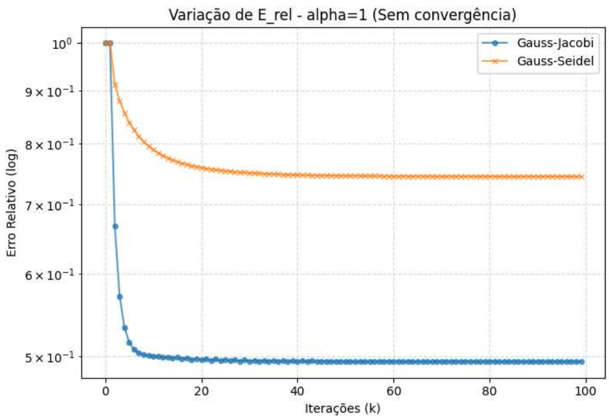
>>> CASO B: alpha=1, beta=1 (Matriz NÃO Diagonal Dominante)

--- Gauss-Jacobi (a=1) [Divergente] ---

k	normres	normrel
1	1.00e+00	1.00e+00
2	2.00e+00	1.00e+00
3	4.00e+00	6.67e-01
4	8.00e+00	5.71e-01
5	1.60e+01	5.33e-01
6	3.20e+01	5.16e-01
7	6.40e+01	5.08e-01
8	1.28e+02	5.04e-01
9	2.56e+02	5.02e-01
10	5.11e+02	5.01e-01
96	1.69e+28	4.94e-01
97	3.34e+28	4.94e-01
98	6.60e+28	4.94e-01
99	1.31e+29	4.94e-01
100	2.58e+29	4.94e-01

Total: 100 iterações





Justificativa teórica para a divergência: O critério de convergência baseado nas linhas estabelece que, para cada linha i:

- Soma dos termos $|a_{ij} / a_{ii}| < 1$.

Vamos analisar a primeira linha de A quando $\alpha = \beta = 1$:

- $a_{11} = 1$
- $a_{12} = -1$

Logo:

$|a_{12} / a_{11}| = |-1/1| = 1$.

Como o valor é igual a 1 (e não menor que 1), o critério é violado.
Portanto, nenhum dos métodos iterativos converge.

Exercício 2:

Utilizamos os parâmetros $\varepsilon = 10^{-8}$ e maxit = 2000. A seguir apresentamos o sistema linear obtido a partir das equações de equilíbrio da treliça.

1. Montagem do sistema linear:
As incógnitas foram organizadas na ordem:

[F1, F2, f1, f2, f3, f4, f5, F3]^T

A partir das equações de equilíbrio em cada junta, obtemos a matriz A:

$$
A = \begin{bmatrix}
-1 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
$$

e o vetor b:

b = [0, 0, 0, 0, 10000, 0, 0, 0]^T

2. Resultados numéricos:
Aplicamos os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel ao sistema acima.

--- Gauss-Jacobi ---

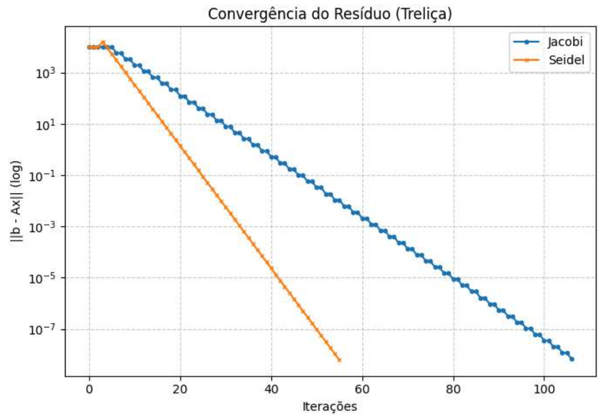
k	Resíduo	Erro Rel.
1	1.00e+04	1.00e+00
2	1.00e+04	1.00e+00
3	1.00e+04	1.00e+00
4	1.00e+04	8.16e-01
5	1.00e+04	8.66e-01
103	2.04e-08	3.54e-12
104	2.04e-08	2.04e-12
105	1.18e-08	2.04e-12
106	1.18e-08	1.18e-12
107	6.81e-09	1.18e-12

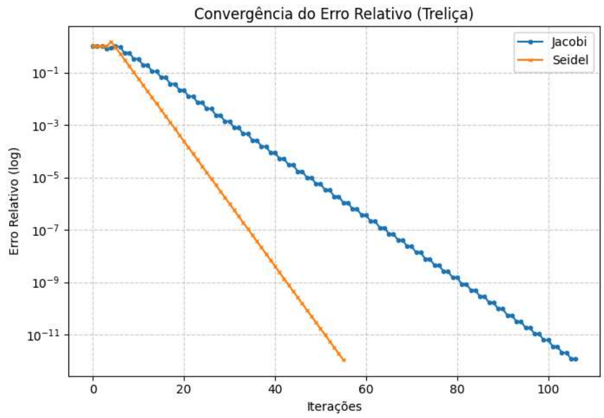
Iterações: 107

--- Gauss-Seidel ---

k	Resíduo	Erro Rel.
1	1.00e+04	1.00e+00
2	1.00e+04	1.00e+00
3	1.00e+04	1.00e+00
4	1.58e+04	1.00e+00
5	9.11e+03	1.48e+00
52	5.59e-08	9.67e-12
53	3.22e-08	5.59e-12
54	1.86e-08	3.22e-12
55	1.07e-08	1.86e-12
56	6.20e-09	1.07e-12

Iterações: 56





Após a execução dos métodos iterativos, chegamos às seguintes aproximações para o vetor solução do sistema da treliça. A seguir apresentamos os vetores finais obtidos por Gauss–Jacobi e Gauss–Seidel.

Solução aproximada – Gauss-Jacobi

x* = [6.81484380E-09]
[-6.33974596E+03]
[-3.66025404E+03]
[-8.96575472E+03]
[6.33974596E+03]
[1.00000000E+04]
[-7.32050808E+03]
[6.33974596E+03]

Solução aproximada – Gauss-Seidel

x* = [-3.93538357E-09]
[-6.33974596E+03]
[-3.66025404E+03]
[-8.96575472E+03]
[6.33974596E+03]
[1.00000000E+04]
[-7.32050808E+03]
[6.33974596E+03]