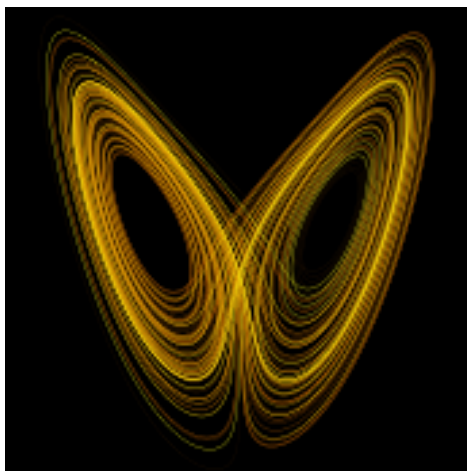


Sistemi Dinamici A Tempo Continuo
E
Metodi di Integrazione Numerica



Gian Andrea Sechi – 5[^]B Abacus

Istituto Primo Levi I.T.I

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduzione ai sistemi dinamici a tempo continuo | 5 |
| 2 | Edward Norton Lorenz | 7 |
| 2.1 | Brevi cenni bibliografici | 7 |
| 2.2 | L'attrattore di Lorenz 1963 | 8 |
| 3 | Metodi di integrazione numerica | 9 |
| 3.1 | Metodo Di Eulero | 12 |
| 3.2 | Metodo di Runge-Kutta | 14 |
| 3.2.1 | Runge-Kutta al 2° ordine | 15 |
| 3.2.2 | Runge-Kutta al 4° ordine | 17 |
| 4 | Conclusione | 21 |

Capitolo 1

Introduzione ai sistemi dinamici a tempo continuo

Un sistema è definito come un ente, generalmente fisico, il quale permette di rispondere ad un'azione, effettuata tramite un ingresso, grazie ad una risposta, comunemente definita uscita.

Entrando maggiormente nello specifico il concetto di sistema si evolve in sistema dinamico. Quest'ultimo rappresenta un particolare tipo di sistema il quale evolve nel tempo, implicando così un'evoluzione sia dell'ingresso che dell'uscita(nel tempo).

Si può dunque semplificare ciò che è stato definito fino ad ora affermando che l'uscita di un sistema dinamico nell'istante t non dipende solo dal proprio ingresso, allo stesso istante, ma bensì anche da uno stato, il quale rappresenta la memoria di ciò che è stato letto (inserito in ingresso) fino a quel momento. Normalmente un sistema continuo rappresenta il modello matematico, che permette di descriverne un processo fisico. Questo modello matematico è sostanzialmente indicato come un sistema di equazioni differenziali.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_0, t)$$

Nel caso dell'attrattore di Lorenz la formula si semplifica a:

$$y(t) = \mathbf{f}(x(t), x_0, t)$$

Si può notare che le funzioni sopra rappresentate sono funzioni vettoriali, ove $x_0, x(t)$ rappresentano vettori colonna formati da :

- Variabili di stato in funzione di t le quali generalmente non possono essere nè fissate, nè osservate direttamente.
- Le variabili di stato in t_0 .
- Gli ingressi, ovvero variabili sul cui agire per modificarne la traiettoria o per modificarne l'andamento (sempre in funzione di t).
 - Esistono inoltre particolari tipi di ingressi (detti disturbi o rumori) sul quale non è possibile agire.
- Ed infine vi sono le uscite, ovvero le variabili da cui è possibile capire (grazie all'osservabilità del sistema) il valore dello stato.

Inoltre può essere aggiunto che $\frac{dx(t)}{dt}$ rappresenta la derivata di $x(t)$ e quindi le funzioni f ed h dipendono direttamente da t .

In questo caso l'insieme dei tempi coincide con quello dei numeri reali \mathbb{R} .

Quando ciò avviene si dice che il sistema è in tempo continuo.

Nel caso invece che l'insieme dei tempi coincida con quello dei numeri relativi \mathbb{Z} si dice che il sistema è in tempo discreto.

In questa tesina illustrerò come implementare il modello di Lorenz 1963 tramite l'utilizzo di tre sistemi di integrazione numerica: Eulero, Runge-Kutta al 2° ordine e Runge-Kutta al 4° ordine e ne illustrerò le differenze.

I sistemi dinamici possono infine suddividersi grazie alle loro caratteristiche:

- Linearità
 - Sistemi Dinamici Lineari: il legame che lega le variabili di ingresso e stato con quella di uscita (o con la dinamica) è di tipo lineare (ovvero può essere espressa tramite matrici).
 - Sistemi Dinamici Non Lineari: il legame che lega le variabili di ingresso e stato con quella di uscita (o con la dinamica) è di tipo non lineare (ovvero può essere espressa solo con funzioni non lineari).
- Stazionarietà
 - Sistemi Dinamici Stazionari: i parametri del sistema sono costanti nel tempo.
 - Sistemi Dinamici Non Stazionari: i parametri del sistema sono variabili nel tempo.
- Numero ingressi e uscite
 - SISO (Single input single output): sistemi dinamici con un solo ingresso controllante e una sola uscita misurata (e controllata).
 - MIMO (Multiple input multiple output): sistemi dinamici con molti ingressi controllanti, molte uscite misurate e molte controllate.

Capitolo 2

Edward Norton Lorenz

2.1 Brevi cenni bibliografici

Edward Norton Lorenz nacque a West Hartford (Connecticut) il 23 maggio 1917 ed è morto a Cambridge (Massachusetts) il 16 aprile 2008.

Lorenz è stato un matematico diventato famoso poichè fu uno dei primi pionieri della teoria del caos, inoltre ha scoperto i primi attrattori strani.

Precisamente un'attrattore rappresenta l'insieme dei punti a cui convergono tutte le traiettorie mentre i cosiddetti attrattori strani sono rappresentati dai frattali, ovvero posseggono una dimensionalità non intera, o se la dinamica dell'attrattore è caotica.

La teoria del caos fu inizialmente scoperta e teorizzata da Poincarè, nel 1908 tramite il problema dei tre corpi, partecipando ad un concorso organizzato dal re di Svezia (Oscar II). Quest'ultima venne successivamente ripresa da Lorenz il quale, come detto, ne divenne uno dei maggiori pionieri.

Lorenz iniziò i propri studi di matematica al Dartmouth College e successivamente all'Harvard University;

Infine perseguì il proprio titolo di studio al Massachusetts Institute of Technology (MIT), in meteorologia.

Dopo aver conseguito la laurea si impegnò subito nella costruzione di un modello matematico il quale studiasse il movimento dell'aria nell'atmosfera.

Lorenz si servì di questo particolare modello per studiare le precipitazioni, e si rese conto che quest'ultime non erano sempre prevedibili;

ovvero di fronte a input con differenze minime il risultato del suo modello, il quale era composto da 12 equazioni, poteva essere enormemente differente.

Questo effetto venne denominato effetto a farfalla (il quale è alla base della teoria del caos) e portò Lorenz ad esplorare più a fondo il proprio modello matematico, giungendo alla realizzazione di un modello relativamente semplice di 3 equazioni che forniva come risultato una serie infinita di soluzioni molto complesse rispetto ai dati iniziali; prese vita l'attrattore di Lorenz.

2.2 L'attrattore di Lorenz 1963

L'attrattore di Lorenz, sviluppato nel 1963 mentre insegnava al MIT, fu il primo esempio di un sistema di equazioni differenziali a bassa dimensionalità in grado di generare un comportamento complesso (Un sistema complesso è un sistema in cui gli elementi subiscono continue modifiche singolarmente prevedibili, ma del quale non è possibile, o è molto difficile, prevedere uno stato futuro) e caotico.

Un sistema è definito caotico solamente se presenta alcune caratteristiche:

- Sensibilità alle condizioni iniziali, ovvero a minime variazioni in ingresso corrispondono variazioni finite in uscita.
- Imprevedibilità (o non-deterministico), ovvero non è possibile determinare l'andamento del sistema con una precisione assoluta, a partire da determinate condizioni iniziali. L'evoluzione del sistema è descritta tramite una serie di orbite le quali differenti tra loro le quali presentano una caratteristica causale.
- Le orbite non evolvono verso l'infinito ma sono confinate in uno spazio preciso.

In questo caso si può parlare di attrattori o di caos non-deterministico.

Il sistema che venne ricavato da Lorenz per il suo attrattore fu il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Questo modello permette così di descrivere comportamenti caotici ed oggetti geometrici descritti tramite questo modello prendono il nome di attrattori strani, i quali sono attrattori con dimensione frattale. Il modello qui riportato è solo un tipo dei molteplici attrattori strani esistenti.

Capitolo 3

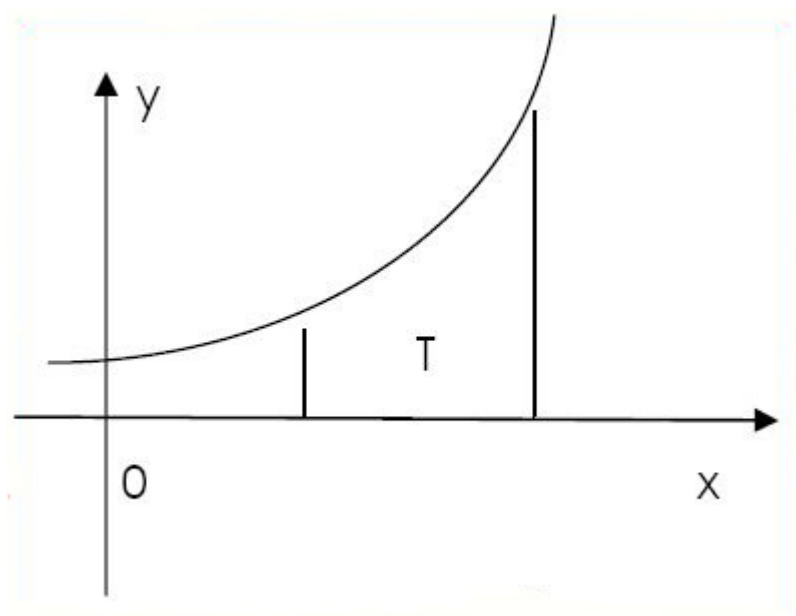
Metodi di integrazione numerica

Nell'ambito scientifico e matematico è spesso necessario dover approssimare il risultato ottenuto, o come spesso si dice arrotondarlo, o addirittura non risulta possibile la risoluzione di una equazione con i metodi convenzionali.

Più precisamente, il metodo di integrazione numerica, permette di attribuire un valore numerico stimato al calcolo di un integrale definito.

Il concetto di integrazione numerica può essere espressa tramite il metodo di integrazione ad una variabile, il quale è risolto tramite l'applicazione della regola del trapezio.

Quest'ultima permette di calcolare l'area sottesa tra una curva in un intervallo definito:



L'intervallo T (che per semplicità chiameremo $[a,b]$) verrà suddiviso in n parti di uguale ampiezza. L'ampiezza, costante, sarà fornita tramite la seguente formula:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

L'intervallo T, viene dunque suddiviso in n intervalli i cui estremi sono

$$x_0 = a \quad [x_0, x_1]$$

$$x_1 = a + \Delta x \quad [x_1, x_2]$$

$$x_2 = a + 2\Delta x \quad [x_2, x_3]$$

$$\vdots$$

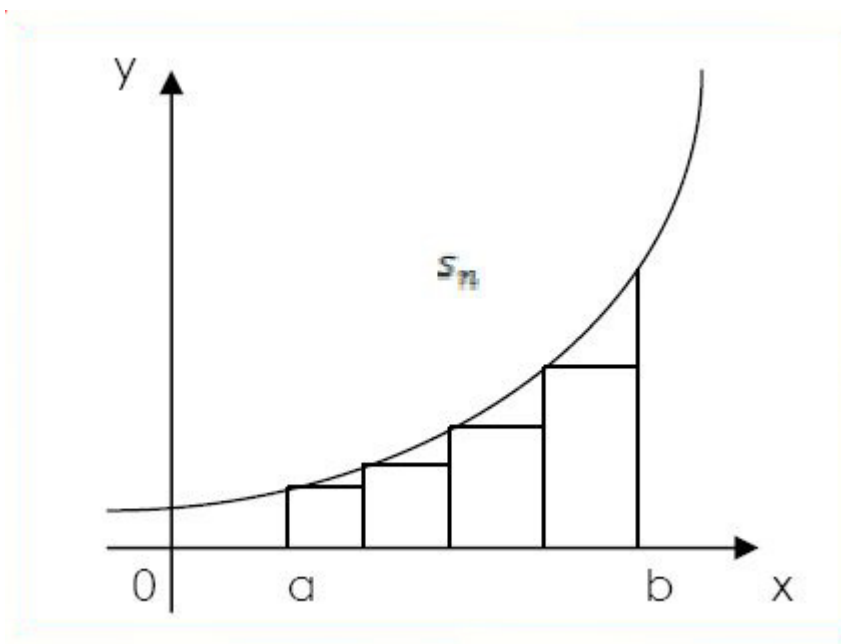
$$x_n = b \quad [x_{n-1}, x_n]$$

Essendo continua in $[a, b]$ la nostra funzione $f(x)$, è continua in ogni intervallo.

Per il teorema di Weierstrass una $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitata ha almeno un punto di massimo(M_k) e uno di minimo(m_k).

Chiameremo k il k-esimo intervallo $k=1, 2, 3, 4, \dots, n$.

Creiamo ora un plurirettangolo inscritto nella curva (detto trapezoide) il quale considererà come base l'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ e come altezza m_k dell'intervallo.

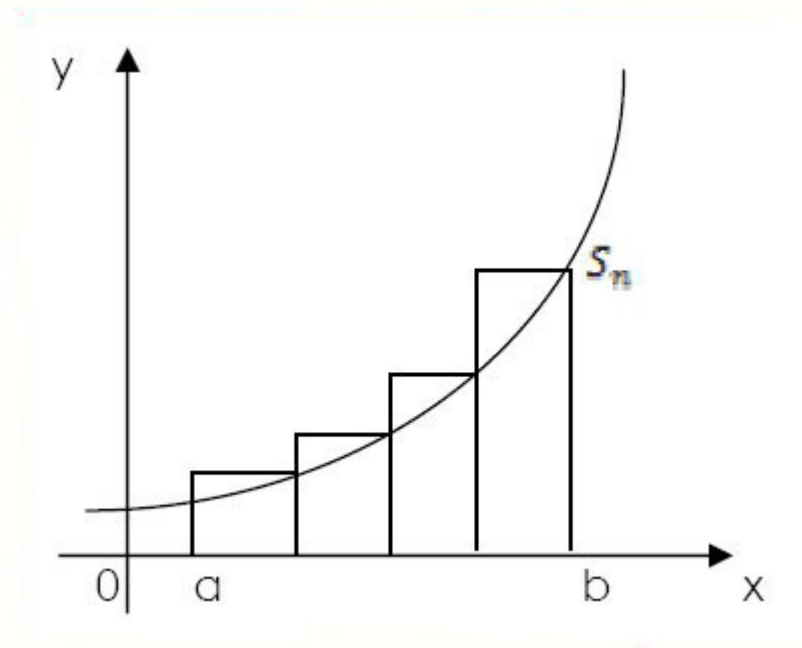


Dunque:

$$s_n = \sum m_k \Delta x$$

Si chiamerà s_n la somma delle aree dei rettangoli che formano il plurirettangolo inscritto nel trapezoide.

Creiamo ora un'altro plurirettangolo circoscritto nella curva (detto trapezoide) il quale considererà come base l'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ e come altezza M_k dell'intervallo.



$$s_n = \sum m_k \Delta x$$

Si chiamerà S_n la somma delle aree dei rettangoli che formano il plurirettangolo circoscritto nel trapezoide.

Si può notare come s_n è un valore senz'altro minore dell'area effettiva, mentre S_n rappresenta un valore senz'altro maggiore.

Intuitivamente si può comprendere che all'aumentare di n (ovvero del numero di intervalli) si avvicina da entrambe le parti dell'area corrispondente.

Si può dunque affermare che :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Questo valore rappresenta l'area sottesa alla curva, approssimata tramite un metodo di integrazione abbastanza semplice.

Questo esempio permette dunque di comprendere come il metodo di integrazione permette di approssimare il valore di una funzione apparentemente incalcolabile.

I metodi di approssimazione più conosciuti ed utilizzati per l'integrazione di equazioni differenziali sono i metodi di Eulero, Runge-Kutta al 2° e al 4° ordine. Per verificarne il differente funzionamento io ho sviluppato ,tramite questi tre metodi di integrazione, l'attrattore di Lorenz 1963.

3.1 Metodo Di Eulero

Il più semplice procedimento per approssimare un sistema dinamico continuo con uno discreto è quello di Eulero. Le soluzioni del sistema discreto così ottenuto approssimano le soluzioni del sistema continuo, in un senso che può essere reso rigoroso con la nozione di convergenza uniforme. La differenza tra le due, cioè l'errore di discretizzazione, è una funzione rapidamente crescente con il passo, per cui la potenza di calcolo richiesta per ottenere soluzioni accurate è notevole. Il metodo di Eulero da risultati approssimati, così come ogni metodo numerico, però la sua convergenza è molto lenta ed è spesso necessario fare molti calcoli per ottenere una accettabile approssimazione del valore cercato.

La formula del metodo di Eulero permette di ottenere la soluzione da t_n a $t_{n+1} \equiv t_n + \Delta t$, questo permette così di stimare la funzione $x(t_n + \Delta t) \simeq x_{n+1}$, avendo x_n , il quale si deduce dalla definizione di derivata:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

In questo modello l'errore è stimato essere uguale a $E = |x(t_n + \Delta t) - x_{n+1}|$ il quale tenderà a zero con Δt tendente a zero.

Nel metodo di Eulero le soluzioni x_{n+1} , i quali avanzano grazie all'intervallo Δt , vengono calcolate tramite le informazioni derivate da $f(x_n)$ calcolata al tempo iniziale di t_n . Questo metodo non molto consigliato per le applicazioni pratiche, a differenza di Runge-Kutta, poichè non è molto preciso e non è molto stabile.

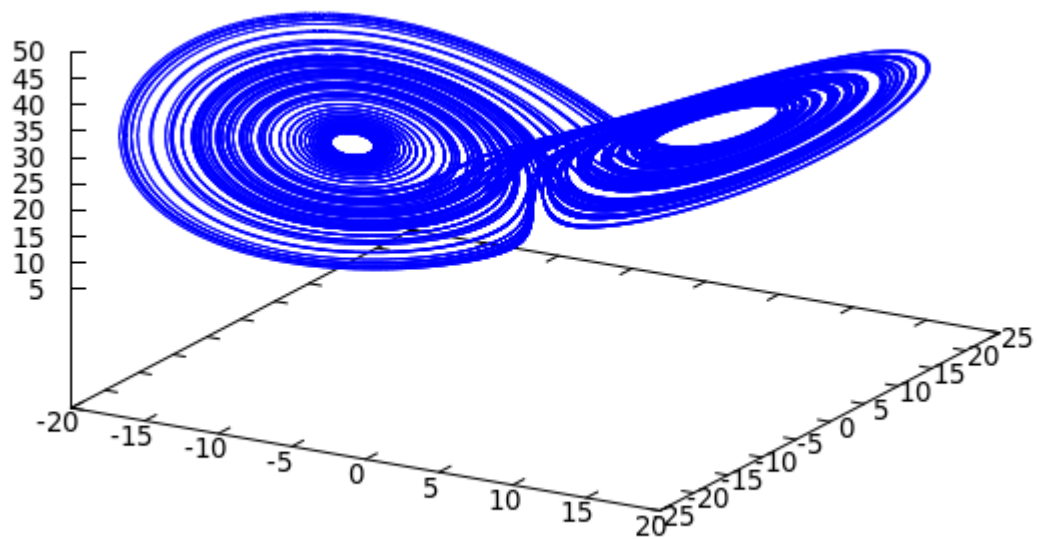
Come ho preannunciato prima mi sono occupato di verificare la corretta soluzione dell'attrattore di Lorenz 1963 utilizzando, in questo caso, il metodo di Eulero; per fare ciò ho creato un apposito programma in c il quale permetta di ricavare 100000 valori i quali renderanno possibile la stesura del grafico in 3 dimensioni dell'attrattore. Il codice da me generato è il seguente:

```
#include <stdio.h>
main() {
float x,y,z,x0=1.,y0=1.,z0=1.,s=10.,r=28.,b=8./3.,dt=0.001,t=0.;
int i=0, itrans=1000;
for (i=0;i<100000;i++) {
x=x0+s*(y0-x0)*dt;
y=y0+(x0*(r-z0)-y0)*dt;
z=z0+(x0*y0-b*z0)*dt;
x0=x;
y0=y;
z0=z;
t=t+dt;
if (i>itrans)
printf("%f %f %f %f\n", x,y,z,t);
}
}
```

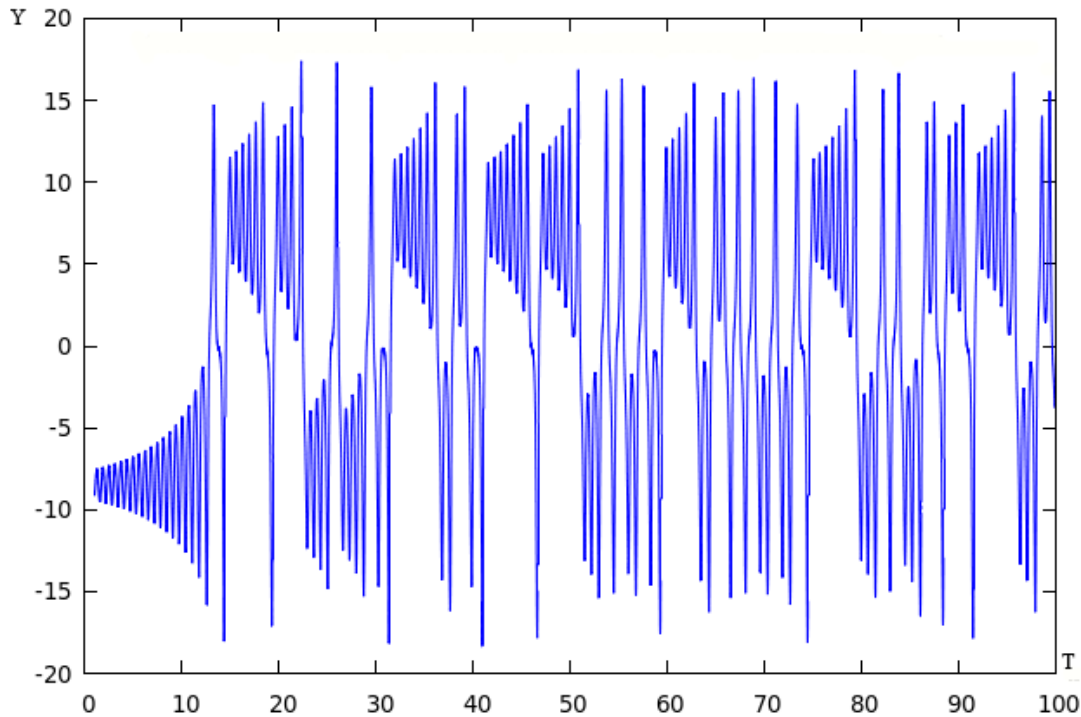
Questo codice permette dunque la realizzazione dell'attrattore di Lorenz 1963 tramite l'approssimazione del suo sistema di equazioni differenziali utilizzando il metodo di Eulero.

Tramite successive operazioni, eseguite con il compilatore gcc su macchina unix, è possibile compilare il programma ed eseguirlo. Quest'ultimo permetterà la restituzione di 100000 punti i quali verranno reindirizzati ad un file di output. Questo file verrà successivamente utilizzato per fornire i dati di input al programma gnuplot, il quale ne permetterà la creazione del grafico.

Il risultato è il seguente:



Se si analizza l'andamento nel tempo si può notare tale grafico:



È evidente dal grafico, dunque, l'andamento caotico di questo attrattore.

3.2 Metodo di Runge-Kutta

I metodi di Runge-Kutta, i quali sono spesso abbreviati in RK, sono una importante famiglia di metodi di integrazione per equazioni differenziali ordinarie. Questi metodi vennero scoperti e teorizzati per la prima volta nel 1900 dai matematici Carl Runge e Martin Wilhelm Kutta, entrambi tedeschi.

Questi metodi sono metodi iterativi discreti e ad un passo che provvedono all'approssimazione numerica di equazioni differenziali ordinarie, o più in specifico ai problemi ai valori iniziali. Questo tipo di metodi sono la parte più generale della famiglia di metodi di integrazione discreti, ovvero quella parte che fornisce un'approssimazione numerica ad una equazione differenziale o più generalmente ad un problema di Cauchy. Il problema di Cauchy consiste nel trovare una soluzione ad una equazione differenziale di ordine n :

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)) = 0 \quad x \in [a, b]$$

tale per cui:

$$y(a) = y_0$$

$$y'(a) = y_1$$

$$y''(a) = y_2$$

$$\vdots$$

$$y^{n-1}(a) = y_{n-1}$$

Il teorema di esistenza e unicità per un problema di Cauchy dimostra che la soluzione esiste ed è localmente unica, se f rispetta opportune ipotesi.

I metodi di Runge-Kutta presi in esame sono quelli inerenti al 2° ordine e al 4° ordine.

3.2.1 Runge-Kutta al 2° ordine

Il metodo di Runge-Kutta al secondo ordine permette di ridurre la convergenza verso lo 0 dell'equazione differenziale; più semplicemente ciò significa che l'errore che si riscontra in un metodo al secondo ordine, il quale è maggiormente preciso e migliore rispetto ad Eulero, è pari a $E = |x(t_n + \Delta t) - x_{n+1}| \propto (\Delta t)^2$.

La soluzione all'equazione differenziale, x_{n+1} sono calcolate tramite la media delle derivate, ovvero:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

dove possiamo affermare che :

$$k_1 = f(x_n)\Delta t$$

$$k_2 = f(x_n + k_1)\Delta t = f(\tilde{x}_{n+1})\Delta t$$

Il significato di k_1, k_2 e \tilde{x}_{n+1} sono i seguenti:

- k_1 è il passo iniziale che permette di stimare $(x_{n+1} - x_n)$ attraverso il metodo di Eulero; questa prima stima di x_{n+1} la indichiamo con \tilde{x}_{n+1} .
- k_2 è un'altra stima di $(x_{n+1} - x_n)$ che sfrutta sempre il metodo di Eulero, ma in questo caso utilizza $f(\tilde{x}_{n+1})$, che è calcolato alla fine dell'intervallo.

Si può infine dire, dunque, che RK2 rappresenta una media tra la derivata $f(x_n)$ calcolata ad inizio intervallo t_n e tra la derivata $f(\tilde{x}_{n+1}) = f(x_n + k_1)$ la quale è stimata dalla derivata $f(x_{n+1})$ calcolata a fine intervallo di tempo.

Come nel precedente esempio, ho utilizzato questo metodo di integrazione per sviluppare l'attrattore di Lorenz 1963.

Il programma che ho scritto è rappresentato dal seguente codice:

```
#include <stdio.h>
main() {
float x,y,z,x0=1.,y0=1.,z0=1.,k1x, k2x,k1y, k2y,k1z, k2z, s=10.,
      r=28.,b=8./3.,dt=0.001,t=0.;
int i=0, itrans=1000;
for (i=0;i<100000;i++) {
    k1x=s*(y0-x0)*dt;
    k1y=(x0*(r-z0)-y0)*dt;
    k1z=(x0*y0-b*z0)*dt;
    k2x=s*(y0+k1y-x0-k1x)*dt;
```

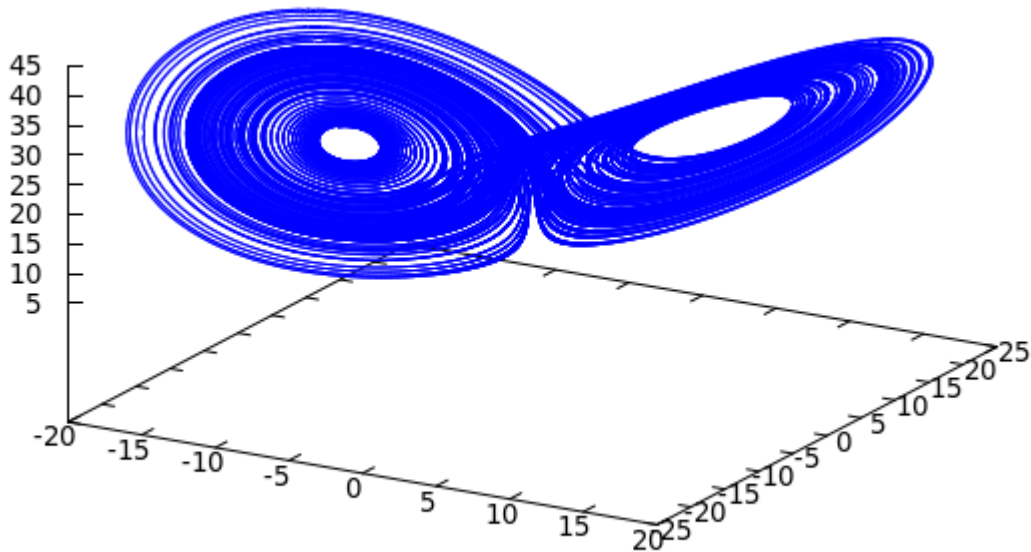
```

k2y=((x0+k1x)*(r-z0-k1z)-y0-k1y)*dt;
k2z=((x0+k1x)*(y0+k1y)-b*(z0+k1z))*dt;
x=x0+0.5*(k1x+k2x);
y=y0+0.5*(k1y+k2y);
z=z0+0.5*(k1z+k2z);
x0=x;
y0=y;
z0=z;
t=t+dt;
if (i>itrans)
printf("%f %f %f %f\n", x,y,z,t);
}
}

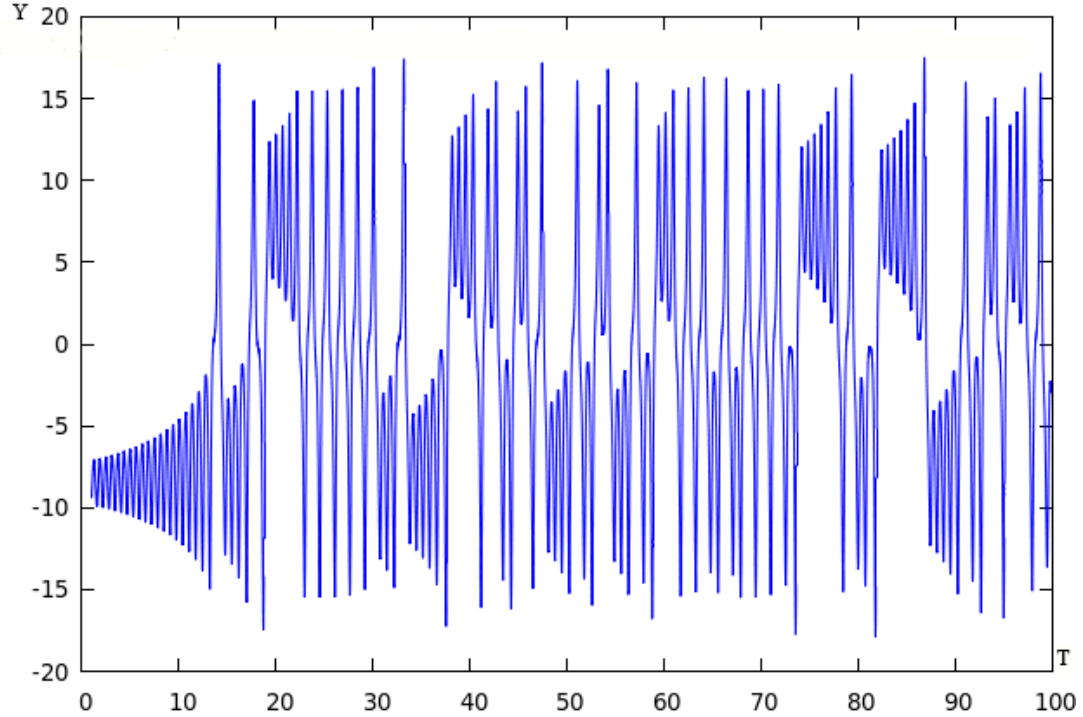
```

Essendo una funzione vettoriale, come per il metodo di Eulero, devo suddividere il calcolo dei parametri in 3 variabili differenti, le quali si basano sulle formule che descrivono l'attrattore di Lorenz 1963 citato precedentemente.

Il grafico risultante è il seguente:



La differenza fra i due grafici è notevole e permette di capire, già ad occhio nudo, come il metodo di Eulero sia differente dal metodo RK2 poichè i due attrattori presentano traiettorie differenti. Il grafico nel dominio dei tempi invece è il seguente:



3.2.2 Runge-Kutta al 4° ordine

Come si è appena visto il metodo RK2 fornisce una buona approssimazione, ma per poter raggiungere un livello di approssimazione maggiore ed un errore ancora inferiore è molto popolare il metodo di Runge-Kutta al quarto ordine (che per comodità è abbreviato in RK4). In questo metodo l'errore è rappresentato da $E = |x(t_n + \Delta t) - x_{n+1}| \propto (\Delta t)^4$.

In questo metodo viene utilizzata una media ponderata delle derivate come soluzione numerica dell'equazione differenziale:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(\Delta t^5)$$

dove

$$k_1 = f(x_n)\Delta t$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}k_1)\Delta t$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}k_2)\Delta t$$

$$k_4 = f(x_n + k_3)\Delta t$$

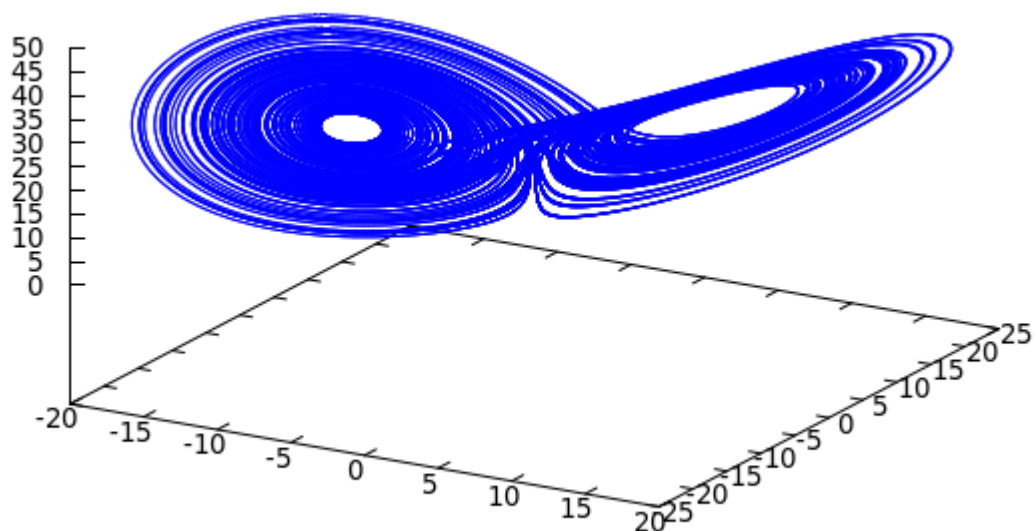
Esistono ulteriori gradi del metodo di Runge-Kutta, ma non necessariamente ciò implica che essi siano migliori. Un grado maggiore al quarto richiederebbe maggiori sforzi computazionali, per cui l'RK4 viene considerato il metodo con una migliore approssimazione rispetto agli sforzi computazionali compiuti.

Come nei precedenti casi ho creato un piccolo programma in grado di fornire i punti che permetteranno di creare il grafico dell'attrattore di Lorenz 1963. Il software da me creato è il seguente:

```
#include <stdio.h> main() {
    float x,y,z,x0=1.,y0=1.,z0=1.,k1x, k2x,k1y, k2y,k1z, k2z, s=10.,r=28.,b=8./3.,
        dt=0.001,t=0.,k3x, k4x,k3y, k4y,k3z, k4z;
    int i=0, itrans=1000;
    for (i=0;i<100000;i++) {
        k1x=s*(y0-x0)*dt;
        k1y=(x0*(r-z0)-y0)*dt;
        k1z=(x0*y0-b*z0)*dt;
        k2x=s*(y0+(0.5*k1y)-x0-(0.5*k1x))*dt;
        k2y=((x0+(0.5*k1x))*(r-z0-(0.5*k1z))-y0-(0.5*k1y))*dt;
        k2z=((x0+(0.5*k1x))*(y0+(0.5*k1y))-b*(z0+(0.5*k1z)))*dt;
        k3x=s*(y0+(0.5*k2y)-x0-(0.5*k2x))*dt;
        k3y=((x0+(0.5*k2x))*(r-z0-(0.5*k2z))-y0-(0.5*k2y))*dt;
        k3z=((x0+(0.5*k2x))*(y0+(0.5*k2y))-b*(z0+(0.5*k2z)))*dt;
        k4x=s*(y0+(k3y)-x0-(k3x))*dt;
        k4y=((x0+(k3x))*(r-z0-(k3z))-y0-(k3y))*dt;
        k4z=((x0+(k3x))*(y0+(k3y))-b*(z0+(k3z)))*dt;
        x=x0+0.16666667*(k1x+2*k2x+2*k3x+k4x);
        y=y0+0.16666667*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y);
        z=z0+0.16666667*(k1z+2*k2z+2*k3z+k4z);
        x0=x;
        y0=y;
        z0=z;
        t=t+dt;
        if (i>itrans)
            printf("%f %f %f %f\n", x,y,z,t);
    }
}
```

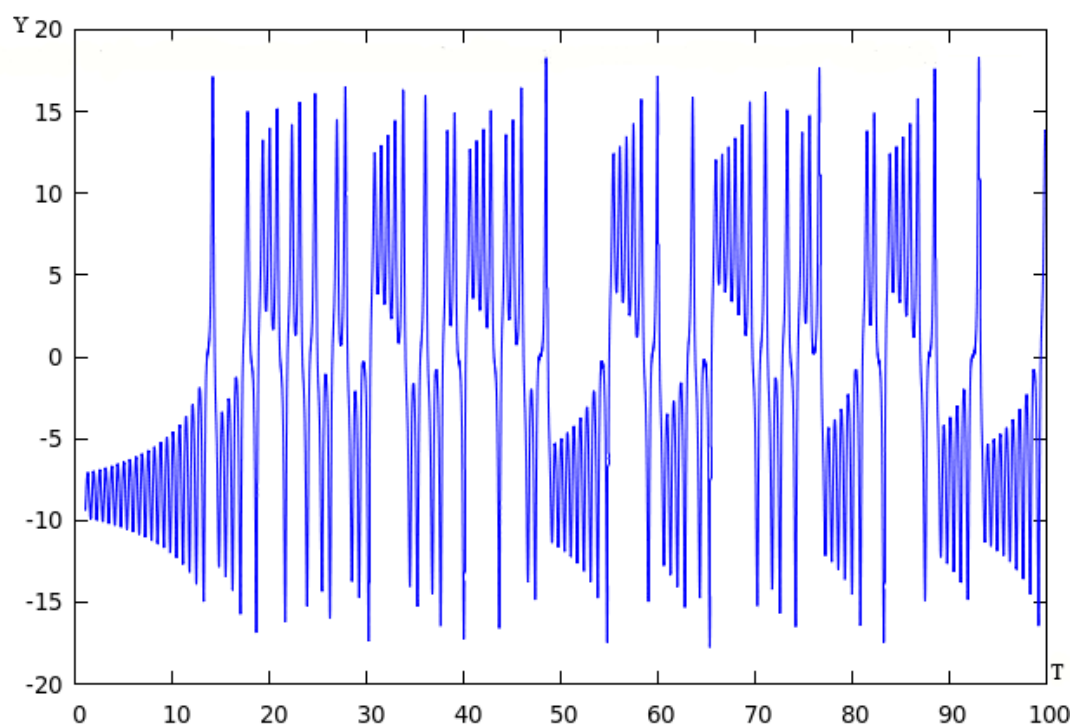
Come nei precedenti casi questo programma si basa sulle equazioni differenziali dell'attrattore di Lorenz 1963 e permette di descriverne il funzionamento. Le variabili x_0, y_0, z_0 rappresentano le rispettive variabili allo step x_{n-1} .

Il grafico risultante da questo programma è il seguente:



Anche in questo si riesce a notare come variano le traiettorie del grafico il quale descrive l'attrattore. Ciò significa che anche il metodo RK4 differisce dai precedenti.

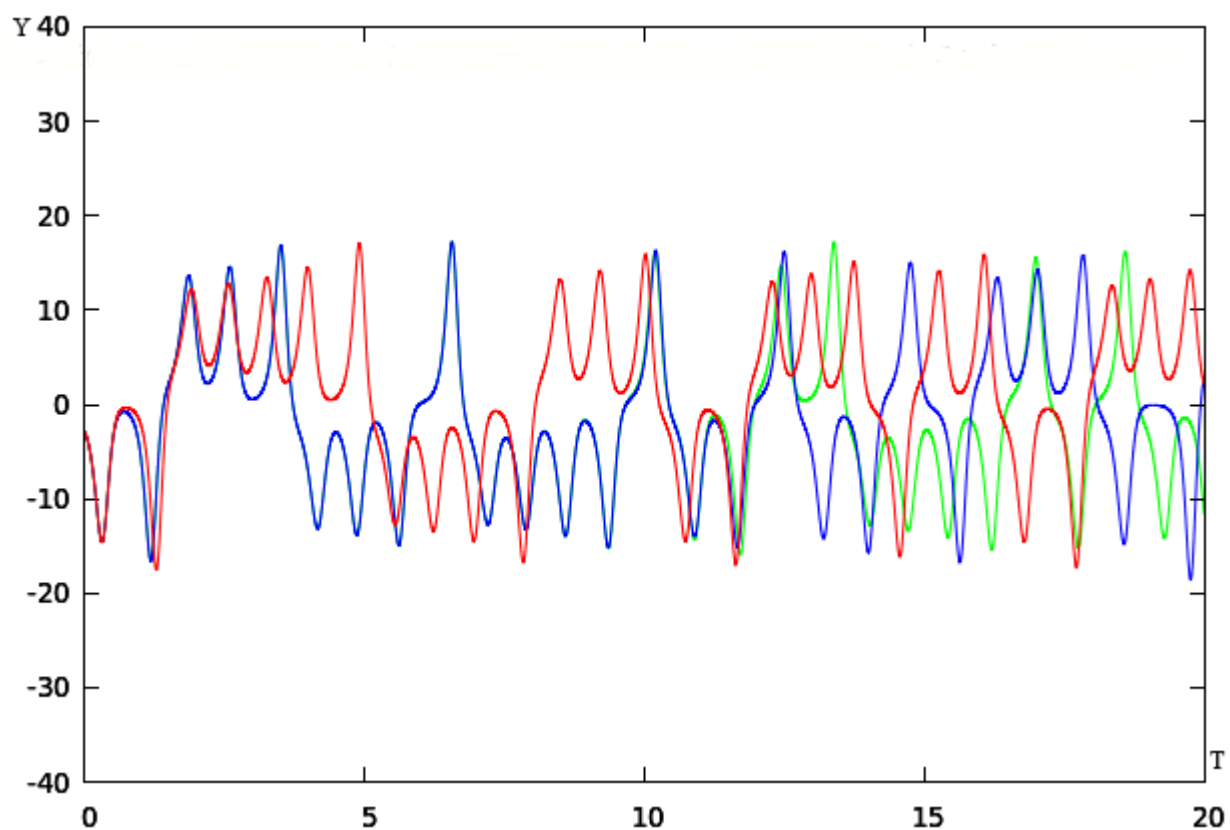
Il grafico nel dominio dei tempi, il quale ci permette di comprenderne l'andamento nel tempo è il seguente:



Capitolo 4

Conclusione

In conclusione ho riportato, utilizzando la funzione multiplot di gnuplot, l'andamento del dominio dei tempi dei tre metodi di integrazione che sono stati applicati per poter realizzare l'attrattore di Lorenz. Il grafico risultante è il seguente:



dove la linea rossa rappresenta l'andamento di Eulero, la blu quello di Runge-Kutta al 2° ordine e la verde quello di Runge-Kutta al 4° ordine.

Come si può notare già dalle prime fasi iniziali, il metodo di Eulero tende ad una traiettoria differente da quella di RK2, e anche di RK4 poichè nelle fasi iniziali si equivalgono. Questo è sinonimo di una minor precisione da parte del metodo di integrazione di Eulero rispetto ai due ordini di Runge-Kutta.

La seconda differenza è possibile notarla invece tra i metodi RK2 e RK4. All'aumentare del tempo si nota come, dopo circa la dodicesima unità, RK2 inizia ad assumere una traiettoria differente rispetto a RK4. Questo ci permette di notare come all'aumentare consistente del tempo la precisione di RK4 sia maggiore rispetto a quella di RK2, il quale comunque mantiene una notevole precisione a costi computazionali minori.