Riassunto limiti

1 Funzioni elementari

Razionali Per $a > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} ax = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} ax = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} ax^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} ax^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} ax^3 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} ax^3 = -\infty$$

Per $a < 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} ax = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} ax = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} ax^2 = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} ax^2 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} ax^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} ax^3 = +\infty$$

Fratte Il comportamento delle funzioni fratte $\frac{N(x)}{D(x)}$ dipende dal grado massimo del numeratore $N(x)$ rispetto al grado massimo del denominatore $D(x)$, si distinguono tre casi:

1. Se il grado del numeratore è maggiore di quello denominatore $G(N(x)) > G(D(x))$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{N(x)}{D(x)} = \pm\infty$$

   (Il segno dipende dal segno di $D(x)$ e $N(x)$)

2. Se il grado del numeratore è minore di quello denominatore $G(N(x)) < G(D(x))$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{N(x)}{D(x)} = 0$$

3. Se il grado è lo stesso $G(N(x)) = G(D(x))$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{N(x)}{D(x)} = c$$

   Dove c è il rapporto dei coefficienti davanti alle x di grado più alto. Es:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+1}{3x^3+x+2} = \frac{2}{3}$$

Bisogna inoltre il C.E. per $D(x) \neq 0$ i limiti intorno a questi "buchi" nel dominio naturale sono:

$$\lim_{x\to a^\pm} \frac{N(x)}{D(x)} = \pm\infty$$

Il segno è determinato dal segno della funzione nell'intorno studiato.

Logaritmi

$$\lim_{x\to\infty} \log(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$$

Esponenziale Per $a > 1$:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^{-x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = 0$$

Per $0 < a < 1$:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^{-x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = +\infty$$

Funzioni trigonometriche

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin(x) = \text{N.D.} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \cos(x) = \text{N.D.}$$

I valore della funzione oscillano tra $[-1;1]$ non è possibile determinare un limite.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tan(x) = \text{N.D.}$$

In maniera analoga la funzione oscilla tra $]-\infty;\infty[$. Ci sono altre 2 limiti interessanti:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = -\infty$$

Data la natura periodica della funzione questi limiti sono validi ogni $k\pi$

2 Algebra dei limiti

Insieme di regole che permettono di dividere limiti di funzioni più complesse in limiti di funzioni elementari.
Queste regole valgono per tutti i tipi di limiti il valore a a cui tende la x può rappresentare un qualsiasi valore finito o infinito.

Somma di limiti

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Prodotto di limiti

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Quoziente tra limiti

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

3 Forme indeterminate

Le **forme indeterminate** sono tutte le situazioni in cui il risultato del limite non può essere determinato in maniera univoca, per esempio quando il risultato del nostro limite è espresso così:

$$(1) \quad +\infty - \infty \qquad (2) \quad 0\cdot\infty$$

$$(3) \quad \frac{\infty}{\infty} \qquad (4) \quad \frac{0}{0}$$

Queste forme possono essere risolte utilizzando alcuni trucchetti algebrici che sono spiegati nel dettaglio nell'esercitazione 4.

4 Limiti notevoli

I **Limiti notevoli** rappresentano valori tabulati di limiti particolari che richiedono dimostrazioni più articolate per essere calcolati.
Vengono usati nella risoluzione di alcuni limiti apparentemente irrisolvibili.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

L'idea alla base del loro utilizzo consiste in 2 passaggi principali: (1) **Identificare** il limite notevole a cui ci vogliamo ricondurre, (2) usare **manipolazioni algebriche** per ottenerlo. Le tecniche usate per il secondo passaggio sono spiegate nel dettaglio nell'esercitazione 5.

5 Continuità e discontinuità

A livello intuitivo una funzione **continua** è una funzione che possiamo disegnare senza mai staccare la matita dal foglio. La definizione formale di continuità è:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Esistono 3 tipi di discontinuità: (1) **Rimovibile** (limite destro e sinistro esistono sono coerenti ma il punto non c'è o non coincide coi limiti), (2) **Di Salto** (limite sinistro e destro in un punto non coincidono ma sono finiti), **Infinita** (almeno uno dei due limiti tende a $\pm\infty$). Esempi grafici sono presenti nell'esercitazione 5.

That's all folks!