Appunti Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Domande e Risposte

Capitolo 1 – Modelli nella Ricerca Operativa

1) Definire problema di ottimizzazione, minimizzazione e massimizzazione

Data la funzione f: $R^n \rightarrow R$ (chiamata funzione obiettivo) un problema di ottimizzazione è formulabile come segue:

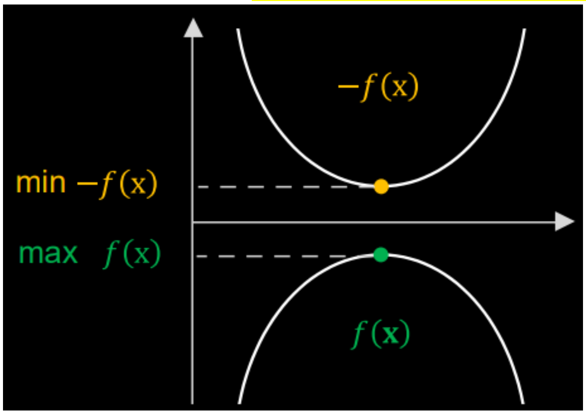
$\text{opt } f(\mathbf{x})$ s.a. $\mathbf{x} \in X$

X è detta regione ammissibile e contiene l'insieme delle soluzioni x ammissibili.
Il vettore x, detto vettore decisionale, contiene i valori che identificano una soluzione del problema.
Inoltre vale che:

$\text{opt} \in \{\min, \max\}$ (problema di minimizzazione o di massimizzazione)
$\min f(\mathbf{x})$ s.a. $\mathbf{x} \in X$ (problema di minimizzazione)
$\max f(\mathbf{x})$ s.a. $\mathbf{x} \in X$ (problema di massimizzazione)

2) Qual è l'obiettivo del problema di ottimizzazione?

Il problema di ottimizzazione consiste nel determinare, se esistono, uno o più punti di minimo/massimo x, assegnazione di valori alle variabili decisionali, della funzione obiettivo f tra i punti che appartengono alla regione ammissibile X.
Si ricorda che: $\max f(\mathbf{x}) = -\min - f(\mathbf{x})$



3) Quali sono i tipi di ottimizzazione?

I tipi di ottimizzazione sono:
→ Ottimizzazione non vincolata ($X = \mathbb{R}^n$): la ricerca del/i punto/i di ottimo della funzione obiettivo viene condotta su tutto lo spazio di definizione della/e variabile/i di decisione.
→ Ottimizzazione vincolata ($X \subset \mathbb{R}^n$): la ricerca del/i punto/i di ottimo della funzione obiettivo viene condotta su un sottoinsieme proprio dello spazio di definizione della/e variabile/i di decisione.

→ Ottimizzazione intera ($X \in \mathbb{Z}^n$): le variabili assumono solo valori interi.

→ Ottimizzazione binaria ($X \in \{0,1\}^n$): Le variabili assumono solo valore 0 e 1.

→ Ottimizzazione mista: alcune variabili assumono valori interi mentre altre variabili assumono solo valori binari.

4) Cosa si intende per programmazione matematica?

Si definisce problema di programmazione matematica, se l'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazioni e disequazioni. La regione ammissibile è definita dall'insieme dei vincoli del problema:

$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ con } gi\,(\mathbf{x})\ \{\geq = \leq\}\ 0, i = 1, \ldots, m\}$

Si hanno due possibilità:

→ se $x \in X$: $\mathbf{x}$ è soluzione ammissibile

→ se $x \notin X$: $\mathbf{x}$ è soluzione inammissibile

5) Quali sono le casistiche sul tipo di problema?

Le possibilità sono:

→ Problema non ammissibile: $X = \emptyset$ (regione ammissibile vuota, nessuna soluzione ammissibile, problema mal posto)

→ Problema illimitato:

$\forall c \in \mathbb{R}, \exists \mathbf{x}_c \in X$: $f(\mathbf{x}_c) \leq c$ se $\text{opt} = \min$ illimitato inferiormente

$\forall c \in \mathbb{R}, \exists \mathbf{x}_c \in X$: $f(\mathbf{x}_c) \geq c$ se $\text{opt} = \max$ illimitato superiormente

→ Problema con soluzione ottima unica: unica soluzione con valore massimo/minimo della funzione obiettivo.

→ Problema con più di una soluzione ottima: (anche infinite) tutte le soluzioni ottime hanno egual valore della funzione obiettivo.

6) Ottimi globali e ottimi locali

Dato il problema $\text{opt}\ f(\mathbf{x})$ s.a. $\mathbf{x} \in X, X \subseteq \mathbb{R}^n$

La risoluzione di un problema di Programmazione Matematica consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia un ottimo globale, vale a dire un vettore $\mathbf{x}* \in X$ tale che:

$f(\mathbf{x}*) \leq f(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in X$ se $\text{opt} = \min$

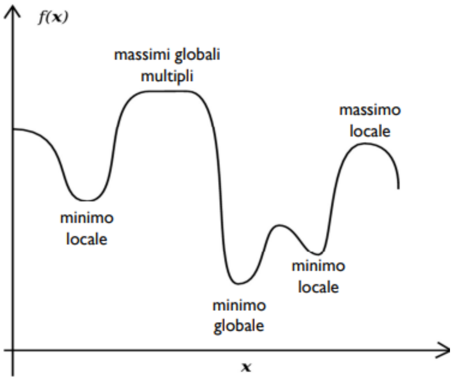
$f(\mathbf{x}*) \geq f(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in X$ se $\text{opt} = \max$

Un problema di ottimizzazione può avere:

→ più di un ottimo locale;

→ più di un ottimo globale (soluzioni multiple).

Osservazione: un punto di ottimo globale è anche di ottimo locale.



7) Tipi di Programmazione Matematica

Si hanno le seguenti tipologie di Programmazione Matematica

Nome	Funzione Obiettivo	Regione Ammissibile	Vincoli
Programmazione Lineare	$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ (lineare)	$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ con } g_i(\mathbf{x}) \{\geq = \leq\}\ 0, i = 1, \ldots, m\}$	$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i$ (vincoli lineari)
Programmazione Lineare Intera	$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ (lineare)	$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \text{ con } g_i(\mathbf{x}) \{\geq = \leq\}\ 0, i = 1, \ldots, m\}$	$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i$ (vincoli lineari)
Programmazione Non Lineare	$f(\mathbf{x})$ (lineare o non lineare)	$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ con } g_i(\mathbf{x}) \{\geq = \leq\}\ 0, i = 1, \ldots, m\}$	$g_i(\mathbf{x})$ (vincoli lineari o non lineari e almeno un vincolo o la funzione obiettivo sono non lineari)

Capitolo 2 – Introduzione alla Programmazione Lineare

8) Descrivere la procedura grafica generale

Una delle possibili modalità di risoluzione di un problema di programmazione lineare è quello di adottare una procedura grafica, ossia determinare i valori delle variabili decisionali che rispettano i vincoli, ed al tempo stesso rendere massimo il valore Z della funzione obiettivo.

Nel caso di due variabili decisionali i vincoli $g_i(\mathbf{x})$ lineari possono essere:

→ Rette: $g_i(\mathbf{x}) = 0$

→ Semipiani: $g_i(\mathbf{x}) \geq 0$ o $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$

$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$ è una retta nel piano. L'inclinazione della retta è perpendicolare al vettore $v = (a_1, a_2)$.

$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \leq b$ è un semipiano.

9) Definire il concetto di programmazione lineare

Date n variabili decisionali e dati m vincoli, il problema di programmazione lineare viene definito nel seguente modo:

$\max Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n$ → Funzione obiettivo
$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1$
$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2$ → Vincoli
$\cdots\cdots\cdots + \cdots\cdots\cdots + \cdots + \cdots\cdots\cdots \leq \cdots$
$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_n$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ → Vincoli di non negatività

Simboli	Significato
Z	valore della misura di prestazione
x_j	livello dell'attività j
a_{ij}	quantità di risorsa "i" consumata da ogni unità di attività x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$
b_i	quantità di risorsa i allocabile alle attività x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$
c_j	incremento del valore della misura di prestazione Z corrispondente all'incremento di un'unità del valore dell'attività x_j.

Risulta possibile anche affermare:

$$\mathrm{opt}_{\mathbf{x} \in X} Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m$$

10) Cosa si intende per regione ammissibile di un problema di PL?

Si definisce regione ammissibile di un problema di PL il seguente insieme:

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} 0, i = 1, \ldots, m \right\}, \text{con } g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i, \text{ dove } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

Dal punto di vista geometrico la regione ammissibile corrisponde ad un poliedro convesso in $\mathbb{R}^n$ e può essere limitata (politopo) o illimitata.

11) Quali sono le possibili quattro soluzioni del problema di PL?

Si possono verificare quattro situazioni:
→ il problema PL ammette un'unica soluzione ottima in un vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile;
→ il problema PL ammette infinite soluzioni ottime in un lato del poligono convesso che delimita la regione ammissibile se la direzione di decrescita è perpendicolare ad un lato del poligono;
→ il problema PL non ammette soluzione perché la regione ammissibile è illimitata e la funzione obiettivo è illimitata superiormente (se è di max) o illimitata inferiormente (se è di min);
→ il problema PL non ammette soluzione perché la regione ammissibile è vuota.

12) Programmazione lineare: quali sono le possibili assunzioni?

Un problema di programmazione lineare (PL) si basa sulle seguenti assunzioni implicite:

→ Additività: ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili decisionali.

→ Continuità: qualunque valore delle variabili decisionali in $\mathbb{R}^n$ è accettabile.

→ Certezza: il valore assegnato ad ogni parametro è assunto essere noto e costante.

→ Proporzionalità: il contributo di ogni variabile decisionale, al valore della funzione obiettivo, è proporzionale rispetto al valore assunto dalla variabile stessa.

13) Descrivere l'assunzione implicita di additività

Nell'assunzione implicita di additività in un problema di Programmazione Lineare, il valore assunto da ogni funzione, sia essa funzione obiettivo o vincolo, è dato dalla somma dei contributi individuali delle rispettive attività.

14) Descrivere l'assunzione implicita di proporzionalità

Nell'assunzione implicita di proporzionalità in un problema di Programmazione Lineare, il contributo di ogni attività al valore della funzione obiettivo Z è proporzionale al livello dell'attività x_j secondo $Z = \sum_{j=1}^{n}(cj \times xj)$; analogamente, il contributo di ogni attività al vincolo «i» è proporzionale al livello dell'attività xj secondo $\sum_{j=1}^{n}(aij \times xj) \leq bi$

15) Descrivere il criterio di divisibilità nel problema di PL

Nell'assunzione implicita di divisibilità in un problema di Programmazione Lineare, le variabili decisionali sono libere di assumere qualsiasi valore, inclusi valori non interi che soddisfino i vincoli funzionali ed i vincoli di non negatività (le variabili decisionali sono variabili continue). Nel caso si abbia un problema che richiede soluzione intera:

→ se la soluzione ottimale del problema di PL è intera, allora è anche ottimale per il problema considerato;

→ se la soluzione ottimale del problema di PL non è intera, si può procedere come segue:

a – aggiungendo vincoli che garantiscano che le variabili di decisione assumano valore intero, ottenendo un modello di programmazione intera;

b – arrotondamento della soluzione (non garantisce ottimalità).

16) Descrivere l'assunzione implicita di certezza

Il valore assegnato ad ogni parametro di un problema di Programmazione Lineare è assunto essere noto con certezza e costante.

Capitolo 3 – Metodo del simplesso

17) Definizione di metodo del simplesso

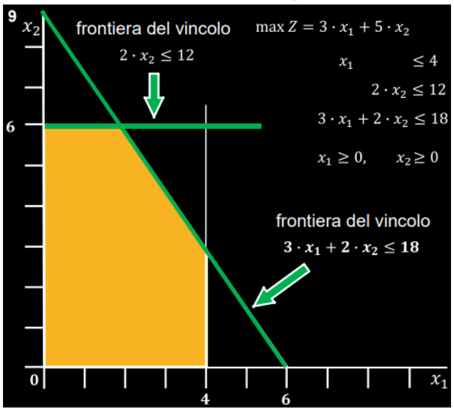
Si definisce metodo del simplesso una procedura generale per la risoluzione di problemi di programmazione lineare.

18) Efficienza del metodo del simplesso

Nel caso medio il tempo computazionale è lineare rispetto al numero delle variabili, mentre nel caso peggiore può risultare esponenziale. Ancora oggi rappresenta uno degli algoritmi più efficienti per risolvere un problema di programmazione lineare.

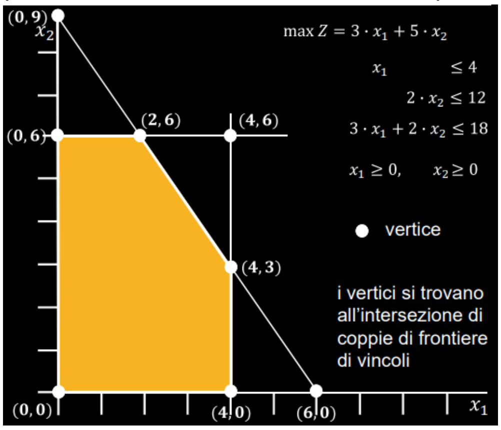
19) Metodo del simplesso: frontiera del vincolo

Si definisce frontiera del vincolo la/e retta/e che delimita/no il poligono convesso in $\mathbb{R}^n$ (regione ammissibile).



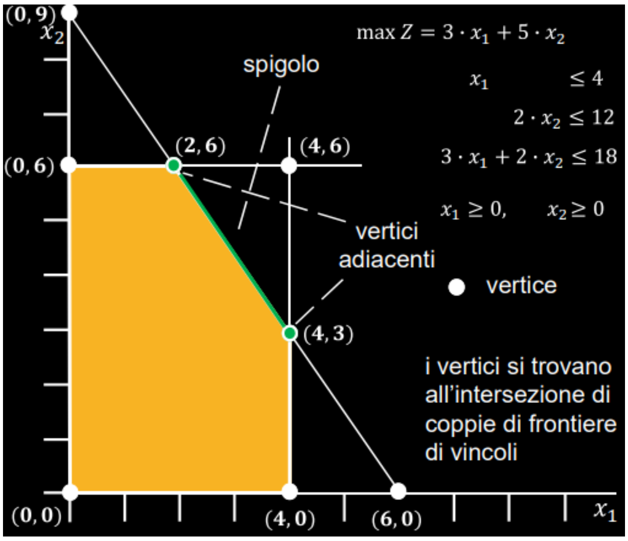
20) Metodo del simplesso: vertice

Si definisce vertice un punto della regione ammissibile che rappresenta una possibile soluzione e corrisponde all'intersezione di più vincoli lineari.



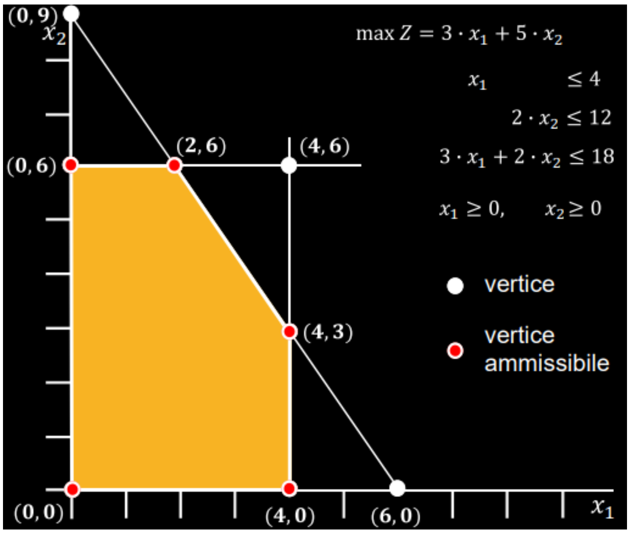
21) Metodo del simplesso: vertici adiacenti e spigolo

Per ogni problema di PL con n variabili decisionali, due vertici (soluzioni vertice) sono detti adiacenti se condividono $n - 1$ frontiere di vincoli. Si definisce spigolo della regione ammissibile un segmento che giace sull'intersezione delle frontiere dei vincoli condivisi.



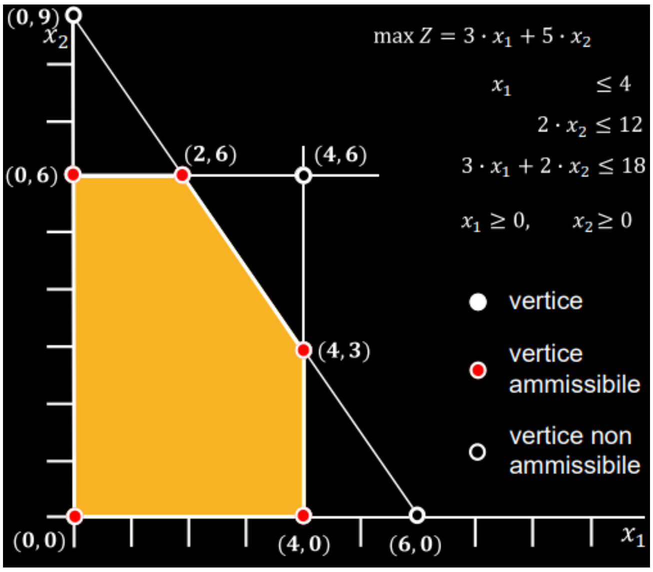
22) Metodo del simplesso: vertice ammissibile

Si definisce vertice ammissibile un punto della regione ammissibile che rappresenta una soluzione al problema di ottimizzazione lineare, in cui si intersecano un certo numero di vincoli.



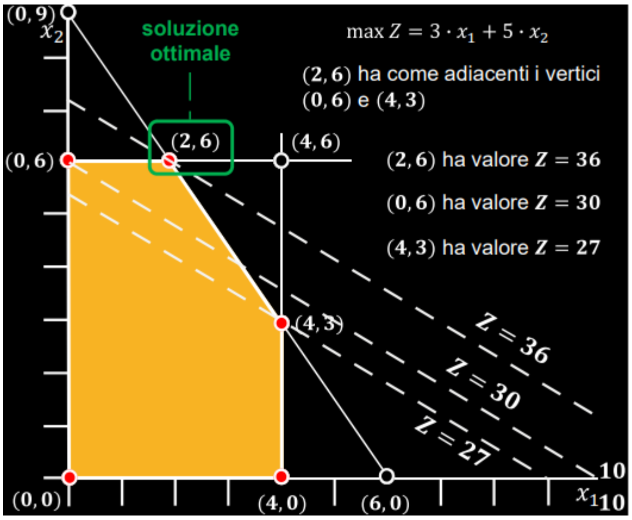
23) Metodo del simplesso: vertice non ammissibile

Si definisce vertice non ammissibile un punto in cui le equazioni lineari (vincoli) si intersecano, ma che non soddisfa una o più delle condizioni di ammissibilità (per esempio, può avere una o più variabili negative o non rispettare alcune disuguaglianze dei vincoli).



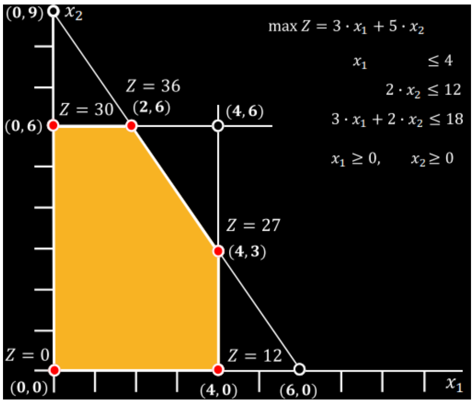
24) Metodo del simplesso: test di ottimalità

Considerando ogni problema di PL tale da ammettere almeno una soluzione ottimale se una soluzione vertice non ammette soluzioni vertice a lei adiacenti con valore della funzione obiettivo Z migliore, allora la soluzione in questione è ottimale.



25) Metodo del simplesso: sei punti chiave

Punto 1: Il metodo del simplesso ispeziona solo soluzioni ammissibili corrispondenti a vertici. Per ogni problema di PL che ammetta almeno una soluzione ottimale, trovarne una, richiede di trovare solamente il vertice ammissibile cui compete il miglior valore della funzione obiettivo. Dato che il numero di soluzioni ammissibili è generalmente infinito, ridurre il numero di soluzioni da ispezionare ad un numero finito e piccolo è una semplificazione notevole.



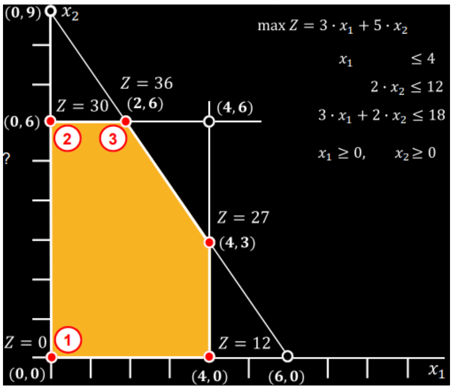
Punto 2: Il metodo del simplesso è un algoritmo iterativo con la seguente struttura:

→ inizializzazione: scelta di una soluzione

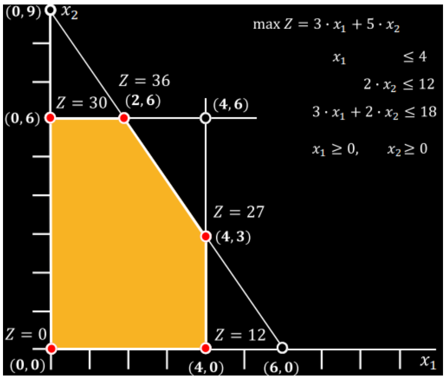
→ test di ottimalità: la soluzione è ottimale?

a) no: torna all'inizializzazione per trovare una soluzione migliore di quella corrente.

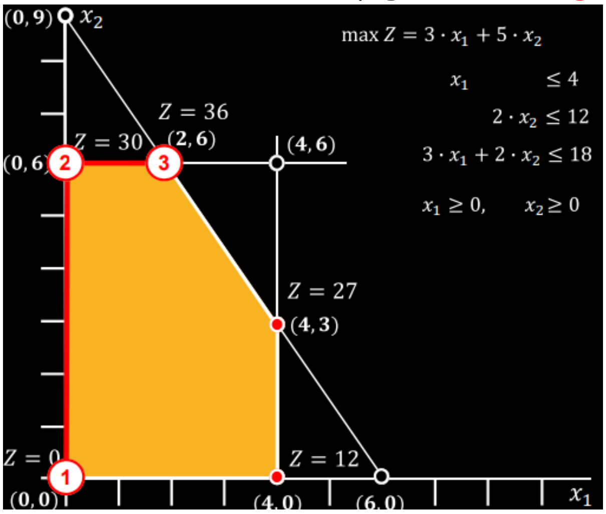
b) si: termina l'algoritmo.



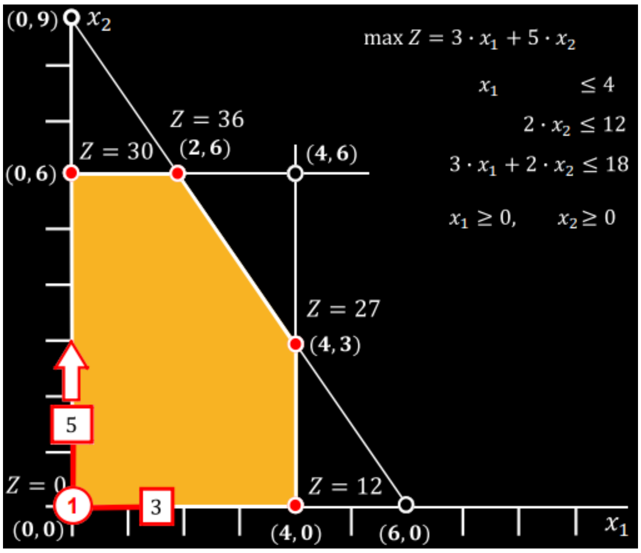
Punto 3: Quando sia possibile, l'inizializzazione del metodo del simplesso seleziona l'origine (i valori di tutte le variabili di decisione vengono posti uguali a 0) come soluzione iniziale. Se vi sono molte variabili decisionali, tali da rendere difficile usare il metodo grafico per scegliere la soluzione iniziale, scegliere l'origine evita di ricorrere a procedure algebriche per determinare la soluzione iniziale del metodo del simplesso.



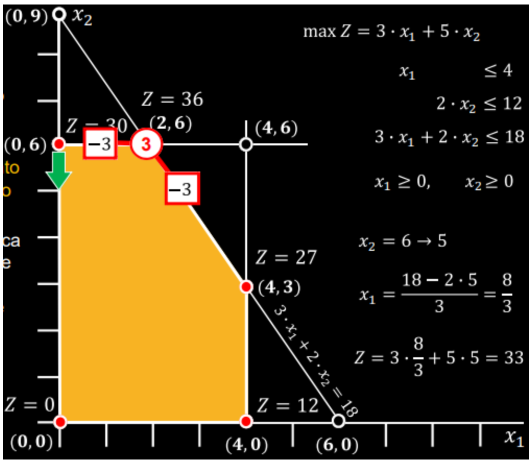
Punto 4: Dato un vertice, è più vantaggioso, in termini computazionali, acquisire informazioni sui vertici a lui adiacenti di quanto non sia per i vertici a lui non adiacenti. Ad ogni iterazione, se l'algoritmo si sposta dal vertice corrente, verso un vertice con valore migliore della funzione obiettivo, lo fa per muoversi in un vertice a lui adiacente. Nessuna altra soluzione viene considerata. Pertanto, l'intero cammino, che partendo dalla soluzione iniziale raggiunge quella ottimale, attraversa spigoli della regione ammissibile.

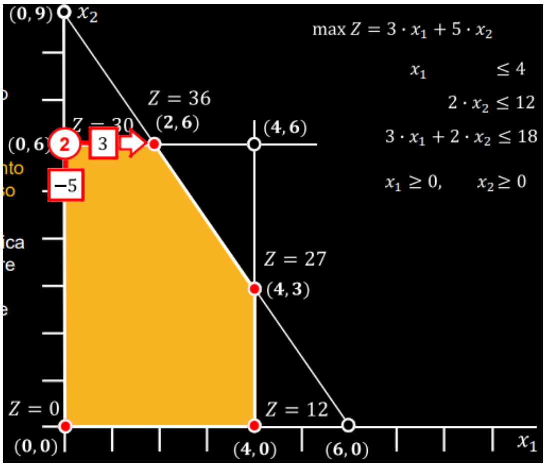


Punto 5: A partire dal vertice corrente, il metodo del simplesso valuta i vertici ad esso adiacenti, ma non lo fa calcolando il valore della funzione obiettivo per ognuno di essi. Il metodo del simplesso valuta e compara i tassi di miglioramento della funzione obiettivo lungo la direzione degli spigoli che conducono dal vertice corrente ai vertici adiacenti. Tra i vertici adiacenti con un tasso di miglioramento positivo per la funzione obiettivo, il metodo del simplesso sceglie di muoversi lungo lo spigolo cui compete il massimo valore di incremento. Il vertice selezionato diviene il nuovo vertice corrente.



Punto 6: L'ispezione di uno spigolo consente di identificare rapidamente il tasso di miglioramento che si otterrebbe muovendosi lungo di esso verso la soluzione adiacente all'altro estremo. Un tasso di miglioramento positivo significa che il vertice adiacente è una soluzione migliore della soluzione corrente. Un tasso negativo implica che il vertice adiacente è una soluzione peggiore della soluzione corrente.





26) Metodo del simplesso: procedura algebrica

La procedura algebrica del metodo del simplesso ha le seguenti caratteristiche:

→ la procedura algebrica si basa sulla risoluzione di un sistema di equazioni lineari;

→ i vincoli di non negatività vengono mantenuti invariati in quanto la loro trattazione viene effettuata in maniera separata;

→ il primo passo da compiere per tradurre la procedura geometrica in procedura algebrica richiede di tradurre i vincoli funzionali di diseguaglianza in vincoli funzionali di eguaglianza.

27) Metodo del simplesso: concetto di variabile slack

Si definisce variabile slack, la variabile utilizzata per "colmare" la differenza che al membro sinistro mancherebbe per verificare la disuguaglianza come uguaglianza.

Esempio

$$\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$
$$x_1 \leq 4$$
$$2 \cdot x_2 \leq 12$$
$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

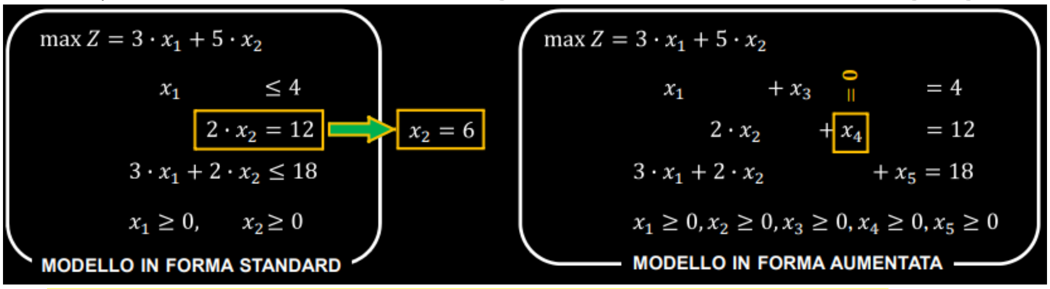
Variabile slack

$$x_1 \leq 4 \qquad x_3 = 4 - x_1 \qquad x_1 + x_3 = 4$$

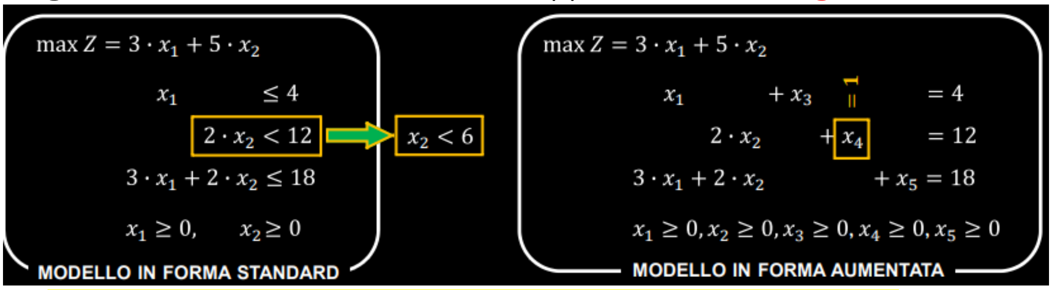
28) Quali sono le proprietà delle variabili slack?

Le proprietà delle variabili slack sono:

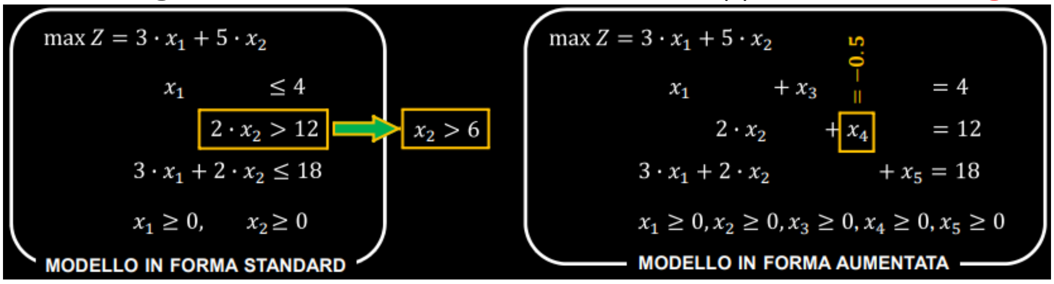
→ la variabile slack di un vincolo assume valore zero: la soluzione corrispondente giace sulla frontiera del vincolo della forma originale (il vincolo corrispondente della forma originale è verificato come uguaglianza);



→ la variabile slack di un vincolo assume valore positivo: la soluzione corrispondente giace sul lato ammissibile della frontiera del vincolo della forma originale, vale a dire la soluzione appartiene alla regione ammissibile;



→ la variabile slack di un vincolo assume valore negativo: la soluzione corrispondente giace sul lato non ammissibile della frontiera del vincolo della forma originale, vale a dire la soluzione non appartiene alla regione ammissibile.



29) Metodo del simplesso: soluzione aumentata

Si definisce soluzione aumentata una soluzione del modello in forma originale (valori delle variabili di decisione) che viene aumentata (estesa) tramite i corrispondenti valori delle variabili slack.

30) Metodo del simplesso: soluzione di base

Si definisce soluzione di base un vertice del modello in forma aumentata. Una soluzione di base può essere ammissibile o non ammissibile. È possibile ottenerla come soluzione del sistema lineare delle variabili di base.

31) Metodo del simplesso: soluzione di base ammissibile

Si definisce soluzione di base ammissibile una soluzione associata a un vertice ammissibile, che viene aumentata.

32) Metodo del simplesso: variabili non di base

Si definiscono variabili non di base variabili poste a 0 in una soluzione di base.

33) Metodo del simplesso: variabili di base

Si definiscono variabili di base le variabili che non sono variabili non di base in una soluzione di base.

34) Metodo del simplesso: variabile degenere

Si definisce variabile degenere una variabile di base che assume valore nullo.

35) Metodo del simplesso: soluzioni di base ammissibili adiacenti

Due soluzioni di base ammissibili sono adiacenti se sono caratterizzate dal condividere le stesse variabili non di base eccetto una. Questo implica che tutte le loro variabili di base sono uguali eccetto una, anche se esse possono assumere valori differenti.

36) Metodo del simplesso: quali sono le proprietà di una soluzione di base?

Una soluzione di base gode delle seguenti proprietà:
→ una variabile può essere o una variabile di base o una variabile non di base;
→ il numero delle variabili di base eguaglia il numero dei vincoli funzionali (equazioni);
→ le variabili non di base vengono poste a zero;
→ i valori delle variabili di base sono ottenuti come risoluzione simultanea del sistema di equazioni lineari (vincoli funzionali in forma aumentata);
→ se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, la soluzione di base è una soluzione ammissibile di base.

37) Metodo del simplesso: descrivere l'algoritmo del simplesso algebrico e test di ottimalità

Il test di ottimalità consiste nel verificare se esiste uno spigolo con tasso positivo di miglioramento. Se tale condizione non è soddisfatta allora la soluzione corrente è ottimale.
L'algoritmo del simplesso ha il seguente funzionamento:
→ determinazione della direzione di spostamento: aumentare il valore di una variabile non di base a partire da zero (modificando i valori delle variabili di base correnti per soddisfare le equazioni) equivale a spostarsi lungo uno degli

spigoli che emanano dal corrente vertice ammissibile e l'incremento del valore di questa variabile non di base, la fa divenire una variabile di base nella nuova soluzione di base;

→ determinazione dell'incremento: determina di quanto aumentare il valore della variabile entrante in base, in modo da avere il massimo incremento senza abbandonare la regione ammissibile e questo significa che, dato che una variabile non di base (posta a 0) viene aumentata, una variabile di base deve essere azzerata, in modo da mantenere inalterato il numero di variabili di base;

→ determinazione della nuova soluzione di base: consiste nel convertire il sistema lineare in una forma maggiormente vantaggiosa (forma adatta all'applicazione dell'eliminazione Gaussiana), al fine di applicare il test di ottimalità e (se necessario) di ottenere una nuova soluzione di base ammissibile.

Possiamo usare due tipi di operazioni algebriche:

→ moltiplicare (dividere) un'equazione per una costante non nulla;

→ sommare (sottrarre) un multiplo di un'equazione per ottenere un'altra equazione. La procedura utilizzata è nota con il nome di eliminazione di Gauss-Jordan, ogni variabile di base viene eliminata da tutte le equazioni tranne una dove ha coefficiente 1.

38) Metodo del simplesso: algoritmo del simplesso tabellare

La forma tabellare permette di effettuare in modo più semplice le computazioni presentate precedentemente memorizzando solamente:

→ coefficienti delle variabili;

→ termini noti delle equazioni;

→ variabili di base per ogni equazione.

39) Metodo del simplesso: descrivere i passaggi dell'algoritmo del simplesso tabellare

FORMA ALGEBRICA	FORMA TABELLARE								
	VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE						TERMINE NOTO
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(0) $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
(1) $x_1 + x_3 = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + x_4 = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$

$(0, 0, 4, 12, 18)$

Inizializzazione: assumendo che il problema sia in forma standard, si procede come segue:

→ aggiungere le variabili slack;
→ selezionare le variabili di decisione da porre a 0 (non di base);
→ selezionare le variabili slack come variabili di base.

Forma algebrica	Variabile di base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Termine noto
(0) $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
(1) $x_1 + x_3 = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + x_4 = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

Test di ottimalità: la soluzione di base ammissibile corrente è ottimale solo se tutti i coefficienti della riga (0) sono non negativi. Se questo è il caso ci si arresta, altrimenti si effettua un'iterazione per ottenere una nuova soluzione di base ammissibile, il che implica che una variabile non di base venga trasformata in una variabile di base (passo 1) e viceversa (passo 2), per poi ottenere una nuova soluzione (passo 3).

Forma algebrica	Variabile di base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Termine noto
(0) $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
(1) $x_1 + x_3 = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + x_4 = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

Iterazione (Passo 1): Identificare la variabile entrante (selezionandola tra quelle non di base) come quella cui corrisponde il minimo coefficiente negativo nell'equazione (0). La colonna corrispondente viene identificata tramite un rettangolo e viene denominata colonna pivot.

Forma algebrica	Variabile di base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Termine noto
(0) $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
(1) $x_1 + x_3 = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + x_4 = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

Iterazione (Passo 2): Determinare la variabile di base uscente tramite il test del rapporto minimo:

→ selezionare i coefficienti strettamente positivi della colonna pivot;

VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE						TERMINE	
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NOTO	RAPPORTO
Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0	
x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18	

→ dividere i termini noti per questi coefficienti (riga omologa);

VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE						TERMINE	
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NOTO	RAPPORTO
Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0	
x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	$12 \rightarrow \frac{12}{2}$	
x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	$18 \rightarrow \frac{18}{2}$	

→ selezionare la riga cui corrisponde il piu' piccolo rapporto calcolato al punto 2;

VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE						TERMINE	
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NOTO	RAPPORTO
Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0	
x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	$12 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \leftarrow$ minimum	
x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	$18 \rightarrow \frac{18}{2} = 9$	

→ la variabile di base di quella riga è la variabile di base uscente, rimpiazzarla con la variabile entrante.

VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE						TERMINE	
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NOTO	RAPPORTO
Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0	
x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	RIGA PIVOT	$\frac{12}{2} = 6 \leftarrow$ minimum
x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	$18 \rightarrow \frac{18}{2} = 9$	

Iterazione (Passo 3) : Determinare la nuova soluzione di base applicando operazioni che consentano l'uso dell'eliminazione Gaussiana.

ITERAZIONE	VARIABILE DI BASE	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TERMINE NOTO
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

I passaggi sono:

→ Dividere la riga pivot per il numero pivot, ottenendo un nuovo numero pivot ed una nuova riga pivot.

ITERAZIONE	VARIABILE DI BASE	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TERMINE NOTO
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1						
	x_3	(1)	0						
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0						

→ Ad ogni altra riga (inclusa la riga 0) che abbia coefficiente negativo nella colonna pivot, sommare a questa riga il prodotto del valore assoluto del coefficiente per la nuova riga pivot.

ITERAZIONE	VARIABILE DI BASE	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TERMINE NOTO
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0						
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0						

→ Ad ogni altra riga (inclusa la riga 0) che abbia coefficiente positivo nella colonna pivot, sottrarre a questa riga il prodotto del valore assoluto del coefficiente per la nuova riga pivot.

ITERAZIONE	VARIABILE DI BASE	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TERMINE NOTO
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0						
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	−1	1	6

ITERAZIONE	VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TERMINE NOTO
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6

40) Quali sono le alternative multiple per la variabile entrante in base?

Si sceglie arbitrariamente; non ci sono metodi per scegliere quella migliore. La soluzione ottimale verrà comunque ottenuta, indipendentemente dalla variable scelta come variabile entrante in base, e non sono disponibili metodi per prevedere quale scelta condurrà più rapidamente alla soluzione ottimale.

41) Quali sono le alternative multiple per la variabile uscente dalla base (degenerazione)?

Supponiamo che al passo 2 dell'algoritmo del simplesso due o più variabili di base competano per uscire di base. Fa differenza quale variabile viene scelta per uscire di base? Si, e la fa in termini molto critici in base alle seguente catena di eventi:

→ Quando il valore della variabile entrante viene aumentato, le variabili di base che sono selezionabili come variabili uscenti dalla base, raggiungono contemporaneamente il valore zero. Pertanto, le variabili non selezionate come variabili uscenti avranno comunque un valore nullo nella nuova soluzione di base.

→ Se una variabile degenere mantiene il proprio valore nullo sino ad un'iterazione successiva, dove viene selezionata come variabile uscente, la corrispondente variabile entrante in base deve rimanere nulla (dato che non può essere aumentata senza far assumere un valore negativo alla variabile uscente). Pertanto, il valore della funzione obiettivo Z resta invariato.

→ Se il valore della funzione obiettivo Z resta costante invece di aumentare ad ogni iterazione, il metodo del simplesso potrebbe entrare in loop, ripetendo la medesima sequenza di soluzioni senza raggiungere la soluzione ottimale.

42) Cosa risulta possibile procedere in caso di mancanza di una variabile uscente (funzione obiettivo illimitata)?

Il passo 2 di ogni iterazione del metodo del simplesso può portare ad un'ulteriore esito che non ancora discusso, vale a dire che nessuna variabile di base si qualifichi come variabile uscente di base (la stessa cosa non può accadere al passo 1, in quanto il test di ottimalità arresterebbe l'algoritmo).

Tale situazione si verifica se il valore della variabile entrante può essere aumentato illimitatamente senza implicare che il valore di almeno una variabile di base divenga negativo.

43) Cosa risulta possibile procedere in caso di molteplici soluzioni ottimali?

Ogni problema di PL che ammetta soluzioni ottimali multiple (con regione ammissibile limitata) ha almeno due vertici ammissibili che sono ottimali. Ogni soluzione ottimale è una combinazione convessa ($w_1 \cdot (s_1) + w_2 \cdot (s_2)$, $w_1 + w_2 = 1$, $w_1, w_2 \geq 0$) di questi vertici ammissibili ottimali. Di conseguenza, nella forma aumentata del problema di PL, ogni soluzione ottimale risulta essere una combinazione convessa delle soluzioni di base ammissibili ottimali. Il metodo del simplesso si arresta automaticamente non appena individua una soluzione di base ottimale.

Capitolo 4 – Teoria del simplesso

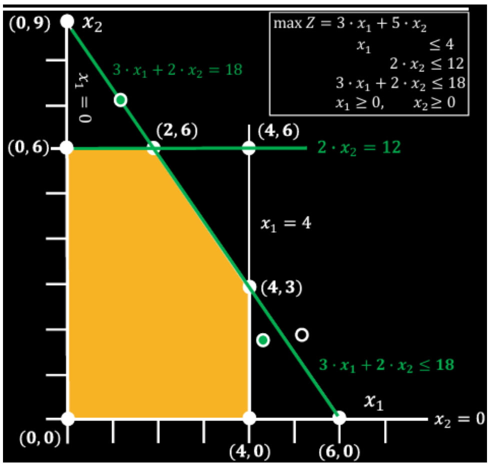
44) Definire il termine di equazione della frontiera di un vincolo

Si definisce equazione della frontiera di un vincolo l'equazione ricavata con le seguenti sostituzioni:

- $\leq \rightarrow =$
- $\geq \rightarrow =$

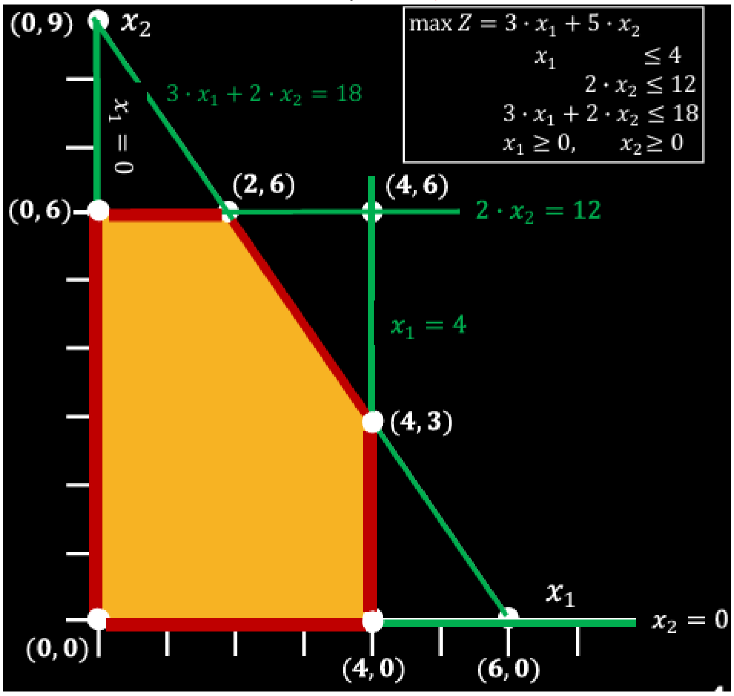
45) Definire il termine di equazione della frontiera di un vincolo

Si definisce equazione della frontiera di un vincolo la seguente equazione: $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n = b_i$ mentre per un vincolo di non negatività abbiamo $x_j = 0$. Ogni equazione definisce una figura geometrica "piatta", che prende il nome di iperpiano nello spazio n-dimensionale, l'analogo di una retta nello spazio bidimensionale e di un piano nello spazio tridimensionale. Quando il vincolo è di $\leq$ o di $\geq$, l'iperpiano separa i punti che soddisfano il vincolo da quelli che lo non lo soddisfano. Quando il vincolo è di $=$, solo i punti che giacciono sull'iperpiano soddisfano il vincolo.



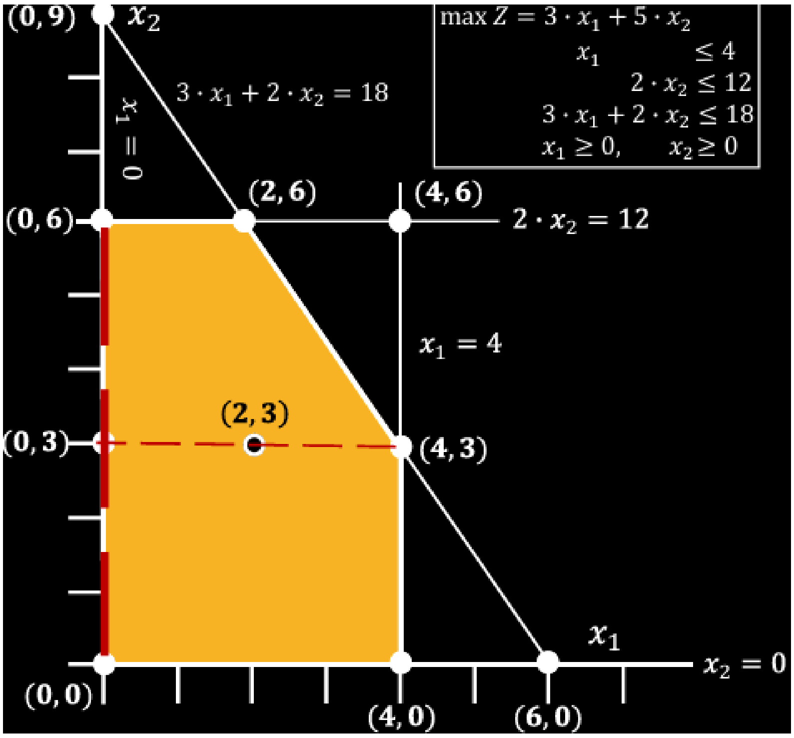
46) Definire il termine di equazione della frontiera della regione ammissibile

La frontiera della regione ammissibile contiene solo quelle soluzioni ammissibili che soddisfano una o più equazioni di frontiera.



47) Definire il termine di vertice ammissibile

Un vertice ammissibile è una soluzione ammissibile che non giace su un segmento che connette altre due soluzioni ammissibili. Una soluzione che giace su un segmento che collega due altre soluzioni ammissibili non è un vertice ammissibile.



48) Assioma Programmazione Lineare

In ogni problema di programmazione lineare con n variabili di decisione, ogni vertice ammissibile giace all'intersezione di n frontiere di altrettanti vincoli, vale a dire ogni vertice è la soluzione simultanea di un sistema di n equazioni, ognuna rappresentante la frontiera di uno degli n vincoli. Ciò non significa che ogni insieme di n equazioni di frontiera, comunque scelte tra gli $n + m$ vincoli (n vincoli di non negatività ed m vincoli funzionali), determini un vertice ammissibile. In particolare, la soluzione simultanea di un tale sistema lineare potrebbe violare uno o più degli m vincoli che non sono stati selezionati per definire il sistema lineare, nel qual caso il vertice individuato sarebbe un vertice non ammissibile.

49) Da cosa è determinata la frontiera della regione ammissibile?

Essa è determinata dagli spigoli.

50) Dal simplesso geometrico al simplesso algebrico

Dato un problema di PL con n variabili decisionali e regione ammissibile limitata si avrebbe che:

→ un vertice ammissibile giace all'intersezione di n equazioni di frontiera (e soddisfa anche i restanti vincoli);

→ uno spigolo della regione ammissibile è un segmento che giace all'intersezione di $n - 1$ equazioni di frontiera, dove ogni vertice estremo giace su un'equazione di frontiera addizionale (tale che gli estremi siano vertici ammissibili);

→ due vertici ammissibili sono adiacenti se il segmento che li collega è uno spigolo della regione ammissibile;

→ da ogni vertice ammissibile emanano n spigoli, ognuno conduce ad uno degli n vertici ammissibili adiacenti;

→ ogni iterazione del metodo del simplesso si sposta dal corrente vertice ammissibile ad un vertice ammissibile adiacente muovendosi su questi spigoli.

Passando all'interpretazione algebrica si avrebbe:

→ l'intersezione delle equazioni di frontiera equivale alla loro risoluzione simultanea in termini del corrispondente sistema lineare;

→ quando il metodo del simplesso sceglie la variabile entrante in base, l'interpretazione geometrica è che il metodo del simplesso stia scegliendo uno degli spigoli che emanano dal vertice ammissibile corrente;

→ aumentare il valore della variabile entrante in base, a partire dal valore zero,

e contemporaneamente variare il valore delle restanti variabili di base, corrisponde a muoversi lungo lo spigolo scelto;
→ il valore di una delle variabili di base correnti, in particolare la variabile uscente dalla base, viene ridotto fino a raggiungere il valore zero, il che significa il raggiungimento della frontiera del vincolo che si trova all'altro estremo dello spigolo della regione ammissibile.

51) Quali sono le tre proprietà di base dei vertici ammissibili?

Le tre proprietà di base dei vertici ammissibili per un problema di PL che ammette soluzioni ammissibili e con regione ammissibile limitata sono:
→ Se esiste solo una soluzione ottimale, allora questa è un vertice ammissibile e se esistono soluzioni ottime multiple, allora almeno due di queste soluzioni sono vertici ammissibili tra loro adiacenti. In ogni problema che ammetta una sola soluzione ottimale, è sempre possibile far aumentare il valore della funzione obiettivo fino a che non si raggiunga un vertice (la soluzione ottimale) della regione ammissibile. Come conseguenza, tutte le soluzioni ottimali sono ottenibili come combinazioni convesse dei vertici ammissibili ottimali.
→ Esiste un numero finito di vertici ammissibili. Ogni vertice ammissibile è soluzione di un sistema lineare formato da n equazioni scelte tra $m+n$ vincoli (n vincoli di non negatività ed m vincoli funzionali). Il numero di combinazioni di $m+n$ vincoli, presi a gruppi di n, è pari a:

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

→ Se un vertice ammissibile non ammette vertici ammissibili a lui adiacenti che coincidono con soluzioni con valore migliore della funzione obiettivo Z, allora non esistono soluzioni ottimali migliori di quella che coincide con il vertice ammissibile in esame. Un insieme viene detto convesso se è una collezione di punti tali che, per ogni coppia di punti appartenenti alla collezione, l'intero segmento che collega la coppia di punti, appartiene anch'esso alla collezione.

Capitolo 5 – Teoria della dualità

52) Come si ottiene il duale con il metodo del simplesso?

Considerando il contenuto della riga (0) del tableau, in corrispondenza di una generica iterazione del metodo del simplesso applicato al problema primale:

Iteration	Basic Variable	Eq.	Coefficient of: Z	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	Right Side
Any	Z	(0)	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots$	$z_n - c_n$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	W

Le variabili non di base $x_1, x_2, \dots, x_n$, assumono i seguenti valori:

$z_1 - c_1 \quad z_2 - c_2 \quad \cdots \quad z_n - c_n$

Similmente le variabili di base $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ nella riga (0) valgono inizialmente 0 nel tableau iniziale, allora queste assumono i seguenti valori:

$y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m$

Valgono le seguenti relazioni:

Problema Primale	Problema Duale
$\max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$	$\min\ W = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \quad i = 1,2,\dots,m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \ge c_j \quad j = 1,2,\dots,n$
$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,\dots,n$	$y_i \ge 0 \quad i = 1,2,\dots,m$

Problema Primale di massimizzazione (max) $\Rightarrow$ Problema Duale di minimizzazione (min)

coefficienti del primale $\Rightarrow$ termini noti del duale

termini noti del primale $\Rightarrow$ coefficienti del duale

Esempio:

	Problema Primale	Problema Duale
Forma Algebrica	$\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ $1 \cdot x_1 \le 4$ $2 \cdot x_2 \le 12$ $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 18$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$	$\min W = 4 \cdot y_1 + 12 \cdot y_2 + 18 \cdot y_3$ $1 \cdot y_1 + 3 \cdot y_3 \ge 3$ $2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \ge 5$ $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$
Forma Matriciale	$\max Z = [3,5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\min W = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ $[y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $[y_1, y_2, y_3] \ge [0,0,0]$

Sostituendo

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i$$

in

$$z_j - c_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, m$$

e ricordando che

$$W = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i$$

la condizione di ottimalità indica che il metodo del simplesso cerca i valori

$y_1, y_2, \dots, y_m$

tali che

$$W = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \geq c_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

→

PROBLEMA DUALE

$$\min \quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \geq c_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

TEST DI OTTIMALITÀ

$$z_j - c_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Risulta possibile quindi affermare che il problema duale viene considerato come una diversa formulazione, in termini di programmazione lineare, di quello che è l'obiettivo del metodo del simplesso, vale a dire, ottenere una soluzione del problema primale che soddisfi il test di ottimalità.

Iteration	Basic Variable	Eq.	Coefficient of: Z	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	Right Side
Any	Z	(0)	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots$	$z_n - c_n$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	W

Prima di ottenere una soluzione del problema primale che soddisfi il test di ottimalità il vettore y della riga (0) (coefficienti delle variabili slack) del tableau corrente deve essere inammissibile per il problema duale. Ottenuta una soluzione del problema primale che soddisfi il test di ottimalità il corrispondente vettore y della riga (0) deve essere una soluzione ottimale y^* per il problema duale, in quanto soluzione ammissibile che ottiene il minimo valore della funzione obiettivo W. La soluzione ottimale $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ fornisce i prezzi ombra del problema primale.

53) Definire la proprietà di duale debole

Se $\mathbf{x}$ è una soluzione ammissibile per il problema primale (problema originale), e y è una soluzione ammissibile per il corrispondente problema duale (problema di programmazione lineare alternativo associato), allora vale la seguente diseguaglianza: $\mathbf{cx} \leq \mathbf{yb}$

54) Definire la proprietà di duale forte

Se $\mathbf{x}*$ è una soluzione ottimale per il problema primale, e $y*$ è una soluzione ottimale per il corrispondente problema duale, allora (e solo allora) vale la seguente uguaglianza: $\mathbf{cx}* = \mathbf{y}*\mathbf{b}$

55) Definire la proprietà delle soluzioni complementari

Ad ogni iterazione, il metodo del simplesso identifica simultaneamente una soluzione vertice ammissibile $\mathbf{x}$ per il problema primale e una soluzione complementare y per il problema duale (reperibile nella riga (0), i coefficienti delle variabili slack), dove $\mathbf{cx} = \mathbf{yb}$. Se $\mathbf{x}$ non è ottimale per il problema primale, allora y non è ammissibile per il problema duale.

56) Definire la proprietà delle soluzioni ottimali complementari

All'iterazione finale, il metodo del simplesso identifica simultaneamente una soluzione ottimale $x*$ per il problema primale e una soluzione ottimale complementare $\mathbf{y}*$ per il problema duale (reperibile nella riga (0), i coefficienti delle variabili slack), dove $\mathbf{cx}*= \mathbf{y}*\mathbf{b}$. Le componenti y_i^* sono i prezzi ombra del problema primale.

57) Definire la proprietà di simmetria

Per ogni problema primale e relativo problema duale, tutte le relazioni tra loro debbono essere simmetriche in quanto il problema duale del problema duale è il problema primale. Questo significa che le proprietà di dualità debole, di dualità forte, di soluzioni complementari, di soluzioni ottimali complementari, sono valide sia per il problema primale che per il corrispondente problema duale.

58) Definire la proprietà delle soluzioni aumentate complementari

Ogni soluzione di base del primale ha una soluzione di base complementare nel problema duale, in modo tale che i rispettivi valori delle funzioni obiettivo $Z \in W$ siano uguali. Data la riga (0) del tableau del simplesso per la soluzione di base primale, la soluzione di base complementare del duale è $(\mathbf{y} \mid \mathbf{z}-\mathbf{c})$.

59) Definire la proprietà di complementary slackness

Per ogni coppia di variabili associate, se una di loro ha slack nel suo vincolo di non negatività (una variabile di base (>0)), allora l'altra non deve avere slack (una variabile non di base (=0)).

60) Enunciare il teorema di dualità

Le sole relazioni possibili tra problema primale e duale sono le seguenti:

→ se un problema ha soluzioni ammissibili e funzione obiettivo limitata (pertanto tale da avere soluzione ottimale), allora la stessa cosa vale per l'altro problema, per cui sia la proprietà debole della dualità che la proprietà forte della dualità sono applicabili;
→ se un problema ha soluzioni ammissibili e funzione obiettivo illimitata (pertanto tale da non avere soluzione ottimale), allora l'altro problema non ha soluzioni ammissibili;
→ se un problema non ha soluzioni ammissibili, allora l'altro problema o non ha soluzioni ammissibili o ha una funzione obiettivo illimitata.

61) Definire la proprietà delle soluzioni ottimali complementari

Una soluzione di base ottimale $\mathbf{x}*$ del problema primale ha una soluzione di base ottimale complementare del duale, tale che i valori delle rispettive funzioni obiettivo (Z e W) sono identici ($Z = W$). Data la riga (0) del tableau del metodo del simplesso, corrispondente alla soluzione ottimale del primale $\mathbf{x}*$, la soluzione ottimale complementare del duale è $(\mathbf{y}*, \mathbf{z}^* - \mathbf{c})$.

62) Relazioni tra soluzioni di base

Le soluzioni di base sono classificabili in base alle due seguenti condizioni:
→ condizione di ammissibilità: se tutte le variabili (incluse le variabili slack), della soluzione aumentata, sono non negative (rispettano i vincoli di non negatività, NDR).
→ condizione di ottimalità: se i coefficienti nella riga (0) (tutte le variabili della soluzione di base complementare) sono non negativi (è soluzione ammissibile per il duale, NDR).
Qui riportato il riassunto riguardo le relazioni tra soluzioni di base complementari:

Soluzione di Base del Primale	Soluzione di Base Complementare del Duale	Primale Ammissibile	Duale Ammissibile
Sub-ottimale	Super-ottimale	SI	NO
Ottimale	Ottimale	SI	SI
Super-ottimale	Sub-ottimale	NO	SI
Né ammissibile né super-ottimale	Né ammissibile né super-ottimale	NO	NO