Appunti di Matematica II

Capitolo 6 – Integrali di Linea di I specie

1) Lunghezza di un arco di una curva regolare

La lunghezza di un arco di una curva regolare è definito come

$$\ell = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| dt$$

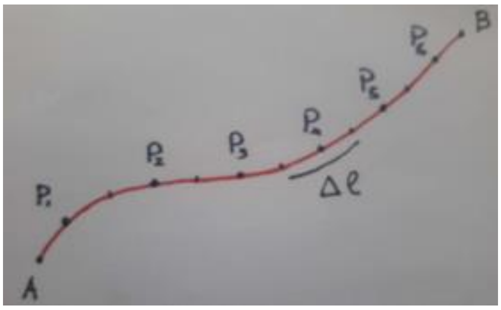
con t appartenente ad [a, b].

Si ha che l è equivalente a

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}\, dt}$$

2) Definizione di Integrale di Linea di I specie: definizione

Considerata C una curva regolare in R^n. Suddivido C in archi di curva di lunghezza Δ_{li} e su ciascun arco di curva si sceglie un punto Pi. Gli archi di curva della suddivisione hanno tutti lunghezza uguale a Δ_l.



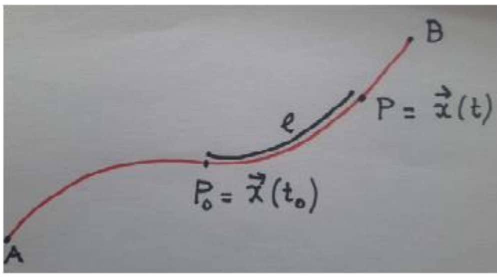
Sia f: $R^n \to R$

Si dice integrale di linea di I specie il limite di $\Delta_l \to 0$ della

$$\sum_i f(P_i)\Delta\ell$$

e si indica con

$$\int_C f\, d\ell$$



3) Ascissa di curvilinea

Sia un punto $P_0 = x(t_0)$ su una curva regolare C di equazioni parametriche $x_i = x_i(t)$ (con i = 1, …, n) possiamo indivduare la posizione di qualsiasi altro punto sulla curva assegnando il numero

$$\ell = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}\, dt$$

il parametro così definito si chiama ascissa della curva.

4) Restrizione della funzione f alla curva C

Sostituendo il parametro t si arriva alla parametrizzazione

$$x_i = x_i(t(\ell)) = x_i(\ell), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Quando t varia nell'intervallo $[t_1, t_2]$ il parametro varierà in un intervallo $[l_1, l_2]$. Si ha questa uguaglianza

$$\sum_i f(P_i)\Delta\ell = \sum_i f(x_1(\ell_i), \ldots, x_n(\ell_i))\Delta\ell = \sum_i F(\ell_i)\Delta\ell$$

5) Integrale di I specie rispetto all'ascissa curvilinea

Se la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea il limite delle somme integrali coincide con l'integrale

$$\int_{\ell_1}^{\ell_2} F(\ell)\, d\ell$$

dove l_1 e l_2 corrispondono agli estremi della curva.

6) Integrale di I specie con parametri arbitrari

Si applica la formula di cambiamento di variabili per ottenere la formula dell'integrale di I specie rispetto alla parametrizzazione originaria della curva. Si ha la seguente uguaglianza

$$\frac{d\ell}{dt} = \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}$$

si ottiene

$$\boxed{\int_C f\, d\ell = \int_{t_1}^{t_2} f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}\, dt}$$

Capitolo 7 – Integrali di Linea di II specie

7) Definizione di campo vettoriale

Si dice campo vettoriale un'applicazione che ad ogni punto x appartenente al dominio D associa un vettore F(x).

$F: \Omega \in R^n \rightarrow R^n$

8) Come viene rappresentato il campo vettoriale graficamente?

Un campo vettoriale viene rappresentato nel seguente modo:

→ si sceglie (x, y) e si considera F (x, y);

→ si trasla parallelamente il vettore F (x, y) in modo che abbia origine nel punto (x, y);

→ al variare di (x, y) si ottiene una rappresentazione del campo vettoriale.

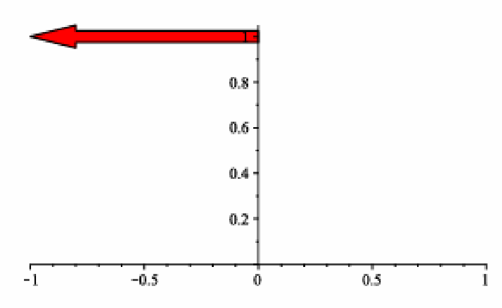
Esempio:

Abbiamo il campo vettoriale

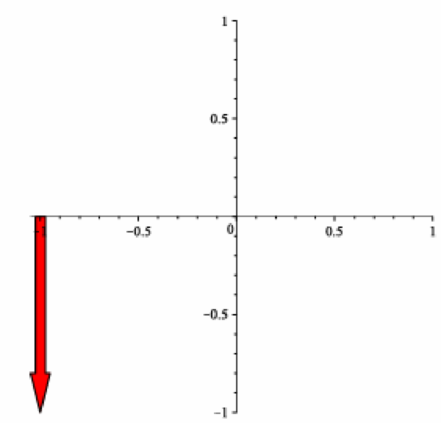
$F = -y * e_1 + x * e_2$

dove $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$

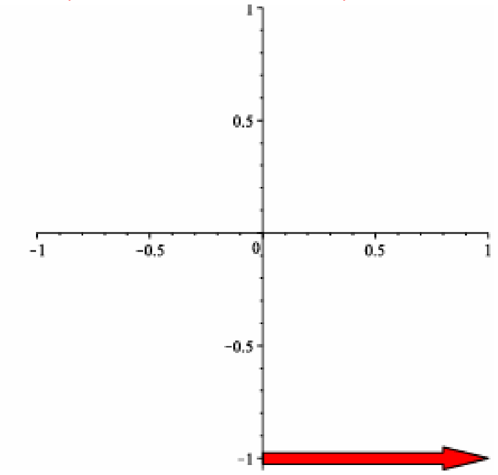
Campo vettoriale nel punto (0, 1)



Campo vettoriale nel punto (1, 0)



Campo vettoriale nel punto (0, -1)



9) Integrale di linea di II specie: definizione

Sia C una curva orientata e t il versore tangente alla curva diretto secondo l'orientazione di C. Si dice integrale di linea di II specie di un campo vettoriale F lungo la curva C l'integrale di prima specie della componente tangenziale di F lungo la curva C:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\, d\ell$$

Osservazione

Se r(t) = (x_1(t), …, x_n(t)), a <= t <= b è la parametrizzazione della curva, allora

$$\mathbf{t}\, d\ell = \pm \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}|\mathbf{r}'|dt = \pm \mathbf{r}' dt$$

+ → parametrizzazione della curva è concorde

- → parametrizzazione della curva è discorde

L'integrale sopra indicato può essere scritto come

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\, d\ell = \pm \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\, dt = \pm \int_a^b \left(F_1(t) \frac{dx_1}{dt} + \cdots + F_n(t) \frac{dx_n}{dt} \right) dt$$

dove

$$F_i(t) = F_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, \ldots, n.$$

10) Integrale di linea di II specie: forme differenziali

Considerando l'integrale

$$\int_C F_1\, dx_1 + \cdots + F_n\, dx_n.$$

l'espressione $F_1\, dx_1 + \cdots + F_n\, dx_n$ si chiama forma differenziale.

11) Campo vettoriale conservativo

Un campo vettoriale F si dice conservativo o potenziale se può essere ottenuto come gradiente di una funzione, cioè se esiste

$$U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

tale che

$$\mathbf{F} = \nabla U$$

La funzione U si chiama potenziale del campo vettoriale F.

12) Teorema campo vettoriale conservativo

Sia F un campo vettoriale conservativo e continuo in un dominio D e C una curva regolare orientata contenuta in D. Vale la formula $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\, d\ell = U(P_1) - U(P_0)$

dove U è il potenziale di F e P_0 e P_1 sono gli estremi della curva C.

Capitolo 8 – Campi vettoriali conservativi

13) Indipendenza del cammino: enunciare il teorema e dimostrare tale teorema

Se $F = F_1(x, y)e_1 + F_2(x, y)e_2$ è continuo ed è definito in un dominio aperto e connesso per archi D allora l'indipendenza dal cammino implica che il campo F è conservativo.

Dimostrazione:

Sia $P_0 = (x_0, y_0) \in D$. Definisco

$$U(x, y) = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy)$$

dove C è una curva compresa tra i punti P_0 e P.

Quindi si può riscrivere U(x, y) come

$$U(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (F_1\,dx + F_2\,dy)$$

L'incremento della funzione U(x, y) lungo l'asse delle x è pari a

$$\Delta U = U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} F_1\,dx + F_2\,dy.$$

dove l'integrale può essere calcolato su un qualsiasi cammino che congiunge i punti (x, y) e (x + Δx, y).

Ipotizzando che il dominio D sia aperto implica l'esistenza di un intorno di (x, y) interamente contenuto in D e se Δx è sufficientemente piccolo anche il punto (x + Δx, y) appartiene a tale intorno. Di conseguenza tutti i punti che stanno sul segmento che congiunge i punti (x, y) e (x + Δx, y) appartengono a tale intorno e quindi al dominio D. Dalla condizione di indipendenza del cammino risulta possibile calcolare l'integrale

$$\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} F_1\,dx + F_2\,dy$$

sul segmento parallelo all'asse delle x di equazioni parametriche:

$$x(t) = x + t\Delta x, \quad y(t) = y$$

con $t \in [0, 1]$. Si ottiene

$$\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} F_1\,dx + F_2\,dy = \Delta x \int_0^1 F_1(x + t\Delta x, y)\,dt$$

Sfruttando la continuità di F, dividendo il differenziale di x e calcolando il limite per Δx ottengo immediatamente

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

$$F_2 = \frac{\partial U}{\partial y}$$

14) Circuitazione di un campo vettoriale conservativo: definizione

Se C è una curva orientata chiusa allora l'integrale

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell$$

si chiama circuitazione di F lungo C e si indica anche con il simbolo

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell$$

15) Circuitazione di un campo vettoriale conservativo: teorema e dimostrazione

Se F è conservativo in un dominio D allora la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa contenuta in D è nulla. Viceversa se D è aperto e connesso per archi e la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa contenuta in D è nulla allora F è conservativo.

Esempio:

Indicati con P_1 e P_2 due punti su C, allora

$$C = C_1 \cup C_2$$

dove C_1 è una curva che congiunge P_1 e P_2 e C_2 è una curva che congiunge P_2 e P_1.

Ho quindi

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell$$

Indicata con $-C_2$ la curva C_2 con il verso di percorrenza invertito

$$\int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell = -\int_{-C_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell$$

D'altra parte se F è conservativo

$$\int_{-C_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell$$

Di conseguenza

$$\int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell = -\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell$$

e quindi

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{t}\, d\ell + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell = 0$$

16) Quali sono le condizioni di irrotazionalità?

Se le derivate parziali delle componenti del campo vettoriale sono continue allora, nel caso conservativo, devono valere le identità

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Nel caso di R^2 ho

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

Nel caso di R^3 ho

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_3}$$

17) Regioni (Insiemi aperti) semplicemente connesse

→ Un insieme aperto $D \subset R^2$ si dice semplicemente connesso se è connesso per archi e se ogni curva chiusa appartenente ad esso è la frontiera di una regione piana completamente contenuta in D.

→ Un insieme aperto $D \subset R^3$ si dice semplicemente connesso se è connesso per archi e per ogni curva chiusa C appartenente al dominio è possibile trovare una superficie S completamente contenuta nel dominio che ammette C come frontiera.

→ Un insieme aperto $D \subset R^n$ si dice semplicemente connesso se è connesso per archi e se ogni curva chiusa può essere deformata con continuità in un punto.

18) Lemma di Poincaré

Sia $F: D \subset R^n \to R^n$ un campo vettoriale di classe C^1 (cioè le componenti Fi del campo sono funzioni continue con derivate parziali continue in D).

Teorema: Se il dominio di definizione D è semplicemente connesso le condizioni di irrotazionalità

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

non sono solo necessarie, ma sono anche sufficienti per l'esistenza di un potenziale del campo in tale dominio.

19) Semplicità di un dominio piano: definizione

Diremo che un dominio piano è semplice se ammette sia una suddivisione in un numero finito di parti che ammettono una rappresentazione del tipo

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x) \qquad (2)$$

sia una suddivisione in un numero finito di parti che ammettono una rappresentazione del tipo

$$\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \quad x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y). \qquad (3)$$

dove $y_1(x), y_2(x), x_1(y), x_2(y)$ sono differenziabili a tratti.

20) Teorema (Formula) di Green: definizione

Il teorema di Green afferma che se C è una curva chiusa semplice (cioè senza auto intersezioni) che delimita una regione σ sul piano, e se le componenti del campo vettoriale F sono continue con le loro derivate parziali $\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}$ in $\bar{\sigma}$.

Allora vale la formula di Green

$$\boxed{\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell = \iint_\sigma \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.}$$

21) Teorema (Formula) di Green: dimostrazione

Per semplicità assumo inizialmente che il dominio di integrazione σ ammetta simultaneamente una rappresentazione del tipo $a \leqslant x \leqslant b, \ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$ e una rappresentazione del tipo $\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)$.

Dimostro in modo separato i teoremi

$$\iint_\sigma \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dxdy = -\int_C F_1(x,y)\, dx.$$

$$\iint_\sigma \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dxdy = \int_C F_2(x,y)\, dy.$$

Per dimostrare la prima identità osservo che la frontiera è composta dall'unione di due curve di equazione parametrica

$$x = x, \qquad y = y_1(x), \qquad x \in [a,b]$$

e

$$x = x, \qquad y = y_2(x), \qquad x \in [a,b]$$

Tenendo conto dell'orientazione della frontiera ho che

$$\int_C F_1(x,y)\, dx = \int_a^b F_1(x, y_1(x))\, dx - \int_a^b F_1(x, y_2(x))\, dx.$$

D'altra parte

$$\iint_\sigma \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dy =$$
$$\int_a^b [F_1(x, y_2(x)) - F_1(x, y_1(x))]\,dx = -\int_C F_1(x, y)\,dx$$

Per dimostrare la seconda identità osservo che la frontiera è composta dall'unione di due curve di equazione parametrica

$$y = y, \qquad x = x_1(y), \qquad y \in [c, d]$$

e

$$y = y, \qquad x = x_2(y), \qquad y \in [c, d]$$

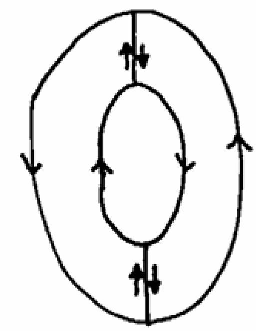
ed (eventualmente) due segmenti orizzontali che non contribuiscono all'integrale.

Tenendo conto dell'orientazione della frontiera abbiamo

$$\int_C F_2(x, y)\,dx = -\int_c^d F_2(y, x_1(y))\,dy + \int_c^d F_2(y, x_2(y))\,dy.$$

D'altra parte

$$\iint_\sigma \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx =$$
$$\int_c^d [F_2(x_2(y), y) - F_2(x_1(y), y)]\,dy = \int_C F_2(x, y)\,dy.$$



22) Teorema (Formula) di Green: conseguenze

Se il campo vettoriale F è conservativo allora

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

e le identità che compongono la formula di Green devono entrambi annullarsi e

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\,d\ell = \iint_\sigma \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy.}$$ risulta uguale a 0.

Capitolo 9 – Integrali multipli

23) Misura di Jordan

Supponiamo di avere un insieme limitato A nel piano R^2.

1 – Suddivisione del piano: Suddivido il piano R^2 in un numero finito di rettangoli disgiunti $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

2 – Copertura e inclusione: Una copertura di A è un insieme di rettangoli R_i tali che A è contenuto nell'unione di questi rettangoli, mentre l'inclusione di A è un insieme di rettangoli R_i tali che A contiene l'unione di questi rettangoli.

3 – Misura esterna e misura interna: La misura esterna di Jordan $m^*(A)$ è definita come l'infimo (cioè il minimo valore superiore) delle somme delle aree dei rettangoli che coprono A:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \text{area}(R_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R_i \right\}$$

La misura interna di Jordan $m_*(A)$ è definita come il supremo (cioè il massimo valore inferiore) delle somme delle aree dei rettangoli inclusi in A:

$$m_*(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \text{area}(R_i) \mid \bigcup_{i=1}^{n} R_i \subseteq A \right\}$$

4 – Misura di Jordan: Se la misura esterna di Jordan e la misura interna di Jordan coincidono, ossia $m^*(A) = m_*(A)$, allora il loro comune valore è chiamato misura di Jordan di A e si indica con m(A).

24) Somma di Riemann

La somma di Riemann è un metodo per approssimare il valore di un integrale definito, ossia l'area sotto una curva in un intervallo [a, b]. Per costruire una somma di Riemann, si procede come segue:

1 - Suddividere l'intervallo [a, b]: Dividiamo l'intervallo [a, b] n sotto intervalli disgiunti

$[x_{i-1}, x_i]$, dove $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. La lunghezza di ciascun sotto intervallo è $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

2 – Scegliere un punto c_i in ciascun sotto intervallo $[x_{i-1}, x_i]$: Questo punto c_i può essere scelto arbitrariamente all'interno di ogni sotto intervallo. I punti c_i possono essere gli estremi sinistro o destro, il punto medio o qualsiasi altro punto.

3 – Calcolare la somma di Riemann: La somma di Riemann è data dalla somma dei prodotti dei valori della funzione f nei punti c_i per la lunghezza dei sotto

intervalli Δx_i:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Tipi di Somme di Riemann

1 - Somma di Riemann Sinistra: Si scelgono i punti c_i come l'estremo sinistro di ciascun sotto intervallo, cioè $c_i = x_{i-1}$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

2 - Somma di Riemann Destra: Si scelgono i punti c_i come l'estremo destro di ciascun sotto intervallo, cioè $c_i = x_i$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

3 - Somma di Riemann Centrata (o del Punto Medio): Si scelgono i punti c_i come il punto medio di ciascun sotto intervallo, cioè

$c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\Delta x_i$$

Convergenza somma di Riemann

Risulta che

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

25) Integrale multiplo

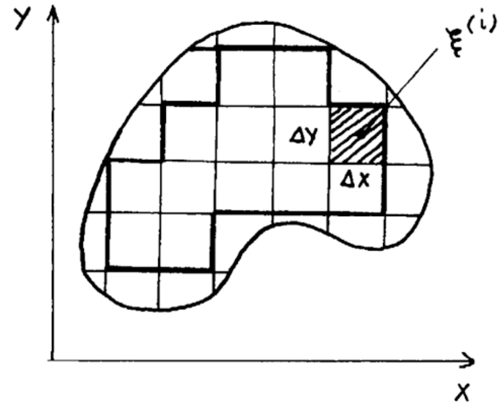
Si dice integrale multiplo funzione f esteso al dominio D, che si denota con il simbolo

$$\int_D f(x)\,d\Omega$$

il limite (se esiste)

$$\lim_{d(\rho)\to 0} S_\rho(f)$$

dove d(p) è il più grande dei diametri delle parti $\Omega_{(j)}$ della suddivisione p.



26) Proprietà Integrale Multiplo

Le proprietà dell'integrale multiplo sono:

1 – Linearità

$$\int_{\Omega}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\, d\Omega = c_1 \int_{\Omega} f_1(x)\, d\Omega + c_2 \int_{\Omega} f_2(x)\, d^n x.$$

2 - Additività rispetto al dominio: se Ω è l'unione di due insieme misurabili $\Omega 1$ e $\Omega 2$ non aventi punti interni comuni e f è integrabile:

$$\int_{\Omega} f(x)\, d\Omega = \int_{\Omega_1} f(x)\, d\Omega + \int_{\Omega_2} f(x)\, d\Omega$$

3 – Se f_1 e f_2 sono integrabili su Ω e $f_1 <= f_2$ su Ω, allora:

$$\int_{\Omega} f_1(x)\, d\Omega \leqslant \int_{\Omega} f_2(x)\, d\Omega.$$

4 - Teorema della media: se una funzione f è continua sulla chiusura di un dominio connesso Ω, allora f segnato è pari a

$$\bar{f} = \frac{1}{m\Omega} \int_{\Omega} f(x)\, d\Omega$$

27) Teorema Integrali Iterati

Sia f (x, y) una funzione continua su un dominio Ω della forma:
$\{(x, y),\ a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$. Allora vale

$$\boxed{\iint_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.}$$

28) Integrali tripli: Integrazione per fili

L'integrazione per fili è una tecnica che implica la riduzione di un integrale triplo mediante l'integrazione lungo "fili" o linee all'interno del dominio di integrazione. Supponiamo di voler calcolare un integrale triplo:

$\iiint_V f(x, y, z)\, dV$

L'idea è di integrare prima lungo una direzione specifica (ad esempio x), poi lungo la direzione successiva (y), e infine lungo l'ultima direzione (z). Questa tecnica è spesso usata in coordinate cilindriche o sferiche.

Esempio con coordinate cilindriche

Ho che (x, y, z) = (r, Θ, z)

x = r*cos Θ

y = r*sin Θ

z = z

Il volume elementare dV diventa r * dr * dΘ * dz.

Calcoliamo l'integrale triplo di $f(r, \theta, z) = r$ su un cilindro di raggio 1 e altezza 1:

$\iiint_V r\, r\, dr\, d\theta\, dz$

1. **Limiti di integrazione:**
   - r va da 0 a 1,
   - θ va da 0 a 2π,
   - z va da 0 a 1.
2. **Calcolo dell'integrale:**

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2\, dr\, d\theta\, dz$$

3. **Integrale rispetto a r:**

$$\int_0^1 r^2\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

4. **Integrale rispetto a θ:**

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\, d\theta = \frac{1}{3}\,[\theta]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$$

5. **Integrale rispetto a z:**

$$\int_0^1 \frac{2\pi}{3}\,dz = \frac{2\pi}{3}\,[z]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

Quindi, il valore dell'integrale triplo è $\frac{2\pi}{3}$.

29) Integrali tripli: Integrazione per strati

L'integrazione per strati prevede la suddivisione del dominio tridimensionale in "strati" bidimensionali, sui quali si effettua l'integrazione doppia, seguita dall'integrazione lungo la terza dimensione.

La procedura generale risulta essere la seguente:

1 - Identificare i limiti di integrazione per ciascuna variabile, ad esempio x, y e z.

2 - Suddividere il dominio V in strati paralleli a uno dei piani coordinati.

3 - Integrare all'interno di ciascuno strato bidimensionale rispetto a due delle variabili.

4 - Integrare successivamente rispetto alla terza variabile per combinare i risultati degli strati.

Esempio:

Esempio

Calcoliamo l'integrale triplo di $f(x, y, z) = xyz$ su un cubo di lato 1 con vertici negli assi positivi $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

$\iiint_V xyz\,dV$

1. **Limiti di integrazione:**

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xyz\,dx\,dy\,dz$$

2. **Integrazione rispetto a x:**

$$\int_0^1 xyz\,dx = yz\int_0^1 x\,dx = yz\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = yz\cdot\frac{1}{2}$$

Risultato dell'integrale rispetto a x:

$$\frac{yz}{2}$$

3. **Integrazione rispetto a y:**

$$\int_0^1 \frac{yz}{2}\,dy = \frac{z}{2}\int_0^1 y\,dy = \frac{z}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{z}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{z}{4}$$

Risultato dell'integrale rispetto a y:

$$\frac{z}{4}$$

4. **Integrazione rispetto a z:**

$$\int_0^1 \frac{z}{4}\,dz = \frac{1}{4}\int_0^1 z\,dz = \frac{1}{4}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Il valore dell'integrale triplo è $\frac{1}{8}$.

30) Cambiamento di variabili negli integrali doppi

La tecnica di cambiamento di variabili negli integrali doppi si basa sull'introduzione di nuove variabili che trasformano il dominio di integrazione in una forma più semplice, facilitando così il calcolo dell'integrale.

Suppongo di voler calcolare

$\iint_D f(x,y)\,dA$

Tale che D è il dominio nel piano xy.

Possiamo effettuare un cambiamento di variabili introducendo nuove variabili u e v tramite una trasformazione T:

$x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$

Il nuovo dominio D' nel piano uv è l'immagine del dominio originale D sotto la trasformazione T. Il differenziale di area dA in coordinate uv è dato da:

$dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$

dove il termine

$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ indice il determinante della matrice jacobiana J.

Si ha come risultato:

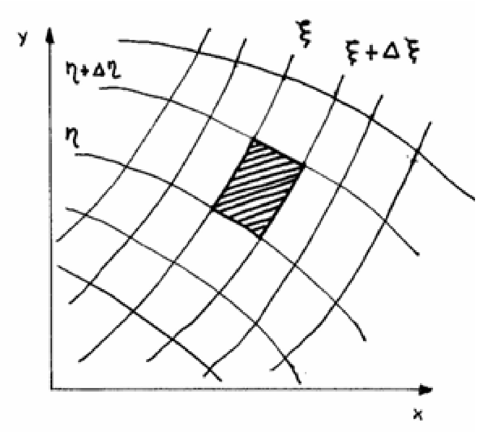
$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$

31) Coordinate curvilinee: definizione

Le coordinate curvilinee sono un sistema di coordinate che viene utilizzato per descrivere la posizione dei punti in uno spazio in cui i sistemi di coordinate cartesiane standard risultano essere complesse. Le coordinate curvilinee $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sono definite da una trasformazione che mappa queste coordinate in coordinate cartesiane $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mediante una funzione T:

$x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$

per $i = 1, 2, \ldots, n$.



32) Definizione di Jacobiano

Il Jacobiano di una trasformazione tra due sistemi di coordinate è una matrice di dimensione n x n delle derivate prime parziali delle funzioni coordinate. Il determinante di tale matrice permette di stimare l'ordine di grandezza con i quali volumi in R^n vengono ingranditi (o rimpiccioliti) in seguito all'applicazione di f.

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

33) Coordinate polari

Le coordinate polari sono un sistema di coordinate utilizzato principalmente per descrivere posizioni in un piano attraverso la distanza radiale da un punto fisso (l'origine) e l'angolo rispetto a una direzione di riferimento. Le coordinate polari di un punto P nel piano sono definite dalle seguenti relazioni:

→ r: Raggio vettore, che rappresenta la distanza del punto P dall'origine;

→ θ: Angolo polare, che rappresenta l'angolo formato tra il raggio vettore OP e un asse di riferimento (generalmente l'asse x positivo).

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

34) Coordinate cilindriche

Le coordinate cilindriche sono un sistema di coordinate tridimensionale che estende le coordinate polari bidimensionali aggiungendo una terza dimensione, solitamente l'asse z. Le coordinate cilindriche di un punto P sono:

→ r: Raggio vettore nel piano xy, che rappresenta la distanza del punto PPP dall'asse z.
→ θ: Angolo polare nel piano xy, che rappresenta l'angolo rispetto all'asse xxx.
→ z: Coordinata verticale, che rappresenta l'altezza del punto P rispetto al piano xy.

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$z = z$$

35) Coordinate sferiche

Le coordinate sferiche sono un sistema di coordinate tridimensionale che estende le coordinate polari e cilindriche aggiungendo un angolo polare verticale. Le coordinate sferiche di un punto P sono:
→ ρ: Raggio vettore, che rappresenta la distanza del punto P dall'origine;
→ θ: Angolo azimutale nel piano xy, che rappresenta l'angolo rispetto all'asse x.
→ φ: Angolo polare verticale rispetto al piano xy, che rappresenta l'angolo rispetto all'asse z.

$$x = \rho\sin(\phi)\cos(\theta)$$
$$y = \rho\sin(\phi)\sin(\theta)$$
$$z = \rho\cos(\phi)$$

Capitolo 10 – Calcolo Vettoriale

36) Superfici orientabili

Una superficie si dice orientabile se risulta possibile fissare un'orientazione.
Il nastro di Moebius è un esempio di superficie non orientabile.

37) Area di una superficie e integrale di superficie di I specie

Vi sono diversi modi per definire una superficie in R^3:
1 – Forma Parametrica

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}$$

2 – Grafico di una funzione

$$\boldsymbol{r}(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{bmatrix}$$

3 – Forma implicita

$$F(x, y, z) = c.$$

38) Area di una superficie regolare

Sia

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

la parametrizzazione di una superficie S. L'area della superficie S è data dall'integrale doppio

$$\boxed{mS = \iint_D ||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v||\, dudv.}$$

Essa viene giustificata dal fatto che $||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v||\, dudv$ è l'area del parallelogrammo costruito con i vettori

$$\boldsymbol{r}_u\, \Delta u = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \Delta u, \qquad \boldsymbol{r}_v\, \Delta v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \Delta v$$

39) Superfici come grafici di funzioni

Se la superficie è definita come grafico di una funzione z = f (x, y) e ho u = x, v = y e quindi

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}_x = (1, 0, f_x)\,, \quad \boldsymbol{r}_y = (0, 1, f_y) \\ &\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) \\ &||\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y|| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}. \end{aligned}$$

e dunque

$$\boxed{mS = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy.}$$

40) Integrale di linea di I specie su una superficie

Si dice integrale di I specie della funzione f sulla superficie S, l'integrale doppio:

$$\boxed{\int_S f\, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v||\, dudv,}$$

Possono essere definiti come limiti delle somme integrali ottenute suddividendo la superficie S in porzioni S_i con area m * S_i.

41) Integrale di linea di II specie del campo F (flusso)

Si dice integrale di II specie del campo F mediante superficie S, l'integrale doppio:

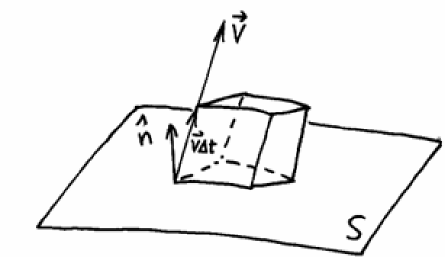
$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

con

$$\boldsymbol{n}\, dS = \pm \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v||} ||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v||\, dudv = \pm \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\, dudv$$

Si può avere quindi

$$\pm \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\, dudv.$$



42) Rotore e divergenza

Dato

$$\boldsymbol{F} = F_1(x,y,z)\, \boldsymbol{e}_1 + F_2(x,y,z)\, \boldsymbol{e}_2 + F_3(x,y,z)\, \boldsymbol{e}_3$$

un campo vettoriale definito in un dominio

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

Il rotore è

$$\text{rot}(\boldsymbol{F}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) \boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \boldsymbol{e}_3.$$

La divergenza è invece

$$\text{div}\, \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

43) Formula di Stokes

Supponiamo che le componenti del campo vettoriale F siano continue con le loro derivate parziali su S (frontiera inclusa). Vale allora la formula di Stokes:

$$\boxed{\oint_C (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t})\, d\ell = \iint_S (rot(\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n})\, dS,}$$

dove il senso di percorrenza di C deve essere scelto in modo che un osservatore "orientato" secondo n, muovendosi lungo C, abbia S a sinistra.

44) Regione semplice

Una regione è definita semplice se ammette sia una suddivisione in un numero finito di parti del tipo

$$(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)$$

sia una suddivisione in un numero finito di parti del tipo

$$(x,z) \in D' \subset \mathbb{R}^2, \quad y_1(x,z) \leqslant y \leqslant y_2(x,z)$$

sia una suddivisione in un numero finito di parti del tipo

$$(y,z) \in D'' \subset \mathbb{R}^2, \quad x_1(y,z) \leqslant x \leqslant x_2(y,z)$$

dove $z_i(x,y), y_i(x,z), x_i(y,z),\ i = 1,2$ sono differenziabili a tratti.

45) Formula di Gauss: enunciare teorema

Sia

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3$$

un dominio semplice limitato avente frontiera $S = \partial\Omega$ differenziabile a tratti. Supponiamo che le componenti (F1(x, y, z), F2(x, y, z), F3(x, y, z)) del campo vettoriale F siano continue con le loro derivate parziali

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}, \ \frac{\partial F_2}{\partial y} \ \text{e} \ \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

in V (frontiera inclusa). Vale allora la formula di Gauss

$$\boxed{\iint_S (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, dS = \iiint_\Omega div\, \boldsymbol{F}\, dV}$$

dove n è la normale uscente.

46) Formula di Gauss: dimostrazione

La dimostrazione del teorema della divergenza richiede l'uso del teorema fondamentale del calcolo per funzioni di più variabili. Considerando un volume V nello spazio tridimensionale con una superficie chiusa ∂V.

1. Teorema divergenza del cubo

Consideriamo un piccolo cubo Vi con i lati paralleli agli assi coordinati. Il flusso netto del campo vettoriale F attraverso la superficie del cubo Vi può essere calcolato sommando i flussi attraverso ciascuna delle sei facce del cubo.

Per semplicità considero che il cubo abbia lunghezza laterale Δx, Δy, e Δz.

Il flusso netto è dato da

$$F_x|_{x_0+\Delta x}\, \Delta y \Delta z - F_x|_{x_0}\, \Delta y \Delta z$$

Dividendo per Δx e prendendo il limite per $\Delta x \to 0$, otteniamo la derivata parziale:

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Similmente, per le facce per y e z, otteniamo:

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$
$$\frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Sommando i flussi netti di tutte le facce del cubo ottengo

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z = (\nabla \cdot \mathbf{F}) \Delta V$$

dove $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ è il volume del cubo.

2. Somma dei cubetti

La somma dei flussi attraverso i cubetti diventa quindi l'integrale di superficie:

$$\sum_i \oint_{\partial V_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

E la somma dei volumi dei cubetti è semplicemente il volume V:

$$\sum_i (\nabla \cdot \mathbf{F}) \Delta V_i = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, dV$$

47) Campo vettoriale solenoidale: teorema e dimostrazione

Teorema: Un campo vettoriale si dice solenoidale se la sua divergenza è identicamente nulla.

Dimostrazione: Basta fare il conto in coordinate cartesiane. Se indichiamo con (A_1, A_2, A_3) le componenti del campo A, ottengo

$$\text{div}\, \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) = 0$$

48) Potenziale vettore

Il campo vettoriale A si dice potenziale vettore del campo vettoriale F se F = rot A.