Appunti Matematica II

Capitolo 1 – Curve nello spazio

1) Cosa si intende per curva parametrizzata?

Si dice curva parametrizzata nello spazio euclideo R^n una funzione x definita tra l'intervallo chiuso e limitato [a, b] sottoinsieme di R e il vettore v appartenente a R^n.
La funzione x è così definita:

$$\mathbf{x} : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

Essa associa ad ogni t ∈ [a, b] un vettore di R^n.

$$t \to \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Le funzioni $x_1(t)$, …, $x_n(t)$ vengono definite componenti della curva.

2) Cosa si intende per vettore velocità?

Assumendo che le funzioni $x_i(t)$ siano derivabili con continuità, il vettore

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

è chiamato vettore tangente alla curva nel punto ($x_1(t)$, …, $x_n(t)$). Se t rappresenta l'unità di tempo, il vettore tangente è chiamato anche vettore velocità.

3) Cosa si intende per curva regolare?

La curva x : [a, b] → R^n si dice regolare se soddisfa le seguenti proprietà:
→ $\mathbf{x}(t_1) \neq \mathbf{x}(t_2)$ se $t_1 \neq t_2$ e $t_1, t_2 \in [a, b]$.
→ la lunghezza del vettore tangente

$$\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}$$

è strettamente positiva per ogni valore del parametro.
Se x(a) = x(b) si dice che la curva è chiusa e regolare.

4) Moto rettilineo uniforme

Considerando la curva x(t) = vt + x_0 con t in [a, b], si tratta del segmento di retta che congiunge i punti x_a = v * a + x_0 e x_b = v * b + x_0. Abbiamo quindi $x_i(t) = v_i t + x_i^0, \quad i = 1, \ldots, n.$ Il vettore tangente è costante (moto rettilineo uniforme).

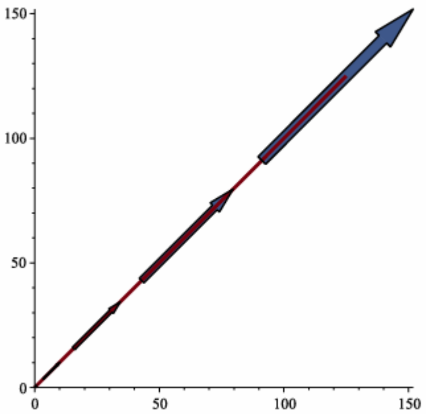
5) Moto rettilineo non uniforme

Considerando la curva in R^2 di equazioni parametriche

$$x(t) = t^3, \qquad y(t) = t^3$$

con t appartenente a R. Se si elimina il parametro t si ottiene y = x, ovvero una bisettrice tra il primo e il terzo quadrante. Il vettore tangente è però non costante (moto rettilineo non uniforme).

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2, \qquad \frac{dy}{dt} = 3t^2$$



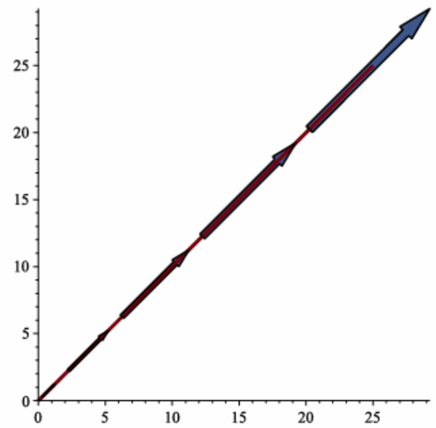
6) Moto su una semiretta

Considerando la curva in R^2 di equazioni parametriche

$$x(t) = t^2, \qquad y(t) = t^2$$

con t appartenente a R. Se si elimina il parametro t si ottiene y = x.
Considerando x >= 0 e y >= 0, si ha

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2t.$$



7) Moto circolare uniforme

Considerando la curva in R^2 di equazioni parametriche

$$x(t) = R\cos t, \qquad y(t) = R\sin t$$

con t appartenente a [0, 2π]. Dalla relazione

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

segue che

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

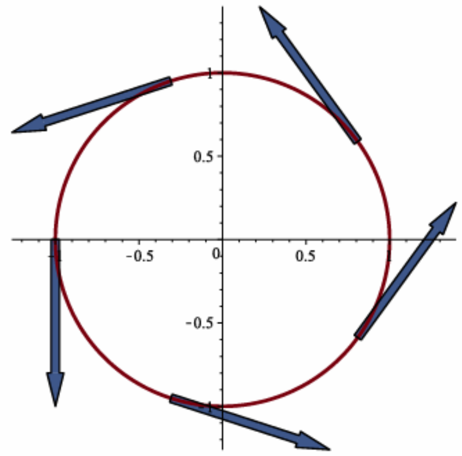
cioè

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Il vettore tangente

$$\frac{dx}{dt} = -R\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = R\cos t$$

ha lunghezza costante pari a R.



Considerando la curva in R^3 di equazioni parametriche

$$x(t) = R\cos t, \qquad y(t) = R\sin t, \qquad z(t) = ct$$

con t appartenente a [0, 2π]. Il vettore tangente

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = \cos t \qquad \frac{dz}{dt} = c$$

ha lunghezza costante pari a $\sqrt{R^2 + c^2}$.

8) Lunghezza di un arco di una curva regolare

La lunghezza di un arco di una curva regolare è definito come

$$\ell = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| dt$$

con t appartenente ad [a, b].

Si ha che l è equivalente a

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}\, dt}$$

9) Lunghezza di un segmento

Considerando il segmento descritto dalle seguenti equazioni parametriche

$$x(t) = (x_2 - x_1)t + x_1, \qquad y(t) = (y_2 - y_1)t + y_1$$

con t appartenente a [0, 1]. Si tratta di un segmento che congiunge i punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Si ottiene quindi

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\, dt = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

10) Lunghezza di una circonferenza

Considerando la circonferenza di raggio R descritto dalle seguenti equazioni parametriche

$$x(t) = R\cos t, \qquad y(t) = R\sin t$$

con t appartenente a [0, 2π].

Si ha che la lunghezza della circonferenza è

$$\ell = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R.$$

11) Approssimazione lunghezza di una curva

L'idea di base dell'approssimazione di una lunghezza di una curva è quella di approssimare la curva parametrica con un polinomio di Taylor centrato in un punto e poi calcolare la lunghezza dell'arco di quel polinomio. Si effettuano quindi i seguenti passaggi:

→ si sceglie un punto di riferimento lungo la curva parametrica;

$$x_i = x_i(t), \qquad i = 1, ..., n$$

→ si calcolano le derivate successive delle funzioni parametriche rispetto al parametro t in quel punto;

→ vengono utilizzate tali derivate per costruire il polinomio di Taylor della curva;

→ si calcola l'integrale della radice quadrata della somma dei quadrati delle derivate del polinomio di Taylor;

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}(\bar{t})\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}(\bar{t})\right)^2}\,\Delta t$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

→ questo integrale approssimerà la lunghezza dell'arco della curva intorno al punto di riferimento.

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Capitolo 2 – Funzioni in più variabili

12) Concetto di funzione a più variabili

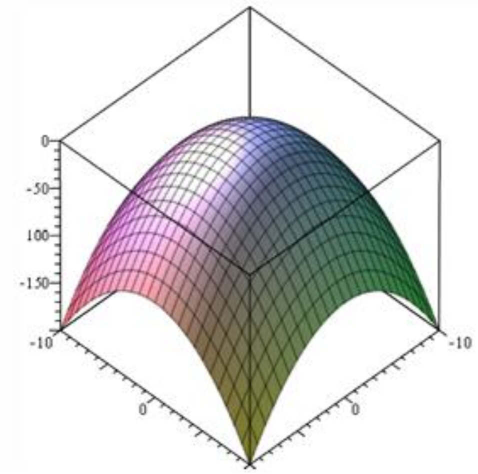
Sia f: D → R, con D = R^n, una funzione definita tra il dominio R^n e il codominio R.

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Il grafico di f è il sottoinsieme di R^{n+1} definito dai punti della forma (x_1, x_2, …, x_n, f(x_1, x_2, …, x_n)).

Esempio:

Grafico della funzione f = $-x^2 - y^2$ nel quadrato [-10, 10] x [-10, 10].



13) Intorno di una funzione: definizione

Si denota con $B_a(x^*)$ l'insieme dei punti di R^n che distano da x* meno di a:

$B_a(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < a\}$

Si dice che $B_a(x^*)$ è un intorno di x* di raggio a.

Esempio:

1) In R^2 $B_a(x^*)$ è l'insieme dei punti situati all'interno di una circonferenza di raggio a centrata in x*.

2) In R^3 $B_a(x^*)$ è l'insieme dei punti situati all'interno di una sfera di raggio a centrata in x*.

14) Limite di una funzione: definizione

Sia f: D → R, con D = R^n. Si dice che il limite di f per x → x_0 è uguale a l se, per ogni ε > 0, esiste δ > 0 tale che

$|f(\mathbf{x}) - l| < \epsilon$

per tutti i punti x ∈ $B_\delta(x_0)$ eccetto al più x_0.

15) Continuità di una funzione: definizione

Sia f: D → R, con D = R^n. Si dice che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

16) Derivate parziali

Sia f: D → R, con D = R^n. La derivata parziale di f rispetto alla variabile x_j nel punto P = (¬x_1, …, ¬x_n) è definita nel seguente modo

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(P) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j + \Delta x_j, \bar{x}_{j+1}, \ldots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\Delta x_j}}$$

Per rappresentare le derivate parziali si usa anchela notazione f'_{xj}.

Esempio

Due variabili (x, y):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\bar{x} + \Delta x, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(\bar{x}, \bar{y} + \Delta y) - f(\bar{x}, \bar{y})}{\Delta y}$$

Tre variabili (x, y, z):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\bar{x} + \Delta x, \bar{y}, \bar{z}) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(\bar{x}, \bar{y} + \Delta y, \bar{z}) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\Delta y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} + \Delta z) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\Delta z}$$

17) Derivate parziali di secondo ordine

Ordine di derivazione	Simbologia
Si deriva f'_x rispetto a x	f''_{xx}
Si deriva f'_x rispetto a y	f''_{xy}
Si deriva f'_y rispetto a x	f''_{yx}
Si deriva f'_y rispetto a y	f''_{yy}

18) Funzione derivabile

Una funzione f: D → R, con D = R^n viene definita derivabile se in (x1, …, xn) ammette la derivata per ogni $x_i \in R$ e 1 <= i <= n.

19) Teorema di Schwarz

Se una funzione z = f (x, y) ammette entrambe le derivate parziali miste f''_{xy} ed

f''_{yx} e tali derivate sono continue in un punto (x_0, y_0), allora:
$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

20) Differenziale di una funzione in due variabili

Data la funzione $f(x, y) = z$ e un punto $P(x_0, y_0)$, interno al dominio di f si dice differenziale della funzione f, relativo al punto P e agli incrementi dx e dy, l'espressione $f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$.

21) Teorema sulle funzioni derivabili

Si suppone che f sia una funzione di n variabili, che possieda derivate parziali fino all'ordine N nell'intorno di un punto $P = (x_1, \dots, x_n)$. Si suppone inoltre che le derivate parziali di ordine N siano continue in P. Allora le derivate parziali di ordine N in P non dipendono dall'ordine in cui vengono effettuate.

Esempio: con N = 2 si ha l'identità

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Esempio: con $f = x^2y^3$ ho che

$$f_x = 2xy^3, \quad f_y = 3x^2y^2, \quad f_{xx} = 2y^3, \quad f_{xy} = 6xy^2,$$
$$f_{yx} = 6xy^2 \quad f_{yy} = 6x^2y, \quad f_{xxx} = 0, \quad f_{xxy} = 6y^2,$$
$$f_{xyx} = 6y^2, \quad f_{yxx} = 6y^2, \quad f_{xyy} = 12xy, \quad f_{yxy} = 12xy,$$
$$f_{yyx} = 12xy, \quad f_{yyy} = 6x^2.$$

22) Definizione 1 (differenziabile)

Una funzione f si dice differenziabile in un punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ se esistono delle costanti $m_1, \dots, m_n$ tali che

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - \bar{x}_k) + o(\rho)$$

dove

$$\rho = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \cdots + (x_n - \bar{x}_n)^2}$$

e

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$$

23) Corollario (differenziabile)

La differenziabilità implica la continuità.

24) Definizione 2 (differenziabile)

Una funzione f si dice differenziabile in un punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ se esiste una costante m tale che

$$f(x) = f(\bar{x}) + m(x - \bar{x}) + o(\Delta x)$$

dove

$$\Delta x = x - \bar{x}$$

e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$

Dalla definizione segue che

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = m + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

Ho che il limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = m$$

25) Teorema (differenziabilità) e dimostrazione

Se f è differenziabile in ¬x = (¬x1, …, ¬xn) allora in questo punto essa possiede le derivate parziali del I ordine e

$$m_i = f_{x_i}(\bar{\mathbf{x}})$$

Dimostrazione:

Sia

$$\Delta f = f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \qquad \Delta x_i = x_i - \bar{x}_i$$

Allora il fatto che f sia differenziabile in ¬x può essere riscritto nella forma

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i + o(\rho)$$

per certe costanti $m_1, \dots, m_n$.

In particolare è possibile scegliere x_i = ¬x_i per i /= 1. Con questa scelta ho che

$$\Delta f = f(x_1, \bar{x}_2 \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n),\ \Delta x_2 = 0,\ \Delta x_3 = 0, \dots, \Delta x_n = 0$$

e la formula precedente la riduce in

$$\Delta f = m_1 \Delta x_1 + o(\Delta x_1)$$

Quindi

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_1} = m_1 + o(\Delta x_1)$$

Di conseguenza

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} = m_1$$

25) Teorema (differenziabilità) 2

Sia f una funzione di n variabili. Supponiamo che f possieda le derivate parziali del I ordine nell'intorno di un punto P = (¬x1, …, ¬xn) e che esse siano continue in tale punto. Allora essa è differenziabile.

26) Piano Tangente

Il piano di equazione

$$z - f(P) = f_x(P)(x - \bar{x}) + f_y(P)(y - \bar{y})$$

si chiama piano tangente al grafico di f in

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})).$$

27) Approssimazione lineare e piano tangente

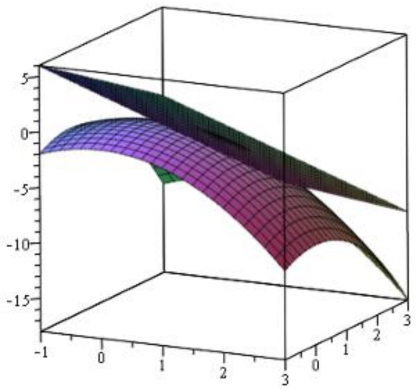
Una funzione può essere definita differenziabile in P se nelle vicinanze di P è ben approssimata dalla funzione lineare

$$f_{lin}(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(P)(x - \bar{x}) + f_y(P)(y - \bar{y})$$

Il piano di equazione

$$z - f(P) = f_x(P)(x - \bar{x}) + f_y(P)(y - \bar{y})$$

è il grafico di f_{lin}.



28) Definizione di restrizione della curva

Sia

$$\boldsymbol{x} : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

una curva regolare e sia

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

una funzione di n variabili. La funzione

$$F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ottenuta dalla composizione di queste due funzioni:

$$F(t) := f(\mathbf{x}(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

si chiama restrizione di f alla curva x(t).

29) Definizione di derivata di f lungo la curva in P = ($x_1(t)$, …, $x_n(t)$)

Sia f una funzione differenziabile di n variabili. Considerando la restrizione di f alla curva regolare x(t):

$$F(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

La derivata di F in $\bar{t}$ si chiama derivata di f lungo la curva in P = ($x_1(t)$, …, $x_n(t)$).

Vale la formula

$$F'(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \frac{dx_i}{dt}(\bar{t})$$

Dimostrazione:

Siano Δx_i gli incrementi delle variabili x_i che corrispondono ad un incremento Δt del parametro

$$\Delta x_i = x_i(\bar{t} + \Delta t) - x_i(\bar{t}).$$

Per l'ipotesi di differenziabilità vale che

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \Delta x_i + o(\rho).$$

Dividendo entrambi i membri per Δt e passando al limite di $\Delta t \to 0$ si ha che

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2} = \left\| \frac{dx}{dt}(\bar{t}) \right\| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

dove $\frac{dx}{dt}(\bar{t})$ è il vettore tangente alla curva.

30) Definizione di gradiente

La funzione a valori vettoriali

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

si dice gradiente della funzione f.

Possiamo riscrivere la definizione di differenziabilità come

$$\Delta f = \nabla f(P) \cdot \Delta x + o(\rho)$$

dove $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.

31) Definizione di derivata direzionale

Si ha la possibilità riscrivere la formula

$$F'(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \frac{dx_i}{dt}(\bar{t})$$

come

$$F'(\bar{t}) = \frac{d}{dt}_{|t=\bar{t}} f(\mathbf{x}(t)) = \nabla f(P) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(\bar{t}).$$

Sia f una funzione differenziabile di n variabili e sia v un vettore unitario. Il prodotto scalare

$$\nabla f(P) \cdot \mathbf{v}$$

si dice derivata di f nella direzione di v nel punto P e si indica con

$$L_{\mathbf{v}}(f)(P)$$

32) Definizione di curve di livello

Una curva

$$\boldsymbol{x} : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

si dice curva di livello della funzione

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

se f è ristretta alla curva è costante:

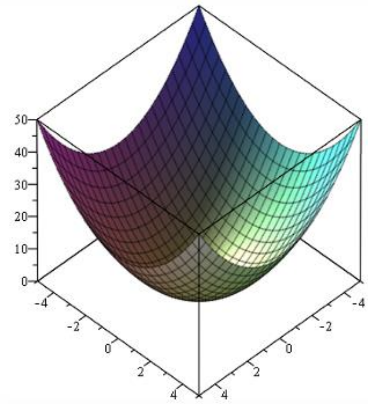
$$f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = c.$$

Derivando f lungo una curva di livello si ottiene la relazione

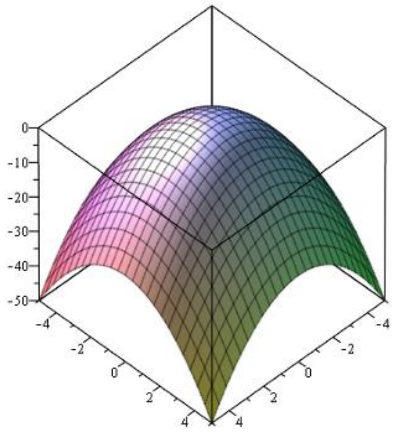
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0$$

che indica che il gradiente di una funzione valutata in un punto è ortogonale (prodotto vettoriale nullo) a tutte le curve di livello passanti per quel punto.

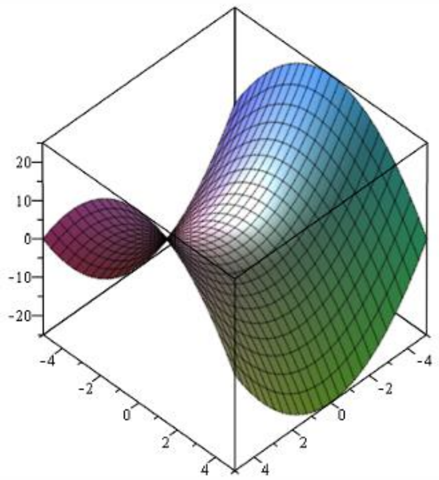
Esempio 1: Grafico della funzione f = $x^2 + y^2$ nel quadrato [-5, 5] x [-5, 5].



Esempio 2: Grafico della funzione f = $-x^2 - y^2$ nel quadrato [-5, 5] x [-5, 5].



Esempio 3: Grafico della funzione f = $x^2 - y^2$ nel quadrato [-5, 5] x [-5, 5].



Capitolo 3 – Massimi e minimi locali

33) Sviluppo di Taylor (I e II ordine)

Sia f: $R^2 \rightarrow R$.

Se si supponesse che in un intorno di un punto P (¬x, ¬y) la funzione f possieda derivate parziali continue fino all'ordine l, allora, considerando un punto P' = (x, y) = $(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y)$ appartenente a quest'intorno, la retta che congiunge P e P' ha equazioni parametriche

$$x(t) = \bar{x} + t\Delta x, \qquad y(t) = \bar{y} + t\Delta y$$

Lo sviluppo di Taylor di ordine l – 1 di F intorno a t = 0:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \cdots + \frac{F^{(l-1)}(0)}{(l-1)!}t^{l-1} + \frac{F^{(l)}(\theta)}{l!}t^l$$

Generalizzando si ha per lo sviluppo di I ordine:

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\bar{\mathbf{x}})\Delta x_i} + \ldots$$

Per lo sviluppo di II ordine si ha

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\bar{\mathbf{x}})\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\bar{\mathbf{x}})\Delta x_i\,\Delta x_j} + \dots$$

34) Massimi e minimi locali (definizione)

→ Un punto P si dice punto di massimo locale (stretto) per una funzione f se esiste un intorno $B_\delta(P)$ tale che

$$f(P') \leqslant f(P), \qquad (f(P') < f(P))$$

per ogni P' ∈ $B_\delta(P)$. Il valore di f in tale punto si dice massimo locale.

→ Un punto P si dice punto di minimo locale (stretto) per una funzione f se esiste un intorno $B_\delta(P)$ tale che

$$f(P') \geqslant f(P), \qquad (f(P') > f(P))$$

per ogni P' ∈ $B_\delta(P)$. Il valore di f in tale punto si dice minimo locale.

35) Condizione necessaria di un estremo (teorema e dimostrazione)

Sia f: R^2 → R una funzione definita in un insieme D sottoinsieme di R^2.
Se (x_0, y_0) è un punto di massimo o minimo relativo interno all'insieme D e se esistono le derivate parziali prime di f in (x_0, y_0), allora risulta che:

$f'_x(x_0, y_0) = 0$

$f'_y(x_0, y_0) = 0$

Dimostrazione

La funzione f ristretta alla retta $x_1 = \bar{x}_1 + t,\ x_2 = \bar{x}_2, \dots, x_n = \bar{x}_n$ è $F(t) = f(\bar{x}_1 + t, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ha un estremo in t = 0.

Deve soddisfare la condizione F'(0) = 0.

D'altra parte per definizione si ha

$F'(0) = f_{x_1}(P)$

quindi

$f_{x_1}(P) = 0$

36) Definizione di punto stazionario

Si dice che che P = $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ è un punto stazionario di f se valgono le condizioni

$$f_{x_i}(P) = 0, \qquad i = 1, .., n$$

cioè se il gradiente si annulla nel punto P.

37) Definizione di hessiano

Sia f: R^2 → R una funzione che ammette derivate parziali seconde continue in (x_0, y_0). Si definisce hessiano di f nel punto (x_0, y_0), e si indica con il simbolo H

(x_0, y_0), il seguente determinante:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{bmatrix}$$

$H(x_0, y_0) = f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) * f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) - f_{yx}(\bar{x},\bar{y}) * f_{xy}(\bar{x},\bar{y})$

38) Criterio per l'analisi dei punti stazionari

Sia $f: R^2 \to R$ una funzione che ammette derivate parziali seconde continue in (x_0, y_0) e sia (x_0, y_0) un punto stazionario, allora vale quanto segue:

→ se $H(x_0, y_0) > 0$ && $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, allora (x_0, y_0) è minimo relativo;

→ se $H(x_0, y_0) > 0$ && $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, allora (x_0, y_0) è massimo relativo;

→ se $H(x_0, y_0) < 0$, allora (x_0, y_0) è punto di sella;

→ se $H(x_0, y_0) = 0$, allora occorre procedere ad ulteriori analisi per stabilire la natura del punto (x_0, y_0).

Capitolo 4 – Massimi e minimi assoluti

39) Punti di massimo e minimo assoluti

Si dice che (x_0, y_0) è un punto di massimo assoluto (o globale) per la funzione f (x, y), di dominio D, se risulta $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ per ogni (x, y) appartenenti a D. Analogamente si dice che (x_0, y_0) è un punto di minimo assoluto per la funzione f(x, y), di dominio D, se risulta $f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$ per ogni (x, y) appartenenti a D.

40) Teorema di Weierstrass

Se una funzione f (x, y) è continua in un insieme D sottoinsieme di R^2 chiuso e limitato, allora tale funzione ammette massimo e minimo assoluti in D.

41) Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange

Considerando la funzione f (x, y) e il vincolo g (x, y) = 0, essendo f e g due funzioni che supponiamo:

→ dotate di derivate parziali come continue;

→ tali che le derivate parziali prime di g (x, y) non si annullano contemporaneamente in corrispondenza di alcun punto appartenente al vincolo.

Se (x0, y0) è un punto di estremo relativo della funzione f (x, y), soggetta al vincolo g (x, y) = 0, allora esiste $\lambda \in R$, chiamato moltiplicatore di Lagrange tale che

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \lambda g'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) = \lambda g'_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Capitolo 5 – Superfici

42) Come può essere rappresentata una superficie bidimensionale nello spazio tridimensionale?

Una superficie bidimensionale nello spazio euclideo tridimensionale può essere rappresentata:

→ come grafico di una funzione di due variabili;

→ in forma parametrica, cioè come immagine di una funzione vettoriale

$$\boldsymbol{x} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$

→ come superficie di livello di una funzione di tre variabili.

43) Superfici nello spazio euclideo tridimensionale

Considerando lo spazio euclideo tridimensionale in R^3 con coordinate euclidee (x, y, z), una superficie liscia parametrizzata è definita da una funzione x (s, t) da un dominio D del piano (s, t) allo spazio euclideo R^3. In coordinate essa è rappresentata da tre funzioni in tre variabili

$$\boldsymbol{x}(s,t) = \begin{bmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{bmatrix}$$

Sia ora (s (segnato), t (segnato)) un punto nel piano (s, t) e x (segnato) = x (s (segnato), t (segnato)) appartenente a S la sua immagine nello spazio euclideo. Il sottoinsieme di punti della forma x (s, t(segnato)) è una curva nello spazio euclideo contenuta in S e passante per x (segnato).

Il vettore

$$\boldsymbol{x}_s(\bar{s},\bar{t}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(\bar{s},\bar{t}) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(\bar{s},\bar{t}) \\ \frac{\partial z}{\partial s}(\bar{s},\bar{t}) \end{bmatrix}$$

è tangente a tale curva in x (segnato). Similmente il vettore

$$\boldsymbol{x}_t(\bar{s},\bar{t}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(\bar{s},\bar{t}) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(\bar{s},\bar{t}) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(\bar{s},\bar{t}) \end{bmatrix}$$

è tangente a tale curva in x (segnato).

44) Superfici regolari

Una superficie viene definita regolare se:

→ la funzione x (s, t) è iniettiva;

→ i vettori x_s e x_t siano linearmente indipendenti in ogni punto.

45) Rappresentazione parametrica di un piano

Dato un punto di passaggio $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ed una coppia di vettori linearmente indipendenti v e w paralleli al piano l'equazione parametrica è data da

$$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}} + s\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{w}, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + s\,v_1 + t\,w_1, \\ y &= \bar{y} + s\,v_2 + t\,w_2, \\ z &= \bar{z} + s\,v_3 + t\,w_3. \end{aligned}$$

46) Rappresentazione parametrica della sfera

La rappresentazione parametrica della sfera è la seguente:

$$\boldsymbol{x}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta \end{bmatrix}$$

con $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$.

47) Latitudine, longitudine, meridiani e paralleli

Premessa:

θ → latitudine

φ → longitudine

Le curve della sfera

$\boldsymbol{x}(\theta, \bar{\varphi})$ si chiamano meridiani

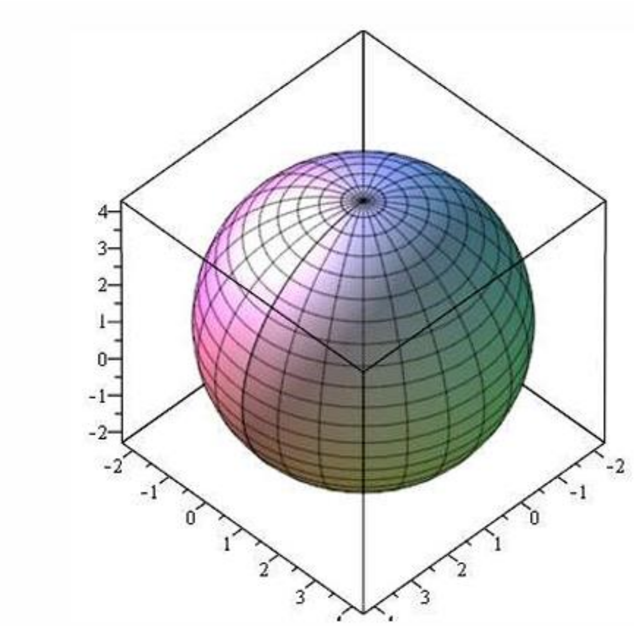
Le curve della sfera

$\boldsymbol{x}(\bar{\theta}, \varphi)$ si chiamano paralleli

I vettori

$$\boldsymbol{x}_\theta = \begin{bmatrix} -R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_\varphi = \begin{bmatrix} -R\cos\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

in ogni punto sono tangenti rispettivamente al meridiano ed al parallelo passanti per quel punto.



I grafici di funzioni sono espressi come

$$\boldsymbol{x}(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix}$$

e i vettori

$$\boldsymbol{x}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{bmatrix}$$

sono indipendenti.

48) Enunciare il Teorema sulle superfici regolari e fornire un esempio

Localmente una superficie regolare può essere sempre espressa come grafico di una funzione di due variabili.

Esempio

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \qquad f(x,y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

rappresentano le due semisfere che compongono la sfera di raggio R centrata nell'origine.

49) Restrizione di funzioni a superfici

Si chiama restrizione di f a S la funzione

$$F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

definita componendo le due funzioni x (s, t) e f (x, y, z):

$$F(s,t) := f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

50) Regola di derivazione della funzione composta

Se f è differenziabile e x è regolare valgono le seguenti formule

$$\begin{aligned} F_s(\bar{s},\bar{t}) &= \nabla f(P) \cdot \mathbf{x}_s(\bar{s},\bar{t}) \\ F_t(\bar{s},\bar{t}) &= \nabla f(P) \cdot \mathbf{x}_t(\bar{s},\bar{t}) \end{aligned}$$

dove P = $\mathbf{x}(\bar{s},\bar{t})$.

51) Spazio tangente ad una superficie: rappresentazione parametrica

Sia x (u, v) una superficie parametrizzata.

L'equazione parametrica del piano tangente a S in ¬x è

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + s\,\mathbf{x}_u(\bar{u},\bar{v}) + t\,\mathbf{x}_v(\bar{u},\bar{v}).$$

cioè

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + s\,\frac{\partial x}{\partial u}(\bar{u},\bar{v}) + t\,\frac{\partial x}{\partial v}(\bar{u},\bar{v}), \\ y &= \bar{y} + s\,\frac{\partial y}{\partial u}(\bar{u},\bar{v}) + t\,\frac{\partial y}{\partial v}(\bar{u},\bar{v}), \\ z &= \bar{z} + s\,\frac{\partial z}{\partial u}(\bar{u},\bar{v}) + t\,\frac{\partial z}{\partial v}(\bar{u},\bar{v}). \end{aligned}$$

52) Prodotto vettore di due vettori

Dati due vettori

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

il loro prodotto vettoriale v w è il vettore è

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \sin\alpha\, \mathbf{n}$$

dove a è l'angolo compreso tra i due vettori e n è il versore ortogonale al piano a cui appartengono v e w scelto seguendo la regola della mano sinistra.

Il versore n risulta essere uguale a

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_u(\bar{u},\bar{v}) \times \mathbf{x}_v(\bar{u},\bar{v}).$$

53) Superfici di livello

Sia f: $R^3 \rightarrow R$ una funzione di tre variabili. Si dice che la superficie regolare S di equazioni parametriche

$$\mathbf{x}(s,t) = \begin{bmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{bmatrix}$$

è una superficie di livello di f se f ristretta a S è costante:

$$f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = \text{costante}.$$

54) Gradiente e superfici di livello

Derivando rispetto ai parametri si ottengono le condizioni

$$F_s = \nabla f \cdot \mathbf{x}_s = 0$$
$$F_t = \nabla f \cdot \mathbf{x}_t = 0$$

Quindi il gradiente di f è ortogonale ai vettori x_s e x_t che sono linearmente indipendenti e tangenti alla superficie.

55) Superfici di livello in forma implicita

Una superficie di livello in R^2 è definita mediante l'equazione

$$F(x,y) = c.$$

In R^3, invece, risulta così definita

$$F(x,y,z) = c.$$

56) Derivata di una funzione definita implicitamente

Caso R^2

Utilizzando il teorema di derivazione della funzione composta risulta possibile esprimere la derivata della funzione f(x) in termini delle derivate parziali della funzione F (x, y).

Infatti derivando ambo i membri dell'identità

$$F(x, f(x)) = 0$$

rispetto a x si ottiene

$$F_x + F_y f' = 0$$

che implica

$$f' = -\frac{F_x}{F_y}$$

Caso R^3

Utilizzando il teorema di derivazione della funzione composta risulta possibile esprimere la derivata della funzione f(x, y) in termini delle derivate parziali della funzione F (x, y, z).

Infatti derivando ambo i membri dell'identità

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

rispetto a x e y si ottiene

$$F_x + F_z f_x = 0, \qquad F_y + F_z f_y = 0$$

che implica

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad f_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

57) Teorema della funzione implicita: R^2 e R^3

Caso R^2

Supponendo che la funzione F (x, y) abbia derivate parziali continue in un intorno di un punto (x_0, y_0) dove

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esiste un intorno di (x_0, y_0) tale che i punti (x, y) che soddisfano l'equazione

$$F(x, y) = 0$$

appartengono al grafico di una funzione f (x):

$$F(x, f(x)) = 0.$$

La funzione f così definita soddisfa la condizione y_0 = f (x_0).

Caso R^3

Supponendo che la funzione F (x, y, z) abbia derivate parziali continue in un intorno di un punto (x_0, y_0, z_0) dove

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Allora esiste un intorno di (x_0, y_0, z_0) tale che i punti (x, y, z) che soddisfano l'equazione

$$F(x, y, z) = 0$$

appartengono al grafico di una funzione f (x, y):

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

La funzione f così definita soddisfa la condizione z_0 = f (x_0, y_0).

58) Regola di derivazione della funzione composta

$$\tilde{F}(s, t) = F(x(s, t), y(s, t), z(s, t)).$$

Allora

$$\tilde{F}_s = F_x x_s + F_y y_s + F_z z_s$$

$$\tilde{F}_t = F_x x_t + F_y y_t + F_z z_t$$

59) Rappresentazione cartesiana di un piano

Dato un punto di passaggio $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ed un vettore ortogonale al piano

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

l'equazione cartesiana del piano è data da

$$a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) + c(z - \bar{z}) = 0.$$

60) Spazio tangente ad una superficie di livello

Sia S la superficie definita dall'equazione

$$F(x, y, z) = c.$$

L'equazione cartesiana del piano tangente a S nel punto $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ha la forma

$$F_x(\bar{\boldsymbol{x}})(x - \bar{x}) + F_y(\bar{\boldsymbol{x}})(y - \bar{y}) + F_z(\bar{\boldsymbol{x}})(z - \bar{z}) = 0,$$

dove $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sono le coordinate euclidee del punto $\bar{\boldsymbol{x}}$.