Forme Canoniche

▼ Creatore originale: @LucaCaffa

Forme Canoniche

Le forme canoniche sono modi standardizzati per descrivere le funzioni booleane. Queste forme hanno una diretta corrispondenza con le tabelle di verità, permettendo di determinare se due funzione sono identiche.

Le principali forme sono due:

- somma di mintermini;
- prodotto di maxtermini.

Mintermini

Un mintermine è una combinazione delle variabili di ingresso che rappresenta una singola riga della tabella della verità in cui la funzione vale 1. Un mintermine è il prodotto (AND) di tutte le variabili di ingresso che appaiono in forma negata o affermata.

f(x1,x2,x3)=x1x2x3f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3f(x1,x2,x3) = x1x2x3

> Se la variabile ha valore 1 appare in forma diretta (x)(x)(x), se ha valore 0 appare in forma negata (x¯)(\bar x)(x¯).

Maxtermini

Il maxtermine è l'opposto dei mintermini, poiché rappresentano le combinazioni delle variabili di ingresso per cui una funzione booleana vale 0. Un maxtermine è la somma (OR) di tutte le variabili di ingresso che appaiono in forma negata o affermata.

f(x1,x2,x3)=x1+x2+x3f(x_1, x_2, x_3) = x_1+ x_2+x_3f(x1,x2,x3) = x1 + x2 + x3

> Se la variabile ha valore 0 appare in forma diretta(x)(x)(x), se ha valore 1 appare in forma negata (x¯)(\bar x)(x¯).

Rappresentazione standard

Abbiamo visto come ogni combinazione delle variabili di una funzione booleana può essere scritto come:

- un mintermine, dove la funzione vale 1;
- un maxtermine, dove la funzione vale 0.

Per identificarli in maniera comoda, utilizziamo dei pedici per "contare" a quale mintermine (o maxtermine) ci stiamo riferendo.

A	B	C	Mintermine	Maxtermine
0	0	0	m0m_0m0	M0M_0M0
0	0	1	m1m_1m1	M1M_1M1
0	1	0	m2m_2m2	M2M_2M2
0	1	1	m3m_3m3	M3M_3M3
1	0	0	m4m_4m4	M4M_4M4
1	0	1	m5m_5m5	M5M_5M5
1	1	0	m6m_6m6	M6M_6M6
1	1	1	m7m_7m7	M7M_7M7

Proviamo a scrivere il mintermine m2m_2m2: avendo A=0,B=1,C=0A=0, B=1, C=0A = 0,B = 1,C = 0, si ha la sequenza 010, che porta ad avere il mintermine corrispondente: A¯BC¯\overline{A}B\overline{C}ABC.

Proviamo a scrivere il maxtermine M_2: avendo $A=0, B=1, C=0$, si ha la sequenza 010, che porta ad avere il maxtermine corrispondente: $A\overline{B}C$.

□□

Dal teorema di De Morgan, si ha che M_2 è il complemento di m_2, e viceversa.

$$M_2 = \overline{m_2} \Leftrightarrow m_2 = \overline{M_2}$$

Somma canonica di mintermini (SOM)

In questa forma, una funzione booleana è scritta come la somma (OR) di prodotti (AND). Ogni prodotto è un mintermine.

Supponiamo di avere la tabella della verità definita a lato per una funzione $f(A, B)$.

La funzione vale 1 per:

- A=0, B=1, per cui il mintermine è $\overline{A}B$;
- A=1, B=0, per cui il mintermine è $A\overline{B}$.

A	B	$f(A, B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

La somma di mintermini è definita come:

$$f(A, B) = \overline AB + A\overline B = m_1 + m_2$$

Prodotto canonico di maxtermini (POM)

In questa forma, una funzione booleana è scritta come il prodotto (AND) di somme (OR). Ogni somma è un maxtermine.

Supponiamo di avere la tabella della verità definita a lato per una funzione $f(A, B)$.

La funzione vale 0 per:

- A=0, B=0, per cui il maxtermine è $A + B$;
- A=1, B=1, per cui il maxtermine: $\overline{A} + \overline{B}$.

A	B	$f(A, B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Il prodotto di maxtermini è definito come:

$$f(A, B) = (A+B)(\overline A + \overline B) = M_1 + M_2$$

Forme standard

Oltre alle forme SOM e POM, esistono altre forme standard, come:

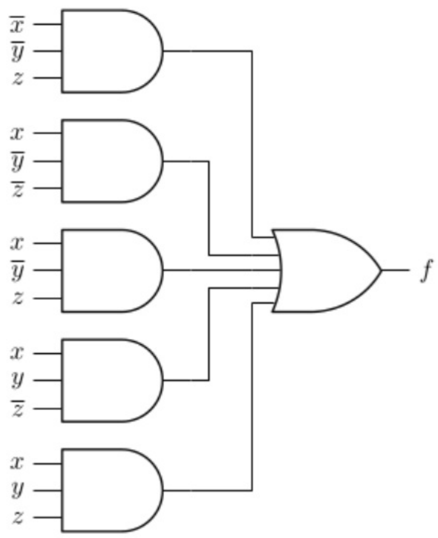
- somma di prodotti (SOP);
- prodotti di somme (POS).

La differenza con SOM e POM è il numero di variabili, infatti non abbiamo bisogno che tutte le variabili di ingresso siano presenti. In realtà, SOP è una forma più generica e semplice di SOM, come POS è una forma più generica di POM.

Esistono anche delle forme miste non standard che mischiano prodotti e somme.

Somma di prodotti (SOP) standard

Questa forma contiene somme di prodotti, ovvero termini OR di termini AND. L'implementazione è, quindi, una rete a due livelli di porte logiche, dove il primo livello sono delle porte AND e il secondo livello è una singola porta OR.



Rete a due livelli di porte logiche

▼ Esempio - Semplificazione di SOP

Prendiamo, in esempio, la seguente funzione:

$$f(x,y,z) = \overline{xy}z + x \overline{yz} + x \overline{y} z + x y \overline{z} + xyz$$

1. possiamo semplificare mettendo in comune x;

   $$f(x,y,z) = \overline{xy}z + x(\overline{yz} + \overline{y} z + y \overline{z} + yz)$$

2. □□

   Ricordiamo che $A + \bar A = 1$ e che $Y + 1 = Y$ come proprietà dei valori logici.

   Se ipotizziamo che $\bar yz = A$, allora $\bar A = \overline{\bar yz} = y\bar z$, possiamo sommare i termini $\bar yz$ e $y \bar z$, in modo da semplificare ulteriormente l'espressione;

   $$f(x,y,z) = \overline{xy}z + x(\overline{yz} + 1 + yz) = \overline{xy}z + x(\overline{yz} + yz)$$

3. nuovamente, sapendo che $\overline{yz} + yz = 1$, sommiamo i termini dentro le parentesi, come nel punto (2);

   $$f(x,y,z) = \overline{xy}z + x$$

4. □□

   Ricordiamo la legge di De Morgan:

   $$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B} \Rightarrow \overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$$

   Espandiamo il prodotto;

   $$f(x,y,z) = (\overline{x} + \overline{y})z + x$$

5. eseguiamo i prodotti con z;

   $$f(x,y,z) = \overline{x} z +\overline{y}z + x$$

6. □□

   Si ricorda la seguente proprietà:

   A+A¯B=A+BA+\overline{A}B = A+B
   A + AB = A + B

   Dimostriamola brevemente come segue, attraverso l'identità di A+A¯A+\overline{A}A + A.

   (A+A¯)(A+B)=A+AB+0+A¯B=A+B(A+A¯)=A+B\begin{align*}

   (A+\overline{A})(A+B) &= A + AB + 0 + \overline{A}B
   \\
   &= A + B(A+\overline{A})
   \\
   &= A+B

   \end{align*}(A + A)(A + B) = A + AB + 0 + AB = A + B(A + A) = A + B

   Semplifichiamo per x¯z+x\ \overline{x} z + x xz + x;

   f(x,y,z)=z+y¯z+xf(x,y,z) = z +\overline{y}z + xf(x, y, z) = z + yz + x

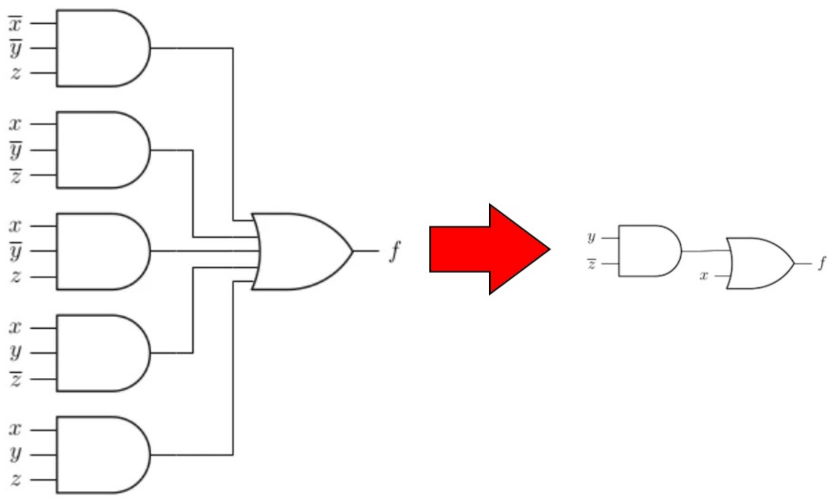
7. mettiamo in comune zzz;

   f(x,y,z)=z(1+y¯)+xf(x,y,z) = z (1 + \overline{y}) + xf(x, y, z) = z(1 + y) + x

8. visto che (1+y¯)=y¯(1 + \overline{y}) = \overline{y}(1 + y) = y, si può terminare la semplificazione come segue:

   f(x,y,z)=zy¯+xf(x,y,z) = z\overline{y} + xf(x, y, z) = zy + x

Dopo tutto questo procedimento, abbiamo la seguente semplificazione di circuito logico:



Semplificazione del circuito logico in SOP

Insiemi di operazioni completi

L'algebra booleana è interamente derivabile da un'insieme di porte {NOT, AND, OR}\text{\{NOT, AND, OR\}}{NOT, AND, OR}, poiché, grazie al teorema di De Morgan, possiamo passare da un'insieme all'altro.

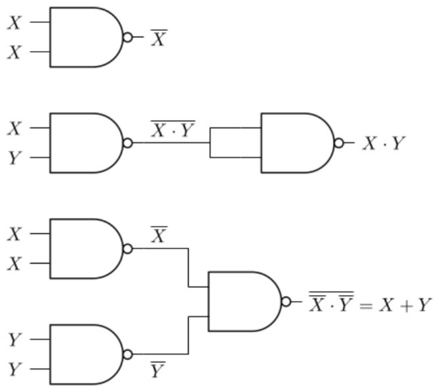
Ci sono due ulteriori insiemi molto importanti, gli insiemi {NAND}\text{\{NAND\}}{NAND} e {NOR}\text{\{NOR\}}{NOR}, da cui possiamo derivare l'intera algebra booleana.

Insieme NAND

Dall'insieme {NAND}\text{\{NAND\}}{NAND} si possono ricavare gli operatori NOT\text{NOT}NOT, AND\text{AND}AND e, dal teorema di De Morgan, l'operatore OR\text{OR}OR, combinando le porte NAND nel modo rappresentato in figura.

A partire dal circuito logico più in alto:

1. utilizzo di una porta NAND per la realizzazione di una funzione NOT;
2. utilizzo di due porte NAND per la realizzazione di una funzione AND;
3. utilizzo di due porte NAND per la realizzazione di una funzione OR.



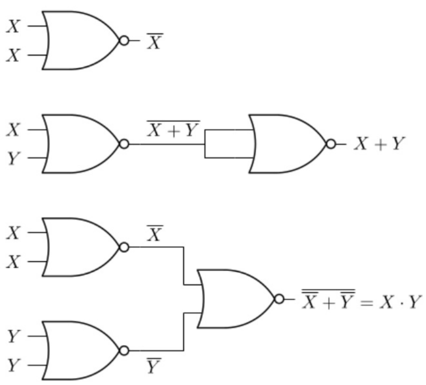
Da porte NAND a NOT, AND e OR.

Insieme NOR

Dall'insieme {NOR}\text{\{NOR\}}{NOR}, si possono ricavare gli operatori NOT\text{NOT}NOT, OR\text{OR}OR e, dal teorema di De Morgan, l'operatore AND\text{AND}AND, combinando le porte NOR nel modo rappresentato in figura.

A partire dal circuito logico più in alto:

1. utilizzo di una porta NOR per la realizzazione di una funzione NOT;
2. utilizzo di due porte NOR per la realizzazione di una funzione OR;
3. utilizzo di due porte NOR per la realizzazione di una funzione AND.



Da porte NOR a NOT, OR e AND.