Algebra di Boole

▼ Creatore originale: @LucaCaffa, @Gianbattista Busonera

Algebra di Boole

L'algebra di Boole definisce assiomi, teoremi e proprietà legati alle funzioni logiche, permettendo la semplificazione di funzioni logiche definite.

Assiomi

Gli assiomi sono delle **equivalenze** che permettono di semplificare le funzioni logiche e di definire le dimostrazioni dei teoremi.

$$0 \cdot 0 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1 \qquad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$0 + 0 = 0 \qquad 1 + 1 = 1 \qquad 1 + 0 = 1$$

$$x = 0 \rightarrow \overline{x} = 1 \qquad x = 1 \rightarrow \overline{x} = 0$$

Teoremi a una variabile

Definiamo i teoremi della funzione logica AND.

$$x \cdot 0 = 0 \qquad x \cdot 1 = x \qquad x \cdot x = x$$

Definiamo i teoremi della funzione logica OR.

$$x + 0 = x \qquad x + 1 = 1 \qquad x + x = x$$

Definiamo i teoremi di esistenza del complemento.

$$x \cdot \overline{x} = 0 \qquad x + \overline{x} = 1 \qquad \overline{\overline{x}} = x$$

Proprietà

Una variabile

Definiamo le proprietà di idempotenza, semplificano un OR o un AND di variabile con se stessa.

$$x + x = x \qquad\qquad x \cdot x = x$$

⚠️ La parola "idem" significa uguale.

Due variabili

Definiamo le proprietà commutative.

$$x + y = y + x \qquad\qquad x \cdot y = y \cdot x$$

⚠️ Ricordiamo che la proprietà commutativa definisce che commutando l'ordine degli addendi, il risultato non cambia.

Definiamo le proprietà di assorbimento.

$$x + (x \cdot y) = x \qquad\qquad x \cdot (x + y) = x$$

⚠️ Si noti come, nell'assorbimento, una parte "assorbe**"** l'altra.

Due proprietà ricavate dall'assorbimento sono:

$$x + \overline{x} \cdot y = x + y \qquad\qquad x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$$

Dimostrazione

> Dimostrazione

Definiamo le proprietà di adiacenza, che si utilizzano quando abbiamo una variabile che è raggruppata due volte in un AND e una volta in OR, oppure raggruppata due volte in OR e una volta in OR, in cui una delle due variabili appare affermata in un raggruppamento, e negata nell'altro.

$$x \cdot y + x \cdot \overline{y} = x \qquad\qquad (x + y) \cdot (x + \overline{y}) = x$$

⚠️ I due termini "$x \cdot y$" e "$x \cdot \overline{y}$" posti adiacenti sono diversi solo per la negazione di una variabile.

Tre variabili

Definiamo le proprietà associative.

$$x + (y + z) = (x + y) + z \qquad\qquad x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot z$$

> ⚠️ Ricordiamo che la proprietà associativa definisce che associare (parentesizzazione) in modo diverso non cambia il risultato tra OR e AND consecutivi.

Definiamo le proprietà di fattorizzazione, dove cerchiamo di scrivere un'espressione logica come AND di OR.

$$x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$$

Definiamo le proprietà distributive, dove cerchiamo di scrivere un'espressione logica come OR di AND.

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

> ⚠️ Si noti come, nella proprietà distributiva, sto "distribuendo" un termine.

Definiamo le proprietà di consenso.

$$x \cdot y + y \cdot z + \overline{x} \cdot z = x \cdot y + \overline{x} \cdot z$$

$$(x + y) \cdot (y + z) \cdot (\overline{x} + z) = (x + y) \cdot (\overline{x} + z)$$

> ⚠️ Si noti come x sia una "doppia faccia", poiché si presenta sia in forma x, sia in forma $\overline{x}$, e prende il consenso di z per eliminare il termine in cui la x non compare.

Esempi - Utilizzo delle proprietà

Utilizzando le proprietà definite, definiamo due esempi:

1. combinando la proprietà di assorbimento (1), la proprietà associativa (2) e il teorema di esistenza del complemento (3), si ha:

$$\begin{aligned} (x) + \overline{x} \cdot y &= (x + xy) + \overline{x}y && (1) \\ &= x + y(x + \overline{x}) && (2) \\ &= x + y && (3) \end{aligned}$$

2. combinando la proprietà di assorbimento indicata si ottiene:

$$\begin{aligned} x \cdot (\overline{x} + y) &= x \cdot (x + y) \cdot (\overline{x} + y) && (4) \\ &= x \cdot (x\overline{x} + xy + y\overline{x} + yy) && (5) \\ &= x \cdot (0 + xy + y\overline{x} + y) && (6) \\ &= x \cdot (y(1 + x + \overline{x})) && (7) \\ &= x \cdot y && (8) \end{aligned}$$

Esempio - Dimostrazione (Fattorizzazione)

Proviamo a dimostrare la proprietà di fattorizzazione.

$$x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$$

▼ Primo metodo: analitico

Cominciamo con lo sviluppo del secondo membro dell'equazione, e cerchiamo di trovare come risultato il primo membro.

1. $(x+y)\cdot(x+z)=x\cdot x+x\cdot z+y\cdot x+y\cdot z$

   Adesso possiamo utilizzare la proprietà di idempotenza.

   $$x\cdot x=x$$

2. $(x+y)\cdot(x+z)=x+x\cdot z+y\cdot x+y\cdot z$

   Scriviamo $x=x\cdot 1$ e mettiamo x in comune.

3. $(x+y)\cdot(x+z)=x\cdot(1+z+y)+y\cdot z$

   Sapendo che $1+z=1$ e $1+y=1$, possiamo semplificare l'espressione.

4. $(x+y)\cdot(x+z)=x\cdot(1+1)+y\cdot z$

   Sapendo che $1+1=1$ e $x\cdot 1=1$, sviluppiamo l'espressione.

5. $(x+y)\cdot(x+z)=x+y\cdot z$

   Abbiamo verificato la proprietà.

▼ Secondo metodo: principio di Induzione Perfetta

Il principio di induzione perfetta è un metodo molto utile per dimostrare la correttezza delle proprietà e dei teoremi.

L'obiettivo è quello di costruire una tabella di verità completa, inserendo una colonna per il primo membro, una per il secondo membro, e una colonna per ogni 'pezzo' che può risultare utile.

Avendo $x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$, si ha sicuramente bisogno di una colonna per

$(x+y)\cdot(x+z)$, una seconda per $x+y\cdot z$, ma anche una per ogni 'pezzetto', ovvero per

$y\cdot z$, $(x+y)$ e $(x+z)$.

x	y	z	$x+y$	$x+z$	$y\cdot z$	$x+y\cdot z$	$(x+y)\cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Alla fine della costruzione della tabella, si nota come le ultime due colonne, che rappresentano il primo e il secondo membro dell'equazione da verificare, assumono gli stessi valori, e quindi sono equivalenti.

Leggi di De Morgan

Le leggi di De Morgan, sono fondamentameli per tutta la progettazione elettronica. Il loro scopo è quello di fornire delle equivalenze tra le funzioni logiche OR e AND.

$$\overline{x\cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$$

$$\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$$

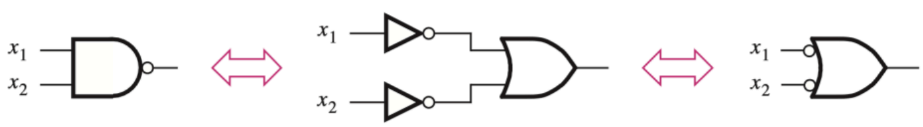
- **Dimostrazione**

  Proviamo a verificarle facendo una dimostrazione tramite induzione perfetta.

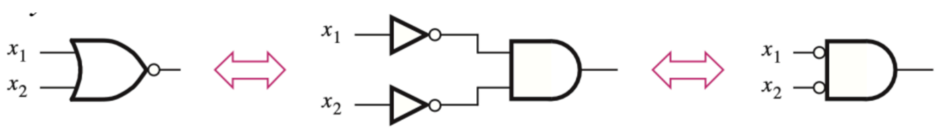
  Si vede come $\overline{x \cdot y}$ assume gli stessi valori di $\overline{x} + \overline{y}$, quindi sono equivalenti.

x	y	$x \cdot y$	$\overline{x \cdot y}$	$\overline{x}$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

  Questo risultato è molto utile nella pratica:



Applicazione della legge di De Morgan.



Applicazione delle legge di De Morgan.