Esercitazione 2 - Minimizzazione e mappe di Karnaugh

Esercizio 1 - Minimizzazione dell'espressione (3 variabili)
- Obiettivo
  - Mappa di Karnaugh
  - Minimizzazione dell'espressione

Esercizio 2 - Minimizzazione dell'espressione (4 variabili)
- Obiettivo
  - Mappa di Karnaugh
  - Minimizzazione dell'espressione

Esercizio 3 - Minimizzazione dell'espressione (con don't care)
- Obiettivo
  - Mappa di Karnaugh
  - Determinazione dell'espressione

Esercizio 4 - Minimizzazione dell'espressione (4 variabili)
- Obiettivo
  - Mappa di Karnaugh
  - Minimizzazione dell'espressione

Esercizio 5 - Mappa di Karnaugh senza alee
- Obiettivo
  - Mappa di Karnaugh
  - Eliminazione delle alee statiche

Esercizio 6 - Analisi del comportamento di un circuito
- Obiettivo
  - Sistema di equazioni per lo stato futuro
  - Mappa di Karnaugh
  - Grafo di transizione degli stati

Esercizio 7 - Design di circuito sequenziale da specifica
- Obiettivo
  - FSM
  - Mappe di Karnaugh
  - Circuito sequenziale

Esercizio 8 - Semplificazione di circuiti multi-output
- Obiettivo
  - Mappe di Karnaugh delle funzioni
  - Prima forma del circuito multi-output
  - Semplificazione del circuito multi-output

Esercizio 1 - Minimizzazione dell'espressione (3 variabili)

- Creatore originale: @Giacomo Dandolo
  - @<utente> (<data>): <modifiche>

Obiettivo

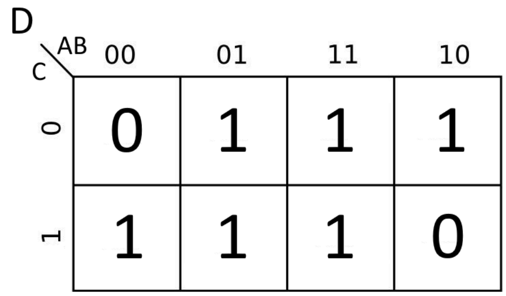
Semplificare la seguente espressione logica utilizzando la mappa di Karnaugh.

$$D = \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$$

Mappa di Karnaugh

La mappa di Karnaugh è ottenuta attraverso questa procedura:

1. prendiamo un mintermine dell'espressione di D (per esempio, $\bar{A}B\bar{C}$);
2. cerchiamo la sua posizione nella mappa di Karnaugh, definendo i valori negati come 0 e i valori diretti come 1 (per esempio, 010);

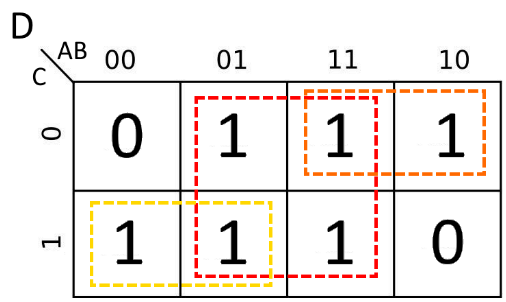


Mappa di Karnaugh ottenuta

3. inseriamo, all'interno della cella definita dalla posizione trovata, il valore 1;
4. ripetiamo, a partire dal punto 1, per tutti i mintermini, fino a che non sono terminati all'interno dell'espressione;
5. riempiamo le celle vuote con degli zeri, in modo da ottenere la mappa di Karnaugh finale.

▼ Minimizzazione dell'espressione

A partire dalla mappa di Karnaugh, si può ottenere l'espressione iniziale di D minimizzata definendo le combinazioni di caselle che riducono il numero di letterali in un termine prodotto, rispettivamente chiamati D_1, D_2 e D_3, come nell'immagine di riferimento.



Mappa di Karnaugh con le combinazioni che minimizzano il numero di letterali

Cerchiamo ora di definire le espressioni delle combinazioni di caselle D_1, D_2 e D_3.

(1) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- B non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- C cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

$$D_1 = B$$

(2) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- B cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- C non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta.

$$D_2 = \bar{A}C$$

(3) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- B cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- C non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata.

$$D_3 = A\bar{C}$$

Eseguendo l'OR tra i mintermini, si ottiene la seguente espressione di D, che risulta minimizzata:

$$D = B + AC + A\bar{C}$$

Esercizio 2 - Minimizzazione dell'espressione (4 variabili)

- Creatore originale: @Giacomo Dandolo
  - @<utente> (<data>): <modifiche>

Obiettivo

Semplificare la seguente espressione logica utilizzando la mappa di Karnaugh.

$$E = \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D \\ + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BCD + ABCD + \bar{A}BC\bar{D} + ABC\bar{D}$$

Mappa di Karnaugh

La mappa di Karnaugh è ottenuta attraverso questa procedura:

1. prendiamo un mintermine dell'espressione di E (per esempio, $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$);
2. cerchiamo la sua posizione nella mappa di Karnaugh, definendo i valori negati come 0 e i valori diretti come 1 (per esempio, 0100);
3. inseriamo, all'interno della cella definita dalla posizione trovata, il valore 1;
4. ripetiamo, a partire dal punto 1, per tutti i mintermini, fino a che non sono terminati all'interno dell'espressione;

E

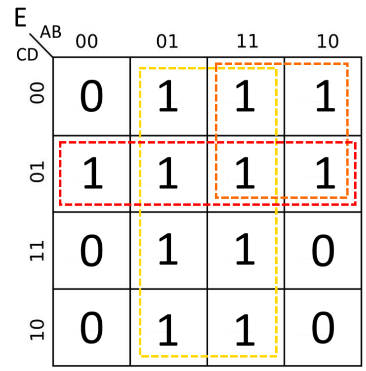
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

Mappa di Karnaugh ottenuta

5. riempiamo le celle vuote con degli zeri, in modo da ottenere la mappa di Karnaugh finale.

Minimizzazione dell'espressione

A partire dalla mappa di Karnaugh, si può ottenere l'espressione iniziale di E minimizzata definendo le combinazioni di caselle che riducono il numero di letterali in un termine prodotto, rispettivamente chiamati E_1, E_2 ed E_3, come nell'immagine di riferimento.



Mappa di Karnaugh con le combinazioni che minimizzano il numero di letterali

Cerchiamo ora di definire le espressioni delle combinazioni di caselle E_1, E_2 ed E_3.

(1) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- B non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- C cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- D cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

$$E_1 = B$$

(2) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- B cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- C non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- D cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

$$E_2 = A\bar{C}$$

(3) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- B cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- C non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- D non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta.

$$E_3 = \bar{C}D$$

Eseguendo l'OR tra i mintermini, si ottiene la seguente espressione di E, che risulta minimizzata:

$$E = B + A\bar{C} + \bar{C}D$$

Esercizio 3 - Minimizzazione dell'espressione (con don't care)

- Creatore originale: @Giacomo Dandolo
  - @<utente> (<data>): <modifiche>

Obiettivo

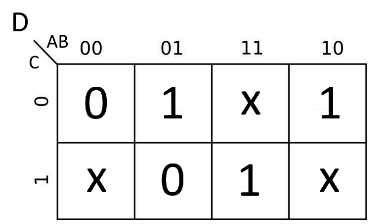
Determinare la funzione corrispondente a partire dalla tabella di verità data.

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Mappa di Karnaugh

La mappa di Karnaugh è ottenuta attraverso questa semplice procedura:

1. prendiamo una riga della tabella (per esempio, A=0, B=0, C=0);
2. cerchiamo la sua posizione nella mappa di Karnaugh (per esempio, 000);
3. inseriamo, all'interno della cella definita dalla posizione trovata, il valore corrispondente all'uscita della riga (per esempio, D=0);

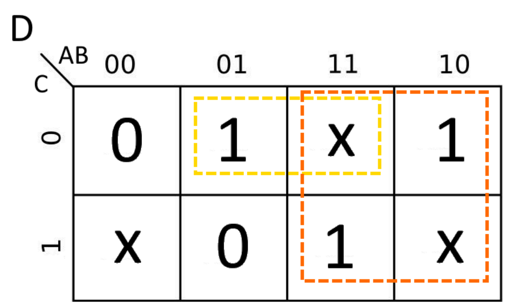


Mappa di Karnaugh ottenuta

4. ripetiamo, a partire dal punto 1, per tutte le righe della tabella, fino al riempimento della mappa di Karnaugh.

Determinazione dell'espressione

A partire dalla mappa di Karnaugh, si può ottenere l'espressione di D definendo le combinazioni di caselle che riducono il numero di letterali in un termine prodotto, rispettivamente chiamati D_1 e D_2, come nell'immagine di riferimento.



Mappa di Karnaugh con le combinazioni che minimizzano il numero di letterali

Cerchiamo ora di definire le espressioni delle combinazioni di caselle D_1 e D_2.

(1) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- B non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- C non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata.

$$D_1 = B\bar{C}$$

(2) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- B cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- C cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

$$D_2 = A$$

Eseguendo l'OR tra i mintermini, si ottiene la seguente espressione di D:

$$D = B\bar{C} + A$$

Esercizio 4 - Minimizzazione dell'espressione (4 variabili)

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

- @<utente> (<data>): <modifiche>

Obiettivo

Semplificare la seguente espressione logica utilizzando la mappa di Karnaugh.

$$\begin{aligned} E = {} & \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D \\ & + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD + ABCD + ABC\bar{D} \end{aligned}$$

▼ Mappa di Karnaugh

La mappa di Karnaugh è ottenuta attraverso questa procedura:

1. prendiamo un mintermine dell'espressione di E (per esempio, $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$);
2. cerchiamo la sua posizione nella mappa di Karnaugh, definendo i valori negati come 0 e i valori diretti come 1 (per esempio, 0100);
3. inseriamo, all'interno della cella definita dalla posizione trovata, il valore 1;
4. ripetiamo, a partire dal punto 1, per tutti i mintermini, fino a che non sono terminati all'interno dell'espressione;

E

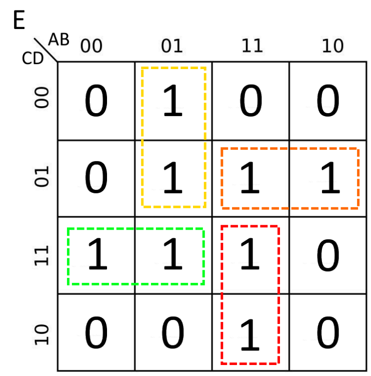
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

Mappa di Karnaugh ottenuta

5. riempiamo le celle vuote con degli zeri, in modo da ottenere la mappa di Karnaugh finale.

▼ Minimizzazione dell'espressione

A partire dalla mappa di Karnaugh, si può ottenere l'espressione iniziale di D minimizzata definendo le combinazioni di caselle che riducono il numero di letterali in un termine prodotto, rispettivamente chiamati E_1, E_2, E_3 e E_4, come nell'immagine di riferimento.



Mappa di Karnaugh con le combinazioni che minimizzano il numero di letterali

Cerchiamo ora di definire le espressioni delle combinazioni di caselle E_1, E_2, E_3 e E_4.

(1) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- B non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- C non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- D cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

$$E_1 = \bar{A}B\bar{C}$$

(2) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- B cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- C non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- D non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta.

$$E_2 = A\bar{C}D$$

(3) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- B non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- C non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- D cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

$$E_3 = ABC$$

(4) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- A non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- B cambia valore (1 ↔ 1), quindi non si prende;
- C non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;

- D non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta.

$$E_4 = \bar{A}CD$$

Eseguendo l'OR tra i mintermini, si ottiene la seguente espressione di E, che risulta minimizzata:

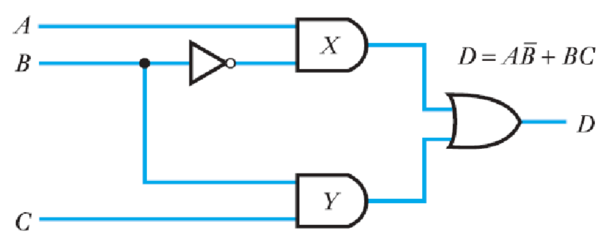
$$E = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{C}D + ABC + \bar{A}CD$$

Esercizio 5 - Mappa di Karnaugh senza alee

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

Obiettivo

Ricavare la k-map per il circuito dato e rifinire la copertura per escludere la possibilità di alee statiche.

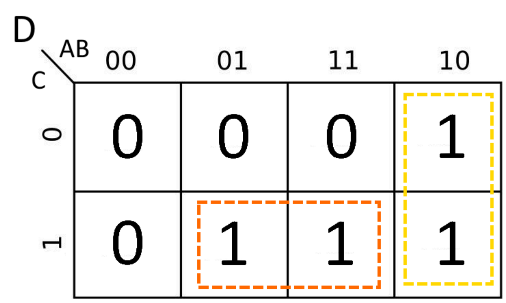


Circuito dato

▼ Mappa di Karnaugh

Definiamo innanzitutto la mappa di Karnaugh che descrive la funzione logica, come negli esercizi precedenti.

$$D = A\bar{B} + BC$$



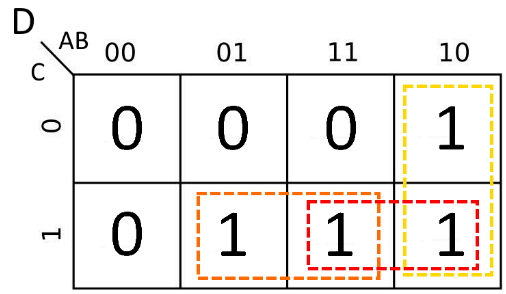
Mappa di Karnaugh ottenuta

▼ Eliminazione delle alee statiche

Per eliminare le alee statiche, è necessario eliminare possibili instabilità durante la transizione da uno stato ad un altro.

In questo caso, per esempio, si ha che la transizione `111` → `101` contiene la possibilità di un'alea, poiché la transizione contiene due `1` che non fanno parte dello stesso implicante.

Per rimuovere questa possibilità, si crea un nuovo implicante non necessario, come nella mappa di Karnaugh mostrata.



C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	1	1	1

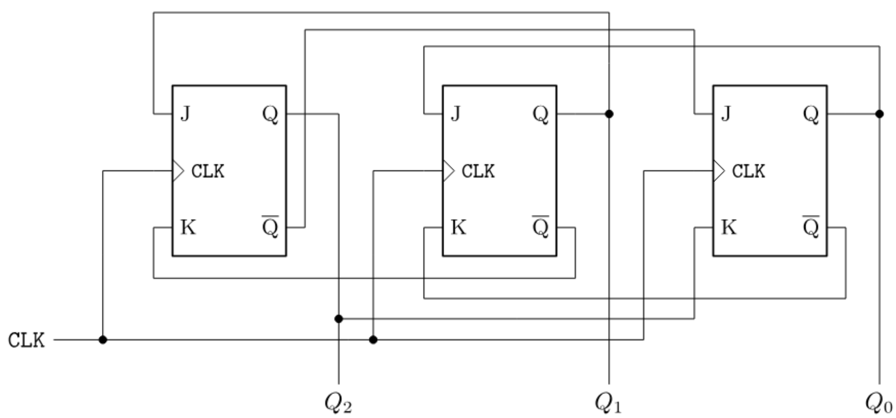
Mappa di Karnaugh con eliminazione delle alee statiche

Esercizio 6 - Analisi del comportamento di un circuito

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

Obiettivo

Dato un circuito sequenziale, determinare il grafo di transizione degli stati a partire dalle corrispondenti mappe di Karnaugh.



Circuito sequenziale in analisi

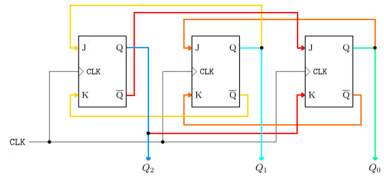
▼ Sistema di equazioni per lo stato futuro

Definiamo la formula che descrive il comportamento di ogni FF-JK.

$$Q^+ = J\bar{Q} + Q\bar{K}$$

Attraverso questa equazione, possiamo definire il sistema di equazioni per lo stato futuro, dove è presente un'equazione per ogni FF-JK.

$$\begin{cases} Q_2^+ = Q_1\bar{Q}_2 + Q_2Q_1 \\ Q_1^+ = Q_0\bar{Q}_1 + Q_1Q_0 \\ Q_0^+ = \bar{Q}_2\bar{Q}_0 + Q_0\bar{Q}_2 \end{cases}$$



Visualizzazione dei valori di entrata per ogni FF-JK

Mappa di Karnaugh

Definiamo la mappa di Karnaugh a partire dal sistema di equazioni per lo stato futuro ottenute.

$$\begin{cases} Q_2^+ = Q_1\bar{Q}_2 + Q_2Q_1 \\ Q_1^+ = Q_0\bar{Q}_1 + Q_1Q_0 \\ Q_0^+ = \bar{Q}_2\bar{Q}_0 + Q_0\bar{Q}_2 \end{cases}$$

Per farlo, si devono seguire questi passi:

1. prendiamo una posizione all'interno della mappa di Karnaugh (per esempio, 000);
2. valutiamo ogni equazione all'interno del sistema di equazioni per lo stato futuro, in modo da trovare il valore $Q_2^+Q_1^+Q_0^+$ ed inserirlo all'interno della rispettiva cella (per esempio, 001);

Q — Q_0 \ Q_2Q_1	00	01	11	10
0	001	101	100	000
1	011	111	110	010

Mappa di Karnaugh ottenuta dal sistema delle equazioni di stato futuro

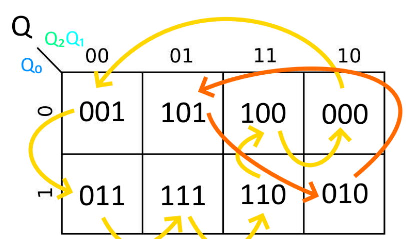
$$\begin{cases} Q_2^+ = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \\ Q_1^+ = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \\ Q_0^+ = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

3. ripetere questo procedimento fino al riempimento di ogni cella, in modo da ottenere la mappa di Karnaugh finale.

Grafo di transizione degli stati

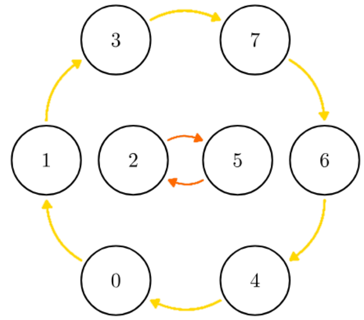
Il grafo di transizione si ottiene attraverso questi passi:

1. prendiamo una posizione all'interno della mappa di Karnaugh (per esempio, 000);
2. disegniamo uno stato all'interno del grafo di transizione, con un valore pari a quello della posizione;
3. andiamo alla cella definita dal valore all'interno della cella (per esempio, 001), e disegniamola come il valore precedente;
4. colleghiamo lo stato precedente a quello attuale con un arco direzionato;



Visualizzazione del procedimento di passaggio dei vari stati

5. se si ottiene un nuovo ciclo al collegamento e sono presenti stati nella mappa di Karnaugh che non sono stati inseriti, si ricomincia dal punto 1;
6. ripetiamo lo stesso procedimento fino al termine delle celle, ottenendo il grafo di transizione degli stati.



Grafo di transizione degli stati ottenuto

Esercizio 7 - Design di circuito sequenziale da specifica

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

Obiettivo

Modellare un riconoscitore di sequenza adatto a riconoscere una qualsiasi sequenza che termini in 101_2.

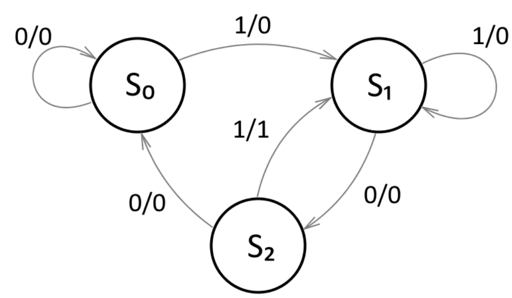
▼ FSM

Considerando che il rilevamento della sequenza richiede una determinata serie di valori, è necessario che il valore di uscita della FSM dipenda sia dagli input, sia dallo stato presente.

Per questo motivo, la FSM richiesta è definita attraverso l'architettura di Mealy.

Definiamo i tre stati necessari per modellarla:

- S_0: identificatore binario 00;
- S_1: identificatore binario 01;
- S_2: identificatore binario 10.



FSM di Mealy ottenuta

Definendo le coppie X/Z come etichette sugli archi che definiscono rispettivamente Input e Output, si ottiene la FSM in figura.

▼ Mappe di Karnaugh

A partire dalla FSM ottenuta, si definiscono le mappe di Karnaugh per lo stato futuro dei FF $(Q_1 \text{ e } Q_2)$ e dell'uscita (Z).

Iniziamo definendo la mappa di Karnaugh della FSM, in cui ogni cella contiene il valore di tre cifre $Q_1^+Q_2^+Z$:

- Q_1^+ è la prima cifra dello stato futuro rispetto al valore di Q_1Q_2;
- Q_2^+ è la seconda cifra dello stato futuro rispetto al valore di Q_1Q_2;
- Z è l'uscita dello stato in funzione dell'input X.

$Q_1^+Q_2^+Z$ — X \ Q_1Q_2	(S0) 00	(S1) 01	11	(S2) 10
0	000	100	X	000
1	010	010	X	011

Mappa di Karnaugh della FSM

Definiamo ora le mappe di Karnaugh per ognuno dei valori di uscita Q_1^+, Q_2^+ e Z, in modo da riuscire ad identificare la loro correlazione con i valori di input Q_1, Q_2 e X.

Si ottiene questa tabella prendendo, per ogni cella, il valore correlato a Q_1^+ nella mappa di Karnaugh della FSM.

Definendo i mintermini, otteniamo l'equazione di Q_1^+.

$$Q_1^+ = D_{Q_1} = \bar{X}Q_2$$

Q_1^+ — X \ Q_1Q_2	00	01	11	10
0	0	1	x	0
1	0	0	x	0

Mappa di Karnaugh che definisce Q_1^+

Si ottiene questa tabella prendendo, per ogni cella, il valore correlato a Q_2^+ nella mappa di Karnaugh della FSM.

Definendo i mintermini, otteniamo l'equazione di Q_2^+.

$$Q_2^+ = D_{Q_2} = X$$

Q_2^+ — X \ Q_1Q_2	00	01	11	10
0	0	0	x	0
1	1	1	x	1

Mappa di Karnaugh che definisce Q_1^+

Si ottiene questa tabella prendendo, per ogni cella, il valore correlato a Z nella mappa di Karnaugh della FSM.

Definendo i mintermini, otteniamo l'equazione di Z.

$$Z = XQ_1$$

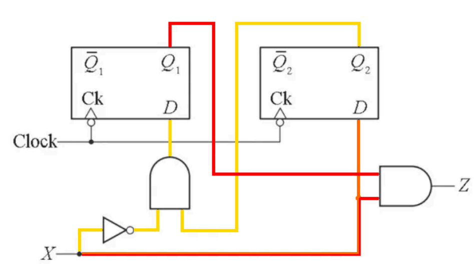
Z — X \ Q_1Q_2	00	01	11	10
0	0	0	x	0
1	0	0	x	1

Mappa di Karnaugh che definisce Z

Circuito sequenziale

Utilizzando dei Flip-Flop D, e avendo le espressioni di D_{Q_1}, D_{Q_2} e Z, si possono definire i componenti da utilizzare per costruire il circuito sequenziale, ovvero:

- due Flip-Flop D;
- due porte AND;
- una porta NOT.



Circuito sequenziale ottenuto

$$D_{Q_1} = \bar{X}Q_2 \qquad D_{Q_2} = X \qquad Z = XQ_1$$

Esercizio 8 - Semplificazione di circuiti multi-output

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

Obiettivo

Data la seguente descrizione per un circuito multi-output a 4 ingressi e 3 uscite, realizzare un circuito in grado di soddisfare la specifica.

$$\begin{cases} f_1 = \sum m(2,3,5,7,8,9,10,11,13,15) \\ f_2 = \sum m(2,3,5,6,7,10,11,14,15) \\ f_3 = \sum m(6,7,8,9,13,14,15) \end{cases}$$

▼ Mappe di Karnaugh delle funzioni

Partiamo dalla funzione f_1. Per leggere questi valori e trasformarli in una mappa di Karnaugh, bisogna ricordare che i valori presenti nelle parentesi indicano in quali celle è presente il valore 1 in una funzione, in questo caso a 4 bit, e che ogni cella è rappresentata da un valore binario $x_1x_2x_3x_4$.

Per esempio, $2_{10} = 0010_2$, quindi nella cella corrispondente all'incrocio tra $x_3x_4 = 10_2$ e $x_1x_2 = 00_2$ si inserisce 1. Prendendo un secondo esempio, $9_{10} = 1001_2$, nella cella corrispondente all'incrocio tra $x_3x_4 = 01_2$ e $x_1x_2 = 10_2$ si inserisce 1.

Si ripete questo procedimento per ogni valore presente tra le parentesi della funzione, e successivamente per ogni funzione, ottenendo le espressioni di f_1, f_2 e f_3 e la relativa mappa di Karnaugh.

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1\bar{x}_2 + x_2x_4 + \bar{x}_2x_3 \\ &= \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{13} \end{aligned}$$

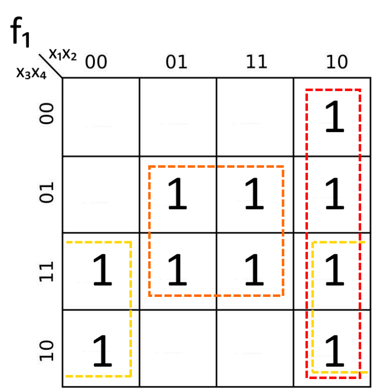


Tabella di Karnaugh (Prima funzione)

$$\begin{aligned} f_2 &= x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_4 \\ &= \rho_{21} + \rho_{22} \end{aligned}$$

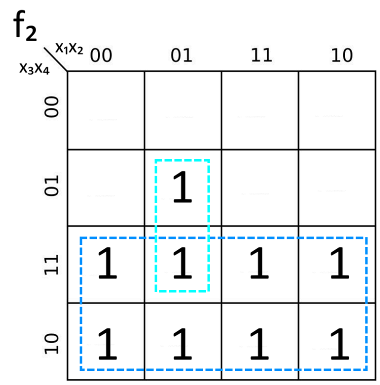


Tabella di Karnaugh (Seconda funzione)

$$\begin{aligned} f_3 &= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 \\ &= \rho_{31} + \rho_{32} + \rho_{33} \end{aligned}$$

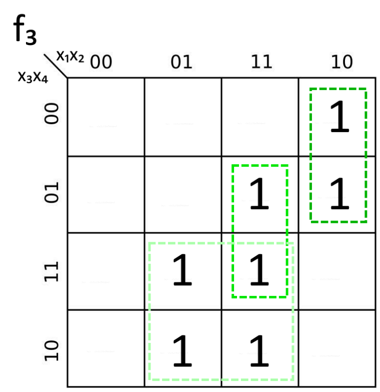
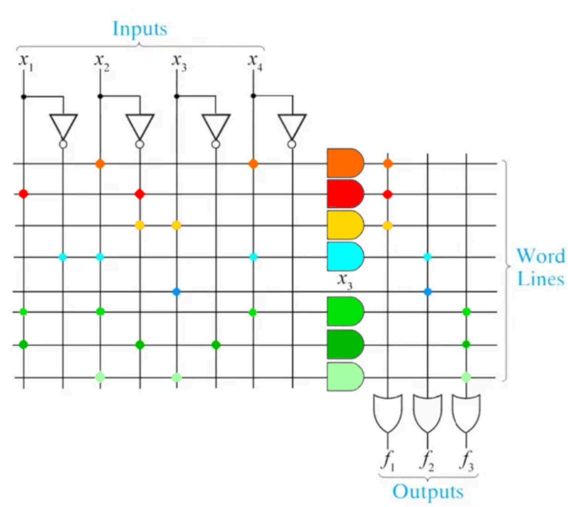


Tabella di Karnaugh (Terza funzione)

▼ Prima forma del circuito multi-output

Definendo gli input nella loro forma negata e nella loro forma diretta, e definendo anche una porta per ogni parte delle funzioni $(\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}, \ldots)$, si ottiene la prima forma del circuito multi-output, la quale non è semplificata in alcun modo, e risulta, di fatto, non un circuito ottimizzato dal punto di vista del costo e del numero di porte.



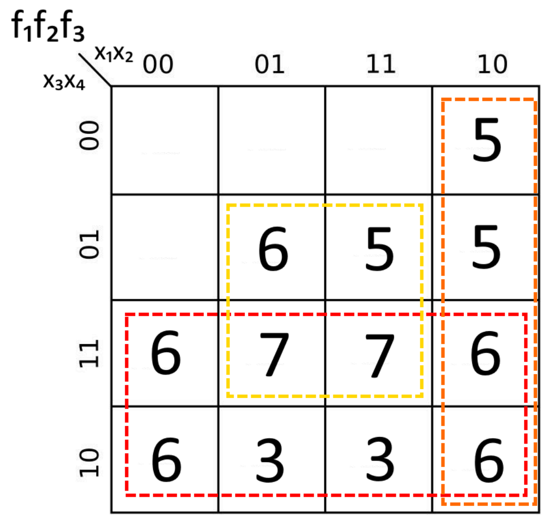
Prima forma del circuito multi-output

▼ Semplificazione del circuito multi-output

Per semplificare il circuito, è necessario definire una mappa di Karnaugh che definisce la relazione tra le varie funzioni. Per realizzarla, è necessario accostare i valori binari, per ogni cella, di ognuna delle mappe di Karnaugh, per poi trasformarlo in valore decimale, in modo da semplificare la tabella di Karnaugh finale e identificare subito quali celle sono necessarie per la semplificazione.

Per esempio, la cella definita da $x_1x_2 = 00_2$ e la cella definita da $x_3x_4 = 11_2$ avrà, al suo interno, il valore 110_2, che scriveremo con il suo valore decimale, 6_{10}.

Tutto ciò si ripete per ogni cella, fino a formare la mappa di Karnaugh con i relativi raggruppamenti ρ_1, ρ_2 e ρ_3.



Mappa di Karnaugh (tutte le funzioni)

Per semplificare l'espressione iniziale, si devono scrivere le espressioni di ρ_1, ρ_2 e ρ_3, per poi cercare di trasformare le espressioni in funzione delle porte definite. Eseguiamo i calcoli per ogni espressione.

- ρ_1;

$$\rho_1 = x_3 = \rho_{13} + \rho_{33} = \sum m(2,3,10,11) + \sum m(6,7,14,15)$$

- ρ_2;

$$\rho_2 = x_1\bar{x}_2 = \rho_{31} + \rho_{13}/\rho_2 = \sum m(8,9) + \sum m(2,3)$$

- ρ_3.

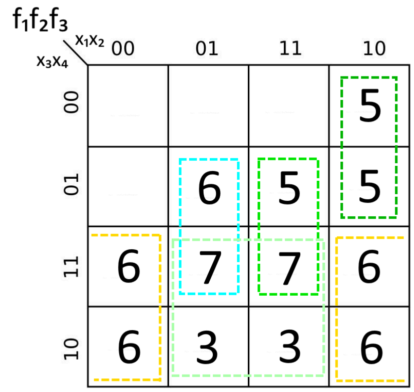
$$\rho_3 = x_2x_4 = \rho_{22} + \rho_{32} = \sum m(5,7) + \sum m(13,15)$$

Dopo averle definite, riprendendo le definizioni iniziali della prima funzione, della seconda funzione e della terza funzione, si può ridefinire ognuna delle espressioni in funzione delle porte logiche utilizzate per definire ρ_1, ρ_2 e ρ_3.

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \rho_{13} + \rho_{31} + \rho_{22} + \rho_{32} \\
&= \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_4
\end{aligned}
$$

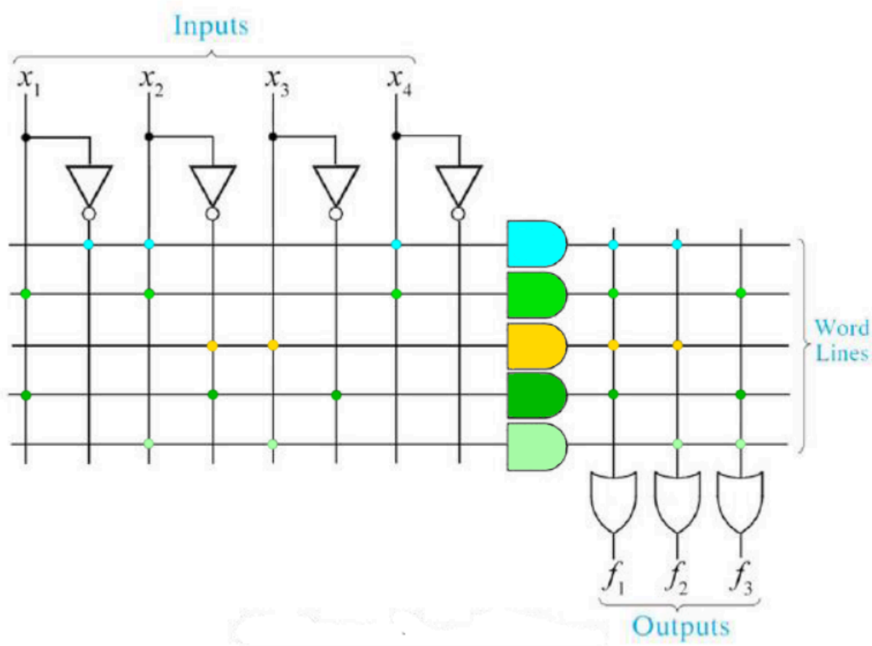
$$
\begin{aligned}
f_2 &= \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{13} \\
&= \bar{x}_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 + \bar{x}_2 x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3 &= \rho_{33} + \rho_{32} + \rho_{31} \\
&= x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3
\end{aligned}
$$



Mappa di Karnaugh finale

Allo stesso modo della prima forma del circuito multi-output, si forma la seconda forma del circuito multi-output, il quale risulta semplificato rispetto al primo.



Seconda forma del circuito multi-output