

Funzioni e porte logiche

▼ Creatore originale: @LucaCaffa

- @Giacomo Dandolo (14/04/2025): aggiunta nomenclatura per le funzioni logiche e per l'algebra di Boole.

Grandezze elettriche

Utilizziamo gli stati logici 1 e 0 per rappresentare il comportamento delle grandezze elettriche. La convenzione maggiormente usata è la seguente:

- Tensione **alta** → 1 logico;
- Tensione **bassa** → 0 logico.

Threshold

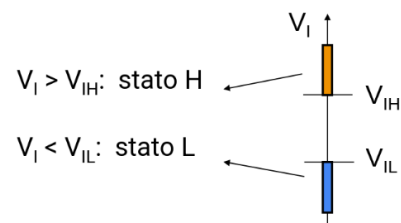
In un modello reale, una tensione non è mai costante, ma spesso presenta dei rumori (ha diverse oscillazioni), quindi non basta considerare tensione bassa e alta.

Si introduce il concetto di **threshold** (soglia), definito attraverso una tensione di soglia chiamata V_T . Ipotezzando di avere una generica tensione V , si ha che:

- se $V > V_T \rightarrow 1$ logico;
- se $V < V_T \rightarrow 0$ logico.

Lo stato logico viene trovato confrontando la tensione di ingresso V_I con quella di soglia V_T . La soglia non è un valore fisso, ma un range $V_T = [V_{IL}, V_{IH}]$, dove:

- se $V_I > V_{IH} \rightarrow 1$ logico;
- se $V_I < V_{IL} \rightarrow 0$ logico;
- la tensione tra V_{IL} e tra V_{IH} non è definita.



Rappresentazione del concetto di threshold

Funzioni logiche

Funzione logica NOT

La funzione logica NOT indica la negazione di un ingresso, quindi se in ingresso abbiamo 0, in uscita avremo 1 e viceversa.

x	y
0	1

$$y = \text{NOT } x = \bar{x}$$

La digitura descritta indica che y è l'inverso di x .

Le varie notazioni sono:

$$\text{NOT } x = \bar{x} = x' = !x = \sim x = x^*$$

x	y
1	0

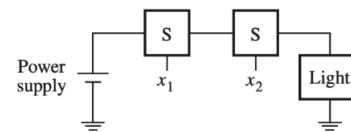


E' importante notare che la funzione logica NOT può essere applicata a ogni funzione logica, e che ogni funzione logica negata ha la tabella di verità con valori di uscita opposti alla funzione non negata.

Funzione logica AND

Nella figura:

- "Power Supply" è l'alimentatore;
- x_1 e x_2 sono due interruttori (Switch);
- Light è la lampadina, che rappresenta la nostra uscita y .



(a) The logical AND function (series connection)

Rappresentazione di un circuito che implementa la funzione logica AND

Per far accendere la lampadina abbiamo bisogno che gli switch siano entrambi chiusi, in modo da far arrivare la tensione alla lampadina.

Questo concetto si traduce con la seguente funzione logica AND:

$$f(x_1, x_2) = y = x_1 \text{ AND } x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$$

Questa funzione dice che $y = 1$ solo se x_1 e x_2 sono entrambi 1.

x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Funzione logica NAND

La funzione logica AND negata si chiama **NAND**, cioè "NOT AND".

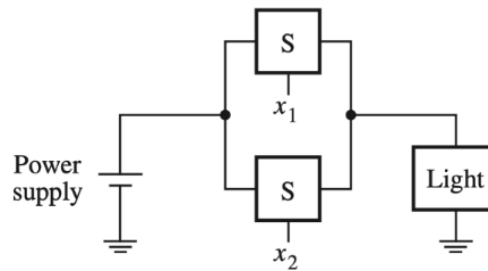
$$f(x_1, x_2) = y = x_1 \text{ NAND } x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Funzione logica OR

Nella **figura**:

- "Power Supply" è l'alimentatore;
- x_1 e x_2 sono due interruttori (Switch);
- Light è la lampadina, che rappresenta la nostra uscita y .



(b) The logical OR function (parallel connection)

Rappresentazione di un circuito che implementa la funzione logica OR

Per far accendere la lampadina basta che uno dei due interruttori sia chiuso, in modo da far passare la tensione.

Questo concetto si traduce con la seguente funzione logica OR:

$$f(x_1, x_2) = y = x_1 \text{ OR } x_2 = x_1 + x_2$$

Questa funzione dice che $y = 1$ se x_1 o x_2 valgono 1.

x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Funzione logica NOR

La funzione logica OR negata si chiama **NOR**, cioè "NOT OR".

$$f(x_1, x_2) = y = x_1 \text{ NOR } x_2 = \overline{x_1 + x_2}$$

x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Funzione logica XOR

La funzione logica **XOR** corrisponde ad un OR esclusivo, in cui l'uscita è 1 se uno e uno solo degli ingressi vale 1.

$$f(x_1, x_2) = y = x_1 \text{ XOR } x_2 = x_1 \oplus x_2$$

x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Funzione logica XNOR

La funzione logica **XNOR** corrisponde ad uno XOR negato, in cui l'uscita è 1 se gli ingressi sono uguali.

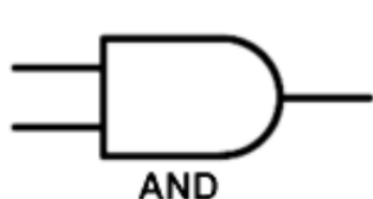
$$f(x_1, x_2) = y = x_1 \text{ XNOR } x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2}$$

Lo XNOR può anche essere trovato, nella letteratura, come NXOR, EXNOR, ENOR o XAND.

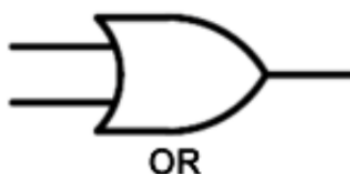
x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Porte logiche

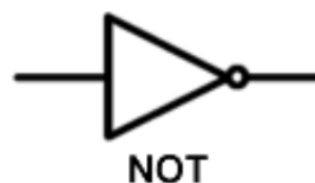
Le porte logiche sono dei circuiti che contengono transistori connessi in modo da comportarsi come una funzione logica. Le porte logiche più utilizzate sono quelle a due ingressi, ma ne esistono anche a più di due ingressi.



Porta logica AND



Porta logica OR



Porta logica NOT



Porta logica NAND



Porta logica NOR



Porta logica XOR

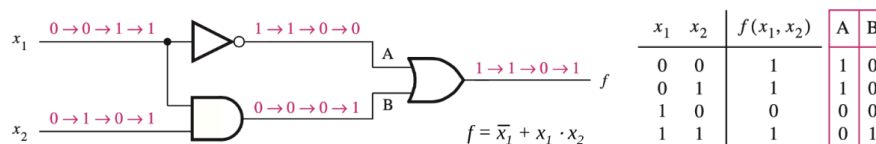


Porta logica XNOR

Reti Logiche

Una combinazione di porte logiche crea una "rete logica", anche chiamato "circuitto logico".

Possiamo analizzare il comportamento di una rete logica per determinarne la funzione e determinare l'uscita in base agli ingressi.

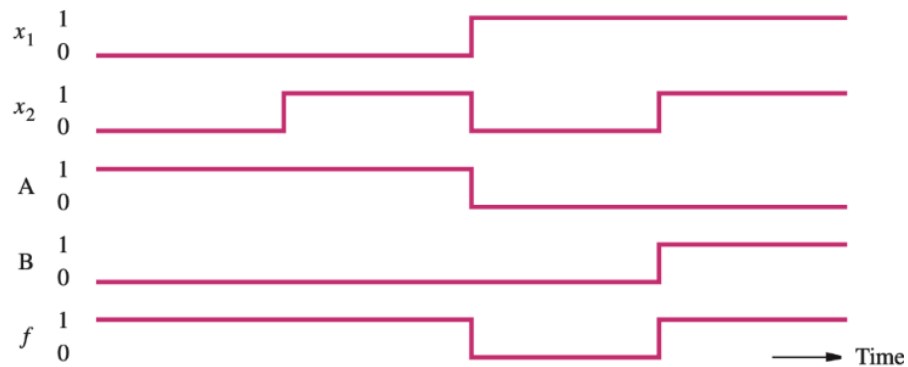


Esempio di rete logica con tabella di verità che descrive il comportamento del circuito logico

Diagramma temporale

Una volta analizzato il circuito logico, possiamo trovarne il diagramma temporale, disegnando le variazioni delle forme d'onda per ogni variabile, in cui gli ingressi sono definiti in maniera arbitraria o attraverso delle letture sul circuito.

⚠ I diagrammi temporali sono molto importanti, poiché sono il modo in cui rappresentiamo i segnali elettrici. Oltre ad indicare i livelli logici (1 o 0), si possono indicare i tempi di transizione ed un eventuale presenza di rumore.



Esempio di diagramma temporale (comportamento ideale)

Algebra di Boole

L'algebra di Boole definisce assiomi, teoremi e proprietà legati alle funzioni logiche, permettendo la semplificazione di funzioni logiche definite.

Assiomi

Gli assiomi sono delle equivalenze che permettono di semplificare le funzioni logiche definite e di definire le dimostrazioni dei teoremi, che non verranno mostrate in queste dispense.

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

Teoremi

Definiamo i teoremi della funzione logica AND.

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot x = x$$

Definiamo i teoremi della funzione logica OR.

$$x + 0 = x$$

$$x + 1 = 1$$

$$x + x = x$$

Definiamo i teoremi di esistenza del complemento.

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

$$x + \bar{x} = 1$$

Proprietà

Definiamo le proprietà commutative.

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Definiamo le proprietà associative.

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Definiamo le proprietà di assorbimento.

$$x + (x \cdot y) = x$$

$$x \cdot (x + y) = x$$

$$x + \bar{x} \cdot y = x + y$$

$$x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$$

$$x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x$$

$$(x + y) \cdot (x + \bar{y}) = x$$

Definiamo le proprietà distributive.

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

Definiamo le proprietà di idempotenza.

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

Leggi di De Morgan

Le leggi di De Morgan forniscono delle equivalenze tra le funzioni logiche OR e AND.

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$