Esercitazione 2 - Minimizzazione e mappe di Karnaugh

Esercizio 1 - Minimizzazione dell’espressione (3 variabili)

- Creatore originale: @Giacomo Dandolo
  - @<utente> (<data>): <modifiche>

Obiettivo

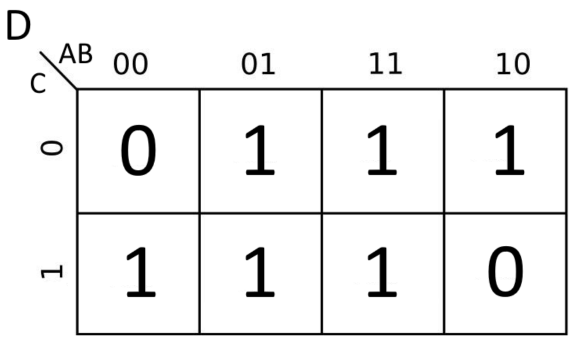
Semplificare la seguente espressione logica utilizzando la mappa di Karnaugh.

D=A¯BC¯+ABC¯+AB¯C¯+A¯B¯C+A¯BC+ABCD =
\bar{A}B\bar{C}
+
AB\bar{C}
+
A\bar{B}\bar{C}
+
\bar{A}\bar{B}C
+
\bar{A}BC
+
ABCD = A¯BC¯ + ABC¯ + AB¯C¯ + A¯B¯C + A¯BC + ABC

Mappa di Karnaugh

La mappa di Karnaugh è ottenuta attraverso questa procedura:

1. prendiamo un mintermine dell’espressione di DDD (per esempio, A¯BC¯\bar AB\bar CA¯BC¯);
2. cerchiamo la sua posizione nella mappa di Karnaugh, definendo i valori negati come 0 e i valori diretti come 1 (per esempio, 010);

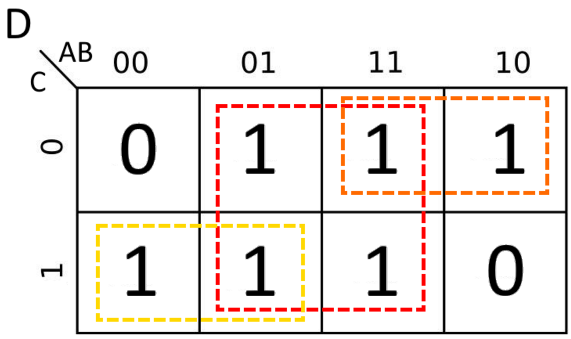


Mappa di Karnaugh ottenuta

3. inseriamo, all’interno della cella definita dalla posizione trovata, il valore 1;
4. ripetiamo, a partire dal punto 1, per tutti i mintermini, fino a che non sono terminati all’interno dell’espressione;
5. riempiamo le celle vuote con degli zeri, in modo da ottenere la mappa di Karnaugh finale.

Minimizzazione dell’espressione

A partire dalla mappa di Karnaugh, si può ottenere l’espressione iniziale di DDD minimizzata definendo le combinazioni di caselle che riducono il numero di letterali in un termine prodotto, rispettivamente chiamati D1\color{yellow}D_1D1, D2\color{orange}D_2D2 e D3\color{red} D_3D3, come nell’immagine di riferimento.



Mappa di Karnaugh con le combinazioni che minimizzano il numero di letterali

Cerchiamo ora di definire le espressioni delle combinazioni di caselle D1\color{yellow}D_1D1, D2\color{orange}D_2D2 e D3\color{red} D_3D3.

(1) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all’interno della combinazione di caselle:

- AAA cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- BBB non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- CCC cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

D1=B\color{yellow} D_1 = BD1 = B

(2) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all’interno della combinazione di caselle:

- AAA non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- BBB cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- CCC non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta.

D2=A¯C\color{orange} D_2 = \bar ACD2 = A¯C

(3) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all’interno della combinazione di caselle:

- AAA non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- BBB cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- CCC non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata.

D3=AC¯\color{red} D_3 = A\bar CD3 = AC¯

Eseguendo l’OR tra i mintermini, si ottiene la seguente espressione di DDD, che risulta minimizzata:

D=B+AC+AC¯D = {\color{yellow} B} + {\color{orange} AC} + {\color{red}A\bar C}D = B + AC + AC¯

Esercizio 2 - Minimizzazione dell’espressione (4 variabili)

- Creatore originale: @Giacomo Dandolo
  - @<utente> (<data>): <modifiche>

Obiettivo

Semplificare la seguente espressione logica utilizzando la mappa di Karnaugh.

E=A¯BC¯D¯+ABC¯D¯+AB¯C¯D¯+A¯B¯C¯D+A¯BC¯D+ABC¯D+AB¯C¯D+A¯BCD+ABCD+A¯BCD¯+ABCD¯\begin{align*}

E &=
\bar{A}B\bar{C}\bar{D}
+
AB\bar{C}\bar{D}
+
A\bar{B}\bar{C}\bar{D}
+
\bar{A}\bar{B}\bar{C}D
+
\bar{A}B\bar{C}D
+
AB\bar{C}D
\\&+
A\bar{B}\bar{C}D
+
\bar{A}BCD
+
ABCD
+
\bar{A}BC\bar{D}
+
ABC\bar{D}

\end{align*}E = A¯BC¯D¯ + ABC¯D¯ + AB¯C¯D¯ + A¯B¯C¯D + A¯BC¯D + ABC¯D + AB¯C¯D + A¯BCD + ABCD + A¯BCD¯ + ABCD¯

Mappa di Karnaugh

La mappa di Karnaugh è ottenuta attraverso questa procedura:

1. prendiamo un mintermine dell'espressione di EEE (per esempio, A¯BC¯D¯\bar AB\bar C\bar DA¯BC¯D¯);
2. cerchiamo la sua posizione nella mappa di Karnaugh, definendo i valori negati come 0 e i valori diretti come 1 (per esempio, 0100);
3. inseriamo, all'interno della cella definita dalla posizione trovata, il valore 1;
4. ripetiamo, a partire dal punto 1, per tutti i mintermini, fino a che non sono terminati all'interno dell'espressione;

E CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

Mappa di Karnaugh ottenuta

5. riempiamo le celle vuote con degli zeri, in modo da ottenere la mappa di Karnaugh finale.

▼ Minimizzazione dell'espressione

A partire dalla mappa di Karnaugh, si può ottenere l'espressione iniziale di EEE minimizzata definendo le combinazioni di caselle che riducono il numero di letterali in un termine prodotto, rispettivamente chiamati E1\color{yellow}E_1E1, E2\color{orange}E_2E2 ed E3\color{red} E_3E3, come nell'immagine di riferimento.

E CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

Mappa di Karnaugh con le combinazioni che minimizzano il numero di letterali

Cerchiamo ora di definire le espressioni delle combinazioni di caselle E1\color{yellow}E_1E1, E2\color{orange}E_2E2 ed E3\color{red} E_3E3.

(1) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- AAA cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- BBB non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- CCC cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- DDD cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

E1=B\color{yellow} E_1 = BE1 = B

(2) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- AAA non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- BBB cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- CCC non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- DDD cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

E2=AC¯\color{orange} E_2 = A\bar CE2 = AC¯

(3) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all’interno della combinazione di caselle:

- AAA cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- BBB cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- CCC non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- DDD non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta.

E3=C¯D\color{red} E_3 = \bar CDE3 = C¯D

Eseguendo l’OR tra i mintermini, si ottiene la seguente espressione di EEE, che risulta minimizzata:

E=B+AC¯+C¯DE = {\color{yellow} B} + {\color{orange} A\bar C} + {\color{red}\bar CD}E = B + AC¯ + C¯D

Esercizio 3 - Minimizzazione dell’espressione (con don’t care)

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

- @<utente> (<data>): <modifiche>

Obiettivo

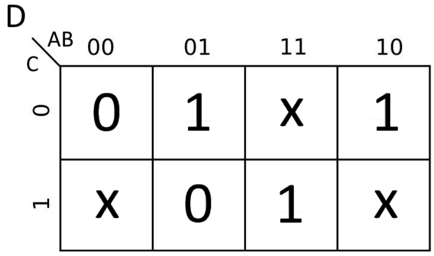
Determinare la funzione corrispondente a partire dalla tabella di verità data.

A	B	C	→	D
0	0	0		0
0	0	1		x
0	1	0		1
0	1	1		0
1	0	0		1
1	0	1		x
1	1	0		x
1	1	1		1

▼ Mappa di Karnaugh

La mappa di Karnaugh è ottenuta attraverso questa semplice procedura:

1. prendiamo una riga della tabella (per esempio, A=0, B=0, C=0);
2. cerchiamo la sua posizione nella mappa di Karnaugh (per esempio, 000);
3. inseriamo, all’interno della cella definita dalla posizione trovata, il valore corrispondente all’uscita della riga (per esempio, D=0);

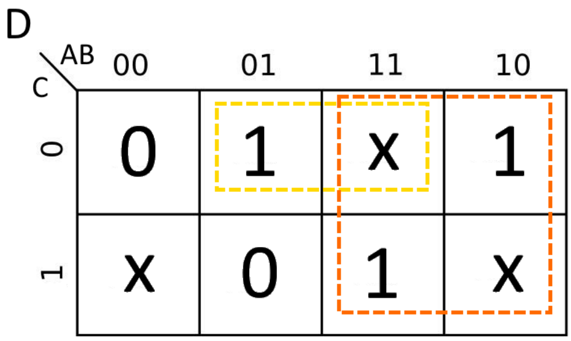


Mappa di Karnaugh ottenuta

4. ripetiamo, a partire dal punto 1, per tutte le righe della tabella, fino al riempimento della mappa di Karnaugh.

▼ Determinazione dell’espressione

A partire dalla mappa di Karnaugh, si può ottenere l’espressione di DDD definendo le combinazioni di caselle che riducono il numero di letterali in un termine prodotto, rispettivamente chiamati D1\color{yellow}D_1D1 e D2\color{orange}D_2D2, come nell’immagine di riferimento.



Mappa di Karnaugh con le combinazioni che minimizzano il numero di letterali

Cerchiamo ora di definire le espressioni delle combinazioni di caselle D1\color{yellow}D_1D1 e D2\color{orange}D_2D2.

(1) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all’interno della combinazione di caselle:

- AAA cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- BBB non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- CCC non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata.

D1=BC¯\color{yellow} D_1 = B\bar CD1 = BC¯

(2) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all’interno della combinazione di caselle:

- AAA non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- BBB cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- CCC cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

D2=A\color{orange} D_2 = AD2 = A

Eseguendo l’OR tra i mintermini, si ottiene la seguente espressione di DDD:

D=BC¯+AD = {\color{yellow} B\bar C} + {\color{orange} A}D = BC¯ + A

Esercizio 4 - Minimizzazione dell’espressione (4 variabili)

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

- @<utente> (<data>): <modifiche>

Obiettivo

Semplificare la seguente espressione logica utilizzando la mappa di Karnaugh.

E=A¯BC¯D¯+A¯BC¯D+ABC¯D+AB¯C¯D+A¯B¯CD+A¯BCD+ABCD+ABCD¯\begin{align*}

E &=
\bar{A}B\bar{C}\bar{D}
+
\bar{A}B\bar{C}D
+
AB\bar{C}D
+
A\bar{B}\bar{C}D
\\&+
\bar{A}\bar{B}CD
+
\bar{A}BCD
+
ABCD
+
ABC\bar{D}

\end{align*}E = A¯BC¯D¯ + A¯BC¯D + ABC¯D + AB¯C¯D + A¯B¯CD + A¯BCD + ABCD + ABCD¯

▼ Mappa di Karnaugh

La mappa di Karnaugh è ottenuta attraverso questa procedura:

1. prendiamo un mintermine dell'espressione di EEE (per esempio, A¯BC¯D¯\bar AB\bar C\bar DA¯BC¯D¯);
2. cerchiamo la sua posizione nella mappa di Karnaugh, definendo i valori negati come 0 e i valori diretti come 1 (per esempio, 0100);
3. inseriamo, all'interno della cella definita dalla posizione trovata, il valore 1;
4. ripetiamo, a partire dal punto 1, per tutti i mintermini, fino a che non sono terminati all'interno dell'espressione;

E

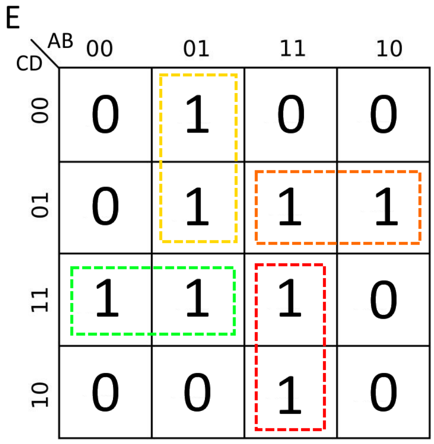
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

Mappa di Karnaugh ottenuta

5. riempiamo le celle vuote con degli zeri, in modo da ottenere la mappa di Karnaugh finale.

▼ Minimizzazione dell'espressione

A partire dalla mappa di Karnaugh, si può ottenere l'espressione iniziale di DDD minimizzata definendo le combinazioni di caselle che riducono il numero di letterali in un termine prodotto, rispettivamente chiamati E1\color{yellow}E_1E1, E2\color{orange}E_2E2, E3\color{red} E_3E3 e E4\color{green}E_4E4, come nell'immagine di riferimento.



Mappa di Karnaugh con le combinazioni che minimizzano il numero di letterali

Cerchiamo ora di definire le espressioni delle combinazioni di caselle E1\color{yellow}E_1E1, E2\color{orange}E_2E2, E3\color{red} E_3E3 e E4\color{green}E_4E4.

(1) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- AAA non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- BBB non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- CCC non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- DDD cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

E1=A¯BC¯\color{yellow} E_1 = \bar{A}B\bar{C}E1 = A¯BC¯

(2) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- AAA non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- BBB cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende;
- CCC non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- DDD non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta.

E2=AC¯D\color{orange} E_2 = A\bar C DE2 = AC¯D

(3) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- AAA non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- BBB non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- CCC non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- DDD cambia valore (0 ↔ 1), quindi non si prende.

E3=ABC\color{red} E_3 = ABCE3 = ABC

(4) Cerchiamo quali valori non cambiano, come coordinate, all'interno della combinazione di caselle:

- AAA non cambia valore (0 ↔ 0), ed essendo con valore 0, si prende la sua versione negata;
- BBB cambia valore (1 ↔ 1), quindi non si prende;
- CCC non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta;
- DDD non cambia valore (1 ↔ 1), ed essendo con valore 1, si prende la sua versione diretta.

E4=A¯CD\color{green} E_4 = \bar ACDE4 = A¯CD

Eseguendo l'OR tra i mintermini, si ottiene la seguente espressione di EEE, che risulta minimizzata:

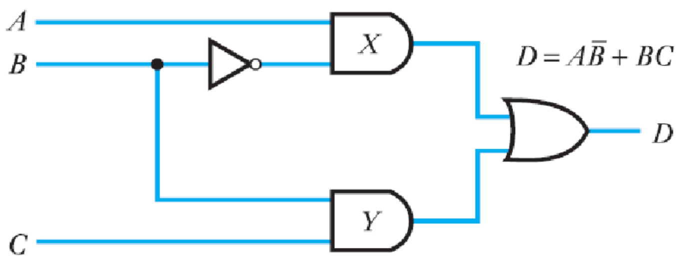
E=A¯BC¯+AC¯D+ABC+A¯CDE = {\color{yellow} \bar AB\bar C} + {\color{orange} A\bar CD} + {\color{red}ABC} + {\color{green} \bar ACD}E = A¯BC¯ + AC¯D + ABC + A¯CD

Esercizio 5 - Mappa di Karnaugh senza alee

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

Obiettivo

Ricavare la k-map per il circuito dato e rifinire la copertura
per escludere la possibilità di alee statiche.

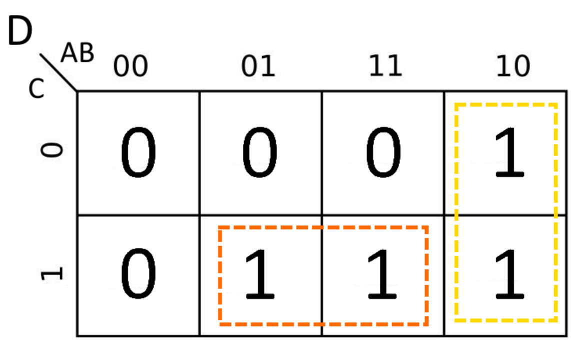


Circuito dato

▼ Mappa di Karnaugh

Definiamo innanzitutto la mappa di Karnaugh che descrive
la funzione logica, come negli esercizi precedenti.

D=AB¯+BCD = A \bar B + BCD = AB¯ + BC



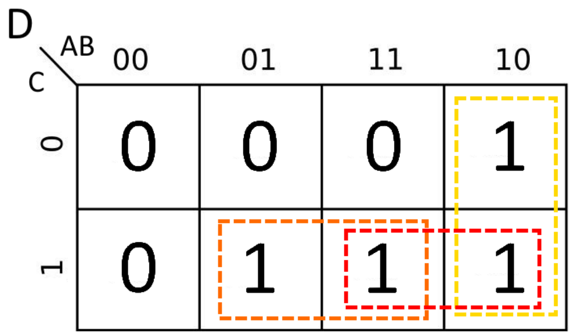
Mappa di Karnaugh ottenuta

▼ Eliminazione delle alee statiche

Per eliminare le alee statiche, è necessario eliminare possibili instabilità durante la transizione da uno stato ad un altro.

In questo caso, per esempio, si ha che la transizione `111` → `101` contiene la possibilità di un'alea, poiché la transizione contiene due `1` che non fanno parte dello stesso implicante.

Per rimuovere questa possibilità, si crea un nuovo implicante non necessario, come nella mappa di Karnaugh mostrata.



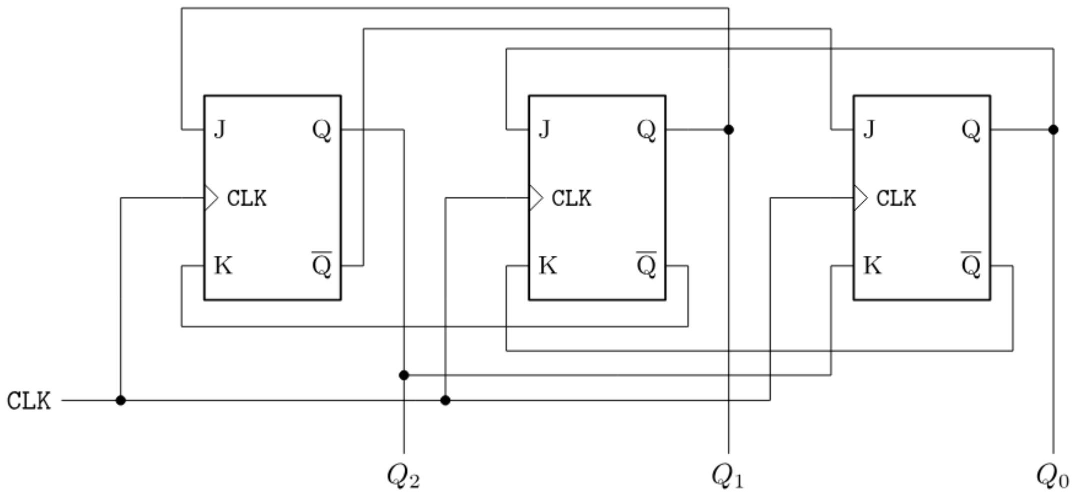
Mappa di Karnaugh con eliminazione delle alee statiche

Esercizio 6 - Analisi del comportamento di un circuito

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

Obiettivo

Dato un circuito sequenziale, determinare il grafo di transizione degli stati a partire dalle corrispondenti mappe di Karnaugh.



Circuito sequenziale in analisi

▼ Sistema di equazioni per lo stato futuro

Definiamo la formula che descrive il comportamento di ogni FF-JK.

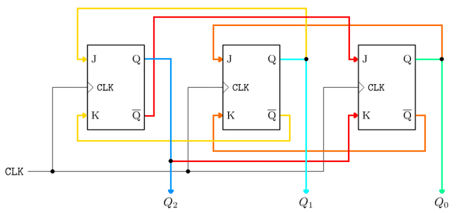
$$Q^+ = J\bar Q + Q \bar K$$

Attraverso questa equazione, possiamo definire il sistema di equazioni per lo stato futuro, dove è presente un'equazione per ogni FF-JK.

{Q2+=Q1Q¯2+Q2Q1Q1+=Q0Q¯1+Q1Q0Q0+=Q¯2Q¯0+Q0Q¯2\begin{cases}

{\color{lightgreen}Q_2^+} =
{\color{yellow}Q_1\bar Q_2 +
Q_2Q_1}
\\
{\color{cyan}Q_1^+} =
{\color{orange}Q_0\bar Q_1 +
Q_1Q_0}
\\
{\color{royalblue}Q_0^+} =
{\color{red}\bar Q_2 \bar Q_0 + Q_0
\bar Q_2}

\end{cases}⎩⎨⎧
⎩Q2+ = Q1Q¯2 + Q2Q1Q1+ = Q0Q¯1 +
Q1Q0Q0+ = Q¯2Q¯0 + Q0Q¯2



Visualizzazione dei valori di entrata per ogni FF-JK

Mappa di Karnaugh

Definiamo la mappa di Karnaugh a partire dal sistema di equazioni per lo stato futuro ottenute.

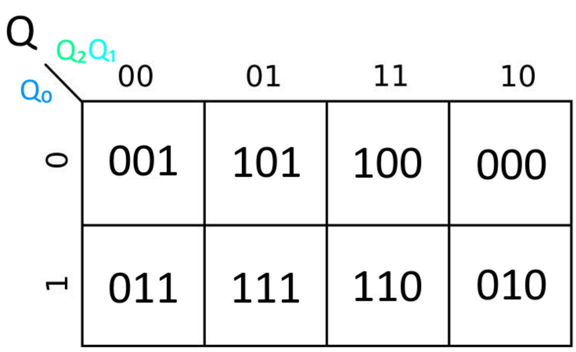
{Q2+=Q1Q¯2+Q2Q1Q1+=Q0Q¯1+Q1Q0Q0+=Q¯2Q¯0+Q0Q¯2\begin{cases}

{\color{lightgreen}Q_2^+} = {\color{yellow}Q_1\bar Q_2 + Q_2Q_1}
\\
{\color{cyan}Q_1^+} = {\color{orange}Q_0\bar Q_1 + Q_1Q_0}
\\
{\color{royalblue}Q_0^+} = {\color{red}\bar Q_2 \bar Q_0 + Q_0 \bar Q_2}

\end{cases}⎩⎨⎧Q2+ = Q1Q¯2 + Q2Q1Q1+ = Q0Q¯1 + Q1Q0Q0+ = Q¯2Q¯0 + Q0Q¯2

Per farlo, si devono seguire questi passi:

1. prendiamo una posizione all'interno della mappa di Karnaugh (per esempio, 000000000);
2. valutiamo ogni equazione all'interno del sistema di equazioni per lo stato futuro, in modo da trovare il valore Q2+Q1+Q0+{\color{lightgreen}Q_2^+}
{\color{cyan}Q_1^+}
{\color{royalblue}Q_0^+}Q2+Q1+Q0+ ed inserirlo all'interno della rispettiva cella (per esempio, 001{\color{lightgreen}0}
{\color{cyan}0}
{\color{royalblue}1}001);



Mappa di Karnaugh ottenuta dal sistema delle equazioni di stato futuro

{Q2+=0·1+0·0=0Q1+=0·1+0·0=0Q0+=1·1+0·1=1\begin{cases}

{\color{lightgreen}Q_2^+} = {\color{yellow}0\cdot1 + 0\cdot 0} = 0
\\
{\color{cyan}Q_1^+} = {\color{orange}0 \cdot1 + 0\cdot 0} = 0
\\
{\color{royalblue}Q_0^+} = {\color{red}1 \cdot 1 + 0 \cdot 1} = 1

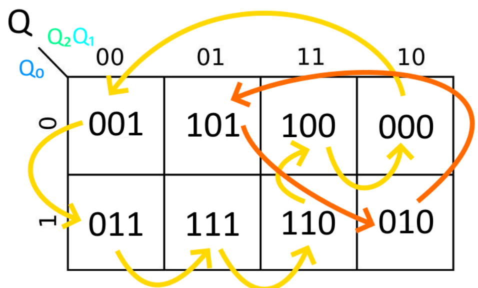
\end{cases}⎩⎨⎧Q2+ = 0 · 1 + 0 · 0 = 0Q1+ = 0 · 1 + 0 · 0 = 0Q0+ = 1 · 1 + 0 · 1 = 1

3. ripetere questo procedimento fino al riempimento di ogni cella, in modo da ottenere la mappa di Karnaugh finale.

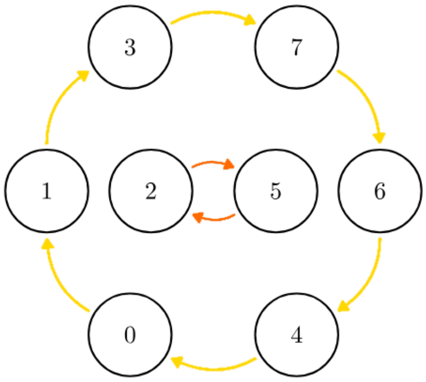
Grafo di transizione degli stati

Il grafo di transizione si ottiene attraverso questi passi:

1. prendiamo una posizione all'interno della mappa di Karnaugh (per esempio, 000000000);
2. disegniamo uno stato all'interno del grafo di transizione, con un valore pari a quello della posizione;
3. andiamo alla cella definita dal valore all'interno della cella (per esempio, 001001001), e disegniamola come il valore precedente;
4. colleghiamo lo stato precedente a quello attuale con un arco direzionato;
5. se si ottiene un nuovo ciclo al collegamento e sono presenti stati nella mappa di Karnaugh che non sono stati inseriti, si ricomincia dal punto 1;
6. ripetiamo lo stesso procedimento fino al termine delle celle, ottenendo il grafo di transizione degli stati.



Visualizzazione del procedimento di passaggio dei vari stati



Grafo di transizione degli stati ottenuto

Esercizio 7 - Design di circuito sequenziale da specifica

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

Obiettivo

Modellare un riconoscitore di sequenza adatto a riconoscere una qualsiasi sequenza che termini in 1012101_{2}1012.

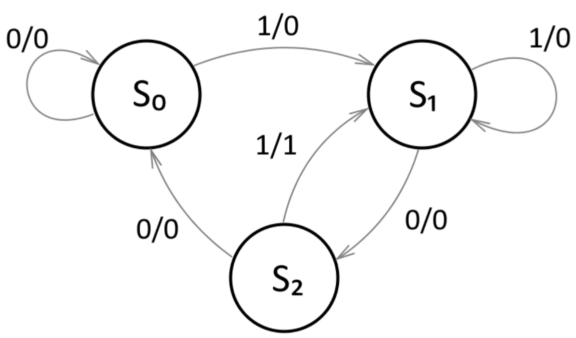
▼ FSM

Considerando che il rilevamento della sequenza richiede una determinata serie di valori, è necessario che il valore di uscita della FSM dipenda sia dagli input, sia dallo stato presente.

Per questo motivo, la FSM richiesta è definita attraverso l'architettura di Mealy.

Definiamo i tre stati necessari per modellarla:

- S0S_0S0: identificatore binario 00;
- S1S_1S1: identificatore binario 01;
- S2S_2S2: identificatore binario 10.



FSM di Mealy ottenuta

Definendo le coppie X/ZX/ZX/Z come etichette sugli archi che definiscono rispettivamente Input e Output, si ottiene la FSM in figura.

▼ Mappe di Karnaugh

A partire dalla FSM ottenuta, si definiscono le mappe di Karnaugh per lo stato futuro dei FF (Q1 e Q2)(Q_1 \text{ e } Q_2)(Q1 e Q2) e dell'uscita (Z)(Z)(Z).

Iniziamo definendo la mappa di Karnaugh della FSM, in cui ogni cella contiene il valore di tre cifre Q1+Q2+ZQ_1^+Q_2^+ZQ1+Q2+Z:

- Q1+Q_1^+Q1+ è la prima cifra dello stato futuro rispetto al valore di Q1Q2Q_1Q_2Q1Q2;
- Q2+Q_2^+Q2+ è la seconda cifra dello stato futuro rispetto al valore di Q1Q2Q_1Q_2Q1Q2;
- ZZZ è l'uscita dello stato in funzione dell'input XXX.

$Q_1^+Q_2^+Z$ — X \ Q_1Q_2	(S_0) 00	(S_1) 01	11	(S_2) 10
0	000	100	X	000
1	010	010	X	011

Mappa di Karnaugh della FSM

Definiamo ora le mappe di Karnaugh per ognuno dei valori di uscita Q1+Q_1^+Q1+, Q2+Q_2^+Q2+ e ZZZ, in modo da riuscire ad identificare la loro correlazione con i valori di input Q1Q_1Q1, Q2Q_2Q2 e XXX.

Si ottiene questa tabella prendendo, per ogni cella, il valore correlato a Q1+Q_1^+Q1+ nella mappa di Karnaugh della FSM.

Definendo i mintermini, otteniamo l'equazione di Q1+Q_1^+Q1+.

Q1+=DQ1=X¯Q2Q_1^+ = D_{Q_1} = \bar XQ_2Q1+ = DQ1 = X¯Q2

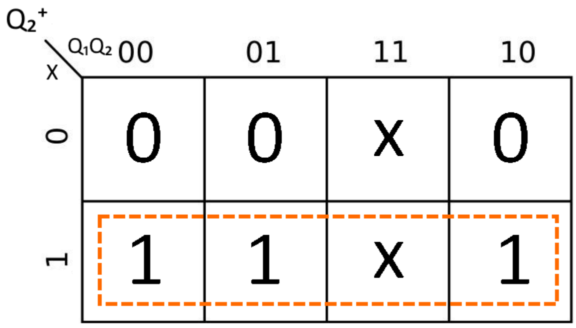
Q_1^+ — X \ Q_1Q_2	00	01	11	10
0	0	1	x	0
1	0	0	x	0

Mappa di Karnaugh che definisce Q1+Q_1^+Q1+

Si ottiene questa tabella prendendo, per ogni cella, il valore correlato a Q2+Q_2^+Q2+ nella mappa di Karnaugh della FSM.

Definendo i mintermini, otteniamo l'equazione di Q2+Q_2^+Q2+.

Q2+=DQ2=XQ_2^+ = D_{Q_2} = XQ2+ = DQ2 = X

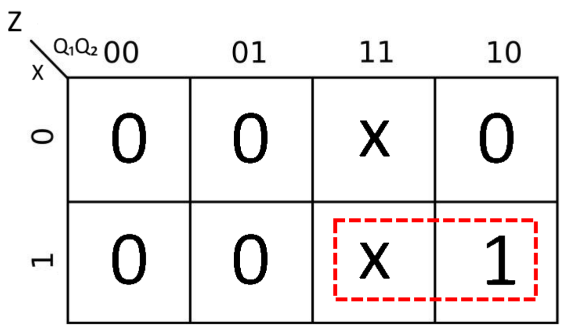


Mappa di Karnaugh che definisce Q1+Q_1^+Q1+

Si ottiene questa tabella prendendo, per ogni cella, il valore correlato a ZZZ nella [mappa di Karnaugh della FSM](#).

Definendo i mintermini, otteniamo l'equazione di ZZZ.

Z=XQ1Z = XQ_1Z = XQ1

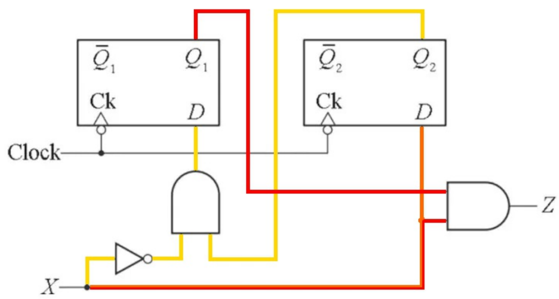


Mappa di Karnaugh che definisce ZZZ

Circuito sequenziale

Utilizzando dei Flip-Flop D, e avendo le espressioni di DQ1\color{yellow}D_{Q_1}DQ1, DQ2\color{orange}D_{Q_2}DQ2 e Z\red ZZ, si possono definire i componenti da utilizzare per costruire il circuito sequenziale, ovvero:

- due Flip-Flop D;
- due porte AND;
- una porta NOT.



Circuito sequenziale ottenuto

DQ1=X¯Q2{\color{yellow}D_{Q_1}} = \bar XQ_2DQ1 = X¯Q2

DQ2=X{\color{orange}D_{Q_2}} =
XDQ2 = X

Z=XQ1{\color{red}Z} =
XQ_1Z = XQ1

Esercizio 8 - Semplificazione di circuiti multi-output

▼ Creatore originale: @Giacomo Dandolo

Obiettivo

Data la seguente descrizione per un circuito multi-output a 4 ingressi e 3 uscite, realizzare un circuito in grado di soddisfare la specifica.

{f1=∑m(2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)f2=∑m(2,3,5,6,7,10,11,14,15)f3=∑m(6,7,8,9,13,14,15)\begin{cases}

f_1 = \sum m(2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)
\\
f_2 = \sum m(2,3,5,6,7,10,11,14,15)
\\
f_3 = \sum m(6,7,8,9,13,14,15)

\end{cases}⎩⎨⎧f1 = ∑m(2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)f2 = ∑m(2,3,5,6,7,10,11,14,15)f3 = ∑m(6,7,8,9,13,14,15)

▼ Mappe di Karnaugh delle funzioni

Partiamo dalla funzione f1f_1f1. Per leggere questi valori e trasformarli in una mappa di Karnaugh, bisogna ricordare che i valori presenti nelle parentesi indicano in quali celle è presente il valore 1 in una funzione, in questo caso a 4 bit, e che ogni cella è rappresentata da un valore binario x1x2x3x4x_1x_2x_3x_4x1x2x3x4.

Per esempio, 210=001022_{10} = 0010_2210 = 00102, quindi nella cella corrispondente all'incrocio tra x3x4=102x_3x_4 = 10_2x3x4 = 102 e x1x2=002x_1x_2 = 00_2x1x2 = 002 si inserisce 1. Prendendo un secondo esempio, 910=100129_{10} = 1001_2910 = 10012, nella cella corrispondente all'incrocio tra x3x4=012x_3x_4=01_2x3x4 = 012 e x1x2=102x_1x_2 = 10_2x1x2 = 102 si inserisce 1.

Si ripete questo procedimento per ogni valore presente tra le parentesi della funzione, e successivamente per ogni funzione, ottenendo le espressioni di f1f_1f1, f2f_2f2 e f3f_3f3 e la relativa mappa di Karnaugh.

f1=x1x¯2+x2x4+x¯2x3=ρ11+ρ12+ρ13\begin{align*}

f_1 &={\color{red}x_1\bar x_2} + {\color{orange}x_2x_4} +
{\color{yellow}\bar x_2x_3}
\\
&= {\color{red}\rho_{11}} + {\color{orange}\rho_{12}} +
{\color{yellow}\rho_{13}}

\end{align*}f1 = x1x¯2 + x2x4 + x¯2x3 = ρ11 + ρ12 + ρ13

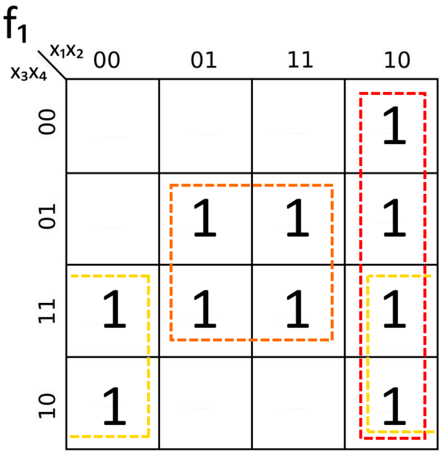


Tabella di Karnaugh (Prima funzione)

f2=x3+x¯1x2x4=ρ21+ρ22\begin{align*}

f_2 &= {\color{royalblue}x_3} + {\color{cyan}\bar x_1x_2x_4}
\\
&= {\color{royalblue}\rho_{21}} + {\color{cyan}\rho_{22}}

\end{align*}f2 = x3 + x¯1x2x4 = ρ21 + ρ22

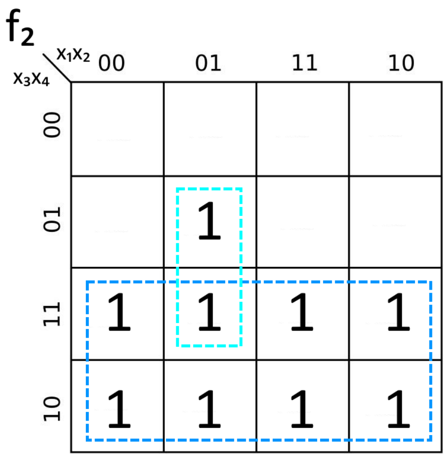


Tabella di Karnaugh (Seconda funzione)

f3=x1x¯2x¯3+x1x2x4+x2x3=ρ31+ρ32+ρ33\begin{align*}

f_3 &= {\color{green}x_1\bar x_2 \bar x_3} +
{\color{limegreen}x_1x_2x_4} + {\color{lightgreen}x_2x_3}
\\
&={\color{green}\rho_{31}} + {\color{limegreen}\rho_{32}} +
{\color{lightgreen}\rho_{33}}

\end{align*}f3 = x1x¯2x¯3 + x1x2x4 + x2x3 = ρ31 + ρ32 + ρ33

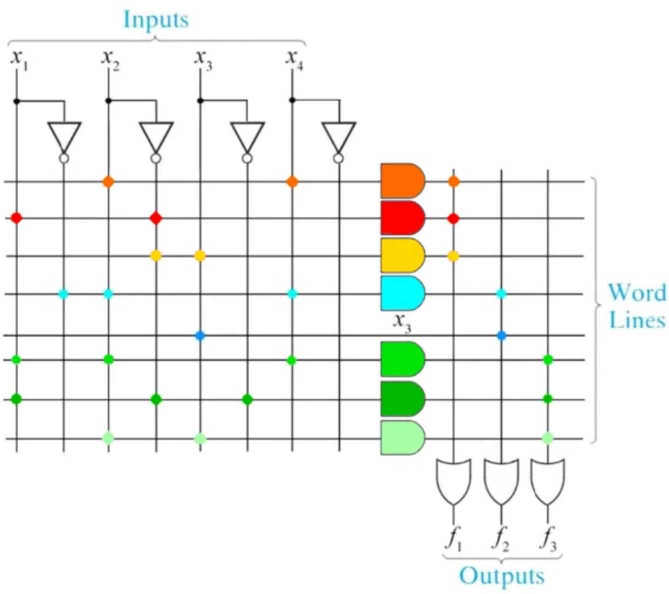
f_3

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00				1
01			1	1
11		1	1	
10		1	1	

Tabella di Karnaugh (Terza funzione)

▼ Prima forma del circuito multi-output

Definendo gli input nella loro forma negata e nella loro forma diretta, e definendo anche una porta per ogni parte delle funzioni (ρ11,ρ12,ρ13,...)({\color{red}\rho_{11}}, {\color{orange}\rho_{12}}, {\color{yellow}\rho_{13}},...)(ρ11, ρ12, ρ13, ...), si ottiene la prima forma del circuito multi-output, la quale non è semplificata in alcun modo, e risulta, di fatto, non un circuito ottimizzato dal punto di vista del costo e del numero di porte.



Prima forma del circuito multi-output

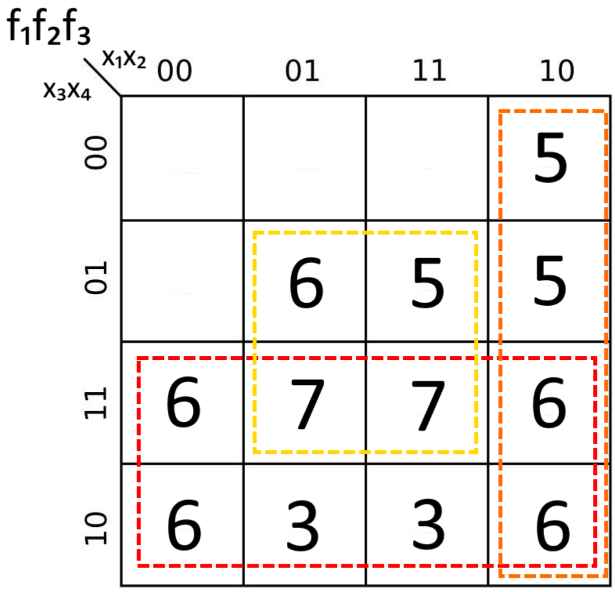
▼ Semplificazione del circuito multi-output

Per semplificare il circuito, è necessario definire una mappa di Karnaugh che definisce la relazione tra le varie funzioni. Per realizzarla, è necessario accostare i valori binari, per ogni cella, di ognuna delle mappe di Karnaugh, per poi trasformarlo in valore decimale, in modo da semplificare la tabella di Karnaugh finale e identificare subito quali celle sono necessarie per la semplificazione.

Per esempio, la cella definita da x1x2=002x_1x_2 = 00_2x1x2 = 002 e la cella definita da x3x4=112x_3x_4 =

11_2x3x4 = 112 avrà, al suo interno, il valore 1102110_21102, che scriveremo con il suo valore decimale, 6106_{10}610.

Tutto ciò si ripete per ogni cella, fino a formare la mappa di Karnaugh con i relativi raggruppamenti ρ1\color{red}\rho_1ρ1, ρ2\color{orange}\rho_2ρ2 e ρ3\color{yellow}\rho_3ρ3.



Mappa di Karnaugh (tutte le funzioni)

Per semplificare l'espressione iniziale, si devono scrivere le espressioni di ρ1\color{red}\rho_1ρ1, ρ2\color{orange}\rho_2ρ2 e ρ3\color{yellow}\rho_3ρ3, per poi cercare di trasformare le espressioni in funzione delle porte definite. Eseguiamo i calcoli per ogni espressione.

- ρ1\color{red}\rho_1ρ1;

  ρ1=x3=ρ13+ρ33=∑m(2,3,10,11)+∑m(6,7,14,15)\rho_1 = x_3 = {\color{yellow}\rho_{13}} + {\color{lightgreen}\rho_{33}} = \sum m(2,3,10,11) + \sum m(6,7,14,15)ρ1 = x3 = ρ13 + ρ33 = ∑m(2,3,10,11) + ∑m(6,7,14,15)

- ρ2\color{orange}\rho_2ρ2;

  ρ2=x1x¯2=ρ31+ρ13/ρ2=∑m(8,9)+∑m(2,3)\rho_2 = x_1 \bar x_2 = {\color{green}\rho_{31}} + {\color{yellow}\rho_{13}}/\rho_2 = \sum m(8,9) + \sum m(2,3)ρ2 = x1x¯2 = ρ31 + ρ13/ρ2 = ∑m(8,9) + ∑m(2,3)

- ρ3\color{yellow}\rho_3ρ3.

  ρ3=x2x4=ρ22+ρ32=∑m(5,7)+∑m(13,15)\rho_3 = x_2x_4 = {\color{cyan}\rho_{22}} + {\color{limegreen}\rho_{32}} = \sum m(5,7) + \sum m(13,15)ρ3 = x2x4 = ρ22 + ρ32 = ∑m(5,7) + ∑m(13,15)

Dopo averle definite, riprendendo le definizioni iniziali della prima funzione, della seconda funzione e della terza funzione, si può ridefinire ognuna delle espressioni in funzione delle porte logiche utilizzate per definire ρ1\color{red}\rho_1ρ1, ρ2\color{orange}\rho_2ρ2 e ρ3\color{yellow}\rho_3ρ3.

f1=ρ13+ρ31+ρ22+ρ32=x¯2x3+x1x¯2x¯3+x¯1x2x4+x1x2x4\begin{align*}

f_1 &= {\color{yellow}\rho_{13}} + {\color{green}\rho_{31}} + {\color{cyan}\rho_{22}} + {\color{limegreen}\rho_{32}}
\\
&= \bar x_2x_3 + x_1\bar x_2 \bar x_3 + \bar x_1 x_2x_4 + x_1x_2x_4

\end{align*}f1 = ρ13 + ρ31 + ρ22 + ρ32 = x¯2x3 + x1x¯2x¯3 + x¯1x2x4 + x1x2x4

f2=ρ22+ρ33+ρ13=x¯1x2x4+x2x3+x¯2x3\begin{align*}

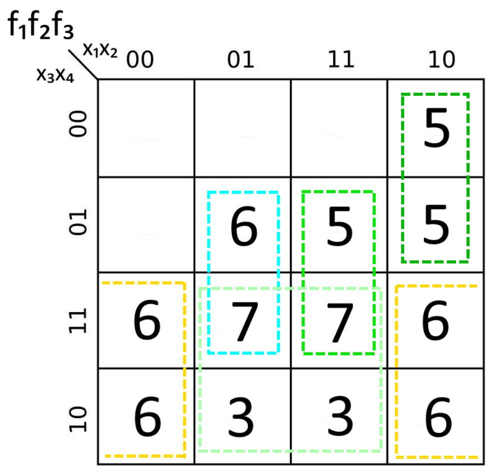
f_2 &= {\color{cyan}\rho_{22}} + {\color{lightgreen}\rho_{33}} + {\color{yellow}\rho_{13}}
\\
&= \bar x_1x_2x_4 + x_2x_3 + \bar x_2x_3

\end{align*}f2 = ρ22 + ρ33 + ρ13 = x¯1x2x4 + x2x3 + x¯2x3

f3=ρ33+ρ32+ρ31=x2x3+x1x2x4+x1x¯2x¯3\begin{align*}

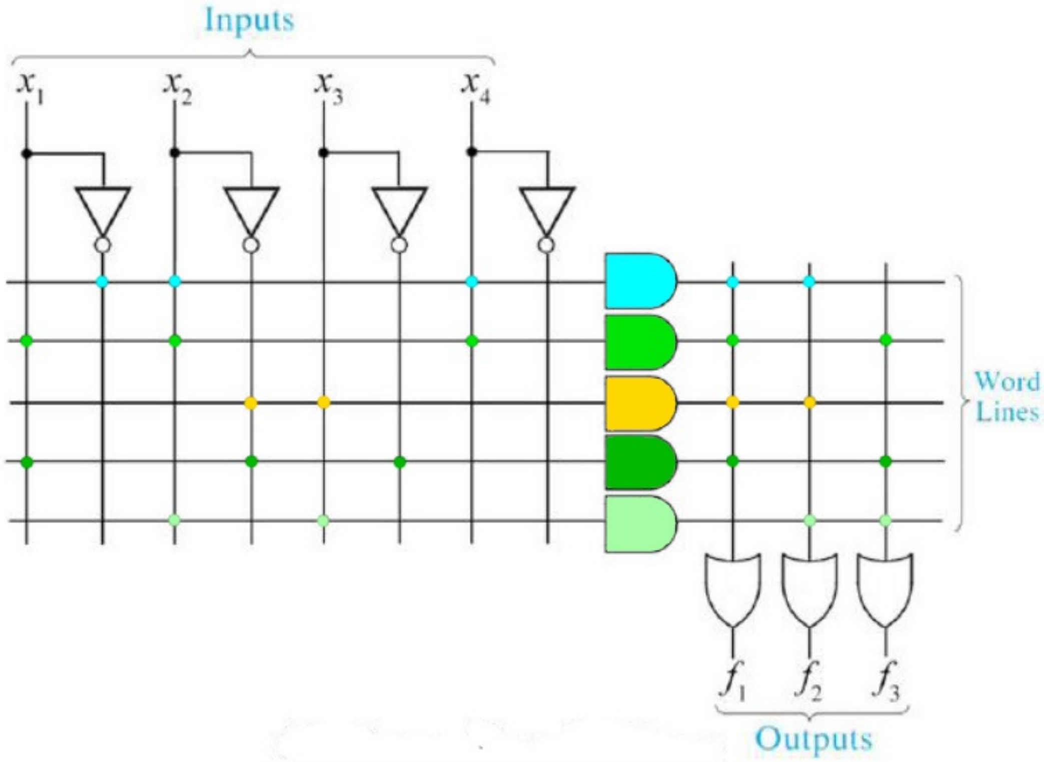
f_3 &= {\color{lightgreen}\rho_{33}} + {\color{limegreen}\rho_{32}} + {\color{green}\rho_{31}}
\\
&= x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1 \bar x_2 \bar x_3

\end{align*}f3 = ρ33 + ρ32 + ρ31 = x2x3 + x1x2x4 + x1x¯2x¯3



Mappa di Karnaugh finale

Allo stesso modo della prima forma del circuito multi-output, si forma la seconda forma del circuito multi-output, il quale risulta semplificato rispetto al primo.



Seconda forma del circuito multi-output