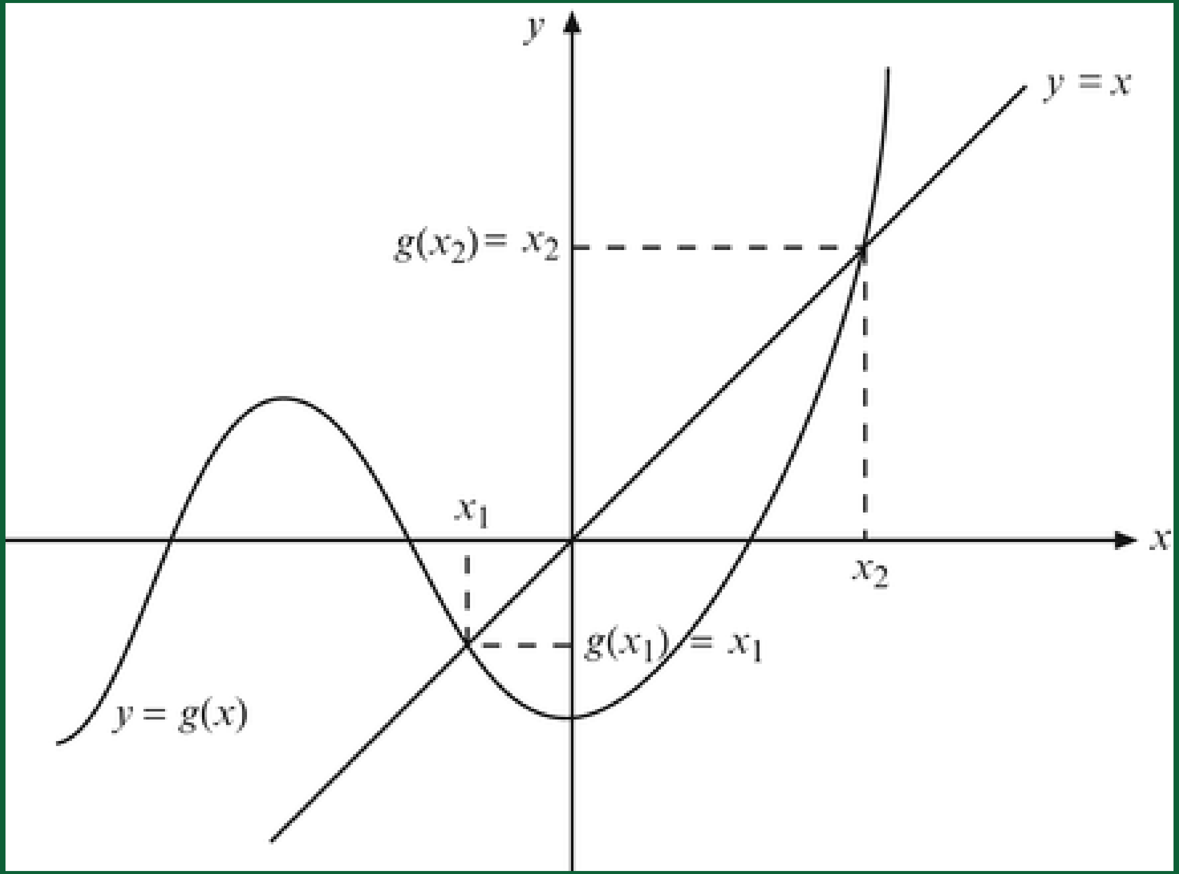


Es un punto donde al evaluarlo en una función se obtiene el mismo punto

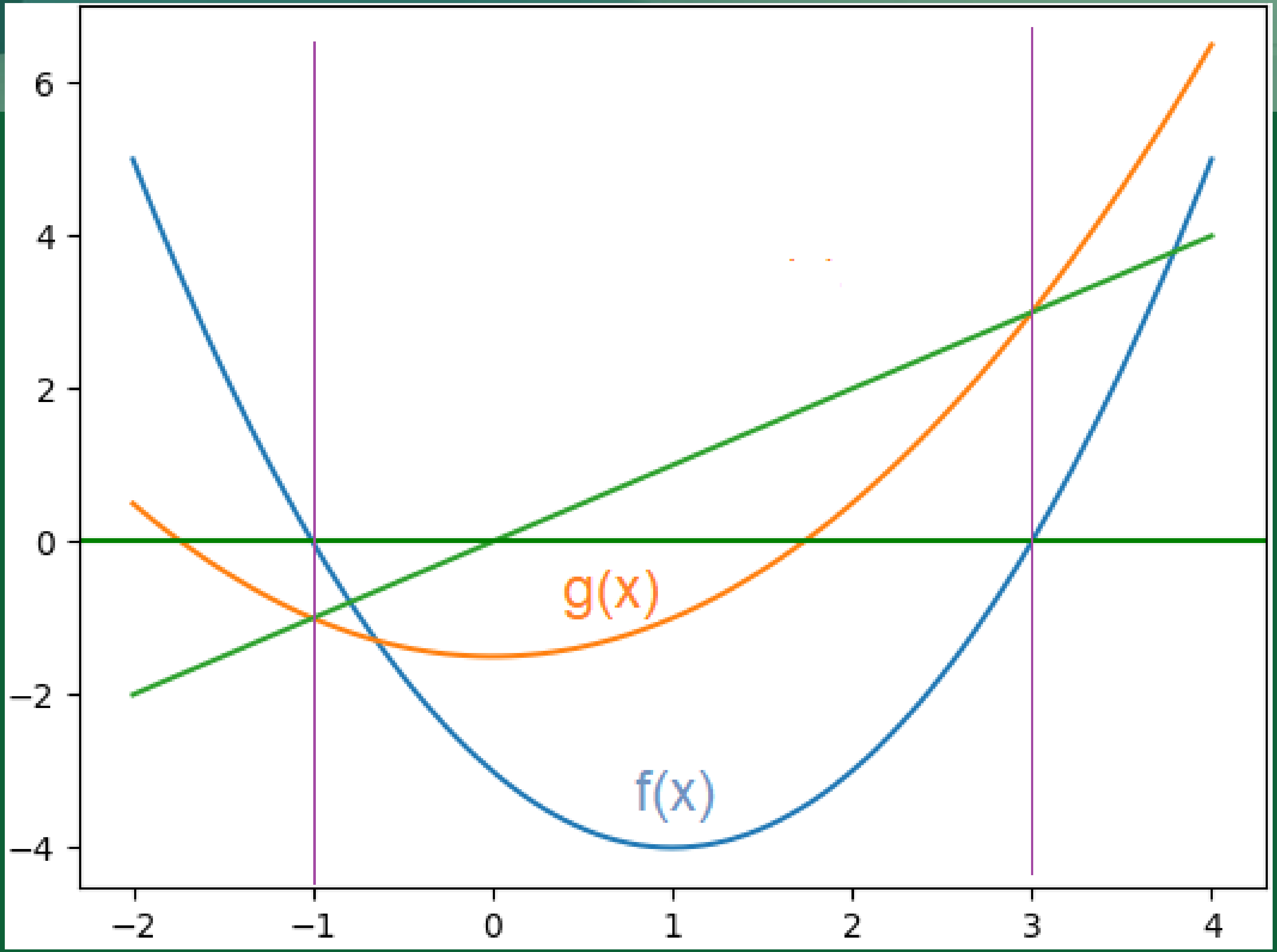
Ing. Omar Cáceres

Propiedades de un conjunto compacto:

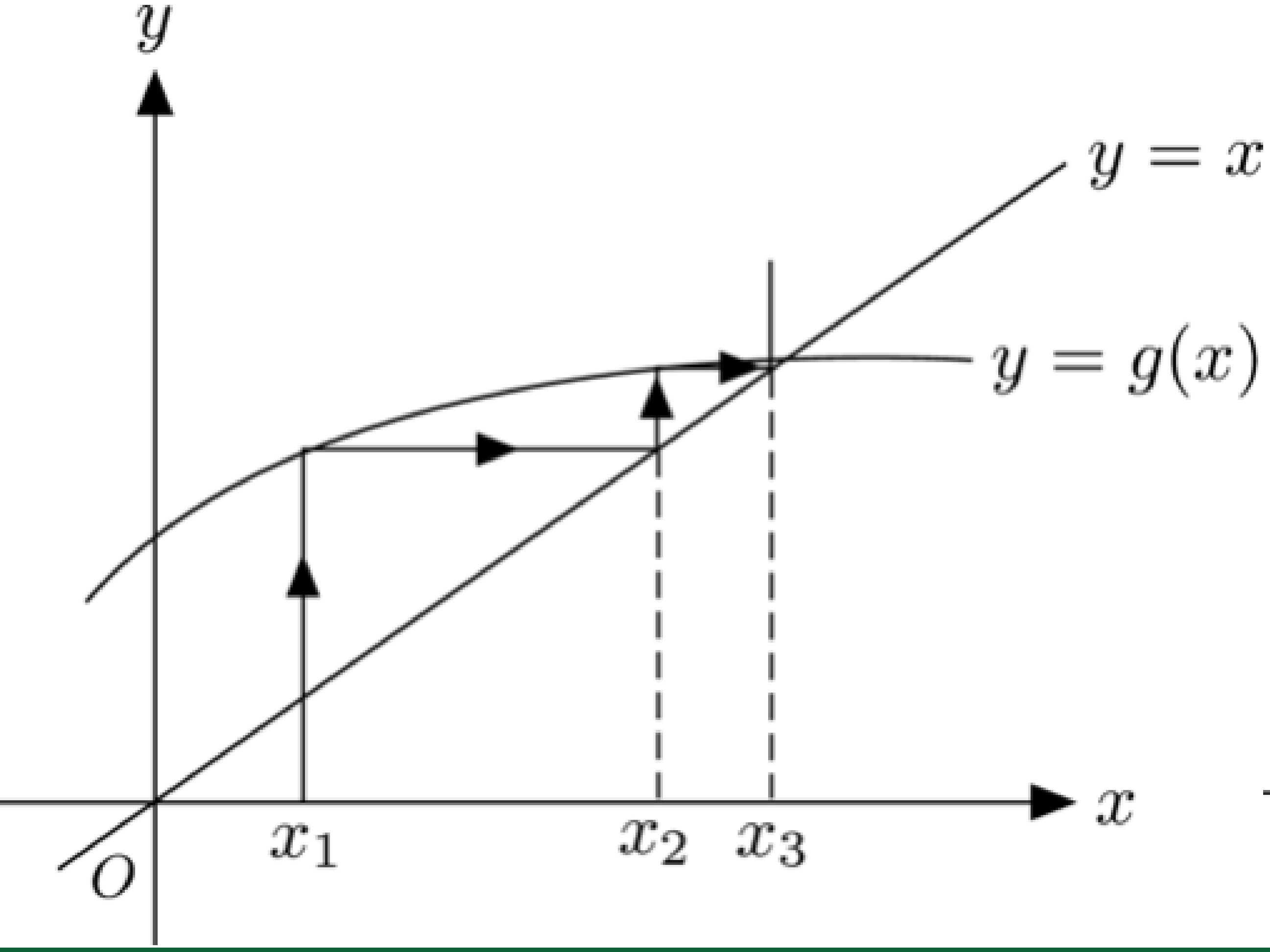
Existencia de un punto fijo: El teorema del punto fijo de Banach establece que, si X es un conjunto compacto completo y compacto en un espacio métrico, y f es una función contractiva, entonces existe un único punto fijo. $x^*\epsilon X$ tal que $f_{(x^*)=X^*}$

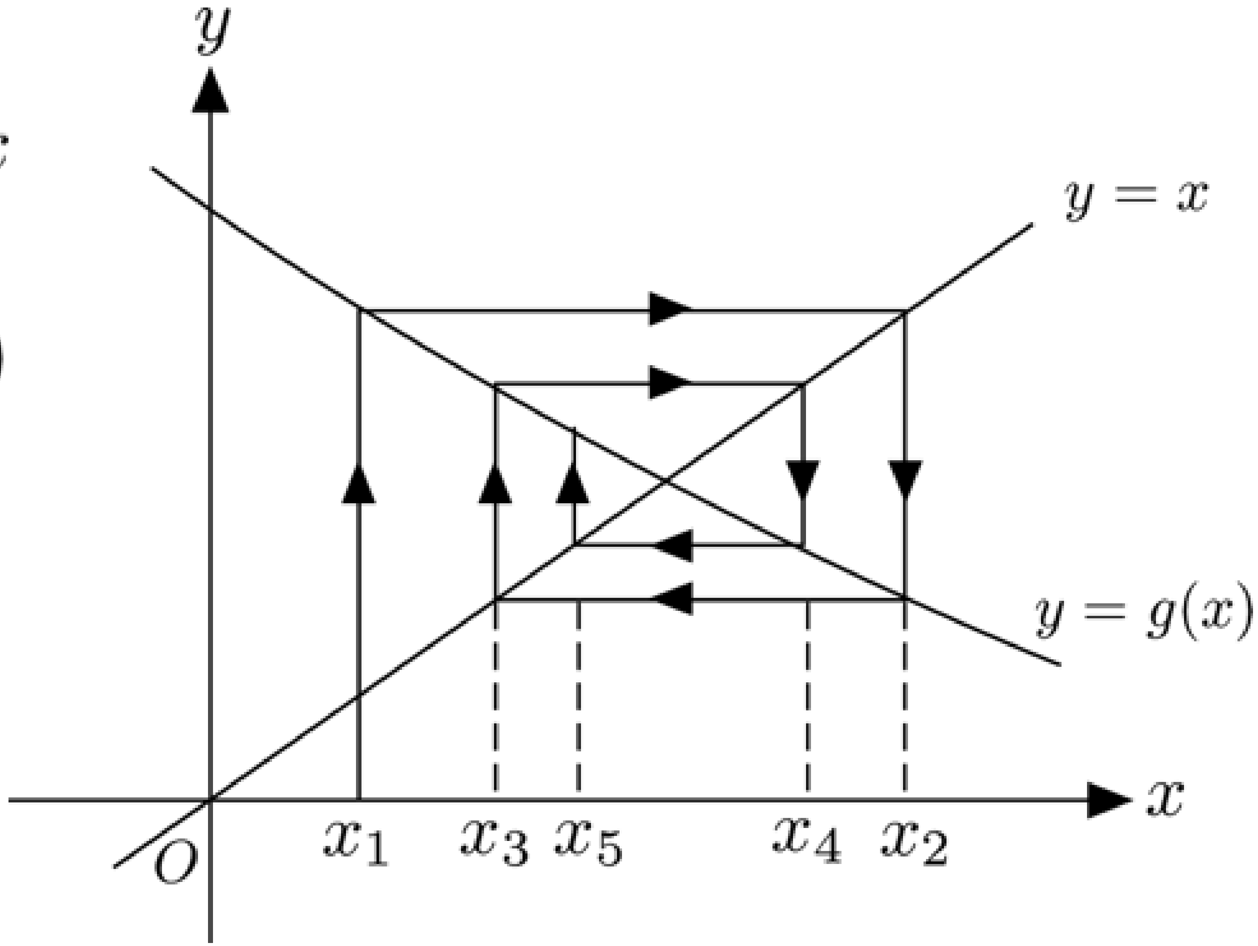
Convergencia Iterativa: Partiendo de un punto arbitrario $x_0\epsilon X$ la sucesión generada la iteración de f: $\boxed{x_{n+1} = f_{(x_n)}}$ converge al punto fijo

Sea $f_{(x)}$ la función original,
$g_{(x)}$ la función a iterar



Método del Punto Fijo





Conceptos

Ejercicios: sea $f(x)$, Aplicar el método del punto fijo para hallar la solución cercana.

a) $f_{(x)} = 2e^{x^2} - 5x,$ $x^* \epsilon [0,1],\ x_{(0)} = 0$

b) $f_{(x)} = \cos x\,,$ $x^* \epsilon [1,2],\ x_{(0)} = 1$

c) $f_{(x)} = e^{-x} - x,$ $x^* \epsilon [0,1],\ x_{(0)} = 0$

d) $f_{(x)} = x^3 - x - 1,$ $x^* \epsilon [1,2],\ x_{(0)} = 1$

e) $f_{(x)} = \pi + 0.5 \sin \frac{x}{2},$ $x^* \epsilon [0,2\pi],\ x_{(0)} = 0$

$$\boxed{x_{n+1} = g_{(x_n)}}$$

$$\boxed{f_{(x^*)=x^*}}$$

$$\boxed{f_{(x)=0}}$$

$$\boxed{\left|g'_{(x0)}\right| < 1}$$

$$\boxed{d\,(x_n, x^*) \leq \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}} d\,(x_{\boldsymbol{0}}, x^*)}$$

$$\boxed{\left|f_{(x)} - f_{(y)}\right| \leq \mathrm{k}|x - y|}$$

$$0 < k < 1$$

MODELADO Y SIMULACIÓN

Código

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
"""
f(x)=cos(x)
0=cos(x)
x= cos(x)+x
"""
def f(x):
    return math.cos(x)
 def g(x):
    return math.cos(x) + x
 def fixed_point_iteration(x0, tol=1e-5, max_iter=100):
    x = x0
    iter_values = [x0]
    for i in range(max_iter):
        x_new = g(x)
        iter_values.append(x_new)
        if abs(x_new - x) < tol:
            print("Tolerance exceeded...")
            break
        x = x_new
    return x_new, iter_values
 x0 = 1.0 # Valor inicial
root, iter_values = fixed_point_iteration(x0)
```

```
# Graficar la función original y el proceso de iteración
x_vals = np.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, 400)
y_vals = np.cos(x_vals)

plt.plot(x_vals, y_vals, label='$f(x) = cos(x)$')
plt.scatter(iter_values, [f(x) for x in iter_values], color='red', zorder=5)
plt.plot(iter_values, [f(x) for x in iter_values], color='red', linestyle='--', zorder=5)
plt.axhline(0, color='black',linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black',linewidth=0.5)
plt.grid(color = 'gray', linestyle = '--', linewidth = 0.5)
plt.title('Método del Punto Fijo para $f(x) = cos(x)$')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$f(x)$')
plt.legend()
plt.show()

print(f"La raíz aproximada es: {root}")
```