Conceptos

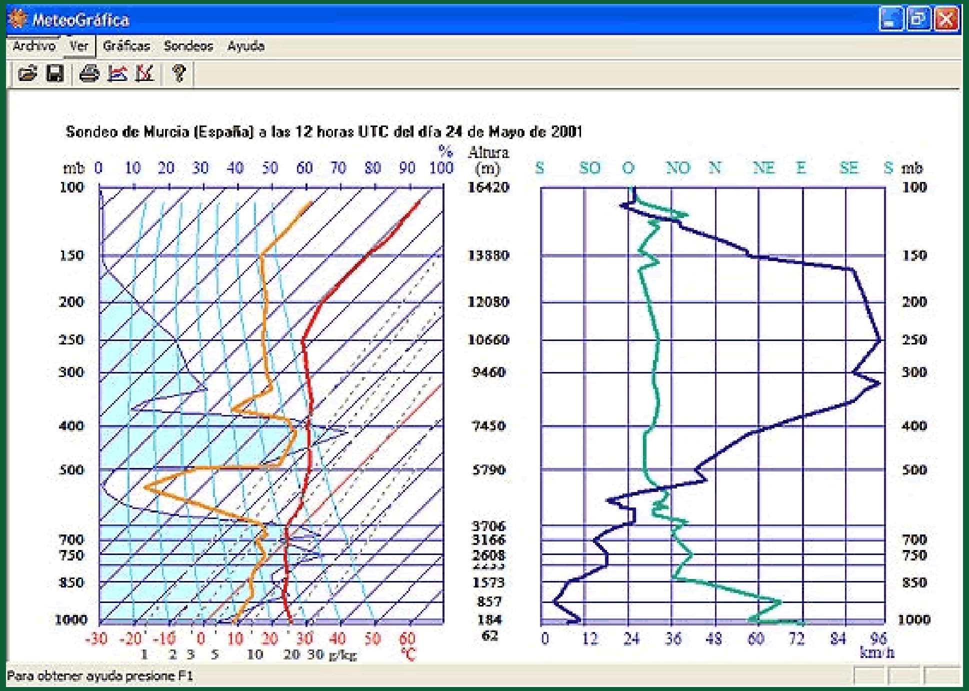
Modelo Matemático: Se define, de manera general, como una formulación o una ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o de un proceso en términos matemáticos. en general, el modelo se representa mediante una relación **funcional de la forma**:

Variable dependiente = f(variables independientes , parámetros, funciones de fuerza)

Steven Chapra Métodos Numéricos para ingenieros 5ta Edición, Pg 11.

MODELADO Y SIMULACIÓN
Conceptos

Simulación



Simular: una vez que se ha creado un modelo, la simulación es el proceso de ejecutarlo para estudiar el comportamiento del sistema a través del tiempo o bajo diferentes condiciones.

Iterar: Significa repetir un proceso con el objetivo de acercarse a un resultado deseado.

$$\boxed{x_{n+1} = x_n}$$

Convergencia: Indica como las aproximaciones sucesivas se acercan a la solución x^* de una ecuación: $f_{(x)} = 0$

Velocidad de convergencia: La rapidez con la que se reduce el error, $e_n = |x_n - x^*|$

Conceptos

Convergencia

Orden de Convergencia: Es una medida utilizada en análisis numérico para describir la rapidez con la que una secuencia iterativa se acerca a su límite o solución. cuando se emplean métodos iterativos para resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones, es útil conocer el orden de convergencia para determinar la eficiencia del método.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|X_{n+1} - X^*\ |}{|X_n - X^*|^P} = C}$$

Donde C es una constante, P el orden de aproximación y X^* la solución buscada

Conceptos

Convergencia

Orden de Convergencia: Es decir se basa en como se reduce el error entre aproximaciones sucesivas. Entonces:

$$\boxed{|e_{n+1}| = C|e_n|^p}$$

Donde C es una constante independiente de n, P el orden de convergencia, X^* la solución buscada, e_n error.

$$\boxed{e_n = x_n - x^*}$$

$$C > 0, \qquad p > 1$$

Conceptos

Métodos Iterativos

Algunos Métodos Iterativos

Método	Orden de Convergencia	Ventajas	Desventajas
Newton Raphson	Cuadrática	Muy rápido cerca del valor real	Necesita derivadas
Bisección	Lineal	Siempre converge	Lento
Punto Fijo	Lineal	Fácil de implementar	Requiere la condición $\left\| g'_{(x0)} \right\| \leq 1$

Existen otros métodos, pero estos son los mas conocidos.

Cota de error: La cota de error se refiere a una estimación del error máximo que se comete en un proceso iterativo o aproximación. Garantiza el resultado dentro de una tolerancia aceptable.

Tipos de cota de error: existen varios tipos, acá estudiaremos los dos principales que son; error absoluto y relativo.

Error Absoluto: Es la diferencia entre el valor exacto x^* y la aproximación x_n

$$\boxed{E_{abs} = |x^* - x_n|}$$

Como x^* no lo conocemos entonces se puede usar diferencia entre iteraciones

$$\boxed{E_{abs} \approx |x_{n+1} - x_n|}$$

Conceptos

Errores

Error Relativo: Es una medida utilizada para cuantificar la precisión de una aproximación o medición en comparación con un valor exacto o verdadero. se expresa como una fracción o porcentaje del valor verdadero y es útil para evaluar la significancia del error en términos relativos.

$$\boxed{E_r = \frac{|x^* - x_n|}{|x^*|}}$$

Como x^* no lo conocemos entonces se puede usar diferencia entre iteraciones

$$\boxed{E_r \approx \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|}}$$

Criterios de Detención: Son las reglas que definen cuando un método iterativo debe parar, los criterios mas comunes son;

1. Tolerancia en el error absoluto: $\boxed{|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon}$ ε Tolerancia permitida

2. Tolerancia en el error Relativo: $\boxed{\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \le \varepsilon}$

3. Condición sobre el residuo: $\boxed{|f_{(x)}| \le \varepsilon}$

4. Numero máximo de iteraciones: $\boxed{n > N_{max}}$

Como x^* no lo conocemos entonces se puede usar diferencia entre iteraciones

Conjuntos compactos:

En un espacio métrico, un conjunto k se define compacto si es cerrado (contiene todos los puntos limite), acotado: (todos los puntos del conjunto están a una distancia finita de algún punto fijo).

Ejemplos de conjuntos compactos:

1. Un disco cerrado en el plano, $\{(x, y) \epsilon R^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$

es compacto, es un disco de radio 1 centro en el origen, es cerrado porque incluye el borde $x^2 + y^2 = 1$ y es acotado

Ejemplos de conjuntos compactos:

2. Un segmento de recta en R^n: la línea parametrizada [a,b]= $\{X \epsilon R^2, x = t a + (1-t)b,\ 0 \leq t \leq 1\}$ es compacta.

3. Un rectángulo cerrado en R^2 el conjunto [a,b]x[c,d] en R^2 es compacto en la región rectangular delimitada por a,b,c,d (cerrado y acotado).

4. El conjunto de funciones continúas acotadas en [0,1] con la topología de la convergencia uniforme, esta es una aplicación del teorema de Arzelá-Ascolí, que afirma que un conjunto es compacto si es equicontinuo, acotado y cerrado.

Condición de Lipschitz en conjuntos compactos:

Supongamos que tenemos una función $g: k \rightarrow R$, definida en un conjunto compacto k. Decimos que g tatisface una condición de Lipschitz contante L, si para todos $x, y \in k$; $\left|g_{(x)} - g_{(y)}\right| \leq L\,|x - y|$.

Si una función es continuamente diferenciable, $(g \in C^{1}{}_{(k)})$ entonces y el conjunto compacto tiene una derivada acotada, $\left|g'_{(x)}\right| \leq M$, para todo $x \in$ K y podemos tomar L=M.

La constante L es uniforme en el todo el conjunto compacto, y además da garantía de convergencia si $L < 1$ en x_{n+1}=$g_{(x_n)}$.

Conceptos

Conjuntos compactos

Propiedades de un conjunto compacto:

Existencia de un punto fijo: El teorema del punto fijo de Banach establece que, si X es un conjunto compacto completo y compacto en un espacio métrico, y f es una función contractiva, entonces existe un único punto fijo. $x^*\epsilon X$ tal que $f_{(x^*)=X^*}$

Convergencia Iterativa: Partiendo de un punto arbitrario $x_0\epsilon X$ la sucesión generada la iteración de f: $\boxed{x_{n+1} = f_{(x_n)}}$ converge al punto fijo

Funciones Contractivas: sea una $f: X \rightarrow X$, Se dice contractiva si existe una constante $k \epsilon [0,1)$ tal que $d\left(f_{(x)}, f_{(y)}\right) \leq k\, d(x, y), \forall\, x, k \epsilon X$,donde $d(\cdot,\cdot)$ es una métrica definida en el espacio métrico X.

En esencia una función contractiva (acerca) los puntos del dominio, ya que la distancia entre las imágenes de los puntos es estrictamente menor que la distancia entre los puntos originales

Ejemplo Función contractiva: sea $f(x) = \frac{1}{2}x$, definida en un conjunto compacto X=[0,1].

Verificamos la contracción: $|f_{(x)} - f_{(y)}| = \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right| = \frac{1}{2}|x - y|$

En este caso la constante de contracción cumple el requerimiento, entonces, hay un único punto fijo en X. se calcula $f(x) = x$, ordenando la ecuación: $\frac{1}{2}x - x = 0, por\ lo\ que\ x^* = 0$, esto nos dice que si aplicamos iteración desde un punto cercano por ejemplo 1, la función converge a 0.

$\boxed{d(x_n, x^*) \leq \boldsymbol{k^n} d(x_{\boldsymbol{0}}, x^*)}$ $\boxed{|f_{(x)} - f_{(y)}| \leq k|x - y|}$ $0 < k < 1$