Matemática 3

PRÁCTICA 4: Variables aleatorias continuas. Funciones de distribución de probabilidad: uniforme, exponencial, normal

1. El tiempo total, medido en unidades de 1000 horas, que un adolescente utiliza su celular en un período de un año es una v.a. continua X con f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que en un período de un año el adolescente utilice su celular:

   a) menos de 1200 horas.

   b) entre 500 y 1000 horas.

2. Suponga que la distancia X entre un blanco puntual y un disparo dirigido al punto, en un juego de tiro al blanco accionado por monedas, es una v.a. continua con f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}75(1 - x^2) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

   a) Calcular $P(X > 0)$.

   b) Calcular $P(-0{,}5 \leq X \leq 0{,}5)$.

   c) Calcular $P(X < -0{,}25$ ó $X > 0{,}25)$.

   d) Hallar la F.d.a. de X.

3. Considere la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

   a) Halle el valor de k.

   b) Encuentre $F(x)$.

   c) Evalúe $P(0{,}3 < X < 0{,}6)$ utilizando $F(x)$.

4. Para las variables aleatorias de los ejercicios anteriores hallar su esperanza y desviación estándar.

5. Para la v.a. del ejercicio 1), sea la v.a. Y el número de kilowatts-hora que el adolescente gasta al año; se tiene que $Y = 60X^2 + 39X$. Calcule la esperanza de Y. Explique qué propiedad utiliza.

6. Una barra de 12 pulgadas, que está sujeta por ambos extremos, debe someterse a un creciente cantidad de esfuerzo hasta que se rompa. Sea X: "distancia desde el extremo izquierdo en el que ocurre la rotura" y suponga que la f.d.p. de X es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{24}x\left(1 - \dfrac{x}{12}\right), & 0 < x < 12 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Calcular:

   a) la F.d.a de X.

   b) $P(X \leq 4)$, $P(X > 6)$, $P(4 < X < 6)$.

   c) $E(X)$.

   d) la probabilidad de que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulgadas del punto esperado de ruptura.

7. La cantidad de café diaria, en litros, que sirve una máquina que se localiza en el vestíbulo de un aeropuerto es una v.a. X con distribución uniforme continua en $(7, 10)$. Encuentre la probabilidad de que en un día dado la cantidad de café que sirve esta máquina sea:

   a) a lo sumo 8,8 litros.
   b) más de 7,4 litros, pero menos de 9,5 litros.
   c) al menos 8,5 litros.
   d) Hallar $E(X)$ y $V(X)$.

8. La variable Z tiene distribución normal estándar.

   a) Calcular las siguientes probabilidades:
      1) $P(Z \leq 2{,}24)$.
      2) $P(Z > 1{,}36)$.
      3) $P(0 < Z < 1{,}5)$.
      4) $P(0{,}3 < Z < 1{,}56)$.
      5) $P(-0{,}51 < Z < 1{,}54)$.
   b) Hallar los valores de z que verifiquen:
      1) $P(Z > z) = 0{,}5$.
      2) $P(Z < z) = 0{,}8485$.
      3) $P(Z < z) = 0{,}0054$.
      4) $P(-z < Z < z) = 0{,}90$.

9. Sea X es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros: $\mu = 10$ y $\sigma^2 = 36$. Calcular:

   a) $P(X > 6{,}4)$.
   b) $P(4{,}2 < X < 16)$.
   c) $P(X \leq 8{,}14)$.

10. En la elaboración de un determinado medicamento en forma de comprimido interviene un producto químico cuya cantidad sigue aproximadamente una distribución normal con media 3 gr y desviación estándar 0,05 gr.

    a) Calcular la probabilidad de que un comprimido pese más de 3,025 gr.
    b) Un comprimido se considera defectuoso cuando su peso difiere de la media en más de 0,075 gr. Calcular la proporción de comprimidos defectuosos que se fabrican.
    c) Estos comprimidos se envasan en cajas de 10 unidades. Si un envase contiene 2 o más comprimidos defectuosos se elimina del mercado. Determinar el porcentaje de cajas que se retiran del mercado. (Sugerencia: considere $X=$ "número de comprimidos defectuosos en una caja")

11. Un estudio de cierto sistema de computadoras revela que el tiempo de respuesta, en segundos, tiene una distribución exponencial con una media de 3 segundos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 5 segundos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 10 segundos?

12. El número de visitas a un sitio web sigue un proceso de Poisson con una razón de 3 por minuto.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurra más de un minuto sin recibir una visita?

    b) Si transcurren dos minutos sin una visita, ¿cuál es la probabilidad que se dé una visita en el siguiente minuto?

13. El tiempo en horas empleado diariamente en transporte por los trabajadores de una gran ciudad es una v.a. continua con densidad exponencial con media 0,25.

    a) Calcular la probabilidad de que un trabajador emplee más de media hora en transporte.

    b) Si los trabajadores emplean al menos una hora, ¿cuál es la probabilidad de que no superen la hora y media?

    c) Hallar el tiempo mínimo que emplea el 50 % de los trabajadores que más tiempo pierden en transporte.

14. Cierto tipo de componente puede ser comprado nuevo o viejo. El 50 % de los componentes nuevos duran más de 5 años, pero solo 30 % de los usados duran más de 5 años. ¿Sería posible que las duraciones de los componentes se distribuyan exponencialmente?. Explique.