Costante dielettrica

PRENDIAMO UN CONDENSATORE PIANO VUOTO LA CUI D.D.P. É $V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h$ E POSIZIONIAMO TRA LE ARMATURE UNA LASTRA DI MATERIALE ISOLANTE DI SPESSORE $s < h$.
SI HA CHE LA D.D.P. SI RIDUCE PROPORZIONALMENTE CON IL VALORE DI s E ASSUME VALORE MINIMO V_k QUANDO LA LASTRA RIEMPIE COMPLETAMENTE LO SPAZIO TRA LE ARMATURE.
I MATERIALI ISOLANTI CHE HANNO LA CAPACITÀ DI RIDURRE LA D.D.P. DI UN CONDENSATORE SONO CHIAMATI DIELETTRICI.
IL RAPPORTO TRA LA D.D.P. TRA DUE ARMATURE, MISURATE CON IL CONDENSATORE VUOTO V_0 E QUELLA MISURATA CON IL CONDENSATORE COMPLETAMENTE RIEMPITO DI DIELETTRICO V_k, HA UN VALORE COSTANTE CHE NON DIPENDE DALLA FORMA DEL CONDENSATORE O DALLA CARICA SULLE ARMATURE, MA SOLO DAL TIPO DI DIELETTRICO ED É DEFINITA COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA

$$\boxed{K_e = \varepsilon_r = \frac{V_0}{V_k}}$$

DATO CHE LA D.D.P. DIMINUISCE DI UN FATTORE K_e, ANCHE IL CAMPO ELETTRICO DIMINUISCE E DIVENTA, NEL CASO DEL CONDENSATORE PIANO

$$E_k = \frac{V_k}{h} = \frac{V_0}{K_e h} = \frac{E_0}{K_e} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 K_e}$$

LA DIFFERENZA TRA E_0 E E_k É $E_0 - E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{K_e \varepsilon_0} = \frac{K_e - 1}{K_e}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\chi_e}{\chi_e + 1}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

DOVE $\boxed{\chi_e = K_e - 1}$ É DEFINITA SUSCETTIVITÀ ELETTRICA DEL DIELETTRICO.

POSSIAMO INOLTRE SCRIVERE $E_k = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{K_e - 1}{K_e}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$

DOVE $\boxed{\sigma_p = \frac{K_e - 1}{K_e}\sigma_0}$ É DEFINITA DENSITÀ DI CARICA DI POLARIZZAZIONE

DUNQUE IL CAMPO E_k DEL CONDENSATORE CON IL DIELETTRICO PUÒ ESSERE RIVISTO COME UN CAMPO NEL VUOTO RISULTANTE DALLA SOVRAPPOSIZIONE DEL CAMPO DOVUTO ALLE CARICHE LIBERE DEL CONDENSATORE E DA QUELLO DOVUTO A UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA σ_p SULLE PARETI DELLA LASTRA DI DIELETTRICO, POSITIVA SULLA FACCIA CONTIGUA ALL'ARMATURA NEGATIVA E VICEVERSA.
TALE CARICA NON É FITTIZIA BENSÌ DERIVA DA PROCESSI MICROSCOPICI ALL'INTERNO DEL DIELETTRICO DOVUTI ALLA PRESENZA DEL CAMPO ELETTROSTATICO ESTERNO.

LA CAPACITÀ DEL CONDENSATORE CON IL DIELETTRICO SARÀ INVECE AUMENTATA

$$C_k = \frac{q_0}{V_k} = \frac{q_0}{V_0} K_e = K_e C_0 \Rightarrow \boxed{C_k = K_e C_0}$$

IN GENERALE TUTTE LE FORMULE PER I CONDENSATORI NEL VUOTO POSSONO ESSERE APPLICATE A QUELLI RIEMPITI DI DIELETTRICO, SOSTITUENDO ε_0 CON LA COSTANTE DIELETTRICA ASSOLUTA

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 K_e} \quad \left[\frac{C^2}{N m^2} = \frac{F}{m}\right]$$

Polarizzazione

NEI MATERIALI ISOLANTI GLI ELETTRONI SONO BEN LEGATI AGLI ATOMI E NON SE NE ALLONTANANO SPONTANEAMENTE. IN CONDIZIONI NORMALI, IL CENTRO DI MASSA DELLE CARICHE NEGATIVE COINCIDE CON IL NUCLEO POSITIVO. IN PRESENZA DI UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO, IL CENTRO DI MASSA DELLA NUBE ELETTRONICA SI SPOSTA IN VERSO CONTRARIO AL CAMPO, MENTRE IL NUCLEO COMPIE UNO SPOSTAMENTO CONCORDE AL CAMPO E L'EFFETTO È BILANCIATO DALLE FORZE DI ATTRAZIONE, RAGGIUNGENDO UNA POSIZIONE DI EQUILIBRIO.
DEFINENDO $\vec{x}$ IL VETTORE CHE VA DALLE CARICHE NEGATIVE AL NUCLEO, POSSIAMO DIRE CHE UN ATOMO ACQUISTA UN MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO PARALLELO E CONCORDE AL CAMPO $\vec{E}$ ESTERNO PARI A

$\boxed{\vec{p} = Ze\vec{x}}$ E IL FENOMENO È DETTO POLARIZZAZIONE ELETTRONICA

ALCUNI ATOMI SONO CARATTERIZZATI DA UN MOMENTO DI DIPOLO INTRINSECO, ANCHE IN ASSENZA DI $\vec{E}$ ESTERNO. IN QUESTO CASO I DIPOLI SONO ORIENTATI IN MANIERA CASUALE A CAUSA DEGLI URTI PER AGITAZIONE TERMICA. IN PRESENZA DI CAMPO $\vec{E}$ ESTERNO, C'È UN PARZIALE ALLINEAMENTO DEI DIPOLI CON IL CAMPO CHE AUMENTA AL DIMINUIRE DELLA TEMPERATURA E ALL'AUMENTARE DELL'INTENSITÀ DI $\vec{E}$.
IL FENOMENO È DEFINITO POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO E INDUCE NELL'ATOMO UN MOMENTO DI DIPOLO MEDIO $\langle p \rangle$ PARALLELO E CONCORDE A $\vec{E}$

SE PRENDIAMO UN VOLUME $\Delta\tau$ CONTENENTE ΔN ATOMI O MOLECOLE, IL MOMENTO DI DIPOLO RISULTANTE È $\Delta N \Delta p$ E SI DEFINISCE IL MOMENTO DI DIPOLO PER UNITÀ DI VOLUME, O MEGLIO VETTORE DI POLARIZZAZIONE DEL DIELETTRICO $\boxed{\vec{P} = \frac{\Delta N}{\Delta V}\langle \vec{p}\rangle = n\langle\vec{p}\rangle}$ $\left[\frac{C}{m^2}\right]$

DOVE n È IL NUMERO DI ATOMI O MOLECOLE PER UNITÀ DI VOLUME.
PER MATERIALI ISOTROPI E LINEARI VALE $\vec{P} = \varepsilon_0(k_e-1)\vec{E} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$.

Campo elettrico prodotto da un dielettrico polarizzato

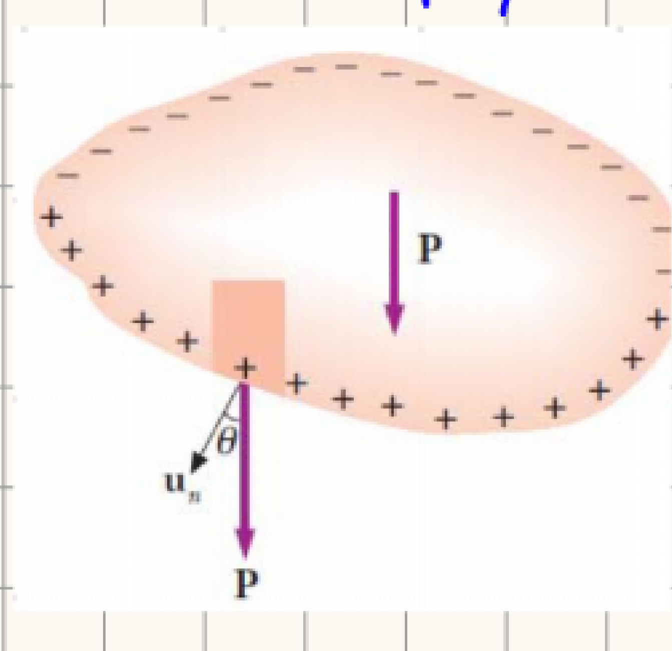
CONSIDERIAMO UN CONDENSATORE PIANO CONTENENTE UNA LASTRA DI DIELETTRICO POLARIZZATO UNIFORMEMENTE. DIVIDIAMO LA LASTRA IN CUBETTI INFINITESIMI DI BASE $d\Sigma_0$ E ALTEZZA dh, QUINDI CON VOLUME $d\tau = d\Sigma_0\, dh$. IL MOMENTO DI DIPOLO DI OGNUNO SARÀ $d\vec{p} = \vec{P}\,d\tau = \vec{P}\,d\Sigma_0\, d\vec{h}$.
SOSTITUIAMO IL CUBETTO CON DUE CARICHE $\pm dq_p = \pm P\,d\Sigma_0$ POSTE SULLE SUPERFICI SUPERIORE E INFERIORE DEL CUBETTO, POSTE A DISTANZA dh, CON DENSITÀ DI CARICA:

$\pm\sigma_p = \pm\frac{dq_p}{dA_0} = \pm P$, E CON MOMENTO DI DIPOLO UGUALE A QUELLO DEL CUBETTO.

SE PRENDIAMO DUE CUBETTI CONTIGUI, SULLA BASE IN COMUNE LE CARICHE $+dq_p$ E $-dq_p$ SI ELIDONO E RIPETENDO CIÒ PER TUTTI I CUBETTI DELLA LASTRA SI HA CHE RIMANGONO SOLO LE CARICHE SULLE FACCE DELLA LASTRA: QUINDI IN UN DIELETTRICO POLARIZZATO UNIFORMEMENTE SI HA UNA COMPENSAZIONE DELLE CARICHE ALL'INTERNO MA NON SULLA SUPERFICIE LIMITE.
LA LASTRA PUÒ ESSERE DUNQUE RIVISTA COME DUE DISTRIBUZIONI DI CARICA DISTRIBUITE SULLE FACCE OPPOSTE CON DENSITÀ $\boxed{\pm\sigma_p = \pm P}$.

GENERALIZZANDO AD UN DIELETTRICO DI FORMA QUALUNQUE, PRENDENDO UN PRISMETTO CON UNA BASE dA_0 INTERNA AL DIELETTRICO CON DENSITÀ DI CARICA P E UNA dA ESTERNA CON DENSITÀ σ_p, SI HA CHE:

$dq_p = P\,dA_0 = \sigma_p\,dA$ E QUINDI $\sigma_p = P\frac{dA}{dA_0} = P\cos\theta = \vec{P}\cdot\hat{n}$



$\boxed{\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}}$

OVVERO LA DENSITÀ DI CARICA DI POLARIZZAZIONE È UGUALE ALLA COMPONENTE DI $\vec{P}$ NORMALE ALLA SUPERFICIE. QUINDI NEL DIELETTRICO SI HA UNA ZONA DELLA SUPERFICIE CARICA POSITIVAMENTE E UNA NEGATIVAMENTE E LA CARICA ALL'INTERNO È NULLA.
MA UNA CARICA TOTALE DI POLARIZZAZIONE DEVE ESSERE SEMPRE NULLA QUINDI LA CARICA SUPERFICIALE TOTALE DEVE ESSERE NULLA IN QUESTO CASO: $\boxed{\oint_A \sigma_p \, dA = \oint_\Sigma \vec{P} \cdot \hat{n} \, dA = 0}$

SE INVECE IN UN DIELETTRICO LA POLARIZZAZIONE NON È UNIFORME, PRENDIAMO DUE CUBETTI CONTIGUI CON BASE IN COMUNE, CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE X E AREA DI BASE $dA = dy\,dz$, E CALCOLIAMO LA CARICA SULLA BASE COMUNE.

$$-dq'_p = \vec{P}' \cdot \hat{u}_x \, dA = -P'_x \, dy\,dz \quad \text{E} \quad dq_p = \vec{P} \cdot \hat{u}_x \, dA = P_x \, dy\,dz$$

$$dq_p - dq'_p = -(P'_x - P_x)\, dy\,dz = -\frac{\partial P_x}{\partial x} \partial x \, \partial y \, \partial z.$$

E QUINDI IN GENERALE $dq_p = \left(-\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) dV$

OVVERO NON C'È COMPENSAZIONE DI CARICA E LA CARICA DI POLARIZZAZIONE COMPARE ANCHE ALL'INTERNO DEL DIELETTRICO, OLTRE A QUELLA SUPERFICIALE $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$, CON DENSITÀ DI POLARIZZAZIONE:

$$\rho_p = \frac{dq_p}{dV} = \left(-\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \Rightarrow \boxed{\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}$$

ANCHE IN QUESTO CASO LA CARICA TOTALE DI POLARIZZAZIONE DEVE ESSERE NULLA, QUINDI

$$\oint_A \sigma_p \, dA + \int_V \rho_p \, dV = 0, \quad \text{OVVERO} \quad \boxed{\oint_A \vec{P} \cdot \hat{n} \, dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, dV}$$

DA $\vec{P}$ SI PUÒ RICAVARE IL POTENZIALE ALL'ESTERNO DEL DIELETTRICO COME

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_A \frac{\vec{P} \cdot \hat{n} A}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, dV}{r}}$$

E DI CONSEGUENZA IL CAMPO ELETTRICO TRAMITE $\vec{E} = -\nabla V$.
SE SONO PRESENTI CARICHE LIBERE, VANNO AGGIUNTE ANCHE QUELLE.

Equazioni dell'elettronica in presenza di dielettrici

$\vec{E}$ È CONSERVATIVO ANCHE IN PRESENZA DI DIELETTRICI, QUINDI CONTINUANO A VALERE

$$\boxed{\oint \vec{E} \, d\vec{s} = 0 \;/\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \;/\; \vec{E} = -\nabla V}$$

VALE INOLTRE LA LEGGE DI GAUSS, CONSIDERANDO ANCHE LE CARICHE DI POLARIZZAZIONE OLTRE CHE QUELLE LIBERE, OVVERO $\boxed{\oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \frac{q + q_p}{\varepsilon_0} \;;\; \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}}$

DALLA SECONDA, CONSIDERANDO CHE $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$, $\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$

NEL VUOTO $\vec{P} = 0$

DEFINENDO $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$ $\left[\frac{C}{m^2}\right]$ IL VETTORE DI INDUZIONE DIELETTRICA SI HA QUINDI

$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \;;\; \oint_A \vec{D} \cdot \hat{n} \, dA = q}$ $\Rightarrow$ IL FLUSSO DI $\vec{D}$ DIPENDE SOLO DALLE CARICHE LIBERE SU A, NON DA QUELLE POLARIZZATE.

SE NON CI SONO CARICHE LIBERE, ALLORA: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \;;\; \oint_A \vec{D} \cdot \hat{n} \, dA = 0}$ E SI DICE CHE $\vec{D}$ È SOLENOIDALE.

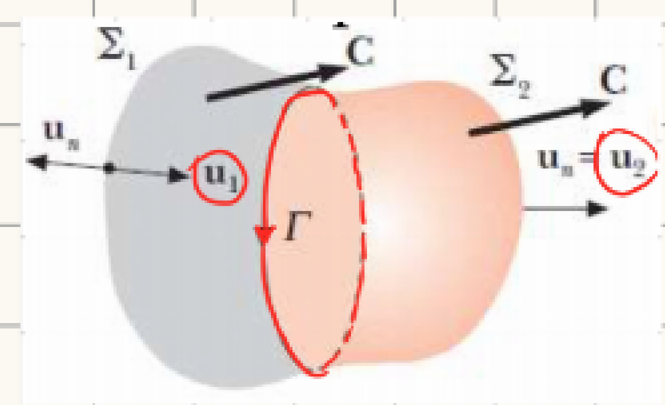
Campo solenoidale

UN CAMPO $\vec{C}$ SI DICE SOLENOIDALE SE IL FLUSSO ATTRAVERSO QUALUNQUE SUPERFICIE CHIUSA É NULLA E, PER IL T. DELLA DIVERGENZA, ANCHE LA DIVERGENZA DEVE ESSERE NULLA.

INOLTRE, SE PRENDIAMO UNA LINEA CHIUSA Γ ORIENTATA SU CUI POGGIANO DUE SUPERFICI Σ_1 E Σ_2 CHE FORMANO UNA SUPERFICIE CHIUSA Σ, SI HA:

$$\oint_\Sigma \vec{C}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{C}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{C}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma_2 = -\int_{\Sigma_1} \vec{C}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{C}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma_2 = 0$$

$$-\phi_1 + \phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$$



CIOÉ IL FLUSSO DI UN CAMPO SOLENOIDALE É UGUALE SE CALCOLATO ATTRAVERSO DUE SUPERFICI DIVERSE MA CON STESSO CONTORNO, QUINDI, DIPENDENDO SOLO DA QUESTO, SI DEFINISCE FLUSSO CONCATENATO CON UNA LINEA CHIUSA.

Energia elettrostatica dei dielettrici

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 \Sigma^{\cancel{2}}}{2k_e \varepsilon_0 \frac{\cancel{\Sigma}}{h}} = \frac{\sigma^2 \Sigma h}{2\varepsilon} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \Sigma h \Rightarrow \boxed{U_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \Sigma h}$$

LA DENSITÀ DI ENERGIA ELETTROSTATICA É INVECE $u_e = \frac{U_e}{\Sigma h} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$