Campo magnetico prodotto da una corrente

LA PRIMA LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE CI PERMETTE DI CALCOLARE IL CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UN TRATTO ds DI UN CONDUTTORE FILIFORME IN CUI PASSA LA CORRENTE i IN UN PUNTO P A DISTANZA x.

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}}$$

DOVE $\mu_0 = 4\pi\ k_m = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{H}{m}$ È LA PERMEABILITÀ MAGNETICA DEL VUOTO

LA LEGGE DI AMPERE-LAPLACE CI DÀ, INVECE, IL CAMPO PRODOTTO DA UN CIRCUITO CHIUSO FILIFORME IN CUI PASSA UNA CORRENTE STAZIONARIA i

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}}$$

IN GENERALE, SE IL CONDUTTORE NON È FILIFORME, SE NE PRENDE UN TRATTO DI LUNGHEZZA ds E SEZIONE dA, CON DENSITÀ DI CORRENTE $\vec{J}$ E L'ELEMENTO DI CORRENTE SARÀ DI $d\vec{s} = \vec{J}\,dA\,d\vec{s} = \vec{J}\,dV$, E IL CAMPO MAGNETICO INFINITESIMO È:

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2}\,dV$, E INTEGRANDO SU TUTTO IL VOLUME, SI HA $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J} \cdot \hat{r}}{r^2}\,dV}$

Campo magnetico prodotto da una carica in moto

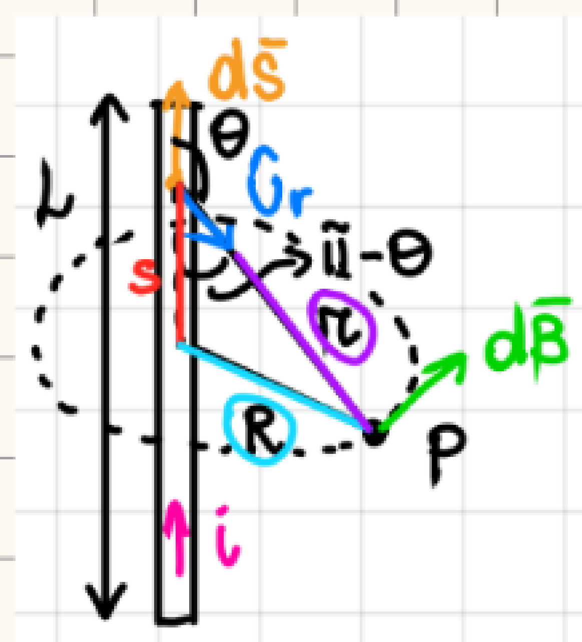
DALLA PRECEDENTE E CONSIDERANDO CHE $\vec{J} = nq\vec{v}$ SI HA $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}\,n\,dV$, DOVE $n\,dV$ SONO LE CARICHE CONTENUTE IN dV CHE PRODUCONO $d\vec{B}$.
QUINDI IL CAMPO PRODOTTO DA UNA SOLA CARICA È $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}}$

ASSUMENDO CHE VALGA $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r$ ANCHE PER UNA CARICA IN MOTO SI RICAVA UNA RELAZIONE TRA $\vec{E}$ E $\vec{B}$ PRODOTTI DALLA STESSA CARICA NELLO STESSO PUNTO:

$\boxed{\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\,\vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}}$, CON $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8\ m/s$ VELOCITÀ DELLA LUCE NEL VUOTO

Campo magnetico prodotto da un filo rettilineo indefinito

CONSIDERIAMO UN FILO RETTILINEO DI LUNGHEZZA L ATTRAVERSATO DALLA CORRENTE i.
UN ELEMENTO DI FILO PRODUCE NEL PUNTO P, DISTANTE R RISPETTO AL PIANO MEDIANO, UN CAMPO



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\,\sin\theta}{r^2}$$

CONSIDERANDO CHE $\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{r}$ E $r = \sqrt{R^2 + s^2}$

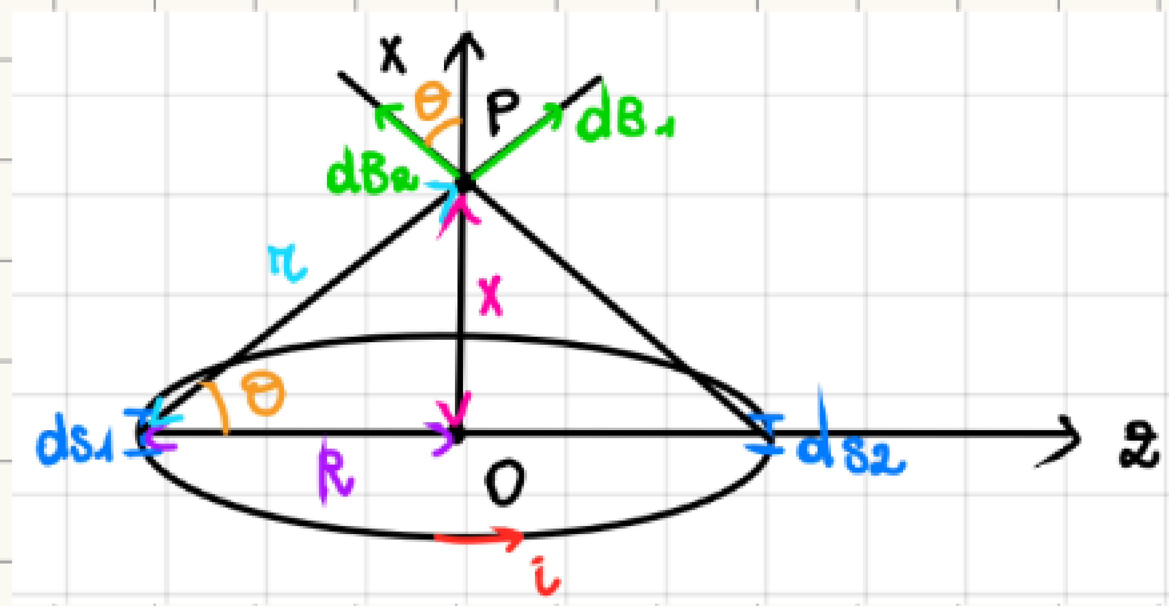
SI HA $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{R}{(s^2+R^2)^{3/2}}\,ds$ E IN TOTALE, INTEGRANDO LUNGO TUTTO IL FILO SI HA:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}R\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{ds}{(s^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\frac{L}{\left(\frac{L^2}{4} + R^2\right)^{1/2}}$$

SE $L \to +\infty$ O $L \gg R$, SI APPROSSIMA A $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\hat{u}_\theta}$ LEGGE DI BIOT-SAVART

DIREZIONE tg ALLE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE AL FILO (CHE SONO QUINDI LE SUE LINEE DI CAMPO)

Campo magnetico prodotto da una spira circolare



CONSIDERIAMO UNA SPIRA DI RAGGIO R PERCORSA DALLA CORRENTE i. IL CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UN ELEMENTO ds DELLA SPIRA IN UN PUNTO P SULL'ASSE DELLA SPIRA A DISTANZA x È:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\times\hat{r}}{r^2} \overset{ds\perp\hat{r}}{=} \frac{\mu_0 i}{4\pi} ds$$

TUTTI I CONTRIBUTI INFINITESIMI LUNGO L'ASSE y SI ELIDONO PERCHÉ UGUALI E OPPOSTI PER SIMMETRIA. RIMANGONO SOLO QUELLI LUNGO x, OVVERO $dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\cos\theta}{r^2}$. INTEGRANDO SI HA IL CAMPO TOTALE LUNGO x, OVVERO:

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} ds\cos\theta\,\hat{n} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} 2\pi R\cos\theta\,\hat{n}$$

DATE CHE $\cos\theta = \frac{R}{r}$ E $r = \sqrt{x^2+R^2} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}\hat{n}$

PER $x=0$, OVVERO AL CENTRO $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R}\hat{n}}$

MOMENTO MAGNETICO SPIRA.

PER $x \gg R$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3}\hat{n}\cdot\frac{2\pi}{2\pi} = \frac{2\mu_0}{4\pi x^3}\overbrace{i\pi R^2\hat{n}}^{i\Sigma\hat{u}_n = \vec{m}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{m}}{x^3} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{m}}{x^3}}$

L'ANDAMENTO DEL CAMPO MAGNETICO DELLA SPIRA È IDENTICO A QUELLO DEL CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}$ DI UN DIPOLO. MA C'È UNA NETTA DIFFERENZA TRA LE LINEE DEL CAMPO ELETTRICO E QUELLE DEL CAMPO MAGNETICO DI UNA SPIRA: LE PRIME ESCONO ED ENTRANO DALLE CARICHE SORGENTI MENTRE LE SECONDE SONO LINEE CHIUSE SENZA INIZIO NÉ FINE. INOLTRE LA CIRCUITAZIONE DI $\vec{E}$ È SEMPRE NULLA MENTRE QUELLA DI $\vec{B}$ NO.

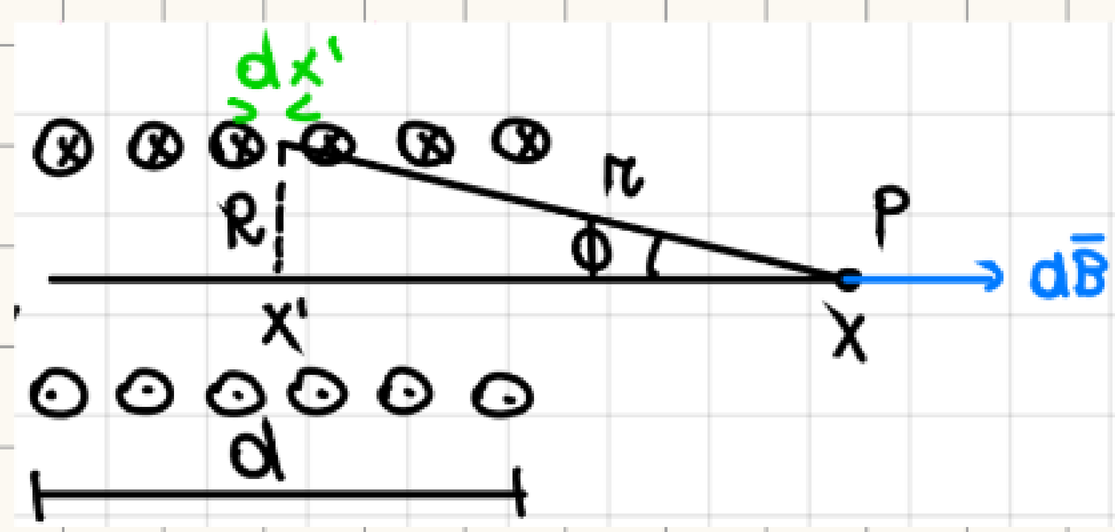
SE A DISTANZA r DA UNA SPIRA DI MOMENTO MAGNETICO $\vec{m}_1$ COLLOCHIAMO UN'ALTRA SPIRA DI MOMENTO MAGNETICO $\vec{m}_2$, L'ENERGIA POTENZIALE MAGNETICA SI SCRIVE:

$U_p = -\vec{m}_2\cdot\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1\cdot\hat{u}_r)(\vec{m}_2\cdot\hat{u}_r)\right]$, E DESCRIVE L'INTERAZIONE DIPOLO-DIPOLO NEL CAMPO MAGNETICO.

LA FORZA TRA I DUE POLI È $\vec{F} = -\nabla U_p = \nabla(\vec{m}_2\cdot\vec{B}_1)$ E IL MOMENTO MECCANICO RISPETTO AD UN ASSE DI ROTAZIONE È:

$$M_\theta = -\frac{\partial}{\partial\theta}U_p = \frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{m}_2\cdot\vec{B}_1)$$

Campo magnetico prodotto da un soleinoide rettilineo



UN SOLENOIDE RETTILINEO È UN FILO CONDUTTORE AVVOLTO A FORMA DI ELICA CILINDRICA. SIA d LA SUA LUNGHEZZA, R IL RAGGIO, N IL NUMERO DI SPIRE TOTALI E $n = N/d$ QUELLE PER UNITÀ DI LUNGHEZZA. IN UN TRATTO dx' CI SONO $n\,dx'$ SPIRE E IL CAMPO $d\vec{B}$ DA ESSO PRODOTTO SI CALCOLA COME QUELLO DI UNA SPIRA CON CORRENTE $n i\,dx'$, OVVERO:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2}{2\pi r^3} i n\,dx'$$

CONSIDERANDO LA VARIABILE ANGOLARE ϕ, SI HA CHE:

$r\,\mathrm{sen}\,\phi = R$, $x - x' = R\cot\phi \Rightarrow dx' = \frac{R\,d\phi}{\mathrm{sen}^2\phi}$, E QUINDI $d\vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2}\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi$

INTEGRANDO TRA ϕ_1 E ϕ_2 SI HA:

$$\phi_2' = \pi - \phi_2$$

$$\vec{B} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\mu_0 n i}{2} \sin\phi \, d\phi = \frac{\mu_0 n i}{2}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2) = \frac{\mu_0 n i}{2}(\cos\phi_1 + \cos\phi_2')$$

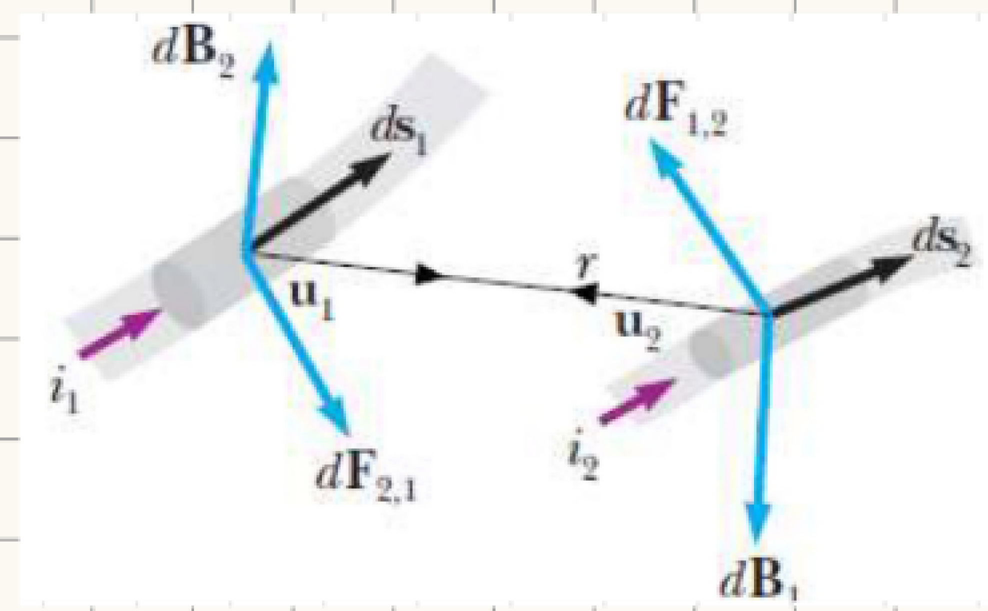
ANGOLI SOTTO CUI P VEDE LE SPIRE TERMINALI

ESPLICITANDO x SI HA $$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2}\left[\frac{d+2x}{\sqrt{(d+2x)^2+4R^2}} + \frac{d-2x}{\sqrt{(d+2x)^2+4R^2}}\right]}$$

AL CENTRO DEL SOLENOIDE $(x=0)$, $\vec{B} = \mu_0 n i \dfrac{d}{\sqrt{d^2+4R^2}}$

SE $\boxed{d \gg R \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 n i}$

Forza tra due circuiti percorsi da corrente



PRENDIAMO GLI ELEMENTI DI FILO $d\vec{s_1}$ E $d\vec{s_2}$ DI DUE CIRCUITI PERCORSI DALLE CORRENTI i_1 E i_2.
LA FORZA $\vec{F}_{1,2}$ CHE $d\vec{s_2}$ SUBISCE PER EFFETTO DEL CAMPO $d\vec{B_1}$ PRODOTTO DA $d\vec{s_1}$ È, DALLE LEGGI FONDAMENTALI DI LAPLACE. (1°, 2°)

$$d\vec{F}_{1,2} \overset{2°}{=} i_2 \, d\vec{s_2} \times \vec{B_2} \overset{1°}{=} \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{s_2} \times (d\vec{s_1} \times \hat{u}_1)}{r^2}$$

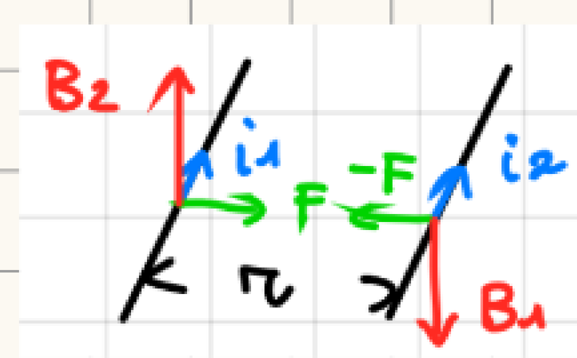
QUELLA SUBITA DA $d\vec{s_1}$ È $d\vec{F}_{2,1} = \dfrac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \dfrac{d\vec{s_1} \times (d\vec{s_2} \times \hat{u}_2)}{r^2}$

LE FORZE TOTALI SI OTTENGONO CON UNA DOPPIA INTEGRAZIONE ESTESA AI CIRCUITI

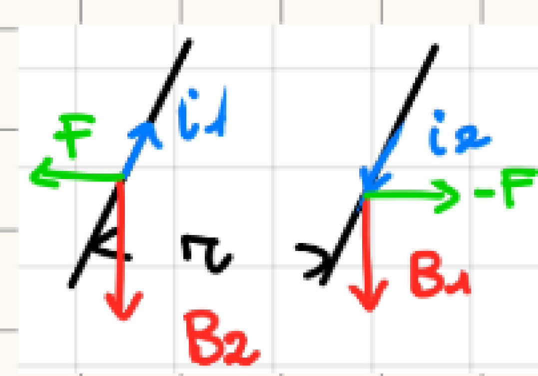
$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s_2} \times (d\vec{s_1} \times \hat{u}_1)}{r^2} \qquad \vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s_1} \times (d\vec{s_2} \times \hat{u}_2)}{r^2}$$

E SI HA IL PRINCIPIO DI AZIONE - REAZIONE $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$

Forza tra due fili paralleli percorsi da corrente



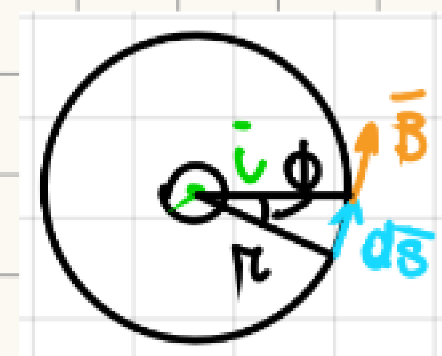
SE I DUE FILI SONO PERPENDICOLARI, CIASCUN FILO È PARALLELO AL CAMPO PRODOTTO DALL'ALTRO, QUINDI $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F = ilB\sin\theta = 0$



SE I DUE FILI SONO PARALLELI, CIASCUN FILO È PERPENDICOLARE AL CAMPO PRODOTTO DALL'ALTRO QUINDI $\vec{F}_{1,2} = i_2 \vec{l_2} \times \vec{B_1}$ E $\vec{F}_{2,1} = i_1 \vec{l_1} \times \vec{B_2}$, CON $\sin\theta = 1$.
LE DUE FORZE SONO DIRETTE LUNGO LA CONGIUNGENTE DEI DUE FILI È ATTRATTIVA SE LE CORRENTI SONO EQUIVERSE, REPULSIVE ALTRIMENTI.

DA BIOT-SAVART, LA FORZA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA È $$\boxed{F_l = \frac{F_{1,2}}{l_2} = \frac{F_{2,1}}{l_1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}}$$

Legge di Ampere



PRENDIAMO UN FILO RETTILINEO INDEFINITO, PERCORSO DALLA CORRENTE i, LE CUI LINEE DI CAMPO SONO CIRCONFERENZE CONCENTRICHE AL FILO.
PRENDIAMO UN ELEMENTO $d\vec{s}$ DI UNA DI QUESTE E CALCOLIAMO:

$$\vec{B}\cdot d\vec{s} \overset{\cos\theta=1}{=} \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\, d\phi \xrightarrow[PQ]{\text{PER UN TRATTO FINITO}} \int_P^Q \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\phi \rightarrow \text{ANGOLO SOTTESO DALL'ARCO } PQ$$

DIPENDE SOLO DA ϕ, QUINDI PER OGNI CAMMINO DA P A Q.

PER UN CAMMINO C_2 DA Q A P SI HA INVECE $\int_Q^P \vec{B}\cdot d\vec{s} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\phi$

LUNGO UNA LINEA CHIUSA $C_1 + C_2 \Rightarrow \oint_{C_1+C_2} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\oint d\phi$
SI DISTINGUONO DUE CASI:

1) SE IL CAMMINO CHIUSO CONCATENA LA CORRENTE $i \Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} 2\pi = \mu_0 i$

2) SE IL CAMMINO CHIUSO NON CONCATENA LA CORRENTE $i \Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$

IL SEGNO + SI HA QUANDO IL VERSO DELLA CORRENTE È LEGATO A QUELLO DELLA LINEA CON LA REGOLA DELLA VITE DESTRORSA, − ALTRIMENTI.
SE LA LINEA CHIUSA CONCATENA PIÙ FILI PERCORSI DALLA CORRENTE $i_1, \dots, i_K$, IL CAMPO TOTALE SARÀ $\vec{B} = \vec{B}_1 + \dots + \vec{B}_K$ QUINDI:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint \sum_K B_K \cdot d\vec{s} = \sum_K \oint \vec{B}_K \cdot d\vec{s} = \sum_K \Gamma_K \rightarrow \text{CIRCUITAZIONI}$$

OGNI INTEGRALE VALE 0 O $\mu_0 i_K$ PER I DUE CASI E QUINDI IN TOTALE SI HA $\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{conc}}$

PER SCRIVERE TALE LEGGE ATTRAVERSO LE DENSITÀ DI CORRENTE SI CONSIDERA UNA SUPERFICIE A CHE POGGIA SULLA LINEA C E $A_1 \dots A_K$ LE INTERSEZIONI TRA A E I FILI CONDUTTORI.
SI HA CHE $\vec{J}$ È $\neq 0$ SU QUESTE INTERSEZIONI E QUINDI:

$$\int_A J\cdot\hat{n}\, dA = \int_{A_1} \vec{J}_1 \cdot \hat{n}\, dA_1 + \dots + \int_{A_K} \vec{J}_2 \cdot \hat{n}\, A_K$$

SE LA CORRENTE È STAZIONARIA CIASCUN INTEGRALE A SECONDO MEMBRO COINCIDE CON LA CORRENTE CHE PERCORRE IL RISPETTIVO FILO E QUINDI SI HA:

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{J}\cdot\hat{n}\, dA}$$

USANDO IL T. DI STOKES, INFINE, SI PUÒ SCRIVERE LA FORMA LOCALE DELLA LEGGE:

$$\int_A (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\, dA = \mu_0 \int_A \vec{J}\cdot\hat{n}\, dA \xrightarrow[\text{PER OGNI } \Sigma]{\text{DEVE VALERE}} \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

Equazioni di Maxwell della magnetostatica

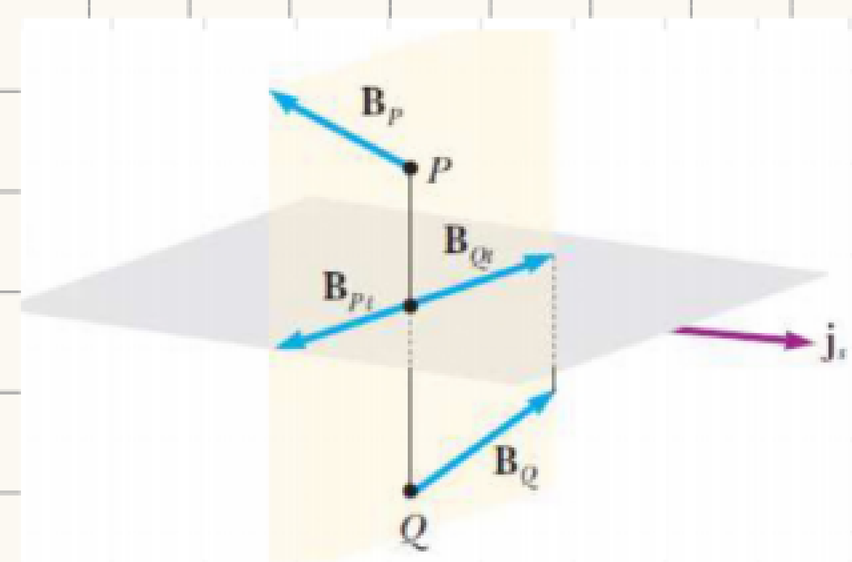
GAUSS: $\boxed{\oint \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA = 0 \;;\; \nabla\cdot\vec{B}=0}$ $\rightarrow$ $\vec{B}$ È SOLENOIDALE

AMPERE: $\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i \;;\; \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}}$ $\rightarrow$ $\vec{B}$ NON È IRROTAZIONALE

PER QUESTE PROPRIETÀ NON SI PUÒ DEFINIRE UN POTENZIALE MAGNETICO UNIVOCO IL CUI GRADIENTE MI DA $\vec{B}$ (PER $\vec{E}$ INVECE SI)

Discontinuità del campo magnetico

IL CAMPO MAGNETICO È DISCONTINUO NELL'ATTRAVERSAMENTO DI UNA SUPERFICIE CON DENSITÀ DI CORRENTE LINEARE $\vec{j}_s$.
IL CAMPO $\vec{B}$ DOVUTO ALLA CORRENTE SUPERFICIALE NEI PUNTI P E Q È



$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2}\,\vec{j}_s\times\hat{n}$$

A QUESTO PUNTO SI SOVRAPPONE UN ALTRO CAMPO $\vec{B}$ DOVUTO AD ALTRE SORGENTI CHE IN P E Q È UGUALE.
QUINDI QUELLO TOTALE NEI DUE PUNTI È:

$$\vec{B}_P = \vec{B} + \frac{\mu_0}{2}\,\vec{j}_s\times\hat{n} \quad , \quad \vec{B}_Q = \vec{B} - \frac{\mu_0}{2}\,\vec{j}_s\times\hat{n}$$

LA DISCONTINUITÀ È $\boxed{\Delta\vec{B} = \vec{B}_P - \vec{B}_Q = \mu_0\,\vec{j}_s\times\hat{n}}$

OVVERO SONO DIVERSE LE COMPONENTI TANGENZIALI B_{Qt} E B_{Pt}, ORTOGONALI A $\vec{j}_s$.
LA COMPONENTE DEL CAMPO MAGNETICO NORMALE ALLA SUPERFICIE È INVECE CONTINUA PERCHÉ $\vec{B}$ È SOLENOIDALE.