Magnetizzazione

Alcune sostanze, appese ad uno strumento composto da una bobina sospesa ad una molla (dinamometro) e sottoposte all'azione del campo magnetico $\vec{B}$ prodotto da un solenoide, acquistano un momento magnetico $\vec{m}$ parallelo e concorde a $\vec{B}$ e subiscono una forza $\left(F = m \frac{dB}{dx}\right)$ che le attrae all'interno del solenoide.
In altre invece si genera un momento magnetico $\vec{m}$ parallelo e discorde a $\vec{B}$ e quindi vengono respinte verso dove $\vec{B}$ è minore.

Le sostanze sono dotate di una grandezza $\vec{M} = \frac{\vec{m}}{\tau}$ definita magnetizzazione e in base alle sue caratteristiche possiamo classificare le sostanze in:
Diamagnetiche: vengono respinte dal solenoide, $\vec{M}$ è //, discorde e proporzionale a $\vec{B}$ e l'effetto non dipende dalla temperatura.
Paramagnetiche: vengono attratte dal solenoide, $\vec{M}$ è //, concorde e proporzionale a $\vec{B}$ e l'effetto aumenta al diminuire della temperatura.
Ferromagnetiche: vengono fortemente attratte dal solenoide, $\vec{M}$ è // e concorde a $\vec{B}$, ma la relazione tra $\vec{M}$ e $\vec{B}$ non è lineare né univoca.
Rimangono magnetizzate anche dopo che il campo è stato rimosso.

Permeabilità e suscettività magnetiche

Il rapporto tra il campo magnetico di un solenoide nel vuoto B_0 e quello B_m di un solenoide riempito di un materiale (che rappresenterà, grazie alla sua $\vec{M}$, una nuova sorgente per il campo oltre che le correnti di conduzione), definisce il valore della permeabilità magnetica relativa del mezzo $\boxed{K_m = B_m / B_0}$.
Dato che per un solenoide $B_0 = \mu_0 n i$, si definisce $\boxed{\mu = \mu_0 K_m}$ la permeabilità magnetica assoluta.
Dato che $B_m = B_0 K_m \Rightarrow B_m - B_0 = B_0 K_m - B_0 = B_0(K_m - 1) = B_0 \chi_m$, dove

$$\boxed{\chi_m = K_m - 1 = \frac{B_m - B_0}{B_0}}$$

è la suscettività magnetica.

$$B = K_m B_0 = (\chi_m + 1) B_0 = B_0 \chi_m + B_0 = \boxed{\mu_0 n i \chi_m} + \mu_0 n i$$

rappresenta l'effetto del mezzo magnetizzato, che è uguale a quello di un solenoide uguale al primo, percorso da una corrente di densità $\chi_m n i$, corrente che non è fittizia, bensì è il risultato di correnti di origine atomica (correnti amperiane) che si formano a causa del campo magnetico prodotto dalla corrente di conduzione.
Infatti nell'atomo, il moto degli elettroni intorno al nucleo può essere assimilato a correnti microscopiche, alle quali è associato un momento magnetico.
Questi momenti in generale si compensano, ma quando agisce un $\vec{B}$ esterno, il moto viene perturbato e si genera un momento magnetico opposto o concorde a $\vec{B}$.

Diamagnetiche: $K_m < 1$, $\chi_m < 0 \Rightarrow B < B_0$ quindi le correnti amperiane sono in verso opposto a quelle di conduzione (coerente con $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{B}$)
Paramagnetiche: $K_m > 1$, $\chi_m > 0 \Rightarrow$ le correnti amperiane e di conduzione sono equiverse.
La dipendenza di χ_m dalla temperatura è espressa dalla legge di Curie $\boxed{\chi_m = \frac{C \rho}{T}}$ (C = cost, ρ = densità)
Ferromagnetiche: K_m e χ_m non sono funzioni univoche di $\vec{B}$, le correnti sono equiverse, a una certa temperatura si comportano come le paramagnetiche.

QUINDI IN GENERALE, TUTTI GLI ATOMI O MOLECOLE DI UN MATERIALE ACQUISTANO UN MOMENTO MAGNETICO MEDIO $\langle m \rangle$ IN PRESENZA DI UN $\vec{B}$ ESTERNO.
CONSIDERANDO UN VOLUMETTO $\Delta\tau$ NELL'INTORNO DI UN PUNTO P IN CUI SONO CONTENUTI ΔN_τ ATOMI O MOLECOLE, IL MOMENTO MAGNETICO È $\Delta m = \Delta N_\tau \langle m \rangle$ E LA MAGNETIZZAZIONE È:

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta \tau} = \frac{\Delta N_\tau \langle m \rangle}{\Delta \tau} = n \vec{m} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = n \vec{m}}$$

, DOVE n È IL NUMERO DI ATOMI O MOLECOLE NELL'UNITÀ DI VOLUME NELL'INTORNO DI P.
LA MAGNETIZZAZIONE CARATTERIZZA IL MOMENTO MAGNETICO ACQUISTATO DAL MEZZO.
LA MAGNETIZZAZIONE SI DICE UNIFORME SE $\vec{B}$ ESTERNO È UNIFORME.

Relazione tra Correnti Amperiane e Magnetizzazione

CONSIDERIAMO UN CILINDRO DI ALTEZZA h CON UNA MAGNETIZZAZIONE $\vec{M}$ UNIFORME E DIRETTA LUNGO L'ASSE z DEL CILINDRO E ISOLIAMONE UN DISCO DI ALTEZZA dz.
DIVIDIAMOLO IN PRISMETTI ALTI dz E DI BASE dA CON VOLUME $dV = dA\, dz$, CHE POSSIEDONO UN MOMENTO MAGNETICO:

$$d\vec{m} = \vec{M}\, dV = M\, dA\, dz\, \hat{u}_z$$

PER IL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DI AMPERE, LO STESSO MOMENTO È POSSEDUTO DA UNA SPIRA A FORMA DI NASTRO, DI AREA $d\Sigma$ E ALTEZZA dz CHE È PERCORSA DALLA CORRENTE di_m TALE CHE:

$$d\vec{m} = di_m\, dA\, \hat{u}_z = M\, dA\, dz\, \hat{u}_z \Rightarrow di_m = M\, dz$$

SE SOSTITUIAMO OGNI PRISMETTO CON IL RELATIVO CIRCUITO PERCORSO DALLA CORRENTE di_m E SE $\vec{M}$ È COSTANTE, SI HA CHE LE CORRENTI SUI LATI CONTIGUI SI ELIDONO A COPPIE E RIMANGONO SOLO QUELLE SULLA SUPERFICIE LATERALE DEL CILINDRO.
DUNQUE IL DISCO MAGNETIZZATO UNIFORMEMENTE È EQUIVALENTE A UN CIRCUITO PERCORSO IN SUPERFICIE DALLA CORRENTE di_m. IN TOTALE QUINDI IL CILINDRO È PERCORSO DALLA CORRENTE

$$\boxed{i_m = \int_0^h M\, dz = M h}$$

$\frac{A}{m}$ ⇒ DENSITÀ LINEARE DEFINITA SU UNA SUPERFICIE

LA SUA DENSITÀ LINEARE È $\boxed{J_{s,m} = \frac{di_m}{dz} = \frac{i_m}{h} = M}$

DUNQUE LA MAGNETIZZAZIONE $\vec{M}$ È PRODOTTA DALLE CORRENTI AMPERIANE ED È UGUALE ALLA DENSITÀ LINEARE DI TALI CORRENTI.

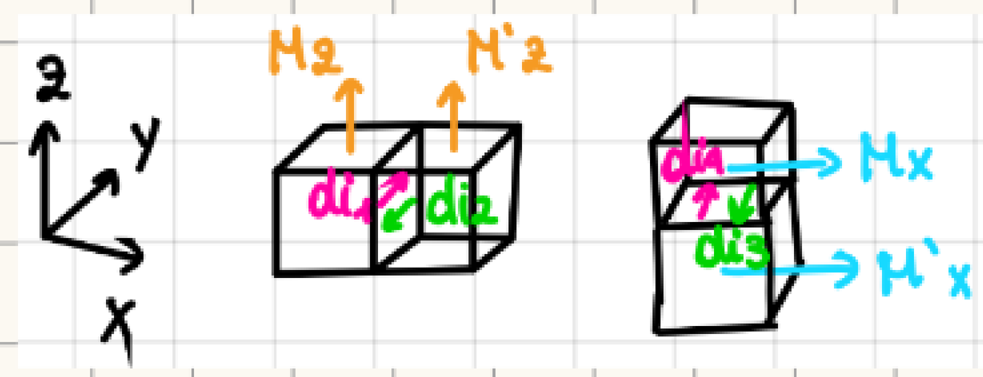
IN FORMA VETTORIALE SI SCRIVE $\boxed{\vec{J}_{s,m} = \vec{M} \times \hat{n}}$ → NORMALE ALLA SUPERFICIE DEL CILINDRO

UN'ALTRA RELAZIONE SI PUÒ OTTENERE DALLA CIRCUITAZIONE DI $\vec{M}$ LUNGO UN PERCORSO CHIUSO CHE CONCATENI LA CORRENTE. DATO CHE AL DI FUORI DEL CILINDRO $M=0$ E ALL'INTERNO VALE SEMPRE $i_m = Mh$, SI HA:

$$\boxed{\oint_C \vec{M} \cdot d\vec{s} = i_m}$$

SE LA MAGNETIZZAZIONE NON È UNIFORME, LA DENSITÀ DELLE CORRENTI AMPERIANE PUÒ ESSERE DIVERSA DA ZERO ANCHE ALL'INTERNO DEL CORPO E NON SOLO SULLA SUA SUPERFICIE.

IN QUESTO CASO CONSIDERIAMO DUE PRISMETTI CONTIGUI LUNGO L'ASSE X CON MAGNETIZZAZIONE M_z E M'_z DIVERSE DERIVANTI DALLE CORRENTI $di_1 = M_z\,dz$ E $di_2 = M'_z\,dz$.



LA CORRENTE LUNGO L'ASSE y SARÀ $di_1 - di_2 = (M_z - M'_z)\,dz = -\frac{\partial M_z}{\partial x}\,dx\,dz$.

FACENDO LO STESSO PER DUE PRISMETTI CONTIGUI LUNGO z, SI HA LA COMPONENTE x DELLA MAGNETIZZAZIONE E LA CORRENTE LUNGO y SARÀ:

$$di_4 - di_3 = (M'_x - M_x)\,dx = \frac{\partial M_x}{\partial z}\,dx\,dz$$

IN TOTALE LUNGO L'ASSE y CI SARÀ QUINDI LA CORRENTE $i_y = \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right)dx\,dz$

E LA DENSITÀ DI CORRENTE SARÀ $J_y = \frac{\partial i_y}{dx\,dz} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = (\nabla \times M)_y$

RIPETENDO IL RAGIONAMENTO PER GLI ALTRI ASSI SI HA IN TOTALE LA DENSITÀ DI CORRENTE DI MAGNETIZZAZIONE

$$\boxed{\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}} \quad \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

Equazioni della magnetostatica nel mezzo

LE EQUAZIONI PER LA MAGNETOSTATICA NEL VUOTO DEVONO ESSERE MODIFICATE QUANDO SONO PRESENTI MEZZI MAGNETIZZATI. RIMANE INVARIATA LA PROPRIETÀ DI $\vec{B}$ DI ESSERE SOLENOIDALE (LEGGE DI GAUSS $\mathrm{div}\,B = 0$), MENTRE CAMBIA LA LEGGE DI AMPERE IN QUANTO DEVONO ESSERE INTRODOTTE LE CORRENTI AMPERIANE E LE LORO DENSITÀ:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (Ni + i_m) = \mu_0 Ni + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{s}}$$

$$\boxed{\nabla \times B = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 (\nabla \times M)}$$

RIORDINANDO SI HA $\oint (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 Ni$ E $\nabla \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{J}$

E DEFINENDO $\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}$ CAMPO MAGNETIZZANTE, SI OTTIENE LA LEGGE DI AMPERE PER $\vec{H}$:

$\boxed{\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i}$: LA CIRCUITAZIONE DI $\vec{H}$ LUNGO UNA LINEA CHIUSA È PARI ALLA SOMMA DELLE CORRENTI DI CONDUZIONE CONCATENATE CON LA LINEA.

$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}}$: IL ROTORE DI $\vec{H}$ È PARI ALLA DENSITÀ DELLE CORRENTI DI CONDUZIONE.

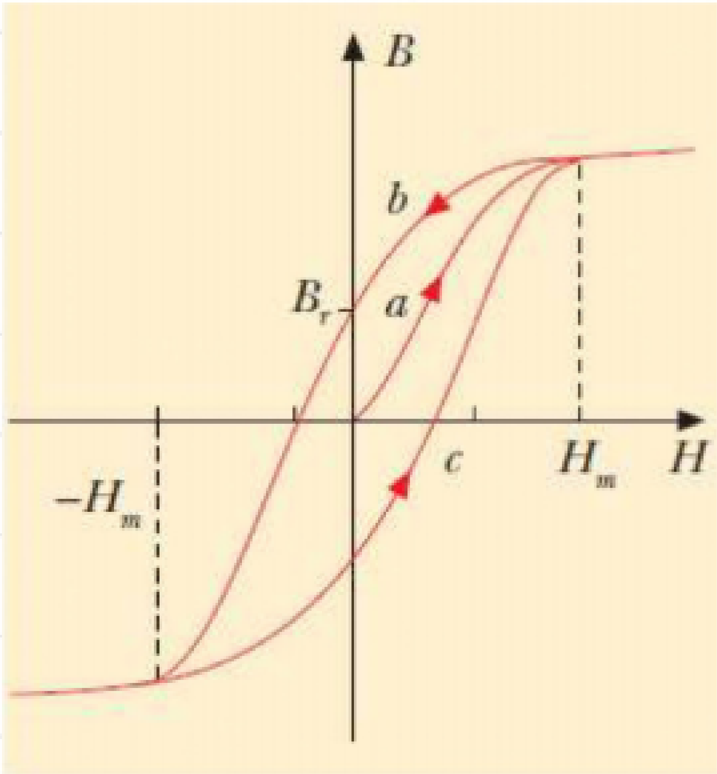
È DEFINITA UN'EQUAZIONE DI STATO CHE LEGA $\vec{M}$ E $\vec{H}$, OVVERO $\vec{M}$ E $\vec{B}$ $\Rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H}$

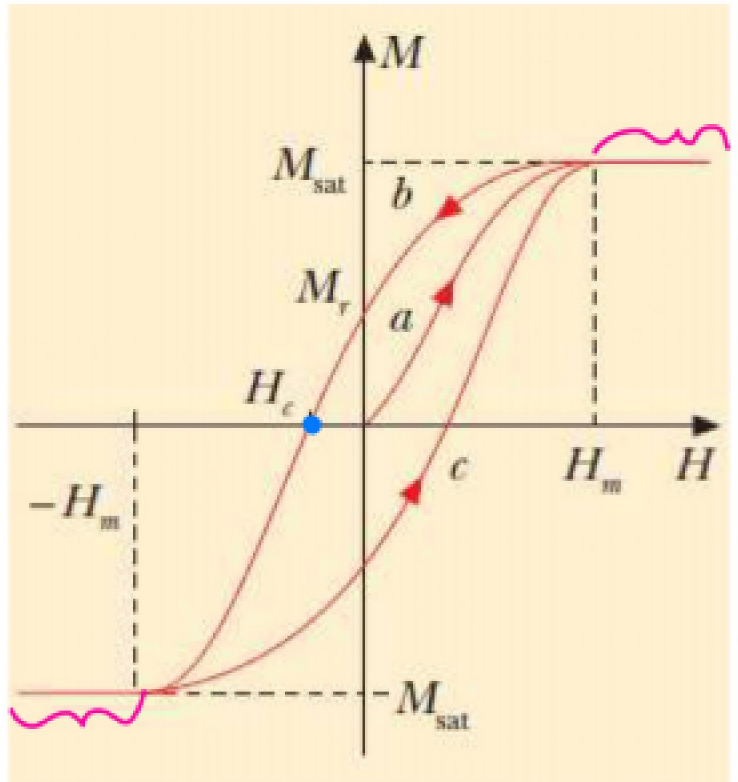
DI CONSEGUENZA $B = \mu_0 (\vec{M} + \vec{H}) = \mu_0 (\chi_m \vec{H} + \vec{H}) = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi_m) = \mu_0 K_m \vec{H} = \mu \vec{H}$ $\quad \boxed{B = \mu \vec{H}}$

E QUINDI $\boxed{\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{K_m - 1}{K_m} \vec{B}}$

PER I MATERIALI FERROMAGNETICI, χ_m NON È FUNZIONE UNIVOCA DI $\vec{H}$ E QUINDI NON SI PUÒ PARLARE DI EQUAZIONE DI STATO.

Ciclo di Isteresi





È UNA CURVA PROPRIA DEL MATERIALE CHE SI TRACCIA FACENDO VARIARE $\vec{H}$ E MISURANDO IL CAMPO $\vec{B}$.
SI OTTIENE COSÌ $B(H)$ E ANCHE $M(H)$.
LA CURVA a È CHIAMATA CURVA DI PRIMA MAGNETIZZAZIONE E LA b È QUELLA DI MAGNETIZZAZIONE RESIDUA (O PERMANENTE)
IL VALORE DI H_c PER CUI $M=0$ È DETTO CAMPO COERCITIVO.

Leggi delle'elettrostatica VS Leggi della magnetostatica

SCRIVIAMOLE PER MEZZI INDEFINITI E IN ASSENZA DI CARICHE LIBERE ($\rho=0$) E CORRENTI DI CONDUZIONE

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$
$$\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\frac{\vec{B}}{\varepsilon_0} = \vec{H} + \vec{M}$$
$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

ANALOGIE FORMALI: $E \rightleftarrows H$

$$\frac{D}{\varepsilon_0} \rightleftarrows \frac{B}{\varepsilon_0}$$
$$\frac{P}{\varepsilon_0} \rightleftarrows M$$