Conduttori in equilibrio

NEI MATERIALI CONDUTTORI, COME I METALLI, SI HANNO UNO O PIÙ ELETTRONI CHE SONO LIBERI DI MUOVERSI.
IL LORO MOTO, PERÒ, È TOTALMENTE CASUALE E LA LORO VELOCITÀ MEDIA È NULLA.
CIÒ EQUIVALE A DIRE CHE NON PUÒ ESISTERE UN CAMPO ELETTRICO MACROSCOPICO ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE,
DUNQUE $\boxed{\vec{E}=0}$ PER UN CONDUTTORE IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO. QUESTO FATTO HA TRE CONSEGUENZE:

1) UN EVENTUALE ECCESSO DI CARICA SI PUÒ DISTRIBUIRE SOLO SULLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE: INFATTI, DATO CHE $E=0$, ANCHE IL FLUSSO È NULLO E QUINDI PER GAUSS, LA CARICA INTERNA È NULLA $q_{INT}=0$.

2) IL POTENZIALE È COSTANTE IN OGNI PUNTO INTERNO DEL CONDUTTORE, DATO CHE $E=0$:

$$V(P_1)-V(P_2)=\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{s}=0 \Rightarrow V(P_1)-V(P_2)=\boxed{V_0=\text{cost}}$$

QUESTO VALE ANCHE PER DUE PUNTI SULLA SUPERFICIE, CHE QUINDI RISULTA EQUIPOTENZIALE.

3) IL CAMPO ELETTRICO IN UN PUNTO IN PROSSIMITÀ DELLA SUPERFICIE È PERPENDICOLARE AD ESSA E VALE $\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.
INFATTI, SE PRENDIAMO UN CILINDRETTO RETTO DI AREA dA CON UNA BASE CONTENUTA NELLA SUPERFICIE DOVE $\vec{E}=0$ E UNA ALL'ESTERNO DOVE $\vec{E}$ È PERPENDICOLARE A dA, SI HA:

$$\oint_{\text{CILINDRO}}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dA=E\,dA=\frac{dq}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma\,dA}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

QUESTA FORMULA COSTITUISCE IL TEOREMA DI COULOMB

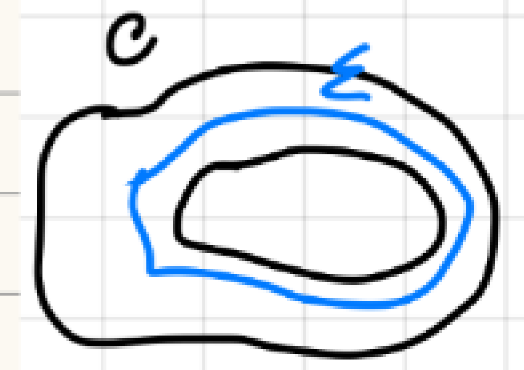
SE INTRODUCIAMO IL CONDUTTORE IN UN CAMPO ESTERNO $\vec{E}$, IL CAMPO ALL'INTERNO DELLO STESSO NON SARÀ PIÙ NULLO MA DIVENTERÀ $\vec{E}$, IL CHE PROVOCA LA FORMAZIONE DI DUE ZONE SUL CONDENSATORE, UNA CON UN ACCUMULO DI CARICHE NEGATIVE E L'ALTRA POSITIVE, TRA LE QUALI SI FORMA UN CAMPO ELETTROSTATICO INDOTTO E_i CHE CONTRASTA IL MOTO DEGLI ELETTRONI E SI AVRÀ EQUILIBRIO QUANDO $E+E_i=0$.
QUESTO È IL FENOMENO ALLA BASE DELL'INDUZIONE ELETTROSTATICA.
IN TOTALE, PERÒ, DURANTE IL PROCESSO LA CARICA DEL CONDUTTORE RIMANE LA STESSA (CARICHE PREESISTENTI + CARICHE INDOTTE).

SE SI COLLEGANO DUE CONDUTTORI, AD ESEMPIO CON UN FILO CONDUTTORE, SI COSTITUISCE UN UNICO CONDUTTORE E ALL'EQUILIBRIO VALE $\vec{E}=0$ E $V=\text{cost}$.
QUINDI I DUE CONDUTTORI A CONTATTO SI PORTANO ALLO STESSO POTENZIALE.

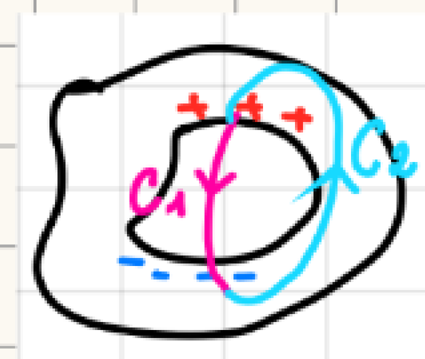
Capacità

IL RAPPORTO TRA LA CARICA DISTRIBUITA SU UN CONDUTTORE ISOLATO E IL SUO POTENZIALE ELETTROSTATICO È COSTANTE E VALE $\boxed{C=\frac{q}{V}}$ $\left[\frac{C}{V}=\text{FARAD}\right]$

Conduttore cavo



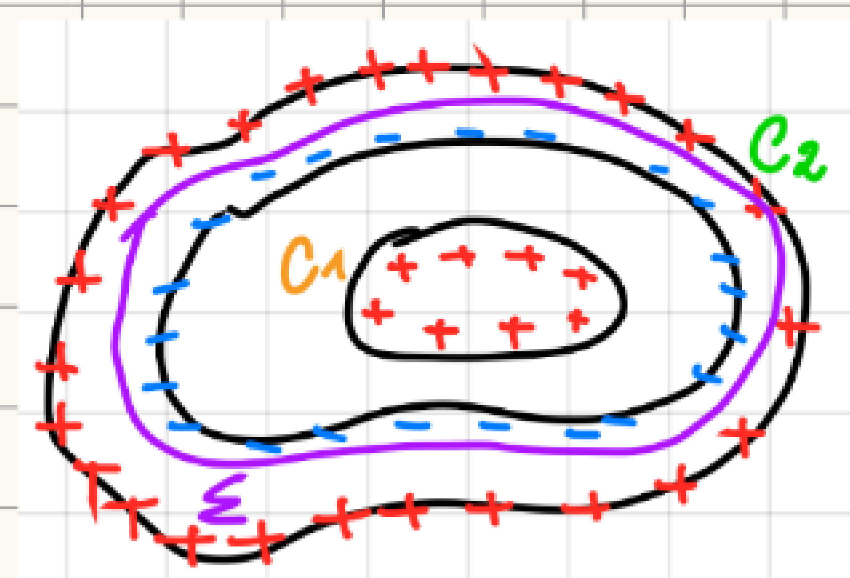
Se prendiamo un conduttore con una cavità priva di cariche, in esso il campo elettrico deve essere nullo e quindi anche il suo flusso attraverso qualsiasi superficie, in particolare una superficie Σ che contenga la cavità.
Per Gauss, quindi, all'interno di essa la carica deve essere nulla.
Sulle pareti della cavità non può esserci una separazione della carica $+q$ e $-q$: se ci fosse, ci sarebbero nella cavità delle linee di forza uscenti dalle cariche $+$ ed entranti in quelle $-$.
La circuitazione di $\vec{E}$ lungo una linea chiusa composta da un tratto C_1 all'interno della cavità dove $\vec{E} \neq 0$ e C_2 all'esterno di essa dove $\vec{E} = 0$ sarebbe



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \underbrace{\vec{E}}_{=0} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

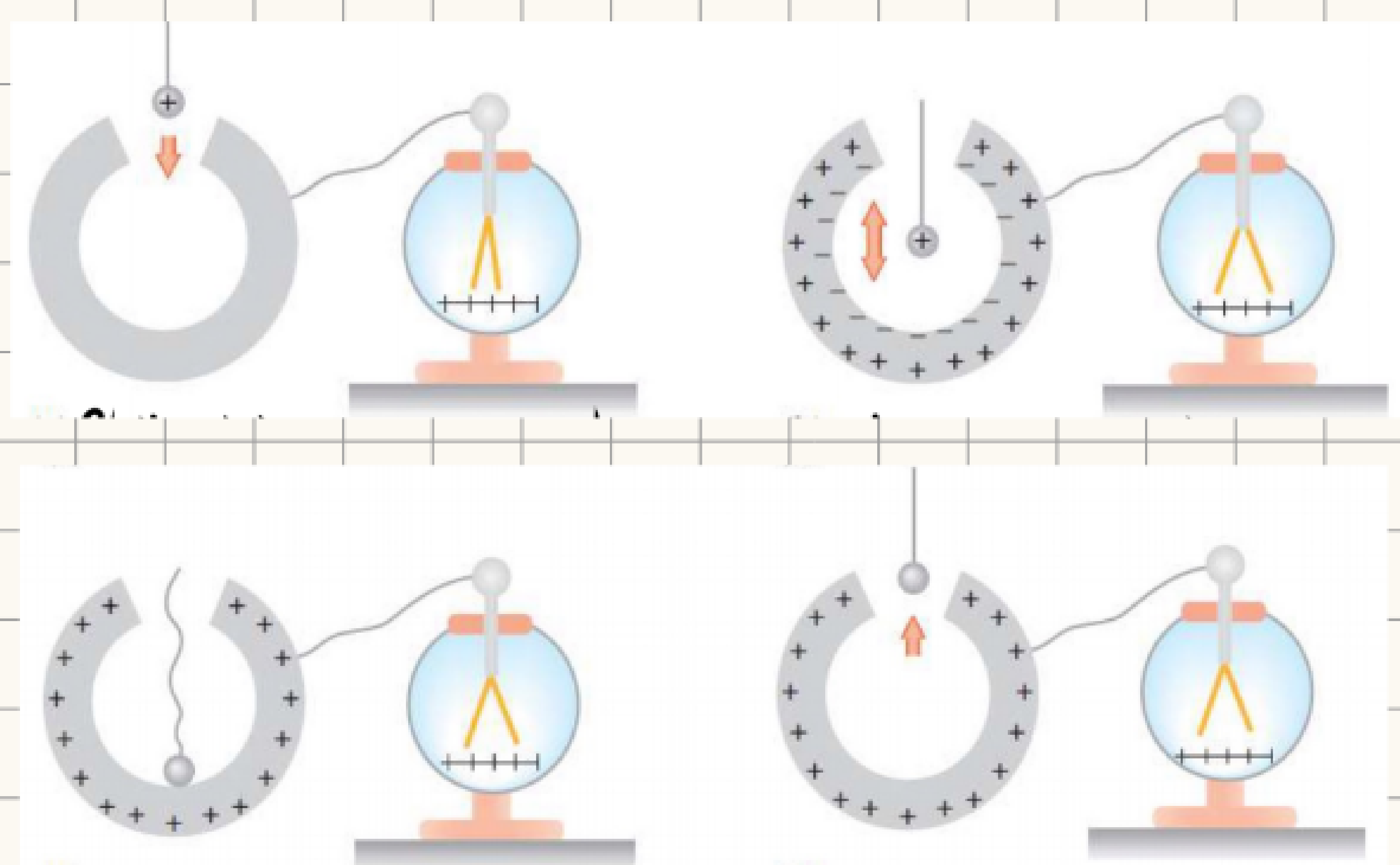
che andrebbe contro la conservatività di $\vec{E}$.
Quindi anche con cavità, la carica è solo sulla superficie del conduttore ed $\vec{E}$ è nullo all'interno.
Inoltre, il potenziale della cavità deve essere lo stesso del conduttore altrimenti ci sarebbe una d.d.p. e quindi un campo elettrostatico diverso da zero.

Schermo elettrostatico

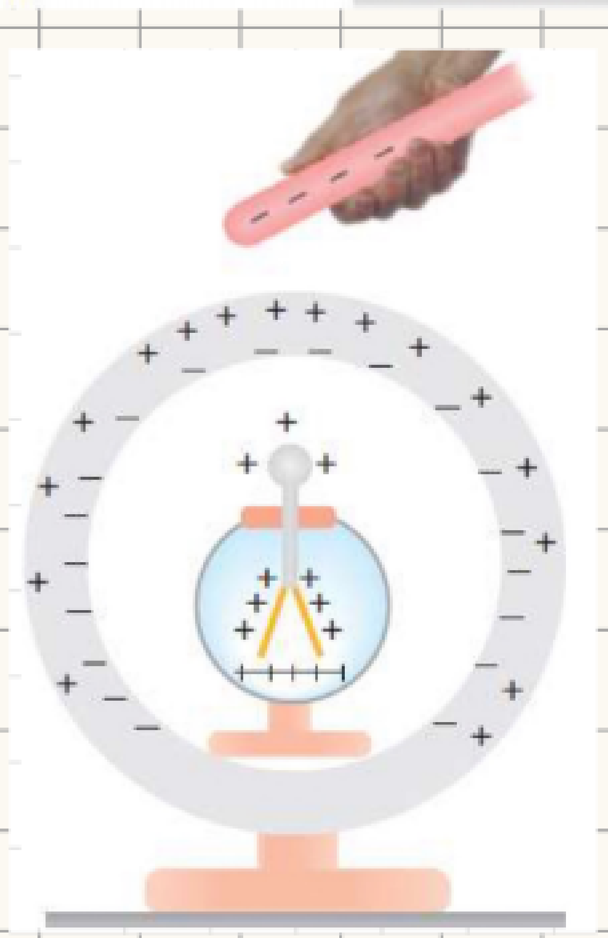


Prendiamo un conduttore cavo C_2 all'interno del quale è posizionato un altro conduttore C_1 carico con carica $+q$.
Dato che il campo $\vec{E}$ all'interno di C_2 deve essere nullo, il flusso attraverso una qualsiasi superficie interna ad Σ deve essere nullo e quindi, per Gauss, la carica interna deve essere nulla.
Ma dato che su C_1 la carica è $+q$, sulla superficie interna di C_2 deve necessariamente comparire una carica $-q$, e quindi su quella esterna $+q$.
Il fenomeno è definito **induzione completa** perché tutte le linee di forza che partono da C_1 terminano su C_2.

Si dice che il conduttore cavo costituisce uno **schermo elettrostatico** perfetto tra spazio esterno e interno: verifichiamolo con l'esperimento del **pozzo (o gabbia) di Faraday**:



Colleghiamo un conduttore cavo a un elettroscopio e introduciamo nel conduttore una carica $+q$ appesa a un filo isolato.
L'elettroscopio misura la carica sulla superficie esterna che sarà $+q$ per l'induzione.
Se muoviamo la carica all'interno del conduttore, modificando quindi il campo elettrico all'interno e/o la distribuzione di carica sulla superficie interna, l'elettroscopio non risente di alcuna e una volta estratta la carica rimane carico.



Se poniamo invece l'elettroscopio nella cavità e avviciniamo un corpo carico alla superficie esterna del conduttore, variando quindi la distribuzione di carica esterna, l'elettroscopio non risente di alcuna variazione.

Sistemi conduttori

È COSTITUITO DA n CONDUTTORI FISSI RACCHIUSI ENTRO UN CONDUTTORE IL CUI POTENZIALE È PRESO COME RIFERIMENTO E POSTO UGUALE A ZERO, OPPURE SE ESSO MANCA IL POTENZIALE DI RIFERIMENTO È QUELLO NULLO ALL'INFINITO.

SE PRENDIAMO UN CONDUTTORE $\mathcal{C}_1$ CARICO $+q_1$ E GLI AVVICINIAMO UN CONDUTTORE $\mathcal{C}_2$, SULLA PARTE DI $\mathcal{C}_2$ PIÙ VICINA A $\mathcal{C}_1$ COMPARIRÀ UNA CARICA NEGATIVA $-q'$ E SU QUELLA PIÙ LONTANA INVECE $+q'$, PER INDUZIONE CHE IN QUESTO CASO È INCOMPLETA.

IN QUESTA CONFIGURAZIONE, IL POTENZIALE DI $\mathcal{C}_1$ ASSUME UN VALORE V_1 MINORE DI QUELLO CHE AVREBBE IN ASSENZA DI $\mathcal{C}_2$, IN QUANTO VIENE RIDOTTO DA $-q'$ PIÙ DI QUANTO VIENE AUMENTATO DA $+q'$ CHE È PIÙ LONTANA, E DI CONSEGUENZA LA SUA CAPACITÀ $\mathcal{C}_1$ AUMENTA.

SE I CONDUTTORI SONO n, SI HA LA SEGUENTE RELAZIONE TRA POTENZIALI E CARICHE:

$$\boxed{\begin{aligned} V_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \\ V_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \\ &\vdots \\ V_n &= a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \dots + a_{nn}q_n \end{aligned}}$$

DOVE I COEFF. a_{ij} SONO DEFINITI COEFF. DI POTENZIALE ELETTROSTATICO E VALE: $a_{ij} > 0$, $a_{ii} > a_{ij}$ E $a_{ij} = a_{ji}$, PERCHÉ RAPPRESENTA L'ITERAZIONE MUTUA TRA UN CONDUTTORE E UNO DEGLI ALTRI $n-1$.

SE RISOLVIAMO IL SISTEMA LINEARE RISPETTO A q_i ($\Leftrightarrow \det A_{ij} \neq 0$) SI HANNO LE RELAZIONI:

$$\boxed{\begin{aligned} q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1n}V_n \\ q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \dots + C_{2n}V_n \\ &\vdots \\ q_n &= C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \dots + C_{nn}V_n \end{aligned}}$$

DOVE I COEFF. C_{ij} SONO CHIAMATI COEFF. DI INDUZIONE SE $i \neq j$ E COEFF. DI CAPACITÀ SE $i = j$, E VALGONO: $C_{ii} > 0$, $C_{ij} < 0$, $C_{ij} = C_{ji}$.
PER TROVARE GLI a_{ij} DI SOLITO SI PONE $q_1 \neq 0$ E $q_2 = \dots = q_n = 0$ O $q_2 \neq 0$ E $q_1 = \dots = q_n = 0$ E COSÌ VIA.

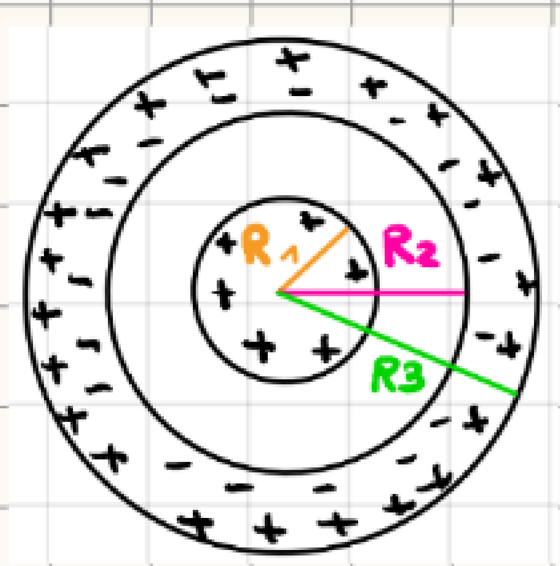
Condensatori

UN CONDENSATORE È UN SISTEMA DI DUE CONDUTTORI, CHIAMATI ARMATURE, TRA I QUALI C'È INDUZIONE COMPLETA, E VIENE USATO COME DEPOSITO DI CARICA.

LA CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE È: $\boxed{C = \dfrac{q}{V_1 - V_2}}$ $\left(C = \dfrac{Q}{V}\right)$

DOVE $\pm q$ È LA CARICA SULLE ARMATURE E $V_1 - V_2$ È LA D.D.P. TRA LE STESSE.

Condensatore sferico



È COMPOSTO DA DUE CONDUTTORI SFERICI CONCENTRICI.
IL CAMPO ELETTRICO DI UNA DISTRIBUZIONE SUPERFICIALE DI CARICA È $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$
LA D.D.P. TRA LE DUE ARMATURE È:

O ALL'INTERNO

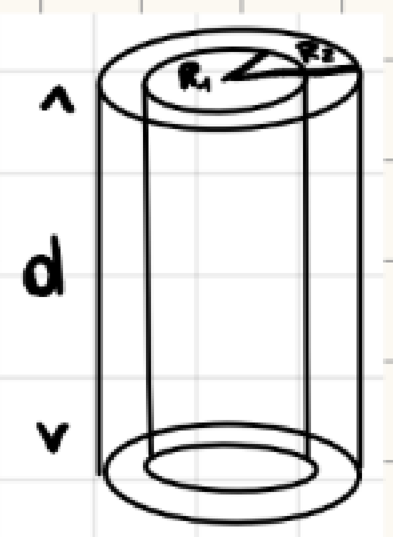
$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_3} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\, d\vec{s} + \cancel{\int_{R_2}^{R_3} \overset{=}{\vec{E}}\, d\vec{s}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\boxed{V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

LA CAPACITÀ È QUINDI $\boxed{C = \dfrac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$

SE $R_2 \to +\infty$ $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$
SE $h = R_2 - R_1 \ll R_1 \simeq R_2 \simeq R \Rightarrow C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{h} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{h}$

Condensatore cilindrico



IL CAMPO DI UN CILINDRO UNIFORMEMENTE CARICO É $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$

E LA D.D.P. TRA DUE PUNTI, OVVERO TRA LE DUE ARMATURE É:

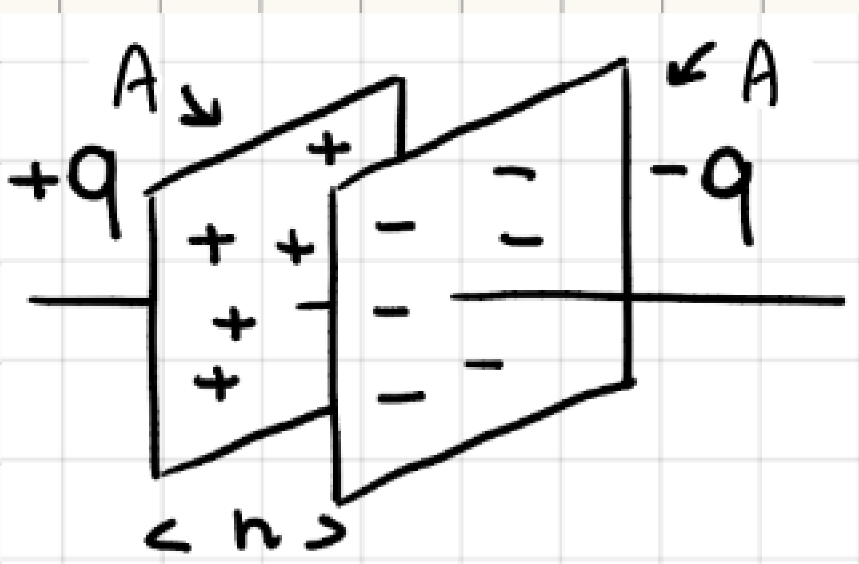
$$\boxed{V_1 - V_2 = V(R_1) - V(R_2) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

DOVE $\lambda = \pi \rho R^2 = \frac{q}{d}$.

LA CAPACITÀ É $\boxed{C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$

SE $R_2 - R_1 = h \ll R_1 \sim R_2 \sim R \Rightarrow \ln\frac{R_2}{R_1} = \ln\left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1}\right) = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \sim \frac{h}{R} \Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 d}{h}R = \frac{A\varepsilon_0}{h}$

Condensatore piano

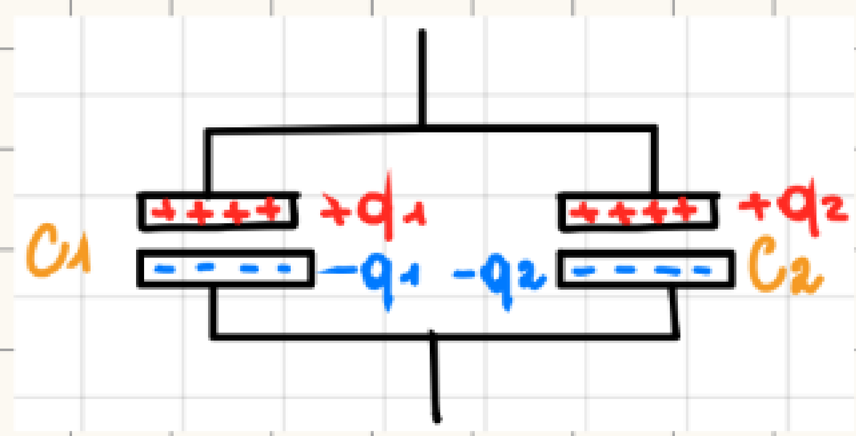


LA D.D.P. TRA LE DUE ARMATURE É $\boxed{V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}h = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0 A}h = \frac{q h}{\varepsilon_0 A}}$

LA CAPACITÀ É $\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{h}}$

Condensatori in parallelo

IN UN COLLEGAMENTO IN PARALLELO, SI COSTITUISCE UN SISTEMA DI DUE SOLI CONDENSATORI COSICCHÈ LA D.D.P. DEI DUE CONDENSATORI É LA STESSA.



QUINDI $q_1 = C_1 \Delta V$ E $q_2 = C_2 \Delta V$

SULL'ARMATURA SUPERIORE LA CARICA TOTALE É $q_1 + q_2 = \Delta V(C_1 + C_2) = C_{eq}\Delta V$

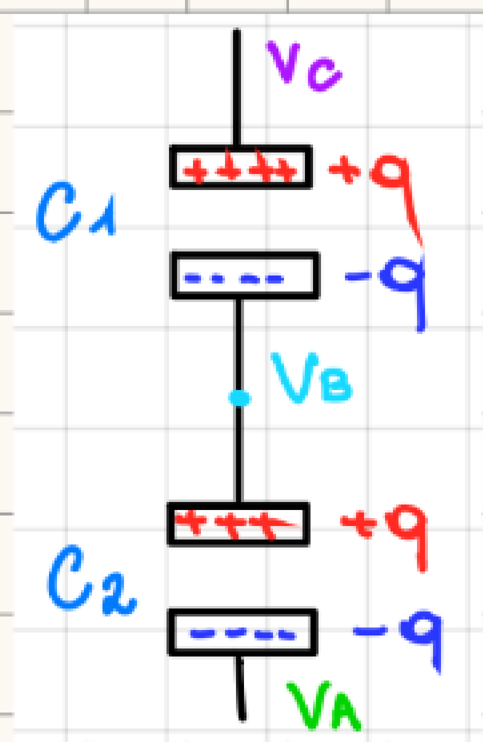
MENTRE SU QUELLA INFERIORE É $-q$.

QUINDI POSSIAMO RIVEDERE IL SISTEMA COME UN UNICO CONDENSATORE DI CAPACITÀ $C = \frac{q}{V} = C_1 + C_2$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

Condensatori in serie

IN QUESTO CASO IL COLLEGAMENTO TRA I DUE CONDENSATORI É SOLO UNO E SI FORMA UN SISTEMA DI TRE CONDUTTORI.



AI DUE ESTREMI LA D.D.P. É $V_C - V_A$ E NEL CONDUTTORE INTERMEDIO HA UN POTENZIALE V_B.

SE LA CARICA É $+q$ SULL'ARMATURA SUPERIORE DI C_1, COMPARIRANNO LE CARICHE SULLE ALTRE ARMATURE PER INDUZIONE. QUINDI SI HA:

$$V_B - V_A = \frac{q}{C_2} \quad \text{E} \quad V_C - V_B = \frac{q}{C_1} \Rightarrow V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_B - V_A = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}$$

QUINDI LA CAPACITÀ EQUIVALENTE É $\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

Energia immagazzinata dal condensatore

NEL PROCESSO DI CARICA DI UN CONDENSATORE, É RICHIESTO UN LAVORO CHE, ESSENDO IL CAMPO CONSERVATIVO DIPENDE SOLO DA STATO INIZIALE E FINALE E NON DAL PROCESSO STESSO.
POSSIAMO IMMAGINARLO QUINDI COME UNA SERIE DI PROCESSI ELEMENTARI IN OGNUNO DEI QUALI VIENE SPOSTATA UNA CARICA dq' DA UN'ARMATURA ALL'ALTRA COSICCHÉ ALLA FINE SU UN'ARMATURA C'É LA CARICA $+q$ E SULL'ALTRA RIMANE $-q$ E TRA LE DUE C'É LA D.D.P. V.
SE IN UNA FASE INTERMEDIA LA D.D.P. É V', CAUSATA DALLA CARICA $q' = CV'$ GIÀ TRASFERITA, PER SPOSTARE UN ULTERIORE CARICA dq' ATTRAVERSO LA D.D.P. V' É NECESSARIO COMPIERE UN LAVORO CONTRO LA FORZA ELETTROSTATICA REPULSIVA PARI A:

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

E IL LAVORO TOTALE SARÀ $W' = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$.

QUESTO LAVORO VIENE IMMAGAZZINATO DAL SISTEMA SOTTO FORMA DI ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA, CHE, ASSUMENDO CHE SIA NULLA PER $q=0$, VARRÀ:

$$\boxed{U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} q \Delta V}$$

POSSIAMO TROVARE UN'ALTRA FORMULA CHE LEGA U_e A E PIUTTOSTO CHE A q, CONSIDERANDO UN CONDENSATORE PIANO (MA HA VALIDITÀ GENERALE)

$$V = Eh, \quad C = \frac{\varepsilon_0 A}{h} \Rightarrow U_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{h} E^2 h^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 A h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \mathcal{V}$$

CON $\mathcal{V}$ = VOLUME DEL CONDENSATORE.
È DEFINITA QUINDI DENSITÀ DI ENERGIA ELETTROSTATICA $\boxed{u_e = \frac{U_e}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2}$