Legge di Gauss

DEFINIAMO **FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO** ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE Σ CON VERSORE NORMALE $\hat{m}_m$:

$$\boxed{\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\cdot\hat{m}\,dA} \qquad \left[V\cdot m = \frac{J}{C}m = \frac{N}{C}m^2\right]$$

SE LA SUPERFICIE È CHIUSA, IL FLUSSO SI SCRIVE $\phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{m}\,dA$, E $\hat{m}$ È ORIENTATO CON VERSO USCENTE PER CONVENZIONE.

I CONTRIBUTI POSITIVI ALL'INTEGRALE SONO QUELLI PER CUI $\vec{E}\cdot\hat{m}>0$, OVVERO PER CUI ANCHE $\vec{E}$ È USCENTE, E QUINDI RAPPRESENTANO UN FLUSSO USCENTE DA A.

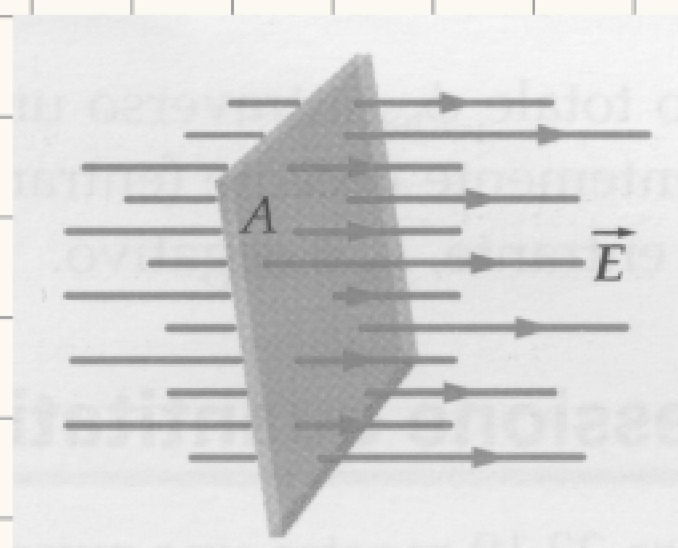
I CONTRIBUTI NEGATIVI ALL'INTEGRALE SONO QUELLI PER CUI $\vec{E}\cdot\hat{m}<0$, OVVERO PER CUI INVECE $\vec{E}$ È ENTRANTE, E QUINDI RAPPRESENTANO UN FLUSSO ENTRANTE.

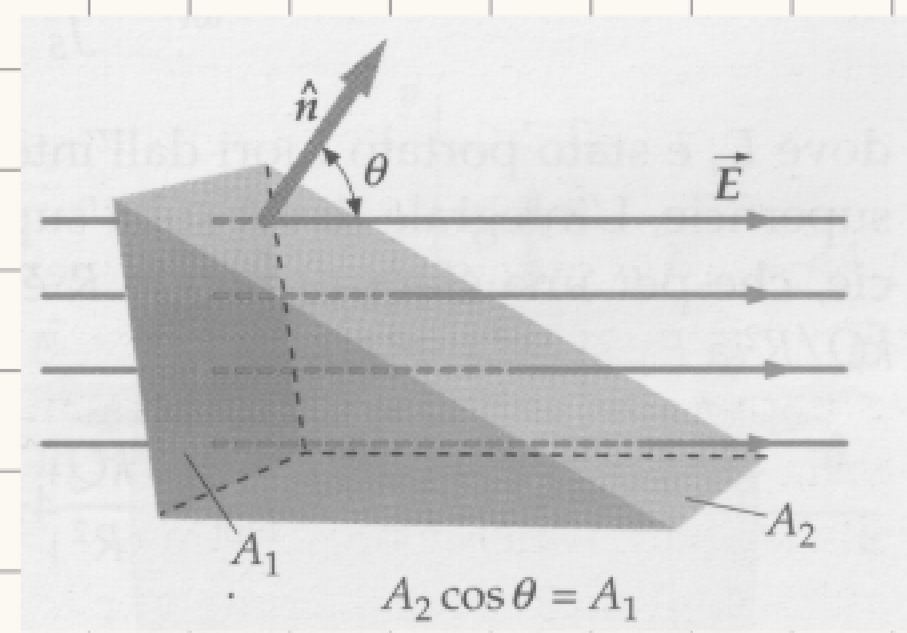
LA LEGGE DI GAUSS AFFERMA CHE IL FLUSSO DI $\vec{E}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA È PARI ALLA SOMMA DELLE CARICHE IN ESSA CONTENUTE, DIVISE PER ε_0:

SE HO UNA DISTRIBUZIONE

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot\hat{m}\,dA = \frac{(A\ q_{INT})}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV}$$

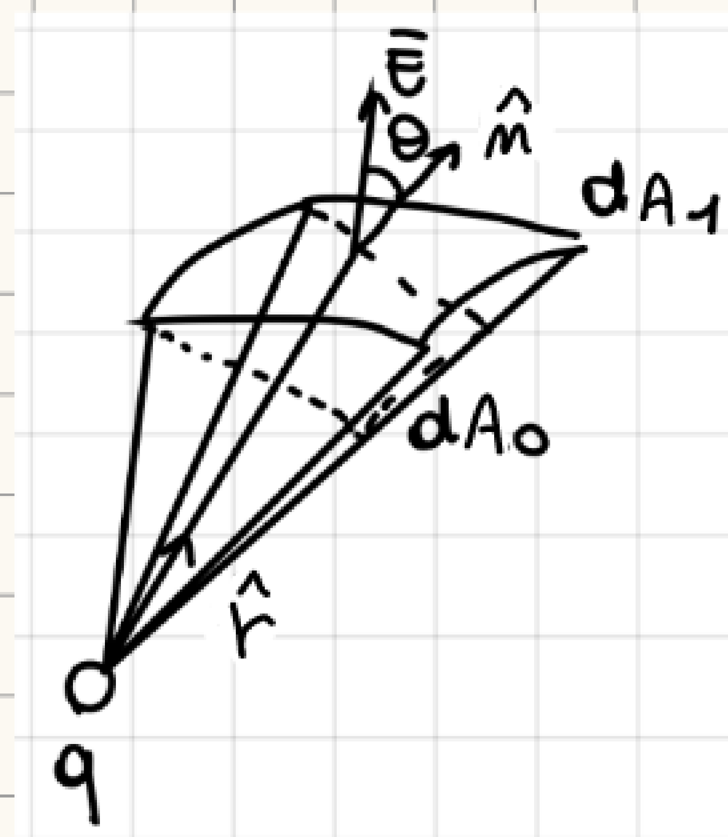
VOLUME CONTENUTO IN S





Dimostrazione

CONSIDERIAMO IL CAMPO ELETTROSTATICO PRODOTTO DA UNA CARICA PUNTIFORME q E CALCOLIAMO IL FLUSSO ATTRAVERSO L'ELEMENTO DI SUPERFICIE dA.



$$d\phi(\vec{E}) = Kq\frac{\hat{r}\cdot\hat{m}}{r^2}dA = K\frac{q}{r^2}dA\cos\theta = K\frac{q}{r^2}dA_0$$

DOVE dA_0 È LA PROIEZIONE DI A SU UN PIANO ORTOGONALE A $\hat{r}$.

SI DEFINISCE IL RAPPORTO $\boxed{\dfrac{dA_0}{r^2} = d\Omega}$ **L'ANGOLO SOLIDO** SOTTO CUI È VISTO DA q IL CONTORNO DI A.

$d\phi(\vec{E}) = Kq\,d\Omega$ (QUINDI IL FLUSSO DIPENDE SOLO DA $d\Omega$ E NON DALLA SUPERFICIE)

QUINDI IL FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE INFINITESIMA A È: $\phi(\vec{E}) = Kq\int d\Omega = Kq\,\Omega$.

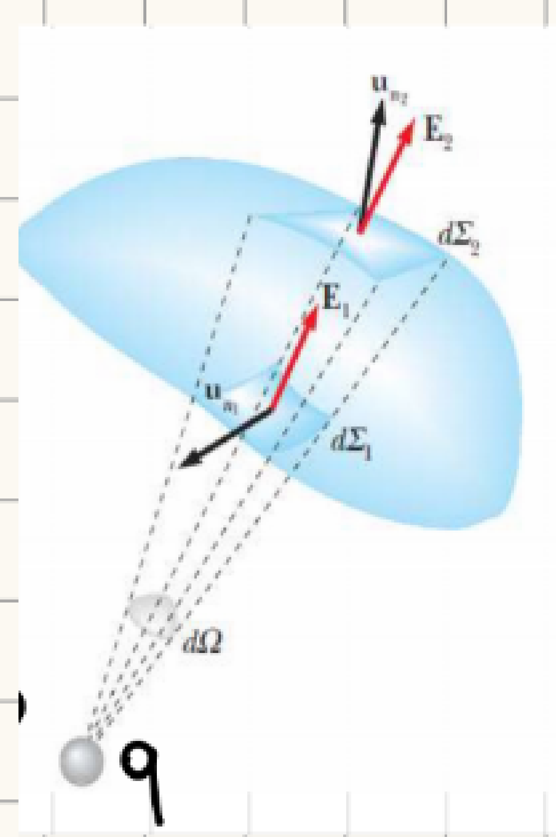
CONSIDERIAMO ORA IL FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA. ABBIAMO DUE CASI:

1) SE LA CARICA q È INTERNA ALLA SUPERFICIE SI HA

$$\phi(\vec{E}) = \oint_A \vec{E}\cdot\hat{m}\,dA = Kq\int_{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

IN QUANTO L'ANGOLO SOLIDO SOTTO CUI È VISTA UNA SUPERFICIE CHIUSA È 4π E I CONTRIBUTI $\vec{E}\cdot\hat{m}\,dA$ SI SOMMANO AVENDO OVUNQUE STESSO VALORE E SEGNO.

2) SE INVECE q È ESTERNA, TRACCIAMO DA ESSA DELLE LINEE CHE FORMANO UN CONO CHE SOTTENDE $d\Omega$ E CHE STACCA SU A DUE SUPERFICI dA_1 E dA_2 ORIENTATE IN MODO CHE $\vec{E}\cdot\hat{m}_1 dA_1 < 0$ e $\vec{E}\,\hat{m}_2\,dA_2 > 0$.
I FLUSSI ATTRAVERSO ESSE SARANNO:



$$d\phi_1(\vec{E}) = -Kq\,d\Omega \quad e \quad d\phi_2(\vec{E}) = Kq\,d\Omega \Rightarrow \phi_1 + \phi_2 = 0$$

QUINDI IL FLUSSO TOTALE È $\phi(\vec{E}) = \oint_A \vec{E}\cdot\hat{m}\,dA = 0$

DUNQUE IL FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA DEL CAMPO PRODOTTO DA UNA CARICA PUNTIFORME VALE $\frac{q}{\varepsilon_0}$ SE ESSA È INTERNA, $\emptyset$ SE È ESTERNA.

ESTENDENDO IL RISULTATO AL CASO DI CAMPO PRODOTTO DA PIÙ CARICHE PUNTIFORMI (O UNA DISTRIBUZIONE)

SI HA CHE: $\phi(\vec{E}) = \oint_A \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \oint_A \sum_i \vec{E}_i\cdot\hat{n}\,dA = \sum_i \oint_A \vec{E}_i\cdot\hat{n}\,dA$

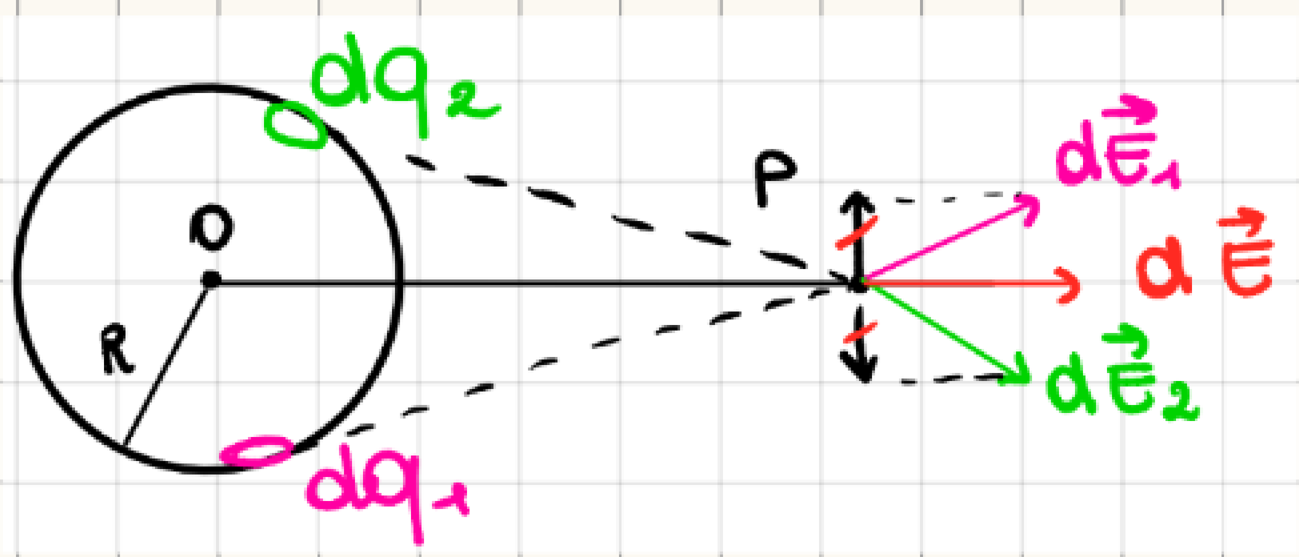
OGNI INTEGRALE VALE $\emptyset$ SE LA CARICA È ESTERNA, VALE $\frac{q_i}{\varepsilon_0}$ SE È INTERNA E RITORNA QUINDI LA L. DI GAUSS.

Applicazioni

1) Distribuzione sferica superficiale di carica

$\sigma = \text{cost}, R, q$

a) CALCOLARE $\vec{E}$ NEI PUNTI ALL'ESTERNO: $r > R$



IL CAMPO È RADIALE PERCHÉ σ È UNIFORME E I CONTRIBUTI VERTICALI DI $d\vec{E}_1$ E $d\vec{E}_2$ SI ELIDONO.

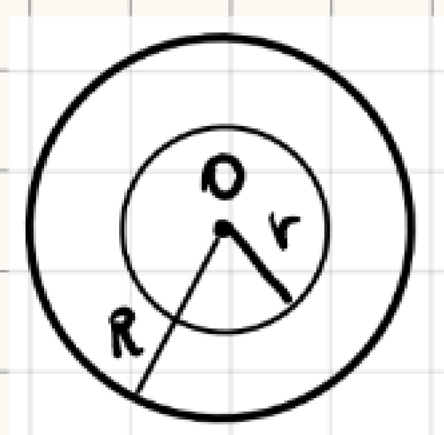
$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$

$$\phi(\vec{E}) = \oint E(r)\,\hat{r}\cdot\hat{n}\,dA = E(r)\oint dA = E(r)\,4\pi r^2 \overset{\text{GAUSS}}{=} \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (q = \sigma\,dA = 4\pi R^2\sigma)$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0} = \frac{\sigma R^2}{r^2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\,\hat{r}}$$ NON DIPENDE DA R.

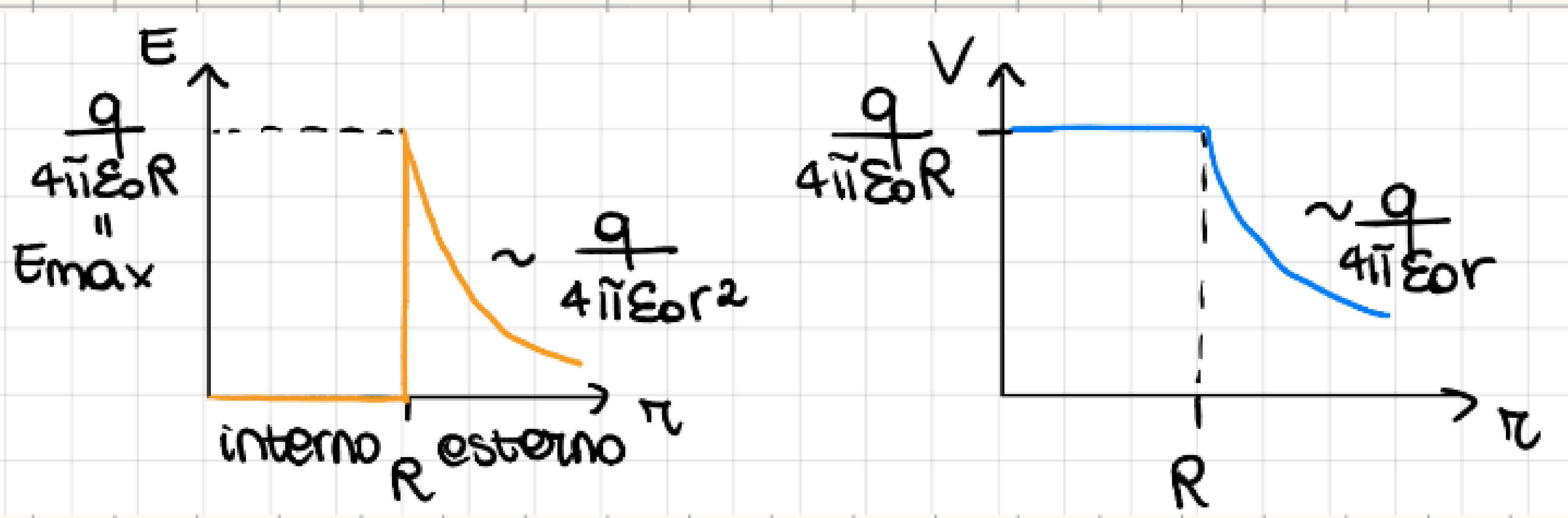
IL CAMPO ELETTROSTATICO ALL'ESTERNO DI UNA DISTRIBUZIONE SFERICA SUPERFICIALE UNIFORME DI CARICA È UGUALE A QUELLO DI UNA CARICA PUNTIFORME DELLO STESSO VALORE POSTA NEL CENTRO DELLA SUP. SFERICA.

b) CALCOLARE $\vec{E}$ NEI PUNTI ALL'INTERNO: $r < R$



NON C'È CARICA ALL'INTERNO PERCHÉ ESSA È DISTRIBUITA SOLO SULLA SUPERFICIE.
QUINDI IL FLUSSO È NULLO E ANCHE IL CAMPO: $\boxed{\vec{E} = 0}$

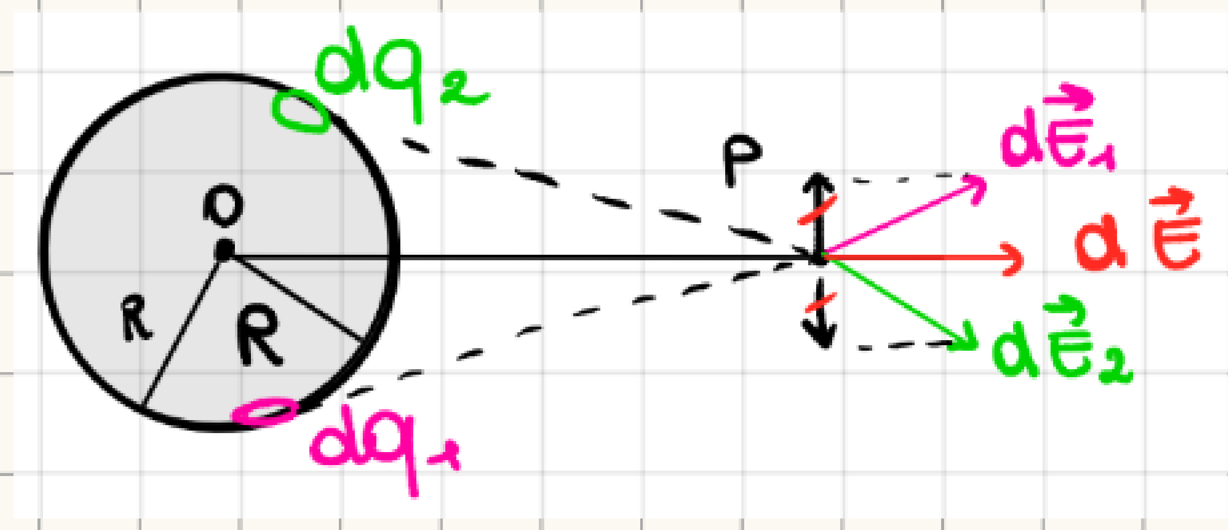
IL POTENZIALE È $V(r) = -\int \vec{E}\,dr = -kq\int \frac{1}{r^2}\,dr = k\frac{q}{r} \Rightarrow \boxed{V(r) = k\frac{q}{r}}$



2) Sfera uniformemente carica

q, ρ, R

a) $\vec{E}$ ALL'ESTERNO : $r > R$

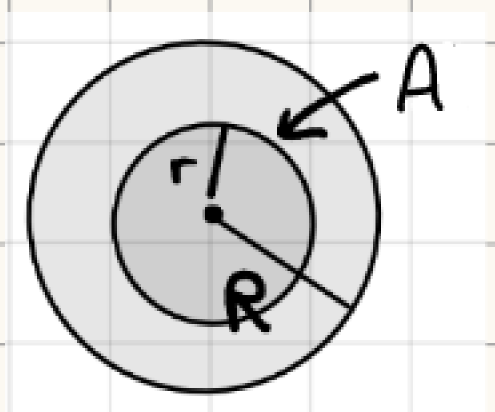


STESSO CASO DELL'ESEMPIO 1), QUINDI $\vec{E}$ È QUELLO DI UNA CARICA q PUNTIFORME AL CENTRO DELLA SFERA.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \Big(q = \overbrace{\tfrac{4}{3}\pi R^3}^{\text{VOLUME}} \rho\Big) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

POTENZIALE ESTERNO $\boxed{V(r>R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \Rightarrow \boxed{V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}}$

b) $\vec{E}$ ALL'INTERNO : $r < R$



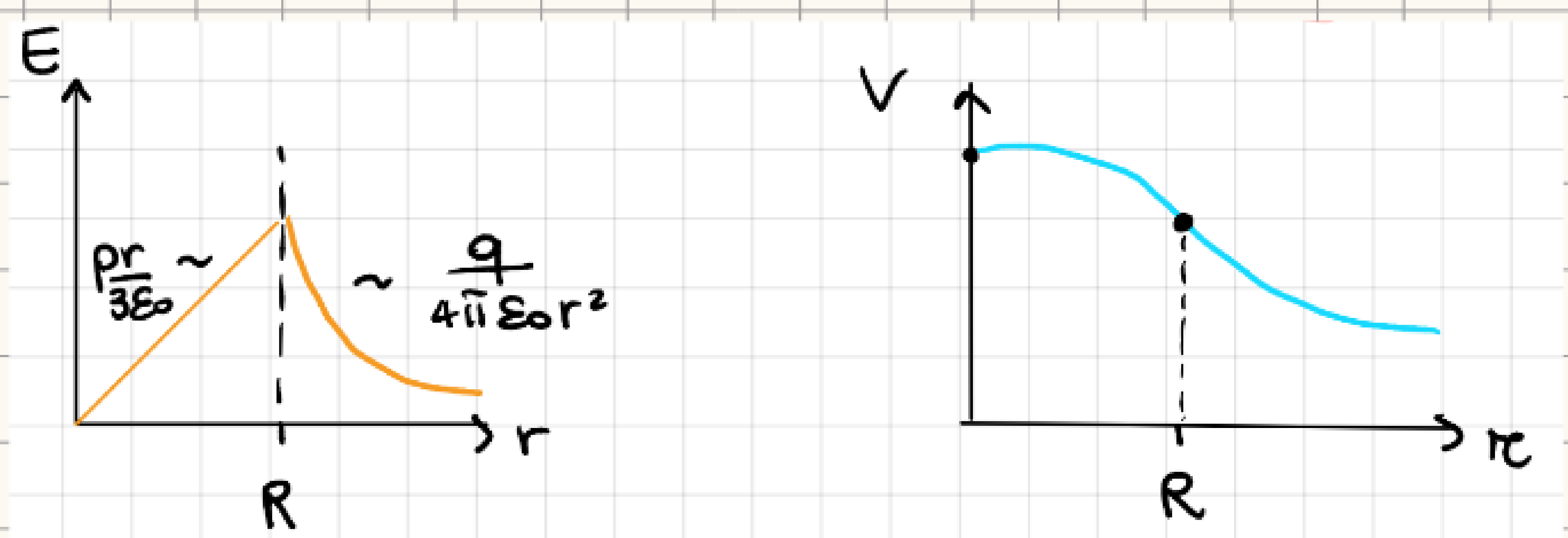
$$\phi(\vec{E}) = \oint E(r)\hat{r}\cdot\hat{n}\, dA = E(r)\oint dA = \overbrace{4\pi r^2}^{A \text{ SUP. SFERICA}} E \overset{\text{GAUSS}}{=} \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

$$q' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,\cancel{\tfrac{4}{3}}\cancel{\pi} r^3 = q\frac{r^3}{R^3}$$

$$|\vec{E}| = E = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

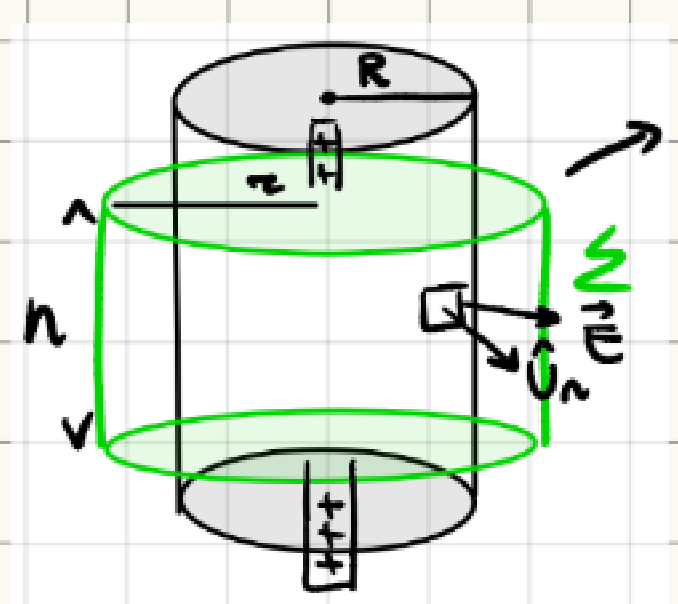
POTENZIALE INTERNO $V(R) - V(r) = -\int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2)$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon}(3R^2 - r^2) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$



3) Cilindro uniformemente carico

CALCOLARE $\vec{E}$ ALL'ESTERNO E ALL'INTERNO



CONSIDERIAMO UNA SCATOLA CILINDRICA DI RAGGIO $r > R$ E ALTEZZA h.
SULLE BASI (INFERIORE E SUPERIORE) DI A IL FLUSSO È NULLO IN QUANTO $\vec{E}$ È PARALLELO ALLE BASI E QUINDI ORTOGONALE A $\hat{n}$

$$\vec{E}\cdot\hat{n} = E\cos\theta = E\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

SULLA SUPERFICIE LATERALE IL FLUSSO È <u>NON NULLO</u>.

$$\phi(\vec{E}) = \oint E(r)\hat{r}\cdot\hat{n}\, dA = E(r)\oint dA = EA = 2\pi r h E \overset{\text{GAUSS}}{=} \frac{q}{\varepsilon_0}$$

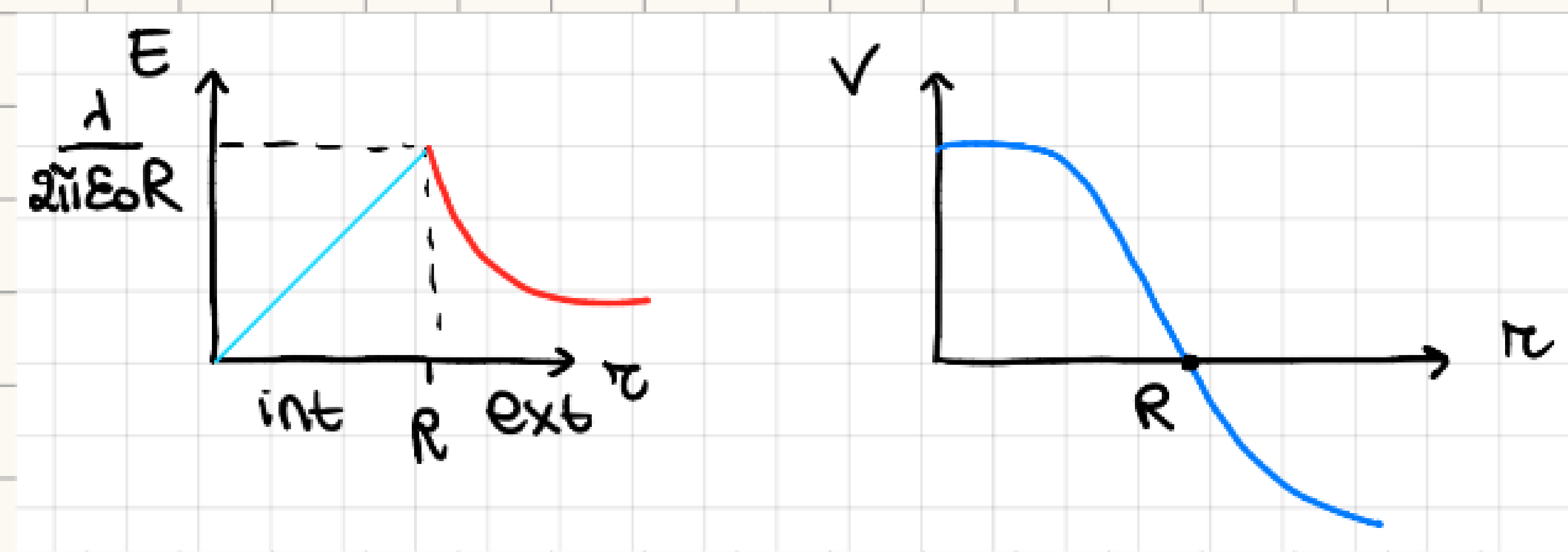
$$q = \int_V \rho\, dV = \rho\int_V dV = \rho\,\overbrace{\pi R^2 h}^{V} \Rightarrow \text{ESTERNO } \boxed{E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}}$$

ALL'INTERNO, $\phi(\vec{E}) = 2\pi r h E = \frac{q'}{\varepsilon_0} \Rightarrow q' = \rho\pi r^2 h \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}}$

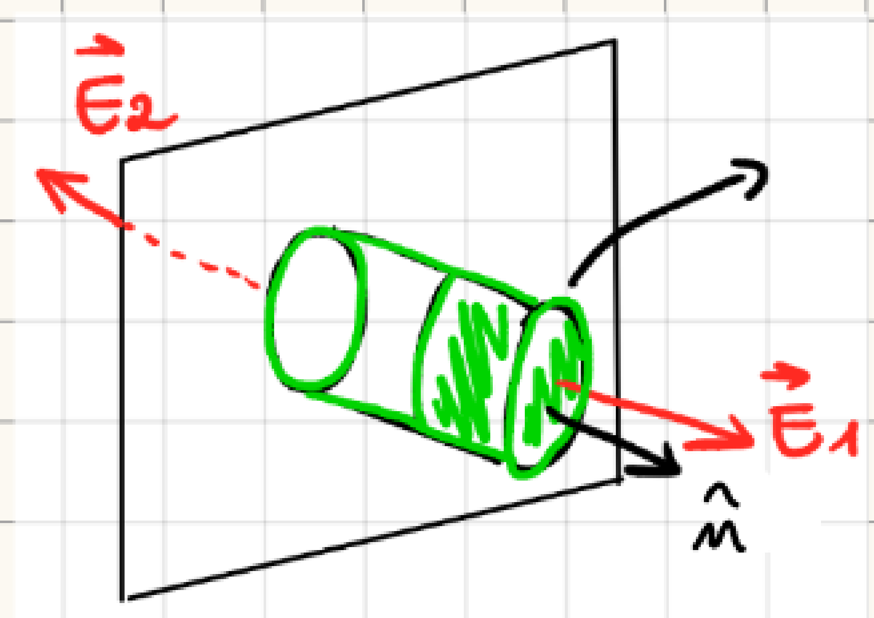
LA D.D.P. TRA DUE QUALSIASI SUPERFICI EQUIPOTENZIALI É:

$$V(r_2)-V(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} E\,dr = (\lambda = \rho\pi R^2) = -\int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

E IN PARTICOLARE ALL'ESTERNO ($r \ge R$). $\boxed{V(r)-V(R) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ln\frac{r_2}{r_1}}$



4) Piano identificato uniformemente carico



SCEGLIAMO UNA SCATOLA CILINDRICA CON LE BASI DI AREA Σ E PARALLELE AL PIANO COSICCHÉ IL FLUSSO ATTRAVERSO LE DUE BASI É $\boxed{2EA}$, MENTRE QUELLO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE LATERALE È NULLO PERCHÉ $\hat{u}_n \perp \vec{E}$.

$$\phi(\vec{E}) = 2EA \overset{\text{GAUSS}}{=} \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

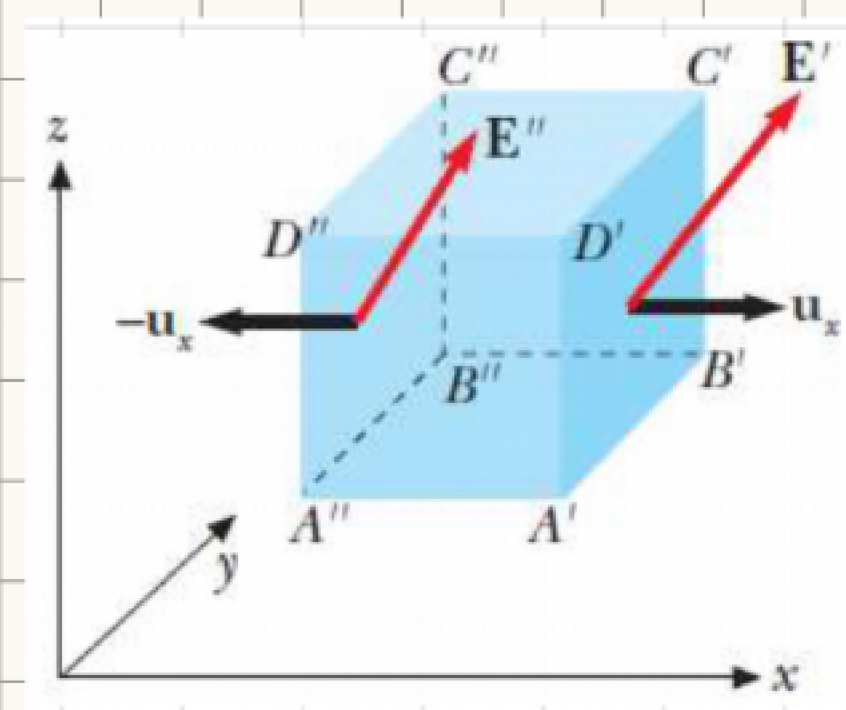
$\boxed{\vec{E}_1 = \vec{E}(x>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_x}$ PARALLELO E CONCORDE AD x.

$\boxed{\vec{E}_2 = \vec{E}(x<0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_x}$ VERSO OPPOSTO

$\boxed{\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_x + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{u}_x}$ DISCONTINUITÀ DI $\vec{E}$ NEL PASSAGGIO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE CARICA.

$$\boxed{V(x_2)-V(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} E\,dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2-x_1)}$$

Legge di Gauss in forma differenziale



CONSIDERIAMO UN CUBO CON SPIGOLI dx, dy, dz PARALLELI AGLI ASSI, VOLUME $dV = dx\,dy\,dz$ CHE CONTIENE LA CARICA $dq = \rho(x,y,z)\,dV$.

CALCOLIAMO IL FLUSSO DI $\vec{E}'$ ATTRAVERSO LA FACCIA PERPENDICOLARE ALL'ASSE x CON VERSORE NORMALE $\hat{u}_x$.

$$\vec{E}'\cdot\hat{n} = \vec{E}'\cdot\hat{u}_x\,dy\,dz = E'_x\,dy\,dz$$

DOVE E'_x É LA COMPONENTE LUNGO x DI $\vec{E}' = \vec{E}\left(\frac{x+dx}{2}, y, z\right)$

CALCOLIAMOLO ATTRAVERSO LA FACCIA PERPENDICOLARE ALL'ASSE x CON VERSORE NORMALE $-\hat{u}_x$

$$\vec{E}''\cdot\hat{u}_n = \vec{E}''\cdot(-\hat{u}_x)\,dy\,dz = E''_x\,dy\,dz$$

DOVE E''_x É LA COMPONENTE LUNGO x DI $\vec{E}'' = \vec{E}\left(\frac{x-dx}{2}, y, z\right)$

SCRIVIAMO QUINDI LO SVILUPPO $(E'_x - E''_x)\,dy\,dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$

CONSIDERANDO ANCHE LE ALTRE FACCE SI HA COMPLESSIVAMENTE IL FLUSSO:

$$d\phi(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dV.$$

UTILIZZANDO LA LEGGE DI GAUSS ABBIAMO QUINDI:

$$d\phi(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\, dV}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y, z)$$

IL PRIMO TERMINE RAPPRESENTA LA DIVERGENZA DEL CAMPO $\vec{E}$ E SI SCRIVE:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \text{div}\, \vec{E}}$$

E LA FORMA DIFFERENZIALE DELLA LEGGE DI GAUSS È $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

CONSIDERIAMO UN VOLUME FINITO V DELIMITATO DALLA SUPERFICIE A E DIVIDIAMOLO IN CUBETTI INFINITESIMI dV DELIMITATI DALLA SUPERFICIE dA A CUI APPLICHIAMO LA FORMULA:

$$\underbrace{d\phi(\vec{E})} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV}$$

SOMMANDO, I FLUSSI ATTRAVERSO LE SUPERFICI INTERNE AL VOLUME SI ELIDONO, RIMANE QUINDI SOLO LA SUPERFICIE A.

LA SOMMA MI DÀ L'INTEGRALE ESTESO AL VOLUME V

QUINDI SI SCRIVE IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA $\boxed{\phi(\vec{E}) = \oint_A \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV}$

Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica

$$\oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\boxed{\oint_A \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

CONSIDERANDO CHE $\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = -\vec{\nabla}^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ EQUAZIONE DI POISSON

NELLO SPAZIO VUOTO, QUESTA DIVENTA

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$ EQUAZIONE DI LAPLACE