Logica proposizionale

Linguaggio comune

Nel linguaggio comune si utilizzano spesso frasi imprecise o ambigue

Esempio

Un americano muore di melanoma ogni ora

- Assurdo: significa che c'è un americano (sfortunato) che ogni ora muore di melanoma
- Corretta: Ogni ora, un americano muore di melanoma

Esempio

L'uomo vedeva la donna con il binocolo

- Ambigua: chi ha il binocolo?

Linguaggio matematico

Il linguaggio matematico richiede certezze nelle affermazioni

Il linguaggio matematico richiede soprattutto che sia possibile determinare se una affermazione è vera o falsa

Linguaggio matematico

Dire quale delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false

- 2 è un numero primo
- non ci sono numeri primi al di fuori di 2
- quando piove apro l’ombrello

Proposizione

Una **proposizione** è una frase che dichiara un fatto e che può essere vera (T) o può essere falsa (F) ma non può essere entrambe

Esempi:

- Come stai?
  - Una domanda non una proposizione
- x+5 =3
  - x non è specificato => non è né T né F
- 2 è un numero primo
  - T
- Lei ha molto talento
  - Lei non è specificato => non è né T né F
- Ci sono altre forme di vita su altri pianeti dell'universo
  - Può essere T o F

Proposizioni

Le seguenti frasi <u>NON</u> sono proposizioni.

- Il tuo cinismo mi addolora.
  - Esprime un sentimento
- Toccare ferro porta fortuna
  - é una credenza
- Hai superato l'esame per la patente guida?
  - è una domanda
- Correre in bicicletta mi diverte molto.
  - Esprime una sensazione
- Smettila d’essere maleducato!
  - è un ordine
- Come fa freddo oggi!
  - è un’esclamazione

Proposizioni composte

Una proposizione più complessa può essere costruita attraverso proposizioni elementari connesse attraverso connettivi logici

Esempi:

- Proposizione A: Fuori piove
- Proposizione B: Vedremo un film
- Una nuova proposizione composta:
  - Se fuori piove allora vedremo un film

Proposizioni composte

Una proposizione più complessa può essere costruita attraverso proposizioni elementari connesse attraverso connetivi logici

- Connettivi logici
  - Negazione
  - Congiunzione
  - Disgiunzione
  - Or esclusivo
  - Implicazione
  - Bicondizione (o Equivalenza)

Negazione

Sia p una proposizione. La frase “non è vero che p” è un’altra proposizione, chiamata la **negazione di p**.
La negazione di p è denotata con ¬p e si legge non p.

Esempi:

- Salerno è una città della Campania
  - Non è vero che Salerno è una città della Campania
  - Salerno non è una città della Campania
- 2+5 ≠ 3
- 10 non è un numero primo
- Non è vero che l’autobus 31 passa ogni 10 minuti

Negazione

Neghiamo le seguenti proposizioni:

- Oggi piove
  - Oggi non piove
- 2 è un numero primo
  - 2 non è un numero primo
- L'auto di Giovanni ha almeno tre anni di vita
  - Non è vero che l'auto di Giovanni ha almeno tre anni di vita
  - L'auto di Giovanni non ha almeno tre anni di vita
  - L'auto di Giovanni ha meno di tre anni di vita

Negazione

Il valore della negazione di p, cioè di ¬p, è l'opposto del valore di p

p	**¬p**
T	F
F	T

Tabella di verità: per ciascuno dei possibili valori di p associa il corrispondente valore di ¬p

Congiunzione

Siano p e q proposizioni. La frase “p e q” è una proposizione detta **congiunzione di p e q**.
La congiunzione di p e q è denotata con $p \wedge q$.

$p \wedge q$ è vera se entrambe p e q sono vere, altrimenti è falsa.

Esempi:

- Salerno è una città della Campania e 5+2=8.
- Oggi piove e $2+5 \neq 3$.
- 10 è un numero primo e 5+2=7.
- Oggi piove e l’autobus 31 passa ogni 10 minuti.

Congiunzione: tabella di verità

Il valore della congiunzione $p \wedge q$ è vero se entrambe p e q sono vere, altrimenti è falso

p	**q**	$\mathbf{p \wedge q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Il numero delle righe è uguale al numero di tutte le possibili combinazioni di p e q

Disgiunzione

Siano p e q proposizioni. La frase "p o q" è detta **disgiunzione di p e q**.
La disgiunzione di p e q è denotata con $p \vee q$.

$p \vee q$ è falsa se entrambe p e q sono false, altrimenti è vera.

Esempi:

- Salerno è una città della Campania o 5+2=8.
- Oggi piove o $2+5 \neq 3$.
- 10 è un numero primo o 5+2=7.
- Oggi piove o l'autobus 31 passa ogni 10 minuti.

Disgiunzione: tabella di verità

Il valore della disgiunzione $p \vee q$ è vero se o p o q o entrambe sono vere

p	**q**	**p ∨ q**
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Disgiunzione esclusiva
(Or esclusivo)

Siano p e q proposizioni.
L'**or esclusivo di p e q** è denotato con $p \oplus q$.
$p \oplus q$ è vero quando esattamente uno tra p e q sono veri, altrimenti è falso.

La disgiunzione esclusiva traduce lo "aut" latino

Esempio:

- Nel menù a prezzo fisso di un ristorante
  - Frutta o formaggio

Or esclusivo: tabella di verità

Il valore dell' or esclusivo p $\oplus$ q è vero se esattamente una tra p e q è vera

p	**q**	**p $\oplus$ q**
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Implicazione

Siano p e q proposizioni. La proposizione “p implica q” è chiamata implicazione.
Essa è denotata con $p \rightarrow q$ (talvolta anche con $p \Rightarrow q$)
$p \rightarrow q$ è falsa quando p è vera e q è falsa, altrimenti è vera.

p è chiamata ipotesi e q è chiamata conclusione.

La proposizione $p \rightarrow q$ può essere letta in molti modi equivalenti:

- se p allora q
- p solo se q
- p è sufficiente per q
- q è necessaria per p
- q ogniqualvolta p

condizione sufficiente $\rightarrow$ condizione necessaria

Implicazione: tabella di verità

Il valore dell'implicazione $p \rightarrow q$ è falsa solamente se la verità di p implica la falsità di q

p	**q**	$\mathbf{p \rightarrow q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Implicazione

Il valore dell'implicazione $p \rightarrow q$ è falsa solamente se la verità di p implica la falsità di q

Esempio:

- Se ho la febbre allora sono ammalato
  - Consideriamo tutte le situazioni che si possono presentare
    - Se ho la febbre allora sono ammalato
    - Se ho la febbre allora non sono ammalato
    - Se non ho la febbre allora sono ammalato
    - Se non ho la febbre allora non sono ammalato

Implicazione

Il valore dell'implicazione $p \rightarrow q$ è falsa solamente se la verità di p implica la falsità di q

Esempio:

- Se ho la febbre allora sono ammalato
  - Consideriamo tutte le situazioni che si possono presentare
    - Se ho la febbre allora sono ammalato (si può verificare)
    - Se ho la febbre allora non sono ammalato (non si può verificare)
    - Se non ho la febbre allora sono ammalato (si può verificare)
    - Se non ho la febbre allora non sono ammalato (si può verificare)

Implicazione

Il valore dell'implicazione $p \rightarrow q$ è falsa solamente
se la verità di p implica la falsità di q

Esempio:

- Supponete che abbia estratto una carta da un mazzo e vi dica:

  Se è una carta di cuori allora è una regina

  - In quali casi ho mentito?
    - Se è una carta di cuori ed è una regina
    - Se è una carta di cuori ed è un re
    - Se è una carta di picche ed è una regina
    - Se è una carta di picche ed è un re

Implicazione

Il valore dell'implicazione $p \rightarrow q$ è falsa solamente se la verità di p implica la falsità di q

Esempio:

- Supponete che abbia estratto una carta da un mazzo e vi dica:
  Se è una carta di cuori allora è una regina
  - In quali casi ho mentito?
    - Se è una carta di cuori ed è una regina
    - Se è una carta di cuori ed è un re
    - Se è una carta di picche ed è una regina
    - Se è una carta di picche ed è un re

Implicazione

NOTA:
L'implicazione $p \rightarrow q$ non presuppone vi sia una qualche relazione tra p e q

Esempio:

- Se Giulio Cesare è morto allora 2 • 3 = 6
  - Giulio Cesare è morto T
  - 2 • 3 = 6 T
    * Se T allora T
    * T

Implicazione

Il valore dell'implicazione $p \rightarrow q$ è falsa solamente se la verità di p implica la falsità di q

Esempio:

- Se la Salernitana vince lo scudetto nel 2013 allora 2 è un numero primo
  - Quale è il valore di verità della proposizione ?
  - p = la Salernitana vince lo scudetto nel 2013
  - q = 2 è un numero primo
    - Se F allora T ????
    - T

Proposizioni condizionali derivanti dal implicazione

- **L'inverso** di $p \rightarrow q$ è $q \rightarrow p$
- **L'opposto** di $p \rightarrow q$ è $\neg p \rightarrow \neg q$
- **Il contronominale** di $p \rightarrow q$ è $\neg q \rightarrow \neg p$

Proposizioni condizionali derivanti dal implicazione

- **L'inverso** di $p \to q$ è $q \to p$

Esempio:

Se nevica allora le auto procedono lentamente.

- p = nevica q = le auto procedono lentamente
  - * $p \to q$

- L'inverso: Se le auto procedono lentamente allora nevica
  - * $q \to p$

p	**q**	$\mathbf{p \to q}$	$\mathbf{q \to p}$
T	F	F	T

Proposizioni condizionali derivanti dal implicazione

- **L'inverso** di $p \rightarrow q$ è $q \rightarrow p$

Determinare la tabella di verità di $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$

p	**q**	$\mathbf{p \rightarrow q}$	$\mathbf{q \rightarrow p}$

Proposizioni condizionali derivanti dal implicazione

- **L'inverso** di $p \rightarrow q$ è $q \rightarrow p$

Determinare la tabella di verità di $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$

p	**q**	$\mathbf{p \rightarrow q}$	$\mathbf{q \rightarrow p}$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

Proposizioni condizionali derivanti dal implicazione

- **L'opposto** di $p \rightarrow q$ è $\neg p \rightarrow \neg q$

Esempio:

Se nevica allora le auto procedono lentamente.

- p = nevica q = le auto procedono lentamente
  - $p \rightarrow q$

- L'opposto: Se non nevica allora le auto procedono velocemente
  - $\neg p \rightarrow \neg q$

p	**q**	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$
T	F	F	F	T	T

Proposizioni condizionali derivanti dal implicazione

- **L'opposto** di $p \rightarrow q$ è $\neg p \rightarrow \neg q$

Determinare la tabella di verità di $p \rightarrow q$ è $\neg p \rightarrow \neg q$

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$\neg p$**	**$\neg q$**	**$\neg p \rightarrow \neg q$**

Proposizioni condizionali derivanti dal implicazione

- **L'opposto** di $p \rightarrow q$ è $\neg p \rightarrow \neg q$

Determinare la tabella di verità di $p \rightarrow q$ è $\neg p \rightarrow \neg q$

p	**q**	$\mathbf{p \rightarrow q}$	$\mathbf{\neg p}$	$\mathbf{\neg q}$	$\mathbf{\neg p \rightarrow \neg q}$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Proposizioni condizionali derivanti dal implicazione

- **Il contronominale** di $p \rightarrow q$ è $\neg q \rightarrow \neg p$

Esempio:

Se nevica allora le auto procedono lentamente.

- p = nevica q = le auto procedono lentamente
  - $p \rightarrow q$

- Il contronominale: Se le auto procedono velocemente allora non nevica
  - $\neg q \rightarrow \neg p$

Proposizioni condizionali derivanti dal implicazione

- **Il contronominale** di $p \rightarrow q$

$\neg q \rightarrow \neg p$ ha gli stessi valori di verità di $p \rightarrow q$

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$\neg q$**	**$\neg p$**	**$\neg q \rightarrow \neg p$**

Proposizioni condizionali derivanti dal implicazione

- **Il contronominale** di $p \rightarrow q$

$\neg q \rightarrow \neg p$ ha gli stessi valori di verità di $p \rightarrow q$

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$\neg q$**	**$\neg p$**	**$\neg q \rightarrow \neg p$**
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Bicondizione (o equivalenza)

Siano p e q proposizioni. La proposizione "p se e solo se q" è chiamata bicondizione (o equivalenza).
Essa è denotata con $p \leftrightarrow q$ (talvolta anche con p <=> q)
$p \leftrightarrow q$ è vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità, altrimenti è falsa.

La proposizione $p \leftrightarrow q$ può essere letta in molti modi equivalenti:

- Se p allora q e viceversa
- p iff q
- p è necessaria e sufficiente per q

Bicondizione (o equivalenza)

Il valore dell'equivalenza $p \leftrightarrow q$ è vera solamente se i valori di verità di p e q coincidono

Esempio:

- Puoi prendere l'aereo se e solo se hai comprato il biglietto
  - Vera se
    * Sono entrambe vere oppure entrambe false
      - Se puoi prendere l'aereo e hai comprato il biglietto
      - Se non puoi prendere l'aereo e non hai comprato il biglietto
  - Falsa se
    * Hanno valori opposti
      - Se puoi prendere l'aereo e non hai comprato il biglietto
      - Se non puoi prendere l'aereo e hai comprato il biglietto

Bicondizione (o equivalenza):

tabella di verità

Il valore dell'implicazione $p \leftrightarrow q$ è vera solamente se i valori di verità di p e q coincidono

p	**q**	$\mathbf{p \leftrightarrow q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Bicondizione (o equivalenza):

tabella di verità

$p \leftrightarrow q$ ha gli stessi valori di verità di $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p \rightarrow q}$	$\mathbf{q \rightarrow p}$	$\mathbf{p \leftrightarrow q}$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Esempi

p = 2 è un numero primo = T

q = 6 è un numero primo = F

* $\neg p$ =
* $\neg q$ =
* $p \wedge q$ =
* $p \wedge \neg q$ =
* $p \vee q$ =
* $p \oplus q$ =
* $p \rightarrow q$ =
* $q \rightarrow p$ =
* $p \leftrightarrow q$ =

Esempi

p = 2 è un numero primo = T

q = 6 è un numero primo = F

* $\neg p = F$
* $\neg q = T$
* $p \wedge q = F$
* $p \wedge \neg q = T$
* $p \vee q = T$
* $p \oplus q = T$
* $p \rightarrow q = F$
* $q \rightarrow p = T$
* $p \leftrightarrow q = F$

Costruire una tabella di verità per proposizioni composte

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	**q**	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

Costruire una tabella di verità per proposizioni composte

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

proposizioni elementari

Costruire una tabella di verità per proposizioni composte

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

proposizioni composte ausiliarie

Costruire una tabella di verità per proposizioni composte

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	**q**	**¬p**	**$p \rightarrow q$**	**$\neg p \leftrightarrow q$**	**$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$**
T	T	F			
T	F	F			
F	T	T			
F	F	T			

Costruire una tabella di verità per proposizioni composte

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \land (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \land (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	F	T		
T	F	F	F		
F	T	T	T		
F	F	T	T		

Costruire una tabella di verità per proposizioni composte

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	**q**	**¬p**	**$p \rightarrow q$**	**$\neg p \leftrightarrow q$**	**$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$**
T	T	F	T	F	
T	F	F	F	T	
F	T	T	T	T	
F	F	T	T	F	

Costruire una tabella di verità per proposizioni composte

Esempio

- Consideriamo l'espressione $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F