Иван Проданов
Николай Хаджииванов
Иван Чобанов

Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане

Функции на една променлива

Второ стереотипно издание

София, 1992

„Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане“ съдържа упражнения върху множества, индукция, граници, непрекъснатост, производни, безкрайни редове и произведения, неопределени и определени интеграли на функции на една независима променлива.

Сборникът е допълнение към курса по диференциално и интегрално смятане на проф. Я. Тагамлицки, но е построен по начин, който позволява да се използува и самостоятелно. Учебното съдържание в него е съобразено с програмата по анализ за студентите от Факултета по математика и информатика и от Физическия факултет на Софийския университет „Св. Климент Охридски“, но може да се използува и при обучението на студенти от други висши учебни заведения в страната, както и за самообразование.

©
Иван Рачев Проданов
Николай Георгиев Хаджииванов
Иван Георгиев Чобанов
c/o Jusautor, 1976, 1991

Съдържание

Предговор към първото издание 7

Първа глава

Множества и изображения

§ 1. Включване и равенство между множества 11
§ 2. Обединение на множества 11
§ 3. Сечение на множества 12
§ 4. Разлика на множества 13
§ 5. Изображения 13
§ 6. Декартово произведение на множества 15
§ 7. Обратни изображения 16
§ 8. Равномощни множества 18
§ 9. Изброими множества 19
§ 10. Равномощни множества (продължение) 20
§ 11. Релации 21
§ 12. Релации за еквивалентност 23

Втора глава

Математическа индукция

§ 1. Елементарни тъждества 25
§ 2. Геометрична прогресия 27
§ 3. Принцип за сравняване на коефициентите 27
§ 4. Биномни коефициенти 28
§ 5. Тригонометрични тъждества 29
§ 6. Неравенства 32
§ 7. Сумиращи функции 33

Трета глава

Принцип за непрекъснатост

§ 1. Супремуми и инфимуми 35
§ 2. Пресмятане на супремуми и инфимуми 36
§ 3. Отворени множества върху числовата права 40
§ 4. Свързани множества върху числовата права 40

Четвърта глава

Безкрайни редици

§ 1. Кофинитни множества 42
§ 2. Граница на редица 44
§ 3. Редици, които дивергират към ∞ 45
§ 4. Граници на рационални функции на n 46
§ 5. Граници с q^n 47
§ 6. Ограничени редици 48
§ 7. Граници на ирационални функции на n 48
§ 8. Граници на рационални функции на a_n 49
§ 9. Граници на ирационални функции на a_n 50

§ 10. Сходимост и неравенства 50
§ 11. Монотонни редици 53
§ 12. Числото e 53
§ 13. Функцията e^x 54
§ 14. Функцията $\ln x$ 55
§ 15. Някои приложения на свойствата на e^x и $\ln x$ 57
§ 16. Константа на Ойлер 58
§ 17. Сходимост на итерационни редици 58
§ 18. Линейни рекурентни зависимости 61
§ 19. Двойни итерации 62
§ 20. Критерий на Коши за сходимост на редица 63
§ 21. Подредици и точки на сгъстяване 63
§ 22. Лимитиране със средно аритметични 65
§ 23. Теорема на Щолц 67
§ 24. Гъсти множества в $\mathbf{R}$ 68
§ 25. Затворени множества в $\mathbf{R}$ 68
§ 26. Компактни множества в $\mathbf{R}$ 69

Пета глава
Граници на функции

§ 1. Граница на функция, когато аргументът клони към крайна граница 70
§ 2. Граници на някои алгебрични функции, когато аргументът клони към крайна граница 73
§ 3. Някои приложения на равенството $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 74
§ 4. Апроксимация на $\sin x$ и $\cos x$ с полиноми 76
§ 5. Апроксимация на показателната функция с полиноми 78
§ 6. Граници на функции при неограничено нарастване на аргумента . 78
§ 7. Сравняване растенето на функциите a^x, x^a и $\ln x$ 80
§ 8. Някои приложения на равенството $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 81
§ 9. Някои приложения на равенството $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ 83
§ 10. Някои приложения на равенството $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 85
§ 11. Някои приложения на равенството $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$ 85
§ 12. Пресмятане на някои граници от вида $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right)$ 87
§ 13. Лява и дясна граница 88

Шеста глава
Непрекъснати функции

§ 1. Дефиниция на непрекъсната функция 90
§ 2. Множество на стойностите на непрекъсната функция 94
§ 3. Обратни кръгови функции 95
§ 4. Полиноми на Чебишов 99
§ 5. Хиперболични функции и обратните им 100
§ 6. Най-голяма и най-малка стойност на непрекъсната функция 102

§ 7. Равномерна непрекъснатост 103
§ 8. Функционални уравнения 104
§ 9. Осцилация на функция 105
§ 10. Множество на точките на непрекъснатост на една функция 106

Седма глава
Производни

§ 1. Пресмятане на производни 108
§ 2. n-ти производни 115
§ 3. Класически полиноми 119
§ 4. Понятие за линеен диференциален оператор 120
§ 5. Диференцируемост 121
§ 6. Основни теореми за средните стойности 123
§ 7. Теореми на Лопитал 125
§ 8. Критерий за константност на функция 128
§ 9. Някои елементарни диференциални уравнения 129
§ 10. Критерий за монотонност 131
§ 11. Локални екстремуми 136
§ 12. Изпъкнали и вдлъбнати функции 138
§ 13. Логаритмична изпъкналост 141
§ 14. Втора производна на Шварц 142
§ 15. Формула на Тейлър 143
§ 16. Нули 145
§ 17. Общи теореми за средни стойности 147
§ 18. Изследване на графики на функции 148
§ 19. Изследване на криви, зададени параметрично 151
§ 20. Изследване на криви в полярни координати 153

Осма глава
Безкрайни редове

§ 1. Сходящи и разходящи редове 156
§ 2. Принцип за сравняване на редове 158
§ 3. Критерий на Даламбер 159
§ 4. Критерий на Коши 160
§ 5. Критерий на Раабе — Дюамел 161
§ 6. Редове с намаляваща редица на членовете 164
§ 7. Критерии на Кумер, Бертран и Гаус 165
§ 8. Някои приложения на неравенството на Хьолдер 166
§ 9. Две представяния на положителните числа с редове 167
§ 10. Критерии на Лайбниц, Дирихле и Абел 168
§ 11. Абсолютно и условно сходящи редове 170
§ 12. Умножение на редове 172
§ 13. Вариации на тема хармоничен ред 173
§ 14. Едновременна сходимост на редове 174
§ 15. Безкрайни произведения 176
§ 16. Редици и редове от функции 181
§ 17. Степенни редове 182
§ 18. Равномерна сходимост 184
§ 19. Непрекъснатост на граничната функция 187
§ 20. Диференцируемост на граничната функция 188
§ 21. Редове на Тейлър 190
§ 22. Развития на някои елементарни функции в степенни редове 191
§ 23. Намиране на сумите на някои редове 195

Девета глава
Неопределен интеграл

§ 1. Таблица на основните интеграли 196
§ 2. Внасяне под диференциала 198
§ 3. Пресмятане на интеграли от вида $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{ax^2+bx+c}$ и $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ 202
§ 4. Интегриране по части 204
§ 5. Пресмятане на интеграли от вида $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$ и $\int P(x)\cos ax\,dx$, където $P(x)$ е полином 205
§ 6. Пресмятане на интегралите $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ 206
§ 7. Пресмятане на $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ и $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ и на някои техни аналози 208
§ 8. Пресмятане на някои интеграли от вида $\int R(x)\ln x\,dx$, $\int R(x)\operatorname{arctg} x\,dx$ и $\int R(x)\arcsin x\,dx$ 209
§ 9. Интегриране чрез субституции 210
§ 10. Интегриране на рационални функции 212
§ 11. Метод на Остроградски — Ермит 216
§ 12. Интеграли от някои специални рационални функции 218
§ 13. Интеграли от рационална функция на x и на радикали на една и съща дробно-линейна функция 220
§ 14. Биномен диференциал 221
§ 15. Субституции на Ойлер 222
§ 16. Интеграли от рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$ 224
§ 17. Някои интеграли, които не се изразяват с елементарни функции 227

Десета глава
Риманов интеграл

§ 1. Интегрируемост в риманов смисъл 230
§ 2. Основна теорема на интегралното смятане 235
§ 3. Интегриране по части при определените интеграли 240
§ 4. Интегриране чрез субституции при определените интеграли 243
§ 5. Неравенства и определени интеграли 247
§ 6. Пресмятане на граници чрез интеграли 251
§ 7. Интегриране на редици и редове от функции 253
§ 8. Дължини на равнинни дъги 255
§ 9. Лица на равнинни фигури 256

Решения

Първа глава 261
Втора глава 270
Трета глава 284
Четвърта глава 294
Пета глава 330
Шеста глава 343
Седма глава 366
Осма глава 413
Девета глава 449
Десета глава 492

Предговор
към първото издание

На светлата памет на К. Попов

Настоящият сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане на функции на една променлива съдържа с известни допълнения материала, който традиционно се изучава на упражненията по тази дисциплина от студентите по математика и физика в Университета. Макар и построен по начин, който позволява да се работи с него без използуване на друга литература, сборникът е илюстрация и допълнение към претърпелия вече пет издания превъзходен курс по анализ на проф. Я. Тагамлицки.

Тази и без това трудна задача се усложняваше от необходимостта студентът по математика, който обикновено започва следването си с недостатъчни по качество и количество елементарни математически навици, да бъде доведен бързо до работа на по-високо ниво. От друга страна, за да е по-малко непривлекателен, един сборник от задачи трябва да представлява свързано цяло, а не механичен сбор от отделни упражнения. Най-после за студентите от Университета настоящето помагало е първото у нас от този род. В противовес на всичко това на разположение бяха богатият опит и традицията на катедрата по диференциално и интегрално смятане.

Основните сведения за множества и изображения, с които изложението започва, бяха включени поради един странен анахронизъм в университетското ни математическо образование, което не предвижда като задължителен предмет теорията на множествата и принуждава отделните преподаватели да се опитват да жънат от тази ничия земя, без тя да е била засята.

Задачите върху математическата индукция целят да запълнят празнини от средното образование по математика — липсата на достатъчен опит за елементарни пресмятания, на достатъчен запас от конкретни математически факти, на достатъчно насочени наблюдения върху прости математически феномени. За съжаление необходимата енергия за преодоляване на потенциалния праг между средното и висшето образование по математика не може да се концентрира само в една глава и това наложи отпечатъка си върху цялата книга, която поради тази причина съдържа значителен брой чисто технически задачи.

Централната роля, която принципът за непрекъснатост играе

в математическия анализ, наложи той да бъде разгледан в отделна глава. Една математическа същност може да се представи с помощта на различни понятия. Такава метаморфоза на идеите се съзира например в онези задачи, при които смятането с граници е заменено със смятане с инфимуми и супремуми. Този аспект може би по-добре отразява генезиса на идеята за близост, отколкото формализиращото я понятие за граница.

Посветена на традиционни въпроси, главата за безкрайните редове между другото съдържа и едно системно въвеждане на експоненциалната и логаритмичната функция. Започнатото тук упражняване върху епсилониката продължава и в главите за граници на функции, непрекъснатост и производни.

Асимптотиката на елементарните функции е подробно разгледана в главите за граници на функции и производни; първата от тях съдържа и един своеобразен подход към степенните развития на синуса и косинуса и на експоненциалната функция, при който не се използват производни.

Достатъчно внимание е отделено и на толкова основното, колкото и зле усвоявано понятие за непрекъснатост на функция. Не са пренебрегнати безкрайните редове, техниката на диференцирането и интегрирането и приложенията им. Несобствените интеграли се разглеждат във втората част, за да се избегне противоестественото им отделяне от интеграли, които зависят от параметър и изискват функции на няколко променливи, както и от интеграла на Льобег.

Налице е и възможност за работа на различни нива, като се включват или изпускат отделни цикли или последните задачи от даден цикъл. Конструирането на тези цикли бе обект на особена грижа от страна на авторите, които се придържаха към известната максима: когато имаш да кажеш две неща, кажи ги едно след друго. Ето защо задачите от всеки цикъл трябва да се решават последователно по реда им в сборника. Разбира се, както самият читател, така и ръководителят на обучението имат възможност за избор в зависимост от необходимостта и личния си вкус.

Релефът на ландшафта е маркиран с помощта на топографските знаци ° и *, първият от които означава плитко, а вторият — дълбоко място. Пътуването се облекчава от екскурзионните указания — дефиниции, теореми и общи упътвания, дадени в петит.

Авторите благодарят на рецензентите проф. Я. Тагамлицки и доц. Д. Скордев за ценните им препоръки. Доц. Скордев се нагърби и с неблагодарната работа да провери всичките задачи. Доц. Лочев бе любезен да предложи някои интересни задачи. Р. Докова извърши значителна работа по окончателното оформяне на книгата. Авторите използват възможността да им изкажат тук своята благодарност.

Авторите

УСЛОВИЯ

Първа глава

Множества и изображения

§ 1. Включване и равенство между множества

Множествата (*съвкупностите*) тук се означават с главни латински или гръцки букви, като например $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots, \Sigma, \Omega, \ldots$, а *елементите* им — с малки латински или гръцки букви, като например $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots, \sigma, \omega, \ldots$ Когато a е елемент на A, се пише $a \in A$; когато a не е елемент на A, се пише $a \notin A$. В първия случай се казва още, че a *принадлежи* на A, а във втория — че a *не принадлежи* на A. Казва се още, че множеството A е *подмножество* на множеството B, и се пише $A \subset B$, когато всеки елемент на A принадлежи на B.

Задача 1°. От $A \subset B$ и $B \subset A$ следва $A = B$.

Множество, което не притежава нито един елемент, се нарича *празно* (*нулево*).

Задача 2°. Ако Ω е празно множество, а A е произволно множество, то $\Omega \subset A$.

Задача 3°. Ако Ω_1 и Ω_2 са празни множества, то $\Omega_1 = \Omega_2$.

Единственото съгласно зад. 3 празно множество се означава със символа $\varnothing$.

§ 2. Обединение на множества

Ако A е множество и на всеки елемент α на A е съпоставено единствено множество M_α, се казва, че е зададена *фамилия от множества* $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$, за която A е *множеството на индексите*.

Нека е дадена фамилия от множества $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. *Обединение* (*сума*) на тази фамилия се нарича съвкупността от елементите на всичките множества от фамилията и се означава с $\cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ или с $\bigcup\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$. Когато множествата от фамилията са краен брой $M_1, M_2, \ldots, M_n$, обединението се означава

понякога и по следните два начина: $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ или $\bigcup_{\nu=1}^{n} M_\nu$. Когато множеството A на индексите съвпада с множеството $\mathbf{N}$ на естествените числа, обединението се означава и с $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n \cup \ldots$ или с $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$. Очевидно $x \in \cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ тогава и само тогава, когато съществува елемент α на A, за който $x \in M_\alpha$.

Задача 4°. Да се намери обединението на множеството на всичките четни и на множеството на всичките нечетни числа.

Задача 5. За произволно цяло число s нека $M(s)$ е множеството на целите числа, които не се делят на s. Ако $s_1, s_2, \ldots, s_n$ са цели числа, а $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ е най-малкото им общо кратно, то $\bigcup_{\nu=1}^{n} M(s_\nu) = M(\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle)$.

Задача 6°. $A \cup B = A$ тогава и само тогава, когато $B \subset A$.

§ 3. Сечение на множества

Сечение на фамилията от множества $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ се нарича съвкупността от общите елементи на всичките множества от фамилията и се означава с $\cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ или с $\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha$. Когато множествата от фамилията са краен брой $M_1, M_2, \ldots, M_n$, сечението понякога се означава и по следните два начина: $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ или $\bigcap_{\nu=1}^{n} M_\nu$. Когато множеството A на индексите съвпада с множеството $\mathbf{N}$ на естествените числа, сечението се означава и с $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n \cap \ldots$ или с $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$. Очевидно $x \in \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ тогава и само тогава, когато за всеки елемент α на A е в сила $x \in M_\alpha$.

Задача 7°. Да се намери сечението на множеството на всичките цели числа, които се делят на 3, и на множеството на всичките цели числа, които се делят на 4.

Задача 8. За произволно цяло число s нека $M[s]$ е множеството на целите числа, които се делят на s. Ако $s_1, s_2, \ldots, s_n$ са цели числа, при означението от зад. 5 е в сила

$$\bigcap_{\nu=1}^{n} M[s_\nu] = M[\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle].$$

Задача 9°. $A \cap B = A$ тогава и само тогава, когато $A \subset B$.

Задача 10. Да се докажат равенствата:

а) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

б) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

г) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

д) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

е) $\cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \cap Y = \cup\{X_\alpha \cap Y \mid \alpha \in A\}$;

ж) $\cap\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \cup Y = \cap\{X_\alpha \cup Y \mid \alpha \in A\}$;

з) $(\cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}) \cap (\cup\{Y_\beta \mid \beta \in B\}) = \cup\{X_\alpha \cap Y_\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$;

и) $(\cap\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}) \cup (\cap\{Y_\beta \mid \beta \in B\}) = \cap\{X_\alpha \cup Y_\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$.

§ 4. Разлика на множества

Разлика на множествата A и B се нарича множеството на всичките елементи на A, които не принадлежат на B, и се означава с $A \setminus B$.

Задача 11°. Нека $s \in \mathbf{I}$, където $\mathbf{I}$ е множеството на целите числа. При означенията от зад. 5 и 8 да се докаже, че $\mathbf{I} \setminus M(s) = M[s]$.

Задача 12°. Да се докаже, че:

а) $A \setminus B = A$ тогава и само тогава, когато $A \cap B = \varnothing$;

б) $A \setminus B = \varnothing$ тогава и само тогава, когато $A \subset B$;

в) $A \subset B \cup C$ тогава и само тогава, когато $A \setminus B \subset C$.

Задача 13. Да се докаже, че:

а) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

б) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

в) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$;

г) $M \setminus \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\} = \cup\{M \setminus M_\alpha \mid \alpha \in A\}$;

д) $M \setminus \cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\} = \cap\{M \setminus M_\alpha \mid \alpha \in A\}$;

е) $\cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\} \setminus \cup\{N_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \cup\{M_\alpha \setminus N_\alpha \mid \alpha \in A\}$;

ж) $\cap\{M_\alpha \setminus N_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\} \setminus \cap\{N_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

§ 5. Изображения

Ако по някакъв начин на всеки елемент x на множеството X е съпоставен единствен елемент y на множеството Y, се казва, че е зададено *изображение* (*функция*) $f: X \to Y$ на множеството X в множеството Y. За да изразим, че

елементът y е съпоставен на елемента x, пишем $y = f(x)$; y се нарича *образ* на x чрез изображението f. Множеството X се нарича *дефиниционна област* на функцията f, а множеството Y — *област на стойности* на f.

Нека $A \subset X$. С $f(A)$ се означава множеството $\{f(x) | x \in A\}$ на всичките елементи $f(x)$ на Y, където x пробягва A. Множеството $f(A)$ се нарича *образ* на A чрез f. Очевидно $f(\varnothing) = \varnothing$.

Задача 14. Нека $f: X \to Y$ е изображение на X в Y и $M_\alpha \subset X$ за всяко $\alpha \in A$. Да се докаже, че:

а) $f(\cup\{M_\alpha | \alpha \in A\}) = \cup\{f(M_\alpha) | \alpha \in A\}$;

б) $f(\cap\{M_\alpha | \alpha \in A\}) \subset \cap\{f(M_\alpha) | \alpha \in A\}$.

Да се посочи пример, когато обратното на б) включване не е в сила.

Задача 15. Нека $f: X \to Y$ е изображение и M и N са подмножества на X. Да се докаже, че $f(M) \setminus f(N) \subset f(M \setminus N)$. Да се посочи пример, когато обратното включване не е в сила.

Нека $f: X \to Y$ е изображение и $B \subset Y$. Под $f^{-1}(B)$ се разбира множеството $\{x | x \in X, f(x) \in B\}$ на всички x от X, за които $f(x) \in B$. Множеството $f^{-1}(B)$ се нарича *прообраз* на множеството B чрез f. Очевидно $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Задача 16. Нека $f: X \to Y$ е изображение и $N_\alpha \subset Y$ за всяко α от A. Да се докаже, че:

а) $f^{-1}(\cup\{N_\alpha | \alpha \in A\}) = \cup\{f^{-1}(N_\alpha) | \alpha \in A\}$;

б) $f^{-1}(\cap\{N_\alpha | \alpha \in A\}) = \cap\{f^{-1}(N_\alpha) | \alpha \in A\}$.

Задача 17. Нека $f: X \to Y$ е изображение и M и N са подмножества на Y. Да се докаже, че $f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N)$.

Задача 18. Нека $f: X \to Y$ и $M \subset X$, $N \subset Y$. Да се докаже, че:

а) $f(M) \cap N \neq \varnothing$ тогава и само тогава, когато $M \cap f^{-1}(N) \neq \varnothing$;

б) $f^{-1}(f(M)) \supset M$; в) $f(f^{-1}(N)) \subset N$.

Да се посочат примери, когато обратните на б) и в) включвания не са в сила.

Задача 19°. Нека $\mathbf{Q}$ е множеството на рационалните числа и $x = \dfrac{p}{q}$, където p и q са цели числа, $q > 0$ и дробта $\dfrac{p}{q}$ е несъкратима. Изображението $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ е дефинирано чрез равенството $f(x) = \dfrac{1}{q}$. Да се намерят:

а) $f(0)$; б) $f(\mathbf{Q})$;

в) $f(\mathbf{I})$, където $\mathbf{I}$ е множеството на целите числа;

г) $f(\mathbf{N})$, където $\mathbf{N}$ е множеството на естествените числа;

д) $f(\mathbf{I} \setminus \mathbf{N})$; е) $f^{-1}(1)$;* ж) $f^{-1}(\mathbf{Q})$; з) $f^{-1}(2)$;

и) $f^{-1}\left(\mathbf{Q} \setminus \left\{\dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{I}\right\}\right)$.

Задача 20*. При $f: X \to X$ подмножеството M на X се нарича *стабилно* (*относно* f), когато $f(M) \subset M$, $f^{-1}(M) \subset M$. Да се докаже, че:

а) X и $\varnothing$ са стабилни;

б) сечението и обединението на произволна фамилия от стабилни множества са стабилни;

в) измежду стабилните множества, които съдържат дадено множество $A \subset X$, има едно най-малко (ще го наричаме *стабилна обвивка* на A и ще го означаваме с $\Phi(A)$);

г) измежду стабилните множества, които се съдържат в дадено множество $A \subset X$, има едно най-голямо (ще го наричаме *стабилно ядро* на A и ще го означаваме с $\varphi(A)$);

д) *допълнението* $X \setminus M$ на едно стабилно множество $M \subset X$ е стабилно;

е) за всяко $A \subset X$ са в сила равенствата $\Phi(A) = X \setminus \varphi(X \setminus A)$ и $\varphi(A) = X \setminus \Phi(X \setminus A)$;

ж) от $\Phi(x) \cap \Phi(y) \neq \varnothing$, където x и y са произволни елементи на X, следва $\Phi(x) = \Phi(y)$;

з) $\Phi(A) = \cup\{\Phi(x) | x \in A\}$.

§ 6. Декартово произведение на множества

За произволни множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ се означава множеството на всичките наредени n-орки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, където $a_\nu \in A_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. То се нарича *декартово произведение* на множествата A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ и понякога се означава и със символа $\prod\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu$. При $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ вместо $\prod\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu$ често се използва по-краткото означение A^n.

---

* Под $f^{-1}(1)$ трябва да се разбира $f^{-1}(\{1\})$, където $\{1\}$ означава множеството, чийто единствен елемент е 1. Множеството $\{a\}$, чийто единствен елемент е a, по-нататък често ще означаваме с a.

Изображението $\pi_\nu : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to A_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, дефинирано с равенството $\pi_\nu((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, се нарича *ν-та проекция* на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Задача 21°. Да се намерят:

а) $\pi_\nu(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$ $\quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$;

б) $\pi_\nu^{-1}(M)$, където $M \subset A_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Задача 22°. Да се докаже $M \subset \pi_1(M) \times \pi_2(M) \times \ldots \times \pi_n(M)$, където $M \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, и да се посочи пример, когато обратното включване не е в сила.

Задача 23. Да се докаже, че:

а) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

б) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$;

в) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

г) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;

д) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

е) $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$;

ж) ако $C \neq \varnothing$, то $A \subset B$ тогава и само тогава, когато $A \times C \subset B \times C$;

з) ако $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ и $A \times B \subset C \times D$, то $A \subset C$ и $B \subset D$;

и) $\left(\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu\right) \cap \left(\prod_{\nu=1}^{n} B_\nu\right) = \prod_{\nu=1}^{n} (A_\nu \cap B_\nu)$;

й) $\left(\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu\right) \cup \left(\prod_{\nu=1}^{n} B_\nu\right) \subset \prod_{\nu=1}^{n} (A_\nu \cup B_\nu)$. Да се посочи пример, когато обратното включване не е в сила.

Задача 24. Да се докаже, че включването $(A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2) \subset (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2)$ е в сила тогава и само тогава, когато е налице някой от следните случаи:

а) $A_1 \subset B_1$ и $A_2 \subset B_2$; б) $B_1 \subset A_1$ и $B_2 \subset A_2$;

в) $A_1 = B_1$; г) $A_2 = B_2$.

§ 7. Обратни изображения

Нека $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$. Изображението $h: X \to Z$, дефинирано с

равенството $h(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ се нарича *суперпозиция* (*композиция*) на изображенията f и g и се означава с $h = g \circ f$.

Задача 25. Ако $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ и $h: Z \to U$, то $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Задача 26. Ако за изображението $f: X \to X$ е в сила $f(X) = X$ и $f \circ f = f$, то f е *идентитетът* на X, т. е. от $x \in X$ следва $f(x) = x$.

Изображението $f: X \to Y$ се нарича *обратимо*, когато от $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Задача 27. Нека $\alpha \in \mathbf{R}$, където $\mathbf{R}$ е множеството на реалните числа, а $f: \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ (където $\mathbf{I}$ е множеството на целите числа) е дефинирано чрез $f(x, y) = \alpha x + y$ $(x, y \in \mathbf{I})$. Да се намерят всички $\alpha \in \mathbf{R}$, за които f е обратимо.

Задача 28. Да се докаже, че за изображението от зад. 27 е в сила $f(\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \neq \mathbf{R}$.

Едно изображение $g: f(X) \to X$ се нарича *обратно* на изображението $f: X \to Y$, когато $f \circ g$ е идентитетът на множеството $f(X)$, т. е. $f \circ g(y) = y$ за всеки елемент y на $f(X)$.

Задача 29°. Ако изображението $f: X \to Y$ е *константно*, т. е. $f(x_1) = f(x_2)$ за всички x_1 и x_2 от X, да се намерят всичките изображения, обратни на f.

Задача 30. Да се докаже, че:

а) Ако изображението g е обратно на f, то $g(y) \in f^{-1}(y)$ за всяко $y \in f(x)$.

б) Всяко обратно изображение е обратимо.

в) Всяко изображение $f: X \to Y$ притежава поне едно обратно. Нещо повече: за всяко $\xi \in X$ съществува обратно изображение g на f, за което $g(f(\xi)) = \xi$.

г) Изображението $f: X \to Y$ има точно две обратни изображения тогава и само тогава, когато съществува точно едно двуелементно подмножество $\{x_1, x_2\}$ на X, за което $f(x_1) = f(x_2)$.

д) Изображението f е обратимо тогава и само тогава, когато притежава единствено обратно g. В този случай $g(y) = f^{-1}(y)$ за всяко $y \in f(X)$.*

Задача 31. Ако изображението $f: X \to Y$ е обратимо, а $g: f(x) \to X$ е обратното му, то $g \circ f$ е идентитетът на X.

Задача 32. Изображението $f: X \to Y$ е обратимо тогава и само тогава, когато съществува изображение $h: f(X) \to X$, за което

* Поради тази причина обратното изображение на f обикновено се означава с f^{-1}.

$h \circ f$ е идентитетът на X. Когато това е така, h е обратното изображение на f.

Задача 33°. Ако изображението $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (където $\mathbf{R}$ е множеството на реалните числа) е дефинирано с $f(x) = ax$, където a е различно от нула реално число, да се докаже, че то е обратимо, и да се намери обратното му.

Задача 34°. Кога изображението $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, дефинирано с равенството $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, където a, b, c и d са реални числа, е обратимо? Когато f е обратимо, да се намери обратното му изображение.

Задача 35°. Да се докаже, че изображението $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирано с $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, е обратимо, и да се намери обратното му изображение.

Задача 36°. Да се докаже, че изображението $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, дефинирано с равенството $f(x, y) = \left(\dfrac{x}{1 + |x|}, \dfrac{y}{1 + |y|}\right)$ е обратимо, и да се намери обратното му изображение.

Задача 37*. Ако $f: X \to X$ е обратимо изображение и $A \subset X$, да се докаже, че

$$\Phi(A) = \ldots \cup f^{-1}(f^{-1}(A)) \cup f^{-1}(A) \cup A \cup f(A) \cup f(f(A)) \cup \ldots$$

(за дефиницията на $\Phi(A)$ вж. зад. 20).

§ 8. Равномощни множества

Нека X и Y са две множества. Когато съществува обратимо изображение $f: X \to Y$, за което $f(X) = Y$*, се казва, че множествата X и Y са *равномощни*, и се пише $X \sim Y$.

Задача 38°. Ако $X \sim Y$ и X е крайно множество, то и Y е крайно множество, а X и Y имат равен брой елементи.

Задача 39. Да се докаже, че:

а) $X \sim X$;

б) ако $X \sim Y$, то $Y \sim X$;

в) ако $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$.

С Y^X се означава множеството на всичките изображения от вида $f: X \to Y$.

---

* Ако $f: X \to Y$ и $f(X) = Y$, често се казва, че f е изображение на X върху Y.

Задача 40°. Ако A е крайно множество с a елемента, множеството B^A е равномощно с B^a.

Задача 41°. Ако A и B са крайни множества съответно с a и b елемента, множеството B^A има b^a елемента.

Задача 42. От $X \sim X_1$ и $Y \sim Y_1$ следва:

а) $X \times Y \sim X_1 \times Y_1$;

б) $Y^X \sim Y_1^{X_1}$.

Задача 43. Да се докаже, че $Z^{X \times Y} \sim (Z^X)^Y$.

Задача 44. Ако a и b са реални числа и $a < b$, отвореният интервал (a, b) е равномощен с множеството $\mathbf{R}$ на реалните числа.

Задача 45. Ако X е безкрайно множество и $x \in X$, то $X \sim X \setminus \{x\}$.

Задача 46°. Да се докаже, че $(0, 1) \sim [0, 1) \sim [0, 1] \sim (0, \infty) \sim (-\infty, 0] \sim (-\infty, \infty)$.

§ 9. Изброими множества

Едно множество X се нарича *изброимо*, когато е равномощно с множеството $\mathbf{N}$ на естествените числа.

Задача 47°. Да се докаже, че едно множество X е тогава и само тогава изброимо, когато елементите му могат да се подредят в безкрайна редица.

Задача 48. Всяко безкрайно множество съдържа изброимо подмножество.

Задача 49°. Множеството $\mathbf{I}$ на целите числа е изброимо.

Задача 50°. Множеството $\mathbf{I}^2$ на точките в равнината, чиито координати са цели числа, е изброимо.

Задача 51. Всяко безкрайно подмножество на изброимо множество е изброимо.

Задача 52°. Всяко безкрайно множество от непресичащи се един друг кръгове в равнината с радиуси, не по-малки от 1, е изброимо.

Задача 53°. Декартовото произведение на всеки две изброими множества е изброимо.

Задача 54. Декартовото произведение на краен брой изброими множества е изброимо.

Задача 55. Обединението на изброима фамилия от изброими множества е изброимо.

Задача 56°. Нека α е положително число. Всяко безкрайно множество от непресичащи се един друг кръгове в равнината с радиуси, не по-малки от α, е изброимо.

Задача 57. Всяко безкрайно множество от непресичащи се един друг кръгове в равнината е изброимо.

Задача 58. Всяко множество от непресичащи се два по два неизродени интервали върху правата е крайно или изброимо.

Задача 59°. Всяко безкрайно множество от непресичащи се еднакви букви T в равнината е изброимо.

Задача 60. Всяко безкрайно множество от непресичащи се (не непременно еднакви) букви T в равнината е изброимо.

Задача 61*. Множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа е изброимо.

Задача 62*. Множеството на всичките крайни подмножества на едно изброимо множество е изброимо.

Едно число a се нарича *алгебрично*, когато съществува такъв ненулев полином P с цели коефициенти, че $P(a) = 0$.

Задача 63*. Множеството на всичките алгебрични числа е изброимо (Кантор).

Задача 64*. Ако M е множество от положителни реални числа, за което съществува такава положителна константа l, че сумата от елементите на произволно крайно подмножество на M да не надминава l, то M е крайно или изброимо. Да се посочи пример на изброимо множество M и число l с горното свойство.

Задача 65°. Нека $f: X \to \mathbf{R}$ е функция, за която съществува такова число l, че за всяко крайно подмножество Y на X е в сила $\sum_{y \in Y} |f(y)| \leqq l$. Да се докаже, че множеството $\{x \mid x \in X, f(x) \neq 0\}$ е крайно или изброимо.

§ 10. Равномощни множества (продължение)

Едно множество M от непразни подмножества на множеството X се нарича *разбиване* на X, когато са изпълнени следните условия:

а) множествата на M не се пресичат две по две;

б) обединението на всичките множества на M съвпада с X, т.е. $\bigcup_{A \in M} A = X$.

Задача 66°. Да се докаже, че за всяко изображение $f: X \to Y$ множеството M на всичките подмножества на X от вида $f^{-1}(y)$, където y пробягва $f(X)$, е разбиване на X.

Задача 67°. Да се докаже, че за всяко изображение $f: X \to Y$ множеството на всички $\Phi(x)$ $(x \in X)$ е разбиване на X. (За дефиницията на $\Phi(x)$ вж. зад. 20.)

Задача 68°. Нека M е разбиване на X и $Y \subset X$. Да се докаже, че ако за всяко $A \in M$ е в сила $A \sim Y \cap A$, то $X \sim Y$.

Задача 69*. Ако $Y \subset X$ и изображението $f: X \to Y$ е *обратимо*, за всяко $x \in X$ е в сила $\Phi(x) \sim \Phi(x) \cap Y$.

Задача 70*. Ако изображението $f: X \to X$ е обратимо и $f(X) \subset Y \subset X$, то $X \sim Y$.

Задача 71*. Ако всяко от множествата X и Y е равномощно с подмножество на другото, множествата X и Y са равномощни (Кантор — Бернщайн).

Задача 72°. Ако множеството Y има поне два елемента, а множеството X е произволно, то X е равномощно с подмножество на Y^X.

Задача 73*. Ако множеството Y има поне два елемента, а множеството X е произволно, множествата X и Y^X не са равномощни (Кантор).

Задача 74*. Множеството $P(A)$ на всичките подмножества на дадено множество A не е равномощно с A (Кантор).

§ 11. Релации

Всяко подмножество R на X^2 се нарича *релация* в X. Когато $(x, y) \in R$, често се пише xRy и се казва, че x и y *се намират в релацията* R.

Така например множеството на всички двойки (x, x), където $x \in R$, е релация; понякога тя се нарича *равенство* в X или *диагонал* на X^2. Друг пример на релация е цялото множество X^2. За да посочим трети пример, да разгледаме множеството на всичките наредени двойки (x, y) от реални числа, за които $x < y$. Тази релация се нарича *наредба* в $\mathbf{R}$.

Една релация R се нарича *рефлексивна*, когато за всяко x от X е изпълнено условието xRx. Това означава, че множеството R съдържа диагонала Δ на X^2 (фиг. 1).

Задача 75°. Кои от посочените по-долу релации са рефлексивни и кои не са:

а) релацията равенство в X; б) релацията $<$ в $\mathbf{R}$;

в) релацията $\leqq$ в $\mathbf{R}$;

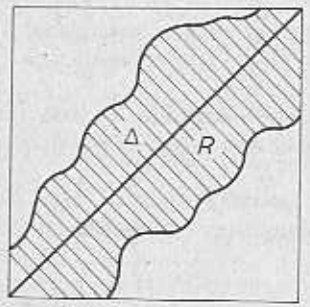
г) релацията *делимост* в $\mathbf{I}$, дефинирана по следния начин: казва се, че x *дели* y (y *се дели на* x), където x и y са цели числа, когато съществува цяло число z, за което $xz = y$;

д) релацията *успоредност* в множеството на всичките прави в равнината;

е) релацията *успоредност или съвпадане* на прави в равнината;

ж) релацията *включване* в множеството $X = P(Y)$ на всички подмножества на произволно множество Y, дефинирана по следния начин: ARB, когато $A \subset B$ $(A, B \subset Y)$;

з) релацията *сравнимост по модул* m ($m \in \mathbf{I}$) в множеството $\mathbf{I}$ на целите числа, дефинирана по следния начин: xRy точно когато $x - y$ се дели на m?



Фиг. 1

Задача 76°. Нека R е релация в X. Да се докаже, че релацията $R' = R \cup \Delta$, където Δ е диагоналът в X^2, е най-малката рефлексивна релация в X, която съдържа R.

Една релация R се нарича *симетрична*, ако от xRy следва yRx. Когато това е така, понякога се казва, че *множеството* $R \subset X^2$ *е симетрично спрямо диагонала на* X^2.

Задача 77°. Кои от релациите, посочени в зад. 75, са симетрични?

Задача 78°. Всяко сечение на симетрични релации в X е симетрична релация в X.

Задача 79. Нека R е релация в X. Измежду симетричните релации в X, които съдържат R, има една най-малка $S(R)$.

Задача 80°. Нека R е релация в X, а релацията S в X е дефинирана по следния начин: xSy, когато е в сила xRy или yRx. Да се докаже, че $S = S(R)$ (вж. зад. 79).

Една релация R в X се нарича *транзитивна* (*частична наредба в* X), когато от xRy и yRz следва xRz.

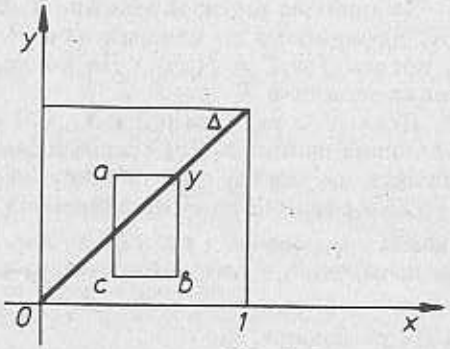
Задача 81°. Кои от релациите, посочени в зад. 75, са транзитивни?

Задача 82°. Сечение на транзитивни релации в X е транзитивна релация в X.

Задача 83. Нека R е релация в X. Измежду транзитивните

релации в X, които съдържат R, има една най-малка $T(R)$.

Задача 84. Нека R е релация в X. Да разгледаме релацията T, дефинирана по следния начин: xTy, когато съществува крайна



Фиг. 2

редица $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ от елементи на X, за която е в сила $x_{\nu-1}Rx_\nu$ за всяко $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Да се докаже, че $T = T(R)$ (вж. зад. 83).

Задача 85. Нека R е симетрична релация в X. Да се докаже, че $T(R)$ е също симетрична релация (вж. зад. 83).

Задача 86°. Да се докаже, че ако R е релация в интервала $[0, 1]$, то:

а) релацията R е рефлексивна тогава и само тогава, когато съдържа диагонала Δ на квадрата $[0, 1]^2$;

б) релацията R е симетрична тогава и само тогава, когато множеството R е симетрично спрямо диагонала Δ на $[0, 1]^2$;

в) релацията R е транзитивна тогава и само тогава, когато за всеки правоъгълник $aybc$ (фиг. 2) със страни, успоредни на страните на квадрата $[0, 1]^2$, от условията $y \in \Delta$, $a \in R$ и $b \in R$ винаги следва $c \in R$.

§ 12. Релации за еквивалентност

Една релация R в X се нарича *релация за еквивалентност* в X, когато е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Задача 87°. Кои от релациите, посочени в зад. 75, са релации за еквивалентност?

Задача 88°. Сечение на релации за еквивалентност в X е

релация за еквивалентност в X.

Задача 89. Нека R е релация в X. Измежду релациите за еквивалентност в X, които съдържат R, има една най-малка $E(R)$.

Задача 90. За произволна релация R в X е в сила равенството $E(R) = T(S(R \cup \Delta))$ (вж. зад. 89).

Задача 91°. За произволно изображение $f: X \to Y$ нека $E(f)$ е релацията в X, дефинирана по следния начин: $x_1 E(f) x_2$ тогава и само тогава, когато $f(x_1) = f(x_2)$. Да се докаже, че $E(f)$ е релация за еквивалентност в X.

Задача 92°. Нека M е разбиване на X, а R — релация в X, дефинирана по следния начин: $x_1 R x_2$ тогава и само тогава, когато x_1 и x_2 принадлежат на един и същ елемент на разбиването M. Да се докаже, че R е релация за еквивалентност в X.

Нека R е релация за еквивалентност в X и $x \in X$. *Клас на еквивалентност* спрямо релацията R, породен от елемента x, се нарича множеството $\pi(x) = \{y \mid yRx\}$.

Задача 93. Да се докаже, че:

а) множеството на всичките класове на еквивалентност спрямо една релация за еквивалентност R в X е разбиване на X;

б) релацията за еквивалентност, породена от това разбиване (вж. зад. 92), съвпада с R.

Множеството на всичките класове на еквивалентност в X спрямо една релация за еквивалентност R в X се нарича *фактормножество* на X спрямо R и се означава с $X/_R$. Изображението $\pi: X \to X/_R$, което на всяка точка x от X съпоставя класа на еквивалентност $\pi(x)$, на който тя принадлежи, се нарича *факторизображение* (*канонична проекция*).

Задача 94°. Релацията за еквивалентност, породена от факторизображението $\pi : X \to X/_R$ (зад. 91), съвпада с R.

Задача 95°. Нека R е релация в множеството $\mathbf{R}$ на реалните числа, дефинирана както следва: xRy тогава и само тогава, когато разликата $x - y$ е цяло число. Да се докаже, че:

а) R е релация за еквивалентност в $\mathbf{R}$;

б) класовете на еквивалентност са всевъзможните (безкрайни и в двете посоки) аритметични прогресии с разлика 1;

в) интервалът $[0, 1)$ съдържа точно по един елемент от всеки клас на еквивалентност спрямо R.

Задача 96. Нека $M \subset \mathbf{R}$, а R е релацията в $\mathbf{R}$, дефинирана по следния начин: xRy точно когато $x - y \in M$. Да се докаже, че за да бъде R релация за еквивалентност в $\mathbf{R}$, необходимо и достатъчно е M да притежава следните свойства:

а) $M \neq \varnothing$; б) от $x \in M$ да следва $-x \in M$;

в) от $x \in M$ и $y \in M$ да следва $x + y \in M$.

Втора глава

Математическа индукция

§ 1. Елементарни тъждества

Често верността на едно твърдение за всичките естествени числа се доказва с помощта на следния принцип.

Принцип на математическата индукция. *Нека редицата от твърдения*

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \tag{1}$$

притежава следните две свойства:

а) твърдението P_1 е вярно;

б) за всяко естествено n от верността на P_n следва верността на P_{n+1}.

Тогава всичките твърдения от редицата (1) са верни.

Задача 1. Да се докажат равенствата:

а) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

в) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$;

г) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$;

д) $1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = \dfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$;

е) $1^6 + 2^6 + \cdots + n^6 = \dfrac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$;

ж) $1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 = \dfrac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$.

Понякога сумата $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ се означава съкратено със символа $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$, а произведението $a_1 a_2 \ldots a_n$ — със символа $\prod\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$.

Задача 2°. Да се докажат равенствата:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(2\nu-1) = n^2$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

г) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu(\nu+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$;

д) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu(m^2-\nu^2) = \frac{1}{4}n(n+1)(2m^2-n^2-n)$;

е) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu!\,\nu = (n+1)!-1$.

Задача 3. Да се докажат равенствата:

а) $\prod\limits_{\nu=1}^{n}\cos\frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$ $(x \neq 2^n k\pi,\ k \in \mathbf{I})$;

б) $\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}\left(1+x^{2^\nu}\right) = \sum\limits_{\nu=0}^{2^n-1} x^\nu$.

Задача 4°. Да се докажат равенствата:

а) $\sum\limits_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu^2-1} = \frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{\nu^2+\nu-1}{(\nu+2)!} = \frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m) = \frac{1}{m+2} - n(n+1)\ldots(m+n+1)$;

г) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\right)$.

§ 2. Геометрична прогресия

Задача 5°. Да се докажат равенствата:

а) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} x^\nu = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $(n \in \mathbf{N},\ x \neq 1)$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu x^{\nu-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$ $(n \in \mathbf{N},\ x \neq 1)$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(a+(\nu-1)b)x^{\nu-1} = \frac{a-(a+(n-1)b)x^n}{1-x} + \frac{bx(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}$ $(n \in \mathbf{N},\ x \neq 1)$;

г) $\sum\limits_{\mu=0}^{2n} x^\mu \sum\limits_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu x^\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{2n} x^{2\nu}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Задача 6°. Да се докажат равенствата:

а) $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{\nu=1}^{n} a^{n-\nu}b^{\nu-1}$ $(n \in \mathbf{N})$;

б) $a^n + b^n = (a+b)\sum\limits_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+1}a^{n-\nu}b^{\nu-1}$ $(n=2m-1,\ m \in \mathbf{N})$.

§ 3. Принцип за сравняване на коефициентите

Задача 7. Ако P е полином от степен n $(n \in \mathbf{N})$, а a — реално число, да се докаже, че тогава и само тогава $P(a) = 0$, когато съществува полином Q от степен $n-1$, за който е в сила $P(x) = (x-a)Q(x)$ за всяко реално x.

Задача 8. Да се докаже, че никой полином от степен n $(n \in \mathbf{N})$ не може да се анулира за повече от n различни стойности на аргумента си.

Задача 9. Ако два полинома най-много от степен n $(n \in \mathbf{N})$ приемат равни стойности за поне $n+1$ различни стойности на аргумента, коефициентите им са съответно равни (п р и н ц и п з а с р а в н я в а н е н а к о е ф и ц и е н т и т е).

Задача 10°. Да се намерят всички двойки a, b от реални числа, за които равенството $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$ е в сила за всяко различно от 0 и -1 реално x.

Задача 11°. Да се намерят всички тройки a, b, c от реални числа, за които равенството $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ е в сила за всяко различно от 1 реално x.

§ 4. Биномни коефициенти

Полиномите на x:

$$\binom{x}{0} = 1,\ \binom{x}{1} = x,\ \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!},\ \ldots,\ \binom{x}{\nu} = \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!},\ \ldots$$

се наричат *биномни коефициенти*.

Задача 12°. Ако P е полином от степен n, за който $P(\nu) = 0$ за всяко $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $P(-1) = (-1)^n$, да се докаже, че $P(x) = \dbinom{x}{n}$ за всяко реално x.

Задача 13. Да се докаже, че за всяко x и всяко $n = 0, 1, 2, \ldots$ е в сила равенството

$$\binom{x}{n} + \binom{x}{n+1} = \binom{x+1}{n+1}.$$

Задача 14°. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu}{r} = \binom{n+1}{r+1}$;

б) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{x+\nu}{\nu} = \binom{x+1+n}{n}$ за всяко реално x.

Задача 15. Нека m и n са неотрицателни цели числа, а M е множество с m елемента. Да се докаже, че броят на n-елементните подмножества на M е $\dbinom{m}{n}$.

Задача 16*. Да се докаже равенството $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu}$ (биномна формула).

Задача 17. Да се докаже равенството $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{p} \binom{x}{\nu}\binom{y}{p-\nu} = \binom{x+y}{p}$, където x и y са произволни реални числа, а p е неотрицателно цяло число.

Задача 18°. Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}^2 = \binom{2n}{n}$.

Задача 19. Ако x е произволно реално число, а n — неотрицателно цяло число, да се докаже равенството

$$\sum_{\nu=0}^{2n} (-1)^{\nu} \binom{x}{\nu}\binom{x}{2n-\nu} = (-1)^n \binom{x}{n}.$$

Задача 20°. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} = 2^n$; б) Броят на всички подмножества на едно n-елементно множество е 2^n; в) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} = 0$.

Задача 21°. Да се докажат равенствата:

а) $1 + \dbinom{n}{2} + \dbinom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$; б) $\dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{3} + \dbinom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$.

§ 5. Тригонометрични тъждества

Задача 22*. Да се докаже равенството $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, където i е имагинерната единица, n — произволно цяло, а x — произволно реално число (формула на Моавър).

Задача 23. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$;

б) $\displaystyle\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

в) $\displaystyle\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

Задача 24. Да се докажат равенствата:

а) $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

б) $\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

в) $\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

г) $\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

Задача 25*. Да се докажат равенствата:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sin\nu x=\dfrac{\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\quad(n\in\mathbf{N},\ x\neq 2k\pi)$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\cos\nu x=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\quad(n\in\mathbf{N},\ x\neq 2k\pi)$;

в) $\sum\limits_{\nu=0}^{n}\sin(x+\nu y)=\sin\left(x+\frac{n}{2}y\right)\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}$;

г) $\sum\limits_{\nu=0}^{n}\cos(x+\nu y)=\cos\left(x+\frac{n}{2}y\right)\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}$;

д) $\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}p^{\nu}\sin\nu x=\dfrac{p\sin x-p^{n}\sin nx+p^{n+1}\sin(n-1)x}{1-2p\cos x+p^{2}}$;

е) $\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}p^{\nu}\cos\nu x=\dfrac{1-p\cos x-p^{n}\cos nx+p^{n+1}\cos(n-1)x}{1-2p\cos x+p^{2}}$.

Задача 26°. Да се докажат равенствата:

а) $\sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\sin(x+\nu y)=\sin\left(x+\frac{n}{2}(y+\pi)\right)\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}(y+\pi)}{\cos\frac{y}{2}}$;

б) $\sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\cos(x+\nu y)=\sin\left(x+\frac{2n+1}{2}y\right)\dfrac{\sin(n+1)y}{\cos\frac{y}{2}}$.

Задача 27. Да се докажат равенствата:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sin^{2}\nu x=\frac{n}{2}-\dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\cos^{2}\nu x=\frac{n}{2}+\dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$.

Задача 28*. Да се докажат равенствата:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu\sin\nu x=\dfrac{\sin(n+1)x}{4\sin^{2}\frac{x}{2}}-\dfrac{(n+1)\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu\cos\nu x=\dfrac{(n+1)\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1-\cos(n+1)x}{4\sin^{2}\frac{x}{2}}$.

Задача 29*. Да се докажат равенствата:

а) $\sin nx=n\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^{3}x$
$+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^{5}x-\cdots$;

б) $\cos nx=\cos^{n}x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^{2}x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^{4}x-\cdots$

Задача 30*. Да се докажат равенствата:

а) $\sin^{2n}x=\frac{1}{4^{n}}\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n-\nu}2\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x+\frac{1}{4^{n}}\binom{2n}{n}$;

б) $\cos^{2n} x = \frac{1}{4^n}\sum_{\nu=0}^{n-1} 2\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x + \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$;

в) $\sin^{2n-1} x = \frac{1}{4^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n-\nu-1}\binom{2n-1}{\nu}\sin(2n-2\nu-1)x$;

г) $\cos^{2n-1} x = \frac{1}{4^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{2n-1}{\nu}\cos(2n-2\nu-1)x$.

Задача 31. Да се докажат равенствата:

а) $\sum_{\nu=1}^{n} 4^\nu \sin^4 \frac{x}{2^\nu} = 4^n \sin^2 \frac{x}{2^n} - \sin^2 x$;

б) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{4^\nu \cos^2 \frac{x}{2^\nu}} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4^n \sin^2 \frac{x}{2^n}}$;

в) $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{2^\nu}\operatorname{tg}\frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - 2\operatorname{ctg} 2x$;

г) $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{4^\nu}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2^\nu} = \frac{4^{n+1}-1}{3.2^{2n-1}} + 4\operatorname{ctg}^2 2x - \frac{1}{4^n}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2^n}$.

§ 6. Неравенства

Задача 32*. Да се докаже неравенството $1 + nx \leqq (1+x)^n$ $(n \in \mathbf{N},\ -1 \leqq x)$ (Я. Бернули).

Задача 33. Да се докаже неравенството $(1+x)^n \leqq 2^{n-1}(1+x^n)$ $(n \in \mathbf{N},\ -1 \leqq x)$.

Задача 34. Да се докаже неравенството $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} < 3$ $(n \in \mathbf{N})$.

Задача 35°. Да се докаже неравенството $|\sin nx| \leqq n|\sin x|$ $(n \in \mathbf{N})$.

Задача 36°. Да се докажат неравенствата:

а) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \geqq \sqrt{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

б) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu} \geqq \frac{7}{12}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Задача 37*. Ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са естествени числа с $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, то:

а) $\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^3$; б) $2\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^3\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu^5 + x_\nu^7)$

с равенство само при $x_\nu = \nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Задача 38*. Ако $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ са реални числа, за които $a_1 = 0$, $a_{n+1}^2 = (1+a_n)^2$ за всяко естествено n, да се докаже, че $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq -\frac{n}{2}$.

§ 7. Сумиращи функции

Функцията F се нарича *сумираща* за функцията f, ако за всяко x е в сила равенството $f(x) = F(x+1) - F(x)$. Ако F е сумираща функция за f, очевидно $\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = F(n+1) - F(0)$.

Задача 39*. Да се докаже, че за всяко неотрицателно цяло n функцията x^n притежава сумираща функция, която е полином от степен $n+1$.

Задача 40°. Всеки полином от степен n притежава сумираща функция, която е полином от степен $n+1$.

Задача 41. Ако полиномите P_1 и P_2 са сумиращи функции за функцията f, те се различават с адитивна константа (т. е. $P_1 - P_2 = c$, където c не зависи от x).

Една функция се нарича *рационална*, когато е частно на два полинома.

Съгласно зад. 8 една рационална функция не е дефинирана само в краен брой точки (нулите на знаменателя).

Задача 42. Ако две рационални функции приемат равни стойности за безбройно много стойности на аргумента, те съвпадат в сечението на дефиниционните си области.

Задача 43. Да се намерят рационалните функции R, за които $R(x+1) = R(x)$ за всички x, които принадлежат на дефиниционната област на R заедно с $x+1$.

Задача 44. Ако рационалните функции R_1 и R_2 са сумиращи за функцията f, те се различават с адитивна константа.

Задача 45*. За функцията x^{-k} $(k \in \mathbf{N})$ не съществува рационална сумираща функция.

Задача 46. Ако P е полином, функцията $\dfrac{P(x)}{x(x+1)\dots(x+n)}$ $(n \in \mathbf{N})$ притежава рационална сумираща функция точно когато остатъкът от делението на $P(x)$ с $x(x+1)\dots(x+n)$ е от степен, не по-голяма от $n-1$.

Трета глава

Принцип за непрекъснатост

§ 1. Супремуми и инфимуми

Нека M е множество от реални числа, a е такова реално число, че за всяко x от M да е в сила $x \leqq a$. Тогава a се нарича *мажоранта* (*горна граница*) на M. Едно множество от реални числа се нарича *мажорирано* (*ограничено отгоре*), когато притежава поне една мажоранта.

Нека M е множество от реални числа, а b — такова реално число, че за всяко x от M е в сила $b \leqq x$. Тогава b се нарича *миноранта* (*долна граница*) на M. Едно множество от реални числа се нарича *минорирано* (*ограничено отдолу*), когато притежава поне една миноранта.

Задача 1°. Вярно ли е, че никоя миноранта на едно множество от реални числа не надминава никоя негова мажоранта?

Задача 2°. Ако множеството M от реални числа не е празно, всяка миноранта на M е по-малка или равна на всяка мажоранта на M.

Принцип за непрекъснатост. *Всяко ограничено отгоре непразно множество от реални числа притежава най-малка мажоранта.*

Най-малката мажоранта на ограничено отгоре непразно множество M от реални числа се нарича *супремум* (*точна мажоранта, точна горна граница*) на M и се означава със $\sup M$.

Задача 3 (принцип за отделимост). Нека M и N са такива непразни множества от реални числа, че за всяко x от M и за всяко y от N да е изпълнено неравенството $x \leqq y$. Да се докаже, че съществува такова реално число r, че да са в сила неравенствата $x \leqq r \leqq y$ за всяко x от M и за всяко y от N.

Задача 4. Всяко ограничено отдолу непразно множество от реални числа притежава най-голяма миноранта.

Най-голямата миноранта на ограниченото отдолу непразно множество M от реални числа се нарича *инфимум* (*точна миноранта, точна долна граница*) на M и се означава с $\inf M$.

Задача 5. Нека непразното множество M от реални числа е мажорирано и $a < \sup M$. Да се докаже, че съществува елемент x на M, за който $a < x$. Да се посочи пример на множество M и на число a с горните свойства, за които $a \notin M$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за минорирано множество.

Задача 6°. Нека M и N са непразни мажорирани множества от реални числа и $\sup M \leqq \sup N$. Да се докаже, че за всяко x от M с $x \neq \sup M$ съществува такова y от N, че $x < y$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за inf.

Задача 7°. Нека M и N са непразни множества от реални числа, нека N е мажорирано и за всяко x от M съществува такова y от N, че $x \leqq y$. Да се докаже, че M е също мажорирано и че $\sup M \leqq \sup N$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за inf.

Задача 9* (теорема на Кантор — Хели). Нека всеки два интервала от непразната фамилия $\{[a_\alpha, b_\alpha] \mid \alpha \in A\}$ имат поне по една обща точка. Да се докаже, че $\cap\{[a_\alpha, b_\alpha] \mid \alpha \in A\} \neq \varnothing$.

Задача 10*. Множеството на реалните числа не е изброимо (Кантор).

Задача 11*. Множеството на трансцендентните числа не е изброимо (Кантор).

Задача 12* (континуална индукция). Нека a е реално число, а множеството M от реални числа удовлетворява условието: за всяко реално t, за което $t \geqq a$ и $[a, t) \subset M$, съществува такова положително число ε, че $[a, t+\varepsilon) \subset M$. Да се докаже, че $[a, \infty) \subset M$.

Една фамилия от множества $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$ се нарича *покритие* на множеството X, когато $X \subset \cup\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Задача 13* (принцип на Борел — Лебег за компактност). Нека фамилията $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$ от отворени интервали е покритие на интервала $[a, b]$. Да се докаже, че от нея може да се избере крайно покритие на $[a, b]$.

§ 2. Пресмятане на супремуми и инфимуми

Ако M е множество от реални числа, по дефиниция $-M = \{x \mid -x \in M\}$. Така например, ако M е интервалът $(1, 2]$, то $-M = [-2, -1)$.

Задача 14°. Ако M е мажорирано непразно множество от реални числа, множеството $-M$ е минорирано и $\inf(-M) = -\sup M$.

Задача 15°. Ако M е минорирано непразно множество от реални числа, множеството $-M$ е мажорирано и $\sup(-M) = -\inf M$.

Ако M е множество от реални числа, което не съдържа числото 0, по дефиниция $M^{-1} = \{x \mid x^{-1} \in M\}$.

Така например, ако M е интервалът $(0, 3]$, то $M^{-1} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Задача 16°.* Ако M е мажорирано непразно множество от положителни реални числа, множеството M^{-1} е минорирано и $\inf M^{-1} = (\sup M)^{-1}$.

Задача 17°. Ако M е минорирано непразно множество от положителни реални числа и $\inf M \neq 0$, множеството M^{-1} е мажорирано и $\sup M^{-1} = (\inf M)^{-1}$.

Задача 18°. Нека M и N са непразни мажорирани множества от реални числа. Да се докаже, че множеството $M \cup N$ е мажорирано и $\sup(M \cup N) = \max(\sup M, \sup N)$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за inf.

Задача 19. Нека $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от непразни множества от реални числа, чието обединение $M = \cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е мажорирано. Да се докаже, че множеството $\{\sup M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е мажорирано и $\sup M = \sup\{\sup M_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Нека M и N са множества от реални числа. Множеството $\{x + y \mid x \in M, y \in N\}$ на всичките суми $x + y$, където $x \in M$ и $y \in N$, се нарича (*аритметична*) *сума* на M и N и се означава с $M + N$. Множеството $\{xy \mid x \in M, y \in N\}$ се нарича (*аритметично*) *произведение* на M и N и се означава с MN.

Задача 20. Нека M и N са непразни мажорирани множества от реални числа. Да се докаже, че множеството $M + N$ е също мажорирано и $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$. Да се формулира и докаже аналогично твърдение за inf.

Задача 21. Нека M и N са непразни мажорирани множества от неотрицателни реални числа. Да се докаже, че множеството MN е също мажорирано и $\sup(MN) = (\sup M)(\sup N)$. Да се обобщи това равенство за n множителя.

Задача 22°. Нека N е непразно мажорирано множество от реални числа и a е реално число. Да се докаже, че множеството $a - N$ (т. е. $a + (-N)$) е минорирано и $\inf(a - N) = a - \sup N$.

Задача 23°. Нека N е непразно минорирано множество от реални числа и a е реално число. Да се докаже, че множеството $a - N$ е мажорирано и $\sup(a - N) = a - \inf N$.

Задача 24°. Нека M и N са непразни множества от реални числа, първото от които е минорирано, а второто — мажорирано. Да се докаже, че множеството $M - N$ е минорирано и $\inf(M - N) = \inf M - \sup N$.

Задача 25°. Нека M и N са непразни множества от реални числа, първото от които е мажорирано, а второто — минорирано. Да се докаже, че множеството $M - N$ е мажорирано и $\sup(M - N) = \sup M - \inf N$.

Задача 26°. Да се формулират и докажат аналогични твърдения на онези от зад. 24 и 25 за MN^{-1}.

Задача 27°. Нека M и N са непразни минорирани множества от неположителни числа. Да се докаже, че множеството MN е мажорирано и $\sup(MN) = (\inf M)(\inf N)$.

Едно множество от реални числа се нарича *ограничено*, когато е едновременно и мажорирано, и минорирано.

С други думи, множеството M се нарича ограничено, когато съществуват такива реални числа a и b, че за всяко x от M да е в сила $a \leqq x \leqq b$.

Задача 28. Нека M и N са непразни ограничени множества от реални числа. Да се докаже, че множеството MN е също ограничено и $(\sup M)(\sup N) \leqq \sup(MN)$. Да се обобщи това неравенство за n множителя. Да се посочи пример, когато то е строго.

Задача 29°. За всяко ограничено непразно множество M от реални числа е в сила равенството $\sup(MM) = \sup\{x^2 \mid x \in M\}$. Да се обобщи това твърдение за n множителя.

Задача 30°. Нека M е непразно множество от неотрицателни числа. Да се докаже, че $\inf(MM) = \inf\{x^2 \mid x \in M\}$. Да се посочи непразно ограничено множество от реални числа, за които това равенство не е вярно. Да се обобщи твърдението за n множителя.

Задача 31. Нека x_ν и y_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ са реални числа с $0 < x_1 < x_2 < \ldots$ и $0 < y_1 < y_2 < \ldots$ и нека $L = \{x_\nu \mid \nu \in \mathbf{N}\}$, $M = \{y_\nu \mid \nu \in \mathbf{N}\}$ и $N = \{x_\nu y_\nu \mid \nu \in \mathbf{N}\}$. Да се докаже, че от ограничеността на L и M следва ограничеността и на N и че $\sup(LM) = \sup N$.

Задача 32. Да се намери $\inf M$ за $M = \{q^\nu \mid \nu \in \mathbf{N}\}$, където $0 < q < 1$.

Задача 33. Да се докаже, че множеството $M = \{q^\nu \mid \nu \in \mathbf{N}\}$, където $1 < q$, не е ограничено отгоре.

Задача 34. Да се намери $\inf M$ за $M = \left\{\frac{1}{\nu} \,\middle|\, \nu \in \mathbf{N}\right\}$.

Задача 35. Да се намери $\sup M$ за $M = \left\{a - \frac{1}{\nu} \,\middle|\, \nu \in \mathbf{N}\right\}$.

Задача 36. Ако k е естествено число и $M = \left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$, да се докаже, че M е мажорирано, и да се намери $\sup M$.

Задача 37. Да се намери $\inf M$ за $M = \{nq^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ при $0 < q < 1$.

Задача 38. Да се намери $\inf M$ за $M = \{n^k q^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ при естествено k и $0 < q < 1$.

Задача 39. Ако $0 < a$, да се докаже, че множеството $M = \{x \mid 0 \leqq x,\ x^2 \leqq a\}$ е мажорирано и че $\sup M = \sqrt{a}$.

Задача 40. Ако $0 < a$, а n е естествено число, да се докаже, че множеството $M = \{x \mid 0 \leqq x,\ x^n \leqq a\}$ е мажорирано и че $\sup M = \sqrt[n]{a}$.

Задача 41. Да се намери $\sup M$ за $M = \{\sqrt[n]{a} \mid n \in \mathbf{N}\}$ при $0 < a < 1$.

Задача 42. Да се намери $\inf M$ за $M = \{\sqrt[n]{a} \mid n \in \mathbf{N}\}$ при $1 < a$.

Задача 43. Да се намери $\inf M$ за $M = \{\sqrt[n]{n} \mid n - 1 \in \mathbf{N}\}$.

Задача 44°. Нека M е непразно мажорирано множество от неотрицателни реални числа и $\sqrt[n]{M} = \{\sqrt[n]{x} \mid x \in M\}$. Да се докажат равенствата $\sup \sqrt[n]{M} = \sqrt[n]{\sup M}$ и $\inf \sqrt[n]{M} = \sqrt[n]{\inf M}$.

Задача 45. Да се намерят всички множества M от реални числа със следното свойство: за всяко x от M съществува такова y от M, че $x^2 + 1 \leqq 2y$.

Задача 46. Да се намерят всички множества M от реални числа със следното свойство: за всяко x от M съществува такова y от M, че $x^2 + 6 \leqq 5y$.

Задача 47. Ако α и β са реални числа, да се намерят всички множества M от реални числа със следното свойство: за всяко x от M съществува y от M с $x^2 + \alpha\beta \leqq (\alpha + \beta)y$.

Задача 48°. Съществуват ли безкрайни мажорирани множества от реални числа, всички безкрайни подмножества на които да притежават една и съща точна мажоранта?

Задача 49*. Да се докаже, че едно ограничено безкрайно множество M без най-голям елемент тогава и само тогава има свойството $\sup N = \sup M$ за всяко безкрайно подмножество N на M, когато елементите на M могат да се подредят в безкрайна редица $x_1, x_2, \ldots$, всеки член на която е по-малък от следващия.

Задача 50. Да се докаже, че едно мажорирано безкрайно множество M тогава и само тогава притежава свойството $\sup(M \setminus N) = \sup M$ за всяко крайно подмножество N на M, когато съществува такава стриктно растяща редица $x_1, x_2, \ldots$ от елементи на M, че да е в сила равенството $\sup\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \sup M$.

§ 3. Отворени множества върху числовата права

Едно множество M от реални числа се нарича *отворено*, когато може да се представи като обединение на отворени интервали.

Задача 51. Да се докаже, че:

а) множествата $\varnothing$ и $\mathbf{R}$ са отворени;

б) ако $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от отворени множества, обединението $\cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е също отворено;

в) сечение на краен брой отворени множества е отворено множество.

Задача 52°. Обединението на произволна фамилия от интервали с обща точка е интервал.

Задача 53°. Обединението на произволна фамилия от отворени интервали с обща точка е отворен интервал.

Нека U е отворено множество. Един отворен интервал Δ се нарича *компонента* на U, когато притежава свойствата:

а) $\Delta \subset U$; б) ако Δ' е отворен интервал с $\Delta \subset \Delta' \subset U$, то $\Delta' = \Delta$.

С други думи, Δ е компонента на U, когато е максимален отворен интервал, който се съдържа в U.

Задача 54*. Нека U е отворено множество. Да се докаже, че:

а) Ако Δ' и Δ'' са две различни компоненти на U, то $\Delta' \cap \Delta'' = \varnothing$.

б) Всеки отворен интервал Δ, който се съдържа в U, се съдържа в точно една от компонентите на U.

в) Всеки интервал Δ, който се съдържа в U, се съдържа в точно една от компонентите на U.

г) Ако a е крайна компонента на U, то $a \notin U$.

д) U е обединение на компонентите си.

е) Нека $U = \cup\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$, където Δ_α са отворени интервали и $\Delta_\mu \cap \Delta_\nu = \varnothing$, когато $\mu \neq \nu$. Да се докаже, че интервалите Δ_α са всичките компоненти на U.

ж) Множеството на компонентите на U е крайно или изброимо.

Задача 55°. Нека $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от непресичащи се две по две отворени множества. Да се докаже, че всяка компонента на обединението $\cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е компонента и на някое U_α и обратно.

§ 4. Свързани множества върху числовата права

Едно непразно множество M от реални числа се нарича *свързано*, ако от $M \subset U \cup V$, където U и V са отворени множества и $U \cap V = \varnothing$, следва $M \subset U$

или $M \subset V$.

Задача 56. Да се докаже, че:

а) всяко едноточково множество е свързано;

б) обединението на свързани множества с обща точка е свързано множество;

в) ако M е свързано множество, а a и b са елементи на M, за които $a < b$, то $[a, b] \subset M$;

г) всяко свързано множество е интервал.

Задача 57*. Всеки интервал е свързано множество.

Задача 58. Нека U и V са отворени множества, които не съдържат интервала $[a, b]$, и нека $[a, b] \subset U \cup V$. Да се докаже, че съществува подинтервал $[a_1, b_1]$ на $[a, b]$ със свойствата: $[a_1, b_1] \subset U$, $[a_1, b_1] \not\subset V$ и $[a_1, b_1] \cap V \neq \varnothing$.

Задача 59*. Нека a и b са реални числа с $a < b$, а $U_1, U_2, \ldots$ е редица от отворени множества със следните свойства:

а) $[a, b] \cap \left(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} U_\nu\right) = \varnothing$; б) $[a, b] \subset U_m \cup U_n$ при $m \neq n$.

Да се докаже, че интервалът $[a, b]$ се съдържа във всичките U_ν с евентуално изключение на едно от тях (С е р п и н с к и).

Четвърта глава

Безкрайни редици

§ 1. Кофинитни множества

Задача 1. Нека $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$ е полином с $a_0 > 0$. Да се докаже, че съществува такова число ξ, че за всяко $x > \xi$ е в сила неравенството $P(x) > 0$.

Задача 2°. Да се посочат безбройно много безкрайни множества от естествени числа, които две по две нямат общи елементи.

Едно множество C от естествени числа се нарича *кофинитно*, когато множеството $\mathbf{N} \setminus C$ е крайно, т. е. когато вън от C има само краен брой естествени числа.

Задача 3°. Сечение на краен брой кофинитни множества е кофинитно множество.

Задача 4°. Едно множество C от естествени числа е кофинитно тогава и само тогава, когато съществува такова естествено число ν, че за всяко $n > \nu$ да е в сила $n \in C$.

Задача 5. Кои от следните множества са кофинитни:

а) множеството на четните числа;

б) множеството на естествените числа n, за които $an^2 + bn + c > 0$ при реални a, b, c и $a > 0$;

в) множеството на естествените числа n, за които $an^2 + bn + c > 0$ при реални a, b, c и $a < 0$;

г) подмножествата на $\mathbf{N}$ от зад. 2;

д) множеството на естествените числа n, за които $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \frac{1}{1000}$;

е) множеството на естествените числа n, за които $\left|\frac{n^2+n+2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$, където ε е положително реално число;

ж) множеството на естествените числа n, за които $\left|\frac{a_0n^k + a_1n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0n^k + b_1n^{k-1} + \dots + b_k} - \frac{a_0}{b_0}\right| < \varepsilon$, където ε е положително реално число, а $a_0, a_1, \dots, a_k$ и $b_0, b_1, \dots, b_k$ са реални числа с $b_0 \neq 0$;

з) множеството на естествените числа n, за които $\frac{200n+11}{n^2+1} > 1$;

и) множеството на естествените числа n, за които $\frac{200n+11}{n^2+1} < \varepsilon$, където ε е положително реално число;

й) множеството на естествените числа n, за които $\left|\frac{a_0n^k + a_1n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0n^l + b_1n^{l-1} + \dots + b_l}\right| < \varepsilon$, където ε е положително реално число, числата k и l са естествени с $k < l$, а останалите означения са, както в ж);

к) множеството на естествените числа n, за които $\left|\frac{a_0n^k + a_1n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0n^l + b_1n^{l-1} + \dots + b_l}\right| > N$, където N е реално число, числата k и l са естествени с $k > l$, а останалите означения са, както в ж);

Задача 6. Да се докаже, че съществува такова число ν, че за всяко естествено число $n > \nu$ да е в сила неравенството:

а) $(1{,}00001)^n > n$; б) $(1{,}00001)^n > n^{10}$.

Задача 7. Ако P е полином и $q > 1$, да се докаже, че съществува такова число ν, че за всяко естествено число $n > \nu$ да е изпълнено неравенството $q^n > P(n)$.

Задача 8. При условията на зад. 7 да се докаже, че съществува такова число ν, че за всяко реално число $x > \nu$ да е в сила неравенството $q^x > P(x)$.

Задача 9°. Да се докаже, че следните множества са кофинитни:

а) множеството на естествените числа n, за които $q^n < \varepsilon$ при $0 \leqq q < 1$ и $\varepsilon > 0$;

б) множеството на естествените числа n, за които $q^n > l$ при $q > 1$ и произволно l;

в) множеството на естествените числа n, за които $\frac{n}{q^n} < \varepsilon$ при $q > 1$ и $\varepsilon > 0$;

г) множеството на естествените числа n, за които $1-\varepsilon < \sqrt[n]{x} < 1+\varepsilon$ при $a > 0$ и $\varepsilon > 0$;

д) множеството на естествените числа n, за които $\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$ при $\varepsilon > 0$;

е) множеството на естествените числа n, за които $\frac{1}{n}\log_a n < \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ и $0 < a \neq 1$.

§ 2. Граница на редица

Едно реално число a се нарича *граница* на безкрайната редица

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

от реални числа, когато за всяко реално число $\varepsilon > 0$ съществува такова число ν (което изобщо зависи от ε), че за всяко естествено число $n > \nu$ да е в сила неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$.

От зад. 4 следва, че a е граница на редицата (1) точно когато за всяко $\varepsilon > 0$ множеството на естествените числа n, за които е в сила неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$, е кофинитно.

Доказва се, че никоя редица от реални числа няма повече от една граница.

Безкрайната редица (1) се нарича *сходяща*, когато притежава граница. Когато редицата (1) е сходяща и a е границата ѝ, се пише $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Редица, която не е сходяща, се нарича *разходяща*.

Нека (1) и

(2) $$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

са две редици, за които $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогава:

(3) $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b,$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b,$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab,$$

(6) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad (b_n \neq 0,\ n \in \mathbf{N},\ b \neq 0).$$

Задача 10°. Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Задача 11. Да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+2}{n^2+1} = 2$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0n^k + a_1n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0n^k + b_1n^{k-1} + \cdots + b_k} = \frac{a_0}{b_0}$ при означенията на зад. 5 ж);

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1000}{n^2+2} = 0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0n^k + a_1n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0n^l + b_1n^{l-1} + \cdots + b_l} = 0$ при означенията на зад. 5 ж) и $k < l$.

Задача 12*. Ако $a_1, a_2, \ldots$ е редица с $a_n \geqq 0$ и $a_{m+n} \leqq a_m + a_n$ за всички m и n, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \inf\left\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

§ 3. Редици, които дивергират към ∞

Задача 13. Да се докаже, че редицата с общ член $a_n = \frac{n^3+2n+1}{10n^2+8n+1}$ е разходяща.

Казва се, че редицата

(7) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

клони (*дивергира*) *към плюс безкрайност*, и се пише $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, когато за всяко число N съществува такова число ν (което изобщо зависи от N), че за всяко естествено число $n > \nu$ да е в сила неравенството $a_n > N$.

Аналогично се казва, че редицата (7) *клони* (*дивергира*) *към минус безкрайност*, и се пише $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, когато за всяко число N съществува такова число ν (което изобщо зависи от N), че за всяко естествено число $n > \nu$ да е в сила неравенството $a_n < N$.

Когато една редица дивергира към плюс или минус безкрайност, тя е разходяща.

Задача 14. Да се докаже, че редицата от зад. 13 дивергира към плюс безкрайност.

Задача 15. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \infty$ и $a_n \neq 0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$.

Задача 16. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $a_n \neq 0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|} = \infty$. Да се посочи пример, когато $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$, но $\frac{1}{a_n}$ не дивергира нито към плюс безкрайност, нито към минус безкрайност.

Задача 17. Нека k и l са естествени числа, за които $k > l$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \dots + b_l} = \begin{cases} \infty & \text{при } a_0 b_0 > 0, \\ -\infty & \text{при } a_0 b_0 < 0. \end{cases}$$

Задача 18*. Съществува ли рационална функция R, за която $R(\mathbf{I}) = \mathbf{Q}$?

§ 4. Граници на рационални функции на n

Задача 19. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m)}$ $(m \in \mathbf{N})$.

Задача 20. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu+3)}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu+3)(2\nu+5)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu+3)\dots(2\nu+2m+1)}$ $(m \in \mathbf{N})$.

Задача 21. Да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) = \frac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=2}^{n} \frac{\nu^3 - 1}{\nu^3 + 1} = \frac{2}{3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{1+2+\dots+\nu}\right) = \frac{1}{3}$.

Задача 22. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^2$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^3$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^k$ $(k \in \mathbf{N})$.

Задача 23. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \left(a + \frac{\nu}{n}\right)^2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \left(a + \frac{\nu}{n}\right)^k$ $(k \in \mathbf{N})$.

§ 5. Граници с q^n

Задача 24. Да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}99)^n = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $(|q| < 1)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$ $(|q| < 1)$, където k е произволно естествено число.

Задача 25. Да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ $(q > 1)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n^k} = \infty$ $(q > 1,\ k \in \mathbf{N})$.

Задача 26. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} q^\nu$ $(|q| < 1)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu q^{\nu-1}$ $(|q| < 1)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{3\nu - 1}{5^\nu}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=0}^{n} \left(1 + q^{2^\nu}\right)$ $(|q| < 1)$.

Задача 27. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{k^n} \sum\limits_{\nu=1}^{k} \nu^n$ $(k \in \mathbf{N})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1 + a^n}$ $(a \in \mathbf{R})$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1 + a^{2n}}$ $(a \in \mathbf{R})$; е) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$ $(a \in \mathbf{R})$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$ $(a \in \mathbf{R})$.

§ 6. Ограничени редици

Редицата от реални числа

(8) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

се нарича *ограничена отгоре*, когато съществува такова число A, че $a_n \leqq A$ за всяко n.

Редицата (8) от реални числа се нарича *ограничена отдолу*, когато съществува такова число B, че $B \leqq a_n$ за всяко n.

Редицата (8) от реални числа се нарича *ограничена*, когато е ограничена отгоре и отдолу. Това означава да съществуват такива числа A и B, че $A \leqq a_n \leqq B$ за всяко n.

Задача 28. Ако редицата (8) е ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Задача 29. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cos n!}{n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$.

§ 7. Граници на ирационални функции на n

Задача 30. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следват равенствата:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$

винаги когато корените съществуват.

Задача 31. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}(2\nu-1)-2n\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$.

Задача 32. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_k)}-n\right)$;

й) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{4/3}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)$.

Задача 33. Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} [(n+1)^p-n^p]=0 \quad (p<1)$.

§ 8. Граници на рационални функции на a_n

Задача 34. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2-5a_n+6}{a_n^2-7a_n+10}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, $a_n \neq 2; 5$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2-6a_n+8}{a_n^2-5a_n+4}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$, $a_n \neq 1; 4$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^4+2a_n^2-3}{a_n^2-3a_n+2}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $a_n \neq 1; 2$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3a_n^4-4a_n^3+1}{(a_n-1)^2}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $a_n \neq 1$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^k-1}{a_n-1}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $a_n \neq 1$, $k \in \mathbf{N}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^k-1}{a_n^l-1}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, където k и l са естествени числа и $a_n \neq 1$ за нечетно l, $|a_n| \neq 1$ за четно l;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1-a_n}-\dfrac{3}{1-a_n^3}\right)$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $a_n \neq 1$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{k}{1-a_n^k}-\dfrac{l}{1-a_n^l}\right)$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, където k и l са естествени числа и $a_n \neq 1$ за нечетни k и l, $|a_n| \neq 1$, когато някое от числата k и l е четно.

Задача 35. Ако R е рационална функция, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, а числата a и a_n принадлежат на дефиниционната област на R за всяко естествено n, то $\lim\limits_{n\to\infty} R(a_n) = R(a)$.

§ 9. Граници на ирационални функции на a_n

Задача 36. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+a_n}-1}{a_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ a_n \neq 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[k]{1+a_n}-1}{a_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ a_n \neq 0,\ k \in \mathbf{N}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{a_n}+1}{\sqrt[5]{a_n}+1}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1,\ a_n \neq -1$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+a_n+a_n^2}-1}{a_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ a_n \neq 0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+a_n}-\sqrt{1+a_n^2}}{\sqrt{1+a_n}-1}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ a_n \neq 0$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+2a_n}+1}{\sqrt[3]{2+a_n}+a_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1,\ a_n \neq -1$.

§ 10. Сходимост и неравенства

От $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $a_n \leqq b_n$ за безбройно много стойности на n следва $a \leqq b$. Обратно, от $a < b$ следва $a_n < b_n$ за всички достатъчно големи n.

Задача 37°. Да се дадат примери за редици $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, за които:

а) $a_n < b_n$ за всяко n, но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, но $a_n < b_n$ за безбройно много n и $a_n > b_n$ за безбройно много n.

Задача 38°. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Да се посочи пример, при който обратното не е вярно.

Задача 39°. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Задача 40. От $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ следва:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \max(a_n, b_n) = \max(a, b)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \min(a_n, b_n) = \min(a, b)$.

Задача 41. Ако всички членове на редицата $a_1, a_2, \ldots$ са различни от 0, то:

а) ако съществува число q, за което $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqq q < 1$ за всяко n, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

б) от $\left|\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

в) ако съществува число q, за което $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqq q > 1$ за всяко n, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_1} = \infty$;

г) от $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_1} = \infty$.

Понякога редицата $a_1, a_2, \ldots$ се означава накратко с $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{n}$.

Задача 42. Ако $a_n \neq 0$ за всяко n и редицата $\left\{\dfrac{na_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Задача 43. Да се докаже, че:

а) ако a е реално число, а $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dbinom{a}{n} x^n = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ за всяко a; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Нека са дадени безкрайните редици $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, за които $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, и за всяко n е в сила едното от двете неравенства $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ или $b_n \leqq c_n \leqq a_n$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (лема за двамата милиционери).

Тази лема е валидна и в следния вариант: от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и $a_n \leqq c_n$ за всяко n следва $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$, а от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ и $c_n \leqq a_n$ за всяко n следва $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$ (лема за единия милиционер).

Задача 44. Да се намерят границите на редиците с общ член:

а) $a_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+\nu}$; б) $a_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+\nu}}$; в) $a_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \sqrt[3]{\dfrac{n}{n^4+\nu}}$;

г) $a_n = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{\nu}{n^2}}-1\right)$; д) $a_n = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{\nu^2}{n^3}}-1\right)$.

Задача 45. Ако числата $a_1, a_2, \ldots, a_m$ са положителни и a е най-голямото от тях, да се докаже, че $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^n} = a$.

Задача 46. Да се докаже, че $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n = 1 \quad (a \in \mathbf{R})$.

Задача 47. Да се докаже, че:

а) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a>0)$; б) от $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ следва $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$;

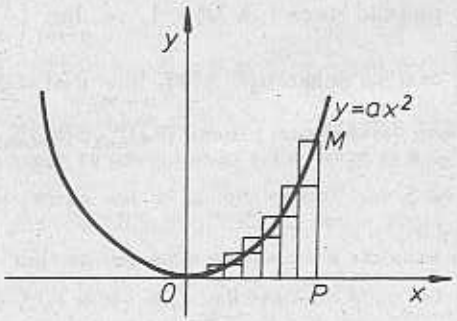
в) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$;

г) ако P е полином с положителен старши коефициент, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P(n)} = 1;$$

д) ако $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3+n^2+1} > 0$, то $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$.

Задача 48. Да се намери лицето на криволинейния триъгълник OPM, образуван от частта OM на параболата $y = ax^2$ $(a>0)$, отсечката OP от оста Ox и отсечката PM (фиг. 3).



Фиг. 3

Задача 49. Да се докаже, че от $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ следва:

а) $\lim_{n\to\infty}\sin a_n = \sin a$; б) $\lim_{n\to\infty}\cos a_n = \cos a$;

в) $\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg} a_n = \operatorname{tg} a$ при $a_n \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ и $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ за всяко естествено n и всяко цяло k;

г) $\lim_{n\to\infty}\operatorname{ctg} a_n = \operatorname{ctg} a$ при $a_n \neq k\pi$ и $a \neq k\pi$ за всяко естествено n и всяко цяло k.

§ 11. Монотонни редици

Редицата

(9) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

се нарича *растяща* (*монотонно растяща*), когато за всяко естествено число n е изпълнено неравенството $a_n \leqq a_{n+1}$. Редицата (9) се нарича *намаляваща* (*монотонно намаляваща*), когато за всяко естествено число n е изпълнено неравенството $a_n \geqq a_{n+1}$. Растящите и намаляващите редици се наричат общо *монотонни редици*.

Всяка ограничена отгоре растяща редица е сходяща. Сходяща е и всяка ограничена отдолу намаляваща редица.

Ако редицата (9) е растяща и сходяща, то $a_m \leqq \lim_{n\to\infty} a_n$ за всяко естествено число m, а ако редицата (9) е намаляваща и сходяща, то $a_m \geqq \lim_{n\to\infty} a_n$ за всяко естествено число m.

Понякога е удобно да се използват следните малко по-силни твърдения. Ако една редица е ограничена отгоре и е растяща от някой номер (на членовете) нататък, тя е сходяща; ако една редица е ограничена отдолу и е намаляваща от някой номер нататък, тя е също сходяща.

Задача 50. Като се използват свойствата на монотонните редици, да се докаже, че:

а) $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (0<q<1)$; б) $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty \quad (q>1)$;

в) $\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0 \quad (0<q<1,\ k \in \mathbf{N})$; г) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a>0)$;

д) ако членовете на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ са положителни и $0 \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

§ 12. Числото e

Редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е сходяща. Границата ѝ се означава с e, т. е. по дефиниция $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, и се нарича *неперово число*.

Задача 51. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+k}{n}\right)^n$ $(k+1\in\mathbf{N})$.

Задача 52. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n$ $(k\in\mathbf{N})$.

Задача 53. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-n-6}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+5n+6}\right)^n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-4n+3}{n^2+3n+2}\right)^n$.

§ 13. Функцията e^x

Задача 54. Да се докаже, че редицата с общ член $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ е сходяща за всяко x.

Границата $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ще означаваме временно (до зад. 66) с $E(x)$. Така получаваме една функция $E\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Целта на зад. 55 — 65 е да се изучат основните свойства на тази функция.

Задача 55. Да се докаже, че $E(x)\geqq 1+x$ за всяко x.

Задача 56. Да се докаже, че от $x<y$ следва

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqq(y-x)\left(1+\frac{y}{n}\right)^{n-1}$$

за всички достатъчно големи n.

Задача 57. Да се докаже, че от $x<y$ следва

$$E(y)-E(x)\leqq(y-x)E(y).$$

Задача 58. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ следва

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n=E(x).$$

Задача 59. Да се докаже, че $E(x)E(y)=E(x+y)$ за всяко x и всяко y.

Задача 60. Да се докаже, че:

а) $E(0)=1$;

б) $E(x)>0$ за всяко x;

в) $\frac{E(x)}{E(y)}=E(x-y)$ за всяко x и всяко y;

г) $E(-x)=\frac{1}{E(x)}$ за всяко x.

Задача 61. Да се докаже, че $E\left(\frac{p}{q}\right)=e^{\frac{p}{q}}$ за всяко цяло число p и всяко естествено число q.

Една функция $f\colon M\to\mathbf{R}$ $(M\subset\mathbf{R})$ се нарича *растяща* (*монотонно растяща*), когато от $x,y\in M$ и $x<y$ следва $f(x)\leqq f(y)$, а *намаляваща* (*монотонно намаляваща*), когато от $x,y\in M$ и $x<y$ следва $f(x)\geqq f(y)$. Намаляващите и растящите функции се наричат общо *монотонни функции*.

При строги неравенства в горните дефиниции вместо термините растяща и намаляваща функция се използват съответно термините *стриктно растяща* и *стриктно намаляваща* функция.

Задача 62. Функцията $E(x)$ е стриктно растяща.

Задача 63. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ следва

$$\lim_{n\to\infty}E(x_n)=E(x).$$

Задача 64. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}E(x_n)=\infty$;

б) от $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}E(x_n)=0$.

Доказва се, че от $a>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}a^{x_n}=a^x$.

Задача 65°. Да се намери границата на редицата

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\ \ldots$$

Задача 66. Да се докаже, че $E(x)=e^x$ за всяко x.

§ 14. Функцията $\ln x$

Задача 67. Да се докаже, че за всяко $x>0$ редицата с общ член $n(\sqrt[n]{x}-1)$ е сходяща.

Границата $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ ще означаваме временно (до зад. 72) с $L(x)$. Така получаваме една функция $L\colon(0,\infty)\to\mathbf{R}$. Целта на зад. 68 — 76 е да се изучат основните свойства на тази функция.

Задача 68. Да се докаже, че от $x>0$ и $y>0$ следва

$$L(xy)=L(x)+L(y).$$

Задача 69. Да се докаже, че от $0<x<y$ следва

$$n\left(\sqrt[n]{y}-1\right)-n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\leqq\frac{y-x}{x}\sqrt[n]{x}.$$

Задача 70. Да се докаже, че от $0<x<y$ следва

$$L(y)-L(x)\leqq\frac{y-x}{x}.$$

Задача 71. Да се докаже, че:

а) от $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ и $x>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{x_n}-1\right)=L(x)$;

б) от $x_n>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{x_n}-1\right)=-\infty$.

Задача 72. Да се докаже, че $e^{L(x)}=x$ за всяко $x>0$.

Задача 73°. Множеството на стойностите на функцията e^x съвпада с множеството на всичките положителни числа.

От зад. 62 и 66 следва, че функцията e^x е обратима. Както е известно, обратната ѝ функция е $\log_e$. Тя се нарича *натурален логаритъм* и за да се отличава от логаритмите при други основи, се означава с ln, т. е. по дефиниция $\ln x=\log_e x$ за всяко $x>0$. Съгласно зад. 73 дефиниционната област на функцията ln е интервалът $(0,\infty)$, а съгласно зад. 72 $\ln x=L(x)$ за всяко $x>0$. (Вж. бележките преди зад. 29, гл. I.)

Задача 74. Да се докаже, че от $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ и $x>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln x$.

Задача 75. Да се докаже, че при $0<a\neq1$ от $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ и $x>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\log_a x_n=\log_a x$.

Задача 76. Да се докаже, че:

а) от $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_n}{x_n}=0$;

б) от $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$.

§ 15. Някои приложения на свойствата на e^x и $\ln x$

Задачи 58 и 66 показват, че от $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ следва

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n=e^x.$$

Също така зад. 71 а) и бележките преди зад. 74 показват, че от $x_n>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{x_n}-1\right)=\ln x$.

Задача 77. Да се докаже, че:

а) от $a>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{a}}{2}\right)^n=\sqrt{a}$;

б) ако a, b и c са положителни, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n=\sqrt[3]{abc}$;

в) ако k е естествено число, а числата $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са положителни, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{k}\sum\limits_{\nu=1}^{k}\sqrt[n]{a_\nu}\right)^n=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$;

г) от $a>0$ и $b>0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n^2]{a}+\sqrt[n^3]{b}\right)^n\dfrac{1}{2^n}=1$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\sqrt[n]{\dfrac{n}{2n+1}}+\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{2n^2+1}}\right)^n=\dfrac{1}{2}$;

е) ако $a_n>0$, $b_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b>0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left(\sqrt[n]{a_n}+\sqrt[n]{b_n}\right)^n=\sqrt{ab}.$$

Задача 78. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+3n+1}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n^2+3n+1}{n^3+n^2+2n+1}\right)^n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^k+a_1n^{k-1}+a_2n^{k-2}+\cdots+a_k}{n^k+b_1n^{k-1}+b_2n^{k-2}+\cdots+b_k}\right)^n$ $(k\in\mathbf{N})$.

§ 16. Константа на Ойлер

Задача 79°. Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$.

Задача 80*. Да се докаже, че редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ е намаляваща.

Задача 81°. Да се докажат неравенствата $\frac{1}{n+1}\leqq\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqq\frac{1}{n}$ за всяко естествено n.

Задача 82. Да се докаже, че редицата с общ член $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-\ln n$ е намаляваща, а редицата с общ член $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-\ln(n+1)$ — растяща.

Задача 83. Да се докаже, че редиците от зад. 82 имат обща граница.

Общата граница на редиците от зад. 82 се нарича *константа на Ойлер* и се означава с C. И така по дефиниция $C=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-\ln n\right)$.

Задача 84°. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{n+\nu}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{2n}\frac{1}{n+\nu}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=kn+1}^{ln}\frac{1}{\nu}$ за произволни естествени k и l, за които $k<l$.

Задача 85. Ако R е рационална функция, редицата с общ член $R(n)-\ln n$ дивергира към ∞ или към $-\infty$.

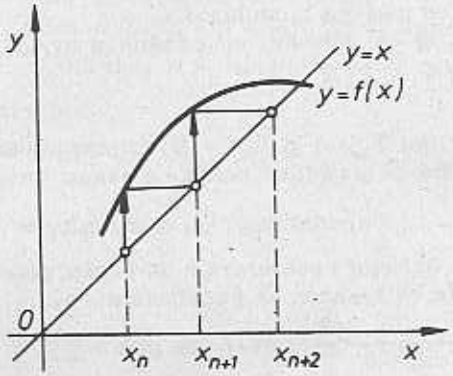
Задача 86. Да се докаже, че не съществува рационална функция R, за която равенството $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}=R(n)$ да е изпълнено за безбройно много n.

§ 17. Сходимост на итерационни редици

Нека е дадена функция $f\colon M\to\mathbf{R}$ $(M\subset\mathbf{R})$ и нека $x_1\in M$. Тогава може да се образува числото $x_2=f(x_1)$. Ако се случи x_2 да принадлежи на

M, може да се образува числото $x_3=f(x_2)$ и т. н. Ако този процес не се прекъсва, получава се безкрайна редица $x_1, x_2, \ldots$, за която се казва, че се получава чрез *итерация* на функцията f (при начален член x_1). Ясно е, че тогава $x_{n+1}=f(x_n)$ за всяко естествено n.

Геометричният смисъл на процеса на итерирането е илюстриран на фиг. 4. При изображения случай от чертежа става ясно, че итерационната редица е сходяща.



Фиг. 4

Задача 87. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_{n+1}=\frac{1}{2}(1+a_n^2)$ $(n=1, 2, \ldots)$:

а) е сходяща при $a_1=\frac{1}{2}$, и да се намери границата ѝ;

б) дивергира към ∞ при $a_1=2$.

Задача 88. Да се намерят всички реални числа λ, за които редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1=\lambda$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n^2+2a_n+4)$, е сходяща.

Задача 89. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, определена с $a_1>0$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{aa_n+b}$ $(a>0,\ b>1)$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 90. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2+1}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ. Зависи ли тази граница от a_1?

Задача 91. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots,$ за която $a_1 \neq 0$ и $a_{n+1} = e^{-\frac{1}{a_n^2}}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 92. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots,$ за която $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = a_n^2 + c$ $\left(0 < c < \frac{1}{4}\right.$, а положителното число λ не надминава по-големия от корените на уравнението $x^2 - x + c = 0$), е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 93. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots,$ за която $a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 6}$:

а) е сходяща при $0 \leqq a_1 \leqq 3$; б) е разходяща при $a_1 > 3$.

Задача 94. Да се намерят всички реални числа λ, за които редицата $a_1, a_2, \ldots,$ определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2 + a_n + 2}{a_n + 4}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ за всяко такова λ.

Задача 95. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots,$ определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2 + 3a_n + 2}{a_n + 6}$, е сходяща при $0 \leqq \lambda \leqq 2$ и дивергира към ∞ при $\lambda > 2$. В първия случай да се намери границата ѝ.

Задача 96*. Ако $0 < z_1 < z_2$, $0 < \alpha < a$ и $0 < b$, да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots,$ определена с $a_1 = \lambda$ и

$$a_{n+1} = \frac{aa_n^2 + ba_n + \alpha z_1 z_2}{(a - \alpha)a_n + b + \alpha(z_1 + z_2)},$$

е сходяща при $0 \leqq \lambda \leqq z_2$ и дивергира към ∞ при $\lambda > z_2$. В първия случай да се намери границата ѝ.

Задача 97. Да се намерят всички λ, за които редицата $a_1, a_2, \ldots,$ определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \dfrac{3a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 9}$, е сходяща, и за всяко такова λ да се намери границата ѝ.

Задача 98. Ако $0 < \beta < \alpha$ и $a_1 = \alpha + \beta$, $a_{n+1} = \alpha + \beta - \dfrac{\alpha\beta}{a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, да се докаже, че $a_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и да се намери $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Да се изследва и случаят $\alpha = \beta > 0$.

Задача 99. Ако λ и μ са положителни числа, да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots,$ определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{\mu}{a_n}\right)$, е сходяща и да се намери границата ѝ.

Задача 100. а) Да се намерят всички λ, за които редицата $a_1, a_2, \ldots,$ определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ за всяко такова λ.

б) Ако $c > 0$, да се намерят всички λ, за които редицата $a_1, a_2, \ldots,$ определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$, е сходяща, и за всяко такова λ да се намери границата ѝ.

Задача 101*. Ако $0 < c \leqq 2$ и $\lambda > 0$, да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots,$ определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \dfrac{c}{1 + a_n}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 102*. Ако $-\dfrac{3}{2} < \lambda < 0$, да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots,$ определена с $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \lambda + \dfrac{a_n^2}{2}$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

§ 18. Линейни рекурентни зависимости

Задача 103. Да се докаже, че ако корените α и β на квадратното уравнение $x^2 = px + q$ са различни, а редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ $(n = 2, 3 \ldots)$, съществуват такива константи C_1 и C_2, че за всяко n е в сила $a_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}$.

Задача 104. Да се докаже, че ако квадратното уравнение $x^2 = px + q$ има двоен корен $\alpha \neq 0$, а редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$, съществуват такива константи C_1 и C_2, че за всяко n е в сила $a_n = (C_1 + nC_2)\alpha^{n-1}$.

Задача 105°. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $a_{n+1} = \dfrac{5}{6}a_n - \dfrac{1}{6}a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, да се докаже сходимостта ѝ и да се намери границата ѝ.

Задача 106°. Да се докаже, че ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n - \dfrac{1}{2}a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, тя е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 107°. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ $(n = 2, 3, \ldots)$, да се докаже, че тя е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 108°. Ако λ и μ са положителни и $\lambda + \mu = 1$, да се докаже, че всяка редица $a_1, a_2, \ldots,$ за която е в сила a_{n+1}

$= \lambda a_n + \mu a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 109°. Да се докаже, че ако за сходящата редица $a_1, a_2, \ldots$ е в сила $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, то $a_n = 0$ за всяко n.

Задача 110°. Да се докаже, че ако за редицата $a_1, a_2, \ldots$ е в сила $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4}a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, тя е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 111°. Да се докаже, че ако за сходящата редица $a_1, a_2, \ldots$ е в сила $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, то $a_n = 0$ за всяко n.

Задача 112°. Ако корените α и β на квадратното уравнение $x^2 = px + q$ удовлетворяват неравенствата $|\alpha| < 1$ и $|\beta| < 1$, да се докаже, че всяка редица $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, е сходяща и границата ѝ е 0.

Задача 113°. Да се докаже, че ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условията $|a_1| + |a_2| \neq 0$ и $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ и е ограничена, поне един от корените на уравнението $x^2 = px + q$ не надминава по модул 1.

Задача 114. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява зависимостта $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, да се изследва сходимостта ѝ в зависимост от параметрите p и q и от първите ѝ два члена.

§ 19. Двойни итерации

Задача 115. Ако редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, за които $a_1 \geqq b_1 \geqq 0$, удовлетворяват условията $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ и $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ за всяко n, да се докаже, че те са сходящи и границите им са равни.

Задача 116. Ако редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, за които $a_1 > b_1 > 0$, удовлетворяват условията $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ и $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$ за всяко n, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}$.

Задача 117. Да се докаже, че ако редиците $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ удовлетворяват условията $x_{n+1} = ax_n + by_n + p$ и $y_{n+1} = cx_n + dy_n + q$ за всяко естествено n, където модулите на a, b, c и d са по-малки от $\frac{1}{2}$, а p и q са произволни числа, то

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$, където ξ, η е единственото решение на системата уравнения $x = ax + by + p$, $y = cx + dy + q$.

§ 20. Критерий на Коши за сходимост на редица

Редицата $a_1, a_2, \ldots$ е сходяща тогава и само тогава, когато за нея е изпълнено условието на Коши: За всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число ν (което изобщо зависи от ε), че от $m > \nu$ и $n > \nu$ следва $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Задача 118*. Ако a е положително реално число, а k — естествено число и за всяко естествено число n с s_n е означено най-малкото от естествените числа q, за които $a \leqq \left(\frac{q}{n}\right)^k$, да се докаже, че редицата $\left\{\frac{s_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. Използувайте това, за да дадете ново доказателство на съществуването на $\sqrt[k]{a}$.

Задача 119. Ако $a > 1$ и $b > 0$ са реални числа и за всяко естествено n с s_n е означено най-малкото от целите числа q, за които $b^n \leqq a^q$, да се докаже, че редицата $\left\{\frac{s_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, и да се намери границата ѝ.

Задача 120. Ако M е непразно ограничено отгоре множество от реални числа и за всяко естествено число n с s_n е означено най-малкото от целите числа q, за които $\frac{q}{n}$ е мажоранта на M, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \sup M$.

Задача 121. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява зависимостта $a_{n+1} = \frac{q}{1 + a_n^2} + b$ за всяко естествено n, където $|q| < 1$, а b е произволно реално число, да се докаже сходимостта ѝ.

Задача 122*. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява зависимостта $a_{n+1} = q \sin a_n + b$ за всяко естествено n, където $|q| < 1$ и b е произволно реално число, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$, където ξ е единственият корен на уравнението на Кеплер $x = q \sin x + b$.

§ 21. Подредици и точки на сгъстяване

Нека е дадена редицата

(10) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

и нека $n_1 < n_2 < \cdots < n_\nu < \cdots$ е стриктно растяща редица от естествени числа. При $b_1 = a_{n_1}$, $b_2 = a_{n_2}$, ... редицата $b_1, b_2, \ldots$ се нарича *подредица* на редицата (10). Обикновено тази подредица се означава с $\{a_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$.

От $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следва $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_{n_\nu} = a$.

Задача 123*. Без да се използува принципът за непрекъснатост, да се докаже, че всяка безкрайна редица от реални числа притежава монотонна подредица.

Задача 124. Да се докаже, че редицата $a_1, a_2, \ldots$ е тогава и само тогава сходяща и клони към a, когато от всяка нейна подредица $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ може да се избере подредица с граница a.

Задача 125°. Да се формулира и докаже твърдение, аналогично на зад. 124, при $a = \infty$ и $a = -\infty$.

Околност на точка a от числовата права се нарича всеки отворен интервал Δ, който съдържа a.

Числото a се нарича *точка на сгъстяване* на редицата $a_1, a_2, \ldots$, когато всяка околност на a съдържа безбройно много членове на редицата.

Задача 126. Да се докаже, че числото a тогава и само тогава е точка на сгъстяване на една редица $a_1, a_2, \ldots$, когато съществува нейна подредица $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, за която $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_{n_\nu} = a$.

Задача 127. Да се построи пример на редица, множеството на чиито точки на сгъстяване съвпада с множеството на реалните числа.

Теорема на Болцано — Вайерщрас: Всяка ограничена редица притежава поне една точка на сгъстяване.

Задача 128. Да се докаже теоремата на Болцано — Вайерщрас, като се използуват зад. 123 и 126 и свойствата на монотонните редици.

Числото λ се нарича *съществена миноранта* на една редица $a_1, a_2, \ldots$, когато неравенството $\lambda \leqq a_n$ е изпълнено за всички достатъчно големи n. Числото μ се нарича *съществена мажоранта* на редицата $a_1, a_2, \ldots$, когато неравенството $a_n \leqq \mu$ е изпълнено за всички достатъчно големи n.

Очевидно една редица тогава и само тогава притежава съществена миноранта (мажоранта), когато е ограничена отдолу (отгоре).

Задача 129°. Да се докаже, че ако една редица е ограничена, множеството на съществените ѝ миноранти (мажоранти) е ограничено отгоре (отдолу) и точната му горна (долна) граница е най-лявата (най-дясната) точка на сгъстяване на дадената редица.

Най-лявата (най-дясната) точка на сгъстяване на една ограничена отдолу (отгоре) редица $a_1, a_2, \ldots$ се нарича *лимес инферior* (*лимес суперior*) на редицата и се означава с $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$).

Когато редицата $a_1, a_2, \ldots$ не е ограничена отгоре, понякога се пише $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = \infty$, а когато не е ограничена отдолу, се пише $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = -\infty$.

Символите $-\infty$ и ∞ обикновено се свързват с реалните числа x с неравенствата $-\infty < x$ и $x < \infty$.

Задача 130. Нека редицата $a_1, a_2, \ldots$ е ограничена и $b_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$, $c_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. Да се докаже, че редицата $b_1, b_2, \ldots$ е намаляваща и ограничена, а редицата $c_1, c_2, \ldots$ е растяща и ограничена, както и че $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \liminf a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \limsup a_n$.

Задача 131°. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ е ограничена и $x < \liminf a_n < x'$, $y' < \limsup a_n < y$, да се докаже, че:

а) всеки от интервалите $(-\infty, x)$ и (y, ∞) съдържа само краен брой членове на редицата;

б) всеки от интервалите $(-\infty, x')$ и (y', ∞) съдържа безбройно много членове на редицата.

Задача 132. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ и редицата $b_1, b_2, \ldots$ е ограничена, да се докаже, че:

а) $\liminf a_n b_n = a \liminf b_n$; б) $\limsup a_n b_n = a \limsup b_n$.

Задача 133. Ако редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ са ограничени, да се докаже, че:

а) $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$;

б) $\liminf(a_n + b_n) \geqq \liminf a_n + \liminf b_n$;

в) $\limsup(a_n + b_n) \leqq \limsup a_n + \limsup b_n$;

§ 22. Лимитиране със средно аритметични

Задача 134*. За произволна редица $a_1, a_2, \ldots$ да се докажат неравенствата:

а) $\liminf a_n \leqq \liminf \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$;

б) $\limsup a_n \geqq \limsup \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

Задача 135* (Коши). Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следва

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Задача 136°. Да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sqrt[\nu]{2}=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sqrt[\nu]{\nu}=1$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sqrt[\nu]{P(\nu)}=1$, където P е полином, който приема само положителни стойности.

Задача 137°. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условието $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=l$, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=l$.

Задача 138°. Ако редицата $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворява условията $a_n>0$ за всяко n и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

Задача 139. Ако $a_1, a_2, \ldots$ е редица с положителни членове, да се докаже, че (при $\ln 0=-\infty$, $\ln\infty=\infty$):

а) $\liminf \ln a_n=\ln\liminf a_n$; б) $\limsup \ln a_n=\ln\limsup a_n$.

Задача 140. Ако членовете на редицата $a_1, a_2, \ldots$ са положителни, да се докаже, че:

а) $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq\liminf\sqrt[n]{a_n}$; б) $\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqq\limsup\sqrt[n]{a_n}$.

Задача 141. Да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{e}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\prod\limits_{\nu=n+1}^{2n}\nu\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\prod\limits_{\nu=2n+1}^{3n}\nu\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{27}{4e}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\prod\limits_{\nu=kn+1}^{(k+1)n}\nu\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k e}$ $(k\in\mathbf{N})$;

д) $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{kn}\left(\prod\limits_{\nu=kn+1}^{(k+1)n}\nu\right)^{\frac{1}{n}}=1$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\prod\limits_{\nu=n+1}^{3n}\nu\right)^{\frac{1}{2n}}=\frac{27}{e^2}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\prod\limits_{\nu=n+1}^{(k+1)n}\nu\right)^{\frac{1}{kn}}=\frac{(k+1)^{k+1}}{e^k}$ $(k\in\mathbf{N})$.

§ 23. Теорема на Щолц

Задача 142* (Щолц). Ако за редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ са изпълнени условията $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, $b_{n+1}>b_n$ за всяко n и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$.

Задача 143°. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^k$ $(k\in\mathbf{N})$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^k-\frac{n}{k+1}\right)$ $(k\in\mathbf{N})$.

Задача 144*. Ако за редиците $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ е в сила $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu b_{n-\nu}=ab$.

Задача 145. Ако за редиците $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ са изпълнени условията $b_n=a_n+\alpha a_{n-1}$ за всяко n при $|\alpha|<1$ и ако $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$, да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{l}{1+\alpha}$.

Задача 146. Ако за редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ са валидни равенствата $b_n=a_n+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu a_{n-\nu}$ за всяко $n>k$ и ако всички корени на уравнението $x^k+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu x^{k-\nu}=0$ имат по-малки от 1 модули, да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{l}{1+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu}$.

Задача 147*. Нека $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ са такива числа, че винаги когато две редици $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ са свързани със зави-

симостите $b_n = a_n + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu a_{n-\nu}$ за всяко $n > k$, от сходимостта на втората редица следва сходимостта и на първата. Тогава всички корени на уравнението $x^k + \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu x^{k-\nu} = 0$ имат по-малки от 1 модули.

§ 24. Гъсти множества в R

Ако A и B са множества от реални числа, множеството A се нарича *гъсто* в B, когато всяка околност на всяка точка от B съдържа точки от A. Всяко гъсто в $\mathbf{R}$ множество A се нарича *гъсто*.

Множеството на рационалните числа и множеството на ирационалните числа са гъсти.

Задача 148. Ако A е изброимо множество от реални числа, множеството $\mathbf{R} \setminus A$ е гъсто.

Задача 149°. Множеството на трансцендентните числа е гъсто.

Задача 150°. Ако A и B са множества от реални числа, множеството A е гъсто в B тогава и само тогава, когато за всяка точка b от B съществува редица $a_1, a_2, \ldots$ от елементи на A с $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

Задача 151*. Да се намерят всички реални числа θ, за които множеството на всички суми от вида $m\theta + n$ при цели m и n е гъсто (К р о н е к е р).

Задача 152. За произволно реално число θ да се намерят всички точки на сгъстяване на редицата с общ член $\sin 2\pi n\theta$.

Задача 153*. Всяко безкрайно множество B от реални числа притежава изброимо и гъсто в B подмножество.

§ 25. Затворени множества в R

Едно множество F от реални числа се нарича *затворено*, когато допълнението му $\mathbf{R} \setminus F$ е отворено (за дефиницията на понятието отворено множество вж. текста преди зад. 51, гл. III).

Задача 154*. Да се докаже, че:

а) множествата $\varnothing$ и $\mathbf{R}$ са затворени;

б) ако $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от затворени множества, сечението $\cap\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е също затворено;

в) обединението на краен брой затворени множества е затворено множество.

Задача 155°. Множеството на точките на сгъстяване на всяка редица от реални числа е затворено множество.

Задача 156. Всяко затворено множество е множеството на точките на сгъстяване на някоя редица.

Задача 157. Едно множество F от реални числа е тогава и само тогава затворено, когато за всяка сходяща редица $a_1, a_2, \ldots$ от елементи на F е в сила $\lim_{n\to\infty} a_n \in F$.

Нека A е множество от реални числа. *Затворена обвивка* на A се нарича сечението на всички затворени множества от реални числа, които съдържат A. Затворената обвивка на A се означава с $[A]$.

От зад. 154 б) следва, че затворената обвивка на A е затворено множество, което съдържа A. Тя е най-малкото затворено множество с това свойство. Множеството A е затворено точно когато $A = [A]$.

Задача 158. Ако A е множество от реални числа и a е реално число, релацията $a \in [A]$ е в сила тогава и само тогава, когато във всяка околност на a има точки от A.

Задача 159. Ако A е множество от реални числа и a е реално число, релацията $a \in [A]$ е в сила тогава и само тогава, когато съществува редица $a_1, a_2, \ldots$ от елементи на A с $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Задача 160. Ако A и B са множества от реални числа, A е гъсто в B тогава и само тогава, когато $B \subset [A]$.

Задача 161. Ако M е ограничено отгоре (отдолу) непразно множество от реални числа, то $\sup M \in [M]$ $(\inf M \in [M])$.

§ 26. Компактни множества в R

Едно множество C от реални числа се нарича *компактно*, когато от всяка фамилия от отворени множества $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, за които $C \subset \cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, могат да се изберат краен брой елементи $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}$ с $C \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} U_{\alpha_\nu}$.

Задача 162*. Едно множество C от реални числа е компактно тогава и само тогава, когато е ограничено и затворено.

Задача 163. Едно множество C от реални числа е компактно тогава и само тогава, когато всяка редица от елементи на C притежава сходяща подредица с граница от C.

Задача 164. Ако множествата $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots$ са непразни и компактни, сечението им не е празно.

Пета глава

Граници на функции

§ 1. Граница на функция, когато аргументът клони към крайна граница

Задача 1°. Да се намери такова положително число δ, че за всяко x, за което е в сила неравенството $|x-1| < \delta$, да е изпълнено и неравенството $|x^2 - 1| < 0{,}01$.

Задача 2°. Да се намери най-голямата околност U на числото 1 със свойството: от $x \in U$ да следва $|x^2 - 1| < 0{,}01$.

Задача 3°. Да се намери най-голямата симетрична околност U на точката 1 със свойството: от $x \in U$ да следва $|x^2 - 1| < 0{,}01$.

Задача 4°. Да се намери такова положително число δ, че за всяко x, за което е в сила неравенството $|x-1| < \delta$, да е изпълнено и неравенството $|x^3 - 1| < 0{,}001$.

Задача 5. Нека ε е произволно положително число. Да се намери такова положително число δ, че за всяко x, за което е в сила неравенството $|x - 1| < \delta$, да е изпълнено и неравенството $|x^3 - 1| < \varepsilon$.

Задача 6°. За произволно реално a да се намери такова положително число δ, че от неравенството $|x - a| < \delta$ да следва неравенството $|x^3 - a^3| < 0{,}01$.

Задача 7. За произволно реално a и за произволно положително число ε да се намери такова положително число δ, че от неравенството $|x - a| < \delta$ да следва $|x^3 - a^3| < \varepsilon$.

Задача 8. Нека $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ и $\varepsilon > 0$. Да се намери такова положително число δ, че ако $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Задача 9. Нека ε е произволно положително число. Да се намери такова положително число δ, че за всяко x, за което е в сила неравенството $|x - 3| < \delta$, да е изпълнено и неравенството

$$\left|\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{10}\right| < \varepsilon.$$

Ако x е реално число, със $[x]$ (чете се *скобка* x) се означава най-голямото цяло число n, за което $n \leqq x$.

Така например $[1] = 1$, $[e] = 2$, $\left[-\dfrac{5}{2}\right] = -3$.

Задача 10°. Не съществува положително число δ, за което от неравенството $|x-1|<\delta$ да следва винаги неравенството $|[x]-1|<1$.

Задача 11. Нека ε е произволно положително число. Да се намери такова положително число δ, че за всяко x, за което е в сила $|x - 1| < \delta$ и $x \neq 1$, да е изпълнено и неравенството

$$\left|\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Ако A е множество от реални числа, едно реално число a се нарича *точка на сгъстяване* на A, когато всяка околност на a съдържа безбройно много елементи на A.

Всяка точка на сгъстяване на едно числово множество A принадлежи на затворената обвивка $[A]$ на A. Обратното изобщо не е вярно.

Задача 12°. Да се построи пример на множество A и на точка a от затворената му обвивка $[A]$, която не е точка на сгъстяване на A.

Задача 13°. Да се намерят множествата на всичките точки на сгъстяване на:

а) множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа; б) множеството $\mathbf{I}$ на целите числа; в) интервала $(0, 1)$.

Ако са дадени функция $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$, точка на сгъстяване a на дефиниционната област X на f и реално число l, последното се нарича *граница на функцията f при x, клонящо към a* (чрез стойности, различни от a), и се пише $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, когато за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяко реално x, за което $|x - a| < \delta$, $x \neq a$ и $x \in X$, да е в сила неравенството $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Когато $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, се казва още, че $f(x)$ *клони към l при x, клонящо към a*.

Така например, ако зад. 9 и 11 са вече решени, по същество това означава, че са доказани равенствата $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{3}{10}$ и $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$. От зад. 10 пък следва, че $[x]$ не клони към 1 при x, клонящо към 1.

Така въведеното понятие граница на функция е свързано с понятието граница на редица с помощта на следната

Теорема на Хайне. *Ако са дадени функция $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$, точка на сгъстяване a на дефиниционната област X на f и реално число l, условието*

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *е в сила тогава и само тогава, когато за всяка редица* $x_1, x_2, \ldots,$ *за която* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ *и* $x_n \in X$, *е в сила* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

От теоремата на Хайне и от зад. 30 б), 35, 38, 49, 73 и 74 на предишната глава следва, че за всяко a от дефиниционната област на съответната функция са в сила равенствата:

(а) $$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad (k \in \mathbf{N}),$$

(б) $$\lim_{x\to a} R(x) = R(a) \quad (R \text{ — рационална функция}),$$

(в) $$\lim_{x\to a} |x| = |a|,$$

(г) $$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a,$$

(д) $$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a,$$

(е) $$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a,$$

(ж) $$\lim_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a,$$

(з) $$\lim_{x\to a} e^x = e^a,$$

(и) $$\lim_{x\to a} \ln x = \ln a.$$

Тъй като $b^x = e^{x\ln b}$ за всяко $b > 0$ и $x^b = e^{b\ln x}$ за всяко $x > 0$, от теоремата на Хайне, от (з) и (и) следва:

(к) $$\lim_{x\to a} b^x = b^a,$$

(л) $$\lim_{x\to a} x^b = a^b.$$

Също от теоремата на Хайне и от правилата за действия със сходящи редици следват равенствата:

(А) $$\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x);$$

(Б) $$\lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x);$$

(В) $$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x);$$

(Г) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

винаги когато десните страни имат смисъл.

§ 2. Граници на някои алгебрични функции, когато аргументът клони към крайна граница

Задача 14. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x+1}{x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; д) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; е) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; з) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4} + \dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$;

й) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m, n \in \mathbf{I}, n \neq 0)$; к) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)$;

л) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; м) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

н) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)$; о) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)$;

п) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(0 \leq b < a)$; р) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m, n \in \mathbf{N})$;

с) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$; т) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^2}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

Задача 15. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x}-\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\left(\sqrt{1+x}-\left(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4}\left(\sqrt{1+x}-\left(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}\right)\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt[n]{1+x}-1\right)$ $(n \in \mathbf{N})$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\sqrt[n]{1+x}-1-\frac{x}{n}\right)$ $(n\in\mathbf{N})$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\sqrt[n]{1+x}-1-\frac{x}{n}+\frac{n-1}{2n^2}x^2\right)$ $(n\in\mathbf{N})$.

§ 3. Някои приложения на равенството $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Задача 16. Нека функциите $f: A\to\mathbf{R}$ и $\varphi: B\to\mathbf{R}$ $(A\subset\mathbf{R}, B\subset\mathbf{R})$ удовлетворяват условията $\varphi(B)\subset A$, $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)=a$ и $\varphi(B\setminus\{b\})\subset A\setminus\{a\}$, където a и b са точки на сгъстяване съответно на A и B. Да се докаже равенството $\lim\limits_{x\to b}f(\varphi(x))=\lim\limits_{u\to a}f(u)$ винаги когато дясната страна съществува.

Горната задача в същност изразява едно правило за намиране на граница на функция от функция.

В следващите задачи често се използва равенството $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, което следва от неравенствата $0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2}$ (ъгълът $x\neq 0$ се измерва в радиани).

Задача 17. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^2}$.

Задача 18°. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ $(b\neq 0)$.

Задача 19. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 2\pi x}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 3\pi x}{\sin 4\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin m\pi x}{\sin n\pi x}$ $(m, n\in\mathbf{I}, n\neq 0)$.

Задача 20. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{3\pi}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}x}{x-1}$ $(n\in\mathbf{I})$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(2m+1)\frac{\pi}{2}x}{\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}x}$ $(m, n\in\mathbf{I})$.

Задача 21. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$ $(\cos a\neq 0)$; г) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$ $(\sin a\neq 0)$.

Задача 22. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax-\operatorname{tg} bx}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}x(\operatorname{ctg} ax-\operatorname{ctg} bx)$ $(ab\neq 0)$.

Задача 23. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\sin\frac{\nu}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\cos\frac{\nu}{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\sin\left(a+\frac{b-a}{n}\nu\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\cos\left(a+\frac{b-a}{n}\nu\right)$.

Задача 24. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdots\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ корена}}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}4^{\nu}\sin^4\frac{x}{2^{\nu}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{4^{\nu}\cos^2\frac{x}{2^{\nu}}}$ $(\sin x\neq 0)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\frac{1}{2^{\nu}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{\nu}}$ $(\sin 2x\neq 0)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\frac{1}{4^{\nu}}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2^{\nu}}$ $(\sin 2x\neq 0)$.

Задача 25*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \frac{x}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \frac{x}{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{n} + \lambda \sin\frac{x}{n}\right)^n$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$.

Задача 26. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax\cos bx}{x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(1-\cos a_1x\cos a_2x\ldots\cos a_kx)$; з) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^n x}{x^2}$.

Задача 27. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+\sin x^2}-\cos x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\sqrt[3]{1+x\sin x}-\cos 2x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\sqrt[n]{1+x^{2-\alpha}\sin^\alpha x}-\cos ax\right)$.

Задача 28. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(2\sin\frac{x}{2}-\sin x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(n\sin\frac{x}{n}-\sin x\right)$.

§ 4. Апроксимация на $\sin x$ и $\cos x$ с полиноми

Задача 29*. Да се докажат неравенствата:

а) $$\left|\sin x - \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{n}{2\nu+1}\cos^{n-2\nu-1}\frac{x}{n}\sin^{2\nu+1}\frac{x}{n}\right| \leqq \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{k^2}{k^2-x^2};$$

б) $$\left|\cos x - \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{n}{2\nu}\cos^{n-2\nu}\frac{x}{n}\sin^{2\nu}\frac{x}{n}\right| \leqq \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}\cdot\frac{k^2}{k^2-x^2}$$

при $|x| < k$.

Задача 30. Да се пресметне границата:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{\nu}\cos^{n-\nu}\frac{x}{n}\sin^\nu\frac{x}{n} \quad (\nu-1\in\mathbf{N}).$$

Задача 31. Да ѓе докажат неравенствата:

а) $$\left|\sin x - \sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}x^{2\nu+1}\right| \leqq \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{k^2}{k^2-x^2};$$

б) $$\left|\cos x - \sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}x^{2\nu}\right| \leqq \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}\cdot\frac{k^2}{k^2-x^2}$$

при $|x| < k$.

Задача 32. Да се докажат равенствата:

а) $\sin x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}x^{2\nu+1}$;

б) $\cos x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}x^{2\nu}$.

Задача 33. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}(\sin x - x)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2k+1}}\left(\sin x - \sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}x^{2\nu+1}\right)$ $(k\in\mathbf{N})$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2k}}\left(\cos x - \sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}x^{2\nu}\right)$ $(k\in\mathbf{N})$.

§ 5. Апроксимация на показателната функция с полиноми

Задача 34*. Да се докаже неравенството

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\frac{x^\nu}{n^\nu}\right| \leqq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k}{k-|x|}$$

при $|x| < k < n$.

Задача 35. Да се докаже неравенството

$$\left|e^x - \sum_{\nu=0}^{k}\frac{x^\nu}{\nu!}\right| \leqq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k}{k-|x|}$$

при $|x| < k$.

Задача 36. Да се докаже равенството $e^x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{k}\frac{x^\nu}{\nu!}$.

Задача 37. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(e^x-1)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(e^x-1-x)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^k}\left(e^x-\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\frac{x^\nu}{\nu!}\right)$.

Задача 38. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(a^x-1)\ (a>0)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(a^x-1-x\ln a)\ (a>0)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^k}\left[a^x-\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\frac{(\ln a)^\nu}{\nu!}x^\nu\right]\quad (a>0)$.

Задача 39. Да се пресметне:

а) $\sin 10^\circ$ с точност 10^{-4}; б) e с точност 10^{-6}.

§ 6. Граници на функции при неограничено нарастване на аргумента

Ако са дадени функция $f: X \to \mathbb{R}$ ($X \subset \mathbb{R}$), чиято дефиниционна област X не е ограничена отгоре, и реално число l, последното се нарича *граница*

на функцията f при x, клонящо към ∞ (по-добре: *при x, дивергиращо към ∞*), и се пише $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, когато за всяко положително число ε съществува такова число Δ, че за всяко реално x, за което $x > \Delta$ и $x \in X$, да е в сила неравенството $|f(x) - l| < \varepsilon$.

При $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ се казва още, че $f(x)$ клони към l при x, клонящо към ∞.

Лесно се съобразява как трябва да се модифицира тази дефиниция, за да се даде смисъл на символа $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, а също така и как да се редактират съответните теореми на Хайне. От едната от тях и от зад. 64 б), гл. IV следва равенството $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Също така непосредствено се съобразява кога и как може да се даде смисъл на символите $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ и т. н.

От зад. 64 а) и 76 а) и б), гл. IV следват равенствата $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$.

Задача 40. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}-x\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{30}{7}}\left(\sqrt[7]{x^5+2}-\sqrt[7]{x^5-3}\right)$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{\gamma(n-1)}{n}}\left(\sqrt[n]{x^\gamma+\alpha}-\sqrt[n]{x^\gamma+\beta}\right)\quad(\gamma>0)$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha\left(\sqrt[n]{x^\gamma+1}-\sqrt[n]{x^\gamma-1}\right)$; й) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos(1+x)^p-\cos x^p\right)\quad(p<1)$.

Задача 41°. Да се докаже, че границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tg} x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{ctg} x$,

не съществуват.

Задача 42°. За кои стойности на α съществуват границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x^\alpha}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha \cos x$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^\alpha}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha^x}{1+\alpha^x}$ $(0<\alpha)$.

Задача 43. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m}$ $(a_0b_0\neq 0)$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m}$ $(a_0b_0\neq 0)$.

§ 7. Сравняване растенето на функциите a^x, x^a и $\ln x$

Задача 44. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2^x}=0$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{a^x}=0$ $(a>1)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{a^x}=0$ $(a>1)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{a^x}=0$ $(a>1,\ n\in\mathbf{N})$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{R(x)}{a^x}=0$ $(a>1,\ R$ — рационална функция);

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x}=0$ $(a>1,\ \alpha\in\mathbf{R})$.

Задача 45. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$ $(\alpha>0)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\infty$ $(\alpha\leqq 0)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$.

Задача 46°. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^na^x=0$ $(a>1)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha a^x=0$ $(0<a<1)$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^n}{a^x}=0$ $(0<a<1)$.

Задача 47. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^2=0$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha\ln x=0$ $(\alpha>0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha\ln x=-\infty$ $(\alpha\leqq 0)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} x^x=1$; е) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}}=0$; ж) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}}\ln x=0$.

Задача 48. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+(\ln x)^2}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2^x+\ln(3x^2-1)}{3^x-71x^{101}-\left(\frac{5}{2}\right)^x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\ln(e^x-1)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\ln(e^x-x^2)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln[x+(\ln x)^2]}{\ln x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^\alpha-\ln x)$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^3+x^2+1)}{\ln(x^2-2x-2)}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+2^x)}{\ln(x-3)}$; й) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2^{\sqrt{3x}}}$; к) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(x+2^{\sqrt{3x-1}}\right)$.

§ 8. Някои приложения на равенството

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Задача 49°. Ако a е точка на сгъстяване на общата дефиниционна област на функциите f и g, $f(x)>0$, $g(x)\geqq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, неравенството $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}>1$ не е възможно.

Задача 50°. Нека функцията f е дефинирана в околност на нулата. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=l$ следва $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$;

б) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ следва $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$.

Задача 51. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Задача 52. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ следва $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^x = e^a$;

б) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ следва $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^x = \infty$;

в) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ и $1+\dfrac{f(x)}{x} \geqq 0$ следва $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^x = 0$.

Задача 53. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ следва $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^x = e^a$;

б) от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ следва $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^x = 0$;

в) от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ и $1+\dfrac{f(x)}{x} > 0$ следва $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^x = \infty$.

Задача 54. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a$ следва $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = e^a$;

б) от $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ и $1+xf(x) > 0$ следва $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = \infty$;

в) от $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ и $1+xf(x) > 0$ следва $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = 0$.

Задача 55°. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+ax}{1+bx}\right)^{\frac{1}{(a+b)x}}$ $(a+b\neq 0)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3x+1}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x+3x^2+x^3}{1+x+2x^2+x^3}\right)^{\frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k}{1+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_kx^k}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задача 56°. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\operatorname{ctg} 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[\sin x]{1+\sin x\cos x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4\operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Задача 57°. Ако $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = a$, където функцията f удовлетворява неравенството $1+xf(x) > 0$, то

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \ln a & \text{при } a > 0, \\ -\infty & \text{при } a = 0. \end{cases}$$

§ 9. Някои приложения на равенството

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

Задача 58. Да се докаже равенството $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ $(a>0)$, като се използува зад. 57.

Задача 59. Да се докаже, че от $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = a > 0$ следва

$$\lim_{x\to 0}\frac{(g(x))^x-1}{x} = \ln a.$$

Задача 60. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$; б) $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{e^x-e^\xi}{x-\xi}$; в) $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{e^{\lambda x}-e^{\lambda\xi}}{x-\xi}$.

Задача 61°. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right) = \ln a$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right) = \ln a$.

Задача 62°. Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a > 0$ следва $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{f(x)}-1\right) = \ln a$;

б) от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a > 0$ следва $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[x]{f(x)}-1\right) = \ln a$.

Задача 63. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2\right)$ $(a>0)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$ $(a>0)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x+1}}-a^{\frac{1}{x^2-x+1}}\right)$ $(a>0)$.

Задача 64*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2.3^x+3.2^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(p\left(\dfrac{1+\lambda x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}+q\left(\dfrac{1+\mu x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^x$, където числата p, q, λ и μ са положителни и $p+q=1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^x+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задача 65. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\operatorname{tg} x}}{x-\operatorname{tg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\cos x}-2}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(a^{\sqrt{1+x}}-a\right)$ $(a>0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sqrt{1+x}}-a^{1+\frac{x}{2}}}{\sin^2 x}$ $(a>0)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left(a^{\sqrt{1+x}}-a^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}}\right)$ $(a>0)$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(a^{\sqrt[3]{1+x}}-a^{1+\frac{x}{3}}\right)$ $(a>0)$.

Задача 66. Да се докаже, че от $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-g(x)}{x^\alpha}=\lambda$ $(\alpha>0)$ и $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=l$ следва $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{f(x)}-a^{g(x)}}{x^\alpha}=\lambda a^l\ln a$ $(a>0)$.

Задача 67. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^{x^2}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^\alpha}-1}{x}$ $(a>1,\ \alpha>0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^{x^\alpha}}{x}$ $(\alpha>0)$.

§ 10. Някои приложения на равенството

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Задача 68. Да се докаже равенството $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Задача 69. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

Задача 70. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+a)-\ln a}{\sqrt[4]{a^4+x}-a}$ $(a>0)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln x-\ln 2}{x^2-5x+6}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x-e^3}{\ln x-\ln 3}$.

Задача 71*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$.

§ 11. Някои приложения на равенството

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$$

Задача 72. Да се докаже, че $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$.

Задача 73. Да се докаже, че $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^b-a^b}{x-a}=ba^{b-1}$ $(a>0)$.

Задача 74. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^\pi-2^\pi}{x^e-2^e}$ $(e\neq 0)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^a-3^a}{x^b-3^b}$ $(b\neq 0)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1+x}-1}{(1+x)^\alpha-1}$ $(\alpha\neq 0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin 2x}\left(\sqrt[6]{1+\ln(1+x)}-1\right)$.

Задача 75. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^\alpha x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}((\cos ax)^\alpha-(\cos bx)^\alpha)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}(1-\cos^\alpha ax\cos^\beta bx)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}(1-\cos^{\alpha_1}a_1x\cos^{\alpha_2}a_2x\ldots\cos^{\alpha_k}a_kx)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x\sin x)^\alpha-\cos ax}{\sin^2 x}$.

Задача 76*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1-ax}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1-\binom{a}{1}x-\binom{a}{2}x^2}{x^3}$.

Задача 77*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ $(\alpha+1>0)$.

Задача 78*. Да се пресметнат границите $(\alpha>1)$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}((x+1)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}-(\alpha+1)x^\alpha)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}((x+1)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}-(\alpha+1)(x+1)^\alpha)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\alpha+1)x^\alpha-(x^{\alpha+1}-(x-1)^{\alpha+1})}{x^\alpha-(x-1)^\alpha}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}-\dfrac{1}{\alpha+1}\right)$.

Задача 79*. Да се пресметнат границите $(\alpha>2)$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha-2}}[(\alpha+1)(x+1)^\alpha-2(x+1)^{\alpha+1}+2x^{\alpha+1}+(\alpha+1)x^\alpha]$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}-\dfrac{1}{\alpha+1}\right)-\dfrac{1}{2}\right]n$.

§ 12. Пресмятане на някои граници от вида

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}f\left(\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right)$$

Задача 80*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(\left(1+\dfrac{\nu}{n^2}\right)^\gamma-1\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(\left(1+\dfrac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right)^\gamma-1\right)$ $(0<\alpha<\beta)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(a^{\frac{\nu^\alpha}{n^\beta}b}-1\right)$ $(0<\alpha<\beta,\ 0<a)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sin\dfrac{\nu^\alpha}{n^\beta}a$ $(0<\alpha<\beta)$.

Задача 81*. Да се пресметне $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}f\left(\dfrac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right)$ $(0<a,$ $0<\alpha<\beta)$ при $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^\gamma}=l\neq 0$ $(\gamma>0)$.

Задача 82*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\dfrac{\nu}{n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\dfrac{\nu a}{n^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\dfrac{\nu^\alpha a}{n^{\alpha+1}}\right)$ $(0<\alpha)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=1}^{n} \left(1+\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right) \quad (0<\alpha<\beta)$;

Задача 83*. Да се пресметнат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=1}^{n} \cos\frac{\nu}{n\sqrt{n}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=1}^{n} \cos\frac{\nu a}{n^\alpha} \quad (1<\alpha)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=1}^{n} \cos\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta} \quad (1<\alpha<\beta)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=1}^{n} \cos^n\frac{a}{n^\alpha} \quad (\alpha>0)$.

§ 13. Лява и дясна граница

Ако A е множество от реални числа, едно реално число a се нарича *лява* (*дясна*) *точка на сгъстяване* на A, когато всеки интервал от вида (a, b) с $b > a$ (от вида (b, a) с $b < a$) съдържа безбройно много елементи на A.

Ако a е лява или дясна точка на сгъстяване на A, ясно е, че a е точка на сгъстяване на A.

Задача 84°. Да се докаже, че ако a е точка на сгъстяване на множеството A, е вярно поне едно от двете твърдения: a е лява точка на сгъстяване на A или a е дясна точка на сгъстяване на A.

Задача 85°. Да се намерят множествата на левите точки на сгъстяване на:

а) множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа;

б) множеството $\mathbf{I}$ на целите числа;

в) интервала $(0, 1)$;

г) интервала $[0, 1]$.

Ако са дадени функция $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$, лява (дясна) точка на сгъстяване a на дефиниционната област X на f и реално число l, последното се нарича *дясна* (*лява*) *граница на функцията* f *при* x, *клонящо към* a (чрез стойности, различни от a), и се пише $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = l$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = l$), когато за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяко x, за което $a < x < a+\delta$ $(a-\delta < x < a)$ и $x \in X$, да е в сила неравенството $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Задача 86°. Да се посочи пример на функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която границите $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ съществуват, без да съществува границата $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Задача 87°. Нека a е както лява, така и дясна точка на сгъстяване на дефиниционната област X на функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$. Да се докаже, че границата $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ съществува точно когато и двете граници $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ съществуват и са равни помежду си.

Задача 88. Нека функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е монотонна и ограничена, а a е лява (дясна) точка на сгъстяване на X. Да се докаже, че границата $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$) съществува.

Когато границата $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, респективно $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, съществува, понякога тя се означава с $f(a+0)$, респективно с $f(a-0)$.

Шеста глава

Непрекъснати функции

§ 1. Дефиниция на непрекъсната функция

Функцията $f: X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ се нарича *непрекъсната* в една точка $\xi \in X$, когато за всяка околност U на $f(\xi)$ съществува такава околност V на ξ, че е в сила включването $f(V \cap X) \subset U$.

С други думи, функцията f е непрекъсната в точката ξ, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко $x \in X$, за което е в сила неравенството $|x - \xi| < \delta$, да е изпълнено и неравенството $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

Ако тази дефиниция се сравни с дефиницията на граница на функция, може да се забележи, че функцията f е непрекъсната в една принадлежаща на X точка на сгъстяване ξ на X точно когато $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$. Но дефиницията на непрекъснатост на функция в точка има смисъл и когато $\xi \in X$ не е точка на сгъстяване на X. Не е трудно да се съобрази, че тогава функцията f е непрекъсната в точката ξ.

Когато функцията f не е непрекъсната в точката ξ на X, тя се нарича *прекъсната* в ξ.

Когато една функция е непрекъсната във всяка точка на дефиниционната си област, тя се нарича *непрекъсната*. Една функция се нарича *прекъсната*, когато е прекъсната в поне една точка от дефиниционната си област.

Задача 1°. Да се докаже, че функцията:

а) $f(x) = x^3$ е непрекъсната; б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ е непрекъсната;

в) $f(x) = |x|$ е непрекъсната.

Задача 2°. Да се докаже, че:

а) функцията $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, дефинирана с равенството $f(x) = \dfrac{1}{x}$, е непрекъсната;

б) всяка функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, е прекъсната в точката 0.

Задача 3°. Къде е прекъсната функцията $f: [-1, 1] \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } -1 \leqq x < 0, \\ x+1 & \text{при } \ \ 0 \leqq x \leqq 1? \end{cases}$$

Задача 4. Непрекъсната ли е функцията $f: [-1, 0] \cup \{1\} \cup [2, 5] \to \mathbf{R}$, дефинирана с помощта на следните равенства:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -1 \leqq x \leqq 0, \\ 2 & \text{при } \ \ x = 1, \\ 5 - x & \text{при } \ \ 2 \leqq x \leqq 5? \end{cases}$$

Задача 5. За коя стойност на λ функцията $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с:

а) $f(x) = \begin{cases} x \ln(1 + x^2) & \text{при } x \neq 0, \\ \lambda & \text{при } x = 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x \ln |x|^3 & \text{при } x \neq 0, \\ \lambda & \text{при } x = 0, \end{cases}$

е непрекъсната?

Задача 6. а) Нека ξ е такава точка на $X \subset \mathbf{R}$, че всяка функция $f: X \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в ξ. Какво можете да кажете за точката ξ?

б) Всяка функция $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ е непрекъсната.

в) Всяка функция $f: \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\} \to \mathbf{R}$ е непрекъсната.

г) Нека $X = \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{0\}$. Кога една функция $f: X \to \mathbf{R}$ е непрекъсната?

Задача 7. Какво трябва да бъде множеството $X \subset \mathbf{R}$, за да бъде непрекъсната всяка функция $f: X \to \mathbf{R}$?

Непрекъснатостта може да се установява директно, както в посочените дотук примери. По-удобно е обаче за тази цел да се използват някои общи теореми за непрекъснатите функции.

Теорема на Хайне: *Ако са дадени функция $f: X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ и точка ξ от X, функцията f е непрекъсната в точката ξ точно когато за всяка редица $x_1, x_2, \ldots$ с $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$ и $x_n \in X$ е в сила $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\xi)$.*

От теоремата на Хайне и от правилата за действия със сходящи редици следва, че сума, разлика, произведение и частно на непрекъснати функции са непрекъснати функции. Непрекъсната функция от непрекъсната функция също е непрекъсната функция.

От равенствата (а) — (л) в началото на пета глава следва, че функциите $\sqrt[k]{x}$ $(k \in \mathbf{N})$, $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x $(a > 0)$, $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, x^2, както и рационалните функции са непрекъснати.

Задача 8. а) Ако функцията $f: X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е непрекъсната в една точка $\xi \in X$, функцията $|f|$ също е непрекъсната в ξ.

б) Ако функциите $f: X \to \mathbf{R}$ и $g: X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ са непрекъснати в една точка $\xi \in X$, функциите $\min(f, g)$ и $\max(f, g)$ са също непрекъснати в ξ.

Задача 9°. Да се намерят всичките точки, в които функциите $[x]$ и $x - [x]$ са непрекъснати.

Една функция $f: X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ се нарича *ограничена отгоре* (*отдолу*), когато съществува такава константа A, че за всяко x от X да е в сила неравенството $f(x) \leqq A$ $(A \leqq f(x))$. Функцията f се нарича *ограничена*, когато е ограничена отдолу и отгоре. Очевидно това означава, че съществува константа A, за която $|f(x)| \leqq A$ за всяко x от X.

Задача 10. Функциите f и g имат обща дефиниционна област $X \subset \mathbf{R}$ и g е непрекъсната в една точка ξ на X. Да се докаже, че:

а) ако f е ограничена в X и $g(\xi) = 0$, произведението fg е непрекъснато в ξ.

б) ако $g(\xi) \neq 0$, произведението fg е непрекъснато в ξ точно когато функцията f е непрекъсната в ξ.

Задача 11°. Да се докаже, че функцията $[x] \sin \pi x$ е непрекъсната.

Дефинираната с $D(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \text{ ирационално,} \\ 1 & \text{при } x \text{ рационално} \end{cases}$ функция $D: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ се нарича **функция на Дирихле**.

Задача 12°. Функцията на Дирихле е прекъсната за всяко реално x.

Задача 13°. а) Да се построи функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, която е прекъсната навсякъде, а функцията f^2 е непрекъсната.

б) Да се докаже, че ако f е функция, за която функцията f^3 е непрекъсната, то и f е непрекъсната.

Задача 14°. а) Да се построи функция f, която е прекъсната навсякъде, а функцията $|f|$ е непрекъсната.

б) Всяка непрекъсната положителна функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е модул на някоя навсякъде прекъсната функция.

Задача 15. Да се построи функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, която е непрекъсната само в точките:

а) $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots, \pm\frac{1}{n}, \ldots;$

б) $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots, \pm\frac{1}{n}, \ldots;$

в) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots;$ г) $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Задача 16. а) Нека $p_1, p_2, \ldots$ и $q_1, q_2, \ldots$ са редици съответно от цели и от естествени числа, а числото ξ е ирационално. Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$.

б) Нека функцията $\sigma: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е дефинирана с условията: $\sigma(x) = 0$ за всяко ирационално x и $\sigma(x) = \frac{1}{q}$, когато рационалното число x е представено във вида $\frac{p}{q}$, където p е цяло число, а q е взаимно просто с него естествено число. Да се докаже, че σ е прекъсната във всички рационални точки и е непрекъсната за всяко ирационално x.

Задача 17*. Една функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е непрекъсната точно когато за всяко отворено подмножество U на $\mathbf{R}$ множеството $f^{-1}(U)$ е отворено.

Задача 18*. Една функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е непрекъсната точно когато за всяко затворено подмножество F на $\mathbf{R}$ множеството $f^{-1}(F)$ е затворено.

Нека $f: M \to \mathbf{R}$ $(M \subset \mathbf{R})$ и $g: N \to \mathbf{R}$ $(N \subset \mathbf{R})$ са произволни функции. Функцията f се нарича *продължение* на функцията g, когато $N \subset M$ и е в сила равенството $f(x) = g(x)$ за всяко x от N. В този случай g се нарича *рестрикция* на f до N и се означава с $f|_N$. Когато функцията f е непрекъсната, понякога тя се нарича *непрекъснато продължение* на g.

Задача 19*. Нека $f: X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е произволна функция, а L е множеството на всичките реални числа ξ, за които $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ съществува. Да се докаже, че функцията $g: L \to \mathbf{R}$, дефинирана с $g(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ за всяко ξ от L, е непрекъсната.

Задача 20. Да се докаже, че:

а) за произволна функция $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ съществува непрекъсното продължение $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

б) за всяка непрекъсната функция $f: F \to \mathbf{R}$, където F е непразно затворено множество в $\mathbf{R}$, съществува непрекъснато продължение $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за което $\inf\limits_{x\in R} g(x) = \inf\limits_{x\in F} f(x)$ и $\sup\limits_{x\in R} g(x) = \sup\limits_{x\in F} f(x)$;

в) ако множество $X \subset \mathbf{R}$ не е затворено, съществува непрекъснатата функция $f: X \to \mathbf{R}$, която не притежава непрекъснато продължение $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

§ 2. Множество на стойностите на непрекъсната функция

Следващата теорема констатира едно характерно свойство на непрекъснатите функции.

Теорема на Болцано. *Ако функцията $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в ограничения затворен интервал $[a, b]$ и приема в краищата му стойности с противоположни знаци, съществува точка ξ от (a, b) с $f(\xi) = 0$.*

От теоремата на Болцано следва непосредствено, че множеството на стойностите на всяка непрекъсната функция, чиято дефиниционна област е интервал, е също интервал. Разбира се, последният може да бъде затворен, полузатворен, отворен, ограничен или пък неограничен.

Така например множествата на стойностите на функциите $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{ctg} x$ $(0 < x < \pi)$, e^x, $\ln x$ $(x > 0)$ и т. н. са съответно $[-1, 1]$, $[-1, 1]$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$, $(0, \infty)$, $\mathbf{R}$ и т. н.

Задача 21. Да се решат неравенствата:

а) $\sin x - \cos x > 0$; б) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{3} > 0$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^4-2x^2} < 2^{-8x^2-9}$;

г) $\log_a x + \log_a(x+1) < \log_a(2x+6)$ $(0 < a \neq 1)$; д) $\ln|2x-3| < 1$.

Задача 22°. Функцията $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната, приема само рационални стойности и $f(0) = 2$. Да се намери $f(1)$.

Задача 23. Имат ли корени следващите уравнения в посочените интервали:

а) $x^5 - 3x + 1 = 0$ в $[1, 2]$; б) $\sin x - x + 1 = 0$ в $(-\infty, \infty)$;

в) $x^3 - 3x + 1 = 0$ в $[-1, 2]$; г) $x^3 - 3x + 1 = 0$ в $[-1, 0]$;

д) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 14x + 24 = 0$ в $[2, 5]$;

е) $x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 14x + 14 = 0$ в $[3, \infty)$;

ж) $P(x) = 0$ в $(-\infty, \infty)$, където P е полином от нечетна степен;

з) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x - 24} = 0$ в $[5, 7]$;

и) $\operatorname{tg} x = x$ в $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ при $k \in \mathbf{I}$;

й) $\operatorname{ctg} x = P(x)$ в $(k\pi, (k+1)\pi)$ при $k \in \mathbf{I}$, където P е произволен полином?

Задача 24*. Да се намерят:

а) всичките полиноми $ax^2 + bx + c$ най-много от втора степен, за които числата $ax^2 + bx + c$ и x са едновременно цели;

б) всичките полиноми P, за които числата $P(x)$ и x са едновременно цели.

§ 3. Обратни кръгови функции

Задача 25*. Да се докаже, че:

а) ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$, където Δ е интервал, е стриктно монотонна, обратната ѝ функция е непрекъсната;

б) ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$, където Δ е интервал, е непрекъсната и обратима, тя е стриктно монотонна.

Функцията $\sin x$ е стриктно растяща в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а множеството на стойностите ѝ, когато x пробягва този интервал, е интервалът $[-1, 1]$. Обратната функция на функцията $\sin x$, разглеждана само в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, се нарича *аркусинус* и се означава с $\arcsin x$. Съгласно казаното по-горе дефиниционната ѝ област е интервалът $[-1, 1]$, а множеството на стойностите ѝ е интервалът $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Условията $y = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ и $x = \arcsin y$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$ са равносилни. Оттук незабавно следва, че са в сила равенствата $\arcsin(\sin x) = x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin(\arcsin y) = y$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$.

Аналогично се дефинира *аркускосинус* като обратна функция на стеснената до интервала $[0, \pi]$ функция $\cos x$. В този интервал функцията $\cos x$ е стриктно намаляваща и множеството на стойностите ѝ, когато x пробягва интервала $[0, \pi]$, е интервалът $[-1, 1]$. Дефинираната в интервала $[-1, 1]$ функция аркускосинус се означава с $\arccos x$. Стойностите ѝ изпълват интервала $[0, \pi]$. Условията $y = \cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ и $x = \arccos y$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$ са равносилни. Оттук незабавно следва, че са в сила равенствата $\arccos(\cos x) = x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ и $\cos(\arccos y) = y$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$.

Обратната на стеснената до интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} x$ се нарича *аркустангенс* и се означава с $\operatorname{arctg} x$. Дефиниционната област на функцията $\operatorname{arctg} x$ е $\mathbf{R}$, а множеството на стойностите ѝ е интервалът $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Условията $y = \operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ и $x = \operatorname{arctg} y$ $(y \in \mathbf{R})$ са равносилни. Оттук незабавно следва, че са в сила равенствата $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y$ $(y \in \mathbf{R})$.

Най-после обратната на стеснената до интервала $(0, \pi)$ функция $\operatorname{ctg} x$ се нарича *аркускотангенс* и се означава с $\operatorname{arcctg} x$. Дефиниционната област на $\operatorname{arcctg} x$ е $\mathbf{R}$, а множеството на стойностите на тази функция е интервалът $(0, \pi)$. Условията $y = \operatorname{ctg} x$ $(0 < x < \pi)$ и $x = \operatorname{arcctg} y$ $(y \in \mathbf{R})$ са равносилни. Оттук незабавно следва, че са в сила равенствата $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ $(0 < x < \pi)$ и $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} y) = y$ $(y \in \mathbf{R})$.

От зад. 25 а) следва, че обратните тригонометрични функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ са непрекъснати.

Задача 26. Да се докажат тъждествата:

а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$;

б) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$;

в) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbf{R})$;

г) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \quad (x \in \mathbf{R})$.

Задача 27. Да се докажат тъждествата ($n \in \mathbf{I}$):

а) $\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2n\pi & \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), \\ -x + (2n+1)\pi & \left(-\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right); \end{cases}$

б) $\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2n\pi & (2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi), \\ -x + 2(n+1)\pi & ((2n+1)\pi \leqq x \leqq 2(n+1)\pi); \end{cases}$

в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - n\pi \quad \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - n\pi \quad (n\pi < x < (n+1)\pi)$.

Задача 28. Да се докажат тъждествата:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$.

Задача 29. Да се докажат тъждествата:

а) $\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2} & (0 \leqq x \leqq 1), \\ -\arccos\sqrt{1-x^2} & (-1 \leqq x \leqq 0); \end{cases}$

б) $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$;

в) $\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (0 < x \leqq 1), \\ \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi & (-1 \leqq x < 0). \end{cases}$

Задача 30. Да се докажат тъждествата:

а) $\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2} & (0 \leqq x \leqq 1), \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} & (-1 \leqq x \leqq 0); \end{cases}$

б) $\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (0 < x \leqq 1), \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (-1 \leqq x < 0); \end{cases}$

в) $\arccos x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$.

Задача 31. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

б) $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (0 \leqq x), \\ -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \leqq 0); \end{cases}$

в) $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} & (0 < x), \\ \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi & (x < 0). \end{cases}$

Задача 32. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (0 < x), \\ \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x < 0), \end{cases}$

б) $\operatorname{arcctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} & (0 < x), \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} & (x < 0). \end{cases}$

Задача 33. Да се докажат тъждествата:

а) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$;

б) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 34. Да се докажат тъждествата:

а) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$;

б) $\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $\cos(\operatorname{arc\,ctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 35. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$;

б) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (0 \neq |x| \leqq 1)$;

в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$.

Задача 36. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (0 \neq |x| \leqq 1)$;

б) $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$;

в) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$.

Задача 37. Да се докажат тъждествата:

а) $\sin(2\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; б) $\cos(2\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Задача 38. Да се докажат тъждествата:

а) $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$
$(xy \leqq 0$ или $x^2+y^2 \leqq 1)$;

б) $\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$
$(x > 0,\ y > 0$ и $x^2+y^2 > 1)$;

в) $\arcsin x + \arcsin y = -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$
$(x < 0,\ y < 0$ и $x^2+y^2 > 1)$.

Задача 39. Да се докажат тъждествата:

а) $\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad (x+y \geqq 0)$;

б) $\arccos x + \arccos y = 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$
$(x+y < 0)$.

Задача 40. Да се докажат тъждествата:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy} & (xy < 1), \\ \pi - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy} & (x > 0,\ xy > 1), \\ -\pi + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy} & (x < 0,\ xy > 1). \end{cases}$$

Задача 41. Да се докаже тъждеството

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{2}\pi\right) = x - [x] - \frac{1}{2}.$$

§ 4. Полиноми на Чебишов

Задача 42. Да се докажат тъждествата:

а) $\cos(n\arccos x) = x^n - \dbinom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2)$

$$+\binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \binom{n}{6}x^{n-6}(1-x^2)^3 + \cdots;$$

б) $\dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dbinom{n+1}{1}x^n$

$$-\binom{n+1}{3}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n+1}{5}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots$$

Полиномът $\cos(n\arccos x)$ от n-та степен на x (зад. 42 а)) се нарича *n-ти полином на Чебишов от първи род* (или кратко *n-ти полином на Чебишов*) и се означава с $T_n(x)$. Полиномът $\dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ от n-та степен на x (зад. 42 б)) се нарича *n-ти полином на Чебишов от втори род* и се означава с $U_n(x)$.

Задача 43. Да се докажат тъждествата:

а) $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$;

б) $U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$;

в) $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$;

г) $(1-x^2)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x)$.

Задача 44°. Старшият коефициент на полинома $T_n(x)$ е 2^{n-1}, а старшият коефициент на полинома $U_n(x)$ е 2^n.

Задача 45°. Да се намерят нулите на полиномите $T_n(x)$ и $U_n(x)$.

Задача 46*. Да се докаже, че измежду всички полиноми $P(x)$ от степен n със старши коефициент 1 само полиномът $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ удовлетворява неравенството $|P(x)| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$ при $-1 \leqq x \leqq 1$ (Чебишов).

Твърдението в зад. 46 се изразява кратко, като се каза, че полиномите на Чебишов *най-малко се отклоняват от нулата* в интервала $[-1, 1]$.

Задача 47. Да се докажат тъждествата:

а) $\arccos(T_n(x)) = n \arccos x - 2\nu\pi$ при

$$\cos(2\nu+1)\frac{\pi}{n} \leqq x \leqq \cos 2\nu\frac{\pi}{n} \quad \left(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right);$$

б) $\arccos(T_n(x)) = -n \arccos x + 2(\nu+1)\pi$ при

$$\cos 2(\nu+1)\frac{\pi}{n} \leqq x \leqq \cos(2\nu+1)\frac{\pi}{n} \quad \left(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right).$$

Задача 48. Да се формулира и докаже аналогично на горното твърдение за $\arcsin(T_n(x))$.

§ 5. Хиперболични функции и обратните им

Дефинираните с равенствата

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \ (x \neq 0)$$

функции се наричат съответно *хиперболичен синус*, *хиперболичен косинус*, *хиперболичен тангенс* и *хиперболичен котангенс*, а общо — *хиперболични функции*. Съществува тясна аналогия между хиперболичните и тригонометричните функции, както се вижда от следващите няколко задачи. Причината за тази аналогия се разкрива след преминаване в комплексна област. Формално тя се състои в следния феномен: ако в едно тригонометрично тъждество символите sin и cos се заместят формално със символите −sh и ch, се получава тъждество между хиперболични функции.

Задача 49°. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$ $(x \neq 0)$;

б) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Задача 50°. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$;

б) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

в) $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$;

г) $\operatorname{cth}(x+y) = \dfrac{1 + \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y}$ $(xy \neq 0)$.

Задача 51°. Да се докаже, че:

а) $\operatorname{ch} \mathbf{R} = \operatorname{ch}[0, \infty) = [1, \infty)$; б) $\operatorname{sh} \mathbf{R} = \mathbf{R}$;

в) $\operatorname{th} \mathbf{R} = (-1, 1)$; г) $\operatorname{cth}(\mathbf{R} \setminus \{0\}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Задача 52°. Да се докаже, че:

а) функцията $\operatorname{ch} x$ е стриктно растяща в $[0, \infty)$;

б) функцията $\operatorname{sh} x$ е стриктно растяща в $\mathbf{R}$;

в) функцията $\operatorname{th} x$ е стриктно растяща в $\mathbf{R}$;

г) функцията $\operatorname{cth} x$ е стриктно намаляваща както в $(-\infty, 0)$, така и в $(0, \infty)$.

От зад. 51 а) и 52 а) следва, че стеснената до интервала $[0, \infty)$ функция $\operatorname{ch} x$ е обратима и че обратната ѝ функция е дефинирана в интервала $[1, \infty)$. Последната се нарича *ареакосинус* и се означава с $\operatorname{Arch} x$. Стойностите ѝ очевидно изпълват интервала $[0, \infty)$.

От зад. 51 б) и 52 б) следва, че функцията $\operatorname{sh} x$ е обратима и че обратната ѝ функция е дефинирана в $\mathbf{R}$. Последната се нарича *ареасинус* и се означава с $\operatorname{Arsh} x$. Множеството на стойностите ѝ е $\mathbf{R}$.

От зад. 51 в) и 52 в) следва, че функцията $\operatorname{th} x$ е обратима и че обратната ѝ функция е дефинирана в $(-1, 1)$. Последната се нарича *ареатангенс* и се означава с $\operatorname{Arth} x$. Множеството на стойностите ѝ е $\mathbf{R}$.

От зад. 51 г) и 52 г), както и от неравенствата $\operatorname{cth} x < -1$ за $x < 0$ и $\operatorname{cth} x > 1$ за $x > 0$ следва, че функцията $\operatorname{cth} x$ е обратима и че обратната ѝ функция е дефинирана в множеството $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Последната се нарича *ареакотангенс* и се означава с $\operatorname{Arcth} x$. Множеството на стойностите ѝ е $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Задача 53. Да се докаже, че:

а) $\operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $(x \geqq 1)$;

б) $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

в) $\operatorname{Arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$;

г) $\operatorname{Arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}$ $(1 < |x|)$.

Задача 54. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{Arch} x = \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{Arth} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \operatorname{Arcth} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

при $x > 1$;

б) $\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arch}\sqrt{x^2+1} = \operatorname{Arth}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arcth}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

при $x > 0$.

§ 6. Най-голяма и най-малка стойност на непрекъснатата функция

Следващата теорема констатира друго характерно свойство на непрекъснатите функции.

Теорема на Вайерщрас. *Ако функцията $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в ограничения и затворен интервал $[a, b]$, измежду стойностите ѝ има една най-малка и една най-голяма.*

Задача 55°. Да се установи дали изброените функции притежават в посочените интервали най-малки и най-големи стойности:

а) $|x|$ в $[-1, 1]$; б) $x + \sqrt{x}$ в $(0, 4]$;

в) $\dfrac{1}{x}$ в $(0, 4]$; г) $[x]$ в $[-3, 5]$;

д) $2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$ в $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; е) $\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ в $(-1, 1]$.

Задача 56. Да се посочи пример на непрекъсната функция $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и на точка ξ от $\mathbf{R}$, такива че $f(\xi)$ е най-голямата стойност на f в $\mathbf{R}$, но f не е растяща в никой интервал от вида $[\xi-\varepsilon, \xi]$ и не е намаляваща в никой интервал от вида $[\xi, \xi+\varepsilon]$, където $\varepsilon > 0$.

Задача 57. а) Нека функцията $f:(a, b) \to \mathbf{R}$ е непрекъсната и границите $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ съществуват, като могат да бъдат и $-\infty$. Ако съществува точка ξ от (a, b), за която $f(\xi) \geqq \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $f(\xi) \geqq \lim\limits_{x\to b} f(x)$, измежду стойностите на функцията f има една най-голяма.

б) Да се докаже, че заключението на а) остава вярно и когато $a = -\infty$ или $b = \infty$.

в) Да се формулират и докажат твърдения, аналогични на онези от а) и б), но отнасящи се до съществуване на най-малка стойност.

Задача 58. Да се докаже, че за всяко реално число α функцията $(1+x)\operatorname{arctg} x - x\operatorname{arctg}\alpha$ на x има най-малка стойност в интервала $(-\infty, 1]$.

Задача 59°. Да се докаже, че за всяко реално число α с $0 < \alpha < 4$ функцията $\ln(x^2 + \alpha x + \alpha)$ на x има най-малка стойност в интервала $(-\infty, \infty)$.

Задача 60. Да се докаже, че за всяко положително число α функцията $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} - \dfrac{\alpha}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{x}{2}\ln\alpha$ на x притежава:

а) най-голяма стойност в интервала $[1, \infty)$ при $0 < \alpha < 1$;

б) най-голяма и най-малка стойност в интервала $\left[\dfrac{1}{10}, \infty\right)$ при $\alpha = 1$;

в) най-малка стойност в интервала $[1, \infty)$ при $\alpha > 1$.

Задача 61. Да се изследва за най-голяма и най-малка стойност функцията $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ във всеки от интервалите $(-\infty, -1)$ и $(0, \infty)$.

§ 7. Равномерна непрекъснатост

Една функция $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ се нарича *равномерно непрекъсната*, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че за всеки две точки x_1 и x_2 от X, за които $|x_1 - x_2| < \delta$, да е в сила неравенството $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Следващата теорема констатира трето характерно свойство на непрекъснатите функции.

Теорема на Кантор. *Ако функцията $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в ограничения и затворен интервал $[a, b]$, тя е равномерно непрекъсната.*

Задача 62°. Да се установи дали изброените функции са равномерно непрекъснати в посочените интервали:

а) $|x|$ в $[-1, 1]$; б) $x + \sqrt{x}$ в $(0, 4]$; в) $\dfrac{1}{x}$ в $(0, 4]$;

г) $[x]$ в $[-3, 5]$; д) x^2 в $(-\infty, \infty)$; е) $\sqrt{x}$ в $[0, \infty)$.

Задача 63. а) Нека функцията $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ е непрекъсната и границите $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ съществуват. Да се докаже, че f е равномерно непрекъсната.

б) Да се докаже, че заключението на а) остава вярно и когато $a = -\infty$ или $b = \infty$.

Задача 64. Да се установи дали изброените функции са равномерно непрекъснати в посочените интервали:

а) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ в $[1, \infty)$; б) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ в $(0, \infty)$;

в) e^{-x^2} в $(-\infty, \infty)$; г) $e^{-\frac{1}{x^2}}$ в $(0, \infty)$;

д) $\operatorname{arctg} x$ в $(-\infty, \infty)$; е) $\dfrac{\sin x}{x}$ в $(-\infty, 0)$;

ж) $\dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ в $(0, \infty)$; з) $\operatorname{tg} x$ в $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

и) $\dfrac{x^2}{2^x}$ в $[0, \infty)$; й) $\dfrac{x^2}{2^x}$ в $(-\infty, 0]$;

к) $\ln x$ в $[1, \infty)$; л) $\ln x$ в $(0, \infty)$; м) $\dfrac{x \ln x}{1+x}$ в $(0, \infty)$.

Задача 65*. а) Ако X е компактно множество от реални числа, всяка непрекъсната функция $f : X \to \mathbf{R}$ е равномерно непрекъсната.

б) Да се посочи пример на некомпактно множество X от реални числа, за което всяка функция $f : X \to \mathbf{R}$ е равномерно непрекъсната.

в) Ако X е такова множество от реални числа, че всяка непрекъсната функция $f : X \to \mathbf{R}$ е равномерно непрекъсната и всяка точка на X е точка на сгъстяване на X, множеството X е компактно.

Задача 66*. Нека A е компактна част на дефиниционната област X на функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ и нека f е непрекъсната във всяка точка на A. Да се докаже, че за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че от $x_1 \in A$, $x_2 \in X$ и $|x_1 - x_2| < \delta$ да следва $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Задача 67*. Една функция $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ притежава тогава и само тогава непрекъснато продължение $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, когато за всеки ограничен и затворен интервал $[a, b]$ функцията f е равномерно непрекъсната в $[a, b] \cap \mathbf{Q}$.

§ 8. Функционални уравнения

В следващите няколко задачи се решават някои класически *функционални уравнения*, т.е. търсят се функции с предписани свойства.

Задача 68*. Да се намерят всички непрекъснати функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за които е в сила равенството $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за всеки две реални числа x и y.

Задача 69*. Да се намерят всички непрекъснати функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за които е в сила равенството $f(x+y) = f(x)f(y)$ за всеки две реални числа x и y.

Задача 70*. Да се намерят всички непрекъснати функции $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, за които е в сила равенството $f(xy) = f(x) + f(y)$

за всеки две положителни числа x и y.

Задача 71*. Да се намерят всички двойки от непрекъснати функции $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за които са в сила равенствата

$$\begin{cases} s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x), \\ c(x+y) = c(x)c(y) + s(x)s(y) \end{cases}$$

за всеки две реални числа x и y и за които $s(0) = 0$, $c(0) = 1$.

Задача 72*. Да се намерят всички двойки от непрекъснати функции $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за които са в сила равенствата

$$\begin{cases} s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x), \\ c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y), \\ s^2(x) + c^2(x) = 1 \end{cases}$$

за всеки две реални числа x и y и за които $s(0) = 0$, $c(0) = 1$.

Задача 73*. Да се намерят всички двойки от непрекъснати функции $S : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $C : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за които са в сила равенствата

$$\begin{cases} S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x), \\ C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y) \end{cases}$$

за всеки две реални числа x и y и за които $S(0) = 0$, $C(0) = 1$.

§ 9. Осцилация на функция

Нека функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е ограничена в непразното подмножество M на X. Числото $\sup\left\{ |f(x) - f(y)| \;\middle|\; x, y \in M \right\}$ се нарича *осцилация* на функцията f *върху множеството* M и се бележи с $\omega(M, f)$. Понякога $\omega(X, f)$ се нарича *осцилация* на f.

Задача 74°. Да се намерят следните осцилации:

а) на функцията D на Дирихле;

б) на функцията D на Дирихле върху $\mathbf{Q}$;

в) на произволна функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$.

г) на функцията f от в) върху произволна околност на 0.

Задача 75°. Ако функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е ограничена в някое подмножество M на X и N е непразно подмножество на M, то $\omega(N, f) \leqq \omega(M, f)$.

Задача 76. Ако функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е ограничена в някое непразно подмножество M на X, то $\omega(M, f) = \sup\limits_{x \in M} f(x) - \inf\limits_{x \in M} f(x)$.

Задача 77°. Ако функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е монотонна, то $\omega([a, b], f) = |f(b) - f(a)|$.

Нека функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е ограничена в сечението $U \cap X$ на X с някоя околност U на точка a от затворената обвивка $[X]$ на X. Числото $\inf \omega(U \cap X, f)$, където U пробягва всевъзможните околности на a, се нарича *осцилация на f в точката a* и се означава с $\omega_a(f)$.

Задача 78°. Да се намери осцилацията:

а) $\omega_a(D)$ на функцията D на Дирихле в произволна точка a;

б) $\omega_a(\sigma)$ на функцията σ от зад. 16 б) в произволна точка a.

Задача 79. Да се докаже, че една функция $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е непрекъсната в точка ξ на X точно когато $\omega_\xi(f) = 0$.

Задача 80*. Да се докаже, че:

а) за произволна функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и за произволно положително число ε множеството $\{x \mid \omega_x(f) < \varepsilon\}$ е отворено;

б) за произволна функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и за произволно реално число λ множеството $\{x \mid \omega_x(f) \geqq \lambda\}$ е затворено;

в) съществува функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която множеството $\{x \mid \omega_x(f) > 1\}$ не е нито отворено, нито затворено; да се построи пример за такава функция.

§ 10. Множество на точките на непрекъснатост на една функция

Казва се, че едно множество $A \subset \mathbf{R}$ е *G_δ-множество*, когато съществува такава редица $U_1, U_2, \ldots$ от отворени в $\mathbf{R}$ множества, че $A = \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$.

Казва се, че едно множество $B \subset \mathbf{R}$ е *F_σ-множество*, когато съществува такава редица $F_1, F_2, \ldots$ от затворени в $\mathbf{R}$ множества, че $B = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$.

Задача 81. а) Всяко затворено подмножество на $\mathbf{R}$ е G_δ-множество, а всяко отворено подмножество на $\mathbf{R}$ е F_σ-множество.

б) Да се построи пример на множество от реални числа, което не е нито отворено, нито затворено, но е както F_σ-множество, така и G_δ-множество.

Задача 82. Едно подмножество A на $\mathbf{R}$ е точно тогава G_δ-множество, когато $\mathbf{R} \setminus A$ е F_σ-множество.

Задача 83*. а) За всяка редица $U_1, U_2, \ldots$ от отворени и гъсти множества сечението $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ е гъсто (Р. Б е р).

б) Да се построи пример на редица $A_1, A_2, \ldots$ от гъсти множества, за които $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

в) Никое изброимо и гъсто множество не е G_δ-множество.

Задача 84. а) Да се докаже, че за произволна функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ множеството на точките, в които f е непрекъсната, е G_δ-множество, а множеството на точките, в които f е прекъсната, е F_σ-множество.

б) За всяко G_δ-множество $A \subset \mathbf{R}$ съществува функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, чието множество на точките на непрекъснатост съвпада с A.

Задача 85°. Не съществува функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, чието множество на точките на непрекъснатост да съвпада с множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа.

Задача 86. Нека функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е дефинирана и монотонна в интервала Δ. Да се докаже, че множеството на точките на прекъсване на f е крайно или изброимо.

Седма глава

Производни

§ 1. Пресмятане на производни

Нека е дадена функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ и нека ξ от X е точка на сгъстяване на X. Казва се, че функцията f е *диференцируема* в точката ξ, когато съществува границата $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Тогава тази граница се нарича *производна* на f в ξ и се означава с $f'(\xi)$. И така по дефиниция

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \tag{1}$$

винаги когато дясната страна съществува.

От тази дефиниция се вижда, че например в зад. 21, 60, 69 и 73, гл. V, по същество са намерени производните на функциите $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x, $\ln x$ и x^a в произволни точки от дефиниционните им области.

Ако функцията f е диференцируема в точката ξ, тя е непрекъсната в ξ. Обратното не винаги е вярно.

За произволна функция $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ нека X' е множеството на всичките точки ξ на X, за които $f'(\xi)$ съществува. Ако на произволна точка x от X' се съпостави числото $f'(x)$, получава се функция $f' : X' \to \mathbb{R}$, която се нарича *производна* (*функция*) на функцията f или първа производна на f.

Намирането на производните на елементарните функции е алгоритмизуем процес. Ето основните правила за диференциране:

$$(af)' = af', \tag{2}$$

$$(f+g)' = f' + g', \tag{3}$$

$$(fg)' = f'g + fg', \tag{4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \tag{5}$$

$$\big(f(\varphi)\big)' = f'(\varphi)\varphi', \tag{6}$$

където a е константа, а f, g и φ са диференцируеми функции, като стойностите на φ принадлежат на дефиниционната област на f.

Тези правила наред със следната таблица на производни дават възможност да се намират производните на всички елементарни функции:

$$a' = 0 \qquad (a \text{ — константа}), \tag{7}$$

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1} \qquad (a \text{ — константа}), \tag{8}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x, \tag{9}$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \qquad (0 < a \text{ — константа}), \tag{10}$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}, \tag{11}$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (a \text{ — константа}, 0 < a \neq 1), \tag{12}$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x, \tag{13}$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x, \tag{14}$$

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{15}$$

$$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \tag{16}$$

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{17}$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{18}$$

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \tag{19}$$

$$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{20}$$

Тези формули трябва да се помнят. Поради честото им прилагане формулите от следващите две задачи също трябва да се помнят.

Задача 1. Да се докаже, че:

а) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; б) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

в) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; г) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Задача 2. Да се докаже, че:

а) $(\operatorname{Ar\,sh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $(\operatorname{Ar\,ch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

в) $(\operatorname{Ar\,th} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$; г) $(\operatorname{Ar\,cth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(1 < |x|)$.

Задача 3. Да се намерят производните на функциите:

а) $x^4 - 3x^2 + 5x - 1$; б) $\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{f}$, където f е диференцируема функция на x;

г) $\sqrt{x^2+1}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\frac{1}{x}$;

ж) $\frac{1}{f}$, където f е диференцируема функция на x;

з) $\frac{1}{x^2+2x+2}$; и) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; й) $\frac{1}{x^2}$;

к) $\frac{1}{f^2}$, където f е диференцируема функция на x;

л) $\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}\right)^2}$; м) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; н) $\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;

о) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$; п) $\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}+1}$; р) $\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$;

с) $\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$; т) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}$; у) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$;

ф) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$;

х) f^a, където f е диференцируема функция на x.

Задача 4. Да се намерят производните на функциите:

а) e^{x^2}; б) $e^x + x^e$; в) $e^{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$; г) $e^{-\frac{1}{x^2}}$; д) $\sqrt{x}e^{-x}$;

е) $\sqrt{x^2+x+1}\, e^{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$;

ж) e^f, където f е диференцируема функция на x.

Задача 5. Да се намерят производните на функциите:

а) $\frac{x^3+2^x}{e^x}$; б) $(x^2-10x+3)\,10^x$; в) $\frac{1-9^x}{1+9^x}$;

г) 10^{2x-3}; д) 2^{3x};

е) a^f, където f е диференцируема функция на x.

Задача 6. Да се намерят производните на функциите:

а) $x^2 \ln x$; б) $\frac{1}{\ln x}$; в) $\frac{x-1}{\ln x}$; г) $\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

д) $x^n \ln x$; е) $e^x \ln x$; ж) $\ln(1-2x)$; з) $(\ln x)^2$;

и) $\sqrt{\ln x}$; й) $\frac{\ln x}{1+x^2}$; к) $\sqrt{1+(\ln x)^2}$; л) $\ln(x^2+4)$;

м) $\ln\ln x$; н) $2^{\frac{x}{\ln x}}$; о) $e^{\sqrt{\ln x}}$; п) $e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$;

р) $\ln f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 7. Да се намерят производните на функциите:

а) $x^n \ln x$; б) $\log_2 \log_3 \log_5 x$; в) $\ln(x + 2^x \log_2 x)$;

г) $\log_x 2$; д) $\log_\pi \frac{\pi^x - x^\pi}{\pi^x + x^\pi}$; е) $\frac{1+\log_2 x}{1-\log_3 x}$;

ж) $\log_a f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 8. Да се намерят производните на функциите:

а) $\sin x^2 + \sin^2 x$; б) $\sin\frac{1}{x}$; в) $\sin\sin x$;

г) $\sin^3 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; д) $\ln\sin x + \sin\ln x$; е) $e^{\sin^2\sqrt{x}} + \sin e^{\sqrt{x}}$;

ж) $e^{-ax}\sin(bx+c)$;

з) $\sin f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 9. Да се намерят производните на функциите:

а) $e^x \cos x + \frac{1}{e^x \cos x}$; б) $3\cos^2 x - 2\cos^3 x$; в) $\ln(x - \cos x + e^x)$;

г) $\cos x^3 + \cos^3 x$; д) $\frac{\sin 3x}{\sin^2 x \cos x}$; е) $\cos\sin x + \sin\cos x$;

ж) $\cos\sin^n x + \sin\cos^n x$; з) $\sin^n x \cos nx + \cos^n x \sin nx$;

и) $\sin^n x \sin nx + \cos^n x \cos nx$;

й) $\cos f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 10. Да се намерят производните на функциите:

а) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$; б) $\operatorname{tg}\sin x + \sin\operatorname{tg} x$;

в) $\operatorname{tg}\cos^n x + \cos\operatorname{tg}^n x$; г) $\operatorname{tg}\operatorname{tg}\operatorname{tg} x$; д) $\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\ln\frac{x}{2}$;

е) $e^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} e^x$; ж) $\operatorname{tg}\operatorname{tg}^2\operatorname{tg}^3 x$; з) $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$;

и) $\operatorname{tg} f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 11. Да се намерят производните на функциите:

а) $\frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$; б) $\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x\ln(1+\sin x) - x$;

в) $\frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-1}$;

г) $\operatorname{ctg}\left(1+\frac{1}{1+\operatorname{ctg} x}\right)$; д) $\operatorname{ctg}\operatorname{tg}^n x + \operatorname{tg}\operatorname{ctg}^n x$;

е) $\operatorname{ctg} f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 12. Да се намерят производните на функциите:

а) $x^n \arcsin x$; б) $3x^3\arcsin x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2}$;

в) $2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$;

г) $x\arcsin^2 x - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

д) $\arcsin f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 13. Да се намерят производните на функциите:

а) $\arccos\left(1-e^{x^2}\right)$; б) $\sqrt[4]{\arccos\sqrt{x^2+2x}}$;

в) $(\arcsin x + \arccos x)^n$;

г) $\arcsin\arccos x + \arccos\arcsin x$;

д) $\arcsin 2\arccos x + \arccos 2\arcsin x$;

е) $\arccos f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 14. Да се намерят производните на функциите:

а) $\operatorname{arctg}\arcsin x + \arcsin\operatorname{arctg} x$;

б) $\operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$; в) $\operatorname{arctg} x^n + (\operatorname{arctg} x)^n$;

г) $e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$; д) $\frac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$;

е) $\operatorname{arctg} f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 15. Да се намерят производните на функциите:

а) $\operatorname{arcctg}\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\operatorname{arcctg} x$;

б) $\operatorname{arctg} 2\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} 2\operatorname{arctg} x$;

в) $\frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcctg} x} + \frac{\operatorname{arcctg} x}{\operatorname{arctg} x}$;

г) $\operatorname{arcctg} f$, където f е диференцируема функция на x.

Задача 16. Да се намерят производните на функциите:

а) $\operatorname{sh}^3 x + \operatorname{ch}^3 x$; б) $\operatorname{arctg}\operatorname{th} x - \operatorname{arcctg}\operatorname{cth} x$;

в) $\ln\operatorname{ch} x + \operatorname{ch}\ln x$; г) $\operatorname{sh}\operatorname{ch} x + \operatorname{ch}\operatorname{sh} x$;

д) $e^{\operatorname{ch}^2 x} + e^{\operatorname{sh}^2 x}$; е) $\operatorname{th}\ln x + \operatorname{cth}\frac{1}{\ln x}$;

ж) $x^n\operatorname{sh} x - \operatorname{ch}^n x$.

Задача 17. Да се намерят производните на функциите:

а) $\operatorname{Ar sh}\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\operatorname{Ar sh} x$; б) $\operatorname{Ar ch}\operatorname{Ar sh} x + \operatorname{Ar sh}\operatorname{Ar ch} x$;

в) $\operatorname{Ar th} x + \operatorname{Ar cth} x$; г) $e^{\operatorname{Ar th} x} + e^{\operatorname{Ar cth}\sqrt{x^2+1}}$;

д) $\operatorname{Ar th}\operatorname{Ar cth} x$.

Понякога диференцирането се опростява, като предварително се логаритмува функцията, чиято производна се търси. Такива са например случаите на диференциране на сложни произведения и частни, както и на функция на степен функция. Тази проста техника се нарича *логаритмично диференциране*.

Задача 18. Да се намерят производните на функциите:

а) x^{x^x}; б) x^{x^x}; в) $(\sin x)^{\cos x}$; г) $(\ln x)^x$;

д) $\sqrt[x]{(x+1)^2}$; е) $x^{\sin x} + (\sin x)^x$; ж) $\left(\frac{x}{1+x}\right)^x + (x^2+1)^{\operatorname{sh} x}$;

з) $\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

Задача 19. Да се намерят производните на функциите:

а) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$; б) $\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

в) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{1+x^3}$; г) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{arc\,tg}x$;

д) $x^3\sqrt{1+x^2}-\frac{3}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{3}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

е) $\frac{x^4}{2}-\left(x^3-\frac{3}{2}x\right)\sin 2x-\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}\right)\cos 2x$;

ж) $\frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^4 x}$; з) $\arcsin\frac{3\sin^2 x-1}{\sin^2 x+1}$;

и) $\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}-\ln\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}$;

й) $x(\arcsin 2x)^2-2x+\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x$;

к) $x^3\arccos x-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$;

л) $x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$;

м) $\frac{1}{x^3}\operatorname{arc\,ctg}x-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{x^2}$; н) $e^{2x}(2\sin^2 x-\sin 2x+1)$;

о) $e^x(\sin^3 x-3\sin^2 x\cos x+3\sin x-3\cos x)$;

п) $e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)$;

р) $e^x(x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\dots+(-1)^n n!)$;

с) $x\sin\ln x-x\cos\ln x$; т) $\frac{(\ln x)^2}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}$;

у) $x^a(\ln x)^2-\frac{2x^a}{a}\ln x+\frac{2x^a}{a^2}$;

ф) $x^3\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}x^3+2x-2\operatorname{arc\,tg}x$;

х) $x^5\ln(x^2-a^2)-\frac{2}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3a^2-2xa^4+a^5\ln\frac{x+a}{x-a}$;

ц) $\frac{p-1}{\operatorname{ch}^{p+1}x}-\frac{p+1}{\operatorname{ch}^{p-1}x}$; ч) $\operatorname{cth}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3\frac{x}{2}$;

ш) $\operatorname{Ar\,ch}\frac{3\operatorname{ch}^2 x-1}{\operatorname{ch}x^2+1}$ $(x>0)$; щ) $\ln\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}x+1}-\ln\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x}$;

ъ) $(2x^2+a^2)\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}-x\sqrt{x^2+a^2}$;

ь) $3x^3\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}-(2a^2+x^2)\sqrt{x^2-a^2}$;

ю) $2x^3\operatorname{Ar\,th}\frac{x}{a}+ax^2+a^3\ln(a^2-x^2)$;

я) $2\frac{a^3}{x^3}\operatorname{Ar\,cth}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{x^2}+\ln\frac{x^2-a^2}{x^2}$.

Задача 20. Да се докаже следното правило за диференциране на детерминанта от n-ти ред:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{\nu 1} & f_{\nu 2} & \dots & f_{\nu n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\nu=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{\nu 1} & f'_{\nu 2} & \dots & f'_{\nu n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

където $f_{\mu\nu}$ $(\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$ са диференцируеми функции с обща дефиниционна област.

Задача 21. Да се докажат тъждествата:

а) $\sum_{\nu=1}^{n}\nu x^{\nu-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$ $(x\neq 1)$;

б) $\sum_{\nu=1}^{n}2^\nu\sin^3\frac{x}{2^\nu}\cos\frac{x}{2^\nu}=2^{n-2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}-\frac{\sin 2x}{4}$;

в) $\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{2^\nu}}{8^\nu\cos^3\frac{x}{2^\nu}}=\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{8^n\sin^3\frac{x}{2^n}}-\frac{\cos x}{\sin^3 x}$.

§ 2. n-ти производни

Производната на първата производна на една функция f се нарича *втора производна* на f и се означава с f''; производната на втората производна на f се нарича *трета производна* на f и се означава с f'''. По-общо производната на n-тата производна на една функция f се нарича $(n+1)$-*ва производна* на f и се означава с $f^{(n+1)}$. По този начин символът $f^{(n)}$ е дефиниран за всяка

естествена стойност на n. Понякога е целесъобразно под *нулева производна* $f^{(0)}$ на една функция f да се разбира самата функция f.

n-тата производна $f^{(n)}$ често се означава и с $\frac{d^n f}{dx^n}$ $(n+1 \in \mathbf{N})$. Макар и да е излязло от мода, използването на това означение е целесъобразно, когато например наред с аргумента, спрямо който се диференцира, в аналитичния израз за функцията фигурират и някои други параметри.

Лесно се вижда индуктивно, че

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n} \quad (n \in \mathbf{N}), \tag{21}$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbf{N}), \tag{22}$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x \quad (n+1 \in \mathbf{N}), \tag{23}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (n+1 \in \mathbf{N}), \tag{24}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (n+1 \in \mathbf{N}), \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{sh} x)^{(n)} &= \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{при } n \text{ нечетно} \\ \operatorname{sh} x & \text{при } n \text{ четно} \end{cases} \\ (\operatorname{ch} x)^{(n)} &= \begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{при } n \text{ нечетно} \\ \operatorname{ch} x & \text{при } n \text{ четно} \end{cases} \end{aligned}\right\} (n+1 \in \mathbf{N}). \tag{26, 27}$$

Също така е ясно, че ако a и b са константи, от $F(x) = f(ax+b)$ следва

$$F^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b) \quad (n+1 \in \mathbf{N}). \tag{28}$$

Ето защо например

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \quad (n+1 \in \mathbf{N}). \tag{29}$$

Задача 22. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $\dfrac{1+x}{1-x}$; б) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$; в) $\dfrac{1}{x(x+1)}$;

г) $\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$; д) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; е) $\operatorname{arc\,tg} x$.

Задача 23. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $\sin^2 x$; б) $\sin^4 x + \cos^4 x$;

в) $\sin^m x$ $(m \in \mathbf{N})$; г) $\cos^m x$ $(m \in \mathbf{N})$.

Задача 24. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $e^x \sin x$; б) $e^x \cos x$;

в) $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$; г) $e^{ax}\cos(bx+c)$ $(a^2+b^2 \neq 0)$.

Задача 25. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) e^{-x^2};

б) $f(x^2)$, където f е n пъти диференцируема функция на x.

Задача 26. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $e^{\frac{1}{x}}$;

б) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, където f е n пъти диференцируема функция на x.

Задача 27. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $(1+\sqrt{x})^{2n-1}$;

б) $f(\sqrt{x})$, където f е n пъти диференцируема функция на x.

Задача 28. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) e^{e^x};

б) $f(e^x)$, където f е n пъти диференцируема функция на x.

Задача 29. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $\sin\ln x$;

б) $f(\ln x)$, където f е n пъти диференцируема функция на x.

Задача 30. Нека F и f са n пъти диференцируеми функции и стойностите на f принадлежат на дефиниционната област на F. Да се докажат равенствата:

а) $$\frac{d^n F(f(x))}{dx^n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{F^{(\nu)}(f(x))}{\nu!} \sum_{\tau=0}^{\nu-1} (-1)^\tau \binom{\nu}{\tau} \frac{d^n f^{\nu-\tau}(x)}{dx^n};$$

б) $$\frac{d^n F(f(x))}{dx^n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n!F^{(\nu)}(f(x))}{\nu_1!\nu_2!\dots\nu_p!} \prod_{\tau=1}^{p} \left(\frac{f^{(\tau)}(x)}{\nu!}\right)^{\nu_\tau},$$

където сумирането е разпространено върху всичките наредени p-орки $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p)$ $(p \in \mathbf{N})$ от неотрицателни цели числа, за които

$$\sum_{\varrho=1}^{p} \varrho\nu_\varrho = n, \quad \nu = \sum_{\varrho=1}^{p} \nu_\varrho.$$

Ако f и g са n пъти диференцируеми функции с обща дефиниционна област, в сила е следното тъждество (формула на Лайбниц):

$$(fg)^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(n-\nu)} g^{(\nu)}.$$

Задача 31. Ако f е n пъти диференцируема функция, да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $x^2 f(x) \quad (n \geqq 2)$;

б) $x^k f(x)$, където естественото число k не надминава n;

в) $x^a f(x)$, където a е произволна константа.

Задача 32. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $x^a(1-x)^b$; б) $x^a \sin x$; в) $x^a \cos x$;

г) $x^a e^x$; д) $x^a \ln x$,

където a и b са произволни константи.

Задача 33. Да се докажат тъждествата:

а) $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n(1-x)^n) = n! \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{\nu}^2 (1-x)^{n-\nu} x^\nu$;

б) $\dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \dfrac{(2n)!}{x^{2n+1}}(C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x)$,

където $C_n(x) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$;

в) $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n!\left(\ln x + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right)$;

г) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}\left(\ln x - \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right)$.

Задача 34. Да се намерят n-тите производни на функциите:

а) $\arcsin x$; б) $\operatorname{Arch} x$.

Задача 35. Да се намерят стойностите за $x = 0$ на n-тите производни на функциите:

а) $\sin(a \arcsin x)$; б) $\cos(a \arccos x)$,

където a е произволна константа.

Задача 36. Да се намерят стойностите за $x = 0$ на n-тите производни на функциите:

а) $(\arcsin x)^2$; б) $(\operatorname{arc\,tg} x)^2$.

Задача 37. Да се намери стойността в точката a на n-тата производна на функцията $(x-a)^a \varphi(x)$, където φ е n пъти диференцируема функция в някоя околност на a.

Задача 38. Да се докажат тъждествата:

а) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{(-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{x} + n\dfrac{\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}$;

б) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{(-1)^n e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$; в) $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}\ln x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$;

г) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^{n+1}}$,

където f е n пъти диференцируема функция.

§ 3. Класически полиноми

Задача 39. Да се докаже, че полиномите $T_n(x)$ на Чебишов от първи род и функциите $\sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)$, където $U_n(x)$ са полиномите на Чебишов от втори род, удовлетворяват диференциалното уравнение $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + n^2 y = 0$.

Функцията $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ е полином от n-та степен на x. Той се нарича *n-ти полином на Льожандр* и се означава с $P_n(x)$.

Задача 40. Да се докаже, че за $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$:

а) $P_n(x) = n! \displaystyle\sum_{\nu=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^\nu (2n-2\nu)!}{\nu!(n-\nu)!(n-2\nu)!} x^{n-2\nu}$;

б) $P_{n+1}(x) - 2(2n+1)xP_n(x) + 4n^2 P_{n-1}(x) = 0$;

в) $(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$.

Функцията $e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ е полином на x, който се нарича *n-ти полином на Ермит* и се означава с $H_n(x)$.

Задача 41. Да се докаже, че за $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$:

а) $H_n(x) = (-1)^n n! \sum\limits_{\nu=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(n-2\nu)!}(2x)^{n-2\nu}$;

б) $H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$;

в) $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

Функцията $e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ е полином на x, който се нарича *n-ти полином на Лагер* и се означава с $L_n(x)$.

Задача 42. Да се докаже, че за $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$:

а) $L_n(x) = n! \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}$;

б) $L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0$;

в) $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$.

§ 4. Понятие за линеен диференциален оператор

Нека $a_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$) са функции с обща дефиниционна област X, а D^ν ($\nu + 1 \in \mathbf{N}$) означава операцията ν-кратно диференциране спрямо x. Полиномът на D

$$\varphi(D) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) D^\nu \tag{30}$$

се нарича *линеен диференциален оператор от n-ти ред* с коефициенти $a_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$).

За произволна n пъти диференцируема в X функция f на x с $\varphi(D)f(x)$ се означава функцията $\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) f^{(\nu)}(x)$. По този начин $D^0 f(x) = f(x)$, $D^1 f(x) = f'(x), \ldots, D^n f(x) = f^{(n)}(x)$ и по общо $\varphi(D)f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) f^{(\nu)}(x)$.

Задача 43°. Нека $\varphi(D)$ и $\psi(D)$ са линейни диференциални оператори от ред n, чиито коефициенти са дефинирани в X, функциите $f : X \to \mathbf{R}$ и $g : X \to \mathbf{R}$ са n пъти диференцируеми, а λ е константа. Да се докаже, че:

а) $\varphi(D)(f(x) + g(x)) = \varphi(D)f(x) + \varphi(D)g(x)$;

б) $\varphi(D)(\lambda f(x)) = \lambda\varphi(D)f(x)$;

в) $(\varphi(D) + \psi(D))f(x) = \varphi(D)f(x) + \psi(D)f(x)$;

г) $(\lambda\varphi(D))f(x) = \lambda(\varphi(D)f(x))$,

а ако коефициентите на $\varphi(D)$ и $\psi(D)$ са постоянни, че:

д) $(\varphi(D)\psi(D))f(x) = \varphi(D)(\psi(D)f(x))$;

е) $\varphi(D)(\psi(D)f(x)) = \psi(D)(\varphi(D)f(x))$.

Задача 44. Нека $f : X \to \mathbf{R}$ ($X \subset \mathbf{R}$) е n пъти диференцируема функция, $\varphi(D)$ е линеен диференциален оператор от ред n, чиито коефициенти са дефинирани в X, и λ е константа. Да се докаже тъждеството

$$\varphi(D)(e^{\lambda x} f(x)) = e^{\lambda x}\varphi(\lambda + D)f(x).$$

Задача 45. Нека $\varphi(D)$ и $\psi(D)$ са линейни диференциални оператори с постоянни коефициенти, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са полиномите, получени след заместване на D с x, а λ и μ са константи. Тогава*:

а) $\varphi(\lambda + D)\psi(x)|_{x=\mu} = \psi(\mu + D)\varphi(x)|_{x=\lambda}$;

б) $\varphi(D)(e^{\lambda x}\psi(x))|_{x=\mu} = e^{\lambda\mu}\psi(\mu + D)\varphi(x)|_{x=\lambda}$.

§ 5. Диференцируемост

Понятието производна е много по-дълбоко, отколкото изглежда от разгледаната дотук формалистика на диференцирането. В този параграф са разгледани задачи, в които се обсъжда дефиницията на това понятие. Построяването на пример на непрекъсната функция без производна е отложено до зад. 108 от гл. VIII.

Задача 46. Да се намерят производните на функциите:

а) $|x|$; б) $x|x|$; в) $\ln|x|$;

г) $|(x-1)^3|$; д) $|\sin x|$; е) $|\sin^3 x|$;

ж) $\arcsin\frac{1}{|x|}$; з) $[x]\sin^2 \pi x$.

Задача 47. Да се намери производната на функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с равенствата:

а) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x < 0, \\ \ln(1+x) & \text{при } x \geqq 0; \end{cases}$

---

* Понякога с $f(x)|_{x=\lambda}$ се означава стойността $f(\lambda)$ на една функция f за стойността λ на аргумента.

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{при } |x| \leqq 1, \\ \dfrac{1}{e} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

Задача 48. При какви стойности на a функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с равенствата $f(x) = \begin{cases} x^a \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$

а) е непрекъсната при $x = 0$;

б) е диференцируема при $x = 0$;

в) има непрекъсната производна при $x = 0$?

Задача 49. Да се докаже, че функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с равенствата:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при рационално } x, \\ 0 & \text{при ирационално } x; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при рационално } x, \\ x & \text{при ирационално } x, \end{cases}$

е диференцируема само при $x = 0$.

Задача 50. Да се докаже, че следващите функции не са диференцируеми за посочените стойности на аргумента:

а) $\arcsin x$ за $x = -1$ и $x = 1$;

б) $\arcsin(2x^2 - 1)$ за $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$.

Задача 51. Да се посочи пример на непрекъсната функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, диференцируема при $x = 0$, но такава, че във всяка околност на 0 има точки, в които f не е диференцируема.

Задача 52*. Да се докаже, че функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^{2n} \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{array} \right\} (n \in \mathbf{N}),$$

притежава производни до ред n включително при $x = 0$ и не притежава $(n+1)$-ва производна при $x = 0$.

Задача 53*. Да се докаже, че функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с равенствата:

а) $f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqq 0, \end{cases}$

притежава производни от произволен ред за всяко x и че $f^{(n)}(0) = 0$ за всяко естествено n.

Задача 54. Нека Δ е неизроден интервал. Да се посочи пример на безбройно много пъти диференцируема функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, която не е тъждествено нула и $f(x) = 0$ за $x \notin \Delta$.

§ 6. Основни теореми за средните стойности

Централна роля в диференциалното смятане играе следната теорема на Рол:

Нека функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в a и b, диференцируема е в (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува такова число ξ, че $a < \xi < b$ и $f'(\xi) = 0$.

Важно следствие от теоремата на Рол и в същото време нейно обобщение е следната теорема на Лагранж за крайните нараствания:

Нека функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в a и b и е диференцируема в (a, b). Тогава съществува число ξ, такова че $a < \xi < b$ и

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Обобщение на теоремата за крайните нараствания е следната теорема на Коши:

Нека функциите $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ са непрекъснати в a и b, диференцируеми са в (a, b) и $g'(x) \neq 0$ в (a, b). Тогава $g(a) \neq g(b)$ и съществува число ξ от (a, b), за което

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Ако теоремата за крайните нараствания се приложи за функциите f и g, се заключава, че съществуват числа ξ_1 и ξ_2 от (a, b), за които $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi_1)$ и $\dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(\xi_2)$. От тези равенства следва $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$. В този си вид теоремата на Коши би била тривиално следствие от теоремата на Лагранж. В теоремата на Коши обаче се твърди нещо повече, отколкото дава последното равенство, а именно че $\xi_1 = \xi_2$. Точно това обстоятелство обикновено се използва при типичните приложения на теоремата на Коши.

Задача 55°. Да се установи, че условията в теоремата на Рол са съществени за валидността на заключението ѝ, т. е. да се построи функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, която:

а) е непрекъсната в b, диференцируема е в (a, b) и $f(a) = f(b)$, но въпреки това f' не се анулира в (a, b);

б) е непрекъсната в a и b, диференцируема е в (a, b), но въпреки това f' не се анулира в (a, b);

в) е непрекъсната в a и b, диференцируема е в (a, b) с изключение на една точка и $f(a) = f(b)$, но въпреки това f' не се анулира в (a, b).

Задача 56°. Да се установи, че условията в теоремата на Лагранж са съществени за валидността на заключението ѝ.

Задача 57°. Да се установи, че условията в теоремата на Коши са съществени за валидността на заключението ѝ.

Задача 58. За всеки две реални числа a и b ($a < b$ и за всяка от функциите:

а) $f(x) = px + q$; б) $f(x) = px^2 + qx + r$;
в) $f(x) = x^3$; г) $f(x) = e^x$,

да се намери реално число ξ с $a < \xi < b$, за което е в сила равенството

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Задача 59. Нека $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е диференцируема функция и за всеки две реални числа x и h е в сила равенството $f(x+h) - f(x) = hf'(x)$. Да се докаже, че f е линейна функция.

Задача 60. Нека $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е два пъти диференцируема функция и за всеки две реални числа x и h е в сила равенството $f(x+h) - f(x) = hf'\left(x + \frac{h}{2}\right)$. Да се докаже, че f е квадратна функция.

Задача 61*. Нека функцията $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ е дефинирана с равенствата

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \ln x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Да се докаже, че:

а) за всяко $x > 0$ съществува число $\xi(x)$, за което $0 < \xi(x) < x$ и $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$;

б) ако $\xi : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ е произволна функция с формулираното в а) свойство, а ε — произволно положително число, в интервала $(0, \varepsilon)$ има точки на прекъсване на ξ.

Задача 62. С помощта на теоремата за крайните нараствания да се докажат неравенствата:

а) $py^{p-1}(x - y) \leqq x^p - y^p \leqq px^{p-1}(x - y)$ при $0 < y < x$ и $p > 1$;

б) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqq |x - y|$;

в) $\dfrac{x - y}{x} < \ln \dfrac{x}{y} < \dfrac{x - y}{y}$ при $0 < y < x$.

Задача 63. Да се докаже, че ако функцията f е диференцируема в ограничения интервал Δ и f' е ограничена в Δ, функцията f също е ограничена в Δ.

Задача 64. а) Да се докаже, че ако функцията f е диференцируема и има ограничена производна в един интервал Δ, тя е равномерно непрекъсната в Δ.

б) Да се намерят всички реални числа a, за които функцията x^a е равномерно непрекъсната в интервала $(0, \infty)$.

Задача 65. Ако функцията f е дефинирана в една околност на a, диференцируема е в тази околност с евентуалното изключение на a и $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ съществува, функцията f е диференцируема и в a и $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$.

Задача 66. Нека функцията f е диференцируема в един интервал Δ и $\xi \in \Delta$. Да се докаже, че производната ѝ е непрекъсната в ξ точно когато за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че от $x_1 \in \Delta$, $x_2 \in \Delta$, $x_1 \neq x_2$ и $|x_1 - \xi| < \delta$, $|x_2 - \xi| < \delta$ да следва

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - f'(\xi) \right| < \varepsilon.$$

Задача 67*. Ако функцията f е диференцируема в някакъв интервал Δ, множеството $f'(\Delta)$ е интервал (Д а р б у).

Задача 68. а) Нека функцията f е два пъти диференцируема в интервала Δ и числата a, $a + h$ и $a + 2h$ ($h \neq 0$) са от Δ. Да се докаже, че съществува такава точка ξ от Δ, че

$$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = f''(\xi)h^2.$$

б)* Нека функцията f е n пъти диференцируема в интервала Δ и числата a, $a + h$, $a + 2h$, $\ldots$, $a + nh$ ($h \neq 0$) са от Δ. Да се докаже, че съществува такава точка ξ от Δ, че

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} f(a + (n - \nu)h) = f^{(n)}(\xi)h^n.$$

в) Да се докаже тъждеството

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (x + n - \nu)^n = n!.$$

§ 7. Теореми на Лопитал

Следващите *теореми на Лопитал* са полезни следствия от теоремата на Коши и в известен смисъл алгоритмизират намирането на граници на функции от вида:

а) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, б) $f(x)g(x)$, в) $\big(f(x)\big)^{g(x)}$, г) $f(x)-g(x)$,

в случаите, когато не може да се реши въпросът с директно използуване на съображения за непрекъснатост.

Типични примери за случай а) се получават, когато числителят и знаменателят едновременно клонят към 0 или ∞. Това обстоятелство записваме накратко със символа $\dfrac{0}{0}$, респективно $\dfrac{\infty}{\infty}$. Примери за случая б) имаме, когато единият от множителите клони към 0, а другият расте неограничено. Тогава се пише кратко $0.\infty$ и т. н. Така се стига до следните 7 неопределени форми:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0.\infty,\quad 1^{\infty},\quad \infty^{0},\quad 0^{0},\quad \infty-\infty.$$

Първа теорема на Лопитал. *Нека функциите f и g са дефинирани в някой интервал Δ, непрекъснати са в някоя точка ξ от Δ и са диференцируеми в $\Delta\setminus\{\xi\}$. Нека още $f(\xi)=g(\xi)=0$ и $g'(x)\neq 0$ за $\xi\neq x\in\Delta$. Тогава е в сила равенството*

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{31}$$

винаги когато дясната страна съществува.

Втора теорема на Лопитал. *Нека функциите f и g са дефинирани в някой интервал Δ и са диференцируеми в $\Delta\setminus\{\xi\}$, където ξ е точка на сгъстяване на Δ. Нека още $\lim\limits_{x\to\xi}g(x)=\infty$ и $g'(x)\neq 0$ за $\xi\neq x\in\Delta$. Тогава е в сила (31) винаги когато дясната страна съществува.*

Горните теореми остават валидни *mutatis mutandis* и когато ξ означава някой от символите $-\infty$ или ∞.

Така формулираните твърдения в повечето случаи решават въпроса за намиране на граници на неопределени форми от вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Неопределената форма $0.\infty$ се свежда към коя да е от горните две чрез символичните равенства $0.\infty=0\cdot\dfrac{1}{0}=\dfrac{0}{0}$ или $0.\infty=\dfrac{1}{\infty}\cdot\infty=\dfrac{\infty}{\infty}$. Неопределените форми 1^{∞}, ∞^{0} и 0^{0} се свеждат към формата $0.\infty$ чрез предварително логаритмуване. Най-после неопределената форма $\infty-\infty$ се свежда към формата $\dfrac{0}{0}$ чрез символичните равенства $\infty-\infty=\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}=\dfrac{0-0}{0.0}=\dfrac{0}{0}$.

Теоремата на Шолц (зад. 142, гл. IV) може да се схваща като аналог на втората теорема на Лопитал.

Задача 69. Да се намерят границите $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\cos x-1}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$; г) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$;

д) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$; е) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

ж) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

Задача 70. Да се посочи пример на функции f и g, за които са изпълнени всичките условия на първата теорема на Лопитал и границата в лявата страна на (31) съществува, но в дясната не съществува.

Задача 71. Да се намерят границите $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg} ax}{\operatorname{ctg} bx}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg} x}{e^{x-2}}$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; г) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}$.

Задача 72. Да се посочи пример на функции f и g, за които са изпълнени всичките условия на втората теорема на Лопитал и границата в лявата страна на (31) съществува, но в дясната не съществува.

Задача 73. Да се намерят границите $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$:

а) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+2\ln x}{x}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+\sin x}{x+\sin x}$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$; г) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{a+bx}$ $(b\neq 0)$.

Задача 74. Да се намерят границите $[0.\infty]$:

а) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$; б) $\displaystyle\lim_{x\to a}\arcsin\frac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$ $(a\neq 0)$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\ln x\ln(1-x)$; г) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)e^{\operatorname{tg} x}$.

Задача 75. Да се намерят границите $[1^{\infty}]$:

а) $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$.

Задача 76. Да се намерят границите $[\infty^0]$:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задача 77. Да се намерят границите $[0^0]$:

а) $\lim\limits_{x\to 0}x^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\operatorname{tg}x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\cos x}$.

Задача 78. Да се намерят границите $[\infty-\infty]$:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right)$.

§ 8. Критерий за константност на функция

Следващото твърдение е директно следствие от теоремата за крайните нараствания:

Ако функцията f е диференцируема в някой интервал Δ и производната ѝ е нула в Δ, то f е константа в Δ.

Оттук следва непосредствено, че ако две функции f и g имат равни производни във всичките точки на един интервал Δ, съществува такава константа C, че за всяко x от Δ е в сила равенството $f(x)=g(x)+C$.

Задача 79. Да се докажат тъждествата:

а) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{\pi}{4}$ при $x>-1$;

б) $2\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}=\begin{cases}0 & \text{при } |x|<1,\\ \pi & \text{при } x>1,\\ -\pi & \text{при } x<-1;\end{cases}$

в) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}-\pi-2\operatorname{arctg}x & \text{при } x\leqq -1,\\ 2\operatorname{arctg}x & \text{при } |x|\leqq 1,\\ \pi-2\operatorname{arctg}x & \text{при } x\geqq 1;\end{cases}$

г) $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\begin{cases}2\operatorname{arctg}x & \text{при } x\geqq 0,\\ -2\operatorname{arctg}x & \text{при } x\leqq 0.\end{cases}$

Задача 80. Да се докаже, че:

а) ако f и g са два полинома от степен n, полиномът $fg^{(n)}-f'g^{(n-1)}+f''g^{(n-2)}+\dots+(-1)^nf^{(n)}g$ е константа;

б) за всеки полином f, чиято степен не надминава n, е в сила тъждеството $f(a)=\sum\limits_{\nu=0}^{n}\dfrac{(a-x)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x)$.

Задача 81. Да се докаже, че:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{\nu}(x+1)^\nu=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{\nu}\dbinom{n}{\nu}x^\nu+\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{\nu}\quad(x\in\mathbf{R})$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{\nu}=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\dbinom{n}{\nu}$.

Задача 82. Ако една функция f е n пъти диференцируема в някой интервал Δ и n-тата ѝ производна е нула в Δ, f е полином най-много от степен $n-1$ в Δ.

Задача 83*. Ако функцията $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ има производни от произволен ред и за всяко реално x съществува естествено число n_x, за което $f^{(n_x)}(x)=0$, да се докаже, че f е полином.

§ 9. Някои елементарни диференциални уравнения

Задача 84. Диференцируемата функция $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и константата λ тогава и само тогава удовлетворяват уравнението $f'(x)=\lambda f(x)$ за всяко реално x, когато съществува такава константа C, че $f(x)=Ce^{\lambda x}$ за всяко реално x.

Задача 85. Диференцируемата функция $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ и константата a тогава и само тогава удовлетворяват уравнението $xf'(x) = af(x)$ за всяко положително x, когато съществува такава константа C, че $f(x) = Cx^a$ за всяко положително x.

Задача 86. Ако функцията f е диференцируема в някой интервал Δ, да се докаже, че уравненията:

а) $f'(x) - e^{x-f(x)} = 0$; б) $f'(x)\operatorname{ctg} x + f(x) - 2 = 0$;

в) $f'(x) - f(x) - 2x + 3 = 0$; г) $(x - 2f(x))f'(x) - 1 = 0$,

тогава и само тогава са удовлетворени тъждествено в Δ, когато съществува такава константа C, че в Δ съответно:

а') $f(x) = \ln(e^x + C)$; б') $f(x) = 2 + C\cos x$;

в') $f(x) = 1 - 2x + Ce^x$; г') $2f(x) + Ce^{f(x)} - x - 2 = 0$.

Задача 87. Да се докаже, че два пъти диференцируемата функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и константите a, b и ω тогава и само тогава удовлетворяват:

а) $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$;

б) $f''(x) - (a + b)f'(x) + ab = 0 \quad (a \neq b)$;

в) $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$;

г) $f''(x) - 2\omega f'(x) + \omega^2 f(x) = 0$

за всяко реално x, когато съществуват константи A и B, за които съответно:

а') $f(x) = Ae^x + Be^{2x}$; б') $f(x) = Ae^{ax} + Be^{bx}$;

в') $f(x) = (Ax + B)e^{-x}$; г') $f(x) = (Ax + B)e^{\omega x}$

за всяко реално x.

Задача 88. Нека $S : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $C : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ са диференцируеми функции, за които:

а) $S'(x) = C(x)$ и $C'(x) = S(x)$;

б) $S'(x) = C(x)$ и $C'(x) = -S(x)$

за всяко реално x. Да се докаже, че съществуват такива константи A и B, че съответно:

а') $S(x) = A\operatorname{ch} x + B\operatorname{sh} x$ и $C(x) = A\operatorname{sh} x + B\operatorname{ch} x$;

б') $S(x) = A\cos x + B\sin x$ и $C(x) = -A\sin x + B\cos x$

за всяко реално x.

Задача 89. Ако при условията на предишната задача са изпълнени и условията $S(0) = 0$ и $C(0) = 1$, то съответно:

а') $S(x) = \operatorname{sh} x$ и $C(x) = \operatorname{ch} x$;

б') $S(x) = \sin x$ и $C(x) = \cos x$

за всяко реално x.

Задача 90. Два пъти диференцируемата функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и константите a, b и ω тогава и само тогава удовлетворяват:

а) $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \quad (\omega \neq 0)$;

б) $f''(x) - 2af'(x) + (a^2 + b^2)f(x) = 0 \quad (b \neq 0)$

за всяко реално x, когато съществуват константи A и B, за които съответно:

а') $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$;

б') $f(x) = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$

за всяко реално x.

§ 10. Критерий за монотонност

Следващите две твърдения улесняват изследването на монотонността на функциите.

Ако една диференцируема функция е растяща (намаляваща), производната ѝ е неотрицателна (неположителна).

Ако една функция е дефинирана и диференцируема в интервал и производната ѝ е неотрицателна (неположителна), функцията е растяща (намаляваща).

Задача 91. Да се представи $\mathbf{R}$ като обединение на максимални интервали, във всеки от които функцията:

а) $x + \sin x$; б) $x + \cos x$; в) $2 + x - x^2$;

г) $3x - x^3$; д) $\dfrac{2x}{1 + x^2}$; е) $\cos\dfrac{\pi}{x} \ (x > 0)$;

ж) $\dfrac{x^2}{2^x}$; з) $x^a e^{-x} \ (a > 0,\ x \geqq 0)$; и) $x^2 - \ln x$;

й) $x\left(\sin\ln x + \dfrac{3}{2}\right)$,

е монотонна.

Задача 92*. Да се изследва в зависимост от параметрите λ и μ в кои интервали функцията $\left(1 + \dfrac{\lambda}{x}\right)^{x+\mu}$ е монотонна.

Задача 93. Да се докаже:

а) че функцията $\dfrac{\sin x}{x}$ е намаляваща в интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) неравенството $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x \leqq x$ за всички x от $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задача 94. Да се докажат неравенствата:

а) $1+x \leqq e^x$; б) $e^x \leqq 1+x+\dfrac{x^2e^x}{2}$;

в) $1+x+\dfrac{x^2}{2} \leqq e^x$; г) $e^x \leqq 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}e^x$;

д) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^\nu}{\nu!} \leqq e^x \ (n \in \mathrm{N})$; е) $e^x \leqq \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^\nu}{\nu!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x \ (n \in \mathrm{N})$

за всички положителни x.

Задача 95. Да се докажат неравенствата:

а) $1+x \leqq e^x$; б) $e^x \leqq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$;

в) $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6} \leqq e^x$; г) $e^x \leqq 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}$;

д) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n-1}\frac{x^\nu}{\nu!} \leqq e^x \ (n \in \mathrm{N})$; е) $e^x \leqq \displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{x^\nu}{\nu!} \ (n \in \mathrm{N})$

за всички отрицателни x.

Задача 96. Да се докажат неравенствата:

а) $\ln(1+x) \leqq x$; б) $x-\dfrac{x^2}{2} \leqq \ln(1+x)$;

в) $\ln(1+x) \leqq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$; г) $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4} \leqq \ln(1+x)$;

д) $\ln(1+x) \leqq \displaystyle\sum_{\nu=1}^{2n-1}(-1)^{\nu+1}\frac{x^\nu}{\nu} \quad (n \in \mathrm{N})$;

е) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^{\nu+1}\frac{x^\nu}{\nu} \leqq \ln(1+x) \quad (n \in \mathrm{N})$

за всички положителни x.

Задача 97. Да се докажат неравенствата:

а) $\ln(1+x) \leqq \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+1}\frac{x^\nu}{\nu} \quad (n \in \mathrm{N})$;

б) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+1}\frac{x^\nu}{\nu}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+x} \leqq \ln(1+x) \quad (n \in \mathrm{N})$

за всички x, за които $-1 < x \leqq 0$.

Задача 98. Да се докаже, че наред с неравенствата $\cos x \leqq 1$ и $\sin x \leqq x$ са валидни още и:

а) $1-\dfrac{x^2}{2} \leqq \cos x$; б) $x-\dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x$;

в) $\cos x \leqq 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$; г) $\sin x \leqq x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$;

д) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \leqq \cos x \quad (n \in \mathrm{N})$;

е) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \leqq \sin x \quad (n \in \mathrm{N})$;

ж) $\cos x \leqq \displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \quad (n \in \mathrm{N})$;

з) $\sin x \leqq \displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \quad (n \in \mathrm{N})$

за всички положителни x.

Задача 99. Да се докажат неравенствата:

а) $\left|\sin x-\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\right| \leqq \dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$;

б) $\left|\cos x-\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}\right| \leqq \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

за всяко естествено n и за всяко реално x.

Задача 100. Да се докажат неравенствата:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \leqq \operatorname{ch} x \leqq \sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}+\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\operatorname{ch} x$;

б) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \leqq \operatorname{sh} x \leqq \sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\operatorname{ch} x$

за всяко неотрицателно цяло n и за всяко положително x.

Задача 101. Да се докажат неравенствата:

а) $\sum_{\nu=0}^{2n-1}\binom{\alpha}{\nu}x^\nu \leqq (1+x)^\alpha \leqq \sum_{\nu=0}^{2n-2}\binom{\alpha}{\nu}x^\nu$

за всяко естествено n, отрицателно α и положително x;

б) $\sum_{\nu=0}^{2n}\binom{\alpha}{\nu}x^\nu \leqq (1+x)^\alpha \leqq \sum_{\nu=0}^{2n-1}\binom{\alpha}{\nu}x^\nu$

за всяко естествено n, α с $0 \leqq \alpha \leqq 1$ и положително x;

в) $\sum_{\nu=0}^{2n+k-1}\binom{\alpha}{\nu}x^\nu \leqq (1+x)^\alpha \leqq \sum_{\nu=0}^{2n+k-2}\binom{\alpha}{\nu}x^\nu$

за всички естествени n и k, α с $k-1 \leqq \alpha \leqq k$ и положителни x;

г) $(1+x)^\alpha \leqq 1+\alpha x \quad (0 \leqq \alpha \leqq 1,\ -1 < x)$;

д) $(1+x)^\alpha \geqq 1+\alpha x \quad \left(\frac{1}{2} \leqq \left|\alpha - \frac{1}{2}\right|,\ -1 < x\right)$.

Задача 102. Да се докаже:

а) неравенството $(1+x)^n \geqq 1+nx$ за всяко четно естествено n и всяко x;

б)* че за всяко нечетно естествено число n съществува такова число ξ_n, за което $-3 \leqq \xi_n < -2$, че за всяко $x \geqq \xi_n$ е в сила неравенството $(1+x)^n \geqq 1+nx$, а за всяко $x \leqq \xi_n$ — неравенството $(1+x)^n \leqq 1+nx$.

Задача 103. Да се докажат неравенствата

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^\nu \frac{\operatorname{tg}^{2\nu+1} x}{2\nu+1} \leqq x \leqq \sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu \frac{\operatorname{tg}^{2\nu+1} x}{2\nu+1}$$

за всички естествени n и x, за което $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$.

Задача 104. Като се използват зад. 94–103, да се пресметнат с точност 10^{-3} числата: а) $e^{0,15}$; б) $\ln 1,12$; в) $\sin 0,21$; г) $\cos 0,32$; д) $\operatorname{ch} 0,1$; е) $\operatorname{sh} 0,4$; ж) $\sqrt{2}$; з) $\frac{\pi}{12}$.

Задача 105. Да се докаже неравенството $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \geqq (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ при положителни x и y и $0 < \alpha \leqq \beta$.

Задача 106*. Да се докажат неравенствата:

а) $xy \leqq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ при положителни x, y, p, q и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

б) $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{n}|b_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ при положителни p и q,

за които $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Хьолдер).

Задача 107*. Да се докаже неравенството на Минковски

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu + b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n}|b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

където $p \geqq 1$.

Задача 108*. Да се докажат:

а) неравенството на Коши $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ при неотрицателни $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

б) обобщеното неравенство на Коши $\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{p_\nu} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu$ при неотрицателни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и положителни $p_1, p_2, \ldots, p_n$, за които $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1$.

Задача 109. Да се докаже, че:

а) за всеки полином P съществува такова реално число N, че функцията P е монотонна във всеки от интервалите $(-\infty, -N)$ и (N, ∞);

б) за всяка рационална функция R съществува такова реално число N, че функцията R е монотонна във всеки от интервалите $(-\infty, -N)$ и (N, ∞).

Задача 110*. Да се докаже:

а) ако функцията $f : [0, a) \to \mathbf{R}$ притежава производни до $(n+1)$-ви ред, $f^{(\nu)}(0) \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ n = 2, 3, \ldots)$, като поне едно от числата $f^{(\nu)}(0) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$ е положително и съществува неотрицателна функция $\lambda : [0, a) \to \mathbf{R}$, такава че $f^{(n)}(x) \geqq \lambda(x) f(x)$ за всяко x от $[0, a)$, функцията f е растяща;

б) неравенството $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{2^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \leqq \operatorname{tg} x \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$;

в) неравенството $\operatorname{sh}(x\sqrt{2}) \leqq \sqrt{2}\operatorname{tg} x \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$.

§ 11. Локални екстремуми

Нека ξ е вътрешна точка от дефиниционната област X на функцията $f: X \to \mathbf{R}$.

Казва се, че функцията f има *локален максимум* в точката ξ, когато съществува такава околност U на ξ, че за всяко x от $X \cap U$ да е в сила неравенството $f(\xi) \geqq f(x)$.

Казва се, че функцията f има *локален минимум* в точката ξ, когато съществува такава околност U на ξ, че за всяко x от $X \cap U$ да е в сила неравенството $f(\xi) \leqq f(x)$.

Локалните максимуми и локалните минимуми носят общото име *локални екстремуми*.

Ако функцията f има локален екстремум в точката ξ и $f'(\xi)$ съществува, то $f'(\xi) = 0$ (Ф е р м а).

Тази *теорема на Ферма* дава необходимо, но не и достатъчно условие за съществуване на локален екстремум. Едно достатъчно условие се дава от следната теорема.

Ако функцията $f: X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е два пъти диференцируема в околност на вътрешна точка ξ на X и $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) \neq 0$, функцията f има локален екстремум в точката ξ. Този екстремум е максимум при $f''(\xi) < 0$ и минимум при $f''(\xi) > 0$.

По-общо: *нека функцията $f: X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ е $n-1$ пъти диференцируема в околност на вътрешна точка ξ на X и $f'(\xi) = f''(\xi) = \cdots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$. Ако $f^{(n)}(\xi)$ съществува и $f^{(n)}(\xi) \neq 0$, то:*

1. *При нечетно n функцията f не притежава екстремум в точката ξ, която се нарича и н ф л е к с н а т о ч к а на f.*
2. *При четно n функцията f има локален екстремум в точката ξ, който е максимум при $f^{(n)}(\xi) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(\xi) > 0$.*

При безбройно много пъти диференцируеми функции f горният критерий не дава резултат само когато всичките производни на f в ξ се анулират (зад. 53 показва, че действително съществуват различни от константа функции с това свойство).

Често на практика намирането на локални екстремуми се извършва само с първи производни, като се използват съображения за монотонност. Така например нека функцията $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ е диференцируема, $a < \xi < b$, $f'(\xi) = 0$ и

$$f'(x) \geqq 0 \quad (x < \xi), \tag{32}$$

$$f'(x) \leqq 0 \quad (x > \xi). \tag{33}$$

Поради (32) функцията f е растяща в $[a, \xi]$ и следователно

$$f(x) \leqq f(\xi) \quad (a \leqq x \leqq \xi). \tag{34}$$

От друга страна, поради (33) f е намаляваща в $[\xi, b]$ и следователно (34) е налице и при $\xi \leqq x \leqq b$. С това не само е установено, че f има локален максимум в ξ, но и че $f(\xi)$ е най-голямата стойност на f в интервала $[a, b]$. Читателят ще съобрази сам как да модифицира горните разсъждения и за други подобни случаи.

Задача 111. Да се намерят точките на локален екстремум на функциите:

а) $x^3 - 12x$; б) $x^3 - 3x^2 + 6x + 7$;

в) $x^3 - 9x^2 + 15x - 3$; г) $a + (x-b)^4$;

д) $a + (x-b)^3$; е) $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$;

ж) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$; з) $(x-4)^4(x+3)^3$;

и) $\dfrac{x}{1+x^2}$; й) $x + \dfrac{1}{x}$; к) $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a-x}$ $(0 < a \neq b > 0)$;

л) $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$; м) $\dfrac{x^4 + 1}{x^2}$; н) $\dfrac{x^2}{x^4 + 4}$;

о) $x \ln x$; п) $x^2 \ln x$; р) x^x; с) $x(\ln x)^2$;

т) $x^n e^{-x}$ $(n \in \mathbf{N})$; у) $x^2 e^{-x^2}$; ф) $\operatorname{ch} x$; х) $e^{-x} - e^{-2x}$;

ц) $x^3(x-1)^{\frac{2}{3}}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$; ч) $\ln x - \operatorname{arctg} x$; ш) $e^x \cos x$.

Задача 112. За произволно α от интервала:

а) $(0, 4)$ нека $m(\alpha)$ е най-малката стойност на функцията $\ln(x^2 + \alpha x + \alpha)$ $(x \in \mathbf{R})$. При каква стойност на α минимумът $m(\alpha)$ е най-голям?

б) $(-\infty, 1]$ нека $m(\alpha)$ е най-малката стойност на функцията $(1+x)\operatorname{arctg} x - (x+1)\operatorname{arctg} \alpha - x\dfrac{1+\alpha}{1+\alpha^2}$ $(x \leqq 1)$. При каква стойност на α минимумът $m(\alpha)$ е най-голям?

в) $(-\infty, 0]$ нека $m(\alpha)$ е най-малката стойност на функцията $x \ln \dfrac{1+x^2}{1+\alpha^2} - \dfrac{2\alpha^2 x}{1+\alpha^2} + 2\alpha$ $(x \geqq 0)$. При каква стойност на α минимумът $m(\alpha)$ е най-голям?

г) $(0, \infty)$ нека $M(\alpha)$ е най-голямата стойност на функцията $\operatorname{arctg} x - \dfrac{\alpha}{2}\ln(1+x^2) + \dfrac{\alpha}{2}\ln a$ $(a > 1,\ x \in \mathbf{R})$. При каква стойност на α максимумът $M(\alpha)$ е най-малък?

Задача 113. Да се намерят точните горни и точните долни граници на следните функции в посочените интервали:

а) $xe^{-0{,}01x}$ $(x \geqq 0)$;

б) $\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ $(x \geqq 0)$;

в) $\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ $(x \in \mathbf{R})$; г) $e^{-x}\cos x$ $(x \geqq 0)$.

Задача 114. Да се намери число, което, прибавено към квадрата си, дава най-малка сума.

Задача 115. Измежду всички правоъгълници, вписани в кръг с радиус a, да се намери онзи, който има най-голямо лице.

Задача 116. Измежду всички правоъгълници, вписани в полукръг с радиус r, да се намери онзи, който има най-голямо лице.

Задача 117. В дадена сфера да се впише цилиндър с най-голяма околна повърхнина.

Задача 118. В дадена сфера да се впише цилиндър с най-голяма пълна повърхнина.

Задача 119. В дадена сфера да се впише конус с най-голям обем.

Задача 120. В дадена сфера да се впише конус с най-голяма околна повърхнина.

Задача 121. В даден конус да се впише цилиндър с най-голям обем.

Задача 122. От физиката е известно, че ако φ е ъгълът между една осветявана площадка и лъчите, а r — разстоянието до светлинния източник, съществува константа m, която зависи от силата на източника, така че силата на осветлението е $\dfrac{m\sin\varphi}{r^2}$. На каква височина върху даден стълб трябва да се окачи светлинен източник, така че в дадена точка на хоризонтална площадка, намираща се на дадено разстояние от стълба, осветлението да бъде най-голямо?

Задача 123*. При отражението на светлинен лъч ъгълът на падането е равен на ъгъла на отражението. Да се докаже, че ако A и B са две точки от една и съща страна на права l в дадена равнина, при движението си от A до B след отражение от l светлината изминава възможно най-късия път (Херон).

Задача 124*. Съгласно закона на Снелиус–Ферма $\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}=\dfrac{v_1}{v_2}$, където φ_1 и φ_2 са съответно ъгълът на падането и ъгълът на пречупването, а v_1 и v_2 — съответно скоростите на светлината преди и след пречупването. Ако A и B са две точки от различни страни на пречупващата светлината права l, да се докаже, че при движението си от A до B след пречупване от l светлината изразходва възможно най-малко време.

§ 12. Изпъкнали и вдлъбнати функции

Нека ξ е вътрешна точка от дефиниционната област X на функцията

$f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ и $f'(\xi)$ съществува. Уравнението на допирателната към графиката на f в точката ξ е

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi). \tag{35}$$

Функцията f се нарича *изпъкнала* или *хонвексна* в точката ξ, когато съществува такава околност U на ξ, че за всяко x от $X \cap U$ точката $f(x)$ от графиката на f да се намира над съответната (за същата стойност на x) точка от допирателната (35). Аналитично това означава, че за всяко x от $X \cap U$ е в сила неравенството

$$f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) \leqq f(x). \tag{36}$$

Функцията f се нарича *вдлъбната* или *конкавна* в точката ξ, когато съществува такава околност U на ξ, че за всяко x от $X \cap U$ точката $f(x)$ от графиката на f да се намира под съответната (за същата стойност на x) точка от допирателната (35). Аналитично това означава, че за всяко x от $X \cap U$ е в сила неравенството

$$f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) \geqq f(x). \tag{37}$$

Ако функцията f е изпъкнала (вдлъбната) в точката ξ, функцията $-f$ е вдлъбната (изпъкнала) в ξ.

Точката ξ се нарича *инфлексна* за функцията f, когато f не е нито изпъкнала, нито вдлъбната в ξ. Аналитично това означава, че за произволна околност U на ξ съществуват както точки x от $X \cap U$, за които (36) е нарушено, така и точки x от $X \cap U$, за които (37) е нарушено.

Задача 125. Да се докаже, че:

а) ако функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ е диференцируема в околност на точката ξ, $f''(\xi)$ съществува и $f''(\xi) > 0$ $(f''(\xi) < 0)$, то f е изпъкнала (вдлъбната) в ξ;

б) ако функцията $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ е диференцируема в околност на точката ξ, изпъкнала (вдлъбната) е в ξ и $f''(\xi)$ съществува, то $f''(\xi) \geqq 0$ $(f''(\xi) \leqq 0)$;

в) ако ξ е инфлексна точка за функцията f и $f''(\xi)$ съществува, то $f''(\xi) = 0$.

Може да се установи, че ако функцията f е два пъти диференцируема в интервала Δ, ξ е вътрешна точка за Δ, за която $f''(\xi) = 0$, и $\delta > 0$ е такова число, че множествата $f''((\xi-\delta, \xi))$ и $f''((\xi, \xi+\delta))$ са от различни страни на началото, точката ξ е инфлексна за f.

Задача 126. Да се изследва в кои точки са изпъкнали, вдлъбнати или имат инфлексия функциите:

а) $3x^2 - x^3$; б) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ $(a > 0)$; в) $x + x^{\frac{5}{3}}$;

г) $\sqrt{1+x^2}$; д) $x + \sin x$; е) e^{-x^2};

ж) $\ln(1+x^2)$; з) $x\sin(\ln x)$ $(x > 0)$; и) x^x $(x > 0)$.

Задача 127. Да се докаже, че функцията $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ притежава три инфлексни точки, за които съответните точки от графиката лежат върху една права.

Задача 128. Да се изследва за изпъкналост и вдлъбнатост циклоидата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

Една дефинирана в интервал функция $f : \Delta \to \mathbf{R}$ се нарича *изпъкнала* (в Δ), когато неравенството

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \tag{38}$$

е изпълнено за всеки две точки x_1 и x_2 от Δ и за всеки две реални числа p_1 и p_2, за които

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad p_1 + p_2 = 1. \tag{39}$$

Една дефинирана в интервал функция $f : \Delta \to \mathbf{R}$ се нарича *вдлъбната* (в Δ), когато неравенството

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \geqq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \tag{40}$$

е изпълнено за всеки две точки x_1 и x_2 от Δ и за всеки две реални числа p_1 и p_2, за които е изпълнено (39).

Задача 129. Да се докаже, че ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е изпъкнала:

а) функцията $\varphi : \Delta \setminus \{\xi\} \to \mathbf{R}$, дефинирана с $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$, е растяща;

б) множеството на точките, в които тя не е диференцируема, е крайно или изброимо;

в) производната ѝ е растяща.

Задача 130. а) Ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е изпъкнала или вдлъбната, тя е непрекъсната във вътрешността на Δ.

б) Да се посочи пример на изпъкнала функция $f : \Delta \to \mathbf{R}$, която е прекъсната в край на Δ.

Задача 131. Да се докаже, че ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е:

а) изпъкнала и два пъти диференцируема в Δ, втората ѝ производна е неотрицателна в Δ;

б) диференцируема и производната ѝ е растяща в Δ, f е изпъкнала;

в) два пъти диференцируема в Δ и втората ѝ производна е неотрицателна в Δ, f е изпъкнала.

Задача 132. Да се докаже, че ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е:

а) изпъкнала в Δ и ξ е вътрешна точка на Δ, за която $f'(\xi)$ съществува, f е изпъкнала в точката ξ;

б) два пъти диференцируема в Δ и изпъкнала във всяка вътрешна точка на Δ, тя е изпъкнала в Δ.

Задача 133. Ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е изпъкнала, в сила е неравенството $f\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu x_\nu\right) \leqq \sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu f(x_\nu)$ при $x_\nu \in \Delta$, $p_\nu > 0$ $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1$.

Задача 134. Да се докажат неравенствата:

а) $\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^a \leqq n^{a-1} \sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu^a \quad (1 \leqq a \in \mathbf{R},\ 0 \leqq x_\nu \in \mathbf{R})$;

б) $n^{a+1} \leqq \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^a \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{x_\nu^a}\right) \quad (0 \leqq a \in \mathbf{R},\ 0 < x_\nu \in \mathbf{R},$ $\nu = 1, 2, \ldots, n)$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu^a \leqq n^{1-a} \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^a \quad (0 \leqq a \leqq 1, 0 \leqq x_\nu \in \mathbf{R}, \nu = 1, 2, \ldots, n)$;

г) $\dfrac{1}{n} \leqq \prod\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu^{p_\nu} \quad \left(n \in \mathbf{N},\ p_\nu > 0\,(\nu = 1, 2, \ldots, n),\ \sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1\right)$.

Задача 135. С помощта на зад. 133 да се докаже обобщеното неравенство на Коши (зад. 108 б)).

§ 13. Логаритмична изпъкналост

Задача 136. Да се докаже, че:

а) ако два пъти диференцируемата функция $f : \Delta \to \mathbf{R}$ приема само положителни стойности, а функцията $\ln f$ е изпъкнала, функцията f^a е също изпъкнала за всяко положително a;

б) горното заключение остава валидно и без да се предположи, че f е диференцируема.

Задача 137. Да се докаже, че при $x > 0$ функциите:

а) x^{ax} $(a > 0)$; б) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-ax}$ $(a > 0)$; в) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+a}$ $\left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right)$,

са изпъкнали.

Задача 138. Да се докажат неравенствата:

а) $n(n+1)^{n+1} \leqq \sum\limits_{\nu=1}^{n} (2\nu)^{2\nu}$;

б) $n(n+1)^{\varepsilon(n+1)} \leqq \sum\limits_{\nu=1}^{n} (2\nu)^{2\nu\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0)$;

в) $\prod_{\nu=1}^{n}(1+p_\nu) < e \quad \left(0 \leqq p_\nu \in \mathbf{R},\ \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1\right)$;

г) $\prod_{\nu=1}^{n}(1+xp_\nu) \leqq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \left(0 \leqq x \in \mathbf{R},\ 0 \leqq p_\nu \in \mathbf{R}\,(\nu = 1, 2, \ldots, n), \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1\right)$;

д) $e < \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{a_\nu} \quad \left(1 \leqq a_\nu \in \mathbf{R},\ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = n+1\right)$;

е) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x} \leqq \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{a_\nu} \quad \left(1 \leqq a_\nu \in \mathbf{R},\ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = n+x,\ x \geqq 0\right)$.

Задача 139. Да се докаже, че ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е положителна и съществува редица $a_1, a_2, \ldots$ от положителни числа с $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, за които функциите f^{a_n} $(n \in \mathbf{N})$ са изпъкнали (вдлъбнати), функцията $\ln f$ също е изпъкнала (вдлъбната).

Задача 140. Да се посочи пример на функция $f : \Delta \to \mathbf{R}$, която приема само положителни стойности и не е вдлъбната, а функцията $\ln f$ е вдлъбната.

Задача 141. Да се докаже, че функцията $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ е вдлъбната при $x > 0$.

Задача 142. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu} \leqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

§ 14. Втора производна на Шварц

Задача 143. Да се докаже, че ако функцията f е диференцируема в околност на точката ξ и притежава втора производна в ξ, то

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2} = f''(\xi).$$

Нека ξ е вътрешна точка от дефиниционната област на функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$. Ако съществува границата $\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2}$, тя се нарича *втора производна на Шварц* на f в ξ и се означава с $f^{[\prime\prime]}(\xi)$.

Задача 144. Да се посочи пример на диференцируема функция $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ и вътрешна точка ξ на X, за която $f''(x)$ не съществува, а $f^{[\prime\prime]}(x)$ съществува.

Задача 145. Да се докаже, че:

а) ако ξ е такава вътрешна точка от дефиниционната област на функцията $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$, че $f(\xi)$ е най-малката (най-голямата) стойност на f, и ако $f^{[\prime\prime]}(\xi)$ съществува, то $f^{[\prime\prime]}(\xi) \geqq 0$ $(f^{[\prime\prime]}(\xi) \leqq 0)$;

б) ако $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната функция с $f(a) = f(b) = 0$, за която втората производна на Шварц съществува и е положителна (отрицателна) в (a, b), то $f(x) \leqq 0$ $(f(x) \geqq 0)$ за всяко x от $[a, b]$;

в) предишното заключение остава в сила и при по-слабото предположение $f^{[\prime\prime]}(x) \geqq 0$ $(f(x)^{[\prime\prime]} \leqq 0)$ за всяко x от (a, b);

г) ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в интервала Δ и $f^{[\prime\prime]}(x) = 0$ за всяка вътрешна точка x на Δ, f е линейна функция в Δ.

Задача 146. Да се докаже, че:

а) ако функцията f е изпъкнала (вдлъбната) в точката ξ и втората производна на Шварц $f^{[\prime\prime]}(\xi)$ съществува, то $f^{[\prime\prime]}(\xi) \geqq 0$ $(f^{[\prime\prime]}(\xi) \leqq 0)$;

б) съществува диференцируема функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която втората производна на Шварц в точката 0 е положителна, но f не е изпъкнала при $\xi = 0$; да се построи пример за такава функция;

в) ако функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е непрекъсната и притежава неотрицателна втора производна на Шварц навсякъде във вътрешността на интервала Δ, то f е изпъкнала.

§ 15. Формула на Тейлър

Нека функцията f е $n+1$ пъти диференцируема в някой интервал Δ, а a и x са произволни точки от Δ. Тогава съществува точка ξ между a и x (различна от a и x при $a \neq x$), за която

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{41}$$

Равенството (41) се нарича *формула на Тейлор*, а последното събираемо в дясната страна — *остатъчен член във формата на Лагранж*.

При $n = 0$ равенството (41) преминава в теоремата за крайните нараствания.

Ако в (41) x се замести с $x + h$, а a — с x, равенството приема вида

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} h^{\nu} + \frac{f^{n+1}(x+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \tag{42}$$

където $0 < \theta < 1$.

Ако в (42) x се замести с 0, а h — с x, получава се т. нар. *формула на Маклорен*:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu} + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \tag{43}$$

където отново $0 < \theta < 1$.

Разбира се, числото ξ в (41) и числата θ в (42) и (43) зависят не само от функцията f, а и от числата a, x, h и n.

Задача 147. Да се докаже, че:

а) числото e е ирационално;

б) числата $\sin 1$ и $\cos 1$ са ирационални.

Задача 148. Да се докажат равенствата:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{x^{n+1}} \left(e^x - \sum\limits_{\nu=0}^{n} \dfrac{x^{\nu}}{\nu!} \right) = 1;$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(2n+3)!}{x^{2n+3}} \left(\sin x - \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \dfrac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \right) = 1;$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(2n+2)!}{x^{2n+2}} \left(\cos x - \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \right) = 1.$

Задача 149*. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi n! e)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi(2n+1)! e^{-1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi(2n)! e^{-1})$

(фон Нойман).

Задача 150. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin(2\pi(4n-1)! \sin 1)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin(2\pi(4n+1)! \sin 1)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin(2\pi(4n-2)! \cos 1)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin(2\pi(4n)! \cos 1)$.

Задача 151. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{tg}(\pi n! ke)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+1) \operatorname{tg}(\pi(2n+1)! ke^{-1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} 2n \operatorname{tg}(\pi(2n)! ke^{-1})$,

където k е произволно цяло число.

Задача 152*. Да се докаже, че числото e не удовлетворява квадратно уравнение с цели коефициенти.

Задача 153*. Да се докаже, че реалните числа x, за които съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi n! x)$, имат вида $r + ke$, където r е рационално, а k — цяло число (Д о ч е в).

§ 16. Нули

Ако функцията f е n пъти диференцируема в околност на точката ξ, тази точка се нарича *n-кратна нула* на f или *n-кратен корен* на уравнението $f(x) = 0$, когато $f^{(\nu)}(\xi) = 0$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $f^{(n)}(\xi) \neq 0$. Еднократните нули на f се наричат още *прости нули* на f, а кратните — *съвпадащи*. Тази дефиниция е обобщение на познатата алгебрична дефиниция на същите термини при полиноми.

Сумата от кратностите на нулите на достатъчен брой пъти диференцируема функция f в един интервал Δ се нарича *брой на нулите* на f в Δ.

Изследването на нулите на функциите е важна задача на класическия анализ и приложенията му. Теоремите за средните стойности (и по-специално теоремата на Рол) позволяват в редица случаи тази задача да се реши докрай.

Задача 154. Да се намери броят на реалните корени на уравненията:

а) $2 \operatorname{tg} x - x = 0$ в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \nu\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + \nu\pi\right)$ $(\nu \in \mathbf{I})$;

б) $3 \operatorname{tg} x - 3x - x^3 = 0$ в интервала $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$.

Задача 155. Да се намери броят на реалните корени на уравненията:

а) $x^4 - 4ax^3 - 2 = 0$; б) $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0$;

в) $x \ln x - a = 0$; г) $\ln x - ax = 0$,

където a е константа.

Задача 156. Да се докаже, че уравнението $x^3 + px + q = 0$, където p и q са реални числа, има точно един реален корен при $4p^3 + 27q^2 > 0$ и три реални корена при $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Задача 157. Да се докаже, че при $a > 1$ уравнението $a^x - bx = 0$, където b е реална константа, има точно два реални корена при $b > e \ln a$, няма нито един реален корен при $e \ln a > b > 0$ и има точно един реален корен при $b < 0$.

Задача 158. Да се определи при какви стойности на параметъра a следните уравнения имат посочения брой реални корени:

а) два различни: $3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + a = 0$;

б) един: $2x^3 - 13x^2 - 20x + a = 0$;

в) четири различни: $3x^4 - 14x^3 - 45x^2 + a = 0$;

г) два съвпадащи и един прост: $2x^3 - 4x^2 - 30x + a = 0$;

д) нито един: $x^2 - x - \ln x + a = 0$.

Задача 159. Да се определи при какви стойности на параметъра a следните уравнения имат посочения брой реални корени:

а) $\cos x - a = 0$ — един двоен корен в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\sin x - ax = 0$ — един троен корен в $[-\pi, \pi]$;

в) $x^2 + x + e^{-x} + a = 0$ — един двоен корен;

г) $6 \operatorname{arc\,tg} x - x^3 + a = 0$ — един двоен и един прост корен.

Задача 160. Да се докаже, че ако функцията f е достатъчен брой пъти диференцируема в интервала Δ и броят на нулите ѝ в Δ е n, производната ѝ притежава поне $n-1$ нули в Δ.

Задача 161. Да се докаже, че:

а) ако всички нули на един полином са реални, нулите на производния му полином са също реални и лежат между най-малката и най-голямата нула на полинома;

б) нулите на полиномите на Льожандър са реални и различни и лежат в интервала $(-1, 1)$.

Задача 162. Да се докаже, че:

а) ако функцията $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в a, диференцируема в (a, ∞) и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(a)$, съществува такова число ξ, че $a < \xi$ и $f'(\xi) = 0$;

б) ако функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е диференцируема в $\mathbf{R}$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, съществува ξ от $\mathbf{R}$, за което $f'(\xi) = 0$.

Задача 163. Да се докаже, че:

а) ако $\lambda \neq 0$ е константа, полиномът $P' - \lambda P$ има поне толкова реални нули, колкото и полиномът P; ако броят на реалните нули на P е p, при $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$) полиномът $P' - \lambda P$ има поне p реални нули, които не са вляво (вдясно) от най-малката (най-голямата) нула на P;

б) ако $\lambda \neq 0$ е константа, заключението на а) е валидно и за полинома $(D - \lambda)^n P(x)$;

в) ако полиномът φ има само различни от 0 реални нули, полиномът $\varphi(D)P(x)$ има поне толкова реални нули, колкото и полиномът P.

Задача 164. Да се докаже, че нулите на полиномите на Лагер са реални, положителни и различни.

Задача 165. Да се докаже, че нулите на полиномите на Ермит са реални и различни.

Задача 166. Да се докаже, че:

а) за всяка положителна константа λ полиномът $P'(x) - \lambda x P(x)$ има поне една реална нула повече, отколкото полиномът $P(x)$;

б) ако P е полином, а λ е реално число, по-голямо от степента на P, полиномът $(1+x^2)P'(x) - \lambda x P(x)$ има поне една реална нула повече, отколкото полиномът $P(x)$;

в) ако φ е полином от положителна четна степен с отрицателен старши коефициент, а P — произволен полином, полиномът $P\varphi' + P'$ има поне една реална нула повече, отколкото полиномът P;

г) ако P и Q са полиноми съответно от степени p и q, Q не притежава реални нули и α е такова число, че $\alpha q > p$, полиномът $P'Q - \alpha P Q'$ има поне една реална нула повече, отколкото полиномът P.

Задача 167. Да се докаже, че всички нули на полинома $(1+x^2)^n \dfrac{d^n \operatorname{arc\,tg} x}{dx^n}$ от степен $n-1$ са реални.

§ 17. Общи теореми за средни стойности

Задача 168*. Да се докаже, че:

а) ако функциите F и G са n пъти диференцируеми в интервал Δ, имат поне n общи нули в Δ и $G^{(n)}(x) \neq 0$ за всяко x от Δ, то за всяко x от Δ, за което $G(x) \neq 0$, съществува ξ от Δ, за което $F(x) = \dfrac{F^{(n)}(\xi)}{G^{(n)}(\xi)} G(x)$;

б) ако функциите F и G са съответно $m+1$ и $n+1$ пъти диференцируеми в интервал Δ, числото a е $(m+1)$-кратна нула на F и $(n+1)$-кратна нула на G, а $G^{(n+1)}$ не се анулира в $\Delta \setminus \{\xi\}$, то за всяко x от Δ съществува ξ от Δ, за което

$$F(x) = \frac{n!\,(x-\xi)^{m-n} F^{(m+1)}(\xi)}{m!\,G^{(n+1)}(\xi)} G(x) \quad \text{(Тагамлицки).}$$

Задача 169. Ако функцията f е n пъти диференцируема в интервал Δ, P е полином от степен $n-1$ и x_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ е поне k_μ-кратна нула на функцията $f - P$, като числата x_μ са различни помежду си и $\sum\limits_{\mu=1}^{m} k_\mu = n$, да се докаже, че за всяко x от Δ съществува число ξ от Δ, за което

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{\mu=1}^{m} (x - x_\mu)^{k_\mu}.$$

Задача 170*. Нека функцията f е $n+1$ пъти диференцируема в интервал Δ, $a \in \Delta$, $R_n(x) = f(x) - \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$ за всяко x от Δ, функцията g е диференцируема в Δ и g' не се анулира в Δ. Да се докаже, че за всяко x от Δ съществува ξ от Δ, за което:

а) $R_n(x) = \dfrac{g(x) - g(a)}{g'(\xi)} \cdot \dfrac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$ (Шльомилх);

б) $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^p}{p.n!}(x-\xi)^{n+1-p} f^{(n+1)}(\xi)$ (Рош);

в) $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ (Лагранж);

г) $R_n(x) = \dfrac{x-a}{n!}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)$ (Коши);

д) $R_n(x) = \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^{n+1} \dfrac{(b-\xi)^{n+2}}{(n+1)!(b-x)} f^{(n+1)}(\xi)$ $(a \neq b,$ $|x-a| < |b-a|)$ (Тагамлицки).

§ 18. Изследване на графики на функции

Диференциалното смятане дава възможност да се отговори на редица въпроси, които възникват при изучаване на кривите линии. В аналитичен аспект най-прости криви са графиките на диференцируемите функции.

При изследването и начертаването на графиката на една диференцируема функция понякога се препоръчва да се следва изложеният по-долу план:

1. Да се намери дефиниционната област на функцията.
2. Да се изследва дали функцията е четна или нечетна и по-общо дали графиката ѝ не е симетрична спрямо някоя вертикална права или спрямо някоя точка.

3. Да се изследва дали функцията е периодична или не.
4. Да се изследва поведението на функцията около краищата на дефиниционните интервали.
5. Да се изследва знакът на функцията, включително пресечните ѝ точки с координатните оси.
6. Да се намерят евентуалните асимптоти на графиката, както и пресечните им точки с графиката (вж. § 19, където този въпрос се обсъжда при по-общи условия).
7. Да се намерят интервалите на растене и намаляване на функцията.
8. Да се намерят екстремумите на функцията.
9. Да се изследват интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост, както и да се определят инфлексните точки на графиката.

Задача 171. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = x^3$ (*кубична парабола*);

б) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (*кадрица на Мария Анези*);

в) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ (*серпентина на Нютон*);

г) $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$ (*тризъбец на Нютон*).

Задача 172. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = \dfrac{x^2}{4-x^2}$; б) $y = \dfrac{x^3}{x^2-3}$;

в) $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$; г) $y = \dfrac{x^2(x-2)}{(x+1)^2}$.

Задача 173. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = \cos^3 x + \sin^3 x$; б) $y = \cos^4 x + \sin^4 x$;

в) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$; г) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

д) $y = \sin x^2$;

е) $y = \sin \dfrac{1}{x}$ (*топологична синусоида*);

ж) $y = x \sin \dfrac{1}{x}$; з) $y = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$;

и) $y = x \operatorname{ctg} x$ (*квадратриса на Динострат*).

Задача 174. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = x - 2 \operatorname{arc\,tg} x$; б) $y = x - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$;

в) $y = \arcsin \dfrac{x}{x^2-1}$.

Задача 175. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = \operatorname{sh} x$; б) $y = \operatorname{ch} x$ (*верижка*);

в) $y = \operatorname{th} x$; г) $y = \operatorname{cth} x$.

Задача 176. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = xe^{\frac{1}{x-2}}$; б) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$;

в) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$; г) $y = e^{-x^2}(1+x^2)$.

Задача 177. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; б) $y = \ln \cos x$;

в) $y = \ln(x^2-1)$; г) $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;

д) $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Задача 178. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y = \operatorname{Ar\,sh} x$; б) $y = \operatorname{Ar\,ch} x$;

в) $y = \operatorname{Ar\,th} x$; г) $y = \operatorname{Ar\,cth} x$.

Понякога под крива се разбира множеството на точките (x, y) в равнината, които удовлетворяват уравнение от вида $f(x, y) = 0$, където f е функция на две променливи. В отделни случаи е възможно това уравнение да се реши явно спрямо y и по този начин изследването на кривата да се сведе към изследване на графики на функции.

Задача 179. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $4y^2 = x^3$ (*семикубична парабола* или *парабола на Нейл*);

б) $y^2(4-x) = x^3$ (*цисоида на Диоклес*);

в) $(x-1)^2(x^2+y^2) = 4x^2$ (*конхоида на Никомед*);

г) $y^2 = x^2\dfrac{1+x}{1-x}$ (*строфоида*);

д) $\left(y - \operatorname{Ar\,ch}\dfrac{1}{x}\right)^2 = a^2 - x^2$ (*трактриса*).

Задача 180. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $y^2 = x^3 - x^4$; б) $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$;

в) $y^3(2x-1) + x^2 - x^4 = 0$; г) $y^2(1-x) + 2x^2y + x^4 = 0$;

д) $(y-x^2)^2 - x^5 = 0$; е) $x^4 + x^2y^2 - 6x^2y + y^2 = 0$.

§ 19. Изследване на криви, зададени параметрично

Кривите се задават параметрично с двойка уравнения от вида

$$x = f(t), \quad y = g(t). \tag{44}$$

Всяка параметрично зададена крива може да се разглежда като траектория на подвижна точка, а уравненията (44) — като закон на движението на такава точка, стига t да се интерпретира като време (и, разбира се, функциите да бъдат диференцируеми).

Кривите от вида (44) се изследват, като се изследва поотделно всяка от функциите $x = f(t)$ и $y = g(t)$, след което получената по този начин информация се обедини.

Ако функциите (44) са диференцируеми в точката τ и поне една от производните $f'(\tau)$ и $g'(\tau)$ е различна от нула, уравнението на *допирателната* към кривата (44) в точката $\big(f(\tau), g(\tau)\big)$ има вида

$$\frac{x - f(\tau)}{f'(\tau)} = \frac{y - g(\tau)}{g'(\tau)}. \tag{45}$$

Ето защо ъгловият коефициент на допирателната е

$$k = \frac{g'(\tau)}{f'(\tau)}. \tag{46}$$

Допирателната е хоризонтална при $g'(\tau) = 0$ и вертикална при $f'(\tau) = 0$. При

$$\lim_{t\to\tau} f(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\tau} g(t) = \eta \tag{47}$$

правата $y = \eta$ е *хоризонтална асимптота* на кривата (44), а при

$$\lim_{t\to\tau} f(t) = \xi, \quad \lim_{t\to\tau} g(t) = \infty \tag{48}$$

правата $x = \xi$ е *вертикална асимптота* на кривата (44). Когато

$$\lim_{t\to\tau} f(t) = \lim_{t\to\tau} g(t) = \infty, \tag{49}$$

около τ може да съществува *наклонена асимптота*. Това е така, когато при (49) границите

$$\lim_{t\to\tau} \frac{g(t)}{f(t)} = k, \quad \lim_{t\to\tau}\big(g(t) - kf(t)\big) = n \tag{50}$$

съществуват; тогава уравнението на асимптотата е $y = kx + n$. В равенствата (47)–(50) буквата τ може да означава и някой от символите ∞ или $-\infty$. Ако пък

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \xi, \quad \lim_{t\to\infty} g(t) = \eta, \tag{51}$$

точката (ξ, η) се нарича *асимптотична* за кривата (44); дефинициите остават в сила и когато в (51) ∞ се замени с $-\infty$.

Една характерна особеност на параметрично зададените криви е възможността да съществуват *двойни точки*. Една точка (ξ, η) от кривата (44) се нарича двойна, когато се получава за две различни стойности за параметъра t. Ето защо двойните точки се намират, като се реши системата

$$f(t_1) = f(t_2), \quad g(t_1) = g(t_2), \quad (t_1 \neq t_2). \tag{52}$$

Графиките на функции $y = f(x)$ могат да се схващат като параметрично зададени криви с двойката параметрични уравнения $x = t$ и $y = f(t)$. Ето защо казаното дотук в общия случай и по-специално за асимптотите важи и за графиките на функции.

Задача 181. Да се изследват и начертаят кривите :

а) $x = \dfrac{t+2}{t^2+1}$, $y = \dfrac{1}{t-t^2}$; б) $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t-2}{t^2+1}$;

в) $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$.

Задача 182. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (*циклоида*);

б) $x = 2t - \sin t$, $y = 2 - \cos t$ (*скъсена циклоида*);

в) $x = t - 2\sin t$, $y = 1 - 2\cos t$ (*удължена циклоида*);

г) $x = t\sin t + \cos t$, $y = \sin t - t\cos t$ (*еволвента на окръжност*);

д) $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$ (*крива на Лисажу*);

е) $x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$ (*хипоциклоида*);

ж) $x = 4\cos t - \cos 4t$, $y = 4\sin t + \sin 4t$ (*епициклоида*).

Задача 183. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $x = \operatorname{sh} t - t$, $y = \operatorname{ch} t - 1$; б) $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$;

в) $x = te^t$, $y = te^{-t}$.

Понякога кривите с уравнения от вида $f(x, y) = 0$ могат да се сведат към параметрични криви. Особено прост е случаят, когато f е полином на x и y, а параметризацията води до рационални функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. В този случай кривата се нарича *уникурзална*. Специален случай на уникурзална крива е налице, когато f е сума на два хомогенни полинома на x и y от различни степени. Тогава рационална параметризация се постига чрез субституцията $y = tx$.

Задача 184. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (*декартов лист*); б) $x^5 + y^5 - 5x^2y^2 = 0$;

в) $x^4 - (x^2 - y^2)y = 0$; г) $2y^3x - y^4 - x(y - x)^2 = 0$.

Задача 185. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ (*астроида*);

б) $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ (*кардиоида*).

§ 20. Изследване на криви в полярни координати

Често употребявана координатна система е *полярната*. Връзката на полярните и декартовите координати се дава с равенствата

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \tag{53}$$

където *полярният ъгъл* θ може да взема произволни реални, а *полярният радиус* ρ — произволни неотрицателни реални стойности. В полярни координати крива се задава с уравнение от вида $F(\theta, \rho) = 0$, където F е функция на две променливи. Тук ще се интересуваме предимно от важния и интересен за приложенията частен случай, когато горното уравнение може да се реши явно спрямо ρ:

$$\rho = f(\theta). \tag{54}$$

Важна особеност на това задаване на крива в полярни координати е, че в общия случай θ не се изменя в естествената дефиниционна област на функцията f, а само в онази нейна част, за която $f(\theta) \geqq 0$.

От (53) и (54) се получава следната двойка декартови параметрични уравнения на кривата с полярно уравнение (54):

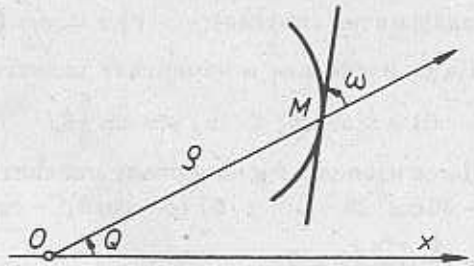
$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta. \tag{55}$$

Ето защо изследването на кривите с полярни уравнения (54) може да се сведе към аналогичния въпрос за параметрично зададени криви. На практика обаче така се постъпва рядко, тъй като начертаването на кривата (54) може да се сведе до изследване само на една функция f, както и до използуване на геометричния смисъл на полярните координати.

Геометричният смисъл на производната на функцията (54) личи от равенството

$$\rho' = \rho\operatorname{ctg}\omega, \tag{56}$$

където ω е ъгълът, който посоката на радиус-вектора OM, прекаран от полюса O към произволна точка M от кривата, сключва с посоката (към растящите ъгли) на допирателната към кривата в точката M (фиг. 5).



Фиг. 5

Асимптоти могат да се очакват за онези стойности α на θ, за които

$$\lim_{\theta\to\alpha} f(\theta) = \infty. \tag{57}$$

При

(58) $$\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathrm{I})$$

въпросната асимптота може да бъде само вертикална. Тя съществува точно когато съществува

(59) $$\lim_{\theta \to \alpha} f(\theta)\cos\theta = \xi,$$

и декартовото ѝ уравнение е

(60) $$x = \xi.$$

Когато α не удовлетворява (58), въпросната асимптота съществува точно когато съществува

(61) $$\lim_{\theta \to \alpha} (\theta - \alpha) f(\theta) = l,$$

и има декартово уравнение

(62) $$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{l}{\cos\alpha}.$$

Ако в (62) се освободим от знаменателя $\cos\alpha$, получаваме уравнението на асимптотата, което важи и в случая (58). При

(63) $$\lim_{\theta \to \infty} f(\theta) = r$$

окръжността с център в полюса O и радиус r е *асимптотична* за кривата (54). При $r = 0$ тази окръжност се изражда в полюса, който става *асимптотична точка* за изследваната крива. Същата бележка остава в сила и когато в (63) ∞ се смени с $-\infty$.

Задача 186. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $\rho = \theta$ (*архимедова спирала*);

б) $\rho = \dfrac{1}{\theta}$ (*хиперболична спирала*);

в) $\rho = e^{2\theta}$ (*логаритмична спирала*); г) $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$ (*жезъл*).

Задача 187. Да се изследват и начертаят розите:

а) $\rho = \sin 3\theta$; б) $\rho = \sin 2\theta$; в) $\rho = \sin \dfrac{5}{3}\theta$.

Задача 188. Да се изследват и начертаят майските бръмбари:

а) $(\rho - \cos\theta)^2 - 36\cos^2 2\theta = 0$; б) $(\rho - \cos\theta)^2 - \cos^2 2\theta = 0$;

в) $(\rho - \cos\theta)^2 - \dfrac{4}{81}\cos^2 2\theta = 0$.

Понякога е за предпочитане кривите с декартови уравнения от вида $f(x, y) = 0$ да се изследват в полярни координати. Полярното уравнение на една такава крива се получава, като x и y в декартовото ѝ уравнение се заместят с равните им от (53). Този преход е особено удобен, когато в f

фигурира комбинацията $x^2 + y^2$. Поради (53) тя се замества с ρ^2, което може да доведе до опростявания.

Задача 189. Да се намерят полярните уравнения на кривите:

а) кардиоида: $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$;

б) строфоида: $y^2 = x^2\,\dfrac{1+x}{1-x}$;

в) цисоида на Диоклес: $y^2(4 - x) = x^3$;

г) декартов лист: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;

д) обща конхоида на Никомед: $(x - 1)^2(x^2 + y^2) = d^2x^2$.

Задача 190. Да се намери полярното уравнение на коничните сечения, когато полюсът е в един от фокусите, а полярната ос е перпендикулярна на директрисата.

Задача 191. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $(x^2 + y^2 - x)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ (*охлюви на Паскал*);

б) $(x^2 + y^2 - x)^2 = a^2(x^2 + y^2) + b$ (*овали на Декарт*).

Задача 192. Да се изследват и начертаят кривите:

а) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ (*лемниската на Я. Бернули*);

б) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 + a$ (*овали на Касини*).

Осма глава

Безкрайни редове

§ 1. Сходящи и разходящи редове

Символ от вида

(1) $$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

или кратко

(2) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu,$$

където u_ν ($\nu \in \mathbf{N}$) са числа, се нарича *безкраен ред*. Сумата

(3) $$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

на първите n члена $u_1, u_2, \ldots, u_n$ на реда (1) се нарича *n-та парциална (частична) сума* на този ред. Ако на произволно естествено число n се съпостави n-тата парциална сума s_n на реда (1), се получава безкрайна редица $s_1, s_2, \ldots$, която се нарича *редица от парциалните суми* на реда (1). Изучаването на един безкраен ред не е нищо друго освен изучаване на редицата от парциалните му суми.

Редът (1) се нарича *сходящ (конвергентен)*, когато е сходяща редицата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. В този случай числото $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ се нарича *сума* на реда (1) и се пише

(4) $$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

или

(5) $$s = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu.$$

Когато редицата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е разходяща, редът (1) се нарича *разходящ (дивергентен)*. Ако редицата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е разходяща, но дивергира към ∞ или към $-\infty$, т. е. ако $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, пише се

(6) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu = \infty$$

или

(7) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu = -\infty.$$

Разбира се, при (6) и (7) редът е разходящ.

Безкрайният ред (1) е сходящ тогава и само тогава, когато за всяко положително число ε съществува такова число ν_ε, че неравенството

(8) $$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

да е изпълнено за всяко естествено число p винаги когато $n > \nu_\varepsilon$ (*общо условие на Коши за сходимост на редове*).

Задача 1. Да се изследват за сходимост изброените редове и да се намерят сумите на онези от тях, които са сходящи:

а) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$; б) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$;

в) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(3\nu-2)(3\nu+1)}$; г) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+5)}$;

д) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}$; е) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}$;

ж) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{(2\nu-1)^2(2\nu+1)^2}$; з) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} 4^\nu \sin^4 \frac{x}{2^\nu}$;

и) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4^\nu \cos^2 \frac{x}{2^\nu}}$; й) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \operatorname{tg} \frac{x}{2^\nu}$;

к) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{4^\nu} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^\nu}$; л) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}$;

м) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu$; н) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}\nu$; о) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu$.

Ако редът (1) е сходящ, общият му член клони към нула:

(9) $$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Необходимото за сходимостта на реда (1) условие (9) обаче не е достатъчно, както показва класическият пример с т. нар. *хармоничен ред*

(10) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

който е разходящ, въпреки че общият му член $\frac{1}{n}$ клони към нула.

Един от най-често употребяваните безкрайни редове е т. нар. геометрична прогресия $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$. Този ред е сходящ при $|x| < 1$ и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu = \frac{1}{1-x}, \tag{11}$$

а е разходящ при $|x| \geqq 1$.

Задача 2. Да се намерят всички реални числа x, за които изброените редове са сходящи, и да се пресметнат съответните суми:

а) $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu x^\nu$; б) $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu x^{2\nu}$; в) $\sum_{\nu=0}^{\infty}5^\nu x^{2\nu+1}$;

г) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu x^{\nu-1}$; д) $\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu(\nu-1)x^{\nu-2}$.

Ако редовете (2) и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu \tag{12}$$

са сходящи със суми съответно s и t, а a и b са произволни константи, то

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(au_\nu + bv_\nu) = as + bt. \tag{13}$$

Задача 3. Да се изследват за сходимост изброените редове и да се намерят сумите на онези от тях, които са сходящи:

а) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^\nu + 3^\nu}{6^\nu}$; б) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{6^\nu}\left(2^\nu + 2^{\nu-1}.3 + 2^{\nu-2}.3^2 + \cdots + 3^\nu\right)$;

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu 2^\nu + 3^\nu}{\nu 3^\nu}$; г) $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\nu^2 + \nu - 1}{\nu(\nu^2-1)}$.

§ 2. Принцип за сравняване на редове

Основен инструмент за изследване на редовете с положителни членове е т. нар. *принцип за сравняване на редове*: ако редът (12) е сходящ и са в сила неравенствата

$$0 \leqq u_n \leqq v_n \tag{14}$$

за всички естествени числа n от някое нататък, редът (2) е също сходящ, а ако при (14) редът (2) е разходящ, редът (12) е също разходящ.

При (14) понякога се казва, че редът (12) *мажорира* реда (2) или че е *мажоранта* на (2), както и че редът (2) *минорира* реда (12) или че е *миноранта* на (12).

Задача 4. Да се изследват за сходимост изброените редове:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^3}$; в) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^k}$ $(k \in \mathbf{N})$;

г) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\nu}}$; д) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}$; е) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\nu}}$ $(k \in \mathbf{N})$.

Задача 5. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^6+5n+1}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{3n^2+2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{5n+1}$.

Задача 6. Нека P и Q са полиноми съответно от степени p и q и нека Q не се анулира за никое естествено число n. Да се докаже, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{P(\nu)}{Q(\nu)}$ е сходящ тогава и само тогава, когато $q - p > 1$.

Задача 7. Нека $u_1, u_2, \ldots$ и $v_1, v_2, \ldots$ са две редици с положителни членове и от известно място нататък е в сила неравенството $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Ако редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}v_n$ е сходящ, сходящ е и редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$.

§ 3. Критерий на Даламбер

Изследването на безкрайните редове за сходимост или разходимост до известна степен може да се алгоритмизира. За това помагат т. нар. *критерии за сходимост и разходимост* на безкрайните редове. Като се прави отстъпление от общоприетия смисъл на термина „критерий", в настоящата глава той означава *достатъчно условие*.

Критерий на Даламбер. *Нека (2) е ред с положителни членове. Ако съществува число q с $0 < q < 1$, за което от известно място нататък е в сила неравенството*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq q, \tag{15}$$

редът (2) е сходящ, а ако от известно място нататък е в сила неравенството

(16) $$1 \leqq \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

редът (2) е разходящ.

Задача 8. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\frac{1!}{1^1}e + \frac{2!}{2^2}e^2 + \frac{3!}{3^3}e^3 + \frac{4!}{4^4}e^4 + \cdots;$

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2^2.3} + \frac{1}{2^2.3^2} + \frac{1}{2^3.3^2} + \frac{1}{2^3.3^3} + \cdots$

Вместо самия критерий на Даламбер обикновено се използва следствието: *Ако членовете на реда (2) са положителни и границата* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *съществува, редът (2) е сходящ при* $l < 1$ *и разходящ при* $l > 1$.

Задача 9. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)!};$ б) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \binom{2\nu}{\nu};$ в) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \sin\frac{\pi}{3^\nu};$

г) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \nu \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^\nu};$ д) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^\nu};$ е) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{2.5.8\ldots(3\nu+2)}{1.5.9\ldots(4\nu+1)};$

ж) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^8}{2^\nu};$ з) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1,001^\nu}{\nu^{1001}};$ и) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu+1)!!}{3^\nu.\nu!}.$

§4. Критерий на Коши

Критерий на Коши. *Нека (2) е ред с неотрицателни членове. Ако съществува число* q *с* $0 < q < 1$, *за което от известно място нататък е в сила неравенството*

(17) $$\sqrt[n]{u_n} \leqq q,$$

редът (2) е сходящ, а ако от известно място нататък е в сила неравенството

(18) $$\sqrt[n]{u_n} \geqq 1,$$

редът (2) е разходящ.

Задача 10. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu(\nu+1)} e^{-\nu};$ б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu(\nu+1)} 3^{-\nu}.$

Вместо самия критерий на Коши обикновено се използва следствието: *Ако членовете на реда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *са неотрицателни и границата* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ *съществува, редът* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *е сходящ при* $l < 1$ *и разходящ при* $l > 1$.

Задача 11. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{3\nu+1}\right)^\nu;$ б) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\nu)^\nu};$ в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{\nu}\right)^\nu;$

г) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\nu \arcsin\frac{1}{\nu}\right)^\nu;$ д) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\sqrt[\nu]{\nu}-1\right)^\nu;$ е) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\sqrt[\nu]{\nu}-1\right).$

От зад. 140, гл. IV следва, че винаги когато критерият на Даламбер или следствието от него дават възможност да се установи сходимостта на един ред с положителни членове, същото е вярно и за критерия на Коши или за следствието от него. Редът $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots$ ни учи, че понякога разходимостта на един ред с положителни членове може да се установи с критерия на Даламбер, без това да е възможно с критерия на Коши. Ще отбележим още, че от зад. 140, гл. IV следва също така, че ако следствието от критерия на Даламбер дава възможност да се установи разходимостта на един ред с положителни членове, същото е вярно и за следствието от критерия на Коши. Редът от следващата зад. 12 пък показва, че има случаи, когато критерият на Коши работи, а критерият на Даламбер — не. В този смисъл с леко преувеличение се казва понякога, че критерият на Коши е по-силен от критерия на Даламбер.

Задача 12. Да се изследва за кои двойки от положителни числа p и q редът $p + pq + p^2q + p^2q^2 + p^3q^2 + p^3q^3 + \cdots$ е сходящ.

§ 5. Критерий на Раабе–Дюамел

Следващият критерий е по-силен от критерия на Даламбер и може да се схваща като негово *уточняване*.

Критерий на Раабе–Дюамел. *Нека* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *е ред с положителни членове и нека за всяко естествено число* n *числото* α_n *е определено от равенството*

(19) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}.$$

Ако съществува число $\alpha > 1$, *за което от известно място нататък е в сила неравенството*

(20) $$n\alpha_n \geqq \alpha,$$

редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *е сходящ, а ако от известно място нататък е в сила неравенството*

(21) $$n\alpha_n \leqq 1,$$

този ред е разходящ.

Задача 13. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Вместо самия критерий на Раабе–Дюамел обикновено се използва следствието: *Ако членовете на реда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *са положителни и границата* $\alpha = \lim_{n\to\infty} n\alpha_n$ *съществува, редът е сходящ при* $\alpha > 1$ *и разходящ при* $\alpha < 1$.

Задача 14. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu-1)!!}{\nu!\,2^\nu}$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu-1)!!\,2^\nu}{3.7.11\ldots(4\nu-1)}$;

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{((2\nu-1)!!)^2}{\nu!.3.7.11\ldots(4\nu-1)}$; г) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu$;

д) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)\ldots\left(1+\sin\frac{\pi}{\nu}\right)}$;

е) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{e}{\nu}\right)^\nu \frac{\nu!}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)\ldots\left(1+\sin\frac{\pi}{\nu}\right)}$.

Задача 15. Да се докаже, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\alpha}$ е сходящ тогава и само тогава, когато $\alpha > 1$.

Задача 16*. Нека членовете на реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ са положителни и нека за произволно естествено n числото α_n е определено от равенството $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$. Нека освен това $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = \alpha$. Да се докаже, че:

а) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} = -\alpha$;

б) ако β и γ са произволни числа, за които $\beta < \alpha < \gamma$, от някое място нататък са в сила неравенствата $\frac{1}{n^\gamma} < u_n < \frac{1}{n^\beta}$;

в) ако $\alpha > 0$, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ и от някое място нататък редицата $u_1, u_2, \ldots$ е намаляваща.

Задача 17*. Нека членовете на редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ са положителни, а числата α_n и β_n са определени съответно от равенствата $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$ и $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1+\beta_n}$. Нека освен това $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = \alpha$ и $\lim_{n\to\infty} n\beta_n = \beta$. За произволни реални числа ξ и η да разгледаме реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^\xi v_\nu^\eta$ и да определим числото γ_n от равенството $\frac{u_{n+1}^\xi v_{n+1}^\eta}{u_n^\xi v_n^\eta} = \frac{1}{1+\gamma_n}$. Тогава е в сила равенството $\lim_{n\to\infty} n\gamma_n = \xi\alpha + \eta\beta$.

Задача 18. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\sqrt{\nu^3+1}}$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{\nu}}{\sqrt{\nu}}$;

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\nu^2-1}{\nu^5+2}}$; г) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu^3 \operatorname{ctg}\frac{1}{\nu}}}$.

Задача 19. Нека P и Q са полиноми съответно от степени p и q и нека Q не се анулира за никое естествено n. Ако α и β са положителни числа, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|P(\nu)|^\alpha}{|Q(\nu)|^\beta}$ е сходящ точно когато $\beta q - \alpha p > 1$.

Задача 20. Да се намерят всички реални числа α, за които следните редове са сходящи:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1-\nu\sin\frac{1}{\nu}\right)^\alpha$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{\nu}\right)^\alpha$; в) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sqrt[\nu]{e}-1\right)^\alpha$;

г) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right)^\alpha$; д) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(e-\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\right)^\alpha$.

Задача 21. Да се намерят всички двойки от числа α и β, за които следните редове са сходящи:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha^{\sqrt{\nu}}}{\nu^{\beta}}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu^{\alpha}}\nu^{\beta}}$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha^{\ln\nu}}{\nu^{\beta}}$; г) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\left(\nu^{\nu^{-\alpha}}-1\right)^{\beta}$.

§ 6. Редове с намаляваща редица на членовете

Нека редицата $u_1, u_2 \ldots$ е намаляваща. Тогава редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}2^{\nu}u_{2^{\nu}}$ са едновременно сходящи или разходящи (теорема на Коши).

Задача 22. Да се изследват за сходимост с теоремата на Коши редовете:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\alpha}}$; б) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\alpha}(\ln\nu)^{\beta}}$; в) $\sum\limits_{\nu=3}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\alpha}(\ln\nu)^{\beta}(\ln\ln\nu)^{\gamma}}$; ...

Задача 23*. Нека редицата $u_1, u_2, \ldots$ е намаляваща, а $p_1, p_2, \ldots$ — стриктно растяща редица от естествени числа, за която съществува такава константа M, че за всяко естествено n е в сила $p_{n+2}-p_{n+1} \leqq M(p_{n+1}-p_n)$. Тогава редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(p_{\nu+1}-p_\nu)u_{p_\nu}$ са едновременно сходящи или разходящи.

Задача 24*. а) Ако редицата $u_1, u_2, \ldots$ е намаляваща, необходимо условие за сходимостта на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ е $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

б) Да се посочи пример, от който да личи, че необходимото условие от а) не е достатъчно.

в) Да се посочи пример на сходящ ред $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ с положителни членове, за който редицата $\{nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ не клони към нула.

§ 7. Критерии на Кумер, Бертран и Гаус

Наред с използваните дотук критерии за сходимост на редове с положителни членове съществуват и много други. Някои от тях са разгледани по-нататък.

Задача 25* (*критерий на Кумер*). а) Нека $c_1, c_2, \ldots$ и $u_1, u_2, \ldots$ са редици с положителни членове. Да се докаже, че ако съществува положително число δ, за което е в сила неравенството $c_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-c_{n+1}\geqq\delta$ за всички достатъчно големи n, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ е сходящ, а ако от някое място нататък е в сила неравенството $c_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-c_{n+1}\leqq 0$, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ е разходящ, стига да е разходящ редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{c_\nu}$.

б) Да се формулира и докаже следствие от критерия на Кумер, аналогично на следствията от разгледаните дотук критерии (вж. текста преди зад. 9, 11 и 14).

в) Да се докаже критерият на Раабе–Дюамел с помощта на а).

Задача 26. Ако членовете на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ са положителни и този ред е разходящ, а A_n означава n-тата му парциална сума, да се докаже, че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{A_\nu}$ е разходящ, а редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{A_\nu^{\alpha}}$ са сходящи при $\alpha>1$.

Задача 27* (*критерий на Бертран*). а) Нека членовете на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ са положителни и за произволно естествено n числото α_n е определено от равенството $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n}$. Ако съществува число $\beta>1$, за което от известно място нататък е в сила неравенството $(n\alpha_n-1)\ln n\geqq\beta$, редът е сходящ, а ако от известно място нататък е в сила неравенството $(n\alpha_n-1)\ln n\leqq 1$, редът е разходящ.

б) Ако при означенията на а) границата $\lim\limits_{n\to\infty}(n\alpha_n-1)\ln n=b$

съществува, разглежданият там ред е сходящ при $b > 1$ и разходящ при $b < 1$.

в) Да се докаже критерият на Раабе–Дюамел с помощта на а).

Задача 28* (*критерий на Гаус*). а) Нека $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ е два пъти диференцируема положителна функция с ограничена втора производна. Тогава редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)\dots f\left(\frac{1}{\nu}\right)}$ е сходящ само при $f(0) > 1$ или при $f(0) = 1$ и $f'(0) > 1$.

б) Нека членовете на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ са положителни и

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \dots + b_k},$$

където a_ν и b_ν $(\nu = 1, 2, \dots, k)$ са константи и $a_0 > 0$, $b_0 > 0$. Да се докаже, че редът е сходящ само при $a_0 < b_0$ или при $a_0 = b_0$ и $a_0 + a_1 < b_1$.

Задача 29. Да се изследва за сходимост редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{((2\nu-1)!!)^2}{4^\nu(\nu!)^2}$.

§ 8. Някои приложения на неравенството на Хьолдер

Задача 30. Да се докаже, че:

а) ако редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ с неотрицателни членове е сходящ, сходящ е и редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{u_\nu u_{\nu+1}}$, но обратното не винаги е вярно;

б) ако редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ с неотрицателни членове е сходящ, сходящи са и редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{u_\nu}}{\nu}$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{u_\nu^\alpha}{\nu^\beta}$ $(0 < \alpha < 1,\ \beta > 1 - \alpha)$;

в) ако редовете с положителни членове $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ са сходящи, а α и β са положителни числа, за които $\alpha + \beta \geqq 1$, сходящ е и редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^\alpha v_\nu^\beta$;

г) ако редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ с положителни членове има свойството: съществуват такива положителни константи α и β с $\alpha + \beta = 1$, че за всеки сходящ ред с положителни членове $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^\alpha v_\nu^\beta$ е сходящ, то и редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сходящ.

§ 9. Две представяния на положителните числа с редове

Задача 31. За всяко положително число x съществува единствена редица $a_1, a_2, \dots$ от неотрицателни числа, за която е в сила равенството $x = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{a_\nu}{\nu!}$ при $a_n \leqq n - 1$ $(n - 1 \in \mathbf{N})$, като само в краен брой от тези неравенства може да има знак за равенство. Горният ред се редуцира на крайна сума точно когато x е рационално.

Задача 32. За всяко x от интервала $(0, 1]$ съществува единствена редица $k_1, k_2, \dots$ от естествени числа, за която е в сила равенството

$$x = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1 k_2 k_3} + \dots + \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n} + \dots$$

при $1 < k_1 \leqq k_2 \leqq k_3 \leqq \dots$ Числото x е рационално точно тогава, когато от някое място нататък всичките k_ν са равни помежду си.

§ 10. Критерии на Лайбниц, Дирихле и Абел

Ако членовете на редицата $u_1, u_2, \ldots$ са положителни, всеки от редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}u_\nu$ се нарича *алтернативен* или *знакопроменлив*. За такива редове често се използва следният критерий за сходимост:

Критерий на Лайбниц. *Ако редицата $u_1, u_2, \ldots$ е монотонна и клони към нула, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}u_\nu$ е сходящ.*

Ако за един безкраен ред са налице условията на критерия на Лайбниц, той понякога се нарича *ред от лайбницов тип*.

Задача 33. Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu+1}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\sin\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{\nu}}{2\nu-1}$; г) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dbinom{-1}{\nu}\left(1-\sqrt[\nu]{\nu}\right)$.

Задача 34. Ако P е полином от степен p, който приема положителни стойности за естествени стойности на аргумента си, да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{P(n+1)}{P(n)}\right)^n = e^p$;

б) редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\sqrt[n]{P(\nu)}-1\right)$ е сходящ.

Задача 35. Нека P и Q са полиноми от степени съответно p и q, като Q не се анулира за никое естествено n. Ако α и β са положителни числа, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\dfrac{|P(\nu)|^\alpha}{|Q(\nu)|^\beta}$ е сходящ точно когато $\alpha p < \beta q$.

Задача 36*. Да се докаже, че:

а) за всеки две безкрайни редици $u_1, u_2, \ldots$ и $v_1, v_2, \ldots$ и за всеки две цели числа n и p с $n \geqq 0$ и $p \geqq 1$ е в сила

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} u_\nu v_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n+p} S_\nu(v_\nu - v_{\nu+1}) - S_n v_{n+1} + S_{n+p}v_{n+p+1},$$

където $S_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} u_\nu$ $(n+1 \in \mathbf{N})$ (*преобразуване на Абел*);

б) ако редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} S_\nu(v_\nu - v_{\nu+1})$ е сходящ и границата $\lim\limits_{p\to\infty} S_p v_{p+1}$ съществува, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu v_\nu$ е също сходящ.

Задача 37*. Да се докаже:

а) *критерият на Дирихле*: ако редицата $u_1, u_2 \ldots$ е монотонна и клони към нула, а парциалните суми на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ са ограничени, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu u_\nu$ е сходящ;

б) критерият на Лайбниц с помощта на критерия на Дирихле.

Задача 38. Да се намерят всички x, за които са сходящи редовете:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{\sin\nu x}{\sqrt{\nu}}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{\cos\nu x}{\ln(1+\nu)}$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{2^\nu.(2\nu-1)!!}{3.7.11\ldots(4\nu-1)}\sin\nu x$; г) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{1}{\nu!}\left(\dfrac{\nu}{e}\right)^\nu\cos\nu x$.

Задача 39. Да се докаже, че ако редицата $u_1, u_2, \ldots$ е монотонна и клони към нула, то редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu\sin\nu x$ е сходящ за всяко x, а редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu\cos\nu x$ — за всяко x, различно от $2k\pi$ $(k \in \mathbf{I})$.

Задача 40* (*критерий на Абел*). Ако редицата $u_1, u_2, \ldots$ е монотонна и ограничена, а редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ е сходящ, то редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu u_\nu$ е също сходящ.

§ 11. Абсолютно и условно сходящи редове

Редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ се нарича *абсолютно сходящ*, когато е сходящ редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |u_\nu|$ от абсолютните стойности на членовете му.

Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.

Задача 41. Да се докаже, че посочените редове са сходящи, но не са абсолютно сходящи:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\sqrt{3\nu+1}}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} \operatorname{tg} \frac{1}{\nu}$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(\nu+1)^\nu}{\nu^{\nu+\frac{1}{2}}}$; г)* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{\nu}]} \frac{1}{\nu}$.

Задача 42. Ако редицата $u_1, u_2, \ldots$ клони към нула, а редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (u_{2\nu-1} + u_{2\nu})$ е сходящ, да се докаже, че и редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сходящ.

Задача 43. Да се изследват за сходимост и абсолютна сходимост редовете:

а) $\frac{3}{1^2} - \frac{1}{1^2} + \frac{5}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \frac{7}{3^2} - \frac{5}{3^2} + \cdots$;

б) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \cdots$;

в) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots$;

г) $\frac{1}{2^\alpha - 1} - \frac{1}{3^\alpha + 1} + \frac{1}{4^\alpha - 1} - \frac{1}{5^\alpha + 1} + \cdots \quad (\alpha \in \mathbf{R})$.

Задача 44. Да се изследват за сходимост и абсолютна сходимост редовете:

а) $\frac{1}{1} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^\alpha} + \cdots \quad (\alpha \in \mathbf{R})$;

б) $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots \quad (\alpha \in \mathbf{R})$.

Тъй като всеки абсолютно сходящ ред е сходящ, за да се докаже сходимостта на даден ред, е достатъчно да се установи чрез някой от критериите за сходимост на редове с неотрицателни членове, че редът от модулите на

членовете му е сходящ. За тази цел могат да се използват например разгледаните вече критерии на Даламбер, Коши, Раабе–Дюамел, Кумер, Бертран и Гаус. Ако обаче с помощта на някой от тези критерии се установи, че редът от модулите на членовете на дадения ред е разходящ, в общия случай за дадения ред не може да се заключи дали е сходящ или разходящ. Изключение в това отношение правят критериите на Даламбер и Коши: когато с тяхна помощ е установена разходимостта на един ред, това означава, че общият му член не клони към нула. Ето защо, ако разходимостта на реда от модулите на членовете на даден ред е установена с някой от тези критерии, дадениият ред е също разходящ.

Критериите на Лайбниц, Дирихле и Абел, както и следващите критерии на Любоа Раймонд и Дедекинд, които са техни обобщения, са приспособени, напротив, за установяване на сходимостта на редове, в които безбройно много от членовете са положителни и безбройно много са отрицателни. Ето защо те най-често се прилагат, когато за изследвания ред е установено, че не е абсолютно сходящ. Да отбележим изрично, че ако с помощта на критерия на Раабе–Дюамел е установена разходимостта на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ с положителни членове, като при това съответната редица $\{n\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ има положителна граница, редицата $u_1, u_2, \ldots$ клони монотонно към нула (зад. 16 в)). Ето защо в този случай е налице благоприятна обстановка за прилагане на критериите на Лайбниц, Дирихле и Абел.

Задача 45*. Да се докаже:

а) *критерият на Дедекинд*: за сходимостта на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu u_\nu$ е достатъчно парциалните суми на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ да са ограничени, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu - u_{\nu+1})$ да е абсолютно сходящ и да е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;

б) критерият на Дирихле с помощта на критерия на Дедекинд.

Задача 46*. Да се докаже:

а) *критерият на Любоа Раймонд*: за сходимостта на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu u_\nu$ е достатъчно редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ да е сходящ, а редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu - u_{\nu+1})$ — абсолютно сходящ;

б) критерият на Абел с помощта на критерия на Любоа Раймонд.

Задача 47. Да се намерят всички реални α, за които посочените редове са сходящи, както и всички реални α, за които те са абсолютно сходящи:

а) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\nu}$; б) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{\alpha}{\nu}$; в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\right)^{\alpha}$;

г) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\cos\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu^3}$; д) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sin\nu\alpha$;

е) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha^{\nu}}{1+\alpha^{2\nu}}$; ж) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha^{\nu}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{\nu}}$.

§ 12. Умножение на редове

Ако $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}u_{\nu}$ и $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}v_{\nu}$ са произволни редове, редът

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(a_0b_{\nu}+a_1b_{\nu-1}+\cdots+a_{\nu}b_0\right) \tag{22}$$

се нарича *произведение (в смисъл на Коши)* на дадените редове.

Теорема на Коши за умножение на редове. *Ако редовете* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}u_{\nu}$ *и* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}v_{\nu}$ *са абсолютно сходящи, редът* (22) *е също абсолютно сходящ и сумата му е равна на произведението от сумите на дадените редове.*

Теорема на Мертенс. *Ако редът* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}u_{\nu}$ *е абсолютно сходящ, а редът* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}v_{\nu}$ *— сходящ, редът* (22) *е сходящ и сумата му е равна на произведението от сумите на двата дадени реда.*

Задача 48. Да се докаже, че $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}=1$.

Задача 49. Да се докаже, че $\left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}q^{\nu}\right)^2=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)q^{\nu}$ при $|q|<1$.

Задача 50*. Да се докаже:

а) чрез построяване на пример, че съществуват сходящи редове, чието произведение е разходящ ред;

б) че произведението на два реда от лайбницов тип е сходящо точно когато общият му член клони към нула;

в) че произведението на сходящите редове $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^{\beta}}$ $(\beta>0)$ е сходящ ред при $\alpha+\beta>1$ и разходящ ред при $\alpha+\beta\leqq 1$.

Задача 51. Да се докаже, че произведението на разходящите редове $1-\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu}$ и $1+\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu-1}\left(2^{\nu}+\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)$ е абсолютно сходящ ред.

§ 13. Вариации на тема хармоничен ред

Задача 52. Да се докажат равенствата:

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2$;

б) $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\cdots=\ln 3$;

в) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{3}{12}+\cdots=\ln 4$.

Задача 53. Да се докажат равенствата:

а) $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{9}-\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\cdots$
$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2$;

б) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots$
$=\frac{3}{2}\ln 2$;

в) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots$
$=\frac{2}{3}\ln 2$;

г) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\dots$
$=\frac{1}{2}\ln 6$;

д) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\dots$
$=\ln 2$.

Задача 54. Да се докаже, че ако в реда от зад. 52 а) членовете се разместят по следното правило: най-напред се написват първите p положителни члена, след това — първите q отрицателни, после — следващите p положителни, след това — следващите q отрицателни и т. н., новополученият ред е сходящ и сумата му е равна на $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Задача 55. Да се докаже, че хармоничният ред остава разходящ, ако знаците на членовете му се променят по такъв начин, че винаги след p положителни члена да следват q отрицателни при $p\neq q$, а при $p=q$ редът става сходящ.

§ 14. Едновременна сходимост на редове

Задача 56. Да се докаже:

а) ако $u_1, u_2, \dots$ и $v_1, v_2, \dots$ са редици с положителни членове и границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\neq 0$ съществува, редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}v_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи;

б) чрез построяване на пример, че съществуват редове $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}v_\nu$ с различни от нула членове, първият от които е сходящ, а вторият — разходящ и за които $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$.

Задача 57. Да се докаже:

а) ако членовете на редицата $u_1, u_2, \dots$ са положителни, редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{u_\nu}{1+u_\nu}$ са едновременно сходящи или разходящи;

б) чрез построяване на пример, че съществува разходящ ред $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ с положителни членове, за който редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{u_\nu}{1+\nu u_\nu}$ е сходящ (разходящ);

в) за всеки ред с положителни членове $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и за всяко $\alpha>1$ редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{u_\nu}{1+\nu^\alpha u_\nu}$ е сходящ.

Задача 58. Да се докаже, че:

а) ако членовете на редиците $u_1, u_2, \dots$ и $v_1, v_2, \dots$ са различни от нула, а редицата $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонна и притежава различна от нула граница, редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}v_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи;

б) редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sqrt[\nu]{\nu}u_\nu$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu\sin\frac{1}{\nu}u_\nu$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}u_\nu$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}u_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи.

Задача 59. Да се докаже:

а) че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ е абсолютно сходящ точно когато е абсолютно сходящ редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sin u_\nu$ $\left(|u_\nu|\leqq\frac{\pi}{2},\ \nu\in\mathbf{N}\right)$;

б) чрез построяване на пример, че съществува сходящ ред $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$, за който редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sin u_\nu$ е разходящ.

Задача 60. Да се докаже, че:

а) ако членовете на редиците $u_1, u_2, \dots$ и $v_1, v_2, \dots$ са различни от нула, редицата $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ притежава различна от нула

граница и редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{u_\nu}{v_\nu}-\frac{u_{\nu+1}}{v_{\nu+1}}\right)$ е абсолютно сходящ, то редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}v_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи;

б) редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2+(-1)^\nu}{\nu^2+1}u_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи, но твърдението не е непременно вярно за редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu+(-1)^\nu}{\nu+1}u_\nu$.

§ 15. Безкрайни произведения

Символ от вида

(23) $$p_1p_2\cdots p_n\cdots,$$

или кратко

(24) $$\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu,$$

където числата p_ν от някой номер нататък са различни от нула, се нарича *безкрайно произведение*. Произведението

(25) $$\pi_n=p_1p_2\cdots p_n$$

на първите n члена $p_1, p_2, \ldots, p_n$ на безкрайното произведение (23) се нарича *n-то парциално (частично) произведение* на (23).

Безкрайното произведение (23) се нарича *сходящо (конвергентно)*, когато редицата (25) от парциалните му произведения е сходяща и границата ѝ е различна от нула. В този случай числото $p=\lim\limits_{n\to\infty}\pi_n$ се нарича *стойност* на безкрайното произведение (23) и се пише

(26) $$p=p_1p_2\cdots p_n\cdots,$$

или

(27) $$p=\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu.$$

Понякога е целесъобразно дефиницията на сходящо безкрайно произведение малко да се обобщи. А именно безкрайното произведение (24) се нарича *сходящо* (конвергентно), когато след изпускане на членовете му, които са равни на нула, редицата от парциалните произведения на новополученото безкрайно произведение е сходяща и границата ѝ е различна от нула. И в този по-общ случай под *стойност* на безкрайното произведение (24) се разбира границата на редицата от парциалните произведения (25).

Безкрайното произведение (24) се нарича *разходящо (дивергентно)*, когато не е сходящо. Това означава, че след изпускане на нулевите му членове редицата от парциалните произведения на (24) или е разходяща, или е сходяща с граница нула. В последния случай се казва, че безкрайното произведение (24) дивергира към нула, и се пише $\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu=0$. Ако редицата (25) дивергира към ∞ или $-\infty$, се пише съответно $\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu=\infty$ или $\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu=-\infty$.

Задача 61. Да се изследват за сходимост посочените безкрайни произведения и да се намерят стойностите на онези от тях, които са сходящи:

а) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$; б) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$; в) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)$;

г) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{\nu(\nu+1)}\right)$; д) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\right)$; е) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\frac{\nu^3-1}{\nu^3+1}$;

ж) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^\nu}}\right)$; з) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1+\frac{2\nu+1}{(\nu^2-1)(\nu+1)^2}\right)$;

и) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{\nu\text{ корена}}}$; й) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt[\nu]{e}}{1+\frac{1}{\nu}}$.

Задача 62. Да се намерят всички реални числа α, за които посочените безкрайни произведения са сходящи, и да се определят съответните стойности:

а) $\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1+\alpha^{2^\nu}\right)$; б) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^\nu}$.

Безкрайните произведения притежават свойства, аналогични на свойствата на безкрайните редове.

Задача 63*. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}p_\nu$ е сходящо тогава и само тогава, когато за всяко положително число ε съществува такова число N, че неравенството $\left|\prod_{\nu=n+1}^{n+m}p_\nu-1\right|<\varepsilon$ да е изпълнено за всяко естествено число m винаги когато $n>N$ (*общо условие на Коши за сходимост на безкрайно произведение*).

Задача 64. Ако безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ е сходящо, то $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

Задача 65. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty} p_\nu$ с положителни членове p_ν е сходящо точно когато безкрайният ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} \ln p_\nu$ е сходящ.

Задача 66. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha_\nu)$, в което α_ν от някое място нататък имат еднакви знаци, е сходящо точно когато безкрайният ред $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ е сходящ.

Задача 67. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$ е сходящо, когато безкрайният ред $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ е абсолютно сходящ.

Задача 68. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$ е сходящо, когато редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2$ са сходящи.

Задача 69. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$, където $-1 < a_\nu < 0$ ($\nu \in \mathbf{N}$), дивергира към нула, когато редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ е разходящ.

Задача 70. Безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+a_\nu)$ дивергира към нула, когато редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ е сходящ, но редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2$ е разходящ.

Задача 71. Да се изследват за сходимост безкрайните произведения:

а) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2+\nu+1}{(\nu+1)^2}$; б) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^3+\nu^2+\nu+1}{\nu^3+\nu^2+2\nu+2}$; в) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{\nu^3-3\nu}{\nu^3+3\nu}}$.

Задача 72. Ако P и Q са полиноми съответно от степени p и q и Q не се анулира за никое естествено n, да се докаже, че безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{P(\nu)}{Q(\nu)}\right)$ е сходящо точно когато $q-p>1$.

Задача 73. Ако P и Q са полиноми съответно от степени p и q, като Q не се анулира за никое естествено n, а α и β са положителни числа, да се докаже, че безкрайните произведения $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{|P(\nu)|^\alpha}{|Q(\nu)|^\beta}\right)$ и $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{|P(\nu)|^\alpha}{|Q(\nu)|^\beta}\right)$ са сходящи точно когато $\beta q-\alpha p>1$.

Задача 74. Да се докаже, че при $0 \leqq a < b$ е в сила

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n)} = 0.$$

Задача 75. Да се намерят всички реални числа α, за които са сходящи безкрайните произведения:

а) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu^\alpha}\right)$; б) $\prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu^\alpha}\right)$;

в) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2}{\nu^2}\right)$; г) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{\nu^2}\right)$.

Задача 76. Да се намерят всички реални числа α, за които са сходящи безкрайните произведения:

а) $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha^\nu)$; б) $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^\nu}{\nu!}\right)$.

Задача 77. Да се намерят всички реални числа α, за които безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^\alpha}\right)$ е сходящо.

Задача 78. Ако членовете на редицата $x_1, x_2, \ldots$ принадлежат на интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, да се докаже, че безкрайните произведения $\prod_{\nu=1}^{\infty} \cos x_\nu$ и $\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin x_\nu}{x_\nu}$ са сходящи точно когато редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^2$ е сходящ.

Задача 79. Да се намерят всички реални числа α, β и γ, за които безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)}{(1+\nu)(\gamma+\nu)}$ е сходящо.

Задача 80*. Да се намерят всички реални числа α, β и γ, за които са сходящи безкрайните редове:

а) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{\nu!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)}$;

б) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{\nu!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)}$.

Задача 81*. Да се докаже, че ако безкрайният ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\alpha^2-1^2)(\alpha^2-2^2)\ldots(\alpha^2-\nu^2)$$

е сходящ за някое нецяло α, той е сходящ за всички α. (Стирлинг).

Задача 82*. Да се докаже, че:

а) ако $p_1, p_2, \ldots$ е редицата на простите числа, безкрайните произведения $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)$ и $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)$ са сходящи само при $\alpha > 1$ и в този случай е в сила равенството

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\alpha} \quad \text{(Ойлер)};$$

б) при условието на а) безкрайният ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu}$ е разходящ (Ойлер).

§ 16. Редици и редове от функции

Нека е дадена редицата

(28) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

от функции с обща дефиниционна област X. За произволен елемент x на X може да се образува редицата от числа

(29) $$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

— стойности на функциите (28) в точката x. Ако редицата (29) е сходяща, редицата (28) се нарича *сходяща в точката* x.

Множеството D на всички x от X, за които редицата (29) е сходяща, се нарича *област на сходимост на редицата* (28). Ако за произволно x от D положим

(30) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

се получава функция $f: D \to \mathbf{R}$. Тя се нарича *гранична функция* или *граница на редицата* (28).

Ако е даден безкрайният ред

(31) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$$

от функции (28), *област на сходимост* D на (31) се нарича множеството на всичките x от X, за които числовият ред

(32) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

е сходящ. Ако на всяко x от D се съпостави сумата $s(x)$ на реда (32), получава се функция $s: D \to \mathbf{R}$. Тя се нарича *сума на реда* (31).

Аналогично, ако е дадено безкрайното произведение

(33) $$\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$$

от функции (28), *област на сходимост* D на (33) се нарича множеството на всичките x от X, за които числовото произведение

(34) $$\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

е сходящо. Ако на всяко x от D се съпостави стойността $p(x)$ на безкрайното произведение (34), се получава функция $p: D \to \mathbf{R}$, която се нарича *произведение на функциите* (28).

Задача 83. Да се намерят областите на сходимост на посочените редици от функции и да се пресметнат границите им:

а) $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$; б) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$; в) $f_n(x) = (2\sin x)^n$.

Задача 84. Да се намерят областите на сходимост на редовете:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^2}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{1+x^{2\nu}}$; в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu x}{1+\nu^2 x^2}$.

Задача 85. Да се намерят областите на сходимост на безкрайните произведения:

а) $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{\nu}\right)$; б) $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1+(-1)^{\nu} \sin \frac{x}{\nu}\right)$.

§ 17. Степенни редове

Редовете от вида

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \tag{35}$$

или по-общо

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-\xi)^\nu, \tag{36}$$

където ξ и a_ν $(\nu+1 \in \mathbf{N})$ са константи, се наричат *степенни редове*. Областта на сходимост на степенния ред (35) е интервал с център в нулата, който може да съвпада с цялата числова права, да бъде ограничен или да се изражда в единствената точка 0; нарича се *интервал на сходимост* на реда (35). Половината от дължината на интервала на сходимост се нарича *радиус на сходимост* на реда; радиусът на сходимост е нула, когато интервалът на сходимост се изражда в точката 0, и е ∞, когато интервалът на сходимост е $\mathbf{R}$. Ако радиусът на сходимост на степенния ред (35) е r, редът е абсолютно сходящ при $|x|<r$ и е разходящ при $|x|>r$; при $x=-r$ или $x=r$ редът може да бъде сходящ, а може да бъде и разходящ. Аналогични дефиниции и твърдения важат и за реда (36), като ролята на числото 0 играе числото ξ.

Задача 86. Да се намерят радиусите на сходимост на следните степенни редове и да се изследва поведението на редовете в краищата на интервалите на сходимост:

а) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{x^\nu}{\nu}$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}$; г) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$;

д) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$; е) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$;

ж) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$; з) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$; и) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$.

Задача 87. Да се намерят радиусите на сходимост на посочените степенни редове и да се изследва поведението на редовете в краищата на интервалите на сходимост:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu^\alpha}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu!)^2}{(2\nu)!} x^\nu$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu^2} x^\nu$; г) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2^\nu (\nu!)^2}{(2\nu+1)!}\right)^{\alpha} x^\nu$;

д) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} x^\nu$; е) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} x^{\nu^2}$;

ж) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{\nu}]}}{\nu} x^\nu$; з) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin \nu}\right)^{\nu}$;

и) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+\nu-1)}{\nu!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)} x^\nu$ (*хипергеометричен ред*).

Задача 88* (Коши – Адамар). Да се докаже, че радиусът на сходимост r на степенния ред $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ е $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, като под $\frac{1}{0}$ се разбира ∞ и под $\frac{1}{\infty}$ се разбира 0.

Задача 89°. Да се докаже, че степенните редове $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}$, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1}$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu^3 a_\nu x^\nu$ и $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{P(\nu)}{Q(\nu)} a_\nu x^\nu$, където P и Q са ненулеви полиноми и $Q(\nu) \neq 0$ $(\nu+1 \in \mathbf{N})$, имат един и същ радиус на сходимост.

Задача 90°. Да се докаже, че произведението на редовете $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu!}x^\nu$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_\nu}{\nu!}x^\nu$ е редът $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(a+b)_\nu}{\nu!}x^\nu$, където е положено $(a+b)_\nu=\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}a_\mu b_{\nu-\mu}$.

Ако $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ е полином на променливите $x_0, x_1, \ldots, x_n$, с $\frac{\partial P}{\partial x_\nu}$ се означава производната на P спрямо променливата x_ν, като при това се предполага, че останалите променливи имат фиксирани стойности.

Задача 91*. Да се докаже, че при $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu!}x^\nu\right)^n=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A_\nu}{\nu!}x^\nu$ коефициентът A_ν е полином на коефициентите $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$ $(\nu+1\in \mathbf{N})$ и са в сила равенствата $A_0=a_0^n$, $A_{\nu+1}=\sum_{\mu=0}^{\nu}a_{\mu+1}\frac{\partial A_\nu}{\partial a_\mu}$ (*правило на Арбогаст*).

§ 18. Равномерна сходимост

Нека редицата

(37) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

от функции е сходяща в общата дефиниционна област X на тези функции и f е границата ѝ. Казва се, че редицата (37) *клони към f равномерно в X*, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова N, че е в сила неравенството $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ за всяко $n>N$ и за всяко x от X; в този случай се казва още, че редицата (37) е *равномерно сходяща в X*.

Задача 92°. Нека редицата от функции $f_1, f_2, \ldots$ с обща дефиниционна област X клони към функцията f в X и нека ε е произволно положително число. За всяко x от X нека $N_\varepsilon(x)$ е най-малкото от естествените числа ν, за които е в сила неравенството $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ винаги когато $n>\nu$. Да се докаже, че редицата $f_1, f_2, \ldots$ е равномерно сходяща в X точно когато за всяко $\varepsilon>0$ функцията $N_\varepsilon(x)$ на x е ограничена.

Задача 93*. Да се докаже, че редицата $f_1, f_2, \ldots$ от функции с обща дефиниционна област X е равномерно сходяща в X точно когато за всяко положително число ε съществува такова число N, че неравенството $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ да е в сила за всяко $n>N$, за всяко естествено число p и за всяко x от X (*общо условие на Коши за равномерна сходимост на редици от функции*).

Задача 94. Да се изследва дали са равномерно сходящи в посочените множества редиците от функции с общи членове:

а) $f_n(x)=x^n$ в $[-1, 1]$; б) $f_n(x)=x^n$ в $[0, \theta]$ $(0<\theta<1)$;

в) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ в $\mathbf{R}$; г) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ в $[0, \xi]$ $(\xi>0)$;

д) $f_n(x)=x^n(1-x)$ в $[0, 1]$;

е) $f_n(x)=(n+1)x^n(1-x)$ в $[\theta, 1]$ $(0<\theta<1)$.

Ако редът

(38) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu$$

е сходящ в общата дефиниционна област X на функциите (37), той се нарича *равномерно сходящ* в X, когато редицата от парциалните му суми е равномерно сходяща в X.

Задача 95*. Редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu$ от функции с обща дефиниционна област X е равномерно сходящ в X точно когато за всяко положително число ε съществува такова число N, че неравенството $\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p}f_\nu(x)\right|<\varepsilon$ да е в сила за всяко $n>N$, за всяко естествено число p и за всяко x от X (*общо условие на Коши за равномерна сходимост на редове от функции*).

Задача 96* (Вайерщрас). Да се докаже, че достатъчно условие, за да бъде равномерно сходящ в общата дефиниционна област X на функциите f_ν $(\nu\in N)$ редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu$, е да съществува сходящ числов ред $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$, чиито членове удовлетворяват неравенствата

$$|f_\nu(x)|\leq\alpha_\nu \quad (\nu\in\mathbf{N},\ x\in X).$$

Задача 97. Да се изследва дали са равномерно сходящи в посочените множества редовете от функции:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu^2}$ в $\mathbf{R}$; б) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^x}$ в $(1, \infty)$;

в) $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(\ln\nu)^\alpha}{\nu^x}$ в (ξ, ∞) $(1<\xi, \alpha\in\mathbf{R})$;

г) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu(\ln \nu)^x}$ в (ξ, ∞) $(1 < \xi)$.

Задача 98* (Дини). Нека функциите $f_\nu : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(\nu \in \mathbf{N})$ са непрекъснати в ограничения и затворен интервал $[a, b]$, удовлетворяват неравенствата $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$ за всяко x от $[a, b]$ и за всяко $n \in \mathbf{N}$, границата $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ съществува за всяко x от $[a, b]$ и е непрекъсната в $[a, b]$. Да се докаже, че тогава редицата $f_1, f_2, \ldots$ е равномерно сходяща в $[a, b]$.

Една редица от функции $f_1, f_2, \ldots$ с обща дефиниционна област X се нарича *равномерно ограничена* в X, когато съществува такава константа A, че неравенствата $|f_n(x)| < A$ да са в сила за всяко n от $\mathbf{N}$ и всяко x от X.

Задача 99* (Дирихле). Нека редиците от функции $f_1, f_2, \ldots$ и $g_1, g_2, \ldots$ с обща дефиниционна област X притежават следните свойства: първата редица е монотонна за всяко x от X и клони равномерно към нула, а парциалните суми на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ са равномерно ограничени. Да се докаже, че тогава редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu$ е равномерно сходящ в X.

Задача 100* (Абел). Нека редиците от функции $f_1, f_2, \ldots$ и $g_1, g_2, \ldots$ с обща дефиниционна област X притежават следните свойства: първата редица е монотонна за всяко x от X и е равномерно ограничена в X, а редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ е равномерно сходящ в X. Да се докаже, че тогава редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu g_\nu$ е равномерно сходящ в X.

Задача 101. Да се изследва дали са равномерно сходящи в посочените множества следните редове от функции:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}$ в $[0, 2\pi]$;

б) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^\alpha}$ в $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $(\alpha > 0,\ 0 < \varepsilon < \pi)$;

в) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{x + \nu}$ в $[0, \infty)$; г) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sin x + \nu}$ в $\mathbf{R}$.

Задача 102. Да се докаже, че ако числовият ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ е сходящ, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ е равномерно сходящ в интервала $0 \leqq x \leqq 1$.

Задача 103. Ако числовият ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ е сходящ, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}$ е равномерно сходящ за всички неотрицателни x.

§ 19. Непрекъснатост на граничната функция

Границата на всяка равномерно сходяща редица от непрекъснати функции е непрекъсната функция. Сумата на равномерно сходящ ред от непрекъснати функции е непрекъсната функция.

Задача 104. За произволни естествени числа k и n нека $f_{kn}(x) = \cos^{2n}(k!\,\pi x)$ за всяко реално x. Да се докаже, че:

а) границата $\lim_{n\to\infty} f_{kn}(x) = F_k(x)$ съществува за всяко x;

б) функцията F_k е прекъсната в точката x точно когато x има вида $\frac{\nu}{k!}$ $(\nu \in \mathbf{I})$;

в) $\lim_{k\to\infty} F_k(x) = D(x)$, където D е функцията на Дирихле.

Задача 105. Да се докаже, че:

а) сумата на всеки степенен ред е непрекъсната във всяка точка от интервала на сходимост на реда;

б) ако числовият ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ е сходящ, то $\lim_{x\to 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$;

в) ако редовете $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu$, както и произведението им $\sum_{\nu=0}^{\infty} (u_0 v_\nu + u_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_\nu v_0)$ в смисъла на Коши са сходящи, то $uv = w$, където u, v и w са съответно сумите на тези три реда.

Редовете от вида $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x}$, където a_ν $(\nu \in \mathbf{N})$ са константи, се наричат *редове на Дирихле*. Те играят важна роля в аналитичната теория на числата.

Задача 106. Да се докаже, че:

а) на всеки ред на Лирихле съответствува число ξ (или някой от символите ∞ или $-\infty$), така че редът е сходящ при $x > \xi$ и разходящ при $x < \xi$;

б) сумата на всеки ред на Лирихле е непрекъсната функция във всяка точка на интервала на сходимост на реда;

в) ако числовият ред $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ е сходящ, то $\lim_{x\to 0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$.

Задача 107*. Да се докаже, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}$ е сходящ за всяко x и сумата му е прекъсната в точката x точно когато x е от вида $2\nu\pi$ ($\nu \in \mathbf{I}$).

Задача 108*. За произволно реално x нека $\{x\}$ означава модула на разликата между x и най-близкото до x цяло число. Да се докаже, че сумата на реда $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{4^\nu} \{4^\nu x\}$ е дефинирана и непрекъсната за всяко x функция, която не е диференцируема в никое x (Вайерщрас – Ван дер Варден).

§ 20. Диференцируемост на граничната функция

Нека функциите $f_1, f_2, \ldots$ са дефинирани и диференцируеми в един и същ интервал Δ, редицата $f_1', f_2', \ldots$ е равномерно сходяща в Δ и редицата $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots$ е сходяща за някое ξ от Δ. Тогава редицата $f_1, f_2, \ldots$ е сходяща в Δ и

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad (x \in \Delta) \tag{39}$$

(*почленно диференциране на редици от функции*).

Аналогично, ако функциите $f_1, f_2, \ldots$ са дефинирани и диференцируеми в един и същ интервал Δ, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu'$ е равномерно сходящ в Δ, а редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(\xi)$ е сходящ за някое ξ от Δ, то редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ е сходящ за всяко x от Δ и

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)\right)' = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu'(x) \qquad (x \in \Delta) \tag{40}$$

(*почленно диференциране на редове от функции*).

Задача 109. Да се докаже, че функцията $\zeta(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^x}$ е безбройно много пъти диференцируема за всяко $x > 1$.

Задача 110. Да се докаже, че функцията $\theta(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\pi\nu^2 x}$ е безбройно много пъти диференцируема за всяко $x > 0$.

Задача 111. Да се докаже, че следните безкрайни произведения притежават производни за всяко x:

а) $\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \sin^2 \frac{x}{\nu}\right)$; б) $\prod_{\nu=1}^{\infty} \cos \frac{x}{\nu}$;

в) $\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + (-1)^{\nu+1} \frac{x}{\nu}\right)$; г) $\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + (-1)^\nu \sin \frac{x}{\nu}\right)$.

Задача 112. Да се построи пример на равномерно сходяща редица от диференцируеми функции с диференцируема граница, за която редицата от производните не е сходяща.

Задача 113. Да се докаже, че ако редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ е равномерно сходящ в множеството $X \subset \mathbf{R}$, ξ е точка на сгъстяване на X (не се изключва случаят $\xi = \infty$ или $\xi = -\infty$) и $\lim_{x\to\xi} f_\nu(x)$ съществува за всяко естествено ν, то $\lim_{x\to\xi} \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lim_{x\to\xi} f_\nu(x)$.

Задача 114. а) Ако $r_1, r_2, \ldots$ е произволна редица от реални числа, да се докаже, че функцията $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|x - r_\nu|}{2^\nu}$, е непрекъсната навсякъде в $\mathbf{R}$ и е диференцируема в някоя точка ξ точно когато $\xi \neq r_n$ за всяко естествено n.

б) Да се построи пример на непрекъсната функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която $f'(\xi)$ съществува точно когато ξ е ирационално число.

Всеки степенен ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ е диференцируем във вътрешността на своя интервал на сходимост и е в сила равенството

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu\right)' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}. \tag{41}$$

Задача 115. Ако редът в дясната страна на (41) е сходящ в някои от краищата ξ на своя интервал на сходимост, функцията $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ е диференцируема в ξ и е в сила равенството (41) (с $x = \xi$).

Задача 116. Да се докаже, че сумите на редовете:

а) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{(\nu!)^2}$; б) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{4\nu}}{(4\nu)!}$; в) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(\nu!)^2\, 4^\nu}$;

г) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+\nu-1)}{\nu!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)} x^\nu$,

удовлетворяват съответно диференциалните уравнения:

а′) $xy'' + y' - y = 0$; б′) $y^{IV} - y = 0$; в′) $xy'' + y' + xy = 0$;

г′) $x(x-1)y'' + ((\alpha+\beta+1)x - \gamma)y' + \alpha\beta y = 0$ (*хипергеометрично диференциално уравнение*).

§ 21. Редове на Тейлър

Ако функцията f притежава производни от произволен ред в околност на точката ξ, степенният ред

(42) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}(x-\xi)^\nu$$

се нарича *ред на Тейлор* за функцията f около точката ξ. При $\xi = 0$ редът на Тейлър преминава в *реда*

(43) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$$

на Маклорен. Ако остатъчният член във формулата на Тейлър за функцията f клони към нула при неограничено нарастване на n, в сила е равенството

(44) $$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}(x-\xi)^\nu,$$

което при $\xi = 0$ приема вида

(45) $$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu.$$

Задача 117. Да се развият в ред на Тейлър около произволна точка a функциите:

а) $\cos^2 x$; б) $\sin^3 x$; в) $\operatorname{sh} x$;

г) $e^x \cos x$; д) $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$.

Задача 118. Да се докаже, че редът на Маклорен за функцията $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$ и с $f(0) = 0$, е сходящ за всяко x, но сумата му съвпада с $f(x)$ само при $x = 0$.

Задача 119. Да се докаже, че степенният ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-\xi)^\nu$ съвпада с тейлъровото развитие на сумата си около точката ξ в своя интервал на сходимост.

Задача 120*. Нека функцията f е безбройно много пъти диференцируема и удовлетворява неравенствата $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0$ при $a < x \leqq b$ и при всички цели неотрицателни стойности на n. Да се докаже, че тейлъровото развитие на f около точката b е сходящо за всяко x от $(a, b]$ и сумата му е равна на $f(x)$ (С. Н. Бернщейн).

Задача 121*. Нека функцията f е безбройно много пъти диференцируема при $x > 0$ и удовлетворява неравенствата $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0$ при всички положителни стойности на x и всички цели неотрицателни n. Да се докаже, че за всички неотрицателни x и всички реални λ е в сила неравенството $\lambda^2 f(x) + 2\lambda f'(x) + f''(x) \geqq 0$ (С. Н. Бернщейн).

Задача 122*. Нека функцията f е безбройно много пъти диференцируема при $x > 0$ и удовлетворява неравенствата $0 \leqq (-1)^n f^{(n)}(x) \leqq e^{-x}$ при всички положителни стойности на x и всички цели неотрицателни n. Да се докаже, че $f(x) = Ce^{-x}$, където C е константа (Я. Тагамлицки).

§ 22. Развития на някои елементарни функции в степенни редове

Основните елементарни функции имат следните степенни развития:

(46) $$e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!},$$

(47) $$\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

(48)
$$\cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!},$$

(49)
$$\ln(1+x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1},$$

(50)
$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^{\nu}.$$

Тъждествата (46)–(48) са в сила за всяко x, тъждеството (49) важи за всяко x от интервала $(-1, 1]$, а (50) — за всяко x при неотрицателно цяло α, за всяко x от интервала $(-1, 1)$ при $\alpha \leqq -1$, за всяко x от интервала $(-1, 1]$ при $-1 < \alpha < 0$ и за всяко x от интервала $[-1, 1]$ при $\alpha > 0$ ($\alpha \in \mathbb{N}$).

Задача 123. Да се намерят маклореновите развития на функциите:

а) $\operatorname{sh} x$; б) $\operatorname{ch} x$; в) e^{-x^2};

г) $\dfrac{e^x - 1}{x}$; д) $\dfrac{x - \sin x}{x^3}$; е) $\sin^2 2x$;

ж) $\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$; з) $\ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; и) $\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$;

й) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; к) $\sqrt{1+x^2}$; л) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

м) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; н) $\dfrac{x^{10}}{1-x}$; о) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

п) $\dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$.

Задача 124. Да се намерят маклореновите развития на функциите:

а) $(1+x)\ln(1+x)$; б) $\operatorname{arc\,tg} x$;

в) $x \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$; г) $\arcsin x$;

д) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; е) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

ж) $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

Задача 125. Да се намерят маклореновите развития на функциите:

а) $(1+x)e^{-x}$; б) $(1-x)^2 \operatorname{ch}\sqrt{x}$;

в) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$; г) $(\ln(1-x))^2$;

д) $\ln(1+x)\ln(1-x)$; е) $(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$;

ж) $(\operatorname{arc\,tg} x)^2$; з) $(\arcsin x)^2$.

Задача 126. Да се докажат тъждествата:

а) $$\frac{x \sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu} \sin\nu\alpha \quad (|x| < 1);$$

б) $$\frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} \cos\nu\alpha \quad (|x| < 1);$$

в) $$\frac{x \operatorname{sh}\alpha}{1 - 2x\operatorname{ch}\alpha + x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu} \operatorname{sh}\nu\alpha \quad (|x| < e^{-|\alpha|});$$

г) $$\frac{1 - x\operatorname{ch}\alpha}{1 - 2x\operatorname{ch}\alpha + x^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} \operatorname{ch}\nu\alpha \quad (|x| < e^{-|\alpha|}).$$

Задача 127. Да се докажат тъждествата:

а) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu}\sin\nu\alpha}{\nu} \quad (|x| < 1);$$

б) $$\ln\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\cos\alpha + x^2}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu}\cos\nu\alpha}{\nu} \quad (|x| < 1).$$

Задача 128. Да се докажат тъждествата:

а) $$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sin\alpha}{1 - x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}\sin(2\nu-1)\alpha}{2\nu-1} \quad (|x| < 1);$$

б) $$\frac{1}{4}\ln\frac{1 + 2x\cos\alpha + x^2}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}\cos(2\nu-1)\alpha}{2\nu-1} \quad (|x| < 1).$$

Задача 129. Да се докажат тъждествата:

а) $$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\cos\alpha}{1 - x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}x^{2\nu-1}\cos(2\nu-1)\alpha}{2\nu-1};$$

б) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+2x\sin\alpha+x^2}{1-2x\sin\alpha+x^2}=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}x^{2\nu-1}\sin(2\nu-1)\alpha}{2\nu-1}$,

където $|x|<1$.

Задача 130. Да се докажат тъждествата:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu}=\frac{\pi-x}{2}\quad(0<x<2\pi)$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\nu}=-\ln 2-\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\quad(x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{I})$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu x}{\nu}=\frac{x}{2}\quad(-\pi<x<\pi)$;

г) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\cos\nu x}{\nu}=\ln 2+\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\quad(x\neq(2k-1)\pi,\ k\in\mathbf{I})$.

Задача 131. Да се докажат тъждествата:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4}\quad(0\leqq x\leqq 2\pi)$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu^3}=\frac{\pi^2 x}{6}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\quad(0\leqq x\leqq 2\pi)$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{\nu^4}=\frac{\pi^4}{90}-\frac{\pi^2x^2}{12}+\frac{\pi x^3}{12}-\frac{x^4}{48}\quad(0\leqq x\leqq 2\pi)$;

. . . . . .

Задача 132. Да се докажат тъждествата:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\cos\nu x}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}\quad(|x|<\pi)$;

б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\sin\nu x}{\nu^3}=\frac{\pi^2 x}{12}-\frac{x^3}{12}\quad(|x|\leqq\pi)$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{\cos\nu x}{\nu^4}=\frac{7\pi^4}{720}-\frac{\pi^2x^2}{24}+\frac{x^4}{48}\quad(|x|\leqq\pi)$;

. . . . . .

§ 23. Намиране на сумите на някои редове

Задача 133. Да се намерят сумите на редовете:

а) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2+1}{\nu!}x^{\nu}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\nu^3}{(\nu+1)!}x^{\nu}$;

в) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}(2\nu^2+1)}{(2\nu)!}x^{2\nu}$; г) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2}{(2\nu+1)!}x^{\nu}$.

Задача 134. Да се намерят сумите на редовете:

а) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu^2-1}$; б) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(2\nu+1)}$; в) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu^2+\nu-2}$;

г) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$; д) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2}$; е) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1}$;

ж) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^2}$; з) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu-1}{\nu^2(\nu+1)^2}$; и) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2(\nu+1)^2}$;

й) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2(\nu+1)^2}$; к) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{(\nu-1)!}$; л) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\nu}{(2\nu+1)!}$;

м) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}(\nu^2+1)}{(2\nu)!}$.

Задача 135*. Да се намери сумата на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}\nu^2}$ (Д. Скордев).

Девета глава

Неопределен интеграл

§ 1. Таблица на основните интеграли

Нека е дадена функцията $f : \Delta \to \mathbb{R}$, чиято дефиниционна област Δ е интервал. Една функция $F : \Delta \to \mathbb{R}$ се нарича *неопределен интеграл* или *примитивна* на f, когато $F' = f$. Ако F е примитивна на f, се пише

(1) $$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Ако F е примитивна на f и C е произволна константа, функцията $F + C$ е също примитивна на f. От друга страна, ако F и Φ са две примитивни на f, съществува константа C, за която $\Phi - F = C$. Това позволява, когато познаваме един неопределен интеграл на функцията f, чрез прибавяне на произволни константи да получим всичките неопределени интеграли на f.

В зад. 19, гл. X се установява, че всяка функция, която е непрекъсната в един интервал, притежава примитивна в този интервал.

Намирането на неопределените интеграли на някои елементарни функции се свежда до следната таблица на основните интеграли:

(2) $$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1),$$

(3) $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$$

(4) $$\int e^x\,dx = e^x,$$

(5) $$\int \sin x\,dx = -\cos x,$$

(6) $$\int \cos x\,dx = \sin x,$$

(7) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x,$$

(8) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x,$$

(9) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x,$$

(10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Тази таблица трябва да се научи наизуст.

Задача 1. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (0 < a \neq 1);$

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| \quad (a \neq 0);$

в) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x;$ г) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x;$

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x;$ е) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x;$

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar\,th} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \quad (|x| < 1);$

з) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar\,cth} x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \quad (|x| > 1.$

Към следващите две най-прости правила за интегриране се налага да се прибягва извънредно често:

(11) $$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \qquad (a \text{ — константа})$$

и

(12) $$\int \big(f(x) + \varphi(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx.$$

Задача 2. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\displaystyle\int (2x+1)\,dx;$ б)° $\displaystyle\int (3x^2+2x-1)\,dx;$

в)° $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2x}\right) dx;$ г)° $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) dx;$

д)° $\displaystyle\int \left(\sqrt{x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right) dx;$ е)° $\displaystyle\int x^2(x^2+1)\,dx;$

ж)° $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}\,dx;$ з)° $\displaystyle\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx;$

и)° $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{x}\,dx$;

й)° $\int \left(3e^x - \sqrt[3]{x^2}\right)\,dx$;

к)° $\int \left(-\sin x + \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\right)\,dx$;

л)° $\int \left(4\cos x - \frac{5}{\sqrt{9-9x^2}}\right)\,dx$;

м)° $\int \left(2^x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)\,dx$;

н)° $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+2}{1+x^2}\right)\,dx$;

о)° $\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$;

п)° $\int \frac{x^2dx}{1-x^2}$;

р)° $\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx$;

с)° $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$;

т)° $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx$;

у)° $\int \frac{x^5-x+3}{x^2-1}\,dx$;

ф)° $\int \frac{x^5-x+1}{x^2+1}\,dx$;

х)° $\int \frac{-3x^4+3x^2-1}{x^2-1}\,dx$;

ц) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$;

ч) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$;

ш) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$;

щ) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

ъ)° $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$;

ь)° $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

ю)* $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$;

я)° $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

§ 2. Внасяне под диференциала

Понякога интегралът $\int f(x)g'(x)\,dx$ се означава и така: $\int f(x)\,dg(x)$. Тогава по дефиниция

(13) $$\int f(x)\,dg(x) = \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Очевидно

(14) $$\int f(x)\,dg(x) = \int f(x)\,d\big(g(x)+a\big)$$

и

(15) $$a\int f(x)\,dg(x) = \int f(x)\,d\,ag(x),$$

където a е произволна константа.

Въведеното по-общо означение (13) се използва в следното правило за интегриране (което понякога се нарича *интегриране чрез внасяне под диференциала*): от

(16) $$\int \varphi(u)\,du = F(u)$$

следва

(17) $$\int \varphi(g(x))\,dg(x) = F(g(x)).$$

По този начин, ако се познава интегралът (16), налице е възможност да се пресметнат всичките интеграли (17).

Задача 3. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\int \frac{dx}{x+a}$;

б)° $\int (2x-3)^{10}\,dx$;

в)° $\int \sin 2x\,dx$;

г)° $\int \sin^2 x\,dx$;

д)° $\int \frac{dx}{1+4x^2}$;

е)° $\int \frac{dx}{e^x}$;

ж)° $\int \sin(7x+3)\,dx$;

з)° $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$;

и)° $\int \frac{dx}{2-3x^2}$;

й)° $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$;

к)° $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$;

л)° $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}}$;

м)° $\int \frac{dx}{3+4x^2}$;

н)° $\int \frac{dx}{\sin^2 ax}$ ($a \neq 0$ — константа);

о)° $\int e^{-2x+3}dx$;

п) $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}\,dx$;

р) $\int \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}\,dx$;

с)° $\int \frac{x^4+3x^2+4}{x^2+2}\,dx$;

т)° $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx$;

у) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$;

ф) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$;

х) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$;

ц) $\int \frac{\sin x\,dx}{1-\sin x}$;

ч)° $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}+1\right)}$;

ш)° $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x-3}{2}}$; щ)° $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

ъ) $\int \sin 3x \sin 5x\, dx$; ь) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\, dx$;

ю) $\int \sin ax \sin bx\, dx$ (a, b — константи, $|a| \neq |b|$);

я) $\int \sin x \sin 2x \cos 3x\, dx$.

Задача 4. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$; б)° $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\, dx$;

в)° $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ (a — константа);

г)° $\int \sin^3 x \cos x\, dx$; д)° $\int e^{x^2} x\, dx$;

е)° $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$; ж)° $\int \frac{dx}{x \ln x}$;

з)° $\int \frac{x\, dx}{1+x^4}$; и)° $\int \sqrt{a^2-x^2}\, x\, dx$ ($a \neq 0$, a — константа);

й)° $\int \cos^3 x\, dx$; к)° $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$;

л)° $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; м)° $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\, dx$;

н)° $\int \frac{x\, dx}{(1+x^2)^2}$; о)° $\int \frac{x\, dx}{a^4+x^4}$ ($a \neq 0$, a — константа);

п)° $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ ($a \neq 0$, a — константа);

р)° $\int \frac{x\, dx}{3-2x^2}$; с)° $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}$;

т) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; у) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[3]{\sin x + \cos x}}\, dx$;

ф) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x}$; х) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x}$;

ц) $\int \cos^3 x \sin^3 x\, dx$; ч) $\int \frac{\sin x\, dx}{2-\sin^2 x}$;

ш) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; щ) $\int \frac{dx}{\sin x}$;

ъ) $\int \frac{dx}{\cos x}$; ь) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

ю) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$;

я) $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$ (a, b — константи, $a^2+b^2 \neq 0$).

Задача 5. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{e^x+1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2e^x-3}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx$;

д) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\, dx$; е) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2}\, dx$;

ж) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}\, dx$; з) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2-x^2})}$;

и)* $\int \frac{dx}{(1+x^n)^{\frac{n+1}{n}}}$ ($n \in \mathbf{N}$);

й)* $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$; к)* $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\, dx$;

л) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2}$; м) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}-2}$.

§ 3. Пресмятане на интеграли от вида

$$\int \frac{(Ax+Bx)\,dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{и} \quad \int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Интегралите от този вид се пресмятат с отделяне на точен квадрат от тричлена ax^2+bx+c, т. е. като се използува, че $ax^2+bx+c = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ $(a \neq 0)$.

Задача 6. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$; б)° $\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}\,dx$;

в)° $\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$; г)° $\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ (a, b и c — константи, за които $4ac-b^2 \neq 0$);

е) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ (A, B, a, b и c — константи, за които $4ac-b^2 \neq 0$).

Задача 7. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+3}$; б) $\int \frac{x^3\,dx}{x^2+x+1}$;

в)° $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx$; г)° $\int \frac{x^3\,dx}{3x^4-2x^2+1}$.

Задача 8. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$; б)° $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+2}}$;

в)° $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+7}}$; г)° $\int \frac{dx}{\sqrt{3+x-x^2}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (a — константа, $a>0$);

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (a, b и c — константи, за които $b^2-4ac>0$, $a<0$).

Задача 9. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\int \frac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$; б)° $\int \frac{3x+2}{\sqrt{3+x+x^2}}\,dx$;

в)° $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-ax}}$ (a — константа, $a \neq 0$);

г)° $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$; д)° $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$;

е) $\int \frac{(x+a)\,dx}{\sqrt{ax+x^2}}$ (a — константа, $a \neq 0$).

Задача 10*. Нека P е полином от n-та степен ($n \in \mathbf{N}$), а a, b и c са константи, за които квадратният тричлен $ax^2+2bx+c$ е положителен в някой интервал Δ. Да се докаже, че съществуват полином Q от $(n-1)$-ва степен и константа A, за които е в сила

$$\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+2bx+c} + A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

в интервала Δ.

Задача 11. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,dx$; б) $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$;

в) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\int x^2\sqrt{x^2+2}\,dx$.

Задача 12*. Нека α, a, b и c са константи. При $J_\alpha(x) = \int \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ да се докаже тъждеството

$$2\alpha a J_\alpha(x) + (2\alpha-1)bJ_{\alpha-1}(x) + (2\alpha-2)cJ_{\alpha-2}(x) = 2x^{\alpha-1}\sqrt{ax^2+bx+c}$$

във всеки интервал, в който подинтегралните функции имат смисъл.

Задача 13. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; в) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{2x^2+2x+1}}$.

§ 4. Интегриране по части

От формулата за диференциране на произведение се извежда следното *правило за интегриране по части:*

(18) $$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x).$$

Задача 14. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx$ (a — константа, $a \neq 0$);

б) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ (a — константа, $a > 0$).

Задача 15. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3+x^2)^2}$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3+2x^2)^2}$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^2}$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3-x^2)^2}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3-2x^2)^2}$.

Задача 16. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(a^2+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$$

(a — константа, $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$);

б) $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(a^2-x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n}$$

(a — константа, $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$).

Задача 17. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int \frac{x^m\,dx}{(a^2+x^2)^n} = -\frac{x^{m-1}}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{m-1}{2(n-1)}\int \frac{x^{m-2}}{(a^2+x^2)^{n-1}}\,dx$$

(a — константа, $a > 0$, $m, n = 2, 3, \ldots$);

б) $$\int \frac{x^m\,dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x^{m-1}}{(a^2-x^2)^{n-1}} - \frac{m-1}{2(n-1)}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{(a^2-x^2)^{n-1}}$$

(a — константа, $a > 0$, $m, n = 2, 3, \ldots$).

Задача 18. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{(2+x^2)^3}$; б) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{(2-x^2)^3}$.

Задача 19*. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$; б) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$.

§ 5. Пресмятане на интеграли от вида $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$ и $\int P(x)\cos ax\,dx$

За пресмятане на интеграли от този вид, където $P(x)$ е полином на x, а a — константа, се препоръчва e^{ax}, $\sin ax$ или $\cos ax$ да се внесат под диференциала и след това да се интегрира по части.

Задача 20*. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int xe^x\,dx$; б) $\displaystyle\int x^4e^{-x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int (x^3-2x^2+5)e^{3x}\,dx$; г) $\displaystyle\int \frac{x^5}{e^{x^2}}\,dx$.

Задача 21*. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$; б) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$;

в) $\displaystyle\int x^3\sin(2x+3)\,dx$; г) $\displaystyle\int x^3\sin x^2\,dx$.

Задача 22. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$; б) $\displaystyle\int x\sin^2 x\,dx$;

в) $\displaystyle\int x\sin^3 x\,dx$; г) $\displaystyle\int x^2\cos^3 x\,dx$.

Задача 23*. Да се докаже тъждеството:

$$\int f(x)\,dg^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu f^{(\nu)}(x)g^{(n-\nu)}(x) + (-1)^{n+1}\int g(x)\,df^{(n)}(x) \quad (n+1 \in \mathbf{N}).$$

Задача 24*. Да се докаже, че ако P е полином от n-та степен, а a — различна от нула константа, то

а) $$\int P(x)e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{P^{(\nu)}(x)}{a^\nu};$$

б) $\int P(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2}\right.$

$\left. + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \dots\right) + \frac{\cos ax}{a}\left(\frac{P'(x)}{a} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^{V}(x)}{a^5} - \dots\right);$

в) $\int P(x)\sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2}\right.$

$\left. + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \dots\right) + \frac{\sin ax}{a}\left(\frac{P'(x)}{a} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^{V}(x)}{a^5} - \dots\right).$

§ 6. Пресмятане на интегралите $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

Задача 25. Да се докажат тъждествата:

а) $\int \sin^m x\,dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1} x\cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx$ $(m = 2, 3, \dots)$;

б) $\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$ $(m = 2, 3, \dots)$.

Задача 26°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sin^4 x\,dx$; б) $\int \sin^5 x\,dx$; в) $\int \sin^6 x\,dx$;

г) $\int \sin^7 x\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; е) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

ж) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$; з) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

Задача 27. Да се докажат тъждествата:

а) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$ $(n = 2, 3, \dots)$;

б) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$ $(n = 2, 3, \dots)$.

Задача 28°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \cos^4 x\,dx$; б) $\int \cos^5 x\,dx$;

в) $\int \cos^6 x\,dx$; г) $\int \cos^7 x\,dx$;

д) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; е) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$; ж) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

Задача 29. Да се докажат тъждествата:

а) $\int \sin^m x\cos^n x\,dx = -\frac{1}{m+n}\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x$

$+ \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x\cos^n x\,dx$ $(m = 2, 3, \dots;\ n \in \mathbf{I},\ m+n \neq 0)$;

б) $\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{1}{m+n}\sin^{m+1} x\cos^{n-1} x$

$+ \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2} x\,dx$ $(n = 2, 3, \dots;\ m \in \mathbf{I},\ m+n \neq 0)$.

Задача 30°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$; б) $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$.

Задача 31*. Да се докажат тъждествата:

а) $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\,dx = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{n-2} x}\,dx$ $(m, n = 2, 3, \dots)$;

б) $\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\cos^{n-1} x}{\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin^{m-2} x}\,dx$ $(m, n = 2, 3, \dots)$.

Задача 32°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; б) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; в) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$;

г) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$; д) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$; е) $\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx$.

Задача 33*. Да се докажат тъждествата:

а) $\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1} x\cos^{n-1} x}$

$$+\frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{dx}{\sin^{m-2}x\cos^n x}\qquad (m=2,\ 3,\ \ldots;\ n\in\mathbf{I});$$

б) $$\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}$$

$$+\frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}\qquad (n=2,\ 3,\ \ldots;\ m\in\mathbf{I}).$$

Задача 34. Да се пресметнат интегралите:

а)° $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$; б)° $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$.

§ 7. Пресмятане на $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ и $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ и на някои техни аналози

Задача 35*. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

б) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$).

Задача 36. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int(e^x-\cos x)^2\,dx$;

б) $\int e^{ax}\sin^2 bx\,dx$ (a и b — константи, $a\neq 0$).

Задача 37. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int xe^{ax}\sin bx\,dx$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

б) $\int xe^{ax}\cos bx\,dx$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

в) $\int x^2e^{ax}\cos bx\,dx$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$).

Задача 38. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int e^{ax}\sin bx\cos cx\,dx$ (a, b и c — константи, $a\neq 0$);

б) $\int e^{ax}\sin^2 bx\cos cx\,dx$ (a, b и c — константи, $a\neq 0$).

Задача 39*. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int e^{ax}\sin^n bx\,dx=\frac{(a\sin bx-nb\cos bx)e^{ax}\sin^{n-1}bx}{a^2+n^2b^2}$$
$$+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx$$

($n=2,\ 3,\ \ldots$, a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

б) $$\int e^{ax}\cos^n bx\,dx=\frac{(a\cos bx+nb\sin bx)e^{ax}\cos^{n-1}bx}{a^2+n^2b^2}$$
$$+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx$$

($n=2,\ 3,\ \ldots$, a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$).

§ 8. Пресмятане на някои интеграли от вида $\int R(x)\ln x\,dx$, $\int R(x)\operatorname{arc\,tg}x\,dx$ и $\int R(x)\arcsin x\,dx$

За пресмятане на интеграли от този вид понякога се препоръчва функцията R да се внесе под диференциала и след това да се интегрира по части.

Задача 40°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int x\ln x\,dx$; б) $\int x^a\ln x\,dx$.

Задача 41. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int x(\ln x)^2\,dx$; б) $\int x^a(\ln x)^3\,dx$.

Задача 42. Да се докажат тъждествата:

а) $\int(\ln x)^n\,dx=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}\,dx\quad (n\in\mathbf{N})$;

б) $$\int x^a(\ln x)^n\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}(\ln x)^n-\frac{n}{a+1}\int x^a(\ln x)^{n-1}\,dx$$
$(n\in\mathbf{N},\ a\neq -1)$.

Задача 43. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int (x^2+x)\ln(x+1)\,dx$; б) $\int x\ln(x^2-1)\,dx$;

в) $\int x\ln(x^2+a^2)\,dx$; г) $\int x^4\ln(x^2+a^2)\,dx$.

Задача 44. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx \qquad (a>0)$;

б) $\int \left(\arccos\frac{x}{a}\right)^3 dx \qquad (a>0)$;

в) $\int x\arcsin x\,dx$; г) $\int \frac{\arccos x}{x^2}\,dx$;

д) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; е) $\int \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

ж) $\int \frac{x^3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; з) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$;

и) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$.

Задача 45. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$; б) $\int x^3\operatorname{arctg} x\,dx$;

в) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(\alpha+\beta x)^2}\,dx \qquad (\alpha^2+\beta^2\neq 0)$;

г) $\int \frac{x^4\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; д) $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

§ 9. Интегриране чрез субституции

За пресмятане на интеграла

(19) $$\int f(x)\,dx$$

понякога е целесъобразно да се извърши смяна на независимата променлива с помощта на някоя *субституция*

(20) $$x=\varphi(t),$$

т. е. да се приложи следната теорема: *Нека Δ_1 и Δ са интервали и*

(21) $$\varphi:\Delta_1\to\Delta$$

е диференцируема обратима функция с $\varphi(\Delta_1)=\Delta$, чиято обратна функция

(22) $$\psi:\Delta\to\Delta_1$$

е също диференцируема. Нека освен това дефиниционната област на функцията f съдържа интервала Δ и интегралът

(23) $$F(t)=\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

съществува в Δ_1. Тогава функцията f притежава примитивна пакс в интервала Δ и е в сила

(24) $$\int f(x)\,dx=F(\psi(x))$$

за $x\in\Delta$.

На практика тази теорема се прилага по следния начин. От (20) се пресмята dx:

(25) $$dx=\varphi'(t)\,dt$$

След заместване на (20) и (25) в (19) се получават интегралите от (23). Субституцията (20) се подбира така, че да можем да пресметнем тези интеграли. Нека в резултат на пресмятането е получена функция $F(t)$. За да намерим интеграла (19), трябва да се върнем към старата променлива x. За тази цел решаваме (20) относно t и получаваме

(26) $$t=\psi(x).$$

Сега интегралът (19) се получава след заместване на така получената функция на x в $F(t)$.

Този метод за краткост се нарича *интегриране чрез субституция* или *интегриране чрез смяна на променливата*.

Задача 46. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a$ — константа, $a>0)$;

б) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} \qquad (a$ — константа, $a>0)$,

с помощта на субституцията $x=a\sin t$.

Задача 47. Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx \qquad (a$ — константа, $a>0)$;

б) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \qquad (a$ — константа, $a>0)$,

с помощта на субституцията $x=a\operatorname{sh} t$.

Задача 48. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ (a — константа, $a>0$);

б) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(a^2+x^2)^3}$ (a — константа, $a>0$),

с помощта на субституцията $x = a\,\mathrm{tg}\,t$.

Понякога при интегриране се налага да се освобождаваме от първата степен на x в квадратния тричлен ax^2+bx+c $(a \neq 0)$. За тази цел обикновено се прилага т. нар. *субституция на Хорнер*:

$$x = t - \frac{b}{2a},$$

която автоматизира отделянето на точен квадрат (вж. § 3).

Задача 49°. Да се решат зад. 6 а) и 9 а) с помощта на субституцията на Хорнер.

Задача 50°. В интегралите от зад. 19 да се направи субституцията $x = e^t$ и полученият резултат да се сравни със зад. 35.

§ 10. Интегриране на рационални функции

Интегрирането на рационални функции в известен смисъл е централен въпрос при неопределените интеграли, тъй като редица класове от интеграли се пресмятат, като се сведат към интеграли от рационални функции.

Всяка рационална функция може да се представи като сума на един полином и на друга рационална функция, чийто числител има по-ниска степен от знаменателя. От друга страна, всяка рационална функция от последния вид може да се представи като сума от *елементарни дроби*, т. е. на рационални функции от вида

(27) $$\frac{A}{(x-a)^n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

и

(28) $$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

където числата A, a, M, N и p, q са реални и знаменателят на (28) не се анулира за реално x, т. е. $p^2-4q<0$. Това представяне се основава на следните две теореми:

1. Нека P и Q са полиноми от степени съответно π и κ, a е реално число и $Q(a) \neq 0$. Тогава за всяко естествено n с $\pi < n+\kappa$ съществуват (единствени) константи A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ и (единствен) полином R от степен $\rho < \kappa$, за които е в сила

(29) $$\frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu}{(x-a)^\nu} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

за всяко x, което не анулира знаменателя на лявата страна.

2. Нека P и Q са полиноми от степени съответно π и κ; p и q са реални числа, за които $p^2-4q<0$, и (комплексните) нули на полинома x^2+px+q не анулират Q. Тогава за всяко естествено n с $\pi < 2n+\kappa$ съществуват (единствени) константи M_ν, N_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ и (единствен) полином R от степен $\rho < \kappa$, за които е в сила

(30) $$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^n Q(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{M_\nu x + N_\nu}{(x^2+px+q)^\nu} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

за всяко x, което не анулира Q.

Чрез последователно прилагане на (29) и (30) може да се осъществи разлагане в сума от елементарни дроби на всяка рационална функция, степента на чийто числител е по-ниска от степента на знаменателя ѝ, стига да се знаят нулите на знаменателя. Константите A_ν и M_ν, N_ν в десните страни на (29) и (30) могат да се определят след освобождаване от знаменателите например чрез сравняване на коефициентите.

Задача 51°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(2+x)}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+2x)(3+4x)}$; в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+2)}$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+bx)(c+dx)}$ (a, b, c, d — константи, за които $ad \neq bc$);

д) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)}$ (a, b — константи, за които $a \neq b$);

е) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{9-10x^3+x^6}$.

Задача 52. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.

Задача 53. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$; г) $\displaystyle\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

Задача 54. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са различни помежду си реални числа и $P(x)$ е полином от степен, по-ниска от n. Да се докаже тъждеството

$$\int \frac{P(x)\,dx}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(a_\nu)\ln|x-a_\nu|}{(a_\nu-a_1)(a_\nu-a_2)\dots(a_\nu-a_{\nu-1})(a_\nu-a_{\nu+1})\dots(a_\nu-a_n)}.$$

Задача 55. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(2+x)^2}$; б) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)(2+x)^2}$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)(2+x)^2}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)^2(2+x)^2}$;

д) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)^2(2+x)^2}$; е) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)^2(2+x)^2}$.

Задача 56. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-3x)(1-4x)^3}$; б) $\displaystyle\int \frac{x^8\,dx}{(x^2-2)^2}$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-2x-3)^3}$.

Задача 57. Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{P(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx,$$

където P е полином от n-та степен.

Задача 58. Да се докаже тъждеството

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^n} = \frac{(2n-3)!!}{2^n(n-1)!}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$
$$+ \frac{x}{2n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2\nu+1)}{2^\nu(n-1)(n-2)\dots(n-\nu)(1-x^2)^{n-\nu}}.$$

Задача 59. Да се пресметне интегралът $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n(x-1)^n}$ за произволно естествено число n.

Задача 60. При какви условия за константите a и b интегралите

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2}$, б) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+x)^2(b+x)^2}$

са рационални функции на x?

Задача 61. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^3+x^3}$ (a — константа, $a \neq 0$);

б) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a^3+x^3}$ (a — константа, $a \neq 0$);

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(a^3+x^3)}$ (a — константа, $a \neq 0$);

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$; ж) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$.

Задача 62. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+2)^2}$; в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2}$;

г) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+2)^2}$; д) $\displaystyle\int \frac{7x-4}{(3x^2+2x+5)^2}\,dx$.

Задача 63. Нека a, b и c са константи, за които $a \neq 0$, $b^2-4ac \neq 0$. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$
$$+ \frac{(2n-3)2a}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \qquad (n=2,3,\dots);$$

б) $$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{bx+2c}{(n-1)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$
$$+ \frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2-4ac)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \qquad (n=2,3,\dots).$$

Задача 64. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+13)^3}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+3x+5)^3}$.

Задача 65. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^3)^2}$; б) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x^3)^2}$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$;

г) $\displaystyle\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}\,dx$;

е) $\displaystyle\int \frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}\,dx$;

ж) $\displaystyle\int \frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$;

з) $\displaystyle\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,dx$.

§ 11. Метод на Остроградски–Ермит

Вече видяхме, че при високи степени на неразложимите множители в знаменателя на една рационална функция пресмятането на коефициентите в разлагането на сума от елементарни дроби създава сериозни технически затруднения. Съществува общ метод, който позволява пресмятането на интеграли от произволни рационални функции да се сведе до пресмятане на интеграли от рационални функции, неразложимите множители в знаменателя на които са от първа степен. В следващите зад. 66 — 68 се разглежда този метод. По-долу

(31) $$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

е система от k различни реални числа, а $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_k(x)$, или накратко $A_1, A_2, \ldots, A_k$, са полиномите от първа степен, дефинирани със

(32) $$A_\kappa = x - a_\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots, k);$$

също така

(33) $$(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_l, q_l)$$

са различни помежду си двойки реални числа, за които $p_\lambda^2 - 4q_\lambda < 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$, а $B_1(x), B_2(x), \ldots, B_l(x)$, или накратко $B_1, B_2, \ldots, B_l$ — квадратните тричлени, дефинирани с

(34) $$B_\lambda(x) = x^2 + p_\lambda x + q_\lambda.$$

Очевидно полиномите B_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ нямат реални нули. От алгебрата е известно, че всеки ненулев полином с реални коефициенти по единствен начин може да се представи като произведение на константа и полиноми от вида (32) и (34).

Задача 66*. Нека $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и $t_1, t_2, \ldots, t_l$ са цели положителни числа и полиномите S и $A_1^{s_1}, \ldots, A_k^{s_k}, B_1^{t_1}, \ldots, B_l^{t_l}$ са взаимно прости. Да се докаже, че производната на рационалната функция

$$\frac{S(x)}{A_1^{s_1}(x)\ldots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\ldots B_l^{t_l}(x)}$$

е рационална функция от вида

$$\frac{T(x)}{A_1^{s_1+1}(x)\ldots A_k^{s_k+1}(x)B_1^{t_1+1}(x)\ldots B_l^{t_l+1}(x)},$$

където T е полином, взаимно прост с полинома $A_1^{s_1+1}\ldots A_k^{s_k+1}B_1^{t_1+1}\ldots B_l^{t_l+1}$.

Задача 67*. Нека полиномите R и $A_1\ldots A_kB_1\ldots B_l$ $(k+l>0)$ са взаимно прости. Тогава интегралът

$$\int \frac{R(x)\,dx}{A_1(x)\ldots A_k(x)B_1(x)\ldots B_l(x)}$$

не е рационална функция на x.

Задача 68* (Остроградски – Ермит). Нека $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и $t_1, t_2, \ldots, t_k$ са цели положителни числа и полиномите P и $A_1^{s_1}\ldots A_k^{s_k}B_1^{t_1}\ldots B_l^{t_l}$ са взаимно прости, а степента на P е по-малка от $\sum\limits_{\kappa=1}^{k} s_\kappa + 2\sum\limits_{\lambda=1}^{l} t_\lambda$. Тогава съществуват единствен полином Q от степен, по-малка от $\sum\limits_{\kappa=1}^{k} s_\kappa + 2\sum\limits_{\lambda=1}^{l} t_\lambda - k - 2l$, и единствен полином R от степен, по-малка от $k+2l$, за които

$$\int \frac{P(x)\,dx}{A_1^{s_1}(x)\ldots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\ldots B_l^{t_l}(x)}$$
$$= \frac{Q(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\ldots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\ldots B_l^{t_l-1}(x)}$$
$$+ \int \frac{R(x)\,dx}{A_1(x)\ldots A_k(x)B_1(x)\ldots B_l(x)}.$$

Задача 69. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+x-2)^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x^6+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$;

г) $\displaystyle\frac{-2x^5+11x^4-28x^3+37x^2-30x+14}{(x^2-2x+2)^3}\,dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{-4x^3-4x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$;

е) $\displaystyle\int \frac{x^7+x^6-2x^4+2x^3-6x^2+3x+1}{(1+x^3)^3}\,dx.$

§ 12. Интеграли от някои специални рационални функции

Задача 70. При

$$P_\nu(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi+1\right),$$

$$Q_\nu(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2\nu+1}{n}\pi}{1-x\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi}$$

да се докажат тъждествата:

а) $$\int\frac{dx}{1+x^n}=-\frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1}P_\nu(x)\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi+\frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1}Q_\nu(x)\sin\frac{2\nu+1}{n}\pi \qquad (n \text{ — четно});$$

б) $$\int\frac{dx}{1+x^n}=\frac{1}{n}\ln|1+x|-\frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}}P_\nu(x)\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi+\frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}}Q_\nu(x)\sin\frac{2\nu+1}{n}\pi \qquad (n \text{ — нечетно}).$$

Задача 71*. При

$$P_\nu(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi+1\right),$$

$$Q_\nu(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi}{\sin\frac{2\nu+1}{n}\pi}$$

да се докажат тъждествата:

а) $$\int\frac{dx}{1-x^n}=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}P_\nu(x)\cos\frac{2\nu}{n}\pi+\frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}Q_\nu(x)\sin\frac{2\nu}{n}\pi \qquad (n \text{ — четно});$$

б) $$\int\frac{dx}{1-x^n}=-\frac{1}{n}\ln|1-x|+\frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}}P_\nu(x)\cos\frac{2\nu+1}{n}\pi+\frac{2}{n}\sum_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}}Q_\nu(x)\sin\frac{2\nu+1}{n}\pi \qquad (n \text{ — нечетно}).$$

Задача 72*. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}}\,dx=-\frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{n}\cos\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n}\ln\left(1-2x\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi+x^2\right)+\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2\nu-1}{2n}\pi};$$

б) $$\int\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n+1}}\,dx=(-1)^{m+1}\frac{\ln|1+x|}{2n+1}-\frac{1}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\cos\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n+1}\ln\left(1-2x\cos\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi+x^2\right)+\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi}{\sin\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi};$$

в) $$\int \frac{x^{m-1}}{1-x^{2n}}\,dx = \frac{(-1)^{m+1}}{2n}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$-\frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\cos\frac{\nu m\pi}{n}\ln\left(1-2x\cos\frac{\nu\pi}{n}+x^2\right)$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu m\pi}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{\nu\pi}{n}}{\sin\frac{\nu\pi}{n}};$$

г) $$\int \frac{x^{m-1}}{1-x^{2n+1}}\,dx = -\frac{1}{2n+1}\ln|1-x|$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\cos\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n+1}\ln\left(1+2x\cos\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi+x^2\right)$$

$$+\frac{2(-1)^{m+1}}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\frac{m\pi(2\nu-1)}{2n+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\cos\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi}{\sin\frac{2\nu-1}{2n+1}\pi},$$

където степента на числителя на подинтегралната функция е по-ниска от степента на знаменателя.

§ 13. Интеграли от рационална функция на x и на радикали на една и съща дробно-линейна функция

Интегралите от вида

(35) $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx,$$

където R е рационална функция на $n+1$ променливи, се свеждат към интеграли от рационални функции с помощта на субституциите

(36) $$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q,$$

където q е най-малкото общо кратно на знаменателите q_ν. По-точно търсената субституция се получава след решаване на (36) спрямо x.

Задача 73. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[3]{x}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$

(a и b — константи, за които $a \neq b$);

ж) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$; з) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

§ 14. Биномен диференциал

Интегралите от вида

(37) $$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

където a и b са различни от нула константи, а m, n и p — рационални числа, се наричат *интеграли от биномен диференциал* или *диференциален бином*. Съществуват три случая, когато тези интеграли са елементарни функции. Тези случаи са:

(38) $$p \text{ — цяло},$$

(39) $$\frac{m+1}{n} \text{ — цяло},$$

(40) $$\frac{m+1}{n}+p \text{ — цяло}.$$

При (38) интегралът (37) е от вида (35), поради което може да се сведе до интеграл от рационална функция с помощта на субституцията

(41) $$x = t^k,$$

където k е най-малкото общо кратно на знаменателите на m и n.

При (39) интегралът (37) се свежда до интеграл от рационална функция с помощта на субституцията

(42) $$a+bx^n = t^k,$$

където k е знаменателят на p.

При (40) интегралът (37) най-напред се преобразува така:

(43) $$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx.$$

За интеграла в дясната страна на (43) е налице (39), поради което той се свежда до интеграл от рационална функция с помощта на субституцията

(44) $$b + ax^{-n} = t^k,$$

където k отново е знаменателят на p.

Когато числата m, n и p не удовлетворяват никое от условията (38) — (40), интегралът (37) не е елементарна функция (Чебишов). Да отбележим още, че в случаите (39) и (40) съответните субституции (42) и (44) функционират и без предположението за рационалност на m и n.

Задача 74. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \sqrt{x^3 + x^4}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$; г) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$; ж) $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$.

Задача 75. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{(2+x^{\sqrt{2}})^{\frac{3}{2}}}{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{(2-x^{\sqrt{3}})^{\frac{3}{2}}}{x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{(a+bx^{\pi})^{\frac{3}{2}}}{x}\,dx$ (a и b — константи, за които $b \neq 0$).

Задача 76. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (m — цяло);

б) $\displaystyle\int \frac{x^m}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ (m — цяло).

§ 15. Субституции на Ойлер

Интегралите от вида

(45) $$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

където R е рационална функция на две променливи, а a, b и c са константи, за които $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, могат да се сведат към интеграли от рационални функции с помощта на т. нар. *субституциите на Ойлер*. При

(46) $$a > 0$$

може да се положи

(47) $$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$$

или

(48) $$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}.$$

При

(49) $$c > 0$$

може да се положи

(50) $$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$$

или

(51) $$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}.$$

Когато квадратният тричлен ax^2+bx+c има реални нули, т. е.

(52) $$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta),$$

където α и β са реални числа, може да се положи

(53) $$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$$

или

(54) $$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\beta).$$

Случаите (46), (49) и (52) са единствените, в които квадратният тричлен ax^2+bx+c е положителен в някой интервал. Ето защо субституциите на Ойлер (47), (48), (50), (51), (53) и (54) са достатъчни за свеждане на всеки от интегралите (45) към интеграл от рационална функция. В зависимост от конкретните стойности на a, b и c могат да възникнат един или няколко от случаите (46), (49) и (52). Ето защо в общия случай един и същ интеграл (45) може да се сведе към интеграл от рационална функция с няколко субституции на Ойлер. Да отбележим, че обемът на пресмятанията съществено зависи от избраната субституция.

Задача 77. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$;

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$; з) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$;

и) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x(1+x)})^2}$; й) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Задача 78. Да се докаже, че пресмятането на интеграла

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\,dx,$$

където R е рационална функция на три променливи, може да се сведе към интегриране на рационални функции.

Задача 79. При какви условия за α, β, γ и a, b, c интегралът

$$\int \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

е алгебрична функция?

§ 16. Интеграли от рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$

Интегралите от вида

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx, \tag{55}$$

където R е рационална функция на две променливи, могат да се сведат към интеграли от рационални функции с помощта на субституцията $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тази субституция може да се използва във всеки интервал, в който функциите $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и $R(\sin x,\cos x)$ са дефинирани. Ако този интервал се съдържа в интервала $(-\pi,\pi)$, субституцията $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ добива вида

$$x=2\operatorname{arctg} t. \tag{56}$$

Тогава

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{57}$$

Задача 80. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$ (r — константа, за която $0<r<1$);

б) $\displaystyle\int \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$ (r — константа, за която $0<r<1$);

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\sin x}$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$; е) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin x+2\cos x}$;

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$ (a, b и c — константи, за които $a^2\neq b^2+c^2$).

Задача 81. При $a^2+b^2\neq 0$ да се докаже тъждеството

$$\int \frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,dx = Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|,$$

където A и B са константи, и като приложение да се пресметне интегралът $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx$.

Задача 82. При $a^2+b^2\neq 0$ да се докаже тъждеството

$$\int \frac{\alpha\sin^2 x+2\beta\sin x\cos x+\gamma\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\,dx$$
$$= A\sin x+B\cos x+C\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x},$$

където A, B и C са константи, и като приложение да се пресметне интегралът $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}\,dx$.

Задача 83. При $a^2+b^2\neq 0$ и $n=2,3,\ldots$ да се докаже тъждеството

$$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+C\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

където A, B и C са константи, и като приложение да се пресметне интегралът $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}$.

Задача 84. При $a^2+b^2\neq 0$ и $n=2,3,\ldots$ да се докаже тъждеството

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+B\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$
$$+C\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}},$$

където A, B и C са константи, и като приложение да се пресметне интегралът $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+p\cos x)^2}$ $\quad(0<p<1)$.

Задача 85. При $0\neq a^2+b^2\neq c^2$ да се докаже тъждеството

$$\int\frac{\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma}{a\sin x+b\cos x+c}\,dx$$
$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c},$$

където A, B и C са константи, и като приложение да се пресметне интегралът $\displaystyle\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\,dx$.

Задача 86. Може ли да се използва субституцията (56) за пресмятане на интеграла (55) в интервала $(0,2\pi)$? Да се посочи примитивна на функцията $\dfrac{1}{2+\sin x}$:

а) в интервала $(0,2\pi)$;

б) върху цялата права.

Универсалният характер на субституцията (56) я прави неудобна в повечето конкретни случаи на интеграли от вида (55). Следващите три субституции, в случай че са приложими, обикновено водят до интеграли от по-прости рационални функции.

При

(58) $$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$$

може да се положи $\operatorname{tg}x=t$ или по-точно

(59) $$x=\operatorname{arctg}t.$$

Тогава

(60) $$\sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2},\qquad\cos^2x=\frac{1}{1+t^2},\qquad\sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2}.$$

При

(61) $$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$$

може да се положи $\cos x=t$ или по-точно

(62) $$x=\arccos t.$$

В този случай по същество няма нужда от субституция, а е достатъчно да се внесе $\sin x$ под диференциала и цялата останала подинтегрална функция да се представи като функция на $\cos x$. Аналогично се процедира при

(63) $$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

в който случай е целесъобразно да се внесе $\cos x$ под диференциала, а цялата останала подинтегрална функция да се представи като функция на $\sin x$.

Задача 87. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int\frac{\sin^2x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$; б) $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{\cos^4x+\sin^4x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\sin^4x+\cos^4x}\,dx$;

г) $\displaystyle\int\frac{dx}{a+b\operatorname{tg}x}$ (a и b — константи, за които $a^2+b^2\neq 0$);

д) $\displaystyle\int\frac{\sin^3x}{\cos^2x+1}\,dx$; е) $\displaystyle\int\frac{\sin^7x}{\cos^4x}\,dx$;

ж) $\displaystyle\int\frac{\cos^3x}{1+\sin^2x}\,dx$; з) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4x}\,dx$;

и) $\displaystyle\int\frac{dx}{A\cos^2x+2B\sin x\cos x+C\sin^2x}$

(A, B и C — константи, за които $AC\neq B^2$ и $C\neq 0$).

§ 17. Някои интеграли, които не се изразяват с елементарни функции

Задача 88. Ако степенният ред $f(x)=\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$ е сходящ в някой интервал Δ, редът $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu+1}x^{\nu+1}$ е също сходящ в Δ и

$$\int f(x)dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu+1}x^{\nu+1}.$$

Задача 89. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!\,(2\nu-1)} \qquad (x \in \mathbf{R});$

б) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\,dx = \ln|x| + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!\,2\nu} \qquad (x \neq 0).$

Понякога се полага

(64) $$\mathrm{si}(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu-1)!\,(2\nu-1)} x^{2\nu-1}$$

и

(65) $$\mathrm{ci}(x) = C + \ln|x| + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!\,2\nu} \qquad (x \neq 0),$$

където C е константата на Ойлер (вж. § 16, гл. IV). Дефинираните с (64) и (65) функции се наричат съответно *интегрален синус* и *интегрален косинус*. Те не са елементарни функции. При означенията (64) и (65) резултатите от зад. 89 се записват така:

(66) $$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \mathrm{si}(x), \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx = \mathrm{ci}(x).$$

Задача 90. Да се изразят чрез елементарни функции и чрез функциите si и ci интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x^3}\,dx;$ б) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x^n}\,dx \qquad (n \in \mathbf{N});$

в) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x^n}\,dx \qquad (n \in \mathbf{N});$

г) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{a+bx}\,dx \qquad$ (a и b — константи, $b \neq 0$);

д) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(1+x)^2}\,dx.$

Задача 91*. Да се докаже, че ако знаменателят на рационалната функция R има само реални нули, интегралите $\int R(x)\sin x\,dx$ и $\int R(x)\cos x\,dx$ се изразяват чрез елементарни функции и чрез трансцендентните функции si и ci.

Задача 92. Да се докаже, че:

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^{\nu}}{\nu!\,\nu} \qquad (0 < x \neq 1).$$

Понякога се полага

(67) $$\mathrm{li}(x) = C + \ln|\ln x| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^{\nu}}{\nu!\,\nu} \qquad (0 < x \neq 1),$$

където C е константата на Ойлер. Дефинираната с (67) функция се нарича *интегрален логаритъм*. Тя не е елементарна. При означението (67) резултатът от зад. 92 се записва така:

(68) $$\int \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}(x).$$

Задача 93. Да се изразят чрез елементарни функции и чрез функцията li интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{x^a\,dx}{\ln x};$ б) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{x};$

в) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{ax+b}$ (a и b — константи, $a \neq 0$); г) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{x^n}.$

Задача 94*. Да се докаже, че ако знаменателят на рационалната функция R има само реални нули, интегралът $\int R(x)e^x\,dx$ се изразява чрез елементарни функции и чрез трансцендентната функция li.

Задача 95. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{xe^x\,dx}{(x+1)^2};$ б) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-2x-2}{(x^2+x)^2}e^x\,dx.$

Десета глава

Риманов интеграл

§ 1. Интегрируемост в риманов смисъл

Нека фунцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ е ограничена. За произволно подразделяне π на интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали с помощта на точките

(1) $$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad (n \in \mathbf{N})$$

се полага

(2) $$m_\nu = \inf\left\{ f(x) \mid x \in [x_{\nu-1}, x_\nu] \right\},\ M_\nu = \sup\left\{ f(x) \mid x \in [x_{\nu-1}, x_\nu] \right\}$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$,

(3) $$s_\pi(f) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(x_\nu - x_{\nu-1})$$

и

(4) $$S_\pi(f) = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Сумите (3) и (4) се наричат съответно *малка* и *голяма сума на Дарбу* на функцията f, съответстващи на подразделянето π на интервала $[a, b]$ на подинтервали, и понякога се означават накратко с s_π и S_π или даже с s и S. Доказва се, че ако π_1 и π_2 са произволни подразделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали и точките на π_1 принадлежат на π_2, в сила са неравенствата

(5) $$s_{\pi_1} \leqq s_{\pi_2} \leqq S_{\pi_2} \leqq S_{\pi_1}.$$

От (5) следва, че ако π_1 и π_2 са произволни подразделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали, в сила е и неравенството

(6) $$s_{\pi_1} \leqq S_{\pi_2}.$$

От (6), разбира се, следва, че множеството на малките суми s_π, съответстващи на произволни подразделяния π на интервала $[a, b]$ на подинтервали, е ограничено отгоре, а също така, че множеството на всички големи суми на Дарбу е ограничено отдолу. Нека Π е множеството на всички подразделяния на интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали. По дефиниция се полага

(7) $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{ s_\pi \mid \pi \in \Pi \right\}$$

и

(8) $$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{ S_\pi \mid \pi \in \Pi \right\}.$$

Числата (7) и (8) се наричат съответно *долен* и *горен интеграл на Дарбу на функцията f в интервала $[a, b]$*.

От тази дефиниция и от (6) следва неравенството

(9) $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Задача 1. Нека функциите $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ са ограничени. Тогава:

а) ако $f(x)$ и $g(x)$ се различават само в краен брой точки x от интервала $[a, b]$, в сила са равенствата

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx;$$

б) ако е изпълнено неравенството $f(x) \leqq g(x)$ за всяко x от интервала $[a, b]$, в сила са неравенствата

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} g(x)\,dx;$$

в) ако е изпълнено неравенството $f(x) \leqq g(x)$ за стойности на x от едно гъсто подмножество на интервала $[a, b]$, в сила е и неравенството

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Задача 2. В произволен интервал $[a, b]$ $(a < b)$ да се намерят горните и долните интеграли на Дарбу на следните функции:

а) на произволна константа c;

б) на функцията x;
в) на функцията x^2;
г) на функцията x^3;
д) на функцията $D(x)$ на Дирихле (зад. 12, гл. VI);
е) на функцията $\sigma(x)$ от зад. 16 б), гл. VI.

Една ограничена функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ се нарича *интегрируема в риманов смисъл в интервала* $[a, b]$ или накратко интегрируема, когато е изпълнено равенството

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx. \tag{10}$$

Общата стойност на горния и долния интеграл на функцията f се нарича *риманов* или *определен интеграл* на тази функция и се означава

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{11}$$

От (5)–(7) и дефиницията на риманов интеграл следва неравенството

$$s_\pi \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq S_\pi \qquad (\pi \in \Pi). \tag{12}$$

Задача 3°. Да се определи кои от функциите от зад. 2 са интегрируеми в риманов смисъл и да се пресметнат римановите им интеграли.

Задача 4. Да се докаже, че една ограничена функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ е интегрируема в риманов смисъл в интервала $[a, b]$, когато съществува единствено число I, за което са изпълнени неравенствата $s_\pi \leqq I \leqq S_\pi$ $(\pi \in \Pi)$. Тогава

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Задача 5*. За да бъде една ограничена функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ интегрируема, е необходимо и достатъчно за всеки две числа $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ да съществува такова подразделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали, че сборът от дължините на онези от тях, в които осцилацията на f е по-голяма от ε, да е по-малък от η.

Задача 6. Да се докаже, че функцията $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq 0 \text{ и } \sin\dfrac{\pi}{x} > 0, \\ -1 & \text{при } x \neq 0 \text{ и } \sin\dfrac{\pi}{x} < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \text{ и при } x \neq 0 \text{ със } \sin\dfrac{\pi}{x} = 0 \end{cases}$$

е интегрируема в интервала $[0, 1]$.

Задача 7°. Нека функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ е интегрируема. Тогава всяка функция $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, за която $f(x)$ и $g(x)$ се различават само в краен брой точки от интервала $[a, b]$, е също интегрируема и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 8°. Нека функциите $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ са интегрируеми. Тогава:

а) ако е изпълнено неравенството $f(x) \leqq g(x)$ за стойности на x от едно гъсто подмножество на интервала $[a, b]$, в сила е и неравенството

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx;$$

б) Ако е изпълнено равенството $f(x) = g(x)$ за стойности на x от едно гъсто подмножество на интервала $[a, b]$, в сила е и равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 9°. Да се посочи пример на интегрируема функция $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ и на функция $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$, за които равенството $f(x) = g(x)$ не е в сила само за изброимо много стойности на x от интервала $[0, 1]$, но функцията g не е интегрируема.

Задача 10*. При $|r| \neq 1$ да се пресметне интегралът

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx \qquad \text{(Пoaсoн).}$$

Ако Δ е произволен интервал, в следващите няколко задачи дължината на Δ ще означаваме с $\mu(\Delta)$.

Задача 11°. Нека Δ и $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ са ограничени интервали. Да се докаже, че:

а) ако $\Delta \subset \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu$, то $\mu(\Delta) \leqq \sum\limits_{\nu=1}^{n} \mu(\Delta_\nu)$;

б) ако $\bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu \subset \Delta$ и интервалите Δ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ два по два нямат общи вътрешни точки, то $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \mu(\Delta_\nu) \leqq \mu(\Delta)$.

Задача 12. Нека $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$ са ограничени интервали, за които $\bigcup\limits_{\kappa=1}^{k} \Delta_\kappa \subset \bigcup\limits_{\lambda=1}^{l} \delta_\lambda$, и интервалите Δ_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, k)$ два по два нямат общи вътрешни точки. Да се докаже, че

$$\sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta_\kappa) \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} \mu(\delta_\lambda).$$

Задача 13*. Нека $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ са краен брой ограничени интервали, които два по два нямат общи вътрешни точки, а $\left\{\delta_\lambda\right\}_{\lambda=1}^{\infty}$ е редица от ограничени интервали, за които $\bigcup\limits_{\kappa=1}^{k} \Delta_\kappa \subset \bigcup\limits_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda$. Тогава $\sum\limits_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta_\kappa) \leqq \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda)$.

Едно множество A от реални числа се нарича *пренебрежимо*, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува редица $\left\{\delta_\lambda\right\}_{\lambda=1}^{\infty}$ от ограничени отворени интервали със следните две свойства:

$$A \subset \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda, \tag{13}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda) \leqq \varepsilon. \tag{14}$$

Задача 14. Да се докаже, че:

а) подмножество на пренебрежимо множество е пренебрежимо;

б) едноточковите множества са пренебрежими;

в) обединението на изброимо много пренебрежими множества е пренебрежимо;

г) неизродените интервали върху реалната права не са пренебрежими.

Задача 15. Ако A е такова множество от реални числа, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува редица $\left\{\delta_\lambda\right\}_{\lambda=1}^{\infty}$ от ограничени, не непременно отворени интервали със свойствата (13) и (14), множеството A е пренебрежимо.

Задача 16. Ако за някое множество A от реални числа съществува редица $\left\{\delta_\lambda\right\}_{\lambda=1}^{\infty}$ от ограничени интервали, за които редът $\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda)$ е сходящ, и за всяка точка a на A е в сила $a \in \delta_\lambda$ за безбройно много индекси λ, множеството A е пренебрежимо.

Задача 17*. За да бъде една ограничена функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ интегрируема в риманов смисъл, е необходимо и достатъчно множеството от точките на прекъсване на f да бъде пренебрежимо (Л ь о б е г).

Задача 18. Да се докаже, че:

а) ограничените монотонни функции са интегрируеми;

б) ако функциите f и g са интегрируеми в интервала $[a, b]$, то функциите $f+g$, $f-g$, и $f.g$ са интегрируеми в $[a, b]$; ако частното $\dfrac{f}{g}$ е дефинирано и ограничено в $[a, b]$, то също е интегрируемо.

§ 2. Основна теорема на интегралното смятане

Нека функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е дефинирана в интервал Δ и е интегрируема във всеки негов затворен и ограничен подинтервал. Целесъобразно е на символа $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ $(a, b \in \Delta)$ да се придаде смисъл и когато $b \leqq a$. Това става посредством дефиниционните равенства

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad (a \in \Delta), \tag{15}$$

(16) $$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt \qquad (a,\ b \in \Delta,\ b < a).$$

При тези дефиниции е в сила равенството

(17) $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

за произволни точки a, b и c от Δ (*адитивно свойство на интеграла*).

Следващата теорема на Нютон и Лайбниц се нарича *основна теорема на интегралното смятане*, тъй като ефективното пресмятане на определени интеграли се извършва главно чрез нея.

Нека функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е дефинирана в интервала Δ и интегрируема във всеки ограничен и затворен подинтервал на Δ и нека $a \in \Delta$. Тогава функцията $F : \Delta \to \mathbf{R}$, дефинирана с

(18) $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in \Delta),$$

е диференцируема във всяка точка ξ на Δ, в която f е непрекъсната, и е в сила равенството

(19) $$F'(\xi) = f(\xi).$$

Задача 19. Всяка функция, която е непрекъсната в интервал, притежава примитивна в този интервал.

Задача 20. Нека функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в интервала Δ, а функциите $\varphi : S \to \Delta$, $\psi : S \to \Delta$ $(S \subset \mathbf{R})$ са диференцируеми. Да се докаже, че функцията $\Phi : S \to \mathbf{R}$, дефинирана със:

а) $\Phi(s) = \displaystyle\int_a^{\psi(s)} f(t)\,dt \quad (a \in \Delta)$; б) $\Phi(s) = \displaystyle\int_{\varphi(s)}^{a} f(t)\,dt \quad (a \in \Delta)$;

в) $\Phi(s) = \displaystyle\int_{\varphi(s)}^{\psi(s)} f(t)\,dt$,

е диференцируема, и производната ѝ да се изрази чрез функцията f и производните на функциите φ и ψ.

Задача 21°. Да се намерят производните на функциите:

а) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt$; б) $F(x) = \displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \frac{\cos t}{t}\,dt$;

в) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{e^x} \frac{dt}{\ln t}$; г) $F(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{1} \frac{e^t}{t}\,dt$.

Следващите елементарни свойства на определените интеграли се използват често.

Ако функцията f е интегрируема в интервала $[a, b]$ и λ е константа, функцията λf е също интегрируема и

(20) $$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ако функциите f и g са интегрируеми в интервала $[a, b]$, функцията $f + g$ е също интегрируема и

(21) $$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ако функцията f е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и F е една нейна примитивна, то

(22) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Удобно е разликата $F(b) - F(a)$ да се означава с $F(x)\Big|_a^b$. По този начин пресмятането на един определен интеграл схематично се представя така:

(23) $$\int_a^b f(x)\,dx = \cdots = F(x)\Big|_a^b.$$

Многоточието означава, че се пресмята неопределеният интеграл $\int f(x)\,dx$ (като по време на пресмятането продължаваме да пишем долната и горната интеграционна граница a и b).

Задача 22°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; в) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$;

г) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; д) $\displaystyle\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; е) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx$;

ж) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,dx$; з) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$; и) $\displaystyle\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x}$.

Ако функцията f е интегрируема в интервала $[a, b]$, а функцията g е диференцируема в този интервал и производната ѝ е интегрируема, целесъобразно е символът $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ да се дефинира по следния начин:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \tag{24}$$

Означението (24) дава възможност свободно да се прилага схемата (23) и когато неопределеният интеграл трябва да се пресмята чрез внасяне под диференциала.

Задача 23. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{b-x}$ $(0 < a < b)$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$; в) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

г) $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$; д) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$; е) $\displaystyle\int_0^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}$ $(a > 0)$;

ж) $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; з) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$; и) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

й) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$; к) $\displaystyle\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$; л) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$;

м) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x\,dx$; н) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$;

о) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$; п) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$;

р) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}$ $(0 < \alpha,\ \beta < 1)$.

Задача 24. Да се докаже, че при $m,\ n \in \mathbf{I}$:

а) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \pi & \text{при } m = n; \end{cases}$

б) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \pi & \text{при } m = n \neq 0; \end{cases}$

в) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$

(*ортогоналност на тригонометричната система*).

Задача 25. Нека a_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ и b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ са произволни константи, а функцията $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е дефинирана със

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Да се докаже, че

а) $a_\nu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos \nu x\,dx$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$;

б) $b_\nu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin \nu x\,dx$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Задача 26*. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x}\,dx \quad (n = 0, 1, \ldots)$ (Дирихле);

б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx \quad (n = 0, 1, \ldots)$ (Феер).

§ 3. Интегриране по части при определените интеграли

Ако функциите f и g са диференцируеми в интервала $[a, b]$ и производните им са непрекъснати, в сила е равенството

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x), \tag{25}$$

което се нарича *правило за интегриране по части при определените интеграли.*

Задача 27. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$;

в) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; г) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$;

д) $\displaystyle\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$; е) $\displaystyle\int_0^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$;

ж) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$; з) $\displaystyle\int_1^{e} \ln^3 x\,dx$.

Задача 28. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \quad (n \in \mathbf{N})$; б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \quad (n \in \mathbf{N})$;

в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx \quad (m, n \in \mathbf{N})$.

Задача 29*. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x\cos(\alpha+2)x\,dx = 0 \quad (\alpha > 0)$;

б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x\sin(\alpha+2)x\,dx = \frac{1}{\alpha+1} \quad (\alpha > 0)$;

в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cos(\alpha+2)x\,dx = -\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha+1} \quad (\alpha > 0)$;

г) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\sin(\alpha+2)x\,dx = \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha+1} \quad (\alpha > 0)$.

Задача 30*. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin nx\,dx \quad (n \in \mathbf{N})$;

б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx\,dx \quad (n \in \mathbf{N})$.

Задача 31. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;

б) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha(\ln x)^n\,dx \quad (\alpha > 0,\ n = 0, 1, 2, \dots);$

в) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx \quad (m,\ n = 0, 1, 2, \dots).$

Задача 32. Нека функциите f и g са $n+1$ $(n = 0, 1, \dots)$ пъти диференцируеми в интервала $[a, b]$, а $f^{(n+1)}$ и $g^{(n+1)}$ са непрекъснати в този интервал. Да се докаже, че:

$$\int_a^b f(x)\,dg^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu f^{(\nu)}(x)g^{(n-\nu)}(x)\Big|_a^b$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_a^b g(x)\,df^{(n)}(x).$$

Задача 33. Нека P_n е n-тият полином на Льожандър $(n = 0, 1, \dots)$. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\int_{-1}^1 P(x)P_n(x)\,dx = 0,$

където P е произволен полином с $\deg P < n$;

б) $\displaystyle\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \dfrac{2.4^n(n!)^2}{2n+1} & \text{при } m = n \end{cases}$

(*ортогоналност на полиномите на Льожандър*).

Задача 34. Нека a_ν $(\nu = 0, 1, \dots, n)$ са произволни константи, а функцията $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е дефинирана със

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(x).$$

Да се докаже, че

$$a_\nu = \frac{2\nu+1}{2.4^\nu(\nu!)^2}\int_{-1}^1 \varphi(x)P_\nu(x)\,dx.$$

Задача 35*. Нека функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е $n+1$ пъти диференцируема в интервала Δ $(n = 0, 1, \dots)$, $f^{(n+1)}$ е непрекъсната в Δ, а ξ и x са произволни точки от Δ. Тогава

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}(x-\xi)^\nu + \frac{1}{n!}\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

(*формула на Тейлър с интегрална форма на остатъка*).

§ 4. Интегриране чрез субституции при определените интеграли

Вече видяхме, че пресмятането на определени интеграли често може да се сведе до пресмятане на неопределени интеграли. При пресмятането на последните обаче понякога е удобно да се направи една или друга субституция. Читателят би могъл да направи тази субституция, да пресметне съответния неопределен интеграл, да се върне към старата променлива и след това отклонение да завърши пресмятанията по схемата (23). Пресмятанията обаче могат да се направят и малко по-сръчно, като се използува следната теорема за смяна на променливите при определените интеграли.

Нека функцията $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е непрекъсната в интервала Δ, $a \in \Delta$, $b \in \Delta$, а функцията $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Delta$ е диференцируема, притежава непрекъсната производна и удовлетворява условията

(26) $$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Тогава

(27) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Да отбележим изрично, че за разлика от теоремата за смяна на променливите при неопределените интеграли тук не се предполага нито обратимост на функцията φ, нито пък (в случай че тя е обратима) диференцируемост на обратната функция. Няма никаква нужда също така от предположението $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$, нито пък да са в сила неравенствата $a < b$ или $\alpha < \beta$. Нещо повече, формулата (27) на пръв поглед даже изглежда малко парадоксална, защото в лявата ѝ страна фигурират само стойностите на f в интервала $[a, b]$, а в дясната могат да фигурират и стойности на f за стойности на аргумента от $\Delta \setminus [a, b]$.

На практика смяната на променливите при определените интеграли се извършва така: Търсим подходяща субституция

(28) $$x = \varphi(t)$$

за пресмятане на неопределения интеграл $\int f(x)\,dx$ (такива субституции бяха посочени в гл. IX). В (28) заместваме x със „старите" интеграционни

граници a и b и от така получените уравнения намираме „новите“ интеграционни граници, т. е. числата α и β, удовлетворяващи (26). От (28) след диференциране намираме и равенството

$$dx = \varphi'(t)\,dt. \tag{29}$$

Сега в интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ заместваме x и dx с равните им от (28) и (29), сменяме старите граници с новите и получаваме (27); по-нататък пресмятанията продължават по схемата (23), без да има нужда да се връщаме към старата променлива x.

Задача 36. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$; в) $\displaystyle\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$;

г) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$; д) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$; е) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx$;

ж) $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; з) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$; и) $\displaystyle\int\limits_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$;

й) $\displaystyle\int\limits_0^a (a^2-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}\,dx$ $(a>0,\ n\in\mathbf{N})$;

к) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$ $(a.b\neq 0,\ |a|\neq|b|)$.

Ако функцията $f:\Delta\to\mathbf{R}$ е интегрируема във всеки затворен подинтервал на интервала Δ и $a\in\Delta$, функцията $F:\Delta\to\mathbf{R}$, дефинирана със

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt \quad (x\in\Delta), \tag{18}$$

е непрекъсната в Δ. Ето защо в сила е равенството

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b}\int\limits_a^x f(t)\,dt \quad (b\in\Delta). \tag{30}$$

Задача 37. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$ $(0<r<1)$;

б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$ $(0<r<1)$;

в) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$ $(0<b<a)$; г) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a+b\sin x}$ $(0<b<a)$;

д) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

Задача 38. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$ $(a>0,\ b>0)$.

Задача 39. Нека функцията $f:[-a,\,a]\to\mathbf{R}$ е непрекъсната. Да се докаже, че:

а) ако f е нечетна, в сила е равенството

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0;$$

б) ако f е четна, в сила е равенството

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

Запазват ли тези твърдения валидността си при по-слабото предположение за интегрируемост на f в $[-a,\,a]$?

Задача 40°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ $(a > 0,\ b > 0)$; б) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sin^8 x + \cos^8 x}$.

Задача 41. Да се докаже, че

$$\int_0^a e^{ax}e^{-x^2}\,dx = 2e^{\frac{a^2}{4}}\int_0^{\frac{a}{2}} e^{-x^2}\,dx \quad (a \text{ — константа}).$$

Задача 42. Нека функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е непрекъсната и периодична с период T. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$; б) $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$.

Вярно ли е твърдението при по-слабото предположение за интегрируемост на f във всеки затворен интервал?

Задача 43°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^{k\pi} \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}\,dx$ $(k \in \mathbf{I})$;

б) $\displaystyle\int_0^{k\pi} \frac{dx}{a + b\cos x}$ $(0 < b < a,\ k \in \mathbf{I})$.

Задача 44. Да се докажат равенствата:

а) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$

за произволна непрекъсната функция $f : [0, a] \to \mathbf{R}$;

б) $\displaystyle\int_0^a x f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$,

$$\int_0^a x^3 f(x)\,dx = \frac{3}{2}a\int_0^a x^2 f(x)\,dx - \frac{1}{4}a^3\int_0^a f(x)\,dx,$$

. . . . . .

за произволна непрекъсната функция $f : [0, a] \to \mathbf{R}$ със свойството $f(a - x) = f(x)$ за $x \in [0, a]$;

в) $\displaystyle\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

за произволна непрекъсната функция $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$.

Задача 45°. Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Задача 46*. Нека $0 < b < a$ и $a_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $b_1 = \sqrt{ab}$. Да се докаже равенството

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a_1^2\cos^2 x + b_1^2\sin^2 x}}$$

(Г а у с).

§ 5. Неравенства и определени интеграли

Задача 47°. Нека функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е интегрируема и приема неотрицателни стойности в едно гъсто подмножество на $[a, b]$. Да се докаже, че:

а) ако $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, то $f(\xi) = 0$ за всяка точка ξ от $[a, b]$, в която f е непрекъсната;

б) ако съществува точка ξ от $[a, b]$, в която f е непрекъсната и $f(\xi) > 0$, то $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Задача 48°. Ако функциите $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ са интегрируеми, удовлетворяват неравенството $f(x) \leqq g(x)$ за стойности на x от едно гъсто подмножество на $[a, b]$ и съществува точка

ξ от $[a, b]$, в която f и g са непрекъснати и $f(\xi) < g(\xi)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 49°. Да се докажат неравенствата:

а) $1 < \int_0^1 e^{x^2}\,dx < e$; б) $2^{-q} < \int_0^1 \frac{dx}{(x^p+1)^q} < 1 \quad (p, q > 0)$;

в) $1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{\pi}{2}$; г) $\frac{43}{30} < \int_0^1 e^{x^2}\,dx < \frac{43}{30} + \frac{e-1}{10}$;

д) $\frac{9}{10} < \int_0^1 \cos x^2\,dx < \frac{9}{10} + \frac{1}{216}$.

Задача 50*. Да се докаже, че

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

(У о л и с).

Задача 51*. Да се докаже, че за всяко естествено n съществува число θ със свойството $0 < \theta < 1$, за което

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}\,e^{\frac{\theta}{12n}}$$

(С т и р л и н г).

Нека функциите $f:[a, b] \to \Delta$, където Δ е интервал и $\varphi:[a, b] \to [0, \infty)$ са интегрируеми, като при това

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0. \tag{31}$$

Тогава

$$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \in \Delta. \tag{32}$$

Ако предположим допълнително, че f е непрекъсната в $[a, b]$, съществува точка ξ от $[a, b]$, за която

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{33}$$

Ако в (33) положим $\varphi(x) = 1$, се получава

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi). \tag{34}$$

Равенствата (32) — (34) се наричат теорема за средните стойности в интегралното смятане или по-точно първа теорема за средните стойности. Числото

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{35}$$

се нарича *средна стойност* на функцията f в интервала $[a, b]$.

Ако функцията $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ е интегрируема, в сила е неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{36}$$

Задача 52°. Ако функцията $f:\Delta \to \mathbf{R}$ е интегрируема във всеки затворен подинтервал на интервала Δ, $F \subset \mathbf{R}$ е затворено множество и за всеки две различни точки a и b от Δ средната стойност (35) на f в интервала $[a, b]$ принадлежи на F, то $f(\xi) \in F$ за всяка точка ξ от Δ, в която f е непрекъсната.

Задача 53. От формулата на Тейлър с интегрална форма на остатъка (зад. 35) да се изведе формулата на Тейлър с остатък във формата на Лагранж (зад. 170, гл. VIII).

Задача 54*. Нека функциите $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ и $g:[a, b] \to \mathbf{R}$ са интегрируеми, а p и q са положителни числа, за които $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогава

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

(Х ь о л д е р).

Задача 55*. Нека функциите $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ и $g:[a, b] \to \mathbf{R}$ са интегрируеми, а p е произволно число, $p \geqq 1$. Тогава

$$\left\{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

(Минковски).

Задача 56. Нека функцията $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ притежава непрекъсната първа производна в $[0, 1]$. Да се докажат неравенствата:

а) $(f(1)-f(0))^2 \leqq \int_0^1 |f'(x)|^2\,dx$;

б) $|f(x)| \leqq \int_0^1 |f'(x)|\,dx + \int_0^1 |f(x)|\,dx$ за всяко x от $[0, 1]$;

в) $|f(x)|^p \leqq 2^{p-1}\left(\int_0^1 |f'(x)|^p\,dx + \int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)$

$(p > 1)$ за всяко x от интервала $[0, 1]$.

Задача 57*. Нека функцията $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ притежава непрекъсната втора производна в интервала $[a, b]$ и h е такова число, че $0 < h < \frac{b-a}{2}$. Да се докаже неравенството

$$\int_a^b |f'(x)|^p\,dx \leqq 2^p h^{p-1}(b-a)\int_a^b |f''(x)|^p\,dx + \frac{2^{2p}}{h^p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx.$$

Задача 58*. Ако функцията $\varphi:\Delta \to \mathbf{R}$ е непрекъсната и изпъкнала в интервала Δ, а функцията $f:[a, b] \to \Delta$ $(a < b)$ е интегрируема, то

а) $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,dx$;

б) $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}\,dx$;

в) $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx \quad (a, b \in \Delta)$.

Задача 59*. Нека функцията $\varphi:\Delta \to \mathbf{R}$ е два пъти диференцируема в интервала Δ, втората ѝ производна е непрекъсната и е изпълнено неравенството в) от зад. 58 за всеки две точки a и b от Δ, за които $a < b$. Тогава функцията φ е изпъкнала в Δ.

Задача 60*. Ако функцията $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ е монотонна и притежава непрекъсната първа производна, а функцията $g:[a, b] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната, съществува точка ξ от $[a, b]$, за която

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

(*втора теорема за средните стойности*).

Задача 61. Да се докажат неравенствата:

а) $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \qquad (a > 0,\ b > 0)$;

б) $\left|\int_0^a \frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx\right| \leqq 2\alpha + \frac{2}{a} \qquad (\alpha > 0,\ a > 0)$;

в) $\left|\int_a^b e^{-x}\sin\alpha x\,dx\right| \leqq \frac{2}{\alpha}(e^{-a}+e^{-b}) \qquad (\alpha > 0)$;

г) $\left|\int_a^b e^{x}\cos\alpha x\,dx\right| \leqq \frac{2}{\alpha}(e^{a}+e^{b}) \qquad (\alpha > 0)$.

Задача 62*. Да се докаже, че числото e е трансцендентно (Ермит).

§ 6. Пресмятане на граници чрез интеграли

Нека функцията $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ интегрируема. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че за всеки начин на подразделяне

(37) $$\pi: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

на интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали с

(38) $$x_\nu - x_{\nu-1} < \delta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

и при всеки избор на точките

(39) $$\xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

да е в сила

(40) $$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

На практика най-често се използва следното следствие от това твърдение. Нека функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегрируема и $\xi_{n,\nu}$ са числа, за които

(41) $$\xi_{n,\nu} \in \left[a + \frac{\nu-1}{n}(b-a),\ a + \frac{\nu}{n}(b-a)\right] \qquad (n \in \mathbb{N},\ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогава

(42) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_{n,\nu}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Числата $\xi_{n,\nu}$ в (41) обикновено се избират да съвпадат с някой от краищата на съответния интервал.

Задача 63. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \left(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0)$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1+\dfrac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{1}{2+\cos\frac{\pi}{n}} + \dfrac{1}{2+\cos\frac{2\pi}{n}} + \cdots + \dfrac{1}{2+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n+2)(n+3)} + \cdots + \sqrt{(n+n)(n+n+1)}\right)$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{2}}{n+1} + \dfrac{2\sqrt[n]{2^2}}{2n+1} + \cdots + \dfrac{n\sqrt[n]{2^n}}{n.n+1}\right)$.

§ 7. Интегриране на редици и редове от функции

Нека функциите

(43) $$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

са интегрируеми в интервала $[a, b]$ и редицата (43) е равномерно сходяща в този интервал. Тогава граничната функция е интегрируема и

(44) $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Наред с тази теорема понякога е удобно да се използва и следното твърдение:

Ако функциите (43) са интегрируеми в интервала $[a, b]$, редицата (43) е сходяща в интервала $[a, b]$, граничната функция на тази редица е интегрируема и съществува константа C, за която

(45) $$|f_n(x)| \leqq C$$

за всяко естествено n и за всяко x от $[a, b]$, в сила е (44).

Читателят лесно ще съобрази как изглеждат аналозите на тези теореми за редове от функции.

Задача 64. Да се посочи пример на редица (43) от непрекъснати в интервала $[0, 1]$ функции, която е сходяща навсякъде в този интервал, граничната функция е непрекъсната и (въпреки това) (44) не е налице.

Задача 65. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$;

в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$;

г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\,dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)^2}$;

д) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right\}$ $(0<k<1)$;

е) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$

$(0 < k < 1)$.

Интегралите от зад. 65 д) и е) се наричат *пълни елиптични интеграли*. От зад. 115, гл. IV следва, че ако a и b са положителни числа с $a \geqq b$, редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, дефинирани с $a_1 = a$, $b_1 = b$ и $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ са сходящи и имат обща граница. Тя се нарича средно *аритмитико-геометрично* и се бележи с $\mu(a,b)$. От същата задача следва, че $a \geqq \mu(a,b) \geqq b$.

Задача 66*. Да се докаже,че:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2\mu(a,b)}$ $(a \geqq b > 0)$ (Г а у с);

б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+k_n)$ $(0 < k < 1)$,

където редицата $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ се дефинира с

$$k_n = \frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и $k_0 = k$ (Л а н д е н).

Задача 67. Да се докаже, че:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$; б) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}$;

в) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi \arcsin a, \quad |a| < 1.$

§ 8. Дължини на равнинни дъги

Ако функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ е диференцируема и производната ѝ е непрекъсната, кривата с уравнение

(46) $$y = f(x) \qquad (x \in [a, b])$$

има дължина l, която се дава с формулата

(47) $$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Задача 68. Да се намерят дължините на кривите с уравнения:

а) $y = x^{\frac{3}{2}}$ (*семикубична парабола*) в интервала $[0, 4]$;

б) $y = \dfrac{x^2}{2p}$ $(p > 0)$ (*парабола*) в интервала $[0, p]$;

в) $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(a > 0)$ (*верижка*) в интервала $[0, a]$.

Ако функциите $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ са диференцируеми и производните им са непрекъснати, кривата с параметрични уравнения

(48) $$x = f(t), \quad y = g(t) \qquad (t \in [a, b])$$

има дължина l, която се дава с формулата

(49) $$l = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,dt.$$

Задача 69. Да се намерят дължините на кривите с параметрични уравнения:

а) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $(a > 0)$ (*окръжност*) в интервала $[0, 2\pi]$;

б) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0)$ (*астроида*) в интервала $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

в) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ (*циклоида*) в интервала $[0, 2\pi]$;

г) $x = a(t \sin t + \cos t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ $(a > 0)$ (*еволвента на окръжността*) в интервала $[0, 2\pi]$;

д) $x = \mathrm{ci}(t)$, $y = \mathrm{si}(t)$ в интервала $[1, 2]$;

е) $x = a \sin t$, $y = b \cos t$ $(0 < b < a)$ (*елипса*) в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ако функцията $f: [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ $(\alpha < \beta)$ е диференцируема и производната ѝ е непрекъсната, кривата с полярно уравнение

(50) $$\rho = f(\theta) \qquad (\theta \in [\alpha, \beta])$$

има дължина l, която се дава с формулата

(51) $$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\theta) - f'^2(\theta)}\, d\theta.$$

Задача 70. Да се намерят дължините на кривите с полярни уравнения:

а) $\rho = a\theta$ $(a > 0)$ (*спирала на Архимед*) в интервала $[0, 2\pi]$;

б) $\rho = ae^{m\theta}$ $(a > 0, m > 0)$ (*логаритмична спирала*) в интервала $[0, 2\pi]$;

в) $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$ (*кардиоида*) в интервала $[0, \pi]$;

г) $\rho = a \cos\theta + b$ $(a > 0, b > 0)$ (*охлюв на Паскал*) в интервала $[0, \pi]$.

§ 9. Лица на равнинни фигури

Нека функциите $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ и $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ са непрекъснати и удовлетворяват неравенството

(52) $$f(x) \leqq g(x)$$

за всяко x от $[a, b]$. Множеството T на всички точки (x, y) от равнината, за които са изпълнени неравенствата

(53) $$\begin{cases} a \leqq x \leqq b, \\ f(x) \leqq y \leqq g(x), \end{cases}$$

се нарича криволинеен трапец, определен от функциите f и g. Лицето $\mu(T)$ на криволинейния трапец (53) се дава с формулата

(54) $$\mu(T) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

Задача 71. Да се намерят лицата на фигурите, определени в декартови координати от неравенствата:

а) $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq x^2$; б) $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \sin x$;

в) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$, $\sin x \leqq y \leqq \cos x$.

Задача 72. Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите:

а) $ax = y^2$, $ay = x^2$ $(a > 0)$; б) $y = x^2$, $x + y = 2$;

в) $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$; г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$;

д) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ $(a > 0)$.

Нека функциите $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ и $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ са непрекъснати и диференцируеми с изключение на краен брой точки и производните им са непрекъснати и ограничени. Нека (48) е *проста затворена крива*, т. е.

(55) $$f(a) = f(b), \quad g(a) = g(b),$$

и от $f(t') = f(t'')$, $g(t') = g(t'')$ $(t', t'' \in (a, b))$ следва $t' = t''$. Тогава лицето на частта T от равнината, заградена от кривата (48), се дава с формулата

(56) $$\mu(T) = \frac{1}{2}\left|\int_a^b \big(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\big)\, dt\right|.$$

Задача 73. Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите:

а) от *хипоциклоидата* $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(-2\sin t + \sin 2t)$ $(a > 0, t \in [0, 2\pi])$;

б) от *еволютата на елипсата* $x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$ $(a > 0, b > 0, a > b, t \in [0, 2\pi])$;

в) от *астроидата* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0, t \in [0, 2\pi])$;

г) от *циклоидата* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0, t \in [0, 2\pi])$ и правата $y = 0$.

За произволна непрекъсната функция $f: [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$, $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$, под сектор, определен от функцията f, се разбира множеството S на всички точки от равнината с полярни координати (ρ, θ), за които са изпълнени неравенствата

(57) $$\begin{cases} \alpha \leqq \theta \leqq \beta, \\ 0 \leqq \rho \leqq f(\theta). \end{cases}$$

Лицето $\mu(S)$ на сектора (57) се дава с формулата

$$\mu(S) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,d\theta. \tag{58}$$

Задача 74. Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите с полярни уравнения:

а) $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ $(a > 0)$ (*лемниската на Я. Бернули*);

б) $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a > 0)$ (*кардиоида*);

в) $\rho = a\sin 3\theta$ $(a > 0)$ (*трилистник*);

г) $\rho = a\cos\theta + b$ $(0 < a < b)$ (*охлюв на Паскал*).

Задача 75. Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите:

а) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(a > 0)$ (*лемниската на Я. Бернули*);

б) $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$ (*Декартов лист*);

в) $(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ $(a > 0,\ b > 0)$; (*подера на елипсата*).

Иван Проданов
Николай Хаджииванов
Иван Чобанов

Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане

Функции на една променлива

Второ стереотипно издание

София, 1992

РЕШЕНИЯ

Първа глава

1. Две множества A и B се наричат равни и се пише $A = B$, когато A и B са тъждествени, т. е. представляват един и същ обект. Това означава, че всеки елемент на A е елемент на B и обратно.

4. Множеството $\mathbf{I}$ на целите числа.

5. Нека $x \in \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} M(s_\nu)$. Това означава, че за някое μ $(1 \leqq \mu \leqq n)$ е в сила $x \in M(s_\mu)$, т. е. x не се дели на s_μ. Тогава x не се дели и на най-малкото общо кратно $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$, т. е. $x \in M(\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle)$. С това е доказано включването

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} M(s_\nu) \subset M(\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle). \tag{1}$$

Нека сега, обратно, $y \in M(\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle)$. Това означава, че y не се дели на $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ и следователно y не се дели поне на едно от числата $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Тогава съществува такова μ $(1 \leqq \mu \leqq n)$, че y не се дели на s_μ, т. е. $y \in M(s_\mu)$, поради което $y \in \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} M(s_\nu)$. По такъв начин е доказано и включването

$$M(\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle) \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} M(s_\nu). \tag{2}$$

Сега твърдението следва от (1), (2) и зад. 1.

7. Множеството на целите числа, които се делят на 12.

8. Нека $x \in \bigcap_{\nu=1}^{n} M[s_\nu]$. Това означава, че $x \in M[s_\nu]$ за всяко $\nu = 1, 2, \ldots, n$, т. е. x се дели на всяко s_ν. Тогава x се дели и на $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$, т. е. $x \in M[\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle]$. С това е доказано включването

$$\bigcap_{\nu=1}^{n} M[s_\nu] \subset M[\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle]. \tag{1}$$

Нека, обратно, $y \in M[\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle]$. Това означава, че y се дели на $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$, т. е. y се дели на всяко от числата s_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Тогава $y \in M[s_\nu]$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) и следователно $y \in \bigcap_{\nu=1}^{n} M[s_\nu]$. По този начин е доказано и включването

$$M[\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle] \subset \bigcap_{\nu=1}^{n} M[s_\nu]. \tag{2}$$

Твърдението следва от (1), (2) и зад. 1.

10. Ще докажем само равенството е). Нека е в сила $x \in \cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \cap Y$. Това означава, че $x \in \cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и $x \in Y$. От първата релация следва, че съществува такова $\beta \in A$, че $x \in X_\beta$. Оттук и от $x \in Y$ следва, че $x \in X_\beta \cap Y$, поради което $x \in \cup\{X_\alpha \cap Y \mid \alpha \in A\}$. Обратно, нека $y \in \cup\{X_\alpha \cap Y \mid \alpha \in A\}$. Тогава съществува $\gamma \in A$, за което $y \in X_\gamma \cap Y$, следователно $y \in X_\gamma$. Ето защо $y \in \cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$, което заедно с $y \in Y$ дава $y \in \cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \cap Y$.

13. Ще докажем само равенството г). Нека е в сила $x \in M \setminus \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Тогава $x \in M$ и $x \notin \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. От последната релация следва, че съществува $\beta \in A$ с $x \notin M_\beta$. Заедно с $x \in M$ това дава $x \in M \setminus M_\beta$ и следователно е в сила $x \in \cup\{M \setminus M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Обратно, нека $y \in \cup\{M \setminus M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Тогава съществува $\gamma \in A$ с $y \in M \setminus M_\gamma$, т. е. $y \in M$ и $y \notin M_\gamma$. От последната релация следва $y \notin \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$, което заедно с $y \in M$ дава $y \in M \setminus \cap\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

15. Понеже $M \subset (M \setminus N) \cup N$, от зад. 14 а) следва $f(M) \subset f((M \setminus N) \cup N) = f(M \setminus N) \cup f(N)$ и съгласно зад. 12 в) е в сила $f(M) \setminus f(N) \subset f(M \setminus N)$.

19. а) 1. б) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$. в) 1. г) 1. д) 1. е) I. ж) Q. з) $\varnothing$. и) $\varnothing$.

20. в) Разгледайте сечението на всички стабилни подмножества на X, които съдържат A. д) Тъй като $f^{-1}(M) \subset M$, в

сила е $f^{-1}(M) \cap X \setminus M = \varnothing$; следователно $M \cap f(X \setminus M) = \varnothing$, т. е. $f(X \setminus M) \subset X \setminus M$. От друга страна, от $f(M) \subset M$ следва $f(M) \cap X \setminus M = \varnothing$, поради което $M \cap f^{-1}(X \setminus M) = \varnothing$, т. е. $f^{-1}(X \setminus M) \subset X \setminus M$. ж) От $\Phi(x) \cap \Phi(y) \neq \varnothing$ следва $x \in \Phi(y)$ и $y \in \Phi(x)$. Наистина, ако допуснем, че например $x \notin \Phi(y)$, ще имаме $x \in X \setminus \Phi(y)$ и тъй като съгласно д) множеството $X \setminus \Phi(y)$ е стабилно, то $\Phi(x) \in X \setminus \Phi(y)$, което не е възможно. Следователно $\Phi(x) \subset \Phi(y)$ и $\Phi(y) \subset \Phi(x)$. з) Множеството $\cup\{\Phi(x) \mid x \in A\}$ е стабилно съгласно б) и очевидно съдържа A. Следователно $\Phi(A) \subset \cup\{\Phi(x) \mid x \in A\}$. Обратното включване е очевидно, тъй като $\Phi(x) \subset \Phi(A)$ за всяко $x \in A$.

21. а) A_ν, когато никое от множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не е празно, и $\varnothing$ в противен случай.

б) $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{\nu-1} \times M \times A_{\nu+1} \times \ldots \times A_n$.

24. Нека най-напред е изпълнено включването

$$(A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2) \subset (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2). \tag{1}$$

Като използуваме а) и б) от зад. 21, получаваме следната редица от равенства:

$$\begin{aligned}(A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2) &= (A_1 \cup (B_1 \setminus A_1)) \times (A_2 \cup (B_2 \setminus A_2))\\ &= [(A_1 \cup (B_1 \setminus A_1)) \times A_2] \cup [(A_1 \cup (B_1 \setminus A_1)) \times (B_2 \setminus A_2)]\\ &= (A_1 \times A_2) \cup ((B_1 \setminus A_1) \times A_2) \cup (A_1 \times (B_2 \setminus A_2)) \cup ((B_1 \setminus A_1) \times (B_2 \setminus A_2)),\end{aligned}$$

което заедно с (1) дава

$$\begin{cases}(B_1 \setminus A_1) \times A_2 \subset (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2),\\ A_1 \times (B_2 \setminus A_2) \subset (A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2).\end{cases} \tag{2}$$

За $B_1 \setminus A_1$ са възможни случаите

$$B_1 \setminus A_1 \neq \varnothing, \tag{3}$$

$$B_1 \setminus A_1 = \varnothing, \tag{4}$$

а за $B_2 \setminus A_2$ са възможни случаите

$$B_2 \setminus A_2 \neq \varnothing, \tag{5}$$

$$B_2 \setminus A_2 = \varnothing. \tag{6}$$

В случая (3) от първото равенство (2) следва $(B_1 \setminus A_1) \times A_2 \subset B_1 \times B_2$, което заедно със з) от зад. 23 дава $A_2 \subset B_2$. В случая (4) очевидно $B_1 \subset A_1$. Аналогично от (5) следва $A_1 \subset B_1$, а от (6) имаме $B_2 \subset A_2$. Окончателно налице са следните 4 възможности: (3) и (5), (3) и (6), (4) и (5), (4) и (6). В първия случай $A_1 \subset B_1$ и $A_2 \subset B_2$, във втория $A_2 = B_2$, в третия $A_1 = B_1$, и в четвъртия $B_1 \subset A_1$ и $B_2 \subset A_2$. Читателят лесно ще провери сам, че във всеки от тези четири случая, обратно, е изпълнено включването (1).

26. Нека $x \in X$. Съгласно условието съществува $\xi \in X$, за което $f(\xi) = x$. Тогава $f(x) = f(f(\xi)) = f \circ f(\xi) = f(\xi) = x$.

27. Ирационалните числа.

28. Да се разгледат поотделно случаите, когато α е рационално и когато α е ирационално.

29. Всички изображения $g : f(X) \to X$.

30. **в)** Нека $y \in f(X)$. Тогава множеството $f^{-1}(y)$ не е празно. Нека x е произволен елемент на $f^{-1}(y)$; да положим $g(y) = x$. Тогава $f(g(y)) = f(x) = y$. За да получим втората част на твърдението, е достатъчно от множеството $f^{-1}(f(\xi))$ да изберем точно елемента ξ. **д)** Нека f е обратимо. Тогава за всяко $y \in f(X)$ множеството $f^{-1}(y)$ има само един елемент и съгласно а), ако g е обратно изображение на f, то $g(y) = f^{-1}(y)$. Нека сега f не е обратимо. Тогава съществуват x_1 и x_2 от X с $x_1 \neq x_2$, но $f(x_1) = f(x_2) = y$; съгласно в) ще съществуват две обратни изображения g_1 и g_2 на f, за които са в сила равенствата $g_1(f(x_1)) = x_1$ и $g_2(f(x_2)) = x_2$. Тогава $g_1(y) = g_1(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = g_2(f(x_2)) = g_2(y)$, т. е. $g_1 \neq g_2$.

31. Нека $x \in X$. Тогава $f(g(f(x))) = f \circ g(f(x)) = f(x)$, защото $f \circ g$ е идентитетът на $f(X)$ съгласно дефиницията на обратно изображение. Тъй като f е обратимо изображение, то $g(f(x)) = x$.

32. Ако f е обратимо, нека h е обратното му изображение. От зад. 31 следва, че h има желаното свойство. Обратно, нека съществува изображение $h : f(x) \to X$ с $h(f(x)) = x$ за всяко x от X. От $x_1 \neq x_2$ следва $h(f(x_1)) = x_1 \neq x_2 = h(f(x_2))$, откъдето $f(x_1) \neq f(x_2)$, поради което f е обратимо. Нека g е обратното му изображение. Тогава $f \circ g$ е идентитетът на $f(X)$ и следователно $h = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = g$, понеже $h \circ f$ по условие е идентитетът на X.

33. $g(y) = \dfrac{1}{a} y \quad (y \in \mathbf{R})$.

34. f е обратимо тогава и само тогава, когато $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. В този случай обратното изображение g се дава от формулите на Крамер $g(u, v) = \left(\dfrac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \dfrac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right)$, където $(u, v) \in \mathbf{R}^2$.

35. Нека $f(x_1) = f(x_2)$, т. е.

$$\frac{x_1}{1 + |x_1|} = \frac{x_2}{1 + |x_2|}. \tag{1}$$

Тогава $\dfrac{|x_1|}{1 + |x_1|} = \dfrac{|x_2|}{1 + |x_2|}$, откъдето $|x_1| = |x_2|$. Сега от (1) следва $x_1 = x_2$, поради което f е обратимо. Да намерим $f(\mathbf{R})$. Очевидно $|f(x)| = \dfrac{|x|}{1 + |x|} < 1$ и следователно $f(\mathbf{R}) \subset (-1, 1)$. Нека сега $y \in (-1, 1)$. Ще покажем, че съществува $x \in \mathbf{R}$, за което $f(x) = y$, т. е.

$$\frac{x}{1 + |x|} = y. \tag{2}$$

От (2) получаваме $\dfrac{|x|}{1 + |x|} = |y|$, откъдето $|x| = \dfrac{|y|}{1 - |y|}$. Като заместим този израз за $|x|$ в (2), намираме $x = \dfrac{y}{1 - |y|}$, откъдето виждаме, че $f(\mathbf{R}) = (-1, 1)$ и че изображението $g : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, дефинирано с $g(y) = \dfrac{y}{1 - |y|}$, е обратното на f.

36. Използвайте зад. 35.

37. Да положим $M = \ldots \cup f^{-1}(f^{-1}(A)) \cup f^{-1}(A) \cup A \cup f(A) \cup f(f(A)) \cup \ldots$ Тъй като $A \subset \Phi(A)$ и $\Phi(A)$ е стабилно, то $f(A) \subset f(\Phi(A)) \subset \Phi(A)$, $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\Phi(A)) \subset \Phi(A)$ и т.н. Следователно $M \subset \Phi(A)$. Понеже стабилната обвивка $\Phi(A)$ на A се съдържа във всяко стабилно множество, което съдържа A, за да докажем обратното включване, е достатъчно да се убедим, че M е стабилно. За тази цел да пресметнем $f(M)$. Съгласно зад. 14 а) ще имаме $f(M) = \ldots \cup f(f^{-1}(f^{-1}(A))) \cup f(f^{-1}(A)) \cup f(A) \cup f(f(A)) \cup f(f(f(A))) \cup \ldots \subset M$, тъй като за произволно множество B съгласно зад. 18 в) е в сила $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Аналогично съгласно зад. 16 а) е в сила $f^{-1}(M) = \ldots \cup f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(A))) \cup f^{-1}(f^{-1}(A)) \cup f^{-1}(A) \cup f^{-1}(f(A)) \cup f^{-1}(f(f(A))) \cup \ldots \subset M$, тъй като за произволно множество B и обратимо изображение f е в сила $f^{-1}(f(B)) = B$ (това е единственото място в решението, където се използва обратимостта на f).

40. Наредете елементите на A в крайна редица $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и дефинирайте изображение $\varphi : Y^A \to Y^n$ по следния начин: $\varphi(f) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$, където f е произволен елемент на Y^A (изображение от A в Y). Проверете, че φ е обратимо и че $\varphi(Y^A) = Y^n$.

41. Съгласно зад. 40 е в сила $B^A \sim B^a$ и следователно трябва да се пресметне броят на елементите на B^a, което става с индукция спрямо a.

42. б) Нека $\varphi : X_1 \to X$ и $\psi : Y \to Y_1$ са обратими и $\varphi(X_1) = X$ и $\psi(Y) = Y_1$. Дефинирайте изображение $\lambda : Y^X \to Y_1^{X_1}$ по следния начин $\lambda(f) = \psi \circ f \circ \varphi$, където f е произволен елемент на Y^X (изображение на X в Y). Това е онагледено на следната диаграма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X_1 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, dotted, "\lambda(f)"'] & Y_1 \end{tikzcd}$$

Проверете, че λ е обратимо и че $\lambda(Y^X) = Y_1^{X_1}$.

43. Разгледайте изображението $\psi : Z^{X\times Y} \to (Z^X)^Y$, дефинирано по следния начин. Нека $f \in Z^{X\times Y}$, т. е. f е изображение от вида $f : X \times Y \to Z$. За произволно $y \in Y$ нека $f_y : X \to Z$ означава изображението, дефинирано с $f_y(x) = f(x, y)$. По този начин на всяко y от Y е съпоставено $f_y \in Z^X$ и следователно е налице изображение $\varphi : Y \to Z^X$ (за което $\varphi(y) = f_y$). Очевидно $\varphi \in (Z^X)^Y$. Сега дефинираме ψ с $\psi(f) = \varphi$. Докажете, че ψ е обратимо и че $\psi(Z^{X\times Y}) = (Z^X)^Y$.

44. Докажете, че $(a, b) \sim (-1, 1)$, като си послужите с линейната функция $l(x) = kx + n$, за която $l(a) = -1$ и $l(b) = 1$. След това използвайте зад. 35, в която по същество е доказано, че $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$.

45. Нека $x_1 = \xi, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ е безкрайна редица от различни елементи на X. Дефинирайте изображение $\varphi : X \to X \setminus \{\xi\}$ по следния начин:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \neq x_n, \\ x_{n+1} & \text{при } x = x_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Докажете, че φ е обратимо и че $\varphi(X) = X \setminus \{\xi\}$.

46. Използвайте зад. 44 и 45.

47. Нека X е изброимо. Тогава съществува обратимо изображение $f : \mathbf{N} \to X$, за което $f(\mathbf{N}) = X$. Нека $x_n = f(n)$, тогава $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Обратно, от последното равенство, където $x_\mu \neq x_\nu$ при $\mu \neq \nu$, може да се положи $f(n) = x_n$.

48. Нека X е безкрайно. Тогава X не е празно и следователно съществува елемент x_1 на X. Тъй като X е безкрайно,

множеството $X \setminus \{x_1\}$ не е празно и следователно съществува елемент x_2 на $X \setminus \{x_1\}$ и т.н. По този начин се получава редица $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ от различни елементи на X.

50. Като забележите, че във всеки кръг се съдържат краен брой точки от $\mathbf{I}^2$, покрийте равнината с редица от кръгове $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ Първо наредете една след друга точките на множеството $K_1 \cap \mathbf{I}^2$, след това точките на $(K_2 \setminus K_1) \cap \mathbf{I}^2$, после точките на $(K_3 \setminus K_2) \cap \mathbf{I}^2$ и т.н.

51. Нека елементите на изброимото множество X са подредени в редица $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и X' е безкрайно подмножество на X. Нека x_{n_1} е елементът на X' с най-малък номер, x_{n_2} — елементът на $X' \setminus \{x_{n_1}\}$ с най-малък номер и т.н. По този начин елементите на X' се подреждат в безкрайна редица $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_\nu}, \ldots$

52. Докажете, че всеки кръг с радиус, не по-малък от 1, съдържа поне една точка с цели координати. След това приложете зад. 50 и 51.

53. Използвайте зад. 50.

54. Използвайте зад. 53 и индукция спрямо броя на множителите.

55. Нека всяко от множествата $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ е изброимо. Ще докажем, че е изброимо и обединението им $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Нека

$$X_1 = \{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots\},$$

$$X_2 = \{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_n = \{x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}, \ldots\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Нареждаме елементите на X в редица по диагонали:

$x_{11}; x_{12}, x_{21}; x_{13}, x_{22}, x_{31}; x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{41}; \ldots$

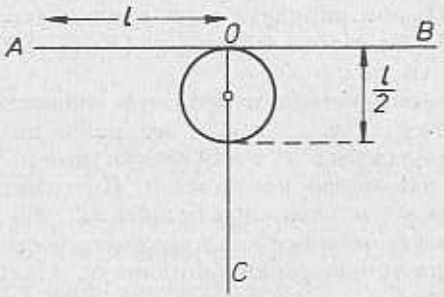
След това в тази редица зачертаваме всеки член, който се среща по-рано в редицата. По този начин получаваме нареждане на елементите на X в безкрайна редица.

56. Подложете равнината на хомотетия с коефициент $\frac{1}{\alpha}$ и приложете зад. 52.

57. Нека M е даденото множество от кръгове, а M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ са множествата от онези кръгове на M, чиито радиуси не са по-малки от $\frac{1}{n}$. Докажете, че $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Съгласно зад. 56

множеството M_n е крайно или изброимо. След това приложете зад. 55.

58. Приложете зад. 57.



Фиг. 6

59. Нека l е дължината на най-късата от трите отсечки с начало в тройната точка O на буквата T (фиг. 6). С център върху отсечката OC построяваме кръг с радиус $\frac{l}{4}$, който се допира до отсечката AB, и го съпоставяме на избраната буква T. По този начин получаваме обратимо изображение на даденото множество от букви T върху безкрайно множество от непресичащи се един друг кръгове в равнината. След това може да се използва зад. 57.

60. Нека M е даденото множество, а M_n — онова негово подмножество, което се състои от буквите T, за които дължината на всяка от трите отсечки, излизащи от тройните точки, е най-малко $\frac{1}{n}$. На всеки елемент на M_n съпоставяме кръг, както е показано на фиг. 6, но този път с радиус $\frac{1}{4n}$. По този начин се получава обратимо изображение на M_n върху безкрайно множество от непресичащи се един друг кръгове в равнината. Съгласно зад. 57 последното множество, а с него и M_n е крайно или изброимо. След това се използва зад. 55.

61. Докажете, че за произволно цяло число $q > 0$ множеството Q_q на несъкратимите дроби със знаменател q е изброимо. След това забележете, че $\mathbf{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_q$, и използвайте зад. 55.

62. Нека X е изброимо множество, а X_n са множествата на всички крайни подмножества на X съответно с по n елемента ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Ако на произволно n елементно подмножество на X съпоставим някоя от наредените n-орки, образувани от неговите елементи, получаваме обратимо изображение $f : X_n \to X^n$. Множеството X_n, а следователно и равномощното му множество $f(X_n)$ са очевидно безкрайни. От друга страна, $f(X_n) \subset X^n$ и съгласно зад. 54 и 51 множеството $f(X_n)$, а следователно и X_n са изброими. Остава само да отбележим, че множеството на всичките крайни подмножества на X съвпада с $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, и да приложим зад. 55.

63. За произволно $n = 1, 2, \ldots$ да означим с π_n множеството на всички полиноми от n-та степен с цели коефициенти. Съгласно зад. 54 множеството π_n е изброимо. Сега от зад. 55 следва, че множеството на всичките полиноми с цели коефициенти е изброимо. След това разгледайте произволно нареждане на полиномите с цели коефициенти в редица $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ и използвайте, че всеки полином има краен брой нули, което дава възможност алгебричните числа да се наредят в безкрайна редица.

64. За произволно $n = 1, 2, \ldots$ докажете, че множеството $M_n = \{x \mid x \in M, \frac{1}{n} \leq x\}$ е крайно, и използвайте, че $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

67. За всяко x от X множеството $\Phi(x)$ е различно от празното, защото $x \in \Phi(x)$. Очевидно $\bigcup_{x \in X} \Phi(x) = X$. Остава само да се докаже, че от $\Phi(x) \neq \Phi(y)$ следва $\Phi(x) \cap \Phi(y) = \varnothing$, което се получава от зад. 20 ж).

69. Съгласно зад. 37 е в сила $\Phi(a) = \ldots f^{-2}(a) \cup f^{-1}(a) \cup a \cup f(a) \cup f^2(a) \cup \ldots$. Тъй като f е обратимо, всяко от събираемите е най-много 1-елементно, поради което $\Phi(a)$ е най-много изброимо. Ако допуснем, че $\Phi(a)$ и $\Phi(a) \cap Y$ не са равномощни, ще се окаже, че $\Phi(a) \cap Y$ е крайно (зад. 51). Нека сега $x \in \Phi(a)$. Тъй като $\Phi(a)$ е стабилно множество, което съдържа x, то $\Phi(x) \subset \Phi(a)$ и следователно $\Phi(x) \cap Y$ е крайно. Да разгледаме редицата $f(x)$, $f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots$. Всичките ѝ членове принадлежат на Y, защото f изобразява X в Y. Освен това те принадлежат на $\Phi(x)$ съгласно зад. 37. Следователно всичките членове на тази редица принадлежат на крайното множество $\Phi(x) \cap Y$. Ето защо съществуват членове $f^n(x)$ и $f^{n+k}(x)$ ($0 < k$) на тази редица, които съвпадат, т. е. $f^n(x) = f^{n+k}(x)$. Тъй като изображението f е обратимо, от последното равенство следва $x = f^k(x)$ и тогава $x \in Y$. И така

за всяко x от $\Phi(a)$ е в сила $x \in Y$, поради което $\Phi(a) \subset Y$, т. е. $\Phi(a) = \Phi(a) \cap Y$, което противоречи на допускането, че тези две множества не са равномощни.

70. Използувайте зад 67 — 69.

71. Съгласно условието съществуват обратими изображения $f : X \to Z$ и $h : Z \to X$. Нека $f = h \circ g$ и $Y = h(Z)$. Тогава f е обратимо изображение на X в Y и $Y \subset X$. Съгласно зад. 70 е в сила $X \sim Y$. Но тъй като $h(Z) = Y$ и h е обратимо изображение, то $Y \sim Z$. Съгласно зад. 39 в) оттук следва, че $X \sim Z$.

72. Нека y_0 и y_1 са два различни елемента на Y. На всеки елемент x на X съпоставяме изображението $f_x : X \to Y$, дефинирано със

$$f_x(z) = \begin{cases} y_1 & \text{при } z \neq x, \\ y_0 & \text{при } z = x. \end{cases}$$

По този начин на всеки елемент x на X е съпоставен по един елемент f_x на Y^X. Изображението $\Phi : X \to Y^X$, дефинирано с $\Phi(x) = f_x$ $(x \in X)$, е обратимо.

73. Допускаме противното и с $\Phi : X \to Y^X$ означаваме изображение, за което $Y^X = \Phi(X)$. Нека $x \in X$. Тогава $\Phi(x) \in Y^X$, т. е. $\Phi(x)$ е изображение на X в Y; ще го означим с $f_x : X \to Y$. Тъй като Y има поне два различни елемента, съществува елемент $f(x)$ на Y, за който $f(x) \neq f_x(x)$. По този начин е дефинирано изображение $f : X \to Y$, различно от f_x при произволно x от X (това следва от факта, че $f(x) \neq f_x(x)$). И така $f \neq \Phi(x)$ за всяко x от X, а това противоречи на $Y^X = \Phi(X)$.

74. Нека Y е множеството, съставено само от двата елемента 0 и 1. Съгласно зад. 73 е достатъчно да покажем, че $P(A) \sim Y^X$. Нека изображението $\Phi : Y^X \to P(A)$ е дефинирано по следния начин: $\Phi(f) = f^{-1}(0)$ за произволно $f \in Y^X$. Докажете, че Φ е обратимо и че $\Phi(Y^X) = P(A)$.

75. Нерефлексивни са б), д). **77.** а), д), е), з).
79. Използувайте зад. 78. **81.** Всичките без д).
83. Използувайте зад. 82. **85.** Използувайте зад. 84.
87. а), з). **89.** Използувайте зад. 88.

Втора глава

1. ж) За произволно естествено число n да означим с P_n твърдението:

$$(1) \quad 1^7 + 2^7 + \dots + n^7 = \frac{1}{24} n^2 (n+1)^2 (3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2).$$

Така получаваме една редица $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ от твърдения. Ще се убедим, че тази редица притежава свойствата а) и б) от формулировката на принципа за математическата индукция. Твърдението P_1 изразява, че равенството (1) е валидно при $n = 1$, което се проверява непосредствено. Нека сега твърдението P_n е вярно, т. е. в сила е (1). Тогава

$$1^7 + 2^7 + \dots + (n+1)^7 = \frac{1}{24} n^2 (n+1)^2 (3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2) + (n+1)^7$$

$$= \frac{1}{24} (n+1)^2 (n+2)^2 [3(n+1)^4 + 6(n+1)^3 - (n+1)^2 - 4(n+1) + 2].$$

Съгласно принципа за математическата индукция всички твърдения от редицата $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ са верни, т. е. равенството (1) е изпълнено за всяко естествено n.

2. е) Верността на равенството за $n = 1$ се проверява непосредствено. Нека то е вярно за n, т. е. $\sum_{\nu=1}^{n} \nu! \nu = (n+1)! - 1$. Тогава от

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu! \nu = (n+1)! - 1 + (n+1)!(n+1) = (n+2)! - 1$$

следва верността му и за $n + 1$.

3. а) Верността на равенството за $n = 1$ се проверява непосредствено. Нека то е вярно за n, т. е.

$$\prod_{\nu=1}^{n} \cos \frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}.$$

Тогава

$$\prod_{\nu=1}^{n+1} \cos \frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}} \cos \frac{x}{2^{n+1}} = \frac{\sin x \cos \frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cos \frac{x}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{\sin x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^{n+1}}},$$

т. е. равенството е вярно и за $n + 1$.

б) Верността на равенството за $n = 1$ се проверява непосредствено. Нека то е вярно за n, т. е. $\prod_{\nu=0}^{n-1} (1 + x^{2\nu}) = \sum_{\nu=0}^{2^n - 1} x^\nu$. Тогава

от

$$\prod_{\nu=0}^{n}(1+x^{2^\nu}) = \sum_{\nu=0}^{2^n-1} x^\nu(1+x^{2^n}) = \sum_{\nu=0}^{2^n-1} x^\nu + \sum_{\nu=0}^{2^n-1} x^{\nu+2^n}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2^n-1} x^\nu + \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{2^{n+1}-1} x^\nu$$

следва верността му и за $n+1$.

5. **в)** Верността на равенството за $n=1$ се установява непосредствено. Нека то е вярно за n. Тогава

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}(a+(\nu-1)b)x^{\nu-1}$$

$$= \frac{a-(a+(n-1)b)x^n}{1-x} + \frac{bx(1-x^{n-1})}{(1-x)^2} + (a+nb)x^n$$

$$= \frac{a-(a+nb)x^{n+1}}{1-x} + \frac{bx(1-x^n)}{(1-x)^2},$$

т. е. равенството е вярно и за $n+1$.

7. Достатъчността на условието е очевидна. За да докажем необходимостта му, нека P е полином от степен n и нека $P(a)=0$. Ако $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$ $(a_0 \neq 0)$, последното условие се записва така: $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu a^{n-\nu} = 0$. Следователно

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x^{n-\nu} - a^{n-\nu})$$

$$= (x-a)\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x^{n-\nu-1} + x^{n-\nu-2}a + \cdots + a^{n-\nu-1})$$

съгласно зад. 6 а). Но $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x^{n-\nu-1} + x^{n-\nu-2}a + \cdots + a^{n-\nu-1})$ е очевидно полином от степен $n-1$.

8. При $n=1$ твърдението е очевидно. Нека то е вярно за някое n. Да допуснем, че при това предположение то не е вярно за $n+1$. Тогава ще съществува полином P от степен $n+1$, който се анулира за повече от $n+1$ различни стойности на аргумента. Нека например $P(x_\nu)=0$ $(\nu=1,2,\ldots,n+2)$, където $x_\mu \neq x_\nu$ при

$\mu \neq \nu$. Съгласно зад. 7 $P(x) = (x-x_{n+2})Q(x)$, където $Q(x)$ е полином от степен n. От последното равенство следва, че полиномът Q се анулира за $x = x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$, което противоречи на индукционното предположение.

9. Нека условието е изпълнено за полиномите $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$ и $Q(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^{n-\nu}$. Тогава полиномът $P(x)-Q(x) = \sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu - b_\nu)x^{n-\nu}$, чиято степен е най-много равна на n, ще се анулира за $n+1$ различни стойности на x. Ако допуснем, че степента му е n, ще влезем в противоречие с твърдението в зад. 8, поради което $a_0 - b_0 = 0$. По същия начин, ако допуснем, че този полином е от степен $n-1$, ще получим противоречие със зад. 8, поради което $a_1 - b_1 = 0$, и т.н.

10. Като се освободим от знаменателите, получаваме равенството $(a+b)x + (a-1) = 0$, което трябва да е в сила за всяка различна от 0 и -1 стойност на x, а такива има поне две. И така полиномът $(a+b)x+(a-1)$ от първа степен се анулира за поне две различни стойности на x, което съгласно принципа за сравняване на коефициентите (зад. 9) показва, че $a+b=0$ и $a-1=0$, т. е. $a=1$ и $b=-1$.

11. $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$.

12. Приложете принципа за сравняване на коефициентите.

14. **б)** Следва от зад. 13 индуктивно, а зад. 14 а) се получава от 14 б), когато числото $x = r$ е естествено.

15. Използвайте индукция спрямо m. За да докажете, че от m-тото твърдение следва $(m+1)$-вото, разгледайте произволно множество M с $m+1$ елемента. Имате да докажете, че за всяко цяло неотрицателно n броят на n-елементните подмножества на M е $\binom{m+1}{n}$. При $n=0$ това е очевидно. За да докажете твърдението, когато n е естествено число, изберете произволен елемент a на M и разделете n-елементните подмножества на M на два класа по следния признак: към единия клас причислете онези n-елементни подмножества на M, които съдържат a, а към другия — останалите. Като използвате индукционното предположение, пребройте елементите на всеки от тези два класа и си послужете със зад. 13.

16. За $n=1$ твърдението е очевидно. От верността му за n следва

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \left(\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{n-\nu}b^{\nu}\right)(a+b)\\
&= \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{n-\nu+1}b^{\nu}+\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{n-\nu}b^{\nu+1}\\
&= \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{n-\nu+1}b^{\nu}+\sum_{\nu=1}^{n+1}\binom{n}{\nu-1}a^{n-\nu+1}b^{\nu}\\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^{0}+\sum_{\nu=1}^{n}\left[\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu-1}\right]a^{n+1-\nu}b^{\nu}+\binom{n}{n}a^{0}b^{n+1}\\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{n+1}{\nu}a^{n+1-\nu}b^{\nu},
\end{aligned}
$$

където са използувани зад. 13 и очевидно верните за всяка естествена стойност на x равенства $\binom{x}{0}=1$ и $\binom{x}{x}=1$.

Дайте друго решение на задачата, като използувате очевидното равенство

$$(a+b)^n=\sum_{\nu=0}^{n}C_\nu a^{n-\nu}b^{\nu},$$

а за пресмятане на коефициентите C_ν използувайте зад. 15.

17. Ако приравним коефициентите пред p-тите степени на z в лявата и дясната страна на тъждеството

$$(1+z)^m(1+z)^n=\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}z^{\mu}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}z^{\nu}=\sum_{\lambda=0}^{m+n}\binom{m+n}{\lambda}z^{\lambda}=(1+z)^{m+n},$$

ще получим желаното равенство за естествени x и y. Нека y е произволно цяло неотрицателно число. Тогава двете страни на равенството, което трябва да докажем, са полиноми на x. Съгласно току-що доказаното те приемат равни стойности за всичките естествени числа x, които са безбройно много. Като приложим принципа за сравняване на коефициентите, заключаваме,че коефициентите на тези полиноми, а следователно и самите полиноми съвпадат. По този начин равенството е доказано за всяко цяло неотрицателно y и за всяко реално x. Сега фиксираме по произволен начин реалното число x и повтаряме разсъжденията, като разменяме ролите на x и y.

Дайте друго решение на задачата за естествени x и y, като използувате зад. 15.

18. Непосредствено следствие от зад. 17 и от равенството $\binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}$.

19. За естествени стойности на x може да се разсъждава, както в зад. 17, но като се използува тъждеството $(1+z)^x(1-z)^x=(1-z^2)^x$. За да се докаже верността на равенството за всяко реално x, достатъчно е да се забележи, че лявата и дясната страна са полиноми на x, и да се приложи принципът за сравняване на коефициентите.

20. **а)** Полагаме $a=b=1$ в биномната формула. **б)** Използувайте а) и зад. 15.

21. Непосредствено следствие от зад. 20.

22. За $n=1$ е ясно. От верността за някое n следва

$$
\begin{aligned}
(\cos x+i\sin x)^{n+1} &= (\cos nx+i\sin nx)(\cos x+i\sin x)\\
&= \cos(n+1)x+i\sin(n+1)x
\end{aligned}
$$

съгласно формулата за умножение на комплексни числа в тригонометричен вид. Нека $m=-n$, където n е естествено число. Тогава

$$
\begin{aligned}
(\cos x+i\sin x)^m &= \frac{1}{(\cos x+i\sin x)^n}=\frac{1}{\cos nx+i\sin nx}\\
&= \cos nx-i\sin nx=\cos(-nx)+i\sin(-nx)=\cos mx+i\sin mx.
\end{aligned}
$$

С това твърдението е доказано, тъй като при $n=0$ то е очевидно вярно.

23. В биномната формула $(1+x)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^{\nu}$ полагаме последователно $x=1$, ε и ε^2, където ε е кой да е корен на уравнението $x^2+x+1=0$. Получаваме

$$(1)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}=2^n,\quad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\varepsilon^{\nu}=(1+\varepsilon)^n,\quad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\varepsilon^{2\nu}=(1+\varepsilon^2)^n.$$

От $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ чрез умножаване с $\varepsilon-1$ следва $\varepsilon^3=1$, а като умножим с ε^2 и използуваме последното равенство, получаваме $\varepsilon^4+\varepsilon^2+1=0$, т. е. ε^2 също е корен на уравнението $x^2+x+1=0$. Сега можем да докажем, че

$$(2)\qquad 1+\varepsilon^{\nu}+\varepsilon^{2\nu}=\begin{cases}0, & \text{когато } \nu \text{ не се дели на } 3,\\ 3, & \text{когато } \nu \text{ се дели на } 3.\end{cases}$$

Наистина, когато ν не се дели на 3, числото ε^ν е или ε, или ε^2 (тъй като $\varepsilon^3 = 1$), и в този случай (2) следва от това, че както ε, така и ε^2 са корени на уравнението $x^2 + x + 1 = 0$. Когато ν се дели на 3, е в сила $\varepsilon^\nu = 1$ и $\varepsilon^{2\nu} = 1$ и верността на (2) в този случай се вижда веднага. Като съберем левите и десните страни на равенствата (1) и използуваме (2), получаваме

$$(3)\qquad \begin{aligned} 2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n &= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}(1+\varepsilon^\nu+\varepsilon^{2\nu}) \\ &= 3\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Остана да пресметнем лявата страна на (3). Като решим уравнението $x^2 + x + 1 = 0$ и приведем корените му в тригонометричен вид, получаваме $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, откъдето

$$(4)\qquad \begin{cases} 1+\varepsilon = -\varepsilon^2 = -\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \\ 1+\varepsilon^2 = -\varepsilon = -\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

От (4) намираме $2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}$, откъдето поради (3) следва равенството а) на задачата. Другите две равенства се доказват аналогично, като се разглеждат съответно сумите

$$2^n + \varepsilon(1+\varepsilon)^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^n \text{ и } 2^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n.$$

24. Решава се аналогично на зад. 23, като се разглежда $(1+i)^n$.

25. **а)** За $n = 1$ верността се проверява непосредствено. От верността му за n следва

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \sin\nu x = \frac{\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(n+1)x = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

б) Аналогично на а). Паралелно доказателство на а) и б) може да се получи чрез формулата на Моавър. Нека $A = \sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu x$, $B = \sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu x$. Тогава

$$A + iB = \sum_{\nu=1}^{n}(\cos\nu x + i\sin\nu x) = \sum_{\nu=1}^{n}(\cos x + i\sin x)^\nu$$

$$= \frac{1-(\cos x + i\sin x)^{n+1}}{1-(\cos x + i\sin x)} - 1 = \frac{1-\cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{1-\cos x - i\sin x} - 1$$

съгласно зад. 22 и 5 а). По-нататък правим елементарните преобразувания

$$1-\cos(n+1)x - i\sin(n+1)x = 2\sin^2\frac{n+1}{2}x - 2i\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n+1}{2}x,$$

$$1-\cos x - i\sin x = 2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

откъдето следва

$$\begin{aligned} A + iB &= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{-i\left(\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x\right)}{-i\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right) - 1. \end{aligned}$$

Като приравним реалните и имагинерните части, получаваме

$$A = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}, \qquad B = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

в) — е) Аналогично.

26. Както зад. 25.

27. Представете квадратите чрез удвоени ъгли и приложете зад. 25.

28. Аналогично на зад. 25, като вместо зад. 5 а) се използува зад. 5 б).

29. Приложете формулата на Моавър и биномната формула към $(\cos x + i\sin x)^n$ и сравнете реалните и имагинерните части в полученото равенство.

30. От

$$(1)\qquad z = \cos x + i\sin x$$

следва

$$(2)\qquad z^{-1} = \cos x - i\sin x.$$

От (1) и (2) следват равенствата

$$(3)\qquad \sin x = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$$

и

$$\cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}). \tag{4}$$

Равенството а) се доказва чрез вдигане на двете страни на (3) в степен $2n$:

$$\begin{aligned}\sin^{2n} x &= \frac{(-1)^n}{4^n}\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\binom{2n}{\nu}z^{2(n-\nu)}\\ &= (-1)^n 4^{-n}\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\binom{2n}{\nu}[\cos 2(n-\nu)x + i\sin 2(n-\nu)x],\end{aligned} \tag{5}$$

и сравняване на реалните части в (5) (където второто равенство е написано въз основа на (1) и на формулата на Моавър). Получава се

$$\sin^{2n} x = \frac{(-1)^n}{4^n}\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x. \tag{6}$$

От (6) следва

$$\begin{aligned}4^n\sin^{2n} x &= \sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x + \binom{2n}{n}\\ &+ \sum_{\nu=n+1}^{2n}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x.\end{aligned} \tag{7}$$

От (7) чрез смяната $\nu = 2n - \mu$ на индексите, последвана от формална замяна на μ с ν, се получава равенството а) на задачата поради

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=n+1}^{2n}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x &= \sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{\mu-n}\binom{2n}{2n-\mu}\cos 2(\mu-n)x\\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{\nu}\cos 2(n-\nu)x;\end{aligned}$$

тук са съобразени равенствата

$$(-1)^{\mu-n} = (-1)^{n-\mu}, \quad \binom{2n}{2n-\mu} = \binom{2n}{\mu}, \quad \cos 2(\mu-n)x = \cos 2(n-\mu)x.$$

Равенствата б) — г) се доказват аналогично. Да отбележим между другото, че сравняването на имагинерните части в равенството (5) води до равенството

$$\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\binom{2n}{\nu}\sin 2(n-\nu)x = 0,$$

чиято верност лесно може да се съобрази и непосредствено.

31. Стандартно прилагане на индукция. Така например за а) верността при $n = 1$ се проверява директно. От верността на равенството за някое n следва

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}4^\nu\sin^4\frac{x}{2^\nu} = 4^n\sin^2\frac{x}{2^n} - \sin^2 x + 4^{n+1}\sin^4\frac{x}{2^{n+1}}.$$

Но

$$\begin{aligned}&4^n\sin^2\frac{x}{2^n} + 4^{n+1}\sin^4\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= 4^{n+1}\sin^2\frac{x}{2^{n+1}}\cos^2\frac{x}{2^{n+1}} + 4^{n+1}\sin^4\frac{x}{2^{n+1}} = 4^{n+1}\sin^2\frac{x}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

което доказва верността на равенството за $n + 1$.

32. Верността на неравенството за $n = 1$ се проверява непосредствено (в този случай то преминава в равенство). Нека то е вярно за n, т. е. $(1 + nx) \leqq (1 + x)^n$. Тогава $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geqq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geqq 1 + (n + 1)x$ поради $1 + x \geqq 0$ и $x^2 \geqq 0$, т. е. неравенството е вярно и за $n + 1$.

34. Очевидно $n! = n(n-1)\ldots 3.2 \geqq 2^{n-1}$, поради което

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} &\leqq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.\end{aligned}$$

35. Верността на неравенството за $n = 1$ се проверява непосредствено (в този случай то преминава в равенство). Нека то е вярно за n, т. е. $|\sin nx| \leqq n|\sin x|$. Тогава $|\sin(n + 1)x| \leqq |\sin nx||\cos x| + |\cos nx||\sin x| \leqq n|\sin x| + |\sin x| = (n + 1)|\sin x|$ поради $|\cos x| \leqq 1$ и $|\cos nx| \leqq 1$, т. е. неравенството е вярно и за $n + 1$.

37. а) Индукция по n. При $n = 1$ верността на твърдението е очевидна. Нека то е вярно за някое n и нека за естествените числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ е в сила $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$. Тогава

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &\leqq 1 + 2 + 3 + \cdots + (x_n - 1) + x_n \\ &= \frac{1 + x_n}{2} x_n \leqq \frac{x_{n+1}(x_{n+1} - 1)}{2}, \end{aligned}$$

откъдето

$$2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x_{n+1} + x_{n+1}^2 \leqq x_{n+1}^3,$$

което заедно с индуктивното предположение $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqq x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3$ дава верността на неравенството за $n + 1$:

$$(2)\qquad (x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1})^2 \leqq x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 + x_{n+1}^3.$$

За равенство в (2) е необходимо последното неравенство на (1) да се обръща в равенство, т. е. $x_{n+1} = x_n + 1$. Освен това първото неравенство (1) също трябва да се обръща в равенство, което е възможно само при $x_\nu = \nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). б) Индукция по n. При $n = 1$ неравенството става $2x_1^6 \leqq x_1^5 + x_1^7$, което е еквивалентно на $0 \leqq (x_1 - 1)^2$, така че в този случай твърдението е очевидно. Да предположим, че то е вярно за някое n:

$$(1)\qquad 2(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3)^2 \leqq x_1^5 + \cdots + x_n^5 + x_1^7 + \cdots + x_n^7,$$

и нека $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ са естествени числа, за които $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$. Тогава

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 &\leqq 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (x_n - 1)^3 + x_n^3 \\ &= \frac{x_n^2(x_n + 1)^2}{4} \leqq \frac{(x_{n+1} - 1)^2 x_{n+1}^2}{4} \end{aligned}$$

съгласно зад. 1 в). От (1) и (2) следва

$$(3)\qquad 2(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{n+1}^3)^2 \leqq x_1^5 + \cdots + x_{n+1}^5 + x_1^7 + \cdots + x_{n+1}^7,$$

т. е. верността на неравенството за $n + 1$. За да има равенство в (3), е необходимо последното неравенство в (2) да се обръща в равенство, т. е. да имаме $x_{n+1} = x_n + 1$. Освен това първото от неравенствата (2) също трябва да се обръща в равенство, което е възможно само когато $x\nu = \nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

38. Събираме почленно равенствата $a_{\nu+1}^2 = 1 + 2a_\nu + a_\nu^2$ за $\nu = 0, 1, \ldots, n$. Ще получим $a_{n+1}^2 = n + 2(a_1 + \cdots + a_n)$, откъдето желаното неравенство следва очевидно.

39. При решаването на тази задача ще използуваме следната еквивалентна формулировка на принципа за математическата индукция:

Нека редицата от твърдения

$$(1)\qquad P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

притежава следните свойства:

а) твърдението P_1 е вярно;

б) за всяко естествено число n от верността на $P_1, P_2, \ldots, P_n$ следва верността на P_{n+1}.

Тогава всички твърдения от редицата (1) са верни.

В някои случаи е удобно индукцията да започва не от 1, а от 0; така ще процедираме в настоящата задача.

За $n = 0$ твърдението се проверява непосредствено, тъй като очевидно полиномът x е сумираща функция за полинома $x^0 = 1$.

Да предположим сега, че твърдението е вярно за полиномите $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$: съществуват полиноми $\beta_{\nu+1}(x)$ от степени $\nu + 1$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$), които са сумиращи функции за x^ν. От биномната формула

$$(x + 1)^{n+2} = x^{n+2} + (n + 2)x^{n+1} + \sum_{\nu=2}^{n+2} \binom{n+2}{\nu} x^{n+2-\nu}$$

получаваме

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \frac{1}{n+2}\left\{(x+1)^{n+2} - x^{n+2} - \sum_{\nu=2}^{n+2}\binom{n+2}{\nu}(\beta_{n+3-\nu}(x+1) - \beta_{n+3-\nu}(x))\right\} \\ &= \frac{1}{n+2}(\beta_{n+2}(x+1) - \beta_{n+2}(x)) \end{aligned}$$

при

$$\beta_{n+2}(x) = \frac{1}{n+2}\left(x^{n+2} - \sum_{\nu=2}^{n+2}\binom{n+2}{\nu}\beta_{n+3-\nu}(x)\right).$$

41. По условие $P_1(x+1) - P_1(x) = f(x)$ и $P_2(x+1) - P_2(x) = f(x)$, така че $P_2(x+1) - P_1(x+1) = P_2(x) - P_1(x)$. Следователно полиномът $Q(x) = P_2(x) - P_1(x)$ притежава свойството $Q(x+1) = Q(x)$ за всяко x. Оттук по индукция следва $Q(n) = Q(0)$ за всяко естествено n, което показва, че полиномът $Q(x) - Q(0)$ има безбройно много нули и следователно $Q(x) = Q(0) = c$ за всяко x.

42. Приложете принципа за сравняване на коефициентите.

43. Да изберем числото a толкова голямо (по-голямо от всички нули на знаменателя на R), че $R(x)$ да има смисъл за всяко

$x \geq a$. По индукция се установява лесно, че $R(n+a)=R(a)$, което показва, че рационалната функция $R(x+a)-R(a)$ се анулира безбройно много пъти. Като използуваме принципа за сравняване на коефициентите, оттук заключаваме, че $R(x+a)=R(a)$ за всяко x от дефиниционната област на R, което показва, че R е константа.

44. Приложете зад. 43.

45. Ще разгледаме подробно само случая $k=1$. Ако такава рационална функция R съществуваше, бихме имали $R(n+1)-R(n) = \frac{1}{n}$, откъдето съгласно принципа за сравняване на коефициентите бихме получили

$$R(x+1)-R(x)=\frac{1}{x}. \tag{1}$$

Нека $R=\frac{P}{Q}$, където полиномите P и Q са взаимно прости. Тогава от (1) следва

$$xP(x+1)Q(x)-xP(x)Q(x+1)=Q(x)Q(x+1) \tag{2}$$

за всяко x. Полиномите $xP(x+1)Q(x)$ и $Q(x)Q(x+1)$ се делят на $Q(x)$ и от (2) следва, че и полиномът $xP(x)Q(x+1)$ трябва да се дели на $Q(x)$. Но полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ са взаимно прости по условие, поради което полиномът $xQ(x+1)$ трябва да се дели на $Q(x)$, т. е. трябва да съществува полином $ax+b$, за който

$$xQ(x+1)=(ax+b)Q(x) \quad (a \neq 0) \tag{3}$$

за всяко x. С аналогични разсъждения за $Q(x+1)$ вместо за $Q(x)$ се убеждаваме, че съществува полином $cx+d$, за който

$$xQ(x)=(cx+d)Q(x+1) \quad (c \neq 0) \tag{4}$$

за всяко x. Като умножим почленно (3) и (4) и съкратим на полинома $Q(x)Q(x+1)$, получаваме

$$x^2=acx^2+(ad+bc)x+bd \tag{5}$$

за всяко x. От (5) следва $b=0$ и сега (3) дава

$$Q(x+1)=aQ(x). \tag{6}$$

Като сравним коефициентите на най-високите степени на x в (6), се убеждаваме, че $a=1$, и тогава от зад. 43 следва, че Q е константа, т. е. че функцията R е полином. Но тогава (1) е невъзможно.

Случаят на произволно естествено число k се третира аналогично.

46. Ще си послужим с индукция спрямо n, за да докажем, че когато остатъкът от деленето на $P(x)$ с $x(x+1)\ldots(x+n)$ е от степен, не по-голяма от $n-1$, дадената рационална функция притежава рационална сумираща функция. При $n=1$ по условие остатъкът от деленето на $P(x)$ с $x(x+1)$ трябва да бъде константа:

$$\frac{P(x)}{x(x+1)}=Q(x)+\frac{a}{x(x+1)}, \tag{1}$$

където Q е полином. Тъй като полиномът Q притежава сумираща функция (зад. 40), твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че второто събираемо в дясната страна на (1) притежава сумираща функция. Това е очевидно, тъй като $\frac{a}{x(x+1)}=-\frac{a}{x+1}+\frac{a}{x}$.

Нека твърдението е вярно за някое n; ще докажем верността му за $n+1$. Всяка от функциите

$$Q_\nu(x)=\frac{x^\nu}{x(x+1)\ldots(x+n+1)} \quad (\nu=0,1,\ldots,n) \tag{2}$$

притежава сумираща. При $\nu=0$ това се вижда така:

$$Q_0(x)=\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}=\frac{(x+n+1)-x}{(n+1)x(x+1)\ldots(x+n+1)}$$

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}.$$

При $\nu=1,2,\ldots,n$ имаме

$$Q_\nu(x)=\frac{x^{\nu-1}}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}=\frac{(v-1)^{\nu-1}}{v(v+1)\ldots(v+n)}$$

при $v=x+1$ и верността на твърдението следва от индуктивното предположение. Случаят на произволен полином $P(x)$ чрез деление с $x(x+1)\ldots(x+n+1)$ се свежда до полином от степен, не по-висока от n, а след това до линейна комбинация на функции от вида (2), които притежават сумиращи. С това е доказана достатъчността.

Сега да предположим, че остатъкът от деленето на $P(x)$ с $x(x+1)\ldots(x+n)$ има по-висока степен от $n-1$. Тъй като той не може да бъде от степен, по-висока от n, степента му ще бъде точно n. Тогава

$$\frac{P(x)}{x(x+1)\ldots(x+n)}=Q(x)+\frac{ax^n+S(x)}{x(x+1)\ldots(x+n)}, \tag{3}$$

където $a \neq 0$ е константа, а $Q(x)$ и $S(x)$ са полиноми, като степента на последния не надминава $n-1$. Трябва да докажем, че лявата страна на (3) не притежава сумираща функция. Тъй като $Q(x)$ притежава сумираща съгласно зад. 40, а съгласно вече доказаното функцията $\dfrac{S(x)}{x(x+1)\dots(x+n)}$ също притежава сумираща функция, остава да установим, че функцията $\dfrac{x^n}{x(x+1)\dots(x+n)}$ няма сумираща. Ще докажем това с индукция спрямо n. При $n=0$ твърдението следва от зад. 45 (с $k=1$). Ако твърдението е вярно за n, ще установим верността му за $n+1$. Имаме

$$\frac{x^{n+1}}{x(x+1)\dots(x+n+1)} = \frac{x^n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}$$

$$(4) \qquad = \frac{v^n}{v(v+1)\dots(v+n)} + \frac{\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu \binom{n}{\nu} v^{n-\nu}}{v(v+1)\dots(v+n)},$$

където след полагането $v = x+1$ е приложена биномната формула. Съгласно индукционното предположение първото събираемо в дясната страна на (4) няма сумираща функция, а второто събираемо има съгласно доказаната вече достатъчност.

Трета глава

1. Това не е вярно за празното множество.

3. Нека y е произволен елемент на N. Съгласно условието за всяко x от M ще бъде изпълнено неравенството $x \leqq y$, което показва, че y е мажоранта на M. Числото $r = \sup M$ е най-малката мажоранта на M. Следователно $r \leqq y$. Тъй като y е произволен елемент на N, остава да се докаже само, че $x \leqq r$ за всяко x от M, което е вярно, понеже r по дефиниция е мажоранта на M.

6. Нека $x \in M$ и $x \neq \sup M$. Тогава $x < \sup M$ и съгласно условието $x < \sup N$. Следователно x не е горна граница на N, поради което съществува y от N, за което $x < y$.

7. Нека $x \in M$. Съгласно условието съществува y от N, за което $x \leqq y$. Но $y \leqq \sup N$, така че $x \leqq \sup N$. Следователно $\sup N$ е горна граница на M. Но $\sup M$ е най-малката горна граница на M, откъдето следва $\sup M \leqq \sup N$.

8. Приложете зад. 7.

9. Докажете, че от $\beta \in \Lambda$ и $\gamma \in \Lambda$ следва $a_\beta \leqq b_\gamma$ и приложете принципа за отделимост.

10. Допуснете противното. Тогава всичките реални числа биха могли да се подредят в редица $x_1, x_2, \dots$ с $x_m \neq x_n$ при $m \neq n$. По-нататък разделете интервала $\Delta_0 = [0, 1]$ на три равни затворени подинтервала и означете с Δ_1 някой от тях, който не съдържа x_1, и т. н. Съгласно теоремата на Кантор — Хели (зад. 9) съществува точка ξ, която принадлежи на всичките интервали $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ Покажете, че за всяко естествено n е в сила $\xi \neq x_n$, и по този начин ще получите противоречие.

11. Едно число се нарича *трансцендентно*, когато не е алгебрично (за дефиницията на алгебрично число вж. гл. I, текста преди зад. 63). Ако допуснем, че множеството на трансцендентните числа е изброимо или крайно, ще се окаже (понеже множеството на алгебричните числа е изброимо, вж. гл. I, зад. 63), че множеството на реалните числа също е изброимо (гл. I, зад. 51 и 55), което противоречи на зад. 10.

12. Ако допуснем противното, ще се окаже, че множеството $N = [a, \infty) \setminus M$ не е празно. Очевидно a е долна граница на N. Да положим $t = \inf N$. Тогава $a \leqq t$. Очевидно $[a, t) \subset M$ и съгласно условието съществува $\varepsilon > 0$, за което $[a, t+\varepsilon) \subset M$. Следователно $t+\varepsilon$ е миноранта на N, което е противоречие.

13. Да означим с M множеството на онези x с $x \geqq a$, за които затвореният интервал $[a, x]$ може да се покрие с краен брой интервали Δ_α. Целта ни е да покажем, че $b \in M$. Допускаме противното:

$$(1) \qquad b \notin M.$$

За да получим противоречие, ще използуваме континуална индукция (зад. 12). Нека

$$(2) \qquad [a, t) \subset M \quad (a \leqq t).$$

От (1) и (2) следва $t \leqq b$. Нека $\Delta_\beta = (p, q)$ е интервал от покритието, който съдържа t, т. е. $p < t < q$. Избираме число ε така, че $0 < \varepsilon < q - t$. Тогава интервалът $[a, t+\varepsilon]$ може да се покрие с краен брой от интервалите Δ_α; наистина, ако $p \leqq a$, това е очевидно, понеже $[a, t+\varepsilon) \subset (p, q) = \Delta_\beta$; ако пък $a < p$, то е в сила $p \in [a, t) \subset M$ и следователно $[a, p]$ се покрива от краен брой интервали Δ_α, а тъй като $[a, t+\varepsilon] \subset [a, p] \cup (p, q)$, то и $[a, t+\varepsilon]$ се покрива с краен брой интервали Δ_α. И така от $a \leqq t$ и $[a, t) \subset M$ следва $t+\varepsilon \in M$. От дефиницията на M следва, че $[a, t+\varepsilon] \subset M$. Като приложим континуална индукция, заключаваме, че $[a, \infty) \subset M$, което противоречи на (1).

19. Нека a е мажоранта на M. Понеже $M_\alpha \subset M$, числото a ще бъде мажоранта и на M_α, поради което множеството M_α е мажорирано. Тъй като $\sup M_\alpha$ е най-малката мажоранта на M_α, в

сила е $\sup M_\alpha \leqq a$ за всяко α от A. По този начин се убеждаваме, че множеството $\{\sup M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е мажорирано и че всяка мажоранта a на M е мажоранта и на $\{\sup M_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Следователно $S = \sup\{\sup M_\alpha \mid \alpha \in A\} \leqq \sup M$. За да докажем противоположното неравенство, нека $x \in M$. Тогава $x \in M_\beta$ за някое β от A и следователно $x \leqq \sup M_\beta$, поради което $x \leqq S$. И така S е мажоранта на M. Но $\sup M$ е най-малката мажоранта на M. Ето защо $\sup M \leqq S$.

20. Нека $x \in M$ и $y \in N$. Тогава $x + y \in M + N$ и следователно $x + y \leqq \sup(M + N)$. Ако фиксираме y и го прехвърлим от другата страна, ще получим $x \leqq \sup(M + N) - y$ за всяко $x \in M$. Това неравенство показва, че $\sup(M+N)-y$ е мажоранта на M. Но най-малката мажоранта на M е $\sup M$; ето защо $\sup M \leqq \sup(M + N) - y$, което е еквивалентно с $y \leqq \sup(M + N) - \sup M$. Оттук следва, че $\sup(M + N) - \sup M$ е мажоранта на N. Следователно $\sup N \leqq \sup(M + N) - \sup M$ и

$$\sup M + \sup N \leqq \sup(M + N). \tag{1}$$

Нека сега $z \in M + N$. Тогава $z = x + y$, където $x \in M$ и $y \in N$. Следователно $x \leqq \sup M$, $y \leqq \sup N$, поради което $z \leqq \sup M + \sup N$. Това неравенство показва, че $\sup M + \sup N$ е мажоранта на $M + N$, а тъй като най-малката мажоранта на $M + N$ е $\sup(M + N)$, то $\sup(M + N) \leqq \sup M + \sup N$. Последното неравенство и (1) дават желаното равенство.

21. Ако $(\sup M)(\sup N) = 0$, твърдението е очевидно. В противен случай решението е аналогично на онова на зад. 20. За n множителя твърдението се доказва по индукция.

22. Понеже по дефиниция $M - N = M + (-N)$, то $\inf(M - N) = \inf(M + (-N)) = \inf M + \inf(-N) = \inf M - \sup N$ съгласно модификацията на зад. 18 за inf и зад. 14.

27. Приложете зад. 21 и 15.

29. Тъй като $\{x^2 \mid x \in M\} \subset MM$, съгласно зад. 8 ще имаме $\sup\{x^2 \mid x \in M\} \leqq \sup(MM)$. От друга страна, от $y \in M$ и $z \in M$ следва $yz \leqq |y||z| \leqq \max(y^2, z^2) \in \{x^2 \mid x \in M\}$ и $\sup(MM) \leqq \sup\{x^2 \mid x \in M\}$ съгласно зад. 7.

30. Разсъжденията са аналогични на онези от зад. 29.

31. Послужете си със зад. 21, като имате пред вид, че

$$LM = \{x_l y_m \mid l,\ m \in \mathbf{N}\}.$$

32. Нека $N = \{q^{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Очевидно $N = qM$ и съгласно аналога на зад. 21 за inf е в сила $\inf N = q \inf M$. От друга страна, $N \subset M$ и от аналога на зад. 8 за inf следва $\inf M \leqq \inf N$. И така

$\inf M \leqq q \inf M$. Тъй като $q < 1$, от последното неравенство следва $\inf M \leqq 0$. Но 0 е миноранта на M и следователно $0 \leqq \inf M$. Последните две неравенства дават $\inf M = 0$.

33. Допуснете противното и използвайте зад. 17 и 32, за да получите противоречие.

34. Нека $N = \left\{\frac{1}{2n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$. Очевидно $N = \frac{1}{2}M$ и съгласно аналога на зад. 21 за inf е в сила $\inf N = \frac{1}{2}\inf M$. От друга страна, $N \subset M$ и от аналога на зад. 8 за inf следва $\inf M \leqq 0$. Но 0 е миноранта на M, поради което $\inf M \geqq 0$. Последните две неравенства дават $\inf M = 0$.

35. Съгласно зад. 23 и 34 $\sup M = a - \inf\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\} = a$.

36. От $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ следва $\left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{2}{3}\right)^k < \ldots < \left(\frac{n}{n+1}\right)^k < \ldots$ Положете $M_k = \left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$ и докажете, че $\sup M_k = 1$, като си послужите със зад. 21 и 31 и работите индуктивно.

37. Най-напред ще покажем, че редицата $1q,\ 2q^2,\ 3q^3, \ldots, nq^n, \ldots$ е стриктно намаляваща, след като от нея се отстранят краен брой членове. Наистина неравенството $nq^n > (n+1)q^{n+1}$ е еквивалентно с $n > \frac{q}{1-q}$. Следователно горната редица е мажорирана. Нека a е нейна мажоранта. Очевидно

$$\begin{aligned}\inf\{nq^n \mid n \in \mathbf{N}\} &\leqq \inf\{2nq^{2n} \mid n \in \mathbf{N}\} = \inf\{2nq^n.q^n \mid n \in \mathbf{N}\}\\ &\leqq \inf\{2aq^n \mid n \in \mathbf{N}\} = 2a\inf\{q^n \mid n \in \mathbf{N}\} = 0\end{aligned}$$

съгласно аналозите за inf на зад. 7, 8 и 21 и зад. 32.

38. Най-напред покажете, че редицата с общ член $n^k q^n$ $(n \in \mathbf{N})$ е стриктно намаляваща от известно място нататък. За целта забележете, че неравенството $n^k q^n > (n+1)^k q^{n+1}$ е еквивалентно с $q < \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$, и използвайте неравенството $q < 1$ и зад. 36. Оттук следва, че тази редица е ограничена. По-нататък разсъжденията са, както в зад. 37.

39. Числото $b = \max(a, 1)$ е горна граница на множеството M. Наистина от $x \in M$ и $b < x$ следва $b^2 < x^2$; но $a \leqq b^2$, т. е.

$a < x^2$, което е невъзможно. От зад. 21 следва $(\sup M)^2 = \sup(MM)$, а от зад. 29 имаме $\sup(MM) = \sup\{x^2 \mid x \in M\} \leqq a$. И така

(1) $$(\sup M)^2 \leqq a.$$

Нека $N = \{x \mid 0 < x,\ a \leqq x^2\}$. Сега от аналога на зад. 21 за inf и от зад. 30 следва

(2) $$a \leqq (\inf N)^2.$$

От (1) и (2) получаваме $\sup M \leqq \inf N$. Това неравенство не може да бъде строго. Наистина в противен случай би съществувало число z, за което $\sup M < z < \inf N$. От лявото неравенство следва $z \notin M$, т. е. $z^2 > a$, а от дясното имаме $z \notin N$, т. е. $z^2 < a$, което е противоречие. Следователно $\sup M = \inf N$, което заедно с (1) и (2) дава $(\sup M)^2 = a$. Да отбележим изрично, че горното доказателство не предполага съществуването на $\sqrt{a}$. Нещо повече, в него се установява това съществуване.

41. Очевидно $a^{\frac{1}{n}} < 1$ и следователно $\sup M \leqq 1$. Ако допуснем, че това неравенство е строго, ще съществува число q с $0 < q < 1$, за което $a^{\frac{1}{n}} < q$ $(n \in \mathbf{N})$, откъдето $a < q^n$ $(n \in \mathbf{N})$, а това противоречи на зад. 32.

42. Като се използват зад. 16 и 41, да се докаже, че $\inf M = 1$.

43. Ще докажем, че $\inf M = 1$. Да допуснем противното. Тъй като всичките елементи на M са по-големи от 1, ще имаме $1 < \inf M = \xi$. Тогава за всяко n, за което $n - 1 \in \mathbf{N}$, ще бъде в сила $\xi \leqq n^{\frac{1}{n}}$ и следователно $1 \leqq n\left(\frac{1}{\xi}\right)^n$, което противоречи на зад. 37.

45. Неограничените отгоре множества притежават това свойство. Наистина нека M не е мажорирано и $x \in M$. Тъй като M няма мажоранти, числото $\frac{x^2+1}{2}$ не е негова горна граница и следователно съществува елемент y на M, за който $\frac{x^2+1}{2} < y$, т. е. $x^2 + 1 \leqq 2y$. Нека сега M е ограничено отгоре и $\xi = \sup M$. Да предположим, че M има желаното свойство. Тогава за всяко x от M ще имаме $x^2 + 1 \leqq 2y$ за някое y от M и следователно $x^2 + 1 \leqq 2\xi$, т. е. $x^2 \leqq 2\xi - 1$. Ето защо $2\xi - 1$ е горна граница на множеството $\{x^2 \mid x \in M\}$, поради което е в сила $\sup\{x^2 \mid x \in M\} \leqq 2\xi - 1$. Но съгласно зад. 29 и 28 ще имаме $\sup\{x^2 \mid x \in M\} = \sup(MM) \geqq (\sup M)^2 = \xi^2$, следователно $\xi^2 \leqq 2\xi - 1$, т. е. $(\xi - 1)^2 \leqq 0$, откъдето намираме $\xi = 1$ или $\sup M = 1$.

Нека $x \in M$. Съгласно предположението съществува такова y от M, че $x^2 + 1 \leqq 2y$. Тъй като $y \leqq \sup M = 1$, то $x^2 + 1 \leqq 2$, или $x^2 \leqq 1$. И така, ако множеството M притежава желаното свойство, то $M \subset [-1, 1]$ и $\sup M = 1$. Да отбележим освен това, че ако $-1 \in M$, то $1 \in M$. Наистина от $-1 \in M$ следва, че съществува y от M, за което $(-1)^2 + 1 \leqq 2y$, т. е. $1 \leqq y$, а тъй като, от друга страна, $y \leqq \sup M = 1$, то $y = 1$.

Окончателно: Доказахме, че за всяко ограничено M с желаното свойство имаме:

а) $\sup M = 1$;

б) $M \subset [-1, 1]$;

в) от $-1 \in M$ следва $1 \in M$.

За да решим задачата, ще докажем, че всяко множество, което удовлетворява условията а) — в), притежава желаното свойство. Наистина нека M е такова множество и $x \in M$. Ако $x = -1$, съгласно в) е в сила $1 \in M$ и освен това очевидно $x^2 + 1 = 2 \leqq 2y$, където $y = 1$. Ако $x = 1$, отново можем да положим $y = 1$. Найпосле нека $-1 < x < 1$. Тогава $x^2 + 1 < 2$, т. е. $\frac{x^2+1}{2} < 1 = \sup M$. Следователно съществува y от M, за което $\frac{x^2+1}{2} < y$, т. е. $x^2 + 1 < 2y$. Ето защо M притежава желаното свойство.

46. Решението е аналогично на онова на зад. 45. Първо се убеждаваме, че неограничените множества притежават желаното свойство. После, както в зад. 45, установяваме, че ако M е ограничено множество, числото $\xi = \sup M$ удовлетворява неравенството $\xi^2 + 6 \leqq 5\xi$. Това показва, че е в сила $(\xi - 2)(\xi - 3) \leqq 0$, т. е.

(1) $$2 \leqq \xi \leqq 3.$$

По-нататък пак аналогично на решението на зад. 45 се доказва, че $M \subset [-\sqrt{5\xi - 6}, \sqrt{5\xi - 6}]$. Като се вземе пред вид, че $\xi \leqq \sqrt{5\xi - 6}$ и $\xi = \sup M$, се получава

(2) $$M \subset [-\sqrt{5\xi - 6}, \xi].$$

Ако $-\sqrt{5\xi - 6} \in M$, за някое y от M е в сила $(-\sqrt{5\xi - 6})^2 + 6 \leqq 5y$, т. е. $\xi \leqq y$, откъдето следва $y = \xi$. И така

(3) $$\text{от } -\sqrt{5\xi - 6} \in M \text{ следва } \xi \in M.$$

Следователно всяко ограничено множество M с желаното свойство удовлетворява условията (1) — (3). Като се работи аналогично на решението на зад. 45, се показва, че, обратно, всяко множество с (1) — (3) притежава желаното свойство.

47. Когато $0 < \alpha + \beta$, може да се разсъждава, както в зад. 46. Случаят $\alpha + \beta < 0$ се свежда до горния, като се разгледа множеството $-M$. Най-после случаят $\alpha + \beta = 0$ се решава съвсем просто директно.

48. Такова е например множеството $\left\{1 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$.

49. Нека елементите на M са подредени в безкрайна редица $x_1 < x_2 < \ldots$ и N е безкрайно подмножество на M. Ако x_m е произволен елемент на M, ще има елемент x_n на N, за който $m < n$, следователно $x_m < x_n$: съществуването му се осигурява от безкрайността на множеството N. От зад. 7 следва $\sup M \leqq \sup N$. От друга страна, $N \subset M$ и съгласно зад. 8 $\sup N \leqq \sup M$. Последните две неравенства дават $\sup M = \sup N$. С това е доказано „тогава". За да докажем „само тогава", нека M е такова ограничено безкрайно множество без най-голям елемент, че равенството $\sup M = \sup N$ да е в сила за всяко безкрайно подмножество N на M. За произволно $n \in \mathbf{N}$ да положим

$$N_n = \left\{x \mid x \in M, x < \sup M - \frac{1}{n}\right\}.$$

Очевидно $N_n \subset M$ и $\sup N_n \leqq \sup M - \frac{1}{n} < \sup M$ и значи N_n е крайно. От друга страна, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n \subset M$. За да докажем противоположното включване, забелязваме, че при произволен избор на x от M е в сила $x < \sup M$, тъй като M няма най-голям елемент. От зад. 35 следва $\sup\left\{\sup M - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\} = \sup M > x$. Ето защо за някое n ще имаме $\sup M - \frac{1}{n} > x$, което показва, че $x \in N_n$ и толкова повече $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$. С това е установено, че $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$, и за да подредим елементите на M в стриктно растяща редица, е достатъчно да направим това за $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$. Да отбележим най-напред, че от $x \in N_m$ и $y \in N_n \setminus N_m$ следва $x < y$. Наистина в противен случай бихме имали $y \leqq x$ и от дефиницията на N_m бихме получили $y \in N_m$, което противоречи на $y \in N_n \setminus N_m$. Следователно елементите на всеки от членовете на

редицата N_1, $N_2 \setminus N_1$, $N_3 \setminus N_2, \ldots$ са по-малки от тези на следващия. От друга страна (тъй като всичките множества N_n са крайни), елементите на обединението $N_1 \cup (N_2 \setminus N_1) \cup (N_3 \setminus N_2) \cup \ldots \cup (N_{n+1} \setminus N_n) \cup \ldots$ могат да се подредят в стриктно растяща редица, като най-напред се напишат в нарастващ ред елементите на N_1, след това в нарастващ ред тези на $N_2 \setminus N_1$ и т. н. Следователно, за да решим задачата, остава само да проверим, че $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n = N_1 \cup (N_2 \setminus N_1) \cup (N_3 \setminus N_2) \cup \ldots \cup (N_{n+1} \setminus N_n) \cup \ldots$, което е очевидно.

50. За да установите достатъчността, използвайте зад. 49, а за да докажете необходимостта — равенството $\sup M = \sup\left\{\sup M - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$, като имате пред вид, че при $N = M \cap \left(\sup M - \frac{1}{n}, \infty\right)$ е в сила $\sup(M \setminus N) \leqq \sup M - \frac{1}{n} < \sup M$.

51. **в)** Ако $U = \cup\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и $V = \cup\{\Delta'_\beta \mid \beta \in B\}$, то $U \cap V = \cup\{\Delta_\alpha \cap \Delta'_\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$ (гл. I, зад. 10 з)).

52. Нека дадената фамилия е $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Положете $p = \inf \cup\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$, когато множеството $U = \cup\{\Delta_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е минорирано, и $p = -\infty$ в противен случай; аналогично положете $q = \sup U$, когато множеството U е мажорирано, и $q = \infty$, когато не е. Докажете, че $(p, q) \subset U$, и оттук заключете, че или $U = (p, q)$, или $U = [p, q)$, или $U = (p, q]$, или $U = [p, q]$.

54. **а)** Ако допуснем, че $\Delta' \cap \Delta'' \neq \varnothing$, множеството $\Delta' \cup \Delta''$ ще се окаже отворен интервал. Освен това ще имаме $\Delta' \subset \Delta' \cup \Delta'' \subset U$, така че $\Delta' = \Delta' \cup \Delta''$, откъдето $\Delta'' \subset \Delta'$; аналогично $\Delta' \subset \Delta''$. **б)** Нека Δ_1 е обединението на всички отворени интервали, които съдържат Δ и се съдържат в U. Очевидно $\Delta \subset \Delta_1 \subset U$ и съгласно зад. 53 Δ_1 е отворен интервал. Нека сега $\Delta_1 \subset \Delta' \subset U$, където Δ' е отворен интервал. Съгласно дефиницията на Δ_1 ще имаме $\Delta' = \Delta_1$. **в)** Ако Δ се се състои от една точка, твърдението следва от б). Нека сега Δ има непразна вътрешност $\mathring{\Delta}$. Съгласно б) $\mathring{\Delta}$ се съдържа в някоя от компонентите Δ_1 на U. Ако p е край на Δ, който принадлежи на Δ, то $p \in U$ и следователно (съгласно бележката, с която започнахме) p се съдържа в някоя от компонентите Δ_2 на U. Понеже Δ_2 е отворен интервал, който съдържа p, а p е край на $\mathring{\Delta}$, то $\Delta_2 \cap \mathring{\Delta} \neq \varnothing$ и толкова повече $\Delta_2 \cap \Delta_1 \neq \varnothing$. Съгласно а) това има за следствие $\Delta_1 = \Delta_2$ и значи $p \in \Delta_1$. Следователно Δ се съдържа

в Δ_1. е) Съгласно б) всеки от интервалите Δ_α се съдържа в някоя компонента Δ. Нека p е край на Δ_α. Тогава $p \notin U$ и следователно $p \notin \Delta$. И така $\Delta_\alpha \subset \Delta$ и краищата на Δ_α не принадлежат на Δ. Следователно $\Delta_\alpha = \Delta$. ж) От всяка компонента изберете по една рационална точка.

55. Използувайте д) и е) на зад. 52.

56. б) Нека $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от свързани множества и $c \in M_\alpha$ за всяко α от A. Нека U и V са отворени множества, $U \cup V = \varnothing$ и $M = \cup\{M_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset U \cup V$. Да вземем някое β от A. Тъй като M_β е свързано множество, то например $M_\beta \subset U$. За произволно α от A от свързаността на M_α следва $M_\alpha \subset U$ или $M_\alpha \subset V$. Това заедно с $M_\beta \subset U$ и $M_\alpha \cap M_\beta \neq \varnothing$ води до $M_\alpha \subset U$, поради което $M \subset U$. в) Допуснете противното. Тогава за някое c от (a, b) ще имате $c \notin M$. Положете $U = (-\infty, c)$ и $V = (c, \infty)$, за да получите противоречие с дефиницията на свързано множество. г) Нека M е даденото свързано множество и $c \in M$. От $M = \cup\{[x, y] \mid x \leqq c \leqq y, x \in M, y \in M\}$ съгласно в) и от зад. 52 следва, че M е интервал.

57. Нека Δ е интервал и $\Delta \subset U \cup V$, където U и V са отворени множества и $U \cap V = \varnothing$. Нека $U = \bigcup\limits_\mu \Delta_\mu$ и $V = \bigcup\limits_\nu \Delta'_\nu$ са представянията на U и V чрез компоненти (зад. 54). Съгласно зад. 55 компонентите на $U \cup V$ са Δ_μ и Δ'_ν. Тъй като $\Delta \subset U \cup V$, от зад. 54 в) следва, че или $\Delta \subset \Delta_\mu$ за някое μ, или $\Delta \subset \Delta'_\nu$ за някое ν. В първия случай $\Delta \subset U$, а във втория $\Delta \subset V$.

58. Тъй като $[a, b] \not\subset U$ и $[a, b] \subset U \cup V$, то $[a, b] \cap V \neq \varnothing$. Нека Δ е компонента на V, която съдържа някоя точка от $[a, b] \cap V$. Понеже $[a, b] \not\subset V$, толкова повече $[a, b] \not\subset \Delta$ и в същото време $[a, b] \cap \Delta \neq \varnothing$, поради което поне единият от краищата на Δ принадлежи на $[a, b]$; без ограничение на общността можем да предположим, че например левият край a_1 на Δ принадлежи на $[a, b]$. Очевидно $a_1 \neq b$, защото от $a_1 = b$ би следвало $[a, b] \cap \Delta = \varnothing$. И така $a \leqq a_1 < b$. Понеже $a_1 \notin V$, $a_1 \in [a, b]$ и $[a, b] \subset U \cup V$, то $a_1 \in U$. Следователно съществува такова b_1, че $a_1 < b_1 < b$ и $[a_1, b_1] \subset U$. Тъй като a_1 е левият край на компонентата Δ на V, то $[a_1, b_1] \cap V \neq \varnothing$, $a_1 \notin V$, откъдето $[a_1, b_1] \not\subset V$.

59. Допускаме противното. Това означава, че би било вярно твърдението: поне две от множествата U_n ($n \in \mathbf{N}$) не съдържат $[a, b]$. Ще въведем следната дефиниция: ще казваме, че един интервал $[c, d]$ притежава свойството D относно една редица V_1, $V_2, \ldots$ от отворени множества, когато са изпълнени условията:

А) $[c, d] \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \varnothing$; Б) от $m \neq n$ следва $[c, d] \subset V_m \cup V_n$;

В) поне две от множествата V_n ($n \in \mathbf{N}$) не съдържат $[c, d]$. По същество в задачата се твърди, че никой интервал не притежава свойството D, но това още не е доказано. За да докажем това твърдение, допуснахме противното. При това допускане интервалът $[a, b]$ очевидно притежава свойството D относно редицата U_1, $U_2, \ldots$.

Ще докажем твърдението α): Ако интервалът $[c, d]$ притежава свойството D относно редицата V_1, $V_2, \ldots$, непременно съществува подинтервал $[c_1, d_1]$ на $[c, d]$, който се съдържа във V_1 и притежава свойството D относно V_2, V_3, ...

Съществуват следните две възможности: 1) $[c, d] \not\subset V_1$ и 2) $[c, d] \subset V_1$.

Да разгледаме най-напред случая 1). Съгласно В) съществува такова множество V_{n_0} с $n_0 \neq 1$, че $[c, d] \not\subset V_{n_0}$. Съгласно Б) е в сила $[c, d] \subset V_1 \cup V_{n_0}$, а от зад. 58 следва, че съществува интервал $[c_1, d_1]$, за който $[c_1, d_1] \subset [c, d]$, $[c_1, d_1] \subset V_1$, $[c_1, d_1] \not\subset V_{n_0}$ и $[c_1, d_1] \cap V_{n_0} \neq \varnothing$. Остава да докажем, че $[c_1, d_1]$ притежава свойството D относно редицата V_2, V_3, ... Първо ще установим, че $[c_1, d_1] \cap \left(\bigcap\limits_{n=2}^{\infty} V_n\right) = \varnothing$. Наистина съгласно А) имаме $[c_1, d_1] \cap \left(\bigcap\limits_{n=2}^{\infty} V_n\right) \subset [c, d] \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \varnothing$, тъй като $[c_1, d_1] \subset [c, d]$ и $[c_1, d_1] \subset V_1$. Освен това съгласно Б) е в сила $[c_1, d_1] \subset [c, d] \subset V_m \cup V_n$ ($m, n \geqq 2$). Накрая ще покажем, че поне две от множествата V_n ($n \geqq 2$) не съдържат интервала $[c_1, d_1]$. Едно такова множество е V_{n_0} съгласно 1). Да допуснем, че друго такова множество няма. Тогава бихме имали $[c_1, d_1] \subset V_n$ за всяко естествено n с $n \neq n_0$ и съгласно 1) бихме получили $\varnothing \neq [c_1, d_1] \cap V_{n_0} \subset [c_1, d_1] \cap \left(\bigcap\limits_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} V_n\right) \cap V_{n_0} \subset [c, d] \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n\right)$, което противоречи на А). С това е доказано, че интервалът $[c_1, d_1]$ притежава свойството D относно редицата V_2, V_3, ..., и по този начин твърдението α) е установено в случая 1).

За да се убедим във верността на α) и в случая 2), е достатъчно да положим $[c_1, d_1] = [c, d]$.

Сега с помощта на твърдението α) ще покажем, че допускането В) води до противоречие. Наистина вече видяхме, че интервалът $[a, b]$ има свойството D относно редицата U_1, $U_2, \ldots$. Тогава от α) следва, че ще съществува интервал $[a_1, b_1]$, за който $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, $[a_1, b_1] \subset U_1$ и който има свойството D относно редицата U_2, $U_3, \ldots$. Като приложим отново α) за $[a_1, b_1]$ и за редицата

$U_2, U_3, \ldots$, ще получим интервал $[a_2, b_2]$ с $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2] \subset U_2$, който има свойството D относно редицата $U_3, U_4, \ldots$, и т. н. Като продължим този процес неограничено, ще получим редица от затворени интервали $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$, за която $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $[a_n, b_n] \subset U_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Съгласно теоремата на Кантор — Хели (зад. 9) съществува такава точка ξ, че $\xi \in [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$, и следователно $\xi \in [a, b] \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right)$, което е противоречие.

Четвърта глава

1. Индукция спрямо n. При $n = 1$ проверката е тривиална. Нека твърдението е вярно за някое n, а $P_{n+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu x^{n+1-\nu}$ е полином от степен $n+1$ с $a_0 > 0$. Поради верността на твърдението за $n = 1$ съществува число $N_1 > 0$, за което

$$a_0 x > 1 - a_1 \tag{1}$$

за всяко $x > N_1$. От (1) следва

$$a_0 x^{n+1} + a_1 x^n > x^n \tag{2}$$

за $x > N_1$. За всички такива x от (2) имаме

$$P_{n+1}(x) > x^n + \sum_{\nu=2}^{n+1} a_\nu x^{n+1-\nu}, \tag{3}$$

т. е. $P_{n+1}(x)$ се минорира от полином от степен n със старши коефициент 1. Съгласно индукционното предположение ще съществува такова N_2, че за всяко $x > N_2$ да бъде в сила

$$x^n + \sum_{\nu=2}^{n+1} a_\nu x^{n+1-\nu} > 0. \tag{4}$$

При $N = \max(N_1, N_2)$ от (3) и (4) следва, че неравенството $P_{n+1}(x) > 0$ е вярно за $x > N$.

2. Нека $p_1, p_2, \ldots$ са различни прости числа. Положете $A_n = \{p_n, p_n^2, p_n^3, \ldots\}$.

5. **а)** Не. **б)** Да съгласно зад 1. **в)** Не съгласно зад. 1. **г)** Не. **д)** Неравенството от условието е равносилно с $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$, т. е. с $n > 1000$, поради което въпросното множество е кофинитно. **е)** Неравенството от условието е равносилно с $\frac{n+1}{n^2+1} < \varepsilon$, т. е. с $\varepsilon n^2 - n + (\varepsilon - 1) > 0$. Ето защо от $\varepsilon > 0$ и от зад. 1 следва, че разглежданото множество е кофинитно. **ж)** Да, решението е аналогично на е). **з)** Неравенството от условието е равносилно с $n^2 - 200n - 10 < 0$, поради което от зад. 1 следва, че въпросното множество не е кофинитно. **и)** Да, решението е аналогично на е). **й)** Също. **к)** Също.

6. **а)** Въпросното неравенство може да се запише във вида $(1 + 10^{-5})^n > n$. Като използуваме биномната формула, виждаме, че последното неравенство е равносилно със

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} 10^{-5\nu} > n. \tag{1}$$

Тъй като $\binom{n}{2} 10^{-10} = \frac{n(n-1)}{2} 10^{-10} > n$ за всички достатъчно големи n и всичките събираеми в лявата страна на (1) са положителни, (1) е в сила за всички достатъчно големи n. **б)** Работи се, както в а), но вместо $\binom{n}{2} 10^{-10}$ се разглежда $\binom{n}{11} 10^{-55}$.

7. Нека f е полином от степен k. Да представим q във вида $q = 1 + \alpha$, където $\alpha > 0$. Тогава съгласно биномната формула въпросното неравенство е равносилно със

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \alpha^\nu > P(n). \tag{1}$$

При достатъчно големи n съществуват естествени числа ν с $k < \nu < n$. Избираме едно такова ν и го фиксираме. Разликата

$$\binom{n}{\nu} \alpha^\nu - P(n) \tag{2}$$

е полином на n от степен ν. Поради $\nu > k$ старшият коефициент на (2) ще бъде $\frac{\alpha^\nu}{\nu!}$, т. е. положителен. Ето защо от зад. 1 следва, че полиномът (2) на n приема положителни стойности за всички достатъчно големи n, което доказва (1), тъй като всичките събираеми в лявата страна са положителни.

8. Нека

(1) $$P(x) = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu x^{k-\nu}$$

и

(2) $$Q(x) = \sum_{\nu=0}^{k} |a_\nu| x^{k-\nu}.$$

От (1) и (2) следва $Q(x) \geqq P(x)$ за всички $x \geqq 0$. Неравенството в условието на задачата ще бъде доказано, ако се установи, че

(3) $$Q(x) < q^x$$

за всички достатъчно големи x. Съгласно зад. 7 съществува такова N, че за всяко естествено $n > N$ да е в сила

(4) $$Q(n+1) < q^n.$$

Нека сега $x > N+1$, а n е естествено число, за което $x-1 < n \leqq x$. Тогава $n > N$ и следователно за това n е в сила (4). Тъй като $n \leqq x$ и $q > 1$, то

(5) $$q^x \geqq q^n.$$

Понеже коефициентите на Q са неотрицателни и $n+1 > x$, то

(6) $$Q(n+1) \geqq Q(x).$$

От (4) — (6) следва (3), което решава задачата.

9. а) При $q = 0$ твърдението е очевидно. Нека сега $0 < q < 1$. Тогава $\frac{1}{q} > 1$ и съгласно зад. 7 с $P(x) = \frac{1}{\varepsilon}$ съществува такова число N, че за всяко $n > N$ е в сила неравенството $\left(\frac{1}{q}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$. б) Следва от зад. 7 при $P(x) = l$. в) Следва от зад. 7 при $P(x) = \frac{x}{\varepsilon}$. г) Неравенствата $1-\varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon$ са равносилни с $(1-\varepsilon)^n < a < (1+\varepsilon)^n$ при $\varepsilon < 1$. От б) при $q = 1+\varepsilon$ и $l = a$ се вижда, че множеството на всичките n, за които $a < (1+\varepsilon)^n$, е кофинитно. Аналогично от а) се вижда, че множеството на всичките n, за които $(1-\varepsilon)^n < a$, е кофинитно. Но сечение на две кофинитни множества е кофинитно съгласно зад. 3. д) Въпросното неравенство е равносилно с $n < (1+\varepsilon)^n$ и от зад. 7 се вижда, че разглежданото множество действително е кофинитно. е) Ако $0 < a < 1$, то $\log_a n \leqq 0$ и твърдението е тривиално. Нека сега $a > 1$. Тогава въпросното неравенство е равносилно с

$n < a^{\varepsilon n} = (a^\varepsilon)^n$. От $\varepsilon > 0$ и $a > 1$ следва $a^\varepsilon > 1$. Тогава зад. 7 с $q = a^\varepsilon$ и $P(x) = x$ завършва доказателството.

10. Нека $\varepsilon > 0$. Твърдението е равносилно със съществуването на такова ν, че за $n > \nu$ да е в сила $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, т. е.

(1) $$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Но (1) очевидно е равносилно със

(2) $$\frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Нека сега по дефиниция $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$ и $n > \nu$. Тогава е в сила (2), т. е. (1), което доказва твърдението.

11. Тъй като числото a е граница на редицата $a_1, a_2, \ldots$ от реални числа точно когато за всяко $\varepsilon > 0$ множеството на естествените числа n, за които $|a_n - a| < \varepsilon$, е кофинитно, твърдението се свежда към зад. 5.

12. Нека $a = \inf\left\{\frac{a_n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$ и $\varepsilon > 0$. Съгласно дефиницията a е най-голямата долна граница на множеството $\left\{\frac{a_n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$. Тъй като $a + \frac{\varepsilon}{2} > a$, числото $a + \frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница на това множество. Ето защо съществува номер m, за който $\frac{a_m}{m} < a + \frac{\varepsilon}{2}$. Нека сега n е произволно естествено число. Тогава то може да се представи във вида $n = km + l$, където k и l са цели и $k \geqq 0$, $0 \leqq l < m$. Съгласно условието на задачата $a_n \leqq ka_m + a_l$. Ето защо $a \leqq \frac{a_n}{n} \leqq \frac{km}{km+l} \cdot \frac{a_m}{m} + \frac{a_l}{n} < a + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a_l}{n}$. Оттук следва

(1) $$a \leqq \frac{a_n}{n} < a + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a_l}{n}.$$

Да фиксираме m. Нека α е най-голямото от положителните числа a_l $(0 \leqq l < m)$. Ако $\nu = \frac{2\alpha}{\varepsilon}$, при $n > \nu$ от (1) следва

(2) $$a - \varepsilon < \frac{a_n}{n} < a + \varepsilon,$$

което е равносилно със

(3) $$\left|\frac{a_n}{n} - a\right| < \varepsilon.$$

Тъй като (2) е в сила при $n > \nu$, (3) също е изпълнено за всяко $n > \nu$, което доказва твърдението.

13. Допускаме противното и полагаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{1}$$

Нека

$$b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{10n^2+8n+1}{n^3+2n+1}. \tag{2}$$

Съгласно зад. 11 д) (при $k = 2$, $l = 3$) ще имаме

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{3}$$

От (1) и (3) следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Но съгласно (2) $a_n b_n = 1$, което е противоречие.

14. Лесно се съобразява, че дефиницията на $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ може да се прередактира по следния начин: Казва се, че редицата $a_1, a_2, \ldots$ клони към плюс безкрайност, когато за всяко число N множеството $\{n \mid n \in \mathbf{N},\ a_n > N\}$ е кофинитно. Аналогична забележка важи и за дефиницията на $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. При това положение твърдението следва от зад. 5 к) при $k = 3$ и $l = 2$.

15. Използувайте дефинициите.

16. Също.

17. Сведете твърдението към зад. 5 к) съгласно забележката в решението на зад. 14.

18. Да допуснем, че такава рационална функция R съществува; нека k и l са съответно степените на числителя и знаменателя на R. За k и l са налице следните три възможности: 1) $k < l$, 2) $k = l$ и 3) $k > l$. В случаите 1) и 2) от зад 11 в) и д) следва, че редицата с общ член $R(n)$ ще бъде сходяща. Да положим $\lim\limits_{n\to\infty} R(n) = a$. Тогава за всички достатъчно големи n ще бъдат в сила неравенствата $a - 1 < R(n) < a + 1$, т. е. $R(n) \in [a-1,\ a+1]$ за всички достатъчно големи n. Следователно само краен брой рационални числа измежду онези, които са извън интервала $[a-1,\ a+1]$, принадлежат на $R(\mathbf{N})$. Ако разширим интервала $[a-1,\ a+1]$ по такъв начин, че да включим и тези краен брой рационални числа, ще се убедим, че съществува краен интервал $[\alpha,\ \beta]$, за който $R(\mathbf{N}) \subset [\alpha,\ \beta]$. По аналогичен начин се доказва, че съществува краен интервал $[\gamma,\ \delta]$, такъв, че $R(-n) \in [\gamma,\ \delta]$ за всяко естествено n. Ето защо рационалните числа, които са извън интервалите $[\alpha,\ \beta]$ и $[\gamma,\ \delta]$, не могат да се представят като стойности на R за

целочислени стойности на аргумента. И така случаите 1) и 2) са невъзможни. В случая 3) от зад. 17 следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} |R(n)| = \infty$, поради което $|R(n)| > 1$ за всички достатъчно големи n. Ето защо само краен брой рационални числа от интервала $[-1,\ 1]$ принадлежат на $R(\mathbf{N})$. Аналогично се доказва, че само краен брой рационални числа от този интервал могат да се представят във вида $R(-n)$ при $n \in \mathbf{N}$. И така отговорът на поставения въпрос е отрицателен.

19. а) От $\dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\nu+1}$ следва $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ и търсената граница е 1. б) Вж. в). в) От

$$\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m)} = \frac{1}{m}\cdot\frac{(\nu+m)-\nu}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m)}$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m-1)} - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+m)}\right)$$

следва

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1.2.\ldots.m} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\right)$$

и търсената граница е $\dfrac{1}{m.m!}$.

20. а) $\dfrac{1}{2}$. б) $\dfrac{1}{12}$. в) $\dfrac{1}{2m}\cdot\dfrac{1}{1.3.5\ldots(2m-1)}$.

21. Опростете общите членове на редиците чрез подходящи преобразувания и съкращения.

22. Използувайте резултатите от зад. 1. гл. II. Отговорите са съответно: а) $\dfrac{1}{2}$. б) $\dfrac{1}{3}$. в) $\dfrac{1}{4}$. г) Съгласно зад. 39, гл. II функцията x^k притежава сумиращ полином $\beta_{k+1}(x)$ от степен $k+1$. Тогава

$$\begin{cases} 1^k = \beta_{k+1}(2) - \beta_{k+1}(1), \\ 2^k = \beta_{k+1}(3) - \beta_{k+1}(2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n^k = \beta_{k+1}(n+1) - \beta_{k+1}(n). \end{cases} \tag{1}$$

Чрез почленно събиране на равенствата (1) се получава

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k = \beta_{k+1}(n+1) - \beta_{k+1}(1). \tag{2}$$

Ето защо съгласно зад. 11 в) търсената граница е равна на старшия коефициент на полинома $\beta_{k+1}(x)$. Но съгласно решението на зад. 39, гл. II този старши коефициент е $\frac{1}{k+1}$. Това обяснява и директно получените отговори на случаите а) — в).

23. б) Съгласно биномната формула имаме

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(a+\frac{\nu}{n}\right)^k = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu}a^{k-\mu}\left(\frac{\nu}{n}\right)^{\mu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu}a^{k-\mu}\frac{1}{n^{\mu+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\mu}.$$

Тогава

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(a+\frac{\nu}{n}\right)^k = \sum_{\mu=0}^{k}\binom{k}{\mu}a^{k-\mu}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\mu+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\mu}$$

(1)

$$= \sum_{\mu=0}^{k}\frac{1}{\mu+1}\binom{k}{\mu}a^{k-\mu}$$

съгласно зад. 22. Но

(2) $$\frac{1}{\mu+1}\binom{k}{\mu} = \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{\mu+1}$$

и

(3) $$\sum_{\mu=0}^{k}\binom{k+1}{\mu+1}a^{k-\mu} = (a+1)^{k+1} - a^{k+1}.$$

От (1) — (3) следва, че търсената граница е $\frac{(a+1)^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$.

24. а), б). Следва от зад. 9 а) и дефиницията на сходимост с помощта на кофинитни множества. в) При $q=0$ твърдението е тривиално, затова нека $q \neq 0$. При $\varepsilon > 0$ от зад. 7 с $\frac{1}{|q|}$ вместо q и $P(x) = \frac{x^k}{\varepsilon}$ следва, че съществува такова число N, че за всяко $n > N$ е в сила $\frac{1}{|q|^n} > \frac{n^k}{\varepsilon}$. Това неравенство е равносилно с $|n^k q^n| < \varepsilon$, което решава задачата.

25. Следва от зад. 7.

26. а) $\frac{1}{1-q}$. б) Приложете зад. 5 б), гл. II и зад. 24 в), за да получите, че търсената граница е $\frac{1}{(1-q)^2}$. в) От а) и б) следва, че търсената граница е $\frac{11}{16}$. г) Умножете произведението с $1-q$ и опростете получения резултат. След това приложете зад. 24 б), за да получите за търсената граница стойността $\frac{1}{1-q}$.

27. а) 0. б) 1. в) 3. г) 0 при $|a|<1$; 1 при $|a|>1$; $\frac{1}{2}$ при $a=1$; при $a=-1$ редицата не е дефинирана. д) 0 при $|a| \neq 1$; $\frac{1}{2}$ при $a=1$; при $a=-1$ редицата е $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$ и следователно е разходяща. е) Редицата не е дефинирана при $a=0$. При $a \neq 0$ общият член може да се запише във вида $\frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}$, откъдето се вижда, че при $|a|<1$ границата е -1, при $|a|=1$ тя е 0, а при $|a|>1$ е 1. ж) 0 за всяко $a \neq -1$.

28. Приложете дефинициите.

29. а) 1. б) 0. в) $\frac{1}{3}$.

30. б) Втората редица е дефинирана за $a_n \geqq 0$ при четно k; при нечетни k няма ограничения. При $a=0$ трябва да докажем, че за всяко $\varepsilon > 0$ е в сила

(1) $$|\sqrt[k]{a_n}| < \varepsilon$$

за всички достатъчно големи n. Но (1) е равносилно с $|a_n| < \varepsilon^k$, което е изпълнено за всички достатъчно големи n поради $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. При $a \neq 0$ всички a_n с достатъчно големи номера имат знака на a. От тъждеството $x-y = (x^k-y^k)\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}x^{k-1-\nu}y^{\nu}$ при $x=\sqrt[k]{a_n}$ и $y=\sqrt[k]{a}$ следва

$$\left|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-1-\nu}\left(\sqrt[k]{a}\right)^{\nu}},$$

откъдето поради $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следва

$$\left|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{a}\right|<\frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}}<\varepsilon$$

за всички достатъчно големи n.

31. а) -1. б) 1. в) -1. г) 1.

32. а) 0. б) 0. в) 0. г) 1. д) 0. е) $\frac{1}{2}$. ж) $-\frac{1}{4}$. з) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$. и) $\frac{1}{k}\sum\limits_{\nu=1}^{k} a_\nu$. й) $\frac{2}{3}$.

33. Използувайте, че $0<(n+1)^p-n^p=n^p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right]$ $\leqq n^p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=n^{p-1}$ и че $p-1<0$.

34. а) $\frac{1}{3}$. б) $\frac{2}{3}$. в) -8. г) 6. д) k. е) $\frac{k}{l}$. ж) -1. з) $\frac{k-l}{2}$.

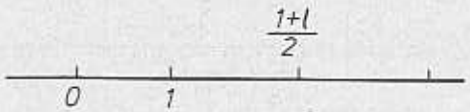
35. Прилагат се многократно правилата за действия със сходящи редици.

36. а) $\frac{1}{3}$. б) $\frac{1}{k}$. в) $\frac{5}{3}$. г) $\frac{1}{2}$. д) 1. е) $\frac{1}{2}$.

38. Следва от неравенството $||x|-|y||\leqq|x-y|$.

40. Следва от тъждествата $\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}$ и от зад. 38.

41. а) Чрез почленно умножение на първите n от дадените неравенства получаваме $\left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right|\leqq q^n$ и резултатът следва от зад. 24 б) и 39. б) Да положим $\left|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$. Тогава $0\leqq l<1$, поради което $0\leqq l<\frac{1}{2}(l+1)<1$ (фиг. 7). Нека $q=\frac{l+1}{2}$. Тогава



Фиг. 7

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l<q$ и следователно $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<q$ за всички достатъчно големи n; тогава съгласно а) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, което заедно със зад. 39 дава желания резултат. в) Аналогично на а) намираме $\frac{a_{n+1}}{a_1}\geqq q^n$ и резултатът следва от зад. 25 а).

42. По условие съществува константа l, за която е в сила $-l\leqq\frac{na_{n+1}}{a_n}\leqq l$. Ето защо $-\frac{l}{n}\leqq\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq\frac{l}{n}$. Сега твърдението следва от зад. 41 б).

43. а), б) Следва от зад. 41 б). в) Нека $N>0$. Тогава съгласно б) е в сила $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N^n}{n!}=0$. Ето защо за всички достатъчно големи n ще бъде изпълнено неравенството $\frac{N^n}{n!}<1$, откъдето следва $N<\sqrt[n]{n!}$ за всички достатъчно големи n.

44. а) Очевидно $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{n}{n^2+n}\leqq a_n\leqq\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{n}{n^2+1}$. Но

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{n}{n^2+n}=\frac{n^2}{n^2+n},\quad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{n}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2+1}.$$

От

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leqq a_n\leqq\frac{n^2}{n^2+1}\quad\text{и}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$$

следва $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. б) 1. в) 1. г) Поради

$$\sqrt{1+\frac{\nu}{n^2}}-1=\frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+\nu})}$$

е в сила

$$\frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+n})}\leqq\frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+\nu})}\leqq\frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+1})}$$

$(\nu=1,2,\ldots,n)$. Ето защо

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+n})}\leqq a_n\leqq\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu}{n(n+\sqrt{n^2+1})},$$

т. е.

$$\frac{1}{n(n+\sqrt{n^2+n})}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\leqq a_n\leqq\frac{1}{n(n+\sqrt{n^2+1})}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n(n+\sqrt{n^2+n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n(n+\sqrt{n^2+1})}=\frac{1}{2}.$$

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{4}$.

д) Работи се, както в случая г), но вместо формулата за сумата на първите n естествени числа се използва тази за сумата на квадратите им. Резултатът е $\frac{1}{9}$. Препоръчва се на читателя в обобщение на случаите г) и д) да се пресметне границата

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sqrt[k+1]{1+\frac{\nu^k}{n^{k+1}}}-1\right)\quad (k\in\mathbf{N}),$$

като за целта използва резултата на зад. 22 г).

45. От очевидното неравенство $\sqrt[n]{a^n}\leqq\sqrt[n]{\sum\limits_{\nu=1}^{m}a_\nu^n}\leqq\sqrt[n]{ma^n}$ и от $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$ резултатът следва веднага.

46. От неравенството на Бернули (зад. 32, гл. II) следва, че за всички достатъчно големи n е в сила

$$1+\frac{a}{n}\leqq\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n. \tag{1}$$

От друга страна,

$$\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n=\left(1-\frac{a}{n^2+a}\right)^{-n}. \tag{2}$$

Пак от неравенството на Бернули следва

$$\left(1-\frac{a}{n^2+a}\right)^n\geqq 1-\frac{na}{n^2+a}=\frac{n^2-na+a}{n^2+a}. \tag{3}$$

От (2) и (3) се получава $\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n\leqq\frac{n^2+a}{n^2-na+a}$, което заедно с (1) дава

$$1+\frac{a}{n}\leqq\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^n\leqq\frac{n^2+a}{n^2-na+a}. \tag{4}$$

Тъй като при неограниченото нарастване на n лявата и дясната страна на (4) очевидно клонят към 1, резултатът следва веднага.

47. **а)** Следва от зад. 9 г) и от дефиницията на понятието сходимост. **б)** Нека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Тогава за всички достатъчно големи n ще имаме $0<\frac{a}{2}<a_n<a+1$. Ето защо $\sqrt[n]{\frac{a}{2}}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a+1}$ и твърдението следва от а). **в)** Зад. 9 д). **г)** Зад. 8. **д)** Нека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3+n^2+1}=a$. Тогава за всички достатъчно големи n ще бъдат в сила неравенствата $0<\frac{a}{2}<\frac{a_n}{n^3+n^2+1}<a+1$. Ето защо

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}(n^3+n^2+1)}<a_n<\sqrt[n]{(a+1)(n^3+n^2+1)}.$$

Сега твърдението следва от г).

48. Нека $OP=x$. Да разделим отсечката OP (фиг. 3) на n равни части и върху всяка от тях да построим по един вписан и един описан правоъгълник, както е посочено на фигурата. Нека s_n и S_n са съответно лицата на вписаната и описаната стъпаловидна фигура. Тъй като височините на отделните правоъгълници са съответно ординатите на точките от параболата с абсциси $\frac{x}{n}$, $\frac{2x}{n}$, $\ldots$, $\frac{nx}{n}$, те са съответно $\frac{ax^2}{n^2}$, $\frac{a(2x)^2}{n^2}$, $\ldots$, $\frac{a(nx)^2}{n^2}$. Тогава

$$s_n=\frac{x}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}a\frac{(\nu x)^2}{n^2}=\frac{ax^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

и

$$S_n=\frac{x}{n}\sum_{\nu=1}^{n}a\frac{(\nu x)^2}{n^2}=\frac{ax^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Очевидно $s_n<S<S_n$ и от $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{ax^3}{3}$ следва $S=\frac{ax^3}{3}$.

49. **а)** Нека $\varepsilon>0$. Поради $|\sin x|\leqq|x|$ от $\sin a_n-\sin a=2\sin\frac{a_n-a}{2}\cos\frac{a_n+a}{2}$ следва $|\sin a_n-\sin a|\leqq|a_n-a|$. Поради $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ е в сила $|a_n-a|\to 0$, което доказва твърдението. **б)** Аналогично. **в)** и **г)** следват от а) и б) и от теоремата за граница на частно.

50. а) Редицата q, q^2, q^3,... е намаляваща, защото $q^{n+1} = q \cdot q^n < q^n$ поради $0 < q < 1$. Освен това тя е ограничена отдолу, защото $0 < q$. Следователно е сходяща. Нека l е границата ѝ. Редицата q^2, q^3, q^4,... се получава от нея чрез изпускане на първия член, поради което има същата граница l. Ако в тъждеството $q^{n+1} = q \cdot q^n$ оставим n да расте неограничено, в граница получаваме $l = ql$, откъдето поради $q \neq 1$ следва $l = 0$. б) Поради $q > 1$ дадената редица е растяща. Тя е неограничена отгоре. Наистина в противен случай тя би била сходяща и чрез разсъждения, аналогични на онези от а), бихме заключили, че границата ѝ е 0, което е невъзможно поради $q^n > 1$. Сега твърдението следва от очевидната забележка, че неограничените отгоре растящи редици дивергират към ∞. в) Нека $a_n = n^k q^n$. Тогава $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k q$ и поради $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k = 1$ и $q < 1$ ще имаме $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ за всички достатъчно големи n. Поради $a_n > 0$ това дава $a_{n+1} < a_n$. Ето защо от известно място нататък редицата е намаляваща. Тъй като е ограничена отдолу от 0, тя е сходяща. Нека l е границата ѝ. Ще докажем, че $l = 0$. В противен случай чрез граничен преход при $n \to \infty$ в равенството $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k q$ бихме получили $q = 1$, което е противоречие. г) Аналогично. д) Обобщение на а), в) и г), което се доказва по същия начин.

51. Равенството $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ може да се запише във вида

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e. \tag{1}$$

Нека p е произволно естествено число. Тогава

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-p} = e. \tag{2}$$

Наистина за всяко n е в сила

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^p. \tag{3}$$

Тъй като p е фиксирано, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ и чрез граничен преход в (3) при $n \to \infty$ се получава (2), като се използва (1).

Тъй като редицата с общ член $\left(\frac{n+p+1}{n+p}\right)^n$ се получава от редицата с общ член $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-p}$ чрез изпускане на първите p члена, от (2) следва

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+p+1}{n+p}\right)^n = e. \tag{4}$$

Сега решението на задачата следва непосредствено. Така например от $\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ и от (4) при $p = 0, 1, 2$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = e^3$. Индуктивно се убеждаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$.

52. Аналогично на зад. 51 се получава $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = e^{-k}$.

53. а) e. б) e^{-10}. в) e^{-7}.

54. Нека $x \geqq 0$. Ще покажем, че дадената редица е монотонно растяща и ограничена отгоре. Неравенството

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \tag{1}$$

е равносилно с $(n+x)^n(n+1)^{n+1} \leqq (n+1+x)^{n+1}n^n$, т. е. със

$$(n^2+nx+n+x)^n(n+1) \leqq (n^2+n+nx)^n(n+1+x),$$

или със

$$\frac{n+1}{n+1+x} \leqq \left(\frac{n^2+n+nx}{n^2+nx+n+x}\right)^n.$$

Последното неравенство е равносилно с

$$1-\frac{x}{n+1+x} \leqq \left(1-\frac{x}{n^2+nx+n+x}\right)^n. \tag{2}$$

От неравенството на Бернули (зад. 32, гл. II) следва

$$1-\frac{nx}{n^2+nx+n+x} \leqq \left(1-\frac{x}{n^2+nx+n+x}\right)^n. \tag{3}$$

Непосредствено се убеждаваме, че

$$(4)\qquad 1-\frac{x}{n+1+x} \leqq 1-\frac{nx}{n^2+nx+n+x}.$$

От (3) и (4) следва (2), т. е. (1). С това е доказана монотонността на дадената редица. Ограничеността ѝ се доказва по следния начин: Нека k е естествено число, $k \geqq x$. Тогава очевидно

$$(5)\qquad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq \left(1+\frac{k}{n}\right)^n.$$

Но съгласно зад. 51 редицата в дясната страна на (5) е сходяща и следователно ограничена. Нека сега $x<0$. Очевидно

$$(6)\qquad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

От друга страна, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$ съгласно зад. 46. Вече видяхме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ съществува, тъй като $-x>0$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \geqq 1$. Ето защо съществува и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$. От (6) следва, че редицата с общ член $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ е сходяща.

55. Приложете неравенството на Бернули.

56. От тъждеството $a^n-b^n=(a-b)\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}a^{n-\nu-1}b^\nu$ очевидно следва неравенството

$$(1)\qquad a^n-b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$$

при $a \geqq b \geqq 0$. Търсеното неравенство следва от (1) при $a = 1+\frac{y}{n}$, $b=1+\frac{x}{n}$ и от $1+\frac{x}{n}>0$ за всички достатъчно големи n.

57. Следва от зад. 56 и от дефиницията на функцията E.

58. Аналогично на (1) от решението на зад. 56 се доказва неравенството

$$(1)\qquad |a^n-b^n| \leqq n|a-b|c^{n-1}$$

при $0 \leqq a \leqq c$ и $0 \leqq b \leqq c$. Тъй като за всички достатъчно големи n са в сила неравенствата $0 \leqq 1+\frac{x_n}{n} \leqq 1+\frac{M}{n}$,

$0 \leqq 1+\frac{x}{n} \leqq 1+\frac{M}{n}$, където M е горна граница на редицата $x_1, x_2, \ldots$, от (1) при $a=1+\frac{x_n}{n}$, $b=1+\frac{x}{n}$, $c=1+\frac{M}{n}$ следва

$$(2)\qquad \left|\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leqq |x_n-x|\left(1+\frac{M}{n}\right)^{n-1}.$$

От $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{M}{n}\right)^{n-1}=E(M)$ получаваме, че дясната страна на (2), а с нея и лявата клонят към 0. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=E(x)$; следователно $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n=E(x)$.

59. Следва от зад. 58 и от дефиницията на функцията E.

60. а) Следва от дефиницията на функцията E. б) При $x \geqq 0$ следва от зад. 55, а при $x<0$ от $E(x)E(-x)=E(x-x)=E(0)=1$ (зад. 59) и $E(-x)>0$ (съгласно току-що доказаното) следва $E(x)>0$. в) Следва от зад. 59.

61. От дефиницията на функцията E имаме $E(1)=e$. От зад. 59 следва

$$\left(E\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q = \underbrace{E\left(\frac{1}{q}\right)E\left(\frac{1}{q}\right)\ldots E\left(\frac{1}{q}\right)}_{q\ \text{пъти}} = E\left(q\frac{1}{q}\right)=E(1)=e$$

за всяко естествено q. Но $E\left(\frac{1}{q}\right)>0$ съгласно зад. 60 б). Следователно $E\left(\frac{1}{q}\right)=\sqrt[q]{e}=e^{\frac{1}{q}}$. Тогава желаното равенство се получава от зад. 59 и 60 в).

62. Нека $x<y$ и $z=y-x$. Тогава от зад. 55 следва $E(z)>1$, т. е. $\frac{E(y)}{E(x)}>1$ (зад. 60 в)).

63. Следва от зад. 57 и 62.

64. а) Следва от зад. 55. б) Следва от а) и от зад. 60 в).

65. 2.

66. За рационални x — зад. 61. Ако x е ирационално, избираме редица $x_1, x_2, \ldots$ от рационални числа с граница x. Тогава за всяко естествено n ще имаме $E(x_n)=e^{x_n}$ и желаното следва от зад. 63 чрез граничен преход.

67. Ще докажем, че редицата е монотонно намаляваща и ограничена отдолу. Първото твърдение се свежда до неравенството

$n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) \geqq (n+1)\left(\sqrt[n+1]{x}-1\right)$, което при $x^{\frac{1}{n(n+1)}} = y$ поради $y > 0$ добива вида

(1) $$n(y^{n+1}-1) \geqq (n+1)(y^n-1).$$

При $y = 1$ неравенството (1) е очевидно вярно. Нека $y > 1$. Тогава (1) е равносилно със

$$n(1+y+y^2+\cdots+y^n) \geqq (n+1)(1+y+y^2+\cdots+y^{n-1}),$$

т. е. със

(2) $$ny^n \geqq 1+y+y^2+\cdots+y^{n-1},$$

което се доказва със събиране на очевидните неравенства $y^n \geqq y^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$). Нека сега $0 < y < 1$. Тогава (1) е равносилно със

(3) $$ny^n \leqq 1+y+y^2+\cdots+y^{n-1},$$

което е вярно, понеже в този случай $y^n \leqq y^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$). С това е доказано, че разглежданата редица е намаляваща. За да се убедим, че тя е ограничена отдолу, ще докажем неравенството

(4) $$n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) \geqq 1-\frac{1}{x}.$$

При $z = x^{\frac{1}{n}}$ (4) добива вида $n(z-1)z^n \geqq z^n - 1$, което е очевидно при $z = 1$, при $z > 1$ се свежда до (2), а при $0 < z < 1$ се свежда до (3).

68. Следва от очевидната верига от равенства $n\left(\sqrt[n]{xy}-1\right) = n\left(\sqrt[n]{xy}-\sqrt[n]{y}\right) + n\left(\sqrt[n]{y}-1\right) = n\sqrt[n]{y}\left(\sqrt[n]{x}-1\right) + n\left(\sqrt[n]{y}-1\right)$ и от зад. 47 а).

69. Чрез субституциите $\xi = \sqrt[n]{x}$ и $\eta = \sqrt[n]{y}$ даденото неравенство се свежда до $n\xi^{n-1} \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1}\xi^\nu\eta^{n-\nu-1}$.

70. Следва от зад. 69 и 47 а), като се вземе пред вид дефиницията на функцията L.

71. а) Очевидно съществуват числата a и A, за които $0 < a \leqq x_n \leqq A$ при всяко естествено n. Тогава $a \leqq x \leqq A$ и от зад. 69 лесно следва

(1) $$\left|n\left(\sqrt[n]{x_n}-1\right) - n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\right| \leqq \frac{|x_n - x|}{a}\sqrt[n]{A}$$

за всяко естествено n. От $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и зад. 47 а) получаваме, че дясната страна на (1), а с нея и лявата клонят към 0. Сега твърдението следва веднага, тъй като по дефиниция $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) = L(x)$. б) Трябва да се докаже, че за всяко N е в сила

(2) $$n\left(\sqrt[n]{x_n}-1\right) < N$$

за всички достатъчно големи n. Но (2) е равносилно със

(3) $$\left(1+\frac{N}{n}\right)^n > x_n$$

при $n + N > 0$, т. е. при всички достатъчно големи n. Лявата страна на (3) клони към e^N съгласно зад. 66 и дефиницията на функцията E. Ето защо $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{N}{n}\right)^n > 0$. Тъй като $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, от последното неравенство следва, че (3), а заедно с него и (2) ще бъдат изпълнени за всички достатъчно големи n.

72. Най-напред да отбележим, че съгласно зад. 58 и 66 от $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ следва

(1) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^x.$$

По дефиниция $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) = L(x)$. Ето защо от (1) следва

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)}{n}\right)^n = e^{L(x)},$$ т. е. търсеното равенство.

73. Следва от зад. 60 б) и 72.

74. Очевидно съществува число $a > 0$, за което $a \leqq x_n$ за всяко n. Тогава $a \leqq x$. Сега не е трудно от зад. 70 да се получи неравенството $|\ln x_n - \ln x| \leqq \frac{|x_n - x|}{a}$, откъдето веднага следва твърдението.

75. От равенството $x = e^{\ln x}$ чрез логаритмуване при основа a се получава $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x$ и твърдението следва веднага.

76. Неравенствата $\ln x > N$ и $\ln x < N$ са равносилни съответно с $x > e^N$ и $x < e^N$. Неравенствата $\frac{\ln x}{x} < \varepsilon$ и $-\varepsilon < x\ln x$ са равносилни съответно с $x < e^{\varepsilon x}$ и $\frac{1}{x} < e^{\frac{\varepsilon}{x}}$. Сега може да се приложи зад. 8.

77. а) От очевидното равенство $\frac{1+\sqrt[n]{a}}{2} = 1 + \frac{n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)}{2n}$ и от $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{a}}{2}\right)^n = e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{a}$ съгласно зад. 58. б) Следва от равенствата $\frac{1}{3}\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right)$ $= 1 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right) - 1 = 1 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1+\sqrt[n]{c}-1\right)$ $= 1 + \frac{1}{3n}\left[n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) + n\left(\sqrt[n]{b}-1\right) + n\left(\sqrt[n]{c}-1\right)\right]$ и от зад. 58. е) Следва от равенството $\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a_n}+\sqrt[n]{b_n}\right)$ $= 1 + \frac{1}{2n}\left[n\left(\sqrt[n]{a_n}-1\right) + n\left(\sqrt[n]{b_n}-1\right)\right]$ и от зад. 58.

78. Сравнете със зад. 53. а) e^{-2}. б) 1. в) $e^{a_1-b_1}$.

80. Трябва да се докаже, че за всяко n е в сила неравенството $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$, т. е. $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \geqq \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}}$, или $(n^2+2n+1)^{n+1}(n+1) \geqq (n^2+2n)^{n+1}(n+2)$, което е равносилно с $\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geqq 1+\frac{1}{n+1}$. Последното неравенство следва от неравенството на Бернули (зад. 32. гл. II).

81. Тъй като редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е монотонно растяща и клони към e, а редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ е монотонно намаляваща и също клони към e (зад. 79 и 80), то $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq e \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, откъдето чрез логаритмуване при основа e следват желаните неравенства.

82. Следва от зад. 81.

83. Нека $a_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \ln n$ и $b_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \ln(n+1)$. Сега $a_n - b_n = \ln(n+1) - \ln n > 0$. От зад. 82 следва $a_1 \geqq a_n > b_n \geqq b_1$, което показва, че горните редици са ограничени. Тъй като са и монотонни съгласно зад. 82, те са сходящи. Освен това

$$\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$$

съгласно зад. 74.

84. а) От зад. 83 следва, че редицата с общ член

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \tag{1}$$

е сходяща; границата ѝ бе означена с C. Редиците с общи членове b_{n-1} и b_{2n} са сходящи като подредици на (1) и имат същата граница. Ето защо $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{2n} - b_{n-1}) = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{1}{\nu} - \ln(2n+1) + \ln n\right] = 0. \tag{2}$$

Сега твърдението следва от (2) и от $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right) = \ln 2$ съгласно зад. 74. б) $\ln 3$. в) $\ln\frac{l}{k}$.

86. Сравнете със зад. 45, гл. II. Използвайте зад. 85 и 82.

87. а) Да отбележим най-напред, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = l$ и граничният преход в рекурентната зависимост $a_{n+1} = \frac{1}{2}(1+a_n^2)$ дава $l = \frac{1}{2}(1+l^2)$, откъдето $l = 1$. И така, ако разглежданата редица е сходяща, границата ѝ трябва да бъде числото 1. Това обаче не решава въпроса за сходимостта на дадената редица. За да отговорим на този въпрос, първо забелязваме, че редицата е монотонно растяща. Наистина $a_{n+1} - a_n$ $= \frac{1}{2}(1+a_n^2) - a_n = \frac{1}{2}(1-a_n)^2 \geqq 0$. Ако редицата е ограничена отгоре, числото 1 непременно е нейна горна граница. Наистина при направеното предположение тя би била сходяща и понеже е растяща, членовете ѝ не биха надминавали намерената вече граница 1. Ще покажем, че 1 наистина е горна граница на редицата. С индукция спрямо n ще покажем, че $0 \leqq a_n \leqq 1$. За $n = 1$ твърдението е вярно по условие. Нека то е вярно за n. Тогава очевидно $a_{n+1} \geqq 0$ и в същото време $a_{n+1} = \frac{1}{2}(1+a_n^2) \leqq \frac{1}{2}(1+1)$ $= 1$. И така дадената редица е растяща и ограничена отгоре. Ето защо тя е сходяща с граница 1. б) Да отбележим, че голяма част от разсъжденията в решението на а) не зависят от a_1. Това важи например за стойността 1 на границата на редицата и за монотонността ѝ. Напротив, ограничеността на редицата съществено зависи от стойността на a_1; настоящата задача е пример за

това. Да допуснем, че редицата не дивергира към ∞. Тъй като е монотонна, тя не би била ограничена отгоре и би била сходяща с граница 1 съгласно а). Понеже е монотонно растяща, членовете ѝ не биха надминавали 1. Но това заключение противоречи на условието $a_1 = 2$.

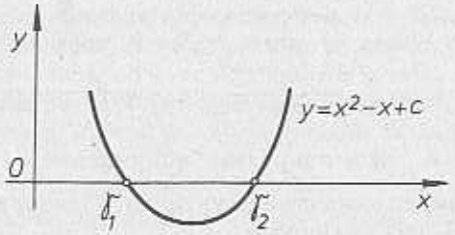
88. От равенството $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n^2 + 4) > 0$ следва, че редицата е растяща. Ако допуснем, че е сходяща с граница l, чрез граничен преход при $n \to \infty$ в дадената рекурентна зависимост бихме получили $l = \frac{1}{2}(l^2 + 2l + 4)$, т. е. $l^2 + 4 = 0$, което е невъзможно при реално l. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ за всяко λ.

89. Редицата е намаляваща с граница 0.

90. Редицата намалява от втория член нататък и границата ѝ е 0.

91. От зад. 55 следва $e^{\frac{1}{x^2}} \geqq 1 + \frac{1}{x^2}$ за $x \neq 0$. От друга страна, $1 + \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x}$ за $x > 0$. Ето защо $e^{\frac{1}{x^2}} > \frac{1}{x}$ и следователно $x > e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x > 0$. Използвайте този резултат, за да докажете, че редицата е намаляваща от втория член нататък. Тя е ограничена отдолу от 0. Следователно е сходяща с граница $l \geqq 0$. Ако $l > 0$, граничен преход в зависимостта $a_{n+1} = e^{-\frac{1}{a_n^2}}$ би дал $l = e^{-\frac{1}{l^2}}$, което е невъзможно поради доказаното строго неравенство $x > e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ето защо $l = 0$.

92. При направеното предположение за c дискриминантата на квадратното уравнение $x^2 - x + c = 0$ е положителна и то има два различни реални корена γ_1 и γ_2. Те са положителни. Затова при $\gamma_1 < \gamma_2$ графиката на функцията прилича на кривата от фиг. 8. Най-напред $0 < \lambda \leqq \gamma_1$. Ще докажем индуктивно, че $0 < a_n \leqq \gamma_1$. При $n = 1$ твърдението е очевидно, тъй като $a_1 = \lambda$. Нека то е вярно за n. Очевидно $a_{n+1} > 0$. От друга страна, $a_{n+1} = a_n^2 + c \leqq \gamma_1^2 + c = \gamma_1$ съгласно индукционното предположение, т. е. твърдението е вярно и за $n+1$. Квадратният тричлен $x^2 - x + c$ е неотрицателен при $x \leqq \gamma_1$ (фиг. 8). Ето защо $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + c \geqq 0$ и разглежданата редица е растяща. Поради доказаната ограниченост тя е сходяща. Ако границата ѝ е l, чрез граничен преход в зависимостта $a_{n+1} = a_n^2 + c$ се получава $l^2 - l + c = 0$, откъдето $l = \gamma_1$ или $l = \gamma_2$. От $a_n \leqq \gamma_1 < \gamma_2$ следва, че вторият случай е невъзможен и $l = \gamma_1$. При $\gamma_1 \leqq \lambda < \gamma_2$ редицата е монотонно намаляваща и клони към γ_1. При $\lambda = \gamma_2$ всички членове на редицата са равни на γ_2. При $\lambda > \gamma_2$ редицата расте неограничено.



Фиг. 8

93. При $0 \leqq a_1 \leqq 2$ редицата е растяща и клони към 2. При $2 \leqq a_1 < 3$ тя е намаляваща и клони към 2. При $a_1 = 3$ всичките ѝ членове са равни на 3. При $a_1 > 3$ редицата дивергира към ∞, като расте монотонно.

94. При $\lambda < -4$ всичките членове на редицата са по-малки от -4 и тя е разходяща. При $\lambda = -4$ редицата не е дефинирана. При $\lambda > -4$ са възможни следните случаи: При $-4 < \lambda < -\frac{3}{2}$ и при $\lambda > 2$ редицата дивергира към ∞. При $\lambda = -\frac{3}{2}$ и при $\lambda = 2$ тя има граница 2. При $-\frac{3}{2} < \lambda < 2$ границата ѝ е 1.

95. При $0 \leqq \lambda < 2$ редицата е сходяща с граница 1. При $\lambda = 2$ всички членове на редицата са равни на 2.

96. При $0 \leqq \lambda \leqq z_1$ редицата е растяща с граница z_1. При $z_1 \leqq \lambda < z_2$ редицата е намаляваща с граница z_1. При $\lambda = z_2$ всички членове на редицата са равни на z_2.

97. При $\lambda < -9$ редицата дивергира към $-\infty$, като намалява. При $\lambda = -9$ тя не е дефинирана. При $-9 < \lambda < -\frac{7}{3}$ и при $\lambda > 3$ редицата дивергира към ∞, като расте. При $\lambda = -\frac{7}{3}$ и $\lambda = 3$ редицата има граница 3. При $-\frac{7}{3} < \lambda < 3$ границата ѝ е 1.

98. При $0 < \beta < \alpha$ редицата има граница α. За да се подсетим как ще изглежда a_n при $\alpha = \beta > 0$, извършваме граничния преход $\beta \to \alpha$ в $a_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$, след като разделим числителя и знаменателя с $\alpha - \beta$ и съкратим; получаваме $a_n = \dfrac{n+1}{n}\alpha$. Този резултат лесно се доказва индуктивно. Следователно и в този случай редицата има граница α.

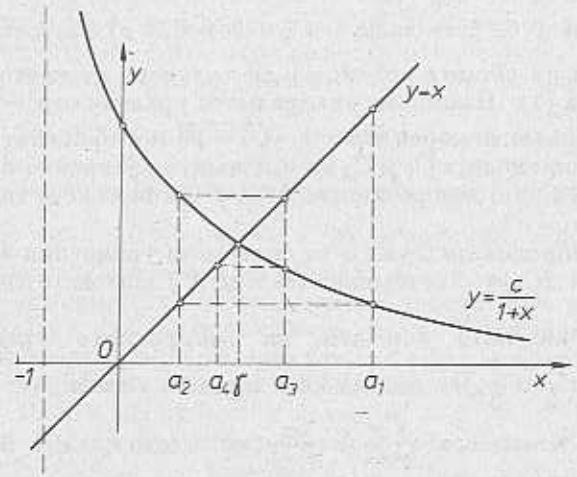
99. $\sqrt{\mu}$.

100. а) При $\lambda < -2$ редицата не е дефинирана. При $-2 \leqq \lambda$ тя е сходяща с граница 2, като при $-2 \leqq \lambda \leqq 2$ е растяща, а при $\lambda \geqq 2$ е намаляваща. б) Редицата е сходяща при $\lambda \geqq -c$ и клони към положителния корен на уравнението $x^2 - x - c = 0$.

101. Редицата е получена чрез итерация от функцията $f(x) = \dfrac{c}{1+x}$. Абсцисите на пресечните точки на хиперболата $y = \dfrac{c}{1+x}$ и на правата $y = x$ са корени на квадратното уравнение $x^2 + x - c = 0$. Нека γ е положителният измежду тях. От фиг. 9 се вижда, че ако $a_1 \geqq \gamma$, редицата $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ клони към γ, като намалява монотонно, а редицата $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ клони към γ, като расте монотонно. За да докажем това, ще установим: 1) От $x > \gamma$ следва $\dfrac{c}{1+x} < \gamma$. 2) От $0 < x < \gamma$ следва $\dfrac{c}{1+x} > \gamma$. Да проверим например верността на 1). Заключението е равносилно с $c < \gamma + \gamma x$. Тъй като съгласно дефиницията на γ е в сила $c = \gamma + \gamma^2$, трябва да покажем, че $\gamma + \gamma^2 < \gamma + \gamma x$. Но това следва от $x > \gamma$. Аналогично се доказва и 2). От 1) и 2) по индукция се получава, че от $\lambda > \gamma$ следва $a_{2n-1} > \gamma$ и $a_{2n} < \gamma$ за всяко естествено n. По-нататък се доказва, че в случая 1) е в сила $x - \gamma > \gamma - \dfrac{c}{1+x}$, а в случая 2) поради $0 < c \leqq 2$ е в сила $\gamma - x > \dfrac{c}{1+x} - \gamma$. Оттук следва $a_1 - \gamma > \gamma - a_2 > a_3 - \gamma > \gamma - a_4 > \ldots$. Ето защо редицата на членовете с нечетни номера намалява, а редицата на членовете с четни номера расте. Поради доказаната ограниченост на тези редици те са сходящи. Те имат обща граница. Наистина от рекурентната зависимост следва $a_{n+2} = \dfrac{c}{1 + \dfrac{c}{1+a_n}} = \dfrac{c(1+a_n)}{1+c+a_n}$. Ако l е границата на една от тези две редици, чрез граничен преход в горното равенство при $n \to \infty$ се получава $l^2 + l - c = 0$, т. е.

общата граница l е равна на положителния корен γ на това квадратно уравнение. При $\lambda < \gamma$ разсъжденията са аналогични. При $\lambda = \gamma$ всичките членове на редицата са равни на γ.

102. Ще докажем, че $a_n < 0$. При $n = 1$ това е вярно по условие; нека е вярно за n. От рекурентната зависимост следва $a_n \geqq \lambda$ за всяко n. От $\lambda \leqq a_n < 0$ и от рекурентната зависимост следва $a_{n+1} \leqq \lambda + \dfrac{\lambda^2}{2} < 0$, тъй като по условие $-\dfrac{3}{2} < \lambda < 0$. Както и в предишната задача, редицата не е монотонна, но сега е растяща редицата на членовете с нечетни номера, а е намаляваща реди-



Фиг. 9

цата на членовете с четни номера. Наистина от рекурентната зависимост следват равенствата

$$a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{1}{2}(a_{2n}^2 - a_{2n-2}^2)$$

и

$$a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{1}{2}\left(a_{2n+1}^2 - a_{2n-1}^2\right),$$

откъдето твърдението следва индуктивно, като се вземе пред вид, че $a_3 = \lambda + \dfrac{a_2^2}{2} = a_1 + \dfrac{a_2^2}{2} > a_1$. Тъй като двете редици са заключени

между λ и 0, те са сходящи. Нека границите им са съответно p и q. Ако запишем дадената рекурентна зависимост веднъж с четно, а втори път с нечетно n и извършим граничен преход при $n \to \infty$, получаваме

$$(1) \qquad q = \lambda + \frac{p^2}{2}, \quad p = \lambda + \frac{q^2}{2},$$

откъдето

$$(2) \qquad (p-q)(p+q+2) = 0.$$

Да допуснем, че $p+q+2=0$. Тогава от второто равенство (1) следва $q^2+2q+4+2\lambda=0$, което уравнение няма реален корен q при $-\frac{3}{2} < \lambda < 0$. Ето защо $p+q+2 \neq 0$ и от (2) следва $p=q$. Стойността на общата граница p се получава от което и да е от равенствата (1). Намираме квадратното уравнение $p^2-2p+2\lambda=0$, чийто отрицателен корен е $p = 1-\sqrt{1-2\lambda}$ и е търсената граница.

103. Определете C_1 и C_2 от системата уравнения $a_1 = C_1+C_2$ и $a_2 = C_1\alpha + C_2\beta$ с детерминанта $\beta - \alpha \neq 0$ и докажете твърдението индуктивно.

104. Определете C_1 и C_2 от системата уравнения $a_1 = C_1+C_2$ и $a_2 = (C_1+2C_2)\alpha$ с детерминанта $\alpha \neq 0$ и докажете твърдението индуктивно.

105. Тъй като корените на квадратното уравнение $x^2 = \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}$ са $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, от зад. 103 следва, че съществуват константи C_1 и C_2, за които $a_n = \frac{C_1}{2^{n-1}} + \frac{C_2}{3^{n-1}}$, откъдето следва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

106. $2a_2 - a_1$. **107.** $\frac{1}{3}(a_1+2a_2)$. **108.** $\frac{\mu a_1 + a_2}{\mu+1}$.

109. Корените на уравнението $x^2 = x+2$ са -1 и 2. Ето защо съгласно зад. 103 съществуват такива константи C_1 и C_2, че $a_n = (-1)^{n-1}C_1 + 2^{n-1}C_2$ за всяко n. От последното равенство и от предположението, че редицата е сходяща, следва $C_1 = C_2 = 0$.

110. Приложете зад. 104, за да получите, че границата е 0.

111. Уравнението $x^2 = 4x-4$ има двоен корен 2. Ето защо съгласно зад. 104 съществуват такива константи C_1 и C_2, че $a_n = (C_1+C_2n)2^{n-1}$ за всяко n. От последното равенство и от предположението, че редицата е сходяща, следва $C_1 = C_2 = 0$.

112. Следствие от зад. 103 и 104.

113. Нека корените са α и β. Ако твърдението не е вярно, ще имаме $|\alpha| > 1$ и $|\beta| > 1$. Възможни са случаите: 1) $\alpha \neq \beta$ и 2) $\alpha = \beta$. В случая 1) съгласно зад. 103 съществуват такива константи C_1 и C_2, че $a_n = C_1\alpha^{n-1} + C_2\beta^{n-1}$ за всяко n. От $|a_1|+|a_2| \neq 0$ следва $|C_1|+|C_2| \neq 0$. Ако някое от числата C_1 и C_2 е 0, редицата $a_1, a_2, \ldots$ е очевидно неограничена, което противоречи на условието; следователно $C_1C_2 \neq 0$. Ако $|\alpha| \neq |\beta|$, например $|\alpha| < |\beta|$, то $\frac{a_n}{\beta^{n-1}} = C_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + C_2$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\beta^{n-1}} = C_2 \neq 0$ и редицата $a_1, a_2, \ldots$ не е ограничена. Ако $|\alpha| = |\beta|$, от $\alpha \neq \beta$ получаваме $\alpha = -\beta$ и $a_n = [C_1 + (-1)^{n-1}C_2]\alpha^{n-1}$. Тъй като изразът в скобите приема една и съща различна от 0 стойност за безбройно много n, а α^n расте неограничено, редицата е неограничена. В случая 2) съгласно зад. 104 съществуват такива константи C_1 и C_2, че $a_n = (C_1+C_2n)\alpha^{n-1}$. Както по-горе, се убеждаваме, че $|C_1|+|C_2| \neq 0$, поради което редицата не е ограничена.

114. Проведете изследването в духа на предишните две задачи.

115. За да установите сходимостта на двете редици, докажете неравенствата $b_n \leqq b_{n+1} \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ за всяко n. За да докажете равенството на границите им, извършете граничен преход в равенството $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$. Тази граница се нарича *средно аритметико-геометрично* на числата a_1 и b_1.

116. Сходимостта на редиците и равенството на границите им се доказват, както в предишната задача. Стойността на границата се пресмята след граничен преход в равенството $a_nb_n = a_1b_1$, валидно за всяко n, което се доказва индуктивно.

117. Да положим $q = \max(|a|+|b|, \ |c|+|d|)$ и $\rho_n = \max(|x_n-\xi|, |y_n-\eta|)$. От дадените рекурентни зависимости следва $|x_{n+1}-\xi| = |a(x_n-\xi)+b(y_n-\eta)| \leqq (|a|+|b|)\rho_n \leqq q\rho_n$. Аналогично се доказва $|y_{n+1}-\eta| \leqq q\rho_n$. Ето защо за всяко n е в сила $\rho_{n+1} \leqq q\rho_n$ и следователно $0 \leqq \rho_n \leqq q^{n-1}\rho_1$. Поради очевидното неравенство $0 \leqq q < 1$ сега следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, което заедно с дефиницията на ρ_n доказва твърдението.

118. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 0$ и $a > 0$, за всички достатъчно големи n ще бъде в сила неравенството $\left(\frac{1}{n}\right)^k < a$, поради което $s_n > 1$. Ето защо $s_n - 1$ е естествено число и от дефиницилта на s_n следват неравенствата

$$(1) \qquad \left(\frac{s_n-1}{n}\right)^k < a \leqq \left(\frac{s_n}{n}\right)^k.$$

Ето защо, ако m и n са достатъчно големи естествени числа, ще бъдат в сила неравенствата $\left(\frac{s_n-1}{n}\right)^k < \left(\frac{s_m}{m}\right)^k$ и $\left(\frac{s_m-1}{m}\right)^k < \left(\frac{s_n}{n}\right)^k$, откъдето $\frac{s_n-1}{n} < \frac{s_m}{m}$ и $\frac{s_m-1}{m} < \frac{s_n}{n}$; следователно

$$\left|\frac{s_m}{m} - \frac{s_n}{n}\right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

От (2) следва, че редицата с общ член $\frac{s_n}{n}$ удовлетворява условието на Коши, поради което е сходяща. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = l$. Като извършим граничен преход в (1), получаваме $l^k \leqq a \leqq l^k$, с което задачата е решена.

119. Задачата се решава аналогично на предишната и търсената граница е $\log_a b$.

121. Равенствата $a_{n+1} = \frac{q}{1+a_n^2} + b$ и $a_n = \frac{q}{1+a_{n-1}^2} + b$ след изваждане дават

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{q(a_n + a_{n-1})|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n^2)(1+a_{n-1}^2)}. \tag{1}$$

Не е трудно обаче да се съобрази, че

$$0 \leqq \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqq 1 \tag{2}$$

за всеки две неотрицателни x и y. Наистина (2) е равносилно с $\left(\frac{1}{2} - x + x^2\right) + \left(\frac{1}{2} - y + y^2\right) + x^2y^2 \geqq 0$, което е очевидно поради $\frac{1}{2} - x + x^2 \geqq 0$ за всяко реално x. От (1) и (2) следва $|a_{n+1} - a_n| \leqq q|a_n - a_{n-1}|$, откъдето с индукция непосредствено получаваме $|a_{n+1} - a_n| \leqq q^{n-1}|a_2 - a_1|$. Ето защо $|a_s - a_t| \leqq |a_s - a_{s-1}| + |a_{s-1} - a_{s-2}| + \cdots + |a_{t+1} - a_t| \leqq (q^{s-2} + q^{s-3} + \cdots + q^{t-1})|a_2 - a_1| = q^{t-1}\frac{1-q^{s-t}}{1-q}|a_2 - a_1|$ при $s > t$, откъдето

$$|a_s - a_t| < \frac{2|q|^{t-1}}{|1-q|}|a_2 - a_1|. \tag{3}$$

Поради $|q| < 1$ е в сила $\lim\limits_{t\to\infty} |q|^t = 0$. Сега от (3) следва, че дадената редица удовлетворява условието на Коши и следователно е

сходяща. Границата ѝ се намира с граничен преход в дадената рекурентна зависимост.

122. Равенствата $a_{n+1} = q\sin a_n + b$ и $a_n = q\sin a_{n-1} + b$ след изваждане дават $a_{n+1} - a_n = q.(\sin a_n - \sin a_{n-1})$, откъдето $|a_{n+1} - a_n| \leqq |q| \cdot |a_n - a_{n-1}|$ поради $|\sin a_n - \sin a_{n-1}| \leqq |a_n - a_{n-1}|$ съгласно решението на зад. 49 а). Оттук с индукция спрямо n следва $|a_{n+1} - a_n| \leqq |q|^{n-1}|a_2 - a_1|$. Ето защо $|a_s - a_t| \leqq |a_s - a_{s-1}| + |a_{s-1} - a_{s-2}| + \cdots + |a_{t+1} - a_t| \leqq \frac{2|q|^{t-1}}{1-|q|}|a_2 - a_1|$. Оттук, както в предишната задача, следва, че дадената редица удовлетворява условието на Коши, поради което е сходяща. Ако положим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$, с граничен преход в дадената рекурентна зависимост се стига до $\xi = q\sin\xi + b$ съгласно зад. 49 а). Единствеността на корена на това уравнение се установява така: Нека наред с ξ и η е негов корен, т. е. $\eta = q\sin\eta + b$. Тогава $|\xi - \eta| = |q||\sin\xi - \sin\eta| \leqq |q||\xi - \eta|$, откъдето следва $\xi = \eta$ поради $|q| < 1$.

123. Нека $a_1, a_2, \ldots$ е произволна редица от реални числа. Един индекс n (само в решението на тази задача) ще наричаме *регулярен*, когато за всички $m > n$ е в сила неравенството $a_n < a_m$. Ако съществуват безбройно много регулярни индекси, редицата $a_1, a_2, \ldots$ очевидно притежава монотонно растяща подредица. Ако пък регулярните индекси са само краен брой, за всички достатъчно големи n ще съществуват индекси m, за които $a_n \geqq a_m$ и $m > n$; следователно сега дадената редица притежава монотонно намаляваща подредица.

124. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, всяка подредица на дадената редица е сходяща и има граница a, така че в едната посока твърдението е тривиално вярно. За да докажем верността и на обратното твърдение, да допуснем противното, т. е. че всяка подредица $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ на дадената редица притежава подредица с граница a и въпреки това дадената редица не клони към a. Тогава съществува положително число ε_0 със свойството: за всяко число ν съществува n с $n > \nu$ и $|a_n - a| \geqq \varepsilon_0$. Ако положим тук $\nu = 1$, ще получим индекс n_1 с $|a_{n_1} - a| \geqq \varepsilon_0$. Ако положим сега $\nu = n_1$, ще получим индекс n_2 с $n_2 > n_1$ и $|a_{n_2} - a| \geqq \varepsilon_0$. Като продължим този процес неограничено, ще получим стриктно растяща редица от индекси $n_1, n_2, \ldots$, за които $|a_{n_k} - a| \geqq \varepsilon_0$ за всяко естествено k. От подредицата $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ на дадената редица не може да се избере клоняща към a подредица.

127. Използвайте зад. 61, гл. I.

131. а) Ако интервалът $(-\infty, x)$ съдържаше безбройно много членове на редицата $a_1, a_2, \ldots$, те биха образували подредица,

която би имала точка на сгъстяване a съгласно зад. 128. Непосредствено се съобразява, че $a \leqq x$, което заедно с $x < \liminf a_n$ противоречи на обстоятелството, че $\liminf a_n$ е най-лявата точка на сгъстяване на редицата. Ето защо $(-\infty, x)$ съдържа само краен брой членове на редицата. Аналогично се доказва и твърдението за интервала (y, ∞). **б)** Интервалът $(-\infty, x')$ е околност на $\liminf a_n$, а последното число е точка на сгъстяване на редицата. Ето защо този интервал съдържа безбройно много нейни членове. Аналогично се доказва и твърдението за интервала (y', ∞).

132. **а)** За да докажете, че $a \liminf b_n$ е точка на сгъстяване на редицата $a_1b_1, a_2b_2, \ldots$, използвайте зад. 126. За да установите, че това е най-лявата точка на сгъстяване на тази редица, е достатъчно да се убедите, че всеки интервал от вида $(-\infty, x)$ с $x < a \liminf b_n$ съдържа само краен брой членове на редицата. От $x < a \liminf b_n$ и $a > 0$ следва $\frac{x}{a} < \liminf b_n$. Нека ξ е реално число, за което

$$\frac{x}{a} < \xi < \liminf b_n. \tag{1}$$

Сега зад. 131 показва, че неравенството

$$\xi \leqq b_n \tag{2}$$

е в сила за всички достатъчно големи индекси n. От друга страна, от (1) и $a > 0$ следва $x < a\xi$, което заедно с $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\xi = a\xi$ показва, че неравенството

$$x < a_n\xi \tag{3}$$

е в сила за всички достатъчно големи n. Поради $a > 0$ е изпълнено $a_n > 0$ за всички достатъчно големи n. Ето защо от (2) следва $\xi a_n \leqq a_n b_n$ за всички достатъчно големи n. От (3) и последното неравенство следва $x < \xi b_n$ за всички достатъчно големи n, поради което интервалът $(-\infty, x)$ действително съдържа само краен брой членове на редицата $a_1b_1, a_2b_2, \ldots$.

133. **а)** Следва от зад. 130. **б)** Нека ε е произволно положително число. Тогава интервалите $(-\infty, \liminf a_n - \varepsilon)$ и $(-\infty, \liminf b_n - \varepsilon)$ съдържат краен брой членове съответно на редиците $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$. Ето защо неравенствата $a_n \geqq \liminf a_n - \varepsilon$ и $b_n \geqq \liminf b_n - \varepsilon$ ще бъдат изпълнени за всички достатъчно големи n. След събиране последните неравенства дават $a_n + b_n \geqq \liminf a_n + \liminf b_n - 2\varepsilon$ за всички достатъчно големи n. Ето защо $\liminf(a_n + b_n) \geqq \liminf a_n + \liminf b_n - 2\varepsilon$. Тъй като ε е произволно положително число, интересуващото ни неравенство е доказано. **в)** Аналогично.

134. **а)** Ако $\liminf a_n = -\infty$, твърдението е очевидно. Ако $\liminf a_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Нека N е произволно реално число. Съществува такова ν, че от $n > \nu$ да следва $a_n > N$. Тогава при $n > \nu$ ще бъдат в сила неравенствата $\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu=1}^{n} a_\mu > \frac{1}{n}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} a_\mu + \frac{1}{n}(n-\nu)N$ $= \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} a_\mu - \nu N\right) + N$. При фиксирани N и ν първото от събираемите в дясната страна е не по-малко от -1 за всички достатъчно големи n, защото това събираемо клони към 0, когато n расте неограничено. Ето защо $\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu > N - 1$ за всички достатъчно големи n, което поради произволността на N доказва твърдението в този случай. Остава да се разгледа нетривиалният случай, когато съществува число $a = \liminf a_n$. Нека $\varepsilon > 0$. Тогава интервалът $(-\infty, a - \varepsilon)$ съдържа само краен брой членове на редицата $a_1, a_2, \ldots$ Нека ν е такъв индекс, че от $n > \nu$ да следва $a_n > a - \varepsilon$. Ще покажем, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

$$\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu > a - 3\varepsilon, \tag{1}$$

с което доказателството ще бъде завършено. Очевидно

$$\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu + \frac{1}{n-\nu}\sum_{\mu=\nu+1}^{n} a_\mu \frac{n-\nu}{n}. \tag{2}$$

От друга страна, неравенството

$$\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu > -\varepsilon \tag{3}$$

е изпълнено за всички достатъчно големи n, тъй като лявата му страна клони към 0 с неограниченото нарастване на n. Същевременно

$$\frac{1}{n-\nu}\sum_{\mu=\nu+1}^{n} a_\mu > a - \varepsilon, \tag{4}$$

понеже дробта в лявата страна е средно аритметично на $n - \nu$ числа, всяко от които е по-голямо от $a - \varepsilon$. От (2) — (4) следва

$$\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu > -\varepsilon + (a - \varepsilon)\frac{n-\nu}{n} \tag{5}$$

за всички достатъчно големи n. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\nu}{n}=1$, от (5) следва, че за всички достатъчно големи n е в сила (1), с което твърдението е доказано. б) Аналогично.

135. Тъй като по условие $\liminf a_n = \limsup a_n = a$, от зад. 134 следва

$$\liminf\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\limsup\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

Понякога тази задача се формулира накратко така: Ако една редица е сходяща, редицата от средните ѝ аритметични е сходяща и има същата граница. Обратното не винаги е вярно. Така например редицата $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ е очевидно разходяща, а редицата от средните ѝ аритметични е сходяща и има граница 0. Това дава възможност да се обобщят понятията *сходимост* и *граница*. А именно една редица $a_1, a_2, \ldots$ се нарича *лимитируема*, когато редицата от средните ѝ аритметични е сходяща, а границата на последната се нарича *граница* на редицата $a_1, a_2, \ldots$ *по Чезаро*. Това е един от първите примери, подтикнали развитието на един обширен дял от класическия анализ, известен под името *сумиране на разходящи редове*.

136. Следва от зад. 135 и 47. **137.** Следва от зад. 135.

138. Свежда се към зад. 137 с логаритмуване и антилогаритмуване.

139. Следва от дефиницията на $\liminf$, респективно на $\limsup$, и от обстоятелството, че $\ln x < \ln y$ точно когато $x < y$.

140. Свежда се към зад. 139 и 134, също както зад. 138 се свежда към зад. 137.

141. а) Като използвате очевидното равенство $\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$, сведете към зад. 138 с полагането $a_n=\frac{n!}{n^n}$ и пресмятане на $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. б) — ж) Аналогично.

142. Нека $\varepsilon>0$. Тогава съществуява такъв индекс ν, че за всяко $n\geqq\nu$ е в сила

$$l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<l+\varepsilon. \tag{1}$$

Поради $b_n<b_{n+1}$ неравенствата (1) са равносилни със

$$(l-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(l+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) \tag{2}$$

за всяко $n\geqq\nu$. Ако в (2) заместим n последователно с ν, $\nu+1,\ldots,n-1$, след събиране получаваме

$$(l-\varepsilon)(b_n-b_\nu)<a_n-a_\nu<(l+\varepsilon)(b_n-b_\nu) \tag{3}$$

за всяко $n>\nu$. Ако разделим двете страни на (3) с b_n, ще получим

$$(l-\varepsilon)\left(1-\frac{b_\nu}{b_n}\right)<\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_\nu}{b_n}<(l+\varepsilon)\left(1-\frac{b_\nu}{b_n}\right),$$

откъдето след очевидни преобразувания следва

$$-\varepsilon+\frac{1}{b_n}(a_\nu-(l-\varepsilon)b_\nu)<\frac{a_n}{b_n}-l<\varepsilon+\frac{1}{b_n}(a_\nu-(l+\varepsilon)b_\nu). \tag{4}$$

Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, при фиксирани ε и ν е в сила

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}[a_\nu-(l-\varepsilon)b_\nu]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}[a_n-(l+\varepsilon)b_\nu]=0,$$

което заедно с (4) показва, че за всички достатъчно големи n са изпълнени неравенствата $-2\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-l<2\varepsilon$ и задачата е решена. Да отбележим, че зад. 135 и 137 са частни случаи на тази задача.

143. Свежда се към зад. 142. а) $\frac{1}{k+1}$. б) $\frac{1}{2}$.

144. Нека най-напред $b=0$. За всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв индекс ν, че от $n\geqq\nu$ да следва $|b_n|<\varepsilon$. Ако положим

$$c_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n}a_\mu b_{n-\mu}, \tag{1}$$

ще имаме

$$|c_n|\leqq\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n-\nu}|a_\mu|\varepsilon+\frac{M}{n+1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}|b_\mu|, \tag{2}$$

където M е мажоранта на $|a_n|$ за всяко неотрицателно n. Но

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n-\nu}|a_\mu|\leqq\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n}|a_\mu| \tag{3}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n}|a_\mu|=|a| \tag{4}$$

съгласно зад. 135. От (3) и (4) следва

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n-\nu}|a_\mu|<|a|+\varepsilon \tag{5}$$

за всички достатъчно големи n. От друга страна,

(6) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}|b_\mu|=0.$$

Сега от (2),(5) и (6) следва $|c_n|<|a|\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon$ за всички достатъчно големи n. От последното неравенство следва $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$, с което твърдението е доказано при $b=0$. Нека сега b е произволно. От (1) получаваме

$$c_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n}a_\mu(b_{n-\mu}-b)+\frac{l}{n+1}\sum_{\mu=0}^{n}a_\mu.$$

От току-що доказаното следва, че първото събираемо в дясната страна клони към 0 с неограниченото нарастване на n, а от зад. 135 се вижда, че второто събираемо клони към ab, с което задачата е решена.

145. Ако вече е известно, че $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ съществува, равенството $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{l}{1+\alpha}$ ще следва незабавно от $b_n=a_n+\alpha a_{n-1}$ с граничен преход. Ето защо е достатъчно да се установи сходимостта на редицата $a_1, a_2,\ldots$. За тази цел умножаваме равенствата

$$\begin{cases} b_0=a_0,\\ b_1=a_1+\alpha a_0,\\ \dots\dots\dots\dots\\ b_n=a_n+\alpha a_{n-1}\end{cases}$$

съответно с $(-\alpha)^n$, $(-\alpha)^{n-1},\ldots,1$ и събираме:

(1) $$a_n=\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\alpha^\mu b_{n-\mu}.$$

Нека най-напред $l=0$. За всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв индекс ν, че от $n>\nu$ да следва $|b_n|<\varepsilon$. От (1) следва

(2) $$|a_n|\leqq\varepsilon\sum_{\mu=0}^{n-\nu}|\alpha|^\mu+M\sum_{\mu=n-\nu+1}^{n}|\alpha|^\mu,$$

където M е мажоранта на $|b_1|, |b_2|,\ldots$ Очевидно

(3) $$\sum_{\mu=0}^{n-\nu}|\alpha|^\mu\leqq\frac{1}{1-|\alpha|}$$

и

(4) $$\sum_{\mu=n-\nu+1}^{n}|\alpha|^\mu\leqq\frac{|\alpha|^{n-\nu+1}}{1-|\alpha|}.$$

От (4) поради $|\alpha|<1$ следва $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\mu=n-\nu+1}^{n}|\alpha|^\mu=0$, което заедно с (2) и (3) дава $|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{1-|\alpha|}+\varepsilon$ за всички достатъчно големи n. Ето защо $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Случаят на произволно l се свежда към вече разгледания с помощта на равенството

$$a_n=\sum_{\mu=0}^{n}\alpha^\mu(b_{n-\mu}-l)+l\sum_{\mu=0}^{n}\alpha^\mu.$$

146. Индукция спрямо k. При $k=1$ задачата се свежда до зад. 145. Нека твърдението е вярно за $k-1$; ще докажем верността му и за k. Нека $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ са корените на уравнението $x^k+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu x^{k-\nu}=0$. Да разгледаме уравнението $x^{k-1}+\sum\limits_{\nu=1}^{k-1}\beta_\nu x^{k-1-\nu}=0$ с корени $\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_k$. Очевидно

(1) $$x^k+\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu x^{k-\nu}=(x-\xi_1)\left(x^{k-1}+\sum_{\nu=1}^{k-1}\beta_\nu x^{k-1-\nu}\right).$$

Като сравним коефициентите на еднаквите степени на x в (1), получаваме

(2) $$\begin{cases}\beta_1-\xi_1=\alpha_1,\\ \beta_2-\xi_1\beta_1=\alpha_2,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \beta_{k-1}-\xi_1\beta_{k-2}=\alpha_{k-1},\\ -\xi_1\beta_{k-1}=\alpha_k.\end{cases}$$

Нека

(3) $$c_n=a_n+\sum_{\nu=1}^{k-1}\beta_\nu a_{n-\nu}.$$

От (2) следва $c_n-\xi_1c_{n-1}=b_n$, което съгласно зад. 145 дава

(4) $$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{l}{1-\xi_1}.$$

Като приложим индукционното предположение за (3), получаваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{l}{1-\xi_1}\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-1}\beta_\nu\right)^{-1} \tag{5}$$

съгласно (4). От (5) и (1) следва твърдението.

Да отбележим, че в условието на задачата не се иска корените на уравнението да са само реални. Почти цялата теория на границите се пренася в комплексната област, за която доказателството запазва валидността си.

147. Нека ξ е корен на разглежданото уравнение. Редиците $b_n = 0$ и $a_n = \xi^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяват дадената рекурентна зависимост. Следователно редицата $\xi, \xi^2, \xi^3, \ldots$ е сходяща. Това означава, че или $|\xi| < 1$, или $\xi = 1$. За да се убедим, че последният случай не е възможен, най-напред ще отбележим, че ако той би бил налице, бихме имали

$$1+\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu = 0. \tag{1}$$

Нека сега $a_n = n$ и

$$b_n = a_n + \sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu a_{n-\nu} \quad (n > k). \tag{2}$$

От (1), (2) и дефиницията на a_n получаваме $b_n = b_{k+1}$ при $n \geq k+1$ и следователно редицата $b_1, b_2, \ldots$ е сходяща. В такъв случай и редицата $a_1, a_2, \ldots$ би трябвало да е сходяща, което е невъзможно поради $a_n = n$.

148. Както в зад. 10, гл. III, се доказва, че множеството на реалните числа от всеки неизроден интервал не е изброимо.

149. Зад. 63, гл. I и зад. 148.

151. Ако θ е рационално число, въпросното множество очевидно не е гъсто. Ще установим, че когато θ е ирационално число, множеството на числата $m\theta + n$ е гъсто. Нека Δ е произволен интервал. Разделяме интервала $[0, 1]$ на подинтервали $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ с дължини, по-малки от дължината на Δ. За всяко цяло m съществува такова цяло n, че числото $m\theta+n$ да се намира в интервала $[0, 1]$. Тъй като целите числа m са безбройно много, а интервалите $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ са само краен брой, съществуват цели числа m_1, n_1, и m_2, n_2, такива, че $m_1 \neq m_2$ и $(m_\nu\theta+n_\nu) \in \Delta_s$ $(\nu = 1, 2)$, където s е някое от числата $1, 2, \ldots, k$. Очевидно числото $|(m_1\theta+n_1)-(m_2\theta+n_2)|$ е по-малко от дължината на Δ. От друга страна, $(m_1\theta+n_1)-(m_2\theta+n_2) \neq 0$, тъй като в противен случай от $m_1 \neq m_2$ би следвало $\theta = \dfrac{n_2-n_1}{m_1-m_2}$ противно на ирационалността на θ. И така числото $(m_1-m_2)\theta+(n_1-n_2)$ е различно от нула и модулът му е по-малък от дължината на Δ. Тогава някое от неговите целочислени кратни, което също е число от вида $m\theta+n$ с цели m и n, ще принадлежи на Δ и с това задачата е решена.

152. Ако $\theta = \dfrac{p}{q}$, където p и $q > 0$ са взаимно прости цели числа, точките на сгъстяване на редицата са $\sin\dfrac{2\pi\nu}{q}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, q-1)$. Ако θ е ирационално число, точките на сгъстяване изпълват целия интервал $[-1, 1]$, както това следва от зад. 151, 150 и 49 а).

162. Нека C е компактно множество. Очевидно $C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$. Сега от дефиницията на компактно множество следва $C \subset (-n, n)$ за някое n, поради което C е ограничено. За да се убедим, че C е и затворено, нека $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, където $x_n \in C$ $(n \in \mathbf{N})$. Ако допуснем, че $\xi \notin C$, множествата $U_n = \mathbf{R}\setminus\left[\xi-\dfrac{1}{n}, \xi+\dfrac{1}{n}\right]$ очевидно ще удовлетворяват условието $C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Тъй като те са отворени, краен брой от тях ще покриват C съгласно дефиницията на компактно множество. Ето защо за някое n ще бъде в сила включването $C \subset \mathbf{R}\setminus\left[\xi-\dfrac{1}{n}, \xi+\dfrac{1}{n}\right]$, поради което $C \cap \left[\xi-\dfrac{1}{n}, \xi+\dfrac{1}{n}\right] = \varnothing$ в противоречие с $x_n \in C$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Сега остава да се приложи зад. 157.

Нека, обратно, C е ограничено и затворено множество, а $[a, b]$ е ограничен и затворен интервал с $C \subset [a, b]$. Нека освен това $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е фамилия от отворени множества, за които $C \subset \cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Наред с множествата U_α да разгледаме и отвореното множество $U = \mathbf{R}\setminus C$. Очевидно отворените множества U_α и U покриват интервала $[a, b]$. Сега от зад. 50, гл. III следва, че съществува крайно подпокритие $U, U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}$ на $[a, b]$. От дефиницията на U следва $C \cap U = \varnothing$. Ето защо $C \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$, т. е. C е компактно.

Пета глава

1. Ако $\delta < 1$, от $|x-1| < \delta$ и $|a-b| \geqq |a| - |b|$ следва $|x| - 1 < \delta < 1$, т. е. $|x| < 2$. Следователно при $|x-1| < \delta$ ще бъде в сила $|x^2-1| = |x-1||x+1| \leqq |x-1|(|x|+1) \leqq |x-1| \cdot 3 < 3\delta$. Оттук следва, че за да бъде изпълнено неравенството $|x^2-1| < 0{,}01$ при $|x-1| < \delta < 1$, е достатъчно да бъде в сила неравенството $3\delta \leqq 0{,}01$, т. е. $\delta \leqq \frac{1}{300}$.

2. Тъй като неравенството $|x^2-1| < 0{,}01$ е равносилно с $1 - 0{,}01 < x^2 < 1 + 0{,}01$, то е очевидно еквивалентно с $\sqrt{1-0{,}01} < |x| < \sqrt{1+0{,}01}$ и следователно ще бъде изпълнено точно когато x удовлетворява някое от неравенствата $\sqrt{0{,}99} < x < \sqrt{1{,}01}$ или $\sqrt{0{,}99} < -x < \sqrt{1{,}01}$. Ето защо търсената най-голяма околност на числото 1, за която важи неравенството $|x^2-1| < 0{,}01$, е интервалът $(\sqrt{0{,}99}, \sqrt{1{,}01})$.

3. В зад. 2 видяхме, че най-голямата околност на числото 1, в която е изпълнено неравенството $|x^2-1| < 0{,}01$, е интервалът $(\sqrt{0{,}99}, \sqrt{1{,}01})$. За да намерим най-малката симетрична околност на 1 с това свойство, трябва да си изясним коя от разликите $\sqrt{1{,}01} - 1$ и $1 - \sqrt{0{,}99}$ е по-малка. Не е трудно чрез вдигане в квадрат да се установи, че $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} < 2$ при $0 < x < 1$, откъдето $\sqrt{1+x} - 1 < 1 - \sqrt{1-x}$ при $0 < x < 1$ и следователно $\sqrt{1{,}01} - 1 < 1 - \sqrt{0{,}99}$. Така виждаме, че радиусът на търсената околност е $\delta = \sqrt{1{,}01} - 1$.

4. $0 < \delta \leqq \sqrt[3]{1{,}001} - 1$. **5.** $0 < \delta \leqq \sqrt[3]{1+\varepsilon} - 1$.

6. $0 < \delta \leqq \sqrt[3]{a^3 + 0{,}01} - a$ при $a \geqq 0$ и $0 < \delta \leqq a - \sqrt[3]{a^3 - 0{,}01}$ при $a \leqq 0$.

7. $0 < \delta \leqq \sqrt[3]{a^3+\varepsilon} - a$ при $a \geqq 0$ и $0 < \delta \leqq a - \sqrt[3]{a^3-\varepsilon}$ при $a \leqq 0$.

8. Очевидно

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{1-xy}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leqq \frac{1+|xy|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqq 1,$$

така че можем да вземем $\delta = \varepsilon$.

10. Начертайте графиката на функцията $[x]$.

12. Например всяко едноточково множество.

13. а) $\mathbb{R}$. б) $\mathbb{I}$. в) $[0, 1]$.

14. а) 9. б) $-\frac{1}{4}$. в) 0. г) 0. д) $-\frac{2}{5}$. е) $\frac{1}{2}$.

ж) 6. з) -1. и) 0. й) $\frac{m}{n}$. к) 0. л) 4. м) $\frac{1}{4}$. н) $\frac{1}{3}$. о) $\frac{2}{3}$. п) $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$. р) $\frac{n}{m}$. с) $\frac{1}{2}$. т) $-\frac{1}{3}$.

15. а) $\frac{1}{2}$. б) $-\frac{1}{8}$. в) $\frac{1}{16}$. г) $-\frac{5}{128}$. д) $\frac{1}{n}$. е) $\frac{1-n}{2n^2}$. ж) $\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3}$. За да решите задачата, можете да рационализирате числителите или пък да положите $1 + x = y^2$ за а) — г) и $1 + x = y^n$ за д) — ж).

17. а) От очевидните неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ получете неравенствата $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$ при $x \neq 0$, от които се заключава, че търсената граница е 0. б) От веригата равенства

$$\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^2} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{\sin x - x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} x + \frac{\sin x - x}{x^2}$$

и от а) следва, че търсената граница е 0.

18. а) 3. б) a. в) $\frac{3}{7}$. г) $\frac{a}{b}$.

19. а) $-\pi$. б) 2π. в) $-\frac{3}{4}$. г) $(-1)^{m+n}\frac{m}{n}$.

20. а) -1. б) 1. в) $(-1)^{n+1}(2n+1)\frac{\pi}{2}$. г) $(-1)^{m+n}\frac{2m+1}{2n+1}$.

21. а) $\cos a$. б) $-\sin a$. в) $\frac{1}{\cos^2 a}$. г) $-\frac{1}{\sin^2 a}$.

22. а) $a - b$. б) 0. в) $a - b$. г) $\frac{b-a}{ab}$.

23. а) $1 - \cos 1$. б) $\sin 1$. в) $\frac{\cos a - \cos b}{b-a}$ при $a \neq b$ и $\sin a$ при $a = b$. г) $\frac{\sin b - \sin a}{b-a}$ при $a \neq b$ и $\cos a$ при $a = b$. Използувайте: за а) зад. 25 а), гл. II; за б) — зад. 25 б), гл. II; за в) — зад. 25 в), гл. II; за г) — зад 25 г), гл. II. Съставете аналогични задачи, като използувате зад. 26, гл. II.

24. а) $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$ и 1 при $x = 0$. б) Свежда се до а) при $x = \dfrac{\pi}{2}$. в) $x^2 - \sin^2 x$. г) $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$. д) $\dfrac{1}{x} - 2\operatorname{ctg} 2x$. е) $\dfrac{8}{3} + 4\operatorname{ctg}^2 2x - \dfrac{1}{x^2}$. Използувайте: за а) зад. 2 а), гл. II; за в) — зад. 31 а), гл. II; за г) — зад. 31 б), гл. II; за д) — зад. 31 в), гл. II; за е) — зад. 31 г), гл. II.

25. а) 0. б) От неравенствата $1 \geqq \cos^n \dfrac{x}{n} = \left(1 - \sin^2 \dfrac{x}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \geqq \sqrt{1 - \dfrac{n}{2}\sin^2 \dfrac{x}{n}}$, последното от които следва от неравенството на Бернули (зад. 32, гл. II), и от очевидното равенство $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin^2 \dfrac{x}{n} = 0$ се получава, че търсената граница е 1. в) Очевидно

$$\left(\cos\frac{x}{n} + \lambda \sin\frac{x}{n}\right)^n = \cos^n \frac{x}{n}\left(1 + \frac{\lambda \operatorname{tg}\frac{x}{n}\cdot n}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} n\lambda \operatorname{tg}\frac{x}{n} = \lambda x.$$

Ето защо търсената граница е $e^{\lambda x}$ съгласно зад. 58, гл. IV.

г) Очевидно

$$\cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} = \left(1 - \sin^2 \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\left[1 - x^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}\right]^n}.$$

Сега използувайте зад. 58, гл. IV, за да заключите, че търсената граница е $e^{\frac{x^2}{2}}$.

26. а) 0. б) $\dfrac{1}{2}$. в) $-\dfrac{1}{4}$. г) $\dfrac{b^2 - a^2}{2}$. д) $\dfrac{5}{2}$. е) $\dfrac{a^2 + b^2}{2}$. ж) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{k} a_\nu^2$; използувайте е) и индукция спрямо k. з) $\dfrac{n}{2}$; частен случай на ж).

27. а) $\dfrac{3}{2}$. б) Частен случай на в). в) Очевидно

$$\frac{1}{x^2}\left(\sqrt[n]{1 + x^{2-\alpha}\sin^\alpha x} - \cos ax\right)$$

$$= \frac{\sqrt[n]{1 - x^{2-\alpha}\sin^\alpha x} - 1}{x^{2-\alpha}\sin^\alpha x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha + \frac{1 - \cos ax}{x^2},$$

откъдето съгласно зад. 15 д) и 26 б) следва, че търсената граница е $\dfrac{1}{n} + \dfrac{a^2}{2}$.

28. а) Частен случай на б). б) Съгласно зад. 29, гл. II е в сила

$$\sin x = n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n} - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n} + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\frac{x}{n}\sin^5\frac{x}{n} - \cdots,$$

откъдето

$$\frac{n\sin\frac{x}{n} - \sin x}{x^3} = \frac{n\sin\frac{x}{n}}{x}\cdot\frac{1 - n\cos^{n-1}\frac{x}{n}}{x^2} + \binom{n}{3}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\cdot\frac{\sin^3\frac{x}{n}}{x^3} - \binom{n}{5}\cos^{n-5}\frac{x}{n}\cdot\frac{\sin^5\frac{x}{n}}{x^3} + \cdots$$

Сега от зад. 26 з) следва, че търсената граница е

$$\frac{n-1}{2n^2} + \frac{\binom{n}{3}}{n^3} = \frac{1}{n^3}\binom{n+1}{3}.$$

29. Тъй като двете неравенства се доказват аналогично, ще се ограничим само с първото от тях. От зад. 39, гл. II следва

$$\sin x - \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{n}{2\nu+1}\cos^{n-2\nu-1}\frac{x}{n}\sin^{2\nu+1}\frac{x}{n}$$
$$= (-1)^{k+1}\binom{n}{2k+3}\cos^{n-2k-3}\frac{x}{n}\sin^{2k+3}\frac{x}{n}$$
$$+(-1)^{k+2}\binom{n}{2k+5}\cos^{n-2k-5}\frac{x}{n}\sin^{2k+5}\frac{x}{n} + \cdots$$

Тази сума, разбира се, е крайна поради $\binom{n}{\nu} = 0$ при $\nu > n$. От друга страна,

$$\left|(-1)^{k+1}\binom{n}{2k+3}\cos^{n-2k-3}\frac{x}{n}\sin^{2k+3}\frac{x}{n} + (-1)^{k+2}\binom{n}{2k+5}\cos^{n-2k-5}\frac{x}{n}\sin^{2k+5}\frac{x}{n} + \cdots\right|$$

$$\leqq \binom{n}{2k+3}\left(\frac{|x|}{n}\right)^{2k+3} + \binom{n}{2k+5}\left(\frac{|x|}{n}\right)^{2k+5} + \cdots$$

$$\leqq \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}\left\{1 + \frac{x^2}{(2k+4)(2k+5)} + \frac{x^4}{(2k+4)(2k+5)(2k+6)(2k+7)} + \cdots\right\}$$

$$\leqq \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}\left(1 + \left(\frac{x}{k}\right)^2 + \left(\frac{x}{k}\right)^4 + \cdots\right) \leqq \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{k^2}{k^2 - x^2},$$

откъдето веднага следва търсеното неравенство.

30. От зад. 25 б) следва $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^{n-\nu}\frac{x}{n} = 1$. Ето защо

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{\nu}\cos^{n-\nu}\frac{x}{n}\sin^{\nu}\frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{\nu}(n-\nu)!}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{\nu}\frac{x^{\nu}}{\nu!} = \frac{x^{\nu}}{\nu!}.$$

31. Оставете n да расте неограничено в зад. 29 и използувайте зад. 30.

32. Оставете k да расте неограничено в зад. 31 и използувайте зад. 43 б), гл. IV.

33. а) $-\frac{1}{6}$. б) $\frac{1}{5!}$. в) $\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$. г) $\frac{1}{4!}$. д) $\frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Случаите а) и б) са частни случаи на в), а г) — на д). За да решите например в), разделете двете страни на неравенството от зад. 31 а) с x^{2k+1}.

34. $$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\frac{x^{\nu}}{n^{\nu}}\right| = \left|\sum_{\nu=k+1}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{x^{\nu}}{n^{\nu}}\right| \leqq \sum_{\nu=k+1}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{|x|^{\nu}}{n^{\nu}}$$

$$= \sum_{\nu=k+1}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{n^{\nu}}\cdot\frac{|x|^{\nu}}{\nu!} \leqq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{k} + \frac{|x|^2}{k^2} + \cdots\right)$$

$$\leqq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k}{k-|x|}.$$

35. В зад. 34 оставете n да расте неограничено.

36. Използувайте зад. 35 и зад. 43 б), гл. IV.

37. а) 1. б) $\frac{1}{2}$. в) $\frac{1}{6}$. г) $\frac{1}{k!}$; използувайте зад. 35.

38. а) $\ln a$. б) $\frac{(\ln a)^2}{2}$. в) $\frac{(\ln a)^k}{k!}$; в зад. 37 заместете x с $x\ln a$ и използувайте равенството $a^x = e^{x\ln a}$.

39. а) Очевидно $10^\circ = \frac{\pi}{18}$; сега се използува зад. 31 и се получава 0,1736. б) От зад. 35 следва, че търсеното приближение е 2,718281.

40. а) 0. б) ∞. в) 0. г) -1. д) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. е) $\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$. ж) $\frac{5}{7}$. з) $\frac{\alpha-\beta}{n}$. и) 0 при $\alpha < \frac{n-1}{n}\gamma$, $\frac{2}{n}$ при $\alpha = \frac{n-1}{n}\gamma$ и ∞ при $\alpha > \frac{n-1}{n}\gamma$. й) 0. к) 0, вж. зад. 33, гл. IV.

41. Формализирайте тези очевидни от графиките на съответните функции свойства.

42. а) $\alpha > 0$. б) $\alpha < 0$. в) За никое α. г) За всяко $\alpha > 0$.

43. а) $\frac{a_0}{b_0}$ при $m = n$, 0 при $n < m$, ∞ при $n > m$ и $a_0b_0 > 0$, $-\infty$ при $n > m$ и $a_0b_0 < 0$. б) $\frac{a_0}{b_0}$ при $m = n$, 0 при $n < m$, ∞ при $n > m$ и при $(-1)^{m+n}a_0b_0 > 0$, $-\infty$ при $n > m$ и при $(-1)^{m+n}a_0b_0 < 0$.

44. б) От зад. 15 и 25 б), гл. IV следва $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n} = 0$. Ето защо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{a^n} = 0$. Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова ν, че за всяко $n > \nu$ да е в сила

$$\frac{n+1}{a^n} < \varepsilon. \tag{1}$$

Нека $x > \nu + 1$ и $n = [x]$. Тогава $\nu < n \leqq x < n+1$ и следователно $\frac{x}{a^x} < \frac{n+1}{a^n}$. Ето защо от (1) следва, че неравенството $0 < \frac{x}{a^x} < \varepsilon$ е изпълнено за всяко $x > \nu + 1$. в) Използувайте равенството $\frac{x^2}{a^x} = \left(\frac{x}{(\sqrt{a})^x}\right)^2$ и б). е) Послужете си с неравенството $\frac{x^\alpha}{a^x} \leqq \frac{x^{[\alpha]+1}}{a^x}$ $(x \geqq 1)$ и г).

45. а) Положете $u = \ln x$ и по този начин сведете към зад. 44 б) с $a = e$. б) Послужете си с равенството $\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$ и с а). г) Използувайте равенството $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ и а).

46. а) Използувайте зад. 44 г).

47. а) Положете $y = \frac{1}{x}$ и използвайте зад. 45 а). д) Използвайте а). е) Послужете си с неравенството $x^{\frac{1}{x}} \leqq x$ при $0 < x < 1$. ж) Послужете си с а) и с неравенството от упътването към е).

48. а) 1. б) 0. в) 1. г) Докажете, че при $\lambda < 1$ неравенствата $e^{\lambda x} < e^x - x^2 < e^x$ са изпълнени за всички достатъчно големи x; след това логаритмувайте и докажете, че търсената граница е 1. д) 1. е) Докажете, че неравенството $x + (\ln x)^2 < 2x$ е в сила за всички достатъчно големи x, за да заключите, че търсената граница е 1. ж) ∞ при $\alpha > 0$ и $-\infty$ при $\alpha \leqq 0$. з) $\frac{3}{2}$. и) ∞. й) 0. к) Докажете, че неравенствата $2^{\sqrt{3x}-1} \leqq 2^{\sqrt{3x-1}} \leqq x + 2^{\sqrt{3x-1}} \leqq 2^{\sqrt{3x}+1}$ са в сила за всички достатъчно големи x, за да установите, че търсената граница е $\sqrt{3}\ln 2$.

49. В противен случай би могло да се заключи, че е в сила неравенството $(f(x))^{g(x)} > 1$ за всички достатъчно близки до a стойности на x и от $g(x) \geqq 0$ би следвало $f(x) \geqq 1$ в противоречие с $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

51. а) Очевидно

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = e$$

и следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова естествено число ν, че при $n \geqq \nu$ да са в сила неравенствата

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon \tag{1}$$

и

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} - e\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Нека сега $x \geqq \nu$. Да положим $n = [x]$. Тогава са в сила неравенствата $n \leqq x < n+1$. Ето защо

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{3}$$

тъй като очевидно $n \geqq \nu$. От (1) — (3) следва $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \varepsilon$ при $x \geqq \nu$. б) Аналогично на а), като се използва зад. 52, гл. IV. в) Свежда се към а) и б) и към зад. 50 б).

52. а) Ако $a \neq 0$, за всички достатъчно големи x е в сила

$$\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x} = \left(\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right)^{f(x)},$$

тъй като очевидно $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)} = \infty$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)} = -\infty$, и задачата се свежда към зад. 51. Ако $a = 0$, за всяко $\varepsilon > 0$ ще бъде в сила $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$ за всички достатъчно големи x. Ето защо $\left(1-\frac{\varepsilon}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{x}$ за всички достатъчно големи x. Сега от разгледания вече случай $a \neq 0$ следва, че за достатъчно големи x ще бъдат налице неравенствата $e^{-\varepsilon} - \varepsilon < \left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x} < e^{\varepsilon} + \varepsilon$. По-нататък всичко следва от $\lim\limits_{z\to 0} e^{z} = 1$. б) Очевидно за произволно реално N ще бъде в сила $f(x) > N$ за всички достатъчно големи x, поради което неравенството $\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{N}{x}\right)^{x}$ ще бъде изпълнено за всички достатъчно големи x. По-нататък разсъжденията завършват, както във втората част на а). в) Аналогично на б), като се използва $\lim\limits_{N\to-\infty} e^{N} = 0$.

53. Аналогично на зад. 52.

54. Сведете към зад. 52, 53 и 50.

55. а) $e^{\frac{a-b}{a+b}}$. б) e^{-2}. в) 1. г) $e^{a_1-b_1}$. Сведете към зад. 54.

56. а) e. б) e. в) e^{12}. Сведете към зад. 54.

57. Нека най-напред $a > 0$, а $x_1, x_2, \ldots$ е редица от точки на дефиниционната област на f, за които $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \neq 0$ за всяко естествено n. Съгласно теоремата на Хайне е достатъчно да се установи, че

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ln a. \tag{1}$$

В противен случай би съществувала подредица $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ на горната редица, за която $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = b \neq \ln a$. Тук b може да бъде и някой от символите $-\infty$ или ∞. Тогава съгласно зад. 54, приложена за ограничението на f до множеството от членовете

на подредицата $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$, бихме получили противоречащото на условието равенство $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_{n_k}f(x_{n_k}))^{\frac{1}{x_{n_k}}} = e^b$, с което (1) е доказано. При $a=0$ решението е аналогично.

58. Положете $f(x) = \dfrac{a^x-1}{x}$ и използвайте зад. 57.

59. Аналогично на предишната задача.

60. а) $a^b \ln a$. б) e^ξ. в) $\lambda e^{\lambda\xi}$.

61. Използвайте зад. 58.

63. а) $(\ln a)^2$. б) $\ln a$. в) $\ln a$.

64. а) Да определим функцията f от равенството $\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2} = 1+\dfrac{f(x)}{x}$. Тогава $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[x\left(\sqrt[x]{2}-1\right)+x\left(\sqrt[x]{3}-1\right)\right]$ и следователно $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}(\ln 2+\ln 3) = \ln\sqrt{6}$ съгласно зад. 61. Ето защо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt[x]{2}+\sqrt[x]{3}\right)\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)} = e^{\ln\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

съгласно зад. 52 а). б) $\sqrt[5]{72}$. в) $\lambda^p\mu^q$. г) $\sqrt{3}$.

65. а) 1. б) Очевидно $\dfrac{1}{x^2}(2^{\cos x}-2) = 2\cdot\dfrac{2^{\cos x-1}-1}{\cos x-1}\cdot\dfrac{\cos x-1}{x^2}$, поради което търсената граница е $-\ln 2$ съгласно зад. 26 б) и 58. в) $\dfrac{a}{2}\ln a$. г) $-\dfrac{a}{8}\ln a$. д) $\dfrac{a}{16}\ln a$. е) $\dfrac{a}{2}\ln a$.

66. Използвайте очевидното равенство

$$\frac{a^{f(x)}-a^{g(x)}}{x^\alpha} = a^{g(x)}\cdot\frac{\left(a^{\frac{f(x)-g(x)}{x^\alpha}}\right)^{x^\alpha}-1}{x^\alpha}$$

и зад. 59 и 16.

67. а) $\ln\dfrac{2}{3}$. б) $\ln 2$. в) 0 при $\alpha>1$, $\ln a$ при $\alpha=1$ и ∞ при $0<\alpha<1$. г) $\ln 2$ при $\alpha>1$, $\ln\dfrac{2}{3}$ при $\alpha=1$ и $-\infty$ при $0<\alpha<1$.

68. Използвайте равенството $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ и зад. 51 в), както и зад. 74, гл. IV.

69. а) -1. б) От зад. 68 и от равенството

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1+2x}\,\frac{2x}{\ln(1+2x)}$$

следва, че търсената граница е $\dfrac{1}{2}$. в) $\dfrac{1}{a}$.

70. а) $4a^2$. б) 1. в) $-\dfrac{1}{2}$. г) $3e^3$.

71. а) Очевидно

$$x-\ln(1+x) = \ln\frac{e^x}{1+x}. \tag{1}$$

Да определим функцията φ от равенството

$$e^x = 1+x+x^2\varphi(x). \tag{2}$$

Тогава $\varphi(x) = \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ и от зад. 37 б) следва

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

От (1) и (2) следва

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\ln\frac{1+x+x^2\varphi(x)}{1+x} = -\frac{\ln\left(1+x^2\dfrac{\varphi(x)}{1+x}\right)}{x^2\dfrac{\varphi(x)}{1+x}}\cdot\frac{\varphi(x)}{1+x},$$

което заедно с (3) и зад. 68 показва, че търсената граница е $-\dfrac{1}{2}$.

б) Очевидно

$$x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x) = \ln\frac{e^{x-\frac{x^2}{2}}}{1+x}. \tag{4}$$

Да определим функцията ψ от равенството

$$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+u^3\psi(u). \tag{5}$$

Тогава $\psi(u) = \dfrac{1}{u^3}\left(e^u-1-u-\dfrac{u^2}{2}\right)$ и следователно

$$\lim_{u\to 0}\psi(u) = \frac{1}{6} \tag{6}$$

съгласно зад. 37 в). От (4) и (5) следва $\frac{1}{x^3}\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)$

$$= -\frac{1}{x^3}\ln\frac{1+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^3\psi\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}{1+x}$$

$$= -\frac{1}{x^3}\ln\left[1+x^3\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-1\right)+\left(1-\frac{x}{2}\right)^3\psi\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}{1+x}\right].$$

При $\theta(x)=\frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-1\right)+\left(1-\frac{x}{2}\right)^3\psi\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right)$ оттук следва

$$\frac{1}{x^3}\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{\ln(1+x^3\theta(x))}{x^3\theta(x)}\theta(x) \tag{7}$$

и

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=-\frac{1}{3} \tag{8}$$

съгласно (6). Сега съгласно зад. 68 от (7) и (8) следва, че търсената граница е $\frac{1}{3}$.

72. Нека $f(x)=\frac{(1+x)^a-1}{x}$. Тогава $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^a=e^a$ и от зад. 57 следва $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ln e^a=a$.

73. Използувайте зад. 72.

74. а) $\frac{\pi}{e}2^{x-e}$. б) $\frac{a}{b}3^{a-b}$. в) $\frac{1}{7\alpha}$. г) $\frac{1}{12}$.

75. а) От равенството $\frac{1-\cos^\alpha x}{x^2}=\frac{1-\cos^\alpha x}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$, от зад. 73 с $a=1$ и от зад. 26 б) следва, че търсената граница е $\frac{\alpha}{2}$. б) $\frac{1}{2}(b^2\beta-a^2\alpha)$; сведете решението до а). в) $\frac{1}{2}(\alpha a^2+\beta b^2)$. г) $\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu\alpha_\nu^2$; приложете индукция спрямо k. д) $\alpha+\frac{a^2}{2}$; използувайте зад. 72.

76. а) Очевидно $(1+x)^a-1-ax=e^{a\ln(1+x)}-1-ax$. Да въведем функцията φ с равенството (2) от решението на зад. 71 а). Тогава

$\frac{(1+x)^a-1-ax}{x^2}=a\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+a^2\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2\varphi(a\ln(1+x))$, откъдето следва, че търсената граница е $\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}=\binom{a}{2}$ съгласно зад. 71 а) и 68 и съгласно (3) от решението на зад. 71 а).

б) $\binom{a}{3}$.

77. а) $\alpha+1$. б) Приложете теоремата на Шолц (зад. 142, гл. IV) и резултата от а), за да заключите, че търсената граница е $\frac{1}{\alpha+1}$. Сравнете със зад. 143 а), гл. IV.

78. а) $\binom{\alpha+1}{2}$. б) От очевидното равенство

$$\frac{(x+1)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}-(\alpha+1)(x+1)^\alpha}{x^{\alpha-1}}$$

$$=\frac{(x+1)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}-(\alpha+1)x^\alpha}{x^{\alpha-1}}-(\alpha+1)\frac{(x+1)^\alpha-x^\alpha}{x^{\alpha-1}},$$

от а) и от зад. 77 а) следва, че търсената граница е $\binom{\alpha+1}{2}$ $-\alpha(\alpha+1)=-\binom{\alpha+1}{2}$. в) $\frac{\alpha+1}{2}$. г) $\frac{1}{2}$; приложете теоремата на Шолц и в); сравнете със зад. 143 б), гл. IV.

79. а) Положете $u=\frac{1}{x}$. Тогава даденият израз придобива вида

$$\lim_{u\to 0}\frac{(\alpha+1)(1+u)^\alpha u-2((1+u)^{\alpha+1}-1)+(\alpha+1)u}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(\alpha+1)((1+u)^\alpha-1-\alpha u)u}{u^3}$$

$$-2\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^{\alpha+1}-1-(\alpha+1)u-\binom{\alpha+1}{2}u^2}{u^3}$$

$$=(\alpha+1)\binom{\alpha}{2}-2\binom{\alpha+1}{3}=\binom{\alpha+1}{3}$$

съгласно зад. 76. б) Използувайте теоремата на Шолц и а), за да получите отговора $\frac{\alpha}{12}$. Сравнете със зад. 77 б) и 78 г).

80. а) За произволно положително ε неравенствата $(\gamma-\varepsilon)x < (1+x)^\gamma - 1 < (\gamma+\varepsilon)x$ са в сила за всички достатъчно близки до 0 положителни x съгласно зад. 72. Ето защо за всички достатъчно големи n ще бъдат изпълнени неравенствата $(\gamma-\varepsilon)\frac{k}{n^2} < \left(1+\frac{k}{n^2}\right)^\gamma - 1 < (\gamma+\varepsilon)\frac{k}{n^2}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. След събирането им се получават неравенствата

$$(\gamma-\varepsilon)\frac{n(n+1)}{2n^2} < \sum_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^\gamma - 1\right) < (\gamma+\varepsilon)\frac{n(n+1)}{2n^2},$$

от които следва, че търсената граница е $\frac{\gamma}{2}$. Сравнете със зад. 44 г), гл. IV. б) Работи се аналогично на а) и за границата се получава 0 при $\alpha+1<\beta$, $\frac{\gamma a}{\beta}$ при $\alpha+1=\beta$, ∞ при $\alpha+1>\beta$ и $a\gamma>0$, $-\infty$ при $\alpha+1>\beta$ и $a\gamma<0$. При $a=0$ границата очевидно е 0. Сравнете със зад. 44 г) и д), гл. IV. в) Работете, както в а), като вместо със зад. 72 си послужите със зад. 58; търсената граница е 0 при $\alpha+1<\beta$, $\frac{b\ln a}{\beta}$ при $\alpha+1=\beta$, ∞ при $\alpha+1>\beta$ и $b>0$, $-\infty$ при $\alpha+1>\beta$ и $\beta<0$. При $b=0$ границата е очевидно 0. г) Използувайте $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Търсената граница е 0 при $\alpha+1<\beta$, $\frac{a}{\beta}$ при $\alpha+1=\beta$, ∞ при $\alpha+1>\beta$ и $a>0$, $-\infty$ при $\alpha+1>\beta$ и $a<0$. При $a=0$ границата очевидно е 0.

81. Работете, както в зад. 80. Отговорите са: 0 при $\alpha+\frac{1}{\gamma}<\beta$, $\frac{la^\gamma}{\beta\gamma}$ при $\alpha+\frac{1}{\gamma}=\beta$, ∞ при $\alpha+\frac{1}{\gamma}>\beta$ и $l>0$, $-\infty$ при $\alpha+\frac{1}{\gamma}>\beta$ и $l<0$.

82. а) и б) са частни случаи на в), което пък от своя страна е частен случай на г). От г) ще разгледаме случая $a>0$. При $a_n = \prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right)$ е в сила

$$\ln a_n = \sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\nu^\alpha a}{n^\beta}\right). \tag{1}$$

Тъй като $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, приложима е зад. 81 с $\gamma = l = 1$. Ето защо границата на (1) при неограниченото нарастване на n ще бъде 0 при $\alpha+1<\beta$, $\frac{a}{\beta}$ при $\alpha+1=\beta$ и ∞ при $\alpha+1>\beta$. Чрез антилогаритмуване оттук следва, че търсената граница е 1 при $\alpha+1<\beta$, $e^{\frac{a}{\beta}}$ при $\alpha+1=\beta$ и ∞ при $\alpha+1>\beta$. Ако $a<0$, изменение претърпява само последният случай, в който границата става 0. При $a=0$ търсената граница е очевидно 1.

83. а) $e^{-\frac{1}{6}}$. б) 1 при $\alpha > \frac{3}{2}$, $e^{-\frac{a^2}{6}}$ при $\alpha = \frac{3}{2}$, 0 при $\alpha < \frac{3}{2}$ $(a \neq 0)$. в) 1 при $\alpha+\frac{1}{2}<\beta$, $e^{-\frac{a^2}{4\beta}}$ при $\alpha+\frac{1}{2}=\beta$ и 0 при $\alpha+\frac{1}{2}>\beta$ $(a\neq 0)$. г) 1 при $\alpha>\frac{1}{2}$, $e^{-\frac{a^2}{2}}$ при $\alpha=\frac{1}{2}$ и 0 при $\alpha<\frac{1}{2}$ $(a\neq 0)$.

84. Допуснете противното и ще получите противоречие.

85. а) $\mathbf{R}$. б) $\varnothing$. в) $[0, 1)$. г) $[0, 1)$.

87. Директно прилагане на дефинициите.

88. Нека например f е растяща. Докажете, че тогава

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{x>a} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = \sup_{x<a} f(x).$$

Шеста глава

1. а) Използувайте зад. 7, гл. V. б) Вж. зад. 9, гл. V.

3. Функцията е прекъсната при $x=0$, вж. фиг. 10.

4. Функцията е непрекъсната, вж. фиг. 11.

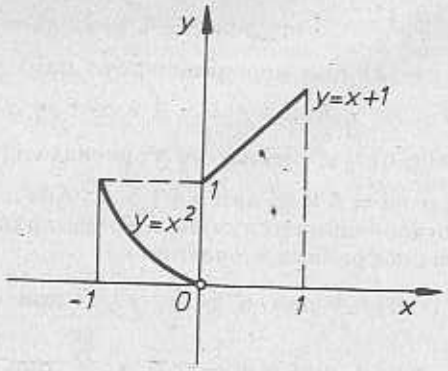
5. а) От $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ следва $\lambda = 0$. б) $\lambda = 0$, понеже $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$ съгласно зад. 47 в), гл. V.

6. а) Точката ξ е *изолирана* за X, т. е. съществува околност U на ξ с $U \cap X = \{\xi\}$. б) Всичките точки на $\mathbf{I}$ са изолирани. г) Когато $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$.

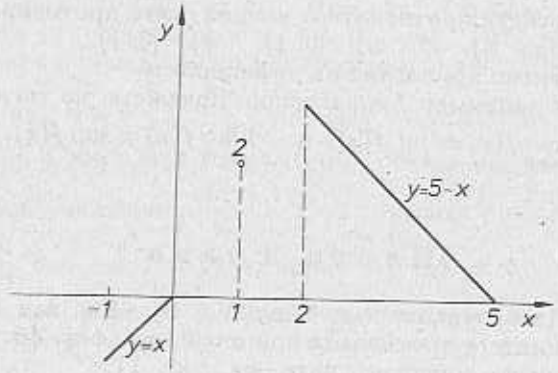
7. Всяка точка x на X трябва да бъде изолирана.

9. Начертайте графиките.

10. б) Използувайте теоремата за непрекъснатост на произведение и частно.



Фиг. 10



Фиг. 11

11. Приложете зад. 10 а).

13. а) Разгледайте например функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = -1$ за рационални x и $f(x) = 1$ за ирационални x. б) Използувайте непрекъснатостта на функцията $\sqrt[3]{u}$ и теоремата за непрекъснатост на непрекъсната функция от непрекъсната функция.

14. а) Разгледайте например функцията от упътването към зад. 13 а). б) Нека φ е функцията от упътването към зад. 13

а). Разгледайте функцията $f\varphi$ и използувайте зад. 10 б).

15. а) Разгледайте например функцията $\sin \frac{\pi}{x} D(x)$, където D е функцията на Дирихле. б) Разгледайте например функцията от а) в точките $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$

16. а) Ако $q_1, q_2, \ldots$ не дивергираше към ∞, би съществувала ограничена, а следователно и сходяща подредица $q_{n_1}, q_{n_2}, \ldots$ Тъй като числата q_n са естествени, от някое място нататък всички членове на тази сходяща подредица трябва да съвпадат, така че без ограничение на общността може да се предположи, че $q_{n_k} = q$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогава редицата с общ член $p_{n_k} = \frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} q_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ би била сходяща, поради което от някой номер нататък числата p_{n_k} биха съвпадали, т. е. $p_{n_k} = p$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ето защо редицата $\frac{p_n}{q_n}$ би притежавала подредица, всичките членове на която са равни на $\frac{p}{q}$ в противоречие с ирационалността на ξ. б) Прекъснатостта в рационалните точки е очевидна. Непрекъснатостта в ирационалните точки следва от а).

17. Нека функцията f е непрекъсната, U е отворено множество и $V = f^{-1}(U)$. За произволно ξ от V е в сила $f(\xi) \in U$, поради което съществува околност E на $f(\xi)$ с $E \subset U$. Избираме такава околност Δ на ξ, че да е налице включването $f(\Delta) \subset E$. Тогава $\Delta \subset f^{-1}(E) \subset V$. И така всяка точка ξ на V притежава околност Δ, която изцяло се съдържа във V. Ето защо множеството $f^{-1}(U)$ е отворено. Нека, обратно, множеството $f^{-1}(U)$ е отворено винаги когато U е отворено, и нека ξ е произволно реално число. За произволна околност U на $f(\xi)$ множеството $f^{-1}(U)$ ще бъде отворено и същевременно ще бъде в сила $\xi \in f^{-1}(U)$. Ето защо съществува такава околност V на ξ, че $V \subset f^{-1}(U)$. Ясно е, че за тази околност е в сила $f(V) \subset U$, с което непрекъснатостта на f е установена.

18. Сведете към зад. 17.

19. Нека a е произволна точка от L, а ε е произволно положително число. Съгласно дефиницията на g съществува такова положително число δ, че от

$$|x - a| < \delta \quad (a \neq x \in X) \tag{1}$$

да следва

$$|f(x) - g(a)| \leqq \varepsilon. \tag{2}$$

Нека сега ξ е произволна точка от L, за която

(3) $$|\xi - a| < \delta.$$

Тъй като ξ е точка на сгъстяване на X, съществува редица $x_1, x_2, \ldots$ с $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, $x_n \neq \xi$ и $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$. От дефиницията на g и от теоремата на Хайне следва

(4) $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g(\xi).$$

От друга страна, от (3) следва, че числото $\delta - |\xi - a|$ е положително. Ето защо за всички достатъчно големи n ще бъде в сила неравенството $|x_n - \xi| < \delta - |\xi - a|$. Следователно $|x_n - a| \leqq |x_n - \xi| + |\xi - a| + \delta$ за всички достатъчно големи n. Тъй като освен това $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, при $\xi \neq a$ ще бъде в сила $x_n \neq a$ за всички достатъчно големи n. Понеже числото δ е избрано така, че от (1) да следва (2), ще бъде изпълнено неравенството

(5) $$|f(x_n) - g(a)| \leqq \varepsilon$$

за всички достатъчно големи n. От (4) и (5) след граничен преход се получава

(6) $$|g(\xi) - g(a)| \leqq \varepsilon$$

за всяко $\xi \neq a$ със свойството (3). При $\xi = a$ (6) е тривиално вярно. По този начин се убедихме, че за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяка точка ξ от L, за която е изпълнено неравенството (3), да е в сила и неравенството (6). С това е установено, че функцията g е непрекъсната в произволна точка a на L.

20. а) За произволно цяло k дефинираме f в интервала $[k, k+1]$ линейно, т. е. с равенството $f(x) = (k+1-x)f(k) + (x-k)f(k+1)$ $(k \leqq x \leqq k+1)$. б) Нека $X \setminus F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, където (a_n, b_n) $(n \in \mathbf{N})$ са непресичащи се два по два отворени интервала (компонентите на отвореното множество $\mathbf{R} \setminus F$, вж. зад. 54, гл. III). Положете $f(x) = g(x)$ за всяко x от F и $g(x) = \dfrac{b_n - x}{b_n - a_n} f(a_n) + \dfrac{x - a_n}{b_n - a_n} f(b_n)$, когато $x \in (a_n, b_n)$ и a_n и b_n са крайни. Ако $b_n = \infty$, положете $g(x) = f(a_n)$ при $x > a_n$, а ако $a_n = -\infty$, положете $g(x) = f(b_n)$ при $x < b_n$. По този начин ще получите функция $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Убедете се, че тя е търсеното продължение.

в) Нека $\xi \in [X] \setminus X$. Положете $f(x) = \dfrac{1}{x - \xi}$.

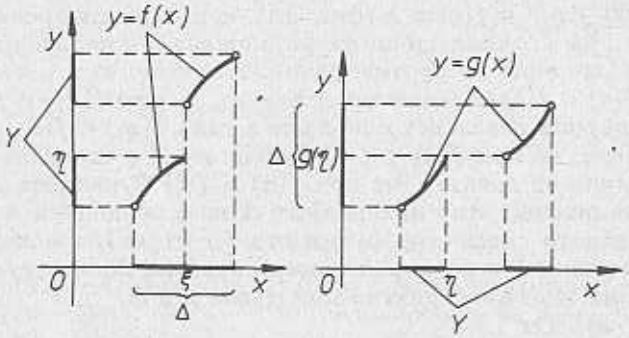
21. а) Поради непрекъснатостта на функцията $\sin x - \cos x$ задачата се свежда до решаване на уравнението $\sin x - \cos x = 0$ съгласно теоремата на Болцано. Корените му в интервала $[0, 2\pi]$ са $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{5\pi}{4}$. Те разделят интервала $[0, 2\pi]$ на подинтервалите $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ и $\left[\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$. Функцията $\sin x - \cos x$ запазва знака си във всеки от тези подинтервали. Поради това за определяне на знака ѝ е достатъчно да се намери стойността ѝ в някоя вътрешна точка. Така се убеждаваме, че в интервала $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ е в сила $\sin x - \cos x > 0$, а в другите подинтервали е валидно обратното неравенство. Поради периодичността на $\sin x$ и $\cos x$ решението на неравенството се състои в обединението на интервалите $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\nu\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2\nu\pi\right)$ $(\nu \in \mathbf{I})$. б) $0 < x < \pi$, $\dfrac{3}{2}\pi < x < 3\pi$, $\dfrac{9}{2}\pi < x < 6\pi$ и т. н. в) $(-3, -1) \cup (1, 3)$. г) $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ при $0 < a < 1$ и $(-2, 3)$ при $a > 1$. д) $\left(\dfrac{3-e}{2}, \dfrac{3+e}{2}\right)$.

23. а) Да, защото разглежданият полином приема стойности с противоположни знаци в точките 1 и 2. б) Да. в) Да. г) Не. д) Да. е) Не, защото $x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 14x + 14 = x^3(x^2-9) + x^2(x^2-9) + (14x+14)$ и първите две събираеми в дясната страна са неотрицателни, а третото е положително при $x \geqq 3$. ж) Нека $P(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$. Без ограничение на общността може да се разгледа само случаят $a_0 > 0$. Поради нечетността на n старшият коефициент на полинома $P(-x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} a_\nu x^{n-\nu}$ е отрицателен. Сега от зад. 1, гл. IV следва, че съществуват такива числа a и b, че $P(a) > 0$, $P(-b) < 0$. Остава да се приложи теоремата на Болцано към непрекъснатата функция P в интервала $(a, -b)$. з) Не. и) Да. При $k = 1$ това се установява например така: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} (\operatorname{tg} x - x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x - x) = \infty$, поради което твърдението следва от теоремата на Болцано, приложена към непрекъснатата функция $\operatorname{tg} x - x$ в някой интервал $[\xi, \eta]$ с лява граница ξ, по-голяма от $\dfrac{\pi}{2}$ и достатъчно близка до $\dfrac{\pi}{2}$, и дясна граница η, по-малка от $\dfrac{3\pi}{2}$ и достатъчно близка до $\dfrac{3\pi}{2}$.

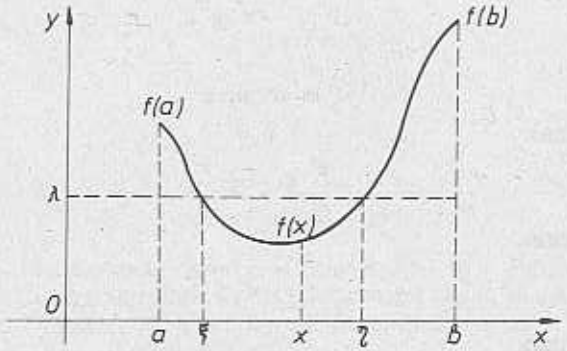
й) Аналогично на и).

24. **а)** Най-напред ще установим, че за всеки такъв полином е в сила $a = 0$. Наистина да допуснем противното и да положим $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогава за произволно цяло n ще имаме $f(n+1) - f(n) = 2an + a + b$, което поради $a \neq 0$ показва, че дължината на интервала $[f(n), f(n+1)]$ е по-голяма от 1 за всички достатъчно големи n. Ето защо за всички такива n интервалът $[f(n), f(n+1)]$ ще съдържа във вътрешността си цели числа. Сега теоремата на Болцано показва, че съществува ξ с $n < \xi < n+1$, за което числото $f(\xi)$ е цяло. Поради предположеното свойство на f числото ξ също би трябвало да е цяло, което противоречи на избора му. Ето защо $a = 0$. По-нататък е лесно да се установи, че $b = 1$ или $b = -1$ и че c е цяло. **б)** $x+n$ и $-x+n$ с произволно цяло n.

25. **а)** Нека f е например стриктно растяща. Ако x_1 и x_2 са точки от Δ с $x_1 \neq x_2$, ще бъде в сила поне едно от неравенствата $x_1 < x_2$ или $x_2 < x_1$ и тъй като f е стриктно растяща, поне едно от неравенствата $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_2) < f(x_1)$ е в сила. Ето защо $f(x_1) \neq f(x_2)$, поради което f е обратима. Нека $Y = f(\Delta)$ и $g : Y \to \Delta$ е обратната функция на f. За произволна точка η на Y да положим $\xi = g(\eta)$. Тогава $\eta = f(\xi)$. Възможни са два случая: 1) ξ е вътрешна за Δ и 2) ξ е край на Δ. В случая 1) нека ε е произволно положително число. Съществуват точки x_1 и x_2 от Δ, за които $\xi - \varepsilon < x_1 < \xi < x_2 < \xi + \varepsilon$. Да положим $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Тогава y_1 и y_2 са точки от Y и са в сила неравенствата $y_1 < \eta < y_2$, тъй като f е стриктно растяща. Ето защо интервалът (y_1, y_2) е околност на η. Нека сега $y \in (y_1, y_2) \cap Y$ и $x = g(y)$. Твърдим, че $x_1 < x < x_2$. Наистина в противен случай от монотонността на f би следвало, че е в сила поне едно от неравенствата $y = f(x) \leqq f(x_1) = y_1$ или $y_2 = f(x_2) \leqq f(x) = y$, всяко от които противоречи на избора на y. И така валидно е неравенството $x_1 < g(y) < x_2$, което заедно с избора на x_1 и x_2 показва, че са изпълнени неравенствата $g(\eta) - \varepsilon < g(y) < g(\eta) + \varepsilon$. С това е установена непрекъснатостта на g в случая, когато ξ е вътрешна точка на Δ. В случая 2) доказателството се свежда към 1) чрез подходящо додефиниране на f със запазване на стриктната монотонност на тази функция до интервал, за който ξ е вътрешна точка. Да отбележим изрично, че в тази задача не се предполага непрекъснатост на f (фиг. 12). От това обстоятелство в частност следва, че ако множеството на стойностите на една стриктно монотонна функция е интервал, то тя е непрекъсната. За да се установи това, е достатъчно да се приложи твърдението в разглежданата задача към обратната на



Фиг. 12



Фиг. 13

една такава функция. **б)** За дефиницията на обратимо изображение вж. текста преди зад. 27, гл. I. За простота най-напред ще разгледаме случая, когато Δ е ограниченият и затворен интервал $[a, b]$. От обратимостта на f следва $f(a) \neq f(b)$. Ето защо $f(a) < f(b)$ или $f(b) < f(a)$. За определеност ще разгледаме неограничителния случай $f(a) < f(b)$ и ще установим, че тогава f е стриктно растяща. За тази цел първо ще докажем, че за всяка точка x от (a, b) са в сила неравенствата $f(a) < f(x) < f(b)$. В противен случай от обратимостта на f би следвало $f(x) < f(a)$ или $f(b) < f(x)$ за някое x от (a, b). Нека например $f(x) < f(a)$ и нека λ е реално число с $f(x) < \lambda < f(a)$. Сега от теоремата на Болцано следва, че съществуват точка ξ от (a, x) и точка η от

(x, b) с $f(\xi) = \lambda$ и $f(\eta) = \lambda$ (фиг. 13), което противоречи на обратимостта на f. Аналогично се установява, че неравенството $f(b) < f(x)$ също води до противоречие. Ето защо от $a < x < b$ следва $f(a) < f(x) < f(b)$. Ако сега $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$, то $f(x_1) < f(b)$ и съгласно току-що доказаното ще бъде в сила $f(x_1) < f(x_2)$. С това е установено, че при $f(a) < f(b)$ функцията f е стриктно растяща. Аналогично се доказва, че при $f(a) > f(b)$ функцията f е стриктно намаляваща. Ако интервалът Δ не е ограничен и затворен, от доказаното следва, че функцията f е стриктно монотонна във всеки ограничен и затворен подинтервал на Δ, а оттук лесно се заключава, че тя е стриктно монотонна и в Δ.

26. а) От

(1) $$-1 \leqq x \leqq 1$$

следва

(2) $$-1 \leqq -x \leqq 1.$$

При

(3) $$\xi = \arcsin x$$

от (1) следва

(4) $$-\frac{\pi}{2} \leqq \xi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

От (4) следва

(5) $$-\frac{\pi}{2} \leqq -\xi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

От (3) следва

(6) $$-x = -\sin\xi = \sin(-\xi).$$

От (2), (5) и (6) следва

(7) $$-\xi = \arcsin(-x).$$

Сега твърдението се получава от (3) и (7). б) — г) Аналогично на а).

27. а) От

(1) $$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

и

(2) $$y = x - 2n\pi$$

следват

(3) $$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$$

и

(4) $$\sin x = \sin y.$$

От (2) — (4) следва $\arcsin(\sin x) = x - 2n\pi$. От

(5) $$-\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$$

и

(6) $$y = -x + (2n+1)\pi$$

следват (3) и (4). От (3), (4) и (6) следва $\arcsin(\sin x) = -x + (2n+1)\pi$. б) — г) Аналогично на а).

29. а) От

(1) $$0 \leqq x \leqq 1$$

и

(2) $$\xi = \arcsin x$$

следват

(3) $$0 \leqq \xi \leqq \frac{\pi}{2}$$

и

(4) $$\cos\xi = \sqrt{1 - x^2}.$$

От (2) — (4) следва $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$. Втората част на твърдението се получава от първата част чрез замяна на x с $-x$ поради зад. 26 а). б) и в) Аналогично на а).

33. а) От $-1 \leqq x \leqq 1$ и

(1) $$\xi = \arccos x$$

следват

(2) $$x = \cos\xi$$

и

(3) $$0 \leqq \xi \leqq \pi.$$

От (2) следва

(4) $$\sin\xi = \sqrt{1 - \cos^2\xi} = \sqrt{1 - x^2},$$

където знакът пред корена е плюс поради (3). Твърдението се получава от (4) и (1). б) и в) Аналогично на а).

37. а) Използвайте тъждеството $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

б) Използувайте тъждеството $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

42. Приложете зад. 29, гл. II.

43. а) Дефиницията на полином на Чебишов от първи род и тъждеството $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. б) Аналогично, но с тъждеството $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. в) Аналогично, но с тъждеството $\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos n\alpha$. г) Аналогично, но с тъждеството $\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha\cos\alpha-\sin n\alpha\sin\alpha$.

44. Зад. 42 и зад. 29, гл. II или пък зад. 43 а) и б) с индукция спрямо n.

45. Нулите на T_n са $x_\nu = \cos\dfrac{\pi+2\nu\pi}{2n}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, а нулите на U_n са $x_\nu = \cos\dfrac{\nu\pi}{n+1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

46. От $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ $(|x| \leqq 1)$ следва $\left|\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$. Ето защо полиномът $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$ удовлетворява въпросното неравенство. Нека сега P е полином от степен n със старши коефициент 1, за който е в сила неравенството

$$|P(x)| \leqq \frac{1}{2^{n-1}} \quad (-1 \leqq x \leqq 1), \tag{1}$$

и нека

$$x_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Тогава

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x_\nu) &= \frac{1}{2^{n-1}}\cos\left(n\arccos\left(\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos\nu\pi \\ &= \frac{(-1)^\nu}{2^{n-1}} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).\end{aligned} \tag{3}$$

Разликата

$$D = \frac{1}{2^{n-1}}T_n - P \tag{4}$$

очевидно е полином от степен, по-малка от n. От друга страна, от (1) и (3) следва

$$(-1)^\nu D(x_\nu) \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Равенството

$$\begin{aligned}D(x) = {} & D(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} \\ & + D(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + D(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\end{aligned} \tag{6}$$

(*интерполационна формула на Лагранж*) е очевидно вярно за $x = x_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$, т. е. полиномите в двете страни на (6) съвпадат за $n+1$ различни стойности на аргумента. От принципа за сравняване на коефициентите (зад. 9, гл. II) сега следва, че коефициентите на x^n в двете страни на (6) са равни, т. е.

$$\begin{aligned}0 = {} & \frac{D(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} \\ & + \frac{D(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{D(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.\end{aligned} \tag{7}$$

От друга страна, от (2) непосредствено следват неравенствата

$$x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n, \tag{8}$$

които заедно с (5) показват, че всичките събираеми в дясната страна на (7) са неотрицателни. Ето защо от (7) следват равенствата

$$D(x_0) = D(x_1) = D(x_2) = \ldots = D(x_n) = 0. \tag{9}$$

Сега от (6) и (9) следва, че D е нулевият полином, което заедно с (4) показва, че полиномът P е идентичен с полинома $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$.

47. Използувайте зад. 27 б).

49 и **50.** Директно приложение на дефинициите.

51. Включванията $\operatorname{ch}\mathbf{R} \subset [1, \infty)$, $\operatorname{sh}\mathbf{R} \subset \mathbf{R}$, $\operatorname{th}\mathbf{R} \subset (-1, 1)$, $\operatorname{cth}(\mathbf{R}\setminus\{0\}) \subset (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ следват директно от дефинициите, а обратните включвания — от теоремата на Болцано.

52. а) Нека

(1) $$0 \leqq x_1 < x_2.$$

Трябва да се докаже, че

(2) $$e^{x_1} + e^{-x_1} < e^{x_2} + e^{-x_2}.$$

За тази цел нека $y_1 = e^{x_1}$ и $y_2 = e^{x_2}$. Тогава (2) добива вида

(3) $$y_1 + \frac{1}{y_1} < y_2 + \frac{1}{y_2},$$

а от (1) следва

(4) $$1 \leqq y_1 < y_2,$$

тъй като функцията e^x е стриктно растяща. Следователно задачата ще бъде решена, ако се покаже, че от (4) следва (3). Тъй като (3) е равносилно с $(y_2 - y_1)\left(1 - \frac{1}{y_1 y_2}\right) > 0$, последното твърдение е очевидно. б) — г) Аналогично.

53. а) Тъй като функцията $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ е дефинирана в $[1, \infty)$ (зад. 51) и стойностите ѝ принадлежат на интервала $[0, \infty)$, твърдението ще бъде установено, ако се докаже равенството $\operatorname{ch}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = x$ за всяко $x \geqq 1$, а то е пряко следствие от дефинициите. б) — г) Аналогично.

54. Зад. 53.

55. а) Да. б) Най-малка — не, най-голяма — да. в) Най-малка — да, най-голяма — не. г) Да. д) Най-малка — не, най-голяма — да. е) Най-малка — да, най-голяма — не.

56. Такава е например функцията, дефинирана с $f(0) = 0$ и $f(x) = -\left|x \sin \frac{1}{x}\right|$ за $x \neq 0$ при $\xi = 0$.

57. а) Ще разгледаме най-напред случая, когато са в сила $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbf{R}$ и $\lim\limits_{x \to b} f(x) \in \mathbf{R}$. Нека функцията $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ е дефинирана с равенствата

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } a < x < b, \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{при } x = a, \\ \lim\limits_{x \to b} f(x) & \text{при } x = b. \end{cases}$$

Тя е непрекъсната съгласно зад. 19. Тъй като е дефинирана в ограничен и затворен интервал, между стойностите ѝ има една най-голяма $g(c)$ $(a \leqq c \leqq b)$. Ако $a < c < b$, задачата е решена;

затова нека например $c = a$. Тогава най-голямата стойност на f в интервала (a, b) е $f(\xi)$. В случая, когато някоя от границите $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ е $-\infty$, твърдението се свежда към теоремата на Вайерщрас и към вече решената част от задачата чрез подходящо скъсяване на интервала (a, b). б) Ще се ограничим със случая, когато $f(\xi) > \lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $f(\xi) > \lim\limits_{x \to b} f(x)$. Тогава съществуват числа A и B, такива че $a < A < B < b$ и $f(x) < f(\xi)$ при $a < x < A$ и при $B < x < b$. От теоремата на Вайерщрас следва, че функцията f притежава най-голяма стойност в интервала $[A, B]$. Не е трудно да се съобрази, че това е най-голямата стойност на f и в интервала (a, b).

58. Сведете към зад. 57 в).

59. Също.

60. а) Функцията очевидно е непрекъсната в интервала $[1, \infty)$ и клони към $-\infty$ при x, клонящо към ∞. Ето защо е приложима зад. 57 б). б) Сега функцията е $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$. Очевидно $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. От друга страна, $f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 > 0 = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, както това следва от неравенствата $\sqrt{2} < \sqrt{e} < e^{\frac{x}{4}}$ след логаритмуване. Ето защо функцията притежава най-голяма стойност в посоченото интервал. За да се убедим, че тя притежава и най-малка стойност, е достатъчно да установим, че $f\left(\frac{1}{10}\right) < \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, т. е. че $\operatorname{arctg} 10 - \frac{1}{2}\ln 101 < 0$, което следва от $\operatorname{arctg} 10 < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{1}{2}\ln 101 > \ln 10 > \ln e^2 = 2$. в) В този случай функцията клони към ∞ при x, клонящо към ∞.

61. Очевидно $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. От друга страна, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ поради $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ съгласно зад. 47 а), гл. V. От зад. 36, гл. V следва $e^{\frac{1}{x}} > 1 + \frac{1}{x}$, т. е. $e > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x > 0$. Ето защо $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$, поради което $f(x) < 0$ за всяко $x > 0$. Следователно функцията няма нито най-голяма, нито най-малка стойност в интервала $(0, \infty)$. При $x < -1$ имаме $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$.

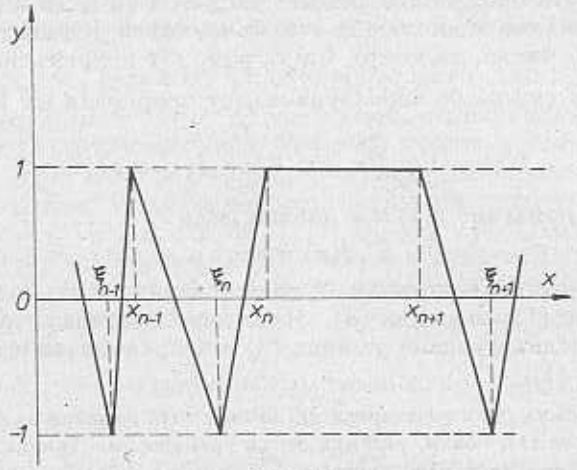
Ще се убедим, че в този случай функцията също няма нито най-голяма, нито най-малка стойност. За тази цел е достатъчно да се покаже верността на неравенството $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$ при $x > -1$. Ако положим $x+1 = -\xi$, въпросното неравенство се свежда до неравенството $\ln\left(1+\frac{1}{\xi}\right) < \frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi+1}$ при $\xi > 0$, което, както вече видяхме е вярно.

62. а) Да. б) Да. в) Не. г) Не. д) Не. е) Да.

63. а) Разглеждаме функцията $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана, както в решението на зад. 57 а). Тя е равномерно непрекъсната съгласно теоремата на Кантор, което осигурява равномерната непрекъснатост и на f. б) Разгледданият интервал се скъсява до ограничен и се прилага теоремата на Кантор.

64. а) Да, съгласно зад. 51 а), гл. V и зад. 63 б). б) Не, защото не е ограничена около нулата. в) Да. г) Да. д) Да. е) Да. ж) Не. з) Не. и) Да, съгласно зад. 44 в), гл. V. й) Не. к) Да. л) Не. м) Да.

65. а) Доказателството на това обобщение на теоремата на Кантор повтаря доказателството на самата теорема с използване на зад. 162 и 157, гл. IV. б) Например множеството на естествените числа. в) Най-напред ще се убедим, че множеството X е ограничено. В противен случай би съществувала редица $x_1, x_2, \ldots$ от елементи на X с $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Нека е налице например първият случай. Чрез преминаване към подредици без ограничение на общността можем да предположим, че $x_{n+1} > x_n + 1$ $(n \in N)$. Тъй като по условие x_n е точка на сгъстяване на X, съществува ξ_n от X, за която $\xi_n \neq x_n$ и $|x_n - \xi_n| < \frac{1}{n}$. Сега разглеждаме произволна непрекъсната функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, за която $f(\xi_n) = -1$ и $f(x_n) = 1$ (фиг. 14). Поради $|x_n - \xi_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(\xi_n)| = 2$ тя не е равномерно непрекъсната, с което е установена ограничеността на X. Сега ще докажем, че множеството X е затворено. Наистина в противен случай от зад. 157, гл. IV би следвало, че съществува сходяща редица $x_1, x_2, \ldots$ от елементи на X, чиято граница ξ не принадлежи на X. Сега не е трудно да се съобрази, че функцията $f : X \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = \frac{1}{x-\xi}$ $(x \in X)$, не е равномерно непрекъсната. Ето защо множеството X е затворено. Тогава от зад. 162, гл. IV следва,



Фиг. 14

че X е компактно множество.

66. Доказателството на това обобщение на теоремата на Кантор е почти буквално повторение на доказателството на самата теорема.

67. Нека $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е такава непрекъсната функция, че

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

за всеки две реални числа x и y. Ако в (1) положим $x = y = 0$, ще получим $f(0) = 2f(0)$, откъдето

$$f(0) = 0. \tag{2}$$

Ако сега в (1) заместим y с $-x$, ще получим $f(0) = f(x) + f(-x)$, откъдето

$$f(-x) = -f(x). \tag{3}$$

От (1) и (2) с индукция се получава $f(mx) = mf(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, което заедно с (3) дава

$$f(nx) = nf(x) \quad (n \in \mathbf{I},\ x \in \mathbf{R}). \tag{4}$$

Сега от (4) за всеки две цели числа p и $q \neq 0$ се получава последователно

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}\left(qf\left(\frac{p}{q}\right)\right) = \frac{1}{q}f\left(q\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}f(p) = \frac{p}{q}f(1), \tag{5}$$

т. е.

$$f(r) = rf(1) \quad (r \in \mathbf{Q}). \tag{6}$$

Нека сега x е произволно реално число. Тъй като множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа е гъсто, съществува редица $r_1, r_2, \ldots$ от рационални числа, за която $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. От непрекъснатостта на f (която до тук не бе използувана), от теоремата на Хайне и от (6) следва

(7) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f(1) = xf(1),$$

което след полагане $f(1) = a$ добива вида

(8) $$f(x) = ax,$$

където a е реална константа. И така всяка непрекъсната функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с (1) има вида (8). Чрез непосредствена проверка се вижда, че всяка функция от вида (8) е непрекъсната и притежава свойството (1).

Да отбележим, че съществуват различни от (8) решения на функционалното уравнение (1), които, разбира се, са прекъснати. Такива решения се строят с помощта на т. нар. *аксиома на избора*.

69. Задачата може да се реши, като почти дословно се *приложи схемата на решението* на предишната задача. Ще покажем как зад. 69 може да се *сведе* към зад. 68.

Нека $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е такава непрекъсната функция, че

(1) $$f(x+y) = f(x)\,f(y)$$

за всеки две реални числа x и y. Ако в (1) положим $x = y = 0$, ще получим $f(0) = (f(0))^2$, откъдето

(2) $$f(0) = 1$$

или

(3) $$f(0) = 0.$$

Най-напред ще се занимаем със случая (2). Ако в (1) заместим y с $-x$, ще получим $f(0) = f(x)\,f(-x)$, което заедно с (2) дава

(4) $$f(x) \neq 0 \quad (x \in \mathbf{R})$$

и

(5) $$f(-x) = (f(x))^{-1} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Поради непрекъснатостта на f от (2) и (4) следва $f(x) > 0$ $(x \in \mathbf{R})$ съгласно теоремата на Болцано. Ето защо може да се образува функцията $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с помощта на равенството $g(x) = \ln f(x)$ за всяко реално x. Тя, разбира се, е непрекъсната и от (1) следва

(6) $$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln f(x+y) = \ln(f(x)f(y)) \\ &= \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Ето защо от зад. 68 следва, че съществува такава константа α, че $g(x) = \alpha x$ за всяко реално x. Тогава

(7) $$f(x) = e^{g(x)} = e^{\alpha x} = (e^{\alpha})^x = a^x,$$

където е положено $e^{\alpha} = a$. И така всяка непрекъсната функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с (1) и (2) има вида $f(x) = a^x$, където a е положителна константа. Чрез непосредствена проверка се установява, че всяка функция от вида a^x с $a > 0$ е непрекъсната и притежава свойството (1). В случая (3) от (1) следва $f(x) = f(x+0) = f(x)\,f(0) = 0$, което показва, че f е константата 0. И така единствените непрекъснати решения на функционалното уравнение (1) са експоненциалните функции и константата 0.

70. Да положим

(1) $$g(x) = f(e^x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Тогава

(2) $$g(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y)$$

за всеки две реални числа x и y и тъй като функцията g е очевидно непрекъсната, от зад. 68 следва, че съществува константа α, за която $g(x) = \alpha x$ за всяко реално x. Сега (1) дава $f(e^x) = \alpha x$ за всяко реално x, което след заместване на x с $\ln x$ показва, че

(3) $$f(x) = \alpha \ln x \quad (x > 0).$$

И така всяко решение на разглежданото функционално уравнение има вида (3) при подходяща константа α. Чрез непосредствена проверка се установява, че всяка функция от вида (3) наистина е решение на това уравнение.

71. Да положим

(1) $$f(x) = c(x) + s(x), \quad g(x) = c(x) - s(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

От дадената система функционални уравнения следва непосредствено

(2) $$f(x+y) = f(x)f(y), \quad g(x+y) = g(x)g(y) \quad (x,\, y \in \mathbf{R})$$

и тъй като функциите f и g са очевидно непрекъснати, от зад. 69 получаваме, че всяка от тях е или експоненциална, или е константата 0. Последната възможност отпада, тъй като от $s(0) = 0$, $c(0) = 1$ и (1) следва $f(0) = g(0) = 1$. Ето защо съществуват такива положителни константи a и b, че $f(x) = a^x$ и $g(x) = b^x$ за всяко реално x. Сега от (1) следва

(3) $$c(x) = \frac{a^x + b^x}{2}, \quad s(x) = \frac{a^x - b^x}{2} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

И така всяка система от непрекъснати решения на разглежданите функционални уравнения е от вида (3). Непосредствена проверка показва, че всяка двойка функции от вида (3) е решение на задачата.

72. Ако в първите две от дадените функционални уравнения положим $y = -x$ и използуваме $s(0) = 0$ и $c(0) = 1$, получаваме

$$(1) \qquad \begin{cases} 0 = s(x)c(-x) + c(x)s(-x), \\ 1 = c(x)c(-x) - s(x)s(-x). \end{cases}$$

Ако разглеждаме (1) като система от две уравнения с неизвестни $c(-x)$ и $s(-x)$ и използуваме третото от дадените функционални уравнения, получаваме

$$(2) \qquad s(-x) = -s(x), \quad c(-x) = c(x).$$

При $y = x$ второто от функционалните уравнения дава $c^2(x) - s^2(x) = c(2x)$, което, събрано с третото уравнение, води до $c^2(x) = \dfrac{1 + c(2x)}{2}$. Смяна на x с $\dfrac{x}{2}$ в последното равенство дава

$$(3) \qquad c^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + c(x)}{2} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Тъй като по условие $c(0) = 1 > 0$, от непрекъснатостта на функцията $c(x)$ следва съществуването на такава околност U на началото 0, че за всяко x от U да е в сила $c(x) > 0$. Сега от (3) следва

$$(4) \qquad c\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + c(x)}{2}}$$

за всяко x от U. Аналогично, но с използуване на първото от дадените функционални уравнения може да се заключи, че за всяко x от U

$$(5) \qquad s\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{s(x)}{2c\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Сега ще се убедим, че за всяко реално x съществува такова реално число a (за което не е ясно дали зависи от x или не), че да са в сила равенствата

$$(6) \qquad \sin ax = s(x), \quad \cos ax = c(x).$$

Наистина при $x = 0$ равенствата (6) са верни за произволно a, тъй като $\sin 0 = 0 = s(0)$ и $\cos 0 = 1 = c(0)$. При $x \neq 0$ поради

$c^2(x) + s^2(x) = 1$ и свойствата на тригонометричните функции съществува реално число ξ, за което $\sin \xi = s(x)$ и $\cos \xi = c(x)$. Сега е достатъчно да се положи $a = \dfrac{\xi}{x}$.

Не е трудно да се съобрази, че може да се положи

$$(7) \qquad a = \varepsilon \frac{\arccos(c(x))}{x},$$

където $\varepsilon = 1$ при $s(x) \geq 0$ и $\varepsilon = -1$ при $s(x) < 0$. Тъй като $c(0) = 1$ и $\arccos 1 = 0$, от непрекъснатостта на функцията $\arccos(c(x))$ и от (7) следва, че за всички достатъчно малки по абсолютна стойност x произведението ax принадлежи на околността U на числото 0. Ето защо съществуват числа $\xi > 0$ и a, за които

$$(8) \qquad \xi \in U, \quad a\xi \in U$$

и

$$(9) \qquad \sin a\xi = s(\xi), \quad \cos a\xi = c(\xi).$$

В по-нататъшните разсъждения ще фиксираме ξ, поради което и a ще бъде фиксирано. Ще докажем, че

$$(10) \qquad c\left(\frac{\xi}{2^n}\right) = \cos\frac{a\xi}{2^n}, \quad s\left(\frac{\xi}{2^n}\right) = \sin\frac{a\xi}{2^n} \quad (n + 1 \in \mathbf{N}).$$

При $n = 0$ равенствата (10) са верни поради (9). Да предположим верността им за някое n. Тогава

$$(11) \qquad c\left(\frac{\xi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1 + c\left(\frac{\xi}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{a\xi}{2^n}}{2}} = \cos\frac{a\xi}{2^{n+1}}$$

съгласно(4)и аналогичната формула за косинус от половин ъгъл, тъй като $\dfrac{\xi}{2^n}$ и $\dfrac{a\xi}{2^n}$ очевидно принадлежат на U, а околността на U може да се избере толкова малка, че в нея косинусът да бъде положителен. Същевременно

$$(12) \qquad s\left(\frac{\xi}{2^{n+1}}\right) = \frac{s\left(\frac{\xi}{2^n}\right)}{2c\left(\frac{\xi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\sin\frac{a\xi}{2^n}}{2\cos\frac{a\xi}{2^{n+1}}} = \sin\frac{a\xi}{2^{n+1}}$$

съгласно (5), аналогичната формула за синус от половин ъгъл и (11). С това равенствата (10) са доказани индуктивно. Сега ще се убедим във валидността на равенствата

$$(13)\qquad c\left(\frac{m\xi}{2^n}\right)=\cos\frac{ma\xi}{2^n},\quad s\left(\frac{m\xi}{2^n}\right)=\sin\frac{ma\xi}{2^n}\quad (m+1,\ n+1\in\mathbf{N}).$$

За тази цел ще проведем индукция спрямо m при произволно фиксирано n. При $m=0$ равенствата (13) са очевидно верни. Нека те са в сила за някое m. Тогава

$$(14)\qquad c\left(\frac{(m+1)\xi}{2^n}\right)=c\left(\frac{m\xi}{2^n}+\frac{\xi}{2^n}\right)=c\left(\frac{m\xi}{2^n}\right)c\left(\frac{\xi}{2^n}\right)$$

$$-s\left(\frac{m\xi}{2^n}\right)s\left(\frac{\xi}{2^n}\right)=\cos\frac{ma\xi}{2^n}\cos\frac{a\xi}{2^n}-\sin\frac{ma\xi}{2^n}\sin\frac{a\xi}{2^n}=\cos\frac{(m+1)a\xi}{2^n}$$

съгласно първото от дадените функционални уравнения, (10), (13) и формулата за косинус от сума. Аналогично се проверява, че

$$(15)\qquad s\left(\frac{(m+1)\xi}{2^n}\right)=\sin\frac{(m+1)a\xi}{2^n},$$

с което верността на (13) е установена. От (2) сега следва, че равенствата (13) са в сила за произволно цяло m и за произволно цяло неотрицателно n, тъй като функцията косинус е четна, а функцията синус — нечетна. Не е трудно да се съобрази, че за произволно различно от нула число ξ числата $\frac{m\xi}{2^n}$ образуват гъсто множество. Това обстоятелство заедно с непрекъснатостта на функциите c, cos, s и sin поради (13) показва, че

$$(16)\qquad c(x)=\cos ax,\quad s(x)=\sin ax$$

за всяко реално x. И така всяка система от непрекъснати решения на разглежданите функционални уравнения е от вида (16). Чрез непосредствена проверка се установява, че всяка двойка функции от вида (16) е решение на задачата.

73. Да положим

$$(1)\qquad f(x)=C^2(x)+S^2(x)\quad (x\in\mathbf{R}).$$

Директна проверка, при която се използват дадените функционални уравнения, показва, че

$$(2)\qquad f(x+y)=f(x)f(y)$$

за всеки две реални числа x и y. Тъй като, от друга страна,

$f(0)=C^2(0)+S^2(0)=1$, от зад. 69 следва, че съществува положителна константа A, такава че $f(x)=A^{2x}$ за всяко реално x. От последното равенство и от (1) следва

$$(3)\qquad C^2(x)+S^2(x)=A^{2x}\quad (x\in\mathbf{R}).$$

Да положим още

$$(4)\qquad s(x)=\frac{S(x)}{A^x},\quad c(x)=\frac{C(x)}{A^x}\quad (x\in\mathbf{R}).$$

От (3), (4) и от дадените функционални уравнения следва, че функциите s и c удовлетворяват предположенията на зад. 72. Ето защо съществува константа a, за която

$$(5)\qquad s(x)=\sin ax,\quad c(x)=\cos ax\quad (x\in\mathbf{R}).$$

От (4) и (5) следва

$$(6)\qquad S(x)=A^x\sin ax,\quad C(x)=A^x\cos ax\quad (x\in\mathbf{R}).$$

И така всяка система от непрекъснати решения на разглежданите функционални уравнения е от вида (6). Непосредствена проверка показва, че всяка двойка функции от вида (6) е решение на задачата.

74. а) 1. б) 0. в) 2 при $|f(0)|\leqq 1$ и $1+|f(0)|$ при $|f(0)|\geqq 1$. г) Както във в).

78. а) 1. б) Ако числото a е ирационално, използвайте непрекъснатостта на σ в точката a, за да докажете, че $\omega_a(\sigma)=0$. Ако пък a е рационално и $a=\frac{p}{q}$, където p е цяло, а q — взаимно просто с него естествено число, забележете, че всяка ограничена околност на a съдържа ирационални числа и само краен брой рационални числа от вида $b=\frac{r}{s}$, където r е цяло, а s — взаимно просто с него естествено число и $s\leqq q$. В този случай $\omega_a(\sigma)=\frac{1}{q}$.

80. а) Нека $\xi\in A=\{x\mid\omega_x(f)<\varepsilon\}$. Тогава $\omega_\xi(f)<\varepsilon$ и съгласно дефиницията на осцилация в точка съществува околност U на ξ, за която $\omega(U,f)<\varepsilon$. Докажете, че $U\subset A$. б) Разгледайте например функцията $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, дефинирана с равенствата

$$f(x)=\begin{cases}1+\frac{1}{n} & \text{при } x=\frac{1}{n}\ (n\in\mathbf{N}),\\ 0 & \text{при всички останали } x.\end{cases}$$

в) Разгледайте например функцията $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, дефинирана с

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{за } x=\frac{1}{n}\ (n\in\mathbf{N}),\\ 0 & \text{за останалите } x.\end{cases}$$

83. а) Нека $x_0 \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon_0 > 0$. Трябва да посочим такава точка ξ, че

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \tag{1}$$

и $\xi \in (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0)$. Понеже множеството U_1 по условие е гъсто, то

$$(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0) \cap U_1 \neq \varnothing. \tag{2}$$

Тъй като множеството в лявата страна на (2) е отворено и не е празно, то ще съдържа цял интервал. Избираме x_1 от $\mathbf{R}$ и $\varepsilon_1 > 0$ по такъв начин, че да е в сила

$$[x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1] \subset (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0) \cap U_1. \tag{3}$$

Аналогично, като се използва гъстотата на U_2, се вижда, че отвореното множество $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \cap U_2$ не е празно. Ето защо съществуват x_2 от $\mathbf{R}$ и $\varepsilon_2 > 0$, за които

$$[x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2] \subset (x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \cap U_2 \tag{4}$$

и т. н. По този начин индуктивно се построяват редици $x_1, x_2, \ldots$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, за които $x_n \in \mathbf{R}$, $\varepsilon_n > 0$ и

$$[x_n - \varepsilon_n, x_n + \varepsilon_n] \subset (x_{n-1} - \varepsilon_{n-1}, x_{n-1} + \varepsilon_{n-1}) \cap U_n \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{5}$$

От (5) преди всичко следва, че

$$x_n \in [x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k] \subset U_k \tag{6}$$

при $n \geqq k$. От (6) следва, че редицата $x_1, x_2, \ldots$ е ограничена. Нека ξ е произволна точка на сгъстяване на тази редица. Отново от (6) следва, че $\xi \in U_k$ $(k \in \mathbf{N})$, т. е. (1). От друга страна, пак от (6) следва $\xi \in [x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1] \subset (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0)$ съгласно (3).

б) Например подредете рационалните числа в редица $r_1, r_2, \ldots$, в която всяко рационално число се среща само веднъж, и положете $A_n = \{r_\nu\}_{\nu=n}^{\infty}$. в) Да допуснем противното. Нека $A = \{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ е изброимо и гъсто множество и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, където множествата U_n $(n \in \mathbf{N})$ са отворени. Да положим $V_n = \mathbf{R} \setminus \{a_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$. Тогава множествата V_n са отворени и гъсти и $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \varnothing$ в противоречие с а).

84. а) Нека C е множеството на точките на непрекъснатост на f. От зад. 79 следва $C = \{x \mid \omega_x(f) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid \omega_x(f) < \frac{1}{n}\right\}$,

което заедно със зад. 80 а) доказва твърдението за множеството на точките на непрекъснатост. Второто твърдение се доказва чрез преминаване към допълнения. б) Очевидно без ограничение на общността може да се предположи, че $U_1 = \mathbf{R}$ и $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$ Ако $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, полагаме $f(x) = 0$. Ако $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, съществува единствено n, за което $x \in U_n \setminus U_{n+1}$. Сега полагаме $f(x) = \frac{1}{2n}$ при рационално x и $f(x) = \frac{1}{2n+1}$ при ирационално x. Нека $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Ще покажем, че дефинираната по-горе функция f е непрекъсната в точката a. Тъй като U_n е околност на a и е в сила $|f(x) - f(a)| = f(x) < \frac{1}{n}$ за всяко x от U_n, твърдението е установено. Нека сега $a \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ и $a \in U_n \setminus U_{n+1}$. Ако a е рационално число, избираме редица $x_1, x_2, \ldots$ от ирационални числа, за които $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ и $x_k \in U_n$ $(k \in \mathbf{N})$. Ако $x_k \notin U_{n+1}$, то $f(a) - f(x_k) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$. Ако пък $x_k \in U_{n+1}$, то $f(a) - f(x_k) \geqq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)+1} > \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$. Ето защо $|f(x_k) - f(a)| \geqq \frac{1}{2n(2n+1)}$ $(k \in \mathbf{N})$ и следователно функцията f е прекъсната в точката a. Случаят на ирационално a се разглежда аналогично.

85. Допуснете противното, т. е. че съществува функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, чието множество на точките на непрекъснатост съвпада с множеството $\mathbf{Q}$ на рационалните числа. Съгласно зад. 84 а) ще съществува редица $U_1, U_2, \ldots$ от отворени в $\mathbf{R}$ множества, за която $\mathbf{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. От зад. 61, гл. I следва, че множеството на рационалните числа може да се подреди в редица $r_1, r_2, \ldots$. Наред с гъстите отворени множества $U_1, U_2, \ldots$ разгледайте и гъстите отворени множества $\mathbf{R} \setminus \{r_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$. След това приложете зад. 83 а), за да получите противоречие.

86. Нека например функцията f е растяща. Достатъчно е да се установи, че множеството на вътрешните точки на Δ, в които f е прекъсната, е крайно или изброимо. Нека ξ е вътрешна точка на Δ, в която f е прекъсната. Тогава границата $\lim_{x\to\xi} f(x)$ не същест-

вува. Тъй като, от друга страна, границите $\lim\limits_{x\to\xi-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to\xi+0} f(x)$ съществуват съгласно зад. 88, гл. V, от зад. 87, гл. V следва, че те са различни. Тъй като функцията f е растяща, от това следва $f(\xi-0) < f(\xi+0)$, т. е. че интервалът $(f(\xi-0), f(\xi+0))$ е неизроден. Ако η е друга вътрешна за Δ точка на прекъсване на f, интервалите $(f(\xi-0), f(\xi+0))$ и $(f(\eta-0), f(\eta+0))$ нямат общи точки. Наистина, ако например $\xi < \eta$, съществува такава точка a от Δ, че $\xi < a < \eta$. Сега не е трудно да се съобрази, че $f(\xi+0) \leqq f(a) \leqq f(\eta-0)$. По този начин на всяка вътрешна за Δ точка на прекъсване ξ на f бе съпоставен по един неизроден интервал $(f(\xi-0), f(\xi+0))$, при което съответствуващите на различни точки на прекъсване интервали нямат общи точки. Сега твърдението следва от зад. 58, гл. I.

Седма глава

1. От дефинициите на хиперболичните функции и производната на e^x.

2. Зад. 53, гл. VI.

3. а) $4x^3-6x+5$. б) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. в) $\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

г) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. д) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. е) $-\dfrac{1}{x^2}$.

ж) $-\dfrac{f'}{f^2}$. з) $-\dfrac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$. и) $-\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})^2}$.

й) $-\dfrac{2}{x^3}$. к) $-\dfrac{2f'}{f^3}$. л) $-\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}}{(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x})^3}$.

м) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$. н) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$. о) $\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$.

п) $\dfrac{4x+5\sqrt[5]{x^4}+1}{5\sqrt[5]{x^4}\left(\sqrt[5]{x}+1\right)^2}$. р) $\dfrac{-2(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

с) $-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{(1+x)^2}\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$. т) $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\dfrac{x^\nu}{\nu!}$.

у) $\sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\dfrac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$. ф) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu\dfrac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$.

х) $af^{a-1}f'$. Желателно е резултатите в), ж), к) и х) да се помнят наизуст.

4. а) $2xe^{x^2}$. б) e^x+ex^{e-1}. в) $\dfrac{4xe^{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2}$.

г) $2e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{1}{x^3}$. д) $\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$.

е) $\dfrac{2x^4-x^3-6x^2-6x-4}{2x^3\sqrt{x^2+x+1}}e^{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$. ж) $e^f f'$.

Желателно е резултатът ж) да се помни наизуст.

5. а) $(2^x(\ln 2-1)-x^3+3x^2)e^{-x}$.

б) $(x^2\ln 10+(2-10\ln 10)x+(3\ln 10-10))10^x$.

в) $\dfrac{-6\ln 3.9^x}{(1+9^x)^2}$. г) $2.10^{2x-3}\ln 10$. д) $\ln 2\ln 3.2^{3^x}.3^x$.

е) $a^f\ln af'$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

6. а) $x(2\ln x+1)$. б) $-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

в) $\dfrac{x\ln x-x+1}{x(\ln x)^2}$. г) $-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

д) $x^{n-1}(n\ln x+1)$. е) $\dfrac{e^x(x\ln x+1)}{x}$.

ж) $-\dfrac{2}{1-2x}$. з) $2\dfrac{\ln x}{x}$. и) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

й) $\dfrac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$. к) $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$. л) $\dfrac{2x}{x^2+4}$.

м) $\dfrac{1}{x\ln x}$. н) $\dfrac{(\ln x-1)\ln 2}{(\ln x)^2}\cdot 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

о) $\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$. п) $\dfrac{(2ax+b)e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

р) $\dfrac{f'}{f}$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

7. а) $x^{n-1}\left(n\lg x+\dfrac{1}{\ln 10}\right)$. б) $\dfrac{1}{\ln 2.\ln 3.\ln 5.\log_3\log_5 x.\log_5 x.x}$.

в) $\dfrac{x\ln 2+2^x(x(\ln 2)^2\log_2 x+1)}{x\ln 2(x+2^{x\log_2 x})}$. г) $\dfrac{-\ln 2}{x(\ln x)^2}$, поради $\log_x 2$

$= \dfrac{\ln 2}{\ln x}$. д) $\dfrac{2\pi^x x^{\pi-1}(x\ln\pi - 1)}{(\pi^{2x} - x^{2\pi})\ln\pi}$. е) $\dfrac{\ln 3 . \ln 6}{\ln 2(\ln 3 - \ln x)^2 x}$.

ж) $\dfrac{f'}{f\ln a}$.

8. а) $2x\cos x^2 + \sin 2x$. б) $-\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$.

в) $\cos x . \cos\sin x$. г) $-\dfrac{3\sin^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\cos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

д) $\operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{x}\cos\ln x$. е) $\dfrac{e^{\sin^2\sqrt{x}}\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \cos e^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

ж) $e^{-ax}[b\cos(bx+c) - a\sin(bx+c)]$. з) $\cos f . f'$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

9. а) $\dfrac{(\cos x - \sin x)(e^{2x}\cos^2 x - 1)}{e^x\cos^2 x}$. б) $3\sin 2x(\cos x - 1)$.

в) $\dfrac{1+\sin x + e^x}{x - \cos x + e^x}$. г) $-3x^2\sin x^3 - 3\cos^2 x\sin x$.

д) $\dfrac{-4(2+\cos 2x)}{\sin^2 2x}$. е) $-(\sin\sin x)\cos x - (\cos\cos x)\sin x$.

ж) $-n(\sin x\sin^n x)\sin^{n-1} x\cos x - n(\cos\cos^n x)\cos^{n-1} x\sin x$.

з) $n(\sin^{n-1} x + \cos^{n-1} x)\cos(n+1)x$.

и) $n(\sin^{n-1} x - \cos^{n-1} x)\sin(n+1)x$.

й) $-\sin f . f'$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

10. а) $\operatorname{tg}^4 x$. б) $\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} + \dfrac{\cos\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$.

в) $\dfrac{-n\cos^{n-1} x\,\sin x}{\cos^2(\cos^n x)} - \dfrac{n(\sin\operatorname{tg}^n x)\operatorname{tg}^{n-1} x}{\cos^2 x}$.

г) $\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{tg}\operatorname{tg} x)} \cdot \dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

д) $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{x\cos^2\ln\frac{x}{2}}$. е) $\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} + \dfrac{e^x}{\cos^2 e^x}$.

ж) $\dfrac{6(\operatorname{tg}\operatorname{tg}^3 x)\operatorname{tg}^2 x}{(\cos^2\operatorname{tg}^2\operatorname{tg}^3 x)(\cos^2\operatorname{tg}^3 x)\cos^2 x}$. з) $\dfrac{-2}{1+\sin 2x}$.

и) $\dfrac{f'}{\cos^2 f}$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

11. а) $-\cos 2x$. б) $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$. в) $\dfrac{1}{\cos^5 x}$.

г) $\dfrac{-1}{\sin^2\left(1+\frac{1}{1+\operatorname{ctg} x}\right)(1+\sin 2x)}$.

д) $-\dfrac{n\operatorname{tg}^{n-1} x}{(\sin^2\operatorname{tg}^n x)\cos^2 x} - \dfrac{n\operatorname{ctg}^{n-1} x}{(\cos^2\operatorname{ctg}^n x)\sin^2 x}$.

е) $\dfrac{-f'}{\sin^2 f}$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

12. а) $nx^{n-1}\arcsin x + \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$. б) $9x^2\arcsin x$.

в) $\dfrac{x}{\sqrt{4+2x-x^2}}$. г) $\arcsin^2 x$. д) $\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$.

Желателно е този резултат да се помни наизуст.

13. а) $\dfrac{2xe^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2-e^{x^2}}}$. б) $\dfrac{-\left(\arccos\sqrt{x^2+2x}\right)^{-\frac{3}{4}}(x+1)}{4\sqrt{1-x^2-2x}.\sqrt{x^2+2x}}$.

в) 0, вж. зад. 28 а), гл. VI.

г) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(\arcsin x)^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-(\arccos x)^2}}\right)$. д) Подлежащият на диференциране израз няма смисъл за никое x.

е) $\dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

14. а) $\dfrac{1}{1+(\arcsin x)^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{arctg} x)^2}}\dfrac{1}{1+x^2}$.

б) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$. в) $\dfrac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}} + \dfrac{n(\operatorname{arctg} x)^{n-1}}{1+x^2}$.

г) $\dfrac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)(2+\ln(2x+3))\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$. д) $\dfrac{\operatorname{arctg} x.}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

е) $\dfrac{f'}{1+f^2}$. Желателно е този резултат да се помни наизуст.

15. а) $\dfrac{-1}{1+x^2}\left(\dfrac{1}{1+(\operatorname{arctg} x)^2} + \dfrac{1}{1+(\operatorname{arctg} x)^2}\right)$.

б) $\dfrac{-2}{1+x^2}\left(\dfrac{1}{1+4(\operatorname{arctg} x)^2} + \dfrac{1}{1+4(\operatorname{arctg} x)^2}\right)$.

в) $\dfrac{\pi}{2(1+x^2)}\left(\dfrac{1}{(\operatorname{arc\,ctg} x)^2}-\dfrac{1}{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}\right)$. г) $\dfrac{-f'}{1+f^2}$.
Желателно е този резултат да се помни наизуст.

16. а) $\dfrac{3}{2}e^x \operatorname{sh} 2x$. б) 0. в) $\operatorname{th} x+\dfrac{\operatorname{sh}\ln x}{x}$.

г) $(\operatorname{ch}\operatorname{ch} x)\operatorname{sh} x+(\operatorname{sh}\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x$. д) $\operatorname{sh} 2x(e^{\operatorname{ch}^2 x}+e^{\operatorname{ch}^2 x})$.

е) $\dfrac{1}{x\operatorname{ch}^2 x\ln x}+\dfrac{1}{x(\ln x)^2\operatorname{sh}^2(\ln x)^{-1}}$.

ж) $nx^{n-1}\operatorname{sh} x+x^n\operatorname{ch} x-n\operatorname{ch}^{n-1} x\operatorname{sh} x$.

17. а) $\dfrac{1}{|\cos x|}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\operatorname{Ar\,sh} x}$.

б) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(\operatorname{Ar\,sh} x)^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{(\operatorname{Ar\,ch} x)^2+1}}$.

в) Сечението на дефиниционните области на функциите $\operatorname{Ar\,th} x$ и $\operatorname{Ar\,cth} x$ е празно. г) $\dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}-\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x|x|\sqrt{1+x^2}}$.

д) $\dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{1}{1-(\operatorname{Ar\,cth} x)^2}$.

18. а) $(a\ln x+1)x^{x^a+a-1}$. б) $x^{x^x+x}\left((\ln x)^2+\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$.

в) $(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$.

г) $(\ln x)^x\left(\dfrac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$.

д) $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$.

е) $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)+(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg} x)$.

ж) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\dfrac{1}{x+1}+\ln\dfrac{x}{x+1}\right)+(x^2+1)^{\operatorname{sh} x}\left(\operatorname{ch} x\ln(x^2+1)+\dfrac{2x\operatorname{sh} x}{x^2+1}\right)$.

з) $\dfrac{57x^2-302x+361}{20(x^2-5x+6)}\dfrac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

19. а) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$. б) $\dfrac{1}{1+x^3}$. в) $\dfrac{3}{2}\dfrac{3x^6+3x^2+2}{x^4(1+x^3)^2}$.

г) $\dfrac{2x^2}{1-x^4}$. д) $\dfrac{4x^4}{\sqrt{1+x^2}}$. е) $4x^3\sin^2 x$. ж) $\dfrac{4}{\sin^5 x}$.

з) $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sin^2 x}$ при $\sin x\cos x>0$ и $\dfrac{-2\sqrt{2}}{1+\sin^2 x}$ при $\sin x\cos x<0$.

и) $\dfrac{1}{\sin x\cos^4 x}$. й) $(\arcsin 2x)^2$. к) $3x^2\arccos x$.

л) $\operatorname{arc\,tg} x$. м) $-\dfrac{3}{x^4}\operatorname{arc\,ctg} x$. н) $8e^{2x}\sin^2 x$.

о) $10e^x\sin^3 x$. п) $(a^2+b^2)e^{ax}\sin bx$. р) $x^n e^x$. с) $2\sin\ln x$.

т) $\dfrac{-2(\ln x)^2}{x^3}$. у) $ax^{a-1}(\ln x)^2$. ф) $3x^2\ln(x^2+1)$.

х) $5x^4\ln(x^2-a^2)$. ц) $(p^2-1)\dfrac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^{p+2} x}$. ч) $\dfrac{2}{(\operatorname{ch} x-1)^2}$.

ш) $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\operatorname{ch}^2 x}$. щ) $\dfrac{-4}{\operatorname{sh} 2x}$. ъ) $4x\operatorname{Ar\,sh}\dfrac{x}{a}$.

ь) $9x^2\operatorname{Ar\,ch}\dfrac{x}{a}$. ю) $6x^2\operatorname{Ar\,th}\dfrac{x}{a}$. я) $-\dfrac{6a^3}{x^4}\operatorname{Ar\,cth}\dfrac{x}{a}$.

21. а) Диференцирайте тъждеството от зад. 5 а), гл. II; сравнете със зад. 5 б) от същата глава. б) и в) Диференцирайте тъждествата от зад. 31 а) и б), гл. II.

22. а) $\dfrac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$. б) $\dfrac{(-1)^{n-1}n!(ad-bc)c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$.

в) $(-1)^n n!\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$. За да получите този резултат, намерете такива константи a и b, че $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$.

г) Намерете такива константи a и b, че $\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x-3}$, за да получите резултата $(-1)^n n!\left(\dfrac{9}{(x-3)^{n+1}}-\dfrac{7}{(x-2)^{n+1}}\right)$. д) $(n-1)!\left(\dfrac{1}{(1-x)^n}-\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^n}\right)$.

е) Очевидно $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x-i}-\dfrac{1}{x+i}\right)$. Ето защо от б) следва

$$(\operatorname{arc\,tg} x)^{(n)}=\frac{1}{2i}(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x-i)^n}-\frac{1}{(x+i)^n}\right)\quad(n\in\mathbf{N}).$$

От последното равенство след елементарни преобразувания се получава

$$(\operatorname{arc\,tg} x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^n}\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^\nu\binom{n}{2\nu+1}x^{n-2\nu-1}.$$

Педантично погледнато, горният извод е непълен, тъй като в елементарния курс по диференциално и интегрално смятане обикновено не се разглежда производна на комплексна функция на реален аргумент. Това обаче може да се направи и също така лесно могат да се докажат всички правила за диференциране и в този по-общ случай. Ако читателят не желае да изминава толкова дълъг път, би могъл да докаже последното равенство с индукция спрямо n.

23. а) $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. б) $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

в) $(\sin^{2k}x)^{(n)} = 2^{n-2k+1}\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{k-\nu}\binom{2k}{\nu}(k-\nu)^n\cos\left(2(k-\nu)x+\frac{n\pi}{2}\right)$,

$$(\sin^{2k-1}x)^{(n)} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}}\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\binom{2k-1}{\nu}(2k-2\nu-1)^n\sin\left((2k-2\nu-1)x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

съгласно зад. 30, гл. II.

г) $(\cos^{2k}x)^{(n)} = 2^{n-2k+1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{2k}{\nu}(k-\nu)^n\cos\left(2(k-\nu)x+\frac{n\pi}{2}\right)$,

$$(\cos^{2k-1}x)^{(n)} = \frac{1}{4^{k-1}}\sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{2k-1}{\nu}(2k-2\nu-1)^n\cos\left((2k-2\nu-1)x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

съгласно зад. 30, гл. II.

24. а) $\sqrt{2^n}e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$. б) $\sqrt{2^n}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

в) $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha+n\alpha)$. г) $\sqrt{(a^2+b^2)^n}e^{ax}\cos(bx+c+n\varphi)$, където φ е такъв ъгъл, че $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

25. а) $(-2x)^n e^{-x^2}\left(1-\frac{n(n-1)}{1!4x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!(4x^2)^2}\right.$
$\left.-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!(4x^2)^3}+\cdots\right)$.

б) $(2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}(2x)^{n-6}f^{(n-3)}(x^2)+\cdots$$

Използва се индукция спрямо n.

26. а) $(-1)^n x^{-n}e^{\frac{1}{x}}\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^n+\binom{n-1}{1}\binom{n}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\right.$
$\left.+2!\binom{n-1}{2}\binom{n}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2}+3!\binom{n-1}{3}\binom{n}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-3}+\cdots\right\}$.

б) $(-1)^n x^{-2n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu!\binom{n-1}{\nu}\binom{n}{\nu}x^\nu f^{(n-\nu)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

27. а) $\frac{(2n-1)!!}{2^n\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n-1}$, където $(2n-1)!!$ означава произведението на всички нечетни числа от 1 до $2n-1$ включително. Да отбележим между другото, че $(2n)!!$ пък означава произведението на всички четни числа от 2 до $2n$ включително.

б) $(2\sqrt{x})^{-n}\left\{f^{(n)}(\sqrt{x})-\frac{n(n-1)}{2\sqrt{x}}f^{(n-1)}(\sqrt{x})\right.$
$\left.+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2!(2\sqrt{x})^2}f^{(n-2)}(\sqrt{x})-\cdots\right\}$.

28. а) $e^{e^x}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{e^{\nu x}}{\nu!}\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu\binom{\nu}{\mu}(\nu-\mu)^n$.

б) $\sum_{\nu=1}^{n}\frac{e^{\nu x}}{\nu!}f^{(\nu)}(e^x)\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu\binom{\nu}{\mu}(\nu-\mu)^n$.

29. а) $\frac{1}{x^n}\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu\sin\left(\ln x+\frac{(n-\nu)\pi}{2}\right)$, където A_ν са коефициентите на полинома $z(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1)$, т. е. числа, за които тъждествено $z(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1) = \sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu z^{n-\nu}$.

б) $x^{-n}\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu f^{(n-\nu)}(\ln x)$, където коефициентите A_ν са дефинирани в а).

31. а) $x^2f^{(n)}(x)+2nxf^{(n-1)}(x)+n(n-1)f^{(n-2)}(x)$.

б) $\sum_{\nu=0}^{k}\nu!\binom{n}{\nu}\binom{k}{\nu}x^{k-\nu}f^{(n-\nu)}(x)$. в) $\sum_{\nu=0}^{n}\nu!\binom{n}{\nu}\binom{a}{\nu}x^{a-\nu}f^{(n-\nu)}(x)$.

32. а) $(-1)^n n!\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{a}{\nu}\binom{b}{n-\nu}x^{a-\nu}(1-x)^{b-n+\nu}$.

б) $\sum_{\nu=0}^{n}\nu!\binom{n}{\nu}\binom{a}{\nu}x^{a-\nu}\sin\left(x+\frac{(n-\nu)\pi}{2}\right)$.

в) $\sum_{\nu=0}^{n}\nu!\binom{n}{\nu}\binom{a}{\nu}x^{a-\nu}\cos\left(x+\frac{(n-\nu)\pi}{2}\right)$.

г) $e^x\sum_{\nu=0}^{n}\nu!\binom{n}{\nu}\binom{a}{\nu}x^{a-\nu}$. д) $n!x^{a-n}\left\{\binom{a}{n}\ln x-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\binom{a}{n-\nu}\right\}$.

34. а) Очевидно $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Тогава формулата на Лайбниц дава $(\arcsin x)^{(n+1)}$

$= \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{1-x^2}}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{(2\nu-1)!!(2n-2\nu-1)!!}{(1+x)^{n-\nu}(1-x)^\nu}$. За дефиницията на символа $n!!$ вж. решението на зад. 27 а). Под $(-1)!!$ се разбира 1.

б) $(\operatorname{Ar\,ch} x)^{(n+1)} = \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{x^2-1}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{(2\nu-1)!!(2n-2\nu-1)!!}{(x+1)^{n-\nu}(x-1)^\nu}$.

35. а) Нека $f(x)=\sin(a\arcsin x)$. Тогава $f'(x)$ $= \frac{a\cos(a\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$, ето защо $\sqrt{1-x^2}f'(x) = a\cos(a\arcsin x)$. Следователно $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)+\sqrt{1-x^2}f''(x) = -a^2\frac{\sin(a\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$, поради което $a^2f(x) = xf'(x)+(x^2-1)f''(x)$. С n-кратно диференциране на последното равенство и прилагане на формулата на Лайбниц се получава $a^2f^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x)+(x^2-1)f^{(n+2)}(x)$ $+2nxf^{(n+1)}(x)+n(n-1)f^{(n)}(x)$. При $x=0$ последното равенство дава $f^{(n+2)}(0)=(n^2-a^2)f^{(n)}(0)$. От тази рекурентна зависимост могат да се определят производните от четен ред, като се има пред вид, че $f(0)=0$, и от нечетен ред поради $f'(0)=a$. Така се получава $f^{(2n)}(0)=0$ и $f^{(2n+1)}(0)=a\prod_{\nu=1}^{n}((2\nu-1)^2-a^2)$.

б) $f^{(2n)}(0)=\cos\frac{a\pi}{2}\prod_{\nu=1}^{n-1}(4\nu^2-a^2)$,

$f^{(2n-1)}(0)=a\sin\frac{a\pi}{2}\prod_{\nu=1}^{n}((2\nu-1)^2-a^2)$.

36. а) $f^{(2n-1)}(0)=0$, $f^{(2n+2)}(0)=2^{2n+1}(\nu!)^2$.

б) $f^{(2n)}(0)=(-1)^{n-1}(2n)!\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(2n-2\nu+1)(2\nu-1)}$, $f^{(2n-1)}(0)=0$.

37. $n!\varphi(a)$.

38. Индукция спрямо n с използуване на формулата на Лайбниц.

39. За дефинициите на T_n и U_n вж. текста преди зад. 43, гл. VI. После приложете пресмятанията от решението на зад. 35 а).

40. а) Приложете формулата на Лайбниц. б) Нека u_n $=(x^2-1)^n$. Тогава $u'_{n+1}=2(n+1)xu_n$, $u''_{n+1}=(4n+2)xu'_n$ $+2(n+1)u_n-2nxu'_n$, $u'_n=2nxu_{n-1}$. На u''_{n+1} може да се даде видът $u''_{n+1}=(4n+2)xu'_n+2(n+1)u_n-4n^2u_n-4n^2u_{n-1}$. Сега решението се получава, като се диференцира $n-1$ пъти това равенство.

в) Нека отново $u_n=(x^2-1)^n$. Тогава $u'_n(x^2-1)=2nxu_n$. След това диференцирайте $n+1$ пъти, като използувате формулата на Лайбниц.

41. а) Приложете зад. 25 а). б) Съгласно формулата на Лайбниц $H_{n+1}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\frac{d}{dx}(e^{-x^2})=\frac{d^n}{dx^n}(-2xe^{-x^2})=-2xH_n(x)$ $-2nH_{n-1}(x)$. в) Очевидно

$$H'_n=2xH_n+H_{n+1} \tag{1}$$

и

$$H''_n=2H_n+2xH'_n+H'_{n+1}. \tag{2}$$

От (1) и б) с $n+1$ вместо n следва

$$H'_{n+1}=-2(n+1)H_n. \tag{3}$$

Сега даденото диференциално уравнение следва от (2) и (3).

42. а) Директно прилагане на формулата на Лайбниц.

б) Нека $u_n=x^ne^{-x}$. Тогава

$$u'_{n+1}=(n+1-x)u_n \text{ и } u''_{n+1}=-u_n+(n+1-x)u'_n$$
$$=(2n+1-x)u'_n-u_n-nu'_n=(2n+1-x)u'_n-u_n-n(n-x)u_{n-1}$$
$$=(2n+1-x)u'_n-u_n-n^2u_{n-1}+nu_n,$$

където в предпоследното равенство бе използувано u'_n $=(n-x)u_{n-1}$, а в последното $xu_{n-1}=u_n$. Оттук след $(n-1)$-кратно диференциране и използуване на формулата на Лайбниц резултатът следва непосредствено. в) Нека отново $u_n=x^ne^{-x}$.

Тогава $L_n(x) = e^x u_n^{(n)}$. След двукратно диференциране на това равенство веднага се съобразява, че интересуващото ни диференциално уравнение е равносилно с

$$(1) \qquad x u_n^{(n+2)} + (1+x) u_n^{(n+1)} + (n+1) u_n^{(n)} = 0.$$

От друга страна, непосредствено се вижда, че $x u_n' = (n-x) u_n$, откъдето чрез $(n+1)$-кратно диференциране следва (1).

44. Разгледайте най-напред случая $\varphi(D) = D^k$, като си послужите с формулата на Лайбниц.

45. а) Приложете зад. 43, за да сведете задачата до равенството

$$(\lambda + D)^k x^l \big|_{x=\mu} = (\mu + D)^l x^k \big|_{x=\lambda} \quad (k,\, l = 0,\, 1,\, 2, \ldots),$$

което се установява директно. б) Приложете а) и зад. 44.

46. а) 1 при $x > 0$; -1 при $x < 0$; не съществува при $x = 0$. б) $|2x|$. в) $\dfrac{1}{x}$. г) $3(x-1)^2$ при $x > 1$; $-3(x-1)^2$ при $x < 1$; 0 при $x = 1$. д) $\cos x$ при $2\nu\pi < x < (2\nu+1)\pi$; $-\cos x$ при $(2\nu-1)\pi < x < 2\nu\pi$; не съществува при $x = \nu\pi$ $(\nu \in \mathbf{I})$. е) $3\sin^2 x \cos x$ при $2\nu\pi \leqq x \leqq (2\nu+1)\pi$; $-3\sin^2 x \cos x$ при $(2\nu+1)\pi \leqq x \leqq 2\nu\pi$. ж) $\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ при $|x| > 1$; не съществува при $|x| = 1$. з) $n \sin 2\pi x$ при $n \leqq x \leqq n+1$.

47. а) 1 при $x \leqq 0$ и $\dfrac{1}{1+x}$ при $x \geqq 0$. б) 0 при $|x| \geqq 1$ и $2xe^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2}$ при $|x| \leqq 1$.

48. а) $a > 0$. б) $a > 1$. в) $a > 2$.

50. а) Тъждеството $x = \sin(\arcsin x)$ след диференциране дава

$$(1) \qquad 1 = \cos(\arcsin x)(\arcsin x)'$$

за всяко x от $[-1, 1]$, за което функцията arcsin има производна. Ако допуснем, че тази функция е диференцируема например при $x = -1$, от (1) ще следва $1 = 0$, което е противоречие. При $-1 < x < 1$ функцията arcsin е диференцируема съгласно теоремата за диференцируемост на обратните функции. б) Аналогично.

51. Разгледайте например функцията $x^2 \left|\sin \dfrac{1}{x}\right|$, като предварително скицирате графиката ѝ.

52. С индукция спрямо n докажете, че функциите $x^{2n} \sin \dfrac{1}{x}$ и $x^{2n} \cos \dfrac{1}{x}$, додефинирани в нулата със стойността 0, притежават производни до n-ти ред включително при $x = 0$. По същия начин заключете, че функциите $x^{2n+1} \sin \dfrac{1}{x}$ и $x^{2n+1} \cos \dfrac{1}{x}$, додефинирани в нулата със стойността 0, не притежават производни от $(n+1)$-ви ред при $x = 0$.

53. а) Ще докажем по-общото твърдение, че ако Q е произволна рационална функция на x, функцията f, дефинирана с

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ Q(x) e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \end{cases}$$

е диференцируема в някоя околност на нулата и производната ѝ е

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ R(x) e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \end{cases}$$

където R е някоя (зависеща от Q) рационална функция. Наистина при $x \neq 0$ твърдението следва от стандартните правила за диференциране. Ето защо интересна е само точката 0. Тогава е в сила $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{Q(x)}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Следователно твърдението ще бъде доказано, ако се установи, че $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{Q(x)}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{Q(x)}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. За да покажем например, че първата от тези граници е нула, ще отбележим, че субституцията $x = \dfrac{1}{\xi}$ дава $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{Q(x)}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\xi \to \infty} \dfrac{\xi Q\left(\frac{1}{\xi}\right)}{e^{\xi^2}}$. Сега твърдението следва от зад. 44 д), гл. V, тъй като $\xi Q\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ е рационална функция. Втората граница пък се пресмята с помощта на субституцията $x = -\dfrac{1}{\xi}$, която дава $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{Q(x)}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\xi \to \infty} \dfrac{-\xi Q\left(-\frac{1}{\xi}\right)}{e^{\xi^2}}$. С това твърдението за f е доказано. Тъй като функцията f' е очевидно от същия вид, както

и f, доказаното за f важи и за f', поради което f'' съществува и пак е от същия вид. Така се убеждаваме, че е възможна индукция спрямо n, която показва, че $f^{(n)}(0) = 0$ за всяко естествено n. **б)** Докажете и използвайте по-общото твърдение: ако f и g са безбройно много пъти диференцируеми функции в някоя околност U на точката ξ и ако $f^{(n)}(\xi) = g^{(n)}(\xi)$ $(n+1 \in \mathbf{N})$, функцията $h : U \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in (-\infty, \xi) \cap U, \\ g(x) & \text{при } x \in [\xi, \infty) \cap U, \end{cases}$$

е безбройно много пъти диференцируема в U и $h^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) = g^{(n)}(\xi)$ $(n+1 \in \mathbf{N})$.

54. Приложете зад. 53 б).

58. **а)** Произволно. **б)** $\dfrac{a+b}{2}$. **в)** $\sqrt{\dfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)}$.

г) $\ln \dfrac{e^b - e^a}{b-a}$.

60. Диференцирайте спрямо h, за да сведете към зад. 59.

61. **б)** Непосредствено се проверява, че функцията ξ удовлетворява уравнението $\sin \ln x = \sin \ln \xi(x) + \cos \ln \xi(x)$, което след вдигане в квадрат дава $\sin^2 \ln x = 1 + \sin 2 \ln \xi(x)$. Оттук следва, че за всяко $x > 0$ трябва да е в сила неравенството $\sin 2 \ln \xi(x) \leqq 0$. Ето защо функцията $2 \ln \xi(x)$ не може да приема стойности в никой от интервалите $(2\nu\pi, (2\nu+1)\pi)$ $(\nu \in \mathbf{I})$. От друга страна, от $0 < \xi(x) < x$ следва $\lim\limits_{x \to 0} 2 \ln \xi(x) = -\infty$. Ако допуснем, че ξ е непрекъсната функция, такава би била и функцията $2 \ln \xi(x)$, което би противоречало на теоремата на Болцано.

64. **б)** Приложете а), за да получите $0 \leqq a \leqq 1$.

67. Достатъчно е да се покаже, че ако η е реално число, а a и b са точки от Δ, за които от $f'(a) < \eta < f'(b)$, съществува точка ξ от Δ, такава че $f'(\xi) = \eta$. Ще се ограничим със случая $a < b$. Нека $0 < h < b - a$, а функцията $\varphi : [a, b-h] \to \mathbf{R}$ е дефинирана с

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

Тъй като $\varphi(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ и $\varphi(b-h) = \dfrac{f(b+(-h)) - f(b)}{-h}$, ясно е, че h може да се избере толкова малко, че да са в сила неравенствата $\varphi(a) < \eta < \varphi(b-h)$. От друга страна, от (1) следва, че функцията φ е непрекъсната. Ето защо съществува точка ζ,

за която $\varphi(\zeta) = \eta$, т. е. $\dfrac{f(\zeta+h) - f(\zeta)}{h} = \eta$. Сега остава да се приложи теоремата за крайните нараствания.

68. **б)** Ще използваме индукция спрямо n. При $n = 1$ твърдението се свежда до теоремата за крайните нараствания. Нека сега то е вярно за някое естествено n и нека $f : \Delta \to \mathbf{R}$ е $n+1$ пъти диференцируема функция. Не е трудно да се съобрази, че

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} f(a + (n+1-\nu)h) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} f(a + h + (n-\nu)h) - \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} f(a + (n-\nu)h). \end{aligned} \tag{1}$$

Нека $\varphi(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} f(x + (n-\nu)h)$. Тогава от (1) следва

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} f(a + (n+1-\nu)h) = \varphi(a+h) - \varphi(a) \\ &= h\varphi'(\eta) = h \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} f'(\eta + (n-\nu)h), \end{aligned} \tag{2}$$

където η е точка от интервала Δ. Сега от (2) и от индукционното предположение следва

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} f(a + (n+1-\nu)h) = h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi),$$

с което твърдението е доказано.

69. **а)** -2. **б)** 2.

в) Прибавете и извадете числото e в числителя, което ще ви даде възможност да сведете решението към намирането на следните две граници:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} = e \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{x} = -\frac{e}{2}.$$

г) $\dfrac{1}{18}$. **д)** $\dfrac{1}{3}$. **е)** 0. **ж)** 1.

70. Разгледайте например функциите $x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ и $\sin x$ около точката 0.

71. а) $\frac{b}{a}$. б) 0. в) 0. г) 0 при $\alpha < 0$, $-\infty$ при $\alpha \geqq 0$.

72. Разгледайте например функциите $\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x^2}$ около точката 0.

73. а) 1. б) ∞. в) 1. г) $\frac{1}{b}$.

74. а) 0. б) $\frac{1}{a}$. в) 0. г) ∞.

75. а) $e^{\frac{2}{\pi}}$. б) $e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$. в) e^{-1}. г) $\sqrt[3]{e}$. д) $e^{-\frac{a^2}{2}}$. е) $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

76. а) — г) 1.

77. а) — в) 1. г) ∞. д) 1.

78. а) $-\infty$. б) $\frac{1}{3}$. в) $-\frac{1}{2}$. г) -1.

д) Сведете решението на задачата към намирането на следните две граници:

$$\lim_{x\to\infty}\left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x}}\right) = a \text{ и } \lim_{x\to\infty}\left(x^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right) = 0.$$

За да пресметнем първата от тях, ще положим $t = \frac{1}{x}$. Така получаваме

$$(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{t^t}\cdot\frac{(1+at)^{1+t} - 1}{t}.$$

Границата на първия множител е 1 (вж. 77 а)), а границата на втория множител е равна на производната на функцията $(1+at)^{1+t}$ при $t = 0$, т. е. a.

Втората граница ще пресметнем след преобразуването

$$x^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} = x^{\frac{1}{x}}\frac{1 - x^{-\frac{a}{x(x+a)}}}{\frac{1}{x}}.$$

Знаем, че границата на първия множител е 1, а за да намерим границата на втория, трябва да приложим правилото на Лопитал, тъй като числителят и знаменателят имат граница 0.

83. Приложете зад. 83 а), гл. VI, като означите с U_n множеството на всичките реални числа x, за които $f^{(n)}(x) \neq 0$.

84. Докажете, че функцията $f(x)e^{-\lambda x}$ е константа.

85. Разгледайте функцията $f(x)x^{-a}$.

86. Достатъчността се установява с директна проверка. За да се докаже необходимостта, определете C от равенствата а′) — г′). По този начин ще получите функции на x, за които трябва да докажете, че са константи. За тази цел установете, че производните им са нули, като използвате съответните равенства а) — г).

87. а) Решете системата $f(x) = Ae^x + Be^{2x}$, $f'(x) = Ae^x + 2Be^{2x}$ спрямо A и B. За получените функции на x трябва да докажете, че са константи. За целта се убедете, че производните им са нули.

88. а) Решете системата уравнения $S(x) = A\operatorname{ch}x + B\operatorname{sh}x$, $C(x) = A\operatorname{sh}x + B\operatorname{ch}x$ спрямо A и B.

91. а) Растяща за всяко x. б) Също. в) Растяща в $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$; намаляваща в $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. г) Намаляваща в $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$; растяща в $[-1, 1]$. д) Намаляваща в $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$; растяща в $[-1, 1]$. е) Растяща в $\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$ и $[1, \infty)$; намаляваща в $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ $(n \in \mathbf{N})$. ж) Намаляваща в $(-\infty, 0]$ и $\left[\frac{2}{\ln 2}, \infty\right)$; растяща в $\left[0, \frac{2}{\ln 2}\right]$. з) Растяща в $[0, a]$; намаляваща в $[a, \infty)$. и) Намаляваща в $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$; растяща в $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.

й) Растяща в $(0, \infty)$.

92. Нека

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^{x+\mu}. \tag{1}$$

Най-напред ще се занимаем със случая $\lambda > 0$. Тогава дефиниционната област на (1) е съставена от интервалите $(-\infty, -\lambda)$ и $(0, \infty)$. Тъй като функцията (1) приема само положителни стойности, тя ще бъде едновременно с логаритъма си растяща или намаляваща, поради което задачата ще бъде решена, ако се намерят интервалите на монотонност на функцията

$$\psi(x) = \ln\varphi(x). \tag{2}$$

Имаме

$$\psi'(x) = \ln\frac{x+\lambda}{x} - \frac{\mu}{x} - \frac{\lambda-\mu}{x+\lambda} \tag{3}$$

и

(4) $$\psi''(x) = \frac{\mu\lambda^2 + (2\lambda\mu - \lambda^2)x}{x^2(x+\lambda)^2}.$$

От (4) се вижда, че знакът на ψ'' съвпада със знака на функцията

(5) $$f(x) = \mu\lambda + (2\mu - \lambda)x.$$

Ще разгледаме случаите

(6) $$\mu = \frac{\lambda}{2},$$

(7) $$\mu > \frac{\lambda}{2}$$

и

(8) $$\mu < \frac{\lambda}{2}.$$

При (6) поради $\lambda > 0$ от (5) следва $\psi''(x) > 0$. Ето защо производната ψ' расте във всеки от интервалите $(-\infty, -\lambda)$ и $(0, \infty)$. Тъй като, от друга страна,

(9) $$\lim_{x\to-\infty} \psi'(x) = \lim_{x\to\infty} \psi'(x) = 0,$$

то $\psi'(x) > 0$ за x от $(-\infty, -\lambda)$ и $\psi'(x) < 0$ за x от $(0, \infty)$. Поради това при (6) функцията (1) расте в $(-\infty, -\lambda)$ и намалява в $(0, \infty)$.

При (7) от (5) следва $f(x) > 0$ при $x > \dfrac{\mu\lambda}{\lambda - 2\mu}$. Тъй като знакът на ψ'' съвпада със знака на f и в този случай $\dfrac{\mu\lambda}{\lambda - 2\mu} < 0$, производната ψ'' е положителна в $(0, \infty)$ и следователно ψ' расте в този интервал. Сега от (9) следва $\psi'(x) < 0$ в $(0, \infty)$, поради което функцията φ намалява в $(0, \infty)$. За да си изясним поведението на φ в интервала $(-\infty, -\lambda)$, да означим с M по-малкото от числата $-\lambda$ и $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda - 2\mu}$. Както по-горе, се съобразява, че $\psi''(x) < 0$ при $x < M$. Очевидно

(10) $$M = \begin{cases} -\lambda & \text{при } \mu \geqq \lambda, \\ \dfrac{\mu\lambda}{\lambda - 2\mu} & \text{при } \mu < \lambda. \end{cases}$$

Ето защо при

(11) $$\mu \geqq \lambda$$

производната ψ'' ще бъде отрицателна в $(-\infty, -\lambda)$, поради което ψ' ще намалява в този интервал. От (9) сега следва, че и φ намалява в интервала $(-\infty, -\lambda)$. Нека сега

(12) $$\frac{\lambda}{2} < \mu < \lambda.$$

Тогава производната ψ'' е отрицателна в $(-\infty, M)$ и положителна в $(M, -\lambda)$. Ето защо ψ' намалява в $(-\infty, M)$ и расте в $(M, -\lambda)$. Сега от (9) следва $\psi'(x) < 0$ в $(-\infty, M)$ и по-специално $\psi'(M) < 0$. От (3) следва $\lim\limits_{x\to-\lambda} \psi'(x) = \infty$ и тъй като ψ' расте стриктно в $(M, -\lambda)$, тя се анулира точно веднъж в някоя точка $\xi(\lambda, \mu)$ от този интервал. Не е трудно да се съобрази, че $\psi'(x) < 0$ в интервала $(-\infty, \xi(\lambda, \mu))$ и $\psi'(x) > 0$ в интервала $(\xi(\lambda, \mu), -\lambda)$. И така при (12) съществува точка $\xi(\lambda, \mu)$ с

(13) $$\frac{\mu\lambda}{\lambda - 2\mu} < \xi(\lambda, \mu) < \lambda,$$

за която функцията φ намалява в интервала $(-\infty, \xi(\lambda, \mu))$ и расте в интервала $(\xi(\lambda, \mu), -\lambda)$. Най-после в случая (8) от (5) следва $\psi''(x) > 0$ при $x < \dfrac{\mu\lambda}{\lambda - 2\mu}$ и тъй като в този случай $-\lambda \leqq \dfrac{\mu\lambda}{\lambda - 2\mu}$, производната ψ'' е положителна в $(-\infty, -\lambda)$, поради което ψ' расте в този интервал. Сега от (9) следва $\psi'(x) > 0$ в $(-\infty, -\lambda)$, поради което функцията φ расте в $(-\infty, -\lambda)$. За да си изясним поведението на φ в интервала $(0, \infty)$, да означим с L по-голямото от числата 0 и $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda - 2\mu}$. Както по-горе, се съобразява, че $\psi''(x) < 0$ при $x > L$. Очевидно

(14) $$L = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \leqq 0, \\ \dfrac{\mu\lambda}{\lambda - 2\mu} & \text{при } \mu > 0. \end{cases}$$

Ето защо при

(15) $$\mu \leqq 0$$

производната ψ'' ще бъде отрицателна в $(0, \infty)$, поради което ψ' ще намалява в този интервал. Сега от (9) следва, че ψ' приема само положителни стойности в $(0, \infty)$; следователно φ расте в $(0, \infty)$. Нека

(16) $$0 < \mu < \frac{\lambda}{2}.$$

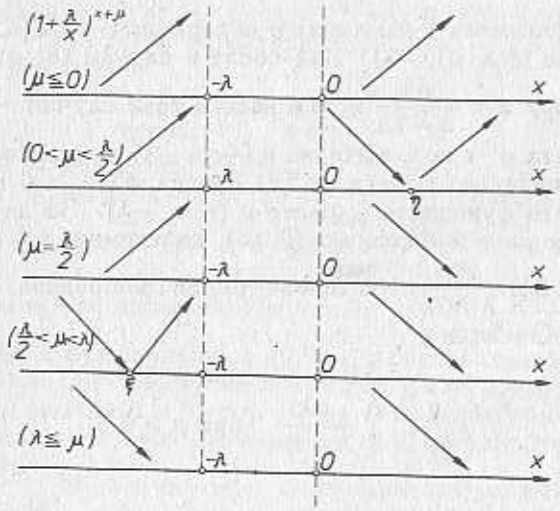
Тогава производната ψ'' е положителна в $(0, L)$ и отрицателна в (L, ∞). Също както и при (12) в този случай се установява, че съществува число $\eta(\lambda, \mu)$, такова че

$$(17) \qquad 0 < \eta(\lambda, \mu) < \frac{\mu\lambda}{\lambda - 2\mu},$$

за което функцията φ намалява в интервала $(0, \eta(\lambda, \mu))$ и расте в интервала $(\eta(\lambda, \mu), \infty)$.

Изучените по-горе случаи на поведение на функцията φ в зависимост от стойностите на λ и μ са онагледени на фиг. 15, където смисълът на стрелките е очевиден. Случаят $\lambda < 0$ се свежда към вече изучения с помощта на равенството

$$(18) \qquad \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^{x+\mu} = \frac{1}{\left(1 + \frac{(-\lambda)}{(-x)}\right)^{-x-\mu}}.$$



Фиг. 15

93. б) Свежда се към а).

94. д) Индукция спрямо n. Нека

$$(1) \qquad \varphi_n(x) = e^x - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Трябва да се докаже неравенството

$$(2) \qquad \varphi_n(x) \geqq 0$$

за всяко $x \geqq 0$ и за всяко естествено n. Очевидно

$$(3) \qquad \varphi_1(x) = e^x - 1 - x.$$

Ето защо $\varphi_1'(x) = e^x - 1 \geqq 0$ при $x \geqq 0$. Следователно функцията φ_1 е растяща в интервала $[0, \infty)$, поради което $\varphi_1(x) \geqq \varphi_1(0) = 0$ при $x \geqq 0$. С това (2) е доказано при $n = 1$. Нека сега (2) е изпълнено за някое n. Тогава $\varphi_{n+1}'(x) = \varphi_n(x) \geqq 0$ при $x \geqq 0$, поради което функцията φ_{n+1} е растяща в $[0, \infty)$. Ето защо $\varphi_{n+1}(x) \geqq \varphi_{n+1}(0) = 0$ при $x \geqq 0$ и твърдението е доказано. е) Приложете същата техника.

95 — 97. Както зад. 94.

98. С помощта на критерия за монотонност г) се свежда към в), в) — към б), б) — към а) и накрая а) — към $\sin x \leqq x$.

99. Свежда се към зад. 98. Сравнете със зад. 31, гл. V.

103. От $\varphi_n(x) = x - \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{\operatorname{tg}^{2\nu+1} x}{2\nu+1}$ следва $\varphi_n'(x) = (-1)^{n-1} \operatorname{tg}^{2n+2} x$, поради което функцията φ_n е намаляваща при четно n и растяща при нечетно n. По-нататък решението е очевидно.

104. а) 1,162. б) 0,113. в) 0,208. г) 0,949. д) 1,006. е) 0,432. ж) 1,414. з) 0,262.

105. Фиксирайте α, β и y и разгледайте функцията $\varphi : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, дефинирана с $\varphi(x) = (x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}} - x^\beta - y^\beta$. Като изследвате знака на първата ѝ производна, докажете, че φ расте.

106. а) Фиксирайте p, q и y и разгледайте функцията $\varphi : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, дефинирана с $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$. Покажете, че φ намалява в $[0, y^{\frac{1}{p-1}}]$ и расте в $[y^{\frac{1}{p-1}}, \infty)$. б) При $\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \neq 0$ и $\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu| \neq 0$ положете

$$(1) \qquad x_\nu = |a_\nu| \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^p\right)^{-\frac{1}{p}}, \quad y_\nu = |b_\nu| \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^q\right)^{-\frac{1}{q}}$$

($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Очевидно

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^p = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^q = 1. \tag{2}$$

Сега от а) следва

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{x_\nu^p}{p} + \frac{y_\nu^q}{q} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{3}$$

поради (2). Неравенството на Хьолдер следва непосредствено от (1) и (3).

107. При $p = 1$ неравенството е очевидно, поради което ще се спрем на случая $p > 1$. Избираме $q > 1$ по такъв начин, че да е в сила равенството

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

Непосредствено се проверява, че тогава

$$(p-1)q = p. \tag{2}$$

Очевидно

$$\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu||a_\nu + b_\nu|^{p-1} + \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu||a_\nu + b_\nu|^{p-1}. \tag{3}$$

От друга страна, неравенството на Хьолдер дава

$$\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu||a_\nu + b_\nu|^{p-1} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4}$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu||a_\nu + b_\nu|^{p-1} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p \right)^{\frac{1}{q}} \tag{5}$$

съгласно (2). От (3) — (5) следва

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p \\ &\leqq \left[\left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu|^p \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Сега неравенството на Минковски при $\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu + b_\nu| \neq 0$ следва от (6) въз основа на (1), като се съкрати на множителя зад скобите в дясната страна на (6).

108. б) Индукция спрямо n. При $n = 1$ твърдението е очевидно. Нека неравенството

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{p_\nu} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu \tag{1}$$

е в сила за някое $n \geqq 1$ при всеки избор на неотрицателните числа a_ν и на положителните числа p_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), за които $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1$, и нека $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ са произволни неотрицателни числа, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ — положителни числа, за които

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} p_\nu = 1. \tag{2}$$

Да разгледаме функцията $\varphi : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, дефинирана със

$$\varphi(x) = \left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{p_\nu} \right) x^{p_{n+1}} - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu - p_{n+1} x. \tag{3}$$

Очевидно

$$\varphi'(x) = p_{n+1} \left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{p_\nu} \right) x^{p_{n+1}-1} - p_{n+1}. \tag{4}$$

От (4) се вижда, че при $\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \neq 0$ производната φ' се анулира само в точката

$$\xi = \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{q_\nu}, \tag{5}$$

където

$$q_\nu = \frac{p_\nu}{1 - p_{n+1}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

положителна е в интервала $(0, \xi)$ и е отрицателна в (ξ, ∞) поради $p_{n+1} < 1$. Ето защо φ расте в първия от тези интервали и намалява във втория. Оттук непосредствено следва, че е в сила неравенството

$$\varphi(x) \leqq \varphi(\xi) \quad (x \geqq 0). \tag{7}$$

От друга страна, от (3), (5) и (6) следва

$$\varphi(\xi) = (1 - p_{n+1}) \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{q_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu$$

(8)

$$= (1 - p_{n+1}) \left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{q_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu a_\nu \right).$$

От (2) и (6) следва $\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu = 1$, което заедно с (1) (с q_ν вместо p_ν) и (8) показва, че $\varphi(\xi) \leqq 0$. Сега от (7) следва $\varphi(x) \leqq 0$ за всяко $x \leqq 0$, което заедно с (3) дава възможност да се установи верността на неравенството

(9)

$$\prod_{\nu=1}^{n+1} a_\nu^{p_\nu} \leqq \sum_{\nu=1}^{n+1} p_\nu a_\nu.$$

110. **а)** Нека $f^{(\mu)}(0) \geqq 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n+1)$. Тогава $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f^{(\mu-1)}(x) - f^{(\mu-1)}(0)}{x} > 0$. Ето защо $f^{(\mu-1)}(x) > f^{(\mu-1)}(0) \geqq 0$ за всички достатъчно малки положителни x. Следователно функцията $f^{(\mu-2)}$ е стриктно растяща в интервал от вида $[0, \delta)$ с $\delta > 0$, поради което $f^{(\mu-2)}(x) > f^{(\mu-2)}(0) \geqq 0$ за всички достатъчно малки положителни x. Като се продължи този процес на намаляване на реда на производната, се стига до заключението, че съществува число b с $0 < b < a$, за което функцията f е стриктно растяща в интервала $[0, b]$. Нека c е най-голямото измежду числата от интервала $[0, a]$, за които функцията f е растяща в интервала $[0, c]$ (съществуването на такова c следва от принципа за непрекъснатост). Трябва да докажем, че $c = a$. В противен случай бихме имали $b \leqq c < a$ и следователно $f(c) \geqq f(b) > f(0) \geqq 0$. Тъй като функцията f е непрекъсната, съществува $\varepsilon > 0$, за което $f(x) \geqq 0$ при $0 \leqq x < c + \varepsilon$. Сега от неравенството $f^{(n)}(x) \geqq \lambda(x) f(x)$ следва $f^{(n)}(x) \geqq 0$ за $0 \leqq x < c + \varepsilon$. Като се използват неравенствата $f^{(\nu)}(0) \geqq 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$, оттук се заключава последователно, че функциите $f^{(n-1)}, f^{(n-2)}, \ldots, f'$ и f са растящи за $0 \leqq x < c + \varepsilon$. Но последното от тези заключения противоречи на максималността на c, с което задачата е решена. **б)** Индукция спрямо n, като се използват производни до втори ред. **в)** Свежда се към а) или б).

111. **а)** Минимум в 2, максимум в -2. **б)** Няма екстремуми. **в)** Минимум в 5, максимум в 1. **г)** Минимум в b. **д)** Няма екстремуми. **е)** Максимум в 2, минимуми в 1 и 3. **ж)** Минимум в 3, максимум в 1. **з)** Минимум в 4, максимум в 0. **и)** Минимум в -1, максимум в 1. **й)** Максимум в -1, минимум в 1. **к)** Минимум в $\dfrac{a^2}{a+b}$, максимум в $\dfrac{a^2}{a-b}$. **л)** Минимум в 16, максимум в 4. **м)** Минимум в -1 и 1. **н)** Максимум в $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, минимум в 0. **о)** Минимум в $\dfrac{1}{e}$. **п)** Минимум в $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **р)** Минимум в $\dfrac{1}{e}$. **с)** Минимум в 1, максимум в $\dfrac{1}{e^2}$. **т)** Максимум в n. При четно n минимум в 0. **у)** Минимум в 0, максимум в -1 и 1. **ф)** Минимум в 0. **х)** Максимум в $\ln 2$. **ц)** Минимум в 1, максимум в $\dfrac{9}{11}$. **ч)** Няма екстремуми. **ш)** Максимум в $\dfrac{\pi}{4} + 2\nu\pi$, минимум в $\dfrac{\pi}{4} + (2\nu - 1)\pi$ $(\nu \in \mathbf{I})$.

112. **а)** $m(\alpha)$ съществува съгласно зад. 59, гл. VI. Разбира се, точките, в които $m(\alpha)$ се достига, са локални минимуми, поради което производната спрямо x трябва да се анулира: $2x + \alpha = 0$. Следователно $m(\alpha)$ се достига при $x = -\dfrac{\alpha}{2}$. Ето защо

(1)

$$m(\alpha) = \ln\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right).$$

От (1) се вижда, че $m(\alpha)$ дивергира към $-\infty$ при α, клонящо към 0 или 4. Ето защо от зад. 57 а), гл. VI следва, че измежду стойностите на $m(\alpha)$ има една най-голяма. В точките, в които $m(\alpha)$ достига най-голямата си стойност, функцията (1) има локален максимум. Поради това производната ѝ трябва да се анулира: $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0$. И така търсената стойност на α е 2. **б)** $m(\alpha)$ се достига при $x = \alpha$ и $m(\alpha) = -\dfrac{\alpha + \alpha^2}{1 + \alpha^2}$. Най-голямата си стойност $m(\alpha)$ достига при $\alpha = 1 - \sqrt{2}$. **в)** 1. **г)** $\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}$.

113. **а)** Най-малка стойност 0, най-голяма $\dfrac{100}{e}$. **б)** Инфимум 0, най-голяма стойност 1. **в)** Инфимум 0, най-голяма стойност $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. **г)** Най-малка стойност $\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3x}{4}}$, най-голяма 1.

114. $-\frac{1}{2}$.

115. Квадратът.

116. Правоъгълникът, получен след разполовяване на квадрат, вписан в кръг.

117. Цилиндър с радиус $\frac{a}{\sqrt{2}}$, където a е радиусът на сферата.

118. Цилиндър с радиус $a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, където a е радиусът на сферата.

119. Конус с радиус $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$, където a е радиусът на сферата.

120. Конусът от предишната задача.

121. Цилиндър с радиус $\frac{2a}{3}$, където a е радиусът на конуса.

122. $\frac{a}{\sqrt{2}}$, където a е разстоянието от площадката до стълба.

125. а) Ако $f''(\xi) > 0$, при достатъчно близки до ξ различни от ξ стойности на x ще бъде в сила неравенството

$$\frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} > 0. \tag{1}$$

Трябва да се докаже неравенството

$$f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) \leqq f(x). \tag{2}$$

За тази цел нека например $x > \xi$. Тогава (2) е еквивалентно с

$$f'(\xi) \leqq \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}. \tag{3}$$

От теоремата за крайните нараствания следва, че (3) ще бъде доказано, ако се убедим, че $f'(\xi) \leqq f'(\eta)$ за всички достатъчно близки до ξ точки η, за които $\eta > \xi$. Но от $f''(\xi) > 0$ следва $\lim\limits_{\eta\to\xi} \frac{f'(\eta) - f'(\xi)}{\eta - \xi} > 0$, поради което (1) е доказано за всички достатъчно близки до ξ точки $x > \xi$. б) Нека $x > \xi$ и x е толкова близко до ξ, че е в сила (2). Тогава е в сила (3), което заедно с теоремата за крайните нараствания дава $f'(\xi) \leqq f'(\eta)$ при $\xi < \eta < x$. Ето защо

$$\frac{f'(\eta) - f'(\xi)}{\eta - \xi} \geqq 0. \tag{4}$$

Когато x клони към ξ, η също клони към ξ и твърдението следва от (4). в) Следва от а) и от дефиницията на инфлексна точка.

126. а) Изпъкнала за $x < 1$, вдлъбната за $x > 1$, инфлексия в $x = 1$. б) Изпъкнала за $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$, вдлъбната за $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$, инфлексия при $|x| = \frac{a}{\sqrt{3}}$. в) Изпъкнала за $x > 0$, вдлъбната за $x < 0$, инфлексия в $x = 0$. г) Изпъкнала за всяко x. д) Изпъкнала в $((2\nu - 1)\pi, 2\nu\pi)$, вдлъбната в $(2\nu\pi, (2\nu + 1)\pi)$, инфлексия в $x = \nu\pi$ $(\nu \in \mathrm{I})$. е) Изпъкнала в $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$, вдлъбната в $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, инфлексия в $|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ж) Изпъкнала в $(-1, 1)$, вдлъбната в $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$, инфлексия в $|x| = 1$. з) Изпъкнала в $\left(e^{(8\nu-3)\frac{\pi}{4}}, e^{(8\nu+1)\frac{\pi}{4}}\right)$, вдлъбната в $\left(e^{(8\nu+1)\frac{\pi}{4}}, e^{(8\nu+5)\frac{\pi}{4}}\right)$, инфлексия в $x = e^{\frac{\pi}{4}+\nu\pi}$ $(\nu \in \mathrm{I})$. и) Изпъкнала навсякъде.

127. Втората производна на функцията е $y'' = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$. Ето защо тя се анулира при $x = 1$, $x = \xi_1$ и $x = \xi_2$, където ξ_1 и ξ_2 са нулите на тричлена $x^2 + 4x + 1$. Тъй като y'' очевидно мени знака си във всяка от тези три точки, във всяка от тях е налице инфлексия. Остава да се установи, че точките $A = (1, 1)$, $B_1 = \left(\xi_1, \frac{\xi_1+1}{\xi_1^2+1}\right)$ и $B_2 = \left(\xi_2, \frac{\xi_2+1}{\xi_2^2+1}\right)$ лежат на една права. За целта е достатъчно да се докаже, че ъгловите коефициенти k_1 и k_2 на правите AB_1 и AB_2 са равни. Очевидно

$$k_1 = \frac{1}{\xi_1 - 1}\left(\frac{\xi_1+1}{\xi_1^2+1} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\xi_1 - 1}\left(\frac{\xi_1+1}{-4\xi_1} - 1\right) = \frac{5\xi_1+1}{4\xi_1 - 4\xi_1^2} = \frac{5\xi_1+1}{20\xi_1+4} = \frac{1}{4}$$

поради $\xi_1^2 + 4\xi_1 + 1 = 0$. Аналогично се намира $k_2 = \frac{1}{4}$.

128. Преди всичко ще се убедим, че функцията $x = a(t - \sin t)$ е стриктно растяща. Наистина

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) \quad (a > 0), \tag{1}$$

поради което $\frac{dx}{dt} \geqq 0$. Ето защо x е растяща функция на t. От друга страна, от (1) следва, че $\frac{dx}{dt}$ е строго положителна във всеки от интервалите $(2\nu\pi,\ 2(\nu+1)\pi)$ $(\nu \in \mathbf{I})$, поради което x е стриктно растяща функция във всеки от тези интервали. Сега не е трудно да се съобрази, че x е стриктно растяща функция за всяка реална стойност на t. От друга страна, $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \infty$. Ето защо функцията $x = a(t - \sin t)$ е обратима и обратната ѝ функция $t(x)$ е дефинирана за всяко x. Съгласно зад. 25 а) тя е непрекъсната. Лесно се вижда, че тя е също така и диференцируема само при $x \neq 2\nu\pi a$ $(\nu \in \mathbf{I})$. Ясно е, че за всеки две реални числа x и t равенствата $x = a(t - \sin t)$ и $t = t(x)$ са еквивалентни. Ето защо циклоидата може да се представи и като графика на функция, т. е. като крива с уравнение

(2) $$y = a(1 - \cos t(x)) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

За да намерим втората производна на (2) спрямо x, ще отбележим най-напред, че от дефиницията на $t(x)$ следва тъждеството

(3) $$x = a(t(x) - \sin t(x)).$$

От (2) и (3) следват съответно

(4) $$\frac{dy}{dx} = a \sin t(x) \frac{dt}{dx}$$

и

(5) $$1 = a(1 - \cos t(x)) \frac{dt}{dx}.$$

От (4) и (5) имаме

(6) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t(x)}{1 - \cos t(x)},$$

а от (5) и (6) —

(7) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{a(1 - \cos t(x))^2} < 0.$$

Ето защо циклоидата е вдлъбната във всеки от интервалите $(2\nu\pi a,\ 2(\nu+1)\pi a)$ $(\nu \in \mathbf{I})$.

129. а) Непосредствено прилагане на дефиницията.
б) Сведете към а) и зад. 85, гл. VI. в) Сведете към а).

130. а) Нека функцията f е изпъкнала в Δ и ξ е вътрешна точка за Δ. Съгласно зад. 129 а) границите $l = \lim\limits_{x\to\xi-0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ и $L = \lim\limits_{x\to\xi+0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ съществуват. Нека $\varepsilon > 0$ и числото $\delta > 0$ е толкова малко, че от $\xi - \delta < x < \xi$ да следва $\left|\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - l\right| < \varepsilon$, а от $\xi < x < \xi + \delta$ да следва $\left|\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - L\right| < \varepsilon$. Тогава при $|x - \xi| < \delta$ ще бъде в сила поне едното от неравенствата $|f(x) - f(\xi)| < (|l| + \varepsilon)|x - \xi|$ или $|f(x) - f(\xi)| < (|L| + \varepsilon)|x - \xi|$, откъдето следва веднага непрекъснатостта на функцията f в точката ξ.
б) След увеличаване на стойността на една изпъкнала функция в някой от краищата на дефиниционния ѝ интервал тя пак остава изпъкнала.

131. а) Сведете към зад. 129 в). б) Трябва да се докаже неравенството

(1) $$f(px_1 + qx_2) \leqq pf(x_1) + qf(x_2)$$

при

(2) $$x_1 < x_2,\ p + q = 1\ (p,\ q > 0).$$

Неравенството (1) е очевидно еквивалентно с

(3) $$p(f(px_1 + qx_2) - f(x_1)) \leqq q(f(x_2) - f(px_1 + qx_2)).$$

Теоремата за крайните нараствания, приложена към двете страни на (3), поради (2) дава

(4) $$pq(x_2 - x_1)f'(\xi) \leqq pq(x_2 - x_1)f'(\eta),$$

където $x_1 < \xi < px_1 + qx_2$ и $px_1 + qx_2 < \eta < x_2$. Неравенството (4) е изпълнено, тъй като f' по предположение е растяща. Тъй като от (4) следва (3), а (3) е еквивалентно с (1), твърдението е доказано. в) Свежда се към б).

132. а) Сведете към зад. 130 а). б) Сведете към зад. 131 в) и 125 а).

133. Ще използуваме индукция спрямо n. При $n = 2$ неравенството е изпълнено по дефиниция. Да предположим верността му за някое $n = 2, 3, \ldots$ и нека $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ са положителни числа, за които $\sum\limits_{\nu=1}^{n+1} p_\nu = 1$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ са произволни точки от Δ. Тъй като числата $\frac{p_\nu}{1 - p_{n+1}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ са положителни

и $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu}{1-p_{n+1}} = 1$, точката $\xi = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu x_\nu}{1-p_{n+1}}$ принадлежи на Δ. Ето защо

$$f\left(\sum_{\nu=1}^{n+1} p_\nu x_\nu\right) = f((1-p_{n+1})\xi + p_{n+1}x_{n+1})$$

$$\leqq (1-p_{n+1}) f\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu x_\nu}{1-p_{n+1}}\right) + p_{n+1} f(x_{n+1}) \leqq \sum_{\nu=1}^{n+1} p_\nu f(x_\nu)$$

съгласно дефиницията на изпъкнала функция и индукционното предположение. От принципа за индукцията сега следва, че твърдението е вярно за всяко $n = 2, 3, \ldots$

134. Прилага се зад. 133 към:

а) $f(x) = x^a$ и $p_\nu = \frac{1}{n}$; б) $f(x) = x^{-a}$ и $p_\nu = \frac{1}{n}$;

в) $f(x) = -x^a$; г) $f(x) = x \ln x$ и $p_\nu = \frac{1}{n}$.

135. Използвайте зад. 133 при $f(x) = e^x$.

136. а) От изпъкналостта на $\ln f$ и от зад. 131 а) следва $f''f - f'^2 \geqq 0$. Ето защо $f'' > 0$ и f е изпъкнала. С това твърдението е доказано при $a = 1$, към който случай се свежда и общият.
б) По условие е дадено, че

(1) $$\ln f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqq p_1 \ln f(x_1) + p_2 \ln f(x_2)$$
$$(p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ p_1 + p_2 = 1).$$

От (1) следва

(2) $$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqq (f(x_1))^{p_1}(f(x_2))^{p_2}.$$

От друга страна, неравенството на Коши (зад. 139) дава

(3) $$(f(x_1))^{p_1}(f(x_2))^{p_2} \leqq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2).$$

Сега твърдението следва от (2).

137. Сведете към зад. 136 а).

138. а) Прилага се зад. 136 към: а) $f(x) = x^x$, $p_\nu = \frac{1}{n}$, $x_\nu = 2\nu$; б) $f(x) = x^{ex}$, $p_\nu = \frac{1}{n}$, $x_\nu = 2\nu$; в) $f(x) = -x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ с $x_\nu = \frac{1}{p_\nu}$; г) $f(x) = -x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ с $x_\nu = \frac{1}{xp_\nu}$; д) $f(x) = (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ с $x_\nu = \frac{1}{p_\nu}$ и $1 + p_\nu = a_\nu$; е) $f(x) = (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ с $x_\nu = \frac{1}{xp_\nu}$ и $1 + xp_\nu = a_\nu$.

139. В случая на изпъкнали функции f^{a_n} може да се работи така: По условие е дадено, че

(1) $$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqq (p_1 f(x_1)^{a_n} + p_2 f(x_2)^{a_n})^{\frac{1}{a_n}}.$$

От зад. 58, гл. V следва

(2) $$\lim_{a_n \to 0} \frac{f(x_1)^{a_n} - 1}{a_n} = \ln f(x_1), \quad \lim_{a_n \to 0} \frac{f(x_2)^{a_n} - 1}{a_n} = \ln f(x_2).$$

От друга страна, на дясната страна на (1) може да се даде видът

(3) $$\left\{1 + a_n\left(p_1 \frac{f(x_1)^{a_n} - 1}{a_n} + p_2 \frac{f(x_2)^{a_n} - 1}{a_n}\right)\right\}^{\frac{1}{a_n}}.$$

От (2) и от зад. 54 а), гл. V следва, че изразът (3) клони към $e^{p_1 \ln f(x_1) + p_2 \ln f(x_2)}$, т. е. $f(x_1)^{p_1} f(x_2)^{p_2}$. Ето защо след граничен преход в (1) се получава

(4) $$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leqq f(x_1)^{p_1} f(x_2)^{p_2},$$

откъдето след логаритмуване се вижда изпъкналостта на $\ln f$.

140. Разгледайте например функцията $f(x) = x^2$ при $x > 0$.

141. Нека $\psi(x) = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Тогава

$$\psi'(x) = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}, \quad \psi''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}.$$

Нека $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Тогава $f = e^\psi$ и следователно $f'' = e^\psi(\psi'^2 + \psi'')$. Ето защо твърдението ще бъде доказано, ако се установи, че $\psi'^2 \leqq -\psi''$, т. е. че

(1) $$\psi'^2 \leqq \frac{1}{x(x+1)^2}.$$

От друга страна, с изследване на знака на първата производна веднага се вижда, че $\psi' > 0$. Ето защо неравенството (1) е еквивалентно със

(2) $$\psi' \leqq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Нека сега

(3) $$g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Тогава

(4) $$g'(x) = \frac{1+3x-2\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^2}.$$

От (4) следва $g'(x) > 0$ при $x > 0$, поради което функцията (3) е растяща. От друга страна, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, поради което $g(x) < 0$ за всяко $x > 0$. С това неравенството (2), а заедно с него и (1) е доказано.

143. Нека по дефиниция $\varphi(x) = f(\xi+x) - 2f(\xi) + f(\xi-x)$, $\psi(x) = x^2$. Тогава

(1) $$\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2} = \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{\psi(h)-\psi(0)}.$$

От (1) и от обобщената теорема за крайните нараствания се получава

(2) $$\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2} = \frac{f'(\xi+\theta h)-f'(\xi-\theta h)}{2\theta h},$$

където $0 < \theta < 1$. Сега твърдението следва почти непосредствено.

144. Разгледайте например функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = x|x|$, и положете $\xi = 0$.

145. а) Проверете, че числителят от дефиницията на втора производна на Шварц е неотрицателен (неположителен). б) Допуснете противното и използвайте а) и теоремата на Вайерщрас, за да получите противоречие. в) Сведете към б), като разгледате функцията $f(x)+\varepsilon(x-a)(x-b)$, респективно $f(x)-\varepsilon(x-a)(x-b)$ $(\varepsilon > 0)$, и оставете ε да клони към 0. г) Изберете константите k и l по такъв начин, че функцията $\varphi(x) = f(x) - kx - l$ да се анулира в краищата на интервала. След това приложете в) към φ.

146. б) Разгледайте например функцията f, дефинирана с $f(x) = x^2 + 2x^2\sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и с $f(0) = 0$. в) Нека x_1 и x_2 принадлежат на Δ и $x_1 < x_2$. Приложете зад. 145 в) към функцията $\varphi(x) = f(x) - (kx + l)$, където константите k и l са избрани така, че да са в сила равенствата $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$.

147. а) От формулата на Тейлър следва

(1) $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1).$$

Да допуснем, че числото e е рационално, например $e = \frac{p}{q}$, където p и $q > 0$ са взаимно прости цели числа. Тогава от (1) след умножение с $n!$ бихме получили

(2) $$\left(\frac{p}{q} - \sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\right)n! = \frac{e^\theta}{n+1}.$$

При $n \geqq q$ числото в лявата страна на (2) е цяло, докато при $n \geqq 2$ числото в дясната страна не е цяло поради

(3) $$0 < \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1} \leqq 1.$$

148. а) От формулата на Тейлър следва

$$e^x - \sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^\nu}{\nu!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}e^{\theta(x)} \quad (0 < \theta < 1),$$

откъдето твърдението се получава веднага.

149. а) Да положим $a_n = 2\pi(n+1)!\left(e - \sum\limits_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}\right)$. От зад. 148 а) следва

(1) $$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\pi.$$

От друга страна, от периодичността на $\sin x$ следва $\sin(2\pi n!e) = \sin\frac{a_n}{n+1}$. Ето защо $n\sin(2\pi n!e) = \frac{na_n}{n+1}\cdot\frac{\sin\frac{a_n}{n+1}}{\frac{a_n}{n+1}}$. Сега от (1) следва, че търсената граница е 2π. б) π. в) $-\pi$.

150. а) $\frac{\pi}{8}$. б) $-\frac{\pi}{8}$. в) $\frac{\pi}{8}$. г) $-\frac{\pi}{8}$.

151. а) $k\pi$. б) $k\pi$. в) $-k\pi$.

152. Да допуснем противното. Тогава съществуват цели числа p, q и r, не всичките нули, за които

(1) $$pe^2 + qe + r = 0.$$

Тогава $\pi n!pe = -\pi n!(q + re^{-1})$, откъдето

$$\operatorname{tg}(\pi n!pe) = -\frac{\operatorname{tg}(\pi n!q) + \operatorname{tg}(\pi n!re^{-1})}{1 - \operatorname{tg}(\pi n!q)\operatorname{tg}(\pi n!re^{-1})}$$

за всяко естествено n, т. е.

(2) $$\operatorname{tg}(\pi n!pe) = \operatorname{tg}(\pi n!re^{-1})$$

поради $\operatorname{tg}(\pi n!q) = 0$. Ако в (2) оставим n да расте неограничено чрез нечетни стойности, от зад. 151 а) и б) следва

(3) $$p\pi = r\pi.$$

Ако пък оставим n да расте неограничено чрез четни стойности от зад. 151 а) и в) следва

(4) $$p\pi = -r\pi.$$

От (3) и (4) следва $p = r = 0$, което заедно с (1) дава противоречието $q = 0$. Горното решение ни бе съобщено устно от К. Дочев.

154. а) 1. б) 0. в) Нека $f(x) = 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5$. Тогава $f'(x) = 48x^3 - 42x^2 - 6x$. Нулите на f' са $-\frac{1}{8}$, 0 и 1. От друга страна, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Непосредствено се проверява, че $f\left(-\frac{1}{8}\right) < 0$. Ето защо от теоремата на Болцано следва, че даденото уравнение има корен в интервала $\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$. Аналогично се проверява наличието на корен и в интервала $(1, \infty)$. Тъй като производната не се анулира в тези интервали, от теоремата на Рол следва, че уравнението има точно по един корен във всеки от тях. Ще покажем, че уравнението няма корени в интервала $\left[-\frac{1}{8}, 1\right]$. Наистина нека $f(\xi)$ е най-голямата стойност на f в този интервал. Ако f се анулираше в $\left[-\frac{1}{8}, 1\right]$, би трябвало да имаме $f(\xi) \geqq 0$, което заедно с $f\left(-\frac{1}{8}\right) < 0$ и $f(1) < 0$ показва, че ξ е вътрешна точка за $\left[-\frac{1}{8}, 1\right]$. Ето защо f има локален максимум в ξ. От теоремата на Ферма сега следва $f'(\xi) = 0$. Тъй като нулите на f' са $-\frac{1}{8}$, 0 и 1, то $\xi = 0$ в противоречие с $f(0) = -5 < 0$. Следователно даденото уравнение има точно два корена.

155. а) 2. б) 1 при $a < 1$; 3 при $1 \leqq a$. в) 0 при $a < -\frac{1}{e}$; 2 при $-\frac{1}{e} \leqq a < 0$ и 1 при $0 \leqq a$. г) 1 при $a \leqq 0$; 2 при $0 < a < e^{-1}$ и 0 при $a > e^{-1}$.

156. Нека най-напред

(1) $$4p^3 + 27q^2 > 0.$$

Ако положим

(2) $$f(x) = x^3 + px + q,$$

то $f'(x) = 3x^2 + p$. Ако $p > 0$, очевидно f' не се анулира, поради което разглежданото уравнение може да има най-много един реален корен съгласно теоремата на Рол. Тъй като f е полином от нечетна степен, при големи по абсолютна стойност отрицателни x той приема отрицателни стойности, а при големи положителни стойности на x приема положителни стойности. Ето защо от теоремата на Болцано следва, че въпросното уравнение има поне един реален корен (вж. зад. 23 ж), гл. VI). С това в случая (1) при $p > 0$ твърдението е доказано. При $p = 0$ това твърдение се проверява непосредствено. Поради това остана да се занимаем само със случая $p < 0$. Тогава f' се анулира в точките $x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и $x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, положителна е в интервалите $(-\infty, x_1)$ и (x_2, ∞), а е отрицателна в интервала (x_1, x_2). Ето защо f расте в интервалите $(-\infty, x_1)$ и (x_2, ∞), а намалява в (x_1, x_2). Поради това са в сила неравенствата

(3) $$f(x) \leqq f(x_1) \quad (x \leqq x_2)$$

и

(4) $$f(x) \geqq f(x_2) \quad (x_1 \leqq x).$$

От друга страна,

(5) $$f(x_1) = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$$

и

(6) $$f(x_2) = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q.$$

Неравенствата $f(x_1) \geqq 0 \geqq f(x_2)$ не могат да бъдат изпълнени едновременно, защото в противен случай бихме имали

$0 \geqq f(x_1)\,f(x_2) = \frac{1}{27}(4p^3 + 27q^2)$ съгласно (5) и (6) в противоречие с (1). Ето защо налице е поне едно от неравенствата $f(x_1) < 0$ и $f(x_2) > 0$. Нека най-напред $f(x_1) < 0$. Тогава от (3) следва, че f не се анулира в интервала $(-\infty, x_2)$. От друга страна, f може да се анулира най-много веднъж в (x_2, ∞), защото f' не се анулира в този интервал. Случаят $f(x_2) > 0$ се разглежда аналогично. С това твърдението е доказано в случая (1). Нека сега

$$4p^3 + 27q^2 < 0. \tag{7}$$

От (7) най-напред следва, че $p < 0$, поради което f' отново се анулира в точките x_1 и x_2 и са налице неравенствата (3) и (4). Ще се убедим, че

$$f(x_1) > 0 > f(x_2). \tag{8}$$

Ако допуснем, че например $f(x_1) \leqq 0$, от (5) и $p < 0$ би следвало $0 < -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \leqq -q$, което чрез вдигане в квадрат дава $-4p^3 \leqq 27q^2$ в противоречие със (7). Ето защо $f(x_1) > 0$. Аналогично се доказва, че $f(x_2) < 0$. От (8) най-напред следва, че f се анулира поне веднъж в интервала (x_1, x_2). От друга страна, пак от (8) и от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ следва, че f се анулира и във всеки от интервалите $(-\infty, x_1)$ и (x_2, ∞). Ето защо разглежданото уравнение има поне три реални корена. Тъй като f е полином от трета степен, това уравнение в случая (7) има точно три корена.

158. а) $a < 11$. б) $a < -\frac{188}{27}$ или $a > 175$.

в) $0 < a < \frac{621}{16}$. г) $a = -\frac{800}{27}$ или $a = \frac{1900}{27}$. д) $a > 0$.

159. а) $a = 1$. б) $a = 1$. в) $a = -1$. г) $a = \frac{3\pi}{2} - 1$ или $a = 1 - \frac{3\pi}{2}$.

162. а) Подражание на доказателството на теоремата на Рол с използуване на зад. 57 б) и в), гл. VI. б) Както а).

163. а) Теоремата на Рол и зад. 162 а), приложени към функцията $e^{-\lambda x}P(x)$. б) n-кратно прилагане на а). в) Разложете полинома φ на произведение от линейни множители и приложете а).

164. По същество се свежда към зад. 163 б) с $\lambda = 1$.

165. Прилага се зад. 162.

166. а) Теоремата на Рол и зад. 162, приложени към функцията $e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}P(x)$. б) Теоремата на Рол и зад. 162, приложени към функцията $P(x)(1+x^2)^{-\frac{\lambda}{2}}$. в) Разгледайте функцията Pe^{φ}. г) Разгледайте функцията $\frac{P}{Q^{\alpha}}$.

168. а) Изберете такова x от Δ, че $G(x) \neq 0$, фиксирайте го и приложете зад. 160 към фукнцията $F(t) - \frac{F(x)}{G(x)}G(t)$ на t.

б) Твърдението е тривиално при $x = a$. Нека $x \in \Delta$ и $x \neq a$. Приложете обобщената теорема за крайните нараствания към функциите

$$f(t) = F(x) - \sum_{\mu=0}^{m} \frac{(x-t)^{\mu}}{\mu!} F^{(\mu)}(t)$$

и

$$g(t) = G(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(x-t)^{\nu}}{\nu!} G^{(\nu)}(t)$$

на t за интервала $[a, x]$, като вземете пред вид, че $f(a) = F(x)$, $f(x) = 0$, $g(a) = G(x)$, $g(x) = 0$.

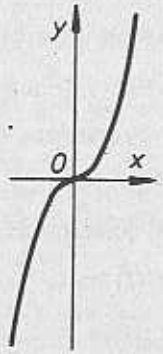
169. Приложете зад. 168 а) към функциите $f(x) - P(x)$ и $(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_n)^{k_n}$.

170. а) Следва от зад. 168 б) при $F(x) = R_n(x)$ и $G(x) = g(x) - g(a)$. б) От а) при $g(x) = (\lambda - x)^p$ $(p > 0)$ следва

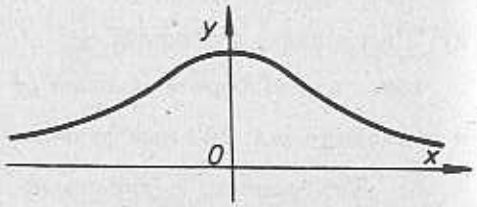
$$R_n(x) = \frac{(\lambda-a)^p - (\lambda-x)^p}{p(\lambda-\xi)^{p-1}} \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

откъдето при $\lambda = x$ се получава и формулата на Рош. в) Получава се от б) при $p = n+1$. г) Получава се от б) при $p = 1$. д) Получава се от зад. 168 а), приложена към функциите $R_n(x)$ и $\frac{(x-a)^{n+1}}{b-x}$.

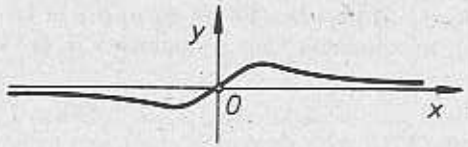
171. а) Фиг. 16. б) Фиг. 17. в) Фиг. 18. г) Фиг. 19.



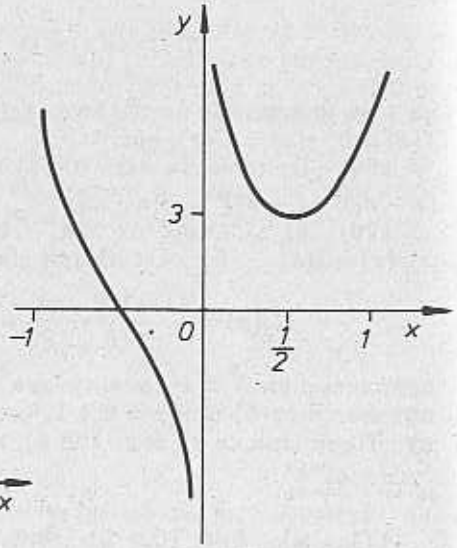
Фиг. 16. Кубична парабола



Фиг. 17. Кълрица на Мария Анези

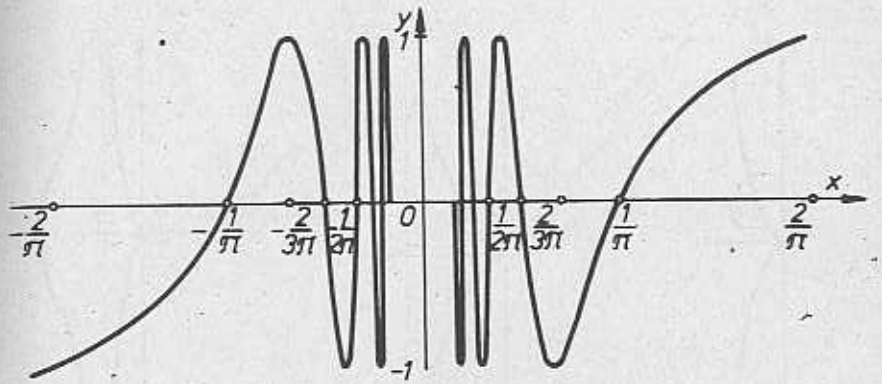


Фиг. 18. Серпентина на Нютон

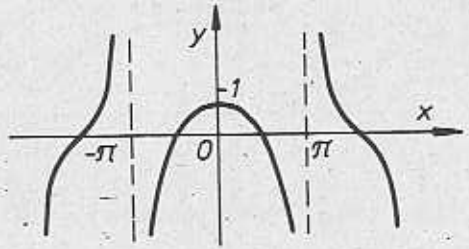


Фиг. 19. Тризъбец на Нютон

173. е) Фиг. 20. и) Фиг. 21.

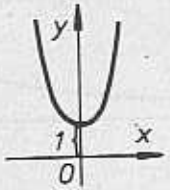


Фиг. 20. Топологична синусоида



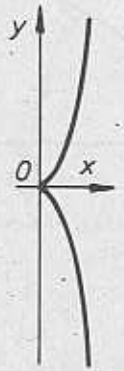
Фиг. 21. Квадратриса на Диностpат

175. б) Фиг. 22.

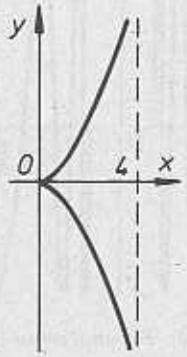


Фиг. 22. Верижка

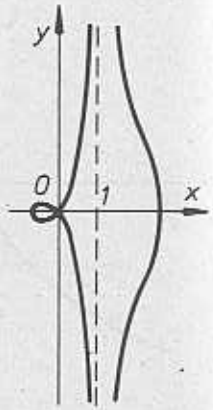
179. а) Фиг. 23. б) Фиг. 24. в) Фиг. 25.
г) Фиг. 26. д) Фиг. 27.



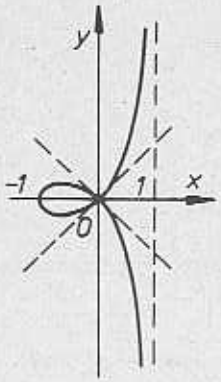
Фиг. 23. Семикубична парабола



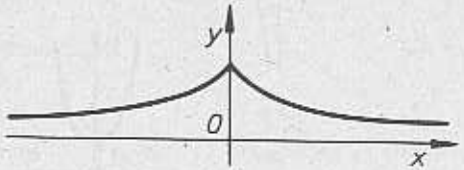
Фиг. 24. Цисоида на Диоклес



Фиг. 25. Конхоида на Никомед $[(x-1)^2(x^2+y^2)=3x^2]$

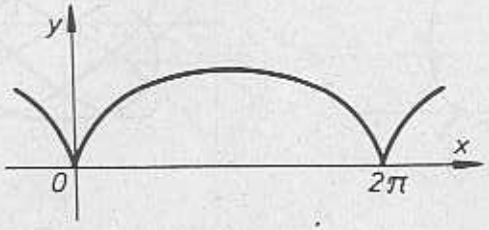


Фиг. 26. Строфоида

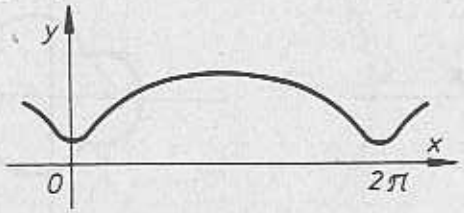


Фиг. 27. Трактриса $\left[x^2=\left(\operatorname{Arch}\frac{1}{y}-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right]$

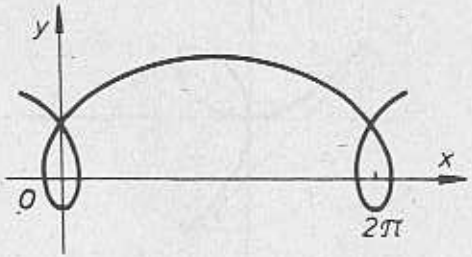
182. а) Фиг. 28. б) Фиг. 29. в) Фиг. 30.
г) Фиг. 31. д) Фиг. 32. е) Фиг. 33. ж) Фиг. 34.



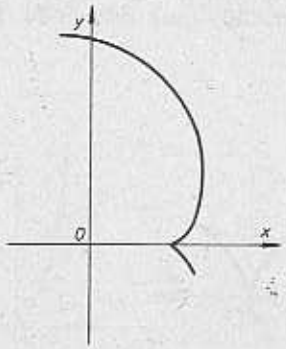
Фиг. 28. Циклоида



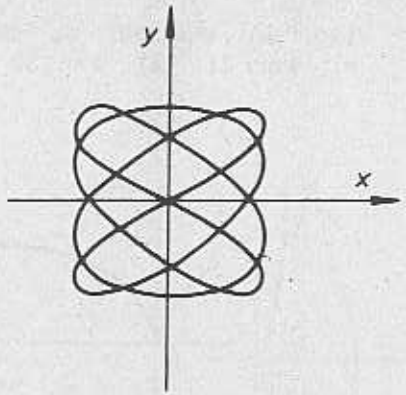
Фиг. 29. Скъсена циклоида $\left(x=t-\frac{1}{2}\sin t,\ y=1-\frac{1}{2}\cos t\right)$



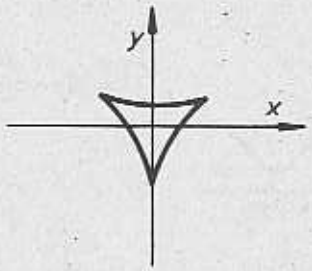
Фиг. 30. Удължена циклоида



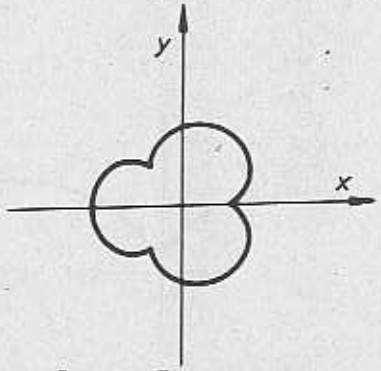
Фиг. 31. Еволвента на окръжност



Фиг. 32. Крива на Лисажу
($x = \sin 4t$, $y = \cos 3t$)

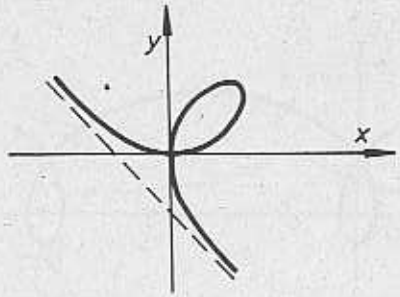


Фиг. 33. Хипоциклоида



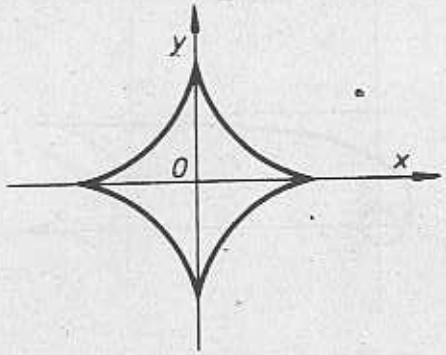
Фиг. 34. Епициклоида
($x = 4\cos t - \cos 4t$, $y = 4\sin t - \sin 4t$)

184. а) Фиг. 35.

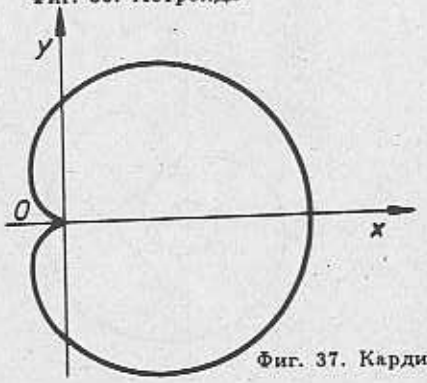


Фиг. 35. Декартов лист

185. а) Фиг. 36. б) Фиг. 37.

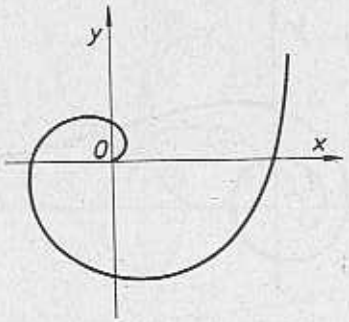


Фиг. 36. Астроида

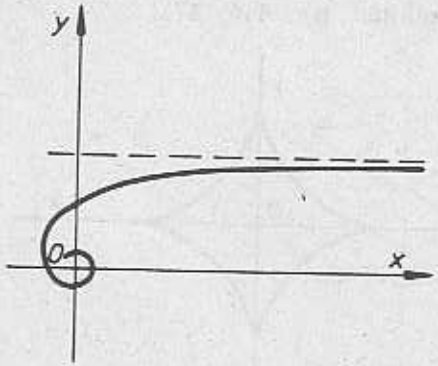


Фиг. 37. Кардиоида

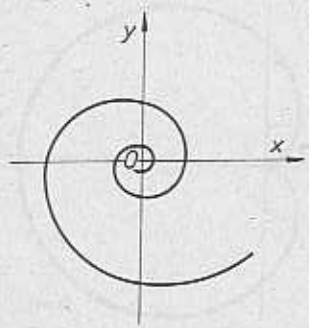
186. а) Фиг. 38. б) Фиг. 39. в) Фиг. 40. г) Фиг. 41.



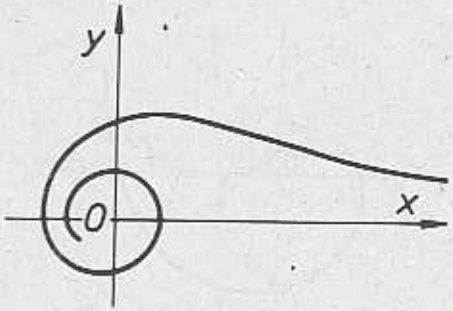
Фиг. 38. Архимедова спирала



Фиг. 39. Хиперболична спирала

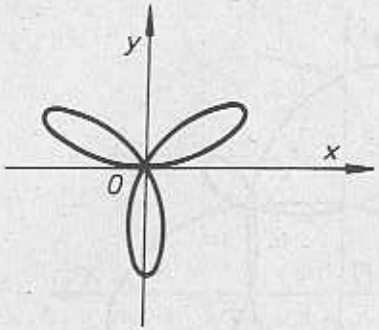


Фиг. 40. Логаритмична спирала

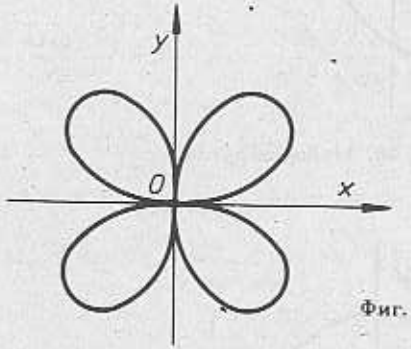


Фиг. 41. Жезъл

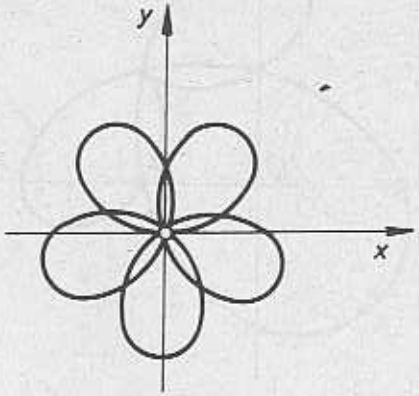
187. а) Фиг. 42. б) Фиг. 43. в) Фиг. 44.



Фиг. 42. Роза

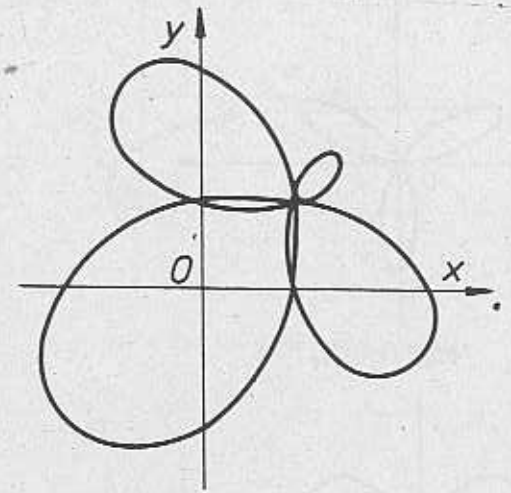


Фиг. 43. Роза ($\rho = |\sin 2\theta|$)

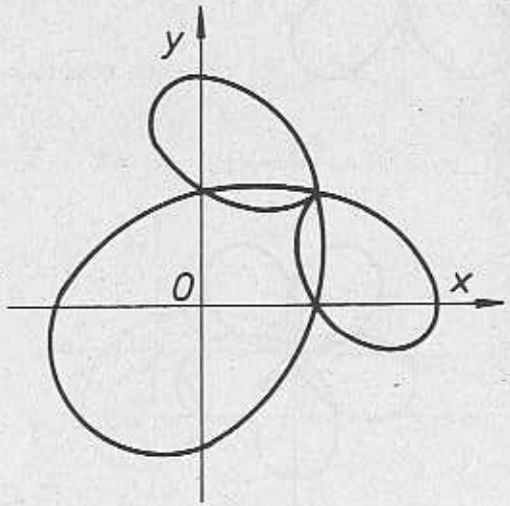


Фиг. 44. Роза

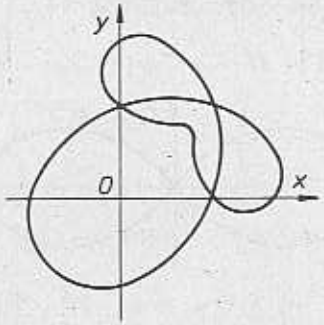
188. а) Фиг. 45. б) Фиг. 46. в) Фиг. 47.



Фиг. 45. Майски бръмбар



Фиг. 46. Майски бръмбар



Фиг. 47. Майски бръмбар

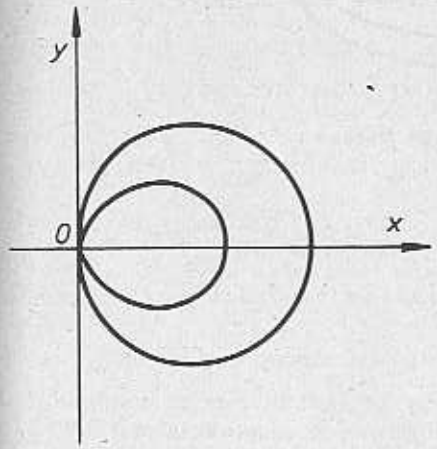
189. а) $\rho^2 - 4\rho\cos\theta - 4\sin^2\theta = 0$. б) $\rho = \dfrac{-\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

в) $\rho = \dfrac{4\sin^2\theta}{\cos\theta}$. г) $\rho = \dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$.

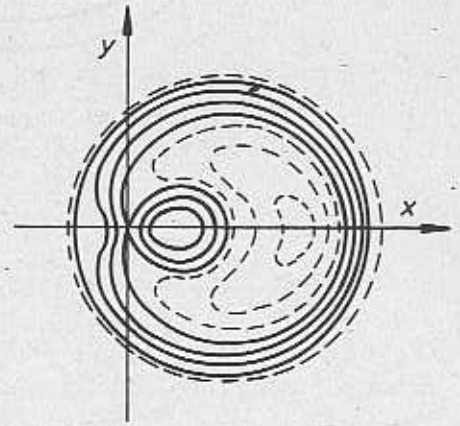
д) $(\rho\cos\theta - 1)^2 - d^2\cos^2\theta = 0$.

190. $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$, където p е параметърът, а e — ексцентритетът (за елипса, парабола, хипербола съответно $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$).

191. а) Фиг. 48. б) Фиг. 49.

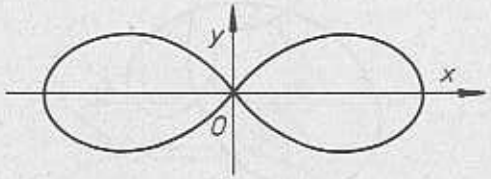


Фиг. 48. Охлюв на Паскал

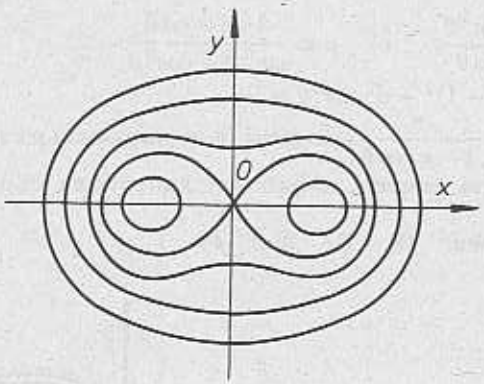


Фиг. 49. Овали на Декарт

192. а) Фиг. 50. б) Фиг. 51.



Фиг. 50. Лемниската на Я. Бернули



Фиг. 51. Овали на Касини

Осма глава

1. а) Съгласно зад. 10, гл. II е в сила равенството $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$. Ето защо $s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. Това означава, че разглежданият ред е сходящ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1$. б) $s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$, $s = \frac{1}{2}$. в) $s_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$, $s = \frac{1}{3}$. г) $s_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right)$, $s = \frac{23}{90}$. д) $s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$, $s = \frac{1}{4}$. е) $s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $s = 1$. ж) $s_n = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$, $s = \frac{1}{8}$. По същество в решенията на а) — ж) се използува техниката на разлагане на рационални функции в суми от елементарни дроби, която се разглежда подробно в §10, гл. IX. При решенията на з) — к) може да се използува зад. 31, гл. II. з) $x^2 - \sin^2 x$. и) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$. й) $\frac{1}{x} - 2\operatorname{cotg} 2x$. к) $\frac{8}{3} + 4\operatorname{cotg}^2 2x - \frac{1}{x^2}$. л) — о) Разходящи.

2. а) $s = \frac{1}{1+x}$ $(|x| < 1)$. б) $s = \frac{1}{1+x^2}$ $(|x| < 1)$.

в) $s = \frac{x}{1-5x^2}$ $\left(|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. г) $s = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(|x| < 1)$.

д) $s = \frac{1}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$.

3. а) $\frac{7}{2}$. б) 3. в) ∞. г) ∞.

4. а) От неравенството $\frac{1}{n^2} \leqq \frac{2}{n(n+1)}$, от зад. 1 а) и от принципа за сравняване на редове следва, че редът е сходящ. б) Сходящ, понеже се мажорира от реда а). в) Сходящ при $k > 1$. г) — е) Разходящи, както показва сравняването на тези редове с хармоничния ред.

5. Приложение на зад. 4. а) и б) Сходящи. в) и г) Разходящи.

6. Приложение на зад. 11, гл. IV и на зад. 4 в).

7. Докажете, че съществува естествено число n, за което

$$u_{n+k} \leqq \frac{u_n}{v_n} v_{n+k} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

8. а) Нека $u_n = \frac{n!e^n}{n^n}$. Тогава $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$, тъй като $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ клони към e, като расте. Ето защо редът е разходящ съгласно критерия на Даламбер. б) Нека u_n означава общия член на дадения ред. Тогава отношението $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ има стойност $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$ в зависимост от четността на n. Ето защо за всяко естествено n е в сила неравенството $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{1}{2}$, което показва съгласно критерия на Даламбер, че редът е сходящ.

9. а) Сходящ. б) Разходящ. в) — ж) Сходящи. з) Разходящ. и) Сходящ.

10. а) Нека u_n е общият член на реда. Тогава $\sqrt[n]{u_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} > 1$, тъй като съгласно зад. 80, гл. IV $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ намалява с нарастването на n и очевидно клони към e. Ето защо редът е разходящ съгласно критерия на Коши. б) Сходящ.

11. а) — в) Сходящи. г) Разходящ. д) Сходящ. е) Критерият на Коши не дава възможност да се заключи дали редът е сходящ или разходящ. Разходимостта му обаче може да се установи и непосредствено с помощта на принципа за сравняване на редовете. Наистина от теоремата за крайните нараствания следва $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 = \frac{1}{n}\ln n e^{\frac{\theta}{n}\ln n} \geqq \frac{1}{n}$ $(n \geqq 2)$, където $0 < \theta < 1$, и разходимостта на разглежданя ред следва от разходимостта на хармоничния. Впрочем, след като вече е намерено, неравенството $\sqrt[n]{n} - 1 > \frac{1}{n}$ може да се докаже и по-просто, като се използуват свойствата на редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

12. Нека u_n е общият член на дадения ред. Отношението $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ е равно на p или на q в зависимост от четността на n. Ето защо от критерия на Даламбер следва, че редът е сходящ при $p < 1$ и $q < 1$, а разходящ при $p \geqq 1$ и $q \geqq 1$, но не следва нищо определено в останалите случаи. От друга страна, $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt{pq}$ при четно n и $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt{pq}\sqrt[2n]{\frac{p}{q}}$ при нечетно n. Ето защо от зад. 47, гл. IV следва $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{pq}$, поради което съгласно следствието от критерия на Коши даденият ред е сходящ при $pq < 1$ и е разходящ при $pq > 1$. Следствието от критерия на Коши не дава резултат само когато $pq = 1$. Но тогава редът е разходящ, тъй като общият член не клони към нула.

13. а) Очевидно $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$. Ето защо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, като при това $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, поради което критерият на Даламбер е неприложим. За α_n от критерия на Раабе–Дюамел намираме $\alpha_n = \frac{6n+5}{(2n+1)^2}$, откъдето $n\alpha_n = \frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2} > \frac{3}{2}$. Следователно редът е сходящ. б) В този случай $n\alpha_n = \frac{n}{2n+2} < 1$, поради което редът е разходящ.

14. а) Разходящ, понеже $n\alpha_n = \frac{n}{2n+1}$. б) Разходящ, понеже $n\alpha_n = \frac{n}{4n+2}$. в) Разходящ. г) Разходящ. Имаме

$$n\alpha_n = n\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} - 1\right).$$

Сега например по правилото на Лопитал намираме $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(e(1+x)^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{1}{2}$. д) и е) Сходящи.

16. а) От условието следва

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{1}$$

От друга страна,

$$\frac{\ln u_{n+1} - \ln u_n}{\ln(n+1) - \ln n} \tag{2}$$

$$= \frac{\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = -\frac{\ln(1+\alpha_n)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = -n\alpha_n \frac{1+\frac{\theta_n}{n}}{1+\theta_n\alpha_n} \qquad (0<\theta_n<1)$$

съгласно дефиницията на α_n и обобщената теорема за крайните нараствания. От (1) следва, че дробта в лявата страна на (2) клони към $-\alpha$, когато n расте неограничено. Сега твърдението следва от теоремата на Шолц (зад. 142, гл. IV). б) Очевидно следствие от а). По същество твърдението б) показва, че сходимостта или разходимостта на един ред с положителни членове може да се установи с помощта на критерия на Раабе-Дюамел, когато същото може да се извърши с помощта на принципа за сравняване на редове, като за еталон служи някой от редовете на зад. 15.

17. Очевидно е достатъчно да се разгледат само случаите: 1) $\xi=\eta=1$ и 2) ξ — произволно, $\eta=0$, тъй като общият случай се свежда до последователното им прилагане. Разбира се, и в двата случая α_n клони към 0, поради което

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1. \tag{1}$$

Ще се занимаем най-напред със случая 1). Тогава

$$n\gamma_n = n\left(\frac{u_n v_n}{u_{n+1}v_{n+1}}-1\right) = n\alpha_n + n\beta_n\frac{u_n}{u_{n+1}} \tag{2}$$

и твърдението следва от (1). В случая 2) пък имаме

$$n\gamma_n = n\left(\frac{u_n^\xi}{u_{n+1}^\xi}-1\right) = n\alpha_n\frac{\Delta_n^\xi-1}{\Delta_n-1} = n\alpha_n\xi\Gamma_n^{\xi-1}, \tag{3}$$

където $\Delta_n=\frac{u_n}{u_{n+1}}$, Γ_n е число между 1 и Δ_n, чието съществуване е осигурено от теоремата за крайните нараствания. Сега твърдението следва от (1). Като пример да се върнем на зад. 14 е). При нея редът се получава от редовете г) и д) на същата задача с $\xi=-1$ и $\eta=1$. Тъй като за първия от тях е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n=\frac{1}{2}$, а за втория $\lim\limits_{n\to\infty} n\beta_n=\pi$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n\gamma_n=\pi-\frac{1}{2}>1$, поради което въпросният ред е сходящ.

Зад. 17 позволява да се развие „логаритмична идеология“ във връзка с критерия на Раабе–Дюамел: границата $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n$ може в известен смисъл да се схваща като логаритъм на съответния ред.

18. Сравнете дадените редове с подходящи редове от зад. 15. а) Разходящ. б) и в) Сходящи. г) Сходящ. Сравнете тези резултати с резултатите в зад. 5.

19. Сравнете със зад. 6.

20. а) По правилото на Лопитал намираме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\frac{1}{6}$. Сега сравнете със зад. 15. Разглежданият ред е сходящ при $\alpha>\frac{1}{2}$. б) $\alpha>\frac{1}{2}$. в) $\alpha>1$. г) $\alpha>1$. д) $\alpha>1$. Използвайте решението на зад. 14 г).

21. а) Редът има смисъл при $\alpha\geqq 0$, като при $\alpha=0$ е тривиално сходящ. Ето защо ще се занимаем само със случая $\alpha>0$. Нека най-напред $0<\alpha<1$. Ще покажем, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

$$\frac{\alpha^{\sqrt{n}}}{n^\beta}<\frac{1}{n^2}. \tag{1}$$

След логаритмуване (1) преминава в еквивалентното му неравенство $\sqrt{n}\ln\alpha<(\beta-2)\ln n$. Тъй като $\ln\alpha<0$, последното неравенство е изпълнено за всяко β при всички достатъчно големи n съгласно зад. 45 б), гл. V. С това (1) е доказано. От принципа за сравняване на редове и зад. 15 сега следва, че при $0<\alpha<1$ даденият ред е сходящ за всяко β. Когато $\alpha=1$, разглежданият ред преминава в реда от зад. 15 и следователно е сходящ при $\beta>1$. При $\alpha>1$ чрез сравняване с хармоничния ред се установява разходимостта на дадения ред за всяко β. б) Сходящ за всяко β при $\alpha>0$, сходящ за всяко $\beta>1$ при $\alpha\leqq 0$. в) Тривиално сходящ за всяко β при $\alpha=0$. За $\alpha>0$ редът е сходящ при $\beta-\ln\alpha>1$. г) При $\alpha>0$ сходящ за $\alpha\beta>1$; при $\alpha=0$ сходящ за $\beta<-1$; при $\alpha<0$ сходящ за всяко $\beta<0$.

22. а) Сходящ при $\alpha>1$. б) Сходящ при $\alpha>1$ и при $\alpha=1$, $\beta>1$. в) Сходящ при $\alpha>1$, при $\alpha=1$, $\beta>1$ и при $\alpha=\beta=1$, $\gamma>1$. Това са първите три реда от т. нар. *логаритмична скала на редовете.*

23. Имитация на доказателството на теоремата на Коши.

24. а) Нека $\varepsilon>0$. От общото условие на Коши за сходимост на редове следва, че съществува такова естествено число N, че от $n>N$ да следва $u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots+u_n<\frac{\varepsilon}{2}$. Оттук поради

монотонността на редицата $u_1, u_2, \ldots$ следва $(n-N)u_n < \frac{\varepsilon}{2}$, или

(1) $$nu_n < \frac{\varepsilon n}{2(n-N)}.$$

Нека сега $n > 2N$. Тогава от (1) следва $nu_n < \varepsilon \frac{n}{2\frac{n}{2}} = \varepsilon$, с което твърдението е доказано.

25. а) Установете, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu u_\nu - c_{\nu+1}u_{\nu+1})$ е с положителни членове и че n-тата му парциална сума е $c_1u_1 - c_{n+1}u_{n+1}$. Оттук заключете, че редицата от парциалните суми на реда е ограничена, поради което той е сходящ. След това сравнете реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ с реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta}(c_nu_n - c_{n+1}u_{n+1})$, като си послужите с даденото неравенство. б) От даденото неравенство извлечете неравенството $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$, след което приложете зад. 7. в) За критерия на Даламбер положете $c_n = 1$, а за критерия на Раабе-Люамел $c_n = n$.

26. Най-напред ще установим, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{A_\nu}$ е разходящ. За произволни естествени числа m и n са в сила неравенствата

(1) $$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{m+\nu}}{A_{m+\nu}} > \frac{1}{A_{m+n}}\sum_{\nu=1}^{n}a_{m+\nu} = 1 - \frac{A_m}{A_{m+n}}.$$

Тъй като по условие $\lim_{n\to\infty} A_{m+n} = \infty$, от (1) следва, че при всяко m за всички достатъчно големи n ще бъде в сила неравенството

(2) $$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{m+\nu}}{A_{m+\nu}} > \frac{1}{2},$$

откъдето веднага следва разходимостта на горния ред. Като се тръгне от реда $\sum_{\nu=1}^{\infty}1$, като частен случай от това твърдение се получава, че хармоничният ред е разходящ. Впрочем самото доказателство на твърдението може да се схваща като обобщение

на стандартното доказателство за разходимостта на хармоничния ред. Сходимостта на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{A_\nu^\alpha}$ при $\alpha > 1$ може да се докаже, като се приложи критерият на Кумер с $c_n = \frac{A_n}{a_n}$ и $\delta = \alpha - 1$.

27. а) Нека най-напред за някое $\beta > 1$ е изпълнено неравенството $(n\alpha_n - 1)\ln n \geqq \beta$ за всички n от някое място нататък. От дефиницията на α_n следва, че тогава

(1) $$n\ln n\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\ln n \geqq \beta.$$

Ето защо от теоремата за крайните нараствания имаме

(2) $$n\ln n\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \geqq \beta - (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \beta - \frac{n+1}{n}\frac{1}{1+\frac{\theta_n}{n}} > \frac{\beta-1}{2} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

Следователно редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ е сходящ съгласно критерия на Кумер с $c_n = n\ln n$ и $\delta = \frac{\beta-1}{2}$. Нека сега неравенството $(n\alpha_n - 1)\ln n \leqq 1$ е изпълнено за всички n от някое място нататък. Аналогично на (2) се заключава, че

(3) $$n\ln n\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \leqq 1 - (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 - \frac{n+1}{n}\frac{1}{1+\frac{\theta_n}{n}} < 0 \quad (0 < \theta_n < 1),$$

и редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu$ е разходящ съгласно критерия на Кумер и зад. 22 б) с $\alpha = \beta = 1$.

28. а) Очевидно $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}$. Ето защо от непрекъснатостта на f при $x = 0$ и критерия на Даламбер следва, че редът е сходящ при $f(0) > 1$ и разходящ при $f(0) < 1$. При $f(0) = 1$ ще си послужим с критерия на Раабе-Люамел. Тогава

$\alpha_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) - 1 = f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f(0)$, откъдето

$$(1) \qquad n\alpha_n = \frac{n}{n+1} f'\left(\frac{\theta_n}{n+1}\right) \quad (0 < \theta_n < 1)$$

съгласно теоремата за крайните нараствания. От (1), от непрекъснатостта на f' при $x = 0$ и от критерия на Раабе-Дюамел следва, че при $f(0) = 1$ редът е сходящ, когато $f'(0) > 1$, и разходящ, когато $f'(0) < 1$. Ето защо остана да разгледаме само случая $f(0) = f'(0) = 1$. Сега от формулата на Тейлър следва $n\alpha_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+1)^2} f''\left(\frac{\theta_n}{n+1}\right)$ $(0 < \theta_n < 1)$. Ето защо $(n\alpha_n - 1)\ln n = \frac{n \ln n}{2(n+1)^2} f''\left(\frac{\theta_n}{n+1}\right) - \frac{\ln n}{n+1}$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} (n\alpha_n - 1)\ln n = 0$ и редът е разходящ съгласно критерия на Бертран. **б)** Приложение на а) или пък на критериите на Даламбер, Раабе-Дюамел и Бертран.

29. Разходящ.

30. **г)** Да допуснем, че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е разходящ. Тогава редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{v_\nu^{\frac{1}{\beta}}}$, където $v_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu$, би бил сходящ съгласно зад. 26. Ето защо редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^\alpha \left(\frac{u_\nu}{v_\nu^{\frac{1}{\beta}}}\right)^\beta = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{v_\nu}$ би бил сходящ съгласно условието на задачата, което противоречи на зад. 26.

31. За да установите единствеността, използвайте неравенствата

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} < \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\nu-1}{\nu!} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-1)!} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = \frac{1}{n!}$$

при $0 \leqq c_\nu \leqq \nu - 1$, като само краен брой от тях не са строги. За да установите съществуването, дефинирайте индуктивно величините a_n $(n \in \mathbf{N})$, като положите $a_1 = [x]$ и $a_{n+1} = \left[(n+1)!\left(x - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{\nu!}\right)\right]$, където $[c]$ означава най-голямото измежду целите числа, които не надминават c.

33. Сходящи.

34. **а)** От формулата на Тейлър следва $\frac{P(n+1)}{P(n)} = 1 + \frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{p} \frac{nP^{(\nu)}(n)}{\nu! P(n)}$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{p} \frac{nP^{(\nu)}(n)}{\nu! P(n)} = p$, твърдението следва от зад. 52, гл. V. **б)** Приложете критерия на Лайбниц, като използвате а) и зад. 47, гл. IV.

35. Приложете критерия на Лайбниц; сравнете със зад. 19 и зад. 109 б), гл. VII.

37. **а)** Без ограничение на общността може да се предположи, че редицата $u_1, u_2, \ldots$ е намаляваща. Нека $u_0 = \alpha_0 = 0$ и $A_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu$. Тъй като по условие редицата $A_1, A_2, \ldots$ е ограничена, то

$$(1) \qquad \lim_{p\to\infty} A_p u_{p+1} = 0.$$

От друга страна, редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(u_\nu - u_{\nu+1})$ е сходящ. Наистина нека ε е произволно положително число, а числото N е избрано така, че да е в сила неравенството $u_n < \varepsilon$ винаги когато $n > N$. Тогава при $n > N$ ще бъде в сила

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} A_\nu(u_\nu - u_{\nu+1})\right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} |A_\nu|(u_\nu - u_{\nu+1})$$

$$\leqq A \sum_{\nu=n+1}^{n+p} (u_\nu - u_{\nu+1}) = A(u_{n+1} - u_{n+p}) < \varepsilon A \quad (p \in \mathbf{N}),$$

където A е горна граница на ограничената по условие редица $|A_1|, |A_2|, \ldots$ Сега сходимостта на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(u_\nu - u_{\nu+1})$ следва от общото условие на Коши и твърдението на задачата се получава от (1) и от зад. 36 б).

38. **а)** и **в)** Сходящи за всяко x. **б)** и **г)** Сходящи за всяко x, различно от $2k\pi$ $(k \in \mathbf{I})$. Ще докажем твърдението само за **г)**. За тази цел полагаме $\alpha_\nu = \cos \nu x$ и $u_\nu = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu$. Нека $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbf{I})$. От периодичността на косинуса следва, че без ограничение на общността може да се предполага $0 < x < 2\pi$.

Тогава $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ и от зад. 25 б), гл. II следва ограничеността на сумите $\sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu x$. От друга страна, в зад. 14 г) с помощта на критерия на Раабе–Дюамел бе доказано, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu}$ е разходящ, като съответната граница $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n$ беше $\frac{1}{2}$. Сега от зад. 16 в) следва, че редицата $u_1, u_2, \ldots$ намалява от известно място нататък и клони към нула. Ето защо условията на критерия на Дирихле са изпълнени. При $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbf{I})$ редът се редуцира до реда от зад. 14 г) и следователно е разходящ.

40. Нека $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Тогава редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu(u_\nu - u)$ е сходящ съгласно критерия на Дирихле. От друга страна, редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu u$ очевидно е сходящ; тогава интересуващият ни ред е сходящ като сума на два сходящи реда.

41. **б)** Групирайте членовете на реда по два и за получения алтернативен ред докажете сходимост с помощта на критерия на Лайбниц. След това докажете, че и даденият ред е сходящ, като използвате равенството $\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n} = 0$. **в)** Докажете например, че функцията $\frac{(x+1)^x}{x^{x+\alpha}}$ при $\alpha > 0$ намалява за всички достатъчно големи x и клони към нула, когато x расте неограничено.

г) Най-напред да отбележим, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сигурно сходящ, ако съществуват редица $\nu_1, \nu_2, \ldots$ от естествени числа с $1 = \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k < \ldots$ и редица от положителни реални числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ с $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, за които редът

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\lambda=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} u_\lambda \right|$$

е сходящ и са в сила неравенствата

$$(2) \qquad \left| \sum_{\lambda=\nu_k}^{l} u_\lambda \right| < \alpha_k \quad (\nu_k \leqq l \leqq \nu_{k+1}).$$

Да положим в нашия специален случай $\nu_k = (2k-1)^2$. Тогава

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} u_\lambda = -\sum_{\lambda=(2k-1)^2}^{4k^2-1} \frac{1}{\lambda} + \sum_{\lambda=4k^2}^{(2k+1)^2-1} \frac{1}{\lambda}.$$

От друга страна,

$$(4) \qquad \frac{4k-1}{4k^2} \leqq \sum_{\lambda=(2k-1)^2}^{4k^2-1} \frac{1}{\lambda} \leqq \frac{4k}{(2k-1)^2},$$

$$(5) \qquad \frac{4k}{(2k+1)^2} \leqq \sum_{\lambda=4k^2}^{(2k+1)^2-1} \frac{1}{\lambda} \leqq \frac{4k+1}{4k^2}.$$

От (3) — (5) следва $\frac{-2}{k^2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)^2} \leqq \sum_{\lambda=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} u_\lambda \leqq \frac{1}{2k^2}$. Ето защо $\left|\sum_{\lambda=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} u_\lambda\right| \leqq \frac{2}{k^2\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)^2}$, поради което редът (1) е сходящ.

Пак от (3) — (5) следва валидността на неравенствата (2) за $\alpha_k = \frac{4k}{(2k-1)^2}$.

43. **а)** и **б)** Сходящи, но не абсолютно. **в)** Разходящ. **г)** Сходящ за $\alpha > 0$, абсолютно сходящ за $\alpha > 1$.

44. **а)** Сходящ, но не абсолютно за $\alpha = 1$. **б)** Абсолютно сходящ за $\alpha > 1$, сходящ за $\alpha = 1$, но не абсолютно. Сходимостта за $\alpha > 1$ следва от зад. 15. Разходимостта при $0 < \alpha < 1$ може да се установи, като членовете на реда се групират последователно по тройки и се докаже, че полученият ред е разходящ. За целта се използва оценката

$$(1) \qquad \frac{1}{(4n-1)^\alpha} + \frac{1}{(4n-3)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} = \left(\frac{1}{(4n-1)^\alpha} - \frac{1}{(4n)^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{(4n-3)^\alpha} - \frac{1}{(4n)^\alpha}\right) + \frac{2-2^\alpha}{4^\alpha}\frac{1}{n^\alpha} > \frac{2-2^\alpha}{4^\alpha}\frac{1}{n^\alpha}$$

и отново зад. 15. При $\alpha = 1$ равенството в (1) добива вида

$$\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n(4n-1)} + \frac{3}{4n(4n-3)},$$

откъдето следва сходимостта.

45. а) Модификация на доказателството на критерия на Дирихле — зад. 37 а), като сходимостта на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(u_\nu - u_{\nu+1})$ в този случай се установява по следния начин. За произволно $\varepsilon > 0$ се избира толкова голямо N, че да е в сила неравенството $\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |u_\nu - u_{\nu+1}| < \varepsilon$ винаги когато $n > N$ и $p \in \mathbf{N}$. Сега вместо оценката в решението на зад. 37 а) се използва неравенството

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} A_\nu(u_\nu - u_{\nu+1})\right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} |A_\nu||u_\nu - u_{\nu+1}|.$$

46. а) Следствие от критерия на Дедекинд, което може да се получи от този критерий по същия начин, както критерият на Абел се получава от критерия на Дирихле (зад. 40).

47. а) Когато α е неотрицателно цяло число, редът е тривиално сходящ, понеже се редуцира на крайна сума: от някое място нататък всичките му членове са нули. Нека сега α не е неотрицателно цяло число и нека $u_n = \binom{\alpha}{n}$. Тогава $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha - n}{n+1}$. Ето защо за всички достатъчно големи n ще бъде в сила $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1}$. Следователно $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1$, като $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$ при $\alpha > -1$ и $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqq 1$ при $\alpha \leqq -1$. Ето защо при $\alpha \leqq -1$ редът е разходящ съгласно критерия на Даламбер. При $\alpha > -1$ този критерий не действува. За да си послужим с критерия на Раабе-Дюамел, да положим $\frac{n-\alpha}{n+1} = \frac{1}{1+\alpha_n}$. Тогава $n\alpha_n = \frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha}$. Ето защо $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = 1 + \alpha$. Следователно разглежданият ред е сходящ, и то абсолютно при $\alpha > 0$, но не и при $\alpha < 0$. Остана да се изследва случаят $-1 < \alpha < 0$. Тъй като тогава $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n > 0$, редицата $u_1, u_2, \ldots$ клони към нула монотонно съгласно зад. 16 в). От друга страна, разглежданият ред мени алтернативно знаците на членовете си и следователно е сходящ съгласно критерия на Лайбниц. В резюме: редът е разходящ при $\alpha \leqq -1$; сходящ е, но не абсолютно при $-1 < \alpha < 0$; абсолютно сходящ е при $\alpha \geqq 0$.

б) От $\nu = 1$ нататък редът не мени знаците на членовете си. Като се използват резултатите от а), се заключава, че редът е абсолютно сходящ при $\alpha \geqq 0$, а при $\alpha < 0$ е разходящ. в) Разходящ при $\alpha \leqq 0$; сходящ, но не абсолютно при $0 < \alpha \leqq 2$; абсолютно сходящ при $\alpha > 2$. г) Абсолютно сходящ при $\alpha \neq 0$ съгласно критерия на Коши, разходящ при $\alpha = 0$. д) При $\alpha = k\pi$ ($k \in \mathbf{I}$) всички членове на реда са нули, а при $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{I}$) общият член на реда не клони към нула съгласно зад. 152, гл. IV. е) Разходящ при $|\alpha| = 1$, абсолютно сходящ при $|\alpha| \neq 1$. ж) Абсолютно сходящ при $-2 < \alpha < 2$, разходящ при $|\alpha| \geqq 2$.

50. б) Нека $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu b_\nu$ са редове от лайбницов тип. Тогава редовете $\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_{2\nu} - a_{2\nu+1})$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty}(b_{2\nu} - b_{2\nu+1})$ имат неотрицателни членове и са сходящи. Приложете към тези редове теоремата на Коши за умножение на редове. в) От б) следва, че е достатъчно да се изследва поведението на n-тия член на произведението, т. е. на

$$c_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(n+1-\nu)^\alpha \nu^\beta}, \tag{1}$$

когато n расте неограничено. При $\alpha + \beta \leqq 1$ трябва да се докаже, че c_n не клони към 0. Нека $d_n = \frac{1}{(n+1-k)^\alpha k^\beta}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ е най-малкото от събираемите в дясната страна на (1). Тогава

$$c_n \geqq nd_n = \frac{n}{(n+1)^{\alpha+\beta}} \frac{1}{\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{k}{n+1}\right)^\beta} \geqq \frac{n}{(n+1)^{\alpha+\beta}} \tag{2}$$

и c_n не клони към 0 поради $\alpha + \beta \leqq 1$. При $\alpha + \beta > 1$ трябва да се докаже, че c_n клони към 0. Аналогично на (2) за c_n се получава

$$c_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta-1}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^\beta (n+1)}.$$

Поради $\alpha + \beta > 1$ е достатъчно да се покаже, че сумите

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)^{-\alpha} \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^{-\beta} \tag{3}$$

са ограничени отгоре. За да докажем, че това е действително така, при $\alpha < 1$ и $\beta < 1$ ще разгледаме функциите $\varphi : [0, 1] \to \mathbf{R}$ и $\psi : [0, 1] \to \mathbf{R}$, дефинирани с

$$(4) \qquad \varphi(x) = \frac{(1-x)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, \quad \psi(x) = \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Очевидно $\varphi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \varphi(x) = \frac{1}{n+1}\varphi'\left(x + \frac{\theta}{n+1}\right)$ $= \frac{1}{n+1}\left(1 - x - \frac{\theta}{n+1}\right)^{-\alpha} \geqq \frac{(1-x)^{-\alpha}}{n+1}$ $(0 < \theta < 1)$, което при $x = \frac{\nu}{n+1}$ дава

$$(5) \qquad \varphi\left(\frac{\nu+1}{n+1}\right) - \varphi\left(\frac{\nu}{n+1}\right) \geqq \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)^{-\alpha}$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Аналогично

$$(6) \qquad \psi\left(\frac{\nu}{n+1}\right) - \psi\left(\frac{\nu-1}{n+1}\right) \geqq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\nu}{n+1}\right)^{-\beta}$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. От (3) — (6) следва $\sigma_n = \sum\limits_{\frac{\nu}{n+1} \leqq \frac{1}{2}} + \sum\limits_{\frac{\nu}{n+1} > \frac{1}{2}}$

$$\leqq 2^\alpha \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\nu}{n+1}\right)^{-\beta} + 2^\beta \sum_{\nu=\left[\frac{n+3}{2}\right]}^{n} \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)^{-\alpha}$$

$$\leqq 2^\alpha \left(\psi\left(\frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{n+1}\right) - \psi(0)\right) + 2^\beta \left(\varphi(1) - \varphi\left(\frac{\left[\frac{n+3}{2}\right]}{n+1}\right)\right)$$

$\leqq \frac{2^\alpha}{1-\beta} + \frac{2^\beta}{1-\alpha}$, откъдето следва твърдението. Нека сега $\alpha \geqq 1$ или $\beta \geqq 1$. Ясно е, че съществуват числа a и b, за които $0 < a < 1$, $a \leqq \alpha$, $0 < b < 1$, $b \leqq \beta$ и $a + b > 1$. От доказаното вече следва, че произведението на редовете $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^a}$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^b}$ е сходящ ред. Ето защо общият му член клони към 0. Тъй като абсолютната стойност на този общ член очевидно мажорира (1) поради $a \leqq \alpha$ и $b \leqq \beta$, то c_n също клони към нула.

52. а) Установете с индукция спрямо n, че $2n$-тата парциална сума на разглеждания ред е равна на $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}$, и след това приложете зад. 84 а), гл. IV.

54. Най-напред да отбележим, че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сигурно сходящ, ако е сходящ редът $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$, където $v_k = \sum\limits_{\lambda=k(p+q)+1}^{(k+1)(p+q)} u_\lambda$ $(k+1 \in \mathbf{N})$, и ако $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, като сумите на двата реда са равни. Ако h_n е n-тата парциална сума на хармоничния ред, не е трудно да се съобрази, че ако $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е редът, получен по описаната в условието на задачата процедура, то

$$(1) \qquad \sum_{\sigma=0}^{k-1} v_\sigma = h_{2kp} - \frac{1}{2}h_{kp} - \frac{1}{2}h_{kq} \quad (k \in \mathbf{N}).$$

От зад. 83, гл. IV следва

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty}(h_n - \ln n) = C,$$

където C е константата на Ойлер. От (1) и (2) следва

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\sigma=0}^{k-1} v_\sigma = \lim_{k\to\infty}\left(\ln 2kp - \frac{1}{2}\ln kp - \frac{1}{2}\ln kq\right) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

56. а) Нека например редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ е сходящ и $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$. Ясно е, че $l > 0$. Ето защо за всички достатъчно големи n ще имаме $\frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n}$ или, което е същото, $0 < v_n < \frac{2}{l}u_n$. Сега от принципа за сравняване на редове следва, че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ е също сходящ. Аналогично се доказва, че от сходимостта на втория ред следва сходимостта на първия. б) Положете например $u_\nu = (-1)^{\nu-1}\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ и $v_\nu = u_\nu$ при четно ν, $v_\nu = u_\nu - \frac{1}{\sqrt{\nu}}$ при нечетно ν, за да получите сходящ ред $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{1 + \nu u_\nu}$.

57. б) Положете например $u_n = \frac{1}{n^2}$, когато n не е точен квадрат, и $u_n = 1$, когато n е точен квадрат.

58. а) Директно следствие от критерия на Абел.

59. б) Един такъв ред се получава например, като се изпуснат скобите в реда $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{\nu\sqrt[3]{\nu}}+\frac{1}{\nu\sqrt[3]{\nu}}+\cdots+\frac{1}{\nu\sqrt[3]{\nu}}}_{\nu\text{ пъти}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}\right)$.

61. а) и б) Разходящи със стойности съответно ∞ и 0. в) $\frac{1}{2}$. г) $\frac{1}{3}$. д) 1. е) $\frac{2}{3}$. ж) 2. з) $\frac{4}{3}$. и) $\frac{2}{\pi}$, вж. зад. 21 б), гл. V. й) e^C, където C е константата на Ойлер, вж. зад. 83, гл. IV.

62. а) $\frac{1}{1-\alpha}$ при $|\alpha| < 1$, вж. зад. 3 б), гл. II. б) $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha \neq 0$ и 1 при $\alpha = 0$, вж. зад. 24 а), гл. V.

66. Съгласно зад. 65 трябва да се докаже, че безкрайните редове $\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_\nu)$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ са едновременно сходящи или разходящи. Но $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ и твърдението следва от зад. 56 а), тъй като разглежданите два реда от някой номер нататък не менят знаците на членовете си.

68. Зад. 65 и равенството $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^2}$ $(0 < \theta < 1)$.

69. От неравенството $\ln(1+x) \leqq x$ $(x > -1)$, което следва например от съображения за монотонност и от дивергентността на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, следва $\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln(1+a_\nu) = -\infty$. Поради това интересуващото ни безкрайно произведение дивергира към нула.

70. От неравенството $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^2} \leqq x - \frac{x^2}{8}$ $(0 < \theta < 1)$ $(|x| < 1)$ се получава $\sum_{\nu=1}^{n}\ln(1+a_\nu) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \frac{1}{8}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2$, откъдето следва твърдението, както в зад. 69.

71. Приложете зад. 66. а) Разходящо. б) и в) Сходящи.

72. Зад. 6 и 66. **73.** Зад. 19 и 66.

75. а) и б) $\alpha > 1$. в) Всички α. г) Всички $\alpha \neq \pm n$ $(n \in \mathbf{N})$.

76. а) $|\alpha| < 1$. б) $\alpha \neq -\sqrt[2n-1]{(2n-1)!}$ $(n \in \mathbf{N})$.

77. $\alpha > \frac{1}{2}$ съгласно зад. 15, 43, 68 и 70; при $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ произведението дивергира към 0.

78. От зад. 98 а) и в), гл. VII следват неравенствата

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{\cos x - 1}{x^2} \leqq -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} \leqq -\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{96} < 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Ето защо редовете $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\cos x_\nu - 1)$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^2$ са едновременно сходящи или разходящи. Сега твърдението за $\prod_{\nu=1}^{\infty}\cos x_\nu$ следва от зад. 66. За второто произведение доказателството е аналогично.

79. Очевидно даденото безкрайно произведение има смисъл, когато α, β и γ не са отрицателни цели числа. От

$$\frac{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)}{(1+\nu)(\gamma+\nu)} = 1 + \frac{(\alpha+\beta-\gamma-1)\nu + (\alpha\beta-\gamma)}{\nu^2+(1+\gamma)\nu+\gamma}$$

следва, че въпросното безкрайно произведение е сходящо точно когато е сходящ безкрайният ред $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta-\gamma-1)\nu+(\alpha\beta-\gamma)}{\nu^2+(1+\gamma)\nu+\gamma}$. От зад. 6 сега следва, че търсените стойности на α, β и γ са онези, за които $\alpha+\beta-\gamma-1 = 0$.

80. а) Когато някое от числата α, β и γ е неположително цяло, редът се редуцира на крайна сума или не е дефиниран, затова нека никое от тези числа не е такова. Ако u_n означава n-тия член на реда, то $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$. Ето защо за всички достатъчно големи n ще имаме $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(1+\gamma)n+\gamma}$. Следователно $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1$, като за всички достатъчно големи n са в сила неравенствата: $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$ при $\alpha+\beta < 1+\gamma$ и $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1$ при $\alpha+\beta > 1+\gamma$. Ето защо от критерия на Даламбер следва, че разглежданият ред е разходящ при $\alpha+\beta > 1+\gamma$. Ще се убедим, че той е разходящ и при $\alpha+\beta = 1+\gamma$. Наистина абсолютната

стойност на общия член на този ред съвпада с $(n-1)$-вото парциално произведение на безкрайното произведение от зад. 79, което е сходящо точно когато $\alpha+\beta-\gamma-1=0$. Поради това общият член на разглеждания ред не клони към нула. Остана да разгледаме случая $\alpha+\beta<1+\gamma$. Ще си послужим с критерия на Раабе-Дюамел. За реда от абсолютните стойности имаме

$$n\alpha_n = n\frac{(1+\gamma-\alpha-\beta)n+(\gamma-\alpha\beta)}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}.$$

Следователно

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = 1+\gamma-\alpha-\beta. \tag{1}$$

Ето защо разглежданият ред е абсолютно сходящ при $\gamma>\alpha+\beta$. Остана неразгледан случаят $\alpha+\beta-1<\gamma\leqq\alpha+\beta$. От критерия на Гаус (зад. 28) следва, че редът от абсолютните стойности е сходящ в този случай; следователно интересуващият ни ред не е абсолютно сходящ. От (1) поради $\alpha+\beta-1<\gamma$ и от зад. 16 в) следва, че редът е от лайбницов тип. Ето защо той е сходящ. В резюме: редът е разходящ при $\gamma\leqq\alpha+\beta-1$; сходящ е, но не абсолютно при $\alpha+\beta-1<\gamma\leqq\alpha+\beta$; абсолютно сходящ е при $\alpha+\beta<\gamma$. **б)** Тъй като от някой номер нататък знаците на членовете на реда не се менят, той е сходящ точно когато е абсолютно сходящ редът от а), т. е. при $\gamma>\alpha+\beta$.

81. Нека редът е сходящ за нецялото число α_0. Тъй като членовете му се получават от членовете на сходящия ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\alpha_0^2-1^2)(\alpha_0^2-2^2)\dots(\alpha_0^2-\nu^2) \tag{1}$$

след умножаване с множителите

$$\frac{(\alpha^2-1^2)(\alpha^2-2^2)\dots(\alpha^2-\nu^2)}{(\alpha_0^2-1^2)(\alpha_0^2-2^2)\dots(\alpha_0^2-\nu^2)}, \tag{2}$$

които се изменят монотонно при достатъчно голямо ν, от критерия на Абел (зад. 40) следва, че твърдението ще бъде доказано, ако се установи, че множителите (2) са ограничени. За тази цел е най-удобно при нецяло α да се докаже, че безкрайното произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha^2-\nu^2}{\alpha_0^2-\nu^2}$ е сходящо, което следва от зад. 72.

83. **а)** Това е пример за редица от непрекъснати функции с прекъсната граница: $\mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x|<1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |x|=1, \\ 1 & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

б) $\mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$.

в) $D: \left[\frac{\pi}{6}+2\nu\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2\nu\pi\right]\bigcup\left(\frac{7\pi}{6}+2\nu\pi,\ \frac{11\pi}{6}+2\nu\pi\right)$ $(\nu\in\mathbf{I})$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x\in D,\ x\neq\frac{\pi}{6}+2\nu\pi,\ x\neq\frac{5\pi}{6}+2\nu\pi, \\ 1 & \text{при } x=\frac{\pi}{6}+2\nu\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+2\nu\pi \quad (\nu\in\mathbf{I}). \end{cases}$$

84. **а)** $\mathbf{R}$. **б)** $(-1,1)$. **в)** $x=0$.

85. **а)** $x=0$. **б)** Сходящо за всяко x, различно от $(-1)^{\nu-1}\nu(4\mu+1)\frac{\pi}{2}$ $(\nu\in\mathbf{N},\ \mu\in\mathbf{I})$.

86. **а)** $r=1$, разходящ при $|x|=1$. **б)** $r=1$, разходящ при $x=-1$, сходящ при $x=1$. **в)** $r=1$, сходящ при $|x|=1$. **г)** — **з)** $r=\infty$. **и)** $r=\infty$ при неотрицателно цяло α, а в останалите случаи $r=1$, като редът е сходящ при $x=-1$ за $\alpha\geqq 0$ и разходящ за $\alpha<0$; сходящ е при $x=1$ за $\alpha>-1$ и е разходящ за $\alpha\leqq -1$, вж. зад. 47 а) и б).

87. **а)** $r=1$; при $|x|=1$ редът е разходящ за $\alpha\leqq 0$; за $0<\alpha\leqq 1$ редът е сходящ при $x=-1$ и разходящ при $x=1$; за $\alpha>1$ редът е сходящ при $|x|=1$, вж. зад. 15 и 43 г). **б)** $r=4$ и редът е разходящ в краищата на интервала на сходимост. **в)** $r=\frac{1}{e}$; разходящ. **г)** $r=2^\alpha$; при $x=-2^\alpha$ редът е сходящ за $\alpha>0$ и разходящ при $\alpha\leqq 0$; при $x=2^\alpha$ редът е сходящ за $\alpha>2$ и разходящ за $\alpha\leqq 2$. **д)** $r=1$; при $x=1$ редът е разходящ, а при $x=-1$ е сходящ, вж. зад. 14 г). **е)** $r=1$; сходящ. **ж)** Също, вж. зад. 41 г). **з)** Тъй като числото π е ирационално, то $\sin\nu\neq 0$ $(\nu\in\mathbf{N})$, поради което редът има смисъл; $r=0$. Приложете зад. 151 и 152, гл. IV. **и)** Редът не е дефиниран, когато γ е неположително цяло число. Когато α или β е неположително цяло число, редът се редуцира на полином и следователно $r=\infty$. Нека никой от тези случаи не е налице. Тогава $r=1$, вж. зад. 80, която съдържа сведения за поведението на реда в границите на интервала на сходимост.

88. Ще дадем решение само в най-типичния случай, когато $0<\rho<\infty$, където $\rho=\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$. Нека $0<|x|<\frac{1}{\rho}$. Тогава $\rho<\frac{1}{|x|}$. Ето защо съществува число q, за което $0<q<1$ и $\rho<\frac{q}{|x|}$. От последното неравенство и дефиницията на ρ следва, че за

всички n от някое място нататък ще бъде в сила неравенството $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{q}{|x|}$. Ето защо $|a_n x^n| < q^n$ и сходимостта на разглежданния ред следва от принципа за сравняване на редове. Нека сега $|x| > \frac{1}{\rho}$. Тогава $\frac{1}{|x|} < \rho$ и от дефиницията на ρ следва, че за безбройно много n ще бъде в сила неравенството $\frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{|a_n|}$. Ето защо $1 < \sqrt[n]{|a_n x^n|}$ и общият член на реда не клони към 0. За дефиницията и някои свойства на limsup вж. зад. 130 — 134 и 139, 140, гл. IV.

89. Приложете формулата на Коши–Адамар и зад. 47 и 132, гл. IV.

90. Приложете правилото на Коши за умножение на редове.

91. Използувайте индукция спрямо n.

94. Изброените редици са сходящи в посочените области. б) и д) Равномерно сходящи. За б) това следва от очевидното неравенство $|f_n(x)| \leqq \theta^n$, от $\lim\limits_{n\to\infty} \theta^n = 0$ и от независимостта на θ от x. За д) докажете и използувайте неравенството $0 \leqq f_n(x) \leqq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Останалите редици не са равномерно сходящи. За а) и е) това следва от $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geqq \frac{1}{e}$, а за в) и г) — от $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

96. Приложете зад. 95 и общото условие на Коши за сходимост на числови редове.

97. а) Равномерно сходящ поради $\left|\frac{\sin \nu x}{\nu^2}\right| \leqq \frac{1}{\nu^2}$ и зад. 15 и 96. б) Да предположим, ще редът е равномерно сходящ. Тогава за всички достатъчно големи n и за всички естествени числа p ще бъде в сила неравенството

$$(1) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{1}{\nu^x} < 1$$

съгласно общото условие на Коши за равномерна сходимост (зад. 95). Ако в (1) извършим граничен преход при x, клонящо към 1, ще получим $\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{1}{\nu} \leqq 1$ за всички естествени p, което противоречи на разходимостта на хармоничния ред. в) Равномерно сходящ поради $\frac{(\ln \nu)^\alpha}{\nu^x} \leqq \frac{(\ln \nu)^\alpha}{\nu^\xi}$ и поради сходимостта на реда $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{(\ln \nu)^\alpha}{\nu^\xi}$ $(\xi > 1)$. г) Равномерно сходящ поради аналогични причини.

98. Да допуснем противното. Тогава ще съществува такова положително число ε_0, че за всяко естествено число N ще има число $n > N$ и x_n от $[a, b]$, за които $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqq \varepsilon_0$. Тъй като редицата $f_1(x), f_2(x), \ldots$ е растяща за всяко x от $[a, b]$, последното неравенство може да се запише и така: $f_n(x_n) \leqq f(x_n) - \varepsilon_0$. Следователно ще съществуват редица $n_1, n_2, \ldots$ от растящи естествени числа и редица от точки $\xi_1, \xi_2, \ldots$ от интервала $[a, b]$, за които

$$(1) \qquad f_{n_k}(\xi_k) \leqq f(\xi_k) - \varepsilon_0.$$

Тъй като интервалът $[a, b]$ е ограничен и затворен, чрез преминаване към подредици без ограничение на общността може да се предположи, че редицата $\xi_1, \xi_2, \ldots$ е сходяща. Нека

$$(2) \qquad \lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi.$$

Тогава $\xi \in [a, b]$. Нека сега n е произволно естествено число. Тъй като за всички k от някое място нататък е в сила $n < n_k$, от монотонността на дадената редица от функции следва $f_n(\xi_k) \leqq f_{n_k}(\xi_k)$, което заедно с (1) дава

$$(3) \qquad f_n(\xi_k) \leqq f(\xi_k) - \varepsilon.$$

От (2), (3) и непрекъснатостта на f_n и f следва $f_n(\xi) \leqq f(\xi) - \varepsilon_0$, откъдето с граничен преход при n, клонящо към ∞, се получава противоречието $f(\xi) \leqq f(\xi) - \varepsilon_0$.

99 и **100.** Използувайте преобразуването на Абел (зад. 36 а)).

101. а) Редът не е равномерно сходящ, въпреки че е сходящ за всяко x от $[0, 2\pi]$. Да допуснем, че е равномерно сходящ.

Тогава за всички достатъчно големи n и за всички x от $[0, 2\pi]$ би трябвало да е в сила

$$(1) \qquad \left|\sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{\sin \nu x}{\nu}\right| < \frac{1}{2}$$

съгласно общото условие на Коши за равномерна сходимост. Но съгласно зад. 93 б), гл. VIII е в сила $\sin x \geqq \frac{2x}{\pi}$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$. Ето защо $\sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{\sin \frac{\nu\pi}{4n}}{\nu} \geqq \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ в противоречие с (1) при $x = \frac{\pi}{4n}$. **б) — г)** Равномерно сходящи съгласно критерия на Дирихле за равномерна сходимост — зад. 97 (за образец при б) вж. зад. 39).

102 и **103.** Директни следствия от критерия на Абел (зад. 100).

105. а) Приложете зад. 102. **б)** Нека функцията $\varphi : [0, 1] \to \mathbf{R}$ е дефинирана с $\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$. Тъй като последният ред е равномерно сходящ в интервала $[0, 1]$ (зад. 102) и членовете му са непрекъснати функции, сумата му φ е също непрекъсната. По-специално тя е непрекъсната при $x = 1$. Ето защо $\lim_{x\to 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = \lim_{x\to 1} \varphi(x) = \varphi(1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$. **в)** Нека $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^\nu$, $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu x^\nu$, $h(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (u_0 v_\nu + u_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_\nu v_0) x^\nu$ $(0 \leqq x \leqq 1)$. Тъй като тези три степенни реда са абсолютно сходящи при $0 \leqq x < 1$, от теоремата на Коши за умножение на редове следва

$$(1) \qquad h(x) = f(x)g(x) \quad (0 \leqq x < 1).$$

От друга страна, от зад. 100 следва, че функциите f, g и h са непрекъснати в $[0, 1]$. Ето защо от (1) с граничен преход се получава $h(1) = f(1)g(1)$, което е и търсеното равенство.

106. а) и **б)** Приложете зад. 103. **в)** Аналогично на зад. 105 б).

107. Сходимостта следва от зад. 39. Поради периодичността на синуса сумата $s(x)$ на този ред е периодична с период 2π.

Ето защо е достатъчно да се установи, че функцията $s(x)$ е прекъсната при $x = 0$ и е непрекъсната в интервала $(0, 2\pi)$. Също както в решението на зад. 101 б), се установява равномерната сходимост на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}$ във всеки от интервалите $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ при $0 < \varepsilon < \pi$. Ето защо сумата $s(x)$ е непрекъсната в интервала $(0, 2\pi)$. Прекъснатостта при $x = 0$ може да се установи по следния начин: От зад. 93 б), гл. VII следва

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2}{\pi} \frac{\nu x}{\nu} = \frac{2nx}{\pi}$$

за всяко естествено n и за всяко x, за което $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2n}$. От друга страна, от зад. 25 а), гл. II за сумата $S_k(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \sin \nu x$ се получава

$$(2) \qquad S_k(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Ето защо преобразуването на Абел (вж. зад. 36 а)) дава

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} S_\nu(x) \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) - \frac{S_n(x)}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$$

$$(3) \qquad - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x$$

$$- \frac{1}{2(n+1)} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{\sin \frac{x}{2}} \geqq \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x - 1}{2(n+1) \sin \frac{x}{2}}.$$

От (3) следва

$$(4) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu} \geqq - \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) x}{2(n+1) \sin \frac{x}{2}} \quad (0 < x < 2\pi).$$

От (4), от неравенството $\sin^2\alpha \leqq \alpha^2$ и от зад. 93 б), гл. VII се получава

$$(5)\qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu} \leqq -\frac{\pi}{8}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n+1}x > -\frac{\pi}{8}(n+1)x.$$

От (1) и (5) следва

$$(6)\qquad s(x) > \frac{2nx}{\pi} - \frac{\pi(n+1)x}{8} \quad \left(0 < x \leqq \frac{\pi}{2n}\right).$$

От (6) при $x = \frac{\pi}{2n}$ имаме

$$(7)\qquad s\left(\frac{\pi}{2n}\right) > 1 - \frac{\pi^2}{16}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ето защо $\liminf s\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geqq 1 - \frac{\pi^2}{16} > 0$, което заедно с очевидното равенство $s(0) = 0$ доказва прекъснатостта на функцията $s(x)$ в точката 0.

108. Функциите $f_n(x) = \frac{\{4^n x\}}{4^n}$ $(n+1 \in \mathbf{N})$ са очевидно непрекъснати. Освен това за всяко x е в сила $0 \leqq f_n(x) \leqq \frac{1}{4^n}$ $(n+1 \in \mathbf{N})$. Следователно разглежданият ред е равномерно сходящ съгласно критерия на Вайерщрас (зад. 96). Ето защо функцията $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{4^\nu}\{4^\nu x\}$ е непрекъсната.

За да докажем, че f не е диференцируема за никое ξ, да допуснем противното. Тогава биха съществували реално число ξ и число $\delta > 0$, за които $\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - f'(\xi)\right| < \frac{1}{2}$ при $0 < |x-\xi| < \delta$. Следователно за всяка редица $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с $\xi_n \neq \xi$ и $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi$ би съществувало такова число N, че за $n > N$ да имаме $\left|\frac{f(\xi_n)-f(\xi)}{\xi_n-\xi} - f'(\xi)\right| < \frac{1}{2}$ и $\left|\frac{f(\xi_{n+1})-f(\xi)}{\xi_{n+1}-\xi} - f'(\xi)\right| < \frac{1}{2}$. Тогава $\left|\frac{f(\xi_n)-f(\xi)}{\xi_n-\xi} - \frac{f(\xi_{n+1})-f(\xi)}{\xi_{n+1}-\xi}\right| < 1$. Ето защо, за да получим противоречие, би било достатъчно да посочим редица $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с

$\xi_n \neq \xi$ и $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi$, за която числото $\frac{f(\xi_n)-f(\xi)}{\xi_n-\xi}$ да е четно за четно n и нечетно за нечетно n; тогава за всички n бихме имали

$$\left|\frac{f(\xi_n)-f(\xi)}{\xi_n-\xi} - \frac{f(\xi_{n+1})-f(\xi)}{\xi_{n+1}-\xi}\right| \geqq 1.$$

За произволно естествено число n нека по дефиниция

$$\xi_n = \begin{cases} \xi + 4^{-n} & \text{при четно } [4^n\xi], \\ \xi - 4^{-n} & \text{при нечетно } [4^n\xi]. \end{cases}$$

Очевидно $\xi_n \neq \xi$, $\lim_{n\to\infty}|\xi_n - \xi| = \lim_{n\to\infty}4^{-n} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi$. Ще докажем, че за всяко естествено n е в сила

$$(1)\qquad f(\xi_n) - f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n-1}(f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi)).$$

Наистина нека

$$(2)\qquad F_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$$

и нека ν е такова естествено число, че $\nu \geqq n$. Тогава $4^\nu\xi_n = 4^\nu\xi \pm 4^{\nu-n} = 4^\nu\xi +$ цяло число; следователно $\{4^\nu\xi_n\} = \{4^\nu\xi\}$, $f_\nu(\xi_n) = f_\nu(\xi)$. Ето защо от (2) следва $F_m(\xi_n) - F_m(\xi) = \sum_{\nu=0}^{m}(f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi)) = \sum_{\nu=0}^{n-1}(f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi))$ при $m \geqq n$, откъдето при неограничено нарастване на m следва (1).

Нека $a = [2^{2\nu+1}\xi]$, т. е.

$$(3)\qquad 2^{-2\nu-1}a \leqq \xi < 2^{-2\nu-1}(a+1).$$

Ще докажем, че при цяло ν с $0 \leqq \nu \leqq n+1$, т. е. при $n \geqq \nu+1$, е в сила

$$(4)\qquad 2^{-2\nu-1}a \leqq \xi_n < 2^{-2\nu-1}(a+1).$$

За целта ще разгледаме трите случая:

$$(5)\qquad 2^{-2\nu-1}a + 4^{-n} \leqq \xi < 2^{-2\nu-1}(a+1) - 4^{-n},$$

$$(6)\qquad 2^{-2\nu-1}a \leqq \xi < 2^{-2\nu-1}a + 4^{-n},$$

$$(7)\qquad 2^{-2\nu-1}(a+1) - 4^{-n} \leqq \xi < 2^{-2\nu-1}(a+1).$$

В случая (5) неравенствата (4) следват от $|\xi_n - \xi| = 4^{-n}$. В случая (6) от $2^{2n-2\nu-1}a \leqq 4^n\xi < 2^{2n-2\nu-1}a + 1$ следва $[4^n\xi] = 2^{2n-2\nu-1}a$

$=$ четно и (4) се получава от $\xi_n = \xi + 4^{-n}$. В случая (7) е в сила $2^{2n-2\nu-1}(a+1) - 1 \leqq 4^n\xi < 2^{2n-2\nu-1}(a+1)$; следователно $[4^n\xi] = 2^{2n-2\nu-1}(a+1) - 1 =$нечетно и (4) следва от $\xi_n = \xi - 4^{-n}$.

При четно a нека $b = \frac{a}{2}$. Тогава от (3) и (4) имаме $b \leqq 4^\nu\xi < b + \frac{1}{2}$, $b \leqq 4^\nu\xi_n < b + \frac{1}{2}$, $\{4^\nu\xi\} = 4^\nu\xi - b$, $\{4^\nu\xi_n\} = 4^\nu\xi_n - b$, $f_\nu(\xi) = \xi - \frac{b}{4^\nu}$, $f_\nu(\xi_n) = \xi_n - \frac{b}{4^\nu}$; следователно

$$f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi) = \xi_n - \xi. \tag{8}$$

При четно a нека $b = \frac{a+1}{2}$. Тогава от (3) и (4) следва $b - \frac{1}{2} \leqq 4^\nu\xi < b$, $b - \frac{1}{2} \leqq 4^\nu\xi_n < b$, $\{4^\nu\xi\} = b - 4^\nu\xi$, $\{4^\nu\xi_n\} = b - 4^\nu\xi_n$, $f_\nu(\xi) = \frac{b}{4^\nu} - \xi$, $f_\nu(\xi_n) = \frac{b}{4^\nu} - \xi_n$; следователно

$$f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi) = -(\xi_n - \xi). \tag{9}$$

От (8) и (9) се вижда, че при $0 \leqq \nu \leqq n-1$ е в сила $\frac{f_\nu(\xi_n) - f_\nu(\xi)}{\xi_n - \xi} = \pm 1$. Ето защо от (1) следва $\frac{f(\xi_n) - f(\xi)}{\xi_n - \xi} = \sum_{\nu=0}^{n-1}(\pm 1) = \sum_{\nu=0}^{n-1}(1+\text{четно}) = n+$ четно; следователно диференчното частно е четно при четно n и нечетно при нечетно n.

Разгледаният тук пример принадлежи на Ван дер Варден. Исторически първият пример на непрекъсната функция без производна е даден от Вайерщрас.

109. Редът, получен от дадения чрез k-кратно формално диференциране, е $(-1)^k\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln\nu)^k}{\nu^x}$. Той не е равномерно сходящ в интервала $(1, \infty)$. Ето защо диференцируемостта му се установява, като за всяко $\xi > 1$ се избира подходяща част на $(1, \infty)$, към която се прилага теоремата за почленно диференциране на редове. И така нека $\xi > 1$, а η е число, за което $1 < \eta < \xi$. Очевидно за всяко $x \geqq \eta$ е в сила

$$0 \leqq \frac{(\ln\nu)^k}{\nu^x} \leqq \frac{(\ln\nu)^k}{\nu^\eta} \quad (\nu \in \mathbf{N}). \tag{1}$$

Нека ζ е такова число, че $1 < \zeta < \eta$. Тогава редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\zeta}$ е сходящ съгласно зад. 15. От друга страна, $\frac{(\ln\nu)^k}{\nu^\eta} = \frac{(\ln\nu)^k}{\nu^{\eta-\zeta}}\frac{1}{\nu^\zeta}$ и $\lim_{\nu\to\infty}\frac{(\ln\nu)^k}{\nu^{\eta-\zeta}}$ поради $\zeta < \eta$ (зад. 45 б), гл. V); следователно редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln\nu)^k}{\nu^\eta}$ е сходящ. Сега от (1) и критерия на Вайерщрас (зад. 96) следва равномерната сходимост на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln\nu)^k}{\nu^x}$ в интервала $[\eta, \infty)$.

111. При някои x е възможно анулирането на някои от първите членове на произведенията в б) — г). Тогава за съответното произведение се приема, че има стойност нула. Изучаването на този по-общ случай се свежда до разгледаните досега безкрайни произведения с ненулеви членове с помощта на остатъчните произведения, които се получават от дадените, като се изпуснат няколко от първите членове: ако за едно такова остатъчно произведение се установи, че притежава производна от произволен ред в околност на някоя точка x, същото ще бъде вярно и за изходното произведение, тъй като то се получава от остатъчното чрез умножаване с краен брой безбройно много пъти диференцируеми функции. Ето защо, за да не внасяме усложнения, при решаването на б) — г) можем да се ограничим с достатъчно близки до нулата стойности на x, за които никой от множителите не се анулира.

Ще дадем решение само на **в)**. Както в зад. 77, се доказва, че произведението е сходящо. Нека $f(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + (-1)^{\nu+1}\frac{x}{\nu}\right)$. От зад. 65 следва, че редът

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\ln\left(1 + (-1)^{\nu+1}\frac{x}{\nu}\right) \tag{1}$$

е сходящ. Тъй като $f(x) = e^{\varphi(x)}$, твърдението ще бъде установено, ако се покаже, че функцията (1) притежава производна от произволно висок ред. Редът, получен чрез k-кратното формално почленно диференциране на (1), е $(k-1)!\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(\nu+2)k-1}}{(\nu + (-1)^{\nu+1}x)^k}$ и е равномерно сходящ. Най-трудно това се установява при $k = 1$.

Ето защо ще докажем само, че редът $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu+(-1)^{\nu+1}x}$ е равномерно сходящ около нулата. Поради равенството $\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu+(-1)^{\nu+1}x}$ $=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}-\frac{x}{\nu(\nu+(-1)^{\nu+1}x)}$ всичко се свежда до установяване на равномерната сходимост на реда $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+(-1)^{\nu+1}x)}$, която следва от критерия на Вайерщрас (зад.96).

112. Разгледайте например редицата от функции $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}x\right)$ $(n\in\mathbf{N})$.

113. Лодефинирайте f_ν в точката ξ като $\lim_{x\to\xi}f_\nu(x)$. По този начин ще получите равномерно сходящ в $X\cup\{\xi\}$ ред от непрекъснати в ξ функции (зад. 95). Сега остава да се приложи теоремата за непрекъснатост на сумата на равномерно сходящ ред от непрекъснати функции.

114. а) Приложете зад. 113 и 46 а), гл. VII. б) Приложете зад. 114 и зад. 61, гл. I.

115. Приложете теоремата за почленно диференциране на редове и зад. 102.

117. а) От зад. 23 а), гл. VII се знае, че $\frac{d^n\cos^2 x}{dx^n}$ $=2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$ $(n\in\mathbf{N})$. Ето защо търсеният ред е $\cos^2 a$ $+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^{\nu-1}}{\nu!}\cos\left(2a+\frac{\nu\pi}{2}\right)(x-a)^\nu$. Остатъкът във формата на Лагранж (зад.170, гл.VII) е $R_n=\frac{2^n}{(n+1)!}\cos\left(2\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)(x-a)^{n+1}$, откъдето се получава оценката $|R_n|\leqq\frac{2^n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$. Понеже редът $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^n|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ е сходящ за всяко x (вж. зад. 86 г)), общият му член клони към нула. Ето защо остатъкът R_n клони към нула за всяко x. Следователно

$$\cos^2 x=\cos^2 a+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^{\nu-1}}{\nu!}\cos\left(2a+\frac{\nu\pi}{2}\right)(x-a)^\nu\quad(x\in\mathbf{R}).$$

б) $\sin^3 x=\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(3\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)-3^n\sin\left(3a+\frac{n\pi}{2}\right)\right)(x-a)^\nu$ $(x\in\mathbf{R})$, вж. зад. 23 в), гл. VII. в) $\operatorname{sh}x=\operatorname{sh}a\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2\nu}}{(2\nu)!}$ $+\operatorname{ch}a\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$ $(x\in\mathbf{R})$. г) $e^x\cos x$ $=e^a\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2^\nu}}{\nu!}\cos\left(a+\frac{\nu\pi}{4}\right)(x-a)^\nu$ $(x\in\mathbf{R})$, вж. зад. 24 б), гл. VII.

д) $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=e^{a\cos\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\sin(a\sin\alpha+\nu\alpha)(x-a)^\nu$ $(x\in\mathbf{R})$, вж. зад. 24 б), гл. VII.

118. Вж. зад. 53 а), гл. VII.

119. Намерете последователните производни на степенния ред в точката ξ, като си послужите с правилото за диференциране на степенни редове.

120. Нека x и c са числа, за които $a<c<x\leqq b$. От формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж (зад. 170 в), гл. VII) следва

$$f(c)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(x)}{\nu!}(x-c)^\nu+\frac{(-1)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$(\xi\in(c,x),\ n\in\mathbf{N})$. Тъй като в дясната страна на това равенство събираемите са неотрицателни, то

$$f(c)\geqq\frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!}(x-c)^n,$$

откъдето

$$|f^{(n)}(x)|\leqq\frac{n!f(c)}{(x-c)^n}. \tag{1}$$

От друга страна, от формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Тагамлицки (зад. 170 д), гл. VII) следва

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^\nu+\left(\frac{b-x}{b-c}\right)^{n+1}\frac{(\xi-c)^{n+2}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!(x-c)} \tag{2}$$

$(\xi\in(c,x),n\in\mathbf{N})$. От (1) и (2) се получава

$$\left|f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^\nu\right|\leqq\left(\frac{b-x}{b-c}\right)^{n+1}f(c) \tag{3}$$

поради $\xi - c < x - c$. От (3) веднага следва твърдението на задачата, понеже c може да се избере произволно близко до a.

121. От зад. 120 следва

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^{\nu} \tag{1}$$

при $0 < x < b$. От (1) след последователно диференциране и умножаване с $x - b$ се получават

$$(x-b)f'(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^{\nu} \tag{2}$$

и

$$(x-b)f'(x) + (x-b)^2 f''(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^2 f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^{\nu}. \tag{3}$$

Нека λ и μ са произволни числа. Чрез умножаване на (1) с λ^2, на (2) с $2\lambda\mu$ и на (3) с μ^2 и събиране се получава

$$\begin{aligned} &\lambda^2 f(x) + 2\lambda\mu(x-b)f'(x) + \mu^2(x-b)^2 f''(x) + \mu^2(x-b)f'(x) \\ &\quad = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} f^{(\nu)}(b)(b-x)^{\nu}}{\nu!}(\lambda - \mu\nu)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Тъй като дясната страна на (4) е неотрицателна, от (4) при $\mu = \dfrac{1}{x-b}$ следва

$$\lambda^2 f(x) + 2\lambda f'(x) + f''(x) + \frac{f'(x)}{x-b} \geqq 0. \tag{5}$$

Ако в (5) λ и x се фиксират по произволен начин и се остави b да расте неограничено, се получава желаното неравенство.

122. От зад. 121 при $\lambda = 1$ следва

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) \geqq 0 \quad (x > 0). \tag{1}$$

Да положим

$$g(x) = e^{-x} - f(x). \tag{2}$$

Очевидно $(-1)^n g^{(n)}(x) = e^{-x} - (-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0$. Ето защо към функцията g е приложима зад. 121. Така се получава $g(x) + 2g'(x) + g''(x) \geqq 0$ $(x > 0)$, което заедно с (2) дава

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) \leqq 0. \tag{3}$$

От (1) и (3) следва $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ $(x > 0)$. Сега от зад. 87 в), гл. VII следва, че съществуват константи B и C, за които

$$f(x) = (Bx + C)e^{-x} \quad (x > 0). \tag{4}$$

От (4) поради $0 \leqq f(x) \leqq e^{-x}$ следва $B = 0$, с което задачата е решена.

123. Използувайте степенните развития за основните елементарни функции. а) $\operatorname{sh} x = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$; сравнете със степенното развитие на $\sin x$. б) $\operatorname{ch} x = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2^{\nu}}}{(2\nu)!}$; сравнете със степенното развитие на $\cos x$. в) $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} x^{2\nu}$.

г) $\dfrac{e^x - 1}{x} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{(\nu+1)!}$. д) $\dfrac{x - \sin x}{x^3} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} x^{2\nu}}{(2\nu+3)!}$.

е) $\sin^2 2x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} 2^{4\nu-1}}{(2\nu)!} x^{2\nu}$. ж) $\dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} x^{2^{\nu}}}{(2\nu+2)!}$. Развитията а), в) и е) важат в $\mathbf{R}$, а развитията от д) и ж) — в $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Тъй като десните страни на последните развития имат смисъл и при $x = 0$, те могат да се използуват за продължаване на съответните функции по непрекъснатост при $x = 0$. По-специално те дават още една възможност за пресмятане на границите $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ и $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. Използуването на степенните развития вероятно е един от най-естествените начини за пресмятане на граници от този вид.

з) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$ $(|x| < 1)$. В следващите задачи се използува биномният ред или геометричната прогресия, които е негов частен случай. и) $\dfrac{1}{(1-x^2)^2} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)x^{2\nu}$ $(|x| < 1)$.

й) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu+1)!!}{(2\nu)!!} x^{2\nu}$ $(|x| < 1)$.

к) $\sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}(2\nu-3)!!}{(2\nu)!!} x^{2\nu}$ $(|x| \leqq 1)$; под $(-1)!!$ се разбира числото 1. л) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} x^{2\nu}$ $(|x| \leqq 1)$. м) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} x^{2\nu}$ $(|x| < 1)$.

н) $\frac{x^{10}}{1-x} = \sum_{\nu=10}^{\infty} x^{\nu}$ $(|x| < 1)$. о) $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}$ $= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}} - \frac{1}{3^{\nu+1}}\right)x^{\nu}$ $(|x| < 2)$. п) $\frac{x}{x^2-4x+3} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3^{\nu}}\right)x^{\nu}$ $(|x| < 1)$.

124. След диференциране на функциите от тази задача се получават функции, чиито маклоренови развития са вече известни. Във всеки конкретен случай трябва да се намери степенен ред, чиято производна съвпада с развитието на производната на дадената функция. Тогава сумата на въпросния ред ще се различава от функцията с константа, чиято стойност се определя при конкретна стойност на аргумента. а) Нека $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$. Тогава $f'(x) = 1 + \ln(1+x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^{\nu}}{\nu}$. Разглеждаме реда $g(x) = x + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}$. Очевидно $f'(x) = g'(x)$, поради което $f(x) = g(x) + C$. При $x = 0$ получаваме $C = 0$, поради което $(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}$. С това последното равенство е доказано в интервала $(-1, 1]$. б) $\operatorname{arctg} x = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}$ $(|x| \leqq 1)$. Това равенство се доказва чрез диференциране в интервала $(-1, 1)$. Валидността му в точките -1 и 1 следва от съображения за непрекъснатост, вж. критерия на Лайбниц и зад. 105 а). в) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}x^{2\nu}}{2\nu(2\nu-1)}$

$(|x| \leqq 1)$. г) $\arcsin x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$ $(|x| \leqq 1)$, вж. зад. 123 м). д) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+2)!!}\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+1}$ $(|x| \leqq 1)$. е) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}$ $(|x| \leqq 1)$, вж. зад. 123 л). ж) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$ $= -1 + \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+2)!!}\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+1}$ $(|x| \leqq 1)$.

125. В примерите на тази задача се използва умножение на редове или умножение на ред и полином. а) $(1+x)e^{-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)x^{\nu}}{\nu!}$ $(x \in \mathbb{R})$. б) $(1-x)^2 \operatorname{ch}\sqrt{x} = 1 + \left(\frac{1}{2!} - 2\right)x + \sum_{\nu=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(2\nu)!} - \frac{2}{(2\nu-2)!} + \frac{1}{(2\nu-4)!}\right)x^{\nu}$ $(x \geqq 0)$. в) $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}h_{\nu}x^{\nu}$ $(|x| < 1)$, където h_{ν} е ν-тата парциална сума на хармоничния ред. г) $(\ln(1-x))^2 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}h_{\nu}\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$ $(-1 \leqq x < 1)$, за h_{ν} вж. в). д) $\ln(1+x)\ln(1-x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}\frac{x^{2\nu}}{\nu}$ $(|x| < 1)$, където $\lambda_{\nu} = \sum_{\mu=1}^{2\nu-1}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu}$. е) $(1+x^2)\operatorname{arctg} x = x + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{4\nu^2-1}x^{2\nu+1}$ $(|x| \leqq 1)$. ж) $(\operatorname{arctg} x)^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(h_{2\nu} - \frac{1}{2}h_{\nu}\right)\frac{x^{2\nu}}{\nu}$ $(|x| \leqq 1)$, за h_{ν} вж. в). з) $(\arcsin x)^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{4^{\nu}(\nu!)^2x^{2\nu+2}}{(2\nu+1)!(\nu+1)}$ $(|x| \leqq 1)$.

126. Освободете се от знаменателите. За а) и б) могат да се използват и зад. 25 д) и в), гл. II.

127. При всяко фиксирано x с $|x| < 1$ редовете, получени чрез почленно диференциране спрямо α на редовете в десните страни

на равенствата, са равномерно сходящи редове от функции на α съгласно критерия на Вайерщрас (зад. 96). Ето защо почленното диференциране на а) и б) спрямо α е законно. След диференциране а) и б) преминават съответно в равенствата б) и а) от зад. 126, които са вече доказани. Ето защо левите и десните страни на равенствата в настоящата задача се различават с константи. При $\alpha = 0$ за стойностите на тези константи се получава нула.

128. **а)** В зад. 127 а) x се замества с $-x$ и полученото тъждество се изважда от тъждеството в зад. 127 а).

129. Зад. 128 с $\alpha + \frac{\pi}{2}$ вместо α.

130. **а)** Нека α с $0 < \alpha < 2\pi$ е фиксирано. Тогава редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\alpha}{\nu}$ е сходящ (зад. 39). Сега от зад. 105 б) следва

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\alpha}{\nu} = \lim_{x\to 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu \sin \nu\alpha}{\nu}$$

$$= \lim_{x\to 1} \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin\alpha}{1 - x\cos\alpha} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

б) — **г)** Аналогично, като се използува зад. 127 б), а) при $x = -1$ и б) при $x = -1$.

131. **а)** Нека $f(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^2}$. Тогава $f'(x) = -\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}$ при $0 < x < 2\pi$, тъй като последният ред е равномерно сходящ във всеки от интервалите $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < \pi)$, което се проверява аналогично на твърдението от зад. 101 б). От зад. 130 а) сега следва $f'(x) = \frac{x - \pi}{2}$. Но производната на функцията $-\frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$ очевидно съвпада с $f'(x)$. Ето защо съществува такава константа C, че е в сила тъждеството

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^2} = C - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \tag{1}$$

при $0 < x < 2\pi$. От съображения за непрекъснатост следва, че (1) е валидно и при $x = 0$ и $x = 2\pi$. С това желаното тъждество е почти доказано. Стойността на C ще определим едновременно с

доказването на **б)**. За тази цел да положим $g(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^3}$. Тогава $g'(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^2}$ при $0 \leqq x \leqq 2\pi$. От (1) сега следва $g'(x) = C - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$. Но производната на функцията $Cx - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{x^3}{12}$ очевидно съвпада с $g'(x)$. Ето защо съществува такава константа D, че да е в сила тъждеството

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^3} = D + Cx - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \tag{2}$$

при $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Ако в (2) положим $x = 0$ и $x = \pi$, ще получим $D = 0$ и $0 = C\pi - \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi^3}{12}$, откъдето $C = \frac{\pi^2}{6}$. **в)** Работи се аналогично, като паралелно се получава

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^5} = \frac{\pi^4 x}{90} - \frac{\pi^2 x^3}{36} + \frac{\pi x^4}{48} - \frac{x^5}{240} \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi).$$

132. Зад. 131 с $x + \pi$ вместо x.

133. Ако познаваме тъждеството $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, за всяко естествено n можем да намерим сумата на реда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \nu^n a_\nu x^\nu$. Това очевидно може да стане, след като над реда n пъти се извършат последователно операциите диференциране и умножение с x. С помощта на тази техника очевидно може да се пресметне (да се изрази чрез f) и сумата на реда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} P(\nu) a_\nu x^\nu$, където P е произволен полином. **а)** $e^x(x^2 + x + 1)$. **б)** $(x^2+1)e^{-x} + \frac{e^{-x} - 1}{x}$. **в)** $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\sin x$. **г)** $\frac{x+1}{4\sqrt{x}} \operatorname{sh} x - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{x}}{4} (x > 0)$.

134. За намиране на сумата на реда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} R(\nu)$, където R е рационална функция, нулите на чийто знаменател са неположителни, понякога се препоръчва R предварително да се разложи в сума от елементарни дроби (§10, гл. IX). Този метод дава резултат винаги когато нулите на знаменателя на R са най-много двукратни. Същата техника е приложима и към редовете

$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}R(\nu)$ при същите предположения за R. а) $\frac{3}{4}$.
б) $2-2\ln 2$. Използувайте степенното развитие на $\ln(1+x)$.
в) $\frac{5}{18}$. г) $\frac{\pi^2}{6}$. Използувайте зад.131 а). д) $\frac{\pi^2}{12}$. Използувайте зад. 132 а). е) $\frac{\pi}{4}$. ж) $\frac{\pi^2}{8}$. з) 1. Определете константите a, b, c и d по такъв начин, че да е в сила тъждеството
$\frac{2x-1}{x^2(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{(x+1)^2}$. и) $7-\frac{2\pi^2}{3}$. й) $3-4\ln 2$.
к) $2e$. л) $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$. м) $\frac{1}{4}(3\cos 1-\sin 1)$. Последните три случая решете по метода от зад. 133.

135. Нека $f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu^2}$. От зад. 87 а) следва, че радиусът на сходимост на разглеждания степенен ред е 1. От зад. 4 а) следва, че редът е сходящ и в крайните точки на своя интервал на сходимост. Ето защо функцията f е дефинирана в интервала $[-1, 1]$. От зад. 105 а) сега следва, че функцията f е непрекъсната в интервала $[-1, 1]$. От друга страна, от теоремата за диференциране на степенни редове следва, че тази функция е диференцируема в интервала $(-1, 1)$. Да положим

$$\varphi(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x) \tag{1}$$

при $0<x<1$. От (1) следва

$$\varphi'(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^{\nu-1}}{\nu}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(x-1)^{\nu-1}+\frac{1}{x}\ln(1-x)+\frac{1}{x-1}\ln(1+(x-1)). \tag{2}$$

От (2) след развиване в степенни редове на логаритмите в дясната страна следва $\varphi'(x)=0$ при $0<x<1$. Ето защо съществува константа C, за която

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=C \tag{3}$$

$(0<x<1)$ съгласно (1). Стойността на тази константа ще пресметнем с граничен преход при x, клонящо към нула. Тъй като $\lim_{x\to 0}\ln x\ln(1-x)=\lim_{x\to 0}x\ln x\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=0$ съгласно зад. 47 в) и 68, гл. V, от (3) поради непрекъснатостта на f следва $f(0)+f(1)=C$.

Последното равенство дава $C=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{6}$ съгласно дефиницията на f и зад. 131 а) с $x=0$. Сега от (3) при $x=\frac{1}{2}$ следва $2f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-(\ln 2)^2$. Следователно $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\nu^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

Девета глава

1. Достатъчно е да се установи, че производните на функциите в десните страни съвпадат със съответните подинтегрални функции.

2. а) x^2+x. б) x^3+x^2-x. в) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\ln|x|$. г) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$. д) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}-4\sqrt{x}-\frac{1}{2x^2}$. е) $\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}$. ж) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}$.
з) $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{x}$. и) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+12x^{\frac{1}{3}}+4\ln|x|$.
й) $3e^x-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$. к) $\cos x+\frac{3}{2}\arcsin x$. л) $4\sin x-\frac{5}{3}\arcsin x$.
м) $\frac{2^x}{\ln 2}+2\sqrt{x}$. н) $-\frac{10^{-x}}{\ln 10}+x+\operatorname{arctg} x$. о) $\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}=\int\frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}dx=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1-x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, вж. зад. 1, ж) и з). п) $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. р) $\int\frac{x^4}{x^2-1}dx=\int\frac{x^4-1+1}{x^2-1}dx=\int(x^2+1)dx+\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.
с) $x-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. т) $x^3+\operatorname{arctg} x$. у) $\int\frac{x^5-x+3}{x^2-1}dx=\int\frac{x^5-x^3}{x^2-1}dx+\int\frac{x^3-x}{x^2-1}dx+\int\frac{3}{x^2-1}dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.
ф) $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\operatorname{arctg} x$. х) $-x^3+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. ц) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x-x$. ч) $-\operatorname{ctg} x-x$. ш) $-\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$.

щ) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$

ъ) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x.$ ь) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x.$

ю) $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx = \varepsilon \int (\cos x - \sin x) dx$ $= \varepsilon(\sin x + \cos x)$, където $\varepsilon = -1$ при $\frac{\pi}{4} + 2\nu\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + (2\nu + 1)\pi$ и $\varepsilon = 1$ при $\frac{\pi}{4} + (2\nu + 1)\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + 2(\nu + 1)\pi$ $(\nu \in \mathbf{I})$. По този начин се получават примитивни само в посочените интервали, но не и върху цялата права, понеже отделните примитивни имат несъвпадащи стойности в точките $\frac{\pi}{4} + \nu\pi$ $(\nu \in \mathbf{I})$. За да се получи примитивна върху цялата права, е нужно отделните „късове" да се „залепят" чрез прибавяне на подходящи константи с оглед да се осигури непрекъснатостта на примитивната в тези точки. Не е трудно да се съобрази, че една дефинирана върху цялата права примитивна е например функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = (-1)^{\nu-1}(\sin x + \cos x) + 2\nu\sqrt{2}$ при $\frac{\pi}{4} + \nu\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + (\nu + 1)\pi$ $(\nu \in \mathbf{I})$.

я) $\arcsin x + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, вж. зад. 1 б).

3. а) $\int \frac{dx}{x + a} = \int \frac{d(x + a)}{x + a} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x + a|$. (Междинното пресмятане с u обикновено се изпуска.) б) $\int (2x - 3)^{10} dx = \frac{1}{2} \int (2x - 3)^{10} d(2x - 3) = \frac{(2x - 3)^{11}}{22}$. в) $-\frac{1}{2} \cos 2x$. г) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$. д) $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} 2x$. е) $-e^{-x}$. ж) $-\frac{1}{7} \cos(7x + 3)$.

з) $-\frac{2}{5}\sqrt{2 - 5x}$. и) $\int \frac{dx}{2 - 3x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} x\right)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}} x}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} x\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} x}{\sqrt{2} - \sqrt{3} x} \right|.$$ й) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3} x)}{\sqrt{(\sqrt{3} x)^2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln|\sqrt{3} x + \sqrt{3x^2 - 2}|.$$ к) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}} x}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}} x.$$

л) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2} x + \sqrt{2x^2 + 5}\right)$. м) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{\sqrt{3}}$. н) $\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax$.

о) $-\frac{1}{2} e^{-2x+3}$. п) $\int \frac{2x + 3}{(x - 2)^3} dx = \int \frac{2(x - 2) + 7}{(x - 2)^3} dx$

$$= 2 \int \frac{d(x - 2)}{(x - 2)^2} + 7 \int \frac{d(x - 2)}{(x - 2)^3} = -\frac{2}{x - 2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x - 2)^2}.$$

р) $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x + 1)^2} dx = \int \frac{(u - 1)^4 + 3(u - 1)^3 - 1}{u^2} du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}$ $-3u + 5 \ln|u| + \frac{3}{u}$, където $u = x + 1$. с) $\int \frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^2 + 2} dx$

$$= \int (x^2 + 1) dx + 2 \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{x^3}{3} + x + \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

т) $-\frac{5}{2}(1 - x)^{\frac{2}{5}}$. у) $\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{dx}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$ ф) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

х) $x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. ц) $-x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. ч) $-2 \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

ш) $2 \operatorname{tg} \frac{x - 3}{2}$. щ) $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. ъ) $\int \sin 3x \sin 5x dx$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x.$$

ь) $\frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6}$. ю) $\frac{1}{2(a - b)} \sin(a - b)x - \frac{1}{2(a + b)} \sin(a + b)x$.

я) $\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x - \frac{x}{4}$.

4. а) $\int \frac{\cos x dx}{1 + \sin x} = \int \frac{d(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = \ln(1 + \sin x)$.

б) $-\frac{1}{2} \ln(1 + \cos 2x)$. в) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - a^2)}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$.

г) $\frac{\sin^4 x}{4}$. д) $\frac{1}{2}e^{x^2}$. е) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d\ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x$.

ж) $\ln|\ln x|$. з) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2$. и) $-\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}$.

й) $\int \cos^3 x dx = \int (1-\sin^2 x) d\sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$. к) $e^{\sin x}$.

л) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. м) $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}$. н) $-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$. о) $\int \frac{x dx}{a^4+x^4}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{a^4+(x^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\int \frac{d\frac{x^2}{a^2}}{1+\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}.$$

п) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}$. р) $-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|$. с) $\ln|\operatorname{arctg} x|$.

т) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. у) $-\frac{3}{2}(\sin x+\cos x)^{\frac{2}{3}}$.

ф) и х) Означаваме първия интеграл с f, а втория — с g. Тогава $f+g = \int dx = x$, $f-g = \int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}$ $= -\ln|\sin x+\cos x|$. Ето защо $f = \frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)$, $g = \frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)$. ц) $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x$.

ч) $-\operatorname{arctg}\cos x$. ш) $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^4 x}dx$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x d\operatorname{tg} x + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x. \quad щ) \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

ъ) $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

ь) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. ю) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|$. я) Нека φ е ъгъл, за който $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогава

$$\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{d(x+\varphi)}{\sin(x+\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}\right|$$ съгласно щ).

5. а) $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{d(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x})$.

б) $-2\arcsin e^{-\frac{x}{2}}$. в) $-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{x}{2}}$. г) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

$$= \int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-(x^{-1})^2}} = \sqrt{x^2-1} + \int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(x^{-1})^2}}$$

$= \sqrt{x^2-1} + \arcsin\frac{1}{x}$ при $x > 0$.

При $x < 0$ се работи аналогично и се получава $\sqrt{x^2-1}$ $-\arcsin\frac{1}{x}$. д) $\sqrt{1-x^2} - \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)$ при $x > 0$ и $\sqrt{1-x^2}$ $+\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right|$ при $x < 0$. е) $-\frac{\sqrt{2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

ж) $\sqrt{2-x^2} - \sqrt{2}\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}}\right)$ при $x > 0$ и $\sqrt{2-x^2}$ $+\sqrt{2}\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}}\right|$ при $x < 0$. з) Рационализирайте знаменателя, за да сведете към д) и ж). и) Най-напред ще направим пресмятанията в интервала $(0, \infty)$:

$$\int \frac{dx}{(1+x^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \int \frac{dx}{x^{n+1}(1+x^{-n})^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= -\frac{1}{n}\int \frac{d(1+x^{-n})}{(1+x^{-n})^{\frac{n+1}{n}}} = (1+x^{-n})^{-\frac{1}{n}} = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}.$$

Очевидно тези пресмятания са легитимни и за всяка реална стойност на n. Същите пресмятания са в сила и в интервалите

$(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ за нечетни n. При четно n пресмятането на интеграла в $(-\infty, 0)$ става по следния начин:

$$\int \frac{dx}{(1+x^n)^{\frac{n+1}{n}}} = -\int \frac{dx}{x^{n+1}(1+x^{-n})^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{n}\int \frac{d(1+x^{-n})}{(1+x^{-n})^{\frac{n+1}{n}}}$$
$$= -(1+x^{-n})^{-\frac{1}{n}} = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}.$$

Сега не е трудно да се съобрази, че функцията $\frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}$ е търсеният интеграл във всеки от интервалите $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$ при нечетно n и върху цялата права при четно n. **й)** $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right).$$

Това решение важи във всеки от интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Сега не е трудно да се съобрази, че една примитивна върху цялата права е функцията $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right) & \text{при } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} & \text{при } x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

к) $\ln\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{|x|}$. **л)** $\frac{-1}{2(1+e^{2x})}$. **м)** $\frac{1}{2(1-e^{2x})}$.

6. а) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\frac{x+3}{2}}{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}$. **б)** $\ln(x^2+6x+13) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}$.

в) $\int \frac{xdx}{x^2+x+1} = \int \frac{xdx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

г) $\frac{2}{3}\ln(3x^2+2x+5) + \frac{20}{3\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{14}}$.

д) $\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$ при $b^2-4ac<0$ и

$\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|$ при $b^2-4ac>0$.

е) $\frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \frac{2aB-Ab}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$ при $b^2-4ac<0$ и

$\frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \frac{2aB-Ab}{2a\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|$ при $b^2-4ac>0$.

7. а) $\int \frac{x^4dx}{x^2+3} = \int \frac{x^4-9}{x^2+3}dx + 9\int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{x^3}{3} - 3x$

$+3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. **б)** $\frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **в)** $x + \ln(x^2-x+1)$

$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **г)** Внесете единия множител под диференциала, за да получите $\frac{1}{12}\ln(3x^4-2x^2+1) + \frac{1}{6\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x^2-1}{\sqrt{2}}$.

8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}} = \int \frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}}$

$= \ln\left(x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+5}\right)$. **б)** $\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}}$.

в) $\ln\left(x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+7}\right)$. **г)** $\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{13}}$.

д) $\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|$. **е)** $-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$.

9. а) $\int \frac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = \int \frac{5(x+2)-3}{\sqrt{9-(x+2)^2}}dx$

$$= -\frac{5}{2}\int \frac{d(9-(x+2)^2)}{\sqrt{9-(x+2)^2}} - 3\int \frac{d\frac{x+2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}} = -5\sqrt{9-(x+2)^2}$$

$-3\arcsin\frac{x+2}{3}$. б) $3\sqrt{3+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{3+x+x^2}\right)$.

в) $\sqrt{x^2-ax}+\frac{a}{2}\ln\left|x-\frac{a}{2}+\sqrt{x^2-ax}\right|$. г) $\sqrt{x^2+x-1}$

$-\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-1}\right|$. д) $-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$.

е) $-\sqrt{ax-x^2}+\frac{3a}{2}\arcsin\frac{2x-a}{a}$ при $a>0$ и

$-\sqrt{ax-x^2}-\frac{3a}{2}\arcsin\frac{2x-a}{a}$ при $a<0$.

10. След диференциране на двете страни се вижда, че трябва да се докаже съществуването на полином Q от степен най-много $n-1$ и на константа A, за които да е в сила

(1) $$P(x) = Q'(x)(ax^2+2bx+c)+Q(x)(ax+b)+A$$

за всяко $x\in\Delta$. Нека

(2) $$P(x) = p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n \quad (p_0\neq 0).$$

По условие полиномът Q трябва да има вида

(3) $$Q(x) = q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+\cdots+q_{n-1}.$$

След заместване на (2) и (3) в (1) и сравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x за числата $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ и A се получава системата:

$$\left|\begin{array}{l} p_0 = naq_0, \\ p_1 = (n-1)aq_1+(2n-1)bq_0, \\ p_2 = (n-2)aq_2+(2n-3)bq_1+(n-1)cq_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n = bq_{n-1}+cq_{n-2}+A, \end{array}\right.$$

която поради $a\neq 0$ притежава единствено решение.

11. а) $\int\frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx = (px+q)\sqrt{-x^2+3x-2}$

$+A\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$, където p, q и A са константи (вж. зад. 10).

Диференцираме двете страни: $\frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$

$$= p\sqrt{-x^2+3x-2}+(px+q)\frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}+\frac{A}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

След освобождаване от знаменателя константите p, q и A се определят по метода на неопределените коефициенти (зад. 55, гл. II).

Интегралът $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ може да се пресметне чрез допълване до точен квадрат, както в зад. 8. Окончателно се получава $\frac{27}{8}\arcsin(2x-3)-\frac{2x+9}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}$.

б) $\frac{1}{6}(2x^2+x+7)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|$.

в) $-\frac{1}{8}(2x^3-3x)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{8}\arcsin x$.

г) $\frac{x}{4}(x^2+1)\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+2})$.

13. а) $-\arcsin\frac{1}{x}$ в $(1,\infty)$ и $\arcsin\frac{1}{x}$ в $(-\infty,-1)$.

б) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -\int\frac{d\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$= -\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)$ при $x>0$; при $x<0$ се работи аналогично.

в) $\frac{3x-1}{2x^2}\sqrt{2x^2+2x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$ при $x>0$.

14. а) Нека $I=\int\sqrt{x^2+a}dx$. След интегриране по части се получава

(1) $$I = x\sqrt{x^2+a}-\int xd\sqrt{x^2+a} = x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx.$$

Нека

(2) $$J = \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx.$$

Тогава

(3) $$J = \int\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}dx - a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = I - a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|.$$

От (1) — (3) следва

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} I = x\sqrt{x^2+a} - J, \\ J = I - a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|. \end{array}\right.$$

След решаване на системата (4) се получава

$$(5)\qquad \begin{aligned} I &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|, \\ J &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} - \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|. \end{aligned}$$

Като страничен продукт от това решение наред с интеграла I се получи и интегралът (2). Ще отбележим изрично, че изложеното решение не дава доказателство за *съществуването* на примитивните I и J. Полученият резултат може да се изкаже кратко така: ако примитивните I и J съществуват, в сила са формулите (5). Обаче по силата на една известна теорема (зад. 19, гл. X) всяка непрекъсната функция притежава примитивна, поради което съществуването на I и J се гарантира от общи съображения.

б) Работи се, както в а), и се получава

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Наред с търсения интеграл при тези методи се получава и

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

15. а) $\dfrac{x}{2(1+x^2)} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$. б) $\dfrac{x}{6(3+x^2)} + \dfrac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

в) Нека $I = \displaystyle\int\frac{dx}{(3+2x^2)^2}$. Тогава

$$(1)\qquad I = \frac{1}{3}\int\frac{3+2x^2}{(3+2x^2)^2}dx - \frac{2}{3}\int\frac{x^2}{(3+2x^2)^2}dx.$$

Нека

$$(2)\qquad J = \int\frac{x^2}{(3+2x^2)^2}dx.$$

Очевидно

$$(3)\qquad \begin{aligned} J &= \frac{1}{4}\int\frac{xd(3+2x^2)}{(3+2x^2)^2} = -\frac{1}{4}\int xd\frac{1}{3+2x^2} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{x}{3+2x^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{3+2x^2}. \end{aligned}$$

От (1) — (3) следва

$$I = \frac{x}{6(3+2x^2)} + \frac{1}{6}\int\frac{dx}{3+2x^2} = \frac{x}{6(3+2x^2)} + \frac{1}{6\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{3}}x.$$

Да отбележим, че като част от решението се получава и интегралът (2). Наистина от (3) следва

$$J = -\frac{x}{4(3+2x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{3}}x.$$

Всички останали примери се решават аналогично.

г) $\dfrac{x}{2(1-x^2)} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$. д) $\dfrac{x}{6(3-x^2)} + \dfrac{1}{12\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right|$.

е) $\dfrac{x}{6(3-2x^2)} + \dfrac{1}{12\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}\right|$. В решението на г) — е) се използват зад. 1 ж) и з).

16. а) Нека $I_n = \displaystyle\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$. Тогава

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}dx - \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{a^2}I_n - \frac{1}{2a^2}\int\frac{xd(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{a^2}I_n + \frac{1}{2a^2n}\int xd\frac{1}{(a^2+x^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2}I_n + \frac{1}{2a^2n}\frac{x}{(a^2+x^2)^n} - \frac{1}{2a^2n}I_n = \frac{x}{2a^2n(a^2+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2a^2n}I_n, \end{aligned}$$

като сме използували интегриране по части. б) Работи се аналогично.

Формули от вида а) и б) от зад. 16 се наричат понякога *рекурентни*, а използването им — *рекурсия*. По-нататък читателят ще срещне множество подобни примери.

18. а) $-\dfrac{5x^3+6x}{8(2+x^2)^2} + \dfrac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

б) $\dfrac{5x^3-6x}{8(2-x^2)^2} + \dfrac{3}{16\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|$.

Използувайте предишната задача.

19. а) и б) Нека

(1) $$I = \int \sin(\ln x)dx, \quad J = \int \cos(\ln x)dx.$$

След интегриране по части получаваме

(2) $$I = x\sin(\ln x) - \int x d\sin(\ln x) = x\sin(\ln x) - J$$

и

(3) $$J = x\cos(\ln x) + I.$$

От (1) — (3) следва

$$I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)),$$

$$J = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)).$$

20. а) $\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$.

б) $-(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24)e^{-x}$.

в) $\frac{1}{27}(9x^3 - 27x^2 + 18x + 39)e^{3x}$. г) $-\frac{1}{2}(x^4 + 2x^2 + 2)e^{-x^2}$.

21. а) $\int x\sin x dx = -\int x d\cos x = -x\cos x + \int \cos x dx$ $= -x\cos x + \sin x$. б) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$.

в) $-\frac{x^3}{2}\cos(2x+3) + \frac{3x^2}{4}\sin(2x+3) + \frac{3x}{4}\cos(2x+3) - \frac{3}{8}\sin(2x+3)$.

г) $\int x^3 \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int x^2 \sin x^2 dx^2 = -\frac{1}{2}\int x^2 d\cos x^2$ $= -\frac{1}{2}x^2\cos x^2 + \frac{1}{2}\int \cos x^2 dx^2 = -\frac{1}{2}x^2\cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2$.

22. а) $x\sin x + \cos x$. б) $\int x\sin^2 x dx = \int x\frac{1-\cos 2x}{2}dx$ $= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\int x d\sin 2x = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \sin 2x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x$ $-\frac{1}{8}\cos 2x$. в) $\frac{3}{4}\sin x - \frac{\sin 3x}{36} - \frac{3}{4}x\cos x + \frac{x}{12}\cos 3x$.

г) $\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}\right)\sin x + \left(\frac{x^2}{12} - \frac{1}{54}\right)\sin 3x + \frac{3}{2}x\cos x + \frac{x}{18}\cos 3x$.

23. Многократно интегриране по части. Как се опростява формулата, ако f е полином от n-та степен?

24. Приложете зад. 23.

25. а) Нека $I_m = \int \sin^m x dx$. Тогава

$$I_m = -\int \sin^{m-1} x d\cos x = -\sin^{m-1} x\cos x + (m-1)\int \cos^2 x \sin^{m-2} x dx$$
$$= -\sin^{m-1} x\cos x + (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m,$$

откъдето търсеното равенство следва веднага.

б) Нека $I_m = \int \frac{dx}{\sin^m x}$. Тогава

$$I_m = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^m x}dx = I_{m-2} + \int \frac{\cos x d\sin x}{\sin^m x}$$
$$= I_{m-2} + \frac{1}{1-m}\int \cos x d\frac{1}{\sin^{m-1} x} = I_{m-2} - \frac{1}{m-1}\frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} - \frac{1}{m-1}I_{m-2},$$

откъдето търсеното равенство следва веднага.

26. За а) — г) използвайте зад. 30, гл. II. а) $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4}$ $+\frac{\sin 4x}{32}$. б) $-\frac{5\cos x}{8} + \frac{5\cos 3x}{48} - \frac{\cos 5x}{80}$. в) $\frac{5x}{16} - \frac{15\sin 2x}{64}$ $+\frac{3\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192}$. г) $-\frac{35\cos x}{64} + \frac{7\cos 3x}{64} - \frac{7\cos 5x}{320} + \frac{\cos 7x}{448}$.

д) $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$ (вж. зад. 4 щ)). е) $-\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x$.

ж) $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

з) $-\frac{\cos x}{5\sin^5 x} - \frac{4\cos x}{15\sin^3 x} - \frac{8}{15}\operatorname{ctg} x$.

27. Аналогично на зад. 25.

28. За а) — г) използвайте зад. 30, гл. II. а) $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4}$ $+\frac{\sin 4x}{32}$. б) $\frac{5\sin x}{8} + \frac{5\sin 3x}{48} + \frac{\sin 5x}{80}$. в) $\frac{5x}{16} + \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{3\sin 4x}{64}$ $+\frac{\sin 6x}{192}$. г) $\frac{35\sin x}{64} + \frac{7\sin 3x}{64} + \frac{7\sin 5x}{320} + \frac{\sin 7x}{448}$. д) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$ (вж. зад. 4 ъ)). е) $\frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x}$ $+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$. ж) $\frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{4\sin x}{15\cos^3 x} + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x$.

29. Аналогично на зад. 25.

30. а) $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}$. б) $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9}$.

31. Аналогично на зад. 25.

32. а) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x|$.

б) $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x|$.

в) $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$. г) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x|$.

д) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$. е) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln|\sin x|$.

33. Аналогично на зад. 25.

34. а) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = 16\int \frac{dx}{\sin^4 2x} = -8\int \frac{d\operatorname{ctg} 2x}{\sin^2 2x}$ $= -8\int (1+\operatorname{ctg}^2 2x) d\operatorname{ctg} 2x = -8\operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x$. б) $\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}$ $-3\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} + 3\ln|\operatorname{tg} x|$. в) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} dx$ $= \int \sqrt{\operatorname{tg} x}\frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}\sin^2 x} = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} - 2\sqrt{\operatorname{ctg} x}$.

35. а) и б) Да положим $c(x) = \int e^{ax}\cos bx dx$, $s(x) = \int e^{ax}\sin bx dx$. Тогава $c(x) = \frac{1}{a}\int \cos bx de^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}s(x)$, $s(x) = \frac{1}{a}\int \sin bx de^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}c(x)$. От тези две уравнения се намира

$$c(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx),$$

$$s(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx).$$

Макар и изведен при предположението $a \neq 0$, този резултат е верен и при $a = 0$.

36. а) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} - e^x(\cos x + \sin x) + \frac{e^{2x}}{2}$.

б) $\frac{e^{ax}}{2a} - \frac{e^{ax}}{a^2+4b^2}\left(\frac{a}{2}\cos 2bx + b\sin 2bx\right)$.

37. а) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(\left(ax - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\sin bx - \left(bx - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\cos bx\right)$.

б) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(\left(ax - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos bx + \left(bx - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\sin bx\right)$.

в) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left\{\left(ax^2 - 2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x + \frac{2a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^2}\right)\cos bx\right.$

$$\left. + \left(bx^2 - \frac{4ab}{a^2+b^2}x + \frac{2b(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\right)\sin bx\right\}.$$

38. а) $\frac{e^{ax}}{2}\left(\frac{a\sin(b+c)x - (b+c)\cos(b+c)x}{a^2+(b+c)^2}\right.$ $\left. + \frac{a\sin(b-c)x - (b-c)\cos(b-c)x}{a^2+(b-c)^2}\right)$. б) $\frac{e^{ax}}{4}\left(2\frac{a\cos cx + c\sin cx}{a^2+c^2}\right.$ $\left. - \frac{a\cos(2b+c)x + (2b+c)\sin(2b+c)x}{a^2+(2b+c)^2} - \frac{a\cos(2b-c)x + (2b-c)\sin(2b-c)x}{a^2+(2b-c)^2}\right)$.

40. а) $\int x\ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2 = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 d\ln x$ $= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2$. б) $\frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\ln x - \frac{1}{a+1}\right)$ при $a \neq -1$ и $\frac{1}{2}(\ln x)^2$ при $a = -1$.

41. а) $\frac{x^2}{2}\left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right)$. б) $x^{a+1}\left(\frac{(\ln x)^3}{a+1} - 3\frac{(\ln x)^2}{(a+1)^2}\right.$ $\left. + \frac{6\ln x}{(a+1)^3} - \frac{6}{(a+1)^4}\right)$ при $a \neq -1$ и $\frac{1}{4}(\ln x)^4$ при $a = -1$.

42. Интегрирайте по части.

43. а) $\frac{2x^3+3x^2}{6}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right)$.

б) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1) - \frac{x^2}{2}$. в) $\frac{1}{2}((x^2+a^2)\ln(x^2+a^2) - x^2)$.

г) $\frac{1}{5}\left(x^5\ln(x^2+a^2) - \frac{2}{25}x^5 + \frac{2}{15}a^2x^3 - \frac{2}{5}a^4x + \frac{2}{5}a^5\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)$.

44. а) $x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}$. б) $x\left(\arccos\frac{x}{a}\right)^3$ $-3\sqrt{a^2-x^2}\left(\arccos\frac{x}{a}\right)^2 - 6x\arccos\frac{x}{a} + 6\sqrt{a^2-x^2}$.

в) $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$. г) $\frac{\arccos x}{x} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}$.

д) $x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$. е) $\frac{x^2}{4} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}(\arcsin x)^2$.

ж) $\frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

з) $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$. и) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

45. а) $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x}{2}$. б) $\dfrac{1}{4}(x^4-1)\operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x}{4}$.

в) $\dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\ln\dfrac{|\alpha+\beta x|}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{\beta-\alpha x}{\alpha+\beta x}\operatorname{arc\,tg} x\right)$. г) $-\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{2}{3}\ln(1+x^2)$ $+\left(\dfrac{x^3}{3} - x\right)\operatorname{arc\,tg} x + \dfrac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$.

д) $-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,tg} x + \sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$.

46. а) Да оставим в субституцията

$$x = a\sin t \tag{1}$$

променливата t да описва интервала $\Delta_1 = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогава x описва интервала $\Delta = (-a, a)$, функцията (1) е обратима и обратната ѝ функция

$$t = \arcsin\frac{x}{a} \tag{2}$$

е диференцируема навсякъде в Δ. Ето защо прилагането на субституцията (1) може да бъде използувано за пресмятане на интеграли от вида $\int f(x)dx$ в интервала $(-a, a)$.

От (1) след диференциране се получава $dx = a\cos t dt$, откъдето след заместване в търсения интеграл следва

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}dx &= a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt = a^2\int\cos^2 t dt\\ &= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t.\end{aligned} \tag{3}$$

От (1) следва $\sin t = \dfrac{x}{a}$ и $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. Като заместим (2) и тези изрази в дясната страна на (3), получаваме

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

за $x \in (-a, a)$ (срв. със зад. 14 б)). б) Като се работи аналогично на а), се получава

$$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2}\operatorname{tg} t = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

47. а) Да оставим в субституцията

$$x = a\operatorname{sh} t \tag{1}$$

променливата t да опише цялата права. Тогава x също пробягва цялата права, а функцията (1) е обратима и обратната ѝ функция

$$t = Ar\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right) \tag{2}$$

е диференцируема в $\mathbf{R}$. Ето защо субституцията (1) може да се използува за пресмятане на интеграли върху цялата права.

От (1) след диференциране се получава $dx = a\operatorname{ch} t dt$, откъдето, като заместим в търсения интеграл, получаваме

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2+x^2}dx &= a^2\int\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t dt = a^2\int\operatorname{ch}^2 t dt\\ &= \frac{a^2}{2}\int(1+\operatorname{ch} 2t)dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\operatorname{sh} 2t = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t.\end{aligned} \tag{3}$$

От (1) следва $\operatorname{sh} t = \dfrac{x}{a}$ и $\operatorname{ch} t = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2}}$. Като заместим (2) и тези изрази в (3), получаваме

$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = \dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln a$, където константата $-\dfrac{a^2}{2}\ln a$ може и да се изпусне (срв. със зад. 14 а)).

б) Като се работи аналогично на а), се получава

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{1}{a^2}\operatorname{th} t = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

48. а) Да оставим в субституцията

$$x = a\operatorname{tg} t \tag{1}$$

променливата t да описва интервала $\Delta_1 = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогава x описва цялата права, а функцията (1) е обратима и обратната ѝ функция

$$t = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} \tag{2}$$

е диференцируема в $\mathbf{R}$. Ето защо субституцията (1) може да се използува за пресмятане на интеграли върху цялата права.

От (1) след диференциране се получава $dx = \dfrac{adt}{\cos^2 t}$, откъдето, като заместим в търсения интеграл, получаваме

$$(3) \qquad \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3}(t + \sin t \cos t).$$

От (1) следва $\sin t \cos t = \dfrac{ax}{a^2+x^2}$. Като заместим (2) и този израз в (3), получаваме

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$$

(срв. със зад. 15 а), б), в)). б) Като се работи аналогично на а), се получава

$$\int \frac{x^3 dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{a^2}\int \sin^3 t \cos t dt = \frac{1}{4a^2}\sin^4 t = \frac{x^4}{4a^2(a^2+x^2)^2}.$$

49. За интеграла на зад. 6 а) субституцията на Хорнер е $x = t-3$, а от зад. 9 а) е $x = t-2$.

50. След субституцията интегралите добиват съответно вида $\int e^t \sin t dt$ и $\int e^t \cos t dt$. Ето защо те са частен случай от интегралите в зад. 35. Поради тази причина решенията на зад. 19 и 35 са сходни. Читателят трябва да свикне да схваща като несъществено различни интеграли, които се получават един от друг чрез стандартни субституции. За разгледаните дотук интеграли ще отбележим, че например интегралът от зад. 16 а) не е съществено различен от интеграла от зад. 27 а) при четно n : вторият се получава от първия чрез субституцията $x = a\operatorname{tg} t$.

51. а) Тъй като степента на числителя е по-ниска от степента на знаменателя, а нулите на знаменателя са реални и различни, подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$(1) \qquad \frac{1}{(1+x)(2+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{2+x}.$$

След освобождаване от знаменателя от (1) се получава

$$(2) \qquad 1 = A(2+x) + B(1+x).$$

От (2) чрез приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x от двете страни на равенството за A и B се получава системата

$$\left| \begin{array}{l} 0 = A + B, \\ 1 = 2A + B. \end{array} \right.$$

Ето защо

$$(3) \qquad A = 1, \quad B = -1.$$

След заместване на (3) в (1) и интегриране за търсения интеграл намираме $\ln\left|\dfrac{1+x}{2+x}\right|$.

Използуваният тук метод на неопределените коефициенти позволява във всички случаи да се определят константите в разлагането на рационалните функции в суми от елементарни дроби. При по-сложен знаменател обаче той води до дълги пресмятания, които се избягват с някои не така универсални, но по-удобни методи за намиране на коефициентите, част от които ще бъдат илюстрирани в следващите задачи.

б) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2x+1}{4x+3}\right|$. в) $\dfrac{2}{3}\ln|x+2| + \dfrac{1}{3}\ln|x-1|$.

г) $\dfrac{1}{ad-bc}\ln\left|\dfrac{c+dx}{a+bx}\right|$. д) $\dfrac{b}{b-a}\ln|b+x| - \dfrac{a}{b-a}\ln|a+x|$.

е) $\dfrac{1}{24}\ln\left|\dfrac{x^3-9}{x^3-1}\right|$. Внесете x^2 под диференциала.

52. а) Понеже степента на числителя на подинтегралната функция е по-ниска от степента на знаменателя, а нулите на знаменателя са реални и прости, ще бъде в сила разлагането в сума от елементарни дроби:

$$(1) \qquad \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{2x-5}$$

при $x \neq \dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}$. След освобождаване от знаменателя от (1) се получава

$$(2) \qquad 4x^2+4x-11 = A(2x+3)(2x-5) + B(2x-1)(2x-5) + C(2x-1)(2x+3).$$

Равенството (2) е в сила за всички реални стойности на x, различни от $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{5}{2}$, които са безбройно много. Тъй като лявата и дясната страна на (2) са полиноми, от принципа за сравняване на коефициентите (вж. §3, гл. II) следва, че равенството (2) е изпълнено за всички реални стойности на x. Ако в (2) на x дадем последователно стойностите $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{5}{2}$, ще получим съответно

$A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{3}{4}$, поради което (1) добива вида

$$(3)\qquad \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}=\frac{1}{2(2x-1)}-\frac{1}{4(2x+3)}+\frac{3}{4(2x-5)}.$$

От (3) за търсения интеграл се получава

$$\int\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx=\frac{1}{4}\ln|2x-1|-\frac{1}{8}\ln|2x+3|+\frac{3}{8}\ln|2x-5|.$$

Да отбележим изрично, че коефициентите A, B и C бяха пресметнати, като в тъждеството (2) на x бяха дадени конкретни стойности. Най-удобни за тази цел са нулите на знаменателя в лявата страна на (1). Този метод често е полезен: при прости нули на знаменателя той дава възможност да се пресметнат всички коефициенти в разлагането; в по-сложния случай на многократни нули всяка нула на знаменателя дава възможност за пресмятане на един коефициент.

б) Не е трудно да се съобрази, че

$$x^4-5x^2+4=(x-1)(x-2)(x+1)(x+2).$$

Тъй като степента на числителя на подинтегралната функция е по-ниска от степента на знаменателя, а нулите на знаменателя са реални и прости, ще бъде в сила разлагането в сума от елементарни дроби

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+2}.$$

Като се процедира, както в а), за коефициентите се получава

$$A=-\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3},\ D=-\frac{2}{3},$$

откъдето $\displaystyle\int\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$

$$=-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{2}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln|x+2|.$$

в) Тук степента на числителя на подинтегралната функция е по-висока от степента на знаменателя. Ето защо най-напред ще извършим деление:

$$\begin{array}{l|l} -\ x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \underline{x^5-4x^3} & x^2+x+4 \\ \quad -\ x^4+4x^3-8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^4-4x^2} \\ -\ 4x^3+4x^2-8 \\ \underline{4x^3-16x} \\ \qquad 4x^2+16x-8 \end{array}$$

Оттук следва

$$(1)\qquad \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Дробта в дясната страна на (1) ще се представи като сума от елементарни дроби по следния начин:

$$(2)\qquad \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Коефициентите в разлагането (2) се определят, както в а), и се получава $A=2$, $B=5$, $C=-3$. Ето защо от (1) и (2) следва

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|.$$

53. а) $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|.$

б) $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|.$

в) $\frac{1}{2}\ln|x-\sqrt{2}|+\frac{1}{2}\ln|x|+\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|\right).$

г) $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|.$

55. а) $\frac{1}{2+x}+\ln\left|\frac{1+x}{2+x}\right|$. б) $\frac{-2}{2+x}-\ln\left|\frac{1+x}{2+x}\right|$. в) $\frac{4}{2+x}+\ln|1+x|$. г) $-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}-2\ln\left|\frac{1+x}{2+x}\right|$. д) $-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}+3\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|$. е) Тъй като степента на числителя е по-ниска от степента на знаменателя, а нулите на знаменателя са реални и двукратни, подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{(1+x)^2(2+x)^2}=\frac{A}{(1+x)^2}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{(2+x)^2}+\frac{D}{2+x}.$$

От (1) след освобождаване от знаменателя се получава равенството

(2) $x^2 = A(2+x)^2 + B(1+x)(2+x)^2 + C(1+x)^2 + D(2+x)(1+x)^2,$

валидно за всички реални x. Ако в (2) дадем на x стойностите -1 и -2, ще получим

(3) $$A = 1, \quad C = 4.$$

В този случай, като заместим в (2) нулите на знаменателя на (1), се получават само част от коефициентите. За да получим и останалите два коефициента, ще приравним коефициентите пред най-високите степени на x в двете страни на (2), а също така и коефициентите пред най-ниските степени:

(4) $$\begin{aligned} 0 &= B + D, \\ 0 &= 4A + 4B + C + 2D. \end{aligned}$$

От (3) и (4) следва

(5) $$B = -4, \quad D = 4.$$

Сега от (1), (3) и (5) се получава

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x)^2(2+x)^2} = -\frac{1}{1+x} - \frac{4}{2+x} - 4\ln\left|\frac{1+x}{2+x}\right|.$$

56. а) $\dfrac{24x-1}{50(1-4x)^2} + \dfrac{9}{125}\ln\left|\dfrac{2-3x}{1-4x}\right|.$

б) $\dfrac{3x^7+14x^5+140x^3-420x}{15(x^2-2)} + 7\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|.$

в) $\dfrac{3x^3-9x^2-11x+17}{128(x^2-2x-3)^2} + \dfrac{3}{512}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right|.$ Чрез субституцията на Хорнер бихте могли да сведете до зад. 16 б).

57. След развиване на полинома P по формулата на Тейлър около точката a и интегриране за търсения интеграл се получава

$$\frac{P^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a| - \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!(x-a)} - \frac{P^{(n-2)}(a)}{2(n-2)!(x-a)^2} - \cdots - \frac{P(a)}{n.1!(x-a)^n}.$$

58. Многократно приложение на зад. 16 б), с помощта на което интегралът се свежда към зад. 1 ж) и з).

59. Да положим $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{x^n(x-1)^n}$. Като се работи аналогично на решението на зад. 16 а), се получава

$$I_n = \int \frac{1-(2x-1)^2}{x^n(x-1)^n}dx + \int \frac{(2x-1)^2 dx}{x^n(x-1)^n} = -4I_{n-1}$$

$$+ \int \frac{(2x-1)dx(x-1)}{x^n(x-1)^n} = -4I_{n-1} - \frac{1}{n-1}\int (2x-1)d\frac{1}{x^{n-1}(x-1)^{n-1}}$$

$$= -4I_{n-1} - \frac{2x-1}{(n-1)x^{n-1}(x-1)^{n-1}} + \frac{2}{n-1}I_{n-1}$$

$$= -\frac{2x-1}{(n-1)x^{n-1}(x-1)^{n-1}} - \frac{2(2n-3)}{n-1}I_{n-1}.$$

По-нататък интегралът се решава чрез рекурсия.

60. а) $a = b$. б) $a = b$ или $a = -b$.

61. а) Подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

(1) $$\frac{1}{a^3+x^3} = \frac{A}{a+x} + \frac{Mx+N}{a^2-ax+x^2}.$$

От (1) след освобождаване от знаменателя се получава равенството

(2) $$1 = A(a^2-ax+x^2) + (Mx+N)(a+x),$$

валидно за всички реални и комплексни стойности на x. Ако в (2) дадем на x стойност $-a$, ще получим

(3) $$A = \frac{1}{3a^2}.$$

Коефициентите M и N ще пресметнем, като използуваме една от комплексните нули на знаменателя. Нека ξ е комплексно число, за което

(4) $$a^2 - a\xi + \xi^2 = 0.$$

Ако в (2) положим $x = \xi$, поради (4) ще получим

(5) $$\begin{aligned} 1 &= (M\xi+N)(a+\xi) = M\xi^2 + (aM+N)\xi + Na \\ &= (2Ma+N)\xi + Na - Ma^2. \end{aligned}$$

Тъй като ξ е комплексно, а a, M и N са реални, от (5) следва

$$2Ma + N = 0,$$

$$Na - Ma^2 = 1,$$

откъдето

$$(6) \qquad M = -\frac{1}{3a^2}, \quad N = \frac{2}{3a}.$$

От (1), (2) и (6) се получава

$$(7) \qquad \int \frac{dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{3a^2}\ln|x+a| - \frac{1}{3a^2}\int \frac{x-2a}{a^2-ax+x^2}dx.$$

От (7) и зад. 6 е) следва

$$\int \frac{dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{3a^2}\ln|x+a| - \frac{1}{6a^2}\ln(a^2-ax+x^2) + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}.$$

Разбира се, A, M и N биха могли да бъдат пресметнати от (2) и с помощта на метода на неопределените коефициенти. В този случай използването на комплексната нула ξ не опростява пресмятанията, но при по-сложни знаменатели този метод има технически предимства пред метода на неопределените коефициенти.

б) Подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\frac{x}{a^3+x^3} = \frac{A}{a+x} + \frac{Mx+N}{a^2-ax+x^2}.$$

По-нататък се работи, както в а), и за интеграла се получава

$$\frac{1}{6a}\ln(a^2-ax+x^2) - \frac{1}{3a}\ln|a+x| + \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}.$$

в) $-\dfrac{1}{a^3x} - \dfrac{1}{6a^4}\ln(a^2-ax+x^2) + \dfrac{1}{3a^4}\ln|a+x| - \dfrac{1}{a^4\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-a}{a\sqrt{3}}.$

г) Тъй като

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1) - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2$$
$$= (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Mx+N}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Px+Q}{x^2-x\sqrt{2}+1},$$

откъдето за коефициентите се получава

$$M = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad P = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad N = Q = \frac{1}{2}.$$

Ето защо

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1)$$

съгласно зад. 6 е). д) Подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$(1) \qquad \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{x^2+3} + \frac{Gx+H}{x^2+4},$$

откъдето

$$(2) \qquad 1 = (Ax+B)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)$$
$$+(Cx+D)(x^2+1)(x^2+3)(x^2+4) + (Ex+F)(x^2+1)(x^2+2)(x^2+4)$$
$$+(Gx+H)(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3).$$

За да пресметнем например коефициентите A и B, полагаме в (2) $x = i$ и получаваме

$$(3) \qquad 1 = (Ai+B)6.$$

Тъй като A и B са реални числа, от (3) следва

$$(4) \qquad A = 0, \quad B = \frac{1}{6}.$$

Аналогично, като се положи в (2) $x = i\sqrt{2}$, $x = i\sqrt{3}$ и $x = 2i$, за останалите коефициенти се получава

$$(5) \qquad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}, \quad E = 0, \quad F = \frac{1}{2}, \quad G = 0, \quad H = -\frac{1}{6}.$$

След заместване на (4) и (5) в (1) и интегриране за търсения интеграл намираме

$$\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{12}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}.$$

е) $\dfrac{(x+1)^2}{2} + \ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arc\,tg}x.$

ж) $\dfrac{3}{2}\ln(x^2-2x+5) - \ln|x-1| + \dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{2}.$

62. а) В този случай субституцията на Хорнер има вида $x = t - \frac{1}{2}$, откъдето $dx = dt$. Ето защо търсеният интеграл добива вида

(1) $$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}.$$

Като се работи, както в зад. 15, или се използва зад. 16, се получава

(2) $$\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{2t}{3\left(t^2+\frac{3}{4}\right)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t}{\sqrt{3}}.$$

Тъй като $t = x + \frac{1}{2}$, от (1) и (2) следва

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

б) $$\frac{2x+1}{7(x^2+x+2)} + \frac{4}{7\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}}.$$

в) Като се използва субституцията на Хорнер $x = t - \frac{1}{2}$, се получава

(1) $$\int \frac{xdx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{tdt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}.$$

Но

(2) $$\int \frac{tdt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{1}{2\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}.$$

От (1), (2) и формула (2) от решението на а) следва

(3) $$\int \frac{xdx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{3+2t}{6\left(t^2+\frac{3}{4}\right)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t}{\sqrt{3}}.$$

Като заместим в дясната страна на (3) $t = x + \frac{1}{2}$, получаваме окончателно $\int \frac{xdx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{x+2}{3(x^2+x+1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

г) $$-\frac{x+4}{7(x^2+x+2)} - \frac{2}{7\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}}.$$

д) $$-\frac{57x^2+136x+39}{28(3x+1)(3x^2+2x+5)} - \frac{19}{28\sqrt{14}} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x+1}{\sqrt{14}}.$$

63. Използувайте субституцията на Хорнер, за да сведете към зад. 16. Тези формули могат успешно да се използват за пресмятане на интеграли от елементарни дроби от вида $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$.

64. а) $$\frac{(x-2)(x^2-4x+19)}{216(x^2-4x+13)^2} + \frac{1}{648} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-2}{3}.$$

б) $$\frac{(2x+3)(6x^2+18x+41)}{242(x^2+3x+5)^2} + \frac{12}{121\sqrt{11}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+3}{\sqrt{11}}.$$

65. а) Подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

(1) $$\frac{1}{(1+x^3)^2} = \frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x} + \frac{Mx+N}{(1-x+x^2)^2} + \frac{Px+Q}{1-x+x^2},$$

откъдето

(2) $$1 = A(1-x+x^2)^2 + B(1+x)(1-x+x^2)^2 + (Mx+N)(1+x)^2 + (Px+Q)(1+x)^2(1-x+x^2).$$

Ако в (2) положим $x = -1$, ще получим

(3) $$A = \frac{1}{9}.$$

Коефициентите M и N ще пресметнем, като използуваме една от комплексните нули на знаменателя. Нека ξ е комплексно число, за което

(4) $$1 - \xi + \xi^2 = 0.$$

Ако в (2) положим $x = \xi$, след неколкократно използуване на (4) ще получим

(5) $$1 = (M\xi + N)(1+\xi)^2 = 3\xi(M+N) - 3M.$$

Тъй като числото ξ е комплексно, а M и N са реални, от (5) следва $0 = M + N, 1 = -3M$, откъдето

(6) $$M = -\frac{1}{3}, \quad N = \frac{1}{3}.$$

Останалите три константи B, P и Q могат да се пресметнат, като в (2) се приравнят коефициентите пред еднаквите степени на x.

Тук ще илюстрираме един друг метод, който в някои случаи е по-кратък. След диференциране от (2) се получава

$$(7)\qquad \begin{aligned} 0 &= 2A(1-x+x^2)(2x-1)+B(1-x+x^2)^2\\ &+2B(1+x)(1-x+x^2)(2x-1)+M(1+x)^2\\ &+2(Mx+N)(1+x)+P(1+x)^2(1-x+x^2)\\ &+2(Px+Q)(1+x)(1-x+x^2)+(Px+Q)(1+x)^2(2x-1). \end{aligned}$$

В (7) полагаме $x=-1$ и получаваме $0=-18A+9B$, което заедно с (3) дава

$$(8)\qquad B=\frac{2}{9}.$$

Сега в (7) полагаме $x=\xi$ и след неколкократно използване на (4) получаваме

$$(9)\qquad 0=\xi(7M+2N-3P+3Q)-2M+2N-3P-6Q,$$

откъдето поради (6) следва

$$3P-3Q=-\frac{5}{3},$$

$$3P+6Q=\frac{4}{3},$$

т. е.

$$(10)\qquad P=-\frac{2}{9},\quad Q=\frac{1}{3}.$$

От (1), (3), (6), (8) и (10) след интегриране и използване на техниката от зад. 61 или на зад. 62 за търсения интеграл се получава

$$\frac{x}{3(1+x^3)}+\frac{2}{9}\ln|1+x|-\frac{1}{9}\ln(1-x+x^2)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

б) $\dfrac{x^2}{3(1+x^3)}+\dfrac{1}{18}\ln(1-x+x^2)-\dfrac{1}{9}\ln|1+x|+\dfrac{1}{3\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

в) Подинтегралната функция се разлага в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Mx+N}{(1+x^2)^2}+\frac{Px+Q}{1+x^2}.$$

След пресмятане на коефициентите и интегриране за търсения интеграл се получава $-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$

г) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3-4x}{x^2+1}+\ln|x-2|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-4\operatorname{arc\,tg}x.$

д) $-\dfrac{11x^2+18x+13}{3(x+1)(x^2+x+1)}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2}-\dfrac{25}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

е) $\dfrac{2x^3-6x^2+8x-9}{(x^2-2x+2)^2}+\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}+2\operatorname{arc\,tg}(x-1).$

ж) $-\dfrac{x^4+2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)^2}.$

з) $-\dfrac{x}{8(x^2+4)}-\dfrac{2x+5}{2(x^2+4x+5)}-\dfrac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{arc\,tg}(x+2).$

66. Нека

$$(1)\qquad G(x)=A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)$$

и

$$(2)\qquad f(x)=\frac{S(x)}{G(x)}.$$

От правилото за диференциране на произведение от няколко множителя следва

$$(3)\qquad f'(x)=\frac{S'(x)}{G(x)}-\frac{S(x)}{G(x)}\left(\frac{s_1}{A_1(x)}+\dots+\frac{s_k}{A_k(x)}+\frac{t_1(2x+p_1)}{B_1(x)}+\dots+\frac{t_l(2x+p_l)}{B_l(x)}\right)=\frac{T(x)}{A_1^{s_1+1}(x)\dots A_k^{s_k+1}(x)B_1^{t_1+1}(x)\dots B_l^{t_l+1}(x)},$$

където

$$(4)\qquad T(x)=A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)\left(S'(x)-S(x)\left(\frac{s_1}{A_1(x)}+\dots+\frac{s_k}{A_k(x)}+\frac{t_1(2x+p_1)}{B_1(x)}+\dots+\frac{t_l(2x+p_l)}{B_l(x)}\right)\right).$$

Тъй като $T(x)$ очевидно е полином на x, твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че той е взаимно прост със знаменателя на дясната страна на (3). В противен случай полиномът $T(x)$ би се анулирал за някоя нула ξ на този знаменател. Нека например $T(\xi)=0$, където ξ е нула на $A_1(x)$, т. е. $A_1(\xi)=0$. От (4) не е трудно да се заключи, че тогава

$$(5)\qquad 0=T(\xi)=-A_2(\xi)\dots A_k(\xi)B_1(\xi)\dots B_l(\xi)S(\xi)s_1,$$

което е противоречие, понеже полиномите $A_1,\dots,A_k$, $B_1,\dots,B_l$ и S нямат общи нули и $s_1\neq 0$. Ако пък $T(\xi)=0$, където $B_1(\xi)=0$, от (4) вместо (5) се получава

(6) $$0 = T(\xi) = -A_1(\xi)\dots A_k(\xi)B_2(\xi)\dots B_l(\xi)S(\xi)t_1(2\xi + p_1).$$

В този случай числото ξ е комплексно, поради което $2\xi + p_1 \neq 0$. Сега (6) води до противоречие по същия начин, както и (5).

67. Разглежданият интеграл очевидно не е полином, понеже производната на полином е пак полином и следователно не може да съвпадне с подинтегралната функция, тъй като R и $A_1 \dots A_k B_1 \dots B_l$ са взаимно прости и $k + l > 0$. Ето защо, ако допуснем противното, ще се окаже, че съществуват такава система

(1) $$a_1^*, a_2^*, \dots, a_{k'}^*,$$

от различни реални числа и такава система

(2) $$(p_1^*, q_1^*), (p_2^*, q_2^*), \dots, (p_{l'}^*, q_{l'}^*) \quad (k' + l' > 0)$$

от различни двойки реални числа, за които $(p_\lambda^*)^2 - 4q_\lambda^* < 0$ $(\lambda = 1, \dots, l')$, че ако положим

(3) $$A_\kappa^*(x) = x - a_\kappa^* \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k')$$

и

(4) $$B_\lambda^*(x) = x^2 + p_\lambda^* x + q_\lambda^* \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l'),$$

ще съществува полином S, взаимно прост с полиномите (3) и (4), за който

(5) $$\int \frac{R(x)dx}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)} = \frac{S(x)}{A_1^{*s_1}(x)\dots A_k^{*s_k}(x)B_1^{*t_1}(x)\dots B_l^{*t_l}(x)}.$$

Като се използува зад. 66, от (5) чрез диференциране се получава

(6) $$\frac{R(x)}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)} = \frac{T(x)}{A_1^{*s_1+1}\dots A_{k'}^{*s_{k'}+1}(x)B_1^{*t_1+1}(x)\dots B_{l'}^{*t_l+1}(x)},$$

където числителят и знаменателят на дясната страна са взаимно прости. Тъй като по условие числителят и знаменателят и на лявата страна на (6) са взаимно прости, като се освободим от знаменателя и използуваме теоремата за единственост на разлагането на полином в произведение от неразложими множители, виждаме, че $A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)$

$$= A_1^{*s_1+1}(x)\dots A_k^{*s_{k'}+1}(x)B_1^{*t_1+1}(x)\dots B_{l'}^{*t_l+1}(x),$$

откъдето с помощта на същата теорема за единственост заключаваме, че

$k' = k$, $l' = l$, $s_\kappa = 0\,(\kappa = 1, 2, \dots, k)$ и $t_\lambda = 0\,(\lambda = 1, 2, \dots, l)$.

По този начин от (5) следва, че разглежданият интеграл е полином, което, както видяхме, е невъзможно.

68. Единственост. Нека полиномите $Q(x)$ и $Q_1(x)$ са от степен, по-малка от $\sum_{\kappa=1}^{k} s_\kappa + 2\sum_{\lambda=1}^{l} t_\lambda - k - 2l$; полиномите $R(x)$ и $R_1(x)$ са от степен, по-малка от $k + 2l$, и

(1) $$\int \frac{P(x)dx}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} = \frac{Q(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)} + \int \frac{R(x)dx}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)},$$

(2) $$\int \frac{P(x)dx}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} = \frac{Q_1(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)} + \int \frac{R_1(x)dx}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)}.$$

От (1) и (2) след изваждане се получава

(3) $$\int \frac{R(x) - R_1(x)}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)}dx = \frac{Q_1(x) - Q(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)}.$$

Тъй като числителят на подинтегралната функция в (3) има по-ниска степен от знаменателя, а в дясната страна на (3) фигурира рационална функция на x, не е трудно да се съобрази, че ако допуснем $R \neq R_1$, се получава противоречие със зад. 67. Ето защо $R = R_1$. Сега от (3) следва

(4) $$\frac{Q_1(x) - Q(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)} = C,$$

където C е константа. Тъй като в (4) степента на числителя също е по-ниска от степента на знаменателя, в сила е $C = 0$, поради което $Q = Q_1$.

С ъ щ е с т в у в а н е. Съществуването ще установим чрез индукция относно сумата $s_1+\dots+s_k+t_1+\dots+t_l$.

Нека най-напред $s_1+\dots+s_k+t_1+\dots+t_l=1$. Не е трудно да се установи, че тогава интегралът

$$I=\int\frac{P(x)dx}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} \tag{5}$$

е от вида

$$\int\frac{R(x)dx}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)}, \tag{6}$$

поради което може да се положи $Q=0$, $R=P$.

Нека твърдението е вярно винаги когато $s_1+\dots+s_k+t_1+\dots+t_l=n$ $(n=1,2,\dots)$, и нека показателите в знаменателя на (5) са такива, че $s_1+\dots+s_k+t_1+\dots+t_l=n+1$. Ако всичките показатели в знаменателя на (5) са равни на 1, интегралът (5) е от вида (6), поради което отново може да се положи $Q=0$, $R=P$. Ето защо остава да се разгледа само случаят, когато някой от тези показатели е по-голям от 1. Нека например $s_1\geqq 2$. От равенството (29) от §10 следва съществуването на константа A и полином $P_1(x)$, за който $\deg P_1(x)$* $<n+\sum\limits_{\lambda=1}^{l}t_\lambda$ и

$$\frac{P(x)}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} \tag{7}$$
$$=\frac{A}{A_1^{s_1}(x)}+\frac{P_1(x)}{A_1^{s_1-1}(x)A_2^{s_2}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)}.$$

От (7) след интегриране се получава

$$I=-\frac{A}{(s_1-1)A_1^{s_1-1}(x)} \tag{8}$$
$$+\int\frac{P_1(x)dx}{A_1^{s_1-1}(x)A_2^{s_2}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)}$$

поради $s_1>1$. Но интегралът от дясната страна на (8) е от вида (5) със сума от показателите в знаменателя, равна на n. Ето защо към него може да се приложи индукционното предположение и да се заключи съществуването на полиноми $Q_1(x)$ и $R_1(x)$, за които

* С $\deg P(x)$ обикновено означаваме степента на полинома $P(x)$.

$$\deg Q_1<\sum_{\kappa=1}^{k}s_\kappa+2\sum_{\lambda=1}^{l}t_\lambda-k-2l,\quad \deg R_1<k+2l,$$

$$\int\frac{P_1(x)dx}{A_1^{s_1-1}(x)A_2^{s_2}(x)\dots A_k^{s_k}B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} \tag{9}$$
$$=\frac{Q_1(x)}{A_1^{s_1-2}(x)A_2^{s_2-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)}$$
$$+\int\frac{R_1(x)dx}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)}.$$

Верността на твърдението в този случай следва от (8) и (9). Ако пък например $t_1\geqq 2$, от равенство (30) от §10 следва съществуването на константи M и N и на полином $P_2(x)$, за който $\deg P_2<n-1+\sum\limits_{\lambda=1}^{l}t_\lambda$ и

$$\frac{P(x)}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} \tag{10}$$
$$=\frac{Mx+N}{B_1^{t_1}(x)}+\frac{P_2(x)}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1-1}(x)B_2^{t_2}(x)\dots B_l^{t_l}(x)}.$$

От (10) след интегриране с използване на зад. 63 се получава

$$I=\frac{Cx+D}{B_1^{t_1-1}(x)} \tag{11}$$
$$+\int\left[\frac{E}{B_1^{t_1-1}(x)}+\frac{P_2(x)}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1-1}(x)B_2^{t_2}(x)\dots B_l^{t_l}(x)}\right]dx,$$

където C, D и E са константи. Към интеграла в дясната страна на (11) отново е приложимо индукционното предположение. Ето защо в този случай верността на твърдението следва от (11). С това задачата е решена.

В светлината на метода на Остроградски–Ермит пресмятането на интеграли от рационални функции може да се извършва така: Най-напред се разделя числителят на знаменателя, за да се сведе задачата до интегриране на рационална функция, в която степента на числителя е по-ниска от степента на знаменателя. Ако по този начин сме стигнали до интеграла (5), търсим полиноми Q и R, за които да е в сила (1), т. е.

$$\frac{P(x)}{A_1^{s_1}(x)\dots A_k^{s_k}(x)B_1^{t_1}(x)\dots B_l^{t_l}(x)} \tag{12}$$

$$= \left[\frac{Q(x)}{A_1^{s_1-1}(x)\dots A_k^{s_k-1}(x)B_1^{t_1-1}(x)\dots B_l^{t_l-1}(x)}\right]'$$
$$+\frac{R(x)}{A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)},$$

или, което е същото,

(13) $$\frac{P(x)}{G(x)} = \frac{Q'(x)}{G_1(x)} - \frac{Q(x)}{G_1^2(x)}G_1'(x) + \frac{R(x)}{G_2(x)},$$

където $G(x)$ е дефинирано в (1) от решението на зад. 66, а $G_1(x)$ и $G_2(x)$ са дефинирани със

$$G_2(x) = A_1(x)\dots A_k(x)B_1(x)\dots B_l(x)$$

и

$$G_1(x) = \frac{G(x)}{G_2(x)}.$$

За намиране на неизвестните полиноми Q и R в (13) след освобождаване от знаменателя се приравняват коефициентите пред еднаквите степени на x. Получената система уравнения съгласно доказаното винаги ще има решение и всяко нейно решение ще даде двойка полиноми Q и R с желаните свойства (откъдето между прочем следва единствеността на решението на тази система). По такъв начин методът на Остроградски–Ермит дава възможност без интегриране да се намира „рационалната част" на интеграла (5), а интегриране да се извършва само за пресмятане на интеграла (6). За пресмятането на (6) може да се прибегне до разлагане на подинтегралната функция в сума от елементарни дроби. Тъй като нулите на знаменателя са прости, за да се намерят коефициентите на това разлагане, е достатъчно да се използват само нулите на знаменателя (зад. 52 и 61).

Този метод може успешно да се приложи към решените вече зад. 55, 56, 60, 64 и 65.

69. а) $-\dfrac{x+5}{9(x^2+x-2)} - \dfrac{1}{27}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|.$

б) $\dfrac{1}{3}(x-1)^3 + \dfrac{4x+2}{3(x^2+x+1)} + \ln(x^2+x+1) - \dfrac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

в) $\dfrac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x}{4(x^4-1)} - \dfrac{3}{16}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|.$

г) $\dfrac{x}{(x^2-2x+2)^2} - \ln(x^2-2x+2) + \operatorname{arc\,tg}(x-1).$

д) $\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}.$

е) Нека I е търсеният интеграл. Съгласно зад. 68 съществуват полином Q от степен, по-ниска от 6, и полином R от степен, по-ниска от 3, за които

(1) $$I = \frac{Q(x)}{(1+x^3)^2} + \int\frac{R(x)dx}{1+x^3}.$$

От (1) след диференциране и освобождаване от знаменателя се получава

(2) $$x^7 + x^6 - 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 3x + 1$$
$$= Q'(x)(1+x^3) - 6Q(x)x^2 + R(x)(1+x^3)^2.$$

Нека

(3) $$Q(x) = q_0x^5 + q_1x^4 + q_2x^3 + q_3x^2 + q_4x + q_5$$

и

(4) $$R(x) = r_0x^2 + r_1x + r_2.$$

От (3) след диференциране се получава

(5) $$Q'(x) = 5q_0x^4 + 4q_1x^3 + 3q_2x^2 + 2q_3x + q_4.$$

Като се заместят (3) — (5) в (2) и след това се приравнят коефициентите пред еднаквите степени на x, получава се следната система уравнения за неизвестните коефициенти на полиномите Q и R:

(6) $$\left|\begin{array}{l} 0 = r_0 \\ 1 = -q_0 + r_1 \\ 1 = -2q_1 + r_2 \\ 0 = -3q_2 + 2r_0 \\ -2 = 5q_0 - 4q_3 + 2r_1 \\ 2 = 4q_1 - 5q_4 + 2r_2 \\ -6 = 3q_2 - 6q_5 + r_0 \\ 3 = 2q_3 + r_1 \\ 1 = q_4 + r_2. \end{array}\right.$$

Решаването на тази система дава

(7) $$r_0 = 0,\ r_1 = 1,\ r_2 = 1$$

и

(8) $$q_0 = 0,\ q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q_3 = 1,\ q_4 = 0,\ q_5 = 1.$$

След заместване на (8) и (7) съответно в (3) и (4), намираме полиномите Q и R, които, заместени в (1), дават

(9) $$I = \frac{1+x^2}{(1+x^3)^2} + \int\frac{1+x}{1+x^3}dx = \frac{1+x^2}{(1+x^3)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

съгласно зад. 6 д).

70 — 72. Разложете в сума от елементарни дроби и след това използвайте зад. 6 е).

73. а) $-6\sqrt[6]{x}-2\sqrt{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|$.

б) $\ln|3\sqrt[3]{x}+1|$. в) $x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|$. г) $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$.

д) $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}\right.$
$\left.-\frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]$. е) $-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$.

ж) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

з) $\ln\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t^2+1}{\sqrt{3}}$ при $t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

74. а) $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$ при $x>0$ и $-\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}+\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-1-x})$ при $x<-1$. б) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\operatorname{arctg}x^{\frac{1}{6}}$.

в) $\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t$ при $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$. г) $-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5$ при $t=\sqrt{1-x^2}$. д) $\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ при $t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. е) $\frac{5}{4}t^4-\frac{5}{9}t^9$ при $t=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$. ж) $\frac{3t}{2(t^3+1)}$
$-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{4}\ln(t^2-t+1)-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$ при $t=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

75. а) $\frac{t^3}{3\sqrt{2}}+2\sqrt{2}t-2\ln\left|\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right|$, където $t=\sqrt{2+x^{\sqrt{2}}}$.

б) $\frac{2t^3}{3\sqrt{3}}+\frac{4t}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t}\right|$, където $t=\sqrt{2-x^{\sqrt{3}}}$. в) В този случай $m=-1$, $n=\pi$, $p=\frac{3}{2}$. Очевидно $\frac{m+1}{n}$ е цяло, поради което е налице (39) от §14. Ето защо трябва да се използва

субституцията (42) от същия параграф, която в този случай има вида

(1) $$a+bx^{\pi}=t^2.$$

От (1) следва

(2) $$x=\left(\frac{t^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{\pi}}$$

и

(3) $$dx=\frac{2t}{\pi b}\left(\frac{t^2-a}{b}\right)^{\frac{1-\pi}{\pi}}dt.$$

Като заместим (1) — (3) в търсения интеграл, стигаме до интеграла

$$\frac{2}{\pi}\int\frac{t^4dt}{t^2-a}=\frac{2}{\pi}\frac{t^3}{3}+\frac{2}{\pi}at+\frac{2a^2}{\pi}\int\frac{dt}{t^2-a}.$$

След пресмятане на интеграла в дясната страна на това равенство за търсения интеграл се получава

$$\int\frac{(a+bx^{\pi})^{\frac{3}{2}}}{x}dx=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{t^3}{3}+\frac{2}{\pi}at+\frac{a\sqrt{a}}{\pi}\ln\left|\frac{\sqrt{a}-t}{\sqrt{a}+t}\right| & \text{при } a\geqq 0,\\ \frac{2}{\pi}\frac{t^3}{3}+\frac{2}{\pi}at+\frac{2a\sqrt{-a}}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{-a}} & \text{при } a<0,\end{cases}$$

където $t=\sqrt{a+bx^{\pi}}$.

76. а) Нека

(1) $$I_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Най-напред ще посочим формула за намаляване на m в (1). За тази цел правим следните преобразувания:

(2) $$I_m=\int\frac{x^{m-2}(x^2-1+1)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$=I_{m-2}-\int x^{m-2}\sqrt{1-x^2}dx=I_{m-2}-\frac{1}{m-1}\int\sqrt{1-x^2}dx^{m-1}$$
$$=I_{m-2}-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m-1}=\frac{1}{m-1}I_m\quad(m\neq 1).$$

От (2) следва

(3) $$I_m = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} I_{m-2} \quad (m \neq 0,\ 1).$$

С помощта на (3) интегралите (1) при $m = 1, 2, \ldots$ се свеждат с рекурсия до интегралите I_0 или I_1. Интегралът I_0 е табличен, а I_1 може да се пресметне така:

$$I_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

За пресмятане на (1) при отрицателни m е необходима формула за повишаване на m. Да въведем означението

(4) $$J_m = \int \frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}.$$

Правим следните преобразувания:

(5) $$J_m = \int \frac{1-x^2+x^2}{x^m\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^m}dx + J_{m-2}$$

$$= -\frac{1}{m-1}\int \sqrt{1-x^2}\,d\frac{1}{x^{m-1}} + J_{m-2}$$

$$= -\frac{1}{m-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}} + J_{m-2}$$

$$= -\frac{1}{m-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}J_{m-2} \quad (m \neq 1).$$

Равенството (5) позволява чрез рекурсия да се сведе пресмятането на J_m до интегралите J_0 и J_1. Интегралът J_0 е табличен, а J_1 най-удобно се пресмята така:

$$J_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^{-2}-1}} = -\int \frac{dx^{-1}}{\sqrt{(x^{-1})^2-1}}$$

$$= -\ln(x^{-1} + \sqrt{x^{-2}-1}) = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

при $0 < x < 1$. Аналогично при $-1 < x < 0$ за J_1 се получава

$$J_1 = \ln\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \ln\frac{-x}{1+\sqrt{1-x^2}},$$

с което задачата е решена. **б)** Аналогично на а).

77. **а)** $\ln|x| - \ln(2 + x + 2\sqrt{x^2+x+1})$. **б)** $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}$.

в) $\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}$. **г)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right|$.

д) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|$. **е)** $-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}$ $-\frac{3}{2}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}| + 2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|$.

ж) $\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t$ при $t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

з) $-\frac{5}{18(t+1)} - \frac{1}{6(t+1)^2} + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{16}{27}\ln|t-2| - \frac{17}{108}\ln|t+1|$ при $t = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+2}$. **и)** $\frac{2(3-4t)}{5(1-t-t^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2t}{\sqrt{5}-1-2t}\right|$ при $t = -x + \sqrt{x(1+x)}$. **й)** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{7}}{t-1+\sqrt{7}}\right|$ при $t = x + \sqrt{x^2+2x+4}$.

78. При $a \neq 0$ си послужете например със субституцията $ax + b = t^2$.

79. При $a = 0$, а също така при $a \neq 0$ и $4a(c\alpha+b\beta) = 8a^2\gamma+3b^2\alpha$.

80. **а)** След субституцията $x = 2\operatorname{arctg} t$ или, което е същото, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ за търсения интеграл се получава $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

б) $\frac{1}{2}x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. **в)** $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ при $|b| < a$ и $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right|$ при $|a| < b$. С това по същество е изчерпан случаят $|a| \neq |b|$. При $|a| = |b| \neq 0$ търсеният интеграл се свежда до интегралите

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

или

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

г) Свежда се към в) с помощта на субституцията $x = \frac{\pi}{2} - t$.

д) $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}$. е) $-\frac{1}{5}(2 \sin x + \cos x)$ $+ \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arc\,tg} 2}{2} \right) \right|$. ж) Интересен е само случаят $b^2 + c^2 \neq 0$. Нека α е ъгъл, за който $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, $\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$. Ако означим търсения интеграл с I, получаваме

$$I = \int \frac{dx}{a + \sqrt{b^2 + c^2}(\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x)} = \int \frac{dx}{a + \sqrt{b^2 + c^2} \cos(x - \alpha)},$$

поради което пресмятането на I се свежда към в).

86. Въпросната субституция не може да се използва за пресмятане на интегралите $\int R(\sin x, \cos x) dx$ в интервала $(0, 2\pi)$, защото множеството от стойностите на функцията $2 \operatorname{arc\,tg} t$ е интервалът $(-\pi, \pi)$, който не покрива интервала $(0, 2\pi)$. Ето защо търсенето на примитивна от разглеждания вид в интервала $(0, 2\pi)$ или в кой да е интервал, който не се съдържа в $(-\pi, \pi)$, трябва да стане с други методи.

Ще покажем как може да се намери примитивна на функцията

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x} \tag{1}$$

върху цялата права. За тази цел най-напред ще намерим примитивна на (1) в интервала $(-\pi, \pi)$. Както вече видяхме, субституцията

$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} t \tag{2}$$

е подходяща за тази цел. Като направим субституцията (2), получаваме

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} \tag{3}$$

съгласно зад. 6 д). Ето защо функцията

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} \tag{4}$$

е примитивна на (1) в интервала $(-\pi, \pi)$.

Чрез диференциране непосредствено се съобразява, че ако $g(x)$ е примитивна на $f(x)$ в някой интервал (a, b), а c е произволно реално число, функцията $g(x-c)$ е примитивна на $f(x-c)$ в интервала $(a + c, b + c)$. Функциите (1) и (4) обаче са периодични с период 2π. Ето защо функцията (4) е примитивна на (1) във всеки от интервалите $((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi)$ $(k \in \mathbf{I})$. Но по този начин се получават примитивни само в посочените интервали, понеже отделните примитивни не са дефинирани в точките $(2k + 1)\pi$ $(k \in \mathbf{I})$.

Тъй като

$$\lim_{x \to (2k+1)\pi - 0} g(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

и

$$\lim_{x \to (2k+1)\pi + 0} g(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \tag{6}$$

функцията, дефинирана чрез (4), не притежава даже непрекъснато продължение върху цялата права, защото при преминаване през точките $(2k + 2)\pi$ $(k \in \mathbf{I})$ тя прави скок, равен на $-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (направете чертеж). Тъй като след прибавяне на константа към една примитивна на (1) отново се получава примитивна на (1), от (5) и (6) следва, че съществува непрекъсната функция $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, която е примитивна на (1) във всеки от интервалите $((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi)$ $(k \in \mathbf{I})$. За да се получи такава функция, е необходимо отделните „късове" от (4) да се „залепят" чрез прибавяне на подходящи константи с оглед да се осигури непрекъснатостта.

Ето защо ще дефинираме h с равенството

$$h(x) = \begin{cases} g(x) + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } (2k - 1)\pi < x < (2k + 1)\pi, \\ (2k + 1)\frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } x = (2k + 1)\pi. \end{cases}$$

Непосредствено се съобразява, че функцията h е непрекъсната върху цялата права и е примитивна на f във всеки от интервалите $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$. С непосредствена проверка се установява, че функцията h е диференцируема и в точките $(2k + 1)\pi$ $(k \in \mathbf{I})$ и че $h'((2k + 1)\pi) = f((2k + 1)\pi)$ $(k \in \mathbf{I})$. С това задачата е решена.

87. а) Съгласно общите инструкции в случая може да се използва субституцията $t = \operatorname{tg} x$. Пресмятанията изглеждат така:

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{t^2 dt}{(1 + t)(1 + t^2)^2}$$

$$= \int \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\right] dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{|1+t|}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2} = \frac{1}{4}\ln|\sin x + \cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\sin x + \cos x).$$

б) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 2\int \frac{\sin x \cos x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 2\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x}$ $= \displaystyle\int \frac{d\operatorname{tg}^2 x}{1+(\operatorname{tg}^2 x)^2} = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}^2 x)$. Вместо тези пресмятания можехме да си послужим със субституцията $t = \operatorname{tg} x$.

в) $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)$; използувайте равенството

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}.$$

г) $\displaystyle\frac{ax}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x + b\sin x|$.

д) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x + 1} = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x + 1} d\cos x = \int d\cos x - 2\int \frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}$ $= \cos x - 2\operatorname{arc\,tg}\cos x$. Вместо тези пресмятания можехме да използуваме субституцията $t = \cos x$.

е) $\displaystyle\frac{1}{3}\cos^3 x - 3\cos x - \frac{3}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x}$. ж) $2\operatorname{arc\,tg}\sin x - \sin x$.

з) $\displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\sin^2 x$. и) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{C\operatorname{tg} x + B}{\sqrt{AC-B^2}}$ при $AC - B^2 > 0$ и $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}}\ln\left|\frac{C\operatorname{tg} x + B - \sqrt{B^2-AC}}{C\operatorname{tg} x + B + \sqrt{B^2-AC}}\right|$ при $AC - B^2 < 0$.

88. Използувайте теоремата за диференциране на степенни редове.

89. Използувайте зад. 88.

90. а) $\displaystyle -\frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\cos x}{2x} - \frac{1}{2}\operatorname{si}(x)$. б) и в). Нека

(1) $$I_n = \int \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad J_n = \int \frac{\cos x}{x^n} dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Не е трудно с интегриране по части да се види, че

(2) $$I_n = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} J_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

и

(3) $$J_n = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} I_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

От (2) и (3) следва

(4) $$I_n = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} I_{n-2}$$

$(n = 3, 4, \ldots)$ и

(5) $$J_n = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\sin x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} J_{n-2}$$

$(n = 3, 4, \ldots)$. Чрез рекурсия формулите (4) и (5) дават възможност пресмятането на интегралите (1) да се сведе до интегралите

(6) $$\int \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{si}(x), \quad \int \frac{\cos x}{x} dx = \operatorname{ci}(x)$$

и

(7) $$I_2 = \int \frac{\sin x}{x^2} dx, \quad J_2 = \int \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

които се свеждат до (6) с помощта на (2) и (3).

г) $\displaystyle\frac{1}{b}\cos\frac{a}{b}\operatorname{si}\left(x + \frac{a}{b}\right) - \frac{1}{b}\sin\frac{a}{b}\operatorname{ci}\left(x + \frac{a}{b}\right)$.

д) $\displaystyle -\frac{\cos x}{1+x} - \cos 1\,\operatorname{si}(1+x) + \sin 1\,\operatorname{ci}(1+x)$.

91. Сведете към зад. 90 б) — г) и към интегралите $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{a+bx}$ $(b \neq 0)$, които се пресмятат аналогично на 90 г).

93. а) При $a \neq -1$ приложете субституцията $x^{a+1} = t$, за да получите $\operatorname{li}(x^{a+1})$. б) Приложете субституцията $e^x = t$, за да получите $\operatorname{li}(e^x)$. в) $\displaystyle\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}}\operatorname{li}\left(e^{x+\frac{b}{a}}\right)$.

г) $\displaystyle\int \frac{e^x}{x^n} dx = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^x}{x^{n-1}} dx$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

94. Сведете към зад. 93 б) — г).

95. а) $\displaystyle\frac{e^x}{1+x}$. б) $\displaystyle\frac{x+2}{x^2+x}e^x$.

Десета глава

1. а) С индукция относно броя на точките $x \in [a, b]$, за които $f(x) \neq g(x)$, твърдението очевидно може да се сведе към случая, когато $f(x)$ и $g(x)$ се различават само в една точка $\xi \in [a, b]$. Тъй като по условие функциите $f(x)$ и $g(x)$ са ограничени, съществува число M, за което са изпълнени неравенствата

(1) $$|f(x)| \leqq M, \quad |g(x)| \leqq M$$

за всяко x от интервала $[a, b]$. Нека ε е произволно положително число, π е произволно подразделяне на интервала $[a, b]$ на краен брой интервали, а подразделянето

(2) $$\pi_1 : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

съдържа всичките точки на π и освен това удовлетворява неравенствата

(3) $$x_\nu - x_{\nu-1} < \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Тъй като при добавяне на нови делящи точки малките суми растат, ще бъде в сила неравенството

(4) $$s_\pi(f) \leqq s_{\pi_1}(f).$$

За точката ξ има две възможности: да попадне в два съседни подинтервала (2) или пък да лежи само в един от тях. Тъй като тези два случая не са съществено различни, ще се занимаем само с втория от тях. Нека например $x_{i-1} < \xi < x_i$. Не е трудно да се съобрази, че тогава

(5) $$s_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(g) = (m_i(f) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}),$$

където

(6) $m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $m_i(g) = \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

От (1), (2), (3), (5) и (6) следва

(7) $$s_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(g) \leqq 2M\varepsilon.$$

От (4) и (7) се получава

(8) $$s_\pi(f) \leqq s_{\pi_1}(g) + 2M\varepsilon.$$

Тъй като $\underline{\int_a^b} g(x)\,dx$ е по дефиниция една горна граница на малките

суми на g, в сила е $s_{\pi_1}(g) \leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$, което заедно с (8) дава

(9). $$s_\pi(f) \leqq \underline{\int_a^b} g(x)dx + 2M\varepsilon.$$

Неравенството (9) показва, че $\underline{\int_a^b} g(x)dx + 2M\varepsilon$ е горна граница на множеството на малките суми на f. Тъй като по дефиниция долният интеграл на f е най-голямата от долните граници на множеството от малките суми на f, от (9) следва

(10) $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx + 2M\varepsilon.$$

От (10) след граничен преход $\varepsilon \to 0$ се получава

(11) $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Поради симетрията между f и g от (11) следва

(12) $$\underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

От (11) и (12) имаме $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$. Аналогично се доказва и равенството $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$.

б) Нека

(1) $$\pi : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

е произволно подразделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали. От неравенството $f(x) \leqq g(x)$ за $x \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$ следва

(2) $$m_\nu(f) \leqq m_\nu(g) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

(дайте педантично доказателство!). След умножаване на (2) с $x_\nu - x_{\nu-1}$ поради (1) се получава

(3) $$m_\nu(f)(x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq m_\nu(g)(x_\nu - x_{\nu-1}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

От (3) след сумиране следва

(4) $$s_\pi(f) \leqq s_\pi(g),$$

което заедно с дефиницията на долен интеграл дава

(5) $$s_\pi(f) \leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

От (5) и от дефиницията на долен интеграл следва $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$. Аналогично се доказва и неравенството $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$.

в) Нека π_1 и π_2 са произволни подразделяния на интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали, а подразделянето

(1) $$\pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

съдържа всичките точки както на π_1, така и на π_2. Тъй като придобавянето на нови точки малките суми растат (нестрого, разбира се), а големите намаляват, ще бъдат в сила неравенствата

(2) $$s_{\pi_1}(f) \leqq s_\pi(f)$$

и

(3) $$S_\pi(g) \leqq S_{\pi_2}(g).$$

Нека ν е някое от числата $1, 2, \ldots, n$. По условие съществува точка x от интервала $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, за която

(4) $$f(x) \leqq g(x).$$

От очевидните неравенства $m_\nu(f) \leqq f(x)$ и $g(x) \leqq M_\nu(g)$ и от (4) следва

(5) $$m_\nu(f) \leqq M_\nu(g) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

От (5) след умножение с $x_\nu - x_{\nu-1}$ и сумиране се получава

(6) $$s_\pi(f) \leqq S_\pi(g).$$

От (2), (3) и (6) следва

(7) $$s_{\pi_1}(f) \leqq S_{\pi_2}(g).$$

Тъй като π_1 и π_2 са произволни подразделяния на интервала $[a, b]$, от (7), от дефиницията на долен интеграл на f и от дефиницията на горен интеграл на g следва желаното неравенство.

2. а) $\underline{\int_a^b} c\,dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} c\,dx$. б) За произволно естествено число n да разгледаме подразделянето π_n на интервала $[a, b]$, определено от точките $x_\nu = a + \frac{\nu}{n}(b-a)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Не е трудно да се съобрази, че

(1) $$s_{\pi_n} = \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu-1}(x_\nu - x_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a + \frac{\nu-1}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n} = \left(a + \frac{n-1}{2n}(b-a)\right)(b-a)$$

и

(2) $$S_{\pi_n} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a + \frac{\nu}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n} = \left(a + \frac{n+1}{2n}(b-a)\right)(b-a).$$

От (1) и (2) следва

(3) $$\lim_{n\to\infty} s_{\pi_n} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

и

(4) $$\lim_{n\to\infty} S_{\pi_n} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

От (3), (4) и от очевидното неравенство

$$s_{\pi_n} \leqq \underline{\int_a^b} x\,dx \leqq \overline{\int_a^b} x\,dx \leqq S_{\pi_n}$$

следва

$$\frac{b^2-a^2}{2} \leqq \underline{\int_a^b} x\,dx \leqq \overline{\int_a^b} x\,dx \leqq \frac{b^2-a^2}{2},$$

откъдето $\underline{\int_a^b} x\,dx = \overline{\int_a^b} x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

Да отбележим изрично, че приложеният тук метод може да се използва за произволна ограничена функция $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ $(a<b)$, за която можем да посочим сходяща редица от малки суми на Дарбу и сходяща редица от големи суми на Дарбу, които имат една и съща граница I. И в този по-общ случай е в сила

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = I.$$

в) $\frac{1}{3}(b^3-a^3)$ (вж. зад. 1 б), гл. II). г) $\frac{1}{4}(b^4-a^4)$ (вж. зад. 1 в), гл. II). д) Всички малки суми на Дарбу за функцията D са 0, а всички големи са 1. Ето защо

$$\underline{\int_0^1} D(x)\,dx = 0, \quad \overline{\int_0^1} D(x)\,dx = 1.$$

е) Непосредствено се съобразява, че малките суми на Дарбу за функцията σ са 0, поради което

(1) $$\underline{\int_a^b} \sigma(x)dx = 0\,.$$

Нека сега ε е произволно положително число. Да разгледаме функцията $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, дефинирана с

$$g(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{при } \sigma(x) > \varepsilon, \\ \sigma(x) & \text{при } \sigma(x) \leqq \varepsilon. \end{cases}$$

Не е трудно да се съобрази, че $\sigma(x)$ и $g(x)$ се различават само в краен брой точки от интервала $[a,b]$. Ето защо от зад. 1 а) следва

(2) $$\overline{\int_a^b} \sigma(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

От друга страна, $g(x) \leqq \varepsilon$ $(x\in\mathbf{R})$. Ето защо от а) и от зад. 1 б) се получава

(3) $$\overline{\int_a^b} g(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a).$$

От (1) — (3) следва

(4) $$0 \leqq \overline{\int_a^b} \sigma(x)\,dx \leqq \varepsilon(b-a).$$

От (4) след граничен преход $\varepsilon\to 0$ се получава $\overline{\int_a^b} \sigma(x)\,dx = 0$.

5. Необходимост. Нека $\varepsilon>0$ и $\eta>0$ са произволни числа. От дефиницията на римановия интеграл f следва съществуването на такива подразделяния π_1 и π_2 на интервала $[a,b]$ на краен брой подинтервали, че да са в сила неравенствата

(1) $$s_{\pi_1} > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon\eta}{2},$$

(2) $$S_{\pi_2} < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon\eta}{2}.$$

Нека

(3) $$\pi:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

е подразделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали, което съдържа както точките на π_1, така и точките на π_2. От (1) и (2) следва

$$(4)\qquad \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon\eta}{2} < s_\pi \leqq S_\pi < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon\eta}{2},$$

откъдето $S_\pi - s_\pi < \varepsilon\eta$, т. е.

$$(5)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) < \varepsilon\eta.$$

Нека Γ е множеството на онези от числата $1, 2, \ldots, n$, за които

$$(6)\qquad M_\nu - m_\nu > \varepsilon.$$

Тъй като събираемите в лявата страна на (5) са неотрицателни, от (5) следва

$$(7)\qquad \sum_{\nu\in\Gamma}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) < \varepsilon\eta.$$

От (6) следва

$$(8)\qquad \sum_{\nu\in\Gamma}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) \geqq \varepsilon\sum_{\nu\in\Gamma}(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

От (7) и (8) следва

$$(9)\qquad \sum_{\nu\in\Gamma}(x_\nu - x_{\nu-1}) < \eta,$$

с което необходимостта е доказана.

Д о с т а т ъ ч н о с т. Нека M е една горна граница на $|f(x)|$ в интервала $[a, b]$, а ε и η са произволни положителни числа. По условие съществува подразделяне (3) на интервала $[a, b]$, за което е в сила (9) при същата дефиниция на Γ. Нека $\Delta = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \Gamma$. Очевидно

$$(10)\quad S_\pi - s_\pi = \sum_{\nu\in\Gamma}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) + \sum_{\nu\in\Delta}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Но $M_\nu - m_\nu \leqq 2M$ $(\nu = 1, 2 \ldots, n)$, откъдето

$$(11)\qquad \sum_{\nu\in\Gamma}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq 2M\sum_{\nu\in\Gamma}(x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq 2M\eta$$

съгласно (9). От друга страна, от дефинициите на Γ и Δ следва $M_\nu - m_\nu \leqq \varepsilon$ $(\nu \in \Delta)$, откъдето

$$(12)\qquad \sum_{\nu\in\Delta}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq \varepsilon\sum_{\nu\in\Delta}(x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$\leqq \varepsilon\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - x_{\nu-1}) = \varepsilon(b-a).$$

От (10) — (12) следва

$$(13)\qquad S_\pi - s_\pi \leqq 2M\eta + \varepsilon(b-a).$$

Но $s_\pi \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S_\pi$, което заедно с (13) дава

$$(14)\qquad 0 \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq 2M\eta + \varepsilon(b-a).$$

От (14) след граничния преход $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ следва

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

с което е доказана и достатъчността.

6. Сведете към зад. 5. **7.** Сведете към зад. 1 а).

8. а) Сведете към зад. 1 в). б) Сведете към а).

9. Използвайте зад. 2 д).

10. Ще разгледаме подробно случая $r > 0$. Тъй като функцията cos е намаляваща в интервала $[0, \pi]$, подинтегралната функция е очевидно растяща.

За произволно естествено число n да разгледаме подразделянето π_n на интервала $[0, \pi]$, определено от точките $x_\nu = \frac{\nu}{n}\pi$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$. Тъй като подинтегралната функция е растяща, не е трудно да се съобрази, че

$$(1)\qquad s_{\pi_n} = \sum_{\nu=1}^{n}\ln(1 - 2r\cos x_{\nu-1} + r^2)(x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$= \frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \ln\left(1 - 2r\cos\frac{\nu-1}{n}\pi + r^2\right)$$

и

(2) $$S_{\pi_n} = \frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \ln\left(1 - 2r\cos\frac{\nu}{n}\pi + r^2\right).$$

Ето защо

(3) $$S_{\pi_n} - s_{\pi_n} = \frac{\pi}{n}(\ln(1 - 2r\cos\pi + r^2) - \ln(1 - 2r\cos 0 + r^2)).$$

От (3) следва

(4) $$\lim_{n\to\infty}(S_{\pi_n} - s_{\pi_n}) = 0.$$

От (2) получаваме

(5) $$S_{\pi_n} = \frac{\pi}{n}\ln\left((1+r)^2\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1 - 2r\cos\frac{\nu}{n}\pi + r^2\right)\right).$$

От друга страна, с помощта на формулата на Моавър (зад. 22, гл. II) могат да се намерят реалните и комплексните нули на полинома $z^{2n} - 1$, а оттам и представянето му като произведение на линейни множители. Като се групират двойките комплексни спрегнати множители, се получава

(6) $$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1)\prod_{\nu=1}^{2n-1}\left(1 - 2z\cos\frac{\nu}{n}\pi + z^2\right)$$

за всяко комплексно число z. От (5) и (6) следва

(7) $$S_{\pi_n} = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}(r^{2n} - 1)\right).$$

Сега не е трудно да се съобрази, че

(8) $$\lim_{n\to\infty} S_{\pi_n} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqq r < 1, \\ 2\pi\ln r & \text{при } r > 1. \end{cases}$$

Наистина при $0 \leqq r < 1$ е в сила $r^{2n} \to 0$, поради което вторият множител в (7) е ограничен, а при $r > 1$ от (7) следва

$$S_{\pi_n} = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{r+1}{r-1}\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}}\right) + 2\pi\ln r,$$

което поради $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}} = 1$ доказва верността на (8) във втория случай.

От (4), (8) и бележката след решението на зад. 2 б) следва, че разглежданата функция е интегруема и че

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqq r < 1 \\ 2\pi\ln r & \text{при } r > 1. \end{cases}$$

С аналогични разсъждения се установява и равенството

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } |r| < 1 \\ 2\ln|r| & \text{при } |r| > 1. \end{cases}$$

При $|r| = 1$ подинтегралната функция не е ограничена, поради което интегралът (засега) е лишен от смисъл.

11. Използувайте индукция относно n.

12. От зад. 11 а) следва

$$\mu(\Delta_\kappa) \leqq \sum_{\lambda=1}^{l}\mu(\delta_\lambda \cap \Delta_\kappa) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, k),$$

откъдето

(1) $$\sum_{\kappa=1}^{k}\mu(\Delta_\kappa) \leqq \sum_{\kappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{l}\mu(\delta_\lambda \cap \Delta_\kappa) = \sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\kappa=1}^{k}\mu(\delta_\lambda \cap \Delta_k).$$

От зад. 11 б) следва $\sum\limits_{\kappa=1}^{k}\mu(\delta_\lambda \cap \Delta_\kappa) \leqq \mu(\delta_\lambda) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$,

откъдето

(2) $$\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\kappa=1}^{k}\mu(\delta_\lambda \cap \Delta_\kappa) \leqq \sum_{\lambda=1}^{l}\mu(\delta_\lambda).$$

Желаното неравенство следва от (1) и (2).

13. Твърдението е интересно само когато $\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty}\mu(\delta_\lambda) < \infty$. Най-напред ще разгледаме случая, когато интервалите Δ_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, k)$ са затворени, а интервалите δ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ са отворени. От принципа на Борел–Лъобег за компактност (зад. 13, гл. III) следва, че всеки от интервалите Δ_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, k)$ се покрива

от краен брой от интервалите δ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$. Тъй като интервалите Δ_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, k)$ са краен брой, оттук следва, че съществува число l, за което $\bigcup\limits_{\kappa=1}^{k} \Delta_\kappa \subset \bigcup\limits_{\lambda=1}^{l} \delta_\lambda$. Сега твърдението следва от зад. 12.

В общия случай нека най-напред ε е произволно положително число. Да означим с Δ'_κ затворен интервал, за който $\Delta'_\kappa \subset \Delta_\kappa$ и

$$\mu(\Delta_\kappa) \leqq \mu(\Delta'_\kappa) + \frac{\varepsilon}{k} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, k), \tag{1}$$

а с δ'_λ отворен интервал, за който $\delta_\lambda \subset \delta'_\lambda$ и

$$\mu(\delta'_\lambda) \leqq \mu(\delta_\lambda) + \frac{\varepsilon}{2^\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Очевидно $\bigcup\limits_{\kappa=1}^{k} \Delta'_\kappa \subset \bigcup\limits_{\lambda=1}^{\infty} \delta'_\lambda$ и по силата на вече доказаното е изпълнено

$$\sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta'_\kappa) \leqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta'_\lambda). \tag{3}$$

От (1) — (3) следва

$$\sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta_\kappa) \leqq \varepsilon + \sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta'_\kappa) \leqq \varepsilon + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\mu(\delta_\lambda) + \frac{\varepsilon}{2^\lambda}\right) = 2\varepsilon + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda),$$

т. е.

$$\sum_{\kappa=1}^{k} \mu(\Delta_\kappa) \leqq 2\varepsilon + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda). \tag{4}$$

Търсеното неравенство се получава от (4) след граничния преход $\varepsilon \to 0$.

Да отбележим изрично, че посредством принципа на Борел-Льобег за компактност в горното доказателство бе използуван принципът за непрекъснатост.

Полето на рационалните числа не притежава свойство като формулираното в зад. 13. Наистина нека $\{r_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty}$ е редица, съдържаща всичките рационални числа (вж. зад. 61, гл. I), и ε е произволно положително число. Да положим

$$\delta_\lambda = \left(r_\lambda - \frac{\varepsilon}{2^{\lambda+1}}, r_\lambda + \frac{\varepsilon}{2^{\lambda+1}}\right) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Ясно е, че тогава $\quad Q \subset \bigcup\limits_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda \quad$ и $\quad \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda) = \varepsilon.$

Не е трудно да се съобрази обаче, че по-слабите твърдения от зад. 11 и 12 запазват валидността си и в полето на рационалните числа.

14. а) и б) Приложете дефиницията. г) Сведете към зад. 13.

16. Убедете се, че за всяко естествено число l е в сила $A \subset \bigcup\limits_{\lambda=l}^{\infty} \delta_\lambda$, и приложете зад. 15.

17. Необходимост. Нека D е множеството от всички точки на прекъсване на функцията f и нека $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ е сходящ ред с положителни членове. От зад. 5 следва, че за всяко естествено k съществува такова подразделяне

$$\pi_k: \ a = x_{k,0} < x_{k,1} < \cdots < x_{k,n_k} = b \tag{1}$$

на интервала $[a, b]$ на подинтервали, че ако означим с Γ_k множеството на онези от числата $\nu = 1, 2, \ldots, n_k$, за които

$$\omega([x_{k,\nu-1}, x_{k,\nu}], f) \geqq \frac{1}{k}, \tag{2}$$

да е в сила

$$\sum_{\nu \in \Gamma_k} \mu([x_{k,\nu-1}, x_{k,\nu}]) \leqq \alpha_k. \tag{3}$$

Да означим с A множеството на точките от интервала $[a, b]$, които влизат в някое от подразделянията π_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Ясно е, че множеството A е изброимо и следователно пренебрежимо (вж. зад. 14 б) и в)). Тъй като $D \subset (D \setminus A) \cup A$, необходимостта ще бъде установена, ако докажем, че множеството $D \setminus A$ е пренебрежимо. За тази цел да разгледаме интервалите $[x_{k,\nu-1}, x_{k,\nu}]$ $(k = 1, 2, \ldots; \nu \in \Gamma_k)$. Ясно е, че те са изброимо много, а от (3) следва, че сумата от дължините им се мажорира от реда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, поради което е крайна. Ето защо съгласно зад. 16 необходимостта ще бъде доказана, ако се убедим, че всяка точка от множеството $D \setminus A$ се съдържа в безбройно много от тези интервали. Нека $\xi \in D \setminus A$, т. е. функцията f е прекъсната в точката ξ и ξ не принадлежи на никое от подразделенията (1). От зад. 79, гл. VI следва, че $\omega_\xi(f) > 0$. Ще покажем, че за всяко естествено k, за което

$$\frac{1}{k} \leqq \omega_\xi(f), \tag{4}$$

точката ξ принадлежи на поне един от интервалите $[x_{k,\nu-1},\ x_{k,\nu}]$ $(\nu \in \Gamma_k)$, с което всичко ще бъде доказано. Ако допуснем противното, ще излезе, че за някое k с (4) ще бъде в сила $\xi \in [x_{k,\nu-1},\ x_{k,\nu}]$, където ν е някое от числата $1,\ 2, \ldots,\ n_k$ с $\nu \notin \Gamma_k$. Тъй като $\xi \notin A$, оттук се получава

(5) $$\xi \in (x_{k,\nu-1},\ x_{k,\nu}).$$

От $\nu \notin \Gamma_k$ и от дефиницията на Γ_k следва

(6) $$\omega([x_{k,\nu-1},\ x_{k,\nu}]) < \frac{1}{k}.$$

Тъй като интервалът в (5) е отворен, от (5) и (6) следва $\omega_\xi(f) < \frac{1}{k}$ в противоречие с (4). С това необходимостта е установена.

Д о с т а т ъ ч н о с т. Нека D е множеството от точките на прекъсване на f, а ε и δ са произволни положителни числа. Разглеждаме реда от ограничени отворени интервали $\{\delta_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty}$, за които

(7) $$D \subset \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda\,,$$

(8) $$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \mu(\delta_\lambda) < \delta,$$

и полагаме

(9) $$U = \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda.$$

От дефиницията на отворено множество следва, че U е отворено множество. Ето защо множеството $F = [a,\ b] \setminus U$ е затворено. Тъй като това множество е ограничено, от зад. 162, гл. IV следва, че F е и компактно. От друга страна, от (7) и (9) следва, че функцията f е непрекъсната в F. Ето защо е приложима зад. 66, гл. VI. Следователно съществува такова положително число δ_1, че да е в сила неравенството

(10) $$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

за всеки две точки x' и x'' от $[a,\ b]$ с $x' \in F$, $|x'' - x'| < \delta_1$. Да означим с

(11) $$\pi:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

подразделяне на интервала $[a,\ b]$, за което

(12) $$x_\nu - x_{\nu-1} < \delta_1 \qquad (\nu = 1,\ 2, \ldots, n).$$

Поради (12) от (10) следва, че ако някой от интервалите $[x_{\nu-1},\ x_\nu]$ $(\nu = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ пресича F, в сила е $\omega([x_{\nu-1},\ x_\nu]) \leqq \varepsilon$. Ето защо от $\omega([x_{\nu-1},\ x_\nu]) > \varepsilon$ следва $[x_{\nu-1},\ x_\nu] \cap F = \varnothing$, поради което $[x_{\nu-1},\ x_\nu] \subset U$. От (9) сега следва, че всеки от интервалите $[x_{\nu-1},\ x_\nu]$ $(\nu = 1,\ 2, \ldots, n)$, в които осцилацията на f е по-голяма от ε, се съдържа в $\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \delta_\lambda$. Тъй като, от друга страна, тези интервали нямат общи вътрешни точки, от (8) и от зад. 13 следва, че сумата от дължините им е по-малка от δ. По този начин е установено, че f удовлетворява условията за интегрируемост от зад. 5. Ето защо f е интегрируема. С това е доказана и достатъчността.

18. Сведете към зад. 17.

19. Директно следствие от теоремата на Нютон и Лайбниц.

20. **а)** Нека функцията $F : \Delta \to \mathbf{R}$ е дефинирана с

(1) $$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in \Delta).$$

От теоремата на Нютон и Лайбниц следва, че функцията F е диференцируема в Δ и че

(2) $$F'(x) = f(x)$$

за всяко $x \in \Delta$. От друга страна, $\Phi(s) = F(\psi(s))$ $(s \in S)$. Сега от (2) и от правилото за диференциране на съставни функции следва

(3) $$\Phi'(s) = F'(\psi(s))\psi'(s) = f(\psi(s))\psi'(s) \quad (s \in S).$$

б) Като се използва а), се получава

$$\Phi'(s) = \left(-\int_a^{\varphi(s)} f(t)dt\right)' = -f(\varphi(s))\varphi'(s) \quad (s \in S).$$

в) Като се използват а) и б), се получава

$$\Phi'(s) = \left(\int_{\varphi(s)}^{a} f(t)dt + \int_a^{\psi(s)} f(t)dt\right)' = f(\psi(s))\psi'(s) - f(\varphi(s))\varphi'(s)$$

$(a \in \Delta,\ s \in S)$.

21. Като се използува зад. 20, се получава: а) $2\frac{\sin x^2}{x}$. б) $-\cos\cos x\,\mathrm{tg}\,x-\cos\sin x\,\mathrm{ctg}\,x$. в) $\frac{e^x}{x}-\frac{x}{\ln x}$. г) $-\frac{1}{\ln x}$.

22. а) $\int\limits_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}dx=\int\limits_{-1}^{8}x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{8}=\frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{4}(-1)^{\frac{4}{3}}=\frac{45}{4}$.

б) 2. в) $\frac{\pi}{6}$. г) $\frac{\pi}{3}$. д) 1. е) $\int\limits_0^2|1-x|dx=\int\limits_0^1|1-x|dx$

$+\int\limits_1^2|1-x|dx=\int\limits_0^1(1-x)dx+\int\limits_1^2(x-1)dx=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=1.$

ж) $2-\frac{\pi}{2}$ (вж. зад. 2 ц), гл. IX). з) $\frac{\pi}{6}+\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (вж. зад. 2 я), гл. IX). и) $-\ln 5$.

23. а) $\int\limits_0^a\frac{dx}{b-x}=-\int\limits_0^a\frac{d(b-x)}{b-x}=-\ln|b-x|\Big|_0^a=\ln\frac{b}{b-a}$.

б) $\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$. в) $\frac{\pi}{2}$.

г) $\frac{3}{2}$. д) $e-\sqrt{e}$. е) $\frac{\pi}{6n}$. ж) 2. з) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$. и) $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{7}$. й) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. к) $\frac{\pi}{6}$. л) 2. м) $\frac{2}{7}$. н) $\frac{4}{3}$. Решението

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x\sin^2 x}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x dx$$

$=-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}d\cos x=-\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$ е погрешно. Защо? За да получите правилно решение, постъпете, както в зад. 22 е).

о) $-\frac{9}{8}+\frac{21}{16}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. п) 1. р) Използувайте зад. 8 д), гл. IX, за да получите $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}$.

25. Сведете към зад. 24.

26. Ако се погледне педантично, интегралите нямат смисъл, тъй като подинтегралните функции не са дефинирани в нулата, но понеже тези функции имат граници при $x\to 0$ и са непрекъснати в $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, не е трудно да се съобрази, че както и да ги додефинираме при $x=0$, новополучените функции ще бъдат интегрируеми (вж. например зад. 17) и интегралите им няма да зависят от начина, по който са додефинирани при $x=0$ (вж. зад. 8 б)). Разглежданите интеграли се разбират именно в този смисъл.

Така се постъпва и във всички подобни случаи.

а) Ако в зад. 25 б), гл. II заменим формално x с $2x$, след преобразуване получаваме

$$(1)\qquad \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=1+2\sum_{\nu=1}^{n}\cos 2\nu x.$$

От (1) непосредствено следва, че търсеният интеграл е $\frac{\pi}{2}$.

б) От зад. 25 в), гл. II (с $y=2x$) следва

$$(1)\qquad \sum_{\nu=0}^{n-1}\sin(2\nu+1)x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Ето защо $$\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\sin(2\nu+1)x}{\sin x}.$$

Сега от а) следва, че търсеният интеграл е $n\frac{\pi}{2}$.

27. а) $1-\frac{2}{e}$. б) $\frac{\pi}{2}-1$. в) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

г) $\pi^3-6\pi$. д) 1. е) $\frac{\pi a^2}{4}$. ж) $\frac{e^\pi-2}{5}$. з) $6-2e$.

28. а) Нека $I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

Като се разсъждава, както в зад. 25 а), гл. IX, се получава

$$(1)\quad I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n=2,3,\ldots).$$

От (1) с рекурсия се получава

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3.1}{2m.(2m-2)\ldots 4.2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\ldots 4.2}{(2m+1)(2m-1)\ldots 3.1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ (защо?). **в)** $\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\frac{\pi}{2}$ при четни m и n и $\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}$ във всички останали случаи.

29. **а)** След двукратно интегриране по части се получава

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha+2} x \cos(\alpha+2)x dx$$

$$= \frac{1}{\alpha+2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha+2)x(\cos^{\alpha+2} x - (\alpha+1)\cos^\alpha x \sin^2 x)dx$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha+2)x \cos^{\alpha+2} x dx - \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x \cos(2+\alpha)x dx,$$

откъдето следва а). **б)** — **г)** се доказват аналогично.

30. **а)** Нека

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx. \tag{1}$$

След интегриране по части се получава

$$I_n = -\frac{1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x d\cos nx$$

$$= -\frac{1}{n}\cos^n x \cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cos^{n-1} x \sin x\, dx,$$

откъдето

$$I_n = \frac{1}{n} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cos^{n-1} x \sin x dx. \tag{2}$$

От (1) и (2) след събиране се получава

$$\begin{aligned} 2I_n &= \frac{1}{n} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\sin nx \cos x - \cos nx \sin x)dx \\ &= \frac{1}{n} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n-1)x dx. \end{aligned} \tag{3}$$

От (3) следва

$$I_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}I_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

От (4) с рекурсия се получава

$$I_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{2^{\nu+1}(n-\nu)}.$$

б) Разсъждавайте както в а), за да получите $\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

31. **а)** $2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. **б)** Подинтегралните функции не са дефинирани в точката нула, но въпреки това интегралите имат смисъл, тъй като $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha(\ln x)^n = 0$ (вж. зад. 47 в), гл. V) съгласно забележката от зад. 26. Сега използувайте зад. 42 б), гл. IX, за да получите $(-1)^n\frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$. **в)** $\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

32. Използувайте зад. 23, гл. IX.

33. **а)** Сведете към зад. 32. **б)** Поради а) от доказателство се нуждае само равенството

$$\int\limits_{-1}^{1} (P_n(x))^2 dx = \frac{2.4^n(n!)^2}{2n+1}.$$

То може да се установи, като се използува дефиницията на $P_n(x)$, зад. 31 а) и зад. 32.

34. Сведете към зад. 33.

35. Преобразувайте $\int\limits_{\xi}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ с помощта на зад. 32 (като помните, че x и ξ са фиксирани, а интеграционната променлива е t).

36. а) Ще си послужим със субституцията

(1) $$x = t^2.$$

След диференциране от (1) се получава

(2) $$dx = 2t\,dt.$$

Новите интеграционни граници α и β ще определим от равенствата

(3) $$4 = \alpha^2,\ 9 = \beta^2.$$

Едно решение на системата (3) е например

(4) $$\alpha = 2,\ \beta = 3.$$

Сега можем да пристъпим към пресмятането на интеграла

(5) $$\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \int\limits_2^3 \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2}-1}2t\,dt = 2\int\limits_2^3 \frac{t^2}{t-1}dt$$

$$= 2\int\limits_2^3 \frac{t^2-1}{t-1}dt + 2\int\limits_2^3 \frac{1}{t-1}dt = (t+1)^2\Big|_2^3 + 2\ln|t-1|\Big|_2^3 = 7 + 2\ln 2.$$

Наред с решенията (4) системата (3) притежава и други. Да обсъдим кои от тях са подходящи за нови интеграционни граници и кои не. Максималният интервал, който съдържа точките 4 и 9 и в който функцията $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ е дефинирана, е $\Delta = (1, \infty)$. Ето защо, за да бъде приложима теоремата за смяна на променливите при определените интеграли, е необходимо α и β да бъдат такива, че за всяко $t \in [\alpha, \beta]$ да е в сила $t^2 > 1$. Оттук непосредствено се съобразява, че наред с решенията (4) единствено само решенията

(6) $$\alpha = -2,\ \beta = -3$$

на (3) удовлетворяват всички изисквания на теоремата за смяна на променливите. Вместо (5) биха могли да бъдат използувани и

пресмятанията

(7) $$\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \int\limits_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2}-1}2t\,dt = 2\int\limits_{-2}^{-3} \frac{t^2}{1+t}dt = \ldots = 7 + 2\ln 2.$$

Решенията

(8) $$\alpha = -2,\ \beta = 3$$

на (3) не могат да се използуват за смяна на променливите, например защото полученият след такава „смяна“ интеграл

$\int\limits_{-2}^{3} \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2}-1}2t\,dt$ е лишен от смисъл. б) $2 - \frac{\pi}{2}$. в) $\frac{32}{3}$.

г) $\frac{5}{3} - 2\ln 2$. д) $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$. е) $\frac{8}{15}$.

ж) $\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}$. з) $\frac{\pi}{16}$. и) $\frac{\pi}{4}$.

й) $a^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. к) $\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$.

37. Вж. зад. 80, гл. IX. а) $2\operatorname{arctg}\frac{1+r}{1-r}$. б) Субституцията

(1) $$x = 2\operatorname{arctg} t$$

не може да се използува за пресмятане на търсения интеграл, понеже $2\operatorname{arctg} t$ не приема стойност, равна на горната граница π на интеграла. Но колкото и да е близко до π едно число b, за което $0 < b < \pi$, тази субституция може да се използува за пресмятането на интеграла $\int\limits_0^b \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x + r^2}dx$. Това е така, защото при това условие системата

(2) $$\left|\begin{array}{l} 2\operatorname{arctg}\alpha = 0, \\ 2\operatorname{arctg}\beta = b \end{array}\right.$$

е решима. Решението на системата (2) очевидно е

(3) $$\alpha = 0,\ \beta = \operatorname{tg}\frac{b}{2}.$$

Тъй като от (1) следва

$$(4)\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

ще имаме $\displaystyle\int_0^b \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx = \int_0^{\operatorname{tg}\frac{b}{2}} \frac{(1-r)+(1+r)t^2}{(1+t^2)((1-r)^2+(1+r)^2t^2)}dt$

$$= \operatorname{arc\,tg} t\Big|_0^{\operatorname{tg}\frac{b}{2}} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\Big|_0^{\operatorname{tg}\frac{b}{2}} = \frac{b}{2} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\right),$$

т. е.

$$(5)\qquad \int_0^b \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx = \frac{b}{2} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\right).$$

Ако в (5) извършим граничен преход $b \to \pi$, за търсения интеграл получаваме $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx = \pi.$ Аналогични усложнения, но не само в горната, а и в долната интеграционна граница са налице и в следващите примери в) — д).

в) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$. **г)** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$. **д)** $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$.

38. Вж. зад. 87, гл. IX. **а)** $\dfrac{\pi}{4}$. **б)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$.

в) Послужете си със субституцията $x = \operatorname{arc\,tg} t$, за да пресметнете интеграла $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ $\left(0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}\right)$. След това в получения резултат извършете граничен преход $\varepsilon \to 0$, за да получите $\dfrac{\pi}{2ab}$.

39. Към интеграла $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\,dx$ приложете субституцията $x = -t$. Изяснете си геометричния смисъл на твърдението.

40. **а)** $\dfrac{\pi}{ab}$ съгласно зад. 38 в) и 39 б). **б)** 0 съгласно зад. 39 а).

41. Послужете си със субституцията $x = t + \dfrac{a}{2}$ и със зад. 39 б).

42. **а)** Послужете си със субституцията $x = t+T$. **б)** Използувайте а) и равенството $\displaystyle\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T} = \int_0^T.$

43. **а)** Подинтегралната функция има период 2π. Ето защо от зад. 37 б), 39 и 42 следва

$$\int_0^{2m\pi} = m\int_0^{2\pi} = m\int_{-\pi}^{\pi} = 2m\int_0^{\pi} = 2m\pi,$$

$$\int_0^{(2m+1)\pi} = \int_0^{2m\pi} + \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} = 2m\pi + \int_0^{\pi} = (2m+1)\pi.$$

Поради това търсеният интеграл е равен на $k\pi$. **б)** $\dfrac{k\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$. Използувайте зад. 37 в).

44. **а)** Приложете субституцията $x = a - t$. **б)** Използувайте а). **в)** Използувайте първото от равенствата б), както и равенството $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$, което се установява чрез субституцията $x = \pi - t$.

45. **а)** От зад. 44 в) следва

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx$$

$$= -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos x}{1+\cos^2 x} = -\pi\operatorname{arc\,tg}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$ **б)** $\dfrac{\pi^2}{2ab}$.

46. Направете субституцията $\sin x = \dfrac{2a\sin t}{a+b+(a-b)\sin^2 t}$ или по-точно

$$(1)\qquad x = \arcsin\frac{2a\sin t}{a+b+(a-b)\sin^2 t},$$

като предварително установите, че дясната страна на (1) има смисъл.

47. а) Докажете, че функцията $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ $(a \leqq x \leqq b)$ е тъждествено нула, и приложете теоремата на Нютон и Лайбниц.

б) Тривиално еквивалентно с а).

48. Тривиално следствие от зад. 47 б).

49. Приложение на зад. 48. в) Използувайте зад. 93, гл. VII.

г) Използувайте зад. 94 б) и в), гл. VII. д) Използувайте зад. 98 а) и б), гл. VII.

50. При $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ са в сила неравенствата

(1) $$\sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x \quad (n \in \mathbf{N}).$$

От (1) след интегриране се получава

(2) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx \leqq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx \leqq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

От (2) и зад. 28 а) следва

(3) $$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Ако във второто от тези неравенства заменим n с $n+1$, след прости преобразувания се получава

(4) $$\frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

От друга страна, от лявото от неравенствата (3) следва

(5) $$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \leqq \frac{\pi}{2}.$$

От (4) и (5) получаваме

$$\frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{2} \leqq \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \leqq \frac{\pi}{2},$$

откъдето твърдението следва непосредствено.

51. От развитието на $\ln(1+x)$ в степенен ред следва

(1) $$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2\nu+1}x^{2\nu} \quad (|x|<1).$$

В (1) полагаме $x = \frac{1}{2n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ и получаваме

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)(2n+1)^{2\nu}} \quad (n \in \mathbf{N})$$

или, което е същото,

(2) $$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)(2n+1)^{2\nu}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Но

(3) $$1 < \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)(2n+1)^{2\nu}} < 1 + \frac{1}{3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2\nu}} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

От (2) и (3) следва

(4) $$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

От (4) след антилогаритмуване се получава $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e.\,e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$, или

(5) $$e^{-\frac{1}{12n(n+1)}} < \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} < 1.$$

Да разгледаме редицата с общ член

(6) $$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Не е трудно да се съобрази, че

(7) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

От (5) и (7) следва

(8) $$e^{-\frac{1}{12n(n+1)}} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

От дясното от неравенствата (8) следва, че редицата (6) е намаляваща, и тъй като е ограничена отдолу (например от нулата), тя е сходяща. Да положим

(9) $$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Очевидно

(10) $$a < a_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

От друга страна, поради $-\frac{1}{12n(n+1)} = -\frac{1}{12n} + \frac{1}{12(n+1)}$ от (8) се получава

(11) $$e^{-\frac{1}{12n}} a_n < e^{-\frac{1}{12(n+1)}} a_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

От (11) следва, че редицата с общ член $e^{-\frac{1}{12n}}$ е растяща. Тъй като поради (9) тя има граница a , в сила е неравенството

(12) $$e^{-\frac{1}{12n}} a_n < a.$$

От (10) и (12) следва

(13) $$1 < \frac{a_n}{a} < e^{\frac{1}{12n}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

От (13) следва, че за всяко естествено n съществува число θ, за което $0 < \theta < 1$ и

(14) $$a_n = ae^{\frac{\theta}{12n}}.$$

От (6) и (14) получаваме

(15) $$n! = a\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}\,e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

За да се получи формулата на Стирлинг, остава в (15) да се пресметне константата a. Това може да се направи с помощта на формулата на Уолис (вж. зад. 50):

(16) $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Очевидно

(17) $$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

От (15) следва

(18) $$(2n)! = a\sqrt{2n}\,\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\,e^{\frac{\theta'}{24n}} \quad (0 < \theta' < 1).$$

От (15), (17) и (18) получаваме

(19) $$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\,e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}}.$$

От (16) и (19) следва $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} a^2 \frac{n}{2} e^{\frac{4\theta-\theta'}{12n}} = \frac{a^2}{4}$, откъдето

(20) $$a = \sqrt{2\pi}.$$

Формулата на Стирлинг следва от (15) и (20).

52. Приложете теоремата на Нютон и Лайбниц.

54. Използувайте зад. 106 а), гл. VII.

55. Разсъждавайте, както при решаването на зад. 107, гл. VII.

56. а) Използувайте равенството $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx$ и неравенството на Хьолдер. б) От теоремата за средните стойности в интегралното смятане следва, че съществува точка ξ от $[0, 1]$, за която

(1) $$f(\xi) = \int_0^1 f(x)dx.$$

От друга страна, за произволно x от $[0, 1]$ е в сила

(2) $$f(x) - f(\xi) = \int_\xi^x f'(x)dx.$$

От (1) и (2) следва

(3) $$f(x) = \int_\xi^x f'(x)dx + \int_0^1 f(x)dx.$$

От (3) и неравенството (36) от §5 следва

$$(4)\qquad |f(x)| \leqq \left|\int_{\xi}^{x} f'(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right|$$

$$\leqq \int_{\xi}^{x} |f'(x)|\,dx + \int_{0}^{1} |f(x)|dx \leqq \int_{0}^{1} |f'(x)|dx + \int_{0}^{1} |f(x)|dx.$$

в) Използвайте б), неравенството на Хьолдер и неравенството $|A+B|^p \leqq 2^{p-1}(|A|^p + |B|^p)$ $(p > 1)$, което следва от изпъкналостта на функцията x^p.

57. От теоремата за крайните нараствания следва, че за всяко x от $[a, b]$ с $a \leqq x < x+h \leqq b$ съществува ξ с $x < \xi < x+h$, за което

$$(1)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(\xi).$$

От друга страна, в сила е и равенството

$$(2)\qquad -f'(x) + f'(\xi) = \int_{x}^{\xi} f''(x)dx.$$

От (1), (2) и неравенството (36) от 5 следва

$$(3)\qquad \begin{aligned} |f'(x)| &\leqq \int_{x}^{\xi} |f''(x)|\,dx + \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} \\ &\leqq \int_{x}^{x+h} |f''(x)|\,dx + \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}. \end{aligned}$$

От (3), неравенството $|A+B|^p \leqq 2^{p-1}(|A|^p + |B|^p)$ и неравенството на Хьолдер следва

$$(4)\qquad \begin{aligned} |f'(x)|^p &\leqq 2^{p-1}\left(h^{p-1}\int_{x}^{x+h} |f''(x)|^p dx + \frac{|f(x+h)-f(x)|^p}{h^p}\right) \\ &\leqq 2^{p-1}h^{p-1}\int_{a}^{b} |f''(x)|^p dx + \frac{2^{p-1}}{h^p}|f(x+h)-f(x)|^p. \end{aligned}$$

От (4) след интегриране в граници от a до $b-h$ се получава

$$(5)\qquad \begin{aligned} \int_{a}^{b-h} |f'(x)|^p dx &\leqq 2^{p-1}h^{p-1}(b-a)\int_{a}^{b} |f''(x)|^p dx \\ &+ \frac{2^{p-1}}{h^p}\int_{a}^{b-h} |f(x+h)-f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

От друга страна, от неравенството на Минковски следва

$$\begin{aligned} \left\{\int_{a}^{b-h} |f(x+h)-f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} &\leqq \left\{\int_{a}^{b-h} |f(x+h)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left\{\int_{a}^{b-h} |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq 2\left\{\int_{a}^{b} |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

откъдето

$$(6)\qquad \int_{a}^{b-h} |f(x+h)-f(x)|^p dx \leqq 2^p \int_{a}^{b} |f(x)|^p dx.$$

От (5) и (6) следва

$$(7)\qquad \int_{a}^{b-h} |f'(x)|^p dx \leqq 2^{p-1}h^{p-1}(b-a)\int_{a}^{b} |f''(x)|^p dx + \frac{2^{2p-1}}{h^p}\int_{a}^{b} |f(x)|^p dx.$$

Аналогични разглеждания при $a \leqq x-h < x \leqq b$ дават

$$(8)\qquad \int_{a+h}^{b} |f'(x)|^p dx \leqq 2^{p-1}h^{p-1}(b-a)\int_{a}^{b} |f''(x)|^p dx + \frac{2^{2p-1}}{h^p}\int_{a}^{b} |f(x)|^p dx.$$

От (7) и (8) следва

$$\int_{a}^{b} |f'(x)|^p dx \leqq \int_{a}^{b-h} |f'(x)|^p dx + \int_{a+h}^{b} |f'(x)|^p dx$$

$$\leqq 2^p h^{p-1}(b-a)\int_a^b |f''(x)|^p dx + \frac{2^{2p}}{h^p}\int_a^b |f(x)|^p dx,$$

с което твърдението е доказано.

58. а) Да положим

$$\tau = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Тъй като $\tau \in \mathring{\Delta}$, от зад. 129 а), гл. VII следва неравенството

$$\frac{\varphi(s)-\varphi(\tau)}{s-\tau} \leqq \frac{\varphi(u)-\varphi(\tau)}{u-\tau}$$

при $s < \tau < u$ $(s, u \in \Delta)$. Ето защо от принципа за отделимост (зад.3, гл. II) следва, че съществува число $\beta \in \mathbf{R}$, за което е в сила

$$\frac{\varphi(s)-\varphi(\tau)}{s-\tau} \leqq \beta \leqq \frac{\varphi(u)-\varphi(\tau)}{u-\tau} \tag{2}$$

винаги когато s, $u \in \Delta$ и $s < u$. Непосредствено се съобразява, че от (2) следва неравенството

$$\varphi(t) \geqq \varphi(\tau) + \beta(t-\tau) \tag{3}$$

за всяко $t \in \Delta$. Ако в (3) положим $t = f(x)$ и интегрираме, ще получим

$$\int_a^b \varphi(f(x))dx \geqq \varphi(\tau)(b-a) + \beta\left(\int_a^b f(x)dx - \tau(b-a)\right). \tag{4}$$

Търсеното неравенство следва от (1) и (4). б) и в) — приложение на а).

59. Нека a е произволна вътрешна точка за интервала Δ. Развиваме φ по формулата на Тейлър до втори ред и получаваме

$$\varphi(a+t) = \varphi(a) + t\varphi'(a) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(a+\theta t) \quad (0 < \theta < 1) \tag{1}$$

за всички достатъчно малки по абсолютна стойност $t \in \mathbf{R}$. По условие е в сила

$$\varphi(a) \leqq \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} \varphi(x)dx = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \varphi(a+t)dt \tag{2}$$

за всички достатъчно малки положителни h. От (1) и (2) следва

$$0 \leqq \frac{1}{4h}\int_{-h}^{h} \frac{t^2}{2!}\varphi''(a+\theta t)dt. \tag{3}$$

Макар функцията φ'' да е непрекъсната, от пръв поглед не е очевидно, че функцията $\varphi''(a+\theta t)$ на t е непрекъсната, тъй като θ може и да е прекъсната функция на t. Във всеки случай поради $0 < \theta < 1$ тази функция е очевидно непрекъсната при $t = 0$. Непрекъснатостта ѝ при $t \neq 0$ се установява, след като (1) се реши относно $\varphi''(a+\theta t)$.

И така $\varphi''(a+\theta t)$ е непрекъсната функция на t. Сега от (3) и теоремата за средните стойности в интегралното смятане следва съществуването на точка ξ от интервала $(a-h, a+h)$, за която

$$\varphi''(\xi) \geqq 0. \tag{4}$$

Тъй като при $h \to 0$ е в сила $\xi \to a$, от непрекъснатостта на φ'' и от (4) следва

$$\varphi''(a) \geqq 0 \tag{5}$$

за произволна вътрешна точка a на Δ. От (5), като се използва отново непрекъснатостта на φ'', следва, че (5) е в сила в целия интервал Δ. Сега твърдението следва от зад 131, гл. VII.

Интересно е дали твърдението запазва валидността си и без предположението за диференцируемост на φ.

60. От теоремата на Нютон и Лайбниц следва, че функцията $G : [a, b] \to \mathbf{R}$, дефинирана с

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt \quad (x \in [a, b]), \tag{1}$$

е примитивна на g. Ето защо от правилото за интегриране по части при определените интеграли следва

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dG(x) = f(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)df(x),$$

което заедно с (1) дава

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b G(x)f'(x)dx. \tag{2}$$

Тъй като $f'(x)$ не си мени знака, от теоремата за средните стойности в интегралното смятане следва, че съществува число ξ от $[a, b]$, за което

$$(3)\qquad \int_a^b G(x)f'(x)dx = G(\xi)\int_a^b f'(x)dx = (f(b)-f(a))\int_a^\xi g(t)dt.$$

Твърдението следва от (2) и (3). Ще отбележим изрично, че то запазва валидността си и при по-слабото предположение за монотонност на f и интегрируемост на g.

61. а) Ясно е, че функцията $\frac{1}{x}$ е монотонна във всеки интервал $[a, b]$ с $a > 0$, $b > 0$. Ето защо е приложима втората теорема за средните стойности, т. е. съществува точка ξ от $[a, b]$, такава, че е в сила равенството

$$(1)\qquad \int_a^b \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x dx + \frac{1}{b}\int_\xi^b \sin x dx.$$

Но

$$(2)\qquad \int_a^\xi \sin x dx = -\cos x\Big|_a^\xi = \cos a - \cos\xi \leqq 2$$

и аналогично

$$(3)\qquad \int_\xi^b \sin x dx \leqq 2.$$

Търсеното неравенство следва от (1) — (3). б) Разсъждава се аналогично на а), като предварително се установява монотонността на функцията $\frac{1-e^{-\alpha x}}{x}$.

62. Да допуснем противното, т. е. че e е алгебрично число. Тогава ще съществуват естествено число m и цели числа c_μ ($\mu = 0, 1, \ldots, m$), за които $c_m \neq 0$ и

$$(1)\qquad c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \ldots + c_m e^m = 0.$$

Тъй като $e \neq 0$, без ограничение на общността може да се предполага, че $c_0 \neq 0$. Нека p е просто число, за което

$$(2)\qquad p > m,\ p > |c_0|.$$

Доказателството се основава на някои свойства на полинома

$$(3)\qquad P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\ldots(x-m)^p.$$

От зад. 24 а), гл. IX следва равенството

$$(4)\qquad \int_0^b P(x)e^{-x}dx = -e^{-x}\sum_{\nu=0}^n P^{(\nu)}(x)\Big|_0^b \quad (b \in \mathbf{R}).$$

където n е степента на полинома P. Ако положим

$$(5)\qquad Q(x) = \sum_{\nu=0}^n P^{(\nu)}(x),$$

от (4) получаваме

$$(6)\qquad e^b\int_0^b P(x)e^{-x}dx = e^b Q(0) - Q(b).$$

В (6) даваме на b последователно стойности $b = 0, 1, 2, \ldots, m$, умножаваме получените равенства съответно с $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$, събираме и като използуваме (1), получаваме

$$(7)\qquad \sum_{\mu=0}^m c_\mu e^\mu \int_0^\mu P(x)e^{-x}dx = -\sum_{\mu=0}^m c_\mu Q(\mu).$$

Ще се занимаем най-напред с дясната страна на (7).

Ще установим първо, че при $\mu = 1, 2, \ldots, m$ числото $Q(\mu)$ е цяло и се дели на p. Съгласно (5) за тази цел е достатъчно да установим, че всяко от числата $P^{(\nu)}(\mu)$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) е цяло и се дели на p.

От (3) се вижда, че числата $1, 2, \ldots, m$ са p-кратни нули на полинома P. Ето защо

$$(8)\qquad P^{(\nu)}(\mu) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Остава да се разгледа случаят $\nu = p, p+1, \ldots, n$. Очевидно

$$(9)\qquad \left(\frac{x^k}{(p-1)!}\right)^{(\nu)} = p\binom{k}{p}(k-p)\ldots(k-\nu+1)x^{k-\nu}$$

($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $\nu = p, p+1, \ldots, n$). От друга страна, от (3) непосредствено се вижда, че

$$P(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} d_\kappa \frac{x^\kappa}{(p-1)!}, \tag{10}$$

където числата d_κ са цели. Тъй като биномните коефициенти $\binom{k}{p}$ са цели числа, от (9) и (10) следва, че $P^{(\nu)}(\mu)$ се дели на p и при $\mu = 1, 2, \ldots, m; \nu = p, p+1, \ldots, n$.

Тъй като числата c_μ са цели, с това е доказано, че всяко от събираемите $c_\mu Q(\mu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ в дясната страна на (7) се дели на p.

Сега ще установим, че събираемото $c_0 Q(0)$ е цяло и не се дели на p. Тъй като $p > |c_0|$ и p е просто, а $c_0 \neq 0$, целта ще бъде постигната, ако установим, че $Q(0)$ не се дели на p.

От (3) се вижда, че числото 0 е $(p-1)$-кратна нула на полинома P. Ето защо

$$P^{(\nu)}(0) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, p-2). \tag{11}$$

От друга страна, като се използват (9) и (10), също както по-горе, се установява, че $P^{(\nu)}(0)$ се дели на p и при $\nu = p, p+1, \ldots, n$. От (5) и (11) следва

$$Q(0) = \sum_{\nu=p-1}^{n} P^{(\nu)}(0). \tag{12}$$

Току-що видяхме, че събираемите от дясната страна на (12) с $\nu \neq p-1$ се делят на p. Ето защо, за да докажем, че $Q(0)$ не се дели на p, е достатъчно да се убедим, че $P^{(p-1)}(0)$ не се дели на p.

От формулата на Лайбниц и (3) следва

$$P^{(p-1)}(0) = (-1)^{mp}(m!)^p. \tag{13}$$

Тъй като $p > m$, от (13) следва, че $P^{(p-1)}(0)$ наистина не се дели на p. По този начин е установено, че сумата в дясната страна на (7) е цяло число, което не се дели на p. Но тогава тя е различно от нула цяло число и от (7) следва

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu e^\mu \int_0^\mu P(x) e^{-x} dx \right| \geqq 1. \tag{14}$$

От друга страна, от (3) следва

$$|P(x)| \leqq \frac{1}{(p-1)!} m^{p-1} \underbrace{m^p m^p \ldots m^p}_{m \text{ пъти}} = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \tag{15}$$

за $0 \leqq x \leqq m$. От (15) за $\mu = 0, 1, \ldots, m$ следва

$$\left| \int_0^\mu P(x) e^{-x} dx \right| \leqq \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \int_0^\mu e^{-x} dx \leqq \frac{m^{mp+p}}{(p-1)!}. \tag{16}$$

От (16) следва

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu e^\mu \int_0^\mu P(x) e^{-x} dx \right| \leqq C e^m \frac{m^{mp+p}}{(p-1)!} = \frac{C e^m (m^{m+1})^p}{(p-1)!}, \tag{17}$$

където $C = |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_m|$. От друга страна, от зад. 43 б), гл. IV следва

$$\lim_{p \to \infty} \frac{(m^{m+1})^p}{(p-1)!} = 0. \tag{18}$$

Тъй като простите числа са безбройно много, (17) и (18) противоречат на (14). Полученото противоречие доказва твърдението.

63. а) $\frac{1}{2}$. б) $\ln 2$ (срв. със зад. 84 а), гл. IV). в) $\frac{\pi}{4}$. г) $\frac{2}{\pi}$. д) $\frac{1}{p+1}$ (срв. със зад. 77 б), гл. V). е) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. ж) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. з) $\frac{3}{2}$. и) $\frac{1}{\ln 2}$.

64. Положете например $f_n(x) = n(n+1)x^{n-1}(1-x)$.

65. а) Използувайте развитието на e^x в степенен ред.

б) Използувайте равенството $\frac{1}{x^x} = e^{-x \ln x}$, степенното развитие на експоненциалната функция и зад. 31 б). г) Използувайте зад. 124 е), гл. VIII. д) и е) Използувайте бинома на Нютон и зад. 28 а) и б).

66. Сведете към зад. 46.

67. а) Използувайте степенното развитие на $\ln(1+x)$, както и зад. 131 а), гл. VIII с $x = \pi$. б) Използувайте степенното развитие на $\ln(1-x)$, както и зад. 131 а), гл. VIII с $x = 0$.

в) Сведете към зад. 28 б).

68. а) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. б) $\frac{p}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$. в) $a \operatorname{sh} 1$.

69. а) $2\pi a$. б) $\frac{3a}{2}$. в) $8a$. г) $2\pi^2 a$. д) $\ln 2$.

е) $a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}dt$ (вж. зад. 65 е)). Исторически това е първият пример на елиптичен интеграл.

70. а) $\frac{a}{2}(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

б) $a\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}(e^{2m\pi}-1)$. в) $4a$.

г) $2(a+b)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2 t}dt$ (вж. зад. 65 е)).

71. а) $\frac{1}{3}$. б) 2. в) $\sqrt{2}-1$.

72. а) $\frac{a^2}{3}$. б) $\frac{9}{2}$. в) $\frac{9}{2}$. г) πab. д) $\frac{2}{3}a^3$.

73. а) $6\pi a^2$. б) $\frac{3\pi(a^2-b^2)^2}{8ab}$. в) $\frac{3\pi a^2}{8}$. г) $3\pi a^2$.

74. а) a^2. б) $\frac{3\pi a^2}{2}$. в) $\frac{\pi a^2}{4}$. г) $\frac{\pi}{2}(a^2+2b^2)$.

75. а) a^2. б) $\frac{3}{2}a^2$. в) $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$.

Иван Проданов, Николай Хадживанов,
Иван Чобанов

СБОРНИК ОТ ЗАДАЧИ
ПО ДИФЕРЕНЦИАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ
Функции на една променлива

Българска
Второ стереотипно издание

Рецензенти на първото издание *Димитър Скордев, Ярослав Тагамлицки*
Редактор на първото издание *Грозданка Благоева*
Художник на корицата *Пенчо Мутафчиев*
Художествен редактор *Красимира Михайлова*
Технически редактор *Божидар Стоянов*

Изд.индекс 411
Формат 60x84/16 Печ.коли 33 Изд.коли 30.69

Университетско издателство "Св. Климент Охридски"
Печатница "Ат.Стратиев" - Хасково