Проф. Я. ТАГАМЛИЦКИ

ДИФЕ— РЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

V ИЗДАНИЕ

СОФИЯ • 1971
НАУКА И ИЗКУСТВО

ПРЕДГОВОР КЪМ ЧЕТВЪРТОТО ИЗДАНИЕ

Промените в настоящото издание се отнасят главно до подробностите.

Приятен дълг ми е да изкажа най-сърдечна благодарност на моя дълбоко уважаван колега Д. Скордев, който допринесе много за подобряването на учебника.

Я. Тагамлицки

София, 30. XI. 1965 г.

ЧАСТ I

РЕАЛНИ ЧИСЛА, РЕДИЦИ ОТ РЕАЛНИ ЧИСЛА, РЕДОВЕ ОТ РЕАЛНИ ЧИСЛА

ГЛАВА I

РЕАЛНИ ЧИСЛА

В основата на диференциалното и интегралното смятане лежи понятието реално число. Ние ще смятаме, че теорията на реалните числа поне отчасти е позната (така ще смятаме, че читателят знае как реалните числа се изобразяват върху една права и пр.), но все пак ще припомним основните им свойства.

§ 1. Равенство между реални числа

1. При всеки избор на реалното число a имаме

$$a=a \qquad \text{(рефлективност).}$$

2. Ако

$$a=b \text{ и } b=c,$$

то

$$a=c \qquad \text{(транзитивност).}$$

3. Ако

$$a=b,$$

то

$$b=a \qquad \text{(симетрия).}$$

§ 2. Аритметични действия

4. На всеки две реални числа a и b е съпоставено едно реално число $a+b$ и едно реално число ab, като при това са изпълнени следните изисквания:

$$a+b=b+a,\ ab=ba \qquad \text{(комутативен закон);}$$
$$(a+b)+c=a+(b+c),\ (ab)c=a(bc) \qquad \text{(асоциативен закон);}$$
$$a(b+c)=ab+ac \qquad \text{(дистрибутивен закон).}$$

Ако $a=b$ и $c=d$, то $a+c=b+d$ и $ac=bd$.

Реалното число $a+b$ наричаме сума, а реалното число ab — произведение на двете реални числа a и b.

След като са дефинирани действията събиране и умножение за две числа, ние можем да разширим тяхната дефиниция, като пишем (по дефиниция)

$$a+b+c=(a+b)+c,$$

$$abc=(ab)c$$

и пр.

5. Уравнението $a+x=b$ има винаги поне едно решение. (По-късно ще докажем, че това уравнение има само едно решение.)

Забележка 1. Съгласно казаното по-горе уравнението $a+x=a$ има решение. Не е трудно да се покаже, че всяко решение на това уравнение удовлетворява и уравнението $b+x=b$, каквото и да бъде реалното число b. И наистина нека y е едно решение на уравнението $a+y=b$. В такъв случай

$$b+x=(a+y)+x=(y+a)+x=y+(a+x)=y+a=a+y=b.$$

Не е трудно да се убедим, че уравнението $a+x=a$ има само едно решение. И наистина нека реалното число y е също едно решение на уравнението $a+y=a$. Ние знаем обаче, че равенствата $a+x=a$ и $a+y=a$ не се нарушават, както и да изменяме a. Специално, поставяйки в първото от тези равенства $a=y$, а във второто $a=x$, получаваме $y+x=y$, $x+y=x$, т. е. $x=y$.

Така намереното единствено и независещо от a решение на уравнението $a+x=a$ се означава със символа 0 и се нарича нула.

Забележка 2. Уравнението $a+x=b$ има само едно решение. И наистина нека y е кое да е решение на уравнението $a+y=0$. В такъв случай, каквото и да бъде решението x на уравнението $a+x=b$, имаме

$$x=x+0=x+(a+y)=(x+a)+y=(a+x)+y=b+y.$$

Така намереното единствено решение на уравнението $a+x=b$ се означава обикновено със символа $b-a$ и се нарича разлика. По-специално уравнението $a+x=0$ също има едно и само едно решение. Това решение се означава със символа $-a$. Очевидно имаме

$$b-a=(b-a)+0=(b-a)+[a+(-a)]=[(b-a)+a]+(-a)=$$
$$=[a+(b-a)]+(-a)=b+(-a).$$

Забележка 3. Като вземем под внимание, че, от една страна, 0 удовлетворява уравнението $0+x=0$ (съгласно дефиницията на 0), а, от друга страна, -0 удовлетворява същото уравнение (съгласно дефиницията на -0), заключаваме с помощта на доказаната вече теорема за единственост, че $-0=0$.

Аналогично, като вземем под внимание, че както a, така и $a-0$ удовлетворяват уравнението $0+x=a$ (първото следва от дефиницията на 0 и от комутативния закон, а второто следва от дефиницията на понятието разлика), заключаваме с помощта на споменатата теорема за единственост, че $a-0=a$.

Забележка 4. Не е трудно да се види, че $-(-a)=a$. И наистина

$$-(-a)=-(-a)+0=-(-a)+[a+(-a)]=-(-a)+[(-a)+a]=$$
$$=[(-(-a))+(-a)]+a=[(-a)+(-(-a))]+a=0+a=a+0=a.$$

6. От двете зависимости $a=0$ и $a\neq 0$ (четете така: a е различно от нула) е в сила едната и само едната. Между реалните числа има такива, които са различни от нула.

7. Когато $a\neq 0$, уравнението $ax=b$ има поне едно решение.

Забележка 1. Ако $a\neq 0$, всяко решение на уравнението $ax=a$ удовлетворява уравнението $bx=b$ при всеки избор на b. И наистина нека y е едно решение на уравнението $ay=b$. В такъв случай

$$bx=(ay)x=(ya)x=y(ax)=ya=ay=b.$$

Уравнението $ax=a$ има само едно решение. И наистина нека y е също решение на уравнението $ay=a$. Ако поставим $a=y$ в равенството $ax=a$ и $a=x$ в равенството $ay=a$, ще получим $yx=y$, $xy=x$, т. е. $x=y$.

Така намереното единствено и независещо от a решение на уравнението $ax=a$ се означава със символа 1 и се нарича единица.

Сега не е трудно да се види, че уравнението $ax=b$ при $a\neq 0$ има само едно решение. И наистина нека y е едно решение на уравнението $ay=1$. В такъв случай, каквото и да бъде решението x на уравнението $ax=b$, ще имаме

$$x=x\,.\,1=x(ay)=(xa)y=(ax)y=by.$$

Единственото решение на уравнението $ax=b$ при $a\neq 0$ се означава със символа $\frac{b}{a}$ и се нарича частно или дроб с числител b и знаменател a. По такъв начин ние казахме какво означава символът $\frac{b}{a}$ само при $a\neq 0$. Поради това ние няма да си служим с дроби, чийто знаменател е нула.

Забележка 2. Не е трудно да се види, че при всеки избор на a имаме $a\,.\,0=0$. И наистина

$$a\,.\,0=a\,.\,0+0=a\,.\,0+[a+(-a)]=[a\,.\,0+a]+(-a)=(a\,.\,0+a\,.\,1)+(-a)=$$
$$=a(0+1)+(-a)=a(1+0)+(-a)=a\,.\,1+(-a)=a+(-a)=0.$$

Забележка 3. Ще покажем, че $1\neq 0$. И наистина нека $a\neq 0$ (такова число съществува съгласно условието 6). Ако допуснем, че

$1=0$, ще имаме $a=a\,.\,1=a\,.\,0=0$, което противоречи на избора на a.

Забележка 4. Ще установим, че $(-1)a=-a$. И наистина

$$(-1)a=(-1)a+0=(-1)a+[a+(-a)]=[(-1)a+a]+(-a)=$$
$$=[(-1)a+1\,.\,a]+(-a)=[(-1)+1]a+(-a)=0\,.\,a+(-a)=$$
$$=0+(-a)=-a.$$

Специално при $a=-1$ получаваме $(-1)\,.\,(-1)=-(-1)=1$.

Забележка 5. Не е трудно да се види, че

$$-(a-b)=b-a.$$

И наистина

$$-(a-b)=(-1)[a+(-b)]=(-1)a+(-1)\,(-b)=(-1)\,(-b)+(-1)a=$$
$$=-(-b)+(-a)=b+(-a)=b-a.$$

По такъв начин в съвкупността на реалните числа имаме две действия (събиране и умножение) и една зависимост (равенство), които се подчиняват на седемте условия, които са изброени в този параграф.

Дефиниция. Всяко множество от елементи, в което са дефинирани две действия и една зависимост, подчиняващи се на изброените условия в горните седем точки, се нарича поле или (комутативно) тяло.

§ 3. Сравняване на реалните числа

Част от реалните числа се наричат положителни, като при това са изпълнени следните условия:

8. Нулата не е положително число.

9. Ако $a\neq 0$, то поне едното от двете числа a и $-a$ е положително.

10. Ако a и b са положителни, то $a+b$ и ab са положителни.

11. Ако a е положително число и $a=b$, то b е положително число.

Дефиниция. Тяло, в което част от елементите са наречени положителни, като при това са изпълнени условията 8, 9, 10 и 11, се нарича наредено тяло.

Забележка 1. Числата a и $-a$ не могат да бъдат едновременно положителни, защото в противен случай съгласно условието 10 сумата $a+(-a)$ би била положителна, което противоречи на условията 8 и 11, защото $a+(-a)=0$.

Забележка 2. Елементите, които не са положителни и не са равни на нула, се наричат отрицателни.

Забележка 3. Съгласно условието 9 някое от двете числа 1 и -1 е положително, защото, както вече видяхме, $1\neq 0$. Числото -1 сигурно не е положително, защото в противен случай числото $(-1)\,(-1)=1$ също би било положително, което, както установихме, не е възможно. И така числото 1 е положително.

Ако разликата $a-b$ е положителна, то казваме, че числото a е по-голямо от b, и пишем $a>b$ и $b<a$. Символът $a\geqq b$ или (което е същото) $b\leqq a$ означава, че или $a>b$ или $a=b$.

Ако числата a и b не са равни помежду си, то разликата $a-b$ е различна от нула и следователно едното и само едното от двете числа $a-b$ и $-(a-b)=b-a$ е положително, т. е. в сила е едното и само едното от двете неравенства $a>b$, $b>a$. Това свойство се нарича трихотомия на наредбата при реалните числа.

Забележка 4. Очевидно имаме $a>0$ тогава и само тогава, когато a е положително, защото $a=a-0$.

Забележка 5. Ако $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$. И наистина не е трудно да се види, че

$$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$$

например по следния начин:

$$(a+c)-(b+d)=(a+c)+(-1)\,(b+d)=(a+c)+[(-1)b+(-1)d]=$$
$$=[(a+c)+(-1)b]+(-1)d=[a+(c+(-1)b)]+(-1)d=[a+((-1)b+c)]+$$
$$+(-1)d=[(a+(-b))+c]+(-1)d=(a+(-b))+$$
$$+(c+(-1)d)=(a-b)+(c-d).$$

Разликите $a-b$ и $c-d$ са обаче положителни и следователно сумата им $(a-b)+(c-d)$ е също тъй положителна. Оттук заключаваме, че разликата $(a+c)-(b+d)$ е положителна, т. е. наистина $a+c>b+d$. Разбира се, ако $a\geqq b$ и $c\geqq d$, то по същия начин се вижда, че $a+c\geqq$ $\geqq b+d$.

Аналогично може да се провери без труд, че ако

$$a>b,\ c>d,\ c>0,\ b>0,$$

то

$$ac>bd.$$

За тази цел използуваме тъждеството

$$ac-bd=(a-b)c+(c-d)b,$$

което може да се провери например така:

$$(a-b)c+(c-d)b=(a+(-1)b)c+(c+(-1)d)b=(ac+(-1)bc)+$$
$$+(cb+(-1)bd)=ac+[(-1)bc+(bc+(-1)bd)]=ac+[[(-1)bc+bc]+$$
$$+(-1)bd]=ac+[0+(-1)bd]=ac+(-1)bd=ac-bd.$$

По-нататък извършваме разсъжденията така: произведенията $(a-b)c$ и $(c-d)b$ са положителни, защото техните множители са положителни,

оттук заключаваме, че сумата $(a-b)c+(c-d)b$ е също тъй положителна, т. е. и разликата $ac-bd$ е положителна и следователно $ac>bd$.

Най-сетне нека читателят сам провери следните прости свойства на неравенствата:

1) ако $a>b$, то $a+c>b+c$;
2) ако $a>b$ и $b>c$, то $a>c$;
3) ако $\lambda>0$ и $a>b$, то $\lambda a>\lambda b$;
4) ако $a>b$, то $-a<-b$

и пр.

§ 4. Абсолютна стойност

Под думите абсолютна стойност или модул на едно реално число a се разбира по-голямото* от двете числа a и $-a$. Обикновено абсолютната стойност на едно число a се означава със знака $|a|$. Очевидно, ако $a>0$, то $|a|=a$, ако $a<0$, то $|a|=-a$, и най-сетне, ако $a=0$, то $|a|=0$. Всичко това ние можем да обединим в равенството

$$|a|=\varepsilon a,$$

където $\varepsilon=1$, когато $a\geqq 0$, и $\varepsilon=-1$, когато $a<0$.

Примери

$|1|=1$; $|-1|=-(-1)=1$; $|2|=2$; $|-3|=-(-3)=3$; $|0|=0$.

Очевидно каквото и да е реалното число a, имаме $|a|\geqq 0$, а равенството $|a|=0$ е валидно тогава и само тогава, когато $a=0$.

Не е трудно да се види, че

$$|ab|=|a|\,|b|.$$

И наистина

$$|a|=\varepsilon_1 a,\ |b|=\varepsilon_2 b,\ |ab|=\varepsilon ab,$$

където $\varepsilon_1=\pm 1$, $\varepsilon_2=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$. Оттук получаваме

$$|a|\,|b|=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon}|ab|.$$

Като вземем под внимание, че

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon}=\pm 1,$$

заключаваме, че или

$$|a|\,|b|=|ab|,$$

или

$$|a|\,|b|=-|ab|.$$

* Ако тези числа са равни помежду си, то под думите „по-голямото от тях" ще разбираме кое да е от тях.

Във втория случай обаче ще имаме $|a|\,|b|=0$, защото числото $-|ab|$ не е положително, докато произведението $|a|\,|b|$ не е отрицателно. От това следва, че поне едното от двете числа a и b е равно на нула, откъдето заключаваме, че и в този случай е валидно равенството $|a|\,|b|=|ab|$.

Аналогично се установява, че $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ при $b\neq 0$.

В бъдеще ние често ще използуваме следното неравенство:

$$|a+b|\leqq|a|+|b|.$$

Доказателството може да се извърши така: от дефиницията на понятието модул имаме

$$a\leqq|a|,\ -a\leqq|a|,$$
$$b\leqq|b|,\ -b\leqq|b|;$$

като съберем неравенствата, които са написани едно под друго, намираме

$$a+b\leqq|a|+|b|,\ -(a+b)\leqq|a|+|b|,$$

т. е. по-голямото от двете числа $a+b$ и $-(a+b)$ не надминава числото $|a|+|b|$, откъдето

$$|a+b|\leqq|a|+|b|.$$

С оглед на бъдещите нужди ще докажем още и неравенството

$$|a-b|\geqq|a|-|b|.$$

За тази цел разсъждаваме така: съгласно доказаното по-горе имаме

$$|a|=|(a-b)+b|\leqq|a-b|+|b|,$$

т. е.

$$|a|-|b|\leqq|a-b|.$$

В заключение ще покажем, че неравенството

$$|x-a|<\varepsilon,$$

където ε е произволно положително, а x и a са произволни реални числа, е еквивалентно с неравенствата

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

И наистина, ако

$$|x-a|<\varepsilon,$$

то съгласно дефиницията на понятието модул имаме

$$x-a<\varepsilon,$$
$$-(x-a)<\varepsilon.$$

От първото от тези неравенства получаваме $x<a+\varepsilon$, а от второто получаваме $a-\varepsilon<x$, т. е. $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.
Обратно, нека

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

В такъв случай от $x<a+\varepsilon$ намираме $x-a<\varepsilon$, а от $a-\varepsilon<x$ намираме $-(x-a)<\varepsilon$ и сл. по-голямото от двете числа $x-a$ и $-(x-a)$ е по-малко от ε, което значи, че

$$|x-a|<\varepsilon.$$

§ 5. Понятието цяло число и едно негово обобщение*

Множеството N от естествените числа

$$1, 2, 3, \ldots$$

е най-малкото множество от реални числа, което притежава следните три свойства:

1) N съдържа единицата;
2) ако числото n принадлежи на N, то $n+1$ също принадлежи на N;
3) ако числото n принадлежи на N и $n=m$, то числото m също принадлежи на N.

Горните думи трябва да се разбират така: множеството N се съдържа във всяко множество от реални числа, което притежава изброените три свойства.

Обобщение. Нека K е кое да е тяло. Едно множество M от елементи на K ще наричаме негово рекурентно подмножество, ако то притежава следните три свойства:

1) M съдържа всички елементи, равни на единица;
2) ако n принадлежи на M, то $n+1$ също принадлежи на M;
3) ако n принадлежи на M и $n=m$, то m също принадлежи на M.

Ясно е, че всяко тяло K притежава рекурентни подмножества. Такова е например самото множество K. За нашите цели е важно обаче, че измежду рекурентните подмножества на едно тяло винаги има едно най-малко, т. е. такова, което се съдържа във всичките останали рекурентни подмножества на това тяло. За да се убедим в това, образуваме множеството N от елементите на K, които влизат във всичките му рекурентни подмножества. Очевидно единицата влиза в N, защото съгласно условието 1) тя влиза във всичките рекурентни подмножества на K. Също е ясно, че ако n се съдържа в N, то $n+1$ също се съдържа в N, защото ако n се съдържа във всичките рекурентни подмножества на K, то съгласно условието 2) елементът $n+1$ също ще се съдържа във всичките рекурентни подмножества на K. Най-сетне,

* Добре е да се изостави този параграф при първо четене.

ако n принадлежи на всички рекурентни подмножества на K и $n=m$, то съгласно условието 3) елементът m също ще принадлежи на всички рекурентни подмножества на K.

С това показахме, че подмножеството N е рекурентно. За да се убедим, че N е най-малкото рекурентно подмножество на K, избираме кое да е друго рекурентно подмножество M. Тъй като елементите на N се съдържат във всяко рекурентно подмножество на K, то те се съдържат и в подмножеството M, т. е. N наистина се съдържа в M.

Дефиниция. Елементите на минималното рекурентно подмножество N на дадено тяло K се наричат негови естествени елементи.

С други думи, естествените елементи на едно тяло K са онези негови елементи, които се съдържат във всичките му рекурентни подмножества. Такива елементи винаги има. Такъв е например елементът 1.

Принципът за минималност на подмножеството на естествените елементи се нарича понякога принцип на математическата индукция и се формулира обикновено така: нека M е множество от естествени елементи на едно тяло K, което заедно с всеки свой елемент съдържа и равните му; ако M съдържа 1 и заедно с n винаги съдържа и $n+1$, то M съвпада с множеството N на естествените елементи на K. И наистина M е съставено от естествени елементи и следователно се съдържа в N. От друга страна, N е минималното рекурентно подмножество, т. е. то се съдържа във всяко рекурентно подмножество и следователно се съдържа в M.

Пример 1. Ще докажем, че сумата на два естествени елемента на едно тяло K е естествен елемент на това тяло. И наистина нека M е множеството на онези естествени елементи y на K, за които сумата $x+y$ е естествен елемент на K при всички естествени стойности на x. Очевидно 1 принадлежи на M, защото $x+1$ е естествен елемент. От друга страна, ако y принадлежи на M, то $y+1$ също принадлежи на M, защото елементът $x+(y+1)=(x+1)+y$ е естествен. Ако елементът y принадлежи на M и $y=z$, то елементът z също принадлежи на M, защото $x+y=x+z$ и следователно елементът $x+z$ е естествен при всеки избор на естественния елемент x. Въз основа на принципа на математическата индукция заключаваме, че M съдържа всичките естествени елементи на K.

Пример 2. Ще докажем, че произведението на два естествени елемента на едно тяло K е естествен елемент на това тяло. И наистина нека x е произволен естествен елемент на K и нека M е множеството на онези естествени елементи y на K, за които произведението $x \cdot y$ е естествен елемент. Очевидно M съдържа 1, защото елементът $x \cdot 1=x$ е естествен. От друга страна, ако y принадлежи на M, то $y+1$ също принадлежи на M, защото елементът $x(y+1)=xy+x$ е естествен.

Ако елементът y принадлежи на M и $y=z$, то елементът z също принадлежи на M, защото $xy=xz$ и следователно елементът xz е естествен. Въз основа на принципа на математическата индукция заключаваме, че M съдържа всички естествени елементи на K.

Пример 3. Ако $x+1$ и елементът x е естествен в едно тяло K, то елементът $x-1$ е също тъй естествен в това тяло. И наистина нека M е множество, съставено от елементи, равни на единица, и от онези естествени елементи x на тялото K, за които $x-1$ е също естествен елемент. Ако x е произволен елемент от M, то елементът $x+1$ също принадлежи на M, защото двата елемента $x+1$ и $(x+1)-1=x$ са естествени. Освен това, ако x принадлежи на M и $x=y$, то y също принадлежи на M, защото, ако елементът $x-1$ е естествен, то същото е вярно и за елемента $y-1$, тъй като $x-1=y-1$; ако ли пък елементът $x-1$ не е естествен, то $x=1$, защото x при-

надлежи на M, а следователно и $y+1$. Като приложим принципа на математическата индукция, заключаваме, че M съдържа всичките естествени елементи на K.

Досега не предполагахме, че разглежданото тяло е наредено. Сега ние ще установим някои свойства на естествените елементи в наредените тела.

Нека K е произволно наредено тяло. В такъв случай всичките му естествени елементи x удовлетворяват неравенството $x \geqq 1$. И наистина нека M е множеството на онези естествени елементи, за които това неравенство е изпълнено. В такъв случай M съдържа 1 и ако съдържа x, то съдържа и $x+1$, защото $x+1>x \geqq 1$. Освен това, ако x принадлежи на M и $x=y$, то y принадлежи на M, защото $y \geqq 1$. Оттук заключаваме, че M съдържа всичките естествени елементи на K.

С оглед на нашите нужди ще докажем следното: ако x и n са два естествени елемента и $x>n$, то $x-n$ е естествен елемент. И наистина нека M е множеството на онези естествени елементи n, за които твърдението е вярно. Очевидно M съдържа 1, защото, ако $x>1$, то $x \neq 1$ и следователно съгласно доказаното в пример 3 елементът $x-1$ е естествен. Сега ще докажем, че ако n принадлежи на M, то $n+1$ също принадлежи на M. И наистина нека x е естествен елемент и $x>n+1$. В такъв случай ще имаме $x-1>n$. Обаче $x \neq 1$, защото в противен случай ще имаме $0>n$, което не е възможно, защото n е естествен елемент. Това ни дава възможност да твърдим, че $x-1$ е естествен елемент, а следователно $(x-1)-n$ е също естествен елемент, защото n принадлежи на M и $x-1>n$. От друга страна, $x-(n+1)=(x-1)-n$ и следователно $x-(n+1)$ е също тъй естествен елемент. По такъв начин ние доказахме, че $n+1$ принадлежи на M. Най-сетне нека n принадлежи на M и $n=m$. В такъв случай m също принадлежи на M, защото $x-n=x-m$. От това обаче следва въз основа на принципа на математическата индукция, че множеството M съдържа всички естествени елементи, с което интересуващото ни твърдение е доказано.

Следствие. Неравенствата

$$0<x-n<1$$

не могат да се удовлетворят при никой избор на естествените елементи x и n. И наистина от неравенството $0<x-n$ следва, че елементът $x-n$ е естествен и следователно $x-n \geqq 1$.

Дефиниция. Един елемент p на едно тяло се нарича цял, когато той може да се представи като разлика на два естествени елемента на това тяло.

Не е трудно да се види, че сумата, разликата и произведението на два цели елемента на едно тяло е също цял елемент на тялото. Това може да се установи, като се вземе под внимание, че от равенствата

$$p_1=n_1-m_1,$$
$$p_2=n_2-m_2$$

следват равенствата

$$p_1+p_2=(n_1+n_2)-(m_1+m_2),$$
$$p_1-p_2=(n_1+m_2)-(m_1+n_2),$$
$$p_1p_2=(n_1n_2+m_1m_2)-(n_1m_2+n_2m_1).$$

Всеки естествен елемент m е цял, както това се вижда от равенството $m=(m+1)-1$. Специално, ако тялото е наредено, то неговите естествени елементи са и положителни (ние дори видяхме, че те са по-малки от 1). Сега ще установим, че обратното е също вярно, т. е. всеки цял и положителен елемент на едно наредено тяло е естествен. И наистина нека m е цял и положителен елемент. Тъй като m е цял елемент, ние можем да го представим във вида $m=x-n$, където x и n са естествени елементи. От друга страна, елементът m е положителен и следователно $x>n$. По такъв начин ние можем да приложим доказаното по-горе, според което $x-n$ е естествен елемент.

От изложеното се вижда, че няма цял елемент p, който да удовлетворява неравенствата

$$0<p<1.$$

Ние ще използуваме впоследствие тази бележка.

Дефиниция. Един елемент на едно тяло се нарича рационален, когато той може да се представи като отношение на два цели елемента на тялото. Елементите, които не са рационални, се наричат ирационални.

Лесно е да се види, че сумата, разликата, произведението и частното на два рационални елемента на едно тяло е също тъй рационален елемент на това тяло.

§ 6. Принцип за непрекъснатост на множеството на реалните числа

Едно множество M от числа се нарича ограничено отгоре, когато съществува число l, което удовлетворява неравенството $x \leqq l$ при всеки избор на x от M. Такова число l се нарича горна граница на множеството M. И така едно число l се нарича горна граница на едно множество M, когато при всяко x от M е изпълнено неравенството $x \leqq l$. Аналогично се дефинира понятието долна граница на едно множество от числа.*

Като пример нека разгледаме множеството на дробите

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Това множество е ограничено отгоре (числото 2 е например една негова горна граница). Това множество е ограничено и отдолу (чис-

* По-точно едно число m се нарича долна граница на едно множество M от числа, ако при всяко x от M е изпълнено неравенството $m \leqq x$.

лото—1 е една негова долна граница). Едно множество от числа ще наричаме ограничено, когато то е ограничено и отгоре, и отдолу.

Разбира се, ако едно множество е ограничено отгоре, то притежава безбройно много горни граници, защото всяко число, което е по-голямо от една негова горна граница, е също тъй негова горна граница. Най-малката от горните граници на едно ограничено отгоре множество от числа се нарича негова точна горна граница. Аналогично се дефинира и понятието точна долна граница на едно ограничено отдолу множество от числа.*

Едно ограничено отдолу множество от числа съвсем не е задължено да съдържа най-малък член. Така множеството на съществено положителните числа (т. е. множеството на числата, които са по-големи от нула; нулата не се причислява към това множество) е ограничено отдолу. Нулата например е една негова долна граница. В това множество обаче няма най-малък член (към разглежданото множество са причислени произволно близки до нулата числа, но числото нула не е причислено). Разбира се, аналогична забележка се отнася и за ограничени отгоре множества от числа.

Принцип за непрекъснатост. Всяко ограничено отгоре множество от реални числа притежава точна горна граница.

От принципа за непрекъснатост следва, разбира се, че всяко ограничено отдолу множество от реални числа притежава точна долна граница. И наистина нека множеството M на числата x е ограничено отдолу. В такъв случай множеството N на числата $-x$ е ограничено отгоре. Нека l е точната горна граница на множеството N. Не е трудно да се убедим, че в такъв случай $-l$ е точната долна граница на множеството M. Подробностите на доказателството ще предоставим на читателя.

Принципът за непрекъснатост съществено отличава тялото на реалните числа от тялото на рационалните числа. Ще дадем тук един пример, от който ще се види, че принципът за непрекъснатост не е валиден в тялото на рационалните числа. Този пример е предназначен, разбира се, за читатели, които са запознати поне с основните неща от теорията на рационалните числа.

Разглеждаме множеството M на онези рационални неотрицателни числа x, които удовлетворяват неравенството $x^2 \leq 2$. Множеството M е ограничено отгоре, защото никой негов член не надминава например числото 2. И наистина, ако допуснем, че при някое x от M имаме $x>2$, то ще имаме $x^2>4$, което не е вярно. Въпреки това ние ще покажем, че не съществува рационално число, което да е точна горна граница на множеството M. Доказателството ще извършим от противното. Нека рационалното число l да е точната горна граница на множеството M. Не е трудно да се убедим, че не можем да имаме $l^2<2$. И наистина в противен случай неотрицателното рационално число

$$r=\frac{4+3l}{3+2l}$$

удовлетворява неравенството

$$2-r^2=2-\left(\frac{4+3l}{3+2l}\right)^2=\frac{2-l^2}{(3+2l)^2}>0$$

и следователно принадлежи на M. От друга страна,

$$r-l=\frac{4+3l}{3+2l}-l=\frac{2(2-l^2)}{3+2l}>0, \text{ т. е. } r>l,$$

което противоречи на предположението, че l е една горна граница на M.

Също така не е трудно да се види, че не можем да имаме $l^2>2$. Да допуснем противното. Числото

$$m=\frac{4+3l}{3+2l}$$

е също една горна граница на множеството M. За да се убедим в това, разглеждаме неравенствата

$$m-x=\frac{4+3l}{3+2l}-x=\left(\frac{4+3l}{3+2l}-\frac{4+3x}{3+2x}\right)+\left(\frac{4+3x}{3+2x}-x\right)=$$

$$=\frac{l-x}{(3+2l)(3+2x)}+\frac{2(2-x^2)}{3+2x}\geq 0,$$

които са валидни при всички стойности на x от M. Така конструираната горна граница m е обаче по-малка от l, защото

$$l-m=l-\frac{4+3l}{3+2l}=\frac{2(l^2-2)}{3+2l}>0,$$

нещо, което противоречи на предположението, че l е най-малката горна граница на M. И така от изложеното досега е ясно, че

$$l^2=2. \tag{1}$$

Нашата цел ще бъде постигната, ако успеем да покажем, че няма рационално число l, чийто квадрат е равен на 2. Ние ще извършим доказателството от противното. Нека p и q са две цели числа, за които да имаме

$$l=\frac{p}{q},\ q\neq 0.$$

* Точна долна граница на едно множество от числа се нарича най-голямата му долна граница.

Без да ограничаваме общността, ние можем да приемем, че дробта $\frac{p}{q}$ е несъкратима. От равенството $l^2=2$ получаваме

$$p^2=2q^2.$$

Това равенство ни учи, че p^2, а следователно и p е четно число. И така ние можем да пишем

$$p=2r,$$

където r е цяло число. Оттук получаваме

$$4r^2=2q^2, \text{ т. е. } 2r^2=q^2.$$

Последното равенство ни учи, че числото q^2, а следователно и числото q е четно. И така двете числа p и q са четни, което противоречи на допускането, че дробта $\frac{p}{q}$ е несъкратима.

Обобщение. Наредено тяло, в което е валиден принципът за непрекъснатост, се нарича непрекъснато наредено тяло.

От направените по-горе разсъждения се вижда, че ако в някое наредено тяло е валиден принципът за непрекъснатост, то в това тяло сигурно има елементи, които не са рационални, т. е. които не могат да се представят като частно на два цели елемента. Такива елементи ще наричаме ирационални. Такъв е например елементът l, който удовлетворява условието (1). Както вече споменахме, от разсъжденията, които ние направихме, се вижда, че такъв елемент има във всяко непрекъснато наредено тяло.

Досега ние се ползувахме (макар и привидно) от познанията, които читателят има за реалните числа. По-нататък с изключение на следващите два параграфа това вече няма да бъде нужно. От този момент ние ще застанем на следната основа: ще си мислим едно произволно наредено непрекъснато тяло (от каквото естество и да бъдат неговите елементи); елементите на това тяло ние ще наричаме реални числа. По-нататък ще градим всичко, като изхождаме от едно такова тяло (впрочем, разбира се, не е необходимо да се обвързваме с никое конкретно тяло). След като застанем на такава основа, понятията като нула, единица, положително число и пр. вече са дефинирани за нас, а като вземем под внимание § 5, ще бъдат дефинирани и понятията цяло число, рационално число и пр.

Тук обаче се налага да поставим следния принципен въпрос: съществуват ли въобще непрекъснати наредени тела? Нека припомним, че тялото на рационалните числа не е непрекъснато. В следващите два параграфа ще покажем два примера на непрекъснати наредени тела, като изхождаме от предположението, че теорията на рационалните тела е изградена по някакъв друг път. Елементите на тези две тела ще изглеждат твърде различни. Ние обаче и в двата случая ще ги наричаме реални числа съгласно дадената по-горе дефиниция. Нека

най-сетне изрично подчертаем, че следващите два параграфа не трябва да се разглеждат като част от тази книга (и следователно те могат въобще да не се четат). Тази книга си поставя за задача само да покаже какво следва от предположението, че съществува поне едно непрекъснато наредено тяло. За да се направи това, не е необходимо предварително да бъде изградена теорията на рационалните числа.

§ 7. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Г. Кантор)*

В този параграф ще предполагаме, че теорията на рационалните числа е изградена независимо от това, което ние излагахме досега. Методата, с която ще си служим, произхожда от Кантор (Cantor).

Казваме, че е дадена една безкрайна редица от рационални числа

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

ако на всяко цяло положително число n е съпоставено по едно рационално число a_n. Ще казваме, че редицата (1) е фундаментална, ако при всеки избор на положителното рационално число ε е изпълнено неравенството

(2) $$|a_p-a_q|<\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на p и q. Фундаментални редици съществуват. Такава е например редицата

$$r, r, r, \ldots,$$

каквото и да бъде рационалното число r.

Всяка фундаментална редица е ограничена. И наистина нека редицата (1) е фундаментална и нека ε е едно положително рационално число. Неравенството (2) ни дава

$$a_q-\varepsilon<a_p<a_q+\varepsilon.$$

Да фиксираме едно достатъчно голямо цяло число q по такъв начин, че при $p>q$ да е изпълнено условието (2). В такъв случай най-голямото от числата

$$a_1, a_2, \ldots, a_q, a_q+\varepsilon$$

е една горна граница на редицата (1), а най-малкото от числата

$$a_1, a_2, \ldots, a_q, a_q-\varepsilon$$

е една нейна долна граница. Нека читателят сам докаже това.

Казваме, че две редици

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

* Добре е този параграф да се изостави при първо четене.

са конфинални помежду си, ако при всеки избор на положителното рационално число ε е изпълнено неравенството

$$|b_n - a_n| < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n.

Не е трудно да се види, че ако едната от две конфинални помежду си редици е фундаментална, то и другата е фундаментална. Читателят лесно сам ще докаже това.

Множеството на всичките редици, които са конфинални с дадена фундаментална редица, се нарича Канторов клас, определен от тази редица. Лесно се вижда, че всичките редици от един Канторов клас са конфинални помежду си.

Равенство на два Канторови класа. Нека α и β са два Канторови класа. Ще пишем $\alpha =$, ако поне една редица от α е конфинална с някоя редица от β. Не е трудно да се види, че в такъв случай α и β са съставени от едни и същи редици. И наистина нека класът α е определен от редицата

(3) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

а класът β е определен от редицата

(4) $$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

По-нататък нека редицата

$$a_1', a_2', a_3', \ldots$$

от α е конфинална с редицата

$$b_1', b_2', b_3', \ldots$$

от β и най-сетне нека

(5) $$a_1'', a_2'', a_3'', \ldots$$

е произволна редица от α и

(6) $$b_1'', b_2'', b_3'', \ldots$$

е произволна редица от β. В такъв случай при всеки избор на положителното число ε при достатъчно големи стойности на n ще имаме

$$|a_n'' - a_n| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad |b_n'' - b_n| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$|a_n' - a_n| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad |b_n' - b_n| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$|a_n' - b_n'| < \frac{\varepsilon}{4}$$

и следователно

$$|a_n'' - b_n| \leqq |a_n'' - a_n| + |a_n - a_n'| + |a_n' - b_n'| + |b_n' - b_n| < \varepsilon$$
$$|b_n'' - a_n| \leqq |b_n'' - b_n| + |b_n - b_n'| + |b_n' - a_n'| + |a_n' - a_n| < \varepsilon,$$

т. е. редицата (5) принадлежи на , защото е конфинална с редицата (4), а редицата (6) принадлежи на α, защото е конфинална с редицата (3).

Събиране. Нека α и β са два Канторови класа. Избираме една редица

(7) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

от α и една редица

(8) $$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

от β. Образуваме редицата

(9) $$a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$$

Не е трудно да се види, че тази редица е фундаментална. И наистина каквото и да бъде положителното рационално число ε, ще имаме

$$|a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при достатъчно големи стойности на p и q и следователно

$$|(a_p + b_p) - (a_q + b_q)| \leqq |a_p - a_q| + |b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Означаваме с γ Канторовия клас, който съдържа редицата (9). Така дефинираният клас γ не зависи от начина, по който са избрани редиците (7) и (8) съответно в α и β. И наистина нека

$$a_1', a_2', a_3', \ldots$$

е коя да е редица от α и

$$b_1', b_2', b_3', \ldots$$

е коя да е редица от β. Разглеждаме редицата

(10) $$a_1' + b_1', a_2' + b_2', a_3' + b_3', \ldots$$

и означаваме с γ' Канторовия клас, който съдържа тази редица. Избираме едно произволно положително рационално число ε. В такъв случай при достатъчно големи стойности на n ще имаме

$$|a_n - a_n'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b_n - b_n'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и следователно

$$|(a_n + b_n) - (a_n' + b_n')| \leqq |a_n - a_n'| + |b_n - b_n'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

което показва, че двете редици (9) и (10) са конфинални помежду си, откъдето следва, както знаем, че двата класа γ и γ' са съставени от едни и същи редици.

По дефиниция полагаме

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Като изхождаме от тази дефиниция на понятието сума, не е трудно да се убедим, че Канторовият клас ξ, който е съставен от редиците, конфинални с редицата

$$0, 0, 0, \ldots$$

удовлетворява уравнението

$$\alpha + \xi = \alpha$$

при всеки избор на Канторовия клас α. Съгласно с общите дефиниции на § 1 ние ще означаваме този клас със символа 0 и ще го наричаме нулев Канторов клас или по-кратко — нула. Очевидно една редица

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

принадлежи на нулевия Канторов клас тогава и само тогава, когато при всеки избор на положителното число ε е изпълнено неравенството

$$|\xi_n| < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n.

Умножение. Нека α и β са два Канторови класа. Избираме една редица

(11) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

от α и една редица

(12) $$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

от β. Редицата

(13) $$a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots$$

е фундаментална (нека читателят сам докаже това). Означаваме с γ Канторовия клас от редиците, които са конфинални с редицата (13). Този клас не зависи от спомагателните редици (11) и (12). Доказателството предоставяме на читателя. По дефиниция полагаме

$$\gamma = \alpha\beta.$$

Относно така дефинираните понятия равенство, събиране и умножение множеството на всичките Канторови класове представлява едно комутативно тяло. Проверката, която не е свързана с принципиални трудности, но изисква търпение и хартия, ще предоставим на трудолюбивия читател.

Наредба на Канторовите класове. Нека α е един Канторов клас. Ще наричаме този клас положителен, ако поне за една негова редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

може да се намери такова положително рационално число ε_0, че да имаме

(14) $$a_n \geq \varepsilon_0$$

за всички достатъчно големи стойности на n. В такъв случай и при всеки друг избор на редицата

$$a_1', a_2', a_3', \ldots$$

от α съществува положително число η, за което е изпълнено неравенството

$$a'_n \geq \eta$$

при всички достатъчно големи стойности на n. За да се убедим в това, достатъчно е да положим $\eta = \frac{\varepsilon_0}{2}$. И наистина при достатъчно големи стойности на n имаме

$$|a_n - a'_n| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

и следователно

$$a_n' - a_n + (a_n' - a_n) \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Не е трудно да се покаже, че множеството от така дефинираните положителни класове удовлетворява условията 8, 9, 10 и 11 на § 3. Нека читателят сам провери това.

Ще покажем, че за да принадлежи една редица

(15) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

към неотрицателен клас α (т. е. към клас, който е или положителен, или нула), е необходимо и достатъчно при всеки избор на положителното число ε да бъде изпълнено неравенството

(16) $$a_n > -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n. И наистина, ако редицата (15) принадлежи към положителен клас, то за достатъчно големи стойности на n е изпълнено дори неравенството (14), където ε_0 е избрано по подходящ начин; ако пък (15) принадлежи към нулевия клас, то при всеки избор на положителното рационално число ε е изпълнено неравенството $|a_n| < \varepsilon$, а още повече е изпълнено и условието (16) за достатъчно големи стойности на n. И така интересуващото ни условие е необходимо, за да принадлежи редицата (15) към неотрицателен клас. Ще покажем, че условието е достатъчно. За тази цел да допуснем, че редицата (15) не принадлежи към положителен клас. Това значи, че при всеки избор на положителното рационално число ε неравенството

$$a_n \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

се нарушава за безбройно много стойности на m. Да означим тези стойности с

$$m_1, m_2, m_3, \ldots,$$

т. е.

$$a_{m_k} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } k = 1, 2, \ldots$$

От друга страна, ако n и k са достатъчно големи, то

$$|a_n - a_{m_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и следователно

$$a_n = a_{m_k} + (a_n - a_{m_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

което заедно с (16) дава

$$|a_n| < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n, т. е. при тези условия редицата (15) принадлежи към нулевия Канторов клас. С това достатъчността е установена.

От доказаното се вижда следното. Нека α и β са два Канторови класа; нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е една редица от α и

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

е една редица от β. За да имаме

$$\alpha \leqq \beta,$$

т. е. за да бъде класът $\beta - \alpha$ неотрицателен, е необходимо и достатъчно при всеки избор на положителното рационално число ε да имаме

$$b_n - a_n > -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n. Доказателството предоставяме и този път на читателя.

След всичко изложено дотук ще покажем, че нареденото тяло на Канторовите класове е валиден принципът за непрекъснатост. За тази цел разглеждаме едно ограничено отгоре множество M от Канторови класове ξ и означаваме с α една негова горна граница.

Ще казваме, че едно рационално число q е дясно, ако при всеки избор на положителното рационално число ε и при всеки избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

която принадлежи на някой клас от M, е изпълнено неравенството

$$x_n \leqq q + \varepsilon$$

за всички достатъчно големи стойности на n. Рационално число, което не е дясно, ще наричаме ляво.

Ще покажем, че съществуват десни числа. И наистина нека q е една горна граница на една редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

от α, нека ξ е един Канторов клас от M и нека

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

е една редица от ξ. В такъв случай имаме $\xi \leqq \alpha$ и следователно при всеки избор на положителното рационално число ε ще имаме

$$a_n - x_n > -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на n. Оттук получаваме

$$x_n < q + \varepsilon,$$

т. е. числото q е дясно.

Ще покажем, че съществуват леви числа. И наистина нека

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{17}$$

е редица от някой клас ξ от M. Означаваме с r една долна граница на редицата (17). В такъв случай при всички стойности на n имаме

$$r \leqq x_n$$

и следователно, ако $p < r$, то неравенството

$$x_n \leqq p + \varepsilon$$

сигурно е нарушено при

$$0 < \varepsilon < r - p,$$

т. е. числото p не е дясно. С това е показано съществуването на леви числа.

С оглед на това, което ще следва, ще отбележим, че левите числа са винаги по-малки от десните. И наистина от дефиницията на понятието дясно число се вижда веднага, че число, което е по-голямо от едно дясно число, е също тъй дясно.

Нека q_1 е едно дясно число и p_1 е едно ляво число. Разглеждаме числото $\frac{p_1+q_1}{2}$. Ако това число е дясно, полагаме

$$p_2 = p_1,$$

$$q_2 = \frac{p_1+q_1}{2},$$

ако пък е ляво, полагаме

$$p_2 = \frac{p_1+q_1}{2},$$

$$q_2 = q_1.$$

И в двата случая числото p_2 е ляво, числото q_2 е дясно и освен това са изпълнени условията

$$p_1 \leq p_2 < q_2 \leq q_1,$$
$$q_2 - p_2 = \frac{q_1 - p_1}{2}.$$

Като използуваме числото $\frac{p_2+q_2}{2}$ и приложим още веднъж горните разсъждения, добиваме възможност да дефинираме едно ляво число p_3 и едно дясно число q_3 по такъв начин, че да имаме

$$p_2 \leq p_3 < q_3 \leq q_2,$$
$$q_3 - p_3 = \frac{q_2 - p_2}{2}.$$

Този процес продължаваме неограничено. По този начин получаваме редица от леви числа

(18) $$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

и редица от десни числа

(19) $$q_1, q_2, q_3, \ldots,$$

които удовлетворяват условията

$$p_n \leq p_{n+1} < q_{n+1} \leq q_n,$$
$$q_{n+1} - p_{n+1} = \frac{q_n - p_n}{2} = \frac{q_1 - p_1}{2^n}.$$

Ще покажем, че редицата (18) е фундаментална. И наистина при всички цели положителни стойности на n и m имаме

$$0 \leq p_{n+m} - p_n = (p_{n+m} - p_{n+m-1}) + (p_{n+m-1} - p_{n+m-2}) + \ldots + (p_{n+1} - p_n) \leq$$
$$\leq (q_{n+m-1} - p_{n+m-1}) + (q_{n+m-2} - p_{n+m-2}) + \ldots + (q_n - p_n) =$$
$$= \frac{q_1 - p_1}{2^{n+m-2}} + \frac{q_1 - p_1}{2^{n+m-3}} + \ldots + \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}} =$$
$$= \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \ldots + 1\right) = \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{q_1 - p_1}{2^{n-2}},$$

т. е. както и да избираме рационалното число ε, ще имаме при всички достатъчно големи стойности на n неравенството

$$0 \leq p_{n+m} - p_n < \varepsilon,$$

каквото и да бъде цялото положително число m. И така редицата (18) е наистина фундаментална.

Да означим с δ Канторовия клас на редиците, които са конфинални с редицата (18). Този клас съдържа и редицата (19), защото

$$q_n - p_n = \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}}$$

и следователно редицата (19) е конфинална с редицата (18).

Ще покажем, че Канторовият клас δ е една горна граница на множеството M. И наистина нека ξ е един клас от M и

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

е една редица от ξ. Избираме едно положително рационално число ε. Като вземем под внимание, че редицата (19) е фундаментална (тъй като тя е конфинална с една фундаментална редица), получаваме при всички достатъчно големи стойности на n и m неравенството

(20) $$|q_n - q_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксираме n. В такъв случай при достатъчно големи стойности на m ще имаме

(21) $$x_m \leq q_n + \frac{\varepsilon}{2},$$

защото числото q_n е дясно. От така получените неравенства (20) и (21) получаваме

$$q_m - x_m = (q_n - x_m) + (q_m - q_n) \geq -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на m, т. е.

$$\xi \leq \delta,$$

с което е показано, че δ е една горна граница на M.

Ще покажем, че δ е точната горна граница на множеството M, т. е. най-малката от всичките му горни граници. И наистина нека γ е един Канторов клас, за който $\gamma < \delta$, и нека

(22) $$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

е една редица от γ. В такъв случай съществува такова положително число ε_1, че при всички достатъчно големи стойности на n да имаме

(23) $$p_n - y_n \geq \varepsilon_1.$$

Фиксираме едно толкова голямо цяло число n, че при достатъчно големи стойности на m да имаме

$$|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Това е възможно, защото редицата (22) е фундаментална. В такъв случай ще имаме

(24) $$y_n - y_m > -\frac{\varepsilon_1}{2}.$$

От друга страна, числото p_n е ляво, т. е. при някое положително число ε_2 имаме поне един клас ξ от M, който съдържа такава редица

(25) $$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

че неравенството

$$x_s \leq p_n + \varepsilon_2$$

се нарушава за безбройно много стойности на s, т. е. съществува неограничена редица от цели положителни числа

$$s_1, s_2, s_3, \ldots,$$

за които

(26) $$x_{s_k} > p_n + \varepsilon_2 \text{ при } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Да вземем сега под внимание, че редицата (25) е фундаментална. Това дава възможност да твърдим, че при всички достатъчно големи стойности на m и k имаме

$$|x_m - x_{s_k}| < \frac{\varepsilon_2}{2},$$

следователно

(27) $$x_m - x_{s_k} > -\frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Събираме почленно неравенствата (23), (24), (26) и (27). Това ни дава

$$x_m - y_m > \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2}$$

при всички достатъчно големи стойности на m, т. е. $\xi > \gamma$, което показва, че γ не е горна граница на M. И така δ е най-малката горна граница на M. По такъв начин установихме, че в тялото на Канторовите класове е валиден принципът за непрекъснатост.

И така, като използувахме теорията на рационалните числа, ние можахме да дадем пример на едно непрекъснато наредено тяло. В съгласие с това, което казахме в предния параграф, занапред под реални числа бихме могли да разбираме Канторовите класове.

§ 8. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Р. Дедекинд)*

В този параграф, както и в предшествуващия, ще предполагаме, че теорията на рационалните числа е изградена независимо от това, което излагахме досега. Методата, с която ще си служим този път, произхожда от Дедекинд (Dedekind).

Дефиниция. Сечение ще наричаме всяка система от две множества A и B от рационални числа, които имат следните свойства:

1. Никое от двете множества A и B не е празно (т. е. във всяко едно от тях има рационални числа).

2. Никое рационално число не принадлежи едновременно на двете множества A и B.

3. Всяко рационално число, с евентуално изключение само на едно, е причислено към едното от двете множества A и B.

4. В множеството A няма най-голямо рационално число, а в множеството B няма най-малко рационално число.

5. Ако a принадлежи на A и $a_1 \leq a$, то a_1 принадлежи на A; ако b принадлежи на B и $b \leq b_1$, то b_1 принадлежи на B.

Двете множества A и B, които образуват сечението, ще наричаме класове; множеството A ще наричаме ляв клас, а множеството B — десен клас. Сечението, чийто ляв клас е A, а десен клас е B, ще означаваме със символа (A, B).

Пример 1. Означаваме с A множеството на числата, които са съществено по-малки от 2, а с B — множеството на числата, които са съществено по-големи от 2. Не е трудно да се убедим, че двете множества A и B удовлетворяват изброените по-горе условия, т. е. образуват сечение.

Пример 2. Означаваме с A множеството, съставено от всичките отрицателни рационални числа и от онезъ неотрицателни рационални числа, чийто квадрат не надминава 2. С B означаваме множеството на останалите рационални числа. Не е трудно да се убедим, че така дефинираните множества A и B образуват сечение.

В първия от двата примера числото 2 (и само това рационално число) не е причислено към никой от класовете. Напротив, във втория пример всяко рационално число влиза в някой от класовете.

Полезно е да отбележим, че ако (A, B) е едно сечение, то, както и да избираме положителното рационално число ε, винаги може да се намери число a от A и число b от B по такъв начин, че да имаме $b - a < \varepsilon$. И наистина нека a_1 е число от A и b_1 е число от B. Разглеждаме двете числа

$$a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3} \text{ и } a_1 + 2\frac{b_1 - a_1}{3}.$$

* Добре е този параграф да се изостави при първо четене.

От тези две числа поне едното се съдържа в някое от двете множества A и B. Означаваме това число с p. Очевидно имаме

$$p-a_1 \leq \frac{2}{3}(b_1-a_1),$$

$$b_1-p \leq \frac{2}{3}(b_1-a_1).$$

Ако p принадлежи на A, полагаме $a_2=p$ и $b_2=b_1$. Ако пък p принадлежи на B, полагаме $a_2=a_1$ и $b_2=p$. По такъв начин получаваме число a_2 от A и число b_2 от B, за които е изпълнено неравенството

$$b_2-a_2 \leq \frac{2}{3}(b_1-a_1).$$

След като сме дефинирали a_2 и b_2, по същия начин намираме число a_3 от A и число b_3 от B, за които

$$b_3-a_3 \leq \frac{2}{3}(b_2-a_2)$$

и следователно

$$b_3-a_3 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(b_1-a_1\right).$$

Като повторим n пъти тези разсъждения, получаваме число a_n от A и число b_n от B, които удовлетворяват условието

$$b_n-a_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(b_1-a_1\right).$$

След всичко извършено, каквото и да бъде положителното рационално число ε, достатъчно е да изберем n толкова голямо, че да имаме

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(b_1-a_1\right)<\varepsilon,$$

за да имаме и

$$b_n-a_n<\varepsilon.$$

За тази цел означаваме с r и s две цели положителни числа, за които

$$\frac{r}{s}=\frac{b_1-a_1}{\varepsilon},$$

и полагаме например

$$n=2r.$$

В такъв случай

$$\frac{n}{2}=\frac{b_1-a_1}{\varepsilon}$$

и следователно

$$\frac{b_1-a_1}{\varepsilon}<1+\frac{n-1}{2}\leq\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

което ни дава

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(b_1-a_1\right)<\varepsilon.$$

Равенство на сечения. Две сечения се наричат равни, ако левите им класове са съставени от едни и същи рационални числа.

Събиране. Нека са дадени две сечения (A, B) и (C, D). Означаваме с P множеството на онези числа p, които могат да се представят във вида $p=a+c$, където a принадлежи на A, а c принадлежи на C. След това дефинираме един клас Q по следния начин: едно число q причисляваме към Q тогава и само тогава, когато то е по-голямо от някое число, което не принадлежи на P. Не е трудно да се убедим, че множествата P и Q образуват сечение. Проверката предоставяме на читателя. Сечението (P, Q) се нарича сума на двете сечения (A, B) и (C, D), което символично се записва така:

$$(P, Q)=(A, B)+(C, D).$$

Умножение. Нека са дадени две сечения (A, B) и (C, D). Означаваме с P множеството на онези числа p, за всяко от които могат да се намерят числа a, b, c и d съответно от A, B, C и D по такъв начин, че ако m и n са две произволни числа, които удовлетворяват неравенствата $a \leq m \leq b$, $c \leq n \leq d$, то $p<mn$. След това дефинираме едно множество Q по следния начин: едно число q се причислява към Q тогава и само тогава, когато то е по-голямо от някое число, което не влиза в P. Не е трудно да се провери, че двете множества P и Q образуват сечение. Тази проверка предоставяме на читателя. Сечението (P, Q) се нарича произведение на двете сечения (A, B) и (C, D). Символично това се записва така:

$$(P, Q)=(A, B) \cdot (C, D).$$

Относно така дефинираните понятия равенство, събиране и умножение сеченията образуват тяло. Ние и този път ще предоставим проверката на трудолюбивия читател.

Наредба на сеченията. Едно сечение (A, B) ще наричаме положително, когато множеството A съдържа поне едно положително число. Нека читателят сам провери, че множеството от положителните сечения удовлетворява условията 8, 9, 10 и 11 на § 3. По такъв начин получаваме една наредба в тялото на сеченията. Не е трудно да се види, че

$$(A, B)<(C, D)$$

тогава и само тогава, когато съществува рационално число ξ, което принадлежи както на B, така и на C. И наистина нека положим

$$(P, Q)=(C, D)-(A, B).$$

Ще отбележим, че понятието разлика на две сечения има смисъл за нас, защото множеството на всичките сечения е тяло. Да допуснем, че сечението (P, Q) е положително. В такъв случай множеството P ще съдържа някое положително число p. Избираме едно число a от A и едно число b от B по такъв начин, че да имаме $b-a<p$. Това е възможно, както вече знаем, защото числото p е положително. По такъв начин получаваме $b<a+p$. От друга страна,

$$(1) \qquad (P, Q)+(A, B)=(C, D)$$

и следователно числото $a+p$ принадлежи на C. Като вземем под внимание, че $b<a+p$, заключаваме, че b също тъй принадлежи на C. С това ние намерихме едно число b, което принадлежи както на B, така и на C.

Обратно, нека съществува число b, което принадлежи както на B, така и на C. От равенството (1) и от дефиницията на понятието сума се вижда, че числото b може да се представи във вида

$$b=a+p,$$

където a принадлежи на A и p принадлежи на P. По такъв начин получаваме

$$p=b-a>0,$$

защото b принадлежи на B и a принадлежи на A, т. е. ние намерихме в P едно положително число и следователно показахме (което е същото), че сечението (P, Q) е положително.

След всичко изложено дотук ще покажем, че в наредено тяло на сеченията е валиден принципът за непрекъснатост. За тази цел разглеждаме едно ограничено множество M от сечения (X, Y) и означаваме с (A, B) една негова горна граница. По-нататък дефинираме един клас P от рационални числа по следния начин: причисляваме едно число p към P тогава и само тогава, когато може да се намери число x от левия клас X на някое сечение (X, Y) от M, удовлетворяващо неравенството $p<x$. След това дефинираме един клас Q така: едно число q се причислява към Q тогава и само тогава, когато то е по-голямо от някое число, което не влиза в P.

Така дефинираните два класа P и Q не са празни. За да видим, че класът P не е празен, избираме едно сечение (X, Y) от M, избираме произволно x от X и означаваме с p кое да е число, по-малко от x. По този начин намерихме едно число, което сигурно принадлежи на P. За да видим, че класът Q не е празен, избираме едно число b от B и означаваме с q кое да е число, по-голямо от b. Числото b не принадлежи на P, защото в противен случай би съществувало число x

от класа X на някое сечение (X, Y) от M, за което $b<x$, т. е. бихме имали $(A, B)<(X, Y)$. Това обаче не е вярно, защото (A, B) е една горна граница на множеството M. И така избраното число q е по-голямо от едно число b, което не принадлежи на P, т. е. q принадлежи на Q.

Дефинираните по този начин два класа P и Q образуват сечение. Проверката е съвсем проста и може да бъде предоставена на читателя. Ние ще докажем, че сечението (P, Q) представлява точната горна граница на множеството M.

Първо ще докажем, че сечението (P, Q) е една горна граница на M. И наистина, ако допуснем, че за някое сечение (X, Y) от M имаме

$$(P, Q)<(X, Y),$$

от това ще следва, че има рационално число x, което фигурира както в Q, така и в X. Съгласно дефиницията на Q съществува число r, което не влиза в P и за което $r<x$. Това обаче не е възможно, защото от неравенството $r<x$ следва, че r принадлежи на P.

Така намерената горна граница (P, Q) е най-малката от всички горни граници на M. И наистина нека

$$(C, D)<(P, Q).$$

Ще покажем, че (C, D) вече не е горна граница на M. Това може да се види по следния начин: нека ξ е рационално число, което фигурира както в D, така и в P. Съгласно дефиницията на P има поне едно сечение (X, Y) в M, за което е възможно да се намери рационално число x по такъв начин, че x да принадлежи на X и при това да имаме $\xi<x$. В такъв случай обаче x принадлежи на D, защото ξ принадлежи на D и $\xi<x$. От доказаното следва, че $(C, D)<(X, Y)$, т. е. сечението (C, D) наистина не е горна граница на M.

По такъв начин можахме да дадем още един пример на непрекъснато наредено тяло, като обаче и този път си послужихме с теорията на рационалните числа. В съгласие с това, което казахме в § 6, занапред под реални числа ние бихме могли да разбираме сеченията.

§ 9. Геометрична терминология

В геометрията се показва, че в множеството на точките на една права могат да се дефинират понятията равенство, събиране, умножение и наредба, относно които това множество представлява непрекъснато наредено тяло. Поради тази причина точките от разглежданата права се наричат често реални числа. Ние няма да разглеждаме тук този поучителен геометричен въпрос, защото в същност няма да го използуваме. Все пак ние често ще си служим с геометричен език поради неговата нагледност. Така, вместо да говорим за реални числа, ще говорим за точки, вместо да казваме, че числото a е по-малко от

числото b, ще казваме, че точката a лежи наляво от точката b и пр. По-специално множеството от числата x, които удовлетворяват неравенствата $a \leq x \leq b$, ще наричаме затворен интервал и ще го означаваме със символа $[a, b]$, а множеството на числата x, които удовлетворяват неравенствата $a < x < b$, ще наричаме отворен интервал и ще го означаваме със символа (a, b).

Множеството от числата x, които удовлетворяват неравенствата $a \leq x < b$, както и множеството от числата, които удовлетворяват неравенствата $a < x \leq b$, ще наричаме полузатворен интервал. Независимо от това, дали точките a и b са причислени или не към разглеждания интервал, ние ще ги наричаме краища на този интервал. Точка, която принадлежи на един интервал, но не е край за този интервал, се нарича негова вътрешна точка. Така дефинираните интервали ще наричаме крайни за разлика от множествата от числата x, които удовлетворяват едното от неравенствата $a < x$, $a \leq x$, $x < a$, $x \leq a$, които ще наричаме безкрайни интервали и ще означаваме съответно със символите (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$. Също така множеството от всички реални числа ще наричаме безкраен интервал и ще го означаваме със символа $(-\infty, \infty)$. Понятията край и вътрешна точка за безкрайните интервали се дефинират по очевиден начин.

В съгласие с тези дефиниции и дефинициите, които дадохме по-рано, едно множество от точки ще наричаме ограничено, когато съществува краен интервал, който съдържа всичките му точки. С тези няколко примера, разбира се, не се изчерпват случаите, когато ще си служим с геометрична терминология. Ние обаче няма да формулираме изрично тривиалните дефиниции. Използването на геометрията ще бъде само привидно, защото ние ще можем да прередактираме всичко без затруднения на езика на аритметиката.

§ 10. Съществуване на най-малък член във всяко ограничено отдолу множество от цели числа

Ние знаем, че едно безкрайно множество от числа може да не притежава най-малък член дори когато е ограничено отдолу. Тук ще докажем обаче, че във всяко ограничено отдолу множество от цели числа винаги има най-малко число. И наистина нека N е едно ограничено отдолу множество от цели числа. Да допуснем, че N не съдържа най-малък член. Множеството N обаче е ограничено отдолу и следователно съгласно принципа за непрекъснатост то притежава точна долна граница ν. Числото $\nu+1$ не е долна граница на N, защото то е по-голямо от най-голямата му долна граница. Оттук следва, че в N съществува число p, което удовлетворява неравенството $p < \nu+1$. От друга страна, в N по предположение няма най-малък член. Въз основа на това ние можем да твърдим, че съществува число q в N, което удовлетворява неравенството $q < p$. От това неравенство и от двете неравенства $\nu \leq q$ и $p < \nu+1$ заключаваме, че $0 < p-q < 1$, нещо, което е невъзможно, защото числото $p-q$ е цяло. Полученото противоречие се дължи на допускането, че в множеството N няма най-малък член. С това интересуващото ни твърдение е доказано. Така установената теорема понякога се нарича принцип за добрата наредба на множеството на целите числа.

От доказаното лесно следва, че всяко ограничено отгоре множество от цели числа притежава най-голям член.

Едно множество от цели числа, което е ограничено и отгоре, и отдолу, се нарича крайно. По-специално, ако едно множество от цели положителни числа е ограничено отгоре, то е крайно. Всяко крайно множество от цели числа съдържа най-голям и най-малък член.

§ 11. Принцип на Архимед

Този принцип може да се формулира така: множеството на целите положителни числа не е ограничено отгоре.

Доказателство. Допускаме противното и означаваме с ν точната горна граница на множеството на целите положителни числа. Такава съществува съгласно принципа за непрекъснатост. Числото $\nu-1$ е по-малко от ν и следователно не е горна граница на множеството на целите положителни числа. И така съществува цяло положително число n, което удовлетворява неравенството $n > \nu-1$. От това неравенство получаваме обаче $n+1 > \nu$, т. е. намерихме цяло положително число, по-голямо от ν, което е невъзможно, защото ν е горна граница на множеството на целите положителни числа. Полученото противоречие се дължи на допускането, че принципът на Архимед не е верен. С това доказателството е завършено.

§ 12. Теорема на Кантор

Казваме, че е дадена една безкрайна редица от интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots,$$

когато на всяко цяло положително число n е съпоставен по един интервал Δ_n.

Казваме, че един интервал Δ съдържа друг интервал Δ', ако всичките точки на Δ' лежат в Δ.

Една безкрайна редица от интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

се нарича Канторова система, ако:

1) всичките интервали от редицата са затворени;

2) всеки интервал Δ_n съдържа следващия Δ_{n+1}.

Теорема на Кантор. Ако

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

е една Канторова система от интервали, то има (поне* една) точка, която лежи във всичките интервали на системата.

Доказателство. Нека a_n и b_n са съответно левият и десният край на интервала Δ_n. Тъй като всеки интервал на системата съдържа следващия, то всичките интервали се съдържат в интервала Δ_1. По-специално точката a_n принадлежи на Δ_n и следователно лежи в Δ_1. И така всичките числа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

лежат в Δ_1. Това значи, че при всички цели положителни стойности на n имаме $a_n \leq b_1$. И така множеството от числата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е ограничено отгоре. Съгласно принципа за непрекъснатост това множество притежава точна горна граница. Нека ξ е тази точна горна граница. Очевидно имаме $a_n \leq \xi$.

Нека p и q са две произволни цели положителни числа. Ние ще покажем, че $a_p \leq b_q$. И наистина, ако $p \leq q$, то интервалът Δ_q се съдържа в Δ_p и следователно точката b_q се съдържа в интервала Δ_p, т. е. $a_p \leq b_q$. Ако $p > q$, то интервалът Δ_p се съдържа в интервала Δ_q, т. е. точката a_p се съдържа в Δ_q и следователно $a_p \leq b_q$. След всичко извършено фиксираме q и оставяме p да се мени. Неравенството $a_p \leq b_q$ ни учи, че b_q е една горна граница на множеството на числата a_p. Като вземем под внимание, че ξ е точната, т. е. най-малката горна граница на тези числа, получаваме $\xi \leq b_q$. Неравенствата $a_n \leq \xi$ и $\xi \leq b_q$ ни позволяват да заключим, че при всички цели положителни стойности на k имаме

$$a_k \leq \xi \leq b_k,$$

т. е. намерената точка ξ наистина лежи във всичките интервали Δ_k.

§ 13. Разпределение на рационалните и ирационалните числа

Нека (a, b) е един произволен интервал, при който $a < b$. Ще покажем, че във вътрешността му има както рационални, така и ирационални числа. За тази цел ще изберем едно произволно число c и ще покажем, че може да се избере цяло число p и цяло положително число q така, че да имаме

$$a < c + \frac{p}{q} < b$$

или, което е все същото,

$$q(a-c) < p < q(b-c). \tag{1}$$

* Разбира се, ако измежду интервалите има и произволно малки, то повече от една точка не може да се намира във всичките интервали на системата.

Ако дадем на c рационална стойност, числото $c + \frac{p}{q}$ ще бъде също рационално. Ако c е ирационално, то $c + \frac{p}{q}$ е също ирационално. И така, за да се постигне целта, достатъчно е да се покаже, че целите числа $q > 0$ и p могат да бъдат така избрани, че да е изпълнено неравенството (1).

За да докажем това, избираме едно цяло положително число q, по-голямо от $\frac{1}{b-a}$. Това може да се направи въз основа на принципа на Архимед. След това разглеждаме множеството M от онези цели числа r, които удовлетворяват неравенството

$$q(a-c) < r.$$

Такива числа има, както ни учи принципът на Архимед. Множеството на тези числа е ограничено отдолу и следователно в това множество има едно най-малко число p (вж. § 10). И така цялото число p удовлетворява неравенствата

$$q(a-c) < p, \quad p-1 \leq q(a-c).$$

От неравенството

$$p-1 \leq q(a-c)$$

получаваме

$$p \leq q(a-c)+1$$

и тъй като $q > \frac{1}{b-a}$ или, което е все същото,

$$q(b-a) > 1,$$

то

$$p < q(a-c)+q(b-a) = q(b-c).$$

И така цялото число p удовлетворява неравенствата

$$q(a-c) < p < q(b-c)$$

или

$$a < c + \frac{p}{q} < b.$$

Като дадем на c рационална стойност, заключаваме, че в интервала (a, b) има рационални числа; като дадем на c ирационална стойност, заключаваме, че в интервала (a, b) има ирационални числа. Този резултат често се изразява накратко, като казваме, че рационалните и ирационалните числа се намират навсякъде гъсто върху числовата права.

Общи задачи

1. Да се докаже индуктивно, че при всички цели положителни стойности на n са валидни равенствата

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{(2n+1)(n+1).n}{6},$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{(1+n)^2n^2}{4}.$$

2. Да се докажат индуктивно формулите:

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \text{ при } \sin\frac{\theta}{2}\neq 0;$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\ldots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\,\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ при } \sin\frac{\theta}{2}\neq 0;$$

$$\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\ldots+\cos(2n-1)\theta=\frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta} \text{ при } \sin\theta\neq 0;$$

$$\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\ldots+\sin(2n-1)\theta=\frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta} \text{ при } \sin\theta\neq 0;$$

$$\frac{n+1}{2}+n\cos\theta+(n-1)\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$\text{при } \sin\frac{\theta}{2}\neq 0;$$

$$\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\ldots+\cos^2 n\theta=\frac{2n-1}{4}+\frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta} \text{ при } \sin\theta\neq 0.$$

3. Да да се докаже индуктивно, че при всички цели положителни стойности на n е вярно равенството

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

4. Да се докаже, че при всяко n и при всички цели неотрицателни стойности на k е вярно равенството

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},$$

където при цели положителни стойности на k

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

а при $k=0$

$$\binom{n}{0}=1.$$

5. Да се докаже, че при всички цели стойности на n и k, подчинени на неравенствата $0\leq k\leq n$, е в сила

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Значението на символите е дадено в зад. № 4.

6. Докажете индуктивно, че при всички цели положителни стойности на n имаме

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n,$$

където значението на символите $\binom{n}{k}$ е изяснено в зад. № 4. Тази важна формула се нарича Нютонов бином.

7. Докажете, че при всички стойности на n и всички цели неотрицателни стойности на k имаме

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}.$$

Значението на символите е дадено в зад. № 4.

8. Докажете, че при всички цели неотрицателни стойности на n и k имаме

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}.$$

Значението на символите е дадено в зад. № 4.

9. Нека $P(x)=x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)$, където m е цело положително число. Да се докаже, че

$$P(1)+P(2)+P(3)+\ldots+P(n)=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{m+1}.$$

10. Да се докаже, че сумата

$$1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m$$

може да се представи като полином на n от $m+1$-ва степен.

11. Да се докаже, че при всички цели положителни стойности на n и при $x\geq -1$ имаме

$$(1+x)^n\geq 1+nx$$

(неравенство на Бернули).

12. Нека са дадени два елемента ω и ε. Дефинираме за тях равенство и действията събиране и умножение с помощта на таблиците:

$$\omega=\omega,\qquad \varepsilon=\varepsilon,$$

$$\omega+\omega=\omega,\qquad \omega\omega=\omega,$$

$$\omega+\varepsilon=\varepsilon,\qquad \omega\varepsilon=\omega,$$

$$\varepsilon+\omega=\varepsilon,\qquad \varepsilon\omega=\omega,$$

$$\varepsilon+\varepsilon=\omega,\qquad \varepsilon\varepsilon=\varepsilon.$$

Да се покаже, че при така дефинираните равенство и действия елементите ω и ε образуват тяло. Да се намерят нулата и единицата на това тяло. Да се покаже, че в това тяло имаме $-1=1$. Да се покаже, че в това тяло не може да се дефинира наредба по такъв начин, че да са изпълнени условията на § 3.

13. Разглеждаме множеството K от всевъзможните двойки (a, b) от реални числа. Дефинираме в K действията събиране и умножение по следния начин:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b + d),$$

$$(a, b)\ (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$

Две двойки (a, b) и (c, d) се наричат равни тогава и само тогава, когато $a = c$ и $b = d$.

Да се покаже, че при така дефинираните действия събиране и умножение и при така дефинираното равенство множеството K е едно тяло. Да се намери нулата и единицата на това тяло. Да се покаже, че в това тяло не е възможно да се дефинира наредба така, че да бъдат изпълнени условията на § 3.

Упътване. За да покажете, че в K не може да се установи наредба, допуснете противното и разгледайте елемента

$$i = (0, 1).$$

От двата елемента i и $-i$ единият е положителен и следователно неговият квадрат е положителен (като произведение на два положителни елемента). От друга страна, не е трудно да се види, че

$$i^2 = (-i)^2 = -(1, 0),$$

т. е. елементът $-(1,0)$ е сигурно положителен. Оттук заключаваме, че елементът

$$(1, 0) = [-(1, 0)]^2$$

е положителен като произведение на два положителни елемента. Това обаче не е възможно, защото от двата елемента

$$(1, 0) \text{ и } -(1,0)$$

само единият е положителен.

14. Ако $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$ и числата n_k са цели положителни, то $n_k \geq k$.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно.

ГЛАВА II

БЕЗКРАЙНИ РЕДИЦИ

§ 1. Редици

Ще казваме, че е дефинирана една редица

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

от числа, ако на всяко цяло положително число n е съпоставено не едно число a_n (числото n се нарича номер на члена a_n). Така например, за да получим редицата от четните числа

$$2,\ 4,\ 6, \ldots,$$

ние на всяко цяло положително число n съпоставяме четното число $2n$; което съпоставяне може кратко да се запише с помощта на равенството

$$a_n = 2n.$$

Друг пример ни дава редицата

$$1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots,$$

всички членове на която са равни на 1. Нека изрично кажем, че се позволява при дефинирането на една редица на две различни цели положителни числа (номера) да се съпостави едно и също число, т. е. (което е все същото) позволява се два члена с различни номера да бъдат равни помежду си. Такъв е случаят с последния пример.

§ 2. Околност

Околност на едно число c ще наричаме всеки отворен интервал (a, b), който съдържа c, т. е. за който $a < c < b$. Ясно е, че всяка точка притежава безбройно много околности. Така например интервалът $(-1,1)$ е околност на точката 0, интервалът $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ е друга околност на същата точка, но интервалът $(1, 2)$ не е околност на точката 0.

§ 3. Точка на сгъстяване. Теорема на Болцано — Вайерщрас

Нека ни е дадена една редица от числа

$$(1) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Една точка ξ се нарича точка на сгъстяване на редицата (1), ако всяка околност на ξ съдържа безбройно много членове на тази редица.

Така да разгледаме например редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

При нечетно n имаме $a_n = 1$, а при четно n имаме $a_n = 0$; това може да се запише кратко така: $a_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$. Очевидно точката 1 е една точка на сгъстяване за тази редица, защото всяка околност на точката 1 съдържа безбройно много различни по номер членове от редицата, а именно всичките членове с нечетни номера. Точката 0 е също една точка на сгъстяване на редицата, но точката $\frac{1}{2}$ не е точка на сгъстяване, защото например интервалът $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, който е една околност на точката $\frac{1}{2}$, не само не съдържа безбройно много членове от редицата, но той дори не съдържа нито една точка от тази редица. В примера, който дадохме, двете точки на сгъстяване принадлежат на редицата. Това обаче съвсем не се изисква в дефиницията на понятието точка на сгъстяване. Така например точката 0 е точка на сгъстяване за редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

при все че не принадлежи на тази редица (всичките членове на тази редица са различни от 0).

Може да се случи една редица да има само една точка на сгъстяване, какъвто е случаят с редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

Може да се случи редицата да има няколко точки на сгъстяване. Така например редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

има две точки на сгъстяване. Може една редица да няма нито една точка на сгъстяване, какъвто е случаят с редицата на целите положителни числа

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Обаче всяка ограничена редица притежава поне една точка на сгъстяване. Това твърдение съставлява съдържанието на една важна теорема, която е известна под името теорема на Болцано—Вайерщрас (Bolzano—Weierstrass).

Доказателство. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е една ограничена числова редица и нека Δ_1 е произволен (затворен) интервал с дължина d, който съдържа всичките ѝ членове. Да разделим Δ_1 на две равни части. Поне едната от двете половини (разглеждани като затворени интервали) съдържа безбройно много (различни по номер) членове на редицата. И наистина в противен случай интервалът Δ_1 би съдържал най-много краен брой членове на редицата, което не е вярно. Нека Δ_2 е такава от двете половини, която съдържа безбройно много членове на редицата (ако само едната половина съдържа безбройно много членове на редицата, то Δ_2 е тази половина; ако и двете половини имат това свойство, с Δ_2 означаваме коя да е от тях). Разделяме Δ_2 на две равни части и означаваме с Δ_3 такава затворена половина на Δ_2, която съдържа безбройно много членове на редицата (сигурно поне едната от двете половини на Δ_2 съдържа безбройно много членове на редицата, защото в противен случай интервалът Δ_2 би съдържал само краен брой членове на редицата). Продължавайки този процес на разполовяване на интервалите, получаваме една безкрайна редица от затворени интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots,$$

всеки един от които съдържа следващия. Според теоремата на Кантор (глава I, § 12) има точка c, която принадлежи на всеки един от тези интервали.

От начина, по който са дефинирани интервалите Δ_n, се вижда, че всеки един от тях съдържа безбройно много членове на дадената числова редица. Като използуваме това обстоятелство, ще покажем, че c е една нейна точка на сгъстяване, т. е. че всяка околност на c съдържа безбройно много членове на тази редица.

Нека (p, q) (където p е по-малко от q) е произволна околност на точка c, тъй че разликите $c - p$ и $q - c$ са положителни. Нека d е дължината на Δ_1. Ще изберем цялото положително число n толкова голямо, че дължината* $\frac{d}{2^{n-1}}$ на Δ_n да е по-малка както от $c - p$, така и от $q - c$. За тази цел избираме n така, че да имаме

$$n > \frac{d}{c-p} \quad \text{и} \quad n > \frac{d}{q-c},$$

* Дължината на интервала Δ_2 е равна на половината от дължината d на интервала Δ_1, дължината на Δ_3 е равна на половината от дължината на Δ_2 и т. н. Оттук се вижда, че дължината на Δ_n е равна на $\frac{d}{2^{n-1}}$.

нещо, което е възможно според принципа на Архимед. Като вземем под внимание, че Нютоновият бином ни дава

$$2^{n-1}=(1+1)^{n-1}=1+(n-1)+\ldots\geqq n,$$

получаваме

$$2^{n-1}>\frac{d}{c-p} \quad \text{и} \quad 2^{n-1}>\frac{d}{q-c}$$

и следователно

$$c-p>\frac{d}{2^{n-1}} \quad \text{и} \quad q-c>\frac{d}{2^{n-1}}.$$

Не е трудно да се убедим, че при направения избор на числото n интервалът Δ_n се съдържа изцяло в интервала (p, q). И наистина, ако означим с α_n и β_n съответно левия и десния край на Δ_n, то

$$\beta_n-\alpha_n=\frac{d}{2^{n-1}}$$

и следователно $\beta_n-\alpha_n<c-p$, откъдето $\alpha_n>\beta_n-c+p$, т. е. $\alpha_n>p$, тъй като $\beta_n-c\geqq 0$. Също така от $\beta_n-\alpha_n<q-c$ следва $\beta_n<q-(c-\alpha_n)$, т. е. $\beta_n<q$.

Така установените неравенства

$$p<\alpha_n<\beta_n<q$$

показват, че Δ_n се съдържа в интервала (p, q). Оттук, като вземем под внимание, че Δ_n съдържа безбройно много членове на дадената числова редица, заключаваме, че същото свойство притежава и интервала (p, q), с което нашето твърдение е доказано.

§ 4. Сходящи редици

Ако една числова редица е ограничена и притежава само една точка на сгъстяване, тя се нарича сходяща. Единствената точка на сгъстяване на една сходяща редица се нарича нейна граница (вместо да казваме, че l е граница на една редица, ние често ще казваме, че редицата клони към l).

Така например редицата

$$1, 1, 1, \ldots$$

е сходяща и клони към 1.

Редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

е сходяща и клони към 0.

Редицата

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

не е сходяща, защото не е ограничена.

Редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots,$$

при все че е ограничена, не е сходяща, защото има две точки на сгъстяване.

Ако c е една точка на сгъстяване на една редица, то (съгласно дадената по-горе дефиниция) във всяка околност на c има безбройно много членове на редицата. Това не изключва обаче вън от някоя околност на c също да има безбройно много (други) членове на редицата. Толкова по-интересно е, че за сходящите редици е в сила следната теорема:

Вън от всяка околност на границата на една сходяща редица може да има най-много краен брой членове на редицата.

Доказателство. Нека

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е една сходяща редица и a е нейната граница. Да допуснем, че може да се намери поне една околност Δ на a, вън от която има безбройно много членове

(2) $$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

на редицата. Тези безбройно много членове образуват една ограничена редица (защото цялата редица (1) е сходяща и следователно е ограничена), която съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас притежава поне една точка на сгъстяване ξ. Тази точка е различна от a, защото a не е точка на сгъстяване на редицата (2), тъй като околността Δ на точката a не съдържа нито един член на редицата (2). От друга страна, точката ξ е точка на сгъстяване не само на редицата (2), но и на редицата (1), защото всяка околност на ξ съдържа безбройно много членове на редицата (2), а следователно и безбройно много членове на редицата (1). И така ние достигнахме до заключението, че редицата (1) притежава повече от една точка на сгъстяване, което не е вярно, понеже е дадено, че редицата (1) е сходяща.

Нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е една сходяща редица и a е нейната граница. Ние ще изберем едно произволно положително число ε и ще разгледаме околността $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Вън от тая околност могат да се намират най-много краен брой членове на нашата редица, т. е. от известно място в нашата редица всичките членове се намират в интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Нека a_ν е кой да е член на нашата редица, след който всичките членове се намират в интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. В такъв случай при $n>\nu$ имаме

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$$

или (което е все същото*)

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

И така, ако редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и a е нейната граница, то при всеки избор на положителното число ε може да се намери число ν (евентуално зависещо от ε) така, че щом $n > \nu$, да е изпълнено неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Сега ще покажем, обратно, че ако за една редица

(3) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

може да се намери такова число a, щото при всеки избор на положителното число ε да може да се намери число ν (не е задължително това число да бъде цяло) така, че при $n > \nu$ да имаме

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

то редицата (3) е сходяща и a е нейната граница.

И наистина, щом разполагаме с избора на положителното число ε, ние можем да вземем например $\varepsilon = 1$. След този избор на ε определяме съответствуващото му число ν. И така при $n > \nu$ имаме

$$|a_n - a| < 1,$$

т. е. $a - 1 < a_n < a + 1$. Така ние намерихме краен интервал, който съдържа всичките членове на редицата с евентуално изключение на краен брой членове. Увеличавайки интервала $(a-1, a+1)$, ако е нужно това, ние можем да намерим (също краен) интервал, който съдържа всичките членове на редицата (3) без изключение, което показва, че редицата (3) е ограничена. Остава да покажем, че редицата (3) не може да има точка на сгъстяване, различна от a (поне една точка на сгъстяване тя сигурно притежава въз основа на теоремата на Болцано — Вайерщрас). Нека допуснем, че редицата (3) притежава някоя точка на сгъстяване b, различна от a. Ще изберем положителното число ε толкова малко, че да имаме $\varepsilon < \frac{|b-a|}{2}$. Това е винаги възможно, защото $b \neq a$. Нека ν е такова число, че при $n > \nu$ да имаме

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Да разгледаме околността $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ на точката b. Щом точката b е една точка на сгъстяване, то в избраната околност на точката b (както и във всяка околност на тая точка) има безбройно много членове на редицата, а следователно и такива членове, чиито номера са по-големи от ν. Нека a_p е такъв член. И така имаме

$$|a_p - b| < \varepsilon.$$

*) Вж. глава I, § 4.

От друга страна,

$$|a_p - a| < \varepsilon \text{ (защото } p > \nu).$$

Събирайки почленно тези неравенства, намираме

$$|a_p - a| + |a_p - b| < 2\varepsilon$$

и тъй като

$$|a_p - a| + |a_p - b| = |a_p - a| + |b - a_p| \geqq |(a_p - a) + (b - a_p)| = |b - a|,$$

намираме

$$|b - a| < 2\varepsilon$$

противно на направения от нас избор на ε.

Полученият резултат ни дава възможност да дадем нова дефиниция на понятието граница на една редица, която е напълно еквивалентна на тази дефиниция, която вече дадохме.

Дефиниция. Казваме, че едно число a е граница на редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

ако при всеки избор на положителното число ε може да се намери такова число ν (евентуално зависещо от избора на ε), че при $n > \nu$ да е в сила неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

За да изразим, че a е граница на редицата с общ член a_n, често ще си служим с краткото означение

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

В случай че има число a, удовлетворяващо изброените условия, редицата наричаме сходяща. В противен случай редицата наричаме разходяща. Ние ще си служим както с първата, така и с втората дефиниция на понятието граница на една редица от числа.

Не е трудно да се види, че за да клони редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

към l, е необходимо и достатъчно редицата

$$a_1 - l, a_2 - l, a_3 - l, \ldots$$

да клони към нула. И наистина да положим

$$b_n = a_n - l$$

и да означим с ε едно положително число. Като вземем под внимание, че

$$|a_n - l| = |b_n - 0|,$$

заключаваме, че неравенството

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството

$$|b_n - 0| < \varepsilon.$$

Най-сетне ще споменем, че за да клони редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

към нула, е необходимо и достатъчно редицата

$$|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$$

да клони към нула. И наистина да положим

$$c_n = |a_n|$$

и да означим с ε едно положително число. В такъв случай, като вземем под внимание, че

$$|a_n - 0| = |c_n - 0|,$$

заключаваме, че неравенството

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството

$$|c_n - 0| < \varepsilon.$$

§ 5. Действия със сходящите редици

Нека са дадени двете сходящи редици

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

(2) $$b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

чиито граници са съответно a и b. Да образуваме редицата с общ член $c_n = a_n + b_n$. Ние твърдим, че така получената редица е сходяща и нейната граница е $a+b$. За да докажем това твърдение, ще си изберем едно положително число ε. Числото $\frac{\varepsilon}{2}$ е също положително, следователно може да се намери число ν_1 така, че при $n > \nu_1$ да имаме

(3) $$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Също тъй може да се намери число ν_2 така, че при $n > \nu_2$ да имаме

(4) $$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека ν е по-голямото от двете числа ν_1 и ν_2. В такъв случай при $n > \nu$ е изпълнено както неравенството (3), така и неравенството (4). Като съберем почленно тези неравенства, получаваме

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

и като вземем пред вид, че

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|,$$

намираме, че при всяко $n > \nu$ имаме

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon.$$

Полученото неравенство ни учи, че редицата с общ член $a_n + b_n$ е сходяща и клони към $a+b$.

Аналогично се доказва (пак при предположението, че редиците (1) и (2) са сходящи), че редицата с общ член $a_n - b_n$ е също сходяща и клони към $a-b$. За целта се ползуваме от неравенството

(5) $$|(a_n - b_n) - (a-b)| = |(a_n - a) + (b - b_n)| \leq |a_n - a| + |b - b_n|$$

по следния начин: избираме $\varepsilon > 0$ и след това определяме числото ν така, че при $n > \nu$ да имаме както

$$a_n - a < \frac{\varepsilon}{2},$$

така и

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

оттук с помощта на неравенството (5) намираме

$$|(a_n - b_n) - (a-b)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

са две сходящи редици, които клонят съответно към a и b. Ще докажем, че редицата

$$a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots$$

е също сходяща и клони към ab.

За тази цел полагаме

$$a_n - a = \alpha_n,$$

$$b_n - b = \beta_n,$$

откъдето получаваме

$$a_n = a + \alpha_n,$$

$$b_n = b + \beta_n.$$

Като умножим почленно тези две равенства, намираме

$$a_n b_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n,$$

откъдето

$$|a_n b_n - ab| = |a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n| \leq |a\beta_n| + |b\alpha_n| + |\alpha_n \beta_n|.$$

Избираме си едно произволно положително число ε и определяме ν така, че при $n > \nu$ да имаме

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1},$$

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1},$$

$$|\beta_n| < 1.$$

Това е възможно да се направи, защото a_n клони към a и b_n клони към b. Но в такъв случай имаме

$$|a_n b_n - ab| \leq |a|\,|\beta_n| + |b|\,|\alpha_n| + |\alpha_n|\,|\beta_n| \leq |a|\,|\beta_n| + |b|\,|\alpha_n| +$$

$$+ |\alpha_n| < \frac{|a|\,\varepsilon}{|a| + |b| + 1} + \frac{|b|\,\varepsilon}{|a| + |b| + 1} + \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1} = \varepsilon.$$

Сега ще разгледаме въпроса за почленното деление на две сходящи редици.

Нека редиците

$$a_1, a_2, \ldots,$$
$$b_1, b_2, \ldots,$$

където $b_n \neq 0$, са сходящи и клонят съответно към a и b, като $b \neq 0$. В такъв случай редицата

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$$

е сходяща и клони към $\frac{a}{b}$.

И наистина полагаме

$$a_n - a = \alpha_n,$$
$$b_n - b = \beta_n,$$

откъдето намираме

$$a_n = a + \alpha_n,$$
$$b_n = b + \beta_n,$$

т. е.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n},$$

или

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{\alpha_n b - a\beta_n}{(b + \beta_n)b}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|\alpha_n|\,|b| + |a|\,|\beta_n|}{|b + \beta_n|\,|b|}.$$

При това ние съществено се ползуваме от условията $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$, тъй като делим с тия числа.

Избираме ν_1 толкова голямо, че при $n > \nu_1$ да имаме $|\beta_n| < \frac{|b|}{2}$. Това може да се направи, защото $\frac{|b|}{2}$ е положително число и b_n клони към b. В такъв случай получаваме

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{|\alpha_n|\,|b| + |a|\,|\beta_n|}{(|b| - |\beta_n|)|b|} < 2\frac{|\alpha_n|\,|b| + |a|\,|\beta_n|}{b^2}.$$

След това избираме едно положително число ε и определяме ν_2 така, че при $n > \nu_2$ да имаме

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon b^2}{2(|a| + |b|)},$$

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon b^2}{2(|a| + |b|)}.$$

Ако с ν означим по-голямото от двете числа ν_1 и ν_2, заключаваме, че при $n > \nu$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon,$$

т. е. редицата с общ член $\frac{a_n}{b_n}$ е наистина сходяща и клони към $\frac{a}{b}$.

При доказателството ние няколко пъти използувахме, че $b \neq 0$. Това условие е твърде съществено. И наистина нека разделим почленно двете сходящи редици

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots,$$
$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Получаваме разходящата редица

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

(тази редица е разходяща, защото не е ограничена). Този пример обаче не противоречи ни най-малко на доказаната по-горе теорема, защото тук редицата с общ член $\frac{1}{n}$ клони към 0.

Задачи

1. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

всички членове на която са различни от 2 и -2, е сходяща и клони към 2. Да се покаже, че редицата с общ член

$$b_n = \frac{a^2_n - 5a_n + 6}{a^2_n - 4}$$

е също сходяща, и да се пресметне нейната граница (b_n е добре дефинирано, защото $a_n \neq \pm 2$ и следователно знаменателят a_n^2-4 е различен от нула).

Решение. При все че числителят $a_n^2-5a_n+6$ и знаменателят a_n^2-4 образуват сходящи редици, тук не можем директно да приложим теоремата за почленното деление на две сходящи редици, защото $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2-4)=0$. За да решим задачата, правим следните преобразувания:

$$b_n=\frac{a_n^2-5a_n+6}{a_n^2-4}=\frac{(a_n-2)(a_n-3)}{(a_n-2)(a_n+2)}=\frac{a_n-3}{a_n+2}.$$

За дробта $\frac{a_n-3}{a_n+2}$ вече можем да приложим теоремата за почленното деление на сходящи редици, защото $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2)=4\neq 0$. Твърдението, че $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2)=4$, може да се мотивира с помощта на теоремата за почленното събиране на сходящи редици по следния начин: редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е сходяща (по условие) и клони към 2, редицата

$$2,\ 2,\ 2,\ldots$$

е също сходяща и клони към 2; от това следва, че редицата

$$a_1+2,\ a_2+2,\ a_3+2,\ldots,$$

чиито общ член е a_n+2, е също сходяща и клони към $2+2=4$.

Аналогично се доказва, че и редицата с общ член a_n-3 е сходяща и клони към $2-3=-1$. От това заключаваме, че редицата с общ член $\frac{a_n-3}{a_n+2}$ е също сходяща и клони към $\frac{-1}{4}$.

2. Нека редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,$$

всички членове на която са различни от -1 и 3, е сходяща и клони към 3. Да се докаже, че редицата с общ член

$$b_n=\frac{a_n^3-7a_n^2+15a_n-9}{a_n^3-5a_n^2+3a_n+9}$$

е също сходяща и да се пресметне нейната граница.

3. Нека редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е сходяща и клони към 2. Да се докаже, че редицата с общ член

$$b_n=\frac{2a_n^3-a_n+2}{a_n^2-a_n+1}$$

е също сходяща, и да се пресметне нейната граница.

4. Да се докаже, че редицата с общ член $a_n=\frac{n-1}{n+1}$ е сходяща, и да се пресметне нейната граница.

Упътване. Тук числителят $n-1$ и знаменателят $n+1$ образуват разходящи редици (тези редици не са ограничени). Това не е пречка редицата с общ член $\frac{n-1}{n+1}$ да бъде сходяща. И наистина ние можем да пишем

$$a_n=\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Сега числителят $1-\frac{1}{n}$ и знаменателят $1+\frac{1}{n}$ образуват вече сходящи редици и при това $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\neq 0$, което ни дава право да приложим теоремата за почленното деление на сходящи редици.

5. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{3n^4-5n^3+2n-1}{4n^4+n^2+2n+5}$$

е сходяща, и да се пресметне нейната граница.

6. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{n^2+1}{n+2}$$

е разходяща.

7. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}$$

е сходяща, и да се пресметне нейната граница.

§ 6. Някои свойства на сходящите редици

Нека

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е една безкрайна редица. Ще казваме, че редицата

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ldots$$

е подредица на редицата (1), когато целите положителни числа

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ldots$$

удовлетворяват неравенствата

$$n_1<n_2<n_3<\ldots$$

Ще покажем, че ако една безкрайна редица

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

клони към някоя граница a, то всяка нейна безкрайна подредица

(2) $$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ldots$$

е също сходяща и също клони към a.

И наистина нека ε е едно произволно избрано положително число. Избираме си едно число ν така, че при $k>\nu$ да имаме

$$|a_k-a|<\varepsilon.$$

От друга страна*, $n_k \geqq k$, т. е. $n_k>\nu$, и следователно

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon,$$

което ни учи, че редицата (2) е действително сходяща и клони към a.

Ще разгледаме друго свойство на сходящите редици. Нека

(3) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е една безкрайна редица от числа. Ако всяко цяло положително число фигурира поне в едната от двете редици от цели положителни числа

(4) $$n_1,\ n_2,\ n_3,\ldots$$

(5) $$m_1,\ m_2,\ m_3,\ldots$$

и ако редиците

(6) $$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ldots$$

(7) $$a_{m_1},\ a_{m_2},\ a_{m_3},\ldots$$

клонят към една и съща граница l, то редицата (3) също клони към l.

И наистина нека ε е произволно положително число. Избираме цяло положително число p по такъв начин, че при $k>p$ да имаме

$$|a_{n_k}-l|<\varepsilon \quad \text{и} \quad |a_{m_k}-l|<\varepsilon.$$

Означаваме с ν най-голямото от числата

$$n_1,\ n_2,\ldots n_p;\quad m_1,\ m_2,\ldots,m_p.$$

В такъв случай при $n>\nu$ ще имаме

$$|a_n-l|<\varepsilon.$$

За да се убедим в това, ще вземем под внимание, че числото n фигурира по предположение поне в едната от двете редици (4) или (5). Нека например това число фигурира в редицата (4), т. е. при подходящ избор на цялото положително число k имаме $n=n_k$. Като вземем под внимание, че $n>\nu$, получаваме $n_k>\nu$ и следователно k не може да бъде никое от числата $1, 2,\ldots,p$, т. е. $k>p$, и следователно

$$|a_{n_k}-l|<\varepsilon$$

или, което е същото,

$$|a_n-l|<\varepsilon.$$

Аналогично се разглежда случаят, когато n принадлежи на редицата (5).

* Вж. задача 14 към глава I.

Специално, ако редиците (4) и (5) удовлетворяват неравенствата

$$n_1<n_2<n_3<\ldots$$

$$m_1<m_2<m_3<\ldots$$

и никое цяло положително число не фигурира едновременно в тези две редици, казваме, че редицата (3) е получена чрез комбиниране на редиците (6) и (7). От изложеното се вижда, че ако една редица е получена чрез комбиниране на две редици, които клонят към една и съща граница l, то тя също клони към l.

Съвсем специален начин на комбиниране на две редици

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots$$

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ldots$$

ще получим, като образуваме редицата

$$b_1,\ c_1,\ b_2,\ c_2,\ b_3,\ c_3,\ldots$$

Този начин на комбиниране ще наричаме алтернативен. Ние често ще го използуваме в бъдеще.

Също така просто се установява следното: ако редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е сходяща и клони към a, то каквото и да е числото b, редицата

$$b,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е също сходяща и клони към a. С други думи, ако положим

$$b_1=b,\quad b_n=a_{n-1} \quad \text{при} \quad n=2,\ 3,\ldots,$$

ще трябва да докажем, че редицата

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots$$

клони към a. Доказателството извършваме така: избираме си едно произволно положително число ε и подбираме положителното число ν по такъв начин, че при $k>\nu$ да имаме

$$a_k-a<\varepsilon.$$

Това може да се направи, защото редицата $a_1,\ a_2,\ldots$ клони към a. След всичко това не е трудно да се убедим, че

$$|b_n-a|<\varepsilon$$

при $n>\nu+1$. И наистина очевидно имаме $n-1>\nu$ и следователно

$$|a_{n-1}-a|<\varepsilon.$$

От друга страна, $b_n=a_{n-1}$, т. е.

$$|b_n-a|<\varepsilon,$$

с което е показано, че редицата $b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots$ наистина клони към a.

От доказаното се вижда, че ако редицата

(8) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и клони към a, то каквито и да бъдат числата

$$b_1, b_2, \ldots, b_k,$$

редицата

(9) $$b_1, b_2, \ldots, b_k, \quad a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots$$

е също сходяща и също клони към a. Й наистина редицата

$$a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \quad a_{k+3}, \ldots$$

е подредица на редицата (8) и следователно клони към a. Оттук заключаваме, като приложим k пъти последната от доказаните теореми, че редицата (9) също клони към a.

В бъдеще често ще използуваме следната проста теорема: ако съществуват границите $a=\lim a_n$ и $b=\lim b_n$ и поне при безбройно много стойности на n имаме $a_n \leq b_n$, то $a \leq b$. И наистина да допуснем, че $a>b$, и да положим $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$. При достатъчно големи стойности на n имаме

$$|a_n-a|<\varepsilon, \quad |b_n-b|<\varepsilon$$

и следователно

$$a_n-\varepsilon<a<a_n+\varepsilon, \quad b_n-\varepsilon<b<b_n+\varepsilon,$$

откъдето

$$b-a>(b_n-\varepsilon)-(a_n+\varepsilon)=-2\varepsilon+(b_n-a_n)=b-a+(b_n-a_n),$$

т. е. за всички достатъчно големи стойности на n ще имаме

$$b_n-a_n<0,$$

което противоречи на нашето предположение, че за безбройно много стойности на n имаме $a_n \leq b_n$. С това доказателството е завършено.

От доказаното следва, че ако редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

клони към a и за безбройно много стойности на n удовлетворява неравенството

$$a_n \leq b,$$

то

$$a \leq b.$$

За да се убедим в това, достатъчно е да вземем под внимание, че редицата

$$b, b, b, \ldots$$

клони към b. По същия начин се вижда, че ако за безбройно много стойности на n имаме $a_n \geq b$, то $a \geq b$.

Накрая ще докажем, че ако двете редици

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

са сходящи и клонят към една и съща граница l и ако редицата

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

удовлетворява неравенствата

$$a_n \leq c_n \leq b_n,$$

то тя е също сходяща и клони към същата граница l.

И наистина избираме си произволно $\varepsilon>0$ и след това определяме ν така, че при $n>\nu$ да имаме

$$|a_n-l|<\varepsilon,$$
$$|b_n-l|<\varepsilon,$$

т. е.

$$l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$$
$$l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon.$$

От неравенствата

$$l-\varepsilon<a_n \text{ и } a_n \leq c_n$$

намираме

$$l-\varepsilon<c_n.$$

Аналогично от неравенствата

$$c_n \leq b_n \text{ и } b_n<l+\varepsilon$$

намираме

$$c_n<l+\varepsilon.$$

По такъв начин

$$l-\varepsilon<c_n<l+\varepsilon,$$

т. е.

$$|c_n-l|<\varepsilon,$$

което ни учи, че редицата с общ член c_n е сходяща и клони към l.

Задачи

1. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и $|a_n|<a$ при $n=1, 2, 3, \ldots$

Докажете, че $|\lim\limits_{n\to\infty} a_n| \leq a$.

2. Нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

са две сходящи редици, които клонят към една и съща граница l, и нека c_n е по-малкото, а d_n е по-голямото от двете числа a_n и b_n. Докажете, че двете редици

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$
$$d_1, d_2, d_3, \ldots$$

са също сходящи и клонят към l.

Упътване. Докажете предварително, че

$$c_n = \frac{a_n + b_n - |a_n - b_n|}{2},$$

$$d_n = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2}.$$

3. Нека

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

са две сходящи редици, които клонят към една и съща граница l. Докажете, че ако n-тият член c_n на една редица при всяко цяло положително n се заключава между a_n и b_n, то редицата

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

е сходяща и клони към l. Тази теорема се различава от теоремата на § 6 по това, че не се иска непременно при всички (разбира се, цели положителни) стойности на n да имаме

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n,$$

а се позволява при някои или при всички стойности на n да имаме

$$b_n \leqq c_n \leqq a_n.$$

4. Нека редицата

$$a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$$

е сходяща и клони към a. Да се покаже, че каквито и да са числата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, редицата

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$$

е също сходяща и клони към a.

5. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и $\lim a_n > a$. Докажете, че при всички достатъчно големи стойности на n имаме $a_n > a$.

§ 7. Монотонни редици

Една редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

се нарича монотонно растяща, ако при всички цели положителни стойности на n е изпълнено неравенството $a_n \leqq a_{n+1}$. Редицата се нарича монотонно намаляваща, ако при всички цели положителни стойности на n е изпълнено неравенството $a_n \geqq a_{n+1}$.

Примери. Редицата 1, 2, 3,... е монотонно растяща.

Редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

е монотонно намаляваща.

Редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$$

е също монотонно намаляваща.

Редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

не е нито монотонно растяща, нито монотонно намаляваща.

Когато казваме накратко „монотонна редица", имаме пред вид една редица, която или монотонно расте, или монотонно намалява.

Ако една монотонно растяща редица е сходяща, никой нейн член не е по-голям от границата. Ако една монотонно намаляваща редица е сходяща, никой нейн член не е по-малък от границата. Доказателството ще изложим само за монотонно растящи редици. За тази цел разглеждаме една монотонно растяща сходяща редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

и означаваме с a нейната граница. В такъв случай, както и да фиксираме цялото положително число k, ще имаме

$$a_k \leqq a_n$$

при безбройно много стойности на n (по-точно при всички цели стойности на n, които не са по-малки от k). Оттук получаваме въз основа на едно доказано вече свойство на сходящите редици

$$a_k \leqq a,$$

с което доказателството е завършено.

Теорема. Всяка ограничена монотонна редица е сходяща.

Доказателство. В условието е дадено, че редицата е ограничена. За да покажем, че е сходяща, достатъчно е да установим, че тя не може да притежава повече от една точка на сгъстяване (поне една точка на сгъстяване тя има съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас). Доказателството ще извършим за монотонно растящи редици (случаят на монотонно намаляваща редица се третира аналогично). Нека

(1) $$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots$$

е една монотонно растяща редица. Да допуснем, че α и β са две нейни различни точки на сгъстяване, като $\alpha < \beta$. Избираме едно поло-

жително число $\varepsilon<\frac{\beta-\alpha}{2}$. Това може да се направи, защото $\beta>\alpha$. Тъй като β е една точка на сгъстяване на редицата (1), то във всяка околност на β, а следователно и в околността $(\beta-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon)$ има безбройно много членове на редицата. Нека a_k е такъв член, т. е.

$$\beta-\varepsilon<a_k<\beta+\varepsilon.$$

Обаче α е също така точка на сгъстяване за редицата (1), т. е. и в околността $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ има също тъй безбройно много членове, а следователно ще има и такива, чиито номера са по-големи от k.

Нека a_l е такъв един член, т. е.

$$\alpha-\varepsilon<a_l<\alpha+\varepsilon \text{ и } l>k.$$

От последното неравенство следва, че $a_l\geqq a_k$, тъй като редицата монотонно расте.

Като съберем почленно неравенството

$$a_l<\alpha+\varepsilon$$

и неравенството

$$\beta-\varepsilon<a_k,$$

получаваме

$$a_l+(\beta-\varepsilon)<a_k+(\alpha+\varepsilon)$$

или

$$a_l-a_k<(\alpha+\varepsilon)-(\beta-\varepsilon)=2\varepsilon-(\beta-\alpha)<0,$$

понеже $\varepsilon<\frac{\beta-\alpha}{2}$, а това противоречи на неравенството $a_l\geqq a_k$. Полученото противоречие се дължи на допускането, че разглежданата редица има повече от една точка на сгъстяване. И така една монотонна редица не може да има повече от една точка на сгъстяване и следователно, щом е ограничена, тя е непременно сходяща.

Пример. Да разгледаме редицата с общ член $a_n=x^n$ при $0\leqq x<1$. Като повдигнем трите части на неравенството $0\leqq x<1$ в n-та степен, получаваме $0\leqq x^n<1$, т. е. редицата е ограничена. Тая редица е монотонно намаляваща, защото

$$a_n-a_{n+1}=x^n-x^{n+1}=x^n(1-x)\geqq 0.$$

И така разглежданата редица е сходяща. Нека l е нейната граница. За да пресметнем стойността на l, умножаваме почленно двете сходящи редици

$$x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,$$

$$x,\ x,\ \ldots,\ x,\ \ldots,$$

от които първата клони към l, а втората към x. Получаваме сходящата редица

$$x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^{n+1},\ \ldots,$$

която клони към xl. Но така получената редица е една подредица от редицата

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

и следователно клони към l, т. е. като се възползуваме от единствеността на границата на една сходяща редица (границата е единствената точка на сгъстяване на редицата), намираме

$$xl=l,$$

или $l\,(x-1)=0$, и тъй като $x\neq 1$, то $l=0$.

Въпрос. Сходяща ли е редицата с общ член x^n при $x>1$? Сходяща ли е при $x=1$?

§ 8. Неперово число

Да разгледаме редицата с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ще покажем, че тая редица е сходяща. За тази цел развиваме бинома $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ по формулата на Нютон* и получаваме

$$a_n=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\cdots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$

$$+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

* Това значи, че ние прилагаме при цели положителни стойности на n формулата

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+\binom{n}{n}b^n,$$

където $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 2.1}$ при цели положителни стойности на k. Ние често ще означаваме произведението $k(k-1)\ldots 2.1$ със знака $k!$. Така

$$4!=4.3.2.1=24.$$

Очевидно

$$a_n \leqq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+$$

$$+\cdots+\frac{1}{(n)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)=$$

$$=a_{n+1}-\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)<a_{n+1}.$$

И така редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е растяща. За да покажем, че е сходяща, достатъчно е да покажем, че е ограничена отгоре (че редицата е ограничена отдолу, се вижда от това, че тя расте, и следователно $a_1=2$ е една нейна долна граница).

Очевидно имаме

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1,$$

т. е.

$$a_n \leqq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

От друга страна,

$$k!=k(k-1)\ldots 3.2 \geqq 2.2\ldots 2=2^{k-1},$$

т. е.

$$a_n \leqq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

което показва, че редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е ограничена и следователно (тъй като тя е и монотонна) е сходяща. Границата на тая редица се означава обикновено с буквата e. Тази константа играе много важна роля в анализа. Тя служи за основа на така наречената Неперова (естествена) логаритмична система. В бъдеще (освен ако не е казано противното) при логаритмуване ще избираме винаги това число за основа на логаритмичната система. Тъй като всичките членове на редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

се намират между 2 и 3, то и границата на тази редица се намира между 2 и 3. Както ще видим по-късно, числото e е ирационално. Ние обаче

можем да го пресметнем с произволно голяма точност. Ето няколко първи десетични знака на това число:

$$e=2{,}718281828\ldots$$

§ 9. Ограничени редици

Ако една редица е ограничена, това още не значи, че тя е сходяща, защото тя може да има повече от една точка на сгъстяване. Обаче от всяка ограничена редица може да се избере сходяща поредица.

И наистина нека

$$(1)\qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е една ограничена редица. Според теоремата на Болцано—Вайерщрас тази редица има поне една точка на сгъстяване a. Във всяка околност на точката a има безбройно много членове на редицата; специално в околността $(a-1, a+1)$ също има безбройно много членове на редицата. Нека a_{n_1} е един такъв член. В околността $\left(a-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2}\right)$ също има безбройно много членове, т. е. ще има и такъв член a_{n_2}, за който $n_2>n_1$. В околността $\left(a-\frac{1}{3}, a+\frac{1}{3}\right)$ избираме член a_{n_3}, за който $n_3>n_2$, и т. н. Изобщо означаваме с a_{n_k} такъв член на редицата (1), който принадлежи на околността $\left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$ и за който $n_k>n_{k-1}$. По този начин ние получаваме една подредица

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ldots,$$

членовете на която удовлетворяват неравенствата

$$a-\frac{1}{k}<a_{n_k}<a+\frac{1}{k}.$$

Обаче редиците с общи членове $a-\frac{1}{k}$ и $a+\frac{1}{k}$ са сходящи и клонят към a, следователно редицата с общ член a_{n_k} е също сходяща (и също клони към a).

Доказаното в този параграф твърдение се нарича понякога принцип за компактност.

От направените разсъждения е ясно, че може винаги да се избере подредица, която да клони към отнапред зададена точка на сгъстяване на дадената редица.

§ 10. Общо условие за сходимост на редиците (теорема на Коши)

За да бъде една редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

сходяща, необходимо и достатъчно е за всяко положително число ε да може да се намери такова число ν, че при $n>\nu$ да е изпълнено неравенството

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$$

при всяка цяла и положителна стойност на p.

Доказателство. Най-напред ще докажем, че условието е необходимо, т. е. ако редицата е сходяща, то условието на Коши (Cauchy) трябва да бъде изпълнено. И така нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и нека a е нейната граница. Избираме произволно $\varepsilon>0$ и определяме ν така, че при $n>\nu$ да имаме

(1) $$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но щом $n>\nu$ и $p>0$, то $n+p>\nu$ и следователно

(2) $$|a_{n+p}-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Като съберем почленно неравенствата (1) и (2), намираме

$$|a_n-a|+|a_{n+p}-a|<\varepsilon,$$

или като се възползуваме от неравенството

$$|a_{n+p}-a|+|a_n-a|\geqq|(a_{n+p}-a)+(a-a_n)|=|a_{n+p}-a_n|,$$

получаваме

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

И така необходимостта на условието е доказана.

Сега ще покажем, че ако условието на Коши е изпълнено, то редицата е сходяща, т. е. ще покажем, че условието на Коши е достатъчно, за да осигури сходимостта на редицата.

И така нека условието на Коши е изпълнено. Ще покажем най-напред, че редицата е ограничена. За тази цел избираме например $\varepsilon=1$ и определяме ν така, че при $n>\nu$ да имаме

$$|a_{n+p}-a_n|<1,$$

или (което е все същото) $a_n-1<a_{n+p}<a_n+1$. Да фиксираме n и да оставим p да се мени. В такъв случай заключаваме, че редицата

(3) $$a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$$

е ограничена, а следователно и редицата

(4) $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots,$$

която се отличава от редицата (3) само по краен брой членове, е също тъй ограничена.

Остава да покажем, че редицата (4) не може да има повече от една точка на сгъстяване (поне една точка на сгъстяване тя има съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас). Ние ще докажем това от противното. Нека α и β са две различни точки на сгъстяване на редицата (4). Избираме положително число $\varepsilon<\frac{|\alpha-\beta|}{3}$. Това може да се направи, понеже $\alpha\neq\beta$. Избираме ν така, че при $n>\nu$ и при всички цели положителни p да имаме

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

От друга страна, числото α е една точка на сгъстяване на редицата (4) Това значи, че във всяка нейна околност, а следователно и в околността $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ има безбройно много членове на редицата, а следователно сигурно има членове, чиито номера са по-големи от ν. Нека a_k е такъв член, тъй че

$$\alpha-\varepsilon<a_k<\alpha+\varepsilon \text{ и } k>\nu$$

или

(5) $$|a_k-\alpha|<\varepsilon,\ k>\nu.$$

Обаче β е също точка на сгъстяване на редицата (4), т. е. използувайки аналогични разсъждения, можем да намерим член a_{k+q} с номер, по-голям от k, за който

(6) $$|a_{k+q}-\beta<\varepsilon.$$

От друга страна,

$$|\beta-\alpha|=|(\beta-a_{k+q})+(a_{k+q}-a_k)+(a_k-\alpha)|\leqq$$
$$\leqq|\beta-a_{k+q}|+|a_{k+q}-a_k|+|a_k-\alpha|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon,$$

както това се вижда от неравенствата (5) и (6) и от неравенството $|a_{k+q}-a_k|<\varepsilon$. Това обаче противоречи на условието, на което подчинихме числото ε. Полученото противоречие се дължи на допускането, че редицата (4) има повече от една точка на сгъстяване.

И така ние доказахме, че ако е изпълнено условието на Коши, редицата (4) е ограничена и има само една точка на сгъстяване, т. е. тя е сходяща.

Накрая ще споменем, че на теоремата на Коши може, разбира се, да се даде следната по-симетрична форма:

За да бъде редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

сходяща, необходимо и достатъчно е за всяко положително число ε да съществува такова число ν, че при $m>\nu$ и $n>\nu$ да е изпълнено неравенството

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

§ 11. Несобствени точки

Понякога е удобно (при все че не е наложително) да се въведат двата нищо неозначаващи символа $+\infty$ и $-\infty$. Тези два символа ще наричаме несобствени точки за разлика от реалните числа.

Каквото и да е реалното число x, ще пишем $-\infty<x$ и $x<+\infty$.

Казваме, че $+\infty$ е точка на сгъстяване за една редица от реални числа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

ако тази редица не е ограничена отгоре.

Казваме, че $-\infty$ е точка на сгъстяване на една редица от реални числа, ако тази редица не е ограничена отдолу.

Въведените по този начин точки на сгъстяване ще наричаме несобствени за разлика от редовните точки на сгъстяване, които ще наричаме собствени.

Всяка редица (дори да не е ограничена) притежава поне една собствена или несобствена точка на сгъстяване. И наистина, ако една редица не притежава несобствени точки на сгъстяване, тя е ограничена и отгоре, и отдолу и следователно според теоремата на Болцано—Вайерщрас тя притежава поне една собствена точка на сгъстяване.

§ 12. Най-дясна и най-лява точка на сгъстяване

Измежду точките на сгъстяване на една редица от числа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

винаги има една най-дясна и една най-лява дори когато те са безбройно много. Ще установим съществуването на най-дясната точка на сгъстяване; съществуването на най-лява точка се установява по същия начин.

Ако $+\infty$ е точка на сгъстяване на редицата, то $+\infty$ е и най-дясната точка на сгъстяване. Ако $+\infty$ не е точка на сгъстяване, то разглежданата редица е ограничена отгоре. Нека m е една нейна горна граница. Да допуснем, че разглежданата редица притежава поне една собствена точка на сгъстяване и нека M е тяхното множество. Очевидно множеството M е ограничено отгоре, защото вдясно от m няма нито една точка на сгъстяване. Нека l е точната горна граница на M. В такъв случай каквото и да бъде положителното число ε, числото $l-\varepsilon$ не е вече горна граница на M и следователно има поне една точка

на сгъстяване ξ, за която $l-\varepsilon<\xi$. Като вземем под внимание още, че $\xi\leq l$, намираме $l-\varepsilon<\xi<l+\varepsilon$. Оттук следва, че в интервала $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ има безбройно много членове на разглежданата редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

т. е. l е една нейна точка на сгъстяване. От друга страна, вдясно от l няма точки на сгъстяване и следователно l е най-дясната точка на сгъстяване. Остана да се разгледа случаят, когато разглежданата редица е ограничена отгоре (т. е. $+\infty$ не е нейна точка на сгъстяване) и няма собствени точки на сгъстяване. В този случай редицата не може да бъде ограничена отдолу, защото в противен случай съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас тя би трябвало да има поне една собствена точка на сгъстяване. И така в този случай единствената точка на сгъстяване на редицата е $-\infty$, която е същевременно и най-дясната точка на сгъстяване. С това доказателството е завършено.

Най-дясната точка на сгъстяване на редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

се означава със символа $\overline{\lim}\, a_n$ и се нарича limes superior (четете — лимес супериор), а най-лявата ѝ точка на сгъстяване се означава със символа $\underline{\lim}\, a_n$ и се нарича limes inferior (четете — лимес инфериор).

За да бъде една ограничена редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

сходяща, необходимо и достатъчно е да имаме $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$.

При неограничените редици са особено интересни случаите, когато

$$\underline{\lim}\, a_n = +\infty$$

или когато

$$\overline{\lim}\, a_n = -\infty.$$

В първия случай редицата е ограничена отдолу, но няма собствени точки на сгъстяване. Такъв случай имаме тогава и само тогава, когато при всеки избор на числото A неравенството $a_n \leq A$ може да бъде изпълнено най-много за краен брой стойности на n или, с други думи, каквото и да бъде числото A, може винаги да се намери число ν по такъв начин, че при $n>\nu$ да имаме $a_n>A$. В този случай казваме, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

дивергира към $+\infty$ (или расте неограничено, или още клони към $+\infty$), и пишем $\lim a_n = +\infty$.

В случая, когато $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$, казваме, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

дивергира към $-\infty$, и пишем $\lim a_n = -\infty$. Това е в сила тогава и само тогава, когато при всеки избор на числото A е изпълнено неравенството $a_n < A$ при всички достатъчно големи стойности на n.

Пример. Редицата

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n, \ldots$$

дивергира към $+\infty$.

Редицата

$$-1,\ -2,\ -3, \ldots,\ -n, \ldots$$

дивергира към $-\infty$.

Общи задачи

1. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

Упътване. Използувайте, че

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Отговор. $\lim a_n = e^2$.

2. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Отговор. $\lim a_n = e$.

3. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n.$$

Отговор. $\lim a_n = e$.

4. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Решение. При $n > 1$

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)},$$

т. е.

$$\lim a_n = \frac{1}{e}.$$

5. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Отговор. $\lim a_n = 1$.

6. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n,$$

където k е цяло положително число.

Упътване. Разсъждавайте индуктивно по k, като използувате, че

$$\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{k}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\frac{k}{n+1}}.$$

Отговор. $\lim a_n = e^k$.

7. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n,$$

където k е цяло положително число.

Упътване. Използувайте, че

$$\left(1-\frac{k+1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{k}{n-1}\right)^n.$$

Отговор. $\lim a_n = \frac{1}{e^k}$.

8. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

монотонно намаляваща, клони към e.

Упътване. Използувайте неравенството на Бернули.

Забележка. Като вземем под внимание, че $a_n > 0$, получаваме директно доказателство за сходимост на редицата с общ член $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Това обстоятелство може да се използува, за да се дефинира константата e като $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

9. Да се покаже, че при всички цели положителни стойности на n са валидни неравенствата

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq n^{n+1} e^{-n+1}.$$

Упътване. Покажете, че редицата с общ член $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$ е намаляваща, а редицата с общ член $\frac{n^{n+1} e^{-n}}{n!}$ е растяща.

10. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n + \left(1-\frac{2}{n}\right)^n + \ldots + \left(1-\frac{n-1}{n}\right)^n$$

е сходяща и клони към $\frac{1}{e-1}$.

Упътване. Докажете, че

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \leq \frac{1}{2^k},\quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

като използвате, че

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\leq\frac{1}{2}$$

и че неравенството на Бернули дава

$$1-\frac{k}{n}\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)^k.$$

Нека ε е произволно положително число. Изберете цялото число ν толкова голямо, че да имаме

$$\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{e^\nu(e-1)}<\frac{\varepsilon}{2},$$

и го фиксирайте. Като си послужите с неравенството

$$\left|a_n-\frac{1}{e-1}\right|\leq$$

$$\leq\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-\frac{1}{e}\right|+\left|\left(1-\frac{2}{n}\right)^n-\frac{1}{e^2}\right|+\ldots+\left|\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^n-\frac{1}{e^\nu}\right|+$$

$$+\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)^n+\left(1-\frac{\nu+2}{n}\right)^n+\ldots+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^n+\frac{1}{e^\nu(e-1)}$$

покажете, че при всички достатъчно големи стойности на n имаме

$$\left|a_n-\frac{1}{e-1}\right|<\varepsilon.$$

11. Нека k е цяло положително число. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n$$

е сходяща и границата ѝ удовлетворява уравнението $x^k=e$.

Упътване. Като вземете под внимание, че $a_n>0$ и че редицата с общ член $a_{nk}=\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}$ е поредица на монотонно растящата редица с общ член $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, докажете, че редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$ расте монотонно. След това, като използвате, че

$$\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}<3\leq 2^k,$$

т. е. че

$$a_n<3,$$

покажете че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща.

12. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}.$$

Отговор. $\lim a_n=\frac{1}{2}$.

13. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}$$

е сходяща.

Упътване. От

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$$

се вижда, че редицата е монотонно растяща. От

$$a_n\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1$$

се вижда, че тя е ограничена отгоре.

14. Покажете, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

е разходяща.

Упътване. Използвайте неравенството

$$a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

15. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

Упътване. Използвайте неравенствата

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leq a_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}.$$

16. Да се докаже, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

за която

$$a_1=\frac{1}{2}$$

и

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2},$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

Упътване. Покажете, че редицата е монотонно растяща, като използвате, че

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(a_n-1)^2}{2}.$$

Покажете индуктивно, че

$$a_n<1.$$

Отговор. $\lim a_n=1$.

17. Да се покаже, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

при която $a_1=2$ и

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2}$$

е разходяща.

Решение. Да допуснем, че редицата е сходяща и клони към c. В такъв случай редицата

$$a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots$$

също клони към c, а редицата

$$a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2, \ldots$$

клони към c^2. Като вземем под внимание, че

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2},$$

намираме

$$c = \frac{c^2+1}{2},$$

или $c^2-2c+1=0$, откъдето $c=1$.

От друга страна, редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е монотонно растяща, както това се вижда от равенството

$$a_{n+1}-a_n = \frac{(a_n-1)^2}{2}.$$

Въз основа на това, като вземем под внимание, че $a_1=2$, намираме $a_n \geq 2$. Оттук заключаваме, че точката 1 не е точка на сгъстяване на дадената редица и следователно тази редица не може да клони към 1. По такъв начин предположението, че редицата е сходяща, ни доведе до противоречие, т. е. тя е разходяща.

18. Покажете, че редицата с общ член $a_n = \cos nx$ е разходяща, ако $\cos x \neq 1$.

Решение. Да предположим, че редицата е сходяща и клони към c. В такъв случай нейната подредица

$$\cos 3x, \cos 4x, \ldots, \cos (n+2)x, \ldots$$

е също сходяща и също клони към c, поради което редицата с общ член

$$b_n = \cos nx + \cos (n+2)x$$

клони към $2c$. От друга страна, и редицата, чийто n-ти член е $\cos (n+1)x$, клони към c, т. е. като извършим граничен преход в равенството

$$\cos nx + \cos (n+2)x = 2 \cos x \cos (n+1)x,$$

намираме

$$2c = 2c \cos x$$

и следователно $2c(1-\cos x)=0$. Оттук, като вземем под внимание, че $\cos x \neq 1$, намираме $c=0$. И така, ако дадената редица е сходяща, нейната граница е равна на нула.

От друга страна, като извършим граничен преход в равенството

$$\cos 2nx = 2\cos^2 nx - 1$$

и вземем под внимание, че редицата

$$\cos 2x, \cos 4x, \ldots, \cos 2nx, \ldots$$

е подредица на дадената редица и следователно клони към c, получаваме $c = 2c^2-1$, което очевидно не се удовлетворява при $c=0$. Полученото противоречие се дължи на допускането, че дадената редица е сходяща.

19. Сходяща ли е редицата с общ член $a_n = \cos nx$, когато $\cos x = 1$?

20. Да се покаже, че редицата с общ член $a_n = \sin nx$ е разходяща, когато $\sin x \neq 0$.

21. Да се покаже, че редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$, за която $a_1=a$, $a_2=b$ и

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} \text{ при } n=3, 4, \ldots,$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

Упътване. От равенството

$$a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{2}(a_{n-1} - a_{n-2})$$

се вижда, че разликите

$$a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, \ldots$$

образуват геометрична прогресия. Това обстоятелство ни позволява да изразим a_n чрез n, като използуваме, че

$$a_n = a_1 + (a_2-a_1) + (a_3-a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}).$$

Отговор. $\lim a_n = \frac{a+2b}{3}$.

22. Дадени са две редици

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

където

$$a_1=0, \; b_1=\alpha,$$

$$a_{n+1} = \frac{\alpha+b_n}{1+b_n},$$

$$b_{n+1} = \frac{\alpha+a_n}{1+a_n},$$

$$\alpha \geq 1.$$

Да се докаже, че двете редици са сходящи и клонят към една и съща неотрицателна граница, която удовлетворява уравнението $x^2=\alpha$.

Забележка. Оттук се вижда, че уравнението $x^2=\alpha$ сигурно притежава неотрицателно решение поне при $\alpha \geq 1$. Не е трудно да се убедим, че това уравнение притежава неотрицателно решение и при $0 < \alpha \leq 1$, като разгледаме помощното уравнение $y^2 = \frac{1}{\alpha}$. Случаят $\alpha=0$ е тривиален. И така уравнението $x^2=\alpha$ сигурно има неотрицателно решение при $\alpha \geq 0$. Това решение е единствено, защото от $p \neq q$ и $p>0$, $q>0$ следва $p^2 \neq q^2$ (така, ако $p > q \geq 0$, то $p^2 > q^2$). Читателят знае, че неотрицателното решение на уравнението $x^2=\alpha$ при $\alpha \geq 0$ се означава със символа $\sqrt{\alpha}$.

Упътване. Покажете, че

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n,$$

като си послужите с равенствата

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(\alpha-1)(b_n-a_n)}{(1+a_n)(1+b_n)},$$

$$b_n - b_{n+1} = \frac{(\alpha-1)(a_n-a_{n-1})}{(1+a_n)(1+a_{n-1})},$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(\alpha-1)(b_{n-1}-b_n)}{(1+b_n)(1+b_{n-1})}.$$

За да покажете, че двете редици клонят към една и съща граница, която удовлетворява уравнението $x^2=\alpha$, положете $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$ и използувайте, че

$$a=\frac{\alpha+b}{1+b},$$

$$b=\frac{\alpha+a}{1+a}.$$

Забележка. Интервалите $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ... образуват Канторова система, която дефинира числото $\sqrt{\alpha}$.

23. Нека a и b са две неотрицателни числа и нека $a \geq b$, $a \neq 0$. Образуваме двете редици*

$$a_1=\frac{a+b}{2},\ a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ \ldots,\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ \ldots$$

$$b_1=\frac{2ab}{a+b},\ b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1},\ \ldots,\ b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\ \ldots$$

Покажете, че тия две редици са сходящи и имат обща граница, която удовлетворява уравнението $x^2=ab$. Използувайте този резултат, за да установите съществуването на неотрицателно решение на уравнението $x^2=c$ при всяко $c \geq 0$.

Упътване. Покажете, че

$$b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n,$$

и използувайте тези неравенства, за да установите, че двете редици са сходящи.

За да покажете, че двете редици имат обща граница, използувайте равенството

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

За да покажете, че границата на двете редици удовлетворява уравнението, $x^2=c$, използувайте, че $a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n$.

За да установите съществуването на неотрицателно решение на уравнението $x^2=c$ при $c \geq 0$, положете $a=c$, $b=1$ при $c \geq 1$ и

$$a=1,\quad b=c \quad \text{при } c<1.$$

Забележка. Интервалите $[b_1, a_1]$, $[b_2, a_2]$, ... образуват Канторова система, която дефинира числото $\sqrt{ab}$.

24. Нека a и b са две неотрицателни числа и нека $a \geq b$. Образуваме двете редици

$$a_1=\frac{a+b}{2},\ a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ \ldots,\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ \ldots,$$

$$b_1=\sqrt{ab},\ b_2=\sqrt{a_1b_1},\ \ldots,\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ \ldots$$

Покажете, че тези две редици са сходящи и имат обща граница.

---

* Членът a_{n+1} представлява средна аритметична, а членът b_{n+1} — средна хармонична на членовете a_n и b_n. Едно число c се нарича средна хармонична на двете положителни числа a и b, ако $\frac{1}{c}$ е средна аритметична на $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, т. е.

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \text{ или } c=\frac{2ab}{a+b}.$$

Забележка 1. Общата граница на горните две редици се нарича средна аритметично-геометрична на двете числа a и b. Тази средна е използувана от Гаус в теорията на елиптичните интеграли.

Забележка 2. Относно дефиницията на квадратния корен вж. първата забележка към зад. 22.

Упътване. За да установите сходимостта на редиците, докажете, че

$$b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n,$$

а за да покажете, че те клонят към обща граница, използувайте, че

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

24. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

Упътване. Използувайте, че

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1$$

26. Нека редицата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

е сходяща и клони към a. Да се покаже, че редицата

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \ldots,\ \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},\ \ldots$$

е също сходяща и клони към a.

Упътване. Нека $\varepsilon>0$. Изберете m толкова голямо, че при $p>m$ да имаме $|a_p-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. В такъв случай при $n>m$

$$\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-a\right|=$$

$$=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\ldots+(a_m-a)+(a_{m+1}-a)+\ldots+(a_n-a)}{n}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\ldots+|a_m-a|+|a_{m+1}-a|+\ldots+|a_n-a|}{n} \leq$$

$$\leq \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\ldots+|a_m-a|}{n}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n-m}{n}.$$

Фиксирайте m. Тогава при всички достатъчно големи стойности на n

$$\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon.$$

27. Една редица

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

се нарича лимитируема с помощта на средни аритметични, ако редицата

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1+a_2}{2},\ \ldots,\ \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},\ \ldots$$

е сходяща. Границата на

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

се нарича обобщена граница на a_n. От предната задача се вижда, че всяка сходяща редица е лимитируема с помощта на средни аритметични и нейната обобщена граница е равна на редовната ѝ граница.

Да се покаже, че разходящата редица с общ член $a_n=\cos nx$ с лимитируема с помощта на средни аритметични и нейната обобщена граница е равна на нула, когато $\cos x\neq 1$.

Упътване. Използувайте, че

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\ \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

28. Нека

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

са две редици от числа. Ако редицата

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

расте неограничено, като при това

$$b_n<b_{n+1} \text{ и } b_n\neq 0,$$

то от съществуването от границата

$$l=\lim\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

следва, че редицата

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n},\ \ldots$$

е сходяща и клони също към l.

Упътване. Нека $\varepsilon>0$. Изберете m толкова голямо, че при $n>m$ да имате

$$\left|\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}-l\right|<\varepsilon,$$

т. е.

$$(l-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(l+\varepsilon)(b_n-b_{n-1}).$$

Нека цялото число k е по-голямо от m. В такъв случай, като дадете на n стойностите $m+1,\ m+2,\ \ldots,\ k$ и съберете получените неравенства, ще намерите

$$(l-\varepsilon)(b_k-b_m)<a_k-a_m<(l+\varepsilon)(b_k-b_m),$$

т. е.

$$\left|\frac{a_k-a_m}{b_k-b_m}-l\right|<\varepsilon.$$

Оттук, като вземете под внимание, че

$$\left|\frac{a_k}{b_k}-l\right|=\left|\frac{a_m}{b_k}-\frac{b_m}{b_k}\frac{a_k-a_m}{b_k-b_m}+\frac{a_k-a_m}{b_k-b_m}-l\right|\leqq$$
$$\leqq\left|\frac{a_m}{b_k}\right|+\left|\frac{b_m}{b_k}\right|\left|\frac{a_k-a_m}{b_k-b_m}\right|+\left|\frac{a_k-a_m}{b_k-b_m}-l\right|,$$

ще намерите

$$\left|\frac{a_k}{b_k}-l\right|<\left|\frac{a_m}{b_k}\right|+\left|\frac{b_m}{b_k}\right|(|l|+\varepsilon)+\varepsilon.$$

Фиксирайте m. Тогава при всички достатъчно големи стойности на k ще получите

$$\left|\frac{a_k}{b_k}-l\right|<2\varepsilon.$$

29. Нека k е цяло положително число. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$$

е сходяща и да се намери нейната граница.

Упътване. Използувайте предната задача.

Отговор. $\lim a_n=\frac{1}{k+1}$.

30. Нека редиците

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$$

са сходящи и $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$. Да се покаже, че редицата с общ член

$$c_n=\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n+1}$$

е сходяща и клони към ab.

31. Нека a е произволно неотрицателно число и k е цяло число, по-голямо от 1. Да се покаже, че редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,$$

където x_1 е произволно число и

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}},$$

е сходяща и че нейната граница е неотрицателна и удовлетворява уравнението $x^k=a$.

Упътване. Покажете, че $x_n>0$, като използувате равенството

$$x_{n+1}=\frac{(k-1)x_n^k+a}{kx_n^{k-1}}.$$

След това покажете, е $x_{n+1}^k \geqq a$ при $n=1, 2, 3, \ldots$, като си послужите с неравенството на Бернули по следния начин:

$$x_{n+1}^k-a=\left(x_n-\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}}\right)^k-a=$$

$$=x_n^k\left(1-\frac{x_n^k-a}{kx_n^k}\right)^k-a\geqq$$

$$\geqq x_n^k\left(1-k\frac{x_n^k-a}{kx_n^k}\right)-a=0.$$

По-нататък покажете, че редицата

$$x_2, x_3, \ldots,$$

монотонно намалява, като използувате за целта равенството

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}}.$$

32. Нека k е цяло положително число. Покажете, че уравнението $x^k=a$ не може да има повече от един неотрицателен корен.

Упътване. Използувайте, че при $p\geqq 0$ от неравенството $q>p$ следва неравенството $q^k>p^k$, нещо което може да се установи например индуктивно чрез почленно умножаване на двете неравенства $q^{k-1}>p^{k-1}$ и $q>p$.

Забележка. Единственото (съгласно зад. 32) и сигурно съществуващото (съгласно зад. 31) неотрицателно решение на уравнението $x^k=a$ при $a\geqq 0$ се означава със символа $\sqrt[k]{a}$ или $a^{\frac{1}{k}}$.

От този момент нататък ние постоянно ще използуваме тези символи.

33. Нека k е цяло положително число и a е неотрицателно число. На всяко цяло положително число n съпоставяме най-голямото цяло неотрицателно число p_n, за което е в сила неравенството

$$\left(\frac{p^n}{n}\right)^k\leqq a.$$

Покажете, че редицата с общ член $\frac{p_n}{n}$ е сходяща и клони към $\sqrt[k]{a}$.

Упътване. Покажете, че при всяко цяло положително m имаме

$$a<\left(\frac{p_m+1}{m}\right)^k$$

и следователно при всеки избор на двете цели положителни числа n и m е в сила неравенството

$$\frac{p_n}{n}<\frac{p_m+1}{m}.$$

Извлечете оттук, че

$$\left|\frac{p_n}{n}-\frac{p_m}{m}\right|<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}.$$

Това ни дава възможност да приложим теоремата на Коши от § 10 на тази глава.

34. Нека редицата от неотрицателни числа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

е сходяща и клони към a и нека k е цяло число, по-голямо от 1. Да се докаже, че редицата

$$\sqrt[k]{a_1}, \sqrt[k]{a_2}, \sqrt[k]{a_3}, \ldots$$

е сходяща и клони към $\sqrt[k]{a}$.

Упътване. При $a>0$ използувайте, че

$$\left|\sqrt[k]{a}-\sqrt[k]{a_n}\right|=\frac{|a-a_n|}{a^{\frac{k-1}{k}}+a^{\frac{k-2}{k}}a_n^{\frac{1}{k}}+\ldots+a_n^{\frac{k-1}{k}}}\leqq\frac{|a-a_n|}{a^{\frac{k-1}{k}}}.$$

При $a=0$ използувайте, че каквото и да бъде положителното число ε, при всички достатъчно големи стойности на n имаме $a_n<\varepsilon^k$ и следователно $\sqrt[k]{a_n}<\varepsilon$.

35. Нека $a>0$. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n=\sqrt[n]{a}$$

клони към 1.

Упътване. Нека $a\geqq 1$. Положете $\sqrt[n]{a}-1=\alpha_n$. В такъв случай $\alpha_n\geqq 0$. Очевидно $a=(1+\alpha_n)^n$, т. е. съгласно неравенството на Бернули

$$a\geqq 1+n\alpha_n,$$

откъдето $0\leqq\alpha_n\leqq\frac{a-1}{n}$ и следователно $\lim\alpha_n=0$. Аналогично се разглежда случаят, когато $0<a<1$.

36. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\sqrt[n]{n}$$

клони към 1.

Упътване. Положете $\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n$. В такъв случай $\alpha_n \geq 0$ и $n=(1+\alpha_n)^n$ и следователно

$$n=1+\frac{n}{1\,!}\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2\,!}\alpha_n^2+\ldots,$$

откъдето

$$n>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2, \text{ т. е. при } n>1$$

$$\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

37. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt[n]{e}}{2}\right)^n$$

е сходяща и да се пресметне нейната граница.

Упътване. Като използувате неравенствата

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n,$$

валидни при $n=2, 3, \ldots$, покажете, че

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<a_n<\left(1+\frac{1}{2(n-1)}\right)^n.$$

Отговор. $\lim a_n=\sqrt{e}$.

38. Ако съществува границата

$$l=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

и $a_n>0$, то редицата с общ член

$$b_n=\sqrt[n]{a_n}$$

е сходяща и клони към l.

Упътване. Да разгледаме случая, когато $l>0$. Нека ε е произволно положително число, по-малко от l. Избираме m толкова голямо, че при $n\geq m$ да имаме

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon$$

или

$$l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon.$$

Нека k е цяло число, по-голямо от m. В такъв случай, като дадем на n стойностите $m, m+1, \ldots, k-1$ и умножим получените неравенства, ще получим

$$(l-\varepsilon)^{k-m}<\frac{a_k}{a_m}<(l+\varepsilon)^{k-m}$$

или

$$(l-\varepsilon)\frac{\sqrt[k]{a_m}}{\sqrt[k]{(l-\varepsilon)^m}}<\sqrt[k]{a_k}<(l+\varepsilon)\frac{\sqrt[k]{a_m}}{\sqrt[k]{(l+\varepsilon)^m}}.$$

Фиксираме m. В такъв случай, като вземем под внимание, че

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_m}=1, \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{(l+\varepsilon)^m}=1$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{(l-\varepsilon)^m}=1,$$

получаваме при достатъчно големи стойности на k

$$l-2\varepsilon<\sqrt[k]{a_k}<l+2\varepsilon.$$

Случаят $l=0$ се разглежда още по-просто.

39. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

е сходяща и клони към $\frac{1}{e}$.

Упътване. Използувайте зад. 38.

40. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$$

е сходяща и да се пресметне нейната граница.

Упътване. Използувайте зад. 38.

Отговор. $\lim a_n=\frac{4}{e}$.

41. Нека $x>0$. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=2^n\left(\sqrt[2^n]{x}-1\right)$$

е сходяща.

Упътване. Да разгледаме първо случая, когато $x>1$. В такъв случай $a_n>0$. Покажете, че в този случай

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt[2^{n+1}]{x}+1}{2}>1$$

Случаят, когато $0<x<1$, може да се сведе към разгледания, като се вземе под внимание, че

$$a_n=-2^n\left(\sqrt[2^n]{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot\frac{2^n}{\sqrt{x}}.$$

Случаят, когато $x=1$, е тривиален.

Забележка. Границата на разгледаната редица

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

се означава обикновено със символа $\ln x$. По-късно ще се запознаем с други дефиниции на този символ, които са еквивалентни на тази, която даваме сега.

42. Като се използува дефиницията на символа $\ln x$ от предната задача, да се докаже, че при всички положителни стойности на x и y имаме

$$\ln xy=\ln x+\ln y,$$

$$\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y.$$

Упътване. Използувайте, че

$$n\left(\sqrt[n]{xy}-1\right)=\sqrt[n]{x}\cdot n\left(\sqrt[n]{y}-1\right)+n\left(\sqrt[n]{x}-1\right),$$

$$n\left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}}-1\right)=n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)-n\left(\sqrt[n]{y}-1\right)\sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

43. Да се докаже, че при всички стойности на x редицата с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

е сходяща.

Упътване. При $x\geq 0$ използувайте, че

$$a_n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

и покажете, че редицата е монотонно растяща и ограничена.

При $x<0$ положете $-x=t$ и използувайте, че

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n-t}\right)^n},$$

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{t}{n-t}\right)^n\leq\left(1+\frac{t}{n-k}\right)^{n-k}\left(1+\frac{t}{n-k}\right)^k,$$

където k е цяло число, по-голямо от t, и $n>k$.

Забележка. Границата на разгледаната редица се означава със символа e^x. По-късно ще се запознаем с друга еквивалентна дефиниция.

44. Нека

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

е произволна редица от реални числа. Нека b_n е точната горна граница на редицата

$$a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ldots$$

Да се покаже, че $\overline{\lim}\ a_n=\lim b_n$.

Забележка. Това твърдение е вярно и тогава, когато редицата $a_1,\ a_2,\ldots$ не е ограничена отгоре. В този случай трябва да се смята по дефиниция

$$b_n=\infty \text{ и } \lim b_n=\infty.$$

ГЛАВА III

БЕЗКРАЙНИ РЕДОВЕ

§ 1. Сходимост на редовете

Символ от вида

(1) $$u_1+u_2+u_3+\ldots,$$

или по-кратко

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

се нарича ред. Този символ, разбира се, е лишен от всякакъв смисъл, докато не сме казали какво ще означаваме с него. Символът (1) се различава съществено от аналогични символи, които са съставени от краен брой събираеми, по това, че ние знаем какво означава сума от краен брой събираеми, но още никъде не сме казали какво означава съдържащият безбройно много събираеми символ (1).

Сумата

$$u_1+u_2+\ldots+u_n$$

от първите n члена на реда (1) ще наричаме негова n-та частична (парциална) сума. Тя във всеки случай има смисъл за нас, защото е съставена от краен брой събираеми. Да означим тази n-та частична сума с s_n, т. е.

$$s_1=u_1,\ s_2=u_1+u_2,\ s_3=u_1+u_2+u_3,\ldots,$$

и да разгледаме безкрайната редица от числа

(2) $$s_1,\ s_2,\ s_3,\ldots$$

Ако редицата (2) е сходяща, ще казваме, че и редът (1) е сходящ (в противен случай ще казваме, че той е разходящ). Границата на редицата (2) се нарича сума на реда (1). И така един ред се нарича сходящ, когато редицата от частичните му суми е сходяща. Сума на един сходящ ред се нарича границата на редицата от частичните му суми.

Когато редът (1) е сходящ, символът (1) се използва за означаване на сумата му. И така ние казахме какво ще означаваме със сим-

вола (1) *само* когато редът е сходящ, т. е. за разлика от крайните суми символът

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

означава число само в някои случаи.

Пример 1. Редът

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}+\ldots$$

е сходящ. За да покажем това, разглеждаме неговата n-та частична сума

$$S_n=\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\,.$$

Редицата с общ член $1-\frac{1}{n+1}$ е сходяща и клони към 1. И така ние не само установихме, че редът е сходящ, но и пресметнахме неговата сума.

Пример 2. Редът

$$1+1+1+\ldots$$

е разходящ, защото редицата от частичните му суми

$$1,\ 2,\ 3,\ldots$$

е неограничена и следователно разходяща.

Пример 3. Редът*

$$1-1+1-1+1-\ldots$$

е също разходящ, защото редицата от частичните му суми

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ldots$$

има две точки на сгъстяване и следователно е разходяща.

И така ние въведохме понятието сума само за сходящите редове и следователно само за такива редове ще можем да се ползуваме от това понятие (освен ако не го дефинираме другояче).

В теорията на редовете от основно значение е да умеем да определяме дали един ред е сходящ или разходящ. Тук ще дадем едно важно необходимо условие за сходимост на един ред.

---

* Ние тук имаме пред вид реда

$$1+(-1)+1+(-1)+\ldots$$

С подобни съкращения в означенията ние често ще си служим в бъдеще.

За да бъде един ред

$$u_1+u_2+u_3+\dots$$

сходящ, необходимо е редицата от членовете му

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\dots$$

да клони към нула.

Да допуснем, че редът е сходящ. В такъв случай редицата от частичните му суми

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\dots,\ S_n,\dots$$

е сходяща. Нейната подредица

$$S_2,\ S_3,\dots,\ S_{n+1},\dots$$

следователно е сходяща и клони към същата граница, поради което редицата с общ член

$$u_{n+1}=S_{n+1}-S_n$$

клони към нула.

Така например редът

$$1+2+3+\dots+n+\dots$$

сигурно не е сходящ, защото общият му член не клони към нула.

Установеното условие обаче не е достатъчно. Да вземем за пример реда

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots,$$

който се нарича хармоничен ред. Общият му член клони към нула, но редът не е сходящ. Наистина нека S_n е n-тата му частична сума. Ако допуснем, че редицата

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\dots,\ S_n,\dots$$

е сходяща, то нейната подредица

$$S_2,\ S_4,\ S_8,\dots,\ S_{2n},\dots$$

трябва също да бъде сходяща и да клони към същата граница, поради което разликата $S_{2n}-S_n$ трябва да клони към нула. Това обаче не е вярно, защото

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\geqq$$

$$\geqq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

§ 2. Геометрична прогресия

В бъдеще ние често ще си служим с безкрайния ред

$$1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+\dots,$$

който се нарича геометрична прогресия. При $|x|\geqq 1$ този ред е разходящ, защото $|x|^{n-1}\geqq 1$, и следователно общият му член не клони към нула. Ние ще покажем обаче, че при $|x|<1$ този ред е сходящ и сумата му е $\frac{1}{1-x}$. И наистина нека S_n е неговата n-та частична сума. Очевидно имаме

$$S_n=1+x+x^2+\dots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}.$$

Тъй като $|x|<1$, то редицата с общ член $|x^n|=|x|^n$ клони към нула. Оттук следва, че и редицата с общ член $\frac{x^n}{1-x}$ също клони към нула, т. е. редицата с общ член S_n е сходяща и клони към $\frac{1}{1-x}$. И така при $|x|<1$ геометричната прогресия е сходяща и

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots$$

§ 3. Общо условие на Коши за сходимост на редовете

За да бъде редът

$$u_1+u_2+u_3+\dots$$

сходящ, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да може да се намери такова число ν, че при $n>\nu$ да е изпълнено неравенството

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

каквото и да е цялото положително число p.

И наистина, ако означим n-тата частична сума на дадения ред с S_n, получаваме

$$S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+\dots+u_{n+p}.$$

Това ни дава възможност да редактираме по следния начин горната теорема: за да бъде редът

$$u_1+u_2+\dots$$

сходящ, необходимо и достатъчно е на всяко положително число ε да може да се съпостави число ν така, че при $n>\nu$ да е изпълнено неравенството

(1) $$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

при всички цели положителни стойности на p.

При тази редакция на теоремата нейната вярност е очевидна. Тя изразява, че за да бъде един ред сходящ, необходимо и достатъчно е редицата от частичните му суми да удовлетворява условието (1) (т. е. да бъде сходяща).

§ 4. Елементарни свойства на редовете

Ако от един сходящ ред

$$u_1+u_2+u_3+\cdots$$

премахнем краен брой членове

$$u_1+u_2+\cdots+u_k,$$

получаваме сходящ ред. Ако от един разходящ ред премахнем краен брой членове, получаваме пак разходящ ред. И наистина да разгледаме двата реда

(1) $$u_1+u_2+u_3+\cdots,$$

(2) $$u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots$$

Нека n-тата частична сума на реда (2) е σ_n и $k+n$-тата частична сума на реда (1) е S_{k+n}. В такъв случай имаме

(3) $$S_{k+n}=(u_1+u_2+\cdots+u_k)+\sigma_n.$$

От това равенство е ясно, че редицата с общ член σ_n е сходяща тогава и само тогава, когато редицата с общ член S_{k+n} е сходяща.

Нека S е сумата на реда (1) и σ е сумата на реда (2). Като извършим граничен преход в равенството (3), ще получим

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_k+\sigma.$$

Аналогично се вижда, че ако към един сходящ (съответно разходящ) ред прибавим краен брой членове, получаваме пак сходящ (съответно разходящ) ред.

Читателят знае как се смята с крайни суми. Ние сега обаче изучаваме безкрайни суми. Разбира се, ако сме доказали някое твърдение за крайни суми, но не сме го доказали за безкрайни редове, не можем да твърдим, че доказаното от нас е валидно и за безкрайните

редове. Има много случаи, при които за безкрайните редове не са верни твърдения, които ние знаем за суми с краен брой събираеми, дори когато броят на събираемите може да бъде произволно голям. Обяснението на това явление е просто: макар за суми с краен брой събираеми ние и да сме доказали тези твърдения, за верността им при безкрайните суми не сме дали доказателство. Ето един пример: ние знаем, че при суми с краен брой събираеми могат да се разкриват скоби, като се спазват познатите правила; при безкрайните редове това не винаги може да се прави; така например редът

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

или, което е все също,

$$0+0+0+\cdots$$

е сходящ, защото редицата от частичните му суми е съставена от нули и следователно е сходяща; сумата на реда е нула. Ако разкрием формално скобите, получаваме ред, който няма сума:

$$1-1+1-1+\cdots$$

Този ред е разходящ, защото общият му член не клони към нула. Поставяме отново скоби, обаче този път по следния начин:

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$$

Така получаваме реда

$$1+0+0+0+\cdots$$

Този ред е сходящ и сумата му е 1, защото редицата от парциалните му суми клони към 1.

Разбира се, няма нищо странно в това, че макар и да сме доказали някоя теорема при някои условия, заключението може и да не е вярно, ако не са налице условията, при които е извършено доказателството.

Впоследствие често ще се ползуваме от следното свойство на сходящите редове: нека

$$u_1+u_2+\cdots,$$

$$v_1+v_2+\cdots$$

са два сходящи реда, сумите на които са съответно S и σ, и нека a и b са две произволни числа. В такъв случай редът

(4) $$(au_1+bv_1)+(au_2+bv_2)+(au_3+bv_3)+\cdots$$

е сходящ и сумата му е $aS+b\sigma$.

И наистина нека S_n, σ_n и Σ_n са n-тите частични суми съответно на първия, втория и третия ред. Очевидно имаме

$$\Sigma_n = (au_1+bv_1)+\cdots+(au_n+bv_n) =$$
$$= a(u_1+u_2+\cdots+u_n)+b(v_1+v_2+\cdots+v_n) = aS_n+b\sigma_n .$$

Тези пресмятания са напълно законни, защото са извършени с крайни суми. Тъй като редиците с общи членове S_n и σ_n са сходящи, то и редицата с общ член $aS_n+b\sigma_n$ е също сходяща и клони към $aS+b\sigma$. И така доказахме, че редът (4) е сходящ и че

$$aS+b\sigma=(au_1+bv_1)+(au_2+bv_2)+\cdots$$

Специално при $a=b=1$ получаваме едно правило за почленно събиране на два сходящи реда, при $a=1$, $b=-1$ имаме правило за почленно изваждане на два сходящи реда, а при $b=0$ имаме правило за умножаване на един ред с едно число (дистрибутивен закон при безкрайните редове).

Редът $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k+v_k)$ се нарича сума, а редът $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k-v_k)$ се нарича разлика на двата реда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$. И така както сумата, така и разликата на два сходящи реда е сходящ ред.

Ако редът $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ е сходящ, то каквото и да е числото λ, редът $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda u_k$ е също сходящ.

§ 5. Редове с неотрицателни* членове

Ако членовете на един ред

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

са неотрицателни, то редицата от частичните му суми

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\cdots$$

расте монотонно, тъй като

$$S_n-S_{n-1}=u_n\geqq 0.$$

* Терминът „неотрицателни" значи положителни или нули.

Оттук следват редица свойства на такива редове. Така например никоя частична сума на един сходящ ред с неотрицателни членове не надминава сумата на този ред, защото, както знаем, членовете на една монотонно растяща сходяща редица не надминават границата ѝ. Също така от монотонността на редицата от частичните суми следва, че за да бъде един ред с неотрицателни членове сходящ, необходимо и достатъчно е редицата от частичните му суми да бъде ограничена. Ние в бъдеще много често ще използуваме това свойство. Върху него се основава така нареченият принцип за сравняване на редовете. Този принцип може да се формулира така:

Ако членовете на един ред

(1) $$u_1+u_2+u_3+\cdots$$

са неотрицателни и не надминават съответните членове на един сходящ ред

(2) $$v_1+v_2+v_3+\cdots$$

(т. е. ако $0\leqq u_n\leqq v_n$), то редът (1) е сходящ.

Доказателството може да се извърши така: нека S_n и σ_n са n-тите частични суми съответно на редовете (1) и (2). Очевидно

$$S_n\leqq\sigma_n .$$

Редът (2) е сходящ, следователно редицата от частичните му суми е ограничена (тъй като е сходяща). Нека σ е една горна граница на тази редица. Очевидно имаме

$$S_n\leqq\sigma_n\leqq\sigma,$$

т. е. редицата с общ член S_n е също ограничена, и тъй като е монотонно растяща, тя е сходяща. С това доказателството се завършва.

Пример 1. Да се изследва дали е сходящ или разходящ редът

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

Изследването може да се извърши така: вместо да изследваме дадения ред, достатъчно е да изследваме реда

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots,$$

който са получава от дадения, след като премахнем първия му член; така полученият ред обаче е сходящ, защото членовете му не са отрицателни и не надминават съответните членове на сходящия ред

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

Пример 2. Редът

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{2}{2n-1}+\ldots$$

е разходящ. И наистина в противен случай, използувайки неравенството

$$\frac{2}{2n-1}>\frac{1}{n},$$

бихме заключили, че хармоничният ред

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

е сходящ, което, както знаем, не е вярно.*

§ 6. Признаци (критерии) за сходимост на редове с положителни членове

Ние ще дадем някои достатъчни условия за сходимост и за разходимост на редове с положителни** членове.

Критерий на Даламбер (d'Alembert). За да бъде един ред с положителни членове

(1) $$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

сходящ, достатъчно е да бъде изпълнено неравенството

(2) $$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqq q$$

от известно n нататък, където $q<1$. За да бъде редът (1) разходящ, достатъчно е да имаме от известно n нататък

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqq 1.$$

---

* Аналогично може да се установи по-общо следното: ако $0\leqq u_n\leqq v_n$ и ако редът

$$u_1+u_2+\ldots$$

е разходящ, то редът

$$v_1+v_2+\ldots$$

е също разходящ. И наистина, ако допуснем, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е сходящ, ще следва, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е също сходящ, което не е вярно.

** Терминът „положителни" трябва да се разбира в смисъл на „съществено положителни", т. е. всички различни от нула, за разлика от термина „неотрицателни", който допуска някои от членовете да са нули.

Доказателство. Ще започнем с първата част на твърдението. Нека при $n\geqq k$ имаме $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqq q$. В такъв случай $u_{n+1}\leqq qu_n$. Оттук получаваме последователно неравенствата

$$u_{k+1}\leqq qu_k,$$
$$u_{k+2}\leqq qu_{k+1}\leqq q^2u_k,$$
$$u_{k+3}\leqq qu_{k+2}\leqq q^3u_k,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

които показват, че членовете на реда

(3) $$u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots$$

не надминават съответните членове на сходящата геометрична прогресия

$$u_k+u_kq+u_kq^2+\cdots$$

(тази геометрична прогресия е сходяща, защото се получава, като умножим с числото u_k всички членове на прогресията

$$1+q+q^2+\cdots$$

за която ние вече знаем, че е сходяща, тъй като $0<q<1$).

И така редът (3) е сходящ. Това обаче е достатъчно, за да твърдим, че и редът

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_k+\cdots$$

е също сходящ.

За да докажем втората част от теоремата, достатъчно е да забележим, че ако $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqq 1$, то $u_{n+1}\geqq u_n$. И така редицата от положителните числа

$$u_k,\ u_{k+1},\cdots$$

монотонно расте и следователно не клони към нула (тъй като $u_n\geqq u_k$ при $n\geqq k$). Това е достатъчно, за да твърдим, че редът (1) не е сходящ.

Нека отбележим изрично, че ние не предположихме съществуването на $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Когато тази граница съществува, на критерия на Даламбер може да се даде следната, макар и по-малко обща, но по-удобна форма.

Ако редицата

(4) $$\frac{u_2}{u_1},\ \frac{u_3}{u_2},\ \frac{u_4}{u_3},\ldots$$

е сходяща и клони към граница, която е по-малка от 1, редът е сходящ. Когато тази редица клони към граница, която е по-голяма от 1, редът е разходящ, но когато редицата (4) клони към единица, без обаче поне от известно място нататък членовете ѝ да остават по-големи или равни на единица, критерият на Даламбер не ни дава никакво указание за сходимостта или разходимостта на реда.

Ако $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$, то за всички достатъчно големи стойности на n имаме $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\frac{1-l}{2}$, тъй като числото $\frac{1-l}{2}$ е съществено положително. Оттук получаваме $\frac{u_{n+1}}{u_n}-l<\frac{1-l}{2}$ и следователно

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\frac{1-l}{2}=\frac{1+l}{2}.$$

Това е достатъчно, за да твърдим, че редът (1) е сходящ, защото

$$\frac{1+l}{2}<\frac{1+1}{2}=1,$$

а следователно е изпълнено достатъчното условие за сходимост на Даламбер.

В случай че $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=l>1$, то за всички достатъчно големи стойности на n имаме $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, което ни осигурява разходимостта на реда (1).

Накрая нека споменем, че ние изрично изключихме случаите, при които редът притежава членове, равни на нула, за да имаме свободата да делим с тях. Разбира се, достатъчно би било да се иска членовете на реда (1) да са положителни от известно място нататък.

Пример. Редът $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$ е сходящ, защото

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}=\frac{1}{n+1} \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0.$$

Критерий на Коши (Cauchy)

За да бъде един ред с неотрицателни членове

(5) $$u_1+u_2+u_3+\cdots$$

сходящ, достатъчно е да бъде изпълнено неравенството*

$$\sqrt[n]{u_n}\leq q$$

за всички достатъчно големи стойности на n, където $q<1$. За да бъде редът (5) разходящ, достатъчно е за безбройно много стойности на n да е изпълнено неравенството $\sqrt[n]{u_n}\geq 1$.

Доказателство. Ще започнем с първата част на твърдението. От неравенството $\sqrt[n]{u_n}\leq q$ получаваме $u_n\leq q^n$, т. е. членовете на дадения ред поне от известно място нататък не надминават съответните членове на една сходяща геометрична прогресия (тук използуваме, че $0\leq q<1$). Това е достатъчно, за да ни осигури сходимостта на реда (5), тъй като членовете му са неотрицателни.

Доказателството на втората част може да се извърши така: от $\sqrt[n]{u_n}\geq 1$ получаваме неравенството $u_n\geq 1$, което е изпълнено за безбройно много стойности на n. И така u_n сигурно не клони към нула когато n расте неограничено, и следователно редът (5) не е сходящ.

Ние досега не изисквахме редицата с общ член $\sqrt[n]{u_n}$ да е сходяща. Ако се случи обаче $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ да съществува, то на критерия на Коши може да се даде следната по-удобна форма (макар и не толкова обща):

Ако $\lim\sqrt[n]{u_n}=l$ съществува и $l<1$, редът е сходящ. Ако $l>1$, редът е разходящ. Ако $l=1$, критерият на Коши не ни дава никакво указание за сходимостта на разглеждания ред.

Нека $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l<1$. Избираме произволно число q, за което $l<q<1$ (такова число може да се избере, защото $l<1$). В такъв случай за всички достатъчно големи стойности на n ще имаме $\sqrt[n]{u_n}<q$, което е достатъчно, за да твърдим, че редът (5) е сходящ.

Ако $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l>1$, то за всички достатъчно големи стойности на n имаме $\sqrt[n]{u_n}\geq 1$ и следователно редът (5) е разходящ.

* Вж. относно дефиницията на действието коренуване зад. 31 и 32 в края на глава 2.

Пример. Редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ е сходящ, защото

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Критерий на Раабе и Дюамел (Raabe—Duhamel). Нека

$$u_1+u_2+u_3+\dots \tag{6}$$

е един ред с положителни членове. Определяме числото α_n от уравнението

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n}.$$

Ако за всички достатъчно големи стойности на n произведението $n\alpha_n$ не е по-малко от едно (независещо от n) число, което е по-голямо от 1, редът (6) е сходящ. Ако от известно място нататък това произведение е по-малко или равно на 1, редът е разходящ.

И наистина очевидно

$$\alpha_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}}.$$

Ако при $n \geqq k$ имаме $n\alpha_n \geqq \mu$, където $\mu > 1$, то

$$n\frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}} \geqq \mu,$$

откъдето получаваме последователно

$$nu_n - nu_{n+1} \geqq \mu u_{n+1},$$

$$nu_n - (n+1)\,u_{n+1} \geqq (\mu-1)u_{n+1}.$$

Събираме почленно неравенствата

$$ku_k - (k+1)u_{k+1} \geqq (\mu-1)u_{k+1},$$

$$(k+1)u_{k+1} - (k+2)u_{k+2} \geqq (\mu-1)u_{k+2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(k+p-1)u_{k+p-1} - (k+p)u_{k+p} \geqq (\mu-1)u_{k+p},$$

които се получават, когато на n даваме последователно стойностите k, $k+1, \dots, k+p-1$, и получаваме

$$ku_k - (k+p)u_{k+p} \geqq (\mu-1)\,(u_{k+1}+u_{k+2}+\dots+u_{k+p})$$

или

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\dots+u_{k+p} \leqq \frac{ku_k-(k+p)u_{k+p}}{\mu-1} < \frac{ku_k}{\mu-1}.$$

Полученото неравенство ни учи, че редицата от частичните суми на реда

$$u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\dots$$

е ограничена — нещо, което е достатъчно, за да твърдим, че редът е сходящ, тъй като членовете му са положителни. От доказаното следва, че и редът

$$u_1+u_2+u_3+\dots$$

е сходящ.

Сега ще преминем към втората част на теоремата. Да допуснем, че при $n \geqq k$ имаме $n\alpha_n \leqq 1$, т. е.

$$n\frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}} \leqq 1$$

или

$$nu_n \leqq (n+1)\,u_{n+1}.$$

Оттук получаваме

$$ku_k \leqq (k+1)u_{k+1} \leqq \dots \leqq (k+p)\,u_{k+p},$$

т. е.

$$\frac{ku_k}{k+p} \leqq u_{k+p}.$$

Ако допуснем, че редът (6) е сходящ, оттук ще следва, че и редът

$$\frac{ku_k}{k+1}+\frac{ku_k}{k+2}+\frac{ku_k}{k+3}+\dots \tag{7}$$

е сходящ, което не е вярно, защото в противен случай редът

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots$$

$\left(\text{който се получава от реда (7), след като се умножи с } \frac{1}{ku_k}\right)$ трябва да бъде сходящ, откъдето пък би следвала сходимостта на хармоничния ред

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots$$

Но ние знаем, че хармоничният ред е разходящ. От това следва, че и редът (6) не може да бъде сходящ.

Пример. Да разгледаме реда

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}+\ldots$$

Тук

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2n+2}.$$

Това число клони към 1 чрез стойности, по-малки от 1, т. е. критерият на Даламбер не ни дава никакво указание за сходимостта или разходимостта на реда. Ние обаче ще приложим тук критерия на Разабе—Дюамел. От уравнението

$$\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{1}{1+\alpha_n}$$

получаваме

$$\alpha_n=\frac{1}{2n+1},$$

т. е.

$$n\alpha_n=\frac{n}{2n+1}<1,$$

което показва, че редът е разходящ.

§ 7. Представяне на константата e във вид на безкраен ред

Сега ще докажем, че константата e може да се представи като сума на следния безкраен ред:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

За целта ще си послужим с развитието

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

което вече използувахме в § 8 на глава 2 при дефиницията на числото e.

Нека k е произволно цяло положително число и нека n е цяло число, по-голямо от k. В такъв случай

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Като оставим в това неравенство n да расте неограничено, ще получим след граничния преход

$$e\geqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}.$$

Това неравенство ни учи, че редът

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$$

е сходящ* и неговата сума не надминава константата e.

Да положим

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=S.$$

По такъв начин установихме, че $S\leqq e$.

От друга страна,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

и толкова повече

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqq S.$$

Като извършим граничен преход, заключаваме от това неравенство, че $e\leqq S$ — нещо, което заедно с установеното по-горе неравенство $S\leqq e$ ни учи, че $S=e$. С това доказателството е завършено.

§ 8. Теорема на Коши за редове с неотрицателни монотонно намаляващи членове

Нека членовете на реда

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

са неотрицателни и при всяко цяло положително n имаме $u_n\geqq u_{n+1}$. В такъв случай този ред е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k u_{2^k}.$$

За да докажем тази теорема на Коши, полагаме

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,$$
$$\sigma_n=u_1+2u_2+4u_4+\ldots+2^n u_{2^n}.$$

* Тъй като членовете му са неотрицателни, а редицата от частичните му суми е ограничена.

Тъй като редицата

$$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

монотонно намалява, то имаме следните неравенства:

$$u_2 \leqq u_1 = u_1,$$

$$2u_4 \leqq u_2 + u_3 \leqq 2u_2,$$

$$4u_8 \leqq u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \leqq 4u_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2^n u_{2^{n+1}} \leqq u_{2^n} + u_{2^n+1} + \ldots + u_{2^{n+1}-1} \leqq 2^n u_{2^n}.$$

Като съберем почленно тези неравенства, получаваме

$$\frac{\sigma_{n+1} - u_1}{2} \leqq S_{2^{n+1}-1} \leqq \sigma_n.$$

Ако редът

$$u_1 + u_2 + \ldots$$

е сходящ, редицата от частичните му суми е ограничена. Нека A е една нейна горна граница. В такъв случай $S_{2^{n+1}-1} \leqq A$ и следователно

$$\frac{\sigma_{n+1} - u_1}{2} \leqq A,$$

т. е.

$$\sigma_{n+1} \leqq u_1 + 2A.$$

И така редицата от частичните суми на реда с неотрицателни членове $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k u_{2^k}$ е ограничена, т. е. този ред е сходящ.

Ако редът

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

е разходящ, то редицата с общ член $S_{2^{n+1}-1}$ расте неограничено*, а следователно частичните суми σ_n също растат неограничено, както това се вижда от неравенството

$$S_{2^{n+1}-1} \leqq \sigma_n.$$

От това следва, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k u_{2^k}$ е разходящ. По такъв начин теоремата на Коши е доказана.

* Тъй като членовете на реда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ са неотрицателни.

§ 9. Критерий за сходимост на Лайбниц (Leibniz)

Ще докажем, че ако монотонно намаляващата редица

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \ldots$$

клони към нула, то редът

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots \tag{1}$$

е сходящ.

За да докажем твърдението, избираме едно положително число ε и след това вземаме ν така, че при $n > \nu$ да е изпълнено неравенството $u_n < \varepsilon$. Това може да се направи, защото $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Разглеждаме разликата

$$S_{n+p} - S_n = (-1)^n [u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1} u_{n+p}],$$

където S_n и S_{n+p} означават съответно n-тата и $n+p$-тата частична сума на реда (1). Очевидно за всяко цяло положително p имаме

$$\begin{aligned}
|S_{n+p} - S_n| &= |u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1} u_{n+p}| = \\
&= |(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots| = \\
&= u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots + (-1)^{p-1} u_{n+p} = \\
&= u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) \ldots \leqq \\
&\leqq u_{n+1}.
\end{aligned}$$

И така

$$|S_{n+p} - S_n| \leqq u_{n+1}, \tag{2}$$

т. е.

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

което е достатъчно, за да твърдим, че редът е сходящ.

Направените разсъждения могат да се използват за оценка на грешката, която се прави, когато вместо сумата на реда (1) се взима някоя негова частична сума. И наистина нека S е неговата сума. Ако оставим p да расте неограничено в неравенството (2), ще получим след граничен преход

$$|S - S_n| \leqq u_{n+1}.$$

Ние ще използуваме в бъдеще това неравенство.

Пример. Редът

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{3}$$

е сходящ, защото знаците на членовете му алтернативно се сменят и редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

клони към нула, монотонно намалявайки.

Ако S е сумата на реда (3), а S_n е неговата n-та частична сума, то както отбелязахме по-горе, е в сила неравенството

$$|S-S_n|\leqq\frac{1}{n+1}.$$

§ 10. Абсолютно сходящи редове

Един ред

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

се нарича абсолютно сходящ, когато редът

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots,$$

съставен от абсолютните стойности на членовете му, е сходящ. Така например редът

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots$$

е абсолютно сходящ, защото редът

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

е сходящ. Напротив, редът

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots,$$

макар и да е сходящ (според критерия на Лайбниц), не е абсолютно сходящ, защото редът

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

е разходящ (това е хармоничният ред). Ред, който е сходящ, но не е абсолютно сходящ, се нарича условно сходящ. Редът

$$1-1+1-1+\ldots$$

не е нито сходящ (защото общият му член не клони към нула), нито е абсолютно сходящ, защото редът

$$1+1+1+1+\ldots$$

е разходящ.

Ще докажем, че ако един ред е абсолютно сходящ, той е сходящ.

За тази цел ще си послужим с неравенствата

(1) $$0\leqq\frac{|a|+a}{2}\leqq|a|,\ 0\leqq\frac{|a|-a}{2}\leqq|a|,$$

които са валидни при всички реални стойности на a. Верността на тези неравенства може да се установи например по следния начин. Дефиницията на понятието абсолютна стойност ни дава

(2) $$a\leqq|a|,\ -a\leqq|a|$$

и следователно

$$0\leqq\frac{|a|-a}{2},\ 0\leqq\frac{|a|+a}{2}.$$

От друга страна, като прибавим към двете части на неравенствата (2) числото $|a|$, получаваме

$$|a|+a\leqq2|a|,\ |a|-a\leqq2|a|$$

и следователно

$$\frac{|a|+a}{2}\leqq|a|,\ \frac{|a|-a}{2}\leqq|a|.$$

След тази малка подготовка вече сме готови да докажем, че ако един ред

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

е абсолютно сходящ, той е сходящ. И наистина нека редът

(3) $$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$$

е сходящ. Разглеждаме двата реда

(4) $$\frac{|u_1|+u_1}{2}+\frac{|u_2|+u_2}{2}+\frac{|u_3|+u_3}{2}+\ldots$$

(5) $$\frac{|u_1|-u_1}{2}+\frac{|u_2|-u_2}{2}+\frac{|u_3|-u_3}{2}+\ldots$$

Въз основа на неравенствата (1) можем да пишем

$$0\leqq\frac{|u_k|+u_k}{2}\leqq|u_k|,\ 0\leqq\frac{|u_k|-u_k}{2}\leqq|u_k|,$$

т. е. членовете на редовете (4) и (5) са неотрицателни и не надминават съответните членове на сходящия ред (3). Това е достатъчно, за да твърдим, че двата реда (4) и (5) са сходящи. Като се възползуваме от теоремата, според която разликата на два сходящи реда е сходящ ред (относно тази теорема и относно дефиницията на понятието разлика на два реда вж. глава 3, § 4), заключаваме, че редът

$$\left(\frac{|u_1|+u_1}{2}-\frac{|u_1|-u_1}{2}\right)+\left(\frac{|u_2|+u_2}{2}-\frac{|u_2|-u_2}{2}\right)+\ldots$$

т. е. редът

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

е сходящ.

От направените разсъждения се вижда, че всеки абсолютно сходящ ред може да се представи като разлика на два сходящи реда с неотрицателни членове. Обратното е също вярно. И наистина, ако двата реда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ са сходящи и $a_k \geqq 0$, $b_k \geqq 0$, то редът $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ е абсолютно сходящ, защото $|a_k - b_k| \leqq a_k + b_k$ и редът $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ е сходящ.

Ние бихме могли да установим, че всеки абсолютно сходящ ред е сходящ, и с помощта на теоремата на Коши по следния начин: нека ε е произволно положително число; избираме ν по такъв начин, че при $n > \nu$ и при всички цели положителни стойности на p да имаме

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon;$$

това може да се направи, защото редът (3) е сходящ; последното неравенство и неравенството

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \leqq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|$$

ни позволяват да заключим, че

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

т. е. редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е наистина сходящ.

Пример 1. Редът

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{2^3} + \ldots + \frac{\sin nx}{2^n} + \ldots \tag{6}$$

е сходящ, защото редът

$$\frac{|\sin x|}{2} + \frac{|\sin 2x|}{2^2} + \frac{|\sin 3x|}{2^3} + \ldots + \frac{|\sin nx|}{2^n} + \ldots$$

е сходящ (неговите членове са неотрицателни и не надминават съответните членове на сходящата геометрична прогресия $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$). От направените разсъждения се вижда, че редът е дори абсолютно сходящ.

Пример 2. Ако при достатъчно големи стойности на n имаме $u_n \neq 0$ и $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq r < 1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ (дори абсолютно), защото редът $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ е сходящ. Ако пък при достатъчно големи стойности на n имаме $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq 1$, то

редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ, защото $|u_{n+1}| \geq |u_n|$ и следователно u_n не клони към нула, когато n расте неограничено. По-специално, ако съществува границата $l = \lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ и $l < 1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ; ако пък $l > 1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ.

§ 11. Комутативен закон при абсолютно сходящите редове

Нека

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{1}$$

е един абсолютно сходящ ред и нека редът

$$u_{n_1} + u_{n_2} + u_{n_3} + \ldots \tag{2}$$

се получава от реда (1) чрез разместване на членовете му. Това значи, че в редицата от цели положителни числа

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

се среща всяко цяло положително число, и то само веднъж. Ще докажем, че редът (2) е също абсолютно сходящ и сумата му е равна на сумата S на реда (1).

Да изберем едно цяло положително число k. Нека ν е цяло число, по-голямо от всяко едно от числата $n_1, n_2, \ldots, n_k$. В такъв случай всичките тези числа се срещат в редицата $1, 2, \ldots, \nu$. Като вземем под внимание още, че никои две от тях не са равни помежду си, намираме

$$|u_{n_1}| + |u_{n_2}| + \ldots + |u_{n_k}| \leqq |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_\nu|.$$

Да означим със Σ сумата на сходящия ред

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$$

В такъв случай

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_\nu| \leqq \Sigma$$

и следователно

$$|u_{n_1}| + |u_{n_2}| + \ldots + |u_{n_k}| \leqq \Sigma.$$

И така редицата от частичните суми на реда

$$|u_{n_1}| + |u_{n_2}| + |u_{n_3}| + \ldots$$

е ограничена — нещо, което е достатъчно, за да твърдим, че този ред е сходящ, тъй като членовете му са неотрицателни. По такъв начин ние доказахме, че редът (2) е абсолютно сходящ. Нека σ е неговата сума. Остава да покажем, че $\sigma = S$. За тази цел избираме едно произ-

волно положително число ε и след това избираме едно толкова голямо цяло число m, че да имаме

$$|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\ldots+|u_{m+p}|<\varepsilon$$

при всички цели положителни стойности на p. Това може да се направи, защото редът (1) е абсолютно сходящ и следователно редът

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots$$

е сходящ. Фиксираме m. В такъв случай при достатъчно големи стойности на p числата $1, 2, \ldots, m$ сигурно фигурират в редицата $n_1, n_2, \ldots, n_{m+p}$, защото в безкрайната редица

$$n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots$$

фигурират всичките цели положителни числа. Останалите членове на редицата $n_1, n_2, \ldots, n_{m+p}$ са по-големи от m, защото никое цяло число не фигурира повече от един път в тази редица. Този резултат ни позволява да твърдим, че

$$u_{n_1}+u_{n_2}+\ldots+u_{n_{m+p}}=u_1+u_2+\ldots+u_m+u_{m+\nu_1}+u_{m+\nu_2}+\ldots+u_{m+\nu_p},$$

където целите числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ са положителни.

Да разгледаме разликата

$$\alpha_p=(u_1+u_2+\ldots+u_{m+p})-(u_{n_1}+u_{n_2}+\ldots+u_{n_{m+p}})=$$
$$=(u_1+u_2+\ldots+u_m+u_{m+1}+\ldots+u_{m+p})-$$
$$-(u_1+u_2+\ldots+u_m+u_{m+\nu_1}+\ldots+u_{m+\nu_p})=(u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+$$
$$+u_{m+p}-u_{m+\nu_1}-u_{m+\nu_2}-\ldots-u_{m+\nu_p},$$

т. е.

$$|\alpha_p|\leqq|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\ldots+|u_{m+p}|+|u_{m+\nu_1}|+|u_{m+\nu_2}|+\ldots+$$
$$+|u_{m+\nu_p}|\leqq\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

И така ние установихме неравенството

$$|(u_1+u_2+\ldots+u_{m+p})-(u_{n_1}+u_{n_2}+\ldots+u_{n_{m+p}})|<2\varepsilon$$

за всички достатъчно големи стойности на p. Като извършим граничния преход $p\to\infty$, получаваме

$$|S-\sigma|\leqq 2\varepsilon. \tag{3}$$

Положителното число ε обаче е произволно, а разликата $S-\sigma$ ни най-малко не зависи от ε. Оттук заключаваме, че $S-\sigma=0$. И наистина в

противен случай ще имаме $\frac{|S-\sigma|}{2}>0$ и следователно ще можем да изберем положителното число ε така, че да имаме

$$\varepsilon<\frac{|S-\sigma|}{2},$$

което противоречи на неравенството (3).

И така ние доказахме следната теорема. В един абсолютно сходящ ред при разместване на членовете му нито се нарушава абсолютната му сходимост, нито се променя сумата му.

Един ред може да бъде сходящ, без да бъде абсолютно сходящ. Такъв ред се нарича условно сходящ или полусходящ. Като пример за условно сходящ ред може да ни служи редът

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

Този ред е сходящ според критерия на Лайбниц, но не е абсолютно сходящ, защото редът

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

е разходящ.

При условно сходящите редове не е валиден комутативният закон. Ще разгледаме за пример полусходящия ред

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$$

Сумата на този ред е нула. Разместваме членовете му по следния начин:

$$1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}+\ldots \tag{4}$$

Сумата на този ред обаче не може да бъде нула, защото колкото и да бъде голямо цялото положително число n, имаме

$$1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2.1}+\frac{1}{3.2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}\geqq\frac{1}{2},$$

т. е. измежду парциалните суми на реда (4) има безбройно много такива, които не клонят към нула.

Трудолюбивият читател, който ще проучи задачите към тази глава, ще узнае, че във всеки полусходящ ред е възможно по такъв начин да се разместят членовете, че да се получи ред с отнапред дадена сума. Разместването може да се извърши дори така, че да се получи разходящ ред. Тази проста теорема произхожда от Риман (Riemann).

§ 12. Умножаване на безкрайните редове. Теорема на Мертенс. Теорема на Коши

Нека са дадени двата реда

(1) $$u_0+u_1+u_2+\ldots$$

(2) $$v_0+v_1+v_2+\ldots$$

Редът

3) $$u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\ldots+(u_nv_0+u_{n-1}v_1+\ldots+u_0v_n)+\ldots$$

(се нарича произведение на двата реда (1) и (2) по правилото на Коши. Ще докажем следната теорема на Мертенс (Mertens): ако поне единият от двата реда (1) и (2) е абсолютно сходящ, а другият е сходящ (поне условно), то произведението им (3) в смисъл на Коши е сходящо и сумата му е равна на произведението от сумите на двата реда (1) и (2).

За да докажем тази теорема, ние ще положим

$$S'_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$$

$$S''_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$$

и
$$S_n=u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\ldots+$$
$$+(u_nv_0+u_{n-1}v_1+\ldots+u_0v_n).$$

В такъв случай очевидно

$$\begin{aligned}S'_nS''_n=&u_0v_0+u_0v_1+u_0v_2+\ldots+u_0v_n+\\&+u_1v_0+u_1v_1+u_1v_2+\ldots+u_1v_n+\\&+u_2v_0+u_2v_1+u_2v_2+\ldots+u_2v_n+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+u_nv_0+u_nv_1+u_nv_2+\ldots+u_nv_n.\end{aligned}$$

Нека k е цяло положително число, по-малко от n. Допълнително ще уточним неговия избор. Не е трудно да се види, че

$$\begin{aligned}S'_nS''_n-S_n=&u_nv_1+u_nv_2+\ldots+u_nv_n+\\&+u_{n-1}v_2+u_{n-1}v_3+\ldots+u_{n-1}v_n+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+u_{k+1}v_{n-k}+u_{k+1}v_{n-k+1}+\ldots+u_{k+1}v_n+\\&+u_kv_{n-k+1}+u_kv_{n-k+2}+\ldots+u_kv_n+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+u_2v_{n-1}+u_2v_n+\\&+u_1v_n\end{aligned}$$

и следователно

$$\begin{aligned}|S'_nS''_n-S_n|\leqq&|u_n|\,|v_1+v_2+\ldots+v_n|+\\&+|u_{n-1}|\,|v_2+v_3+\ldots+v_n|+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+|u_{k+1}|\,|v_{n-k}+v_{n-k+1}+\ldots+v_n|+\\&+|u_k|\,|v_{n-k+1}+v_{n-k+2}+\ldots+v_n|+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+|u_2|\,|v_{n-1}+v_n|+\\&+|u_1|\,|v_n|.\end{aligned}$$

Редът (2) е сходящ и следователно редицата от частичните му суми е ограничена. Нека A е една горна граница на $|S''_\nu|$, когато ν приема всевъзможни цели положителни стойности. В такъв случай при всеки избор на целите положителни числа p и q имаме

$$|v_{p+1}+v_{p+2}+\ldots+v_{p+q}|=|S''_{p+q}-S''_p|\leqq|S''_{p+q}|+|S''_p|\leqq A+A=2A.$$

Това ни позволява да заключим, че

$$\begin{aligned}|S'_nS''_n-S_n|\leqq&(|u_n|+|u_{n-1}|+\ldots+|u_{k+1}|).\,2A+\\&+|u_k|\,|v_{n-k+1}+v_{n-k+2}+\ldots+v_n|+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+|u_2|\,|v_{n-1}+v_n|+\\&+|u_1|\,|v_n|.\end{aligned}$$

Нека редът (1) е абсолютно сходящ и нека

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots=B.$$

Избираме произволно положителното число ε и след това даваме на k толкова голяма стойност, че при всички цели положителни значения на n, които са по-големи от k, да имаме

$$|u_{k+1}|+|u_{k+2}|+\ldots+|u_{n-1}|+|u_n|<\varepsilon.$$

В такъв случай получаваме следното неравенство:

$$\begin{aligned}|S'_n S''_n - S_n| \leqq \varepsilon . 2A + \\ + |u_k| \, |v_{n-k+1} + v_{n-k+2} + \ldots + v_n| + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + |u_2| \, |v_{n-1} + v_n| + \\ + |u_1| \, |v_n|.\end{aligned}$$

Редът (2) е сходящ и следователно може да се избере толкова голямо число ν, че при $q \geqq \nu$ да имаме

$$|v_{q+1} + v_{q+2} + \ldots + v_{q+p}| < \varepsilon.$$

Фиксираме k. В такъв случай при достатъчно големи стойности на n ще имаме $n-k > \nu$ и следователно

$$\begin{aligned}&|v_{n-k+1} + v_{n-k+2} + \ldots + v_n| < \varepsilon, \\ &|v_{n-k+2} + v_{n-k+3} + \ldots + v_n| < \varepsilon, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &|v_{n-1} + v_n| < \varepsilon, \\ &|v_n| < \varepsilon,\end{aligned}$$

т. е.

$$|S'_n S''_n - S_n| \leqq 2A\varepsilon + (|u_k| + |u_{k-1}| + \ldots + |u_2| + |u_1|)\,\varepsilon,$$

откъдето

$$|S'_n S''_n - S_n| \leqq 2A\varepsilon + B\varepsilon = (2A+B)\varepsilon.$$

Да означим сумата на реда (1) с S', а сумата на реда (2) с S'' Като вземем под внимание, че $\lim S'_n = S'$ и $\lim S''_n = S''$, заключаваме, че $\lim S'_n S''_n = S' S''$, и следователно при всички достатъчно големи цели стойности на n имаме

$$|S'_n S''_n - S' S''| < \varepsilon,$$

откъдето получаваме

$$|S_n - S' S''| = |(S_n - S'_n S''_n) + (S'_n S''_n - S' S'')| \leqq$$

$$\leqq |S_n - S'_n S''_n| + |S'_n S'' - S' S''| < (2A+B)\varepsilon + \varepsilon = (2A+B+1)\varepsilon,$$

т. е. $\lim S_n = S' S''$. С това е установено, че редът (3) е наистина сходящ и сумата му е $S' S''$, т. е. теоремата на Мертенс е доказана.

Ако и двата реда (1) и (2) са абсолютно сходящи, то (както установи това Коши) редът (3) е също абсолютно сходящ. И наистина, ако положим

$$\begin{aligned}B &= |u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots, \\ C &= |v_0| + |v_1| + |v_2| + \ldots,\end{aligned}$$

ще имаме

$$\begin{aligned}&|u_0 v_0| + |u_1 v_0 + u_0 v_1| + |u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2| + \ldots + \\ &\quad + |u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + \ldots + u_0 v_n| \leqq \\ &\quad \leqq |u_0| \, |v_0| + |u_0| \, |v_1| + \ldots + |u_0| \, |v_n| + \\ &\quad + |u_1| \, |v_0| + |u_1| \, |v_1| + \ldots + |u_1| \, |v_n| + \\ &\quad + |u_2| \, |v_0| + |u_2| \, |v_1| + \ldots + |u_2| \, |v_n| + \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + |u_n| \, |v_0| + |u_n| \, |v_1| + \ldots + |u_n| \, |v_n| = \\ &= (|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n|)(|v_0| + |v_1| + \ldots + |v_n|) \leqq \\ &\leqq BC,\end{aligned}$$

което ни учи, че редицата от частичните суми на реда

$$|u_0 v_0| + |u_1 v_0 + u_0 v_1| + |u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2| + \ldots$$

е ограничена. Това е достатъчно, за да твърдим, че редът (3) е абсолютно сходящ.

Общи задачи

1. Нека редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е сходяща и клони към a. Да се покаже, че редът $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ е сходящ и сумата му е a.

2. Да се покаже, че редът

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$$

е сходящ и сумата му е $\frac{1}{2}$.

Упътване. Използувайте, че

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

3. Да се покаже, че редът

$$\frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{7.10.13} + \ldots + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} + \ldots$$

е сходящ, и да се пресметне сумата му.

Упътване. Използувайте, че

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} - \frac{1}{(3n+4)(3n+7)}\right].$$

4. Нека $a_n \geq 0$. Покажете, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}$$

е сходящ.

Упътване. Използувайте, че

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)} = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_{n-1})(1+a_n)}.$$

5. Покажете, че при $b > a > 0$ редът

$$\frac{1}{b} + \frac{a}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)(b+2)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)(b+3)} + \ldots$$

е сходящ и сумата му е $\frac{1}{b-a}$.

Упътване. Използувайте тъждеството

$$\frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n+1)} =$$

$$= \left[\frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)} - \frac{a(a+1)\ldots(a+n)(a+n+1)}{b(b+1)\ldots(b+n)(b+n+1)}\right] \frac{1}{b-a}.$$

6. Покажете, че редът

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

е сходящ при $|x| \neq 1$ и

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{при } |x| < 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Упътване. Използувайте, че

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

7. Да се изследва дали са сходящи, или са разходящи редовете:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{3^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{1}{n+1}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \cdot \frac{1}{n+1}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}}$.

Упътване. Приложете някой от критериите за сходимост или разходимост на редове с положителни членове.

8. Да се изследва дали са сходящи или разходящи редовете:

a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^n}{n!}$.

9. Покажете, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)} \cdot \frac{1}{n+1}$$

е сходящ.

Упътване. Използувайте, че

$$\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 < \frac{k}{k-1}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

и следователно

$$\left(\frac{4.6\ldots 2n}{3.5\ldots(2n-1)} \cdot \frac{1}{n+1}\right)^2 < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}.$$

След това приложете критерия на Лайбниц, като докажете предварително, че членовете на реда намаляват монотонно по абсолютна стойност.

10. Покажете, че редът

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \ldots$$

е разходящ, при все че общият му член клони към нула и знаците на членовете му се сменят алтернативно.

Упътване: Нека S_n е n-тата частична сума на дадения ред. Покажете, че

$$S_{2n} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

11. Да се изследва при какви стойности на x (положителни или не) е сходящ редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}.$$

Упътване. Нека $U_n = \frac{n!\,x^n}{n^n}$. При $x \neq 0$ и $|x| < e$ приложете критерия на Даламбер за реда $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$. При $|x| \geq e$ покажете, че $|U_{n+1}| \geq |U_n|$ и следователно U_n не клони към нула.

12. Да се изследва при какви стойности на x (положителни или не) са сходящи следните редове:

$$a)\ 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots;$$

$$b)\ \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots;$$

$$c)\ 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots;$$

$$d)\ \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\ldots;$$

$$e)\ \frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

13. Да се изследва при какви стойности на x е сходящ редът

$$\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}+\ldots$$

Упътване. При $x>0$ използувайте критерия на Раабе и Дюамел. При $-1<x\leq 0$ използувайте критерия на Лайбниц, като вземете пред вид, че при $\alpha<1$

$$\frac{1.2\ldots n}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}=\left(1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1-\alpha}{\alpha+1}\right)\ldots\left(1+\frac{1-\alpha}{n+\alpha-1}\right)\geq$$

$$\geq 1+\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{1-\alpha}{\alpha+1}+\frac{1-\alpha}{\alpha+2}+\frac{1-\alpha}{\alpha+3}+\ldots+\frac{1-\alpha}{n+\alpha-1}.$$

При $x\leq -1$ общият член не клони към нула.

14. Да се покаже, че $\lim\frac{x^n}{n!}=0$.

Упътване. Покажете, че редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ е сходящ. От това ще следва, че общият му член клони към нула.

15. Да се покаже, че

$$\lim\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=0 \text{ при } |x|<1.$$

16. Нека редът

$$u_1+u_2+\ldots$$

е сходящ. Докажете, че ако редицата с общ член nu_n е сходяща, границата ѝ е равна на нула.

Упътване. Извършете доказателството от противното, като разгледате отделно случая, когато $\lim nu_n>0$, и отделно случая, когато $\lim nu_n<0$. В първия случай изберете едно положително число ε, по-малко от $\lim nu_n$, и използувайте, че при всички достатъчно големи стойности на n имаме $nu_n>\varepsilon$, т. е. $u_n>\frac{\varepsilon}{n}$. Аналогично разглеждайте случая, при който $\lim nu_n<0$.

Забележка. Може да се случи редът $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ да е сходящ, но nu_n да не клони към никаква граница. Такъв е случаят с реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Може да се покаже дори пример на сходящ ред $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с неотрицателни членове, при който произведението nu_n не клони към никаква граница. Достатъчно е да положим $u_n=\frac{1}{n^2}$, когато n не е точен квадрат, и $u_n=\frac{1}{n}$, когато n е точен квадрат.

17. Ако редът

$$u_0+u_1+u_2+\ldots$$

е сходящ, то редицата с общ член

$$a_n=\frac{u_1+2u_2+\ldots+nu_n}{n}$$

клони към нула.

Упътване. Използувайте, че

$$a_n=S_n-\frac{S_0+S_1+\ldots+S_{n-1}}{n},\ \text{където } S_k=u_0+u_1+\ldots+u_k.$$

18. Нека редът $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ е сходящ и редицата

$$p_0, p_1, p_2, \ldots$$

монотонно дивергира към $+\infty$. В такъв случай редицата с общ член

$$a_n=\frac{p_0u_0+p_1u_1+\ldots+p_nu_n}{p_n}$$

клони към нула.

Упътване. Нека

$$S_k=u_0+u_1+\ldots+u_k.$$

Използувайте, че

$$a_n=S_n-\frac{(p_1-p_0)S_0+(p_2-p_1)S_1+\ldots+(p_n-p_{n-1})S_{n-1}}{p_n}.$$

19. Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ е сходящ и редицата $u_1, u_2, u_3, \ldots$ монотонно намалява, то nu_n клони към нула.

Упътване. Нека ε е произволно положително число. Да изберем n толкова голямо, че при всички цели положителни стойности на $k>n$ да имаме

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_k<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В такъв случай имаме

$$(k-n)u_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

и следователно при $k > 2n$

$$ku_k < \varepsilon.$$

20. Нека е даден редът с положителни членове $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. При критерия на Раабе и Дюамел се разглежда редицата с общ член $n\alpha_n$, където α_n се определя от равенството

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}.$$

Докажете, че ако редицата с общ член $n\alpha_n$ е сходяща и $\lim n\alpha_n > 1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ; ако ли пък $\lim n\alpha_n < 1$, редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ.

21. Нека редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, членовете на който са положителни, е разходящ и нека $s_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$. Да се докаже, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{s_n}$$

е разходящ (Абел).

Упътване. Използувайте, че

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{u_\nu}{s_\nu} > \frac{1}{s_{n+p}} \sum_{\nu=n+1}^{n+p} u_\nu = \frac{s_{n+p}-s_n}{s_{n+p}} =$$

$$= 1 - \frac{s_n}{s_{n+p}}$$

и следователно каквото и да бъде цялото положително число n, винаги можем да изберем p толкова голямо, че да имаме

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{u_\nu}{s_\nu} > \frac{1}{2}.$$

22. За да бъде сходящ един ред

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

с положителни членове, необходимо и достатъчно е да съществува такава редица

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

от положителни числа, че да бъдат изпълнени неравенствата

$$b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} \geq 1$$

(критерий на Кумер).

Упътване. За да покажете, че условието на Кумер е достатъчно, използувайте, че

$$b_n a_n - a_{n+1} b_{n+1} \geqq a_n > 0$$

и следователно редицата с общ член $a_n b_n$, монотонно намалявайки, клони към някаква граница. Оттук заключете, че редът

$$(1) \qquad \Sigma\,(b_n a_n - a_{n+1} b_{n+1})$$

е сходящ. Сравнете реда Σa_n с реда (1).

За да покажете, че условието на Кумер е необходимо, положете

$$b_n = \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu}{a_n}.$$

23. Получете достатъчните условия за сходимост на Даламбер и Раабе — Дюамел като следствие от критерия на Кумер.

Упътване. Положете

$$b_n = b_1 \text{ и } b_n = nb_1.$$

24. Ако редицата

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

клони към нула, като монотонно намалява, и ако редицата от частичните суми на реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ограничена, то редът

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n + \ldots,$$

е сходящ (Абел).

Упътване. Нека

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \text{ и } |s_n| \leqq A.$$

В такъв случай

$$|a_{n+1}\alpha_{n+1} + a_{n+2}\alpha_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\alpha_{n+p}| = |(s_{n+1}-s_n)\alpha_{n+1} +$$
$$+ (s_{n+2}-s_{n+1})\alpha_{n+2} + \ldots + (s_{n+p}-s_{n+p-1})\alpha_{n+p}| = |-s_n\alpha_{n+1} +$$
$$+ s_{n+1}(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}) + s_{n+2}(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3}) + \ldots + s_{n+p-1}(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}) +$$
$$+ s_{n+p}\alpha_{n+p}| \leqq |s_n\alpha_{n+1}| + |s_{n+1}|(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}) + |s_{n+2}|(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3}) + \ldots +$$
$$+ |s_{n+p-1}|(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}) + |s_{n+p}|\alpha_{n+p} \leqq A\alpha_{n+1} + A(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}) +$$
$$+ A(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3}) + \ldots + A(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}) + A\alpha_{n+p} = 2A\alpha_{n+1}.$$

25. Ако $a_n > 0$ и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{A}{n^2},$$

където A не зависи от n, то редът

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

е разходящ.

Упътване. Нека

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}.$$

Покажете, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sigma_n}$ е разходящ, като използвате зад. 21. Като вземете пред вид, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{n} = 0,$$

установете, че при достатъчно големи стойности на n имаме,

$$\frac{(n-1)\sigma_{n-1}}{n\sigma_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n\sigma_n}\right) < 1 - \frac{1}{n} - \frac{A}{n^2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

т. е. $a_{n+1} \geq \frac{k}{n\sigma_n}$, където k не зависи от n.

26. Да се изследва кога е сходящ и кога е разходящ хипергеометричният ред

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \ldots,$$

където α, β, γ са различни от $0, -1, -2, -3, \ldots$

27. Умножете двата реда

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots$$

по правилото на Коши.

28. Покажете, че произведението (по правилото на Коши) на двата разходящи реда

$$1 - \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \ldots,$$

$$1 + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\left(2^2 + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2\left(2^3 + \frac{1}{2^4}\right) + \ldots$$

е абсолютно сходящ ред

$$1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots$$

29. Покажете, че достатъчното условие на Даламбер (в по-общата му форма) за сходимост на ред $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положителни членове е еквивалентно с условието

$$\overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

а достатъчното условие на Коши е еквивалентно с условието

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} < 1.$$

Покажете, че критерият на Коши е по-силен от критерия на Даламбер в смисъл, че

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

но положителните числа u_n могат да се изберат така, че да имаме

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} < 1, \qquad \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

30. Казваме, че един ред

(2) $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

е сумируем по метода на Чезаро, ако редицата

$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

от частичните му суми е лимитируема с помощта на средни аритметични, т. е. ако редицата с общ член

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$$

е сходяща.

Да се покаже, че ако редът (2) е сумируем по метода на Чезаро и ако произведението nu_n клони към нула, когато n расте неограничено, то той е сходящ.

Упътване. Използувайте, че

$$s_{n+1} - \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = \frac{u_2 + 2u_3 + 3u_4 + \ldots + nu_{n+1}}{n}.$$

31. Ако редът

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

е сходящ, а редицата

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

расте монотонно и неограничено, то

$$\lim \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k = 0$$

(Л. Кронекер).

33. Нека редът

(3) $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

е условно сходящ. Да се покаже, че каквото и да бъде числото A, винаги е възможно така да се разместят членовете на този ред, че да се получи ред със сума A. Възможно е също тъй да се разместят членовете и така, че да се получи разходящ ред.

Упътване. Покажете, че редът (3) притежава както безбройно много неотрицателни членове

$$v_1, v_2, v_3, \ldots,$$

така и безбройно много отрицателни членове

$$-w_1, -w_2, -w_3, \ldots$$

Покажете след това, че двата реда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

и

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$$

са разходящи. Покажете, че съществува цяло положително число n, за което

$$v_1+v_2+\ldots+v_n > A.$$

Нека n_1 е най-малкото такова число. Покажете, че съществува цяло положително число m, за което

$$v_1+v_2+\ldots+v_{n_1}-w_1-w_2-\ldots-w_m < A.$$

Нека m_1 е най-малкото такова число. Означаваме с n_2 най-малкото цяло число, по-голямо от n_1, за което

$$v_1+v_2+\ldots+v_{n_1}-w_1-w_2-\ldots-w_{m_1}+v_{n_1+1}+v_{n_1+2}+\ldots+v_{n_2} > A$$

и т. н. Покажете, че редът

$$v_1+v_2+\ldots+v_{n_1}-w_1-w_2-\ldots-w_{m_1}+v_{n_1+1}+\ldots+v_{n_2}-\ldots$$

е сходящ и сумата му е A, като използвате, че двете редици

$$v_{n_1}, v_{n_2}, v_{n_3}, \ldots$$

и

$$w_{m_1}, w_{m_2}, w_{m_3}, \ldots$$

клонят към нула.

По подобен начин покажете, че в реда (3) могат така да се разместят членовете, че да се получи разходящ ред.

ЧАСТ II

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

ГЛАВА I

ФУНКЦИИ НА ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

§ 1. Функционална зависимост

Нека е дадено множество M от реални числа. Казваме, че в множеството M е дефинирана една функция, ако на всяко число от M е съпоставено по едно число.

За да изразим, че на всяко число x от едно множество M сме съпоставили по едно число y, пишем кратко

$$y=f(x) \text{ (четете — игрек равно на еф икс).}$$

или пък $y=\varphi(x)$, $y=g(x)$ и пр.

Знакът (в случая x), който служи за общо означаване на числа, принадлежащи на M, се нарича аргумент или независима променлива, а знакът (в случая y или $f(x)$ и пр.), с който означаваме съпоставените стойности, се нарича функция. Множеството M, в което е дефинирана функцията, се нарича дефиниционна област или област на съществуване на функцията.

Пример 1. Нека на всяко число x от интервала $-1 \leq x \leq 1$ съпоставим числото x^2. По този начин ние сме дефинирали една функция в затворения интервал $[-1, 1]$. Нека означим с $f(x)$ тази функция. При всяко x от затворения интервал $[-1, 1]$ е казано какво означава $f(x)$, Така например $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. Напротив, $f(2)$ няма никакъв смисъл, защото ние сме казали какво означава $f(x)$ само при $|x| \leq 1$.

2. Нека на всяко число x съпоставим числото x^2. Така ние сме дефинирали една функция за всяка стойност на x. Сега се касае за една функция, различна от функцията в първия пример (двете функции имат различни дефиниционни области).

3. Нека под $\varphi(x)$ разбираме x^2 при $|x| \leq 1$ и $\varphi(x)=2$ при $|x|>1$. С това ние сме дефинирали една функция за всяко x без изключение.

4. Нека под $g(x)$ разбираме числото x, когато $x \geqq 0$, а $-x$, когато $x<0$. С това ние сме дефинирали една функция на x при всички стойности на x. Както знаем вече, тази функция се означава кратко със знака $|x|$ и се нарича абсолютна стойност на x.

5. Нека $f(x)=1$ за всички рационални стойности на x и $f(x)=0$ за всички ирационални стойности на x. Дефиниционната област на тази функция се състои от всичките реални числа.

6. Нека M е множеството от онези стойности на x, за които уравнението $y^2=x$ притежава (поне едно) реално решение. Множеството M очевидно не е празно (то съдържа например числото 1). Нека на всяко число x от M съпоставим всичките решения на уравнението $y^2=x$. С това например на числото $x=4$ са съпоставени двете числа 2 и -2. Така установеното съответствие не дефинира функция, защото не е еднозначно.

7. Нека M е множеството от онези стойности на x, за които уравнението $y^2=x$ притежава (поне едно) реално решение. Разбира се, ако $y^2=x$, то и $|y|^2=x$, т. е. ако x принадлежи на M, уравнението $y^2=x$ има сигурно и неотрицателно решение. Това неотрицателно решение е единствено, защото от $0 \leqq y_1 < y_2$ следва $y_1^2 < y_2^2$ и следователно при $0 \leqq y_1 < y_2$ не може да имаме $y_1^2 = y_2^2$.

Ако на всяко x от M съпоставим единственото неотрицателно решение на уравнението $y^2=x$, то с това дефинираме една функция (установеното съответствие е еднозначно!) в множеството M. Така дефинираната функция се означава със символа $\sqrt{x}$. Дадената дефиниция може да се резюмира така: под $\sqrt{x}$ (където x принадлежи към M) се разбира (единственото) число y, което удовлетворява равенството $y^2=x$ и неравенството $y \geqq 0$. Впоследствие ние ще покажем, че множеството M в същност не е нищо друго освен множеството от неотрицателните числа.

Полезно е да се знае, че

$$(\sqrt{x})^2 = x \text{ при } x \geqq 0$$

и

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

за всички стойности на x без изключение. Верността на първото твърдение е ясна: числото $\sqrt{x}$ ние дефинирахме като (неотрицателното) решение на уравнението $y^2=x$. Замествайки y с $\sqrt{x}$, получаваме $(\sqrt{x})^2=x$. Тъждеството $\sqrt{x^2}=|x|$ може да се установи така: числото $y=\sqrt{x^2}$ се дефинира като число y, което удовлетворява равенството $y^2=x^2$ и неравенството $y \geqq 0$. Очевидно $|x|$ е едно такова число, защото $|x|^2=x^2$ и $|x| \geqq 0$. Както вече знаем, друго число с тези свойства не може да има.

8. Нека на всяко цяло положително число n съпоставим числото $1.2.3\ldots n$. По този начин ние получаваме една функция, дефинирана за всички цели положителни стойности на n и само за тях. Тази функция се означава обикновено със символа $n!$ (четете n факториел). Така например $4!=1.2.3.4=24$. Ние често ще срещаме в бъдеще тая функция.

9. Общият член a_n на една редица

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

от числа представлява функция, дефинирана за цели положителни стойности на аргумента n. (Понятието редица може да се дефинира като функция, чиято дефиниционна област е множеството от целите положителни числа.)

В бъдеще често ще използуваме стандартни означения за някои важни функции. Така например под $\sin x$ ще разбираме функция, дефинирана при всяко x като ордината на точка P от равнината XOY, която се намира на разстояние 1 от началото O на координатната система, за която лъчът OP сключва с положителната част на абсцисната ос ъгъл, чиято радианна мярка е x. Последните думи означават, че за мярка на ъгъла се избира частното на дължината на дъгата, принадлежаща на този ъгъл, от коя да е окръжност с център във върха на ъгъла към радиуса на тази окръжност. Аналогично се дефинира функцията $\cos x$. Под $\operatorname{tg} x$ ще разбираме функция, дефинирана чрез равенството

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

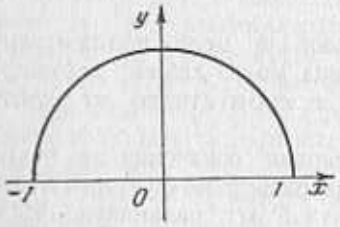
при онези и само при онези стойности на x, за които $\cos x \neq 0$, и пр. Нека изрично кажем, че дефиниционната област на тези функции се посочва, разбира се, още при дефиницията им, поради което ние ще я считаме за известна. Така например дефиниционната област на функцията $\frac{1}{x}$ е съставена от всички реални числа с изключение на нулата, дефиниционната област на функцията $\sqrt{x}$ е множеството от неотрицателните числа и пр.

§ 2. Графика на една функция

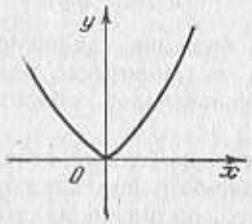
Нека $f(x)$ е една функция, дефинирана в някое точково множество M. Множеството от точките в равнината на една правоъгълна координатна система XOY с координати $(x, f(x))$, където x се мени в M, се нарича графика на функцията $f(x)$ или крива с уравнение $y=f(x)$. Така например графиката на функцията $y=\sqrt{1-x^2}$, където x се мени в интервала $-1 \leqq x \leqq 1$, е една полуокръжност с център в началото

на координатната система и радиус 1. Графиката на тази функция е изобразена на черт. 1.

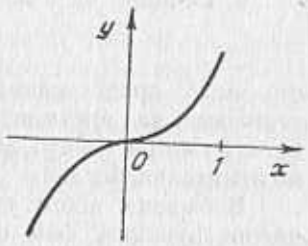
На черт. 2 е изобразена графиката на функцията $y=x^2$, дефинирана с това уравнение при всички стойности на x.



Черт. 1



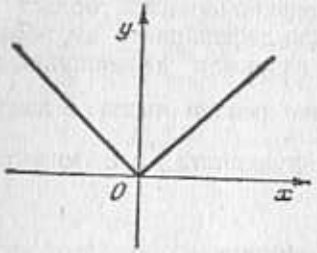
Черт. 2.



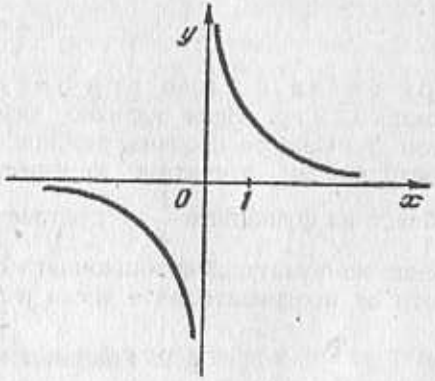
Черт. 3

На черт. 3 е изобразена графиката на функцията $y=x^3$, дефинирана с това уравнение при всички стойности на x.

На черт. 4 е изобразена графиката на функцията $y=|x|$, дефинирана с това уравнение при всички стойности на x.



Черт. 4



Черт. 5

На черт. 5 е изобразена графиката на функцията $y=\frac{1}{x}$, дефинирана с това уравнение за всички стойности на x, които са различни от нула.

§ 3. Ограничени функции

Една функция се нарича ограничена отгоре (отдолу), когато множеството от функционалните ѝ стойности е ограничено отгоре (отдолу). Една функция се нарича ограничена, когато тя е ограничена и отгоре, и отдолу. Така например функцията $f(x)=x^3$ при $0\leq x\leq 1$ е ограничена. Напротив, функцията $g(x)=\frac{1}{x}$ при $0<x\leq 1$, макар и да е ограничена отдолу, не е ограничена отгоре. И наистина, колкото и голямо положително число L да вземем, измежду функционалните стойности на $g(x)$ има по-големи от L. За да получим такава функционална стойност, достатъчно е да вземем $x<\frac{1}{L}$. Нека отбележим изрично, че функцията $g(x)$ е добре дефинирана в интервала $0<x\leq 1$, защото точката 0 не е причислена към този интервал.

Ако една функция е ограничена отгоре, тя притежава съгласно принципа за непрекъснатост точна горна граница (най-малката от горните граници). Точната горна граница на една функция обаче не е задължена да бъде една функционална стойност на тая функция. Това може да се види при следния прост пример. Нека дефинираме функция $\varphi(x)$ в отворения интервал $0<x<1$ с условието $\varphi(x)=x$; тази функция е ограничена (точната ѝ горна граница е 1), но никоя от функционалните ѝ стойности не е равна на 1. В този пример функцията е дефинирана в един отворен интервал. За да имаме пример на една ограничена функция, която е дефинирана в един затворен интервал и въпреки това не достига точната си горна граница, нека означим с $[x]$ (четете „скобка x") най-голямото цяло число, което не надминава x. Така $\left[2\frac{1}{2}\right]=2$, $[5]=5$, $[\pi]=3$, $\left[-1\frac{1}{2}\right]=-2$ и пр. Нека $\psi(x)=x-[x]$ при $0\leq x\leq 1$. Тази функция е ограничена. При $0\leq x<1$ имаме $[x]=0$, т. е. $\psi(x)=x<1$. При $x=1$ имаме $\psi(1)=1-[1]=1-1=0$, т. е. и в тоя случай $\psi(1)<1$. Очевидно числото 1 е една горна граница за функцията $\psi(x)$. Това е и най-малката от горните граници, защото функцията $\psi(x)$ е способна да приема стойности, произволно близки до 1 (имаме $\psi(x)=x$ при $0\leq x<1$). Функцията $\psi(x)$ обаче не достига тая своя точна горна граница при никаква стойност на x; ние видяхме, че имаме винаги $\psi(x)<1$, дори при $x=1$.

Разбира се, аналогична забележка е в сила и за точната долна граница на една функция.

§ 4. Граници на функции

Нека $f(x)$ е една функция, дефинирана в някое множество M от точки, и нека x_0 е една такава точка (която може и да не принадлежи на M), във всяка околност на която има точки от M, различни от x_0.

Казваме, че функцията $f(x)$ притежава граница при x, клонящо към x_0 (чрез стойности, различни от x_0), когато при всеки избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

от стойностите на аргумента, принадлежащи на дефиниционната област M, различни от x_0 и клонящи към x_0, съответната редица

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$$

от функционалните стойности е сходяща (какво значи една редица от числа да бъде сходяща, ние знаем).

Не е трудно да се убедим, че в такъв случай границата на редицата

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$$

не зависи от специалния избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

И наистина нека

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

$$x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots$$

са две редици от точки от M, различни от x_0 и клонящи към x_0. Ще покажем, че $\lim f(x_n) = \lim f(x_n^*)$. За да се убедим в това, вземаме под внимание, че редицата

$$x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, x_3, x_3^*, \ldots,$$

членовете на която са различни от x_0 и принадлежат на M, клони към x_0. В такъв случай, щом функцията $f(x)$ притежава граница, когато x клони към x_0 (чрез стойности, различни от x_0), редицата

$$f(x_1), f(x_1^*), f(x_2), f(x_2^*), f(x_3), f(x_3^*), \ldots$$

е сходяща и следователно двете нейни подредици

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$$

$$f(x_1^*), f(x_2^*), f(x_3^*), \ldots$$

клонят към една и съща граница.

И така нека функцията $f(x)$ притежава граница, когато x клони към x_0 (чрез стойности, различни от x_0). Независещата от специалния избор на числата x_n граница на редицата

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots,$$

когато числата x_n са различни от x_0, принадлежат на M и клонят към x_0, се нарича граница на функцията $f(x)$ при x, клонящо към x_0 (чрез стойности, различни от x_0).

За да изразим, че числото l е граница на една функция $f(x)$, когато x клони към x_0, пишем кратко $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (четете „лимес $f(x)$ при x, клонящо към x_0, е l").

Когато една функция $f(x)$ клони към l при x, клонящо към x_0, тогава при всеки избор на положителното число ε може да се намери такова положително число δ (евентуално зависещо от ε), че при всички стойности на x от дефиниционната област на функцията, различни от x_0, за които $|x - x_0| < \delta$, да е в сила неравенството

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

И наистина, ако допуснем противното, заключаваме, че има поне едно положително число ε_0, на което не може да се съпостави положително число δ с исканото свойство. Така, ако изберем $\delta = 1$, ще може да се намери число $x_1 \neq x_0$ (от дефиниционната област на функцията), за което да имаме $|x_1 - x_0| < 1$ и въпреки това $|f(x_1) - l| \geqq \varepsilon_0$. При $\delta = \frac{1}{2}$ също може да се намери някое число $x_2 \neq x_0$ така, че $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$, но $|f(x_2) - l| \geqq \varepsilon_0$, и т. н. Изобщо при $\delta = \frac{1}{n}$, където n е цяло положително число, има число $x_n \neq x_0$ в дефиниционната област на функцията, за което $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ и въпреки това

$$|f(x_n) - l| \geqq \varepsilon_0.$$

Така получихме една редица от числа

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

всички принадлежащи на дефиниционната област на функцията, различни от x_0 и клонящи към x_0 $\left(\text{поради } |x_n - x_0| < \frac{1}{n}\right)$, за които съответната редица от функционалните стойности

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$$

сигурно не клони към l (поради $|f(x_n) - l| \geqq \varepsilon_0$). Това обаче противоречи на нашето допускане, според което функцията $f(x)$ клони към l при $x \to x_0$. С това доказателството е завършено.

Сега ще покажем, че и обратното е в сила, т. е. ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$ така, че за всички стойности на $x \neq x_0$ от дефиниционната област на функцията, удовлетворяващи неравенството $|x - x_0| < \delta$, е изпълнено и неравенството $|f(x) - l| < \varepsilon$, то функцията $f(x)$ клони към l при $x \to x_0$. Това значи, че каквато и да е редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

от стойности на аргумента, принадлежащи на дефиниционната област на функцията, различни от x_0 и клонящи към x_0, съответната редица

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ldots$$

клони към l.

За да покажем това, избираме $\varepsilon > 0$. Нека $\delta > 0$ е съответното му число. Очевидно може да се намери число ν така, че при $n > \nu$ да имаме $|x_n - x_0| < \delta$ (защото числото δ е положително и $x_n \to x_0$). В такъв случай обаче $|f(x_n) - l| < \varepsilon$, което ни учи, че редицата с общ член $f(x_n)$ е сходяща и клони към l.

От направения анализ заключаваме, че на понятието граница на една функция можем да дадем още и следната дефиниция, която е напълно еквивалентна на дадената вече по-горе дефиниция:

Едно число l се нарича граница на една функция $f(x)$ при x, клонящо към x_0 чрез стойности, различни от x_0, ако на всяко положително число ε може да се съпостави положително число δ по такъв начин, че щом x е различно от x_0, принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворява неравенството $|x - x_0| < \delta$, да е изпълнено неравенството

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

В заключение ще дадем още следните дефиниции:

1. Казваме, че функцията $f(x)$ дивергира към $+\infty$ (или расте неограничено) при x, клонящо към x_0, и пишем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

когато при всеки избор на редицата от различните от x_0 точки

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,$$

които принадлежат към дефиниционната област на функцията $f(x)$ и клонят към x_0, съответната редица

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ldots$$

от стойностите на функцията расте неограничено.

2. Казваме, че функцията $f(x)$ дивергира към $-\infty$, когато x клони към x_0, и пишем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

ако

$$\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty.$$

§ 5. Граница на функции, когато аргументът клони към $+\infty$ или към $-\infty$

Нека в дефиниционната област M на една функция $f(x)$ има произволно големи числа. Ще казваме, че функцията $f(x)$ клони към l, когато x клони към $+\infty$, ако при всеки избор на редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$$

от стойности на аргумента, които принадлежат на M и растат неограничено, съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ldots$$

е сходяща и клони към l.

На тази дефиниция може да се даде още следната форма: ще казваме, че $f(x)$ клони към l, когато x клони (или дивергира) към $+\infty$, ако при всеки избор на положителното число ε може да се намери число A по такъв начин, че за всяко x, което принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворява неравенството $x > A$, да е изпълнено неравенството

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Предоставяме на читателя да докаже, че горните две редакции са наистина еквивалентни. Разсъжденията могат да се извършат съвсем аналогично на съответните разсъждения от § 4.

За да изразим, че $f(x)$ клони към l, когато x клони към $+\infty$, пишем

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

Казваме, че функцията $f(x)$ клони или дивергира към $+\infty$ при x, клонящо към $+\infty$, и пишем

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty,$$

ако при всеки избор на числото A може да се намери такова число B, че щом x принадлежи към дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворява неравенството $x > B$, да имаме $f(x) > A$. Нека припомним, че още в началото на този параграф предположихме, че в дефиниционната област на $f(x)$ има произволно големи числа.

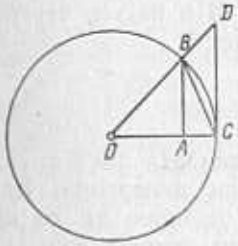
Аналогично се дефинират символите

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = l,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

където l е едно реално число. Нека читателят сам редактира съответните дефиниции.

§ 6. Границата на $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

Частното $\frac{\sin x}{x}$ е дефинирано при всички стойности на x, различни от нула (при $x=0$ това частно не е дефинирано, защото знаменателят става нула). Разбира се, няма смисъл да поставяме въпроса за пресмятане на стойността на това частно при $x=0$ (за тази стойност на x то не е дефинирано), но има смисъл да изследваме дали това частно има граница, когато x клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула). Тук ще докажем, че $\frac{\sin x}{x}$ притежава граница при $x \to 0$ и когато ъгълът е измерен в радиани*,



Черт. 6

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

За целта ще се възползуваме от неравенствата

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

валидни при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ето как могат да се докажат тези неравенства. От чертеж 6 се вижда, че лиц. $\triangle\, OCB <$ лиц. сект. $OCB <$ лиц. $\triangle\, OCD$, или

$$\frac{1}{2} OC \,.\, AB < \frac{1}{2} OC \,.\, \overset{\frown}{CB} < \frac{1}{2} OC \,.\, CD.$$

Нека радиусът на окръжността е r и ъгълът COB, измерен в радиани, е x. В такъв случай

$$\frac{1}{2} r \,.\, r \sin x < \frac{1}{2} r \,.\, rx < \frac{1}{2} r \,.\, r \operatorname{tg} x$$

(имаме $\overset{\frown}{CB} = r \,.\, x$, понеже x е абсолютната мярка на $\sphericalangle COB$), т. е.

(1) $$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

* Да припомним, че това значи, че за мярка на ъгъла се избира частното на дъгата, принадлежаща на този ъгъл, от кой да е окръжност с център във върха на ъгъла, към радиуса на тази окръжност. Този начин на измерване на ъглите се нарича абсолютен.

Така абсолютната мярка на ъгъл от 90° е $\frac{\pi}{2}$, на ъгъл от 180° е π, на 360° е 2π и пр. Ъгъл, чиято абсолютна мярка е 1, се нарича радиан.

В бъдеще, ако изрично не е казано противното, ще измерваме ъглите винаги в радиани.

С това помощните неравенства са доказани. От тях получаваме

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

и

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

От друга страна, $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, т. е. $1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$ (понеже $\sin x < x$, виж (1)). И така ние получаваме

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Последното неравенство доказахме само за положителни стойности на x, по-малки от $\frac{\pi}{2}$, но то е вярно* и за отрицателни стойности на x, по-големи от $-\frac{\pi}{2}$, защото

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}.$$

Ако изберем произволно $\varepsilon > 0$ и означим с δ по-малкото от числата $\frac{\pi}{2}$ и ε, то при $|x| < \delta$ получаваме

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{|x| \,.\, |x|}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \,.\, \varepsilon < \varepsilon,$$

което ни учи, че $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ съществува и има стойност 1.

* Неравенството е вярно и за всички стойности на x, но ние няма да се спираме на това, защо то то няма да ни трябва поне засега.

Задачи

Да се намерят границите на следните функции:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{2x^3-3ax^2+a^3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-5x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^4-8x^2-9}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin x-\cos x}$.

10. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}.$$

Упътване. Докажете, че при $\sin\dfrac{x}{2^n}\neq 0$ имаме

$$a_n=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}.$$

11. Докажете, че $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x$

при $\sin x\neq 0$.

Упътване. Използувайте, че

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

12. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=\frac{\cos\dfrac{\pi}{2n}+\cos\dfrac{2\pi}{2n}+\cos\dfrac{3\pi}{2n}+\ldots+\cos\dfrac{n\pi}{2n}}{n}.$$

Упътване. Използувайте, че

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha\,.\,\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

13. Нека a е произволно реално число и b е число, за което $|b|<1$. Образуваме редицата

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,$$

за която първият член x_0 се избира произволно и

$$x_{n+1}=a+b\sin x_n.$$

Покажете, че тази редица е сходяща и границата ѝ удовлетворява уравнението $x=a+b\sin x$.

Забележка. Уравнението

$$x=a+b\sin x$$

се използува в небесната механика и се нарича уравнение на Кеплер.

Упътване. Покажете, че редът

$$x_0+(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_{n+1}-x_n)+\ldots$$

е сходящ, като се използувате от това, че

$$x_{n+1}-x_n=b\,(\sin x_n-\sin x_{n-1})=2\,b\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2},$$

следователно

$$|x_{n+1}-x_n|\leq|b|\,|x_n-x_{n-1}|.$$

§. 7 Непрекъснати функции

Може да се случи една функция $f(x)$ да не притежава граница, когато x клони към някоя точка x_0 (разбира се, за да има смисъл да поставяме въпроса за съществуване или несъществуване на $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, трябва във всяка околност на точката x_0 да има точка от дефиниционната област на функцията $f(x)$, различни от x_0). Такъв е например случаят с функцията, дефинирана при $x\neq 0$ с условието $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Тук $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не съществува, защото редицата от функционалните стойности

$$\frac{1}{x_1},\ \frac{1}{x_2},\ \frac{1}{x_3},\ldots$$

е неограничена и следователно не е сходяща, когато редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$$

от стойностите на аргумента клони към нула. Ако функцията $f(x)$ е дефинирана при $x=x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ съществува, когато $x\to x_0$ чрез стой-

ности, различни от x_0, от това още не следва, че $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Това ние можем да си уясним със следния пример. Да дефинираме $f(x)$ като сума на реда

$$f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}+\dots$$

за такива стойности на x, за които редът е сходящ. Очевидно редът е сходящ за всяко реално x. При $x\neq 0$ имаме

$$f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\dots=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{x^2(1+x^2)}{1+x^2-1}=1+x^2,$$

а при $x=0$ всичките членове на реда са нули и следователно $f(0)=0$. Функцията $f(x)$ притежава граница, когато x клони към нула чрез стойности, различни от нула, но

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\neq f(0).$$

Ние бихме могли да дадем и по-прост пример. Нека $\varphi(x)=x$ при $x\neq 0$ и $\varphi(0)=1$. Тогава очевидно $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0\neq\varphi(0)$.

Ако една функция $f(x)$ притежава граница, когато x клони към x_0 (чрез стойности, различни от x_0), и тая граница е равна на $f(x_0)$, казваме, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

Понякога се препоръчва да се дефинира понятието непрекъснатост така, че да се прилага и за случая, когато точката x_0 е изолирана.* Затова ние ще дадем следната дефиниция: Една функция $f(x)$ се нарича непрекъсната в една точка x_0 от дефиниционната си област, ако за всяка редица

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\dots$$

от стойности на аргумента, които принадлежат** на дефиниционната област на функцията $f(x)$ и клонят към x_0, съответната редица от функционалните стойности

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\dots$$

е сходяща.

* Това значи, че ние искаме да допуснем и такива точки x_0, около които има околности, несъдържащи други точки от дефиниционната област на функцията освен x_0.

** Тук не се иска да имаме непременно $x_n\neq x_0$. В нашия курс ще изхождаме от тази редакция на дефиницията.

Не е трудно да се убедим, че от сходимостта на редицата

$$f(x_1),\ f(x_2),\dots,\ f(x_n),\dots$$

при всички, клонящи към x_0 редици от стойности на аргумента, включително и онези, в които фигурира x_0, следва, че $\lim f(x_n)=f(x_0)$. И наистина, ако $\lim x_n=x_0$, то редицата

$$x_1,\ x_0,\ x_2,\ x_0,\ x_3,\ x_0,\ x_4,\dots$$

също клони към x_0 и следователно редицата

$$f(x_1),\ f(x_0),\ f(x_2),\ f(x_0),\ f(x_3),\ f(x_0),\dots$$

е сходяща. От това следва, че двете редици

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\dots$$
$$f(x_0),\ f(x_0),\ f(x_0),\dots$$

клонят към една и съща граница като подредици на една и съща сходяща редица, т. е. $\lim f(x_n)=f(x_0)$.

На дефиницията на понятието непрекъснатост може да се даде още и следната форма: една функция $f(x)$ се нарича непрекъсната в една точка x_0 от дефиниционната си област, когато на всяко положително число ε може да се съпостави положително число δ (евентуално зависещо от ε) така, че за всички точки x от дефиниционната област на функцията, за които $|x-x_0|<\delta$, да е изпълнено неравенството

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Както ще видим, последните две дефиниции на понятието непрекъснатост са еквивалентни помежду си.

Доказателство. Нека е дадено, че каквато и да е редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\dots$$

от точки, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и клонят към x_0, съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1),\ f(x_2),\dots$$

е сходяща и клони към $f(x_0)$. Ще докажем, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ така, че всеки път, когато е изпълнено неравенството $|x-x_0|<\delta$ и точката x принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$, да имаме

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Доказателството извършваме от противното, като допускаме, че има (поне едно) положително число ε_0, за което не е възможно да се

избере положително число δ с исканото свойство. В такъв случай, ако вземем $\delta = \frac{1}{n}$, където n е цяло положително число, можем да намерим точка x_n от дефиниционната област на $f(x)$, за която

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

но при все това

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geqq \varepsilon_0.$$

От друга страна, редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

както това се вижда от неравенството $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, клони към x_0 и според допускането редицата

$$f(x_1), f(x_2), \ldots$$

трябва да клони към $f(x_0)$, което не е възможно поради неравенството

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geqq \varepsilon_0.$$

С това исканото противоречие е получено.

Сега нека разгледаме обратния въпрос. Нека е дадено, че при всеки избор на положително число ε може да се намери положително число δ така, че ако $|x - x_0| < \delta$ и точката x принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$, да имаме

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ще докажем, че каквато и да е редицата от числата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и клонят към x_0 съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1), f(x_2), \ldots$$

е сходяща и клони към $f(x_0)$.

Нека

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

е една произволна редица от точки, принадлежащи на дефиниционната област на $f(x)$ и клонящи към x_0. Ще докажем, че $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и определяме δ така, че при $|x - x_0| < \delta$ да имаме

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

всеки път, когато x принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$. Избираме си след това числото ν така, че при $n > \nu$ да имаме $|x_n - x_0| < \delta$. Това е възможно, защото числото δ е положително и редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

клони към x_0. Но щом $|x_n - x_0| < \delta$, тогава

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Последното неравенство е изпълнено при всички цели положителни стойности на n, които са по-големи от ν. С това ние доказахме, че редицата

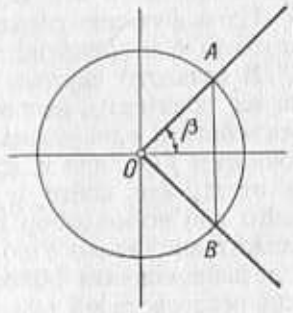
$$f(x_1), f(x_2), \ldots$$

е сходяща и клони към $f(x_0)$.

Пример. Функцията $f(x) = \sin x$, дефинирана за всички стойности на x, е непрекъсната за всяко x_0. За да докажем това, предварително ще установим неравенството

$$|\sin\alpha| \leqq |\alpha|.$$

При $|\alpha| \geqq \frac{\pi}{2}$ верността на това неравенство се вижда непосредствено, защото $|\sin\alpha| \leqq 1 < \frac{\pi}{2} \leqq |\alpha|$. Остава да се изучи случаят, когато $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Но в такъв случай $|\sin\alpha| = \sin|\alpha|$ и следователно имаме да установим неравенството $\sin\beta \leqq \beta$ при $\beta < \frac{\pi}{2}$, където сме положили $|\alpha| = \beta$ и следователно имаме $\beta \geqq 0$. Това неравенство може да се установи, като вземем под внимание, че (черт. 7)



Черт. 7

$$\overline{AB} \leqq \overset{\frown}{AB}$$

или

$$2 \,.\, OA \,.\, \sin\beta \leqq OA \,.\, 2\beta, \quad \text{т. е.} \quad \sin\beta \leqq \beta.$$

За да покажем непрекъснатостта на функцията $\sin x$ в една точка x_0, ползуваме се от неравенството

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leqq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot 1 = |x - x_0|.$$

Избираме едно положително число ε и полагаме $\delta = \varepsilon$. Тогава при $|x - x_0| < \delta$ имаме

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

С това непрекъснатостта на функцията $\sin x$ е установена при всеки избор на точката x_0. Аналогично се установява непрекъснатостта и на функцията $\cos x$ при всички стойности на аргумента.

Една функция се нарича прекъсната в една точка от дефиниционната си област, когато не е непрекъсната в тая точка. Нека изрично кажем, че за да има смисъл да се питаме дали една функция е непрекъсната в една точка x_0, трябва точката x_0 да принадлежи на дефиниционната област на функцията (в дефинициите, които дадохме, участвува $f(x_0)$ и следователно, за да можем да приложим коя да е от тия дефиниции, трябва да се знае какво означава $f(x_0)$). Така например въпросът, дали функцията $f(x)=\frac{1}{x}$, дефинирана при $x \neq 0$, е прекъсната, или не, при $x=0$ е лишен от смисъл. Тази функция не е дефинирана при $x=0$. Напротив, ако дефинираме функцията $f(x)$ с условията $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0)=1$, то тази функция е дефинирана при $x=0$ и в тази точка е прекъсната.

Една функция се нарича непрекъсната в едно множество от точки когато тя е непрекъсната във всяка точка в това множество.

В началото на този параграф ние дадохме още и такава дефиниция на понятието непрекъснатост: една функция $f(x)$ се нарича непрекъсната в една точка x_0 от дефиниционната си област, когато $f(x)$ клони към $f(x_0)$ при x, клонящо към x_0 чрез стойности, различни от x_0, или, което е същото, $f(x)$ се нарича непрекъсната в x_0, когато при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ по такъв начин, че при всички стойности на x от дефиниционната област на $f(x)$, различни от x_0 и удовлетворяващи неравенството $|x-x_0|<\delta$, е изпълнено неравенството

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Разбира се, тази дефиниция може да се прилага само когато във всяка околност на точката x_0 има точки от дефиниционната област на $f(x)$, които са различни от x_0. В такъв случай тя е еквивалентна с другите две дефиниции, които ние разгледахме в този параграф, защото неравенството

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

е изпълнено очевидно и при $x=x_0$.

§ 8. Свойства на непрекъснатите функции

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, дефинирани в някое точково множество M, и нека точката x_0 принадлежи на M. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в x_0, то функциите

$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)\,g(x) \tag{1}$$

са също непрекъснати в точката x_0. Ако освен това $g(x) \neq 0$ в M, то и функцията

$$\frac{f(x)}{g(x)} \tag{2}$$

е непрекъсната в точката x_0.

За да докажем това, разглеждаме произволна редица

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$$

от точки, които принадлежат на множеството M и клонят към x_0. В такъв случай, като вземем под внимание, че функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в x_0, заключаваме, че редиците

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ldots$$
$$g(x_1),\ g(x_2),\ g(x_3),\ldots$$

са сходящи. Оттук следва, че редиците

$$f(x_1)+g(x_1),\quad f(x_2)+g(x_2),\ldots$$
$$f(x_1)-g(x_1),\quad f(x_2)-g(x_2),\ldots$$
$$f(x_1)\,g(x_1),\quad f(x_2)\,g(x_2),\ldots$$

са също сходящи, а ако $g(x) \neq 0$ в M, то и редицата

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)},\ \frac{f(x_2)}{g(x_2)},\ldots$$

е сходяща. С това е показано, че функциите (1) и (2) са наистина непрекъснати в точката x_0.

Преминаваме към едно друго често използувано свойство на непрекъснатите функции. За тази цел ще дефинираме първо понятието функция от функция (или, както се казва често, сложна функция).

Нека $F(x)$ е една функция и M е нейната дефиниционна област. Ако всички функционални стойности на една функция $f(t)$ принадлежат на M, то както и да избираме t от дефиниционната област на $f(t)$, символът

$$F(f(t))$$

има смисъл. Стойността на този израз е еднозначно определена при всеки избор на t от дефиниционната област на $f(t)$. По този начин, като положим

$$\varphi(t)=F(f(t)), \tag{3}$$

получаваме една функция на t, която е дефинирана в същото множество, където е дефинирана и функцията $f(t)$. Така получената функция (3) се нарича функция от функция или сложна функция.

Ще покажем, че непрекъсната функция от непрекъсната функция е непрекъсната. По-точно ще покажем, че ако функцията $f(t)$ е непрекъсната в точката t_0, а функцията $F(x)$ е непрекъсната в точката $x_0=f(t_0)$ (и ако, разбира се, стойностите на $f(t)$ не напускат дефиниционната област на $F(x)$, когато t се мени), то функцията (3) е непрекъсната в точката t_0.

И наистина нека ε е произволно положително число. Избираме положителното число η по такъв начин, че ако $|x-x_0|<\eta$ и x принадлежи към дефиниционната област на $F(x)$, то $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$. След като е дефинирано положителното число η, избираме положителното число δ по такъв начин, че ако t принадлежи на дефиниционната област на $f(t)$ и $|t-t_0|<\delta$, да имаме

$$|f(t)-f(t_0)|<\eta$$

или, което е същото,

$$|f(t)-x_0|<\eta. \tag{4}$$

Щом обаче е изпълнено неравенството (4), ще имаме

$$|F(f(t))-F(x_0)|<\varepsilon$$

и следователно

$$|\varphi(t)-\varphi(t_0)|<\varepsilon,$$

с което е показано, че функцията (3) е непрекъсната в точката t_0.

В бъдеще ние често ще си служим и със следното свойство на непрекъснатите функции: ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в една точка x_0 от дефиниционната си област и $f(x_0)>0$, то може да се намери положително число δ по такъв начин, че за всички точки x от дефиниционната област на $f(x)$, за които $|x-x_0|<\delta$, да имаме $f(x)>0$. За да докажем това, избираме положителното число δ по такъв начин, че при всички стойности на x от дефиниционната област на $f(x)$, за които $|x-x_0|<\delta$, да имаме

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}f(x_0).$$

В такъв случай ще имаме

$$-\frac{f(x_0)}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{f(x_0)}{2}$$

и следователно

$$f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

По същия начин се установява, разбира се, че ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в x_0 и ако $f(x_0)<0$, то за всички стойности на x от

дефиниционната област на $f(x)$, които са достатъчно близо до x_0, имаме

$$f(x)<0.$$

И така ние установихме няколко съвсем прости свойства на непрекъснатите функции. Нека обърнем вниманието на читателя, че при доказателството ние не си служихме с принципа на непрекъснатост на множеството на реалните числа. Сега ще разгледаме няколко теореми, доказателствата на които съществено почиват на този принцип. Така ние често ще използуваме принципа за компактност, който получихме като следствие от теоремата на Болцано — Вайерщрас. Тази теорема ние получихме обаче като следствие от теоремата на Кантор, която от своя страна доказахме въз основа на принципа за непрекъснатост.

Теоремите, които ще разгледаме сега, се отнасят за функции, които са дефинирани и непрекъснати в така наречени компактни множества. Едно множество от точки се нарича компактно, когато е ограничено и когато всяка сходяща редица от точки, принадлежащи на това множество, клони към точка, която също принадлежи на това множество. Така например всеки краен и затворен интервал $a\leqq x\leqq b$ е компактно множество, защото това множество е ограничено и защото границата x_0 на всяка сходяща редица

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,$$

членовете на която удовлетворяват условието

$$a\leqq x_n\leqq b,$$

също удовлетворява условието

$$a\leqq x_0\leqq b,$$

както ни учи теоремата за граничен преход в неравенствата (вж. част I, глава II, § 6).

Теорема. Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество M, тя е ограничена (и отгоре, и отдолу).

Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в M, но не е ограничена. В такъв случай може да се намери число x_1 от M, за което $|f(x_1)|>1$, защото в противен случай бихме имали $|f(x)|\leqq 1$ навсякъде в M, т. е. функцията би била ограничена. Разсъждавайки по същия начин, заключаваме, че може да се намери число x_2, за което $|f(x_2)|>2$, и пр. Така ние получаваме една редица от числа

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots, \tag{5}$$

принадлежащи на M, за която $|f(x_n)|>n$. Редицата (5) е обаче ограничена (всичките ѝ членове се намират в компактното множество M)

и следователно можем да изберем от нея (вж. § 9 от гл. II) сходяща подредица

(6) $$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots,$$
$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$$

Нека ξ е границата на редицата (6). Тъй като всичките членове на редицата (6) принадлежат на компактното множество M, то и точката ξ лежи в него. От друга страна, функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната във всичките точки на множеството M, следователно тя е дефинирана и непрекъсната и в точката ξ. От това следва, че редицата

$$f(x_{m_1}), f(x_{m_2}), f(x_{m_3}), \ldots$$

е сходяща, нещо, което не е възможно, защото неравенствата

$$|f(x_{m_k})| > m_k \geqq k$$

ни учат, че тази редица не е ограничена (ние знаем, че всяка сходяща редица е ограничена). С това доказателството е завършено.

При доказателството ние съществено се възползувахме (къде?) от обстоятелството, че функцията е непрекъсната в едно компактно множество. Ако това условие е нарушено, не можем да твърдим, че функцията е ограничена. Така например функцията $f(x) = \frac{1}{x}$ е непрекъсната за всяко x от отворения интервал $0 < x < 1$, но тя не е ограничена в този интервал. Това, разбира се, не противоречи на теоремата, която току-що доказахме, защото множеството от точките, в което разглеждаме $f(x)$, не е компактно.

Теорема на Вайерщрас (Weierstrass). Измежду стойностите на една функция, дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество, има най-голяма и най-малка стойност.

Разбира се, всяко множество от краен брой числа има най-голямо и най-малко число. Но множеството на функционалните стойности на една функция, изобщо казано, е съставено от безбройно много числа, поради което съвсем не е ясно дали тя съдържа най-голям член, или не. Едно множество от безбройно много числа може да няма най-голям или най-малък член дори тогава, когато то е ограничено. Така например измежду числата, които образуват полузатворения интервал $0 \leqq x < 1$, има едно най-малко, но няма най-голямо число.

Ние вече знаем, че една непрекъсната функция е ограничена както отгоре, така и отдолу и следователно притежава точна горна и точна долна граница. Ние не знаем обаче дали тази функция достига точната си долна и точната си горна граница.

Функцията $f(x) = x$ при $0 \leqq x < 1$ е ограничена; точната ѝ горна граница е 1, а точната ѝ долна граница е нула. Тази функция достига

точната си долна граница, но не достига точната си горна граница (точката $x=1$ не е причислена към дефиниционния интервал).

Теоремата на Вайерщрас може да се формулира още така:

Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество M, то тя достига както точната си горна граница, така и точната си долна граница.

Това трябва да се разбира така: при изброените условия има точка x_1 от M, за която $f(x_1)$ е равно на точната горна граница на функцията, и точка x_2, за която $f(x_2)$ е равно на точната долна граница на функцията.

След тази предварителна бележка ще пристъпим към доказателството на теоремата на Вайерщрас. Нека $f(x)$ е една непрекъсната функция в компактното множество M и нека L е точната ѝ горна граница (функцията има точна горна граница, защото, както ние вече доказахме, тя е ограничена). Колкото и голямо да е цялото положително число n, числото $L - \frac{1}{n}$ не е горна граница на $f(x)$ (защото L е най-малката от горните граници) и следователно има поне едно число x_n от M, за което $f(x_n) > L - \frac{1}{n}$. По тоя начин ние добиваме възможност да дефинираме една редица от числа

(7) $$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

принадлежащи на M, за които са изпълнени неравенствата

(8) $$f(x_n) > L - \frac{1}{n}.$$

Редицата (7) е ограничена (защото множеството M е компактно) и следователно ние можем от нея да изберем сходяща подредица

(9) $$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots \ (n_1 < n_2 < n_3 < \ldots).$$

Да означим с ξ границата на тази редица. Тъй като множеството M е компактно и всичките членове на редицата (9) принадлежат на него, то границата ѝ ξ също принадлежи на M. Това ни дава основание да твърдим, че функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в точката ξ и следователно редицата

$$f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \ldots$$

е сходяща и клони към $f(\xi)$. От друга страна, имаме

(10) $$L - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqq L, \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

(Неравенствата $L - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k})$ следват от неравенствата (8), а неравенствата $f(x_{n_k}) \leqq L$ са изпълнени, понеже L е една горна граница на $f(x)$.)

Редицата с общ член $L-\frac{1}{n_k}$ е сходяща и клони към L. Редицата с общ член L е също сходяща и клони също към L. Това ни позволява да заключим с помощта на неравенствата (10), че редицата с общ член $f(x_{n_k})$ клони към L. От друга страна, ние знаем, че

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi),$$

откъдето заключаваме, че $f(\xi)=L$. Разбира се, $f(\xi)$ е най-голямата стойност на функцията, защото за всяка функционална стойност на $f(x)$ имаме $f(x)\leqq L$ и следователно $f(x)\leqq f(\xi)$ (понеже $f(\xi)=L$). С това доказателството е завършено.

Аналогично се установява и съществуването на най-малка функционална стойност.

Теорема. Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество M, то множеството N от функционалните стойности на $f(x)$ е също тъй компактно.

Доказателство. Ние вече знаем, че множеството N е ограничено, тъй като множеството M е компактно, а функцията $f(x)$ е непрекъсната в M. Остава да покажем, че границата y_0 на всяка сходяща редица

$$y_1, y_2, y_3, \ldots,$$

членовете на която принадлежат на N, също тъй принадлежи на N. Това можем да установим така. Тъй като y_n принадлежи на N, то ние можем да намерим поне една точка x_n от M, за която

$$f(x_n)=y_n.$$

Редицата

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

обаче е ограничена, защото членовете ѝ принадлежат на компактното множество M. Това ни дава възможност да изберем от нея сходяща подредица

$$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots \qquad (m_1 < m_2 < m_3 < \ldots).$$

Нека x_0 е границата на тази сходяща подредица. Точката x_0 принадлежи на M, защото множеството M е компактно. Функцията обаче е непрекъсната навсякъде в M и следователно е непрекъсната и в точката x_0, което ни дава

$$f(x_0)=y_0,$$

т. е. точката y_0 действително принадлежи на N, с което е показано, че множеството N е компактно.

Сега ще разгледаме друго важно свойство на непрекъснатите функции.

Теорема. Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$ и в краищата на този интервал приема стойности с противни знаци, то има поне една точка в интервала $[a, b]$, за която функцията се анулира.

Нека например $f(a)>0$ и $f(b)<0$ (аналогично се разглежда случаят, когато $f(a)<0$ и $f(b)>0$). Да означим с M множеството от онези точки x на интервала $[a, b]$, в които $f(x)>0$. Такива точки има. Такава е във всеки случай точката a. Множеството M е ограничено, защото лежи в крайния интервал $[a, b]$. Нека x_0 е точната горна граница на M. Както ще видим, точката x_0 принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$ и при това $f(x_0)=0$.

И наистина очевидно $a\leqq x_0$, защото точката a принадлежи на M, а x_0 е една горна граница на M. Също така $x_0\leqq b$, защото b е една горна граница на M, а x_0 е най-малката от горните граници на M. И така $a\leqq x_0\leqq b$, т. е. функцията $f(x)$ е дефинирана в точката x_0. Остава да покажем, че $f(x_0)=0$. Точката x_0 е най-малката от горните граници на M, следователно $x_0-\frac{1}{n}$ вече не е горна граница на M, колкото и голямо да е положителното число n. Това значи, че имаме поне една точка x_n от M, за която $x_n>x_0-\frac{1}{n}$. Разбира се, имаме $x_n\leqq x_0$, защото x_n принадлежи на M, а x_0 е една горна граница на M. Като даваме на n стойностите

$$1, 2, 3, \ldots,$$

получаваме редица, която клони към x_0, както това се вижда от току-що доказаните неравенства

$$x_0-\frac{1}{n}<x_n\leqq x_0.$$

Това ни дава право да твърдим,* че $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$. От друга страна, $f(x_n)>0$ (защото x_n принадлежи на M) и следователно

$$f(x_0)\geqq 0$$

(ако имахме $f(x_0)<0$, то числото $f(x_0)$ не би могло да бъде точка на сгъстяване за редицата $f(x_1), f(x_2), \ldots$).

Ние винаги можем да изберем в интервала $[a, b]$ една редица от числа

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots,$$

които не принадлежат на M и клонят към x_0. И действително, ако $x_0=b$, то достатъчно е да поставим $\xi_n=b$. Ако $x_0<b$, числата ξ_n из-

* Използуваме непрекъснатостта на $f(x)$ при $x=x_0$.

бираме произволно в отворения интервал (x_0, b), подчинявайки ги на единственото условие да клонят към x_0. Редицата

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

клони към x_0 и следователно (поради непрекъснатостта на $f(x)$ в точката x_0) имаме

$$\lim f(\xi_n) = f(x_0).$$

От друга страна, числата ξ_n не принадлежат на M, т. е. $f(\xi_n) \leqq 0$, нещо, което е достатъчно да твърдим, че и

$$f(x_0) \leqq 0.$$

И така получихме двете неравенства

$$f(x_0) \geqq 0 \text{ и } f(x_0) \leqq 0,$$

от което заключаваме, че $f(x_0) = 0$.

Доказаната теорема може да се формулира в малко по-обща форма по следния начин:

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и ако λ е едно число, заключено между $f(a)$ и $f(b)$, то има поне една точка x_0 в интервала $[a, b]$, за която $f(x_0) = \lambda$.

За да докажем това, образуваме помощната функция $\varphi(x) = f(x) - \lambda$. Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и в краищата на този интервал приема стойностите $\varphi(a) = f(a) - \lambda$ и $\varphi(b) = f(b) - \lambda$, които имат противни знаци, защото λ се намира между $f(a)$ и $f(b)$ (ако $f(a) < \lambda < f(b)$, то $\varphi(a) < 0$ и $\varphi(b) > 0$; ако ли пък $f(b) < \lambda < f(a)$, то $\varphi(a) > 0$ и $\varphi(b) < 0$). Това ни дава право да твърдим, че има поне една точка x_0 в интервала $[a, b]$, за която $\varphi(x_0) = 0$ и следователно

$$f(x_0) = \lambda.$$

§ 9. Равномерна непрекъснатост

Ние знаем кога една функция се нарича непрекъсната. Така не е трудно да се види, че функцията $f(x) = x^2$, дефинирана за всички стойности на x, е непрекъсната навсякъде. Това може да се покаже по следния начин: избираме произволно положително число ε и с δ означаваме по-малкото от двете числа 1 и $\frac{\varepsilon}{2|x|+1}$; в такъв случай от неравенството

$$|(x+h)^2 - x^2| = |2xh + h^2| \leqq (2|x| + |h|)|h|$$

заключаваме, че при $|h| < \delta$ имаме

$$|(x+h)^2 - x^2| < [2|x|+1]|h| < (2|x|+1)\frac{\varepsilon}{2|x|+1} = \varepsilon.$$

Числото δ, което съпоставихме по този начин на ε, зависи в дадения случай не само от ε, но и от x. Ние ще си зададем сега следния въпрос: може ли, след като е направен изборът на положителното число ε, да се намери независещо от x положително число δ така, че неравенството

$$|(x+h)^2 - x^2| < \varepsilon$$

да бъде изпълнено при всички стойности на x, щом $|h| < \delta$? Отговорът на този въпрос е отрицателен. И наистина, ако такова число би могло да се намери, то бихме имали например при $h = \frac{\delta}{2}$ и при всички стойности на x

$$\left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\left|\delta x + \frac{\delta^2}{4}\right| < \varepsilon$$

и толкова повече

$$\delta|x| - \frac{\delta^2}{4} < \varepsilon.$$

Това неравенство обаче сигурно е нарушено, ако $|x|$ е достатъчно голямо, защото δ е различно от нула.

Като друг пример да разгледаме функцията $\cos x$, дефинирана за всяко x. За да покажем, че тази функция е непрекъсната, избираме едно положително число ε и полагаме $\delta = \varepsilon$. В такъв случай от неравенството

$$|\cos(x+h) - \cos x| = -2\left|\sin\frac{h}{2}\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\right|$$

$$= 2\left|\sin\frac{h}{2}\right| \cdot \left|\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \leqq 2\left|\frac{h}{2}\right| \cdot 1 = |h|$$

заключаваме, че при $|h| < \delta$ имаме

$$|\cos(x+h) - \cos x| < \varepsilon \tag{1}$$

при всяко x. Ние можахме да изберем в този случай едно независещо от x положително число δ така, че неравенството (1) да е изпълнено за всяко x, щом $|h| < \delta$. Често тази особеност на непрекъснатата функция $\cos x$ изразяваме, като казваме, че тя е равно-

мерно непрекъсната. Изобщо казваме, че една функция $f(x)$ на независимата променлива x е равномерно непрекъсната в едно множество M от точки, когато на всяко положително число ε може да се съпостави такова положително число δ, евентуално зависещо от ε, но не и от x, че неравенството

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$$

да бъде изпълнено за всички стойности на x от M и за всички стойности на h, за които $|h|<\delta$ и точката $x+h$ принадлежи на M.

Ние вече видяхме, че не всяка непрекъсната функция е равномерно непрекъсната в дефиниционната си област. Ние ще докажем обаче сега следната важна теорема:

Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество M, тя е равномерно непрекъсната в M.

Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че има някое положително число ε, за което не е възможно да се избере положителното число δ така, че за всеки две числа x и x' от M, за които $|x-x'|<\delta$, да имаме $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. Това значи, че при всеки избор на δ могат да се намерят две числа x и x', за които, макар и да имаме $|x-x'|<\delta$, при все това $|f(x)-f(x')|\geqq\varepsilon$. Специално, ако изберем $\delta=\frac{1}{n}$, където n е цяло положително число, ще можем да намерим две числа x_n и x'_n от M, за които

$$|x_n-x'_n|<\frac{1}{n}, \tag{2}$$

но

$$|f(x_n)-f(x_n')|\geqq\varepsilon. \tag{3}$$

Като дадем на n стойностите 1, 2, 3, ..., добиваме възможност да дефинираме две редици от числа

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,$$
$$x_1',\ x_2',\ x_3',\ldots,$$

удовлетворяващи неравенствата (2) и (3).

Редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$$

е ограничена (тъй като всичките ѝ членове се намират в компактното множество M) и следователно от тази редица можем да изберем сходяща подредица

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ldots\ (n_1<n_2<n_3<\ldots).$$

Нека ξ е границата на тази подредица. Редицата

$$x'_{n_1},\ x'_{n_2},\ldots$$

е също така сходяща и клони към ξ, както това се вижда от неравенствата

$$|\xi-x'_{n_k}|=|(\xi-x_{n_k})+(x_{n_k}-x'_{n_k})|\leqq|\xi-x_{n_k}|+$$
$$+|x_{n_k}-x'_{n_k}|\leqq|\xi-x_{n_k}|+\frac{1}{n_k}.$$

От друга страна, точката ξ лежи в компактното множество M, защото тя е граница на редица от числа, които лежат в M. И така функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в точката ξ. Оттук заключаваме, че двете редици

$$f(x_{n_1}),\ f(x_{n_2}),\ldots,$$
$$f(x'_{n_1}),\ f(x'_{n_2}),\ldots \tag{4}$$

са сходящи и клонят към $f(\xi)$, тъй като двете редици

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ldots,$$
$$x'_{n_1},\ x'_{n_2},\ x'_{n_3},\ldots$$

клонят към ξ и функцията е непрекъсната в точката ξ. Двете редици (4) обаче не могат да клонят към обща граница, защото

$$|f(x_{n_k})-f(x'_{n_k})|\geqq\varepsilon.$$

И така ние достигнахме до противоречие, което се дължи на допускането, че функцията $f(x)$ не е равномерно непрекъсната в M.

§ 10. Осцилация на една функция

Ако една функция е ограничена (и отгоре, и отдолу), тя притежава точна горна граница M и точна долна граница m. Разликата $M-m$ се нарича осцилация на функцията. И така осцилация на една функция се нарича разликата между точната горна и точната долна граница на функцията.

Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$, то каквото и да бъде положителното число ε, може да се намери такова положително число δ, че всеки път, когато разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали

$$[a_0,\ a_1],\ [a_1,\ a_2],\ldots,\ [a_{n-1},\ a_n],$$

чиито дължини са по-малки от δ, с помощта на точките

$$a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}<a_n=b,$$

осцилацията на функцията $f(x)$ във всеки един от тях да бъде по-малка от ε.

Доказателството ще извършим по следния начин. Въз основа на теоремата за равномерна непрекъснатост ние можем да изберем положителното число δ така, че щом $|x-x'|<\delta$, да имаме

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

Нека дължината на всеки един от подинтервалите е по-малка от δ, т. е. $a_k-a_{k-1}<\delta$, $k=1, 2,\ldots, n$. Нека M_k е точната горна и m_k е точната долна граница на функцията в интервала $[a_{k-1}, a_k]$. Според теоремата на Вайерщрас има точка x'_k и точка x''_k от интервала $[a_{k-1}, a_k]$, за които

$$f(x'_k)=M_k,$$
$$f(x''_k)=m_k.$$

От друга страна, $|x'_k-x''_k|<\delta$, защото дължината на интервала $[a_{k-1}, a_k]$ който съдържа точките x'_k и x''_k, е по-малка от δ. Това ни дава основание да заключим, че

$$|f(x'_k)-f(x''_k)|<\varepsilon$$

или, което е същото,

$$M_k-m_k<\varepsilon.$$

С това всичко е доказано.

§ 11. Още една форма на дефиницията на понятието непрекъснатост

Нека $f(x)$ е една функция, която е непрекъсната в точката x_0 от дефиниционната ѝ област M. Ако

$$x'_1, x'_2,\ldots,$$
$$x''_1, x''_2,\ldots$$

са две произволни редици от числа, принадлежащи на M и клонящи към x_0, а редицата с общ член

$$f(x''_n)-f(x'_n)$$

клони към нула, както това се вижда от дефиницията на понятието непрекъснатост.

Това ние изразяваме накратко, като казваме, че разликата

$$f(x'')-f(x')$$

клони към нула, когато x' и x'' клонят независимо едно от друго към x_0 чрез стойности на дефиниционната област на $f(x)$.

Обратното твърдение е също така в сила. Това значи, че ако разликата

$$f(x''_n)-f(x'_n)$$

клони към нула при всеки избор на двете клонящи x_0 редици

$$x'_1, x'_2, x'_3,\ldots,$$
$$x''_1, x''_2, x''_3,\ldots$$

от числа, принадлежащи на дефиниционната област на $f(x)$, то функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

За нашите цели е важно, че може да се установи непрекъснатостта на $f(x)$ в дадена точка x_0 при по-малко ограничителни условия: за да се твърди, че $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, достатъчно е да се знае, че

$$\lim_{n\to\infty}[f(x''_n)-f(x'_n)]=0$$

поне за онези клонящи към x_0 редици

$$x'_1, x'_2, x'_3,\ldots,$$
$$x''_1, x''_2, x''_3,\ldots$$

от числа, принадлежащи на дефиниционната област на $f(x)$, които удовлетворяват неравенствата

$$x'_n\leqq x_0\leqq x''_n.$$

И наистина нека

$$x_1, x_2, x_3,\ldots$$

е произволна редица от числа, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и клонят към x_0. Означаваме с x'_n по-малкото от двете числа x_n и x_0, а с x''_n — по-голямото от тези числа. В такъв случай числата x'_n и x''_n принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ (защото x_n и x_0 имат това свойство) и удовлетворяват неравенствата $x'_n\leqq x_0\leqq x''_n$. Освен това двете редици

$$x'_1, x'_2, x'_3,\ldots,$$
$$x''_1, x''_2, x''_3,\ldots$$

са сходящи и клонят към x_0, както се вижда от лесно доказуемите равенства

$$x'_n=\frac{x_n+x_0-|x_n-x_0|}{2},$$

$$x''_n=\frac{x_n+x_0+|x_n-x_0|}{2}.$$

Дадено е обаче, че за всеки две редици

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ldots,$$

$$x''_1,\ x''_2,\ x''_3,\ldots,$$

които удовлетворяват изброените условия, имаме

$$\lim_{n\to\infty}[f(x''_n)-f(x'_n)]=0.$$

Като се възползуваме от равенството

$$|f(x_n)-f(x_0)|=|f(x''_n)-f(x'_n)|,$$

заключаваме, че

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0),$$

което показва, че функцията $f(x)$ е действително непрекъсната в точката x_0.

Направените разсъждения ни позволяват да формулираме по следния начин дефиницията на понятието непрекъснатост на една функция:

Казваме, че една функция $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 от дефиниционната си област, ако разликата

$$f(x'')-f(x')$$

клони към нула, когато оставим x' и x'' да клонят по произволен начин (т. е. чрез произволни редици от стойности) към x_0, като удовлетворяват неравенството $x'\leq x_0\leq x''$ и остават в дефиниционната област на $f(x)$.

Задачи

Забележка. Символът $[x]$ означава най-голямото цяло число, което не надминава x (срв. част II, § 3).

1. Покажете, че функцията $[x]$ се прекъсва при цели стойности на x и че при останалите стойности на x ти е непрекъсната.
2. Покажете, че функцията $f(x)=\sin\pi(x-[x])$ е непрекъсната при всяко x.
3. Покажете, че функцията $f(x)=[x]\sin\pi x$ е непрекъсната при всяко x.
4. Покажете, че функцията $f(x)=[x]^2-2x[x]+[x]$ е непрекъсната при всяко x.
5. Покажете, че функцията

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}[\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\,\pi x)]$$

е дефинирана при всяко x и при всяко x е прекъсната (Дирикле).

Упътване. Покажете, че при рационални стойности на x имаме $f(x)=1$, а при ирационални стойности на x имаме $f(x)=0$.

6. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана при $0<x\leq 1$ по следния начин: ако $x=\frac{p}{q}$, където p и q са две цели положителни взаимно прости числа, то $f(x)=\frac{1}{q}$; ако x е ирационално, то $f(x)=0$. Покажете, че функцията $f(x)$ е прекъсната при всички рационални стойности на x, но е непрекъсната при всички ирационални стойности на x в дефиниционния си интервал.

7. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана при $0<x\leq 1$ по следния начин: ако $x=\frac{p}{q}$, където p и q са две цели положителни взаимно прости числа, то $f(x)=q$; ако x е ирационално, то $f(x)=0$. Покажете, че функцията $f(x)$ не е ограничена в никой подинтервал на интервала $0<x\leq 1$.

8. Нека n е цяло положително число и $a\geq 0$. Покажете, че уравнението $x^n-a=0$ има поне едно неотрицателно решение, като използувате общите свойства на непрекъснатите функции. Читателят вече познава няколко доказателства на това твърдение; знае също така, че решението е единствено; тук се иска друго доказателство за съществуване, почиващо върху теорията на непрекъснатите функции.)

Упътване. Разглеждайте непрекъснатата функция $f(x)=x^n-a$ в крайния и затворен интервал $0\leq x\leq a+1$ и покажете, че $f(0)\leq 0$ и $f(a+1)>0$.

§ 12. Производна на функция

Нека е дадена една крива* с уравнение $y=f(x)$, където функцията $f(x)$ е дефинирана при $a<x<b$. Ще си поставим за задача да дефинираме понятието допирателна към кривата $y=f(x)$ в една точка от тази крива. Нека координатите на точката, която ни интересува, са $[x_0, f(x_0)]$, където, разбира се, $a<x_0<b$. Ако $[x_0+h,\ f(x_0+h)]$ са координатите на друга точка (т. е. такава, за която $h\neq 0$) от кривата, ние можем да напишем уравнението** на секущата, която съединява точките $[x_0, f(x_0)]$ и $[x_0+h, f(x_0+h)]$.

* Често, вместо да казваме „графика на функцията $y=f(x)$", ще казваме „крива с уравнение $y=f(x)$".

** Читателят знае, че графиката на всяка линейна функция $y=ax+b$ е права. Поради това често пъти уравнение от вида $y=ax+b$ се нарича уравнение на права. Променливите x и y се наричат текущи координати, а коефициентът a се нарича ъглов коефициент на правата.

Уравнението на тази права е*

$$\eta - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(\xi - x_0), \tag{1}$$

където с ξ и η сме означили текущите координати. Ние можем да напишем това уравнение, колкото и малко да е числото h, стига да е различно от нула и точката x_0+h да принадлежи на дефиниционната област на $f(x)$. Поради тази причина има смисъл да поставим въпроса, дали коефициентите в уравнението (1) клонят към някакви граници, когато h клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула).

За да притежават всичките коефициенти в уравнението (1) граници, необходимо и достатъчно е изразът

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

да притежава граница при $h \to 0$. Тази граница ще означим с $f'(x_0)$. Правата с уравнение

$$\eta - f(x_0) = f'(x_0)(\xi - x_0)$$

се нарича гранична права, към която клонят секущите (1) при $h \to 0$ или накратко — допирателна. И така допирателна (или тангента, както се казва понякога) към кривата $y=f(x)$ в точката $[x_0, f(x_0)]$ се нарича правата с уравнение

$$\eta - f(x_0) = f'(x_0)(\xi - x_0).$$

В бъдеще ние ще се ползуваме често от израза

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

---

* Ако $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ са две точки с различни абсциси, то графиката на линейната функция

$$y = ax+b, \text{ където } a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ и } b = y_1 - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1, \tag{*}$$

минава през двете точки P_1 и P_2, защото, както се вижда с прости пресмятания, тази линейна функция при $x=x_1$ приема стойността y_1, а при $x=x_2$ приема стойността y_2.

Често пъти уравнението (*) се пише във вида

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

или

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

(ако $y_2 \neq y_1$) и пр.

който е добре дефиниран, когато точките x_0 и x_0+h принадлежат на дефиниционната област на функцията $f(x)$ и h е различно от нула. При фиксирано x_0 този израз представлява една функция на h.

Разбира се, няма смисъл да се питаме каква е стойността на този израз при $h=0$. При $h=0$ той не е дефиниран, защото знаменателят става нула. Има смисъл да си зададем въпроса обаче, дали той притежава граница или не, когато h клони към нула чрез стойности, различни от нула. С няколко прости примера ще покажем, че има функции, за които

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

съществува, но има също функции, за които тази граница не съществува. Нека $f(x)=x^2$. В такъв случай

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} = 2x_0+h.$$

Очевидно в този случай интересуващата ни граница съществува при всички стойности на x_0 и има стойност $2x_0$.

Да разгледаме функцията $f(x)=|x|$ и да изберем $x_0=0$. В такъв случай

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{|h|}{h},$$

т. е.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 1 \text{ при } h>0 \text{ и } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -1 \text{ при } h<0.$$

Ако оставим h да клони към нула чрез една редица

$$h_1, h_2, h_3, \ldots$$

от стойности, която съдържа както безбройно много положителни, така и безбройно много отрицателни членове, заключаваме, че съответната редица от стойности на израза

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

не клони към никаква граница, защото има две точки на сгъстяване (безбройно много от нейните членове са равни на 1 и безбройно много други са равни на — 1, поради което точките 1 и — 1 са точки на сгъстяване на тази редица).

В основата на всичко, което ще следва в този курс, лежи следната дефиниция.

Нека във всяка околност на една точка x_0 от дефиниционната област M на една функция $f(x)$ има точки, принадлежащи на M, различни от x_0. Казваме, че функцията $f(x)$ е диференцуема* в точката x_0, ако изразът

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

притежава граница, когато h клони към нула чрез стойности, различни от нула, за които точката x_0+h не напуска дефиниционната област на $f(x)$.

Границата, към която клони изразът

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(когато функцията е диференцуема) при $h\to 0$, се нарича производна на функцията $f(x)$ при $x=x_0$.

Производната на функцията $y=f(x)$ в точката x обикновено ще означаваме със знака $f'(x)$ или y' (четете — еф прим, игрек прим). Употребяват се обаче и означенията

$$\dot{y},\ \frac{dy}{dx},\ Dy$$

и пр. (четете — игрек точка, де игрек де икс, де игрек и пр.).

Понятието допирателна към една крива $y=f(x)$ дефинирахме само в случая, когато в разглежданата точка функцията $f(x)$ е диференцуема. В такъв случай ъгловият коефициент на допирателната в една точка от кривата с абсциса x_0 е равен на стойността на производната $f'(x_0)$ в тази точка.

Сега ще покажем, че ако една функция е диференцуема в една точка, тя е непрекъсната в тази точка. За да докажем това, образуваме си помощната функция $\varphi(x)$ в дефиниционната област на $f(x)$ по следния начин:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0) \tag{2}$$

при $x\neq x_0$ и $\varphi(x_0)=0$.

В такъв случай получаваме

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\varphi(x)(x-x_0) \tag{3}$$

* Вместо да казваме, че $f(x)$ е диференцуема в една точка, често казваме, че $f(x)$ има производна в тази точка.

за всички стойности на x от дефиниционната област на $f(x)$. Тъй като

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

не е трудно да се види, че при произволен избор на редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,$$

която клони към x_0 и членовете на която принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$, съответната редица

$$\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\ \varphi(x_3),\ldots$$

клони към нула. Като вземем това пред вид, заключаваме с помощта на равенството (3), че $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(x_0)]=0$, т. е. редицата

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ldots$$

клони към $f(x_0)$, което показва, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

И така, ако една функция е диференцуема в една точка, тя е непрекъсната в тази точка.

Обратното не е вярно. И наистина функцията $f(x)=|x|$ е непрекъсната навсякъде, както това лесно може да се види, но ние видяхме, че тя няма производна при $x=0$. През миналия век Вайерщрас показа с един пример, че има функции, които са дефинирани и непрекъснати за всяко x, но за никое x нямат производна.

Нека пак $f(x)$ означава функция, която е диференцуема в точката x_0. Ако x' и x'' клонят независимо едно от друго към x_0 (чрез стойности от дефиниционната област на $f(x)$) по такъв начин, че

$$x'\leqq x_0\leqq x''\ \text{и}\ x''\neq x',$$

частното

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$$

клони към $f'(x_0)$.

Това твърдение трябва да се разбира така: каквито и да са двете клонящи към x_0 редици

$$x_1',\ x_2',\ x_3',\ldots,$$
$$x_1'',\ x_2'',\ x_3'',\ldots$$

от числа, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворяват неравенствата

$$x_n'\leqq x_0\leqq x_n'',\ x_n'\neq x_n'',$$

редицата с общ член

$$\frac{f(x''_n)-f(x'_n)}{x''_n-x'_n}$$

е сходяща и клони към $f'(x_0)$.

За да докажем това, ще се възползуваме от равенството (3). И така

$$f(x''_n)-f(x_0)=f'(x_0)(x''_n-x_0)+\varphi(x''_n)(x''_n-x_0),$$

$$f(x'_n)-f(x_0)=f'(x_0)(x'_n-x_0)+\varphi(x'_n)(x'_n-x_0).$$

Последните две равенства са валидни дори тогава, когато някое от двете числа x'_n и x''_n е равно на x_0. Като извадим почленно тези две равенства, получаваме

$$f(x''_n)-f(x'_n)=f'(x_0)(x''_n-x'_n)+\varphi(x''_n)(x''_n-x_0)+$$
$$+\varphi(x'_n)(x_0-x'_n)$$

или

$$\frac{f(x''_n)-f(x'_n)}{x''_n-x'_n}-f'(x_0)=\varphi(x''_n)\frac{x''_n-x_0}{x''_n-x'_n}+\varphi(x'_n)\frac{x_0-x'_n}{x''_n-x'_n}.$$

Избираме едно произволно положително число ε и определяме ν така, че при $n>\nu$ да имаме

$$|\varphi(x''_n)|<\varepsilon \text{ и } |\varphi(x'_n)<\varepsilon.$$

Това е възможно, понеже

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x''_n)=0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\varphi(x'_n)=0.$$

В такъв случай при $n>\nu$ имаме

$$\left|\frac{f(x''_n)-f(x'_n)}{x''_n-x'_n}-f'(x_0)\right|\leqq|\varphi(x''_n)|\frac{x''_n-x_0}{x''_n-x'_n}+|\varphi(x'_n)|\frac{x_0-x'_n}{x''_n-x'_n}<$$
$$<\varepsilon\frac{x''_n-x_0}{x''_n-x'_n}+\varepsilon\frac{x_0-x'_n}{x''_n-x'_n}=\varepsilon,$$

с което твърдението е доказано.

Нека подчертаем, че в доказателството ние използуваме съществено, че $x'_n\leqq x_0\leqq x''_n$ (къде?). Ако това условие не е изпълнено, може да се случи редицата с общ член

$$\frac{f(x''_n)-f(x'_n)}{x''_n-x'_n}$$

да не клони към $f'(x_0)$, макар $f(x)$ и да е диференцуема в точката x_0. За да се убедим в това, ние ще разгледаме функцията, дефинирана с условието

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$$

при $x\neq 0$ и с условието $f(0)=0$ при $x=0$. Тази функция е диференцуема при $x=0$ и $f'(0)=0$. И наистина при $h\neq 0$ имаме

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=h\sin\frac{1}{h}.$$

Но множителят $\sin\frac{1}{h}$ остава ограничен, когато h се мени. От това заключаваме, че произведението $h\sin\frac{1}{h}$ клони към нула заедно с h, което показва, че функцията $f(x)$ е диференцуема при $x=0$ и $f'(0)=0$.

Избираме

$$x'_n=\frac{2}{(4n+3)\pi} \text{ и } x''_n=\frac{2}{(4n+1)\pi}.$$

В такъв случай редицата с общ член

$$\frac{f(x''_n)-f(x'_n)}{x''_n-x'_n}=\frac{(4n+3)^2+(4n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)\pi}$$

клони към $\frac{2}{\pi}$, т. е. не клони към $f'(0)$.

Да означим пак с x_0 една точка от дефиниционната област на една функция $f(x)$. Ако изразът

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$$

клони към някаква граница l, когато x' и x'' клонят* към x_0 независимо едно от друго чрез стойности от дефиниционната област на $f(x)$ удовлетворявайки неравенствата

$$x'\leqq x_0\leqq x'',\ x'\neq x'',$$

то може да се твърди, че функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0 и $f'(x_0)=l$.

* Ние вече пояснихме по-горе в какъв смисъл трябва да се разбират тези думи

И наистина нека

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

е една произволна редица от числа, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворяват условията

$$x_n \neq x_0, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Нека по-малкото от числата x_n и x_0 означим с x'_n, а по-голямото — с x''_n. В такъв случай двете редици

$$x'_1, x'_2, x'_3, \ldots,$$
$$x''_1, x''_2, x''_3, \ldots$$

са сходящи и клонят към x_0 (вж. задача 2 към § 6 от глава II). Освен това очевидно числата x'_n и x''_n принадлежат на дефиниционната област на $f(x)$ и удовлетворяват неравенствата

$$x''_n - x'_n = |x_0 - x_n| \neq 0 \text{ и } x'_n \leqq x_0 \leqq x''_n.$$

Ако знаем, че редицата с общ член

$$\frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n}$$

е сходяща и клони към l, заключаваме с помощта на равенството

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n},$$

че функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0 и $f'(x_0) = l$.

Направените разсъждения ни дават възможност да дадем още и следната форма на дефиницията на понятието производна:

Функцията $f(x)$ е диференцуема в една точка x_0 от дефиниционната си област*, ако изразът

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

притежава граница l, когато x' и x'' клонят независимо едно от друго към x_0 чрез стойности от дефиниционната област на $f(x)$, удовлетворявайки условията

$$x' \leqq x_0 \leqq x'', \; x' \neq x''.$$

Границата l се нарича производна на $f(x)$ в точката x_0.

* Разбира се, тук трябва да се иска във всяка околност на x_0 да има точки от дефиниционната област на $f(x)$, които са различни от x_0.

§ 13. Механично значение на производната

Понятието производна е тясно свързано с понятието скорост. Решавайки задачата за определянето на скоростта на една неравномерно движеща се точка, Нютон достигна до понятието производна също както Лайбниц достигна до това понятие, решавайки задачата за допирателните.

Нека си мислим една точка M, която се движи по една права. Да изберем върху тая права една точка за начало на координатната система. В такъв случай положението на точката M се определя еднозначно с нейната абсциса. Движението на точката M считаме познато, когато абсцисата на точката M е дадена като функция на времето. Нека времето означим с t и нека $x = f(t)$ е абсцисата на точката M в момента t. Да разгледаме два момента t и t_0. В такъв случай, както знаем от механиката, изразът

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

се нарича средна скорост на точката M в интервала от време (t_0, t). (В случая, когато точката M се движи еднопосочно, разликата $|f(t) - f(t_0)|$ има много прост механичен смисъл: това е точно дължината на пътя, описан от точката M през интервала от време (t_0, t).)

Границата

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

се нарича скорост на точката M в момента t_0. Като вземем под внимание дефиницията на понятието производна, заключаваме, че скоростта в момента t_0 е $f'(t_0)$.

Пример. При равноускорителното движение на точка с абсциса x, когато в началния момент точката се намира в началото на координатната система, имаме $x = \frac{1}{2}qt^2 + v_0 t$, където q е ускорението и v_0 е началната скорост. За скоростта v в момента t получаваме $v = x' = qt + v_0$, както това се вижда от дефиницията на понятието производна.

§ 14. Елементарни свойства на производните

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат обща дефиниционна област M; нека точката x_0 принадлежи на M и нека във всяка околност на x_0 има точки от M, различни от x_0. Ако при тези предположения функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцуеми в точката x_0, то функцията $F(x) = f(x) + g(x)$ е също диференцуема в тази точка и

$$F'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

За да докажем това, изхождаме от тъждеството

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.$$

Тъй като отношенията

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ и } \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

притежават граница, когато h клони към нула, то отношението

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$$

също притежава граница при $h\to 0$. И така функцията е диференцуема при $x=x_0$. От

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

заключаваме, че

$$F'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Аналогично при същите предположения се доказва, че функцията $F(x)=f(x)-g(x)$ е също диференцуема в тази точка и

$$F'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0).$$

За доказателство използуваме тъждеството

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.$$

При същите предположения се доказва, че функцията $F(x)=f(x)\,g(x)$ е също диференцуема в точката x_0 и

$$F'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

За да докажем това, ще положим

$$u(h)=f(x_0+h)-f(x_0),$$
$$v(h)=g(x_0+h)-g(x_0),$$

откъдето

$$f(x_0+h)=f(x_0)+u(h),$$
$$g(x_0+h)=g(x_0)+v(h).$$

Разглеждаме отношението

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}.$$

Очевидно

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{[f(x_0)+u(h)][g(x_0)+v(h)]-f(x_0)\,g(x_0)}{h}=$$
$$=\frac{f(x_0)\,v(h)+g(x_0)\,u(h)+u(h)\,v(h)}{h}=f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+$$
$$+g(x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\,h,$$

откъдето заключаваме, като оставим h да клони към нула, че производната $F'(x_0)$ съществува и

$$F'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)\,f'(x_0).$$

Най-сетне все при същите предположения относно функциите $f(x)$ и $g(x)$ и при условие, че $g(x)\neq 0$, ще установим, че функцията $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е диференцуема в точката x_0 и

$$F'(x_0)=\frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

И наистина, ако положим

$$u(h)=f(x_0+h)-f(x_0),$$
$$v(h)=g(x_0+h)-g(x_0),$$

имаме

$$f(x_0+h)=f(x_0)+u(h),$$
$$g(x_0+h)=g(x_0)+v(h)$$

и следователно

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{\dfrac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h}= \tag{1}$$
$$=\frac{\dfrac{f(x_0)+u(h)}{g(x_0)+v(h)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h}=\frac{g(x_0)\,u(h)-f(x_0)\,v(h)}{hg(x_0)[g(x_0)+v(h)]}=$$
$$=\frac{g(x_0)\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f(x_0)\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}{g(x_0)\,g(x_0+h)}.$$

От тъждеството (1) заключаваме, като извършим граничния преход $h\to 0$, че производната $F'(x_0)$ съществува и

$$F'(x_0)=\frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

(тук ние се ползуваме от това, че функцията $g(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и следователно $g(x_0+h)\to g(x_0)$ при $h\to 0$).

Нека $u(x)$ е функция, която има производна в точката x_0, и нека a е едно число. В такъв случай функцията

$$\varphi(x)=a\,u(x)$$

също има производна в точката x_0 и

$$\varphi'(x_0)=au'(x_0),$$

както се вижда от равенството

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=a\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}.$$

Сега ще изведем правилото за диференциране на функция от функция.

Нека $f(x)$ и $F(u)$ са две функции. Означаваме дефиниционната област на $f(x)$ с M, а дефиниционната област на $F(u)$ с N. Ако функционалните стойности на $f(x)$ не напускат N, когато x се мени, ние можем да образуваме функцията

$$\varphi(x)=F(f(x)).$$

Тази функция, както вече казахме по-рано, се нарича сложна функция или функция от функция. Ще покажем, че ако във всяка околност на една точка x_0 от M има винаги точки от M, различни от x_0, и ако във всяка околност на точката $u_0=f(x_0)$ има точки от N, различни от u_0, и ако най-сетне функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0, а функцията $F(u)$ е диференцуема в точката u_0, то функцията $\varphi(x)$ е диференцуема в точката x_0 и

$$\varphi'(x_0)=F'(u_0)\,f'(x_0).$$

За да докажем това поне в случая, когато $f'(x_0)\neq 0$, полагаме $k=f(x_0+h)-f(x_0)$, т. е. $f(x_0+h)=u_0+k$, и образуваме равенството

$$\frac{F[f(x_0+h)]-F[f(x_0)]}{h}=\frac{F(u_0+k)-F(u_0)}{h}=\frac{F(u_0+k)-F(u_0)}{k}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{2}$$

Ясно е, че когато h клони към нула чрез някаква редица стойности, k също приема редица от стойности, която клони към нула (функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, защото е диференцуема в тази точка). Ако $h\neq 0$ и $k\neq 0$, ние бихме могли да образуваме равенството (2). По-нататък разсъжденията се развиват така: когато оставим h да клони към нула чрез една произволна редица различни от нула стойности, за които точките x_0+h принадлежат на M, променливата k приема

също така редица от стойности, клоняща към нула. Това ни дава право да заключим, че отношенията

$$\frac{F(u_0+k)-F(u_0)}{k} \text{ и } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

клонят съответно към $F'(u_0)$ и $f'(x_0)$. Оттук следва, че отношението

$$\frac{F[f(x_0+h)]-F[f(x_0)]}{h}$$

притежава граница, когато $h\to 0$, и че тази граница е $F'(u_0)\cdot f'(x_0)$; с други думи, функцията $F[f(x)]$ е диференцуема при $x=x_0$ и

$$\varphi'(x_0)=F'(u_0)f'(x_0)$$

Тези разсъждения имат обаче следната непълнота: ние не сме сигурни, че $k\neq 0$, макар и да знаем, че $h\neq 0$, и следователно не знаем дали можем да делим k. Има един случай, при който поне за достатъчно малки стойности на $|h|$ можем да твърдим, че $k\neq 0$. Това е случаят, когато $f'(x_0)\neq 0$. И наистина, ако допуснем, че има произволно малки по абсолютна стойност различни от нула значения на h, за които $k=0$, то бихме могли да изберем една клоняща към нула редица от различни от нула числа

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ldots,$$

за които

$$f(x_0+h_n)-f(x_0)=0,$$

и следователно противно на нашето допускане

$$\lim_{n\to 0}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=f'(x_0)=0.$$

И така разсъжденията, които ние направихме, водят до целта поне когато $f'(x_0)\neq 0$. В случая, когато $f'(x_0)=0$, празнотата в направените по-горе разсъждения също може да се отстрани, обаче ние ще предпочетем да постъпим другояче, което ще ни позволи да получим изведнъж едно общо доказателство, без да има нужда да разглеждаме отделно случаите, когато $f'(x_0)\neq 0$ и когато $f'(x_0)=0$. За тази цел ние ще дефинираме една помощна функция $\psi(t)$ на независимата променлива t по следния начин:

$$\psi(t)=\frac{F(u_0+t)-F(u_0)}{t}-F'(u_0)$$

при $t\neq 0$ и $\psi(0)=0$. Ясно е, че функцията $\psi(t)$ е дефинирана при всички t, за които u_0+t принадлежи на N, и е непрекъсната при $t=0$. Непрекъснатостта на $\psi(t)$ следва от това, че

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(u_0+t)-F(u_0)}{t}=F'(u_0)$$

и следователно

$$\lim_{t\to 0}\psi(t)=0=\psi(0).$$

Не е трудно да се провери, че функцията $\psi(t)$ удовлетворява уравнението

$$F(u_0+t)-F(u_0)=F'(u_0)\,t+\psi(t)\,t$$

както при $t\neq 0$, така и при $t=0$.

От това следва, като поставим $t=k=f(x_0+h)-f(x_0)$, че

$$\frac{F[f(x_0+h)]-F[f(x_0)]}{h}=F'(u_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+$$

$$+\psi(k)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Извършваме в това равенство граничния преход $h\to 0$. Понеже дясната страна на равенството има граница и тази граница е $F'(u_0)\,f'(x_0)$ (тия две твърдения следват от обстоятелството, че $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ и $\psi(k)$ имат граници и те са съответно $f'(x_0)$ и $\psi(0)=0$), то частното

$$\frac{F[f(x_0+h)]-F[f(x_0)]}{h}$$

също притежава граница, когато h клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула), и тази граница е равна на $F'(u_0)\,f'(x_0)$. С това е показано, че функцията $F[f(x)]$ е диференцуема при $x=x_0$ и

$$(F[f(x_0)])'=F'(u_0)\,f'(x_0).$$

§ 15. Производни на елементарни функции

Казваме, че една функция $f(x)$ е константа в един интервал, когато при всички стойности на x функцията има една и съща стойност. Сега ще покажем, че ако $f(x)$ е константа в един интервал, то тя е диференцуема във всяка точка x_0 от този интервал и производната ѝ е равна на нула. И наистина при всички различни от нула стойности на h, за които точката x_0+h принадлежи на дефиниционния интервал на $f(x_0)$, имаме

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0.$$

Оттук е ясно, че каквато и да бъде клонящата към нула редица

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ldots$$

от различни от нула стойности на h, за които точките x_0+h_n принадлежат на дефиниционния интервал на $f(x)$, съответната редица от стойностите на отношението

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

е сходяща и клони към нула. И така производната $f'(x_0)$ съществува и $f'(x_0)=0$.

Да разгледаме функцията $f(x)=x^n$ при цели положителни стойности на n. Ще докажем, че тя е диференцуема при всяко x и

$$f'(x)=nx^{n-1}.$$

И наистина

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$$

$$=\frac{\left(x^n+\frac{n}{1!}x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\ldots+h^n\right)-x^n}{h}=$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1},$$

откъдето, като извършим граничния преход $h\to 0$, заключаваме, че $f(x)$ съществува и $f'(x)=nx^{n-1}$.

Функцията $f(x)=x^n$ е добре дефинирана и при цели отрицателни стойности на n, когато $x\neq 0$. Под x^n при отрицателни стойности на n се разбира $\frac{1}{x^{-n}}$. Тук показателят $-n$ е вече положителен. Като се възползуваме от правилото за диференциране на частно, заключаваме, че при $x\neq 0$ функцията $f(x)$ е диференцуема, когато n е цяло отрицателно число, и

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)'=\frac{0\,.\,x^{-n}-1\,.\,(-n)\,x^{-n-1}}{x^{-2n}}=nx^{n-1}.$$

И така формулата

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

е валидна за всички цели (както положителни, така и отрицателни) стойности на n. Когато n е отрицателно, трябва да се иска x да бъде различно от нула. Така получената формула е валидна, разбира се, и при $n=0$ (но $x\neq 0$), защото $f(x)=1$, и следователно $f'(x)=0$.

Правилото за диференциране на функция от функция ни дава възможност да диференцираме и функции от вида $y=[u(x)]^n$, откъдето $u(x)$ е диференцуема функция на x и n е цяло число. Съгласно това правило намираме

$$y'=nu^{n-1}\,.\,u'.$$

Пример. Да се намери производната на $y=\frac{1}{(x^2+3x+5)^2}$. Тук имаме да намерим производната на една функция от вида $y=[u(x)]^n$, където $n=-2$ и $u=x^2+3x+5$. Ние знаем, че $y'=nu^{n-1}\cdot u'$. В нашия специален случай получаваме

$$y'=-2(x^2+3x+5)^{-3}(x^2+3x+5)'=-2(x^2+3x+5)^{-3}(2x+3)=$$

$$=\frac{-2(2x+3)}{(x^2+3x+5)^3}.$$

Тук извършихме подробно пресмятанията. Тия пресмятания обаче се правят обикновено наум. Намерете производната на функцията

$$y=\frac{1}{(x^4+6x^2+x+2)^5},$$

като извършите пресмятанията наум!

Сега ще разгледаме правилата за диференциране на тригонометричните функции. Нека $f(x)=\sin x$. В такъв случай имаме

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=2\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Когато h клони към нула, $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ клони към $\cos x$, защото $\cos x$ е непрекъсната функция при всяко x. От друга страна, частното

$$\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}$$

клони към $\frac{1}{2}$, когато $h\to 0$. И наистина, ако изберем една произволна редица от различни от нула числа

$$h_1, h_2, h_3, \ldots,$$

която клони към нула, то редицата с общ член $x_n=\frac{h_n}{2}$ също ще клони към нула. Оттук заключаваме, че редицата с общ член

$$\frac{\sin x_n}{x_n}$$

клони към 1. Като вземем под внимание, че

$$\frac{\sin\frac{h_n}{2}}{h_n}=\frac{1}{2}\frac{\sin x_n}{x_n},$$

заключаваме, че

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{h_n}{2}}{h_n}=\frac{1}{2}.$$

Полученият резултат е достатъчен, за да твърдим, че частното

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

има граница, когато h клони към нула чрез стойности, различни от нула, и тази граница е равна на $\cos x$. Това значи, че функцията $f(x)=\sin x$ е диференцуема и

$$f'(x)=\cos x.$$

Аналогично може да се установи, че функцията $f(x)=\cos x$ е също диференцуема при всяко x и

$$f'(x)=-\sin x.$$

За да докажем това, изхождаме от равенството

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-2\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Оттук е ясно, че $f'(x)$ съществува и $f'(x)=-\sin x$.

След като знаем да диференцираме функциите $\sin x$ и $\cos x$, лесно можем да намерим производните на $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, като си послужим с правилото за диференциране на частно. Така получаваме

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

при $\cos x\neq 0$ и

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}$$

при $\sin x\neq 0$.

Правилото за диференциране на функция от функция ни дава възможност да дадем правила за диференциране на функциите

$$\sin u(x),\ \cos u(x),\ \operatorname{tg} u(x),\ \operatorname{ctg} u(x),$$

където $u(x)$ е диференцуема функция на x. Правилата са следните:

$$(\sin u)'=(\cos u)u',\ (\cos u)'=-(\sin u)u',\ (\operatorname{tg} u)'=$$

$$=\frac{u'}{\cos^2 u}\ \text{при}\ \cos u\neq 0\ \text{и}\ (\operatorname{ctg} u)'=\frac{-u'}{\sin^2 u}\ \text{при}\ \sin u\neq 0.$$

Пример. Да се намери производната на функцията $y=\sin(2x^2+3)$. Тук имаме да намерим производната на функция от вида $y=\sin u$, където $u=2x^2+3$. Ние знаем, че $(\sin u)'=(\cos u)\,u'$. Въз основа на това получаваме

$$y'=[\cos(2x^2+3)]\,(2x^2+3)'=4x\cos(2x^2+3).$$

Да вземем друг пример. Нека $y=\operatorname{tg}\frac{x^2-1}{\sin 2x}$. В такъв случай

$$y'=\frac{1}{\cos^2\frac{x^2-1}{\sin 2x}}\left(\frac{x^2-1}{\sin 2x}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{x^2-1}{\sin 2x}}\cdot\frac{2x\sin 2x-(x^2-1)(\cos 2x)(2x)'}{\sin^2 2x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{x^2-1}{\sin 2x}}\cdot\frac{2x\sin 2x-(x^2-1)(\cos 2x)\,2}{\sin^2 2x}$$

§ 16. Диференциал

Произведението $f'(x)\,k$ на производната $f'(x)$ на една функция $y=f(x)$ с един постоянен множител $k\neq 0$ се нарича диференциал на $f(x)$ и се бележи със знака dy (четете де игрек) или $df(x)$. Множителят k (освен ако изрично не е казано противното) се избира един и същ за всички функции и за всички стойности на x. Ако вземем специално функцията $y=x$, получаваме

$$dx=k.$$

Това ни дава възможност да пишем

$$dy=f'(x)\,dx,$$

като се възползуваме от това, че се съгласихме да избираме един и същ множител k за всички функции. Така например, ако

$$y=x^2,\ \text{то}\ dy=2x\,dx;\ \text{ако}\ y=\operatorname{tg}x,\ \text{то}\ dy=\frac{dx}{\cos^2 x}$$

и пр.

От $dy=f'(x)\,dx$ получаваме $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ (символът $\frac{dy}{dx}$ се чете „де игрек де икс“). Този начин за означаване на производните е въведен от Лайбниц (Leibniz).

Правилата за смятане с диференциали са съвсем аналогични на правилата за смятане с производни. Така

$$d(u+v)=du+dv.$$

Доказателството може да се извърши така: очевидно $(u+v)'=u'+v'$; като умножим двете части на това равенство с k, получаваме

$$(u+v)'k=u'k+v'k$$

или

$$d(u+v)=du+dv.$$

Аналогично получаваме

$$d(u-v)=du-dv,$$

$$d(uv)=v\,du+u\,dv,$$

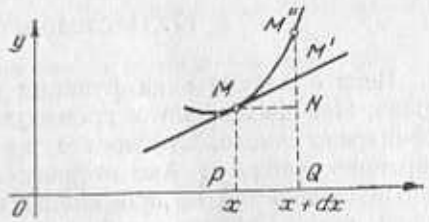
$$d\frac{u}{v}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},$$

$$d[f(u)]=f'(u)\,du \text{ и пр.}$$

Специално когато изберем $k=1$, диференциалите преминават в производни. При дефиницията на понятието диференциал ние изрично поставихме условието $k\neq 0$, за да имаме свобода да делим с k.

Да изберем върху кривата $y=f(x)$ една точка M с координати (x, y). В такъв случай, както знаем, допирателната към тази крива в точката (x, y) има уравнение

(1) $\eta-y=f'(x)(\xi-x)$,



Черт. 8

където ξ и η са текущите координати. Непосредствено се вижда, че точката M' с координати $(x+dx,\ y+dy)$ лежи върху допирателната (1) (координатите на M' удовлетворяват уравнението (1)).

От това заключаваме, че щом сегментът PQ (черт. 8) е равен на dx, то ординатата QM' е равна на $y+dy$. Оттук получаваме

$$NM'=QM'-QN=(y+dy)-y=dy,$$

което показва, че сегментът NM' представлява dy.

Често разликата

$$f(x+k)-f(x)$$

се означава със знака Δy. Обръщаме внимание на това, че Δy и dy в общия случай имат различни стойности. На черт. 8 разликата Δy се изобразява със сегмента NM'', докато dy се изобразява, както видяхме, със сегмента NM'.

Разбира се, както стойността на Δy, така и стойността на dy зависи от избора на x и k, макар че в символите Δy и dy не участвуват нито x, нито k.

Да разгледаме функцията

$$\varphi(k)=\frac{f(x+k)-f(x)}{k}-f'(x).$$

Очевидно

$$f(x+k)-f(x)=f'(x)\,k+\varphi(k)\,k.$$

При фиксирано x функцията $\varphi(k)$ клони към нула заедно с k. Поради това $df(x)=f'(x)\,k$ се нарича понякога главна част на нарастването $f(x+k)-f(x)$.

Най-сетне нека забележим, че символът

$$\Delta y=f(x+k)-f(x)$$

има смисъл, когато x и $x+k$ принадлежат към дефиниционната област на $f(x)$, докато

$$dy=f'(x)\,k$$

има смисъл при всяко k, стига $f'(x)$ да има смисъл.

§ 17. Последователни производни

Нека е дадена една функция $y=f(x)$, диференцуема в някой интервал. При фиксирано x производната $f'(x)$ представлява едно добре дефинирано число. Стойността на тази производна обаче зависи от избраното число x. Ако оставим x да се мени, в общия случай се мени и стойността на производната. Стойността на производната $f'(x)$ зависи от x. Нейната стойност е обаче еднозначно дефинирана, когато е избрано числото x. И така производната на една функция е също функция на x. Ако се случи функцията $f'(x)$ да бъде диференцуема, то казваме, че $f(x)$ е два пъти диференцуема и производната на $f'(x)$ наричаме втора производна на $f(x)$. Втората производна се означава със символите y'', $f''(x)$, $\ddot{y}$ и пр. (четете — игрек секонд, еф секонд, игрек две точки и пр.).

Пример. Да разгледаме функцията $y=x^2$. Очевидно $y'=2x$. Производната $y'=2x$ от своя страна е диференцуема функция на x. Това значи, че y има втора производна; очевидно $y''=2$.

Аналогично се дефинира понятието трета производна като производна на втората производна и пр. Изобщо n-та производна се нарича производната на $n-1$-вата производна.

Аналогично се дефинира понятието втори, трети и пр. диференциал на една функция. Така втори диференциал се нарича диференциалът на първия диференциал. Вторият диференциал на една функция $y=f(x)$ се бележи със знака d^2y (четете — де две игрек). Като помним, че dx е константа, получаваме

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)\,dx)=(f''(x)\,dx)\,dx=f''(x)\,dx^2.$$

Трети диференциал на y се нарича диференциалът на втория диференциал и се бележи със знака d^3y. Очевидно имаме

$$d^3y=d(d^2y)=d(f''(x)\,dx^2)=(f'''(x)\,dx^2)\,dx=f'''(x)\,dx^3.$$

Изобщо n-ти диференциал се нарича диференциалът на $n-1$-вия диференциал и се бележи със знака d^ny. Индуктивно намираме

$$d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Оттук получаваме

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\quad f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3},\ldots,\quad f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

$\left(\text{символа } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ четете — де две игрек де икс квадрат; изобщо четете символа } \frac{d^ny}{dx^n} \text{ така: де ен игрек де икс на ента}\right)$.

Сега ще разгледаме няколко примера, при които може лесно да се намери закономерността, по която се получават последователните производни.

1. Пример. Да се намери n-тата производна на $y=\sin x$. Очевидно имаме

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\left[\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\right]\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)'=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

. . . . . .

$$y^{(n)}=\ldots=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

По аналогичен път намираме

$$\frac{d^n\cos x}{dx^n}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

2. Пример. Да се намерят последователните производни на $y=\frac{x^k}{k!}$, където k е цяло положително число.

Като извършим диференцирането, намираме

$$y'=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$y''=\frac{x^{k-2}}{(k-2)!},$$

. . . . . .

$$y^{(k-1)}=\frac{x}{1!},$$

$$y^{(k)}=1.$$

Производните от по-висок ред са равни на нула.

§ 18. Формула на Лайбниц (Leibniz)

Ние вече разгледахме правилото за диференциране на произведение от две функции, според което, ако $y=uv$, то

$$y'=u'v+uv'.$$

Формулата на Лайбниц, която ще разгледаме сега, е обобщение на правилото за диференциране на произведение, отнасящо се за производни от произволен ред. За да изясним закономерността, по която се получават последователните производни на $y=uv$, ще пресметнем няколко от тях. Така получаваме

$$y''=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$y'''=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

Законът, по който се получават пресметнатите от нас производни, може да се изрази със следната обща формула, известна под името формула на Лайбниц:

$$(1)\qquad y^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\ldots+\binom{n}{n}uv^{(n)},$$

където u и v означават функции, които притежават производни до n-ти ред, и, както обикновено се прави, сме положили за краткост

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

По своята структура формулата на Лайбниц напомня Нютоновия бином. За да установим, че формулата на Лайбниц е в сила при всички цели положителни стойности на n, ще си послужим с метода на пълната математическа индукция. За целта ще докажем, че ако е вярно равенството (1) при някоя стойност на n, то вярно е и равенството

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+\binom{n+1}{1}u^{(n)}v'+\binom{n+1}{2}u^{(n-1)}v''+\ldots+\binom{n+1}{n+1}uv^{(n+1)}.$$

И наистина, ако диференцираме двете части на равенството (1), получаваме

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+\left[\binom{n}{1}+1\right]u^{(n)}v'+\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right]u^{(n-1)}v''+$$
$$+\left[\binom{n}{3}+\binom{n}{2}\right]u^{(n-2)}v'''+\ldots+\left[\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right]u'v^{(n)}+\binom{n}{n}uv^{(n+1)}.$$

От друга страна,

$$\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!}+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=$$
$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)!}[(n-k)+(k+1)]=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)!}(n+1)=$$
$$=\frac{(n+1)\,n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

и следователно

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+\binom{n+1}{1}u^{(n)}v'+\binom{n+1}{2}u^{(n-1)}v''+\binom{n+1}{3}u^{(n-2)}v'''+\ldots+$$
$$+\binom{n+1}{n}u'v^{(n)}+\binom{n+1}{n+1}uv^{(n+1)}.$$

И така, ако тази формула е вярна при някоя стойност на n, тя е вярна и при следващата стойност на n. Обаче знаем, че формулата е вярна при $n=1$ и следователно тя е вярна при всяко цяло положително n.

Пример. Да се намери n-тата производна на функцията $y=x^2\sin x$. Тук имаме да намерим n-тата производна на едно произведение, като знаем да намираме последователните производни на двата множителя. Прилагаме формулата на Лайбниц и получаваме

$$y^{(n)}=x^2(\sin x)^{(n)}+\binom{n}{1}(x^2)'(\sin x)^{(n-1)}+\binom{n}{2}(x^2)''(\sin x)^{(n-2)}+$$
$$+\binom{n}{3}(x^2)'''(\sin x)^{(n-3)}+\ldots=$$
$$=x^2\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n.2x\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)+$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}.2\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right)+0+\ldots=$$
$$=x^2\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+2nx\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)+n(n-1)\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right).$$

§ 19. Теорема на Рол (Rolle)

Сега ще докажем една от най-важните теореми в диференциалното смятане. Ето формулировката на тази теорема:

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, ако е диференцуема поне в отворения интервал (a, b) и ако в краи-

щата на този интервал приема равни стойности (т. е. $f(a)=f(b)$), в такъв случай в интервала (a, b) има поне една вътрешна точка ξ, в която производната $f'(x)$ е равна на нула.

Преди да пристъпим към доказателството, нека обърнем внимание на това, че се иска функцията да бъде дефинирана и непрекъсната в затворения интервал, т. е. не само във вътрешните точки, но и в краищата на този интервал, докато съществуването на производната се изисква само за вътрешни точки на интервала (a, b). В краищата на интервала функцията $f(x)$ може да бъде диференцуема, може и да не бъде. Отсъствието на производната в краищата на интервала не е пречка за валидността на формулираната теорема. Най-сетне нека обърнем внимание още на това, че в теоремата се установява съществуването на вътрешна точка ξ в интервала (a, b), за която $f'(\xi)=0$, т. е. точка, различна както от a, така и от b.

След тези предварителни бележки да преминем към доказателството на теоремата.

Тъй като функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворения интервал $[a, b]$, то за тази функция можем да приложим теоремата на Вайерщрас, според която има точка x_1, където функцията приема най-голяма, и има точка x_2, където функцията приема най-малка стойност. Ние знаем, че точката x_1 лежи в затворения интервал $[a, b]$, т. е. може евентуално да се намира във вътрешността, но може евентуално да се намира и в някой от краищата на този интервал. Ще покажем най-напред валидността на интересуващата ни теорема в специалния случай, когато точката x_1 се намира във вътрешността на интервала (a, b). Разглеждаме отношението

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}, \tag{1}$$

което е дефинирано за всички достатъчно малки по абсолютна стойност, различни от нула значения на h. Тъй като точката x_1 е вътрешна за интервала $[a, b]$, а във всички вътрешни точки функцията $f(x)$ е диференцуема, то частното (1) притежава граница, когато h клони към нула. Границата на това частно е $f'(x_1)$.

Точката x_1 е вътрешна за интервала $[a, b]$, следователно ние можем да оставим h да клони към нула както чрез положителни, така и чрез отрицателни стойности, без обаче да напускаме дефиниционната област на $f(x)$. Да се възползуваме от тази свобода и да оставим h да клони към нула чрез положителни стойности. В такъв случай знаменателят на частното

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \tag{2}$$

е положителен. Числителят му обаче е или отрицателен, или нула, тъй като $f(x_1)$ е най-голямата функционална стойност на $f(x)$. И така

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leqq 0,$$

т. е.

$$f'(x_1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leqq 0.$$

Ние в частното (2) можем да оставим h да клони към нула и чрез отрицателни стойности (точката x_1 е вътрешна!). Но когато $h<0$, тогава

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \geqq 0,$$

понеже, както видяхме вече, $f(x_1+h)-f(x_1)\leqq 0$. Оттук следва, че

$$f'(x_1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \geqq 0.$$

От двете неравенства

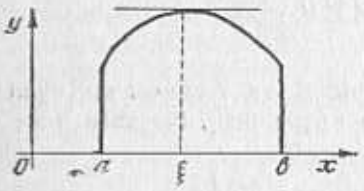
$$f'(x_1)\leqq 0 \quad \text{и} \quad f'(x_1)\geqq 0,$$

които получихме, заключаваме, че $f'(x_1)=0$. И така, когато точката x_1 е вътрешна, ние намерихме вътрешна точка ξ (това е точката x_1), за която $f'(\xi)=0$. Теоремата на Вайерщрас обаче не ни осигурява ни най-малко, че точката x_1 трябва да бъде във вътрешността на интервала $[a, b]$. По подобен начин се доказва, че ако точката x_2 е вътрешна, то $f'(x_2)=0$. И така валидността на теоремата засега ние установихме само в случаите, когато поне една от двете точки x_1 или x_2 е вътрешна. Остана да разгледаме случая, когато и двете точки x_1 и x_2 са крайни точки за интервала $[a, b]$. Обаче в краищата на интервала $[a, b]$ функцията $f(x)$ приема равни стойности (това условие още не сме използували!), откъдето следва, че

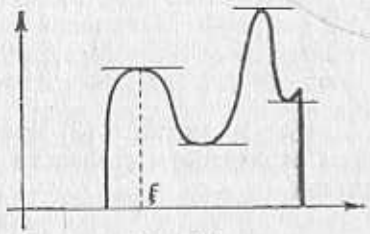
$$f(x_1)=f(x_2),$$

тъй като в разглеждания случай и двете точки x_1 и x_2 са крайни. И така най-голямата и най-малката стойност на функцията са равни помежду си. От това следва, че функцията $f(x)$ е константа (от $f(x_2)\leqq f(x)\leqq f(x_1)$ и от $f(x_1)=f(x_2)$ заключаваме, че при всички стойности на x от интервала $[a, b]$ имаме $f(x)=f(x_1)=f(x_2)$). Щом функцията $f(x)$ е константа, нейната производна е нула навсякъде, следователно и в този случай твърдението на теоремата е вярно. С това теоремата е доказана докрай.

Теоремата, която доказахме, е известна под името теорема на Рол. Нейният геометричен смисъл е прост. Според тази теорема, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцуема



Черт. 9



Черт. 10

е поне в отворения интервал (a, b) и $f(a)=f(b)$, то върху графиката на тази функция има поне една точка (различна от краищата ѝ), в която допирателната е успоредна на оста OX. Чертежите 9 и 10 илюстрират геометрическия смисъл на теоремата на Rolle.

§ 20. Теорема за крайните нараствания

Сега ще дадем едно важно обобщение на теоремата на Рол, известно под името теорема за крайните нараствания. Същата теорема се нарича понякога теорема на Лагранж (Lagrange). Ето формулировката на тази теорема:

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и е диференцуема поне във вътрешността на този интервал, то има поне една вътрешна точка ξ, за която е изпълнено равенството

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \tag{1}$$

Твърдението е вярно както при $a<b$, така и при $a>b$.

Тази теорема се отличава от теоремата на Рол по това, че тук не се иска да имаме непременно $f(a)=f(b)$. В специалния случай, когато $f(a)=f(b)$, получаваме

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

т. е. теоремата на Рол се явява действително специален случай от теоремата за крайните нараствания.

Доказателството на теоремата за крайните нараствания ще извършим с помощта на теоремата на Рол. За тази цел образуваме помощната функция

$$\varphi(x)=f(x)-kx,$$

където константата k избираме така, че да имаме

$$\varphi(a)=\varphi(b), \quad \text{т. е.} \quad f(a)-ka=f(b)-kb, \tag{2}$$

за да можем за функцията $\varphi(x)$ да приложим теоремата на Рол. Равенството (2) е изпълнено при

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцуема е поне във вътрешните му точки и $\varphi(a)=\varphi(b)$. Това ни дава право да приложим за функцията $\varphi(x)$ теоремата на Рол. И така има поне една точка ξ в отворения интервал (a, b), за която

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-k=0$$

или

$$f'(\xi)=k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

с което доказателството на теоремата за крайните нараствания е завършено.

Ако положим

$$\frac{\xi-a}{b-a}=\theta \quad \text{и} \quad b-a=h,$$

получаваме

$$\xi=a+\theta h.$$

При тези означения равенството (1) добива вида

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h).$$

Числото ξ обаче се намира в отворения интервал (a, b). Оттук не е трудно да се заключи, че $0<\theta<1$. И наистина при $a<b$ имаме $a<\xi<b$, откъдето получаваме последователно

$$0<\xi-a<b-a,$$

$$0<\frac{\xi-a}{b-a}<1.$$

При $a>b$ имаме $a>\xi>b$, което ни дава

$$0>\xi-a>b-a$$

и следователно

$$0<\frac{\xi-a}{b-a}<1,$$

с което е установено, че наистина във всички случаи имаме $0<\theta<1$.

Равенството

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$$

е очевидно вярно и при $h=0$.

Теоремата за крайните нараствания има следния геометричен смисъл. При направените предположения за функцията $f(x)$ има поне една точка върху дъгата с уравнение $y=f(x)$, $a<x<b$, допирателната в която е успоредна на хордата, съединяваща краищата на тази дъга.

§ 21. Обобщение на теоремата за крайните нараствания (теорема на Коши)

Ще разгледаме следното обобщение на теоремата за крайните нараствания.

Ако $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, дефинирани и непрекъснати в крайния и затворен интервал $[a, b]$, ако са диференцуеми поне в отворения интервал (a, b) и ако освен това $g'(x)\neq 0$ за всички точки от отворения интервал (a, b), то съществува поне една точка ξ във вътрешността на интервала (a, b), за която

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{1}$$

Тази теорема наричаме обобщение на теоремата за крайните нараствания, защото, ако изберем специално $g(x)=x$, равенството (1) преминава в

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

т. е. теоремата за крайните нараствания е наистина специален случай от тази по-обща теорема.

Нека изрично отбележим, че не се иска от функциите $f(x)$ и $g(x)$ непременно да бъдат диференцуеми при $x=a$ и $x=b$. Също така се позволява $g'(x)$ да се анулира при $x=a$ и $x=b$ (ако функцията $g(x)$ в тези точки е диференцуема). Обаче иска се непременно $g'(x)$ да бъде различно от нула в отворения интервал (a, b). За да покажем колко е съществено това условие, ще си послужим с един пример: да разгледаме двете функции $f(x)$ и $g(x)$, дефинирани в затворения интервал $[-1, 1]$ по следния начин:

$$f(x)=x^2,$$
$$g(x)=x^3.$$

Функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати и диференцуеми в затворения интервал $[-1, 1]$. Очевидно имаме

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=\frac{0}{2}=0.$$

От друга страна,

$$f'(x)=2x \quad \text{и} \quad g'(x)=3x^2,$$

откъдето намираме

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2}{3x}.$$

Сега е ясно, че както и да изберем числото ξ (за което, разбира се, частното $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ е дефинирано), не може да имаме

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Този пример ни най-малко не противоречи на теоремата, която ние се стремим да докажем сега, защото във вътрешността на интервала $(-1, 1)$ има точка, в която $g'(x)=0$. Тази точка е $x=0$.

За да извършим доказателството на интересуващата ни теорема, съществено ще използуваме условието, че $g'(x)\neq 0$ във вътрешността на разглеждания интервал (както ще използуваме, разбира се, всичките условия, които ние изрично формулирахме).

Накрая, преди да пристъпим към доказателството на теоремата на Коши, нека подчертаем, че в теоремата се твърди, че има поне една вътрешна точка ξ в интервала (a, b), за която е изпълнено равенството (1).

След тия предварителни бележки да преминем към доказателството на теоремата на Коши. И тук, както при теоремата за крайните нараствания, ще си послужим с теоремата на Рол. За тази цел образуваме помощната функция

$$\varphi(x)=f(x)-kg(x),$$

където множителя k определяме така, че да имаме

$$f(a)-kg(a)=f(b)-kg(b), \tag{2}$$

което ни е нужно, за да можем да приложим за функцията $\varphi(x)$ теоремата на Рол. Ние можем да определим k от уравнението (2), защото $g(b)-g(a)\neq 0$. И наистина, ако допуснем, че $g(b)-g(a)=0$, ще можем да приложим за фушкцията $g(x)$ теоремата на Рол и да заключим, че има поне една точка x_0 от вътрешността на интервала (a, b), в която $g'(x_0)=0$. Това обаче не е възможно, защото по предположение производната $g'(x)$ не се анулира във вътрешността на интервала (a, b). И така ние доказахме, че $g(b)-g(a)\neq 0$, и въз основа на това намираме

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{3}$$

Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и е диференцуема поне във вътрешните му точки. Освен това имаме

$$\varphi(a)=\varphi(b).$$

Това ни дава право да приложим теоремата на Рол за функцията $\varphi(x)$. И така във вътрешността на интервала $[a, b]$ има поне една точка ξ, в която

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-kg'(\xi)=0.$$

Това равенство може да се представи още във вида

$$k=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

защото $g'(\xi)\neq 0$. При това преобразуване съществено използувахме условието, според което $g'(x)\neq 0$ във вътрешността на интервала (a, b) (точката ξ е вътрешна за интервала (a, b) и следователно $g'(\xi)\neq 0$ — нещо, което ни дава право да делим с $g'(\xi)$. Като заместим k с равното му от (3), получаваме

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

с което теоремата на Коши е доказана.

§ 22. Основна теорема на интегралното смятане

Ние знаем, че ако една функция $f(x)$ е константа в един интервал, то нейната производна е нула във всички точки на този интервал. За интегралното смятане, което ние ще изучаваме по-късно, е от основно значение обратният въпрос: знае се, че една функция $f(x)$ е диференцуема във всяка точка на един интервал и производната ѝ навсякъде е нула; пита се дали при тези предположения може да се твърди, че функцията $f(x)$ е константа в този интервал. Отговорът на този въпрос е утвърдителен независимо от това, дали интервалът, в който разглеждаме функцията, е краен или безкраен, отворен или затворен. И така ние ще докажем сега следната теорема:

Ако една функция $f(x)$ е диференцуема във всяка точка на един интервал и производната ѝ във всяка точка на този интервал има стойност нула, то функцията е константа.

Доказателството извършваме с помощта на теоремата за крайните нараствания по следния начин: нека x_1 и x_2 са две произволни точки от разглеждания интервал; в такъв случай

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)f'(\xi),$$

където точката ξ се намира между x_1 и x_2; дадено е обаче, че производната $f'(x)$ е равна на нула при всяко x от разглеждания интервал; специално имаме $f'(\xi)=0$, откъдето

$$f(x_1)-f(x_2)=0$$

и следователно $f(x_1)=f(x_2)$. С това доказателството е завършено.

§ 23. Полиноми

Полином или цяла рационална функция (чиято степен не надминава n) се нарича функция от вида

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

където n е цяло положително число и коефициентите $a_0, a_1, \dots, a_n$ не зависят от x. Казваме, че полиномът

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

е от n-та степен, когато $a_0\neq 0$. Така $2x^2-3x+1$ е полином от втора степен.

Един полином от n-та степен не може да се анулира за повече от n различни стойности на аргумента.

Доказателството ще извършим индуктивно. Да допуснем, че вече знаем, че един полином от $n-1$-ва степен не може да се анулира за повече от $n-1$ различни стойности на x. Нека

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

е един полином от n-та степен, т. е. $a_0\neq 0$. Ако допуснем, че има (поне) $n+1$ точки $x_0<x_1<x_2<\dots<x_n$, в които $f(x)$ се анулира, то към всеки един от интервалите $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ ние можем по отношение на функцията $f(x)$ да приложим теоремата на Рол. Това ни дава право да твърдим, че във вътрешността на всеки един от интервалите (x_{k-1}, x_k), $k=1, 2, \dots, n$, има поне една точка ξ_k, в която производната $f'(x)$ се анулира. И така ние намерихме n точки

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n,$$

в които $f'(x)$ се анулира. Точките $\xi_k (k=1, 2, \dots, n)$ са всички различни помежду си, защото са вътрешни в съответните им интервали (x_{k-1}, x_k) и следователно

$$x_0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\dots<x_{n-1}<\xi_n<x_n.$$

Полиномът

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1}$$

е обаче от $(n-1)$-ва степен (тъй като $a_0\neq 0$) и следователно не може да се анулира за n различни стойности на x. Противоречието, до което

достигнахме, се дължи на допускането, че полиномът $f(x)$ се анулира за повече от n различни стойности на x. От друга страна, един полином от нулева степен представлява една различна от нула константа и следователно не може да се анулира при нито една стойност на x. От това заключаваме (като вземем пред вид доказаното), че един полином от първа степен не може да се анулира за повече от едно значение на x. От това пък следва, че един полином от втора степен не може да се анулира за повече от две стойности на x и пр.

От доказаната теорема заключаваме, че ако равенството

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=0$$

е изпълнено за повече от n различни стойности на x, то

$$a_0=a_1=a_2=\dots=a_n=0$$

и следователно това равенство е изпълнено при всички стойности на x. И наистина, ако допуснем, че $a_0\neq 0$, получаваме полином от n-та степен, който се анулира за повече от n различни стойности на x, нещо, което, както знаем, не е възможно. И така $a_0=0$. Замествайки a_0 с равното му, получаваме

$$a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=0.$$

Като разсъждаваме по подобен начин, заключаваме, че $a_1=0$. По подобен начин намираме, че $a_2=0$ и пр.

Върху това свойство на полиномите се основава важният принцип за сравняване на коефициентите при полиномите. Този принцип може да се формулира по следния начин.

Ако равенството

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n$$

е изпълнено за повече от n стойности на x, то

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\dots,\ a_n=b_n.$$

Доказателството се получава непосредствено, като вземем под внимание, че изразът

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\dots+(a_n-b_n)$$

се анулира за повече от n стойности на x и следователно

$$a_0-b_0=a_1-b_1=\dots=a_n-b_n=0.$$

§ 24. Интерполация

Читателят знае, че при използването на логаритмичните таблици често си служим с така наречената линейна интерполация. По-точно ние си служим с линейната функция $f(x)$, която в две различни дадени

точки x_0 и x_1 приема съответно дадени стойности y_0 и y_1. Очевидно линейната функция

$$f(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

притежава това свойство (т. е. $f(x_0)=y_0$ и $f(x_1)=y_1$) и друга линейна функция с това свойство няма (защото $y=f(x)$ е декартовото уравнение на правата, която минава през двете различни точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1); тази права е еднозначно дефинирана, а с това е еднозначно дефинирано и нейното декартово уравнение). Тук ние ще се занимаем с обобщение на въпроса за интерполирането, като си поставим за задача да намерим полином, чиято степен не надминава n и който в $n+1$ различни точки $x_0, x_1,\dots, x_n$ приема съответно стойностите $y_0, y_1,\dots, y_n$. Засега не е ясно дали такива полиноми има (въпрос за съществуване) и в случай че задачата има решение, не е ясно колко решения има тази задача (въпрос за единственост).

Въпроса за съществуване ще решим, като посочим полином с исканото свойство. Такъв е полиномът

$$\begin{aligned}
f(x)=y_0&\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}+\\
&+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}+\\
(1)\qquad &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+y_k\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}+\\
&+y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Очевидно имаме полином, чиято степен не надминава n, защото той представлява сума от полиноми, чиито степени не надминават n. Този полином удовлетворява равенствата

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1,\dots,\ f(x_k)=y_k,\dots,\ f(x_n)=y_n,$$

както това се вижда с директна проверка.

Сега ще докажем, че $f(x)$ е единственият полином, който удовлетворява всички тези изисквания. За целта означаваме с $\varphi(x)$ произволен полином, удовлетворяващ равенствата

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi(x_1)=y_1,\ldots,\ \varphi(x_n)=y_n,$$

чиято степен не надминава n. В такъв случай $f(x)-\varphi(x)$ представлява полином, чиято степен също не надминава n. Този полином се анулира за $n+1$ различни стойности на x и следователно се анулира тъждествено.

Формулата (1) се нарича интерполационна формула на Лагранж. В бъдеще ще се ползуваме често от тази формула.

Понякога е удобно на интерполационния полином $f(x)$ да се дава видът

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+ \\ +c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \tag{2}$$

За да покажем, че полиномът $f(x)$ може да се представи във вида (2), образуваме си полинома

$$\psi(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

където коефициентите $c_0, c_1, c_2,\ldots, c_n$ определяме от равенствата

$$\begin{aligned} y_0&=\psi(x_0)=c_0,\\ y_1&=\psi(x_1)=c_0+c_1(x_1-x_0),\\ y_2&=\psi(x_2)=c_0+c_1(x_2-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n&=\psi(x_n)=c_0+c_1(x_n-x_0)+c_2(x_n-x_0)(x_n-x_1)+\cdots+\\ &+c_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

В такъв случай полиномът $\psi(x)$ удовлетворява условията

$$\psi(x_0)=y_0,\ \psi(x_1)=y_1,\ldots,\ \psi(x_n)=y_n$$

и тъй като неговата степен не надминава n, той е идентичен с полинома $f(x)$ (съгласно теоремата за единственост, която доказахме по-горе). Формулата (2) се нарича интерполационна формула на Нютон (Newton). Определянето на коефициентите $c_0, c_1, c_2,\ldots, c_n$ се извършва твърде удобно от системата (3). Ние можем обаче без труд да намерим и общ израз за тези коефициенти. За да намерим интересуващата ни формула за c_k, образуваме си помощния полином

$$g_k(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+ \\ +c_k(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1}).$$

От равенствата

$$\begin{aligned} y_0&=c_0,\\ y_1&=c_0+c_1(x_1-x_0),\\ y_2&=c_0+c_1(x_2-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_k&=c_0+c_1(x_k-x_0)+c_2(x_k-x_0)(x_k-x_1)+\cdots+\\ &+c_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1}) \end{aligned}$$

заключаваме, че полиномът $g_k(x)$ удовлетворява условията

$$g_k(x_0)=y_0,\ g_k(x_1)=y_1,\ldots,\ g_k(x_k)=y_k.$$

От друга страна, с директна проверка се вижда, че полиномът

$$\begin{aligned} h_k(x)=&y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_k)}+\\ &+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_k)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_k)}+\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+y_k\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})} \end{aligned}$$

също удовлетворява равенствата

$$h_k(x_0)=y_0,\ h_k(x_1)=y_1,\ldots,\ h_k(x_k)=y_k.$$

И тъй стойностите на двата полинома $g_k(x)$ и $h_k(x)$ съвпадат при $k+1$ различни стойности на x. Като вземем под внимание, че степените им не надминават k, заключаваме, че те са идентични. Като сравним коефициентите пред x_k в двата полинома $g_k(x)$ и $h_k(x)$, получаваме

$$\begin{aligned} c_k=&\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_k)}+\\ &+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_k)}+\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{y_k}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})}. \end{aligned}$$

Полученият израз за c_k се нарича k-то Нютоново частно на $y_0, y_1,\ldots, y_k$ спрямо $x_0, x_1,\ldots, x_k$.

Задачи

1. Нека

$$f(x)=x(x^2-1)(x^2-4).$$

Докажете, че уравнението

$$f'(x)=0$$

има четири различни реални корена.

Упътване. Приложете теоремата на Рол.

2. Намерете полином $f(x)$ от възможно най-ниска степен, който удовлетворява условията

$$f(-1)=3,\ f(0)=1,\ f(1)=-1,\ f(2)=3,\ f(3)=19.$$

Решете задачата както с помощта на интерполационната формула на Лагранж, така и с помощта на интерполационната формула на Нютон.

3. Намерете всички полиноми $f(x)$, които удовлетворяват условията

$$f(0)=-1,\ f(1)=0,\ f(2)=-7,\ f(3)=26.$$

4. Намерете четири константи A, B, C и D по такъв начин, че равенството

$$x^3+3x+1=A+B(x-1)+C(x-1)(x-2)+D(x-1)(x-2)(x-3)$$

да е изпълнено при всяко x (покажете, че задачата има, и то само едно решение).

5. Нека x_1 и x_2 са две различни реални числа. Покажете, че е възможно да се определят две реални константи A_1 и A_2, и то еднозначно така, че за всички стойности на x, които са различни от x_1 и x_2, да е в сила равенството

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}.$$

6. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)^2=n(n+1)2^{n-2}.$$

Решение. Изхождаме от тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}=(1+x)^n.$$

Чрез диференциране намираме

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)x^{n-k-1}=n(1+x)^{n-1}.$$

Умножаваме двете части на това равенство по x и диференцираме още веднъж. По този начин добиваме

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)^2x^{n-k-1}=n(n-1)(1+x)^{n-2}x+n(1+x)^{n-1}.$$

Специално при $x=1$ получаваме

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)^2=n(n+1)2^{n-2}.$$

7. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^n=n!$$

Упътване. Приложете методата от предната задача към тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}=(x-1)^n.$$

8. Докажете, че

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2\binom{n}{k}x^\nu(1-x)^{n-\nu}=n(n-1)x^2+nx.$$

Решение. Изхождаме от тъждеството

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu a^{n-\nu}=(x+a)^n.$$

Като диференцираме спрямо x, получаваме

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu\binom{n}{\nu}x^{\nu-1}a^{n-\nu}=n(x+a)^{n-1}.$$

Умножаваме двете части на последното равенство с x, диференцираме по x и пак умножаваме с x. Така добиваме

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2\binom{n}{\nu}x^\nu a^{n-\nu}=n(n-1)x^2(x+a)^{n-2}+nx(x+a)^{n-1}.$$

Като поставим $a=1-x$, получаваме исканото тъждество.

9. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

(По дефиниция се полага $\binom{n}{0}=1$.)

Упътване. Сравняваме коефициентите пред x^n в тъждеството

$$(x+1)^n(x+1)^n=(x+1)^{2n}.$$

10. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството

$$\binom{2n}{0}^2-\binom{2n}{1}^2+\binom{2n}{2}^2-\cdots-\binom{2n}{2n-1}^2+\binom{2n}{2n}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}.$$

Упътване. Сравняваме коефициентите пред x^{2n} в тъждеството

$$(1+x)^{2n}(1-x)^{2n}=(1-x^2)^{2n}.$$

11. Да се покаже, че при цели стойности пред n, по-големи от 1, имаме

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\,n\binom{n}{n}=0$$

(вярно ли е твърдението при $n=1$?).

Упътване. Сравнете коефициентите пред x в тъждеството

$$x^n=1+\binom{n}{1}(x-1)+\binom{n}{2}(x-1)^2+\binom{n}{3}(x-1)^3+\cdots+\binom{n}{n}(x-1)^n.$$

12. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\frac{1}{4}\binom{n}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Решение. Разглеждаме двата полинома

$$P(x)=\frac{1}{1}\binom{n}{1}x+\frac{1}{2}\binom{n}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n}\binom{n}{n}x^n,$$

$$Q(x)=\frac{1}{1}(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2+\cdots+\frac{1}{n}(x+1)^n.$$

Очевидно

$$P'(x)=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}x+\cdots+\binom{n}{n}x^{n-1}=\frac{(x+1)^n-1}{x},$$

$$Q'(x)=1+(x+1)+(x+1)^2+\ldots+(x+1)^{n-1}=\frac{(x+1)^n-1}{x},$$

т. е. двата полинома $P(x)$ и $Q(x)$ имат една и съща производна. Оттук заключаваме, че разликата им е константа (тъй като производната на тази разлика е нула). И така

$$Q(-1)-P(-1)=Q(0)-P(0),$$

което доказва верността на твърдението.

13. Нека

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

Докажете, че ако има $n+1$ точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, за които

$$f^{(k)}(x_k)=0,\ k=0,1,\ldots,n,$$

то $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=0$.

Упътване: От $f^{(n)}(x_n)=n!\,a_0$ заключаваме, че $a_0=0$. След като вече знаем, че $a_0=0$, намираме $f^{(n-1)}(x_{n-1})=(n-1)!\,a_1$, т. е. и $a_1=0$, и пр.

14. Нека $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава n. Да се докаже, че

$$f(x)=f(a)-f'(a+h)\frac{a-x}{1!}+f''(a+2h)\frac{(a-x)(a+2h-x)}{2!}-\ldots+$$
$$+(-1)^k f^{(k)}(a+kh)\frac{(a-x)(a+kh-x)^{k-1}}{k!}+\ldots+$$
$$+(-1)^n f^{(n)}(a+nh)\frac{(a-x)(a+nh-x)^{n-1}}{n!}.$$

(Абел).

Упътване. Нека

$$\varphi(x)=f(a)-f'(a+h)\frac{a-x}{1!}+f''(a+2h)\frac{(a-x)(a+2h-x)}{2!}+\ldots+$$
$$+(-1)^n f^{(n)}(a+nh)\frac{(a-x)(a+nh-x)^{n-1}}{n!}.$$

Докажете, че

$$f^{(k)}(a+kh)=\varphi^{(k)}(a+kh)$$

при $k=0,1,\ldots,n$, и използвайте предната задача.

§ 25. Монотонни функции

Една функция $f(x)$ се нарича монотонно растяща, когато при всеки две точки x_1 и x_2 от дефиниционната ѝ област, свързани с неравенството $x_1<x_2$, съответните функционални стойности са свързани с неравенството $f(x_1)\leqq f(x_2)$. Ако всеки път, когато е изпълнено неравенството $x_1<x_2$, имаме $f(x_1)\geqq f(x_2)$, функцията $f(x)$ се нарича монотонно намаляваща.

В специалния случай, когато дефиниционната област на функцията $f(x)$ е интервал (безразлично дали той е краен или безкраен, затворен или не), е в сила следната теорема.

Ако $f(x)$ е диференцуема в дефиниционния си интервал и производната ѝ е неотрицателна, то функцията $f(x)$ е монотонно растяща; ако производната ѝ никъде не е положителна, то функцията е монотонно намаляваща.

Доказателството се извършва без труд с помощта на теоремата за крайните нараствания.

Нека x_1 и x_2 са две точки от дефиниционния интервал на $f(x)$, като $x_1<x_2$. Прилагайки теоремата за крайните нараствания, получаваме

(1) $$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),$$

където ξ е едно число от вътрешността на интервала (x_1, x_2). Ако във всяка точка на дефиниционния интервал на $f(x)$ имаме $f'(x)\geqq 0$, то специално и $f'(\xi)\geqq 0$, откъдето

$$f(x_2)-f(x_1)\geqq 0,$$

т. е. функцията $f(x)$ е монотонно растяща. От равенството (1) се вижда, че ако $f'(x)$ не се анулира никъде и $x_1 \neq x_2$, то и $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ако пък навсякъде имаме $f'(x) \leqq 0$, то и $f'(\xi) \leqq 0$ и следователно

$$f(x_2) - f(x_1) \leqq 0,$$

което показва, че функцията $f(x)$ е монотонно намаляваща.

С това доказателството на теоремата е завършено.

Монотонно растящите и монотонно намаляващите функции се наричат с общо име монотонни функции.

Пример. Функцията $f(x) = x^3$, дефинирана при всички стойности на x, е монотонно растяща, защото $f'(x) = 3x^2 \geqq 0$. Докажете това, без да си служите с производни!

Не е трудно да се докаже, че в този специален случай имаме $f(x_1) = f(x_2)$ само ако $x_1 = x_2$. И наистина не е възможно едното от числата x_1 и x_2 да бъде съществено положително, а другото съществено отрицателно, защото в противен случай едното от числата $f(x_1)$ и $f(x_2)$ ще бъде съществено положително, а другото съществено отрицателно и следователно не бихме имали $f(x_1) = f(x_2)$. Ако допуснем, че числата x_1 и x_2 са различни, то пред вид $f(x_1) = f(x_2)$ можем да приложим към $f(x)$ теоремата на Рол. И така има поне една вътрешна точка x_0 в интервала (x_1, x_2), в която производната $f'(x)$ се анулира. От

$$f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$$

получаваме $x_0 = 0$, т. е. точката 0 е вътрешна за интервала (x_1, x_2) откъдето следва, че едното от числата x_1 и x_2 е съществено положително, а другото съществено отрицателно, което, както знаем, не е възможно. С това ние достигнахме до исканото противоречие, което се дължи на допускането, че $x_1 \neq x_2$. Докажете, че от $x_1^3 = x_2^3$ следва $x_1 = x_2$, без да си служите с производни!

ГЛАВА II

РАЗВИВАНЕ НА ФУНКЦИИТЕ В РЕДОВЕ

§ 1. Степенни редове

Редове от вида*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

където коефициентите $a_0, a_1, a_2, \ldots$ не зависят от x, се наричат степенни редове. Понятието степенен ред може да се разглежда като обобщение на понятието полином.

Пример. Геометричната прогресия

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

представлява един специален степенен ред, при който всички коефициенти са равни на 1.

Когато е даден един степенен ред, може да се случи за едни стойности на x той да бъде сходящ, а за други разходящ. Множеството на всички точки, за които един степенен ред е сходящ, се нарича негова област на сходимост.

Пример. Редът

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

е сходящ за всички стойности на x. Неговата област на сходимост се състои от цялата ос x.

Редът

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

е сходящ при $-1 < x < 1$. При $|x| \geqq 1$ този ред е разходящ.

Редът

$$1 + 1!x + 2!x^2 + \cdots + n!x^n + \cdots$$

е сходящ само при $x = 0$, защото при $x \neq 0$ общият му член не клони към нула. И наистина при $x \neq 0$ се установява лесно с помощта на критерия на Даламбер, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,|x|^n}$$

* Редове от вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

също често пъти се наричат степенни редове.

е сходящ. От това следва, че общият му член $\frac{1}{n!\,|x|^n}$ клони към нула, откъдет пък следва, че $n!\,|x|^n$ расте неограничено.

Разбира се, при $x=0$ един степенен ред е непременно сходящ. Сега ще докажем, че ако степенният ред

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

е сходящ при някое $x_0 \neq 0$, той е абсолютно сходящ за всички стойности на x, за които $|x|<|x_0|$. Доказателството извършваме така. Щом редът

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots$$

е сходящ, редицата от членовете му

$$a_0,\ a_1x_0,\ a_2x_0^2,\dots$$

е сходяща (тя клони към нула) и следователно тя е ограничена. Да означим с A една горна граница на $|a_n x_0^n|$. В такъв случай имаме

$$|a_n x^n|=|a_n x_0^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqq A\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

И така членовете на реда

(1) $$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\dots$$

не надминават съответните членове на геометричната прогресия

$$A+A\left|\frac{x}{x_0}\right|+A\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\dots$$

Когато $|x|<|x_0|$, имаме $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$, т. е. получената геометрична прогресия е сходяща. От това следва, че редът (1) е също сходящ или, което е същото, редът

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

е абсолютно сходящ.

Сега ще покажем, че областта на сходимост на един степенен ред е един интервал с център в началото на координатната система. Този интервал може да представлява цялата ос OX, може да се изражда в една точка и най-сетне може да представлява един истински интервал с крайна дължина.

И наистина нека M е областта на сходимост на степенния ред

(2) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

Множеството M сигурно не е празно, защото то съдържа поне точката 0. Ако множеството M е неограничено отгоре, то съдържа всички

реални числа (т. е. редът (2) е сходящ при всички стойности на x). Това може да се установи по следния начин. Нека x_1 е произволно реално число. Щом множеството M отгоре не е ограничено, винаги може да се намери число x_0 в M, за което $|x_1|<x_0$, т. е. $|x_1|<|x_0|$. Но тъй като редът (2) е сходящ в точката x_0 (точката x_0 принадлежи на M), въз основа на това, което доказахме преди малко, заключаваме, че той е сходящ и в точката x_1.

Сега ще разгледаме случая, когато множеството M е ограничено отгоре. Нека r е точната горна граница на M. Ще покажем, че при $|x|<r$ редът (2) е сходящ, а при $|x|>r$ той е разходящ. И наистина нека $|x_1|<r$. В такъв случай $|x_1|$ не е горна граница на M (тъй като $|x_1|$ е по-малко от най-малката горна граница на M) и следователно има поне едно число x_0 от M (където следователно редът е сходящ), за което $|x_1|<x_0$. Но щом в точката x_0 редът (2) е сходящ, той трябва съгласно доказаното да бъде сходящ и в точката x_1. Нека сега x_2 е една точка, за която $|x_2|>r$. Ще покажем, че редът (2) е разходящ в тази точка. И наистина нека $r<x'<|x_2|$. Тъй като r е една горна граница на M, то x' не принадлежи на M, т. е. редът (2) е разходящ в точката x'. От това следва, че редът е разходящ и в точката x_2, защото в противен случай от неравенството $0<x'<|x_2|$ би следвало, че редът (2) трябва да бъде сходящ и в точката x', което не е вярно. И така ние доказахме, че редът (2) е сходящ при $|x|<r$ и разходящ при $|x|>r$. При $x=r$ и при $x=-r$ ние не разгледахме реда. Както ще видим с помощта на примери, има редове, които в тия две точки са разходящи, има редове, които в тия две точки са сходящи, и най-сетне има редове, които в едната от точките са сходящи, а в другата разходящи. Числото r се нарича радиус на сходимост на степенния ред. Когато степенният ред е сходящ за всяко x, казваме, че неговият радиус на сходимост е безкрайност. В случай че $r=0$, редът е сходящ само при $x=0$.

Примери. Радиусът на сходимост на реда

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

е безкрайност (този ред е сходящ при всички стойности на x).

Радиусът на сходимост на реда

$$1+1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+\dots$$

е нула (този ред е сходящ само при $x=0$).

Радиусът на сходимост на реда

$$1+x+x^2+x^3+\dots$$

е единица (редът е сходящ при $-1<x<1$ и разходящ извън този интервал; специално при $x=-1$ и $x=1$ този ред е разходящ).

Радиусът на сходимост на реда

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots$$

е единица (редът е сходящ при $-1 \leq x < 1$ и вън от този интервал е разходящ; специално при $x=-1$ редът е сходящ, а при $x=1$ той е разходящ).

Радиусът на сходимост на реда

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots$$

е единица (защо?). Редът е сходящ при $-1 \leq x \leq 1$ и вън от този интервал е разходящ; специално при $x=-1$ и $x=1$ редът е сходящ.

От посочените примери е ясно, че в краищата на интервала на сходимост редът може да бъде сходящ, може да бъде разходящ и най-сетне в единия край може да бъде сходящ, а в другия разходящ.

§ 2. Диференциране на степенни редове

Нека

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

е един степенен ред, чийто радиус на сходимост е различен от нула. Сумата на този ред, разбира се, зависи от избора на числото x. Тя е обаче еднозначно дефинирана, когато редът е сходящ при избраната стойност на x. И така сумата на един степенен ред е функция на x, дефинирана в областта на сходимост на реда. Да означим с $f(x)$ тази функция. Ще докажем, че функцията $f(x)$ е диференцуема във всички вътрешни точки на интервала на сходимост на дадения степенен ред, че редът

$$1a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

е сходящ за тия точки и че

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

Това твърдение не следва непосредствено от правилото за диференциране на сума, защото ние доказахме това правило само за суми от краен брой събираеми, а в дадения случай се касае за почленното диференциране на един безкраен ред.

Преди да пристъпим към доказателството на интересуващата ни теорема, ще докажем, че радиусът на сходимост на реда

(2) $$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

е равен на радиуса на сходимост на реда

(3) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

Нека x_0 е една точка от вътрешността на интервала на сходимост на реда (3). В такъв случай може да се намери число x_1, по-голямо от $|x_0|$, за което редът (3) все още е сходящ. От сходимостта на реда

$$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3+\cdots$$

следва, че редицата

$$a_0,\ a_1x_1,\ a_2x_1^2,\ a_3x_1^3,\cdots$$

клони към нула и следователно е ограничена. Нека A е една горна граница на $|a_nx_1^n|$ за $n=1, 2, 3, \ldots$ В такъв случай получаваме неравенството

$$|na_nx_0^{n-1}|=n|a_nx_1^n|\cdot\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^{n-1}\frac{1}{x_1}<n\frac{A}{x_1}q^{n-1},$$

където сме положили $q=\left|\frac{x_0}{x_1}\right|$. Това неравенство ни учи, че редът

$$1a_1+2a_2x_0+3a_3x_0^2+\cdots$$

е сходящ (дори абсолютно), тъй като членовете му не надминават по абсолютна стойност съответните членове на реда

$$\frac{A}{x_1}(1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}+\cdots),$$

чиято сходимост се установява лесно например с помощта на критерия на Даламбер, тъй като $0 \leq q < 1$.

От друга страна, ако x_0 е една вътрешна точка от интервала на сходимост на реда (2), то редът

$$|x_0|(|a_1|+|2a_2x_0|+|3a_3x_0^2|+\cdots)$$

е сходящ (понеже при $x=x_0$ редът (2) е абсолютно сходящ). От неравенството

$$|a_nx_0^n| \leq |na_nx_0^n|, \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

заключаваме, че редът

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots$$

е също сходящ (дори абсолютно).

Направените разсъждения показват, че редовете (2) и (3) имат един и същ радиус на сходимост.

Като приложим доказаното за реда

$$1.2a_2+2.3a_3x+3.4a_4x^2+\cdots,$$

който се получава чрез почленното диференциране на реда

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots,$$

заключаваме, че неговият радиус на сходимост съвпада с радиуса на сходимост на реда (2), а следователно и на реда (3). Като приложим няколко пъти тези разсъждения, заключаваме, че всеки ред, получен от реда (1) чрез неколкократно почленно диференциране, има еднакъв с него (краен или безкраен) радиус на сходимост.

След тези предварителни бележки ние вече сме готови да преминем към доказателството на интересуващата ни теорема. За целта изхождаме от дефиницията на понятието производна. Нека x_0 е една точка от вътрешността на интервала на сходимост на реда (1). Нека x_1 е една точка също от вътрешността на интервала на сходимост на реда (1), за която $x_1 > |x_0|$. Такава точка може да се намери, защото точката x_0 е вътрешна за интересуващия ни интервал. Нека h е достатъчно малко по абсолютна стойност число, за да имаме $|x_0+h| < x_1$. В такъв случай, ако $h \neq 0$, можем да пишем

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a_1\frac{(x_0+h)-x_0}{h} + a_2\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} + a_3\frac{(x_0+h)^3-x_0}{h} + \cdots \tag{4}$$

Редът

$$\varphi(x_0) = a_1 + 2a_2x_0 + 3a_3x_0^2 + \cdots \tag{5}$$

е сходящ, защото точката x_0 лежи във вътрешността на интервала на сходимост на реда (1), а следователно и на реда (2). От равенствата (4) и (5) получаваме

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \varphi(x_0) = a_2\left[\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} - 2x_0\right] + \cdots + a_n\left[\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} - nx_0^{n-1}\right] + \cdots$$

Като приложим теоремата за крайните нараствания, добиваме

$$\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} = n\xi_n^{n-1}, \quad \xi_n = x_0+\theta_n h, \quad 0<\theta_n<1,$$

а оттук въз основа пак на теоремата за крайните нараствания —

$$\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} - nx_0^{n-1} = n(\xi_n^{n-1}-x_0^{n-1}) = n(n-1)(\xi_n-x_0)\eta_n^{n-2},$$

$$\eta_n = x_0+\theta_n'(\xi_n-x_0), \qquad 0<\theta_n'<1.$$

По такъв начин, като вземем под внимание, че $|\eta_n| < x_1$ и $|\xi_n - x_0| < |h|$, достигаме до следното неравенство:

$$\left|\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} - nx_0^{n-1}\right| \leqq n(n-1)x_1^{n-2}|h|,$$

откъдето

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \varphi(x_0)\right| \leqq |h|(2.1|a_2|+3.2|a_3x_1|+4.3|a_4x_1^2|+\ldots).$$

Редът

$$2.1|a_2|+3.2|a_3x_1|+4.3|a_4x_1^2|+\cdots$$

обаче е сходящ, защото точката x_1 е вътрешна за интервала на сходимост и сумата му ни най-малко не зависи от h и следователно, както и да изберем положителното число ε, винаги може да се намери положително число δ така, че при $|h| < \delta$ да имаме

$$|h|(2.1|a_2|+3.2|a_3x_1|+4.3|a_4x_1^2|+\cdots) < \varepsilon,$$

а следователно и

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \varphi(x_0)\right| < \varepsilon.$$

С това ние доказахме, че функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0 и нейната производна е $\varphi(x_0)$.

И така ние доказахме следната важна теорема:

Ако радиусът на сходимост на степенния ред

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

е отличен от нула, то сумата $f(x)$ е диференцуема във всяка вътрешна точка x_0 от интервала на сходимостта му и

$$f'(x_0) = a_1+2a_2x_0+3a_3x_0^2+\cdots+na_nx_0^{n-1}+\cdots$$

§ 3. Редици от функции

Нека е дадена една редица от функции

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{1}$$

които са дефинирани в някой интервал Δ. Казваме, че тази редица от функции е сходяща в разглеждания интервал, когато е сходяща редицата от функционалните стойности при всяка фиксирана стойност на x в интервала Δ. С други думи, казваме, че редицата (1) е сходяща в интервала Δ, когато при всяко фиксирано x от този интервал може да се намери такова число $f(x)$, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери число ν по такъв начин, че при $n > \nu$ да е изпълнено неравенството

$$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon.$$

Числото $f(x)$ се нарича граница на редицата (1) при избраната стойност на x. Ние означихме границата със символа $f(x)$, за да напомним, че тя може евентуално да се мени, когато изменяме x. Тя обаче е еднозначно дефинирана, когато x е дадено, и следователно представлява функция на x.

Нека подчертаем изрично, че в дефиницията, която дадохме, не се забранява ν евентуално да се мени, когато изменяме ε и x. Поради това ние често ще пишем $\nu=\nu(\varepsilon, x)$.

Ако при всеки избор на $\varepsilon>0$ е възможно да се избере число $\nu(\varepsilon)$, евентуално зависещо от ε, *но не и от* x по такъв начин, че при $n>\nu(\varepsilon)$ да имаме

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

при всички стойности на x в интервала Δ, казваме, че редицата (1) е равномерно сходяща в този интервал.

Като пример да разгледаме редицата с общ член

$$f_n(x)=\frac{x}{n} \tag{2}$$

върху цялата ос x. Тази редица е сходяща и граничната ѝ функция е константата нула. И наистина нека ε е произволно положително число. Ако поставим $\nu=\frac{|x|}{\varepsilon}$, ще имаме

$$|f_n(x)-0|=\frac{|x|}{n}<\varepsilon$$

при $n>\nu$.

Числото ν, което ние по този начин съпоставихме на ε, зависи в този специален случай не само от ε, но и от x. Ще покажем, че не е възможно да се избере независещо от x число $\nu(\varepsilon)$ така, че когато $n>\nu(\varepsilon)$, да имаме

$$|f_n(x)-0|<\varepsilon \tag{3}$$

при всички стойности на x. Доказателството ще извършим, като допуснем противното. Нека в неравенството (3) фиксираме n (като му дадем, разбира се, стойност, по-голяма от $\nu(\varepsilon)$). В такъв случай, ако е вярно допускането, от което изхождаме, ще имаме при всички стойности на x

$$\frac{|x|}{n}<\varepsilon$$

или

$$|x|<\varepsilon n.$$

Последното неравенство обаче сигурно е нарушено, когато $|x|$ е достатъчно голямо. С това ние доказахме, че редицата (2) не е равномерно сходяща върху цялата ос x.

Напротив, редицата с общ член

$$g_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$$

е равномерно сходяща върху цялата ос x (нейната граница е константата нула). И наистина да изберем едно кое да е положително число ε.

В такъв случай, ако положим $\nu=\frac{1}{\varepsilon}$, то при $n>\nu$ ще имаме

$$|g_n(x)-0|=\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\leqq\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

В този пример числото $\nu=\frac{1}{\varepsilon}$ не зависи от x и следователно разглежданата редица е равномерно сходяща.

Не е трудно да се докаже, че за да бъде редицата (1) равномерно сходяща в Δ, необходимо и достатъчно е при всеки избор на положителното число ε да може да се намери едно независещо от x число $\nu=\nu(\varepsilon)$ по такъв начин, че ако $n>\nu$, да имаме

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

при всички цели положителни стойности на p и при всяко x от Δ. Доказателството предоставяме на читателя.

За да фиксираме идеите, ние дефинирахме понятието равномерна сходимост по отношение на един интервал. Читателят може обаче, ако иска, под Δ да разбира произволно точково множество. Нека все пак изрично подчертаем, че понятието равномерна сходимост представлява интерес само когато множеството Δ е съставено от безбройно много точки, защото в противен случай всяка сходяща редица от функции е и равномерно сходяща (защо?).

§ 4. Редове, членовете на които са функции

Един ред

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots, \tag{1}$$

членовете на който са функции, дефинирани в един интервал Δ, се нарича сходящ, когато редицата от частичните му суми е сходяща. Редът се нарича равномерно сходящ в интервала Δ, когато редицата от частичните му суми е равномерно сходяща в този интервал.

Ще дадем сега едно просто и важно достатъчно условие за равномерна сходимост на един ред. Това условие може да се формулира така: ако редът

$$a_1+a_2+a_3+\cdots \tag{2}$$

членовете на който не зависят от x, е сходящ и ако при всяко x от интервала Δ са изпълнени неравенствата

$$|u_n(x)|\leqq a_n, \tag{3}$$

то редът (1) е равномерно сходящ в този интервал.

Нека отбележим, че неравенствата (3) осигуряват сходимостта на реда (1) при всяко x в интервала Δ. Това, което искаме да покажем, е, че сходимостта е равномерна в този интервал. Да означим с $S(x)$

сумата на реда (1), а с $S_n(x)$ неговата n-та частична сума. В такъв случай

$$S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots$$

Да си изберем едно произволно положително число ε и да му съпоставим число $\nu(\varepsilon)$ така, че при $n>\nu(\varepsilon)$ да имаме

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots<\varepsilon.$$

Това е възможно да се направи, защото редът (2) е сходящ. Нека обърнем внимание на това, че начинът, по който сме дефинирали числото $\nu(\varepsilon)$, ни най-малко не зависи от x. От друга страна, неравенствата (3) ни дават

$$|S(x)-S_n(x)|\leqq|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\ldots\leqq a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots,$$

откъдето следва, че при $n>\nu(\varepsilon)$ имаме

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

каквото и да е x в интервала Δ. Този резултат ни учи, че редът (1) е равномерно сходящ в разглеждания интервал.

Пример 1. Редът

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\cdots$$

е равномерно сходящ върху цялата ос x, защото

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqq\frac{1}{n^2}$$

и редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, членовете на който не зависят от x, е сходящ.

В заключение нека отбележим, че няма връзка между абсолютната и равномерната сходимост. Така например редът

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}x^{\nu}(1-x^2)$$

е абсолютно сходящ при $-1\leqq x\leqq 1$, но не е равномерно сходящ, а редът

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}x}{\nu}$$

е равномерно сходящ във всеки краен интервал, но не е абсолютно сходящ освен при $x=0$.

Пример 2. Нека

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

е степенен ред и r е неговият радиус на сходимост. Ако $0\leqq\rho<r$, то този ред е равномерно сходящ при $|x|\leqq\rho$, защото редът

$$|a_0|+|a_1\rho|+|a_2\rho^2|+\cdots$$

е сходящ и

$$|a_nx^n|\leqq|a_n\rho^n|.$$

§ 5. Редици от непрекъснати функции

Нека редицата от функциите

(1) $$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_n(x),\ldots$$

е сходяща в интервала Δ. Тук ще си поставим следния въпрос: може ли да се твърди, че граничната функция $f(x)$ е непрекъсната, ако се знае, че всичките членове на редицата (1) са непрекъснати функции в интервала Δ? Отговорът на този въпрос е отрицателен. Ще си уясним това с един пример. Нека Δ е затвореният интервал $[0, 1]$ и нека $f_n(x)=x^n$. В такъв случай функциите $f_n(x)$ са всички непрекъснати в разглеждания интервал. Въпреки това обаче граничната функция $f(x)$ е прекъсната при $x=1$, защото

$$f(x)=0 \text{ при } 0\leqq x<1 \text{ и}$$

$$f(1)=1.$$

И така непрекъснатостта на членовете на една сходяща редица не е достатъчна, за да ни осигури **непрекъснатостта на граничната функция**. Ако обаче редицата (1) е **равномерно** сходяща в интервала Δ и членовете ѝ са непрекъснати в този интервал, то граничната функция $f(x)$ е също тъй непрекъсната в интервала Δ.

И наистина нека x_0 е произволна точка от интервала Δ. Да изберем едно произволно положително число ε и да му съпоставим такова число $\nu(\varepsilon)$, че при $n>\nu(\varepsilon)$ да имаме

(2) $$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

при **всички** стойности на x от Δ. Това е възможно да се направи, защото редицата (1) е равномерно сходяща. След като е фиксирано числото $\varepsilon>0$, ние можем да фиксираме и $\nu(\varepsilon)$, а с това да фиксираме и n, като му дадем произволна стойност, по-голяма от $\nu(\varepsilon)$. Функцията $f_n(x)$ е обаче непрекъсната при $x=x_0$. Следователно ние можем да изберем положително число δ така, че при $|x-x_0|<\delta$ да имаме

(3) $$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

разбира се, когато точката x принадлежи на Δ. От друга страна,

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)| .$$

Оттук, като вземем пред вид неравенствата (2) и (3), получаваме при $|x-x_0|<\delta$

$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

което показва, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

Пример. Редът

$$S(x)=\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\dots$$

е равномерно сходящ по цялата ос x, защото $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. От това заключаваме, че редицата от частичните му суми е също равномерно сходяща. Членовете на реда, а следователно и частичните му суми са непрекъснати функции на x. От това заключаваме, че сумата му $S(x)$ е непрекъсната функция на x.

§ 6. Диференциране на безкрайни редици от функции

Нека функциите

(1) $$f_1(x),\ f_2(x),\dots,\ f_n(x),\dots$$

са дефинирани и диференцуеми в някой интервал Δ и нека редицата от производните

$$f'_1(x),\ f'_2(x),\dots\ f'_n(x),\dots$$

е равномерно сходяща в Δ. Ако има поне една точка x_0 в Δ, за която редицата от функционалните стойности

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),\dots,\ f_n(x_0),\dots$$

е сходяща, то редицата (1) е сходяща навсякъде в Δ, граничната функция е диференцуема и

$$(\lim f_n(x))'=\lim f'_n(x).$$

Доказателство. Ние първо ще установим сходимостта на редицата (1) в целия интервал Δ. За тази цел разглеждаме функцията

$$g(x)=f_{n+p}(x)-f_n(x).$$

Теоремата за крайните нараствания ни дава

$$g(x)-g(x_0)=(x-x_0)\,g'(x_0+\theta h),\quad 0<\theta<1,\quad h=x-x_0.$$

Оттук получаваме

$$f_{n+p}(x)-f_n(x)=f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)+(x-x_0)\,[f'_{n+p}(x_0+\theta h)-f'_n(x_0+\theta h)].$$

Избираме произволно положителното число ε. В такъв случай при достатъчно големи стойности на n, при всички цели неотрицателни стойности на p и при всяко t от Δ имаме

$$|f'_{n+p}(t)-f'_n(t)| < \varepsilon,$$

$$|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)| < \varepsilon$$

и следователно

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)| \leq \varepsilon(1+|x-x_0|),$$

откъдето следва, че редицата (1) е наистина сходяща. (От направените разсъждения се вижда, че сходимостта е дори равномерна, когато x остава ограничено).

Преминаваме към доказателството на втората част на теоремата. За тази цел полагаме

$$\lim f_n(x)=f(x),$$

$$\lim f'_n(x)=\varphi(x).$$

Избираме произволно положително число ε и му съпоставяме цялото* положително число n по такъв начин, че при всички цели положителни стойности на p и при всяко x от Δ да имаме

$$|f'_{n+p}(x)-f'_n(x)| < \varepsilon.$$

В такъв случай очевидно имаме и

$$|\varphi(x)-f'_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Нека x_1 е точка от Δ. Означаваме с h едно различно от нула число, за което точката x_1+h принадлежи на Δ. Нека h е толкова малко, че да имаме

$$\left|\frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}-f'_n(x_1)\right| < \varepsilon.$$

В такъв случай при всички цели положителни стойности на p имаме

$$\left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-\varphi(x_1)\right| \leq \left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-\frac{f_{n+p}(x_1+h)-f_{n+p}(x_1)}{h}\right| +$$

$$+\left|\frac{f_{n+p}(x_1+h)-f_{n+p}(x_1)}{h}-\frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}\right| +$$

$$+\left|\frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}-f'_n(x_1)\right|+\left|f'_n(x_1)-\varphi(x_1)\right|$$

* По-нататък при нашите разсъждения n остава фиксирано.

и следователно, ако p е достатъчно голямо, то

$$\left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-\varphi(x_1)\right|<$$

$$<3\varepsilon+\left|\frac{f_{n+p}(x_1+h)-f_{n+p}(x_1)}{h}-\frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}\right|.$$

Прилагаме теоремата за крайните нараствания към функцията

$$p(x)=f_{n+p}(x)-f_n(x).$$

Това ни дава

$$p(x_1+h)-p(x_1)=hp'(x_1+\theta_1 h)=h[f'_{n+p}(x_1+\theta_1 h)-f'_n(x_1+\theta_1 h)],$$

където $0<\theta_1<1$. По такъв начин получаваме

$$\left|\frac{f_{n+p}(x_1+h)-f_{n+p}(x_1)}{h}-\frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}\right|<\varepsilon.$$

Оттук намираме окончателно, че при всички достатъчно малки, различни от нула стойности на h, за които точката x_1+h принадлежи на Δ, е в сила неравенството

$$\left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-\varphi(x_1)\right|<4\varepsilon.$$

По такъв начин доказахме, че функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_1 и $f'(x_1)=\varphi(x_1)$, с което доказателството е завършено.

Пример. Нека

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

е степенен ред и r е неговият радиус на сходимост. Да означим с ρ едно положително число, което е по-малко от r (обаче не равно на r). В такъв случай редът

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots,$$

чийто радиус на сходимост е също r, е равномерно сходящ при $|x|\leq\rho$ (вж. пример 2 към § 4 от тази глава), а следователно и редицата от частичните му суми е равномерно сходяща в този интервал. Оттук се вижда, като вземем под внимание, че ρ може да се избира произволно близо до r, че функцията $f(x)$ е диференцуема при $|x|<r$ и

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots,$$

нещо, което доказахме директно в § 2 от тази глава.

§ 7. Формула на Тейлор (Taylor) за полиноми

Нека $f(x)$ е произволен полином, чиято степен не надминава n, и a е едно произволно число. Ще покажем, че е в сила следната формула:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Тази формула носи името на Тейлор. Верността ѝ се установява по следния начин: нека

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n;$$

оттук получаваме

$$f(a+h)=a_0+a_1(a+h)+a_2(a+h)^2+\dots+a_n(a+h)^n;$$

като разкрием скобите и направим приведение, получаваме за $f(a+h)$ един полином на h, чиято степен не надминава n; като означим с $b_0, b_1, \dots, b_n$ коефициентите на този полином, получаваме

$$(1)\qquad f(a+h)=b_0+b_1h+b_2h^2+\dots+b_nh^n;$$

това равенство е валидно при всички стойности на h; специално като поставим $h=0$, намираме

$$f(a)=b_0;$$

диференцирайки равенството (1) по h, намираме

$$(2)\qquad f'(a+h)=b_1+2b_2h+3b_3h^2+\dots+nb_nh^{n-1};$$

оттук при $h=0$ получаваме $f'(a)=b_1$; диференцираме още веднъж равенството (2) по h и получаваме

$$f''(a+h)=2.1b_2+3.2b_3h+\dots+n(n-1)b_nh^{n-2},$$

откъдето, като положим $h=0$, намираме $f''(a)=2.1b_2$; като продължим тези разсъждения, намираме последователно

$$b_0=f(a),\quad b_1=\frac{f'(a)}{1!},\quad b_2=\frac{f''(a)}{2!},\dots,\quad b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

С това интересуващата ни формула е изведена.

Ако положим $a+h=x$, формулата на Тейлор за полином $f(x)$ от степен $\leq n$ добива вида

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

§ 8. Обща формула на Тейлор

В този параграф ще разгледаме въпроса за приближено представяне на функциите с полиноми.

Нека $f(x)$ е една функция, дефинирана и диференцуема $n+1$ пъти в някой интервал, който съдържа точката a. Ние знаем, че в специалния случай, когато $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава n, е в сила формулата

$$(1)\qquad f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

В общия случай (т. е. когато $f(x)$ не е такъв полином) това равенство не е задължено да бъде изпълнено. Може да се постави обаче

въпросът, дали равенството (1) не е поне приблизително вярно и в случая, когато $f(x)$ не е полином от степен $\leqq n$. Така поставеният въпрос не е достатъчно ясен, защото не е ясно какво значи „една приблизително вярна формула". Ние по-точно ще си поставим за задача да изучим грешката, която се прави, когато вместо $f(x)$ вземем стойността на полинома x

$$f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

За тази цел означаваме с R_n разликата

$$R_n=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1!}f'(a)-\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

и така получаваме вече напълно точното равенство

$$(2)\qquad f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n.$$

Интересуващата ни грешка е R_n. Обикновено R_n се нарича остатъчен член, а равенството (2) се нарича формула на Тейлор (Taylor). За да изследваме по-отблизо R_n, когато x е различно от a число от вътрешността на околността Δ, образуваме си помощната функция на t

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1!}f'(t)-\cdots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\lambda(x-t)^p,$$

където p е произволно цяло положително число, x е фиксирано и константата λ избираме така, че да имаме

$$(3)\qquad \varphi(a)=\varphi(x),$$

за да можем да приложим за функцията $\varphi(t)$ теоремата на Рол. От равенството (3) получаваме

$$f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1!}f'(a)-\cdots-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)-\lambda(x-a)^p=0$$

или

$$(4)\qquad R_n-\lambda(x-a)^p=0,$$

откъдето определяме стойността на множителя λ.

Функцията $\varphi(t)$ е непрекъсната в затворения интервал* $[a, x]$ и диференцуема в него; освен това $\varphi(a)=\varphi(x)$; това ни дава право да приложим теоремата на Рол за функцията $\varphi(t)$ по отношение на интервала $[a, x]$. И така има поне една точка ξ във вътрешността на интервала $[a, x]$, в която $\varphi'(\xi)=0$. Като вземем под внимание, че

* Нека изрично подчертаем, че точката x може да се намира както отдясно, така и отляво на a, макар и в символа $[a, x]$ да сме поставили x отдясно.

$$\varphi'(t)=-f'(t)+\left[f'(t)-\frac{x-t}{1!}f''(t)\right]+\left[\frac{x-t}{1!}f''(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)\right]+$$
$$+\cdots+\left[\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\right]+p\lambda(x-t)^{p-1}=$$
$$=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+p\lambda(x-t)^{p-1},$$

намираме

$$\varphi'(\xi)=-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)+p\lambda(x-\xi)^{p-1}=0$$

и следователно

$$\lambda=\frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi).$$

Това ни дава възможност, като имаме пред вид равенството (4), да представим остатъчния член R_n във вида

$$R_n=\frac{(x-\xi)^{n-p+1}(x-a)^p}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi).$$

Ако положим, както това често се прави,

$$x-a=h \quad \text{и} \quad \frac{\xi-a}{x-a}=\theta,$$

получаваме

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

където $0<\theta<1$. Числото θ зависи от функцията $f(x)$ и от числата a, x, n и p. Нека припомним, че ние имаме голяма свобода в избора на p. Ако изберем специално $p=n+1$, получаваме

$$(5)\qquad R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Така получената форма за остатъчния член се нарича форма на Лагранж (Lagrange). Ако поставим $p=1$, получаваме

$$(6)\qquad R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Тази форма носи името форма на Коши (Cauchy) за остатъчния член. Числото θ, което участвува във формулата (5) в общия случай, е различно от числото θ, което участвува във формулата (6).

По този начин изведохме формулите (5) и (6) при предположение, че $a \neq x$ (ние прилагахме теоремата на Рол за интервала $[a, x]$). Те са

верни обаче и при $a=x$, защото в този случай имаме както $R_n=0$, така и $h=0$.

Остатъчният член може да се представи и в други форми, но за нашите нужди ще бъдат достатъчни двете форми (на Лагранж и Коши), които ние му дадохме.

Специално, когато $a=0$, формулата на Тейлор се нарича формула на Маклорен (Mac Laurin). И така формулата

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n$$

се нарича формула на Маклорен (тук вместо h сме писали x), където остатъчният член R_n, представен във формата на Лагранж, има вида

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\quad 0<\theta<1,$$

а във формата на Коши —

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x),\quad 0<\theta<1.$$

В заключение ще отбележим, че за да можем да проведем разсъжденията от този параграф, достатъчно е да се предполага, че функцията $f(t)$ е диференцуема n пъти в затворения интервал $[a, x]$, а n-тата производна $f^n(t)$ е диференцуема поне в отворения интервал (a, x) и е непрекъсната в крайните му точки.

§ 9. Отношение на два остатъчни члена

Нека в някой интервал Δ, който съдържа точката a, са дефинирани две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$; нека освен това функцията $f(x)$ е диференцуема поне $n+1$ пъти, функцията $\varphi(x)$ е диференцуема поне $k+1$ пъти и $\varphi^{(k+1)}(x)\neq 0$ в Δ. При тези предположения ще намерим една проста зависимост между двата остатъчни члена

$$R_n=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1!}f'(a)-\cdots-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

$$\rho_k=\varphi(x)-\varphi(a)-\frac{x-a}{1!}\varphi'(a)-\cdots-\frac{(x-a)^k}{k!}\varphi^{(k)}(a).$$

За тази цел прилагаме обобщената теорема за крайните нараствания за функциите

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1!}f'(t)-\cdots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t),$$

$$\Phi(t)=\varphi(x)-\varphi(t)-\frac{x-t}{1!}\varphi'(t)-\cdots-\frac{(x-t)^k}{k!}\varphi^{(k)}(t)$$

по отношение на интервала $[a, x]$. По такъв начин получаваме

$$\frac{F(a)-F(x)}{\Phi(a)-\Phi(x)}=\frac{F'(\xi)}{\Phi'(\xi)},$$

където ξ принадлежи на отворения интервал (a, x).

Оттук, като вземем под внимание, че

$$F(x)=0,\quad F(a)=R_n,$$

$$\Phi(x)=0,\quad \Phi(a)=\rho_k,$$

$$F'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t),$$

$$\Phi'(t)=-\frac{(x-t)^k}{k!}\varphi^{(k+1)}(t),$$

намираме

$$\frac{R_n}{\rho_k}=\frac{k!\,(x-\xi)^{n-k}f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,\varphi^{(k+1)}(\xi)}.$$

От тази обща формула получаваме при $k=0$ и $\varphi(t)=(x-t)^p$, $p>0$, познатото представяне на остатъчния член във формулата на Тейлор

$$R_n=\frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi),$$

от което, както знаем, при $p=n+1$ се получава представянето на Лагранж, а при $p=1$ се получава представянето на Коши.

Общата формула, която получихме, приема следния особено прост вид при $k=n$:

$$\frac{R_n}{\rho_n}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}.$$

Оттук заключаваме, че ако

$$|f^{(n+1)}(t)|\leqq|\varphi^{(n+1)}(t)|$$

във всички вътрешни точки на интервала (a, x), то

$$|R_n|\leqq|\rho_n|.$$

При

$$\varphi(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{b-x},\quad b\neq a,$$

имаме

$$\varphi^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!\,(b-a)^{n+1}}{(b-x)^{n+2}},\quad \rho_n=\varphi(x)$$

и следователно при $|x-a|<|b-a|$ равенството

$$\frac{R_n}{\rho_n}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}$$

добива вида

$$R_n=\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n+1}\cdot\frac{(b-\xi)^{n+2}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!\,(b-x)}.$$

§ 10. Тейлоров ред

Нека функцията $f(x)$ е безбройно много пъти диференцуема в някоя околност на точката a. В такъв случай безкрайният ред

$$f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

се нарича Тейлоров ред на функцията $f(x)$. Така написаният ред не винаги е сходящ. И наистина да разгледаме функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ и да изберем $a=1$.
От

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{(k)}\frac{k!}{x^{k+1}},\qquad k=1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

намираме

$$f^{(k)}(1)=(-1)^k k!$$

и следователно интересуващият ни ред е

$$1-h+h^2-h^3+\ldots$$

Този ред е разходящ при $|h|\geqq 1$. Има случаи, когато при някои (или при всички) стойности на h Тейлоровият ред на една функция е сходящ. В горния пример Тейлоровият ред е сходящ при $|h|<1$.

Като имаме пред вид формулата на Тейлор

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n,$$

която разгледахме в предния параграф, близко е до ума да направим опит да развием функционалната стойност $f(a+h)$ в Тейлоров ред, като оставим в Тейлоровата формула n да расте неограничено. Разбира се, ако съществува такова развитие, необходимо е преди всичко интересуващият ни ред да бъде сходящ. Това обаче все още не е достатъчно. Макар редът да е сходящ, сумата му (както ще видим по-късно) в общия случай не е задължена да бъде равна на $f(a+h)$. Ако се случи Тейлоровият ред

$$f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

да бъде сходящ при някоя стойност на h и сумата му да е точно $f(a+h)$, казваме, че функцията $f(x)$ е развиваема в Тейлоров ред при $x=a+h$ около точката a (последните думи напомнят за това, че стойностите на последователните производни са пресметнати при $x=a$). Като се възползуваме от дефиницията за понятието сходимост на един безкраен ред, заключаваме, че една функция $f(x)$ е развиваема в Тейлоров ред в една точка $a+h$, когато редицата с общ член

$$S_n=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

е сходяща и клони към $f(a+h)$. Затова пък е необходимо и достатъчно редицата с общ член R_n да бъде сходяща и да клони към нула. И така, за да бъде функцията $f(x)$ развиваема около точката a в Тейлоров ред при $x=a+h$, необходимо и достатъчно е остатъчният член R_n при така избраните стойности на a и h да клони към нула.

Специално при $a=0$ получаваме реда (като поставим $h=x$)

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots,$$

който е познат под името Маклоренов ред. Маклореновият ред, както изобщо всеки Тейлоров ред, е степенен ред.

§ 11. Развиване на тригонометрични функции в степенни редове

Ще си поставим за задача сега да изучим Маклореновото развитие на функциите $\sin x$ и $\cos x$.

Нека $f(x)=\sin x$. В такъв случай

$$f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x,$$
$$f^{IV}(x)=\sin x,\quad f^{V}(x)=\cos x,\ldots$$

Оттук намираме

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad f^{IV}(0)=0,\quad f^{V}(0)=1,\ldots$$

и следователно интересуващото ни Маклореново развитие е

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

Ще установим, че този ред е сходящ за всяко x и сумата му е равна на $\sin x$. За тази цел разглеждаме остатъчния член

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Очевидно имаме

$$(1) \qquad |R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Изразът $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ представлява общ член на един сходящ ред (при $x=0$ това се вижда директно, а при $x \neq 0$ се установява с помощта на критерия на Даламбер) и следователно клони към нула, когато n расте неограничено и x е фиксирано. От неравенството (1) заключаваме, че и остатъчният член R_n клони към нула, когато n расте неограничено и x е фиксирано. Полученият резултат ни учи, че функцията $\sin x$ е развиваема в Маклоренов ред при всички стойности на x и

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Сега ще разгледаме въпроса за развиваемостта в степенен ред на функцията $g(x) = \cos x$. Очевидно

$$g(x) = \cos x,\ g'(x) = -\sin x,\ g''(x) = -\cos x,\ g'''(x) = \sin x,\ g^{IV}(x) = \cos x, \ldots,$$

откъдето

$$g(0)=1, \quad g'(0)=0, \quad g''(0)=-1, \quad g'''(0)=0, \quad g^{IV}(0)=1, \ldots$$

и следователно Маклореновото развитие, което ни интересува, е

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Ще покажем, че този ред е сходящ при всяко x и сумата му е $\cos x$. За тази цел разглеждаме остатъчния член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Очевидно

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ние обаче вече видяхме, че изразът $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ клони към нула, когато x е фиксирано, и n расте неограничено (тъй като е общ член на един сходящ ред). Оттук следва, че остатъчният член R_n клони към нула, когато фиксираме x и оставим n да расте неограничено. С това доказахме, че функцията $\cos x$ е развиваема в степенен ред при всички стойности на x и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

ГЛАВА III

ЕЛЕМЕНТАРНИ ТРАНСЦЕНДЕНТНИ ФУНКЦИИ

§ 1. Дефиниция на показателната функция

В този параграф ще търсим функции, които, тъй да се каже, се възпроизвеждат при действието диференциране. По-точно ние ще търсим функции $F(x)$, които са дефинирани и диференцуеми при всяко x и при всяко x удовлетворяват условието

$$(1) \qquad F'(x) = F(x).$$

Константата нула е една такава функция. Нас обаче това тривиално решение не ни интересува. Ние ще търсим функции, удовлетворяващи условието (1), които не се анулират тъждествено, т. е. такива, които поне при една стойност на аргумента приемат различна от нула стойност. За да намерим всички тия функции, ще си поставим първо по-специална задача — да намерим всички функции $f(x)$ (дефинирани и диференцуеми за всяко x), които удовлетворяват както условието

$$f'(x) = f(x),$$

така още и допълнителното условие $f(0)=1$. Разбира се, ние не знаем дали така поставената задача има решение (въпрос за съществуване на решението), нито дали решението е само едно (въпрос за единственост на решението). Не ще съмнение, че не всяка задача има решение. Така например, ако търсим просто число, което се дели без остатък на 4, очевидно няма да имаме решение. Ще отговорим (утвърдително) едва в края на този параграф на въпроса за съществуване на решението на интересуващата ни задача, а засега ще започнем да изучаваме задачата, като изхождаме от предположението (за което не знаем дали е вярно), че тя има решение.

И така нека $f(x)$ е функция, дефинирана и диференцуема за всяко x, за която $f'(x) = f(x)$ и $f(0)=1$. Ще покажем, че за функцията $f(x)$ е в сила равенството

$$f(x)\,f(y) = f(x+y)$$

при всеки избор на числата x и y. За да докажем това, фиксираме две числа x и y, полагаме $x+y=a$ и си образуваме помощната функция на t

$$\varphi(t) = f(t)\,f(a-t).$$

Очевидно имаме

$$\varphi'(t)=f'(t)f(a-t)+f(t)[f(a-t)]'=f'(t)f(a-t)-f(t)f'(a-t)=$$
$$=f(t)f(a-t)-f(t)f(a-t)=0,$$

което показва, че функцията $\varphi(t)$ е константа. И така при всички стойности на t имаме

$$\varphi(t)=\varphi(0)$$

или

$$f(t)f(a-t)=f(0)f(a)=f(a).$$

Като изберем специално $t=x$, получаваме

$$f(x)f(y)=f(x+y).$$

Сега ще докажем, че функцията $f(x)$ не се анулира при никоя стойност на x. И наистина, ако допуснем, че в някоя точка x_0 имаме $f(x_0)=0$, заключаваме, че

$$f(x_0)f(-x_0)=0.$$

Като вземем под внимание, от друга страна, че

$$f(x_0)f(-x_0)=f(x_0-x_0)=f(0),$$

намираме

$$f(0)=f(x_0)f(-x_0)=0,$$

което противоречи на условието $f(0)=1$. При това доказателство ние съществено се възползувахме от това, че функцията $f(x)$ е дефинирана за всички стойности на x, а следователно и в точката $-x_0$.

След като установихме, че функцията $f(x)$ не се анулира никъде, ние вече лесно можем да докажем, че всичките ѝ стойности са съществено положителни числа. И наистина при $x=0$ стойността на функцията е 1 и следователно е положителна. Ако допуснем, че има точка x_1, в която $f(x_1)<0$, то в краищата на интервала $[0, x_1]$ непрекъснатата функция $f(x)$ (тя е непрекъсната, защото е диференцуема) ще приема стойности с противни знаци и следователно съгласно една теорема за непрекъснатите функции трябва да се анулира поне в една точка от интервала $[0, x_1]$. Ние обаче знаем, че $f(x)$ никъде не се анулира.

От доказаното следва, че функцията $f(x)$ е растяща. И наистина $f'(x)=f(x)$ и следователно $f'(x)>0$.

Не е трудно да се установи, че при всички стойности на x е в сила равенството

$$f(-x)=\frac{1}{f(x)}.$$

Това се вижда непосредствено от следната верига равенства:

$$f(-x)f(x)=f(-x+x)=f(0)=1.$$

За да пресметнем $f(1)$, ще използуваме формулата на Маклорен

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

Като вземем под внимание, че при всички цели неотрицателни стойности на k имаме $f^{(k)}(x)=f(x)$, намираме $f^{(k)}(0)=1$ и $f^{(n+1)}(\theta)=f(\theta)$ и следователно при $x=1$

$$f(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{f(\theta)}{(n+1)!}.$$

От друга страна, функцията $f(x)$ е положителна, монотонно растяща и $0<\theta<1$. Въз основа на това заключаваме, че

$$0<\frac{f(\theta)}{(n+1)!}<\frac{f(1)}{(n+1)!}$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\theta)}{(n+1)!}=0.$$

Това ни позволява да твърдим, че

$$f(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots,$$

т. е.

$$f(1)=e.$$

Сега вече лесно могат да се пресметнат стойностите на функцията $f(n)$ за цели стойности на n. И наистина нека n е цяло положително число. В такъв случай

$$f(n)=f(1+1+\cdots+1)=f(1)f(1)\ldots f(1)=[f(1)]^n=e^n.$$

Ако n е цяло отрицателно число, то $-n$ е цяло положително число и следователно

$$f(n)=\frac{1}{f(-n)}=\frac{1}{e^{-n}}=e^n.$$

При $n=0$ имаме $f(0)=e^0$, защото $f(0)=1$ и $e^0=1$.

Ние установихме вече много свойства на функцията $f(x)$, но все още не сме дали отговор на двата основни въпроса, които ни интересуват — въпроса за съществуването и въпроса за единствеността на $f(x)$. Сега ще отговорим на по-простия и по-малко интересния въпрос — на въпроса за единственост. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, дефинирани и диференцуеми за всяко x и удовлетворяващи условията

$$f'(x)=f(x),\quad g'(x)=g(x),\quad f(0)=1,\quad g(0)=1.$$

Образуваме си помощната функция

$$\varphi(x)=\frac{g(x)}{f(x)}.$$

Функцията $\varphi(x)$ е дефинирана и диференцуема за всяко x, защото, както знаем, $f(x)$ никъде не се анулира. Очевидно имаме

$$\varphi'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)}=\frac{g(x)f(x)-g(x)f(x)}{f^2(x)}=0.$$

От това заключаваме, че функцията $\varphi(x)$ е константа, т. е. за всяко x имаме

$$\varphi(x)=\varphi(0)$$

или

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(0)}{f(0)}=1,$$

откъдето $g(x)=f(x)$. С това е доказано, че има най-много една функция, удовлетворяваща нашите условия (но дали въобще има такава функция, ние все още не знаем).

Макар и да е напълно задоволителен отговорът на въпроса за единственост, ние ще дадем сега още едно решение на същия въпрос. Новото решение ще има това предимство, че то ще ни даде същевременно и степенното развитие на функцията $f(x)$.

Очевидно имаме

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots,$$

откъдето

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=1.$$

Въз основа на това заключаваме, че Маклореновото развитие на функцията $f(x)$ е

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Това развитие е сходящо при всички стойности на x и сумата му е $f(x)$. За да докажем това, разглеждаме остатъчния член

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f(\theta x).$$

Функцията $f(x)$ обаче е растяща. Въз основа на това и въз основа на неравенството $\theta x\leqq|x|$ заключаваме, че $f(\theta x)\leqq f(|x|)$.

Това ни дава право да пишем

$$|R_n|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}f(\theta x)\leqq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}f(|x|).$$

Изразът $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}f(|x|)$ обаче представлява общият член на един сходящ ред (при $x\neq 0$ това се вижда с помощта на критерия на Даламбер, а при $x=0$ това е ясно непосредствено) и следователно при фиксирано x клони към нула, когато n расте неограничено. От това заключаваме, че R_n също клони към нула — нещо, което е достатъчно, за да твърдим, че $f(x)$ е развиваема в Маклоренов ред при всички стойности на x и

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

За да получим повторно отговор на въпроса за единственост, да означим с $g(x)$ една произволна функция, дефинирана и диференцуема за всички стойности на x, за която

$$g'(x)=g(x) \quad \text{и} \quad g(0)=1.$$

Като извършим и за нея същите разсъждения, с помощта на които получихме степенното развитие на $f(x)$, ще получим

$$g(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

откъдето заключаваме, че $f(x)=g(x)$.

Преминаваме към въпроса за съществуване. Независимо от това, което знаем за степенното развитие на функцията $f(x)$, образуваме степенния ред

$$\varphi(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \tag{2}$$

Той е сходящ за всяко x, както това се вижда, като приложим при $x\neq 0$ (при $x=0$ сходимостта на реда (2) се вижда непосредствено) критерия на Даламбер към реда с положителни членове

$$1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\frac{|x|^3}{3!}+\cdots$$

И така функцията $\varphi(x)$ е дефинирана за всички стойности на x. Както знаем от теоремата за почленно диференциране на степенни редове, тази функция е диференцуема за всички стойности на x и

$$\varphi'(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Полученият резултат ни учи, че $\varphi'(x)=\varphi(x)$. От друга страна, очевидно имаме $\varphi(0)=1$. С това ние доказахме, че действително има функция $\varphi(x)$, която е дефинирана и диференцуема за всяко x и удовлетворява условията

$$\varphi'(x)=\varphi(x),\ \varphi(0)=1.$$

По-горе доказахме, че ако функцията $f(x)$ е дефинирана, диференцуема за всяко x и удовлетворява условията

$$f'(x)=f(x),\ f(0)=1,$$

то при цели стойности на n имаме $f(n)=e^n$. В този курс предполагаме, че степента e^n е дефинирана само за цели стойности на n. Напротив, функцията $f(x)$ е дефинирана за всички стойности на x. Ето защо за в бъдеще тази функция ще означаваме със символа e^x и тогава, когато x не е цяло число. Тази функция се нарича показателна функция (или както понякога се казва, експоненциална функция).

Да резюмираме по-главните свойства на показателната функция, като си служим с току-що въведеното означение:

1) $(e^x)'=e^x$.

2) $e^0=1$.

3) Събирателна теорема

$$e^x e^y=e^{x+y}.$$

4) Функцията e^x не се анулира за никоя стойност на x.

5) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$.

6) Всичките стойности на функцията e^x са съществено положителни.

7) Функцията e^x е растяща.

8) Функцията e^x е развиваема при всяко x в степенен ред:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Специално при $x=1$ това развитие преминава в познатото вече на читателя развитие

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

9) От степенното развитие на e^x се вижда, че при $x>0$ имаме

$$e^x>x.$$

Това неравенство показва, че e^x расте неограничено, когато x расте неограничено.

10) Функцията e^x клони към нула, когато x дивергира към $-\infty$. За да се убедим в това, достатъчно е да вземем под внимание, че при положителни стойности на x имаме

$$0<e^{-x}=\frac{1}{e^x}<\frac{1}{x}.$$

Не е трудно да се намерят всички функции $F(x)$, които са дефинирани и диференцуеми навсякъде и удовлетворяват условието $F'(x)=F(x)$, без да се иска да удовлетворяват още и допълнителното условие $F(0)=1$. За да намерим всички тези функции, образуваме си помощната функция $\varphi(x)=F(x)e^{-x}$. От $\varphi'(x)=F'(x)e^{-x}-F(x)e^{-x}=0$ заключаваме, че $\varphi(x)$ е константа и следователно

$$\varphi(x)=\varphi(0) \text{ или } F(x)e^{-x}=F(0), \text{ т. е. } F(x)=F(0)e^x.$$

И така всяка функция, удовлетворяваща посочените по-горе условия, се получава от e^x, като я умножим с константа. Обратно, каквато и да е константата c, функцията ce^x удовлетворява равенството $(ce^x)'=ce^x$.

§ 2. Ирационалност на числото e

Вече споменахме (вж. част I, гл. II, § 8), че числото

$$e=2{,}718281828459045\ldots,$$

дефинирано като граница на сходящата редица с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{1}$$

е ирационално. Разбира се, ние можем да пресметнем това число с всяка желана точност, например, като си служим с израза (1) и дадем на n достатъчно голяма стойност (което е свързано с много дълги пресмятания) или (което е много по-удобно), като си служим с частичните суми на познатия вече на читателя ред

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

Разбира се, тези пресмятания с нищо не изясняват въпроса за рационалност или ирационалност на числото e.

Ще си поставим за задача да установим строго ирационалността на числото e. Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че числото e може да се представи във вида

$$e=\frac{p}{q},$$

където p и q са две цели положителни числа, и да означим с n едно кое да е цяло число, по-голямо от q и от e. Въз основа на формулата на Тейлор получаваме

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}, \tag{2}$$

където θ е едно число между 0 и 1. Остатъчния член сме представили във формата на Лагранж. От равенството (2) получаваме, след като го умножим с $n!$ и разместим по подходящ начин членовете му,

$$\frac{e^\theta}{n+1}=\frac{n!\,p}{q}-\left[n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}\right]. \tag{3}$$

Полученият резултат ни учи, че числото $\frac{e^\theta}{n+1}$ е цяло (в дясната страна на равенството (3) имаме цяло число). Това обаче не е възможно, защото числото $\frac{e^\theta}{n+1}$ е по-малко от 1 (тъй като $n>e$ и следователно $n+1>e>e^\theta$) и е съществено положително (тъй като e^x, както знаем, приема само съществено положителни стойности).

В разгледания случай ние можахме лесно да установим ирационалността на интересуващото ни число. Има обаче случаи, когато подобни въпроси се оказват извънредно сложни. Така например редът

$$S=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots$$

е сходящ (защо?). Няма принципиална трудност за пресмятането на неговата сума S с всяка желана точност. Ето няколко първи десетични знака на тази сума:

$$S=1{,}20205690315959428540\ldots$$

Обаче ние не знаем дали това число е рационално, или не.

Задачи

1. Пресметнете числото e с 5 десетични знака, като си послужите с реда от предния параграф. Намерете една горна граница за грешката, която правите при тези пресмятания!

2. Намерете производната на $y=e^{-x^2}$.

Решение. Имаме да намерим производната на една функция от вида $y=e^{u(x)}$. В дадения случай $u(x)=-x^2$; като се възползуваме от правилото за диференциране на функция от функция, заключаваме, че $y'=e^u u'$. В дадения случай имаме $y'=e^{-x^2}(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$.

3. Намерете производната на $y=e^{\sin 2x}$.

Отговор. $y'=2e^{\sin 2x}\cos 2x$.

4. Намерете границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Решение. Както знаем, производната на една функция $f(x)$ в една точка x_0 се дефинира като граница на отношението

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

когато x клони към x_0 (разбира се, чрез стойности, различни от x_0). Специално, ако изберем $f(x)=e^x$ и $x_0=0$, то получаваме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{e^x-1}{x}.$$

Като вземем пред вид, че функцията e^x е диференцуема и че производната ѝ е e^x, заключаваме, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=e^0=1.$$

§. 3. Аналитична дефиниция на тригонометричните функции

Читателят знае как по геометричен път се дефинират функциите $\sin x$ и $\cos x$. Тези функции могат обаче да се дефинират и чисто аналитично, без помощта на геометрията.

Това може да стане по различни начини. Ние тук ще следваме един път, аналогичен на пътя, по който въведохме показателната функция e^x. Както знаем, функциите $\sin x$ и $\cos x$, дефинирани по геометричен път, имат свойствата

$$(\sin x)'=\cos x,\qquad \sin 0=0;$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad \cos 0=1.$$

Ние ще изберем тези свойства за основни и без да се ползуваме от геометрията, ще докажем, че има една и само една двойка функции $S(x)$ и $C(x)$, дефинирани и диференцуеми за всяко x, които удовлетворяват условията

$$(1)\qquad \begin{cases} S'(x)=C(x), & S(0)=0;\\ C'(x)=-S(x), & C(0)=1.\end{cases}$$

Предварително ще покажем как с помощта на условията (1) могат да се изучават свойствата на тези функции. И така нека имаме две функции $S(x)$ и $C(x)$, които са дефинирани и диференцуеми за всяко x и удовлетворяват условията (1). Ще покажем най-напред, че

$$(2)\qquad S^2(x)+C^2(x)=1.$$

И наистина производната на функцията

$$\varphi(x)=S^2(x)+C^2(x)$$

е нула, както това се вижда от равенствата

$$\varphi'(x)=2S(x)S'(x)+2C(x)C'(x)=2S(x)C(x)-2C(x)S(x)=0.$$

Оттук заключаваме, че $\varphi(x)$ е константа и следователно за всяко x имаме

$$\varphi(x)=\varphi(0),$$

т. е.

$$S^2(x)+C^2(x)=S^2(0)+C^2(0)=0+1=1.$$

От така полученото равенство (2) заключаваме, че $S^2(x)\leqq 1$ и $C^2(x)\leqq 1$ и следователно

$$|S(x)|\leqq 1 \quad \text{и} \quad |C(x)|\leqq 1.$$

Функциите $S(x)$ и $C(x)$ удовлетворяват при всяко x и y равенствата

$$(3)\qquad \begin{aligned} S(x+y)&=S(x)C(y)+S(y)C(x),\\ C(x+y)&=C(x)C(y)-S(x)S(y).\end{aligned}$$

За да докажем това, полагаме $x+y=a$ и образуваме двете помощни функции на t:

$$\varphi(t)=S(t)C(a-t)+S(a-t)C(t),$$

$$\psi(t)=C(t)C(a-t)-S(t)S(a-t).$$

Като диференцираме, получаваме

$$\varphi'(t)=\quad C(t)C(a-t)+S(t)S(a-t)-C(a-t)C(t)-S(a-t)S(t)=0,$$

$$\psi'(t)=-S(t)C(a-t)+C(t)S(a-t)-C(t)S(a-t)+S(t)C(a-t)=0,$$

т. е. двете функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са константи. По-специално имаме

$$\varphi(0)=\varphi(x) \text{ и } \psi(0)=\psi(x)$$

или

$$S(a)=S(x)C(a-x)+S(a-x)C(x),$$

$$C(a)=C(x)C(a-x)-S(x)S(a-x).$$

Като вземем под внимание, че $a=x+y$, получаваме формулите (3). Формулите (3) се наричат събирателни формули на тригонометричните функции.

Сега ще докажем, че функцията $C(x)$ е четна, а функцията $S(x)$ е нечетна. Това значи, че при всички стойности на x са в сила равенствата

$$C(-x)=C(x) \text{ и } S(-x)=-S(x).$$

За да докажем това, ще разгледаме равенствата (3) при $y=-x$. Така получаваме

$$0=S(x)C(-x)+C(x)S(-x),$$

(4)

$$1=C(x)C(-x)-S(x)S(-x).$$

Като умножим първото от тия равенства с $S(x)$, второто с $C(x)$ и съберем, получаваме

$$C(x)=C(-x).$$

Ако умножим първото от равенствата (4) с $C(x)$, второто с $S(x)$ и извадим, получаваме

$$-S(x)=S(-x).$$

И така установихме много свойства на функциите $S(x)$ и $C(x)$ които удовлетворяват условията (1), обаче все още не знаем дали такива функции има. (Ние си поставихме за задача да дадем чисто аналитично изследване на интересуващия ни въпрос и следователно не бива да се ползуваме от това, което знаем от геометрията!) За да покажем, че има функции, удовлетворяващи условията (1), разглеждаме двата степенни реда

$$u(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots,$$

$$v(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

Тия редове са абсолютно сходящи при всички стойности на x, както това се вижда с помощта на критерия на Даламбер (критерия на Даламбер прилагаме за редовете

$$\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^3}{3!}+\frac{|x|^5}{5!}+\dots,$$

$$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

при $x\neq 0$; при $x=0$ сходимостта е очевидна). Съгласно теоремата за почленно диференциране на степенните редове заключаваме, че двете функции $u(x)$ и $v(x)$ (които са дефинирани за всички стойности на x) са диференцуеми навсякъде и

$$u'(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots,$$

$$v'(x)=-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\dots$$

Оттук следва, че

$$u'(x)=v(x),$$
$$v'(x)=-u(x).$$

От друга страна, непосредствено се вижда, че $u(0)=0$ и $v(0)=1$. И така ние успяхме да намерим две функции $u(x)$ и $v(x)$, които удовлетворяват условията (1). С това отговорихме на интересуващия ни въпрос за съществуване, без да прибягваме до помощта на геометрията.

Сега вече знаем, че има функции $S(x)$ и $C(x)$, които удовлетворяват условията (1), обаче не знаем колко такива двойки има (въпрос за единственост). Както ще видим, съществува само една такава двойка. И наистина нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, дефинирани и диференцуеми за всяко x, които удовлетворяват условията

$$f'(x)=g(x),\ f(0)=0,$$

$$g'(x)=-f(x),\ g(0)=1.$$

Образуваме си помощните функции

$$F(x)=S(x)g(x)-C(x)f(x),$$
$$G(x)=C(x)g(x)+S(x)f(x).$$

Като диференцираме, получаваме

$$F'(x)=C(x)g(x)-S(x)f(x)+S(x)f(x)-C(x)g(x)=0,$$
$$G'(x)=-S(x)g(x)-C(x)f(x)+C(x)f(x)+S(x)g(x)=0,$$

което показва, че двете функции $F(x)$ и $G(x)$ са константи. И така при всички стойности на x имаме

$$F(x)=F(0) \text{ и } G(x)=G(0)$$

или

$$(5)\qquad \begin{aligned} S(x)g(x)-C(x)f(x)&=0,\\ C(x)g(x)+S(x)f(x)&=1. \end{aligned}$$

Като умножим първото от тия две равенства с $S(x)$, второто с $C(x)$ и съберем, получаваме

$$(6)\qquad g(x)=C(x).$$

Ако умножим първото от равенствата (5) с $C(x)$, второто с $S(x)$ и извадим, получаваме

$$(7)\qquad f(x)=S(x).$$

Равенствата (6) и (7) ни учат, че не може да има повече от една двойка функции, които са дефинирани и диференцуеми при всички стойности на x и удовлетворяват условията (1).

Ние знаем, че дефинираните по геометричен път функции $\sin x$ и $\cos x$ удовлетворяват условията

$$(8)\qquad \begin{aligned} (\sin x)'&=\cos x, & \sin 0&=0,\\ (\cos x)'&=-\sin x, & \cos 0&=1. \end{aligned}$$

Като вземем под внимание току-що доказаната теорема за единственост, заключаваме, че при всички стойности на x имаме

$$S(x)=\sin x,$$
$$C(x)=\cos x.$$

За в бъдеще със $\sin x$ и $\cos x$ ще означаваме съответно двете функции $S(x)$ и $C(x)$, които удовлетворяват условията (1).

След всичко изложено досега можем да дадем следната чисто аналитична дефиниция на тригонометричните функции: $\sin x$ и $\cos x$ ще наричаме две функции, които са дефинирани и диференцуеми при всички стойности на x и които удовлетворяват условията (8).

След като са дефинирани двете функции $\sin x$ и $\cos x$, функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ дефинираме с помощта на равенствата

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

По този начин функцията $\operatorname{tg} x$ е дефинирана за всички стойности на x, за които $\cos x\neq 0$, а функцията $\operatorname{ctg} x$ е дефинирана за всички стойности на x, за които $\sin x\neq 0$.

§ 4. Дефиниция на числото π и периодичност на тригонометричните функции

Да разгледаме уравнението

$$\cos x=0.$$

Ще докажем, че то има едно и само едно решение ξ, което удовлетворява неравенствата $0<\xi<2$. Съществуването на решението се установява просто, защото функцията $\cos x$ е непрекъсната и в краищата на интервала $[0, 2]$ приема стойности с противни знаци. И наистина

$$\cos 0=1>0$$

и

$$\cos 2=1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\dots=\left(1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}-\frac{2^{4n}}{4n!}\right)=$$
$$=-\frac{1}{3}-\left(\frac{2^6}{6!}-\frac{2^8}{8!}\right)-\left(\frac{2^{10}}{10!}-\frac{2^{12}}{12!}\right)-\dots=-\frac{1}{3}-\frac{2^6}{6!}\left(1-\frac{2^2}{7.8}\right)-$$
$$-\frac{2^{10}}{10!}\left(1-\frac{2^2}{11.12}\right)-\dots<0.$$

И така непрекъснатата функция $\cos x$ действително приема в краищата на интервала $[0, 2]$ стойности с противни знаци. Това ни позволява да твърдим въз основа на една теорема за непрекъснатите функции, която доказахме по-рано, че уравнението

$$(1)\qquad \cos x=0$$

има поне един корен в интервала $(0, 2)$. Това уравнение не може да има повече от един корен в същия интервал. И наистина, ако уравнението (1) би имало две различни решения ξ_1 и ξ_2, лежащи в интервала $(0, 2)$, то съгласно теоремата на Рол бихме могли да заключим, че производната $(\cos x)'=-\sin x$ се анулира поне за една стойност на x между ξ_1 и ξ_2, а следователно и между 0 и 2. Това обаче е невъзможно, защото

$$\sin x=\frac{x}{1!}\left(1-\frac{x^2}{2.3}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6.7}\right)+\dots$$

и при $0<x<2$ всичките изрази, които са затворени в скоби, са съществено положителни и следователно $\sin x\neq 0$.

И така уравнението (1) има едно и само едно решение, което лежи в интервала $(0, 2)$. Обикновено числото 2ξ се означава с буквата π (четете — пи). Както ще видим по-късно, така дефинираната константа π играе много важна роля. Ние впоследствие ще покажем как можем да я пресметнем с всяка желана точност.

От равенството

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

като вземем пред вид, че $\cos\frac{\pi}{2}=0$, намираме $\sin^2\frac{\pi}{2}=1$; от друга страна, $0<\frac{\pi}{2}<2$, а ние знаем, че при всички стойности на x от интервала $(0, 2)$ функцията $\sin x$ приема положителни стойности. Това ни дава право да заключим, че

$$\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

С помощта на събирателните теореми намираме

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\sin\frac{\pi}{2}=\cos x,$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{2}-\sin x\sin\frac{\pi}{2}=-\sin x,$$

откъдето

$$\sin(x+\pi)=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

$$\cos(x+\pi)=\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$$

и най-сетне

$$\sin(x+2\pi)=\sin[(x+\pi)+\pi]=-\sin(x+\pi)=-(-\sin x)=\sin x,$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos[(x+\pi)+\pi]=-\cos(x+\pi)=-(-\cos x)=\cos x.$$

Често свойството, което изразяват последните две равенства, се формулира кратко, като се казва, че функциите $\sin x$ и $\cos x$ са периодични с период 2π.

Не е трудно да се покаже, че функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ са периодични с период π. И наистина

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi)=\frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}=\frac{-\cos x}{-\sin x}=\operatorname{ctg} x.$$

Задачи

1. Като изхождате от аналитичната дефиниция на тригонометричните функции докажете, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Решение. Както знаем, производната на една функция $f(x)$ в една точка x_0 се дефинира като граница на отношението

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

когато x клони към x_0 (разбира се, чрез стойности, различни от x_0). Специално, ако изберем $f(x)=\sin x$ и $x_0=0$, получаваме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sin x}{x}.$$

Като вземем под внимание, че функцията $\sin x$ е диференцуема и че производната ѝ е $\cos x$, заключаваме, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\cos 0=1.$$

2. Като изхождате от аналитичната дефиниция на тригонометричните функции, докажете формулите:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,$$

$$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2},$$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

§ 5. Хиперболични функции

Ние дефинирахме функциите $\sin x$ и $\cos x$ с помощта на условията

$$(\sin x)'=\cos x,\qquad \sin 0=0,$$
$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad \cos 0=1.$$

Тук ще си поставим сродната задача да изучим функциите, които са дефинирани и диференцуеми за всяко x и удовлетворяват условията

$$(1)\qquad \begin{cases} f'(x)=g(x), & f(0)=0,\\ g'(x)=f(x), & f(0)=1.\end{cases}$$

Засега ние не знаем дали изобщо има такива функции. Преди да разгледаме важния въпрос за съществуването на такива функции, ние ще се занимаем с по-простия въпрос за единственост. И така да допуснем, че има две функции $f(x)$ и $g(x)$, които са диференцуеми за всяко x и удовлетворяват условията (1). Като съберем двете равенства

$$f'(x)=g(x),$$
$$g'(x)=f(x),$$

получаваме

$$[f(x)+g(x)]'=g(x)+f(x),$$

т. е. функцията $f(x)+gx$ се възпроизвежда, така да се каже, при действието диференциране. При това очевидно имаме

$$f(0)+g(0)=0+1=1.$$

И така функцията $f(x)+g(x)$ не само се възпроизвежда при действието диференциране, но при $x=0$ приема стойност единица. Ние обаче знаем, че има само една функция с тия свойства и тая функция е показателната функция e^x. И така доказахме, че ако има две функции $f(x)$ и $g(x)$, които удовлетворяват условието (1), то

(2) $$f(x)+g(x)=e^x.$$

Образуваме си помощната функция

$$\varphi(x)=g(x)-f(x).$$

От равенствата (1) следва, че функцията $\varphi(x)$ удовлетворява равенството

$$\varphi'(x)+\varphi(x)=0.$$

Оттук, като умножим с e^x, получаваме

$$e^x\varphi'(x)+e^x\varphi(x)=0,$$

което може да се напише още във вида

$$[e^x\varphi(x)]'=0.$$

И така производната на функцията $e^x\varphi(x)$ е нула за всяко x. От това следва, че тази функция е константа, т. е. за всяко x имаме

$$e^x\varphi(x)=e^0\varphi(0)=g(0)-f(0)=1,$$

откъдето получаваме $\varphi(x)=e^{-x}$ или

(3) $$g(x)-f(x)=e^{-x}.$$

Като съберем и извадим почленно равенствата (2) и (3), получаваме

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

$$g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Така ние получихме отговор на въпроса за единственост, който ни интересуваше. Ние доказахме именно, че няма други функции освен (евентуално) функциите

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} \text{ и } \frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

които са дефинирани и диференцуеми за всяко x и удовлетворяват условията (1). Разсъжденията ние извършихме досега въз основа на предположението (за което не знаем още дали е вярно, или не), че има функции с тези свойства. Досега ние не знаем дали такива функции има, или не, но изследването на въпроса за единственост, което ние извършихме, все пак дава указание как бихме могли да открием какъв е отговорът (положителен или отрицателен) на въпроса за съществуването на решение. Достатъчно е да проверим дали функциите

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} \text{ и } \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

удовлетворяват условията (1). Ако се случи тези функции да не удовлетворяват поне едно от поставените условия, можем да твърдим със сигурност, че задачата няма решение; ако пък се окаже, че намерените функции удовлетворяват всичките условия, то с това не само ще бъде показано съществуването на решението, но ние ще знаем също кое е то.

С директна проверка се установява, че функциите

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

$$g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

които са дефинирани и диференцуеми за всяко x, удовлетворяват условията (1). Тези две функции се означават често със знаците $\operatorname{sh}x$ (четете — синус хиперболикус или хиперболичен синус) и $\operatorname{ch}x$ (четете — косинус хиперболикус или хиперболичен косинус). И така

(4) $$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Хиперболичните функции по своите свойства твърде много приличат на тригонометричните функции (читателят е забелязъл, че и дефиницията им прилича твърде много на дефиницията на тригонометричните функции). Тук ще разгледаме по-важните свойства на хиперболичните функции. Така

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1.$$

И наистина

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-$$
$$-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

При хиперболичните функции са в сила и събирателни теореми, аналогични на събирателните теореми, които имаме при тригонометричните функции. Тези теореми се изразяват със следните равенства:

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}y\operatorname{ch}x,$$
$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.$$

Ние ще докажем първата от тези две формули. Като се възползуваме от равенствата (4), получаваме

$$\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}y\operatorname{ch}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}=$$
$$=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{sh}(x+y).$$

Упражнение 1. Докажете (като се ползувате например от равенствата (4)), че функцията $\operatorname{sh}x$ е нечетна, а функцията $\operatorname{ch}x$ е четна, т. е.

$$\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x,\ \operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch}x.$$

2. Докажете, че

$$\operatorname{ch}x\geqq 1.$$

3. Докажете (като се ползувате например от равенствата (4)), че

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.$$

4. Докажете формулите

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x,$$
$$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x,$$
$$1+\operatorname{ch}x=2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2},$$
$$-1+\operatorname{ch}x=2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}.$$

5. Докажете, че при всички стойности на x

$$\operatorname{sh}x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots,$$
$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

§ 6. Логаритмична функция

Със символа $\ln x$ (четете „естествен логаритъм x", или по-кратко— „логаритъм x") се означава число y, което удовлетворява уравнението

(1) $$x=e^y.$$

Това уравнение сигурно няма решение, когато $x\leqq 0$, защото, както знаем, стойностите на показателната функция e^y са съществено положителни, както и да избираме y. И така символът $\ln x$ не е дефиниран

нито при отрицателни стойности на x, нито при $x=0$. Както ще видим, при $x>0$ уравнението (1) има едно и само едно решение. И наистина ние знаем, че показателната функция e^y расте неограничено, когато y расте неограничено. Ето защо, след като е избрано едно число $x_0>0$, ние можем да намерим достатъчно голямо число y_1, за което

$$x_0<e^{y_1}.$$

От друга страна, показателната функция e^y клони към нула, когато y дивергира към $-\infty$. Това ни дава право да твърдим, когато избраното число x_0 е съществено положително, че може да се намери число y_2, което удовлетворява неравенството

$$e^{y_2}<x_0.$$

Разглеждаме затворения интервал $[y_2, y_1]$. В него функцията e^y е непрекъсната (защото тя е непрекъсната навсякъде). В единия край на този интервал стойността на функцията e^y е по-малка от x_0, а в другия е по-голяма от x_0. Като иземем пред вид една теорема за непрекъснатите функции, заключаваме, че има поне една точка y_0 в интервала $[y_2, y_1]$, която удовлетворява уравнението

(2) $$x_0=e^{y_0}.$$

Повече от едно решение това уравнение не може да има. И наистина, ако допуснем, че η_1 и η_2 са две решения на уравнението (2) можем да приложим теоремата на Рол за интервала $[\eta_1, \eta_2]$ (тъй като $e^{\eta_1}=e^{\eta_2}=x_0$) и въз основа на тази теорема да заключим, че производната $(e^y)'=e^y$ се анулира поне за една стойност на y. А ние знаем, че показателната функция никъде не се анулира. С това достигнахме до противоречие, което се дължи на допускането, че уравнението (2) има повече от едно решение.

И така ние доказахме, че символът $\ln x$ е еднозначно дефиниран при всички съществено положителни стойности на x (това значи, че при всеки избор на положителното число x уравнението

$$x=e^y$$

има едно и само едно решение). Този символ представлява следователно една функция, добре дефинирана при $x>0$.

Както ще видим, функцията $\ln x$ е диференцуема във всички точки от дефиниционната си област и

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

(от нейната диференцуемост следва, както знаем, нейната непрекъснатост).

Нека x_0 е едно произволно положително число.

Избираме две произволни редици от положителни числа

(3) $$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ldots,\ x'_n,\ldots,$$

(4) $$x''_1,\ x''_2,\ x''_3,\ldots,\ x''_n,\ldots,$$

които клонят към x_0 и удовлетворяват неравенствата

$$x'_n \leqq x_0 \leqq x''_n,\quad x''_n \neq x'_n.$$

Полагаме

$$\ln x'_n = y'_n,\quad \ln x''_n = y''_n.$$

В такъв случай

$$x'_n = e^{y'_n},\quad x''_n = e^{y''_n}$$

и следователно

(5) $$\frac{\ln x''_n - \ln x'_n}{x''_n - x'_n} = \frac{y''_n - y'_n}{e^{y''_n} - e^{y'_n}}.$$

Като приложим теоремата за крайните нараствания, получаваме

(6) $$e^{y''_n} - e^{y'_n} = (y''_n - y'_n)\, e^{\eta_n},$$

където

(7) $$\eta_n = y'_n + \theta_n (y''_n - y'_n),\quad 0 < \theta_n < 1.$$

Да положим $e^{\eta_n} = \xi_n$. В такъв случай равенството (5) добива вида

(8) $$\frac{\ln x''_n - \ln x'_n}{x''_n - x'_n} = \frac{1}{\xi_n}.$$

Като вземем пред вид, че $e^{y''_n} - e^{y'_n} = x''_n - x'_n > 0$ и $e^{\eta_n} > 0$, заключаваме от (6), че $y'_n < y''_n$. Оттук с помощта на (7) получаваме $y'_n < \eta_n < y''_n$ и следователно

$$e^{y'_n} < e^{\eta_n} < e^{y''_n},$$

откъдето

(9) $$x'_n < \xi_n < x''_n.$$

Но редиците (3) и (4) са сходящи и клонят към x_0; с помощта на (9) оттук заключаваме, че редицата

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ldots,\ \xi_n,\ldots$$

е също сходяща и клони към x_0. От друга страна, $x_0 \neq 0$. Това ни позволява да твърдим, че редицата с общ член (8) е също сходяща и клони към $\frac{1}{x_0}$. С това ние доказахме, че функцията $\ln x$ е диференцуема в точката x_0 и че нейната производна е равна на $\frac{1}{x_0}$.

Ние можем да обобщим формулата

(10) $$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

като се възползуваме от правилото за диференциране на функция от функция по следния начин. Ако функцията $u(x)$ приема само положителни стойности в някой интервал и в някоя точка от този интервал тя има производна, то функцията

(11) $$y = \ln u(x)$$

също има производна в тази точка и

(12) $$y' = \frac{u'}{u}.$$

Читателят познава много от свойствата на логаритмичната функция. Така $\ln 1 = 0$. И наистина символът $\ln 1$ е добре дефиниран, защото числото 1 е съществено положително. Да положим $\ln 1 = x$. От дефиницията на логаритмичната функция имаме $1 = e^x$. От друга страна, ние знаем, че $e^0 = 1$. Като вземем пред вид, че показателната функция приема всяка своя стойност само веднъж (защото нейната производна никъде не се анулира), заключаваме, че $x = 0$. Нека читателят сам докаже, че $\ln e = 1$.

Също така без труд се установява, че при всички положителни стойности на x и y е в сила равенството

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

И наистина, ако положим $\ln x = \alpha$ и $\ln y = \beta$, имаме

$$x = e^{\alpha},$$

$$y = e^{\beta},$$

откъдето

$$xy = e^{\alpha+\beta}$$

и най-сетне

$$\ln(xy) = \alpha + \beta = \ln x + \ln y.$$

Аналогично се доказва, че при $x > 0$ и $y > 0$

$$\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

Задачи

1. Докажете, че при всички положителни стойности на x и y е в сила равенството

$$\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y.$$

2. Докажете, че за всички стойности на x е в сила равенството

$$x=\ln(e^x).$$

3. Докажете, че за всички положителни стойности на x е в сила равенството

$$x=e^{\ln x}.$$

4. Докажете, че $\ln x$ дивергира към $+\infty$, когато x дивергира към $+\infty$.

5. Докажете, че $\ln x$ дивергира към $-\infty$, когато x клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула).

6. Докажете, че функцията $\ln x$ е растяща и приема всяка своя стойност само веднъж (понякога, за да изразим това свойство за логаритмичната функция, казваме кратко, че тя е една стриктно растяща функция).

7. Намерете производната на функцията $y=\ln(x^2+1)$.

Решение. Имаме да намерим производната на една функция от вида $y=\ln u(x)$ (в нашия случай $u(x)=(x^2+1)$ Като използваме правилото за диференциране на логаритмичната функция и на функция от функция, получаваме

$$y'=\frac{2x}{x^2+1}.$$

8. Намерете границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Решение. Както знаем, производната на една функция $f(x)$ в една точка x_0 се дефинира като граница на отношението

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

когато x клони към x_0. Специално ако изберем $f(x)=\ln(1+x)$ и $x_0=0$, получаваме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Като вземем пред вид, че функцията $f(x)=\ln(1+x)$ е диференцуема при $x>-1$ и $f'(x)=\frac{1}{1+x}$, заключаваме, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{1+0}=1.$$

9. Намерете границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}.$$

Решение. Като имаме пред вид предната задача, заключаваме, че каквато и да е редицата от числа

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ldots,$$

които принадлежат на дефиниционната област на функцията $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$ и клонят към нула, съответната редица

$$f(\xi_1),\ f(\xi_2),\ldots$$

е сходяща и клони към 1.

Да изберем една редица от числа

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,$$

които принадлежат на дефиниционната област на функцията

$$\varphi(x)=\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$$

и клонят към нула. Да положим

$$y_n=\sin x_n.$$

В такъв случай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, но $x_n\neq 0$, то при всички достатъчно големи стойности на n имаме $\sin x_n\neq 0$. Това ни дава основание да пишем при достатъчно големи стойности на n

$$\varphi(x_n)=\frac{\ln(1+y_n)}{y_n}\cdot\frac{\sin x_n}{x_n}.$$

Ние знаем обаче, че

$$\frac{\ln(1+y_n)}{y_n}\to 1$$

и

$$\frac{\sin x_n}{x_n}\to 1.$$

Оттук заключаваме, че функцията $\varphi(x)$ има граница при $x\to 0$ и че

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=1.$$

10. Намерете границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}.$$

Упътване.

$$\frac{\ln\cos x}{x^2}=\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}.$$

11. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Решение. При $x\neq 0$

$$a_n=e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}.$$

Ние знаем, че $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=x\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}$ клони към x, когато n расте неограничено (вж. задача 8). Като се възползуваме от непрекъснатостта на показателната функция, намираме $\lim a_n=e^x$. При $x=0$ имаме $a_n=1$ и следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

§ 7. Развиване на логаритмичната функция в степенен ред

Тук ще си поставим за задача да развием функцията $f(x)=\ln(1+x)$ по степените на x.

Като вземем пред вид, че

$$f(x)=\ln(1+x),$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+x},$$
$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},$$
$$f'''(x)=\frac{1.2}{(1+x)^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

намираме

$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1, f'''(0)=1.2,\ldots, f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

и следователно Маклореновият ред на функцията $\ln(1+x)$ е

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{1}$$

Този степенен ред е сходящ при $x=1$ (защо?) и следователно неговият радиус на сходимост не е по-малък от 1. От друга страна, той е разходящ при $x=-1$ (защо?) и следователно неговият радиус на сходимост не е по-голям от 1. И така редът (1) е сходящ в затворения отдясно и отворения отляво интервал $-1<x\leq 1$ и вън от него е разходящ. Поради това ние ще се ограничим при разглеждането на реда (1) само с интервала $-1<x\leq 1$.

Ще докажем, че сумата на реда (1) е равна на $\ln(1+x)$ при всички стойности на x, за които този ред е сходящ. За тази цел разглеждаме формулата на Маклорен

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n,$$

в която представяме остатъчния член R_n във формата на Коши:

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)=x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot\frac{(-1)^n}{1+\theta x},\ 0<\theta<1.$$

Като вземем пред вид, че $0<\theta<1$ и $-1<x\leq 1$, заключаваме, че

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x}>0$$

и

$$1-\frac{1-\theta}{1+\theta x}=\frac{\theta(x+1)}{1+\theta x}>0,$$

т. е.

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1,$$

нещо, което ни дава право да пишем

$$|R_n|\leq\frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x}.$$

Ако числото x се намира във вътрешността на интервала $(-1, 1)$, то $1+\theta x\geq 1-|x|>0$ и следователно

$$|R_n|\leq\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

откъдето заключаваме, че

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0$$

или, което е същото, както се вижда от дефиницията на понятието сума на един ред,

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

Остана още неразгледан случаят $x=1$. Направените досега разсъждения тук не водят до целта. В този случай остатъчният член R_n ще представим във формата на Лагранж. Така получаваме

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)=\frac{(-1)^n}{(n+1)\ (1+\theta)^{n+1}},$$

т. е.

$$|R_n|<\frac{1}{n+1},$$

откъдето $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ или, което е същото,

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Ако в равенството

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots, \tag{2}$$

валидно при $-1<x\leq 1$, заместим x с $-x$, получаваме

$$\ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots, \tag{3}$$

което е валидно при $-1\leq x<1$.

Ако извадим почленно двете равенства (2) и (3), намираме при $|x|<1$

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

Нека n е произволно цяло положително число. В такъв случай, ако положим $x=\frac{1}{2n+1}$, намираме

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$$

и следователно

$$\ln(n+1)-\ln n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right].$$

Тази формула ни позволява да пресметнем последователно логаритмите (при основа e) на целите положителни числа с всяка желана точност. Така например при $n=1$

$$\ln 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3.9}+\frac{1}{5.9^2}+\cdots\right)$$

и пр.

§ 8. Дефиниция на степен, показателят на която не е цяло число

Ние дефинирахме степента e^x при всички стойности на x. Нека обаче изрично припомним, че степента a^x е дефинирана за нас при $a\neq e$ само когато x е цяло число. Сега ще дефинираме общо степента a^x при произволни **съществено положителни** стойности на основата a и при произволни реални стойности на показателя x, като под a^x при $a>0$ се условим да разбираме $e^{x\ln a}$. Изразът $e^{x\ln a}$ има смисъл при всички стойности на x, щом $a>0$, защото логаритмичната функция е дефинирана при всички съществено положителни стойности на аргумента, а показателната функция e^u е дефинирана при всички стойности на показателя u. Специално при $a=e$ имаме $\ln a=1$ и следователно дефинираната сега функция a^x съвпада с дефинираната в § 1 функция e^x, когато $a=e$. При цели положителни стойности на n получаваме въз основа на новата дефиниция

$$a^n=e^{n\ln a}=e^{\ln a}e^{\ln a}\ldots e^{\ln a}=\underbrace{aa\ldots a}_{n\ \text{пъти}};$$

когато n е цяло отрицателно число, то числото $m=-n$ е цяло положително и

$$a^n=e^{n\ln a}=e^{-m\ln a}=\frac{1}{e^{m\ln a}}=\frac{1}{a^m}$$

и най-сетне

$$a^0=e^{0\ln a}=e^0=1.$$

И тъй както в случая, когато $a=e$ и показателят x е произволен, така и в случая, когато показателят x е цяло число, но основата a е съществено положително число, понятието степен, което ние въведохме сега, се редуцира на понятието степен в познатия ни смисъл от по-рано. При новата дефиниция обаче степента a^x има смисъл при всички съществено положителни стойности на a и при всички реални стойности на x. От това гледище понятието, което ние въвеждаме сега, е обобщение на познатото от по-рано понятие степен с положителна основа.

Като изхождаме от дефиниционното равенство

$$a^x=e^{x\ln a}, \tag{1}$$

заключаваме веднага, че

$$a^x a^y=a^{x+y},$$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},$$

$$(a^x)^y=a^{xy},$$

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x},$$

$$a^1=a,$$

$$a^0=1.$$

Дефиниционното равенство (1) ни учи също така, че функцията a^x е диференцуема при всички стойности на x и

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}(x\ln a)'=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a.$$

Ние знаем, че $\sqrt[n]{a}$ се дефинира при цели положителни стойности на n и $a\geq 0$ като неотрицателен корен на уравнението

$$x^n=a. \tag{2}$$

Това уравнение не може да има повече от един неотрицателен корен, защото в противен случай бихме заключили с помощта на теоремата на Рол, че има съществено положителна стойност на аргумента, за която се анулира производната $(x^n)'=nx^{n-1}$, нещо, което не е вярно. В настоящите лекции ние имахме случай вече няколко пъти да разглеждаме както този въпрос за единственост, така и съответния въпрос за съществуване на неотрицателно решение на уравнението (2). Сега ние имаме възможност да установим с други средства съществуването на интересуващото ни решение. При $a=0$ уравнението очевидно има решение — то е $x=0$. При $a>0$ уравнението (2) също има решение — то е $x=a^{\frac{1}{n}}$, както това се вижда от веригата равенства

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a^{\frac{1}{n}\cdot n}=a^1=a.$$

По този начин обобщеното понятие степен ни даде възможност да установим съществуването на $\sqrt[n]{a}$ при всички неотрицателни стойности на a. Като вземем пред вид, че дефиницията на $\sqrt[n]{a}$ е еднозначна, заключаваме, че

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}.$$

От дефиниционното равенство (1) се получава веднага степенното развитие на функцията a^x по следния начин:

$$a^x=e^{x\ln a}=1+\frac{x}{1!}\ln a+\frac{x^2}{2!}(\ln a)^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}(\ln a)^n+\cdots$$

Задачи

1. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=n\left(\sqrt[n]{a}-1\right).$$

Решение. Като изхождаме от дефиницията на понятието производна, заключаваме, че изразът

$$\frac{a^h-1}{h}$$

има граница $h\to 0$ и тя е равна на стойността на производната на функцията a^x при $x=0$, т. е. на $\ln a$ (тъй като $(a^x)'=a^x.\ln a$). Като дадем на h редицата от стойности $h_n=\frac{1}{n}$, които клонят към нула, получаваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\ln a.$$

2. Да се намери границата

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение.

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

Като вземем под внимание, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

(вж. зад. 8, § 6), заключаваме въз основа на непрекъснатостта на показателната функция, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

3. Да се намери границата

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}.$$

4. Да се намери границата с общ член

$$a_n=\left(\frac{\sqrt[n]{a}+1}{2}\right)^n,$$

където $a>0$.

Упътване. Положете

$$\sqrt[n]{a}-1=\alpha_n$$

и използувайте представянето

$$\ln a_n=\frac{\ln a}{2}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha_n}{2}\right)}{\frac{\alpha_n}{2}}\cdot\frac{\alpha_n}{\ln(1+\alpha_n)}.$$

Отговор.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{a}.$$

§ 9. Десетични логаритми и тяхната връзка с неперовите логаритми

Логаритмите, които ние въведохме в § 6 от част II на този курс, се наричат неперови или естествени логаритми. Тяхната основа представлява числото e. В практиката се употребява обаче логаритмична система при основа 10. Изобщо под $\log_a b$ се разбира решение на уравнението

(1) $$b=a^x.$$

Като представим уравнението (1) във вида

$$b=e^{x\ln a}$$

и логаритмуваме двете му страни при основа e, получаваме

$$\ln b=x\ln a$$

или

(2) $$\log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}.$$

Ние знаем как се пресмятат неперовите логаритми на числата. Равенството (2) ни позволява, след като сме изчислили неперовите логаритми, да пресметнем логаритмите на числата при произволна положителна основа $a\neq 1$. Специално при $a=10$ имаме

$$\log_{10} b=\frac{\ln b}{\ln 10}.$$

Числото

$$\mu=\frac{1}{\ln 10}=0{,}43429448\ldots$$

се нарича модул на десетичните логаритми.

§ 10. Функцията x^n, когато показателят n не е цяло число

Когато показателят n не е цяло число, ние дефинирахме функцията x^n само при $x>0$. Като изхождаме от дефиниционното равенство

$$x^n = e^{n\ln x},$$

заключаваме, че функцията x^n е диференцуема при $x>0$ и

$$(x^n)' = (e^{n\ln x})' = e^{n\ln x}\,(n\ln x)' = e^{n\ln x}\,\frac{n}{x} = \frac{nx^n}{x} = nx^{n-1}.$$

Тази формула ни е вече известна, когато n е цяло число. Тя е валидна, както виждаме, и тогава, когато числото n не е цяло. Като пример да намерим производната на функцията $y=\sqrt{x}$. Тъй като $y=x^{\frac{1}{2}}$, то

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ние, разбира се, можем да обобщим формулата

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

като се възползуваме от теоремата за диференциране на функция от функция. Така, ако функцията $u(x)$ е диференцуема и приема положителни стойности, то функцията $[u(x)]^n$ е също диференцуема и

(1) $$(u^n)' = nu^{n-1}u'.$$

Като пример да намерим производната на функцията $y=\sqrt{x^2+1}$. Според (1) получаваме

$$y' = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

В заключение нека отбележим, че функцията x^n е монотонно растяща при $n \geq 0$ и е монотонно намаляваща при $n \leq 0$. Това се вижда от равенството $x^n = e^{n\ln x}$, като се вземе пред вид монотонността на показателната и на логаритмичната функция.

§ 11. Нютонов бином

Читателят знае, че при цели неотрицателни стойности на m е в сила формулата*

* Нека припомним, че по дефиниция $\binom{m}{0}=1$ и

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}.$$

$$(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \cdots + \binom{m}{m}x^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k.$$

Това развитие може да се представи във вид на безкрайния ред

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k,$$

защото

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots 2.1.0.(-1)\ldots(m-k+1)}{k!} = 0$$

при $k>m$. Ние ще изучим сега степенния ред

(1) $$\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots$$

при предположение, че m не е цяло неотрицателно число. В този случай редът (1) е действително безкраен. Както ще видим, неговият радиус на сходимост е равен на единица. И наистина, като приложим критерия на Даламбер за реда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\binom{m}{k}x^k\right|,$$

получаваме* при $x \neq 0$

$$\lim_{k\to 0}\left|\binom{m}{k}x^k\right| : \left|\binom{m}{k-1}x^{k-1}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{|m-k+1|}{k}|x| = |x|,$$

откъдето заключаваме, че редът (1) е сигурно сходящ (дори абсолютно) при $|x|<1$. Напротив, при $|x|>1$ този ред е разходящ.

И наистина редът

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left|\binom{m}{k}x^k\right|}$$

е сходящ при $|x|>1$, както това се вижда с помощта на критерия на Даламбер, и следователно общият му член клони към нула. От това заключаваме, че общият член на реда (1) расте по абсолютна стойност неограничено, нещо, което осигурява неговата разходимост. От направените разсъждения е ясно, че радиусът на сходимост на реда (1) е равен на единица.

* Нека припомним, че m в разглеждания случай не е цяло неотрицателно. От това следва, че членовете на реда (1) са различни от нула при $x \neq 0$ и следователно ние можем да делим с тях.

Да означим с $f(x)$ сумата на реда (1). Функцията $f(x)$ е дефинирана във всички точки, в които редът (1) е сходящ. Тази функция е сигурно диференцуема във всички вътрешни точки на интервала $(-1, 1)$ и при това

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\binom{m}{k}x^{k-1}.$$

Оттук намираме

$$(1+x)f'(x)=(1+x)\sum_{k=1}^{\infty} k\binom{m}{k}x^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)\binom{m}{k+1}+k\binom{m}{k}\right]x^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)\frac{m(m-1)\dots(m-k)}{(k+1)!}+k\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}\right]x^k=$$

$$=m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k=mf(x)$$

и следователно

$$(1+x)f'(x)=mf(x).$$

От така полученото уравнение вече не е трудно да се определи функцията $f(x)$. За тази цел разглеждаме помощната функция

$$g(x)=\frac{f(x)}{(1+x)^m}.$$

Тази функция е добре дефинирана в отворения интервал $(-1, 1)$, защото $1+x>0$.

Очевидно имаме

$$g'(x)=\frac{f'(x)(1+x)^m-m(1+x)^{m-1}f(x)}{(1+x)^{2m}}=$$

$$=\frac{mf(x)(1+x)^{m-1}-m(1+x)^{m-1}f(x)}{(1+x)^{2m}}=0,$$

което ни учи, че функцията $g(x)$ е една константа. И така $g(x)=g(0)$. Като вземем пред вид, че

$$g(0)=\frac{f(0)}{1}=\binom{m}{0}=1,$$

намираме

$$f(x)=(1+x)^m$$

или, което е същото,

$$(1+x)^m=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\dots \tag{2}$$

И така формулата (2), която ние познавахме при цели неотрицателни стойности на m, се оказа валидна при всички стойности на m, когато $|x|<1$.

До същия резултат достигаме, като развием функцията

$$(1+x)^m$$

в Маклоренов ред:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\dots$$

За тази цел намираме най-напред

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

откъдето

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\dots(m-n+1)$$

и следователно интересуващото ни развитие добива вида

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$$

Ние ще установим, че това развитие е сходящо и представлява функцията $(1+x)^m$ при $|x|<1$, като представим остатъчния член във формата на Коши:

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)=$$

$$=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}m(m-1)\dots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}=$$

$$=x^{n+1}\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{m-1}.$$

Като вземем пред вид, че $|x|<1$ и $0<\theta<1$, намираме

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$$

и следователно

$$|R_n|\leqq|x|^{n+1}\left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}\right|(1+\theta x)^{m-1}.$$

От друга страна,

$$1-|x|\leqq 1+\theta x\leqq 1+|x|$$

и следователно множителят $(1+\theta x)^{m-1}$ притежава горна граница, която не зависи от n. В това можем да се убедим така. Да фиксираме x и да разгледаме функцията t^{m-1} в крайния и затворен интервал $1-|x|\leqq t\leqq 1+|x|$. Тази функция е дефинирана и непрекъсната в

избрания интервал (защото $1-|x|>0$) и следователно е ограничена. Да означим с M една нейна горна граница. В такъв случай

$$(1+\theta x)^{m-1} \leqq M$$

и следователно

$$|R_n| \leqq |x|^{n+1} \left| \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} \right| M.$$

От друга страна, редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{n+1} \left| \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} \right|$$

е сходящ при $|x|<1$, както това се установява с критерия на Даламбер при $x \neq 0$ (при $x=0$ това е тривиално.) Оттук заключаваме, че

$$\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1} \left| \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} \right| = 0$$

и следователно

$$\lim R_n = 0,$$

защото M не зависи от n.

§ 12. Сравняване растежа на функциите

$$a^x,\ x^n \text{ и } \ln x$$

Нека $a>1$ и $n>0$. В такъв случай трите функции

$$f(x)=a^x,\ g(x)=x^n,\ h(x)=\ln x$$

растат неограничено, когато x расте неограничено. И наистина колкото и голямо да е положителното число A, имаме

$$a^x > A \text{ при } x > \frac{\ln A}{\ln a},$$

$$x^n > A \text{ при } x > A^{\frac{1}{n}},$$

$$\ln x > A \text{ при } x > e^A.$$

Ще покажем обаче, че от разглежданите три функции показателната функция расте най-бързо, а логаритмичната функция расте най-бавно. Това значи, че отношенията

$$\frac{a^x}{x^n} \text{ и } \frac{x^n}{\ln x}$$

растат неограничено заедно с x. Нека k е едно цяло число, по-голямо от n. В такъв случай при $x>0$ (и $a>1$, $n>0$)

$$\frac{a^x}{x^n} = \frac{e^{x\ln a}}{x^n} = \frac{1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k(\ln a)^k}{k!}+\cdots}{x^n} \geqq$$

$$\geqq \frac{\frac{x^k(\ln a)^k}{k!}}{x^n} = x^{k-n}\frac{(\ln a)^k}{k!}$$

и следователно отношението $\frac{a^x}{x^n}$ действително расте неограничено, когато x расте неограничено.

От друга страна, при $x>1$

$$\frac{x^n}{\ln x} = \frac{e^{n\ln x}}{\ln x} = \frac{1+\frac{n\ln x}{1!}+\frac{(n\ln x)^2}{2!}+\cdots}{\ln x} \geqq \frac{\frac{n^2\ln^2 x}{2!}}{\ln x} = \frac{n^2}{2}\ln x.$$

Този резултат ни учи, че частното $\frac{x^n}{\ln x}$ също расте неограничено, когато x расте неограничено. С това всичко е доказано.

§ 13. Обратни функции

Нека $f(t)$ е една функция, дефинирана в някое точково множество M. Да означим с N множеството от функционалните стойности на $f(t)$. Ще казваме, че $\varphi(x)$ е обратна функция* на $f(t)$, ако

1) дефиниционната област на $\varphi(x)$ е N;
2) стойностите на $\varphi(x)$ принадлежат на M;
3) при всички стойности на x от N е изпълнено равенството

$$f[\varphi(x)]=x. \tag{1}$$

Не е трудно да се убедим, че всяка функция има поне една обратна. И наистина да разгледаме уравнението

$$f(t)=x. \tag{2}$$

При всяко x от N това уравнение се удовлетворява при поне едно значение на t от M, защото всяко число от N е функционална стойност на $f(t)$. Да изберем при всяко x от N кое да е от решенията на (2) и да го означим с $\varphi(x)$. По такъв начин ние получаваме функция $\varphi(x)$, която е дефинирана навсякъде в N, приема стойности от M и удовлетворява условието

$$f(\varphi(x))=x,$$

т. е. ние намерихме една обратна функция на $f(t)$.

* Ние предпочитаме в случая да означаваме аргументите на $f(t)$ и $\varphi(x)$ с различни букви.

Читателят вижда, че третото условие изразява главния момент на дефиницията. Второто условие се налага само, за да можем да образуваме $f(\varphi(x))$, а първото условие е поставено, за да бъде дефиниционната област на $\varphi(x)$ по възможност по-голяма.

Да изясним смисъла на дефиницията с няколко примера.

Да разгледаме функцията $f_1(t)=t^2$, дефиниционната област M_1 на която е съставена от всичките реални числа. Множеството N_1 от функционалните стойности в случая представлява множеството на неотрицателните числа. Да разгледаме функцията $\varphi_1(x)=\sqrt{x}$, дефиниционната област на която е N_1. Стойностите на тази функция, разбира се, принадлежат на M_1, защото M_1 съдържа всичките реални числа. Най-сетне имаме

$$f_1[\varphi_1(x)]=(\sqrt{x})^2=x,$$

т. е. $\sqrt{x}$ е една обратна функция на функцията $f_1(t)$. С това не се изчерпват обаче всичките обратни функции на $f_1(t)$. И наистина нека $\varepsilon(x)$ е произволна функция, дефинирана при $x\geq 0$, която приема само стойностите 1 или -1 (при едни стойности на x можем да имаме $\varepsilon(x)=1$, а при други $\varepsilon(x)=-1$). Читателят лесно ще се убеди, че функцията $\varepsilon(x)\sqrt{x}$, дефинирана по този начин при всички неотрицателни стойности на x, е също обратна функция на $f_1(t)$.

Да разгледаме друг пример. Нека дефинираме $f_2(t)$ с условието $f_2(t)=t^2$ при неотрицателни стойности на t (при $t<0$ ние не дефинираме $f_2(t)$). Тази функция се различава от току-що разгледаната функция $f_1(t)$ по дефиниционната си област. Не е трудно да се види, че функцията $\sqrt{x}$ е обратна на функцията $f_2(t)$. Функцията $f_2(t)$ обаче няма друга обратна функция (читателят си спомня, че функцията $f_1(t)$ имаше безбройно много обратни). И наистина нека $g(x)$ е една обратна функция на $f_2(t)$. Това значи, че функцията $g(x)$ е дефинирана при всички неотрицателни стойности на аргумента си, приема неотрицателни стойности (защото стойностите ѝ трябва да принадлежат на дефиниционната област на $f_2(t)$) и удовлетворява уравнението

$$[g(x)]^2=x.$$

Ние обаче знаем, че при всеки избор на неотрицателното число x единственото неотрицателно число y, което удовлетворява уравнението

$$y^2=x,$$

е числото $\sqrt{x}$, т. е. $g(x)=\sqrt{x}$.

Като трети пример да разгледаме функцията $f_3(t)=e^t$, дефинирана с това равенство при всички реални стойности на t. Множеството N_3 от функционалните стойности на $f_3(t)$ е съставено от всички съществено положителни числа. Функцията $\varphi_3(x)=\ln x$, дефинирана по този начин при всички съществено положителни стойности на x, е една обратна функция на $f_3(t)$, защото дефиниционната област на $\varphi_3(x)$ е

N_3, никоя от стойностите на $\varphi_3(x)$ не напуска дефиниционната област на $f_3(t)$ и най-сетне

$$f_3[\varphi_3(x)]=e^{\ln x}=x.$$

Не е трудно да се види, че $f_3(t)$ няма друга обратна функция. Казваме, че една функция $f(t)$ е обратима, когато тя притежава само една обратна функция. Така функциите $f_2(t)$ и $f_3(t)$, които ние разгледахме току-що като примери, са обратими. Напротив, функцията $f_1(t)$ не е обратима.

Ако функцията $f(t)$ е обратима и $\varphi(x)$ е нейната обратна функция, то при всички стойности на t от дефиниционната област на $f(t)$ имаме

$$\varphi[f(t)]=t. \tag{3}$$

И наистина да допуснем, че в някоя точка t_0 от дефиниционната област на $f(t)$ имаме

$$\varphi[f(t_0)]\neq t_0.$$

Да положим за краткост

$$f(t_0)=x_0$$

и да означим с M и N дефиниционните области съответно на $f(t)$ и $\varphi(x)$. Очевидно x_0 е една точка от N, защото N е същевременно множеството от функционалните стойности на $f(t)$. Да разгледаме помощната функция $\psi(x)$, дефинирана в множеството N по следния начин:

$$\psi(x)=\varphi(x) \text{ при } x\neq x_0$$
$$\psi(x)=t_0 \text{ при } x=x_0.$$

Стойностите на функцията $\psi(x)$ не напускат M, защото, от една страна, t_0 принадлежи на M, а, от друга страна, стойностите на $\varphi(x)$ също принадлежат на M. Не е трудно да се види, че функцията $\psi(x)$ е една обратна функция на $f(t)$. И наистина след всичко казано досега е достатъчно да покажем, че

$$f(\psi(x))=x$$

при всички стойности на x от N. Това може да се види така: при $x\neq x_0$ имаме

$$f(\psi(x))=f(\varphi(x))=x,$$

а при $x=x_0$ имаме

$$f(\psi(x_0))=f(t_0)=x_0.$$

И така функцията $\psi(x)$ е действително една обратна функция на $f(t)$. Тя обаче сигурно е различна от $\varphi(x)$, защото

$$\psi(x_0)=t_0,$$
$$\varphi(x_0)=\varphi(f(t_0))\neq t_0,$$

нещо, което противоречи на допускането, че функцията $f(x)$ е обратима. С това е показано, че равенството (3) е наистина вярно при всяко t от M.

Една обратима функция $f(t)$ не може да приема никоя своя стойност повече от един път. И наистина равенството (3) ни учи, че от $f(t_1)=f(t_2)$ следва $t_1=t_2$.

Обратно, нека $f(t)$ приема всяка своя стойност само веднъж и нека $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ са две обратни функции на $f(t)$. В такъв случай

$$f[\varphi_1(x)]=x,$$
$$f[\varphi_2(x)]=x$$

и следователно

$$f[\varphi_1(x)]=f[\varphi_2(x)].$$

Дадено е обаче, че функцията $f(t)$ не може да приема равни стойности при различни стойности на аргумента си. Оттук заключаваме, че

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x),$$

т. е. че функцията $f(t)$ има само една обратна функция.

След всичко казано ние можем да дефинираме понятието обратима функция така: **една функция се нарича обратима, когато тя приема всяка своя стойност само веднъж.** Тази дефиниция е еквивалентна на дефиницията, от която тръгнахме, но се прилага по-често и следователно е по-важна.

Множеството M' от стойностите на обратната* функция $\varphi(x)$ на една обратима функция $f(t)$ съвпада с дефиниционната област M на $f(t)$. Това се вижда от равенството (3). И наистина, каквато и точка t_0 да вземем от M, тя представлява функционална стойност на $\varphi(x)$ при $x=f(t_0)$. Този резултат и равенството (3) ни учат, че ако функцията $f(t)$ е обратима и $\varphi(x)$ е обратната ѝ функция, то $f(t)$ е обратна на $\varphi(x)$.

Ако на всяка точка t_0 от дефиниционната област M на една функция $f(t)$ съпоставим точката $f(t_0)$ от съвкупността N на функционалните стойности на $f(t)$, получаваме еднозначно съответствие, което се нарича изображение на M върху N. Специално, ако функцията $f(t)$ е обратима, при това съответствие различни точки се изобразяват върху различни точки. Такова съответствие се нарича обратимо. И така **едно съответствие се нарича обратимо, когато при него различни точки се изобразяват върху различни точки.**

Задачи

1. Нека $f(t)$ е произволна функция. Да се докаже, че всяка нейна обратна функция е обратима (независимо от това, дали $f(t)$ е обратима, или не).

2. Нека $f(t)$ е една обратима функция и $\varphi(x)$ е обратната функция на $f(t)$. Нека t_0 е произволна точка от дефиниционната област на $f(t)$ и нека $x_0=f(t_0)$. Да се докаже, че $t_0=\varphi(x_0)$.

3. Докажете, че функцията $\operatorname{sh} t$, разглеждана върху цялата ос t, е обратима и нейната обратна функция е

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

* Засега е ясно, че M' е едно подмножество на M.

4. Докажете, че функцията $\operatorname{ch} t$, разглеждана при $t\geq 0$, е обратима и нейната обратна функция е

$$\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

където $x\geq 1$.

§ 14. Обратни функции на непрекъснати функции

Нека функцията $f(t)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество M. Ние знаем, че в такъв случай множеството N от нейните функционални стойности е също тъй компактно.

Теорема. **Ако функцията $f(t)$ е непрекъсната в едно компактно множество M и обратима в него, то обратната ѝ функция $\varphi(x)$ е също тъй непрекъсната във всички точки от дефиниционната си област.**

И наистина нека x_0 е произволна точка от дефиниционната област на $\varphi(x)$ и нека

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots \tag{1}$$

е произволна редица от числа, които също принадлежат на дефиниционната област на $\varphi(x)$ и клонят към x_0. Трябва да покажем, че редицата

$$\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\ \varphi(x_3),\ldots$$

е сходяща. Полагаме за краткост

$$\varphi(x_0)=t_0 \text{ и } \varphi(x_n)=t_n \quad (n=1,\ 2,\ldots),$$

откъдето

$$f(t_0)=f[\varphi(x_0)]=x_0 \text{ и } f(t_n)=f[\varphi(x_n)]=x_n.$$

Числата t_n лежат в множеството M и следователно образуват ограничена редица, тъй като множеството M е компактно. Нашата цел е да покажем, че тази редица е сходяща. За тази цел е достатъчно да покажем, че редицата

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ldots \tag{2}$$

не може да има друга точка на сгъстяване освен t_0. И наистина нека τ е някоя нейна точка на сгъстяване. В такъв случай ние можем да изберем от редицата (2) подредица

$$t_{m_1},\ t_{m_2},\ t_{m_3},\ldots$$
$$m_1<m_2<m_3<\ldots,$$

която да клони към τ. Точката τ обаче лежи в M, защото множеството M е компактно. От това следва, че функцията $f(t)$ е дефинирана и непрекъсната в тази точка. По такъв начин заключаваме, че

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k}=\lim_{k\to\infty} f(t_{m_k})=f(\tau).$$

Редицата

$$x_{m_1},\ x_{m_2},\ x_{m_3},\ldots$$

е обаче подредица на редицата (1) и следователно клони към x_0. От това заключаваме, че

$$f(\tau)=x_0.$$

Като вземем пред вид, че функцията $f(t)$ е обратима, получаваме

$$\varphi(x_0)=\varphi(f(\tau))=\tau$$

или, което е същото,

$$\tau=t_0.$$

С това всичко е доказано.

§ 15. Диференциране на обратните функции

Нека функцията $f(t)$ е дефинирана, непрекъсната и обратима в едно компактно множество M. Да означим с $\varphi(x)$ обратната ѝ функция. Нека t_0 е точка от M, във всяка околност на която има точки от M, различни от t_0. Да положим $f(t_0)=x_0$. В такъв случай във всяка околност на точката x_0 има точки от дефиниционната област на $\varphi(x)$, които са различни от x_0. За да се убедим в това, достатъчно е да изберем редица от точки, които са различни от t_0, принадлежат на M и клонят към t_0. Функцията $f(t)$ изобразява тези точки в точки от дефиниционната област на $\varphi(x)$, които са различни от x_0 и клонят към x_0.

Нека (освен изброеното по-горе) функцията $f(t)$ има производна в точката t_0 и нека тази производна е различна от нула. При тези предположения функцията $\varphi(x)$ притежава производна в точката x_0 и

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(t_0)}.$$

И наистина нека x_0+h е произволна точка от дефиниционната област на $\varphi(x)$, която е различна от x_0. Да положим

$$k=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0).$$

Очевидно $k\neq 0$, защото в противен случай бихме имали

$$x_0=f[\varphi(x_0)]=f(\varphi(x_0+h)]=x_0+h,$$

което не е вярно, защото $h\neq 0$. Поради непрекъснатостта на функцията $\varphi(x)$ (която ние установихме в предния параграф) заключаваме че k клони към нула, когато h клони към нула.

По-нататък имаме

$$\varphi(x_0)=\varphi(f(t_0))=t_0$$

и следователно

$$f(t_0+k)=f[\varphi(x_0)+k]=f[\varphi(x_0+h)]=x_0+h=f(t_0)+h.$$

Оттук получаваме

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=\frac{k}{f(t_0+k)-f(t_0)}=\frac{1}{\dfrac{f(t_0+k)-f(t_0)}{k}}.$$

Като вземем под внимание, че изразът

$$\frac{f(t_0+k)-f(t_0)}{k}$$

притежава граница, когато k клони към нула, и че тази граница е различна от нула, заключаваме, че изразът

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}$$

също притежава граница, когато h клони към нула, т. е. функцията $\varphi(x)$ е диференцуема в точката x_0, и

$$\varphi'(x_0)=\frac{1}{f'(t_0)}.$$

§ 16. Обратни кръгови функции

Ние дефинирахме функцията $\sin t$ при всички реални стойности на t. Тази функция не е обратима, защото е периодична и следователно приема всяка своя стойност безбройно много пъти. Напротив, ако разгледаме функцията

$$\varphi(t)=\sin t$$

само в интервала $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$, то получаваме вече една обратима функция. И наистина, ако допуснем, че функцията $\varphi(t)$ приема в две различни точки една и съща стойност, заключаваме с помощта на теоремата на Рол, че производната

$$\varphi'(t)=\cos t$$

се анулира поне за една вътрешна точка на интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Това обаче не е вярно, защото от $\cos t=0$ получаваме $\cos|t|=0$ (поради четността на функцията $\cos t$) и следователно $|t|\geq\frac{\pi}{2}$ (защото $\frac{\pi}{2}$ е най-малкият положителен корен на уравнението $\cos t=0$). И така функцията $\varphi(t)$ приема всяка своя стойност само веднъж и следователно е обратима. Единствената ѝ обратна функция се бележи със знака

$$\arcsin x$$

(четете „аркус синус икс").

Дефиниционната област на функцията $\arcsin x$ представлява затвореният интервал $[-1, 1]$, защото, както знаем, тази дефиниционна област не е нищо друго освен множеството от функционалните стойности на функцията $\varphi(t)=\sin t$.

Функцията

$$\arcsin x$$

удовлетворява неравенствата

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$$

защото стойностите ѝ принадлежат на дефиниционната област на функцията $\varphi(t)$.

Най-сетне при всички стойности на x от затворения интервал $[-1, 1]$ имаме

(1) $$\sin(\arcsin x) = x,$$

както това се вижда от дефиницията на понятието обратна функция Нека припомним тук, че ние доказахме в началото на този параграф че не може да има повече от едно число t, което да удовлетворява равенството

(2) $$\sin t = x$$

и неравенствата

(3) $$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Въз основа на казаното ние можем да дефинираме понятието $\arcsin x$ като число t, което удовлетворява равенството (2) и неравенствата (3). Такова число, както видяхме, има и то е едно единствено, когато $-1 \leq x \leq 1$.

Като вземем пред вид, че функцията $\varphi(t)$ е обратима, заключаваме, че

$$\arcsin(\sin t) = t,$$

когато t принадлежи на дефиниционната област на $\varphi(t)$, т. е. когато

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Теоремата за диференциране на обратните функции ни учи, че функцията $\arcsin x$ е сигурно диференцуема поне когато $x \neq \pm 1$, т. е. когато $\alpha = \arcsin x \neq \pm\frac{\pi}{2}$, защото в такъв случай $\varphi'(\alpha) = \cos\alpha \neq 0$. За да пресметнем производната ѝ, полагаме $y = \arcsin x$, т. е. $x = \sin y$. В такъв случай теоремата за диференциране на обратните функции ни дава

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Като вземем пред вид, че $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, заключаваме, че $\cos y > 0$ и следователно $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ или

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При $x = \pm 1$ функцията $y = \arcsin x$ не е диференцуема. И наистина да положим

$$\varphi(x) = \arcsin x.$$

В такъв случай

$$\sin\varphi(x) = x.$$

Ако допуснем, че функцията $\varphi(x)$ е диференцуема при $x = \pm 1$, то като диференцираме по правилото за диференциране на функция от функция, намираме

$$\cos\varphi(\pm 1) \cdot \varphi'(\pm 1) = 1,$$

което не е вярно, защото $\varphi(\pm 1) = \arcsin(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}$ и следователно

$$\cos\varphi(\pm 1) = \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ т. е.}$$

$$\cos\varphi(\pm 1) \cdot \varphi'(\pm 1) = 0.$$

По подобен начин се дефинира функцията

$$y = \arccos x$$

(четете „аркус косинус икс") като обратна функция на функцията $\cos t$ разглеждана в интервала $0 \leq t \leq \pi$, или, което е същото, като онова решение y на уравнението

$$\cos y = x,$$

което удовлетворява неравенствата $0 \leq y \leq \pi$.

Функцията $\arccos x$ е дефинирана в затворения интервал $[-1, 1]$ и стойностите ѝ се намират в интервала $[0, \pi]$. Освен това не е трудно да се види, че

$$\cos(\arccos x) = x \text{ при } -1 \leq x \leq 1$$

и

$$\arccos(\cos t) = t \text{ при } 0 \leq t \leq \pi.$$

Нека читателят сам обмисли всичките подробности. От правилото за диференциране на обратни функции имаме

$$y' = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Сега ще разгледаме обратната функция на функцията

$$f(t) = \operatorname{tg} t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Функцията $\operatorname{tg} t$ не е дефинирана при онези стойности на t, за които $\cos t=0$. Специално тя не е дефинирана при $t=\pm\frac{\pi}{2}$. В отворения интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ тя обаче е дефинирана. За нас е важно, че тя е и обратима в този интервал. Читателят лесно ще установи нейната обратимост, като вземе пред вид, че производната ѝ

$$f'(t)=\frac{1}{\cos^2 t}$$

никъде не се анулира. И наистина, ако допуснем, че функцията $\operatorname{tg} t$ приема някоя своя стойност повече от един път в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ще можем да заключим с помощта на теоремата на Рол, че производната $f'(t)=\frac{1}{\cos^2 t}$ се анулира поне в една точка, което, както вече отбелязахме, не е вярно. Обратната функция на функцията $\operatorname{tg} t$, разглеждана при

$$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2},$$

се означава със символа

$$\operatorname{arc\,tg} x$$

(четете „аркус тангенс икс"). Функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ е дефинирана при всички реални стойности на x, защото нейната дефиниционна област съвпада, както знаем, с множеството от функционалните стойности на функцията $\operatorname{tg} t$ и следователно не е нищо друго освен множеството от всичките реални числа.

От дефиницията на понятието обратна функция имаме

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x$$

при всички стойности на x. Като вземем пред вид, че функцията $\operatorname{tg} t$ при $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ е обратима, заключаваме, че

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} t)=t$$

при всички стойности на t от интервала $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

Ще покажем, че при всички стойности на x е в сила равенството

(4) $$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

И наистина да положим

$$\alpha=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

В такъв случай

$$\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ще докажем, че

(5) $$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Ясно е преди всичко, че $-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$. Остава да докажем, че $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$.

Това може да се установи така: ако допуснем, че $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$, получаваме

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm 1,$$

откъдето

$$\frac{x^2}{1+x^2}=1,$$

или $x^2=1+x^2$, което очевидно не е вярно.

Неравенствата (5) ни дават право да образуваме $\operatorname{tg}\alpha$. Като вземем пред вид, че $\cos\alpha>0$ и следователно $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, намираме

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}=x.$$

Този резултат и неравенствата (5) ни дават

$$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha,$$

с което равенството (4) е установено. Това равенство ни учи, че функцията $\operatorname{arctg} x$ е диференцуема при всяко x и

$$(\operatorname{arc\,tg} x)'=\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Най-сетне нека читателят сам докаже, че функцията

$$g(y)=\operatorname{ctg} y,$$

разглеждана при $0<y<\pi$, е обратима. Обратната ѝ функция се означава със символа $\operatorname{arc\,ctg} x$ (четете „аркус котангенс икс"). Нека читателят също сам докаже, че

$$\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x,$$

и от това да извлече заключението, че функцията arc ctg x е диференцуема за всяко x и че

$$(\text{arc ctg}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

§ 17. Пресмятане на числото π

Ще покажем, че при $-1 \leq x \leq 1$ имаме

$$\text{arctg}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \tag{1}$$

За тази цел разглеждаме функцията

$$\varphi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \tag{2}$$

Правилото за диференциране на степенните редове ни дава

$$\varphi'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \tag{3}$$

По такъв начин получаваме геометрична прогресия, чийто радиус на сходимост е 1. Това ни дава право да твърдим, че радиусът на сходимост на реда (2) е също тъй 1. Като пресметнем сумата на геометричната прогресия (3), получаваме

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

По такъв начин функциите arc tg x и $\varphi(x)$ имат една и съща производна при $-1 < x < 1$ и следователно можем да пишем при тези стойности на x

$$\text{arc tg}\, x = \varphi(x) + C,$$

където C е константа. За да пресметнем стойността на тази константа, достатъчно е да вземем под внимание, че arc tg $0 = 0$ и $\varphi(0) = 0$. По такъв начин получаваме $C = 0$ и следователно

$$\text{arc tg}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \tag{4}$$

при $-1 < x < 1$. Ще покажем, че така полученото равенство (4) е вярно и при $x = 1$, $x = -1$. Достатъчно е очевидно да се занимаем със случая $x = 1$, защото, когато сменим знака на x, смеия се знакът на arc tg x и същевременно се сменят знаците на всичките събираеми на реда, който стои от дясната страна на равенството (4). Доказателството ще извършим така. Нека $0 \leq x < 1$. В такъв случай знаците на членовете на реда

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

се сменят алтернативно, а редицата

$$\frac{x}{1}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^5}{5}, \dots,$$

монотонно намалявайки, клони към нула. Това ни дава право да пишем (вж. част I, глава II, § 9)

$$\left| \text{arc tg}\, x - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Да оставим в това неравенство x да клони към единица. В такъв случай ще получим след граничен преход

$$\left| \text{arc tg}\, 1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n-1} \right| \leq \frac{1}{2n+1},$$

откъдето се вижда, че равенството (4) е валидно и при $x = 1$.

При $x = 1$ развитието (4) добива вида

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots, \tag{5}$$

защото

$$\text{tg}\, \frac{\pi}{4} = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

и следователно

$$\text{arc tg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$$

(докажете сами, че $\text{tg}\, \frac{\pi}{4} = 1$, като изхождате от аналитичната дефиниция на тригонометричните функции). Равенството (5) се нарича формула на Лайбниц. Както забеляза още Нютон, тази формула е крайно неудобна за приближеното пресмятане на числото π поради извънредно бавната ѝ сходимост.

За да получим по-бързо сходящ ред за пресмятане на числото π, полагаме

$$\alpha = \text{arc tg}\, \frac{1}{5},$$

откъдето

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{1}{5} \tag{6}$$

и

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

От друга страна, при $-\frac{\pi}{2}<\alpha\leq 0$ бихме имали $\operatorname{tg}\alpha\leq 0$ и следователно,

(7) $$0<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

защото $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}>0$.

От равенството (6) получаваме

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12}.$$

Неравенствата (7) ни дават $0<2\alpha<\pi$. Като вземем под внимание обаче, че $\operatorname{tg}2\alpha>0$, намираме

$$0<2\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Аналогично получаваме

(8) $$\operatorname{tg}4\alpha=\frac{120}{119}$$

и

(9) $$0<4\alpha<\frac{\pi}{2},$$

тъй като

$$0<4\alpha<\pi \text{ и } \operatorname{tg}4\alpha>0.$$

От равенството (8) намираме

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}4\alpha-1}{\operatorname{tg}4\alpha+1}=\frac{1}{239},$$

а от неравенствата (9) получаваме

$$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}<4\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2},$$

откъдето

$$4\alpha-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239},$$

или

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}.$$

След като развием $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$ и $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$ по формулата (1), намираме

(10) $$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\cdots\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\cdots\right).$$

Формулата (10) е твърде удобна за приближеното пресмятане на числото π.

Ето първите няколко десетични знака на това число:

$$\pi=3{,}14159265358979323846264338327 9\ldots$$

Задачи

1. В § 16 доказахме, че

$$\arcsin(\sin x)=x$$

при $|x|\leq\frac{\pi}{2}$. Вярно ли е това равенство, ако $|x|>\frac{\pi}{2}$?

Отговор. Не.

2. Докажете, че $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg}x)=x$ тогава и само тогава, когато $0<x<\pi$.

3. Докажете, че

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

при $|x|\leq 1$.

Решение. Полагаме

$$\arcsin x=\alpha.$$

В такъв случай $x=\sin\alpha$ и $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$. Въз основа на това намираме

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{\cos^2\alpha}=|\cos\alpha|=\cos\alpha=\cos(\arcsin x).$$

4. Докажете, че

$$\sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2} \text{ при } -1\leq x\leq 1.$$

Решение.

$$\sin(2\arcsin x)=2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)=$$
$$=2\sin(\arcsin x)\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2}=2x\sqrt{1-x^2}.$$

5. Докажете, че при всяко x

$$\sin(2\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Решение.

$$\sin(2\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{2\sin(\operatorname{arc\,tg}x)\cos(\operatorname{arc\,tg}x)}{\cos^2(\operatorname{arc\,tg}x)+\sin^2(\operatorname{arc\,tg}x)}=$$
$$=\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x)}{1+(\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x))^2}=\frac{2x}{1+x^2}.$$

6. Докажете, че

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\arccos x$$

при $0 < x \leq 1$ и

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\pi + \arccos x$$

при $-1 \leq x < 0$.

Решение. Полагаме $\arccos x = \alpha$. Тогава $x = \cos\alpha$ и $0 \leq \alpha \leq \pi$. Въз основа на това намираме

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \operatorname{arc\,tg}\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha).$$

При $0 < x \leq 1$ имаме $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ и следователно

(1) $$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha$$

или

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \arccos x.$$

Напротив, при $-1 \leq x < 0$ равенството (1) не е вярно, защото $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$. Обаче, като вземем пред вид, че

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi),$$

получаваме

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(\alpha-\pi)]$$

и тъй като при $-1 \leq x < 0$ имаме $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, то

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi \leq 0$$

и следователно

$$\operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(\alpha-\pi)] = \alpha - \pi$$

или

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\pi + \arccos x.$$

7. Докажете, че

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x \text{ при } 0 \leq x \leq \pi.$$

8. Докажете, че

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{ при } |x| \leq 1.$$

9. Докажете, че

$$2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

10. Докажете, че

$$\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-2x}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\arcsin x \text{ при } |x| \leq 1.$$

11. Докажете, че

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin x}{2} \text{ при } -1 \leq x < 1.$$

12. Докажете, че

$$\arcsin(2x^2-1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x & \text{за } -1 \leq x \leq 0; \\ -\frac{\pi}{2} + 2\arcsin x & \text{за } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

13. Докажете, че

$$\arccos(4x^3-3x) = \begin{cases} 3\arccos x & \text{при } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 2\pi - 3\arccos x & \text{при } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -2\pi + 3\arccos x & \text{при } -1 - x \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

14. Намерете първата производна на функцията

$$y = \arcsin(2x^2-1) \text{ при } -1 < x < 0 \text{ и при } 0 < x < 1.$$

Решение. Имаме да намерим производната на функция от вида $y = \arcsin u(x)$. В случая $u(x) = 2x^2 - 1$. Съгласно правилото за диференциране на функция от функция имаме $y' = (\arcsin u)' u'$, т. е. в нашия специален случай

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}(2x^2-1)' = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}}.$$

При $0 < x < 1$ имаме $|x| = x$ и следователно $y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$. При $-1 < x < 0$ имаме $|x| = -x$ и следователно $y' = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. Докажете, че функцията

$$f(x) = \arcsin(2x^2-1), \ |x| \leq 1,$$

не е диференцуема при $x = 0$.

Упътване. Използувайте дефиницията на понятието производна и приложете теоремата за крайните нарастванія.

16. Докажете, че

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{4} \text{ при } x > -1,$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{3\pi}{4} \text{ при } x < -1,$$

като се сравнят производните на двете страни на това равенство.

Решение. Функцията

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1}$$

не е дефинирана при $x = -1$, затова ние ще изучим отделно двата безкрайни интервала $x > -1$ и $x < -1$.

Във всеки един от тези два интервала имаме

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

откъдето заключаваме, че производната на функцията

$$\varphi(x)=f(x)-\operatorname{arc\,tg} x$$

е нула както в безкрайния интервал $x>-1$, така и в безкрайния интервал $x<-1$. От това заключаваме, че функцията $\varphi(x)$ е константа както при $x>-1$, така и при $x<-1$ (тези две константи могат да бъдат различни).

Като вземем пред вид, че

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=-\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\frac{3\pi}{4},$$

заключаваме, че $\varphi(x)=-\frac{\pi}{4}$ при $x>-1$ и $\varphi(x)=\frac{3\pi}{4}$ при $x<-1$.

17. Докажете, че

$$\arcsin\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)=\frac{\arcsin x}{2}\quad\text{при } |x|\leq 1),$$

като сравните производните на двете части на това равенство при $|x|<1$.

18. Докажете, че

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\begin{cases}2\operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x\geq 0,\\ -2\operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x\leq 0,\end{cases}$$

като сравните производните на двете части на равенството при $x\neq 0$.

19. Докажете, че

$$\arcsin(2x^2-1)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}-2\arcsin x & \text{при } -1\leq x\leq 0,\\ -\frac{\pi}{2}+2\arcsin x & \text{при } 0\leq x\leq 1,\end{cases}$$

като сравните производните на двете страни на равенството при $|x|<1$ и $x\neq 0$.

20. Докажете, че

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}\pi-2\operatorname{arc\,tg} x & \text{при } 1\leq x,\\ 2\operatorname{arc\,tg} x & \text{при } -1\leq x\leq 1,\\ -\pi-2\operatorname{arc\,tg} x & \text{при } x\leq -1,\end{cases}$$

като сравните производните на двете страни на равенството при $|x|\neq 1$.

21. Докажете, че функциите $\arcsin x$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ са нечетни.

22. Докажете, че при $|x|\leq 1$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

23. При какви стойности на x е валидно равенството

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}\ ?$$

24. При какви стойности на x и y е валидно равенството

(2) $$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Упътване. Докажете, че

$$\sin(\arcsin x+\arcsin y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

От това заключаваме, че равенството (2) е валидно тогава и само тогава, когато

(3) $$-\frac{\pi}{2}\leq\arcsin x+\arcsin y\leq\frac{\pi}{2}.$$

Като вземем под внимание, че

$$-\pi\leq\arcsin x+\arcsin y\leq\pi,$$

заключаваме, че неравенствата (3) са изпълнени тогава и само тогава, когато

$$\cos(\arcsin x+\arcsin y)\geq 0$$

(защо?), т. е. когато

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\geq xy \text{ и } |x|\leq 1,\ |y|\leq 1.$$

Кои точки от равнината на една декартова координатна система удовлетворяват последните неравенства?

25. Докажете, че при $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{arc\,tg} x=\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+n\operatorname{arc\,tg} x\right).$$

26. Докажете, без да се ползувате от геометрични съображения, че системата

(4) $$x=\rho\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi,$$

където x и y са дадени, а ρ и φ са неизвестни, има решения при всеки избор на x и y.

Упътване. Проверете, че при $x^2+y^2\neq 0$ числата

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=2k\pi+\varepsilon\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

удовлетворяват системата (4), когато k е цяло число, а $\varepsilon=1$ при $y\geq 0$ и $\varepsilon=-1$ при $y<0$; за да получим едно решение при $x^2+y^2=0$, избираме $r=0$ и φ произволно.

27. Намерете всичките решения на системата (4) (x и y са дадени; ρ и φ са неизвестни), без да си служите с геометричните съображения.

28. Докажете, че при цели неотрицателни стойности на n и при $|x|\leq 1$ функцията

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

е полином от n-та степен.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно, като предварително покажете, че

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x).$$

Забележка. Полиномите $T_n(x)$ се наричат полиноми на Чебишев (Чебышев) и играят важна роля в много въпроси на анализа.

29. Докажете, че коефициентът пред x^n в n-тия полином на Чебишев

$$\cos(n\arccos x)$$

е равен на 2^{n-1}.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно, като използувате рекурентната зависимост от предната задача.

30. Докажете, че при $|x| \leqq 1$ и $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin(n \arccos x).$$

Упътване. Извършете доказателството индуктивно. За тази цел образувайте помощната функция

$$\varphi(x) = \frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} - (-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{n+1}\sin((n+1)\arccos x).$$

Докажете, че при $|x| < 1$

$$\varphi'(x) = -(2n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left[x.(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right] +$$

$$+(-1)^n 1.3.5\ldots(2n+1)\frac{\cos((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

като развиете

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x.(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]$$

по формулата на Лайбниц. По този начин се показва, че функцията $\varphi(x)$ е една константа. За да пресметнете нейната стойност, покажете, че $\varphi(1)=0$, като развиете по формулата на Лайбниц израза

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\frac{1}{2}}(1+x)^{n+\frac{1}{2}}\right].$$

31. Докажете, че при $|x| \leqq 1$ и $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\cos(n \arccos x) = \frac{(-1)^n(n-1)!\,2^{n-1}}{(2n-1)!}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

Упътване. Използувайте предната задача.

32. Намерете всички корени на уравнението

$$\cos(n \arccos x) = 0,$$

където n е цяло положително число.

33. Докажете, че функцията

$$y = \cos(n \arccos x)$$

удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

§ 18. Таблица на формулите, върху които се основава техниката на диференцирането

Тук ще припомним накратко по-важните формули, с помощта на които става намирането на производните. Читателят трябва да помни тези формули наизуст.

Производни на елементарни функции:*

$$(a)' = 0,$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Така например $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ и пр.

$$(e^x)' = e^x$$

или по-общо

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

* Буквите a и n означават константи, x означава, както обикновено, независимата променлива, u и v означават функции на x.

Общи правила:

$$(au)' = au'.$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$[f[u(x)]]' = f'[u(x)]\, u'(x).$$

Така например

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \text{ и пр.}$$

Ако функциите

$$y = f(x) \text{ и } x = \varphi(y)$$

са обратни една на друга, то, грубо казано,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

или малко по-точно

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'[f(x)]}.$$

Задачи

Да се намерят производните на следните функции:

1. $y = 5x^3 - 7x^2 + 6x - 13.$
2. $y = \frac{x^3}{3}$
3. $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$
4. $y = x^4(x^2-1)^2.$
5. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$
6. $y = \frac{x}{1-x^2}.$
7. $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$
8. $y = x\cos x.$
9. $y = (x^2-2x+2)\sin x.$
10. $y = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x.$
11. $y = \frac{1}{\cos x}.$
12. $y = x\,\mathrm{tg}\,x.$
13. $y = (ax+b)^3.$
14. $y = (x^2-1)^{15}.$
15. $y = x^2\,\mathrm{ctg}\,x.$
16. $y = \sin^3 x.$
17. $y = (1-x)^5.$
18. $y = \frac{1}{(x^2+1)^2}.$
19. $y = \cos^2 x.$
20. $y = \cos x^2.$
21. $y = \cos^4 2x.$
22. $y = \sin 2x.$
23. $y = (\cos ax^2)\,.\,\sin bx^2.$
24. $y = \mathrm{tg}\,x + 2\,\mathrm{tg}^2 2x.$

25. $y = \cos\frac{2x}{1+x^2} + \sin^2 x.$
26. $y = \sin x^2 + \sin^2 x.$
27. $y = \mathrm{tg}\,\frac{1-x}{1+x}.$
28. $y = e^{-x^2}.$
29. $y = e^x \sin 2x.$
30. $y = e^{ax}\cos bx.$
31. $y = e^{-x}(x^2-4).$
32. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$
33. $y = e^{\frac{1+x}{1-x}}.$
34. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$
35. $y = \frac{x^4}{4}\left[(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}\right].$
36. $y = \ln\,\mathrm{tg}\left[\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right].$
37. $y = \ln\cos x.$
38. $y = \ln(1-x).$
39. $y = \frac{1}{\ln(1-x)}.$
40. $y = \sqrt{x}.$
41. $y = \sqrt[3]{x}.$
42. $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}.$
43. $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}.$
44. $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}.$
45. $y = \sqrt{3x-5}.$
46. $y = \sqrt{a^2-x^2}.$
47. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$
48. $y = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$
49. $y = x\sqrt{x^2+1}.$
50. $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}.$
51. $y = \sqrt[3]{(2x+1)^2}.$
52. $y = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$
53. $y = \ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} - \sqrt{x^2+1}.$
54. $y = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{a}.$
55. $y = \arcsin\frac{1}{x}.$
56. $y = \arccos\sqrt{1-x^2}.$
57. $y = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$
58. $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$
59. $y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right),\ a > b \geq 0.$
60. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x},\ a > b \geq 0.$
61. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ Отг. $y' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}.$
62. $y = e^{\arcsin x}(x+\sqrt{1-x^2}),\ |x| < 1.$ Отг. $y' = 2e^{\arcsin x}.$
63. $y = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)],\ x > 0.$ Отг. $y' = \sin(\ln x).$

64. $y=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}(\arcsin x-x),\quad |x|<1.$

Отг. $y'=\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}).$

65. $y=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}),\ |x|<1.$

Отг. $y'=\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

66. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2},\ |x|\neq 1.$

Отг. $y'=\frac{1}{1+x^4}.$

67. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}).$

Отг. $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$

68. $y=2\arcsin\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}),\quad |x|<1.$

Отг. $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

69. $y=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ |x|<1.$

Отг. $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

70. $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\arccos\frac{au-a^2+b^2+c^2}{u\sqrt{b^2+c^2}},$

където $u=a+b\cos x+c\sin x,\quad u\neq 0,$

$$a^2>b^2+c^2\neq 0.$$

Отг. $y'=\pm\frac{1}{u}.$

71. $y=x^x,\quad x>0.$

Решение. Чрез логаритмуване намираме $\ln y=x\ln x$. Оттук $\frac{y'}{y}=\ln x+1$ и следователно $y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$.

72. $y=(\ln x)^{\ln x},\quad x>0.$

Отг. $y'=(\ln x)^{\ln x}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}+\frac{1}{x}\right).$

73. $y=x^{\sin x}.$

Отг. $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$

ГЛАВА IV

НАЙ-ПРОСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНОТО СМЯТАНЕ

§ 1. Максимум и минимум

Казваме, че една функция $f(x)$ притежава локален максимум (минимум) в една точка x_0, когато около точката x_0 може да се избере такава околност $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, където $\delta>0$, че:

1) околността $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ изцяло да лежи в дефиниционната област на функцията;

2) функционалната стойност $f(x_0)$ да бъде най-голяма (най-малка) измежду функционалните стойности на $f(x)$ в околността $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

(Тук не се изключва възможността тази най-голяма или най-малка стойност да се достига и в точки, различни от x_0. Казваме, че локалният максимум или минимум в точката x_0 е строг, когато равенството $f(x)=f(x_0)$ е изпълнено в достатъчно малка околност на x_0 само при $x=x_0$.)

В дефиницията, която дадохме, се иска точката x_0 да притежава поне една околност, лежаща изцяло в дефиниционната област на функцията. Това е вече едно ограничително условие за точката x_0. Така например, ако дефиниционната област на $f(x)$ е един интервал, а точката x_0 се намира в един от краищата му, то тази точка сигурно не удовлетворява поставеното изискване. Да си мислим едно точково множество M. Казваме, че една точка x_0 е вътрешна за това множество, когато може да се намери поне една околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на точката (разбира се, $\delta>0$), която е съставена само от точки, принадлежащи на множеството M. С тази терминология ние можем по-кратко да формулираме нашата мисъл така: в дефиницията, която дадохме, се иска точката x_0 да бъде вътрешна за дефиниционната област на $f(x)$.

Сега ще дадем няколко примера, които ще изяснят по-добре смисъла на понятията локален максимум и локален минимум.

Да разгледаме функцията

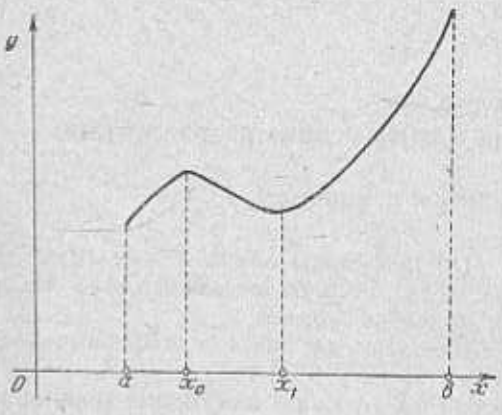
$$f(x)=x^4-x^2,$$

дефинирана с това уравнение при всички стойности на x. При $x=0$ тази функция притежава локален максимум, защото при $-1<x<1$ и $x\neq 0$

$$f(x)=x^2(x^2-1)<0=f(0),$$

т. е. $f(0)$ е най-голямата измежду стойностите на функцията в околността $(-1, 1)$ на точката 0 (в случая $x_0=0$ и $\delta=1$; ние бихме могли да дадем на δ коя да е стойност, по-малка от 1, но, разбира се, по-голяма от нула). Нека обърнем внимание върху това, че $f(0)$ не е най-голямата от всичките стойности на $f(x)$. Такова нещо съвсем не се иска в дефиницията, която дадохме. Очевидно

$$f(2) > f(0).$$



Черт. 11

Това обаче не е пречка да имаме локален максимум при $x=0$. Функционалната стойност $f(0)$ е най-голяма в околността $(-1, 1)$ на точката 0 и това е достатъчно, за да имаме локален максимум.

На черт. 11 е изобразена графиката на една функция, която при $x=x_0$ има локален максимум. Този локален максимум не е най-голямата стойност на функцията в дефиниционния ѝ интервал $[a, b]$. При $x=b$ функцията приема най-голямата си стойност, която обаче не представлява локален максимум, защото точката b не е вътрешна. При $x=x_1$ функцията има локален минимум.

§ 2. Необходимо условие за съществуване на локален екстремум при диференцуеми функции

Понякога ще си служим с термина екстремум като общо наименование за максимум и минимум.

Ние ще докажем сега следната теорема: ако една функция $f(x)$ е диференцуема в една точка x_0 и притежава локален екстремум в тази точка, то $f'(x_0)=0$.

(Геометрически това означава, че ако функцията е диференцуема за $x=x_0$ и притежава локален екстремум в тази точка, то тангентата към графиката ѝ в тази точка е успоредна на абсцисната ос.)

Доказателство. Да разгледаме например случая, когато в точка x_0 имаме локален максимум. В такъв случай в някоя достатъчно малка околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, на точката x_0 имаме

$$f(x) \leqq f(x_0),$$

или, което е същото,

$$f(x)-f(x_0) \leqq 0.$$

Да разгледаме отношението

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Точката x_0 е вътрешна за дефиниционната област на $f(x)$. Това позволява да се приближаваме към точката x_0 както отдясно, така и отляво, без при това да напускаме дефиниционната област на функцията $f(x)$. Ще се възползуваме от тази свобода и ще оставим x да клони към x_0 чрез стойности, по-големи от x_0. В такъв случай знаменателят на дробта

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

е положителен. От друга страна, числителят, както видяхме, е или отрицателен, или нула. От това заключаваме, че

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqq 0.$$

Като извършим граничния преход $x \to x_0$ в последното неравенство, заключаваме, че

$$f'(x_0) \leqq 0.$$

Ако обаче даваме на x стойности, по-малки от x_0, получаваме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqq 0,$$

защото в такъв случай знаменателят на дробта ще бъде отрицателен, а числителят и в този случай е или отрицателен, или нула (тъй като имаме максимум в точката x_0). Като извършим в последното неравенство граничния преход $x \to x_0$, получаваме

$$f'(x_0) \geqq 0.$$

Двете неравенства $f'(x_0) \leqq 0$ и $f'(x_0) \geqq 0$ ни учат, че

$$f'(x_0)=0.$$

Аналогично се извършва доказателството и в случая, когато имаме минимум в точката x_0.

С това ние намерихме едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум на една диференцуема функция. Това условие съвсем не е достатъчно. И наистина функцията $f(x)=x^3$ е диференцуема и $f'(x)=3x^2$, т. е. $f'(0)=0$. Въпреки това тази функция не притежава при $x=0$ нито локален максимум, нито локален минимум, защото колкото и малка околност да вземем около началото, винаги $f(x)>f(0)$ при $x>0$, но $f(x)<f(0)$ при $x<0$. Графиката на тази функция е изобразена на черт. 3 (част II, глава I, § 2). Разбира се, една функция може да притежава локален екстремум в една точка и без да бъде диференцуема в тази точка. Така например функцията $|x|$

не е диференцуема при $x=0$, но притежава локален минимум в тази точка. (Това е дори изобщо най-малката стойност на функцията.) Графиката на тази функция е изобразена на черт. 4 (част II, глава I, § 2).

§ 3. Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум

Нека функцията $f(x)$ е два пъти диференцуема в някоя околност на точката x_0 и втората ѝ производна $f''(x)$ нека е непрекъсната в точката x_0. При тези предположения ще докажем следната теорема: ако $f'(x_0)=0$, но $f''(x_0)\neq 0$, функцията $f(x)$ сигурно притежава локален екстремум в точката x_0; при това, ако $f''(x_0)<0$, имаме локален максимум, а ако $f''(x_0)>0$, имаме локален минимум. И наистина теоремата на Тейлор ни дава

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h)=f(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h),\ 0<\theta<1$$

(където сме представили остатъчния член във формата на Лагранж) или

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

Дадено е, че $f''(x_0)\neq 0$. Нека например $f''(x_0)>0$. Като се възползуваме от непрекъснатостта на $f''(x)$ при $x=x_0$, заключаваме, че при всички достатъчно малки стойности на $|h|$ ще имаме $f''(x_0+\theta h)>0$ (вж. § 8 на глава I от част II).

И така за всички достатъчно малки стойности на $|h|$ имаме

$$f''(x_0+\theta h)>0$$

и следователно при $h\neq 0$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h)>0,$$

т. е.

$$f(x_0+h)>f(x_0),$$

което показва, че имаме локален минимум в точката x_0 и този минимум е строг. Аналогично се доказва, че при $f''(x_0)<0$ имаме локален максимум. Извършете сами доказателството!

При $f''(x_0)=0$ тези разсъждения не ни дават никакво указание за съществуване или несъществуване на локален екстремум. Ето няколко примера, при които разгледаният критерий се оказва безполезен. Функцията $\varphi(x)=x^4$ притежава минимум при $x=0$, защото при $x\neq 0$ имаме $x^4>0$ или (което е същото) $\varphi(x)>\varphi(0)$, при все че $\varphi''(x)=4\cdot 3x^2$ и следователно $\varphi''(0)=0$. Напротив, функцията $\psi(x)=x^3$, както

вече видяхме, не притежава локален екстремум при $x=0$, при все че $\psi'(0)=0$; тук също $\psi''(0)=0$. По-общо, ако функцията $f(x)$ е диференцуема три пъти в някоя околност на точката x_0, ако $f'''(x)$ е непрекъсната при $x=x_0$ и най-сетне, ако $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, но $f'''(x_0)\neq 0$, то $f(x)$ не притежава нито локален максимум, нито локален минимум при $x=x_0$. И наистина формулата на Тейлор ни дава

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h)=f(x_0)+$$

$$+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h),\ 0<\theta<1,$$

или

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

Като вземем пред вид, че $f'''(x)$ е непрекъсната при $x=x_0$ и $f'''(x_0)\neq 0$, заключаваме, че $f'''(x_0+\theta h)$ не си мени знака и не се анулира, когато $|h|$ е достатъчно малко. Множителят h^3 обаче си мени знака, когато h си мени знака, поради което разликата

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

приема както положителни, така и отрицателни стойности във всяка околност на точката x_0. Този резултат ни показва, че в точката x_0 нямаме локален екстремум.

След тия предварителни бележки ще докажем следната обща теорема:

Нека функцията $f(x)$ е диференцуема n пъти в някоя околност на точката x_0 и нека $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната при $x=x_0$, като освен това

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

но $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. В такъв случай, ако числото n е четно, то имаме локален екстремум, като при $f^{(n)}(x_0)<0$ имаме строг локален максимум, а при $f^{(n)}(x_0)>0$ имаме строг локален минимум. Напротив, ако числото n е нечетно, то нямаме нито локален максимум, нито локален минимум.

Доказателство. Теоремата на Тейлор ни дава

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\cdots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}+$$

$$+\frac{h^n f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!},\ 0<\theta<1,$$

или като вземем под внимание, че $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!},\ 0<\theta<1.$$

Тук ние сме представили остатъчния член във формата на Лагранж. Като вземем пред вид, че $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната функция при $x=x_0$ и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, заключаваме, че $f^{(n)}(x_0+\theta h)$ сигурно не си мени знака и дори не се анулира, когато $|h|$ е достатъчно малко. Когато n е четно число, то h^n също не си мени знака, когато h си мени знака. От това заключаваме, че при $f^{(n)}(x_0)<0$ имаме

$$f(x_0+h)-f(x_0)<0,$$

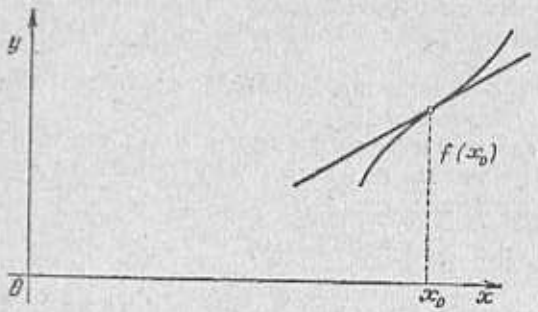
когато $|h|$ е достатъчно малко, т. е. функцията притежава локален максимум в точката x_0; при $f^{(n)}(x_0)>0$ имаме (разбира се, пак при достатъчно малки стойности на $|h|$)

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0,$$

т. е. функцията притежава локален минимум в точката x_0. Напротив когато числото n е нечетно, то множителят h^n си мени знака, когато h си мени знака. Като вземем пред вид, че $f^{(n)}(x_0+\theta h)$ не си мени знака и не се анулира, когато $|h|$ е достатъчно малко, заключаваме, че разликата

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

си мени знака заедно с h във всяка околност на точката x_0, т. е. функцията $f(x)$ в този случай не притежава нито локален максимум, нито локален минимум при $x=x_0$. В този случай точката x_0 е една инфлексна точка върху кривата. Това значи, че във всяка кръгова област с център в точката $[x_0, f(x_0)]$ (или, както се казва понякога, във всяка двуизмерима околност на тази точка) има точки от графиката на функцията $y=f(x)$, разположени от различни страни на тангентата към тази графика в точката $[x_0, f(x_0)]$. На черт. 3 е изобразена крива, която при $x=0$ има инфлексна точка с хоризонтална тангента (нас ни интересува сега този случай, защото при нас по предположение $f'(x_0)=$



Черт. 12

$=0$). На черт. 12 е изобразена крива, която притежава инфлексна точка с наведена тангента при $x=x_0$.

Пример. Да се намерят локалните екстремуми на функцията

$$f(x)=(x-1)^3(x-2).$$

Очевидно имаме

$$f'(x)=3(x-1)^2(x-2)+(x-1)^3$$

или още

$$f'(x)=(x-1)^2(4x-7).$$

От това представяне е ясно, че производната $f'(x)$ се анулира само при $x=\frac{7}{4}$ и $x=1$. От друга страна,

$$f''(x)=2(x-1)(4x-7)+4(x-1)^2,$$

т. е. $f''\left(\frac{7}{4}\right)=4\left(\frac{7}{4}-1\right)^2>0$, и следователно при $x=\frac{7}{4}$ имаме локален минимум. Неговата стойност е $f\left(\frac{7}{4}\right)=-\frac{27}{256}$. Тъй като $f''(1)=0$, търсим третата производна

$$f'''(x)=2(4x-7)+8(x-1)+8(x-1).$$

Очевидно $f'''(1)\neq 0$. От това заключаваме, че при $x=1$ функцията $f(x)$ няма нито локален максимум, нито локален минимум.

Нека $f(x)$ е функция, която е дефинирана и диференцуема в някой интервал Δ. Казваме, че функцията $f(x)$ има инфлексия в една точка x_0 от Δ, ако производната ѝ притежава локален екстремум в x_0.

Задачи

1. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=x^3-12x$.
2. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=\sin 3x-3\sin x$.
3. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=x^5-6x^4+12x^3-8x^2+1$.
4. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)=(x-1)^4x$.
5. Измежду правоъгълниците с даден периметър да се намери онзи, който има най-голямо лице.
6. Измежду правоъгълниците, вписани в дадена окръжност с радиус r, да се намери онзи, който има най-голямо лице.
7. Известно е от физиката, че силата на осветлението f се изразява с формулата $f=\frac{m\sin\varphi}{r^2}$, където φ е ъгълът между осветяваната площадка и лъчите, r е разстоянието до светлинния източник и m е константа, която зависи от силата на източника и от приетите единици. На каква височина h трябва да се окачи върху един даден стълб един светлинен източник, така че в дадена точка A от една хоризонтална площадка, която се намира на разстояние a от стълба, силата на осветлението да бъде най-голяма?
8. От един кръгов изрез (сектор) с даден радиус r е направена конична фуния. Колко голям трябва да бъде централният ъгъл на изреза, за да има фунията най-голям обем?
9. Една права a разделя една равнина на две полуравнини — I и II. Една точка M се движи в полуравнината I със скорост v_1, а в полуравнината II със скорост v_2. Нека A е една точка от полуравнината I, а B е една точка от полуравнината II. Точката M описва начупената ACB, където AC и CB са две праволинейни отсечки и точ-

ката C лежи на правата a. Докажете, че точката M изминава пътя ACB при фиксирани A и B за най-малко време, когато

$$\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}=\frac{v_1}{v_2},$$

където φ_1 и φ_2 са ъглите, които сключват посоките на векторите AC и CB с една (коя да е) от посоките на правата a. Сравнете този резултат със закона за пречупването на светлината.

§ 4. Изпъкнали функции

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в някой интервал Δ. Функцията $f(x)$ се нарича изпъкнала, ако при всеки избор на точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от Δ и при всеки избор на положителните числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$, за които

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1,$$

е в сила неравенството

$$(1)\qquad f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)\leqq p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n).$$

Не е трудно да се убедим, че точката $p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$ също принадлежи на Δ. Така например, ако Δ е крайният и затворен интервал $[a, b]$, то

$$a\leqq x_\nu\leqq b \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n)$$

и следователно

$$p_\nu a\leqq p_\nu x_\nu\leqq p_\nu b \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n).$$

Като съберем почленно последните неравенства, ще получим

$$p_1a+p_2a+\cdots+p_na\leqq p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n\leqq p_1b+p_2b+\cdots+p_nb$$

и следователно

$$a\leqq p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n\leqq b,$$

защото

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1.$$

Различните случаи, които могат да се представят, когато интервалът не е краен и затворен, се разглеждат също тъй просто.

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема поне два пъти в Δ и при всяко x от Δ имаме $f''(x)\geqq 0$, то функцията $f(x)$ е изпъкнала в Δ. Ако $f''(x)$ приема само строго положителни стойности, то в (1) имаме равенство само при $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

За да докажем това, ще положим

$$x_0=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n.$$

Формулата на Тейлор ни дава

$$(2)\qquad f(x_\nu)=f(x_0)+\frac{x_\nu-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x_\nu-x_0)^2}{2!}f''(\xi_\nu),$$

където ξ_ν е точка, избрана по подходящ начин в Δ. Като умножим двете страни на равенството (2) с p_ν и сумираме по ν, ще получим

$$\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu f(x_\nu)=f(x_0)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu(x_\nu-x_0)^2}{2}f''(\xi_\nu)$$

и следователно

$$\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu f(x_\nu)\geqq f(x_0).$$

Очевидно, за да имаме

$$\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu f(x_\nu)=f(x_0),$$

е необходимо и достатъчно да имаме

$$\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu(x_\nu-x_0)^2f''(\xi_\nu)=0,$$

което в случая, когато $f''(x)$ приема само строго положителни стойности, е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$x_1-x_0=x_2-x_0=\cdots=x_n-x_0=0,$$

защото числата $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са строго положителни. С това доказателството е завършено.

Задачи

1. Нека $a>0$. Докажете, че функцията a^x е изпъкнала върху цялата ос x.
2. Нека числата a, b, p и q са положителни и $p+q=1$. Докажете, че

$$ab\leqq pa^{\frac{1}{p}}+qb^{\frac{1}{q}}.$$

Равенството се достига само когато $a^q=b^p$.

Решение. Разглеждаме функцията

$$f(x)=e^x.$$

Тази функция е изпъкнала, защото $f''(x)=e^x>0$, т. е. при всеки избор на x и y имаме

$$f(px+qy)\leqq pf(x)+qf(y).$$

Ако поставим $x=\frac{\ln a}{p}$ и $y=\frac{\ln b}{q}$, получаваме исканото неравенство. Като вземем пред вид, че $f''(x)=e^x\neq 0$, заключаваме, че неравенството преминава в равенство само когато $x=y$, т. е. когато $a^{\frac{1}{p}}=b^{\frac{1}{q}}$.

3. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са n положителни числа. Докажете, че

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1\,a_2\ldots a_n}.$$

Знакът равенство е възможен само при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Забележка. Това неравенство се нарича неравенство на Коши между средното аритметично и средното геометрично на n числа.

Упътване. Докажете, че функцията $f(x)=-\ln x$ е изпъкнала при $x>0$.

4. Нека $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са n положителни числа, свързани с равенството

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1.$$

Докажете, че

$$p_1^{p_1}p_2^{p_2}\ldots p_n^{p_n}\geqq\frac{1}{n}.$$

Равенството се достига само при $p_1=p_2=\ldots=p_n$.

Упътване. Докажете, че функцията $f(x)=x\ln x$ е изпъкнала при $x>0$.

§ 5. Изследване на квадратичната форма

Изразът

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

(1)

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

се нарича квадратична форма на двете независими променливи x и y. Досега ние сме разглеждали само функции на една независима променлива. Тук за пръв път срещаме функция на две независими променливи.

Квадратичната форма x^2-y^2 е способна да приема както положителни, така и отрицателни стойности. Така например при $x=1$, $y=0$ тя има положителна стойност, а при $x=0$, $y=1$ тя има отрицателна стойност. Напротив, квадратичната форма x^2+y^2 приема само неотрицателни стойности и се анулира само при $x=y=0$ (нека изрично припомним, че ние работим само с реални числа). Една квадратична форма се нарича положително дефинитна, когато тя приема само неотрицателни стойности и се анулира само при $x=y=0$. Една квадратична форма се нарича отрицателно дефинитна, когато тя приема само неположителни стойности и се анулира само при $x=y=0$. Така например квадратичната форма

$$-x^2+2xy-2y^2=-(x-y)^2-y^2$$

е очевидно отрицателно дефинитна. Ние често ще казваме накратко „дефинитна форма", когато ще имаме пред вид квадратична форма, която е или положително, или отрицателно дефинитна.

За да бъде една квадратична форма $ax^2+2bxy+cy^2$ дефинитна, необходимо е a да бъде различно от нула. Нещо повече, за да бъде тази форма положително дефинитна, необходимо е да имаме $a>0$, а за да бъде тя отрицателно дефинитна, необходимо е да имаме $a<0$. В това се убеждаваме, като дадем на x стойност 1, а на y стойност 0. Така например, ако формата е положително дефинитна, то стойността ѝ е съществено положителна, когато поне едно от числата x и y е различно от нула; в случая, който ни интересува, получаваме

$$a.1^2+2b.1.0+c.0^2>0,$$

или, което е същото, $a>0$. Намереното по този начин условие за дефинитност е необходимо, но съвсем не е достатъчно. Ние ще си поставим за задача да намерим едно необходимо и достатъчно условие, за да бъде квадратичната форма (1) дефинитна. За тази цел ще разгледаме формата $ax^2+2bxy+cy^2$ при постоянно y като функция само на x и ще пишем за краткост

$$\varphi(x)=ax^2+2bxy+cy^2.$$

Производната

$$\varphi'(x)=2ax+2by$$

се анулира при $x=-\frac{by}{a}$. Като развием функцията $\varphi(x)$ по формулата на Тейлор около точката $-\frac{by}{a}$ и като пишем за краткост $-\frac{by}{a}=x_0$, получаваме

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}\varphi'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\varphi''(x_0)$$

(нямаме остатъчен член, защото $\varphi(x)$ е полином) или

(2) $$\varphi(x)=\varphi(x_0)+a(x-x_0)^2.$$

Нека квадратичната форма (1) е положително дефинитна. В такъв случай при $y\neq 0$

$$\varphi(x_0)>0,$$

или, което е същото,

$$y^2\frac{ac-b^2}{a}>0.$$

Ние обаче знаем, че $a>0$. От това заключаваме, че за да бъде квадратичната форма (1) положително дефинитна, необходимо е

(3) $$a>0,$$

(4) $$b^2-ac<0.$$

Както ще видим, това условие е и достатъчно. И наистина, ако са изпълнени неравенствата (3) и (4), то

(5) $$\varphi(x_0) \geqq 0,$$

защото

$$\varphi(x_0) = y^2 \frac{ac-b^2}{a}.$$

От равенството (2) и от неравенствата (3) и (5) заключаваме, че $\varphi(x) \geqq 0$. Остава да покажем, че квадратичната форма (1) се анулира само при $x=y=0$, ако са изпълнени неравенствата (3) и (4). Това може да се направи така: ако $\varphi(x)=0$, то

(6) $$\varphi(x_0)=0,$$

(7) $$(x-x_0)^2=0,$$

което се вижда от равенството (2), защото

$$\varphi(x_0) \geqq 0$$

и

$$a>0.$$

Равенството (6) ни дава $y^2 \frac{ac-b^2}{a}=0$, т. е. $y=0$, а равенството (7) ни дава $x=x_0$, т. е. $x=0$, защото

$$x_0 = \frac{-by}{a} = 0.$$

Нека читателят сам докаже, че квадратичната форма (1) е отрицателно дефинитна тогава и само тогава, когато

(8) $$a<0,$$

(9) $$b^2-ac<0.$$

Поради симетрията ясно е, че ние можем да разменим ролите на a и c в неравенствата (3), (4), (8) и (9).

От неравенството $b^2-ac<0$ следва, че $a \neq 0$. Това ни дава право да твърдим, че квадратичната форма (1) е дефинитна тогава и само тогава, когато $b^2-ac<0$.

От неравенството $b^2-ac<0$ следва също, че a и c имат еднакви знаци; тези знаци съвпадат, разбира се, със знака на квадратичната форма (1).

Изразът b^2-ac се нарича дискриминанта на квадратичната форма.

Една квадратична форма се нарича полудефинитна, ако тя не си мени знака, както и да се менят x и y, обаче се анулира поне при една система значения на x и y, различна от системата $x=0$, $y=0$. Ще покажем, че за да бъде квадратичната форма $ax^2+2bxy+cy^2$ полудефинитна, необходимо и достатъчно е да имаме

$$b^2-ac=0.$$

И тук, както при дефинитните форми, избирайки $x=1$ и $y=0$, заключаваме, че при $a \neq 0$ знакът на квадратичната форма съвпада със знака на a. Ще разгледаме на първо време случая, когато $a \neq 0$. В такъв случай можем да използуваме представянето (2), което може да се напише във вида

$$ax^2+2bxy+cy^2 = y^2 \frac{ac-b^2}{a} + a(x-x_0)^2.$$

Ако $ac-b^2=0$, то

$$ax^2+2bxy+cy^2 = a(x-x_0)^2$$

и квадратичната форма е очевидно полудефинитна. Обратно, ако квадратичната форма е полудефинитна, то има поне една двойка числа (x_1, y_1), различна от двойката (0, 0), за която

$$ax_1^2+2bx_1y_1+cy_1^2=0,$$

и следователно, ако положим $x_0 = \frac{-by_1}{a}$, то

$$ax_1^2+2bx_1y_1+cy_1^2 = ax_0^2+2bx_0y_1+cy_1^2+a(x_1-x_0)^2=0.$$

От друга страна, двата израза

$$ax_0^2+2bx_0y_1+cy_1^2 \text{ и } a(x_1-x_0)^2$$

имат знака на a (ако не са нули) и следователно

$$ax_0^2+2bx_0y_1+cy_1^2=0,$$
$$a(x_1-x_0)^2=0$$

или

$$y_1^2 \frac{b^2-ac}{a}=0,$$

$$x_1 = \frac{-by_1}{a}.$$

От последното равенство заключаваме, че $y_1 \neq 0$ (защото в противен случай бихме имали $x_1=y_1=0$). Въз основа на това и на предпоследното равенство намираме

$$b^2-ac=0.$$

Ако $c \neq 0$, то като разменим ролите на x и y и на a и c и извършим пак горните разсъждения, ще установим, че и в този случай, за да бъде разглежданата квадратична форма полудефинитна, е необходимо и достатъчно да имаме $b^2-ac=0$. Остава да се направят изследванията при $a=c=0$. В този случай обаче квадратичната форма има вида $2bxy$ и е полудефинитна тогава и само тогава, когато $b=0$, т. е. когато $b^2-ac=0$.

Задачи

1. Да се изследва дали са дефинитни, или не следните квадратични форми:

a) x^2-xy+y^2;

b) $4x^2-4xy+y^2$;

c) $x^2-5xy+6y^2$.

2. Нека двете квадратични форми

$$a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2,$$
$$b_0x^2+2b_1xy+b_2y^2$$

са дефинитни и имат еднакви знаци. Докажете, че

$$a_0b_0+2a_1b_1+a_2b_2>0.$$

Решение. От

$$a_1^2<a_0a_2,$$
$$b_1^2<b_0b_2$$

получаваме

$$a_0b_0+2a_1b_1+a_2b_2>a_0b_0+2a_1b_1+\frac{a_1^2}{a_0}\frac{b_1^2}{b_0}=\frac{a_0^2b_0^2+2a_0b_0a_1b_1+a_1^2b_1^2}{a_0b_0}=$$
$$=\frac{(a_0b_0+a_1b_1)^2}{a_0b_0}\geq 0.$$

3. Докажете, че при всеки избор на числата

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$$

е в сила неравенството

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

Знакът равенство се достига тогава и само тогава, когато

$$a_kx_0+b_ky_0=0,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

при някой избор на двете числа x_0 и y_0, от които поне едното е различно от нула.

Забележка. Това неравенство се нарича неравенство на Коши—Буняковски—Шварц.

Решение. Разглеждаме помощната квадратична форма

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_ky)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)xy+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)y^2.$$

Тази квадратична форма не си мени знака и следователно нейната дискриминанта не е положителна, т. е.

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\leq 0.$$

Ако

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)=0,$$

то квадратичната форма не е дефинитна и следователно могат да се изберат две числа (от които поне едното е различно от нула) по такъв начин, че

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx_0+b_ky_0)^2=0$$

и следователно

$$a_kx_0+b_ky_0=0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Обратно, ако са изпълнени последните равенства, то разглежданата форма не е дефинитна (понеже тя се анулира при $x=x_0$ и $y=y_0$, при все че поне едното от тези две числа е различно от нула) и следователно не може да имаме

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)<0.$$

От това заключаваме, че

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)=0,$$

което се вижда, разбира се, и директно.

4. Нека квадратичната форма

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$$

е дефинитна. Докажете, че функцията

$$\varphi(x)=|a\cos^2x+2b\cos x\sin x+c\sin^2x|$$

притежава съществено положителна долна граница.

Решение. Да разгледаме функцията $\varphi(x)$ в затворения интервал $[0,\ 2\pi]$ и да означим с m точната ѝ долна граница в този интервал. Очевидно $m\geq 0$. Остава да покажем, че $m\neq 0$. Това ще извършим по следния начин. Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната, а интервалът $[0,\ 2\pi]$ е затворен и има крайна дължина. Следователно съгласно теоремата на Вайерщрас има поне една точка x_0, в която $\varphi(x_0)=m$. Ако допуснем, че $m=0$, ще получим

$$a\cos^2x_0+2b\cos x_0\sin x_0+c\sin^2x_0=0,$$

което не е вярно, защото квадратичната форма $a\xi^2+2b\xi+c\eta^2$ е дефинитна, а измежду числата $\cos x_0$ и $\sin x_0$ поне едно е различно от нула (тъй като $\cos^2x_0+\sin^2x_0=1$). И тъй числото m е съществено положително. Числото m е долна граница на $\varphi(x)$, когато x се мени в интервала $[0,\ 2\pi]$. Функцията $\varphi(x)$ е обаче периодична с период 2π. От това заключаваме, че m е долна граница на $\varphi(x)$ и тогава, когато x се мени върху цялата абсцисна ос.

5. Нека двата реда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2\quad\text{и}\quad\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu^2$$

са сходящи. Покажете, че редът

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu$$

е абсолютно сходящ.

Упътване. Използувайте, че

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu b_\nu|\right)^2 \leq \left(\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=n+1}^{n+p} b_\nu^2\right).$$

§ 6. Теореми на Лопитал (L'Hospital)

В някои случаи ние можем с успех да използуваме теоремата на Коши (обобщената теорема за крайните нараствания) за намиране на граничните стойности на функциите. Настоящият параграф е посветен на този въпрос.

Нека ни са дадени две функции $f(x)$ и $g(x)$, които са дефинирани в някоя околност Δ на една точка a, и нека $g(a)=0$. В такъв случай отношението

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

не е дефинирано при $x=a$, защото $g(a)=0$. Така например нека $a=0$, Δ е цялата абсцисна ос, $f(x)=x$ и $g(x)=x$. Частното

$$F(x)=\frac{x}{x}$$

не е дефинирано при $x=0$ (при $x \neq 0$ то е дефинирано и има стойност 1).

Да се върнем към общия случай. Разбира се, няма смисъл да се питаме каква е стойността на функцията $F(x)$ при $x=a$. В тази точка тя не е дефинирана. Ако обаче в разглежданата околност $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$, то бихме могли да поставим въпроса, дали функцията $F(x)$ притежава граница, или не, когато x клони към a чрез стойности, разбира се, различни от a, както и въпроса за пресмятането на тази граница. В много случаи може да се получи отговор на тези въпроси с помощта на следната теорема на Лопитал (L'Hospital):

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в някой интервал, който съдържа точката a, диференцуеми поне при $x \neq a$ и непрекъснати при $x=a$. Нека* $g'(x) \neq 0$ при $x \neq a$ и $f(a)=g(a)=0$. Нека най-сетне частното $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

* Условието $g'(x) \neq 0$ при $x \neq a$ ни осигурява също така, че $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$, както това се вижда веднага с помощта на теоремата на Рол.

притежава граница, когато x клони* към a. В такъв случай частното $\frac{f(x)}{g(x)}$ също притежава граница, когато x клони* към a, и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

И наистина, като приложим обобщената теорема за крайните нараствания (теоремата на Коши, вж. част II, гл. I, § 21), получаваме при $x \neq a$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{1}$$

където ξ е някое подходящо избрано число между a и x. Да положим

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

Когато оставим x да клони към a, то ξ също клони към a. Оттук заключаваме, че $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, а следователно и $\frac{f(x)}{g(x)}$ клони към l. Є това всичко е доказано.

Пример 1. Да се намери границата на $\frac{\cos 3x}{\cos x}$, когато $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$. Тук са изпълнени всичките условия, при които е валидна теоремата на Лопитал. По-специално числителят и знаменателят се анулират при $x=\frac{\pi}{2}$. Като приложим правилото на Лопитал, получаваме

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos 3x)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}=-3.$$

Пример 2. Ще разгледаме един пример, при който намирането на границата става с неколкократно прилагане на теоремата на Лопитал. Да се намери границата на $\frac{2x-\sin 2x}{x-x\cos x}$, когато $x \longrightarrow 0$. С помощта на теоремата на Лопитал намираме

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x-x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{1-\cos x+x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{2\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{3\cos x-x\sin x}=\frac{8}{3}.$$

Нека обърнем внимание върху това, че границата

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

* Чрез стойности, различни от a.

може да съществува и без да съществува границата

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ще изясним това с един пример. Да разгледаме функцията

$$F(x)=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}.$$

Функцията $F(x)$ притежава граница, когато $x\to 0$, защото

$$F(x)=\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}$$

и следователно

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Въпреки това частното

$$\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

не притежава граница, когато x клони към нула (защо?).

При доказателството на теоремата на Лопитал ние си послужихме с равенството (1). Нека си дадем сметка какво бихме могли да извлечем от него, ако е дадено, че съществува границата

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ние разполагаме със свободата да избираме x в това равенство произволно, стига да принадлежи на Δ и да бъде различно от a (поради това ние можахме да оставим x да клони към a чрез произволна редица от стойности, разбира се, принадлежащи на Δ и различни от a). Напротив, ξ не е произволно, а се избира в зависимост от x. И така да предположим, че границата

$$l=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

съществува. От равенството (1) заключаваме, че може да се избере (и то по безбройно много начини) редица от числа

(2) $$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ldots,$$

различни от a, принадлежащи на Δ и клонящи към a по такъв начин, че редицата

$$\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)},\ \frac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)},\ldots$$

да бъде сходяща и да клони към l. Нека подчертаем, че редицата (2) е подходящо (а не произволно) избрана. С това ние още далеч не сме доказали, че частното

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

притежава граница, когато x клони към a чрез произволна редица от стойности (разбира се, принадлежащи на Δ и различни от a). Такова нещо ние не можем да докажем, защото то не е вярно, както това се вижда от примера, който разгледахме по-горе.

Накрая ще докажем следната теорема:

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцуеми в отворения интервал (a, b), като $g'(x)\neq 0$. Нека освен това $g(x)$ расте неограничено, когато $x\to a$. В такъв случай, ако частното $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ има граница при $x\to a$, то частното $\frac{f(x)}{g(x)}$ също има граница, когато $x\to a$, и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство. Да изберем едно положително число ε и да положим

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

В такъв случай може да се избере такова положително число δ, че при $|x-a|<\delta$ да имаме

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека x_0 и x са две произволни, различни помежду си числа от интервала (a, b), за които $|x-a|<\delta$ и $|x_0-a|<\delta$. Обобщената теорема за крайните нараствания ни дава

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

където ξ е число между x и x_0. Не е трудно да се докаже, че $|a-\xi|<\delta$. Това ни дава

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

или

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

От последното неравенство получаваме

$$|f(x)-f(x_0)-lg(x)+lg(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}|g(x)-g(x_0)|$$

или като делим* с $|g(x)|$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x)}-l+l\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|.$$

Оттук намираме

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|-\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|-\left|l\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|$$

и най-сетне

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|+\left|l\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|.$$

В последното неравенство разполагаме със свободата да избираме числата x_0 и x произволно в интервала (a, b), стига да имаме $|x_0-a|<\delta$, $|x-a|<\delta$ и $x\neq x_0$. Ще се възползуваме от тази свобода по следния начин: ще фиксираме x_0 и ще даваме на x стойности, толкова близки до a, че да имаме

$$\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|+\left|l\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Това е възможно, защото $|g(x)|$ расте неограничено, когато x клони към a, докато x_0, а следователно както $f(x_0)$, така и $g(x_0)$ ни най-малко не зависят от x. И така, ако положителното число η е достатъчно малко, то при всички стойности на x от интервала (a, b), за които $|a-x|<\eta$, имаме

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

или

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

* Тук $g(x)\neq 0$, ако ε е достатъчно малко, защото $|g(x)|$ расте неограничено, когато x клони към a.

Задачи

Да се намерят следните граници:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^4-8x^2-9}$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{\cos 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Упътване: Приведете под общ знаменател и приложете правилото на Лопитал.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)\ln x$.

Упътване. Приложете правилото на Лопитал за частното

$$\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x-\sin x}}.$$

6. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}$.

Упътване.

$$(x-1)^{\ln x}=e^{(\ln x)\ln(x-1)}.$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

Упътване.

$$\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}.$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

9. Покажете, че двете теореми на Лопитал, които доказахме в § 6 на тази глава, запазват своята валидност и тогава, когато при извършвания граничен преход аргументът x расте неограничено (в § 6 разгледахме случаи, когато x клони към някоя крайна точка a). Направете нужните за този случай изменения във формулировките на тези теореми.

Упътване. Положете $\dfrac{1}{x}=t$.

10. Намерете границата

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

13. Нека функцията $f(x)$ е два пъти диференцуема в някоя околност на точката x_0. Докажете, че

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

14. Намерете границата

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

като си послужите с методите, разгледани в § 6 на тази глава.

15. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n.$$

Упътване. Използувайте предната задача, като оставите x да клони към нула чрез редицата с общ член $x_n=\frac{2}{n}$.

16. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n.$$

Упътване: Използувайте задача 14.

17. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана, диференцуема при $x>a$ и $f'(x)$ клони към l, когато x расте неограничено. Да се покаже, че $\frac{f(x)}{x}$ също клони към l, когато x расте неограничено.

§ 7. Безкрайно малко

Ако $f(x)$ клони към нула, когато x клони към нула, казваме, че $f(x)$ е безкрайно малко заедно с x.

Пример 1. Нарастването

$$\Delta y=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$$

е безкрайно малко заедно с h тогава и само тогава, когато функцията $y=\varphi(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

Пример 2. Нека функцията $y=\varphi(x)$ е диференцуема в точката x_0. Диференциалът

$$dy=\varphi'(x_0)\,dx$$

е безкрайно малко заедно с dx.

Нека α е едно положително число. Казваме, че $f(x)$ е безкрайно малко от ред α спрямо x, ако отношението

$$\frac{f(x)}{x^\alpha}$$

клони към различна от нула граница, когато x клони към нула.

Пример 1. Ако функцията $y=\varphi(x)$ е диференцуема в някоя точка x_0 и $\varphi'(x_0)\neq 0$, то нарастването

$$\Delta y=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$$

е безкрайно малко от първи ред спрямо h.

Пример 2. Ако функцията $\varphi(x)$ е диференцуема поне $n+1$ пъти в някоя околност на точката a и ако $f^{(n+1)}(x)$ е непрекъсната и различна от нула при $x=a$, то остатъчният член

$$R_n=f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1!}f'(a)-\frac{h^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

във формулата на Тейлор е безкрайно малко от ред $n+1$ спрямо h.

Забележка. На нас не са ни известни случаи, когато се налага използуването на въведената в този параграф терминология. По-специално ние няма да си служим с нея в курса, който излагаме.

Общи задачи

1. Докажете, че при $x\neq 1$ имаме

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2},$$

като диференцирате двете части на равенството

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

2. Докажете, че при $\cos x\neq 1$ имаме

$$\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\cdots+n\sin nx=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)},$$

като диференцирате двете части на равенството

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Обикновено под нулева производна на една функция $f(x)$ се разбира функцията $f(x)$. Съобразно с това в задачите, които следват, трябва да се има пред вид, че $f^{(0)}(x)=f(x)$.

3. Намерете n-тите производни на функциите

a) $y=\frac{1-x}{1+x}$.

b) $y=\frac{x}{a+bx}$.

c) $=\frac{1}{x^2-1}$.

Упътване. Послужете си с тъждеството $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$.

d) $y=\sin^2 x$.

Упътване. Послужете си с тъждеството $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.

e) $y=\sin ax$.

f) $y=x^2\cos ax$.

g) $y=x^2 e^{-x}$.

h) $y=\ln(1+x)$.

4. Намерете n-тата производна на функцията

$$y=\frac{\ln x}{x}.$$

Отговор.

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{n!}{x^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln x\right).$$

5. Докажете, че при $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin^4 x+\cos^4 x)=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Вярна ли е формулата при $n=0$?

6. Докажете, че при $n=2, 3, \ldots$

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{x^2}{1-x}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Вярна ли е формулата при $n=1$?

7. Намерете n-тата производна на функцията $y=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$, където α е една константа.

8. Намерете n-тата производна на функцията

$$y=e^{ax}\cos bx.$$

Упътване. Вместо двете константи a и b въвеждаме две други константи r и φ, свързани с a и b посредством равенствата

$$(1)\qquad a=r\cos\varphi,\qquad b=r\sin\varphi.$$

Тази система има решение относно r и φ при всеки избор на a и b. Това ние можем да си уясним със следните геометрични съображения: разглеждаме в равнината на една декартова координатна система OXY точката M с координати (a, b); означаваме с φ кой да е от ъглите между положителната посока на оста OX и посоката на вектора OM, а с r означаваме големината на вектора OM; в такъв случай, както това непосредствено се вижда,

$$a=r\cos\varphi,\qquad b=r\sin\varphi.$$

По-късно ще покажем по чисто аналитичен път, че системата (1) има решение при всеки избор на a и b. Числата r и φ се наричат полярни координати на точката M. След въвеждане на константите r и φ функцията y добива вида

$$y=e^{xr\cos\varphi}\cos(xr\sin\varphi).$$

Намерете няколко последователни производни на тази функция, като извършвате съответните опростявания. След като откриете закономерността, по която се получават последователните производни, установете общата валидност на резултата с помощта на пълната индукция.

9. Докажете, че при $n\geq 2$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x\ln x)=\frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}.$$

10. Покажете, че функцията $f(x)=xe^{-x}$ удовлетворява равенствата $f^{(n)}(n)=0$ при всички цели неотрицателни стойности на n.

11. Докажете, че при всички цели неотрицателни стойности на n е в сила равенството

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}=\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}.$$

Решение. Доказателството извършваме индуктивно. При $n=0$ проверката е непосредствена. С помощта на формулата на Лайбниц получаваме

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}x^n\sin\frac{1}{x}=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}x\cdot\left(x^{n-1}\sin\frac{1}{x}\right)=x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}+$$

$$+(n+1)\frac{d^n}{dx^n}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}.$$

Ако допуснем, че при някои стойност на n имаме

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}=\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^{n+1}},$$

то

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}x\sin\frac{1}{x}=x\left[\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}\right]'+(n+1)\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)}{x^{n+1}}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{x^{n+2}}.$$

12. Докажете, че при всички цели неотрицателни стойности на n е в сила равенството

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}\, e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\,\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

(G. H. Halphen).

13. Докажете, че при всички цели положителни стойности на n е в сила равенството

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}\ln x)=\frac{(n-1)!}{x}.$$

14. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема поне n пъти при $x>0$. Докажете, че при $x>0$

$$(-1)^n\,\frac{d^n}{dx^n}[x^{n-1}f(x)]=t^{n+1}\,\frac{d^n}{dt^n}f(x),$$

където $t=\frac{1}{x}$ и n е цяло неотрицателно число.

Забележка. Сравнете със задачи 11, 12 и 13.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно. За тази цел проверете верността на равенството при $n=0$ и използувайте веригата равенства

$$(-1)^n\,\frac{d}{dx^n}x^{n-1}f(x)=(-1)^n\,\frac{d^n}{dx^n}\,x.x^{n-2}f(x)=$$

$$=(-1)^n\,x\frac{d^n}{dx^n}x^{n-2}f(x)+(-1)^n\,n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,x^{n-2}f(x)=$$

$$=(-1)^n\,x\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,x^{n-2}f(x)\right]+(-1)^n\,n\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}x^{n-2}f(x)=$$

$$=-x\,\frac{d}{dx}\left[t^n\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(x)\right]-nt^n\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(x)=$$

$$=-x\,\frac{-1}{x^2}\,\frac{d}{dt}\left[t^n\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(x)\right]-nt^n\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(x)=t^{n+1}\,\frac{d^n}{dt^n}f(x).$$

15. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема поне $k+n$ пъти при $x>0$. Докажете, че при $x>0$ е в сила равенството

$$(-1)^{n-1}\,\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}\,x^{n-1}f(x)=t^{k+n+1}\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\,t^{-k-2}f^{(k+1)}(x),$$

където $t=\frac{1}{x}$, а числата k и n са цели неотрицателни.

Забележка. Тъждеството от предната задача се получава от това по-общо тъждество при $k=0$ (как?).

Упътване. Доказателството извършете индуктивно по отношение на n.

16. Ако елементите на детерминантата

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \dots & u_{1n}(x)\\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & \dots & u_{2n}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{n1}(x) & u_{n2}(x) & \dots & u_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

са диференцуеми функции на x, то

$$\Delta'(x)=\begin{vmatrix} u_{11}' & u_{12} & \dots & u_{1n}\\ u_{21}' & u_{22} & \dots & u_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{n1}' & u_{n2} & \dots & u_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12}' & \dots & u_{1n}\\ u_{21} & u_{22}' & \dots & u_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{n1} & u_{n2}' & \dots & u_{nn}\end{vmatrix}+\dots+$$

$$+\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n}'\\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n}'\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn}'\end{vmatrix}.$$

17. Нека $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ са три функции, непрекъснати в затвореният интервал $[a, b]$ и диференцуеми поне във вътрешността му. Да се докаже, че има точка ξ в отворения интервал (a, b), за която

$$\begin{vmatrix} f_1'(\xi) & f_2'(\xi) & f_3'(\xi)\\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a)\\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b)\end{vmatrix}=0.$$

Упътване. Приложете за функцията

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x)\\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a)\\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b)\end{vmatrix}$$

теоремата на Рол (разбира се, трябва да проверите предварително, че $\varphi(x)$ удовлетворява всичките условия, при които е доказана теоремата на Рол).

18. Нека $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава n. Докажете, че

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{a-x}{1!}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{2!}f''(x)+\frac{(a-x)^3}{3!}f'''(x)+\dots+\frac{(a-x)^n}{n!}f^n(x)$$

не зависи от x и се равнина на $f(a)$.

Упътване. Докажете, че $\varphi'(x)=0$, а следователно $\varphi(x)=\varphi(a)=f(a)$.

19. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са два полинома, чиято степен не надминава n. Докажете, че функцията

$$\varphi(x)=f^{(n)}(x)\,g(x)-f^{(n-1)}(x)\,g'(x)+f^{(n-2)}(x)\,g''(x)-\dots+(-1)^n\,f(x)\,g^{(n)}(x)$$

е константа (срв. предната задача).

20. Функцията

$$P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

се парича n-ти полином на Лежандър (Legendre). Докажете, че $P_n(x)$ е полином от n-та степен.

21. Докажете, че n-тият Лежандров полином (срв. предната задача) се анулира при n различни стойности на x, разположени в интервала $(-1, 1)$.

Упътване. Нека $\varphi(x)=(x^2-1)^n$. Очевидно $\varphi(-1)=\varphi(1)=0$. Това ни дава право да приложим за функцията $\varphi(x)$ теоремата на Рол. И така има поне една точка ξ във вътрешността на интервала $(-1, 1)$, в която $\varphi'(\xi)=0$. При $n>0$ обаче имаме $\varphi'(-1)=\varphi'(1)=0$, защото $\varphi'(x)=n(x^2-1)^{n-1}.2x$. Това ни дава право да приложим теоремата на Рол по отношение на $\varphi'(x)$ за двата интервала $(-1, \xi)$ и $(\xi, 1)$ и пр.

22. Докажете, че n-тият Лежандров полином

$$y=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

удовлетворява диференциалното уравнение

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0.$$

Решение. Полагаме

$$u=(x^2-1)^n.$$

Очевидно

$$u'=n(x^2-1)^{n-1}.2x$$

и следователно

$$u'(x^2-1)=2nxu.$$

Диференцираме двете части на това равенство $n+1$ пъти с помощта на формулата на Лайбниц и получаваме

$$u^{(n+2)}(x^2-1)+(n+1).2xu^{(n+1)}+(n+1)nu^{(n)}=2nxu^{(n+1)}+2n(n+1)u^{(n)}$$

или

$$u^{(n+2)}(x^2-1)+2xu^{(n+1)}-n(n+1)u^{(n)}=0.$$

Като вземем пред вид, че $y=u^{(n)}$, намираме

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0.$$

23. Нека

$$P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Как трябва да се избере константата C_n, за да имаме $C_nP_n(1)=1$?

Упътване. Приложете формулата на Лайбниц за произведението $(x-1)^n(x+1)^n$.

Отговор. $C_n=\dfrac{1}{2^n.n!}$.

24. Докажете, че функцията $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ монотонно намалява при $0<x\leq\pi$.

Решение. Изучаваме знака на производната

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

Тъй като знаменателят x^2 е положителен, достатъчно е да изследваме знака на числителя

$$g(x)=x\cos x-\sin x.$$

От друга страна,

$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x,$$

т. е. при $0<x\leq\pi$ имаме $g'(x)\leq 0$. Това показва, че функцията $g(x)$ монотонно намалява в интервала $0<x\leq\pi$. И така при $0<x\leq\pi$ имаме

$$g(x)<g(0)=0,$$

откъдето заключаваме, че производната $f'(x)$ е отрицателна и следователно функцията $f(x)$ е монотонно намаляваща.

25. Докажете, че функцията $\dfrac{x}{1+x^2}$ расте монотонно в интервала $[-1, 1]$ и намалява монотонно както в безкрайния интервал $x\geq 1$, така и в безкрайния интервал $x\leq -1$.

26. Изследвайте кога расте и кога намалява функцията

$$x^3-3x^2+24.$$

27. Нека n е едно цяло положително четно число. Докажете, че при всички стойности на x е в сила неравенството

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

Решение. Образуваме си помощната функция

$$\varphi(x)=(1+x)^n-1-nx.$$

Очевидно имаме

$$\varphi'(x)=n(1+x)^{n-1}-n,$$

$$\varphi''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

Тъй като $n-2$ е четно число, то при всички стойности на x имаме $\varphi''(x)\geq 0$, което показва, че функцията $\varphi'(x)$ монотонно расте. И така при $x\geq 0$ имаме $\varphi'(x)\geq\varphi'(0)=0$, а при $x\leq 0$ имаме $\varphi'(x)\leq\varphi'(0)=0$. Това показва, че функцията $\varphi(x)$ расте при $x\geq 0$, и намалява при $x\leq 0$, т. е. неравенството $\varphi(x)\geq\varphi(0)$ е изпълнено както при $x\geq 0$ така и при $x\leq 0$.

От неравенството $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$ получаваме

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

28. Нека $n\geq 1$. Докажете, че при $x\geq -1$ е валидно неравенството

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

29. Докажете, че при $x\geq 0$ е в сила неравенството

$$\sin x\geq x-\frac{x^3}{6}.$$

Упътване. Разгледайте помощната функция

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}.$$

30. Докажете, че при всички стойности на x е в сила неравенството

$$(-1)^{n-1}\left[\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]\geq 0$$

и при $x \geq 0$ е в сила неравенството

$$(-1)^{n-1}\left[\sin x-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]\geq 0$$

каквото и да е цялото положително число n.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно, като изучите производните на двете функции

$$f_n(x)=(-1)^{n-1}\left[\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right],$$

$$g_n(x)=(-1)^{n-1}\left[\sin x-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right].$$

31. Докажете, че при $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ е в сила неравенството

$$\frac{\sin x}{x}\geq\pi$$

32. Докажете, че ако $x>0$, то $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$.

Упътване. Изучете производната на функцията

$$\varphi(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}.$$

33. Докажете, че ако $x>-1$, то $\ln(1+x)\leq x$.

34. Докажете, че ако $x>-1$ и ако цялото положително число n е нечетно, то

$$\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^n}{n}.$$

35. Докажете, че при всички стойности на x е в сила неравенството $xe^{1-x}\leq 1$.

Упътване. Докажете, че функцията $f(x)=xe^{1-x}$ расте в интервала $x\leq 1$ и намалява в интервала $x\geq 1$.

36. Докажете, че при всички стойности на x е в сила неравенството $e^x\geq 1+x$.

Решение. Прилагаме към функцията e^x формулата на Маклорен и представяме остатъчния член към формата на Лагранж

$$e_x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

Като взехем пред вид, че изразът $\frac{x^2e^{\theta x}}{2!}$ е неотрицателен и е нула само при $x=0$, заключаваме, че

$$e^x\geq 1+x,$$

където равенството се достига само при $x=0$.

37. Докажете, че при всички стойности на x и при нечетни стойности на n имаме

$$e^x\geq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

38. Намерете Маклореновото развитие на функцията $e^x\cos x$.

Отговор.

$$e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}}{n!}x^n.$$

Изучавайки остатъчния член, заключаваме, че това развитие представлява функцията при всички стойности на x.

39. Да разгледаме функцията $f(x)$, дефинирана по следния начин:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\text{ при } x\neq 0.$$
$$f(0)=0.$$

Докажете, че функцията $f(x)$ е диференцуема безбройно много пъти при всички стойности на x (включително и $x=0$) и всичките нейни производни

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\cdots$$

при $x=0$ имат стойност нула.

Забележка. По този начин ние получаваме пример за една функция, чийто Тейлоров ред

$$f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots$$

е сходящ при всяко x, без да представлява функцията.

Упътване. Функцията е очевидно диференцуема безбройно много пъти при $x\neq 0$. Покажете, че при $x\neq 0$

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

където $P_n(u)$ е един полином на u. Докажете индуктивно, че функцията $f(x)$ е диференцуема безбройно много пъти в началото и $f^{(n)}(0)=0$, като се възползувате от дефиницията на понятието производна

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(h)-f^{(n)}(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P_n\left(\frac{1}{h}\right)e^{-\frac{1}{h^2}}=0.$$

40. Нека функцията $f(x)$ е два пъти диференцуема в някой интервал и втората ѝ производна е нула във всяка точка на този интервал. Докажете, че $f(x)$ е линейна функция на x.

Решение. Дадено е, че във всички точки на разглеждания интервал $f''(x)=0$. От това заключаваме, че $f'(x)$ е константа (понеже производната на $f'(x)$ е равна на нула в целия интервал). Да означим с a тази константа. И така за всяко x от разглеждания интервал имаме $f'(x)=a$, което може да се напише още във вида $[f(x)-ax]'=0$. И така производната на функцията $f(x)-ax$ е нула във всички точки от разглеждания интервал. Оттук заключаваме, че $f(x)-ax$ е константа. Като означим с b тази константа, получаваме $f(x)-ax=b$ или $f(x)=ax+b$.

41. Не е трудно да се види, че при всеки избор на константите a и b функцията $y=(ax+b)e^x$ удовлетворява уравнението

$$y''-2y'+y=0 \tag{2}$$

(проверете, че това е действително така!). Докажете, че няма други функции, които са дефинирани и два пъти диференцуеми за всяко x и които при всяко x удовлетворяват уравнението (2).

Упътване. Нека y е една функция, която удовлетворява уравнението. Разглеждайте помощната функция $u=ye^{-x}$ и докажете, че втората ѝ производна е нула при всички стойности на x. Използувайте предната задача.

42. Докажете, че няма други функции освен

$$y=A\cos x+B\sin x,$$

където A и B са произволни константи, които са диференцуеми два пъти при всяко x и удовлетворяват диференциалното уравнение

$$y''+y=0.$$

Упътване. Образувайте двете помощни функции

$$f(x)=y\cos x-y'\sin x,$$

$$g(x)=y\sin x+y'\cos x \tag{3}$$

и докажете, че $f'(x)=0$ и $g'(x)=0$. След това решете системата (3) относно y, като елиминирате y'.

43. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцуема е поне във вътрешността му и в двата края на този интервал се анулира. Докажете, че при всеки избор на числото λ може да се намери число ξ във вътрешността на интервала (a, b), за което

$$\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

Упътване. Приложете теоремата на Рол за функцията

$$\varphi(x)=e^{\lambda x}f(x).$$

44. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема $n+1$ пъти в някой интервал Δ и $f^{(n+1)}(x)=0$ за всяко x от този интервал. Докажете, че $f(x)$ е полином в разглеждания интервал, чиято степен не надминава n.

Решение. Формулата на Тейлор ни дава

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n,$$

където

$$R_n=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)=0.$$

45. Докажете, че редът

$$\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$$

е сходящ при $x>1$ и разходящ при $x\leq 1$.

Забележка. Ние сме изучавали досега този ред само при цели стойности на x.

Упътване. При $x>1$ приложете критерия на Раабе—Дюамел или разсъждавайте например така: да положим

$$S_n=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}.$$

В такъв случай

$$S_{2n+1}=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^x}=$$

$$=\left[\frac{1}{1^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^x}\right]+\left[\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots+\frac{1}{(2n)^x}\right]<$$

$$<1+\frac{S_n}{2^x}+\frac{S_n}{2^x}$$

и следователно

$$S_n<1+\frac{S_n}{2^{x-1}},$$

т. е. при $x>1$

$$S_n<\frac{2^{x-1}}{2^{x-1}-1};$$

при $x\leq 1$ сравнете реда с хармоничния ред.

46. Докажете, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$

е сходяща.

Упътване. Докажете, че редът

$$a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})+\ldots \tag{4}$$

е сходящ, като установите с помощта на формулата на Тейлор, че

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^2}$$

и следователно

$$0<a_n-a_{n-1}<\frac{1}{n^2}.$$

От сходимостта на реда (4) следва сходимостта на изучаваната редица, защото a_n е точно n-тата частична сума на (4).

Забележка. Границата на разглежданата редица се означава обикновено с буквата C и се нарича Euler'ова константа. Нейната числена стойност е

$$C=0{,}5772156\ldots$$

Досега не е известно дали това число е рационално, или ирационално. Константата C играе важна роля в много въпроси на анализа.

47. Докажете, че при $|x|\leq 1$

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Упътване. Разгледайте функцията

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{5}$$

Покажете, че във вътрешността на интервала $(-1, 1)$ имаме

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

като използувате Нютоновото развитие на $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. По-нататък вземете пред вид, че производната на функцията $\arcsin x$ при $|x| < 1$ е също $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и още, че

$$\arcsin 0 = f(0) = 0.$$

Оттук заключете, че

$$\arcsin x = f(x)$$

при $|x| < 1$. За да установите валидността на последното равенство при $x = \pm 1$, покажете, че редът (5) е равномерно сходящ в затворения интервал $[-1, 1]$ и следователно $f(x)$ е непрекъсната функция. За тази цел покажете, че редът

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1},$$

членовете на който не зависят от x, е сходящ.

48. Нека

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

са произволни положителни числа, а числата p и q удовлетворяват условията $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажете, че

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Кога е възможен знакът равенство?

Забележка. Това важно неравенство, известно под името неравенство на Хьолдер (Hölder), се обръща в неравенството на Коши—Буняковски—Шварц при $p = q = 2$ (вж. задача 3 към § 5 на тази глава). Нека припомним обаче, че в неравенството на Коши—Буняковски—Шварц не се иска числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ да бъдат непременно положителни.

Упътване. Разгледайте функцията $f(x) = x^p$ и покажете, че тя е изпъкнала при $x > 0$, когато $p > 1$. Използувайте неравенството

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k),$$

като поставите

$$x_k = a_k b_k^{-\frac{q}{p}}, \quad p_k = \frac{b_k^q}{b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q}.$$

49. Нека числата

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

са положителни и $p > 1$. Докажете, че

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Забележка. Това неравенство се нарича неравенство на Минковски.

Решение. Очевидно имаме

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1}.$$

Като приложим за двете последни суми неравенството на Хьолдер и положим $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, получаваме

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} +$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} =$$
$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Оттук получаваме исканото неравенство, като съкратим на последния множител.

50. Докажете, че измежду всичките полиноми от n-та степен, на които коефициентът пред x^n е равен на 1, само полиномът на Чебишев

$$P(x) = \frac{\cos(n \arccos x)}{2^{n-1}}$$

удовлетворява неравенството

$$|P(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ при } |x| \leq 1.$$

Забележка. Вижте задачи 28 и 29 към § 17, глава III, част II. Като разгледате тези задачи, ще се убедите, че наистина при $|x| \leq 1$ функцията $P(x)$ е полином на x от n-та степен и коефициентът пред x^n е равен на 1.

Упътване. Не е трудно да се види, че при $|x| \leq 1$

$$|P(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Тук равенството се достига при $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, където $k=0, 1, 2, \ldots, n$, като

$$P(x_k)=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

По-интересно е да се види, че няма друг полином $Q(x)$ от n-та степен, за който коефициентът пред x^n е 1 и за който е изпълнено неравенството

$$|Q(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

при $|x| \leq 1$. Доказателството извършете от противното. Образувайте си помощния полином

$$\varphi(x)=P(x)-Q(x),$$

степента на който е очевидно по-малка от n. Покажете, че

(6) $$(-1)^k\varphi(x_k) \geq 0.$$

Като сравните коефициентите пред x^n в двете части на интерполационната формула на Лагранж

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}+$$
$$+\varphi(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\varphi(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})},$$

докажете, че

$$\frac{\varphi(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}+$$
$$+\frac{\varphi(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}+\ldots+\frac{\varphi(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}=0.$$

Покажете, че всичките събираеми на тази сума са неотрицателни, като се възползувате от неравенствата (6) и от неравенствата

$$x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n.$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че $\varphi(x)$ се анулира тъждествено.

Забележка. Тази теорема на П. Л. Чебишев изразява в същност, че измежду всичките полиноми от дадена степен n, за които коефициентът пред x^n е равен на единица, модулът на полинома

$$P(x)=\frac{\cos(n \arccos x)}{2^{n-1}}$$

при $|x| \leq 1$ има най-малка точна горна граница. Това се изразява понякога накратко, като се казва, че от всичките разглеждани полиноми полиномите на Чебишев се отклоняват най-малко от нулата. Изследванията на П. Л. Чебишев в това направление послужиха за основа на изследванията на многобройни автори, като по този начин беше създадена обширна област от анализа, известна под името конструктивна теория на функциите.

51. Докажете, че при $0 < x < 2\pi$ имаме

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}+\ldots$$

Упътване. Разгледайте помощната функция

$$F(x)=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}+\frac{x}{2}+\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}},$$

която е добре дефинирана в отвореня интервал $(0, 2\pi)$. Изберете числото x произволно в този интервал и приложете към функцията $F(x)$ по отношение на интервала (x, π) теоремата на крайните нараствания. Това ще ви даде

(7) $$F(x)-F(\pi)=(x-\pi)F'(\xi),$$

където ξ е едно число между x и π. Докажете, че

(8) $$F'(x)=-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x.\cos\frac{x}{2}}{(4n+2)\sin^2\frac{x}{2}},$$

като предварително установите (например индуктивно), че

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Като се възползувате от равенствата (7) и (8), покажете, че

$$\left|\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}-\frac{\pi-x}{2}\right| \leq \frac{|x-\pi|}{(4n+2)\sin^2\frac{\xi}{2}} \leq \frac{|x-\pi|}{(4n+2)\sin^2\frac{x}{2}},$$

и приложете дефиницията на понятието сума на един ред.

Забележка. Редът

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots$$

играе важна роля в теорията на тригонометричните редове.

52. Нека функцията $f(x)$ е безбройно много пъти диференцуема и удовлетворява неравенствата

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$$

при $a < x \leq b$ и при всички цели неотрицателни стойности на k. Докажете, че функцията $f(x)$ може да се развие в Тейлоров ред

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(b)(b-x)^\nu}{\nu!}$$

при $a < x \leq b$ (С. Н. Бернщайн).

Упътване. От формулата на Тейлор имаме при $a < c < x \leq b$

$$f(c) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(x)(x-c)^\nu}{\nu!} + \frac{(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

и следователно

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{f(c)\, n!}{(x-c)^n}.$$

Използвайте това неравенство, за да покажете, че остатъчният член във формулата

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(b-x)^\nu + R_n$$

клони към нула при $c < x \leq b$. За целта е удобно да използвате представянето

$$R_n = \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^{n+1} \frac{(c-\xi)^{n+3} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!\,(c-x)}.$$

Полученият резултат е валиден при $a < x \leq b$, тъй като c може да се избере произволно близо до a.

53. Нека функцията $f(x)$ е безбройно много пъти диференцуема при $x > 0$ и удовлетворява неравенствата

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$$

при всички положителни стойности на x и всички цели неотрицателни стойности на k. В такъв случай при всички неотрицателни стойности на x и всички реални стойности на λ имаме

$$\lambda^2 f(x) + 2\lambda f'(x) + f''(x) \geq 0$$

(С. Н. Бернщайн).

Упътване. Използвайте, че при $a < x < b$ и при произволни λ и β

$$\lambda^2 f(x) + 2\lambda\beta(b-x) f'(x) + \beta^2[(b-x)^2 f''(x) - (b-x) f'(x)] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu f^{(\nu)}(b) \frac{(b-x)^\nu}{\nu!} (\lambda - \nu\beta)^2 \geq 0.$$

Фиксирайте λ и x, положете $\beta = \frac{1}{b-x}$ и оставете b да расте неограничено.

54. Нека функцията $f(x)$ е безбройно много пъти диференцуема при $x > 0$ и удовлетворява неравенствата

$$0 \leq (-1)^k f^{(k)}(x) \leq e^{-x}$$

при всички положителни стойности на x и при всички неотрицателни стойности на k. Докажете, че

$$f(x) = ce^{-x},$$

където c е константа.

Упътване. Приложете предната задача за двете функции $f(x)$ и $\varphi(x) = e^{-x} - f(x)$, като използвате, че

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) \geq 0$$

и

$$\varphi(x) + 2\varphi'(x) + \varphi''(x) \geq 0$$

и следователно

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 0.$$

55. Функция от вида

$$P(\varphi) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$$

се нарича тригонометричен полином, чийто ред не надминава n. Докажете, че ако един тригонометричен полином, чийто ред не надминава n, се анулира за повече от $2n$ стойности на аргумента в полуотворения интервал $-\pi < \varphi \leq \pi$, то всичките му коефициенти са равни на нула.

Упътване. Положете $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$ и като използвате, че

$$\cos \nu\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2} \cos(\nu-1)\varphi - \frac{2t}{1+t^2} \sin(\nu-1)\varphi,$$

$$\sin \nu\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2} \sin(\nu-1)\varphi + \frac{2t}{1+t^2} \cos(\nu-1)\varphi,$$

представете $\cos \nu\varphi$ и $\sin \nu\varphi$ във вида

$$\cos \nu\varphi = \frac{f(t)}{(1+t^2)^\nu}, \quad \sin \nu\varphi = \frac{g(t)}{(1+t^2)^\nu},$$

където $f(t)$ и $g(t)$ са полиноми съответно от степени 2ν и $2\nu-1$.

56. Нека

$$P(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$$

е тригонометричен полином, чийто ред не надминава r. Да се покаже, че

$$P(\varphi) = a_n \cos n\varphi + \frac{\cos n\varphi}{2n} \sum_{r=1}^{2n} P(\varphi_r)(-1)^r \operatorname{ctg}\frac{\varphi - \varphi_r}{2},$$

където $\varphi_r = \frac{2r-1}{2n}\pi$ (М. Рис—Riesz).

Упътване. Като използувате, че

$$(-1)^r \cos n\varphi \operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_r}{2} - \sin n(\varphi-\varphi_r)\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_r}{2} =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\varphi_r)}{\sin\frac{\varphi-\varphi_r}{2}} - \cos n(\varphi-\varphi_r) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \cos(\varphi-\varphi_r) + \cos 2(\varphi-\varphi_r) + \ldots + \cos n(\varphi-\varphi_r)\right) - \cos n(\varphi-\varphi_r),$$

покажете, че функцията

$$F(\varphi) = \frac{\cos n\varphi}{2n}\sum_{r=1}^{2n} P(\varphi_r)(-1)^r \operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_r}{2}$$

е тригонометричен полином, чийто ред не надминава n. Този тригонометричен полином не съдържа $\cos n\varphi$, защото $\cos n\varphi_r = 0$. Оттук следва, че тригонометричният полином

$$F(\varphi)+F(-\varphi)$$

е най-много от ред $n-1$. Покажете, че той съвпада с тригонометричния полином

$$P(\varphi)+P(-\varphi)-2a_n\cos n\varphi$$

в точките $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}$ и следователно съвпада с него тъждествено.

Разгледайте тригонометричния полином

$$F(\varphi)-F(-\varphi),$$

чийто ред не надминава n, и покажете, че той съвпада с тригонометричния полином

$$P(\varphi)-P(-\varphi)$$

в точките $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}, 0$ и следователно съвпада с него тъждествено. Заключете оттук, че

$$P(\varphi) = a_n\cos n\varphi + F(\varphi).$$

57. Нека

$$P(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu\cos\nu\theta + b_\nu\sin\nu\theta)$$

е тригонометричен полином, чийто ред не надминава n. Да се покаже, че

$$P'(\theta) = \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{2n} P(\theta+\varphi_r)\frac{(-1)^{r+1}}{2\sin^2\frac{\varphi_r}{2}},$$

където

$$\varphi_r = \frac{2r-1}{2n}\pi$$

(M. Рис — M. Riesz).

Упътване. Приложете интерполационната формула от предната задача към тригонометричния полином

$$f(\varphi) = P(\theta+\varphi),$$

диференцирайте по φ и положете $\varphi=0$.

58. Нека тригонометричният полином

$$P(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu\cos\nu\theta + b_\nu\sin\nu\theta)$$

удовлетворява неравенството

$$|P(\theta)| \leq 1.$$

Покажете, че

$$|P'(\theta)| \leq n,$$

където равенството се достига само при тригонометричните полиноми от вида $P(\theta) = \sin n(\theta+c)$ (c е константа) (С. Бернщайн).

Упътване. Използувайте интерполационната формула от предната задача.

59. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема при $a \leq x \leq b$ и нека $f'(a)f'(b) < 0$. Да се покаже, че производната $f'(x)$ се анулира поне веднъж в интервала (a, b) (Дарбу — G. Darboux).

Упътване. Нека например $f'(a) < 0$ и $f'(b) > 0$. Избираме $h > 0$ толкова малко, че да имаме

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0,$$

$$\frac{f(b-h)-f(b)}{-h} > 0.$$

Разглеждаме непрекъснатата функция

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

в интервала $[a, b-h]$. Очевидно $\varphi(a) < 0$ и $\varphi(b-h) > 0$ и следователно има точка ξ в интервала $(a, b-h)$, за която $\varphi(\xi) = 0$, т. е.

$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = 0$$

или още $f'(\xi+\theta h) = 0$, където θ е подходящо число между 0 и 1.

60. Ако редът

$$s = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

е сходящ, то функцията

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

клони към s, когато x клони към 1 чрез стойности, по-малки от 1 (Абел — N. H. Abel).

Упътване. Полагаме

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu.$$

В такъв случай

$$f(x) = (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu$$

и следователно

$$|s-f(x)| \leq (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty}|s-s_\nu|\, x^\nu.$$

61. Да се докаже, че ако трите реда

$$S' = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

$$S'' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots,$$

$$S = u_0 v_0 + (u_1 v_0 + u_0 v_1) + \ldots + (u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + \ldots + u_0\, v_n) + \ldots$$

са сходящи, то $S = S'\, S''$.

Упътване. Приложете теоремата на Мертенс (или пък теоремата на Коши за умножаване на абсолютно сходящи редове) към двата абсолютно сходящи реда

$$u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \ldots,$$

$$v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \ldots$$

при $|t| < 1$ и оставете t да клони към 1, като използувате предната задача.

62. Нека $0 < b < 1$. Очевидно редът

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos(a^\nu \pi x)$$

е равномерно сходящ върху цялата ос x и следователно представлява непрекъсната функция на x. Покажете, че тази непрекъсната функция няма производна при никое x, ако a е достатъчно голямо цяло нечетно число (Вайерщрас).

Упътване. Нека m е цяло положително число. Винаги можем да пишем

$$a^m x = \alpha_m + \xi_m,$$

където α_m е цяло число и $|\xi_m| \leq \frac{1}{2}$. Положете

$$h = \frac{1-\xi_m}{a^m}$$

и разгледайте отношението

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = S_m + R_m,$$

където

$$S_m = \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{m-1} b^\nu[\cos a^\nu \pi(x+h) - \cos a^\nu \pi x],$$

$$R_m = \frac{1}{x}\sum_{\nu=m}^{\infty} b^\nu[\cos a^\nu \pi(x+h) - \cos(a^\nu \pi x)].$$

Теоремата за крайните нарастванія ни дава

$$|S_m| \leq \sum_{\nu=0}^{m-1} b^\nu a^\nu \pi = \pi\frac{a^m b^m - 1}{ab-1}.$$

От друга страна, при $\nu \geq m$

$$\cos a^\nu \pi(x+h) = (-1)^{\alpha_m+1},$$

$$\cos(a^\nu \pi x) = (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{\nu-m}\xi_m \pi)$$

и следователно

$$R_m = \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{\nu=m}^{\infty} b^\nu[1+\cos(a^{\nu-m}\xi_m\pi)],$$

откъдето

$$|R_m| \geq \frac{b^m}{|h|} = \frac{b^m a^m}{1-\xi_m} \geq \frac{2a^m b^m}{3},$$

т. е.

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right| \geq |R_m| - |S_m| \geq \frac{(ab)^m(2ab-2-3\pi)+3\pi}{3(ab-1)}.$$

Оттук е ясно, че е достатъчно да имаме

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

за да сме сигурни, че отношението

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

расте неограничено заедно с m.

63. Да се установи тъждеството

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(\nu-nx)^2 x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx(1-x).$$

Упътване. Разгледайте функцията

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu} t^\nu (1-x)^{n-\nu} = (t+1-x)^n$$

и пресметнете

$$t\varphi'(t)$$

и

$$t\varphi'(t) + t^2\varphi''(t).$$

Оттук ще получите при $t = x$

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu\binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2\binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = n(n-1)x^2 + nx$$

и следователно

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(\nu-nx)^2 x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx(1-x).$$

64. Всяка непрекъсната в краен и затворен интервал функция $f(x)$ може да се апроксимира равномерно в този интервал с полиноми (Вайерщрас).

Упътване. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че разглежданият интервал е интервалът $[0, 1]$. Покажете, че полиномите на Бернщайн

$$B_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$$

клонят равномерно към непрекъснатата функция $f(x)$ в интервала $[0, 1]$, когато $n\to\infty$. За целта изберете $\varepsilon>0$ и му съпоставете $\delta>0$ по такъв начин, че при $|x_1-x_2|<\delta$ да имате

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

След това фиксирайте x и разгледайте неравенството

$$|B_n(x)-f(x)|\leq\sum_{\nu=0}^{n}\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2,$$

където Σ_1 е сумата на онези събираеми от

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu},$$

при които $\left|\frac{\nu}{n}-x\right|<\delta$, а Σ_2 е сумата на останалите събираеми. Най-сетне използувайте, че

$$\sum\nolimits_1\leq\varepsilon\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=\varepsilon$$

и

$$\sum\nolimits_2\leq\frac{2M}{\delta^2}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{\nu}{n}-x\right)^2x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}=\frac{2M}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n},$$

където M е една горна граница на $|f(x)|$, когато x се мени в интервала $[0, 1]$. Последното неравенство се установява с помощта на предната задача.

65. Да означим с K множеството от функциите $f(x)$, които са монотонно растящи в интервала $a\leq x\leq b$ и които са нормирани с условието $f(a)=0$. Ще казваме, че една функция от K, която не е тъждествено нула, е неразложима в K, ако от

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

където $g(x)$ и $h(x)$ принадлежат на K, следва, че съществуват такива неотрицателни константи λ и μ, че

$$g(x)=\lambda f(x) \text{ и } h(x)=\mu f(x)$$

при всяко x от $[a, b]$. Намерете функциите, които са неразложими в K.

Упътване. Нека $f(x)$ е една функция от K, която не се анулира тъждествено. Покажете, че двете функции

$$g(x)=\frac{f^2(x)}{2f(b)},$$

$$h(x)=f(x)-\frac{f^2(x)}{2f(b)}$$

също принадлежат на K и използувайте, че

$$f(x)=(g)+h(x).$$

Това ще ви даде

$$\frac{f^2(x)}{2f(b)}=\lambda f(x),$$

където λ е константа. По такъв начин $f(x)$ удовлетворява квадратно уравнение и следователно не може да има повече от две различни функционални стойности. Тъй като обаче функцията $f(x)$ не се анулира тъждествено и същевременно $f(a)=0$, то тя трябва да приема точно две различни стойности. Покажете, че и обратното е вярно, т. е. ако една функция от K има точно две функционални стойности, то тя е неразложима в K. Как изглежда графиката на такива функции?

ЧАСТ III

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА НЯКОЛКО НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ

ГЛАВА I

ФУНКЦИИ НА НЯКОЛКО НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ

§ 1. Основни понятия

Много от понятията, които разглеждахме досега, могат да бъдат обобщени. Такова обобщаване може да се извърши по различни начини. Така ние въведохме понятието околност на една точка върху една права. Аналогично можем да въведем понятието околност на една точка P_0 в една равнина. Така под кръгова околност на точката P_0 с радиус δ (където $\delta > 0$) разбираме множеството от точките P, разстоянието на които до P_0 е по-малко* от δ. Ако въведем една декартова координатна система и означим с (x_0, y_0) координатите на P_0, то координатите (x, y) на точките P от разглежданата околност (и само те) удовлетворяват неравенството

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta.$$

Около една точка P_0 можем да построим безбройно много кръгови околности (с център в точката P_0) в зависимост от избора на радиуса.

Познатото ни понятие околност обаче може да се пренесе за двуизмеримия случай и другояче. Така всеки квадрат, образуван от точките (x, y), които удовлетворяват неравенствата

$$|x-x_0| < \delta,$$
$$|y-y_0| < \delta,$$

се нарича квадратна околност на точката (x_0, y_0). Това е квадрат със страна 2δ, центърът на който се намира в точката (x_0, y_0) и две от страните му са успоредни на абсцисната ос (а следователно другите му две страни са успоредни на ординатната ос). Към този квадрат не са причислени точките, които лежат върху страните му. Терминът квадратна околност се употребява понякога и за всеки отворен квадрат (т. е. квадрат, към който не са причислени точките от страните му), центърът на който се намира в точката (x_0, y_0) без оглед на неговото разположение по отношение на координатните оси (т. е. и тогава, когато този квадрат не притежава успоредни страни на някоя от координатните оси). Ние няма да си служим с такива околности, освен ако не е казано противното.

В пространството под сферична околност на една точка (x_0, y_0, z_0) ще разбираме вътрешността на една сфера (без точките от контура ѝ), центърът на която се намира в точката (x_0, y_0, z_0). Аналогично всеки куб, определен чрез неравенствата

$$|x-x_0| < \delta,$$
$$|y-y_0| < \delta,$$
$$|z-z_0| < \delta$$
$$(\delta > 0),$$

ще наричаме **кубична околност на точката** (x_0, y_0, z_0).

За читателя, който има наклонност към обобщения, ще отбележим, че множеството от всичките системи от n числа

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

се нарича често пространство с n измерения (тъй като множеството от всичките двойки числа (x, y) се нарича равнина или двуизмеримо пространство, а множеството от всичките тройки числа $(x, y, \ )$ се нарича триизмеримо пространство). Всяка система от числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се нарича точка от разглежданото пространство, а числата $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се наричат нейни координати. Под сферична околност на една точка $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с радиус $\delta > 0$ се разбира множеството от всичките точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, които удовлетворяват неравенството

$$\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+\ldots+(\xi_n-x_n)^2} < \delta.$$

Изразът

$$\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+\ldots+(\xi_n-x_n)^2}$$

се нарича разстояние между двете точки

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \text{ и } (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тази терминология ни дава възможност да дефинираме понятието околност по-кратко така. Сферична околност с радиус $\delta > 0$ на една точка P_0 се нарича множеството от всички точки, разстоянието на които до P_0 е по-малко от δ.

* Нека изрично подчертаем, че се иска разстоянието PP_0 да бъде по-малко от δ, т. е. към околността не причисляваме контурните ѝ точки.

За в бъдеще често ще се ограничаваме само с двуизмеримия случай, но резултатите почти винаги ще бъдат в сила и при произволен брой измерения.

Нека ни е дадено едно точково множество M в равнината. Една точка P_0 се нарича вътрешна за M, когато около P_0 може да се построи околност, всичките точки на която принадлежат на M. Ако около P_0 може да се построи околност, която не съдържа нито една точка от M, казваме, че P_0 е външна точка за множеството M. Ако точката P_0 не е нито вътрешна, нито външна за M (т. е. ако във всяка околност на P_0 има както точки, принадлежащи на M, така и точки, непринадлежащи на M, казваме, че точката P_0 е контурна за това множество. Множеството от контурните точки на едно множество M се нарича негов контур. На черт. 13 е изобразено едно точково множество M. Точката P_1 е вътрешна точка за това множество, точката P_2 е външна, а точката P_3 е контурна.

Черт. 13

Едно точково множество се нарича затворено, когато към него са причислени всичките му контурни точки (сравнете тази дефиниция с дефиницията на понятието затворен интервал, която дадохме по-рано). Едно точково множество се нарича отворено, когато към него не е причислена нито една от контурните му точки. Разбира се, едно точково множество може да не бъде нито затворено, нито отворено (това се случва, когато някои от контурните му точки са причислени към него, а други не са).

Едно точково множество M се нарича ограничено, когато може да се намери квадрат (или, ако искате, кръг) с крайни размери, който да съдържа всичките точки на това множество.

Нека M е едно ограничено точково множество. Да изберем две точки P и Q от M и да означим с d разстоянието между тях. Това разстояние зависи от избора на точките P и Q. Множеството от тези разстояния обаче е ограничено отгоре, понеже множеството M е ограничено (никое от тези разстояния не може да надмине например диаметъра на един кръг, който съдържа всичките точки на M). Точната горна граница на множеството от разстоянията d (които се получават, когато оставим P и Q да се менят в M) се нарича диаметър на M. Така диаметърът на една елипса представлява дължината на голямата ѝ ос; диаметърът на един квадрат е равен на дължината на неговия диагонал и пр.

Ние знаем какво значи сходимост на една редица от числа или (което е същото) на една редица от точки върху една права. Сега ще дефинираме понятието сходимост на една редица от точки

(1) $$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$$

в една равнина.

За тази цел ще дефинираме предварително понятието точка на сгъстяване на една такава редица. Една точка P_0 се нарича точка на сгъстяване на редицата (1), ако във всяка околност на P_0 има безбройно много членове на редицата (1).

Преди да минем по-нататък, ще отбележим, че понятието точка на сгъстяване ни дава възможност да формулираме следната важна особеност, която имат затворените множества. Ако членовете на една редица

$$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

лежат в едно затворено точково множество M, то всичките точки на сгъстяване на тази редица също лежат в M.

И наистина да допуснем, че разглежданата редица притежава поне една точка на сгъстяване P_0, която не принадлежи на M. В такъв случай точката P_0 е сигурно външна на M. Действително тя не е вътрешна за M, защото всяка вътрешна точка на M принадлежи на това множество. Тя обаче не е контурна, защото множеството M е затворено и следователно съдържа всичките си контурни точки. И'така P_0 не е нито вътрешна, нито контурна за M, т. е. тя е външна. В такъв случай обаче около P_0 може да се избере околност, която не съдържа нито една точка от множеството M, а следователно и нито една точка от редицата

$$P_1, P_2, P_3, \ldots,$$

нещо, което противоречи на допускането, че P_0 е точка на сгъстяване на тази редица.

Това свойство притежават само затворените точкови множества. И наистина нека имаме едно множество N, което съдържа точките на сгъстяване на всяка редица от точки, които му принадлежат. Нека Q_0 е контурна точка на N. В такъв случай във всяка околност на Q_0 има точки от N. Да означим с Q_n точка от N, която се намира в кръгова околност на Q_0 с радиус $\frac{1}{n}$, където n е цяло положително число. По такъв начин получаваме редица от принадлежащи на N точки

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots,$$

за която Q_0 е точка на сгъстяване. От това следва, че точката Q_0 принадлежи на N. От направените разсъждения се вижда, че N съдържа всичките си контурни точки и следователно е затворено мно-

жество. Това характерно свойство на затворените множества се избира често за дефиниционно свойство.

Казваме, че една редица от точки

(2) $$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$$

е сходяща и клони към P_0, когато разстоянието $P_n P_0$ клони към нула. Точката P_0 се нарича граница на редицата (2).

Нека координатите на P_n са (x_n, y_n). Читателят лесно ще докаже сам, че редицата (2) е сходяща тогава и само тогава, когато са сходящи двете редици

(3) $$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

(4) $$y_1, y_2, y_3, \ldots,$$

като редицата (3) клони към абсцисата на границата P_0 на редицата (2), а редицата (4) клони към ординатата на P_0.

Лесно се вижда, че едно точково множество е затворено тогава и само тогава, когато съдържа границата на всяка сходяща редица от точки, които му принадлежат.

Едно точково множество се нарича компактно, когато е ограничено и затворено.

§ 2. Теорема на Болцано—Вайерщрас (Bolzano—Weierstrass)

Нека е дадена една редица от правоъгълници

(1) $$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots,$$

n-тият от които Δ_n се дефинира като множество от точки (x, y), координатите на които удовлетворяват неравенствата

(2) $$a_n \leqq x \leqq b_n,$$

(3) $$c_n \leqq y \leqq d_n.$$

Две от страните на Δ_n са успоредни на абсцисната ос, а другите две са успоредни на ординатната ос. Освен това нека отбележим, че към всеки от правоъгълниците Δ_n са причислени и контурните му точки (това ние често ще изразяваме накратко, като казваме, че правоъгълниците Δ_n са затворени).

Ако всеки един от правоъгълниците Δ_n от разглежданата редица (1) съдържа следващия Δ_{n+1}, то има поне една точка P_0, която лежи във всеки един от правоъгълниците на редицата (1). (Ние поставихме нарочно изискването правоъгълниците Δ_n да бъдат затворени, защото не е изключено точката P_0 да се намира по контура на някой от тези правоъгълници.)

За да докажем това, вземаме пред вид, че интервалите (2) са затворени и всеки един от тях съдържа следващия.*

Оттук заключаваме, че има поне една точка x_0, която лежи във всеки един от тези интервали, т. е. при всяка цяла положителна стойност на n са изпълнени неравенствата

(4) $$a_n \leqq x_0 \leqq b_n.$$

Аналогично се доказва, че има поне една точка y_0, която удовлетворява неравенствата

(5) $$c_n \leqq y_0 \leqq d_n$$

при всички цели положителни стойности на n. Неравенствата (4) и (5) ни учат, че точката (x_0, y_0) лежи във всичките правоъгълници Δ_n. С това твърдението е доказано.

Ние вече сме запознати с важната теорема на Болцано—Вайерщрас (вж. § 3, глава II, част I). Там ставаше дума за редица от точки, лежащи на една права. Теоремата на Болцано—Вайерщрас обаче е валидна и тогава, когато имаме ограничена редица от точки в едно пространство с произволен брой измерения. Така например в двуизмерния случай тази теорема може да се формулира по следния начин: всяка ограничена редица от точки в една равнина притежава поне една точка на сгъстяване.

Доказателството може да се извърши по следния начин. Нека ни е дадена една ограничена редица

(6) $$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

от точки в една равнина. Да означим с Δ един затворен квадрат със страни, успоредни на съответните координатни оси, който съдържа всичките точки на редицата (6). Такъв квадрат съществува, защото редицата (6) е ограничена. Делим квадрата Δ на четири части със средните му линии и означаваме с Δ_1 една негова четвъртина**, която съдържа безбройно много членове на редицата (6). Такава четвъртина* сигурно съществува, защото в противен случай (т. е. в случай, че всяка една от тези четвъртини съдържа най-много краен брой членове) бихме имали и в квадрата Δ само краен брой членове на редицата (6) — нещо което не е вярно, защото Δ съдържа безбройно много (всичките) членове на редицата (6). След това делим квадрата Δ_1 също на четири части с помощта на средните му линии и означаваме с Δ_2 една негова четвъртина, която съдържа безбройно много членове на редицата (6). Този процес продължаваме неограничено. Така получаваме една редица от затворени квадрати

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots,$$

* Защото всеки един от правоъгълниците Δ_n съдържа следващия.

** Към всяка една от четвъртините причисляваме контурните ѝ точки.

всеки един от които съдържа следващия. Съгласно това, което ние току-що доказахме, съществува точка P_0, която лежи във всеки един от тези квадрати. Ще покажем, че P_0 е една точка на сгъстяване на редицата (6). За целта е достатъчно да покажем, че всяка околност на P_0 съдържа безбройно много членове на редицата (6). Нека G е една околност на P_0. Всеки един от квадратите Δ_n съдържа точката P_0. От друга страна, дължината на страната на Δ_n клони към нула, когато n расте неограничено. От това заключаваме, че квадратът Δ_n сигурно ще лежи изцяло в околността G, когато индексът n е достатъчно голям. Това обаче ни осигурява, че в околността G има безбройно много членове от редицата (6), защото в Δ_n има безбройно много членове от тази редица. С това е показано, че P_0 е наистина една точка на сгъстяване за редицата (6).

Като приложение ще покажем, че от всяка ограничена редица от точки

(7) $$P_1, P_2, P_3, \ldots,$$

може да се избере сходяща подредица.

И наистина съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас редицата (7) има поне една точка на сгъстяване. Нека Q е една нейна точка на сгъстяване. Построяваме кръгова околност на точката Q с радиус 1 и избираме член P_{n_1} от редицата (7), който принадлежи към тази околност. След това разглеждаме околност на точката Q с радиус $\frac{1}{2}$ и избираме член P_{n_2}, който принадлежи на тази околност и за който $n_2 > n_1$. Продължаваме този процес и получаваме по такъв начин редицата

$$P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, \ldots,$$

която е подредица на редицата (7), защото

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

Тази подредица клони към P. По такъв начин видяхме, че може да се избере даже такава подредица, която да клони към отнапред избрана точка на сгъстяване на редицата (7).

§ 3. Функции на няколко независими променливи

Нека ни е дадено едно множество M от точки в равнината XOY. Казваме, че в множеството M е дефинирана една функция $f(x, y)$ на двете независими променливи x и y, когато на всяка точка (x, y) от M е съпоставено по едно число $f(x, y)$. Нека например M е кръговата област

$$x^2+y^2 \leqq 1.$$

На всяка точка (x, y) от тази област да съпоставим числото

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

С това ние сме дефинирали една функция $f(x, y)$ в множеството M. Обикновено множеството M, в което е дефинирана една функция, се нарича дефиниционна област на тази функция.

По аналогичен начин се дефинира и понятието функция на три или повече променливи. Така казваме, че е дефинирана една функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в едно множество M от точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, когато на всяка система от числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежаща на M, е съпоставено по едно число $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

§ 4. Непрекъснатост

Нека $f(x, y)$ е една функция на двете независими променливи x и y и нека (x_0, y_0) е една точка от дефиниционната област на $f(x, y)$. Казваме, че функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (x_0, y_0), когато при всеки избор на редицата

(1) $$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$$

от точки, които принадлежат на дефиниционната област на $f(x, y)$ и клонят към (x_0, y_0), съответната редица от функционални стойности

(2) $$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), \ldots$$

е сходяща. Впрочем от това следва, че границата на редицата (2) не може да бъде друга освен $f(x_0, y_0)$. И наистина, ако редицата

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$$

клони към (x_0, y_0), то редицата

$$(x_1, y_1), (x_0, y_0), (x_2, y_2), (x_0, y_0), (x_3, y_3), (x_0, y_0), \ldots$$

е също сходяща и клони към (x_0, y_0). От това следва, че редицата

(3) $$f(x_1, y_1), f(x_0, y_0), f(x_2, y_2), f(x_0, y_0), \ldots$$

е сходяща. И така двете редици

(4) $$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots$$

и

(5) $$f(x_0, y_0), f(x_0, y_0), \ldots$$

клонят към една и съща граница, защото са подредици на една и съща сходяща редица (3). Като вземем под внимание, че редицата (5) клони към $f(x_0, y_0)$, заключаваме, че редицата (4) клони също към $f(x_0, y_0)$.

Понятието непрекъснатост може да се дефинира още по следния начин: казваме, че една функция $f(x, y)$ е непрекъсната в една точка (x_0, y_0) от дефиниционната си област, когато при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ по такъв начин, че ако точката (x, y) принадлежи на дефиниционната област на $f(x, y)$ и удовлетворява неравенствата

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,$$

то

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon.$$

Двете дефиниции на понятието непрекъснатост, които даваме, са напълно еквивалентни помежду си. Аналогичен въпрос ние разглеждахме в случая на една независима променлива. Направените там разсъждения могат без съществени изменения да се приложат и тук. Предоставяме на читателя сам да обмисли подробностите.

Ако в една функция $f(x, y)$ на две независими променливи x и y фиксираме едната променлива, получаваме функция на една независима променлива. Така

$$\varphi(x)=f(x, y_0)$$

е функция само на x, а

$$\psi(y)=f(x_0, y)$$

е функция само на y.

Не е трудно да се види, че от непрекъснатостта на $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0) следва непрекъснатостта на $f(x, y_0)$ в точката x_0 и непрекъснатостта на $f(x_0, y)$ в точката y_0 (за целта може да се използува коя да е от дефинициите на понятието непрекъснатост). Нека обаче изрично подчертаем, че обратното не е вярно, т. е. от непрекъснатостта на $\varphi(x)=f(x, y_0)$ в точката x_0 и от непрекъснатостта на $\psi(y)=f(x_0, y)$ в точката y_0 още не следва непрекъснатостта на $f(x,y)$ в точката (x_0, y_0). Един пример ще ни убеди в това. Нека

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

при

$$x^2+y^2\neq 0$$

и

$$f(0, 0)=0.$$

С това имаме една функция, дефинирана при всички стойности на x и y. Да разгледаме двете функции

$$\varphi(x)=f(x, 0)=0,$$
$$\psi(y)=f(0, y)=0.$$

Те са непрекъснати навсякъде (защото са константи). Въпреки това функцията $f(x, y)$ е прекъсната в точката $(0, 0)$. За да се убедим в това, избираме редицата от точки

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \ldots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \ldots,$$

която клони очевидно към точката $(0, 0)$. В такъв случай

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq f(0, 0),$$

което показва, че функцията $f(x, y)$ не удовлетворява условието за непрекъснатост в точката $(0, 0)$.

§ 5. Свойства на непрекъснатите функции

Много от свойствата на непрекъснатите функции на една независима променлива запазват своята валидност и в случая, когато имаме функция на няколко независими променливи. Тук ще посочим без доказателства по-важните от тези свойства (доказателството се извършва по същия начин, както в случая на една независима променлива).

Ако една функция е дефинирана и непрекъсната в едно компактно, т. е. ограничено и затворено точково множество, тя е ограничена* (и отгоре, и отдолу).

Ако една функция е дефинирана и непрекъсната в едно компактно, т. е. ограничено и затворено точково множество, тя достига както точната си горна, така и точната си долна граница (теорема на Вайерщрас).

Най-сетне ще споменем без съответно прецизиране (което е съвсем непосредствено), че непрекъсната функция от непрекъсната функция е непрекъсната. По-специално сума, разлика, произведение и частно (стига знаменателят да не се анулира) от непрекъснати функции е непрекъсната функция.

* Една функция се нарича ограничена, когато е ограничено множеството от функционалните ѝ стойности.

§ 6. Равномерна непрекъснатост

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в някое точково множество M и нека (x_0, y_0) е една точка от M. Дефиницията на понятието непрекъснатост може да се формулира така: функцията $f(x, y)$ се нарича непрекъсната в точката (x_0, y_0), когато при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ (евентуално зависещо от ε) по такъв начин, че всеки път, когато $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ и точката (x_0+h, y_0+k) принадлежи на дефиниционната област M на функцията $f(x, y)$, да е изпълнено неравенството

$$|f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната във всички точки на множеството M, ще казваме накратко, че тя е непрекъсната в M. И така, ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в M, то при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число $\delta(\varepsilon, x, y)$ по такъв начин, че ако $|h|<\delta$, $|k|<\delta$ и ако точката $(x+h, y+k)$ принадлежи на M, да е изпълнено неравенството

$$|f(x+h, y+k)-f(x, y|<\varepsilon,$$

както и да избираме точката (x, y) в M.

Нека подчертаем изрично при това, че в дефиницията не се изключва числото δ да се мени, когато изменяме числото ε или точката (x, y). За да изтъкнем, че се позволява числото δ да зависи от ε, x и y, ние писахме $\delta(\varepsilon, x, y)$. Ако обаче при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ, евентуално зависещо от ε, но не и от точката (x, y) по такъв начин, че ако $|h|<\delta$, $|k|<\delta$ и ако точката $(x+h, y+k)$ принадлежи на M, да е изпълнено и неравенството

$$|f(x+h, y+k)-f(x, y)|<\varepsilon$$

при всеки избор на точката (x, y) в M, казваме, че функцията $f(x, y)$ е равномерно непрекъсната в множеството M.

Подобно на това, което имаме при функции на една независима променлива, и тук е в сила следната теорема:

Ако една функция $f(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната в едно компактно, т. е. ограничено и затворено точково множество, тя е и равномерно непрекъсната в това множество.

Доказателството се извършва по същия начин, както в случая на една независима променлива.

Накрая ще отбележим, че ако дефиниционната област M на една функция е ограничена и затворена, а функцията е непрекъсната навсякъде в дефиниционната си област, то на всяко положително число ε може да се съпостави положително число δ (евентуално зависещо

от ε) по такъв начин, че ако разделим множеството M на подмножества

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n,$$

диаметрите на които са по-малки от δ, осцилацията* на функцията във всяко едно от тези подмножества да е по-малка от ε.

И тук доказателството се извършва по същия начин, както в случая на една независима променлива.

§ 7. Частни производни на функции, зависещи от няколко независими променливи

Нека $f(x, y)$ е една функция на две независими променливи, дефинирана в някое множество M от точки в равнината, и нека точката (x_0, y_0) принадлежи на M. Ако фиксираме едната от независимите променливи на функцията $f(x, y)$, получаваме функция, зависеща само от една независима променлива. Така например функцията

$$\varphi(x)=f(x, y_0)$$

зависи само от x. Нека във всяка околност на x_0 има числа x, различни от x_0, за които точката с координати (x, y_0) принадлежи на M. Това условие е изпълнено например, ако точката (x_0, y_0) е вътрешна за M. Да допуснем, че функцията $\varphi(x)$ има производна в точката x_0 (ние знаем какво значи производна на една функция, която зависи само от една независима променлива). Производната $\varphi'(x_0)$ се нарича първа частна производна спрямо x на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0). Това изразяваме обикновено символично, като пишем

$$\varphi'(x_0)=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{1}$$

Аналогично символът $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ означава частната производна спрямо y на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0). По-точно $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ означава производната $\psi'(y_0)$ на функцията

$$\psi(y)=(x_0, y).$$

Така например да разгледаме функцията

$$f(x, y)=xe^y+\sin(xy+y^2),$$

* Осцилация на една функция се нарича разликата между точната ѝ горна и точната ѝ долна граница.

дефинирана с това равенство при всички стойности на x и y. В такъв случай

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = e^{y_0} + y_0 \cos(x_0 y_0 + y_0^2),$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = x_0 e^{y_0} + (x_0 + 2y_0) \cos(x_0 y_0 + y_0^2).$$

Понякога (когато от това няма да произлизат опасности от недоразумения) ние ще пишем по-кратко

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^y + y \cos(xy + y^2),$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = xe^y + (x + 2y) \cos(xy + y^2),$$

или още по-кратко

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + y \cos(xy + y^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xe^y + (x + 2y) \cos(xy + y^2).$$

Този начин на означаване е действително по-кратък, но по-малко точен. Така например в символа $\frac{\partial f}{\partial x}$ (четете — де еф де икс) въобще не са посочени координатите на точката, в която се извършва диференцирането.

В бъдеще ние често ще си служим и с други начини за означаване на частните производни. Така вместо $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ ние често ще пишем $f'_x(x_0, y_0)$, а вместо $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ ще пишем $f'_y(x_0, y_0)$.

Нека изрично подчертаем, че символът $\frac{\partial f}{\partial x}$ не представлява дроб (при все че има дробна черта).

Аналогично се дефинира понятието частна производна и на функции с три и повече независими променливи. Така под частна производна на $f(x, y, z)$ спрямо x се разбира производната на функцията, която се получава, като фиксираме всички независими променливи освен x. Така под $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$ се разбира производната $\varphi'(x_0)$ на функцията

$$\varphi(x) = f(x, y_0, z_0)$$

и пр.

Ние знаем, че от диференцуемостта на една функция на една независима променлива следва нейната непрекъснатост. Не стои така

въпросът, когато имаме функция на няколко независими променливи. Ние ще изясним това с един пример. Да разгледаме функцията $f(x, y)$, дефинирана по следния начин:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

при $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$. В такъв случай

$$f(x, 0) = 0$$

и

$$f(0, y) = 0.$$

От това заключаваме, че функцията $f(x, y)$ е диференцуема в началото както частно спрямо x, така и частно спрямо y, защото функциите $f(x, 0)$ и $f(0, y)$ са константи и следователно са диференцуеми. Въпреки това функцията $f(x, y)$ е прекъсната в началото, защото

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

и следователно

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq f(0, 0).$$

§ 8. Диференциране на съставни функции

Нека двете функции

$$u = f(t), \; v = g(t)$$

са дефинирани в някоя околност Δ на точката t_0. Ние ще положим за краткост

$$f(t_0) = x_0, \; g(t_0) = y_0.$$

Нека функцията

$$z = F(x, y)$$

е дефинирана в някоя околност D на точката (x_0, y_0). Ако точката с координати $[f(t), g(t)]$ не напуска околността D, когато t се мени в околността Δ, функцията

$$\varphi(t) = F[f(t), g(t)] \tag{1}$$

е дефинирана за всички точки на Δ. Нашата цел е да докажем следната теорема, която многократно ще прилагаме в бъдеще:

Нека функциите $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0; нека точката с координати $(f(t), g(t))$ принадлежи на D, когато t принадлежи на Δ; нека функцията $F(x, y)$ е диференцуема в околността D както спрямо

x, така и спрямо y; нека най-сетне двете първи частни производни на $F(x,y)$ са непрекъснати в точката (x_0, y_0); при тези предположения функцията $\varphi(t)$ е диференцуема в точката t_0 и

$$\varphi'(t_0)=F'_x(x_0, y_0)\, f'(t_0)+F'_y(x_0, y_0)\, g'(t_0).$$

Доказателството ще извършим, като изхождаме от дефиницията на понятието производна. За целта разглеждаме отношението

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{F[f(t_0+h), g(t_0+h)]-F[f(t_0), g(t_0)]}{h}.$$

Ако положим

$$(2)\qquad \begin{aligned} k&=f(t_0+h)-f(t_0),\\ l&=g(t_0+h)-g(t_0)\end{aligned}$$

и вземем пред вид, че $f(t_0)=x_0$, $g(t_0)=y_0$, получаваме

$$f(t_0+h)=x_0+k,$$

$$g(t_0+h)=y_0+l,$$

което ни дава право да пишем

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{F(x_0+k, y_0+l)-F(x_0, y_0)}{h}.$$

Оттук, като прибавим и извадим $F(x_0, y_0+l)$, получаваме

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{F(x_0+k, y_0+l)-F(x_0, y_0+l)}{h}+\frac{F(x_0, y_0+l)-F(x_0, y_0)}{h}.$$

Нека обърнем внимание на това, че ние можем да говорим за $F(x_0, y_0+l)$ защото точката (x_0+k, y_0+l), а следователно и точката (x_0, y_0+l) принадлежи на околността D. Това е вярно както в случая, когато D е кръгова околност на точката (x_0, y_0), така и в случая, когато D е квадратна околност на тази точка (със страни, успоредни на съответните координатни оси).

Като приложим теоремата за крайните нараствания към функцията

$$p(x)=F(x, y_0+l),$$

получаваме

$$F(x_0+k, y_0+l)-F(x_0, y_0+l)=p(x_0+k)-p(x_0)=kp'(x_0+\theta k)=$$

$$=kF'_x(x_0+\theta k, y_0+l),$$

където θ е едно число, подходящо избрано между 0 и 1. Аналогично, като приложим теоремата за крайните нараствания към функцията

$$q(y)=F(x_0, y),$$

получаваме

$$F(x_0, y_0+l)-F(x_0, y_0)=lF'_y(x_0, y_0+\theta_1 l),\ 0<\theta_1<1.$$

Това ни дава право да пишем

$$\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{k}{h}F'_x(x_0+\theta k, y_0+l)+\frac{l}{h}F'_y(x_0, y_0+\theta_1 l),$$

откъдето, като вземем пред вид равенствата (2), получаваме

$$(3)\qquad \frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}=\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}F'_x(x_0+\theta k, y_0+l)+$$

$$+\frac{g(t_0+h)-g(t_0)}{h}F'_y(x_0, y_0+\theta_1 l).$$

По предположение функциите $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0. Оттук заключаваме, че отношенията

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h},\ \frac{g(t_0+h)-g(t_0)}{h}$$

клонят съответно към $f'(t_0)$ и $g'(t_0)$, когато $h\to 0$. От диференцуемостта на $f(t)$ и $g(t)$ в точката t_0 следва обаче и тяхната непрекъснатост в тази точка. Това ни дава право да твърдим, че

$$k=f(t_0+h)-f(t_0),$$

$$l=g(t_0+h)-g(t_0)$$

клонят към нула заедно с h. Като вземем най-сетне пред вид, че производните F'_x, F'_y са непрекъснати функции в точката (x_0, y_0), заключаваме, извършвайки граничния преход $h\to 0$, че дясната страна на равенството (3) клони към

$$f'(t_0)\, F'_x(x_0, y_0)+g'(t_0)F'_y(x_0, y_0).$$

Този резултат ни дава право да твърдим, че функцията $\varphi(t)$ е диференцуема в точката t_0 и

$$(4)\qquad \varphi'(t_0)=F'_x(x_0, y_0)\, f'(t_0)+F'_y(x_0, y_0)\, g'(t_0).$$

С това интересуващата ни теорема е доказана.

Така установената теорема представлява в известен смисъл обобщение на теоремата за диференциране на функция от функция, която ние разгледахме по-рано.

Функции от вида (1) ще наричаме съставни функции за разлика от сложните функции, които разглеждахме в диференциалното смятане на функции от една независима променлива.

Като използуваме означенията

$$u=f(t),\ v=g(t),\ z=F(x,\ y),$$

ние често ще записваме равенството (4) по следния по-кратък, но по-малко прецизен начин:

$$z'_t=F'_u u'_t+F'_v v'_t,$$

или още

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

Това правило за диференциране на съставни функции може да се обобщи. Така нека функцията

$$y=F(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$$

зависи от n независими променливи $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$. Нека са дадени освен това n функции на независимата променлива t:

$$u_1=f_1(t),\ u_2=f_2(t),\ldots,\ u_n=f_n(t).$$

Образуваме функцията

$$\varphi(t)=F[u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n]=F[f_1(t),\ f_2(t),\ldots,\ f_n(t)]$$

на независимата променлива t. В такъв случай поне когато са изпълнени някои условия, които ние изрично тук няма да формулираме и които читателят лесно може да формулира сам по образеца на случая $n=2$, е в сила следното правило за диференциране:

$$\varphi'(t)=\frac{\partial F}{\partial u_1}\cdot\frac{du_1}{dt}+\frac{\partial F}{\partial u_2}\cdot\frac{du_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial u_n}\cdot\frac{du_n}{dt}.$$

Задачи

Намерете първите частни производни на функциите

1. $z=xe^{xy}\sin 2y$.

Отг. $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}\sin 2y+xye^{xy}\sin 2y;\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^{xy}\sin 2y+2xe^{xy}\cos 2y.$

2. $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

3. $z=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$.

4. $z=\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$.

5. $z=x^y$.

6. $z=\ln\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

7. $z=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ при $x^2+y^2<1,\ xy>0$.

Отг. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$

8. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

9. Нека функциите $u=f(x)$ и $v=g(x)$ са диференцуеми и $f(x)>0$. Намерете първата производна на функцията

$$y=\varphi(x)=u^v.$$

Решение. Използуваме правилото за диференциране на съставни функции:

$$\varphi'(x)=\frac{\partial y}{\partial u}u'+\frac{\partial y}{\partial v}v'.$$

Като вземем пред вид, че

$$\frac{\partial y}{\partial u}=vu^{v-1},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=u^v\ln u,$$

намираме

$$\varphi'(x)=vu^{v-1}u'+u^v(\ln u)v'.$$

10. Намерете производната на функцията $y=x^x$ при $x>0$, като се възползувате от предната задача. Намерете след това производната на y, като логаритмувате предварително двете части на равенството $y=x^x$. Сравнете резултатите.

11. Нека функцията $f(x,\ y)$ е дефинирана и диференцуема както частно спрямо x, така и частно спрямо y в някоя околност на точката $(x_0,\ y_0)$ и нека двете частни производни f'_x и f'_y са непрекъснати в точката $(x_0,\ y_0)$. Не е трудно да се види, че функцията

$$\varphi(t)=f(x_0+\alpha t,\ y_0+\beta t)$$

е дефинирана, когато t е достатъчно малко. Докажете, че функцията $\varphi(t)$ е диференцуема в точката $t=0$ и че

$$\varphi'(0)=\alpha f'_x(x_0,\ y_0)+\beta f'_y(x_0,\ y_0).$$

Упътване. Приложете теоремата за диференциране на съставни функции, след като проверите дали са изпълнени условията, при които тя е доказана.

12. Нека функцията $f(x,\ y)$ е дефинирана и диференцуема в някоя околност Δ на точката $(x_0,\ y_0)$ и нека двете частни производни f'_x и f'_y са непрекъснати в тази околност. Нека точката $(x_0+h,\ y_0+k)$ лежи в околността Δ. Докажете, че в такъв случай може да се намери число θ от отворения интервал $(0,\ 1)$, за което е изпълнено равенството

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=hf'_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k).$$

Упътване. Разгледайте помощната функция

$$\varphi(t)=f(x_0+ht,\ y_0+kt).$$

Покажете, че тази функция е дефинирана и диференцуема в затворения интервал $[0,\ 1]$. Това ще ви позволи да приложите към функцията $\varphi(t)$ теоремата за крайните нараствания по отношение на интервала $[0,\ 1]$:

$$\varphi(1)-\varphi(0)=(1-0)\varphi'(\theta)=\varphi'(\theta),$$

където $0<\theta<1$. Пресметнете $\varphi'(\theta)$, като си послужите с правилото за диференциране на съставни функции. Това ще ви даде

$$\varphi'(\theta)=hf'_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k).$$

Използувайте най-сетне, че

$$\varphi(1)=f(x_0+h,\ y_0+k)$$

$$\varphi(0)=f(x_0,\ y_0).$$

Забележка. Доказаната теорема се нарича понякога теорема за крайните нараствания при функции на две независими променливи. Обобщете тази теорема за случая, когато функцията зависи от произволен брой аргументи.

13. Нека u, v и w са функции на x, y, z.

Детерминантата

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

се нарича функционална или Якобиева детерминанта на функциите u, v, w спрямо независимите променливи x, y, z и се означава със символа $\frac{D(u,\ v,\ w)}{D(x,\ y,\ z)}$. Покажете, че при

$$u=x^2+y^2+z^2,$$
$$v=x+y+z,$$
$$w=xy+yz+zx$$

имаме

$$\frac{D(u,\ v,\ w)}{D(x,\ y,\ z)}=0.$$

14. Нека

$$u_1=f_1(x_1,\ x_2,\ x_3),$$
$$u_2=f_2(x_1,\ x_2,\ x_3),$$
$$u_3=f_3(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

и

$$x_1=\varphi_1(t_1,\ t_2,\ t_3),$$
$$x_2=\varphi_2(t_1,\ t_2,\ t_3),$$
$$x_3=\varphi_3(t_1,\ t_2,\ t_3).$$

Докажете, че поне при известни условия (формулирайте тези условия) имаме

$$\frac{D(u_1,\ u_2,\ u_3)}{D(t_1,\ t_2,\ t_3)}=\frac{D(u_1,\ u_2,\ u_3)}{D(x_1,\ x_2,\ x_3)}\cdot\frac{D(x_1,\ x_2,\ x_3)}{D(t_1,\ t_2,\ t_3)}.$$

(Значението на тези символи е изяснено в предната задача.)

§ 9. Хомогенни функции

Нека $f(x,\ y)$ е една функция, дефинирана в някоя околност Δ на точката $(x_0,\ y_0)$. Казваме, че функцията $f(x,\ y)$ е хомогенна от n-та степен в точката $(x_0,\ y_0)$, когато е изпълнено равенството

$$f(tx_0,\ ty_0)=t^n f(x_0,\ y_0)$$

за всички стойности на t, които се намират в достатъчно малка околност на числото 1.

Казваме, че една функция $f(x,\ y)$ е хомогенна от n-та степен в едно отворено точково множество D, ако тя е дефинирана и е хомогенна от n-та степен във всяка точка на множеството D.

Така например функцията x^2+xy+y^2 е хомогенна от втора степен в цялата равнина; функцията $\sqrt{x^2+y^2}$ е хомогенна от първа степен в цялата равнина; функцията $\sqrt{x+y}$ е хомогенна от степен $\frac{1}{2}$ в полуравнината $x+y>0$; функцията $\frac{xy}{x^2+y^2}$ е хомогенна от нулева степен при $x^2+y^2\neq 0$; функцията $\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$ е хомогенна от степен -2 при $y\neq 0$ и пр.

Понятието хомогенност може да се обобщи по очевиден начин и за функции на произволен брой независими променливи. Така функцията $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, зависеща от трите аргумента x, y, z, е хомогенна от първа степен.

Нека функцията $f(x,\ y)$ е хомогенна от n-та степен в точката $(x_0,\ y_0)$. Ако функцията $f(x,\ y)$ е диференцуема както частно спрямо x, така и, спрямо y в някоя околност Δ на точката $(x_0,\ y_0)$ и ако тези частни производни са непрекъснати в точката $(x_0,\ y_0)$, то е в сила равенството

$$f'_x(x_0,\ y_0)x_0+f'_y(x_0,\ y_0)y_0=nf(x_0,\ y_0).$$

За да докажем това, разглеждаме помощната функция

$$\varphi(t)=f(x_0t,\ y_0t),$$

която е дефинирана за всички стойности на t, които са достатъчно близки до 1. Не е трудно да се провери, че тук са налице за точката $t=1$ всичките условия, при които ние изведохме правилото за диференциране на съставни функции (вижте предния параграф). Това ни дава право да твърдим, че функцията $\varphi(t)$ е диференцуема в точката $t=1$ и

$$\varphi'(1)=f'_x(x_0,\ y_0)x_0+f'_y(x_0,\ y_0)y_0. \tag{1}$$

От друга страна, условието за хомогенност ни дава

$$f(x_0t,\ y_0t)=t^n f(x_0,\ y_0),$$

т. е.

$$\varphi(t)=t^n f(x_0,\ y_0).$$

Това ни позволява да твърдим, че

(2) $$\varphi'(1)=nf(x_0,\ y_0).$$

Като сравним двете равенства (1) и (2), получаваме

$$f'_x(x_0,\ y_0)\,x_0+f'_y(x_0,\ y_0)\,y_0=nf(x_0,\ y_0).$$

Това равенство се нарича тъждество на Ойлер (L. Euler)

Задачи

1. Нека функцията $f(x,\ y)$ е дефинирана в някоя околност на началото, нека в началото е хомогенна и нека степента ѝ е различна от нула. Докажете, че $f(0,\ 0)=0$.

Решение. За всички стойности на t, достатъчно близки до 1, имаме

$$f(t0,\ t0)=t^n f(0,\ 0),$$

откъдето $f(0,\ 0)=t^n f(0,\ 0)$ и най-сетне $(1-t^n)\,f(0,\ 0)=0$.

2. Докажете, че тъждеството на Ойлер е в сила (при съответните предположения) и за хомогенни функции, които зависят от повече от два аргумента.

3. Проверете чрез директно пресмятане на производните, че е в сила тъждеството на Ойлер за следните хомогенни функции:

$$u=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz,$$

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$z=\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$z=x^n f\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$z=\sin\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$u=\frac{x}{y}\,e^{\frac{x}{z}}.$$

§ 10. Тотален диференциал

Нека функцията $z=f(x,\ y)$ е диференцуема както частно спрямо x, така и частно спрямо y в някоя точка. Под тотален диференциал dz на функцията z в тази точка разбираме линейната комбинация

(1) $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\lambda+\frac{\partial z}{\partial y}\mu,$$

където стойностите на частните производни са пресметнати в разглежданата точка (макар че това изрично не е посочено в равенството (1), а стойностите на параметрите λ и μ се избират едни и същи, както и да избираме точката, по отношение на която пресмятаме тоталния диференциал, и както и да избираме функцията, чийто тотален диференциал търсим. Ние обаче си запазваме правото да им даваме такива стойности, каквито желаем.

Специално за функцията $f(x,\ y)=x$ получаваме

$$dx=1\,\lambda+0\mu=\lambda.$$

Аналогично при $f(x,\ y)=y$ намираме

$$dy=\mu.$$

Като се възползуваме от това, че стойностите на параметрите λ и μ се избират едни и същи за всички функции, получаваме

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Понятието тотален диференциал може, разбира се, да се въведе и за функции, които зависят от произволен брой аргументи. Така под тотален диференциал dz на функцията

$$z=f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$$

се разбира линейната комбинация

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}\lambda_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}\lambda_2+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\lambda_n,$$

където множителите $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\ \lambda_n$ се избират независимо от разглежданата точка и независимо от разглежданата функция. Като изберем специалната функция $z=x_k$, получаваме $dx_k=\lambda_k$, което ни дава право да пишем

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n,$$

като при това ние се ползуваме от обстоятелството, че се съгласихме да даваме на множителите λ_k едни и същи стойности за всички функции.

Правилата за смятане с тотални диференциали са съвсем аналогични на правилата за смятане с диференциали на функции, които зависят само от един аргумент. Така например, ако $z=u+v$, то

(2) $$dz=du+dv,$$

където двете функции u и v зависят от n аргумента $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$. Доказателството на формулата (2) може да се извърши така:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}\lambda_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\lambda_2+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\lambda_n=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\lambda_1+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\lambda_2+\cdots+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}+\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)\lambda_n=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\lambda_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\lambda_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\lambda_n\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\lambda_1+\frac{\partial v}{\partial x_2}\lambda_2+\cdots+\frac{\partial v}{\partial x_n}\lambda_n\right)=du+dv.$$

Аналогично се доказва, че

$$d(u-v)=du-dv,$$

$$d(uv)=vdu+udv,$$

$$d\frac{u}{v}=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

$$df(u)=f'(u)\,du \text{ и пр.}$$

Ще споменем по-специално следното обобщение на правилото за диференциране на функция от функция. Ако

$$z=f(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

където функциите u_i, $i=1, 2, \ldots, n$, зависят от k аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то при предположенията, при които е в сила теоремата за диференциране на съставни функции,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial z}{\partial u_2}du_2+\cdots+\frac{\partial z}{\partial u_n}du_n.$$

Извършете сами доказателството, като си послужите с теоремата за диференциране на съставни функции.

Читателят знае как се намират частните производни на една функция, която зависи от няколко аргумента. Ако се търсят всичките първи частни производни, то ние можем да решим тази задача, като диференцираме функцията частно спрямо всеки един от аргументите. Понятието тотален диференциал ни дава възможност да решим тази задача с едно единствено диференциране. Ние ще изясним с един пример как може да се направи това. Да разгледаме например функцията

$$z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\ x\neq 0.$$

Правилата, които изведохме преди малко за смятане с тотални диференциали, ни дават

$$dz=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}d\frac{y}{x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}=$$

$$=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Като вземем пред вид, че

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

намираме

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Ще се възползуваме сега от свободата да избираме, както желаем, константите dx и dy. Ако изберем $dx=1$, $dy=0$, получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Ако изберем $dx=0$, $dy=1$, намираме

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

По този начин тоталният диференциал ни позволи да намерим едновременно двете частни производни $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Задачи

1. Намерете с помощта на тоталния диференциал частните производни спрямо x и y на следните функции:

а) $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

Отг. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

б) $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$.

Отг. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$.

с) $z=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$.

2. Намерете с помощта на тоталния диференциал частните производни спрямо x и z на следните функции:

а) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

б) $u=\frac{xyz}{x+y+z}$;

с) $u=\sin\sqrt{\frac{x+z}{x-y}}$.

§ 11. Частни производни от по-висок ред

Частните производни f'_x и f'_y на една функция $z=f(x, y)$ на две независими променливи са също функции на две независими променливи (дефинирани, разбира се, само в онези точки, в които функцията $f(x, y)$ притежава тези частни производни), поради което ние бихме могли да поставим въпроса за съществуване или несъществуване на частните производни на f'_x и f'_y. Частната производна на f'_x спрямо x се означава със знака f''_{xx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (четете — де две зет де икс квадрат), а частната производна на f'_x спрямо y се означава със знака f''_{xy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (четете — де две зет де икс де игрек). Ако искаме да посочим изрично, че пресмятането на една производна, например f''_{xx}, се извършва в точката (x_0, y_0), ще пишем $f''_{xx}(x_0, y_0)$ или $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0)$. По-точно под $f''_{xx}(x_0, y_0)$ се разбира производната $\varphi'(x_0)$ на функцията

$$\varphi(\xi)=f'_x(\xi, y_0).$$

Аналогично се дефинират символите f''_{yx}, f''_{yy}. Така например символът f''_{yx} означава производната, която получаваме, като диференцираме f спрямо y и след това диференцираме f''_y спрямо x.

Аналогично се дефинират частните производни от по-висок ред. Така под $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ (или, както се пише понякога, f'''_{xxy}) разбираме $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]$.

С един пример ние ще изясним как става намирането на частните производни от по-висок ред. Да разгледаме функцията

$$z=xe^y+\operatorname{acr\,tg}\frac{y}{x} \text{ при } x \neq 0.$$

В този случай

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}+e^y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}+xe^y.$$

Оттук получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+e^y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+e^y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+xe^y$$

и пр.

Нека читателят обърне внимание на това, че в разгледания пример имаме $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Това явление не е случайно. Както ще видим по-късно, това равенство е изпълнено винаги, ако производните $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ са непрекъснати (дори, както ще покажем, достатъчно е едната от тях да бъде непрекъсната; точната формулировка на условията, при които ще докажем тази теорема, ще бъде дадена на съответното място). Тук ще покажем с един пример, че условието за непрекъснатост, за което споменахме, е съществено. Ако то не е изпълнено, може да се случи двете производни $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ да имат различни стойности. В това ще се убедим с един пример. Да разгледаме функцията $f(x, y)$, дефинирана в цялата равнина по следния начин:

$$f(x, y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ при } x^2+y^2 \neq 0$$

и

$$f(0, 0)=0.$$

Да разгледаме отношението

$$\frac{f(h, y)-f(0, y)}{h}$$

при $h \neq 0$. Като вземем пред вид, че $f(0, y)=0$ при всички стойности на y (включително и в точката $y=0$), намираме

$$\frac{f(h, y)-f(0, y)}{h}=\frac{f(h, y)}{h}.$$

Като вземем още пред вид, че $h \neq 0$, получаваме

$$f(h, y)=hy\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2},$$

откъдето

$$\frac{f(h, y)-f(0, y)}{h}=y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}.$$

Това ни дава право да заключим, че

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,\ y)-f(0,\ y)}{h}=-y$$

както при $y\neq 0$, така и при $y=0$. С това ние установихме съществуването на производната $f'_x(0,\ y)$ и показахме, че

(1) $$f'_x(0,\ y)=-y.$$

Аналогично се показва, че

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x,\ k)-f(x,\ 0)}{k}=\lim_{k\to 0}x\frac{x^2-k^2}{x^2+k^2}=x,$$

което ни дава

(2) $$f'_y(x,\ 0)=x$$

при всички стойности на x (включително и $x=0$).

Равенствата (1) и (2) ни дават

$$f''_{xy}(0,\ 0)=-1,$$
$$f''_{yx}(0,\ 0)=1,$$

т. е.

$$f''_{xy}(0,\ 0)\neq f''_{yx}(0,\ 0).$$

В разгледания пример двете частни производни f''_{xy} и f''_{yx} са прекъснати в началото. И наистина при $\xi\neq 0$ имаме

$$f'_x(\xi,\ \eta)=\eta\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}+\frac{4\xi\eta^3}{(\xi^2+\eta^2)^2},$$

откъдето намираме

$$f''_{xy}(\xi,\ 0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'_x(\xi,\ k)-f'_x(\xi,\ 0)}{k}=\lim_{k\to 0}\left(\frac{\xi^2-k^2}{\xi^2+k^2}+\frac{4\xi^2k^2}{(\xi^2+k^2)^2}\right)=1,$$

т. е.

$$\lim_{\xi\to 0}f''_{xy}(\xi,\ 0)=1\neq f''_{xy}(0,\ 0),$$

защото, както видяхме, $f''_{xy}(0,\ 0)=-1$. Аналогично се установява прекъснатостта и на f''_{yx} в началото.

След тези примери ще докажем следната теорема за независимостта на резултата на диференцирането от реда, в който се извършва диференцирането:

Нека функцията $f(x,\ y)$ е дефинирана в някоя околност Δ на точката $(x_0,\ y_0)$, като във всяка точка от тази околност съществуват производните f'_x, f'_y и f''_{xy}. Ако производната f''_{xy} е непрекъсната в точката $(x_0,\ y_0)$, то в тази точка съществува и производната f''_{yx}, като при това

$$f''_{yx}(x_0,\ y_0)=f''_{xy}(x_0,\ y_0).$$

Преди да пристъпим към доказателството, нека отбележим, че в теоремата не се поставят никакви изисквания за непрекъснатост на производните f'_x, f'_y (иска се само тяхното съществуване във всяка точка на Δ). За производната f''_{xy} се предполага непрекъснатост само в точката $(x_0,\ y_0)$, обаче нейното съществуване се иска в цялата околност Δ. За производната f''_{yx} пък въобще не се правят никакви предположения. Така например ние не предполагаме съществуването на производната f''_{yx} в точката $(x_0,\ y_0)$, а ще докажем това.

След тези предварителни бележки преминаваме към доказателството.

За да фиксираме идеите, нека си мислим, че околността Δ е квадратна със страни, успоредни на съответните координатни оси, и нека дължината на страната на тази околност е 2δ (разбира се, разсъжденията протичат без всякакви затруднения и тогава, когато околността Δ е кръгова). Образуваме си помощната функция*

$$\varphi_k(x)=f(x,\ y_0+k)-f(x,\ y_0),$$

където $k\neq 0$ и $|k|<\delta$. Тази функция е дефинирана и диференцуема при $|x-x_0|<\delta$, защото функцията $f(x,\ y)$ е диференцуема частно спрямо x във всички точки на околността Δ. Очевидно имаме

$$\varphi'_k(x)=f'_x(x,\ y_0+k)-f'_x(x,\ y_0).$$

---

* При съставянето на тази функция ние се ръководим от следните съображения. Дадено е, че съществува производната $f''_{xy}(x_0,\ y_0)$. Обаче

$$f''_{xy}(x_0,\ y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'_x(x_0,\ y_0+k)-f'_x(x_0,\ y_0)}{k}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0+k)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0+h,\ y_0)-f(x_0,\ y_0+k)+f(x_0,\ y_0)}{h}\right].$$

Изразът

$$\frac{f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0+h,\ y_0)-f(x_0,\ y_0+k)+f(x_0,\ y_0)}{h},$$

до който достигнахме, представлява диференчното частно на функцията

$$\varphi_k(x)=f(x,\ y_0+k)-f(x,\ y_0),$$

която образувахме в нашето доказателство.

Като приложим към функцията $\varphi_k(x)$ теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$\varphi_k(x_0+h)-\varphi_k(x_0)=h\varphi_k'(x_0+\theta h)=$$
$$=h[f_x'(x_0+\theta h,\ y_0+k)-f_x'(x_0+\theta h,\ y_0)],$$

където $0<\theta<1$. Засега фиксираме h и k. С това добиваме право да разглеждаме и θ като фиксирано. Прилагаме теоремата за крайните нараствания към функцията

$$\psi(y)=f_x'(x_0+\theta h,\ y)$$

(където θ е фиксирано по казания по-горе начин). Ние можем да приложим теоремата за крайните нараствания, защото по предположение функцията $f(x,\ y)$ е диференцуема частно спрямо y във всички точки на околността Δ и следователно функцията $\psi(y)$ е също диференцуема. Това ни дава

$$\psi(y_0+k)-\psi(y_0)=k\psi'(y_0+\theta_1 k),\ 0<\theta_1<1,$$

или

$$f_x'(x_0+\theta h,\ y_0+k)-f_x'(x_0+\theta h,\ y_0)=kf_{xy}''(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k),$$

откъдето

$$\varphi_k(x_0+h)-\varphi_k(x_0)=hkf_{xy}''(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k). \tag{1}$$

Ние предположихме обаче, че смесената производна f_{xy}'' е непрекъсната в точката $(x_0,\ y_0)$. Това ни позволява да твърдим, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число η по такъв начин, че при $|h|<\eta$ и $|k|<\eta$ да имаме

$$|f_{xy}''(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k)-f_{xy}''(x_0,\ y_0)|<\varepsilon,$$

а следователно и

$$\left|\frac{1}{h}\left[\frac{\varphi_k(x_0+h)}{k}-\frac{\varphi_k(x_0)}{k}\right]-f_{xy}''(x_0,\ y_0)\right|<\varepsilon,$$

ако $h\neq 0$ и $k\neq 0$, както се вижда това от равенството (1). Да извършим в последното неравенство граничния преход $k\to 0$ при фиксирано h. Като вземем пред вид, че

$$\lim_{k\to 0}\frac{\varphi_k(x_0+h)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0+h,\ y_0)}{k}=f_y'(x_0+h,\ y_0),$$
$$\lim_{k\to 0}\frac{\varphi_k(x_0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)}{k}=f_y'(x_0,\ y_0),$$

намираме

$$\left|\frac{f_y'(x_0+h,\ y_0)-f_y'(x_0,\ y_0)}{h}-f_{xy}''(x_0,\ y_0)\right|\leq\varepsilon.$$

Този резултат ни учи, че отношението

$$\frac{f_y'(x_0+h,\ y_0)-f_y'(x_0,\ y_0)}{h}$$

има граница при $h\to 0$ и че неговата граница е $f_{xy}''(x_0,\ y_0)$. С други думи, функцията $f_y'(x,\ y_0)$ е диференцуема в точката x_0 и производната ѝ в тази точка е равна на $f_{xy}''(x_0,\ y_0)$, т. е. производната $f_{yx}''(x_0,y_0)$ съществува и е равна на $f_{xy}''(x_0,\ y_0)$.

Внимателният читател ще забележи, че в изложеното доказателство се използва съществуването на производната $f_y'(x,\ y)$ само при $y=y_0$. По такъв начин би било достатъчно, когато формулирахме теоремата, да поискаме производната $f_y'(x,\ y)$ да съществува само в онези точки на Δ, чиято ордината е y_0.

Прилагайки няколко пъти доказаната теорема, можем да докажем, че и при производните от по-висок ред резултатът не зависи от реда, в който извършваме диференцирането, стига съответните частни производни да са непрекъснати. За пример ще покажем, че

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2},$$

като предположим, че всичките частни производни на функцията до трети ред включително съществуват и са непрекъснати в някои околност на разглежданата точка. Като приложим няколко пъти доказаната преди малко теорема, получаваме

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}.$$

Ние предполагахме (за улеснение) непрекъснатостта на всичките частни производни до трети ред. Разбира се, толкова много нямаше нужда да се предполага. Изискванията за непрекъснатост могат да се намалят. Това може да стане по различни начини. Покажете един такъв начин.

Всичко това, което изложихме в този параграф, се обобщава без затруднения и за случая, когато имаме функция, която зависи от произволен брой аргументи.

Задачи

1. Проверете с непосредствено пресмятане на частните производни, че е в сила равенството $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ за следните функции:

$$z=x^y,$$
$$z=xe^{xy}.$$

В следните задачи се иска функциите φ и ψ да бъдат диференцуеми достатъчен брой пъти.

2. Покажете, че функцията $z=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$ удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

3. Покажете, че функцията $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворява уравнението

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

4. Покажете, че функцията $z=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$ удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

5. Покажете, че функцията $z=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+y^{-n}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворява уравнението

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=n^2 z.$$

§ 12. Производни от по-висок ред на съставни функции

Нека

$$z=F(u, v),$$

където

$$u=f(t), \quad v=g(t).$$

В този случай z е функция на t, която зависи от t посредством u и v. Ние знаем как се намира производната на тази съставна функция, когато са налице условията, при които изведохме правилото за диференциране на съставни функции. Това правило ни дава

$$z'=\frac{\partial F}{\partial u}u'+\frac{\partial F}{\partial v}v'.$$

С помощта на това правило ние можем да намерим и производните от по-висок ред. Така например

$$z''=\left(\frac{\partial F}{\partial u}u'\right)'+\left(\frac{\partial F}{\partial v}v'\right)'=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)'u'+\frac{\partial F}{\partial u}u''+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)'v'+\frac{\partial F}{\partial v}v''=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}u'+\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}v'\right)u'+\frac{\partial F}{\partial u}u''+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}u'+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}v'\right)v'+\frac{\partial F}{\partial v}v'',$$

откъдето намираме при предположение, че смесените производни са равни помежду си,

$$z''=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}u'^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}u'v'+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}v'^2+\frac{\partial F}{\partial u}u''+\frac{\partial F}{\partial v}v''.$$

След като сме намерили втората производна, можем да намерим третата производна, като диференцираме още веднъж:

$$z'''=\left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}u'+\frac{\partial^3 F}{\partial u^2 \partial v}v'\right)u'^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}u'u''+$$
$$+2\left(\frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v \partial u}u'+\frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2}v'\right)u'v'+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}(u''v'+u'v'')+$$
$$+\left(\frac{\partial^3 F}{\partial v^2 \partial u}u'+\frac{\partial^3 F}{\partial v^3}v'\right)v'^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}v'v''+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}u'+\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}v'\right)u''+\frac{\partial F}{\partial u}u'''+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial u}u'+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}v'\right)v''+\frac{\partial F}{\partial v}v'''$$

и пр.

С оглед на нашите нужди ще разгледаме специално случая, когато функциите u и v са линейни, т. е. когато те имат вида

$$u=a+ht,$$
$$v=b+kt.$$

В такъв случай при съответните предположения за диференцуемост на функцията $F(u, v)$ и за непрекъснатост на нейните частни производни получаваме последователно:

$$z'=\frac{\partial F}{\partial u}h+\frac{\partial F}{\partial v}k,$$

$$z''=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}h+\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}k\right)h+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial u}h+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}k\right)k=$$
$$=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}h^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}hk+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}k^2,$$

$$z''' = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} h + \frac{\partial^3 F}{\partial u^2 \partial v} k\right) h^2 + 2\left(\frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v \partial u} h + \frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2} k\right) hk +$$

$$+ \left(\frac{\partial^3 F}{\partial v^2 \partial u} h + \frac{\partial^3 F}{\partial v^3} k\right) k^2 = \frac{\partial^3 F}{\partial u^3} h^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial u^2 \partial v} h^2 k + 3\frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2} hk^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial v^3} k^3,$$

. . . . . .

$$z^{(n)} = \frac{\partial^n F}{\partial u^n} h^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n F}{\partial u^{n-1} \partial v} h^{n-1} k + \binom{n}{2} \frac{\partial^n F}{\partial u^{n-2} \partial v^2} h^{n-2} k^2 + \ldots + \frac{\partial^n F}{\partial v^n} k^n.$$

Този резултат ще записваме често символично по следния начин:

$$z^{(n)} = \left(\frac{\partial}{\partial u} h + \frac{\partial}{\partial v} k\right)^n F.$$

Задачи

1. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до n-ти ред включително в някоя околност на точката (x_0, y_0). Докажете, че ако функцията $f(x, y)$ е хомогенна от степен k в точката (x_0, y_0), то е изпълнено равенството

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} x_0 + \frac{\partial}{\partial y} y_0\right)^n f(x_0, y_0) = k(k-1)\ldots(k-n+1) f(x_0, y_0).$$

Упътване. Намерете производната $\varphi^{(n)}(1)$ на функцията

$$\varphi(t) = f(x_0 t, y_0 t)$$

и използувайте, че

$$\varphi(t) = t^k f(x_0, y_0).$$

2. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до $n+1$-ви ред включително в някоя околност на точката (x_0, y_0), като всичките производни от ред $n+1$ са равни на нула в тази околност. Докажете, че $f(x, y)$ е полином на x и y в разглежданата околност, степента на който не надминава n, т. е. че $f(x, y)$ може да се представи във вида

$$f(x, y) = \sum\sum_{k+l \leq n} a_{kl} \cdot x^k y^l,$$

където a_{kl} са константи, а индексите k и l приемат всевъзможни цели неотрицателни стойности, чиято сума не надминава n.

Упътване. Фиксирайте една точка (x, y) от разглежданата околност и образувайте помощната функция

$$\varphi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt),$$

където

$$h = x - x_0, \; k = y - y_0.$$

Покажете, че във формулата на Тейлор

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + R_n$$

остатъчният член

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta), 0 < \theta < 1,$$

е равен на нула, като вземете пред вид, че

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Покажете, че $\varphi^{(m)}(0)$ е полином на x и y, степента на който не надминава m, като се послужите с формулата

$$\varphi^{(m)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^m f(x_0, y_0).$$

Вземете най-сетне под внимание, че

$$\varphi(1) = f(x, y).$$

§ 13. Тотални диференциали от по-висок ред

Ние дефинирахме тоталния диференциал dz на една функция $z = f(x, y)$ с помощта на равенството

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

където dx и dy са константи. Тоталният диференциал на функцията dz се нарича втори тотален диференциал и се означава със символа $d^2 z$. Така при съответните предположения за диференцуемост на функцията $f(x, y)$ и за непрекъснатост на нейните частни производни, като вземем пред вид, че dx и dy са константи, намираме

$$d^2 z = d(dz) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)\right] dx + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)\right] dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Аналогично получаваме

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3,$$

. . . . . .

$$d^n z = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \ldots + \binom{n}{n} \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n.$$

Този резултат ще записваме символично по следния начин:

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f.$$

По-рано имахме случай да видим как първият тотален диференциал можеше да се използува за пресмятане на първите производни. Сега ще покажем с един пример как тоталните диференциали от по-висок ред ще могат да се използуват за пресмятане на производните от по-висок ред. Нека

$$z=y^2e^x.$$

В такъв случай

$$dz=2ye^x\,dy+y^2e^x dx,$$

$$d^2z=2e^x\,dy^2+2ye^x\,dx\,dy+2ye^x\,dy\,dx+y^2e^x\,dx^2 \text{ или}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=y^2e^x\,dx^2+4ye^x\,dx\,dy+2e^x\,dy^2.$$

В последното равенство ние разполагаме със свободата да избираме dx и dy произволно. Ще фиксираме dy. По такъв начин получаваме едно равенство между два полинома на dx, което е валидно при всички стойности на dx. Като се възползуваме от принципа за сравняване на коефициентите при полиномите, получаваме, като положим $dy=1$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ye^x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2e^x.$$

Задачи

1. Намерете с помощта на тоталните диференциали всички частни производни от втори ред на функциите

$$z=xe^{xy},$$

$$z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

2. Намерете с помощта на тоталните диференциали всички частни производни от трети ред на функциите

$$z=x^3e^y,$$

$$z=\sin(x+y).$$

3. Намерете с помощта на тоталните диференциали всички частни производни от n-ти ред на функциите

$$z=e^{ax+by}$$

$$z=xe^y.$$

§ 14. Тейлоров ред при функции на няколко независими променливи

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до $n+1$-ви ред включително в някое отворено точково множество M. Непрекъснатостта на самата функция не се предполага. Нека затворената отсечка

$$[(x_0, y_0), (x_0+h, y_0+k)]$$

изцяло лежи в M. Това значи, че всичките точки с координати

$$(x_0+th, y_0+tk),$$

където t се мени в затворения интервал $[0, 1]$, принадлежат на M. При тези предположения е в сила равенството

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(x_0, y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x_0, y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x_0, y_0)+R_n,$$

където

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

и числото θ е избрано по подходящ начин в отворения интервал $(0, 1)$. За да докажем това, образуваме помощната функция

$$\varphi(t)=f(x_0+ht, y_0+kt).$$

Тази функция е дефинирана и $n+1$ пъти диференцуема в затворения интервал $[0, 1]$, както това се вижда от теоремата за диференциране на съставни функции. Въз основа на това ние можем да приложим към функцията $\varphi(t)$ формулата на Тейлор, което ни дава

$$(1)\qquad \varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)+R_n,$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta),\ 0<\theta<1.$$

Като се възползуваме от правилото за диференциране на съставни функции, получаваме

$$\varphi^{(m)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^m f(x_0, y_0),\ m=1, 2, \ldots, n,$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k).$$

Като вземем пред вид още, че

$$\varphi(1)=f(x_0+h, y_0+k) \text{ и } \varphi(0)=f(x_0, y_0),$$

от равенството (1) намираме

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(x_0,\ y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x_0,\ y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x_0,\ y_0)+R_n,$$

където

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k).$$

При горните разсъждения ние предполагахме, че частните производни на $f(x, y)$ са непрекъснати в M, обаче нищо не предполагахме за непрекъснатостта на самата функция $f(x, y)$. Не е трудно да се убедим обаче, че от съществуването и непрекъснатостта на първите производни следва непрекъснатостта и на $f(x, y)$. И наистина нека (x_0, y_0) е коя да е точка от M. Тъй като множеството M е отворено, точката (x_0, y_0) е вътрешна за M и следователно точките

$$(x_0+th,\ y_0+tk),$$

където $0\leqq\theta\leqq 1$, ще принадлежат на M, щом $|h|$ и $|k|$ са достатъчно малки. Използуваме формулата на Тейлор при $n=0$

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=$$

$$=f(x_0,\ y_0)+hf'_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k),$$

където $0<\theta<1$. Оттук се вижда веднага непрекъснатостта на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0), защото, ако оставим точката $(x_0+h,\ y_0+k)$ да описва произволна редица от точки, клоняща към $(x_0,\ y_0)$, членовете на която принадлежат на M, съответната редица от стойностите на

$$f(x_0+h,\ y_0+k)$$

ще клони към $f(x_0,\ y_0)$.

В заключение ще споменем, че теоремата на Тейлор при $n=0$, с която си послужихме сега, се нарича често теорема за крайните нараствания при функции на няколко променливи.

§ 15. Максимум и минимум при функции на две независими променливи

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в някое точково множество D и нека (x_0, y_0) е една вътрешна точка за това множество. Казваме, че функцията $f(x, y)$ притежава локален максимум в точката (x_0, y_0), ако в някоя околност на тази точка е изпълнено неравенството

$$f(x,\ y)\leqq f(x_0,\ y_0).$$

Казваме, че локалният максимум е строг, ако в някоя околност на точката (x_0, y_0) е изпълнено равенството

$$f(x,\ y)=f(x_0, y_0)$$

само при $x=x_0$ и $y=y_0$. Ако пък в някоя околност на точката (x_0, y_0) е изпълнено неравенството

$$f(x,\ y)\geqq f(x_0,\ y_0),$$

казваме, че функцията $f(x, y)$ притежава локален минимум в тази точка. Казваме, че този локален минимум е строг, ако в някоя околност на точката (x_0, y_0) равенството се достига само в точката (x_0, y_0). Ние и тук често ще си служим с термина локален екстремум, както правихме това, когато разглеждахме функции на една променлива.

Ако една функция $f(x, y)$ е диференцуема както частно спрямо x, така и частно спрямо y в една вътрешна точка (x_0, y_0) от дефиниционната си област и ако тази функция притежава в точката (x_0, y_0) локален екстремум, то двете частни производни f_x и f_y имат стойност нула в разглежданата точка.

Преди да пристъпим към доказателството, нека обърнем внимание на това, че в дефиницията на понятието екстремум не се иска съществуването на частните производни. Така например функцията $\varphi(x, y)$, дефинирана с равенството

$$\varphi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

при всички стойности на x и y, притежава минимум в началото на координатната система, защото $\varphi(x, y)\geqq 0$, но $\varphi(0, 0)=0$. Въпреки това тази функция не притежава в началото например частна производна спрямо x, защото функцията

$$\varphi(x,\ 0)=\sqrt{x^2}=|x|,$$

както знаем, не е диференцуема в точката $x=0$. В теоремата, която предстои да докажем, се иска обаче от функцията $f(x, y)$ не само да притежава локален екстремум в точката (x_0, y_0), но и да има частни производни в тази точка. Последното условие се налага, за да има въобще смисъл да се питаме каква е стойността на тези частни производни в точката (x_0, y_0).

И така нека функцията $f(x, y)$ има локален екстремум в една вътрешна точка (x_0, y_0) от дефиниционната си област и нека в тази точка съществуват двете частни производни f_x и f_y. Трябва да докажем, че

$$f_x(x_0,\ y_0)=0 \text{ и } f_y(x_0,\ y_0)=0.$$

Ние ще извършим доказателството за случая, когато функцията $f(x, y)$ притежава локален максимум. Случаят, когато имаме локален

минимум, се разглежда по същия начин. Щом функцията $f(x, y)$ притежава локален максимум в точката (x_0, y_0), може да се намери положително число δ по такъв начин, че за всички точки от околността

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta$$

да е изпълнено неравенството

$$f(x, y)\leqq f(x_0, y_0).$$

Специално, ако изберем $y=y_0$, получаваме

$$f(x, y_0)\leqq f(x_0, y_0)$$

при $|x-x_0|<\delta$, което ни учи, че функцията

$$\varphi(x)=f(x, y_0)$$

има локален максимум в точката $x=x_0$. Функцията $\varphi(x)$ обаче зависи само от един аргумент и е диференцуема в точката x_0 (последното не означава в същност нищо друго освен това, че функцията $f(x, y)$ е диференцуема частно спрямо x в точката (x_0, y_0)). Като се възползуваме от това, което знаем за максимумите и минимумите на функциите, които зависят от един аргумент (вж. § 2, глава IV от част II), получаваме

$$\varphi'(x_0)=0$$

или, което е същото,

$$f'_x(x_0, y_0)=0.$$

Аналогично се доказва, че $f'_y(x_0, y_0)=0$.

С това ние получихме едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум на диференцуеми функции. Сега ще потърсим достатъчни условия.

Нека функцията $f(x, y)$ притежава непрекъснати частни производни поне до втори ред в някоя околност Δ на точката (x_0, y_0) и нека

$$f'_x(x_0, y_0)=0,\ f'_y(x_0, y_0)=0.$$

Ако при тези условия квадратичната форма на λ и μ

(1) $$f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda\mu+f''_{yy}(x_0, y_0)\mu^2$$

е положително дефинитна, функцията $f(x, y)$ има строг локален минимум в точката (x_0, y_0); ако ли пък квадратичната форма (1) е отрицателно дефинитна, функцията $f(x, y)$ има строг локален максимум.

Ще разгледаме само случая, когато квадратичната форма (1) е положително дефинитна. Случаят, когато тя е отрицателно дефинитна, се разглежда по същия начин. Имаме да докажем, че функцията $f(x, y)$ има строг локален минимум в точката (x_0, y_0). Да допуснем противното. В такъв случай във всяка околност на точката (x_0, y_0)

ще може да се намери поне една точка (x_0+h, y_0+k), различна от точката (x_0, y_0) за която

$$f(x_0+h, y_0+k)\leqq f(x_0, y_0).$$

Това ни дава възможност да изберем редица от точки

$$(x_0+h_1, y_0+k_1),\ (x_0+h_2, y_0+k_2), \ldots,\ (x_0+h_n, y_0+k_n), \ldots,$$

които са различни от точката (x_0, y_0) и които клонят към тази точка по такъв начин, че да имаме

(2) $$f(x_0+h_n, y_0+k_n)\leqq f(x_0, y_0).$$

От друга страна, формулата на Тейлор ни дава

$$f(x_0+h_n, y_0+k_n)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}\Big(f'_x(x_0, y_0)h_n+f'_y(x_0, y_0)k_n\Big)+$$
$$+\frac{1}{2!}\Big(f''_{xx}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n^2+2f''_{xy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n k_n+$$
$$+f''_{yy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)k_n^2\Big),$$

където $0<\theta_n<1$. По такъв начин, като вземем под внимание, че

$$f'_x(x_0, y_0)=0\quad f'_y(x_0, y_0)=0,$$

намираме

$$f(x_0+h_n, y_0+k_n)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{2!}\Big(f''_{xx}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n^2+$$
$$+2f''_{xy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n k_n+f''_{yy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)k_n^2\Big),$$

което заедно с неравенството (2) ни дава

(3) $$f''_{xx}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n^2+2f''_{xy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)h_n k_n+$$
$$+f''_{yy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)k_n^2\leqq 0.$$

Да положим

$$\frac{h_n}{\sqrt{h_n^2+k_n^2}}=\lambda_n\quad\text{и}\quad\frac{k_n}{\sqrt{h_n^2+k_n^2}}=\mu_n.$$

Това ние можем да направим, защото точката (x_0+h_n, y_0+k_n) е различна от точката (x_0, y_0) и следователно $h_n^2+k_n^2\neq 0$. В такъв случай очевидно

(4) $$\lambda_n^2+\mu_n^2=1,$$

а неравенството (3) добива вида

$$(5)\qquad f''_{xx}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)\lambda_n^2+2f''_{xy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)\lambda_n\mu_n+ +f''_{yy}(x_0+\theta_n h_n, y_0+\theta_n k_n)\mu_n^2\leqq 0.$$

От (4) получаваме

$$|\lambda_n|\leqq 1,\quad |\mu_n|\leqq 1,$$

т. е. двете редици

$$(6)\qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

$$(7)\qquad \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$$

са ограничени. Да изберем строго растяща редица от цели положителни числа

$$m_1<m_2<m_3<\ldots$$

по такъв начин, че двете подредици

$$\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \lambda_{m_3}, \ldots$$

$$\mu_{m_1}, \mu_{m_2}, \mu_{m_3}, \ldots$$

да бъдат сходящи. Това може да стане така: първо избираме от редицата (6) сходяща подредица

$$\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{k_3}, \ldots$$

а след това от редицата

$$\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \mu_{k_3}, \ldots$$

избираме сходяща подредица и означаваме с

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$

номерата на нейните членове. Да поставим m_n вместо n в равенството (4) и неравенството (5). По такъв начин получаваме

$$(8)\qquad \lambda_{m_n}^2+\mu_{m_n}^2=1,$$

$$(9)\qquad f''_{xx}(x_0+\theta_{m_n}h_{m_n}, y_0+\theta_{m_n}k_{m_n})\lambda_{m_n}^2+ +2f''_{xy}(x_0+\theta_{m_n}h_{m_n}, y_0+\theta_{m_n}k_{m_n})\lambda_{m_n}\mu_{m_n}+ +f''_{yy}(x_0+\theta_{m_n}h_{m_n}, y_0+\theta_{m_n}k_{m_n})\mu_{m_n}^2\leqq 0.$$

Да положим

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_{m_n}=\lambda_0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\mu_{m_n}=\mu_0$$

и да извършим граничен преход в (8) и (9). Така получаваме

$$\lambda_0^2+\mu_0^2=1,$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda_0^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda_0\mu_0+f''_{yy}(x_0, y_0)\mu_0^2\leqq 0,$$

което противоречи на допускането, че квадратичната форма (1) е положително дефинитна. С това е установено, че функцията $f(x, y)$ наистина има локален минимум в точката (x_0, y_0).

Ние знаем (вж. § 5, глава IV на част II), че ако

$$f''^2_{xy}(x_0, y_0)-f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0)<0,$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0)>0,$$

то квадратичната форма (1) е положително дефинитна, а ако

$$f''^2_{xy}(x_0, y_0)-f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0)<0,$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0)<0,$$

то тя е отрицателно дефинитна. Това ни дава възможност да формулираме получения резултат още така:

Ако функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати производни до втори ред в някоя околност на точката (x_0, y_0), ако

$$f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0$$

и

$$f''^2_{xy}(x_0, y_0)-f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0)<0,$$

то в точката (x_0, y_0) имаме локален екстремум; при $f''_{xx}(x_0, y_0)>0$ имаме локален минимум, а при $f''_{xx}(x_0, y_0)<0$ имаме локален максимум.

Ако функцията $f(x, y)$ има непрекъснати частни производни до втори ред в някоя околност на точката (x_0, y_0) и притежава локален минимум в тази точка, то квадратичната форма

$$g(\lambda, \mu)=f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda\mu+f''_{yy}(x_0, y_0)\mu^2$$

приема само неотрицателни стойности, каквито и да бъдат стойностите на λ и μ. За да докажем това, избираме произволно числата λ и μ и разглеждаме помощната функция

$$\varphi(t)=f(x_0+\lambda t, y_0+\mu t),$$

която е очевидно дефинирана за всички достатъчно малки стойности на t. По предположение функцията $f(x, y)$ има локален минимум в точката (x_0, y_0). Това ни дава основание да твърдим, че при всички достатъчно малки стойности на t

$$f(x_0+\lambda t, y_0+\mu t)\geqq f(x_0, y_0)$$

и следователно

$$\varphi(t)\geqq\varphi(0).$$

Последното неравенство ни учи, че функцията $\varphi(t)$ има локален минимум в точката $t=0$ и следователно $\varphi'(0)=0$. От това можем да заключим, че

$$\varphi''(0)\geqq 0.$$

И наистина, като се възползуваме от формулата на Тейлор

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{t}{1!}\varphi'(0)+\frac{t^2}{2!}\varphi''(\theta t),\ 0<\theta<1,$$

и вземем пред вид, че $\varphi'(0)=0$, при достатъчно малки, но различни от нула стойности на t получаваме

$$\varphi''(\theta t)-\frac{2}{t^2}[\varphi(t)-\varphi(0)]\geqq 0$$

и след като извършим граничния преход $t\to 0$, намираме $\varphi''(0)\geqq 0$. Като вземем пред вид, че

$$\varphi'(t)=f_x(x_0+\lambda t,\ y_0+\mu t)\lambda+f_y(x_0+\lambda t,\ y_0+\mu t)\mu,$$

$$\varphi''(t)=f''_{xx}(x_0+\lambda t,\ y_0+\mu t)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0+\lambda t,\ y_0+\mu t)\lambda\mu+$$
$$+f''_{yy}(x_0+\lambda t,\ y_0+\mu t)\mu^2,$$

при $t=0$ добиваме

$$f''_{xx}(x_0,\ y_0)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)\lambda\mu+f''_{yy}(x_0,\ y_0)\mu^2=\varphi''(0)\geqq 0.$$

С това нашето твърдение е доказано. Аналогично се установява, че ако функцията $f(x,\ y)$ има локален максимум в точката $(x_0,\ y_0)$ (и ако са изпълнени, разбира се, останалите условия), то

$$f''_{xx}(x_0,\ y_0)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)\lambda\mu+f''_{yy}(x_0,\ y_0)\mu^2\leqq 0.$$

Тези разсъждения не ни дават право обаче да заключим, че квадратичната форма

$$g(\lambda,\ \mu)=f''_{xx}(x_0,\ y_0)\lambda^2+2f''_{xy}(x_0,\ y_0)\lambda\mu+f''_{yy}(x_0,\ y_0)\mu^2$$

е дефинитна, защото не е изключено да имаме $g(\lambda,\ \mu)=0$, без да имаме $\lambda=\mu=0$.

По този начин получихме още едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум, което се отнася обаче за двукратно диференцуеми функции, частните производни на които са непрекъснати. Този резултат ни дава право да твърдим, че при

$$f''^2_{xy}(x_0,\ y_0)-f''_{xx}(x_0,\ y_0)f''_{yy}(x_0,\ y_0)>0$$

функцията $f(x,\ y)$ сигурно няма локален екстремум в точката $(x_0,\ y_0)$, защото, както знаем, квадратичната форма

$$a\lambda^2+2b\lambda\mu+c\mu^2$$

не си мени знака само когато

$$b^2-ac\leqq 0.$$

В заключение нека подчертаем, че направените разсъждения не ни дават никакво указание за съществуване или несъществуване на екстремум в случая, когато

$$f''^2_{xy}(x_0,\ y_0)-f''_{xx}(x_0,\ y_0)f''_{yy}(x_0,\ y_0)=0.$$

В този случай може да имаме, но може и да нямаме екстремум. В това ще се убедим със следните примери:

1. Функцията

$$f(x,\ y)=x^4+y^4$$

има минимум в точката (0, 0). Въпреки това за нея

$$f''^2_{xy}(0,\ 0)-f''_{xx}(0,\ 0)f''_{yy}(0,\ 0)=0.$$

2. За функцията

$$f(x,\ y)=x^3-y^3$$

имаме

$$f''^2_{xy}(0,\ 0)-f''_{xx}(0,\ 0)f''_{yy}(0,\ 0)=0.$$

Въпреки това тя не притежава екстремум в началото, защото разликата

$$f(x,\ y)-f(0,\ 0)=x^3-y^3$$

си мени знака във всяка околност на началото.

Ще покажем с един пример как могат да се използуват резултатите от изследванията в този параграф за намиране на локални екстремуми на функции, които зависят от два аргумента.

Да разгледаме функцията

$$z=ax^2+2b\,xy+cy^2,$$

където $b^2-ac\neq 0$. В такъв случай

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2ax+2by,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2bx+2cy.$$

Тези производни се анулират само в началото, следователно в никоя друга точка не можем да имаме локален екстремум. От друга страна,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=2b,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2c.$$

Това ни дава

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\,(b^2-ac).$$

И така, ако $b^2-ac<0$, то разглежданата функция притежава локален екстремум в точката (0, 0). Когато $a<0$, имаме локален максимум, а когато $a>0$, имаме локален минимум. Ако $b^2-ac>0$, то разглежданата функция няма локален екстремум. В този случай повърхнината с уравнение

$$z=ax^2+2b\,xy+cy^2$$

е хиперболичен параболоид и точката (0, 0) е седловидна точка върху него.

Задачи

1. Намерете локалните екстремуми на функцията

$$z=x^3-y^3-3x+3y.$$

Отг. В точката $(1, -1)$ имаме локален минимум, а в точката $(-1, 1)$ — локален максимум.

2. Покажете, че функцията

$$z=2x^4+2y^4+4x^2y^2-16x+16y+1$$

има локален минимум в точката $(1, -1)$.

3. Намерете три неотрицателни числа x, y и z, сумата на които е равна на $a>0$, за които произведението xyz има най-голяма стойност.

Решение. Имаме да намерим най-голямата стойност на функцията

$$f(x, y)=xy(a-x-y),$$

където $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ и $x+y\leqq a$. Не е трудно да се покаже, че разглежданата функция има един локален максимум, и не е трудно да се намери къде се намира този локален максимум. С това обаче задачата съвсем няма да бъде решена, защото ние знаем, че един локален максимум не е задължен да представлява най-голямата от всичките стойности на функцията. Поради това ние ще разсъждаваме другояче. Областта, в която разглеждаме функцията, е ограничена и затворена и според една теорема на Вайерщрас има поне една точка, в която непрекъснатата функция $f(x, y)$ приема най-голяма стойност. Тази функция приема очевидно в някои точки от разглежданата област съществено положителни стойности. Така например $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}>0$

и точката $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ лежи в интересуващата ни област, защото $\frac{a}{3}>0$, $\frac{a}{3}+\frac{a}{3}<a$. Въз основа на казаното ние можем да твърдим, че най-голямата стойност на функцията $f(x, y)$ е също съществено положителна; тази най-голяма стойност се достига във вътрешна точка от разглежданата област, защото по контура имаме $f(x, y)=0$, както това читателят лесно ще провери. И така всяка точка (x, y), в която $f(x, y)$ има най-голяма стойност, е вътрешна за разглежданата област и следователно тя е точка на един локален максимум. От това заключаваме, че в разглежданата точка имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ay-2\,xy-y^2=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=ax-x^2-2\,xy=0.$$

Като вземем пред вид, че интересуващата ни точка е вътрешна и че следователно $x\neq 0$, $y\neq 0$, намираме

$$a-2x-y=0,$$

$$a-x-2y=0,$$

откъдето $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{a}{3}$. Максималната стойност на $f(x, y)$ е следователно

$$f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}.$$

4. Дадени са n точки (x_i, y_i), $i=1, 2, \ldots, n$, в равнината XOY и n положителни числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Да намерим точка (x, y), за която сумата

$$S=\sum_{i=1}^{n} m_i\,[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]$$

има най-малка стойност.

Отговор.

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

5. Да се докаже, че измежду всички правоъгълни паралелепипеди, вписани в дадена сфера, кубът има най-голям обем.

6. Измежду всички правоъгълни паралелепипеди с дадена пълна повърхнина да се намери онзи, който има най-голям обем.

7. Нека G е затворено и ограничено точково множество в едно пространство с n измерения, което има вътрешни точки. Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е непрекъсната функция в G, която притежава частни производни от първи ред спрямо всичките независими променливи във всички вътрешни точки на G. Ако $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е константа върху контура на G, то има поне една вътрешна за G точка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, в която

$$f'_{x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=f'_{x_2}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=\ldots=f'_{x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=0.$$

ГЛАВА II

НЕЯВНИ ФУНКЦИИ

§ 1. Основни понятия

Нека $F(x, y)$ е една функция и нека M е нейната дефиниционна област. Казваме, че функцията $\varphi(x)$ е една неявна функция, определена от уравнението

$$F(x, y)=0,$$

когато:

1) точката с координати $[x, \varphi(x)]$ се намира в дефиниционната област M на $F(x, y)$, както и да избираме x от дефиниционната област на $\varphi(x)$;

2) при всички стойности на x от дефиниционната област на $\varphi(x)$ е изпълнено равенството

$$F[x, \varphi(x)]=0.$$

Ние ще изясним смисъла на тази дефиниция с няколко примера. Да разгледаме функцията $F(x, y)$, дефинирана с условието

$$F(x, y)=x^2+y^2-1$$

в цялата равнина. В такъв случай функцията $\varphi(x)$, дефинирана с равенството $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ при $-1 \leq x \leq 1$, е една неявна функция, която се определя от уравнението $F(x, y)=0$. И наистина точката с координати $[x, \varphi(x)]$ сигурно лежи в дефиниционната област на $F(x, y)$, защото функцията $F(x, y)$ е дефинирана в цялата равнина. Освен това при всички стойности на x, за които функцията $\varphi(x)$ е дефинирана, имаме

$$F(x, \varphi(x))=x^2+(\sqrt{1-x^2})^2-1=x^2+1-x^2-1=0.$$

Ние можем обаче да си образуваме и други функции, които се определят като неявни от същото уравнение $F(x, y)=0$. И наистина нека $\varepsilon(x)$ е една произволна функция, която е дефинирана в някое подмножество R на интервала $[-1, 1]$ и приема само стойностите $+1$ и -1. Всяка функция $\psi(x)$, дефинирана с равенството

$$\psi(x)=\varepsilon(x)\sqrt{1-x^2}$$

в множеството R, е една неявна функция, която се определя от уравнението $F(x, y)=0$, защото

$$F[x, \varphi(x)]=x^2+[\varepsilon(x)\sqrt{1-x^2}]^2-1=x^2+1-x^2-1=0.$$

Като друг пример може да ни послужи понятието обратна функция. И наистина нека $f(y)$ е една функция и нека $\varphi(x)$ е една нейна обратна функция. Читателят знае от дефиницията на понятието обратна функция, че при всички стойности на x от дефиниционната област на $\varphi(x)$ имаме

$$f[\varphi(x)]=x$$

или, което е същото,

$$x-f[\varphi(x)]=0,$$

като точката $\varphi(x)$ не напуска никой път дефиниционната област на $f(y)$.

Това обаче означава, че функцията $\varphi(x)$ е една неявна функция, която се определя от уравнението

$$x-f(v)=0.$$

Нека обърнем внимание на читателя, че далеч не всяко уравнение $F(x, y)=0$ определя неявни функции. Нека например при всички стойности на x и y имаме $F(x, y)=1$. В такъв случай на уравнението $F(x, y)=0$ не отговаря никаква неявна функция по простата причина, че $F(x, y)$ никъде не се анулира. Разбира се, в този пример бихме могли вместо константата 1 да поставим коя да е функция, която не приема стойност нула. И така на едно уравнение $F(x, y)=0$ може да не отговаря нито една неявна функция. Може обаче едно такова уравнение да определя дори безбройно много неявни функции.

Понятието неявна функция може да бъде обобщено. Така ние можем да въведем понятието неявна функция на произволен брой независими променливи. Това става по следния начин. Нека ни е дадено уравнението

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)=0. \tag{1}$$

Казваме, че функцията $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е една неявна функция, която отговаря на уравнението (1), когато за всички точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от дефиниционната област на $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е изпълнено равенството

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n))=0,$$

като при това точките $[x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ не напускат дефиниционната област на $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, когато точката $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се мени в дефиниционната област на $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Понятието неявна функция може да се обобщи още по-нататък, като вместо едно уравнение разглеждаме система от уравнения. За

простота ние ще разгледаме случая, когато ни са дадени две уравнения

$$(2)\qquad \begin{aligned} F(x, y, z)&=0,\\ G(x, y, z)&=0, \end{aligned}$$

които свързват x, y и z. Казваме, че двете функции

$$y=f(x),$$
$$z=g(x),$$

които са дефинирани в едно и също точково множество R, са неявни функции, отговарящи на системата (2), когато при всички стойности на x от R са изпълнени равенствата

$$F(x, f(x), g(x))=0,$$
$$G(x, f(x), g(x))=0,$$

като точката с координати $[x, f(x), g(x)]$ не напуска дефиниционните области на функциите $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$, когато x се мени в R.

Ние няма да изясняваме по-подробно как става дефинирането на неявни функции, когато броят на уравненията и когато броят на независимите променливи е произволен. Нека читателят сам обмисли подробностите.

§ 2. Диференциране на неявни функции, които зависят от един аргумент

В тоя параграф ще си поставим за задача да изясним принципите, върху които почива техниката на диференцирането на неявните функции. При това ние няма да формулираме точно условията, при които ще бъдат валидни нашите разсъждения. Читателят ще може сам да направи това, като се възползува от указанията, които ние ще дадем в края на параграфа.

Нека $y=f(x)$ е една неявна функция, която се определя от уравнението

$$F(x, y)=0.$$

Да разгледаме функцията*

$$\varphi(x)=F[x, f(x)].$$

* Ние често ще пишем $F(x, y)$ вместо $F[x, f(x)]$. Трябва да напомним в такъв случай, че y е кратко означение за $f(x)$, а не е независима променлива. При такова означение изразът $F(x, y)$ е една съставна функция на x, която зависи от x непосредствено и посредством y.

Ние можем да диференцираме тази функция по правилото за диференциране на съставни функции (разбира се, ако са изпълнени условията, при които установихме това правило). По такъв начин получаваме

$$\varphi'(x)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'.$$

От друга страна, $\varphi(x)$ е константа (нейната стойност е нула), защото $f(x)$ е една неявна функция, която се определя от уравнението $F(x, y)=0$. Оттук заключаваме, че $\varphi'(x)=0$ и следователно

$$(1)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0.$$

Като решим това уравнение относно y', намираме

$$y'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

ако, разбира се, $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$. По този начин ние намерихме един израз за производната y' на неявната функция $y=f(x)$.

Аналогично, пак като се ползуваме от правилото за диференциране на съставни функции, ние можем да намерим y''. Това може да стане по следния начин: като вземем пред вид, че $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ зависят от x непосредствено и посредством y, получаваме с помощта на правилото за диференциране на съставни функции

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y',$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y';$$

пресмятаме производната $\psi'(x)$ на функцията

$$\psi(x)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'$$

и получаваме

$$\psi'(x)=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\right)y'+\frac{\partial F}{\partial y}y''=$$
$$=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y'';$$

като имаме пред вид, че $\psi(x)$ е константа (равенството (1) ни учи, че $\psi(x)=0$), получаваме $\psi'(x)=0$ или, което е същото,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0. \tag{2}$$

От това равенство определяме y'', стига да имаме $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$. Аналогично можем да пресметнем y'''. За тази цел диференцираме двете части на равенството (2) спрямо x и получаваме

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}y'\right)+2\left[\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}y'\right]y'+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y''+$$
$$+\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}y'\right)y'^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot 2\,y'\,y''+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\right]y''+\frac{\partial F}{\partial y}y'''=0$$

или

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}y'+3\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}y'^3+3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\,y''+3\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y''+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial y}y'''=0.$$

Аналогично намираме y^{IV} и пр.

Разсъжденията, които направихме досега, се извършваха, без да се посочват условията за тяхната валидност. В случая, когато се търси първата производна на функцията $y=f(x)$ в точката x_0, ние можем да формулираме по следния начин една система от достатъчни условия, за да могат да се извършат пресмятанията, за които говорихме по-горе: за функцията $F(x, y)$ се иска да бъде дефинирана в някоя околност Δ на точката (x_0, y_0) където сме положили $y_0=f(x_0)$, да има частни производни F'_x и F'_y в Δ, които да бъдат непрекъснати в точката (x_0, y_0); за неявната функция $f(x)$, която е определена от уравнението $F(x, y)=0$, достатъчно е да искаме да бъде дефинирана в някоя околност на точката x_0 и да бъде диференцуема при $x=x_0$. В такъв случай правилото за диференциране на съставни функции ни дава

$$F'_x(x_0, y_0)+F'_y(x_0, y_0)f'(x_0)=0.$$

Ако искаме да делим с $F'_y(x_0, y_0)$, трябва да искаме още това число да бъде различно от нула.

Тези условия са само достатъчни за валидността на горните пресмятания. Те не са необходими.

Накрая ще отбележим, че ако производните F'_x и F'_y са непрекъснати не само в точката (x_0, y_0), но и в някоя околност на тази

точка и ако $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$, то не е нужно да се иска от функцията $f(x)$ да бъде диференцуема. Достатъчно е да се иска тази функция да бъде дефинирана в някоя околност на точката x_0 и непрекъсната в тази околност. От това вече следва нейната диференцуемост във всяка достатъчно малка околност D на точката x_0. И наистина нека x_1 е една точка от D. Ако положим

$$f(x_1+h)-f(x_1)=k \text{ и } f(x_1)=y_1,$$

получаваме с помощта на теоремата на Тейлор за функции на две променливи

$$F(x_1+h,\ y_1+k)=$$
$$=F(x_1,\ y_1)+F'_x(x_1+\theta h,\ y_1+\theta k)h+F'_y(x_1+\theta h,\ y_1+\theta k)\,k,$$

където $0<\theta<1$. Като вземем пред вид, че

$$F(x_1+h,\ y_1+k)=F(x_1,\ y_1)=0,$$

намираме

$$\frac{k}{h}=-\frac{F'_x(x_1+\theta h,\ y_1+\theta k)}{F'_y(x_1+\theta h,\ y_1+\theta k)}$$

или още

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}=-\frac{F'_x(x_1+\theta h,\ y_1+\theta k)}{F'_y(x_1+\theta h,\ y_1+\theta k)}, \tag{3}$$

тъй като

$$k=f(x_1+h)-f(x_1).$$

Да извършим в равенството (3) граничния преход $h\to 0$. В такъв случай от непрекъснатостта на $f(x)$ при $x=x_1$ заключаваме, че $k\to 0$. От друга страна, $F'_y(x_1, y_1)\neq 0$, стига околността D да е достатъчно малка, защото частната производна $F'_y(x, y)$ е непрекъсната и $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$. Като вземем под внимание това обстоятелство и се възползуваме от непрекъснатостта на частните производни F'_x и F'_y, заключаваме, че изразът

$$-\frac{F'_x(x_1+\theta h,\ y_1+\theta k)}{F'_y(x_1+\theta h,\ y_1+\theta k)}$$

притежава граница, когато $h\to 0$, и тази граница е

$$-\frac{F'_x(x_1,\ y_1)}{F'_y(x_1,\ y_1)}.$$

Полученият резултат ни дава право да твърдим, че отношението

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

също има граница, когато h клони към нула, т. е. функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_1 и

$$f'(x_1)=-\frac{F'_x(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}.$$

Задачи

1. Намерете y', като знаете, че y е една диференцуема функция на x, която удовлетворява уравнението

$$x^2+y^2=1.$$

З а б е л е ж к а. За да се убедим в съществуването на такива функции, достатъчно е да решим уравнението относно y. Така например функцията $y=\sqrt{1-x^2}$ има исканото свойство. Очевидно и $y=-\sqrt{1-x^2}$ е една такава функция. Не е трудно да се намерят в с и ч к и т е диференцуеми функции в отворения интервал $(-1, 1)$, които удовлетворяват уравнението

$$x^2+y^2-1=0.$$

Очевидно всяка такава функция може да се представи във вида

$$y=\varepsilon(x)\sqrt{1-x^2},$$

където функцията $\varepsilon(x)$ приема само стойностите 1 и -1. От друга страна,

$$\varepsilon(x)=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Като имаме пред вид, че функцията y е непрекъсната (защото е диференцуема), а функцията $\sqrt{1-x^2}$ е също непрекъсната и различна от нула в отворения интервал $(-1, 1)$, заключаваме, че и $\varepsilon(x)$ е една непрекъсната функция на x. Това ни дава право да заключим, че $\varepsilon(x)$ е константа. И наистина, ако допуснем, че има две точки x_1 и x_2, за които $\varepsilon(x_1)=1$ и $\varepsilon(x_2)=-1$, ще можем да заключим поради непрекъснатостта на $\varepsilon(x)$, че има поне една точка между x_1 и x_2, в която $\varepsilon(x)$ се анулира, нещо, което не е възможно, защото $\varepsilon(x)$ приема само стойностите 1 и -1. И така други диференцуеми функции освен $\sqrt{1-x^2}$ и $-\sqrt{1-x^2}$ няма в отворения интервал $(-1, 1)$, които да удовлетворяват уравнението $x^2+y^2-1=0$.

Р е ш е н и е. Като вземем пред вид, че

$$y=\varepsilon\sqrt{1-x^2},$$

където при всички стойности на x имаме или $\varepsilon=1$, или $\varepsilon=-1$, получаваме

$$y'=\frac{-\varepsilon x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y}.$$

Ние можем да намерим y' и без да решаваме уравнението $x^2+y^2-1=0$ относно y. За тази цел диференцираме израза

$$\varphi(x)=x^2+y^2-1,$$

като помним, че y е една функция на x и че $\varphi(x)$ е една константа. Това ни дава

$$\varphi'(x)=2x+2yy'=0,$$

откъдето

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

Този начин за намиране на производните на неявните функции се използува, когато не можем или не искаме да решаваме уравнението, което определя неявната функция.

2. Намерете y' за онези стойности на x, за които $y^2-ax\neq 0$, като знаете, че y е една диференцуема функция на x, която удовлетворява уравнението

$$x^3+y^3-3axy=0,\ a\neq 0.$$

З а б е л е ж к а. Такива функции има. За да покажем това, разглеждаме помощната функция

$$f(t)=\frac{3at}{1+t^3}$$

в кой да е краен и затворен интервал $[p, q]$, който не съдържа точките -1 и $2^{-\frac{1}{3}}$. Функцията $f(t)$ е дефинирана и диференцуема в този интервал (защото точката -1 не лежи в него) и производната

$$f'(t)=3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$$

е различна от 0 (защото точката $2^{-\frac{1}{3}}$ лежи извън от разглеждания интервал). От това заключаваме, че функцията $f(t)$ приема всяка своя стойност само веднъж (в противен случай от теоремата на Рол бихме заключили, че $f'(t)$ се анулира в интервала (p, q) което не е вярно) и следователно е обратима. Нека $g(x)$ е обратната функция на $f(t)$, т. е.

$$\frac{3ag(x)}{1+g^3(x)}=x.$$

Дефиниционната област на $g(x)$, както знаем, е един краен и затворен интервал и функцията $g(x)$ е диференцуема в него. От това заключаваме, че функцията

$$\varphi(x)=xg(x)$$

е също диференцуема в дефиниционната област на $g(x)$. За функцията $\varphi(x)$ не е трудно, да се провери, че удовлетворява уравнението

$$x^3+y^3-3axy=0,$$

като се вземе пред вид, че

$$\frac{3ag(x)}{1+g^3(x)}=x.$$

В дефиниционния интервал на $\varphi(x)$ сигурно има точки, за които $y^2-ax\neq 0$, защото системата

$$x^3+y^3-3axy=0,$$
$$y^2-ax=0$$

има само краен брой решения, както това се вижда например, като елиминираме x.

Р е ш е н и е. Диференцираме израза

$$F(x)=x^3+y^3-3axy,$$

като помним, че y е функция на x и че $F(x)$ е константа. Това ни дава

$$F'(x)=3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0.$$

Оттук намираме

$$y' = -\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.$$

Като вземем пред вид, че y е диференцуема функция на x и че

$$y^2-ax \neq 0,$$

заключаваме, че y' е също така диференцуема функция на x. Производната на y' можем да намерим например, като диференцираме $F'(x)$. Това ни дава

$$F''(x)=6x+6yy'^2+3y^2y''-3ay'-3ay'-3axy''=0.$$

Като заместим y' с равното му и вземем под внимание уравнението

$$x^3+y^3-3axy=0,$$

намираме

$$y''=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}.$$

Къде използувахме условието $y^2-ax \neq 0$?

3. Намерете y', като се знае, че y е диференцуема функция на x, определена от уравнението

$$-1+x^2e^x+x\sin y+\cos 2y=0.$$

Забележка. В съществуването на такава функция можем да се убедим, като решим разглежданото уравнение относно y.

4. Намерете y' и y'', като знаете, че y е диференцуема функция на x, която удовлетворява уравнението

$$x=y-\alpha\sin y,\ |\alpha|<1.$$

Забележка. Съществуването на такава функция може да се установи по следния начин. Нека $g(x)$ е една обратна функция на функцията

$$f(y)=y-\alpha\sin y.$$

Функцията $g(x)$ е дефинирана при всички стойности на x, защото $f(y)$ може да приема всяка стойност. Функцията $y=g(x)$ удовлетворява също така уравнението $x=f(y)$. Остава да покажем, че функцията $g(x)$ е диференцуема. Като вземем пред вид, че функцията

$$F(x, y)=x-y+\alpha\sin y$$

притежава непрекъснати частни производни спрямо x и y и че

$$F'_y=-1+\alpha\cos y<0,$$

заключаваме, че е достатъчно да покажем непрекъснатостта на $g(x)$, за да сме сигурни, че тази функция е диференцуема (нека обърнем внимание на това, че непрекъснатостта на функцията $g(x)$ не следва непосредствено от общата теорема, която ние доказахме по-рано за непрекъснатост на обратни функции).

Непрекъснатостта на функцията $g(x)$ може да се установи по следния начин:

$$x-x_0=f[g(x)]-f[g(x_0)]=[g(x)-g(x_0)]f'(\eta)=[g(x)-g(x_0)](1-\alpha\cos\eta),$$

където η е едно число, подходящо избрано между $g(x)$ и $g(x_0)$. Това ни дава

$$|g(x)-g(x_0)|=\left|\frac{x-x_0}{1-\alpha\cos\eta}\right|\leq\frac{|x-x_0|}{1-|\alpha|},$$

с което е установена непрекъснатостта на $g(x)$ в произволно избрана точка x_0.

5. Нека y е една диференцуема намаляваща функция, определена от уравнението

$$x^2+y^2=1 \text{ при } 0<x<1$$

(има ли такава?). Докажете, че

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0.$$

6. Нека y е една диференцуема намаляваща функция, определена при $0<x<1$ от уравнението

$$x^2y^2+x^2+y^2=1$$

(има ли такава?). Докажете, че

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

7. Нека $y=F(x)$ е една два пъти диференцуема функция, която е дефинирана в някоя околност на началото и удовлетворява уравнението

$$x^3+y^3-3axy=0,\ a\neq 0$$

(има ли такава функция?). Пресметнете $F'(0)$.

Упътване. За да се убедите в съществуването на такава функция, разгледайте помощната функция

$$f(t)=\frac{3at}{1+t^3}$$

в кой да е затворен интервал $[p, q]$, който не съдържа точките $t=-1$ и $t=2^{-\frac{1}{3}}$, обаче съдържа точката $t=0$. Покажете, че тази функция е обратима и обратната ѝ функция е диференцуема. Нека $g(x)$ е нейната обратна. Покажете, че функцията $g(x)$ е диференцуема поне два пъти. (Това ще бъде достатъчно за нашите нужди. Не е трудно да се види обаче, че тази функция е диференцуема дори безбройно много пъти.) За тази цел се възползувайте от равенството

$$\frac{3ag(x)}{1+g^3(x)}=x.$$

Покажете, че дефиниционният интервал на $g(x)$ съдържа началото на вътрешността си. Покажете най-сетне, че функцията $y=xg(x)$ удовлетворява уравнението

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

За да намерите y', диференцирайте последното уравнение. Това ще ви даде

$$x^2-ay+y'(y^2-ax)=0.$$

Оттук обаче все още не можем да определим y', защото $F(0)=0$ и следователно изразът y^2-ax се анулира при $x=0$. Ние все пак можем да намерим y'. За целта диференцирайте още веднъж. Това ще ви даде

$$2x-ay'+y'(2yy'-a)+y''(y^2-ax)=0.$$

Като вземете под внимание, че за $x=0$ имаме $y=0$, ще получите $F''(0)=0$. Сравнете със задача 2.

8. Намерете z'', като знаете, че y и z са две функции на x, които удовлетворяват уравненията

$$f(y, z)=0,$$
$$g(x, y)=0.$$

(Тук се предполага, че са налице всичките условия, при които можем да извършим интересуващите ни пресмятания. Така например предполага се, че функциите допускат производни, които ни трябват, и пр.).

Решение. С еднократно диференциране намираме

$$\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}y'=0. \tag{2}$$

Като диференцираме още веднъж, получаваме

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}z'\right)y'+\frac{\partial f}{\partial y}y''+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}z'\right)z'+\frac{\partial f}{\partial z}z''=0,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}y'+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}y'\right)y'+\frac{\partial g}{\partial y}y''=0$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}y'z'+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}z'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''+\frac{\partial f}{\partial z}z''=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial g}{\partial y}y''=0. \tag{4}$$

От уравненията (1), (2), (3) и (4) елиминираме y', z' и y'' и получаваме уравнение, от което определяме z''.

9. Намерете y'' и z'', като знаете, че y и z са функции на x, които удовлетворяват уравненията

$$F(x, y, z)=0,$$

$$G(x, y, z)=0.$$

(Тук се предполага, както и в предната задача, че са налице всичките условия, при които можем да извършим пресмятанията, които ни трябват.)

Решение. Като диференцираме един път уравненията, получаваме

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial z}z'=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}y'+\frac{\partial G}{\partial z}z'=0.$$

Като диференцираме още веднъж, намираме

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}z'^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}z'+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}y'z'+\frac{\partial F}{\partial y}y''+\frac{\partial F}{\partial z}z''=0,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}z'^2+2\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}y'+2\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial z}z'+2\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial z}y'z'+\frac{\partial G}{\partial y}y''+\frac{\partial G}{\partial z}z''=0.$$

Забележка. Сравнете с предната задача. В специалния случай, когато функцията $F(x, y, z)$ не зависи от x, а функцията $G(x, y, z)$ не зависи от z, получаваме задача 8. От това е ясно, че ние можем да получим решението на задача 8 от решението на задача 9, като поставим $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial G}{\partial z}=0$.

10. Нека y е една достатъчен брой пъти диференцуема функция на x, която удовлетворява уравнението

$$f(y)=x,$$

където функцията $f(y)$ също допуска достатъчен брой производни. Пресметнете y''' при предположение, че $f'(y)\neq 0$.

Забележка. Очевидно y е една обратна функция на функцията $f(y)$.

Решение. С последователно диференциране намираме

$$f'(y)y'=1,$$

$$f''(y)y'^2+f'(y)y''=0,$$

$$f'''(y)y'^3+3f''(y)y'y''+f'(y)y'''=0,$$

откъдето

$$y'=\frac{1}{f'(y)},$$

$$y''=-\frac{f''(y)}{f'^3(y)},$$

$$y'''=\frac{3f''^2(y)-f'(y)f'''(y)}{f'^5(y)}.$$

§ 3. Диференциране на неявни функции, които зависят от няколко аргумента

Нека $u=\varphi(x, y)$ е една функция на x и y, която удовлетворява уравнението

$$F(x, y, u)=0.$$

Като вземем пред вид, че функцията

$$f(x, y)=F[x, y, \varphi(x, y)]$$

е константа (нейната стойност е нула), получаваме с помощта на правилото за диференциране на съставни функции

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

От тези уравнения можем да определим $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, стига да имаме $\frac{\partial F}{\partial u}\neq 0$. Аналогично намираме

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

От тези уравнения можем да определим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, стига, както и по-горе, да имаме $\frac{\partial F}{\partial u}\neq 0$. Аналогично се пресмятат третите производни и пр.

Задачи

Забележка. В задачите, които следват, се предполага, че функциите, за които става дума, са такива, че е възможно да се изгърнат за тях интересуващите ни пресмятания. Така например ще се предполага (при все че ние пяма всеки път да казваме (това), че тези функции са достатъчен брой пъти диференцуеми и пр.

1. Намерете производните $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ на z, като знаете, че z е една функция на x и y, която удовлетворява уравнението

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(Има ли такава функция?)

Отговор.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2\,b^2\,z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2\,b^2\,z^3}.$$

2. Нека z е една функция на x и y, която удовлетворява уравнението

$$y=x\varphi(z)+\psi(z).$$

Покажете, че

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0. \tag{1}$$

Упътване. Покажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi}{x\varphi'+\psi'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x\varphi'+\psi'},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\varphi(2x\varphi'^2+2\varphi'\psi'-x\varphi\varphi''-\varphi\psi'')}{(x\varphi'+\psi')^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\varphi'(x\varphi'+\psi')-\psi''\varphi-x\varphi\varphi''}{(x\varphi'+\psi')^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x\varphi''+\psi''}{(x\varphi'+\psi')^3},$$

и заместете в уравнението (1).

3. Нека y е една функция на x и α, която удовлетворява уравнението

$$y=\alpha+x\varphi(y).$$

Докажете, че

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right],$$

където $u=u(y)$ е една функция на y.

Упътване. Извършете доказателството индуктивно по следния начин:

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)\right].$$

Преобразувайте израза

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right),$$

като се възползувате от тъждеството

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

при

$$F(y)=\varphi^n(y).$$

Верността на това тъждество се проверява с непосредствено диференциране така:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)=F'(y)u'\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+F(y)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=F'(y)u'\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial x}+F(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\alpha}.$$

След като е установено, че

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

разсъжденията се развиват по-нататък по следния начин:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u'\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}=u'\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

$$[1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y),\quad [1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial \alpha}=1,$$

следователно

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha}.$$

Оттук получаваме

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right]$$

и най-сетне

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}\left[\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right].$$

Забележка. При $x=0$ имаме $y=\alpha$. Ако положим $u=f(y)$, получаваме

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}f[y(0,\alpha)]=\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}[\varphi^n(\alpha)f'(\alpha)].$$

Редът на Маклорен

$$f(y)=f[y(0,\alpha)]+\frac{x}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\left[f[y(0,\alpha)]\right]+\cdots$$

добива в този случай вида

$$f(y)=f(\alpha)+\frac{x}{1!}\varphi(\alpha)f'(\alpha)+\frac{x^2}{2!}\frac{d}{d\alpha}[\varphi^2(\alpha)f'(\alpha)]+\cdots+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}[\varphi^n(\alpha)f'(\alpha)]+\cdots$$

Редът, който получихме, се нарича ред на Лагранж (J. Lagrange).

4. Нека z е функция на x и y, която удовлетворява уравнението

$$x-az=\varphi(y-bz),$$

където a и b са константи, а φ е една диференцуема функция.

Докажете, че

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

5. Нека z е функция на x и y, която удовлетворява уравнението

$$z=x\varphi\left(\frac{z}{y}\right).$$

Докажете, че

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

§ 4. Диференциране на неявни функции, определени чрез системи

С помощта на методите, които изяснихме в § 2 и § 3 на тази глава, ние можем да намерим производните и на такива неявни функции, които са определени с помощта на няколко уравнения.

Нека ни е дадена една система

$$\begin{aligned}
&F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)=0,\\
&F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)=0
\end{aligned}$$

от n уравнения с $n+m$ променливи. Нека

$$\begin{aligned}
&y_1=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m),\\
&y_2=f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&y_n=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)
\end{aligned}$$

са n функции на $x_1, x_2, \ldots, x_m$, които удовлетворяват тази система. В този случай, ако са налице условията, при които установихме теоремата за диференциране на съставни функции, можем да определим $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$ еднозначно от системата

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x_k}+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}+\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}=0,\\
&\frac{\partial F_2}{\partial x_k}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k}+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial F_n}{\partial x_k}+\frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}+\frac{\partial F_n}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k}+\ldots+\frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}=0,
\end{aligned}$$

стига да имаме

$$\Delta=\begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\
\frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}
\end{vmatrix}\neq 0.$$

В бъдеще при много въпроси ще срещаме детерминанти от този вид. Детерминантата Δ се нарича функционална или Якобиева детерминанта

на функциите $F_1, F_2, \ldots, F_n$ по отношение на променливите $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и се означава съкратено с

$$\Delta=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Ние показахме как могат да се пресметнат частните производни $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$. Аналогично се пресмятат и производните от по-висок ред.

Задачи

Забележка. В задачите, които следват, се предполага, че са налице условията, при които могат да се извършат интересуващите ни пресмятания. Така например ще предполагаме, че функциите, които разглеждаме, са достатъчен брой пъти диференцуеми и пр.

1. Нека z и α са две функции на x и y, които удовлетворяват системата

$$[z-\varphi(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2)$$
$$[z-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha)=\alpha x^2.$$

Докажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

2. Нека z и α са две функции на x и y, които удовлетворяват системата

$$z=\alpha x+y f(\alpha)+\varphi(\alpha),$$
$$0=x+y f'(\alpha)+\varphi'(\alpha).$$

Докажете, че

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

3. Нека z и α са две функции на x и y, които удовлетворяват системата

$$z\varphi'(\alpha)=[y-\varphi(\alpha)]^2,$$
$$(x+\alpha)\varphi'(\alpha)=y-\varphi(\alpha).$$

Докажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

4. Нека u и v са две функции на x и y, които удовлетворяват системата

$$x=f(u, v),$$
$$y=g(u, v).$$

Намерете $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Решение. Като диференцираме двете дадени уравнения частно спрямо x, получаваме

$$1=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$0=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Оттук намираме

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}}.$$

5. Нека u и v са две функции на x и y, които удовлетворяват системата

$$x=f(u, v),$$
$$y=g(u, v).$$

Намерете $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Решение. Като диференцираме системата частно спрямо x, получаваме

$$1=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$0=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Като диференцираме получените две уравнения още веднъж спрямо x, получаваме

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0.$$

От така получените четири уравнения елиминираме $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ и получаваме уравнение, от което определяме $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

§ 5. Теорема за съществуване на неявни функции

Знаем, че не всяко уравнение $F(x, y)=0$ дефинира неявна функция. Така например няма функция $y=\varphi(x)$, която да удовлетворява уравнението $e^{x+y}=0$, защото, както знаем, показателната функция не се анулира при никоя стойност на показателя. Сега ще си поставим за задача да дадем една система от достатъчни условия, при които може да се твърди, че съществува неявна функция, която се определя от дадено уравнение. Условията, които ще посочим, ще ни осигурят дори непрекъснатостта на тази функция.

Първоначално ще разгледаме уравнението

$$y=y_0+f(x, y), \tag{1}$$

където функцията $f(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната поне в някоя околност R на точката (x_0, y_0), анулира се в тази точка и при всеки

избор на двете точки (x, η_1), (x, η_2), които имат обща абсциса и лежат в R, удовлетворява неравенството*

$$|f(x, \eta_1)-f(x, \eta_2)| \leqq k|\eta_1-\eta_2|,$$

където k е положителна константа, по-малка от единица (но не и равна).

При тези условия може да се твърди, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една непрекъсната функция $\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението

$$\varphi(x)=y_0+f[x, \varphi(x)]$$

при всички стойности на x от тази околност и приема стойност y_0 в точката x_0.

Ние ще извършим доказателството с помощта на така наречения метод на последователните приближения.

Без да ограничаваме общността, ние можем да считаме, че околността R е правоъгълник, страните на който са успоредни на съответните координатни оси. Една точка (x, y) лежи в R тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата

$$x_0-a<x<x_0+a,$$
$$y_0-b<y<y_0+b,$$

където $2a$ и $2b$ означават дължините на съответните страни на R.

Ще си образуваме една безкрайна редица от функции

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x), \ldots, \tag{2}$$

които ще наричаме последователни приближения на търсената функция $\varphi(x)$. За тази цел заместваме в дясната страна на равенството (1) променливата y с константата y_0. Така получената функция на x означаваме с $y_1(x)$, т. е.

$$y_1(x)=y_0+f(x, y_0)$$

* Ако при всеки избор на двете точки x_1 и x_2 от дефиниционната област на една функция $\psi(x)$ е изпълнено неравенството

$$|\psi(x_1)-\psi(x_2)| \leqq k|x_1-x_2|,$$

където k е една константа, която не зависи от x_1 и x_2, казваме, че функцията $\psi(x)$ удовлетворява условието на Липшиц (R. Lipschitz). Константата k се нарича константа на Липшиц. Така например, ако функцията $\psi(x)$ е диференцуема в някой интервал и производната ѝ е ограничена, то тази функция удовлетворява уравнението на Липшиц, както това се вижда от теоремата за крайните нараствания:

$$|\psi(x_1)-\psi(x_2)|=|x_1-x_2)\psi'(\xi)| \leqq k|x_1-x_2|,$$

където k е една горна граница на $|\psi'(x)|$.

Ползувайки се от тази терминология, можем да кажем, че функцията $f(x, y)$, която разглеждаме в текста, удовлетворява условието на Липшиц по отношение на y, като константата на Липшиц k не зависи от x и е по-малка от 1.

След като дефинирахме функцията $y_1(x)$, заместваме y в дясната страна на уравнението (1) с $y_1(x)$ и означаваме така получената функция с $y_2(x)$, т. е.

$$y_2(x)=y_0+f[x, y_1(x)].$$

Функцията $y_2(x)$ поставяме в дясната страна на уравнението (1) вместо y и означаваме резултата с $y_3(x)$, така че

$$y_3(x)=y_0+f[x, y_2(x)],$$

и т. н. Като продължаваме неограничено този процес, получаваме една безкрайна редица от функции, дефинирани по следния начин:

$$y_1(x)=y_0+f(x, y_0),$$
$$y_2(x)=y_0+f[x, y_1(x)],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n(x)=y_0+f[x, y_{n-1}(x)],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Функцията $y_1(x)$ е дефинирана в интервала (x_0-a, x_0+a). Ние не можем обаче да твърдим същото за функцията $y_2(x)$, защото не е изключена възможността точката с координати $[x, y_1(x)]$ да не принадлежи на R (има опасност стойностите на функцията $y_1(x)$ да напускат интервала (y_0-b, y_0+b), когато x се мени между x_0-a и x_0+a). Същото се отнася и за следващите функции от редицата (2). За да отстраним тази пречка, ще оставим x да се мени в по-тесния интервал $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, където положителната константа α избираме по такъв начин, че да бъде по-малка от a и при $|x-x_0|<\alpha$ да е изпълнено неравенството

$$|f(x, y_0)|=|f(x, y_0)-f(x_0, y_0)|<q,$$

където q означава една константа, произволно избрана в отворения* интервал $(0, (1-k)\,b)$. Това може да се направи (стига α да изберем достатъчно малко), защото функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката (x_0, y_0) и $q>0$. Всички функции $y_n(x)$ са добре дефинирани в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ и стойностите им не напускат отворения интервал

$$(y_0-b, y_0+b).$$

Доказателството извършваме индуктивно. Ако функцията $y_{n-1}(x)$ е дефинирана в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ и удовлетворява неравенството

$$|y_{n-1}(x)-y_0|<b,$$

* За да постигнем целта, която преследваме, ние бихме могли да вземем $q=(1-k)b$. Ние избираме обаче $q<(1-k)\,b$ с оглед на по-далечни цели. Върху това ще се върнем на съответното място.

то същото се отнася и за функцията $y_n(x)$, защото*

(3) $|y_n(x)-y_0|=|f[x, y_{n-1}(x)]|=|f[x, y_{n-1}(x)]-f(x, y_0)+f(x, y_0)|\leqq$
$\leqq|f[x, y_{n-1}(x)]-f(x, y_0)|+|f(x, y_0)|<k|y_{n-1}(x)-y_0|+q<kb+q$

и следователно

$$|y_n(x)-y_0|<kb+(1-k)b=b.$$

От друга страна, функцията $y_1(x)$ е дефинирана в интересуващия ни интервал [тя е дефинирана дори в интервала (x_0-a, x_0+a)] и удовлетворява неравенството

$$|y_1(x)-y_0|=|f(x, y_0)|<q<(1-k)b<b.$$

С това ние си осигурихме всички функции

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ldots$$

да са дефинирани в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$.

Тези функции са и непрекъснати. И наистина това е очевидно за функцията $y_1(x)$, защото функцията $f(x, y)$ е непрекъсната. От непрекъснатостта на $y_1(x)$ и от непрекъснатостта на $f(x, y)$ заключаваме за непрекъснатостта на $y_2(x)$ и т. н.

Ние ще докажем, че редицата

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ldots$$

е равномерно сходяща в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$. За тази цел разглеждаме реда

(4) $$y_1(x)+[y_2(x)-y_1(x)]+[y_3(x)-y_2(x)]+\cdots$$

Очевидно имаме

(5) $|y_{n+1}(x)-y_n(x)|=|f[x, y_n(x)]-f[x, y_{n-1}(x)]|\leqq k|y_n(x)-y_{n-1}(x)|,$

защото функцията $f(x, y)$ удовлетворява условието на Липшиц. От неравенството (5) получаваме

$$\begin{aligned}
&|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqq k|y_n(x)-y_{n-1}(x)|,\\
&|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqq k|y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)|,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&|y_3(x)-y_2(x)|\leqq k|y_2(x)-y_1(x)|,\\
&|y_2(x)-y_1(x)|\leqq k|y_1(x)-y_0|<kb
\end{aligned}$$

* Прилагаме неравенството на Липшиц.

и следователно

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|<k^n b.$$

Това неравенство ни учи, че общият член на реда (4) не надминава по абсолютна стойност съответния член на сходящата геометрична прогресия Σbk^n (тази прогресия е сходяща, защото $0<k<1$). Като вземем пред вид, че членовете на прогресията не зависят от x, заключаваме, че редът е равномерно сходящ, а следователно равномерно сходяща е и редицата от частичните му суми

(6) $$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ldots$$

Да означим с $\varphi(x)$ границата на тази редица. Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, защото редицата (6) е равномерно сходяща и членовете на тази редица са непрекъснати функции. Освен това графиката на функцията $\varphi(x)$ лежи в дефиниционната област на $f(x, y)$. За да се убедим в това, достатъчно е да покажем, че*

$$|\varphi(x)-y_0|<b.$$

Доказателството може да се извърши така. Ние видяхме по-горе (виж неравенството (3)), че

$$|y_n(x)-y_0|<kb+q.$$

Като извършим граничния преход $n\to\infty$, получаваме

$$|\varphi(x)-y_0|\leqq kb+q,$$

откъдето

$$|\varphi(x)-y_0|<kb+(1-k)b=b.$$

Сега ще установим, че функцията $\varphi(x)$ удовлетворява уравнението (1). За тази цел извършваме граничния преход $n\to\infty$ в равенството

$$y_n(x)=y_0+f[x, y_{n-1}(x)],$$

като се възползуваме от непрекъснатостта на функцията $f(x, y)$. Това ни дава

$$\varphi(x)=y_0+f[x, \varphi(x)],$$

което искахме да установим.

* От неравенството $|y_n(x)-y_0|<b$ се получава непосредствено $|\varphi(x)-y_0|\leqq b$. Това обаче не е достатъчно за нас, защото ние искаме да си осигурим, че точката $[x, \varphi(x)]$ лежи в отворения правоъгълник R. Поради това ние искаме да сме сигурни, че при никоя стойност на x от разглеждания интервал нямаме $|\varphi(x)-y_0|=b$. Тъкмо с оглед на тази цел ние избираме

$$q<(1-k)b, \text{ а не } q=(1-k)b.$$

Най-сетне не е трудно да се види, че $\varphi(x_0)=y_0$. И наистина, като се възползуваме от условието $f(x_0, y_0)=0$, получаваме последователно

$$y_1(x_0)=y_0+f(x_0, y_0)=y_0,$$
$$y_2(x_0)=y_0+f[x_0, y_1(x_0)]=y_0+f(x_0, y_0)=y_0,$$
$$y_3(x_0)=y_0+f[x_0, y_2(x_0)]=y_0+f(x_0, y_0)=y_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n(x_0)=y_0+f[x_0, y_{n-1}(x_0)]=y_0+f(x_0, y_0)=y_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Оттук заключаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x_0)=y_0$ или (което е същото) $\varphi(x_0)=y_0$.

Остава да покажем, че няма друга непрекъсната функция в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, която при всички стойности на x от този интервал да удовлетворява уравнението (1) и, при $x=x_0$ да приема стойност y_0.

Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че съществува функция $\psi(x)$, непрекъсната в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, удовлетворяваща условията

$$\psi(x)=y_0+f[x, \psi(x)] \text{ при } |x-x_0|<\alpha,$$
$$\psi(x_0)=y_0$$

и различна от $\varphi(x)$. Последното условие означава, че има поне една точка x_1, за която

$$\psi(x_1)\neq\varphi(x_1).$$

Ще разгледаме подробно случая, когато $x_1>x_0$; случаят $x_1<x_0$ се разглежда по същия начин (разбира се, не можем да имаме $x_1=x_0$, защото $\varphi(x_0)=\psi(x_0)=y_0$).

Нека ξ е точната долна граница на точките x от интервала $(x_0, x_0+\alpha)$, за които $\psi(x)\neq\varphi(x)$. Това значи, че при всеки избор на положителното число δ има поне една точка x в интервала $[\xi, \xi+\delta)$ и, разбира се, в интервала $(x_0, x_0+\alpha)$, за която $\psi(x)\neq\varphi(x)$, обаче няма нито една точка x, за която са изпълнени едновременно неравенствата $x_0\leqq x<\xi$ и $\psi(x)\neq\varphi(x)$. Очевидно $\xi\geqq x_0$. Ще докажем, че

$$\psi(\xi)=\varphi(\xi).$$

И наистина, ако $\xi=x_0$, това е очевидно, защото $\varphi(x_0)=y_0$ и $\psi(x_0)=y_0$. Ако пък $\xi>x_0$, то за всички стойности на x, за които $x_0\leqq x<\xi$, ще имаме $\psi(x)=\varphi(x)$. Като вземем пред вид, че функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са непрекъснати в точката ξ, получаваме

$$\psi(\xi)=\varphi(\xi).$$

Ние знаем, че точката $[\xi, \varphi(\xi)]$, а следователно и точката $[\xi, \psi(\xi)]$ лежи във вътрешността* на правоъгълника R. Като се възползуваме от това обстоятелство и от непрекъснатостта на функцията $\psi(x)$, заключаваме, че може да се намери точка ξ_1 във вътрешността на интервала $(\xi, x_0+\alpha)$ по такъв начин, че графиката на $\psi(x)$ да не напуска* R, когато x се мени между ξ и ξ_1. В такъв случай имаме при $\xi<x<\xi_1$

$$\varphi(x)=y_0+f[x, \varphi(x)],$$
$$\psi(x)=y_0+f[x, \psi(x)]$$

и следователно

$$|\varphi(x)-\psi(x)|=|f[x, \varphi(x)]-f[x, \psi(x)]|\leqq k|\varphi(x)-\psi(x)|.$$

Нека c е точка от интервала (ξ, ξ_1), за която $\varphi(c)\neq\psi(c)$ (такава, както знаем, има). В такъв случай имаме

$$|\varphi(c)-\psi(c)|\leqq k|\varphi(c)-\psi(c)|,$$

откъдето, като съкратим на $|\varphi(c)-\psi(c)|$, получаваме

$$1\leqq k,$$

което противоречи на неравенството $k<1$. Противоречието, до което достигнахме, се дължи на предположението, че функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са различни. И така не може да има в интервала $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ повече от една непрекъсната функция, която удовлетворява уравнението (1) и при $x=x_0$ приема стойност y_0. С това е решен въпросът за единственост.

Изследванията, които направихме, ни дават възможност да докажем следната теорема.

Нека функцията $F(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката (x_0, y_0) и притежава частна производна спрямо y в тази околност, която е непрекъсната в точката (x_0, y_0); нека освен това

$$F(x_0, y_0)=0$$

и

$$F_y(x_0, y_0)\neq 0;$$

при тези предположения във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една непрекъсната функция $y=\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението

$$F[x, \varphi(x)]=0$$

и приема стойност y_0 при $x=x_0$.

* Тук съществено използуваме обстоятелството, че правоъгълникът R е отворен.

* Графиката на $\varphi(x)$, разбира се, не напуска дефиниционната област на $f(x, y)$, но може да напуска R.

Доказателството може да се извърши така. Разглеждаме помощната функция

$$f(x, y)=y-y_0+\lambda F(x, y),$$

където избираме константата λ по такъв начин, че да имаме

$$f_y(x_0, y_0)=0$$

или, което е същото,

$$1+\lambda F'_y(x_0, y_0)=0;$$

това е възможно да се направи, защото $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$. Означаваме с k една произволна положителна константа, по-малка от единица. Като вземем пред вид, че $f'_y(x, y)$ е непрекъсната функция на x и y и че $f'_y(x_0, y_0)=0$, заключаваме, че може да се намери достатъчно малка околност R на точката (x_0, y_0), в която

$$|f'_y(x, y)|\leqq k$$

и следователно при всеки избор на двете точки (x, η_1) и (x, η_2) от R е изпълнено неравенството на Липшиц

$$|f(x, \eta_1)-f(x, \eta_2)|=|(\eta_1-\eta_2)f'_y(x, \eta)|\leqq k|\eta_1-\eta_2|$$

(тук η означава едно число, което е избрано по подходящ начин между η_1 и η_2). От друга страна, функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в околността R (защото функцията $F(x, y$ е непрекъсната) и приема стойност нула в точката (x_0, y_0) (защото $F(x_0, y_0)=0$. Това ни дава право, както знаем, да твърдим, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една непрекъсната функция $y=\varphi(x)$, която приема стойност y_0 в точката x_0 и удовлетворява уравнението

$$y=y_0+f(x, y)$$

или, което е същото,

$$y=y_0+[y-y_0+\lambda F(x, y)],$$

или още

$$F(x, y)=0.$$

§ 6. Обобщение на теоремата за съществуване на неявни функции

Теоремата, която доказахме в началото на предния параграф, може да се обобщи по следния начин: нека функциите

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$$

на променливите, $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p$ са дефинирани и непрекъснати в някоя околност R на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)$; нека

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)=0,$$
$$f_2(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_p(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)=0$$

и най-сетне нека

$$|f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)-f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p)|\leqq$$
$$\leqq k[|y_1-\eta_1|+|y_2-\eta_2|+\cdots+|y_p-\eta_p|],$$
$$|f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)-f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p)|\leqq$$
$$\leqq k[|y_1-\eta_1|+|y_2-\eta_2|+\cdots+|y_p-\eta_p|],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)-f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p)|\leqq$$
$$\leqq k[|y_1-\eta_1|+|y_2-\eta_2|+\cdots+|y_p-\eta_p|],$$

където константата k удовлетворява неравенствата $0<k<\frac{1}{p}$, а точките $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_p)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ могат произволно да се менят в R (условие на Липшиц). В такъв случай във всяка достатъчно малка околност на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ съществува една и само една система от непрекъснати функции

$$y_1=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$y_2=\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$y_p=\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

които удовлетворяват системата

$$y_1=b_1+f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$y_2=b_2+f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_p=b_p+f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$

като при това са изпълнени още и допълнителните условия

$$\varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b_1,$$
$$\varphi_2(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_p(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b_p.$$

Ние няма да излагаме доказателството, защото то се извършва без затруднения по същия начин, както това стана в предния параграф.

След всичко казано ние можем да докажем следната важна теорема:

Нека функциите

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$$

са дефинирани и непрекъснати в някоя околност на точката

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_p)$$

и допускат непрекъснати частни производни от първи ред спрямо $y_1, y_2, \ldots, y_p$ в тази околност; освен това

$$F_1(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)=0$$
$$F_2(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_p(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)=0$$

и

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_p} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1} & \frac{\partial F_p}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} \neq 0$$

в точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)$. При тези предположения във всяка достатъчно малка околност на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ съществува една и само една система от непрекъснати функции

$$y_1=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$y_2=\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_p=\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

която удовлетворява системата

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)=0,$$
$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)=0$$

и за която

$$\varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b_1,$$
$$\varphi_2(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_p(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b_p.$$

За да докажем това, разглеждаме помощните функции

$$f_\nu=y_\nu-b_\nu+\lambda_{\nu 1}F_1+\lambda_{\nu 2}F_2+\cdots+\lambda_{\nu p}F_p, \quad \nu=1, 2, \ldots, p,$$

където избираме константите $\lambda_{\nu 1}, \lambda_{\nu 2}, \ldots, \lambda_{\nu p}$ по такъв начин, че да имаме

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial y_1}=\frac{\partial f_\nu}{\partial y_2}=\cdots=\frac{\partial f_\nu}{\partial y_p}=0$$

в точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)$ или, което е същото,

$$\lambda_{\nu 1}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\lambda_{\nu 2}\frac{\partial F_2}{\partial y_1}+\cdots+\lambda_{\nu p}\frac{\partial F_p}{\partial y_1}=0,$$
$$\lambda_{\nu 1}\frac{\partial F_1}{\partial y_2}+\lambda_{\nu 2}\frac{\partial F_2}{\partial y_2}+\cdots+\lambda_{\nu p}\frac{\partial F_p}{\partial y_2}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(1) \qquad \lambda_{\nu 1}\frac{\partial F_1}{\partial y_\nu}+\lambda_{\nu 2}\frac{\partial F_2}{\partial y_\nu}+\cdots+\lambda_{\nu p}\frac{\partial F_p}{\partial y_\nu}=-1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{\nu 1}\frac{\partial F_1}{\partial y_p}+\lambda_{\nu 2}\frac{\partial F_2}{\partial y_p}+\cdots+\lambda_{\nu p}\frac{\partial F_p}{\partial y_p}=0$$

при

$$x_1=a_1, x_2=a_2, \ldots, x_n=a_n; y_1=b_1, \ldots, y_p=b_p.$$

Ние можем да направим това, защото в разглежданата точка

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_p}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_p}{\partial y_2} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_p} & \frac{\partial F_2}{\partial y_p} & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Означаваме с k една произволна положителна константа, по-малка от $\frac{1}{p}$. Като вземем пред вид, че производните $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_1}, \frac{\partial f_\nu}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial f_\nu}{\partial y_p}$ са непре-

къснати и се анулират в точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)$, заключаваме, че може да се намери достатъчно малка околност R_ν на тази точка, в която

$$\left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_1}\right| \leq k, \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_2}\right| \leq k, \ldots, \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_p}\right| \leq k.$$

При всеки избор на двете точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p)$ от R_ν имаме според формулата на Тейлор

$$f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) - f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p) =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial y_1}(y_1-\eta_1) + \frac{\partial}{\partial y_2}(y_2-\eta_2) + \cdots + \frac{\partial}{\partial y_p}(y_p-\eta_p)\right] f_\nu(x_1, \ldots, x_n, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_p).$$

Тук

$$\bar{\eta}_1 = y_1 + \theta(\eta_1 - y_1), \ \bar{\eta}_2 = y_2 + \theta(\eta_2 - y_2), \ldots, \bar{\eta}_p = y_p + \theta(\eta_p - y_p),$$

където числото θ е избрано по подходящ начин между 0 и 1. Оттук заключаваме, че функциите f_ν удовлетворяват условието на Липшиц

$$|f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) - f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_p)| \leq$$
$$\leq k[|y_1-\eta_1| + \ldots + |y_p-\eta_p|].$$

Ние можем да твърдим още, че функциите f_ν са непрекъснати, защото са непрекъснати функциите $F_1, F_2, \ldots, F_p$. Най-сетне не е трудно да се установи, че функциите f_ν се анулират в точката

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p),$$

защото функциите $F_1, F_2, \ldots, F_p$ се анулират в тази точка. Нека R е една околност на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)$, която се съдържа във всичките околности $R_1, \ldots, R_2, \ldots, R_p$. В такъв случай по отношение на тази околност са изпълнени всичките условия, при които е валидна формулираната от нас в началото на този параграф теорема. Това ни дава право да твърдим, че във всяка достатъчно малка околност на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ има една и само една система от непрекъснати функции

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_p &= \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

за които са изпълнени условията

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= b_1, \\ \varphi_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_p(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= b_p \end{aligned}$$

и които удовлетворяват системата

$$(4) \qquad \begin{aligned} y_1 &= b_1 + f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p), \\ y_2 &= b_2 + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_p &= b_p + f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) \end{aligned}$$

или, което е същото,

$$(5) \qquad \begin{aligned} \lambda_{11}F_1 + \lambda_{12}F_2 + \cdots + \lambda_{1p}F_p &= 0, \\ \lambda_{21}F_1 + \lambda_{22}F_2 + \cdots + \lambda_{2p}F_p &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ \lambda_{p1}F_1 + \lambda_{p2}F_2 + \cdots + \lambda_{pp}F_p &= 0. \end{aligned}$$

Ще докажем, че детерминантата

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \ldots \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \ldots \lambda_{2p} \\ \cdots & \cdots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} \ldots \lambda_{pp} \end{vmatrix}$$

е различна от нула. За тази цел умножаваме детерминантите Δ и Δ_1 по редове и вземаме пред вид системата (1). Това ни дава

$$\Delta\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & -1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots 0 \\ & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots -1 \end{vmatrix} = (-1)^p \neq 0,$$

т. е. наистина $\Delta_1 \neq 0$, и следователно хомогенната система (5) е удовлетворена само ако

$$(6) \qquad F_1 = F_2 = \cdots = F_p = 0.$$

И така функциите (2), които удовлетворяват системата (4), удовлетворяват и системата (6). Обратното е по-просто — ако е удовлетворена системата (6), то очевидно е удовлетворена и системата (5), а следователно и системата (4). Това ни дава основание да твърдим, че в достатъчно малка околност на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ не може да има повече от една система от непрекъснати неявни функции, които удовлетворяват системата (6) и за които е изпълнено условието (3).

§ 7. Достатъчни условия за съществуване на производни на неявни функции

Нека функциите

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$$

са дефинирани, притежават непрекъснати частни производни от първи ред (спрямо всичките аргументи) в някоя околност на точката

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p),$$

анулират се в тази точка и освен това функционалната детерминанта

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$$

е различна от нула при $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n; y_1 = b_1, \ldots, y_p = b_p$. Нека функциите

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

са дефинирани в някоя околност R на точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и са непрекъснати поне в тази точка. Нека най-сетне функциите $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ удовлетворяват равенствата

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_p) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_p) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_p) = 0,$$
$$\varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b_1,$$
$$\varphi_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b_p.$$

При тези предположения ще докажем, че функциите $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ са диференцуеми частно спрямо всеки един от своите аргументи в точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. За тази цел полагаме

$$k_1 = \varphi_1(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r + h, a_{r+1}, \ldots, a_n) - \varphi_1(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_n),$$

$$k_2 = \varphi_2(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r + h, a_{r+1}, \ldots, a_n) - \varphi_2(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$k_p = \varphi_p(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r + h, a_{r+1}, \ldots, a_n) - \varphi_p(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n),$$

където h е достатъчно малко, различно от нула число.

Оттук получаваме

$$\varphi_1(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r + h, a_{r+1}, \ldots, a_n) = b_1 + k_1,$$
$$\varphi_2(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r + h, a_{r+1}, \ldots, a_n) = b_2 + k_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_p(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r + h, a_{r+1}, \ldots, a_n) = b_p + k_p.$$

Като се възползуваме от непрекъснатостта на $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ в точката $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, заключаваме, че $k_1, k_2, \ldots, k_p$ клонят към нула, когато h клони към нула.

Разглеждаме равенствата

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_r + h, \ldots, a_n; b_1 + k_1, \ldots, b_p + k_p) = 0,$$
$$f_2(a_1, a_2, \ldots, a_r + h, \ldots, a_n; b_1 + k_1, \ldots, b_p + k_p) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(a_1, a_2, \ldots, a_r + h, \ldots, a_n; b_1 + k_1, \ldots, b_p + k_p) = 0$$

и

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p) = 0,$$
$$f_2(a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p) = 0.$$

Чрез почленно изваждане на съответните равенства добиваме

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_r + h, \ldots, a_n; b_1 + k_1, \ldots, b_p + k_p) - f_1(a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p) = 0,$$
$$f_2(a_1, a_2, \ldots, a_r + h, \ldots, a_n; b_1 + k_1, \ldots, b_p + k_p) - f_2(a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p) = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(a_1, a_2, \ldots, a_r + h, \ldots, a_n; b_1 + k_1, \ldots, b_p + k_p) - f_p(a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p) = 0.$$

Преобразуваме тази система с помощта на теоремата за крайните нараствания за функции на няколко променливи. Резултатът може да се напише символично така:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_r}h+\frac{\partial}{\partial y_1}k_1+\dots+\frac{\partial}{\partial y_p}k_p\right)f_1(a_1, a_2,\dots, a_r+\theta_1 h,\dots, a_n;$$
$$b_1+\theta_1 k_1,\dots, b_p+\theta_1 k_p)=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_r}h+\frac{\partial}{\partial y_1}k_1+\dots+\frac{\partial}{\partial y_p}k_p\right)f_2(a_1, a_2,\dots, a_r+\theta_2 h,\dots, a_n;$$
$$b_1+\theta_2 k_1,\dots, b_p+\theta_2 k_p)=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_r}h+\frac{\partial}{\partial y_1}k_1+\dots+\frac{\partial}{\partial y_p}k_p\right)f_p(a_1, a_2,\dots, a_r+\theta_p h,\dots, a_n;$$
$$b_1+\theta_p k_1,\dots, b_p+\theta_p k_p)=0,$$
$$0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1,\dots,\ 0<\theta_p<1.$$

Това е една линейна система относно $k_1,\dots, k_n$. Като решим тази система, добиваме възможност да представим отношението

$$\frac{k_q}{h}\ (q=1, 2,\dots, p)$$

като частно на две детерминанти. Тези детерминанти* притежават граница, когато h клони към нула, защото производните на функциите $f_1, f_2,\dots, f_p$ са непрекъснати. Освен това детерминантата в знаменателя клони към

$$\Delta(a_1, a_2,\dots, a_n;\ b_1,\dots, b_p),$$

когато h клони към нула, т. е. към число, различно от нула. Оттук заключаваме, че частното

$$\frac{k_q}{h}=\frac{\varphi_q(a_1, a_2,\dots, a_r+h,\dots, a_n)-\varphi_q(a_1, a_2,\dots, a_r,\dots, a_n)}{h}$$

също има граница, когато h клони към нула. С това е установено съществуването на производните

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\varphi_q(a_1, a_2,\dots, a_r,\dots, a_n)$$

при

$$q=1, 2,\dots, p,\ r=1, 2,\dots, n.$$

§ 8. Множители на Лагранж

Нека функциите

$$F(x, u, v),\ G_1(x, u, v) \text{ и } G_2(x, u, v)$$

са дефинирани и притежават непрекъснати частни производни от първи ред в някоя околност D на точката (x_0, u_0, v_0), като при това

$$G_1(x_0, u_0, v_0)=0,\quad G_2(x_0, u_0, v_0)=0$$

* Нека читателят напише тези детерминанти.

и

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}G_1(x_0, u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v}G_1(x_0, u_0, v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u}G_2(x_0, u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v}G_2(x_0, u_0, v_0) \end{vmatrix}\neq 0;$$

нека за всички точки (x, u, v) от D, за които

$$G_1(x, u, v)=0$$
$$G_2(x, u, v)=0$$

да имаме

$$F(x, u, v)\leqq F(x_0, u_0, v_0)$$

или за всички такива точки да имаме

$$F(x, u, v)\geqq F(x_0, u_0, v_0).$$

Да образуваме функцията

$$\Phi=F-\lambda_1 G_1-\lambda_2 G_2.$$

Ще покажем, че двете константи λ_1 и λ_2 могат да се определят по такъв начин, че да имаме*

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x_0, u_0, v_0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial u}\Phi(x_0, u_0, v_0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial v}\Phi(x_0, u_0, v_0)=0.$$

Доказателство. Нека Δ е толкова малка околност на точката x_0, че да съществуват в нея две диференцуеми функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, за които точката $[x, \varphi(x), \psi(x)]$ да принадлежи на D и освен това да имаме

$$G_1(x, \varphi, \psi)=0$$
$$G_2(x, \varphi, \psi)=0$$

и

$$\varphi(x_0)=u_0,\ \psi(x_0)=v_0.$$

В такъв случай функцията

$$f(x)=F(x, \varphi, \psi)$$

има локален екстремум в точката x_0 и следователно $f'(x_0)=0$, т. е

$$(1)\quad F'_x(x_0, u_0, v_0)+F'_u(x_0, u_0, v_0)\varphi'(x_0)+F'_v(x_0, u_0, v_0)\psi'(x_0)=0.$$

Определяме λ_1 и λ_2 така, че да бъдат удовлетворени уравненията

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial v}=0.$$

* Тези константи се наричат множители на Лагранж и играят роля в някои въпроси на вариационното смятане, аналитичната механика и пр.

За да се убедим, че това е възможно, написваме тези уравнения по-подробно така:

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial u}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial v}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial v}=0.$$

Получената система има решение, защото е линейна относно λ_1 и λ_2 и детерминантата от коефициентите пред неизвестните е различна от нула. Ще покажем, че така намерените числа λ_1 и λ_2 удовлетворяват и уравнението

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0.$$

За тази цел диференцираме уравненията

$$G_1(x,\varphi,\psi)=0,$$
$$G_2(x,\varphi,\psi)=0,$$

което ни дава

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial G_1}{\partial u}\varphi'+\frac{\partial G_1}{\partial v}\psi'=0,$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}+\frac{\partial G_2}{\partial u}\varphi'+\frac{\partial G_2}{\partial v}\psi'=0.$$

Оттук и от (1) при $x=x_0$ получаваме

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial x}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial u}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial u}\right)\varphi'+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial v}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial v}\right)\psi'=0.$$

Като вземем пред вид начина, по който сме определили λ_1 и λ_2, намираме

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial x}=0$$

или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,$$

с което доказателството е завършено.

Не е трудно да се убедим, че полученият резултат може да се обобщи по следния начин. Нека функциите

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_p;\ y_1,y_2,\ldots,y_n),$$
$$G_1(x_1,x_2,\ldots,x_p;\ y_1,y_2,\ldots,y_n),$$
$$G_2(x_1,x_2,\ldots,x_p;\ y_1,y_2,\ldots,y_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$G_n(x_1,x_2,\ldots,x_p;\ y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

са дефинирани и притежават непрекъснати частни производни в някоя околност D на точката, $(a_1,a_2,\ldots,a_p;\ b_1,b_2,\ldots,b_n)$, като при това в точката $(a_1,a_2,\ldots,a_p;\ b_1,b_2,\ldots,b_n)$ имаме

$$G_k(a_1,a_2,\ldots,a_p;\ b_1,b_2,\ldots,b_n)=0,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

и

$$\frac{D(G_1,G_2,\ldots,G_n)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_n)}\neq 0.$$

Нека за всяка точка $(x_1,x_2,\ldots,x_p;\ y_1,y_2,\ldots,y_n)$ от D, за която

$$G_k(x_1,x_2,\ldots,x_p;\ y_1,y_2,\ldots,y_n)=0$$
$$(k=1,2,\ldots,n)$$

да имаме

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_p;\ y_1,y_2,\ldots,y_n)\leq F(a_1,a_2,\ldots,a_p;\ b_1,b_2,\ldots,b_n)$$

или за всяка такава точка да имаме

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_p;\ y_1,y_2,\ldots,y_n)\geq F(a_1,a_2,\ldots,a_p;\ b_1,b_2,\ldots,b_n).$$

Разглеждаме функцията

$$\Phi=F-\lambda_1G_1-\lambda_2G_2-\cdots-\lambda_nG_n.$$

В такъв случай n-те константи $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ могат да се определят по такъв начин, че да бъдат изпълнени следните $n+p$ уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi(a_1,a_2,\ldots,a_p;\ b_1,b_2,\ldots,b_n)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial}{\partial x_p}\Phi(a_1,a_2,\ldots,a_p;\ b_1,b_2,\ldots,b_n)=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y_1}\Phi(a_1,a_2,\ldots,a_p;\ b_1,b_2,\ldots,b_n)=0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial}{\partial y_n}\Phi(a_1,a_2,\ldots,a_p;\ b_1,b_2,\ldots,b_n)=0.$$

Доказателството в общия случай се извършва по същия начин както в специалния случай, който ние разглеждахме, и поради това го предоставяме на читателя.

ГЛАВА III

СМЯНА НА ПРОМЕНЛИВИТЕ*

§ 1. Смяна на независимата променлива при функции на един аргумент

Нека във функцията $y=y(x)$ направим субституцията $x=\varphi(t)$. В такъв случай y се обръща във функция на t. Да означим тази функция с $u(t)$, така че

$$u(t)=y[\varphi(t)].$$

Ще покажем, че производните на y спрямо x (поне когато е възможно да се извършат пресмятанията, за които става дума) могат да се изразят чрез производните u и x спрямо t. Смисълът на тези думи се нуждае от прецизиране, но ние няма да се спираме тук на този въпрос, защото това не е единственото място, което се нуждае от прецизиране.

Нека $\psi(x)$ е една обратна функция на функцията $\varphi(t)$. В такъв случай

$$u[\psi(x)]=y[\varphi(\psi(x))]=y(x),$$

защото $\varphi(\psi(x))=x$. Това ни дава право да предоставим $y(x)$ във вид на сложната функция $u(t)$, където $t=\psi(x)$. Да разгледаме равенствата

$$x=\varphi(t), \tag{1}$$

$$y=u(t), \tag{2}$$

където $t=\psi(x)$. Като диференцираме равенството (2) спрямо x, получаваме съгласно правилото за диференциране на функция от функция

$$y'_x=u'_t\,t'_x.$$

Диференцирайки равенството $x=\varphi(t)$ спрямо x, получаваме

$$1=x'_t\,t'_x,$$

* В първите четири параграфа на тази глава ще се ограничим само с техническата страна на въпроса, без да прецизираме условията, при които могат да се извършат интересуващите ни пресмятания. За извършване на такова прецизиране няма принципиални трудности в смисъл, че могат да се посочат достатъчни условия от локален характер, при които тези пресмятания са законни. Ще направим това в последния параграф на тази глава.

откъдето

$$t'_x=\frac{1}{x'_t},$$

т. е.

$$y'_x=\frac{u'_t}{x'_t}. \tag{3}$$

По този начин успяхме да изразим y'_x чрез производните (на u и x) спрямо t. За да изразим y''_x чрез производните спрямо t, диференцираме още веднъж равенството (3) спрямо x, като помним, че t е функция на x. Това ни дава

$$y''_x=\left(\frac{u'_t}{x'_t}\right)'_x=\left(\frac{u'_t}{x'_t}\right)'_t t'_x=\frac{u''_t\,x'_t-u'_t\,x''_t}{x'^2_t}\,t'_x=$$

$$=\frac{u''_t\,x'_t-u'_t x''_t}{x'^2_t}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{u''\,x'_t-u'_t\,x''_t}{x'^3_t}.$$

Аналогично намираме

$$y'''_x=\frac{(u'''_t\,x'_t+u''_t\,x''-u''_t\,x''_t-u'_t\,x'''_t)\,x'^3_t-(u''_t\,x'_t-u'_t\,x''_t)\,3x'^2_t x''_t}{x'^6_t}\,t'_x=$$

$$=\frac{(u'''_t\,x'_t-u'_t\,x'''_t)\,x'-3\,(u''_t\,x'_t-u'_t\,x''_t)\,x''_t}{x'^5_t}$$

и пр.

Тук ще дадем два примера, за да илюстрираме техниката на тези пресмятания.

Пример 1. Да се намерят всичките функции y на независимата променлива x (ако има такава), които са два пъти диференцуеми в затворения интервал $[-1, 1]$ и удовлетворяват уравнението

$$(1-x^2)\,y''-xy'+y=0. \tag{4}$$

Решение. Да допуснем, че има два пъти диференцуема функция y, която удовлетворява уравнението (4) в разглеждания интервал $[-1, 1]$ (допускане, за което не знаем дали е вярно или не). Ще направим субституцията $x=\cos t$, като оставим t да се мени в затворения интервал $[0, \pi]$ и да положим $u(t)=y(\cos t)$. Тази субституция може да се направи, защото стойностите на функцията $x=\cos t$ не напускат дефиниционната област на $y(x)$. Функцията $x=\cos t$ е обратима в интервала $[0, \pi)$, защото производната ѝ не се анулира в никоя вътрешна точка на този интервал. Разглеждаме равенството

$$y(x)=u(t). \tag{5}$$

където $t=\arccos x$ и x е независима променлива.

Независимата променлива x може да се мени произволно в интервала $[-1, 1]$, защото както функцията $y(x)$, така и функцията $\arccos x$ е дефинирана в този интервал и стойностите на функцията $\arccos x$ не напускат дефиниционната област на функцията $u(t)$.

Ние ще диференцираме равенството (5) спрямо x. Тук обаче се явява едно затруднение: функцията $\arccos x$ не е диференцуема при $x=\pm 1$. Поради това ще раз-

гледаме най-напред равенството (5) в отворения интервал $(-1, 1)$. Сега вече можем да диференцираме двете части на това равенство спрямо x, защото:

1) функцията $y(x)$ е диференцуема (дори два пъти, и то в затворения интервал $[-1, 1]$, а следователно и сложната функция $u(t)=y(\cos t)$ е диференцуема в интервала $(0, \pi)$ и

2) функцията $\arccos x$ е диференцуема в отворения интервал $(-1, 1)$.

Като диференцираме равенството (5) спрямо x, намираме

(6)
$$y'_x=u'_t\,t'_x$$

или

$$y'_x=\frac{-u_t}{\sin t},$$

понеже

$$t'_x=\frac{-1}{\sin t}.$$

Оттук намираме

(7)
$$y''_x=\frac{-u''_t\sin t+u'_t\cos t}{\sin^2 t}\,t'_x=\frac{u''_x\sin t-u'_t\cos t}{\sin^3 t}.$$

Като заместим в равенството (4), получаваме

(8)
$$u''_t+u=0.$$

По този начин смяната на променливите, която извършихме, опрости нашето уравнение.

В така полученото уравнение u е една два пъти диференцуема функция на независимата променлива t в отворения интервал $(0, \pi)$. За нас ще бъде важно да знаем, че t може да приема всички стойности от този интервал. За да покажем това, достатъчно е да изберем t_0 произволно в интервала $(0, \pi)$, да положим $x_0=\cos t_0$ и да се възползуваме от равенствата (4), (6) и (7) при $x=x_0$. Ние видяхме обаче по-рано (вж. зад. 42 от края на глава IV от част II), че само функциите

9)
$$u(t)=A\cos t+B\sin t,$$

където A и B са константи, удовлетворяват уравнението (8). Тогава ние разглеждахме функциите върху цялата ос x; разсъжденията обаче запазват своята валидност, ако се ограничим с кой да е интервал; в дадения случай ние разглеждаме отворения интервал $(0, \pi)$.

Като вземем пред вид, че

$$y(x)=u(\arccos x),$$

получаваме от (9)

(10)
$$y(x)=A\cos(\arccos x)+B\sin(\arccos x)=Ax+B\sqrt{1-x^2}.$$

Така полученото равенство е установено при всички стойности на x от интервала $(-1, 1)$. За да се убедим в това, избираме x_0 произволно в интервала $(-1, 1)$, полагаме $t_0=\arccos x_0$ и използуваме равенството (9) при $t=t_0$.

Равенството (10) е установено в отворения интервал $(-1, 1)$. Това обаче е вярно и за $x=\pm 1$ поради непрекъснатостта на функциите, които стоят в двете части на това равенство.

И така решенията на задачата (ако въобще такива има) трябва да се търсят измежду функциите

(11)
$$y=Ax+B\sqrt{1-x^2}.$$

В задачата се иска функцията y да бъде диференцуема (два пъти) в затворения интервал $[-1, 1]$. Обаче функцията, която стои в дясната страна на равенството (11), не е диференцуема при $x=\pm 1$, ако $B\neq 0$ (защо?). От това заключаваме, че $B=0$. И така ние още повече стеснихме множеството на функциите, измежду които трябва

да се търсят решенията на задачата (за които, както казахме, все още не знаем дали съществуват).

С директна проверка обаче се вижда, че функциите

$$y=Ax$$

удовлетворяват поставените условия при всеки избор на константата A.

С това интересуващата ни задача е решена докрай.

Пример 2. Да се намерят всичките функции y на независимата променлива x (ако има такива), които са два пъти диференцуеми в безкрайния интервал $x>1$ и удовлетворяват уравнението.

(12)
$$(1-x^2)y''-xy'+y=0$$

(по какво се отличава тази задача от предната?).

Решение. Да допуснем, че задачата има решение. Тук ние не можем да направим субституцията $x=\cos t$, която направихме в предната задача, защото стойностите на функцията $\cos t$ не лежат в дефиниционната област на функцията y. Ние ще направим сега субституцията $x=\operatorname{ch} t$, като оставим t да се мени в безкрайния интервал $t>0$. Функцията $\operatorname{ch} t$ е обратима в този интервал, защото производната ѝ не се анулира при $t>0$. Нека $\varphi(x)$ е обратната функция на $\operatorname{ch} t$. При $t>0$ функцията $\varphi(x)$ е диференцуема, защото, както това лесно може да се докаже, тя се изразява по следния начин чрез диференцуеми функции:

$$\varphi(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Полагаме $u(t)=y(\operatorname{ch} t)$ и разглеждаме равенството

(13)
$$y(x)=u(t),$$

където $t=\varphi(x)$. В равенството (13) независимата променлива x може да се мени произволно в безкрайния интервал $x>1$, защото в този интервал са дефинирани функциите $y(x)$ и $\varphi(x)$, като при това стойностите на $\varphi(x)$ не напускат дефиниционната област на $u(t)$. Диференцираме равенството (13) спрямо x по правилото за диференциране на сложни функции(ние можем да направим това поради диференцуемостта на функциите $y(x)$, $\varphi(x)$ и $u(t)=y(\operatorname{ch} t)$. Това ни дава

$$y'_x=u'_t\,t'_x.$$

Като диференцираме спрямо x още и равенството

$$x=\operatorname{ch} t,$$

където $t=\varphi(x)$, получаваме

$$1=(\operatorname{sh} t)\,t'_x$$

или

$$t'_x=\frac{1}{\operatorname{sh} t}.$$

Оттук намираме

$$y'_x=\frac{u'_t}{\operatorname{sh} t}.$$

Диференцирайки втори път спрямо x, получаваме

$$y''_x=\frac{u''_t\operatorname{sh} t-u'_t\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}\,t'_x=\frac{u''_t\operatorname{sh} t-u'_t\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^3 t}.$$

Като заместим y'_x и y''_x с равните им в уравнението (12), намираме

(14)
$$u''_t-u=0.$$

По този начин ние успяхме да опростим уравнението (12) благодарение на извършената смяна на независимата променлива. Така полученото уравнение е удовлетворено при всички положителни стойности на t. За да намерим всичките функции t, които са два пъти диференцуеми при $t>0$ и удовлетворяват уравнението (14), образуваме двете помощни функции

$$p(t)=u\,\mathrm{ch}\,t-u'\,\mathrm{sh}\,t,$$

(15)

$$q(t)=u\,\mathrm{sh}\,t-u'\,\mathrm{ch}\,t.$$

Не е трудно да се види, че $p'(t)=0$ и $q'(t)=0$, т. е. двете функции $p(t)$ и $q(t)$ са константи. Ако положим $p(t)=A$ и $-q(t)=B$, получаваме от системата (15)

$$u=A\,\mathrm{ch}\,t+B\,\mathrm{sh}\,t.$$

Оттук, като използуваме равенството

$$y(x)=u(\varphi(x)),$$

намираме

(16) $$y(x)=A\,\mathrm{ch}\,\varphi(x)+B\,\mathrm{sh}\,\varphi(x)=Ax+B\sqrt{x^2-1}.$$

Не е трудно да се види, че ние установихме по този начин валидността на равенството (16) при всички стойности на x, които са по-големи от единица. И така ние показахме, че сигурно няма други функции, които удовлетворяват условията на задачата, освен функциите (16). От друга страна, с директна проверка се вижда, че функциите (16) удовлетворяват всички условия на задачата при всеки избор на константите A и B. С това задачата е решена докрай.

§ 2. Обща задача за смяна на променливите при функции на един аргумент

По-горе ние разгледахме една задача, при която се извършваше смяна на променливите с помощта на трансформачните формули

$$x=\varphi(t),$$

$$y=u,$$

където u е функция на t. Сега ще разгледаме по-общата задача, при която трансформачните формули имат вида

$$x=f(t,u),$$

(1)

$$y=g(t,u).$$

И така нека

(2) $$y=F(x)$$

е функция на x. От уравненията (1) и (2) получаваме*

$$g(t,u)=F[f(t,u)].$$

От това уравнение можем** да определим или u като функция на t, или t като функция на u. Да определим например u като функция на

* Разбира се, за да можем да направим тази субституция, трябва да сме сигурни, че стойностите на функцията $f(t,u)$ принадлежат на дефиниционната област на $F(x)$.

** Разбира се, не винаги.

t и да означим тази функция с $u(t)$. След тези предварителни бележки ще покажем, че производните* на y спрямо x могат да се изразят чрез производните на $u(t)$ спрямо t и чрез частните производни на $f(t,u)$ и $g(t,u)$.

Смисълът на тези думи се нуждае от прецизиране, което нима да правим сега, защото тога не е единственото място, което се нуждае от прецизиране.

Определяме** от уравнението

$$x=f[t,u(t)]$$

t като функция на x. Да означим тази функция с $t(x)$. Ние твърдим, че

$$g[t(x),u(t(x))]=F(x).$$

Това може да се види по следния начин: функцията $u(t)$ е дефинирана с помощта на условието

$$g(t,u(t))=F[f(t,u(t))].$$

и специално при $t=t(x)$ имаме

$$g[t(x),u(t(x))]=F[f[t(x),u(t(x))]];$$

от друга страна, функцията $t=t(x)$ удовлетворява уравнението

$$f[t,u(t)]=x$$

и следователно

$$F[f[t(x),u(t(x))]]=F(x),$$

откъдето

$$g[t(x),u(t(x))]=F(x).$$

И така ние представихме функцията $y=F(x)$ във вид на съставната функция

$$y=g[t,u(t)],$$

където $t=t(x)$ е функция на x, удовлетворяваща уравнението

$$x=f[t,u(t)].$$

Като диференцираме равенството***

$$y=g[t,u(t)]$$

* Тук ще предполагаме, че функциите $F(x)$, $f(t,u)$ и $g(t,u)$ са диференцуеми достатъчен брой пъти. Това обаче не е достатъчно. Трябва да сме сигурни още и в съществуването на съответните производни на $u(t)$ (нека припомним на това място, че в общия случай ние не сме сигурни дори в съществуването на функцията $u(t)$, та още по-малко можем да твърдим нещо за съществуването на нейните производни).

** Стига да можем.

*** За да можем да извършим това обаче, не стига да знаем, че функциите $y=F(x)$, $g(t,u)$ и $u(t)$ са диференцуеми. Трябва да сме сигурни още в диференцуемостта на функцията $t(x)$ и в непрекъснатостта на частните производни на g и f.

спрямо x и вземем пред вид, че t е функция на x, получаваме по правилото за диференциране на съставни функции

$$y'_x = (g[t,\ u(t)])'_x = (g[t,\ u(t)])'_t \cdot t'_t =$$
$$= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_t\right) \cdot t'_x .$$

Като диференцираме спрямо x още и равенството

$$x = f[t,\ u(t)]$$

(като помним, че t е функция на x), получаваме*

$$1 = (f[t)\ u\ (t)])'_x = (f[t,\ u(t)])'_t\ t'_x = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t\right) t'_x,$$

откъдето

$$t'_x = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t}$$

и следователно

$$y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t}.$$

Като диференцираме това равенство още веднъж спрямо x, ще получим y''_x и пр.

Нека изрично отбележим на това място, че за да можем да решим задачата, която току-що разгледахме, не стига да бъдат дадени трансформачните формули. Трябва още да бъде казано коя от променливите се избира за функция и коя за аргумент. Така например, ако искаме да направим смяната на променливите с помощта, на трансформачните формули (1), където t се разглежда като функция на u, имаме друга задача, различна от тази, която ние разглеждахме в текста, макар че трансформачните формули са същите (тази друга задача, разбира се, се решава по същия начин).

Пример. В израза

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \tag{3}$$

* След като веднъж сме стигнали по един или друг начин до това равенство, ние вече можем да извлечем от него и заключението, че

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t \neq 0 .$$

където $y = f(x)$ е функция на x, да се направи смяна на променливите с помощта на трансформачните формули

$$x = r \cos \theta,$$
$$y = r \sin \theta,$$

където r разглеждаме като функция на θ.

Решение. Нека $r(\theta)$ е функция, която удовлетворява уравнението

$$r \sin \theta = f(r \cos \theta),$$

и нека $\theta = \theta(x)$ е функция на x, която удовлетворява уравнението

$$x = r(\theta) \cos \theta.$$

В такъв случай ние добиваме възможност да представим функцията $y = f(x)$ още по следния начин:

$$y = r(\theta) \sin \theta, \tag{4}$$

където $\theta = \theta(x)$. Диференцираме равенството (4) спрямо x, като помним, че θ е функция на x. Това ни дава

$$y'_x = (r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta)\ \theta'_x.$$

Като диференцираме още и равенството

$$x = r(\theta) \cos \theta$$

спрямо x, получаваме

$$1 = (r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)\ \theta'_x,$$

откъдето

$$\theta'_x = \frac{1}{r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta}.$$

Това ни дава

$$y'_x = \frac{r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta};$$

Като диференцираме още веднъж спрямо x, получаваме

$$y''_x = \frac{(r''_\theta \sin \theta + 2\, r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)\ (r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)}{(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^2}\ \theta'_x -$$

$$- \frac{(r''_\theta \cos \theta - 2r'_\theta \sin \theta - r \cos \theta)(r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta)}{(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^2}\ \theta'_x = \frac{-r''r + 2r'^2 + r^2}{(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^3}.$$

Сега остава да заместим y'_x и y''_x в (3). Това ще ни даде

$$R = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Това решение не може да се разглежда като завършено, защото то оставя открит въпроса за границите на неговата валидност. На читателя е ясно, че горните пресмятания не винаги могат да се извършат. Така например ние си послужихме с помощни функ-

ции, за които тихомълком предполагахме дори, че имат производни, докато самото им съществуване не беше осигурено, и пр. Засега няма да анализираме повече този пример. Нека той служи само като илюстрация на техническата страна на тези пресмятания. Читателят, който вижда нуждата от едно прецизиране на въпроса, ще намери интересуващия го отговор в § 5.

§ 3. Смяна на независимите променливи при функции на няколко аргумента

Да направим във функцията $z=z(x, y)$ субституцията*

$$x=\varphi(u, v),$$
$$y=\psi(u, v).$$

В такъв случай z се обръща във функция на u и v. Да означим с $w(u, v)$ тази функция, така че

$$w(u, v)=z[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Ще покажем, че производните** на z спрямо x и y могат да се изразят*** чрез производните на w, φ и ψ спрямо u и v. За тази цел означаваме с $u(x, y)$ и $v(x, y)$ две функции**** на x и y, които удовлетворяват системата

$$\varphi[u(x, y), v(x, y)]=x,$$
$$\psi[u(x, y), v(x, y)]=y.$$

Ние твърдим, че

$$z(x, y)=w[u(x, y), v(x, y)].$$

Това се вижда от следната верига от равенства:

$$w[u(x, y), v(x, y)]=[\varphi[u(x, y), v(x, y)], \psi[u(x, y), v(x, y)]]=z(x, y).$$

И така ние представихме функцията $z=z(x, y)$ по следния начин:

$$z=w(u, v), \tag{1}$$

* Разбира се, за да можем да извършим това, трябва да сме сигурни, че точката с координати $[\varphi(u, v)\ \psi(u, v)]$ принадлежи на дефиниционната област на $z(x, y)$.

** Тук трябва да сме сигурни в диференцуемостта не само на функциите $z(x, y)$, $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$, но и на $w(u, v)$. Достатъчни условия за диференцуемост на $w(u, v)$ ни дава теоремата за диференциране на съставни функции.

*** Смисълът на тези думи се нуждае, разбира се, от прецизиране, което сега няма да правим, защото това не е единственото място, което се нуждае от прецизиране.

**** Разбира се, такива две функции не винаги съществуват. Теоремата за съществуване на неявни функции ни дава все пак едно достатъчно условие за съществуване на такива функции.

където $u=u(x, y)$ и $v=v(x, y)$. Диференцираме* равенството (1) частно спрямо x и y по правилото за диференциране на съставни функции. Това ни дава

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2}$$

За да намерим производните $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, диференцираме съответно спрямо x и y равенствата**

$$x=\varphi(u, v),$$
$$y=\psi(u, v),$$

където $u=u(x, y)$ и $v=v(x, y)$. Това ни дава

$$1=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$0=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

и

$$0=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$1=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

От така получените уравнения*** определяме $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

Като диференцираме още веднъж равенствата (2), получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ и пр.}$$

* За да можем да извършим това, достатъчно е да сме сигурни, че функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са диференцуеми, а производните на $w(u, v)$ спрямо u и v са непрекъснати.

** Разбира се, и тук трябва да сме сигурни, че са налице условията, при които изведохме правилото за диференциране на съставни функции.

*** Тези системи имат едва и съща детерминанта. След като пресмятанията по един или друг начин са доведени дотук, ние можем да твърдим, че тази детерминанта е различна от нула, защото

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Пример. Дадено е уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ a\neq 0, \tag{3}$$

където $z=z(x, y)$ е функция на x и y, която допуска непрекъснати частни производни до втори ред включително в някоя околност на точката (x_0, y_0). Да се сменят независимите променливи x и y, като се въведат нови независими променливи u и v, свързани с x и y посредством трансформачните формули

$$x=\frac{u-v}{2a},$$

$$y=\frac{u+v}{2}.$$

Решение. Да положим

$$w(u, v)=z\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right).$$

В такъв случай имаме

$$z(x, y)=w(u, v)$$

при

$$u=y+ax,$$

$$v=y-ax.$$

Правилото за диференциране на съставни функции ни дава

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Като вземем пред вид, че

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-a,$$

намираме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial w}{\partial u}-a\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Аналогично намираме

$$\frac{\partial u}{\partial y}=1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial y}=1$$

и следователно

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Като диференцираме оне веднъж, получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}-a\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}-$$

$$-a\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2a^2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Заместваме $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в уравнението (3) с равните им и получаваме

$$-4a^2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0,$$

тъй като $a\neq 0$.

§ 4. Обща задача за смяна на променливите при функции на няколко аргумента

Нека $z=F(x, y)$ е една функция на x и y и нека

$$\begin{aligned} x&=f(u, v, w),\\ y&=g(u, v, w),\\ z&=h(u, v, w), \end{aligned} \tag{1}$$

са три функции на u, v и w. Като заместим* x, y и z с равните им в уравнението $z=F(x, y)$ получаваме

$$h(u, v, w)=F[f(u, v, w),\ g(u, v, w)]. \tag{2}$$

Нека $w=w(u, v)$ е една функция на u и v, която удовлетворява* уравнението (2). Това значи, че

$$h[u, v, w(u, v)]=F[f(u, v, w(u, v)),\ g(u, v, w(u, v))]. \tag{2a}$$

Нека $u=u(x, y)$ и $v=v(x, y)$ са две функции на x и y, които удовлетворяват* системата

$$\begin{aligned} f[u, v, w(u, v)]&=x,\\ g[u, v, w(u, v)]&=y. \end{aligned} \tag{3}$$

В такъв случай не е трудно да се докаже, че

$$h[u(x, y), v(x, y), w(u(x, y)\ v(x, y))]=F(x, y).$$

(Нека читателят сам докаже това, като използува равенствата (2a) и (3)). Нашата задача е да покажем как производните на $F(x, y)$ спрямо x и y могат да се изразят** чрез производните* на w спрямо u и v и чрез производните на f, g и h. За тази цел използуваме представянето на функцията $z=F(x, y)$, за което говорихме по-горе:

* Ние вече имахме случай да обърнем внимание на трудностите, с които са свързани тези разсъждения.

** Смисълът на тези думи се нуждае от прецизиране. Ние обаче на това няма да се спираме, защото тази празнота не е единствената.

(4) $$z=h[u, v, w(u, v)],$$

където $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$. Като диференцираме* равенството (4) частно по x и помним, че w е функция на u и v, а u и v са функции на x и y, получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial w}\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right].$$

За да намерим производните $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$, диференцираме* спрямо x равенствата

$$x=f[u, v, w(u, v)],$$
$$y=g[u, v, w(u, v)],$$

като помним, че w е функция на u и v, а u и v са функции на x и y (при това диференциране, което се извършва частно спрямо x, независимата променлива y е фиксирана). Това ни дава

$$1=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right],$$

$$0=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial w}\left[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right].$$

От тази система определяме $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$. Аналогично намираме $\frac{\partial}{\partial y}$ и пр.

§ 5. Достатъчни условия, при които може да се извърши смяна на променливите

В този параграф ще дадем една система от достатъчни условия, при които може да се извърши смяната на променливите по метода, техническата страна на който изложихме в предните четири параграфа. Ще се ограничим при това само със случая, при който имаме функция на две независими променливи и се прави смяна само на първите частни производни. Това ограничение, разбира се, не е съществено и всичко изложено в този параграф може без труд да се обобщи.

Нека функциите

$$x=f(u, v, w),$$
$$y=g(u, v, w),$$
$$z=h(u, v, w)$$

* Ние вече имахме случай да обърнем внимание на трудностите, с които са свързани тези разсъждения.

са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в някоя околност на точката (u_0, v_0, w_0). Полагаме

$$f(u_0, v_0, w_0)=x_0,$$
$$g(u_0, v_0, w_0)=y_0,$$
$$h(u_0, v_0, w_0)=z_0.$$

Нека функцията

$$z=F(x, y)$$

е дефинирана, непрекъсната, притежава непрекъснати първи частни производни в някоя околност на точката (x_0, y_0) и приема стойност z_0 при $x=x_0$ и $y=y_0$. Нека освен това

(1) $$\delta=h'_w(u_0, v_0, w_0)-F'_x(x_0, y_0)\,f'_w(u_0, v_0, w_0)-$$
$$-F'_y(x_0, y_0)\,g'_w(u_0, v_0, w_0)\neq 0$$

и нека най-сетне в точката (u_0, v_0, w_0) имаме

$$\Delta=\begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix}\neq 0.$$

При тези предположения ще покажем, че:

1) в достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0) има една (и само една непрекъсната функция $w=w(u, v)$, която удовлетворява уравнението

$$h(u, v, w)=F[f(u, v, w), g(u, v, w)]$$

и приема стойност w_0 в точката (u_0, v_0);

2) в достатъчно малка околност на точката (x_0, y_0) има една (и само една) двойка непрекъснати функции $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, които удовлетворяват условията

$$x=f[u, v, w(u, v)],$$
$$y=g[u, v, w(u, v)],$$
$$u(x_0, y_0)=u_0,\quad v(x_0, y_0)=v;$$

3) функциите $w(u, v)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ притежават непрекъснати частни производни от първи ред и тези производни удовлетворяват уравненията

$$F'_x(x_0, y_0)=h'_u(u_0, v_0, w_0)\;u'_x(x_0, y_0)+h'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+h'_w(u_0, v_0, w_0)\,[w'_u(u_0, v_0)\;u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\;v'_x(x_0, y_0)],$$

$$1 = f'_u(u_0, v_0, w_0)\, u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0, w_0)\, v'_x(x_0, y_0) +$$
$$+ f'_w(u_0, v_0, w_0)\,[w'_u(u_0, v_0)\, u'_x(x_0, y_0) + w'_v(u_0, v_0)\, v'_x(x_0, y_0)],$$
$$0 = g'_u(u_0, v_0, w_0)\, u'_x(x_0, y_0) + g'_v(u_0, v_0, w_0)\, v'_x(x_0, y_0) +$$
$$+ g'_w(u_0, v_0, w_0)\,[w'_u(u_0, v_0)\, u'_x(x_0, y_0) + w'_v(u_0, v_0)\, v'_x(x_0, y_0)] \text{ и пр.}$$

И наистина да разгледаме уравнението

$$h(u, v, w) - F[f(u, v, w), g(u, v, w)] = 0.$$

Точката с координати (u_0, v_0, w_0) удовлетворява това уравнение, защото

$$0 - F(x_0, y_0) = 0.$$

Като вземем пред вид, от друга страна, че функцията $F(x, y)$ е дефинирана в някоя околност на точката (x_0, y_0), че функциите $f(u, v, w)$ и $g(u, v, w)$ са дефинирани и непрекъснати в някоя околност на точката (u_0, v_0, w_0) и приемат съответно стойности x_0 и y_0 в тази точка заключаваме, че точката с координати

$$[f(u, v, w), g(u, v, w)]$$

няма да напуска дефиниционната област на $F(x, y)$, когато (u, v, w) се изменят в някоя достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0, w_0).

И така функцията

$$G(u, v, w) = h(u, v, w) - F[f(u, v, w), g(u, v, w)]$$

е дефинирана в някоя достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0, w_0). Като вземем пред вид, че функциите $f(u, v, w)$, $g(u, v, w)$, $h(u, v, w)$ и $F(x, y)$ притежават непрекъснати частни производни, заключаваме с помощта на теоремата за деференциране на съставни функции, че функцията $G(u, v, w)$ също притежава частни производни спрямо трите си аргумента. Специално

$$\frac{\partial G(u_0, v_0, w_0)}{\partial w} = h'_w(u_0, v_0, w_0) - F'_x(x_0, y_0)\, f'_w(u_0, v_0, w_0) -$$
$$- F'_y(x_0, y_0)\, g'_w(u_0, v_0, w_0)$$

и следователно

$$\frac{\partial G(u_0, v_0, w_0)}{\partial w} \neq 0, \tag{3}$$

както ни учи неравенството (1).

От друга страна, функцията $G(u, v, w)$ и нейната частна производна $\dfrac{\partial G(u, v, w)}{\partial w}$ са непрекъснати. Това ни дава право да приложим тео-

ремата за съществуване на неявни функции, според която във всяка достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0) има една и само една непрекъсната функция $w = w(u, v)$, която удовлетворява уравнението

$$h(u, v, w) - F[f(u, v, w), g(u, v, w)] = 0$$

и приема стойност w_0 при $u = u_0$, $v = v_0$.

От непрекъснатостта на тази функция, от непрекъснатостта на частните производни на функцията $G(u, v, w)$ и от условието (3) следва, както знаем, съществуването на частните производни на $w(u, v)$ спрямо u и v. От изразите, които получаваме за тези частни производни, се вижда, че те са непрекъснати.

Сега ще разгледаме въпроса за съществуването на функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$, които удовлетворяват системата

$$\begin{aligned} x &= f[u, v, w(u, v)], \\ y &= g[u, v, w(u, v)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Ние ще покажем, че функционалната детерминанта

$$D = \begin{vmatrix} f_u + f_w w'_u & f_v + f_w w'_v \\ g'_u + g'_w w'_u & g'_v + g'_w w'_v \end{vmatrix}$$

е различна от нула в точката (u_0, v_0). И наистина, като диференцираме равенството

$$h[u, v, w] - F[f(u, v, w), g(u, v, w)] = 0$$

(където $w = w(u, v)$) спрямо u и v получаваме

$$h'_u + h'_w w'_u - F'_x \cdot [f'_u + f'_w w'_u] - F'_y \cdot [g'_u + g'_w w'_u] = 0,$$
$$h'_v + h'_w w'_v - F'_x \cdot [f'_v + f'_w w'_v] - F'_y \cdot [g'_v + g'_w w'_v] = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} w'_u &= -\frac{h'_u - F'_x \cdot f'_u - F'_y g'_u}{h'_w - F'_x f'_w - F'_y g'_w}, \\ w'_v &= -\frac{h'_v - F'_x f'_v - F'_y g'_v}{h'_w - F'_x f'_w - F'_y g'_w}. \end{aligned} \tag{5}$$

От друга страна, детерминантата D може да се представи още във вида

$$D = \begin{vmatrix} f'_u + f'_w w'_u & f'_v + f'_w w'_v & 0 \\ g'_u + g'_w w'_u & g'_v + g'_w w'_v & 0 \\ -w'_u & -w'_v & 1 \end{vmatrix}$$

или още

$$D=\begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ -w'_u & -w'_v & 1 \end{vmatrix}.$$

Като вземем пред вид равенствата (5), получаваме при $u=u_0$, $v=v_0$, $w=w_0$

$$D=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u-F'_xf'_u-F'_yg'_u & h'_v-F'_xf'_v-F'_yg'_v & h'_w-F'_xf'_w-F'_yg'_w \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix}\neq 0.$$

Като вземем пред вид още, че функциите $f(u, v, w)$, $g(u, v, w)$ и $w(u, v)$ са непрекъснати и притежават непрекъснати частни производни, заключаваме, че са налице условията, при които доказахме теоремата за съществуване на неявни функции. И така във всяка достатъчно малка околност на точката (x_0, y_0) имаме една двойка непрекъснати функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, които удовлетворяват системата (4) и приемат съответно стойности u_0 и v_0 в точката (x_0, y_0). Тези функции са диференцуеми частно спрямо x и y, защото функциите $f[u, v, w(u, v)]$ и $g[u, v, w(u, v)]$ са диференцуеми частно спрямо u и v, частните им производни са непрекъснати и функционалната детерминанта D е различна от нула в достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0).

Да разгледаме функцията

$$h[u(x, y), v(x, y), w[u(x, y), v(x, y)]],$$

която е дефинирана в достатъчно малка околност на точката (x_0, y_0). Очевидно имаме

$$h[u, v, w(u, v)]=E[f(u, v, w(u,v)), g(u, v, w(u, v))],$$

$$f[u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))]=x,$$

$$g[u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))]=y$$

и следователно

$$h[u(x, y), v(x, y), w(u(x,y), v(x, y))]=F(x, y).$$

Ще положим $p(x, y)=w[u(x, y), v(x, y)]$ и по такъв начин ще пишем накратко

$$F(x, y)=h(u, v, w),$$

където

$$u=u(x, y),$$
$$v=v(x, y),$$
$$w=p(x, y).$$

Като се възползуваме от правилото за диференциране на съставни функции*, получаваме

$$F'_x(x_0, y_0)=h'_u(u_0, v_0, w_0)\,u'_x(x_0, y_0)+h'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+h'_w(u_0, v_0, w_0)\,p'_x(x_0, y_0).$$

Като вземем пред вид, че

$$p'_x(x_0, y_0)=w'_u(u_0, v_0)\,u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\,v'_x(x_0, y_0),$$

намираме

$$F'_x(x_0, y_0)=h'_u(u_0, v_0, w_0)\,u'_x(x_0, y_0)+h'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+h'_w(u_0, v_0, w_0)[w'_u(u_0, v_0)\,u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\,v'_x(x_0, y_0)].$$

Аналогично, като диференцираме спрямо x равенствата

$$x=f(u, v, w),$$
$$y=g(u, v, w)$$

при $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, $w=p(x, y)$ по правилото за диференциране на съставни функции, намираме

$$1=f'_u(u_0, v_0, w_0)\,u'_x(x_0, y_0)+f'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+f'_w(u_0, v_0, w_0)[w'_u(u_0, v_0)\,u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\,v'_x(x_0, y_0)],$$
$$0=g'_u(u_0, v_0, w_0)\,u'_x(x_0, y_0)+g'_v(u_0, v_0, w_0)\,v'_x(x_0, y_0)+$$
$$+g'_w(u_0, v_0, w_0)[w'_u(u_0, v_0)\,u'_x(x_0, y_0)+w'_v(u_0, v_0)\,v'_x(x_0, y_0)]$$

и пр.

* Не е трудно да се провери, че тук са налице всичките условия, при които изведохме това правило.

Общи задачи

1. Да се извърши субституцията $x=\operatorname{tg} t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, в уравнението

(1) $$(1+x^2)^2 y''+2x(1+x^2)y'+y=0.$$

Решение. Нека $y=f(x)$ е една функция, която удовлетворява даденото уравнение. Разглеждаме функцията

$$u=u(t)=f(\operatorname{tg} t).$$

В такъв случай имаме очевидно

$$u(\operatorname{arc\,tg} x)=f[\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)]=f(x)$$

или

$$f(x)=u(t),$$

където

$$t=\operatorname{arc\,tg} x.$$

Правилото за диференциране на функция от функция ни дава

$$y'_x=u'_t t'_x,$$

където

$$t'_x=\frac{1}{1+x^2}$$

и следователно

$$y'_x=\frac{u'_t}{1+x^2}.$$

Като диференцираме още веднъж, получаваме

$$y''_x=\frac{u''_t t'_x(1+x^2)-u'_t\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{u''_t-2xu'_t}{(1+x^2)^2}.$$

Заместваме x, y'_x и y''_x с равните им в уравнението (1). Това ни дава

$$u''_t+u=0.$$

В бъдеще, за да не въвеждаме много нови букви, ние често ще означаваме функцията $u(t)$ с y, т. е. със същата буква, с която е означена и функцията $f(x)$. При този начин на означаване резултатът ще има следния вид:

$$y''_t+y=0.$$

2. Да се извърши субституцията $x=e^t$ в уравнението

$$x^2y''+3xy'+y=0$$

при $x>0$.

Отговор.

$$y''_t+2y'_t+y=0.$$

3. Да се извърши субституцията $t=\frac{x^2}{4}$, $x>0$, в уравнението

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Отговор.

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0.$$

4. Да се извърши субституцията $t=\ln x$ в уравнението

$$x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=0$$

при $x>0$.

Отговор.

$$y'''_t-y''_t-y'+y=0.$$

5. Да се извърши субституцията $x=a\sin t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, в уравнението

$$(a^2-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$$

при $-a<x<a$, $a>0$.

Отговор.

$$\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

6. Да се извърши субституцията $e^{2x}=\operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, в уравнението

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\frac{dy}{dt}+\frac{4n^2y}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}=0.$$

Отговор.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

7. Нека функцията $y=F(x)$ е дефинирана и диференцуема достатъчен брой пъти в някоя околност на точката x_0, нека

$$F(x_0)-x_0F'(x_0)\neq 0$$

(геометрически това означава, че допирателната към кривата $y=F(x)$ в точката $[x_0, F(x_0)]$ не минава през началото) и нека

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,$$

$$F(x_0)=\rho_0\sin\theta_0.$$

Покажете, че може да се направи смяна на променливите с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$

$$y=\rho\sin\theta,$$

където ρ се разглежда като непрекъсната функция на θ, която е дефинирана в достатъчно малка околност на точката θ_0 и приема стойност ρ_0 при $\theta=\theta_0$.

Упътване. Използвайте изследванията от § 5 на тази глава.

8. Нека $y=y(x)$ е два пъти диференцуема функция на x в някоя околност на точката x_0, удовлетворяваща условието

$$y(x_0)-x_0y'(x_0)\neq 0,$$

и нека

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,$$

$$y(x_0)=\rho_0\sin\theta_0.$$

Да се извърши смяна на променливите в израза

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$

$$y=\rho\sin\theta,$$

където $\rho=\rho(\theta)$ е непрекъсната функция на θ, която е дефинирана в достатъчно малка околност на θ_0 и удовлетворява условието $\rho(\theta_0)=\rho_0$.

Отговор.

$$\pm\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}.$$

9. Нека $y=y(x)$ е диференцуема функция на x с непрекъсната производна в някоя околност на точката x_0, удовлетворяваща условието

$$y(x_0)-x_0y'(x_0)\neq 0,$$

и нека

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,$$

$$y(x_0)=\rho_0\sin\theta_0.$$

Да се направи смяна на променливите в израза

$$\frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$

$$y=\rho\sin\theta,$$

където $\rho=\rho(\theta)$ е непрекъсната функция на θ, подчинена на условието $\rho(\theta_0)=\rho_0$.

Отговор.

$$\pm\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2\theta}}.$$

10. Нека $y=y(x)$ е три пъти диференцуема функция на x в някоя околност на точката x_0 и нека $y'(x_0)\neq 0$. Да се направи смяна на променливите в израза

$$\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=u,$$

$$y=t,$$

където u е непрекъсната функция на t, дефинирана в достатъчно малка околност на точката t_0 и подчинена на условието $u(t_0)=x_0$ (инвариантен израз на Шварц — H. A. Schwarz).

Отговор. $-\frac{1}{u'^2_t}\left[\frac{u'''_t}{u'_t}-\frac{3}{2}\left(\frac{u''_t}{u'_t}\right)^2\right].$

11. Нека $y(x)$ е два пъти диференцуема функция на x в някоя околност на точката x_0, нека

$$x_0=t_0e^{u_0},$$

$$y(x_0)=t_0$$

и нека

$$y(x_0)\neq 0,\ y'(x_0)\neq 0.$$

Да се направи смяна на променливите в израза

$$xy''-\frac{x}{y}y'^2+y'$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=te^u,$$

$$y=t,$$

където $u=u(t)$ е непрекъсната функция на t, дефинирана в достатъчно малка околност на точката t_0 и подчинена на условието $u(t_0)=u_0$.

Отговор.

$$\frac{-te^{-u}}{(1+t\dot{u})^2}(t\ddot{u}+\dot{u}).$$

12. Нека y е една три пъти диференцуема функция на x в някой интервал Δ. Нека u е функция на x, дефинирана в Δ и свързана с y посредством равенството

$$yu=1.$$

Да се докаже, че

$$\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y}\right)^2=\frac{u'''}{u'}-\frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2$$

(Шварц).

13. Нека $y=y(x)$ е една три пъти диференцуема функция на x в някой интервал Δ. Нека u е една функция на x, дефинирана в Δ и свързана с y посредством равенството

$$u=\frac{ay+b}{cy+d},$$

където a, b, c са константи и

$$ad-bc\neq 0.$$

Да се докаже, че

$$\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2=\frac{u'''}{u'}-\frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2$$

(Шварц).

Упътване. Редуцирайте общия случай към случаите

$$c=0,\ d=1$$

и

$$a=0,\ d=0,\ b=1,\ c=1$$

и използувайте предната задача.

14. Нека $z=f(x, y)$ е функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество. Да се извърши смяна на независимите променливи в уравнението

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{2}$$

посредством трансформачните формули

$$x+2y=u,$$
$$x+y=v.$$

Решение. Полагаме

$$\varphi(u, v)=f[2v-u, u-v]$$

и представяме функцията $f(x, y)$ във вида

$$f(x, y)=\varphi[x+2y, x+y]$$

или по-кратко

$$f(x, y)=\varphi(u, v), \tag{3}$$

където

$$u=x+2y,$$
$$v=x+y.$$

Като диференцираме равенството (3) спрямо x и y, получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4}$$

Производните $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ намираме, като диференцираме равенствата

$$u=x+2y,$$
$$v=x+y$$

спрямо x и y. Това ни дава

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \frac{\partial u}{\partial y}=2,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=1, \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

Като диференцираме още веднъж равенствата (4), намираме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

По такъв начин уравнението (2) приема вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$$

15. Нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество. Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=u,$$
$$x+y=v.$$

16. Нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество G, което не съдържа точки от оста y. Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=n^2 z$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=u,$$
$$\frac{y}{x}=v.$$

17. Нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество G, което не съдържа точки от оста y. Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=u,$$
$$y=uv.$$

18. Нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество G, което не съдържа точки от оста x. Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=uv,$$
$$y=\frac{1}{v}.$$

Отговор.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2uv^2\frac{\partial z}{\partial v}+2(v-v^3)\frac{\partial z}{\partial v}+u^2v^2z=0.$$

19. Нека

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,$$
$$y_0=\rho_0\sin\theta_0,$$
$$x_0^2+y_0^2\neq 0$$

и нека z е функция на x и y, която притежава непрекъснати първи частни производни в някоя околност на точката (x_0, y_0). Да се направи смяна на независимите променливи в израза

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$

$$y=\rho\sin\theta,$$

като се преобразува z във функция на ρ и θ, дефинирана в достатъчно малка околност на точката (θ_0, ρ_0).

Отговор.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

20. Нека

$$x_0=\rho\cos\theta_0,$$

$$y_0=\rho_0\sin\theta_0,$$

$$x_0^2+y_0^2\neq 0$$

и нека z е една функция на x и y, която притежава некрекъснати частни производни от първи ред в някоя околност на точката (x_0, y_0). Да се направи смяна на независимите променливи в израза

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$

$$y=\rho\sin\theta,$$

като се преобразува z във функция на ρ и θ, дефинирана в достатъчно малка околност на точката (θ_0, ρ_0).

Отговор.

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=0.$$

21. Нека

$$x_0=\rho_0\cos\theta_0,$$

$$y_0=\rho\sin\theta_0,$$

$$x_0^2+y_0^2\neq 0$$

и нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някоя околност на точката (x_0, y_0). Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$

$$y=\rho\sin\theta,$$

като се преобразува z във функция на ρ и θ, дефинирана в достатъчно малка околност на точката (θ_0, ρ_0).

Отговор.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}=0.$$

22. Нека

$$u_0=x_0^2+y_0^2,$$

$$v_0=x_0^2-y_0^2,$$

$$w_0=2e^{z_0},$$

$$x_0\neq 0,\ y\neq 0$$

и нека функцията $z=z(x, y)$ притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някоя околност на точката (x_0, y_0) и да приема стойност z_0 при $x=x_0$ и $y=y_0$. При тези условия направете смяна на променливите в уравнението

$$y^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+x^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-x^2y^2e^z=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$u=x^2+y^2,$$

$$v=x^2-y^2,$$

$$w=2e^z,$$

където $w=w(u, v)$ се определя в достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0) като непрекъсната функция на u, v, подчинена на условието $w(u_0, v_0)=w_0$.

Упътване. Покажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot 2x\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot(-2y)\right).$$

23. Нека функцията $z=z(x, y)$ притежава непрекъснати частни производни до втори ред в някое отворено точково множество. Направете смяна на променливите в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$u=x+y,$$

$$v=x-y,$$

$$w=xy-z,$$

където w се разглежда като функция на u и v.

Упътване. Покажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-\left[\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Отговор.

$$1-2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.$$

24. Нека z е функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в едно отворено точково множество G, което няма общи точки с координатните оси. Да се направи смяна на променливите в уравнението

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}$$

с помощта на трансформачните формули

$$u=\frac{x}{y},$$

$$v=x,$$

$$w=xz-y,$$

където w се разглежда като функция на u и v.

Отговор.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0.$$

25. Нека z е една функция на x и y, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред в някое отворено точково множество G, което няма общи точки с правите $x=0$, $x+y=0$. Да се направи смяна на променливите в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

с помощта на трансформачните формули

$$u=x+y,$$

$$v=\frac{y}{x},$$

$$w=\frac{z}{x},$$

където w се разглежда като функция на u и v.

Отговор.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

СЪДЪРЖАНИЕ

Из предговора към първото издание . . . 3
Из предговора към второто издание . . . 4
Из предговора към третото издание . . . 5
Предговор към четвъртото издание . . . 6

Част I

Реални числа, редици от реални числа, редове от реални числа

Глава I. **Реални числа** . . . 7
§ 1. Равенство между реални числа . . . 7
§ 2. Аритметични действия . . . 10
§ 3. Сравняване на реалните числа . . . 12
§ 4. Абсолютна стойност . . . 14
§ 5. Понятието цяло число и едно негово обобщение . . . 17
§ 6. Принцип за непрекъснатост на множеството на реалните числа . . . 21
§ 7. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Г. Кантор) . . . 31
§ 8. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Р. Дедекинд) . . . 35
§ 9. Геометрична терминология . . . 36
§ 10. Съществуване на най-малък член във всяко ограничено отдолу множество от цели числа . . . 37
§ 11. Принцип на Архимед . . . 37
§ 12. Теорема на Кантор . . . 38
§ 13. Разпределение на рационалните и ирационалните числа . . . 40
Общи задачи . . . 43

Глава II. **Безкрайни редици** . . . 43
§ 1. Редици . . . 43
§ 2. Околност . . . 44
§ 3. Точка на сгъстяване. Теорема на Болцано—Вайерщрас . . . 46
§ 4. Сходящи редици . . . 50
§ 5. Действия със сходящите редици . . . 53
Задачи . . . 55
§ 6. Някои свойства на сходящите редици . . . 59
Задачи . . . 60
§ 7. Монотонни редици . . . 63
§ 8. Неперово число . . . 65
§ 9. Ограничени редици . . . 66
§ 10. Общо условие за сходимост на редиците (теорема на Коши) . . . 68
§ 11. Несобствени точки . . . 68
§ 12. Най-дясна и най-лява точка на сгъстяване . . . 70
Общи задачи . . . 86

Глава III. **Безкрайни редове** . . . 86
§ 1. Сходимост на редовете . . . 89
§ 2. Геометрична прогресия . . .

§ 3. Общо условие на Коши за сходимост на редовете . . . 89
§ 4. Елементарни свойства на редовете . . . 90
§ 5. Редове с неотрицателни членове . . . 92
§ 6. Признаци (критерии) за сходимост на редове с положителни членове . . . 94
§ 7. Представяне на константата e във вид на безкраен ред . . . 100
§ 8. Теорема на Коши за редове с неотрицателни монотонно намаляващи членове 101
§ 9. Критерий за сходимост на Лайбниц . . . 103
§ 10. Абсолютно сходящи редове . . . 104
§ 11. Комутативен закон при абсолютно сходящите редове . . . 107
§ 12. Умножаване на безкрайните редове. Теорема на Мертенс. Теорема на Коши 110
Общи задачи . . . 113

Част II

Диференциално смятане на функции на една реална променлива

Глава I. **Функции на една реална променлива** . . . 123

§ 1. Функционална зависимост . . . 123
§ 2. Графика на една функция . . . 125
§ 3. Ограничени функции . . . 127
§ 4. Граници на функции . . . 127
§ 5. Граница на функция, когато аргументът клони към $+\infty$ или към $-\infty$ . . . 131
§ 6. Границата на $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ . . . 132
Задачи . . . 134
§ 7. Непрекъснати функции . . . 135
§ 8. Свойства на непрекъснатите функции . . . 141
§ 9. Равномерна непрекъснатост . . . 148
§ 10. Осцилация на една функция . . . 151
§ 11. Още една форма на дефиницията на понятието непрекъснатост . . . 152
Задачи . . . 155
§ 12. Производна на функция . . . 155
§ 13. Механично значение на производната . . . 163
§ 14. Елементарни свойства на производните . . . 163
§ 15. Производни на елементарни функции . . . 168
§ 16. Диференциал . . . 172
§ 17. Последователни производни . . . 174
§ 18. Формула на Лайбниц . . . 176
§ 19. Теорема на Рол . . . 177
§ 20. Теорема за крайните нараствания . . . 180
§ 21. Обобщение на теоремата за крайните нараствания (теорема на Коши) . . . 182
§ 22. Основна теорема на интегралното смятане . . . 184
§ 23. Полиноми . . . 185
§ 24. Интерполация . . . 186
Задачи . . . 190
§ 25. Монотонни функции . . . 193

Глава II. **Развиване на функциите в редове** . . . 195

§ 1. Степенни редове . . . 195
§ 2. Диференциране на степенни редове . . . 198
§ 3. Редици от функции . . . 201
§ 4. Редове, членовете на които са функции . . . 203
§ 5. Редици от непрекъснати функции . . . 205
§ 6. Диференциране на безкрайни редици от функции . . . 206
§ 7. Формула на Тейлор за полиноми . . . 208
§ 8. Обща формула на Тейлор . . . 209

§ 9. Отношение на два остатъчни члена . . . 212
§ 10. Тейлоров ред . . . 214
§ 11. Развиване на тригонометрични функции в степенни редове . . . 215

Глава III. **Елементарни трансцендентни функции** . . . 217

§ 1. Дефиниция на показателната функция . . . 217
§ 2. Ирационалност на числото e . . . 223
Задачи . . . 224
§ 3. Аналитична дефиниция на тригонометричните функции . . . 225
§ 4. Дефиниция на числото π и периодичност на тригонометричните функции . . . 229
Задачи . . . 230
§ 5. Хиперболични функции . . . 231
§ 6. Логаритмична функция . . . 234
Задачи . . . 238
§ 7. Развиване на логаритмичната функция в степенен ред . . . 240
§ 8. Дефиниция на степен, показателят на която не е цяло число . . . 242
Задачи . . . 244
§ 9. Десетични логаритми и тяхната връзка с неперовите логаритми . . . 245
§ 10. Функцията x^n, когато показателят n не е цяло число . . . 246
§ 11. Нютонов бином . . . 246
§ 12. Сравняване растежа на функциите a^x, x^n и $\ln x$ . . . 250
§ 13. Обратни функции . . . 251
Задачи . . . 254
§ 14. Обратни функции на непрекъснати функции . . . 255
§ 15. Диференциране на обратните функции . . . 256
§ 16. Обратни кръгови функции . . . 257
§ 17. Пресмятане на числото π . . . 262
Задачи . . . 265
§ 18. Таблица на формулите, върху които се основава техниката на диференцирането . . . 271
Задачи . . . 272

Глава IV. **Най-прости приложения на диференциалното смятане** . . . 275

§ 1. Максимум и минимум . . . 275
§ 2. Необходимо условие за съществуване на локален екстремум при диференцуеми функции . . . 276
§ 3. Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум . . . 278
Задачи . . . 281
§ 4. Изпъкнали функции . . . 282
Задачи . . . 283
§ 5. Изследване на квадратичната форма $ax^2+2bxy+cy^2$ . . . 284
Задачи . . . 288
§ 6. Теореми на Лопитал . . . 290
Задачи . . . 295
§ 7. Безкрайно малко . . . 296
Общи задачи . . . 297

Част III

Диференциално смятане на функции на няколко независими променливи

Глава I. **Функции на няколко независими променливи** . . . 320

§ 1. Основни понятия . . . 320
§ 2. Теорема на Болцано—Вайерщрас . . . 324
§ 3. Функции на няколко независими променливи . . . 328

§ 4. Непрекъснатост . . . 324
§ 5. Свойства на непрекъснатите функции . . . 329
§ 6. Равномерна непрекъснатост . . . 330
§ 7. Частни производни на функции, зависещи от няколко независими променливи . . . 331
§ 8. Диференциране на съставни функции . . . 333
Задачи . . . 336
§ 9. Хомогенни функции . . . 339
Задачи . . . 340
§ 10. Тотален диференциал . . . 340
Задачи . . . 343
§ 11. Частни производни от по-висок ред . . . 344
Задачи . . . 350
§ 12. Производни от по-висок ред на съставни функции . . . 350
Задачи . . . 352
§ 13. Тотални диференциали от по-висок ред . . . 353
§ 14. Тейлоров ред при функции на няколко независими променливи . . . 355
§ 15. Максимум и минимум при функции на две независими променливи . . . 356
Задачи . . . 364

Глава II. **Неявни функции** . . . 366

§ 1. Основни понятия . . . 366
§ 2. Диференциране на неявни функции, които зависят от един аргумент . . . 368
Задачи . . . 372
§ 3. Диференциране на неявни функции, които зависят от няколко аргумента . . . 377
Задачи . . . 378
§ 4. Диференциране на неявни функции, определени чрез системи . . . 381
Задачи . . . 382
§ 5. Теорема за съществуване на неявни функции . . . 383
§ 6. Обобщение на теоремата за съществуване на неявни функции . . . 390
§ 7. Достатъчни условия за съществуване на производни на неявни функции . . . 396
§ 8. Множители на Лагранж . . . 398

Глава III. **Смяна на променливите** . . . 402

§ 1. Смяна на независимата променлива при функции на един аргумент . . . 402
§ 2. Обща задача за смяна на променливите при функции на един аргумент . . . 406
§ 3. Смяна на независимите променливи при функции на няколко аргумента . . . 410
§ 4. Обща задача за смяна на променливите при функции на няколко аргумента 413
§ 5. Достатъчни условия, при които може да се извърши смяна на променливите 414
Общи задачи . . . 420

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ V ИЗД.

Ярослав Александров Тагамлицки

Художник *Ив. Марков*
Художествен редактор *Б. Мавродиков*

Техн. редактор *Н. Минчева*
Коректор *М. Йотова*

Дадена за набор на 19. XI. 1970 г.
Подписана за печат на 25. XII. 1971 г.
Издателски коли 27
Печатни коли 27
Издателски № 19647 Лит. група I-4 Тираж 6066
Тем. № 503
Формат 65×92/16 Цена 1,61 лв. Излязло от печат на 30. XII. 1971 г.

Държавна печатница „Александър Пъшев" — Плевен

Проф. ЯР ОСЛАВ
ТАГАМЛИЦКИ

Интегрално смятане

ШЕСТО ИЗДАНИЕ

ИЗДАТЕЛСТВО НАУКА И ИЗКУСТВО СОФИЯ 1978

ЧАСТ I

ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ — ПРОСТИ ИНТЕГРАЛИ

Глава I

НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Увод

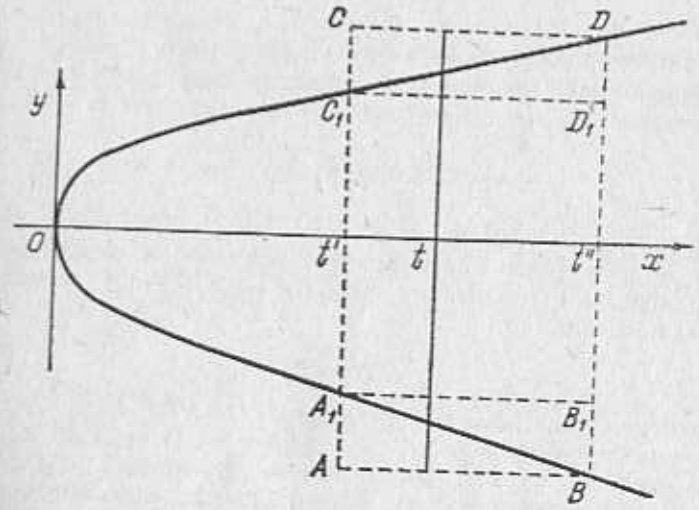
Читателят вече е имал случай да се запознае с някои от многобройните приложения на понятието производна. Сега ще направим още едно приложение, във връзка с което ще повдигнем един основен въпрос. Задачата, която ще решим, е следната: дадена е параболата

$$y^2=2px,\ p>0;$$

да се намери лицето на сегмента ѝ, който се отсича от правата с уравнение

$$x=t,$$

където t е неотрицателна константа (вж. черт. 1).



Черт. 1

Да означим търсеното лице с $F(t)$. Ние избираме това означение, защото търсеното лице зависи от избора на t. Ще покажем, че функцията $F(t)$ има производна при всяко неотрицателно t и ще пресметнем стойността на тази производна. За тази цел фиксираме едно число t и избираме две неотрицателни числа t' и t'' така, че да имаме

$$t' \leq t \leq t''$$

и

$$t' \neq t''.$$

Очевидно лицето σ на ивицата, която е заградена от параболата и от правите $x=t'$ и $x=t''$, има стойност

$$\sigma = F(t'') - F(t').$$

От друга страна, имаме неравенствата
лицето на правоъгълника $A_1B_1C_1D_1 \leq \sigma <$ лицето на правоъгълника $ABCD$, т. е.

$$2\sqrt{2pt'}\,(t''-t') \leq \sigma < 2\sqrt{2pt''}\,(t''-t'),$$

откъдето

$$(1) \qquad 2\sqrt{2pt'} \leq \frac{F(t'')-F(t')}{t''-t'} < 2\sqrt{2pt''}.$$

Да оставим t' и t'' да клонят към t чрез две произволни редици от стойности, като при това

$$t' \leq t \leq t'', \quad t'' \neq t'.$$

Като вземем пред вид, че както $2\sqrt{2pt'}$, така и $2\sqrt{2pt''}$ клонят към една и съща граница (тази обща граница има стойност $2\sqrt{2pt}$), заключаваме, че отношението

$$\frac{F(t'')-F(t')}{t''-t'}$$

също притежава граница, когато $t' \to t$ и $t'' \to t$. С това ние показахме, че функцията $F(t)$ има производна в разглежданата точка t. Извършвайки граничния преход $t' \to t$ и $t'' \to t$ в неравенството (1), заключаваме, че

$$(2) \qquad F'(t) = 2\sqrt{2pt}.$$

Нашата цел е да намерим функцията (лицето) $F(t)$. Засега ние намерихме производната на тази функция. И така пред нас изниква следната задача. Да се намери функцията $F(t)$, когато е дадена производната ѝ $F'(t)$. Досега (в диференциалното смятане) се занимавахме главно с въпроса за намиране на производните на дадени функции. Сега ние за пръв път се натъкваме на обратната задача. Тази обратна задача представлява един от основните въпроси, с които се занимава така нареченото интегрално смятане.

Равенството (2) е установено при всички неотрицателни стойности на t. От друга страна, не е трудно да се види, че производната на функцията

$$\frac{4\sqrt{2p}}{3} t^{\frac{3}{2}}$$

е също $2\sqrt{2pt}$ при $t \geq 0$. Оттук заключаваме, че разликата

$$\varphi(t) = F(t) - \frac{4\sqrt{2p}}{3} t^{\frac{3}{2}}$$

е константа, защото

$$\varphi'(t) = F'(t) - 2\sqrt{2pt} = 0.$$

И така при всички неотрицателни стойности на t имаме

$$\varphi(t) = \varphi(0).$$

Като вземем пред вид, че $F(0)=0$, намираме

$$F(t) - \frac{4\sqrt{2p}}{3} t^{\frac{3}{2}} = 0$$

или

$$F(t) = \frac{4\sqrt{2p}}{3} t^{\frac{3}{2}}.$$

С това ние решихме поставената задача. При това решението на тази задача се сведе съществено към въпроса за намиране на функцията $F(t)$ в даден интервал, когато е дадена производната $F'(t)$ в този интервал.

§ 2. Неопределен интеграл

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал Δ. Казваме, че една диференцуема функция $F(t)$ е примитивна функция на $f(x)$ (или неопределен интеграл от $f(x)$) в този интервал, когато при всички стойности на x от разглеждания интервал имаме

$$F'(x) = f(x).$$

За да изразим, че $F(x)$ е една примитивна функция на $f(x)$, пишем обикновено

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

(четете — интеграл от еф икс де икс).

Така например

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}$$

върху цялата ос x, защото

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2.$$

С това обаче не се изчерпват примитивните функции на функцията x^2. Така при всеки избор на константата C имаме

$$\int x^2\,dx=\frac{x^2}{3}+C,$$

защото

$$\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2.$$

Изобщо, ако $F(x)$ е една примитивна функция на $f(x)$ в някой интервал Δ, то $F(x)+C$ е пак примитивна функция на $f(x)$ в този интервал, и то при всеки избор на константата C, защото

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x).$$

За нас обаче е особено важно, че функцията $f(x)$ няма други примитивни функции в разглеждания интервал. И наистина, ако $F_1(x)$ е също една примитивна функция на $f(x)$ в интервала Δ, то разликата на двете функции $F(x)$ и $F_1(x)$ е константа, защото функциите $F(x)$ и $F_1(x)$ имат една и съща производна и следователно производната на разликата им е нула.

От дефиницията на понятието неопределен интеграл имаме

(1) $$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$$

и следователно

(2) $$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx,$$

защото

$$d\int f(x)\,dx=\left(\int f(x)\,dx\right)'dx=f(x)\,dx.$$

Нека $\varphi(x)$ е една диференцуема функция на x. В бъдеще вместо интеграла

$$\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

ние често ще пишем символа

$$\int f(x)\,d\varphi(x).$$

Освен това ние ще си служим и с други[1] опростявания в означенията. Така под

$$\int d\varphi(x)$$

ще разбираме

$$\int 1\,d\varphi(x)$$

и пр. При този начин на означаване имаме

(3) $$\int dF(x)=F(x)+C,$$

защото това равенство изразява, че

(4) $$\int F'(x)\,dx=F(x)+C,$$

нещо, което е вярно, защото двете функции

$$\int F'(x)\,dx \text{ и } F(x)$$

имат една и съща производна и следователно се отличават с една адитивна (прибавъчна) константа.

Читателят трябва да помни равенствата (1), (2), (3) и (4), които изразяват в същност, че действията диференциране и интегриране са обратни едно на друго.

Разбира се, не всяка функция притежава неопределен интеграл. За да се убедим в това, разглеждаме функцията $f(x)$, дефинирана при всички стойности на x по следния начин: $f(x)=1$ при $x\geqq 0$ и $f(x)=-1$ при $x<0$. Ако допуснем, че функцията $f(x)$ притежава неопределен интеграл $F(x)$ (например върху цялата ос x), въз основа на теоремата за крайните нараствания получаваме

$$F(1)-F(0)=1,$$

$$F(0)-F(-1)=-1,$$

откъдето

$$F(1)-F(-1)=0.$$

---

[1] Ще споменем още, че вместо $\int\frac{1}{f(x)}\,dx$ ние често ще пишем $\int\frac{dx}{f(x)}$ и пр. Най-сетне налага се да споменем, че ако една примитивна функция $F(x)$ се търси при всяко x, ние няма изрично да посочваме интервала, в който тя се търси.

Последното равенство обаче противоречи на теоремата на Рол, защото функцията $F'(x)=f(x)$ не се анулира никъде.

С оглед на нашите непосредствени цели е полезно да отбележим още сега, че ако една функция $f(x)$ е развиваема в степенен ред

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

в отворения интервал $-a<x<a$, то тя сигурно притежава примитивна функция в този интервал. За да се убедим в това, достатъчно е да вземем пред вид, че редът

$$F(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1}$$

е сходящ[1] при $-a<x<a$ и че теоремата за диференциране на степенните редове ни дава $F'(x)=f(x)$.

По-късно ще докажем една много по-обща теорема, според която, ако една функция $f(x)$ е непрекъсната в един интервал Δ, тя притежава примитивна функция в този интервал.

§ 3. Таблица на основните интеграли

Читателят лесно ще провери сам валидността на следните формули във всеки интервал, в който е дефинирана подинтегралната[2] функция (за целта е достатъчно да се използува дефиницията на понятието неопределен интеграл, като се покаже, че производната на дясната страна във всяко едно от равенствата е равна на съответната подинтегрална функция):

1) $$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{при } n\neq-1$$

във всеки интервал, в който x^n има смисъл;

2) $$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

[1] Двата степенни реда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1},$$

както знаем, имат един и същ радиус на сходимост, защото първият ред може формално да се получи от втория чрез почленно диференциране.

[2] Функцията $f(x)$ в символа $\int f(x)\,dx$ се нарича подинтегрална функция.

във всеки интервал, който не съдържа началото;

3) $$\int e^x\,dx=e^x+C$$

във всеки интервал;

4) $$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$$

във всеки интервал;

5) $$\int\cos x\,dx=\sin x+C$$

във всеки интервал;

6) $$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$$

във всеки интервал, в който $\cos x\neq0$;

7) $$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$$

във всеки интервал, в който $\sin x\neq0$;

8) $$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+C$$

във всеки интервал;

9) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$$

във всеки подинтервал на интервала $-1<x<1$;

10) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$$

във всеки интервал, в който $|x|>1$;

11) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

във всеки интервал.

За пример ще установим само формулата

(1) $$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

която е валидна във всеки интервал Δ, който не съдържа началото.

Нека интервалът Δ е разположен вдясно от началото. Тогава $|x|=x$ и следователно

$$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x},$$

с което равенството (1) е установено в този случай. Нека интервалът Δ е разположен отляво на началото. Тогава $|x|=-x$ и следователно

$$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x},$$

с което равенството (1) е установено и за случая, когато интервалът Δ се намира вляво от началото.

Формулите, които разгледахме в този параграф, са основни и читателят трябва добре да ги помни.

§ 4. Елементарни свойства на неопределените интеграли

В този параграф ние ще разгледаме някои прости свойства на неопределените интеграли.

I. Нека функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ притежават неопределени интеграли в някой интервал Δ. В такъв случай функцията $f_1(x)+f_2(x)$ също притежава неопределен интеграл в Δ и[1]

$$\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+C. \tag{1}$$

Доказателство. И наистина функцията

$$\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx$$

е един неопределен интеграл на функцията

$$f_1(x)+f_2(x),$$

защото

$$\left(\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx\right)'=\left(\int f_1(x)\,dx\right)'+\left(\int f_2(x)\,dx\right)'=f_1(x)+f_2(x).$$

II. Нека функцията $f(x)$ притежава неопределен интеграл в някой интервал Δ. В такъв случай функцията $af(x)$, където a е константа, също притежава неопределен интеграл в Δ и

[1] Ние често няма да пишем интеграционните константи (но, разбира се, ще ги помним). Така ние често ще пишем равенството (1) във вида

$$\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx.$$

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx+C.$$

Доказателство. И наистина функцията

$$a\int f(x)\,dx$$

е един неопределен интеграл на функцията

$$af(x),$$

защото

$$\left(a\int f(x)\,dx\right)'=a\left(\int f(x)\,dx\right)'=af(x).$$

Пример 1.[1]

$$\int(x^3+5x^2-4x+7)\,dx=\int x^3dx+5\int x^2dx-4\int xdx+7\int dx=$$
$$=\frac{x^4}{4}+\frac{5}{3}x^3-2x^2+7x+C.$$

Пример 2.

$$\int(x^2-1)^2dx=\int(x^4-2x^2+1)\,dx=\int x^4dx-2\int x^2dx+\int dx=$$
$$=\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x+C.$$

Пример 3.

$$\int\frac{(x+2)(x^2-3)}{2x^2}\,dx=\int\frac{x^3+2x^2-3x-6}{2x^2}\,dx=$$
$$=\int\left(\frac{x}{2}+1-\frac{3}{2x}-\frac{3}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int xdx+\int dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}-3\int x^{-2}\,dx=$$
$$=\frac{1}{4}x^2+x-\frac{3}{2}\ln|x|+3x^{-1}+C.$$

III. Нека функцията $f(u)$ има примитивна функция в интервала Δ, нека функцията $\varphi(x)$ е диференцуема в интервала Δ' и нека стойностите на $\varphi(x)$ не напускат интервала Δ, когато x се мени в Δ'. При тези предположения ще покажем, че функцията

$$f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$$

притежава неопределен интеграл в интервала Δ' и ако положим

$$F(u)=\int f(u)\,du,$$

[1] Читателят трябва да разгледа всички примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.

то

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C \tag{2}$$

при всички стойности на x от Δ'.

Доказателство. Правилото за диференциране на функция от функция ни дава при всеки избор на x от Δ'

$$\frac{d}{dx} F[\varphi(x)] = F'_u[\varphi(x)]\,\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x),$$

защото

$$F'_u(u) = f(u).$$

Този резултат ни учи, че функцията

$$F[\varphi(x)]$$

е един неопределен интеграл на функцията $f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$ в интервала Δ'

Забележка. Ние често ще записваме равенството (2) по-кратко така:

$$\int f[\varphi(x)]\,d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C. \tag{3}$$

Пример. 4.[1] Да се пресметне интегралът

$$I = \int 2xe^{x^2}\,dx.$$

Очевидно имаме

$$I = \int e^{x^2}\,dx^2.$$

От друга страна,

$$\int e^u\,du = e^u + C,$$

където u е независима променлива. Като се възползуваме от формулата (3), намираме

$$\int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2} + C.$$

Пример 5. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + C.$$

[1] Читателят трябва да разгледа всички примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.

защото

$$\int \frac{du}{u} = \ln u \quad \text{при} \quad u > 0.$$

Пример 6. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \sqrt{2x+5}\,dx \quad \text{при} \quad x \geq -\frac{5}{2}.$$

Очевидно имаме

$$\int \sqrt{2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+5}\,d(2x+5) = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{\frac{1}{2}}\,d(2x+5) =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}} + C,$$

защото

$$\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 7. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{x\,dx}{a^4+x^4}, \quad a \neq 0.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^4}\int \frac{dx^2}{1+\frac{x^4}{a^4}} = \frac{1}{2a^4}\int \frac{dx^2}{1+\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int \frac{d\frac{x^2}{a^2}}{1+\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{a^2} + C,$$

защото

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C.$$

Пример 8. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}, \quad a \neq 0, \quad |x| < |a|.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-\frac{x^4}{a^4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2} + C.$$

защото

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C.$$

Пример 9. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \sin^2 x\, dx.$$

Използуваме формулата

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

В такъв случай

$$I = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\, d\,2x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C,$$

защото

$$\int \cos u\, du = \sin u + C.$$

Упражнение. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \cos^2 x\, dx$$

с помощта на тъждеството $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Пример 10. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}$$

в кой да е интервал, в който $\sin x \neq 0$.
Очевидно имаме

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

защото

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

Пример 11. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx, \quad -1 < x < 1.$$

Очевидно имаме

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

IV. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в някой интервал Δ; нека функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и диференцуема в някой интервал Δ' и нека стойностите на $\varphi(t)$ принадлежат на Δ. Означаваме с N множеството от функционалните стойности на $\varphi(t)$ (очевидно N е интервал, който се съдържа в Δ). Нека функцията $\varphi(t)$ притежава диференцуема обратна функция $\psi(x)$ и нека функцията

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

притежава неопределен интеграл в Δ'. Да положим

$$g(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt. \tag{4}$$

Ще покажем, че функцията $f(x)$ притежава примитивна функция поне в интервала N и

$$\int f(x)\, dx = g[\psi(x)] + C. \tag{5}$$

Преди да пристъпим към доказателството, нека да припомним, че съгласно дефиницията на понятието обратна функция се иска:

1) дефиниционната област на $\psi(x)$ да съвпада с множеството N от функционалните стойности на $\varphi(t)$;

2) стойностите на $\psi(x$, да не напускат дефиниционната област Δ' на $\varphi(t)$;

3) при всички стойности на x от Δ да е в сила равенството

$$\varphi[\psi(x)] = x.$$

В дефиницията на понятието за обратна функция не се поставят никакви изисквания за диференцуемост. В нашия специален случай обаче се иска функцията $\varphi(t)$ да притежава диференцуема обратна функция.

След тези предварителни бележки преминаваме към доказателството.

Доказателство. Разглеждаме функцията

$$g[\psi(x)]$$

в интервала N. Тя е добре дефинирана в този интервал, защото функцията $\psi(x)$ е дефинирана в него и стойностите ѝ не напускат интервала Δ'.

Като вземем пред вид, че

$$\frac{d}{dt} g(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t),$$

намираме

$$\frac{d}{dx} g[\psi(x)] = f[\varphi(\psi(x))]\,\varphi'[\psi(x)]\,\psi'(x) =$$

$$= f(x)\,\varphi'[\psi(x)]\,\psi'(x),$$

защото

(6) $$\varphi[\psi(x)] = x.$$

От друга страна, като диференцираме равенството (6) спрямо x, намираме

$$\varphi'[\psi(x)]\,\psi'(x) = 1,$$

т. е.

$$\frac{d}{dx} g[\psi(x)] = f(x),$$

с което нашето твърдение е доказано.

Забележка. Ако производната $\varphi'(t)$ не се анулира никъде в интервала Δ', а този интервал е краен и затворен, то функцията $\varphi(t)$ сигурно притежава диференцуема обратна функция. За да се убедим в това, ще вземем под внимание, че функцията $\varphi(t)$ е обратима (т. е. приема всяка своя стойност само един път). И наистина, ако допуснем противното, ще имаме поне две различни точки t_1 и t_2 от Δ', за които $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, и следователно съгласно теоремата на Рол производната на $\varphi(t)$ ще се анулира поне един път, което по допускане не е вярно. От друга страна, интервалът Δ' е краен и затворен и следователно ние можем да приложим познатата ни теорема за диференциране на обратни функции (вж. Диференциално смятане, част II, гл. III, § 15).

Наблюдателният читател ще забележи, разбира се, че в случая предположението за компактност на Δ' не е съществено. Ние го направихме, за да можем да се позовем на споменатата теорема от диференциалното смятане, която е доказана от нас при това предположение. Тази теорема е вярна обаче и в случая, когато разглежданият интервал не е компактен. Нека читателят сам обмисли доказателството.

В бъдеще, вместо да казваме, че си служим с формулите (4) и (5), ще казваме накратко, че правим субституцията $x = \varphi(t)$ в интеграла

$$\int f(x)\,dx.$$

Пример 12.[1] Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

в безкрайния интервал $x > 0$.

Разглеждаме функцията

$$\varphi(t) = \sqrt{t-1},$$

където $t > 1$. Множеството от функционалните стойности на тази функция съвпада точно с интересуващия ни интервал $x > 0$. Функцията

$$\psi(x) = x^2+1,$$

където $x > 0$, е една обратна функция на $\varphi(t)$, защото функцията $\psi(x)$ е дефинирана при $x > 0$, стойностите ѝ принадлежат на дефиниционната област на $\varphi(t)$ и

$$\varphi[\psi(x)] = \sqrt{(x^2+1)-1} = |x| = x.$$

Образуваме си помощната функция

$$g(t) = \int \frac{\varphi(t)\,d\varphi(t)}{\sqrt{\varphi^2(t)+1}} = \int \frac{\sqrt{t-1}\,d\sqrt{t-1}}{\sqrt{(\sqrt{t-1})^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}+C.$$

Като приложим формулата (5), намираме

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = g[\psi(x)] = \sqrt{\psi(x)}+C = \sqrt{x^2+1}+C.$$

На практика записваме пресмятанията обикновено по следния начин: полагаме

(7) $$x = \sqrt{t-1}$$

и пишем

$$I = \int \frac{\sqrt{t-1}\,d\sqrt{t-1}}{\sqrt{(\sqrt{t-1})^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}+C;$$

като решим уравнението (7) относно t, получаваме

$$t = x^2+1;$$

заместваме t с равното му; то ни дава

$$I = \sqrt{x^2+1}+C.$$

Същата задача можем да решим и с помощта на формулата (2) по следния начин: очевидно

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}};$$

като вземем пред вид, че

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+C,$$

[1] Читателят трябва да разгледа всички примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.

получаваме

$$I=\sqrt{x^2+1}+C.$$

Това решение има предимството, че се отнася за всички стойности на x, а не само за положителни стойности, както имахме в предишното решение.

Пример 13. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\quad a>0.$$

в интервала $-a<x<a$.

Разглеждаме функцията

$$\varphi(t)=a\cos t$$

при $0<t<\pi$. Множеството от функционалните стойности на $\varphi(t)$ представлява точно интересуващият ни интервал $(-a, a)$. Функцията

$$\psi(x)=\arccos\frac{x}{a},\quad -a<x<a,$$

е една обратна функция на $\varphi(t)$.

Образуваме си помощната функция

$$g(t)=\int\sqrt{a^2-\varphi^2(t)}\,d\varphi(t)=\int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}\,da\cos t=$$

$$=-a^2\int\sqrt{\sin^2 t}\,\sin t\,dt=-a^2\int|\sin t|\sin t\,dt$$

Тук имаме $\sin t>0$, защото $0<t<\pi$, и следователно

$$g(t)=-a^2\int\sin^2 t\,dt.$$

По-нататък получаваме

$$g(t)=-a^2\int\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{-a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\int\cos 2t\,d\,2t=$$

$$=\frac{-a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{-a^2t}{2}+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C.$$

Като се възползуваме от формулите (4) и (5), намираме

$$I=g(\psi(x))=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 14. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

при произволни реални стойности на x.

Разглеждаме функцията

$$\psi(t)=\operatorname{tg} t$$

при $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. Множеството от стойностите на тази функция съвпада с множеството на реалните числа.[1] Функцията

$$\varphi(x)=\operatorname{arc\,tg} x$$

е обратна на функцията $\psi(t)$.

Образуваме си помощната функция

$$g(t)=\int\frac{d\varphi(t)}{[1+\varphi^2(t)]^2}=\int\frac{d\operatorname{tg} t}{(t+\operatorname{tg}^2 t)^2}=\int\frac{dt}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2\cos^2 t}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2\cos^2 t}=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\int\cos 2t\,d\,2t+C=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C.$$

Като се възползуваме от формулите (4) и (5), намираме

$$I=g[\psi(x)]=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2\operatorname{arc\,tg} x)+C=$$

$$=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} x)}+C=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+C.$$

Тук ние се възползувахме от формулата

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I=\int 5x^3\,dx.$ Отг. $I=\frac{5}{4}x^4+C.$
2. $I=\int(2x^3-3x+5)\,dx.$ Отг. $I=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$
3. $I=\int\frac{5}{x^3}\,dx,\ x>0.$ Отг. $I=-\frac{5}{2x^2}+C.$
4. $I=\int\frac{2x^3-5x+3}{x}\,dx,\ x<0.$ Отг. $I=\frac{2}{3}x^3-5x+3\ln|x|+C.$
5. $I=\int\sqrt[3]{x^2}\,dx.$ Отг. $I=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C.$

[1] Т. е. това е точно интервалът, в който искаме да пресметнем интеграла.

6. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x}},\ x>0.$ Отг. $I=2\sqrt{x}+C.$

7. $I=\int (2x+1)^2\,dx.$ Отг. $I=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C.$

8. $I=\int \sqrt{2x+3}\,dx,\ 2x+3\geq 0.$ Отг. $I=\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}+C.$

9. $I=\int \sqrt{2-x}\,dx,\ 2-x\geq 0.$ Отг. $I=-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}+C.$

10. $I=\int (ax+b)^n\,dx,\ ax+b\geq 0.$ Отг. $I=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C.$

$a\neq 0,\ n\neq -1.$

11. $I=\int \frac{dx}{ax+b},\ a\neq 0,\ ax+b<0.$ Отг. $I=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$

12. $I=\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx.$ Отг. $I=\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+C.$

13. $I=\int e^{\sin x}\cos x\,dx.$ Отг. $I=e^{\sin x}+C.$

14. $I=\int \sin(\ln x)\frac{dx}{x},\ x>0.$ Отг. $I=-\cos(\ln x)+C.$

15. $I=\int \frac{dx}{x^2+6x+10}.$

Решение.

$$I=\int \frac{dx}{(x+3)^2+1}=\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1}=\operatorname{arc\,tg}(x+3)+C.$$

16. $I=\int \frac{dx}{2x^2+4x+5}.$

Решение.

$$I=2\int \frac{dx}{4x^2+8x+10}=2\int \frac{dx}{4x^2+8x+4+6}=2\int \frac{dx}{(2x+2)^2+6}=$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+2}{\sqrt{6}}\right)^2+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\int \frac{d\frac{2x+2}{\sqrt{6}}}{\left(\frac{2x+2}{\sqrt{6}}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

17. $I=\int \frac{dx}{x^2-5x+6},\ 2<x<3.$

Решение.

$$I=\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\int \frac{1}{x-3}\,dx-\int \frac{dx}{x-2}=\ln|x-3|-\ln|x-2|+C.$$

18. $I=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},\ a\neq 0,\ ax^2+by+c\neq 0.$

Упътване.

$$I=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

Отговор.

1. Ако $b^2-4ac<0$, $I=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C.$

2. Ако $b^2-4ac>0$, $I=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left[\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right]+C.$

3. Ако $b^2-4ac=0$, $I=-\frac{2}{2ax+b}+C.$

19. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}},\ 2+2x-x^2>0$

Решение.

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{3-(x-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\int \frac{d\frac{x-1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

20. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

Решение.

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}=\int \frac{d\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}=$$

$$=\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)+C=$$

$$=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C_1.$$

21. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0,\ ax^2+bx+c>0.$

Упътване. Разгледайте поотделно всичките случаи в зависимост от знаците на a и b^2-4ac. Сравнете със задача 18.

22. $I=\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx,\ x>a>0.$

Решение.

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{x^2-a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}-a^2\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{x^2-a^2}}-a^2\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-a^2)}{\sqrt{x^2-a^2}}+a\int\frac{d\frac{a}{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}=\sqrt{x^2-a^2}+a\arcsin\frac{a}{x}+C.$$

23. $I=\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx,\ x>0.$

Решение.

$$I=\int\frac{x^2+a^2}{x\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}+a^2\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)}}+a^2\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}}=\sqrt{x^2+a^2}-a\int\frac{d\frac{a}{x}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}}=$$

$$=\sqrt{x^2+a^2}-a\ln\left(\frac{a}{x}+\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}\right)+C.$$

24. $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}},\ b>a>0,\ a<x<b.$

Решение.

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}\frac{d(x^2-a^2)}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}d\sqrt{x^2-a^2}=$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2+(a^2-x^2)}}d\sqrt{x^2-a^2}=\int\frac{d\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}\right)^2}}=$$

$$=\arcsin\left(\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}\right)+C.$$

25. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}},\ x>-a,\ x>-b,\ a\neq b.$

Решение.

$$I=\int\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})\,dx}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})}=$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\int\sqrt{x+a}\,dx-\int\sqrt{x+b}\,dx\right]=\frac{2(x+a)^{\frac{3}{2}}}{3(a-b)}-\frac{2(x+b)^{\frac{3}{2}}}{3(a-b)}+C.$$

26. $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},\ x>0.$

Решение.

$$I=\int\frac{dx}{x^3(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^{-2}+1)}{(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}=(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}+C.$$

27. $I=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},\ x<0.$

Решение.

$$I=-\int\frac{dx}{x^3(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^{-2}+1)}{(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}=-(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}+C.$$

Забележка. Резултатите от задачите 26 и 27 могат да се представят още така:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

Този резултат е валиден за всички стойности на x, включително и за точката $x=0$.

28. $I=\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $0<x<1$.

Отг. $I=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

29. $I=\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{n+1}{n}}}$, $a\neq 0$, $a+bx^n>0$.

Отг. $I=\frac{x}{a(a+bx^n)^{\frac{1}{n}}}+C$.

30. $I=\int \cos^2 x dx$

Отг. $I=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$.

31. $I=\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$, $-a<x<a$.

Отг. $I=-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$.

32. $I=\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Отг. $I=\frac{x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$.

33. $I=\int \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, $a>0$, $2ax-x^2>0$.

Отг. $I=a\arccos\frac{a-x}{a}-\sqrt{2ax-x^2}+C$

34. $I=\int \sin^3 x dx$.

Решение.

$$I=-\int \sin^2 x\, d\cos x=-\int(1-\cos^2 x)\, d\cos x=$$

$$=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

35. $I=\int \sin^2 x\cos^3 x dx$.

Отг. $I=-\frac{1}{5}\sin^5 x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

36. $I=\int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}dx$.

Отг. $I=\operatorname{arc\,tg}(\sin x)+C$.

37. $I=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$, $\sin x\cos x\neq 0$.

Решение.

$$I=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C.$$

38. $I=\int \frac{dx}{\sin x}$, $0<x<\pi$.

Отг. $I=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

39. $I=\int \frac{dx}{\cos x}$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

Отг. $I=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C$.

40. $I=\int \operatorname{tg} x\, dx$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

Отг. $I=-\ln\cos x+C$.

41. $I=\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$, $a\sin x+b\cos x\neq 0$.

Упътване. Положете

$$a=\rho\cos\theta,$$
$$b=\rho\sin\theta;$$

тогава

$$I=\frac{1}{\rho}\int\frac{dx}{\sin(x+\theta)}.$$

Отг. $I=\frac{1}{\rho}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\theta}{2}\right|$.

42. $I=\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Отг. $I=\operatorname{arc\,tg} e^x+C$.

43. $I=\int \frac{dx}{e^x+1}$

Отг. $I=\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C$.

§ 5. Интегриране по части

Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми в някой интервал Δ и нека функцията $v(x)\,u'(x)$ има примитивна в този интервал. В такъв случай функцията $u(x)\,v'(x)$ също има примитивна и

(1) $$\int u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)-\int v(x)\,u'(x)\,dx+C.$$

За да установим това, достатъчно е да покажем, че функцията

$$u(x)\,v(x)-\int v(x)\,u'(x)\,dx$$

е един неопределен интеграл за функцията $u(x)\,v'(x)$. Това се вижда непосредствено от следното равенство:

$$\left[u(x)\,v(x)-\int v(x)\,u'(x)\,dx\right]'=$$

$$=[u(x)v(x)]'-\left[\int v(x)\,u'(x)\,dx\right]'=u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)-$$

$$-v(x)\,u'(x)=u(x)\,v'(x).$$

Ние обикновено ще пишем равенството (1) във вида

$$\int u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)-\int v(x)\,du(x)+C. \tag{2}$$

Равенството (2) се нарича формула за интегриране по части

Пример 1.[1] Да се пресметне интегралът

$$I=\int \ln x\,dx,\ x>0.$$

Решение. Прилагаме формулата (2), като избираме

$$u(x)=\ln x,\ v(x)=x.$$

Тази формула ни дава

$$\int \ln x\,dx=(\ln x)x-\int x\,d\ln x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

Пример 2. Да се пресметне интегралът

$$I=\int x\ln x\,dx,\ x>0.$$

Решение. Очевидно

$$I=\frac{1}{2}\int \ln x\,dx^2.$$

[1] Читателят трябва да разгледа всички примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.

Прилагаме формулата (2), като избираме

$$u(x)=\ln x,$$

$$v(x)=x^2.$$

Това ни дава

$$I=\frac{1}{2}(\ln x)\,x^2-\frac{1}{2}\int x^2\,d\ln x=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{4}x^2+C.$$

Пример 3. Да се пресметне интегралът

$$I=\int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx.$$

Решение. Очевидно

$$I=\frac{1}{2}\int \mathrm{arc\,tg}\,x\,dx^2=\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\frac{1}{2}\int x^2\,d\,\mathrm{arc\,tg}\,x=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\frac{x^2\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{2}-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x+C.$$

Пример 4. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx,\ x>a>0.$$

Решение. Като се възползуваме от формулата за интегриране по части, намираме

$$I=x\sqrt{x^2-a^2}-\int x\,d\sqrt{x^2-a^2}=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-I-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$$

Оттук получаваме

$$2I=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

и следователно

$$I=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C}{2}.$$

Забележка. Като приложихме формулата за интегриране по части, ние използувахме в същност, че функцията

$$\varphi(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

има примитивна в интервала $x>a$. Това обаче не се вижда непосредствено от изложеното досега, поради което решението не може да се счита за завършено. След като обаче веднъж е получена функцията

$$F(x)=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})}{2},$$

ние можем да установим лесно, че тя наистина е една примитивна на функцията $\sqrt{x^2-a^2}$ при $x>a$. За целта е достатъчно да покажем с директно пресмятане, че

$$F'(x)=\sqrt{x^2-a^2}.$$

По-късно ще покажем, че ако една функция е непрекъсната в един интервал, тя сигурно има примитивна в този интервал, нещо, което ще ни освободи от необходимостта да прецизираме изложеното тук решение. Нека отбележим обаче, че средствата, с които разполагаме досега, също ни дават възможност да установим (макар и по-сложно), че функцията $\varphi(x)$ има примитивна при $x>a$. Това може да стане например така: полагаме

$$x=a\frac{3-t}{1+t},$$

където $-1<t<1$; в такъв случай интегралът

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

се преобразува формално в интеграла

$$g(t)=-\frac{4a^2}{\sqrt{8}}\int\frac{(3-t)^2}{(1-t)^4\sqrt{1-t}}\,dt;$$

функцията

$$h(t)=-\frac{4a^2}{\sqrt{8}}\,\frac{(3-t)^2}{(1+t)^4\sqrt{1-t}}$$

обаче има примитивна в интервала $-1<t<1$, защото е развиваема в степенен ред, както ни учи Нютоновият бином и правилото

за умножаване на редове; след като е установено съществуването на една примитивна функция на $h(t)$ при $-1<t<1$, ние можем да твърдим въз основа на теоремата за смяна на променливите, че функцията $\varphi(x)$ също има примитивна при $x>a$.

Пример 5. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0,\ -a<x<a.$$

Решение. Като използуваме формулата за интегриране по части, намираме

$$I=x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\,d\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-a^2+a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}-I=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-I+C.$$

Оттук получаваме

$$2I=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}+C$$

и следователно

$$I=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}+C}{2}.$$

Забележка 1. Сравнете с предната задача. Съществуването на неопределения интеграл

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

при $-a<x<a$, което използувахме при интегрирането по части, следва например от това, че подинтегралната функция е развиваема в степенен ред при $-a<x<a$. Както вече имахме случай да отбележим, това ще следва и от общата теорема (която ще до-

кажем по-късно) за съществуване на неопределен интеграл във всеки интервал, в който подинтегралната функция е непрекъсната.[1]

Забележка 2. В пример 13, § 4 на тази глава е посочено как разглежданият тук интеграл може да се пресметне със субституция.

Пример 6. Да се пресметне интегралът

$$I_n=\int x^n e^x\,dx,$$

където n е цяло положително число.

Решение. Очевидно

$$I_n=\int x^n\,de^x=x^n e^x-\int e^x\,dx^n=$$

$$=x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

или

$$I_n=x^n e^x-nI_{n-1}. \tag{3}$$

Така намерената рекурентна зависимост ни позволява да изразим I_n чрез I_{n-1}. Прилагайки няколко пъти формулата (3), добиваме възможност да изразим I_n чрез познатия интеграл

$$I_0=\int e^x\,dx=e^x+C.$$

Така например, за да пресметнем интеграла

$$I_3=\int x^3 e^x\,dx,$$

използуваме равенствата

$$I_3=x^3e^x-3I_2,$$
$$I_2=x^2e^x-2I_1,$$
$$I_1=xe^x-I_0,$$
$$I_0=e^x+C.$$

Като елиминираме I_2, I_1, I_0, получаваме

$$I_3=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+C_1,$$

където сме положили $-6C=C_1$.

[1] В бъдеще често ще има място за подобни забележки, обаче ние повече няма да ги правим.

Пример 7. Да се пресметне интегралът

$$I_n=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

където n е цяло положително число.

Решение. При $n=1$ имаме познат интеграл. Нека $n>1$. В такъв случай извършваме следните преобразувания:

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}-\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n}=$$

$$=I_{n-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x\,d(x^2+1)}{(1+x^2)^n}=I_{n-1}+\frac{1}{2(n-1)}\int x\,d\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}=$$

$$=I_{n-1}+\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx=$$

$$=I_{n-1}+\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\cdot I_{n-1}.$$

Оттук получаваме

$$I_n=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$

Като приложим няколко пъти тази формула или като повторим няколко пъти разсъжденията, с помощта на които я получихме, стигаме до познатия интеграл

$$I_1=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

Като пример да пресметнем интеграла

$$I_2=\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Очевидно имаме

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx=\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x\,d(x^2+1)}{(1+x^2)^2}=\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int x(1+x^2)^{-2}\,d(1+x^2)=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int x\,d\frac{(1+x^2)^{-2+1}}{-2+1}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\int x\,d\frac{1}{1+x^2}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$$

и следователно

$$I_2=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

Сравнете с пример 14 към § 4 на тази глава.

Пример 8. Да се пресметне интегралът

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^n x\,dx,$$

където числата m и n са цели (положителни, отрицателни или нули).

Решение. При $m\neq-1$ имаме

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^{n-1}x.\cos x\,dx=\int\sin^m x\cos^{n-1}x\,d\sin x=$$

$$=\frac{1}{m+1}\int\cos^{n-1}x\,d\sin^{m+1}x=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}-\frac{1}{m+1}\int\sin^{m+1}x\,d\cos^{n-1}x=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+}}{m+1}-\frac{1}{m+1}\int(\sin^{m+1}x)(n-1)(\cos^{n-2}x)(-\sin x)\,dx=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int(\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx=$$

$$=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx-$$

$$-\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}I_{m,n-2}-\frac{n-1}{m+1}\cdot I_{m,n}$$

Оттук намираме

(4) $$(n+m)\,I_{m,n}=\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x+(n-1)\,I_{m,n-2}.$$

Тази формула, която изведохме при предположение, че $m\neq-1$, е вярна и при $m=-1$, както това се вижда, като сравним производните на двете страни на равенството (4).

По същия начин получаваме при $n\neq-1$

$$I_{m,n}=\int\sin^{m-1}x\cos^n x\sin x\,dx=-\int\sin^{m-1}x\cos^n x\,d\cos x=$$

$$=-\frac{1}{n+1}\int\sin^{m-1}x\,d\cos^{n+1}x=$$

$$=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{n+2}x\sin^{m-2}x\,dx=$$

$$=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^n x(1-\sin^2 x)\sin^{m-2}x\,dx=$$

$$=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n}-\frac{m-1}{n+1}I_{m,n}.$$

Оттук намираме[1]

(5) $$(m+n)\,I_{m,n}=-\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+(m-1)\,I_{m-2,n}.$$

С помощта на формулите (4) и (5) ние можем да изразим $I_{m,n}$ чрез $I_{m,n-2}$ и $I_{m-2,n}$, стига да имаме $m+n\neq0$. Ние имаме интерес да си служим с формулата (4), съответно (5), когато числото n, съответно m, е по-голямо от 1.

Ако числото n е отрицателно и $n+1\neq0$, бихме могли да постъпим по следния начин:

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int\sin^{m+2}x\cos^n x\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=-\int\sin^{m+2}x\cos^n x\,d\operatorname{ctg} x=\int\sin^{m+n+2}x\frac{\cos^n x}{\sin^n x}\,d\operatorname{ctg} x=$$

$$=-\int\sin^{m+n+2}x(\operatorname{ctg}x)^n\,d\operatorname{ctg} x=-\frac{1}{n+1}\int\sin^{m+n+2}x\,d(\operatorname{ctg} x)^{n+1}=$$

$$=-\frac{1}{n+1}\sin^{m+n+2}x\operatorname{ctg}^{n+1}x+\frac{1}{n+1}\int\operatorname{ctg}^{n+1}x\,d\sin^{m+n+2}x=$$

$$=\frac{-1}{n+1}\sin^{m+n+2}x\operatorname{ctg}^{n+1}x+\frac{m+n+2}{n+1}\int\operatorname{ctg}^{n+1}x\sin^{m+n+1}x\cos x\,dx=$$

$$=\frac{-\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m+n+2}{n+1}\int\sin^m x\cos^{n+2}x\,dx,$$

[1] Това равенство е валидно и при $n=-1$; в това се убеждаваме, като сравним производните на двете му страни.

откъдето[1]

$$(6)\qquad I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m+n+2}{n+1}I_{m,n+2}.$$

По този начин изразихме интеграла $I_{m,n}$ чрез $I_{m,n+2}$. Аналогично при $m+1\neq 0$ намираме

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int\sin^m x\cos^{n+2}x\,\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^m\cos^{n+m+2}x\,d\,\mathrm{tg}\,x=\int(\mathrm{tg}\,x)^m\cos^{n+m+2}x\,d\,\mathrm{tg}\,x=$$

$$=\frac{1}{m+1}\cos^{n+m+2}x\,d(\mathrm{tg}\,x)^{m+1}=$$

$$=\frac{1}{m+1}\cos^{n+m+2}x\,\mathrm{tg}^{m+1}x-\frac{1}{m+1}\int\mathrm{tg}^{m+1}x\,d\cos^{n+m+2}x=$$

$$=\frac{\cos^{n+1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n+m+2}{m+2}\int\mathrm{tg}^{m+1}x\cos^{n+m+1}x\sin x\,dx,$$

откъдето[2]

$$(7)\qquad I_{m,n}=\frac{\cos^{n+1}x\sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{n+m+2}{m+1}I_{m+2,n}.$$

Ние използуваме формулата (7), когато числото m е отрицателно.

Като приложим няколко пъти формулите (4), (5), (6) и (7) или още по-добре, като повторим няколко пъти разсъжденията, с помощта на които ги получихме, можем винаги да изразим интеграла $I_{m,n}$ чрез някой от следните познати интеграли:

$$I_{0,0}=\int dx=x+C;\qquad I_{1,0}=\int\sin x\,dx=-\cos x+C;$$

$$I_{0,1}=\int\cos x\,dx=\sin x+C;\qquad I_{1,1}=\int\sin x\cos x\,dx=$$

$$=\int\sin x\,d\sin x=\frac{\sin^2 x}{2}+C;$$

$$I_{1,-1}=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C;$$

$$I_{-1,1}=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=\ln|\sin x|+C;$$

[1] Формулите (4) и (6) не са съществено различни. За да се убедем в това, достатъчно е да решим равенството (4) относно $I_{m,n-2}$ и да заменим n с $n+2$.

[2] Формулите (5) и (7) не са съществено различни.

$$I_{-1,0}=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=$$

$$=\int\frac{d\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C;$$

$$I_{-1,-1}=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\mathrm{tg}\,x}=\int\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x}=\ln|\mathrm{tg}\,x|+C;$$

$$I_{0,-1}=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$$

Така например ние можем да пресметнем интеграла

$$I_{2,0}=\int\sin^2 x\,dx$$

по следния начин:

$$I_{20,}=\int\sin x\sin x\,dx=-\int\sin x\,d\cos x=-\sin x\cos x+$$

$$+\int\cos x\,d\sin x=-\sin x\cos x+\int\cos^2 x\,dx=-\sin x\cos x+$$

$$+\int(1-\sin^2 x)\,dx=-\sin x\cos x+x-I_{2,0}+C,$$

откъдето

$$2I_{2,0}=-\sin x\cos x+x+C$$

и следователно

$$I_{2,0}=\frac{-\sin x\cos x+x+C}{2}.$$

Сравнете с пример 9 в § 4 на тази глава.

Като втори пример ще разгледаме интеграла

$$I_{0,-3}=\int\frac{dx}{\cos^3 x},\qquad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \sin^{-1} x \operatorname{ctg}^{-3} x \, d \operatorname{ctg} x =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin^{-1} x \, d \operatorname{ctg}^{-2} x = \frac{1}{2} \sin^{-1} x \operatorname{ctg}^{-2} x - \frac{1}{2} \int \operatorname{ctg}^{-2} x \, d \sin^{-1} x =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

Разгледаните тук общи пътища за пресмятане на интеграли от вида

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

не винаги са най-простите. Така например, за да пресметнем интеграла

$$I_{0,3} = \int \cos^3 x \, dx,$$

по-добре е да постъпим така:

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \, d \sin x = \int (1 - \sin^2 x) \, d \sin x =$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Същото се отнася за интеграла

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x \, d \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$$

Пример 9. Да се пресметнат интегралите

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx,$$

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

при $a^2 + b^2 \neq 0$.

Решение. Формулата за интегриране по части ни дава при $a \neq 0$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} \int \cos bx \, de^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} \int \sin bx \, de^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

или по-кратко

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} I_2,$$

$$I_2 = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} I_1.$$

(Ние не пишем интеграционните константи само за краткост.)

Оттук намираме

$$I_1 = \frac{e^{ax} [a \cos bx + b \sin bx]}{a^2 + b^2},$$

$$I_2 = \frac{e^{ax} [a \sin bx - b \cos bx]}{a^2 + b^2}.$$

Ние получихме тези формули при предположението, че $a \neq 0$. Те са валидни обаче и при по-общото предположение, че имаме $a^2 + b^2 \neq 0$, което се вижда с директна проверка.

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I = \int x^n \ln x \, dx, \quad x > 0, \quad n \neq -1.$

Отговор. $I = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$

2. $I = \int x^n (\ln x)^2 \, dx, \quad x > 0, \quad x \neq -1.$

Отговор. $I = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^2 - \frac{2}{(n+1)^2} x^{n+1} \ln x + \frac{2}{(n+1)^3} x^{n+1} + C.$

3. $I = \int x^3 e^x \, dx.$

Отговор. $I = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C.$

4. $I = \int x^2 \cos x \, dx.$

Отговор. $I = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C.$

5. $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad -1 < x < 1.$

Отговор. $I = -\frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C.$

6. $I = \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx.$

Отговор. $I = \frac{1}{2} [x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C].$

7. $I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx,\quad I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx,\quad a^2+b^2\neq 0.$

Отговор. $I_1=e^{ax}\dfrac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}+C_1,\ I_2=$

$$=e^{ax}\frac{-b\cos bx+a\sin bx}{a^2+b^2}+C_2.$$

8. $I=\int \arcsin x\,dx,\quad -1<x<1.$

Отговор. $I=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

9. $I=\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

Отговор. $I=x\operatorname{arc\,tg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

10. $I=\int x\arcsin x\,dx,\quad -1<x<1.$

Отговор. $I=\dfrac{2x^2-1}{4}\arcsin x+\dfrac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C.$

11. $I=\int x^2\arcsin x\,dx,\quad -1<x<1.$

Отговор. $I=\dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^3}{3}\arcsin x+C.$

12. $I=\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

Отговор. $I=\dfrac{1}{2}(x^2\operatorname{arc\,tg} x-x+\operatorname{arc\,tg} x)+C.$

13. $I=\int\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\,dx,\quad x>0.$

Отговор. $I=-\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}+\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

14. $I=\int\cos^2 x\,dx.$

Отговор. $I=\dfrac{x+\sin x\cos x}{2}+C.$

15. $I=\int\sin^2 x\,dx.$

Отговор. $I=\dfrac{x-\sin x\cos x}{2}+C.$

16. $I=\int\cos^4 x\,dx.$

Отговор. $I=\dfrac{1}{4}\cos^3 x\sin x+\dfrac{3}{8}\cos x\sin x+\dfrac{3}{8}x+C.$

17. $I=\int\dfrac{dx}{\sin^4 x},\quad 0<x<\pi.$

Отговор. $I=-\operatorname{cotg} x-\dfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x+C.$

18. $I=\int\dfrac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x},\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}.$

Отговор. $I=\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{cotg} 2x+C.$

19. $I=\int\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx.$

Отговор. $I=\int\sin^{n-1}x(\cos nx\cos x-\sin nx\sin x)\,dx=$

$$=\frac{1}{n}\int\cos nx\,d\sin^n x-\int\sin^n x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}-\frac{1}{n}\int\sin^n x\,d\cos nx-\int\sin^n x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}+C.$$

20. $I=\int\dfrac{dx}{(1+x^2)^2}.$

Отговор. $I=\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{1+x^2}+C.$

21. $I=\int\dfrac{dx}{(1+x^2)^3}.$

Отговор. $I=\dfrac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x+\dfrac{3x}{8(1+x^2)}+\dfrac{x}{4(1+x^2)^2}+C.$

22. $I=\int\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx,\quad x>0.$

Отговор. $I=(x+1)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$

23. $I=\int\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx,\quad -1<x<1.$

Отговор. $I=\int\arcsin x\,d\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x-\int\dfrac{x\,dx}{1-x^2}=$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C.$$

24. $I_1=\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad I_2=\int e^{\arcsin x}dx, \quad -1<x<1.$

Отговор. $I_1=\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}\,e^{\arcsin x}+C_1,$

$I_2=\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{2}\,e^{\arcsin x}+C_2.$

25. $I=\int \sin(\ln x)\,dx, \quad x>0.$

Отговор. $I=x\,\frac{\sin(\ln x)-\cos(\ln x)}{2}+C.$

26. $I=\int e^{ax}\cos^2 x\,dx, \quad a\neq 0.$

Отговор. $I=e^{ax}\left[\frac{\sin 2x}{a^2+4}+\frac{a}{2}\,\frac{\cos 2x}{a^2+4}+\frac{1}{2a}\right].$

27. $I=\int \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}\,e^{\operatorname{arc\,tg} x}+C.$

28. $I=\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx, \quad x>0.$

Отговор. $I=\frac{2}{3}\,(e^x+2)\sqrt{e^x-1}+C.$

29. $I=\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad -1<x<1.$

Отговор. $I=x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C.$

30. $I=\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$

Отговор. $I=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$

31. $I=\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx, \quad -1<x<1.$

Отговор. $I=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}(\arcsin x-x)+C.$

32. $I=\int xe^x\cos x\,dx.$

Отговор. $I=\frac{1}{2}\,xe^x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}\,e^x\sin x+C.$

33. $I=\int x(\operatorname{arc\,tg} x)^2\,dx.$

Отговор. $I=\frac{1}{2}(x\operatorname{arc\,tg} x)^2+\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2-x\operatorname{arc\,tg} x+$

$+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

§ 6. Разлагане на дробни рационални функции[1]

В този и следващите два параграфа ще изложим един общ метод за пресмятане на интеграли от рационални функции. Една функция $R(x)$ се нарича рационална, когато тя може да се представи[2] във вида[3]

$$R(x)=\frac{p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n}{q_0x^m+q_1x^{m-1}+\cdots+q_m}, \quad q_0\neq 0,$$

където коефициентите $p_0, p_1, \ldots, p_n; q_0, q_1, \ldots, q_m$ и целите неотрицателни числа n и m не зависят от x. Ние ще разглеждаме само рационални функции с реални коефициенти.

Да разгледаме полинома

$$f(x)=q_0x^m+q_1x^{m-1}+\cdots+q_m.$$

Нека a е корен на уравнението $f(x)=0$. Както е известно от висшата алгебра, полиномът $f(x)$ може да се представи във вида[4]

$$f(x)=(x-a)^\alpha\varphi(x).$$

---

[1] В този параграф ние ще използуваме особено много познанията на читателя от висшата алгебра. Така ние ще предполагаме, че читателят е запознат с комплексните числа и познава основните свойства на полиномите.

[2] В цялата дефиниционна област.

[3] Читателят знае, че ако $m=0$, то $R(x)$ се нарича полином. Тази терминология ни позволява да изкажем по следния начин дефиницията на понятието (дробна) рационална функция. Една функция се нарича рационална, когато тя може да се представи като частно на два полинома. (При това се иска, разбира се, полиномът в знаменателя да не се анулира тъждествено.)

[4] Доказателството може да се извърши например с помощта на формулата на Тейлор за полиноми, която, както е известно от висшата алгебра, е валидна и в областта на комплексните числа. И наистина нека α е най-малкото цяло положително число, за което $f^{(\alpha)}(a)\neq 0$. Такова число сигурно съществува, защото

$$f^{(m)}(a)=q_0m!\neq 0.$$

Да разгледаме формулата на Тейлор

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m.$$

Като вземем под внимание, че

$$f(a)=\cdots=f^{(\alpha-1)}(a)=0,$$

където $\varphi(x)$ е полином, α — цяло положително число[1] и $\varphi(a) \neq 0$. Ако коренът a е реален, то коефициентите на $\varphi(x)$ са също така реални.

Да положим за краткост

$$g(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n.$$

Нека коренът a е реален. Ние ще покажем, че може да се намери еднозначно реална константа A и полином с реални коефициенти $h(x)$ по такъв начин, че да имаме

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{h(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}. \tag{1}$$

Ще започнем с по-простия въпрос — с въпроса за единственост.

Да допуснем за момент, че наистина съществува константа A и полином $h(x)$ с исканото свойство. В такъв случай имаме

$$g(x) = A\varphi(x) + h(x)(x-a). \tag{2}$$

Равенството (1) има смисъл, разбира се, само при такива стойности на x, за които $f(x) \neq 0$. По-специално трябва да имаме $x \neq a$. Поне при тези стойности на x е валидно и равенството (2). По този начин е осигурена валидността на равенството (2) при безбройно много стойности на x. От това обаче следва, че то̀ва равенство е валидно при всички стойности на x без изключение.[2] Специално при $x = a$ получаваме

$$g(a) = A\varphi(a)$$

и следователно

$$A = \frac{g(a)}{\varphi(a)} \tag{3}$$

и

$$h(x) = \frac{\varphi(a)g(x) - g(a)\varphi(x)}{(x-a)\varphi(a)}. \tag{4}$$

намираме

$$f(x) = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m.$$

Да положим

$$\varphi(x) = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^{m-\alpha}$$

В такъв случай

$$f(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x)$$

и

$$\varphi(a) = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} \neq 0.$$

[1] Числото α се нарича кратност на корена a.

[2] Ние знаем, че ако два полинома приемат една и съща стойност при безбройно много стойности на независимата променлива, те са тъждествено равни помежду си.

С това е показано, че константата A и полиномът $h(x)$ не могат да бъдат други освен тези, които се дават от равенствата (3) и (4) (ако въобще интересуващата ни задача за представяне на функцията $\frac{g(x)}{f(x)}$ във вида (1) има решение). По този начин ние получихме (положителен) отговор на въпроса за единственост.

Преминаваме към въпроса за съществуване. Тук ще се ръководим от резултатите, които добихме, изследвайки въпроса за единственост.

Разглеждаме помощния полином

$$\psi(x) = g(x) - A\varphi(x), \tag{5}$$

където[1]

$$A = \frac{g(a)}{\varphi(a)}.$$

В такъв случай очевидно имаме

$$\psi(a) = g(a) - \frac{g(a)}{\varphi(a)}\varphi(a) = 0.$$

Въз основа на този резултат ние можем да твърдим (както ни учи висшата алгебра[2]), че полиномът $\psi(x)$ се дели без остатък на $x-a$. Това означава, че полиномът $\psi(x)$ може да се представи във вида

$$\psi(x) = (x-a)h(x), \tag{6}$$

където $h(x)$ е полином. Равенствата (5) и (6) ни дават

$$g(x) = A\varphi(x) + (x-a)h(x),$$

откъдето

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A\varphi(x)}{f(x)} + \frac{(x-a)h(x)}{f(x)}$$

и следователно

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{h(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}.$$

[1] При избора на константата A ние се ръководим от равенството (3).

[2] Верността на това твърдение е очевидна, ако полиномът $\psi(x)$ се анулира тъждествено. Ако полиномът $\psi(x)$ не се анулира тъждествено, ние ще означим с k неговата степен. В такъв случай, като вземем под внимание, че $\psi(a) = 0$, получаваме от формулата на Тейлор равенството

$$\psi(x) = \frac{\psi'(a)}{1!}(x-a) + \frac{\psi''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{\psi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

или

$$\psi(x) = (x-a)\left[\frac{\psi'(a)}{1!} + \frac{\psi''(a)}{2!}(x-a) + \cdots + \frac{\psi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1}\right].$$

С това твърдението е доказано.

С това ние доказахме, че е възможно да се намери по такъв начин една константа A и един полином $h(x)$, че да имаме (1) при всички стойности на x, за които $f(x) \neq 0$.

Като приложим няколко пъти получения резултат, ние добиваме възможност да представим функцията $\frac{g(x)}{f(x)}$ във вида

$$(7) \qquad \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{p(x)}{\varphi(x)},$$

където $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ са константи, а $p(x)$ е полином на x. За да се убедим в това, представяме $\frac{g(x)}{f(x)}$ във вида

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{g_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)},$$

където A_1 е константа и $g_1(x)$ е полином. Както вече знаем от току-що доказаната теорема, това може да се направи. Като приложим още веднъж тази теорема, заключваме, че функцията

$$\frac{g_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}$$

може да се представи във вида

$$\frac{g_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{g_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi(x)}$$

(разбира се, когато $\alpha-1>0$).

Продължавайки тези разсъждения, намираме

$$\frac{g_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi(x)} = \frac{A_3}{(x-a)^{\alpha-2}} + \frac{g_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3}\varphi(x)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{g_{\alpha-1}(x)}{(x-a)\varphi(x)} = \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{g_\alpha(x)}{\varphi(x)}.$$

От тази верига равенства получаваме равенството (7), където

$$p(x) = g_\alpha(x).$$

Представянето (7) е валидно и тогава, когато a е комплексно число. В такъв случай обаче ние не можем да твърдим изобщо, че коефициентите $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ са реални. Но и в този случай ние можем да дадем едно разлагане на рационалната функция $\frac{g(x)}{f(x)}$, при което няма да става нужда да напускаме областта на реалните числа.

От висшата алгебра е известно следното: ако коефициентите на уравнението

$$f(x) = 0,$$

където

$$f(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \cdots + q_m$$

са реални и a е един корен на това уравнение от кратност α, то числото $\bar{a}$ е също[1] негов корен от кратност α. В случая, когато коренът a не е реален, ние можем (както знаем от висшата алгебра) да представим полинома $f(x)$ във вида

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-\bar{a})^\alpha P(x),$$

където $P(x)$ е полином с реални коефициенти и $P(a) \neq 0$. Разкривайки скобите, ние получаваме

$$(x-a)(x-\bar{a}) = x^2 - (a+\bar{a})x + a\bar{a}.$$

Ако означим реалните числа $-(a+\bar{a})$ и $a\bar{a}$ съответно с p и q, получаваме

$$f(x) = (x^2+px+q)^\alpha P(x).$$

И така нека коренът a не е реален. Ще покажем, че е възможно да се изберат (и то еднозначно) две реални константи M и N и полином с реални коефициенти $Q(x)$ по такъв начин, че при $f(x) \neq 0$ да имаме

$$(8) \qquad \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha} + \frac{Q(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}P(x)}.$$

Ние и тук, както по-горе, ще започнем с по-простия (и по-малко интересния) въпрос за единственост. Ако допуснем, че съществуват две реални константи M и N и полином $Q(x)$ с реални константи M и N и полином $Q(x)$ с реални коефициенти, за които е изпълнено равенството (8) при $f(x) \neq 0$, то и такъв случай при всички стойности на x ще имаме

$$(9) \qquad g(x) = (Mx+N)P(x) + Q(x)(x^2+px+q).$$

Специално при $x=a$ получаваме

$$(10) \qquad g(a) = (Ma+N)P(a).$$

Да представим комплексните числа a и $\frac{g(a)}{P(a)}$ във вида

$$a = u+iv, \quad \frac{g(a)}{P(a)} = r+is,$$

[1] Нека $a=u+iv$, където u и v са реални числа. Със знака $\bar{a}$ се означава числото $u-iv$. Числото $\bar{a}$ се нарича конюгирано или спрегнато на a.

където u, v, r, s са реални числа. В такъв случай уравнението (10) приема вида

$$r+is=M(u+iv)+N. \tag{11}$$

Като приравним реалните и имагинерните части от двете страни на равенството (11), намираме

$$r=Mu+N, \tag{12}$$
$$s=Mv.$$

От тази система получаваме еднозначно M и N, защото $v\neq 0$ (тук ние използуваме съществено условието за нереалност на корена a). След като са определени еднозначно константите M и N, добиваме възможност да определим еднозначно и полинома $Q(x)$, като си послужим с равенството (9). С това е решен интересуващият ни въпрос за единственост. За нашите нужди е поважен обаче съответният въпрос за съществуване. Преминаваме към разглеждането на този въпрос, като се ръководим от резултатите, които получихме, изследвайки единствеността.

Образуваме си системата (12) и определяме от нея M и N (реалните числа u, v, r и s са познати, защото числото a и полиномите $g(x)$ и $P(x)$ са дадени). Ние можем да определим M и N от тази система, защото $v\neq 0$. Пресметнатите по този начин числа M и N са реални, защото числата u, v, r и s са реални.

Разглеждаме помощния полином

$$H(x)=g(x)-(Mx+N)P(x).$$

Този полином се анулира при $x=a$, защото при направения избор на константите M и N са изпълнени равенствата (12).

И наистина от равенствата (12) следва, че е изпълнено равенството (1), а от последното равенство следва равенството (10). От друга страна, коефициентите на $H(x)$ са реални. Това ни дава право[1] да заключим, че този полином се анулира и при $x=\bar{a}$.

[1] Това е известно от висшата алгебра. Доказателството може да се извърши например, като се използуваме от лесно проверимите равенства $\overline{\xi+\eta}=\bar{\xi}+\bar{\eta}$, $\overline{\xi\eta}=\bar{\xi}\cdot\bar{\eta}$. И наистина нека числата $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са реални; разглеждаме числото

$$c=a_0a^n+a_1a^{n-1}+\cdots+a_{n-1}a+a_n;$$

в такъв случай очевидно

$$\bar{c}=\bar{a}_0\bar{a}^n+\bar{a}_0\bar{a}^{n-1}+\cdots+\bar{a}_{n-1}\bar{a}+\bar{a}_n=$$
$$=a_0\bar{a}^n+a_1\bar{a}^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\bar{a}+a_n;$$

от друга страна, при $c=0$ имаме $\bar{c}=0$ и следователно, ако a е корен на уравнението

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

коефициентите на което са реални, то числото a е корен на същото уравнение.

Числата a и $\bar{a}$ са обаче различни, защото коренът a не е реален. Оттук заключаваме, че полиномът $H(x)$ се дели без остатък на полинома

$$(x-a)(x-\bar{a})=x^2+px+q.$$

Това значи, че имаме

$$g(x)-(Mx+N)P(x)=(x^2+px+q)Q(x), \tag{13}$$

където $Q(x)$ е полином. Като вземем под внимание, че константите M, N, p и q, както и коефициентите на полиномите $g(x)$ и $P(x)$ се реални, заключаваме, че коефициентите на полинома $Q(x)$ са също реални.

От равенството (13) намираме

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha}+\frac{Q(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}P(x)}.$$

С това е решен и интересуващият ни въпрос за съществуване.

Получените дотук резултати ни позволяват да представим всяка дробна рационална функция[1]

$$R(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+px+q)^\lambda\ldots}$$

във вида

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_\alpha}{x-a}+$$
$$+\frac{B_1}{(x-b)^\beta}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_\beta}{x-b}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\lambda}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{x^2+px+q}+\cdots+S(x),$$

където $A_1, A_2, \ldots, M_\lambda, N_\lambda$ са константи и $S(x)$ е полином.

Да разгледаме като пример функцията

$$R(x)=\frac{x^4}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2}. \tag{15}$$

В такъв случай съгласно, това, което казахме, ние можем да представим функцията $R(x)$ във вида

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2}+ \tag{16}$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}+S(x),$$

[1] Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че коефициентът q_0 пред x^m в полинома

$$f(x)=q_0x^m+q_1x^{m-1}+\cdots+q_{m-1}x+q_m$$

е равен на единица.

където A_1, A_2, B, M_1, M_2, N_2 са константи и $S(x)$ е полином. И наистина[1], както знаем, ние можем да представим функцията

$$R(x)=\frac{x^4}{(x-1)^2[(x+1)(x^2+x+1)^2]},$$

във вида

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{g_1(x)}{(x-1)[(x+1)(x^2+x+1)^2]},$$

където A_1 е константа и $g_1(x)$ е полином. Като извършим аналогично разлагане на функцията

$$\frac{g_1(x)}{(x-1)[(x+1)(x^2+x+1)^2]}$$

въз основа на същата помощна теорема, получаваме

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{g_2(x)}{(x+1)(x^2+x+1)^2},$$

където A_2 е константа и $g_2(x)$ е полином.

Като разложим по аналогичен начин функцията

$$\frac{g_2(x)}{(x+1)(x^2+x+1)^2},$$

получаваме

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{g_3(x)}{(x^2+x+1)^2},$$

където B е константа и $g_3(x)$ е полином.

По-нататък разглаграме функцията

$$\frac{g_3(x)}{(x^2-x+1)^2}.$$

Това ни дава

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{g_4(x)}{x^2+x+1},$$

където M_1 и N_1 са реални константи и $g_4(x)$ е полином. Като разложим найсетне функцията

$$\frac{g_4(x)}{x^2+x+1},$$

получаваме

$$R(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}+S(x),$$

където M_2 и N_2 са реални константи и $S(x)$ е полином. С това ние получаваме желаното представяне (16).

В нашия специален случай полиномът $S(x)$ се анулира тъждествено. И наистина, като се освободим от знаменателя, получаваме

[1] Изводът на общата формула (14) става, разбира се, по същия начин. Нека читателят сам обмисли подробностите.

$$(17)\qquad x^4=(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2\left[\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}\right]+(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2S(x).$$

Изразът

$$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2\left[\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}\right]$$

представлява полином[1], чиято степен е сигурно по-малка[2] от 7. Нека допуснем за момент, че полиномът $S(x)$ не се анулира тъждествено. В такъв случай произведението

$$S(x)(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2$$

представлява полином, чиято степен сигурно не е по-малка[3] от 7. От това заключаваме, че в дясната страна на равенството (17) имаме полином, чиято степен не е по-малка от 7. Това обаче не е възможно, защото в лявата страна на това равенство имаме полином, чиято степен е по-малка от 7.

Тези разсъждения могат да се извършат и в общия случай. Те ни позволяват да твърдим, че ако числителят $g(x)$ на рационалната функция $R(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ има степен, по-малка от степента на знаменателя

$$f(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\cdots(x^2+bx+q)^\lambda\cdots,$$

то полиномът $S(x)$ във формулата (14) сигурно се анулира тъждествено.[4] Нека отбележим на това място, че извършвайки деление, ние можем да представим всяка дробна рационална функция като сума от един полином и един остатък, който представлява дробна рационална функция, при която степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя. Поради това се препоръчва да се извърши делението, преди да се използува формулата (14).

[1] След разкриване на скупените скоби знаменателите се съкращават.

[2] Нека обърнем внимание върху това, че степента на полинома

$$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2,$$

който фигурира в знаменателя на дробната рационална функция (15), е равна на 7.

[3] Когато $S(x)$ е (различна от нула) константа, степента на произведението

$$S(x)(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2$$

е равна на 7. Когато $S(x)$ е полином от по-висока степен, степента на разглежданото произведение е по-голяма от 7.

[4] Нека читателят сам докаже това, като умножи двете части на равенството (14) с полинома

$$f(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\cdots(x^2+px+q)^\lambda\cdots$$

и сравни степените на полиномите, които ще получи по този начин от двете страни на това равенство.

Като пример да разгледаме функцията

$$R(x)=\frac{x^5+x^4-x^2-x+1}{x^3-1}.$$

Тук степента на числителя е по-висока от степента на знаменателя. Поради това ние първо извършваме деление, което ни дава

$$R(x)=x^2+x+\frac{1}{x^3-1}.$$

Като приложим формулата (14) към дробната рационална функция $\frac{1}{x^3-1}$, при която степента на числителя е вече по-малка от степента на знаменателя, получаваме[1]

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

и следователно

$$R(x)=x^2+x+\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Рационалните функции от вида

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}\quad (p^2-4q<0),$$

където A, M, N, a, p, q, α, λ са константи, от които константите α и λ са цели и положителни, се наричат елементарни дроби. Използувайки тази терминология, ние можем да формулираме по следния начин резултата, до който достигнахме: всяка дробна рационална функция, при която степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя, може да се представи като сума от елементарни дроби.

§ 7. Пресмятане на коефициентите

(Продължение на § 6)

Пресмятането на коефициентите във формулата (14) от предния параграф може да се извърши по различни начини.

I. Ще разгледаме първо така наречения метод на сравняване на коефициентите (или както често се казва, метод на неопределените коефициенти). За целта се освобождаваме от знаменателите в равенството (14) от предния параграф и правим приведение на

[1] Ние можем да твърдим сега, че полиномът $S(x)$ от формулата (14) се анулира тъждествено, защото степента на числителя на рационалната функция $\frac{1}{x^3-1}$ е по-малка от степента на знаменателя й.

подобните членове. Като приравним коефициентите пред еднаквите степени на x в двете страни на така намереното равенство, получаваме уравнения, от които определяме неизвестните коефициенти.[1] Читателят най-добре ще разбере смисъла на това, което казахме, като проучи следващите примери.

Пример 1. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x)=\frac{x^3}{(x-1)(x^3-1)}.$$

Решение. Разлагаме знаменателя на множители. Това ни дава

$$R(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Степента на числителя на разглежданата рационална функция е по-малка от степента на знаменателя. Поради това ние можем да представим тази функция като сума от елементарни дроби така:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

По този начин задачата се свежда към пресмятането на коефициентите A, B, M и N, нещо, което може да стане, както казахме, по следния начин: освобождаваме се от знаменателите; това ни дава

$$x^3=A(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)^2$$

или още

$$x^3=(B+M)x^3+(A-2M+N)x^2+$$
$$+(A+M-2N)x+A-B+N;$$

приравняваме коефициентите пред съответните степени на x и получаваме

$$B+M=1,$$
$$A-2M+N=0,$$
$$A+M-2N=0,$$
$$A-B+N=0.$$

По този начин намерихме една линейна система относно неизвестните коефициенти A, B, M, N, от която получаваме

$$A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{3},\quad M=\frac{1}{3},\quad N=\frac{1}{3}$$

[1] Разбира се, тук е уместно да се постави въпросът, дали така получената система има решение и дали това решение е единствено. Отговорът на този въпрос не е сложен. Твърдението за съществуване и за единственост на решението на така получената система е еквивалентно с твърдението за съществуване (което ние доказахме) и за единственост (което ние не доказахме, но което лесно се доказва) на представянето (14) от предния параграф и следователно е вярно. Ние тук изоставяме подробностите. Нека читателят сам ги обмисли.

и следователно

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{3(x-1)^2}+\frac{2}{3(x-1)}+\frac{x+1}{3(x^2+x+1)}.$$

Пример 2. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}.$$

Решение. Съгласно формулата (14) от предния параграф имаме

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}.$$

Оттук получаваме

$$1=A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2$$

или

$$1=(C+B)x^2+(A-B)x-A.$$

Като приравним съответните коефициенти, намираме

$$C+B=0,$$
$$A-B=0,$$
$$-A=1,$$

откъдето

$$A=-1,\qquad B=-1,\qquad C=1.$$

II. Определянето на коефициентите във формулата (14) от предния параграф може да стане и по други начини. Ние ще изясним с няколко примера същността на един такъв начин.

Пример 1. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x)=\frac{x+2}{x^2-2x-3}.$$

Очевидно имаме

$$R(x)=\frac{x+2}{(x+1)(x-3)}.$$

Степента на числителя в случая е по-малка от степента на знаменателя и следователно

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}.$$

Освобождаваме се от знаменателя. Това ни дава

(1) $$x+2=A(x-3)+B(x+1).$$

Функцията $R(x)$ е дефинирана, разбира се, само при онези стойности на x, за които $x^2-2x-3\neq 0$. Напротив, равенството (1) е валидно при всички стойности

на x без изключение.[1] Специално при $x=-1$ намираме $1=-4A$, т. е. $A=-\frac{1}{4}$, а при $x=3$ намираме $5=4B$ или $B=\frac{5}{4}$.

И така

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-3)}=\frac{-1}{4(x+1)}+\frac{5}{4(x-3)}.$$

Пример 2. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

(2) $$R(x)=\frac{x}{x^4-1}.$$

Очевидно имаме

$$\frac{x}{x^4-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}.$$

Като вземем под внимание, че степента на числителя в случая е по-малка от степента на знаменателя, получаваме

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Освобождаваме се от знаменателя. Това ни дава

(3) $$x=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)(x+1).$$

Функцията (2) е дефинирана само при онези стойности на x, при които $x^4-1\neq 0$. При тези стойности на x е валидно и равенството (3). В двете части на това равенство имаме обаче полиноми. Като вземем под внимание, че разглежданото равенство е валидно при безбройно много стойности на x, заключаваме, че то е валидно при всички стойности на x без изключение.[2] Специално при $x=1$ намираме

$$1=4A,\qquad A=\frac{1}{4};$$

при $x=-1$ намираме

$$-1=-4B,\quad B=\frac{1}{4};$$

при $x=i$ получаваме

$$i=(Mi+N)(i-1)(i+1)$$

или

(4) $$i=-2Mi-2N.$$

Като сравним реалните и имагинерните части в двете страни на равенството (4) намираме

---

[1] И наистина равенството (1) е сигурно валидно при $x^2-2x-3\neq 0$, т. е. при безкрайно много стойности на x. Като вземем под внимание, че от двете страни на това равенство имаме полиноми, заключаваме, че съответните им коефициенти са равни помежду си и следователно равенството (1) е валидно при всички стойности на x без изключение.

[2] Това се отнася както за реални, така и за комплексни стойности на x. И наистина в двете страни на равенството (4) имаме полиноми със съответно равни коефициенти.

$$N=0, \quad M=-\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x)=\frac{3x^3-1}{(x+1)^2(x-1)^3}.$$

Решение. Тъй като степента на числителя на $R(x)$ е по-малка от степента на знаменателя, то имаме

$$\frac{3x^3-1}{(x+1)^2(x-1)^3}=\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B_1}{(x-1)^3}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{x-1}.$$

Като се освободим от знаменателя, намираме

$$3x^3-1=A_1(x-1)^3+A_2(x+1)(x-1)^3+ \tag{5}$$
$$+B_1(x+1)^2+B_2(x+1)^2(x-1)+B_3(x+1)^2(x-1)^2.$$

При $x=-1$ получаваме

$$-4=-8A_1, \quad A_1=\frac{1}{2}.$$

При $x=1$ получаваме

$$2=4B_1, \quad B_1=\frac{1}{2}.$$

Ние давахме на x тъкмо онези стойности, при които се анулира знаменателят на $R(x)$, защото в такъв случай много от членовете в дясната страна на равенството (5) се анулират. Това опростява значително пресмятанията.[1] Ние можем да даваме на x, разбира се, и произволни значения. В нашия специален случай ще получим обаче по този път уравнения с няколко неизвестни.[2] За да избегнем необходимостта да решаваме система, ние ще предпочетем в случая да постъпим другояче. За целта представяме равенството (5) във вида

$$3x^3-1-A_1(x-1)^3-B_1(x+1)^2=$$
$$=A_2(x+1)(x-1)^3+B_2(x+1)^2(x-1)+B_3(x+1)^2(x-1)^2.$$

Като вземем под внимание намерените стойности A_1 и B_1, получаваме

$$\frac{(5x+2)(x+1)(x-1)}{2}=(x+1)(x-1)[A_2(x-1)^2+B_2(x+1)+B_3(x+1)(x-1)].$$

Съкращаваме на $(x+1)(x-1)$ и намираме

$$\frac{5x+2}{2}=A_2(x-1)^2+B_2(x+1)+B_3(x+1)(x-1).$$

Оттук при $x=-1$ получаваме

$$-\frac{3}{2}=4A_2, \quad A_2=-\frac{3}{8};$$

[1] По такъв начин определяме коефициентите от уравнения, които съдържат само по едно неизвестно.

[2] Това, разбира се, не представлява никаква принципиална трудност.

при $x=1$ намираме

$$\frac{7}{2}=2B_2, \quad B_2=\frac{7}{4};$$

Остана да се определи само коефициентът B_3. Това може да стане например, като положим $x=0$. В такъв случай получаваме

$$1=A_2+B_2-B_3,$$

т. е.

$$B_3=A_2+B_2-1=-\frac{3}{8}+\frac{7}{4}-1=\frac{3}{8}.$$

III. Да разгледаме рационалната функция

$$R(x)=\frac{g(x)}{f(x)},$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми. Нека $x=a$ е един прост корен на уравнението $f(x)=0$. Това значи, че $f(x)$ може да се представи във вида

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

където $\varphi(x)$ е полиномът на x и $\varphi(a)\neq 0$.

Както знаем, ние можем да представим $R(x)$ във вида

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{h(x)}{\varphi(x)},$$

където A е константа и $h(x)$ е полином. Ние ще покажем, че[1]

$$A=\frac{g(a)}{f'(a)}.$$

За тази цел ние се освобождаваме от знаменателя $f(x)$. По такъв начин получаваме

$$g(x)=\frac{Af(x)}{x-a}+h(x)(x-a)$$

или още

$$g(x)=A\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+h(x)(x-a).$$

[1] Не е трудно да се види, че $f'(a)\neq 0$. И наистина, като диференцираме равенството

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

получаваме

$$f'(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x).$$

Специално при $x=a$ намираме

$$f'(a)=\varphi(a),$$

т. е.

$$f'(a)\neq 0.$$

Като оставим x да клони към a чрез стойности, различни от a, получаваме

$$g(a)=Af'(a),$$

откъдето

$$A=\frac{g(a)}{f'(a)}.$$

§ 8. Интегриране на рационални функции

(Продължение от § 6 и 7)

Ние видяхме, че всяка рационална функция може да се представи като сума от функции от вида

$$Ax^m,\ \frac{B}{(x-a)^n},\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},\ (p^2-4p<0).$$

По този начин интегралите от рационални функции могат да се представят като суми от следните видове интеграли:

(1) $$\int Ax^m\,dx,$$

където m е цяло неотрицателно число;

(2) $$\int \frac{Bdx}{(x-a)^\alpha},$$

където α е цяло положително число, и

(3) $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx,\ (p^2-4q<0),$$

където n е цяло положително число.

Очевидно имаме

$$\int Ax^m\,dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+C.$$

$$\int \frac{Bdx}{(x-a)^\alpha}=B\int (x-a)^{-\alpha}\,d(x-a)=\frac{B}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}+C$$

при $\alpha>1$ и

$$\int \frac{Bdx}{x-a}=B\ln|x-a|+C.$$

Остава да разгледаме интеграла

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$

при предположение, че корените на квадратното уравнение

$$x^2+px+q=0$$

не са реални и числото n е цяло положително.

Ние ще положим

$$x=u-\frac{p}{2}.$$

Това ни дава

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx=\int \frac{M\left(u-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(u^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^n}\,du.$$

Да положим за краткост

$$\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=a.$$

Числата a е реално и различно от нула, защото корените на квадратното уравнение

$$x^2+px+q=0$$

не са реални и следователно $p^2-4q<0$. Интересуващият ни интеграл приема вида

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx=M\int \frac{udu}{(u^2+a^2)^n}+\left(N-\frac{pM}{2}\right)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}.$$

От друга страна, очевидно имаме

$$\int \frac{udu}{(u^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int (u^2+a^2)^{-n}\,d(u^2+a^2)=$$

$$=\frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}+C$$

при $n>1$ и

$$\int \frac{udu}{u^2+a^2}=\frac{1}{2}\cdot\int \frac{d(u^2+a^2)}{u^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln(u^2+a^2)+C.$$

Остава да се пресметне интегралът

$$I_n=\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}.$$

При $n>1$ правим следните преобразувания:

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2du}{(u^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+u^2-u^2}{(u^2+a^2)^n}\,du=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+u^2}{(u^2+a^2)^n}\,du-\frac{1}{a^2}\int\frac{u^2}{(u^2+a^2)^n}\,du=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{u\,d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^n}=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int u\,d\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}\int\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}\,du=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}=$$

$$=\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}}.$$

По този начин изразихме I_n чрез I_{n-1}. Като извършим няколко пъти тези пресмятания, добиваме възможност да изразим интеграла I_n чрез познатия интеграл

$$I_1=\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\frac{u}{a}}{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a}+C.$$

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли (интегрирането се извършва в произволно избран интервал, в който е дефинирана подинтегралната функция):

1. $I=\int\frac{2x^3+7x^2+4x+2}{2x+3}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{x^3}{3}+x^2-x+\frac{5}{2}\ln|2x+3|+C.$

2. $I=\int\frac{2x+6}{2x^2+3x+1}\,dx.$

Отговор. $I=5\ln|2x+1|-4\ln|x+1|+C.$

3. $I=\int\frac{dx}{x^4-1}.$

Отговор. $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$

4. $I=\int\frac{x\,dx}{x^3-1}+C.$

Отговор.

$$I=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

5. $I=\int\frac{4x^2+2}{x^3-x^2+x-1}\,dx.$

Отговор. $I=3\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arc\,tg}x+C.$

6. $I=\int\frac{4x^2-15x+19}{x^3-7x+6}\,dx.$

Отговор. $I=5\ln|x+3|+\ln|x-2|-2\ln|x-1|+C.$

7. $I=\int\frac{6x^2+17x+13}{(x+1)^3}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{-1}{(x+1)^2}-\frac{5}{x+1}+6\ln|x+1|+C.$

8. $I=\int\frac{x^2-x+14}{(x-4)^2(x-2)}\,dx.$

Отговор. $I=-\frac{13}{x-4}+4\ln|x-2|-3\ln|x-4|+C.$

9. $I=\int\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+C.$

10. $I=\int\frac{7x}{x^3-5x^2+12x-60}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{35}{37}\ln\frac{|x-5|}{\sqrt{x^2+12}}+\frac{42}{37\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2\sqrt{3}}+C.$

11. $I=\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{2}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

12. $I=\int\frac{dx}{x^4+1}.$

Отговор. $I=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$

13. $I=\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx.$

Отговор. $I=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

§ 9. Интегриране на ирационални функции

В предните три параграфа ние изложихме един общ метод за пресмятане на интеграли от рационални функции. Въпросът за пресмятане на интеграли от ирационални функции е много по-сложен. Ние не разполагаме с общ метод, който да ни позволява да изразяваме интегралите от всякакви ирационални функции чрез елементарни функции[1] (без да прибягваме до граничен преход). Дори ние знаем от работите на Лиувил, Чебишев и Абел, че такъв метод не съществува.

В този параграф ние ще разгледаме някои категории интеграли от ирационални функции, които могат да се преобразуват в интеграли от рационални функции с помощта на подходящи субституции.

I. Интегриране на рационални функции на радикали на x

Нека ни е даден интеграл от вида

$$\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}},\ x^{\frac{p_2}{q_2}},\ \ldots,\ x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx, \tag{1}$$

където $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е рационална[2] функция на $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Числата $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са цели, а числата $q_1, q_2, \ldots, q_n$ са цели и положителни.

Пресмятането на този интеграл може да се извърши така означаваме с k най-малкото кратно на знаменателите $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в такъв случай числата

$$\frac{kp_1}{q_1},\ \frac{kp_2}{q_2},\ \ldots,\ \frac{kp_n}{q_n}$$

ще бъдат цели; полагаме

$$x=t^k;$$

като вземем под внимание, че $dx=kt^{k-1}\,dt$, получаваме интеграла

$$\int R\left(t^{\frac{kp_1}{q_1}},\ t^{\frac{kp_2}{q_2}},\ \ldots,\ t^{\frac{kp_n}{q_n}}\right)kt^{k-1}\,dt.$$

[1] Тези думи се нуждаят очевидно от прецизиране. Ние няма да се спираме тук на този въпрос, защото това ще ни отведе твърде далеч.

[2] Това значи, че функцията $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представлява частно на два полинома.

По този начин приведохме дадения интеграл към интеграл от рационална функция.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx,\ x>0.$$

Интеграционната променлива x фигурира в степен с показатели $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. За да се освободим от тези ирационалности, полагаме $x=t^6$ (тук най-малкото кратно на знаменателите е 6). С помощта на тази субституция интегралът се преобразува в

$$\int \frac{t^3-1}{t^2-1}\,6t^5\,dt.$$

II. Интегриране на рационални функции на x и на радикали от една (дробна) линейна функция на x

Ние ще покажем как могат да се пресмятат интеграли от вида

$$\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\ \ldots,\ \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right]dx, \tag{2}$$

където функцията $R(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ е рационална; числата $p_1, \ldots, p_n$ са цели; числата $q_1, \ldots, q_n$ са цели и положителни; a, b, a_1, b_1 са константи, подчинени на условието $ab_1-a_1b\neq 0$.[1]

Функциите от вида

$$y=\frac{ax+b}{a_1x+b_1} \tag{3}$$

се наричат дробни линейни. Това не изключва, разбира се, възможността да имаме например $a_1=0$, $b_1=1$, т. е. функцията (3) да има вида

$$y=ax+b.$$

[1] Ако $ab_1-a_1b=0$, то отношението

$$y=\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$$

не зависи от x, защото

$$y'=\frac{ab_1-a_1b}{(a_1x+b_1)^2}=0.$$

В такъв случай интегралът (2) е интеграл от рационална функция.

Независимо от това, ако $ab_1-a_1b=0$, то субституцията (4) въобще не може да се използува за пресмятане на интеграли. Така например в този случай от дясната страна на равенството (5) имаме константа, поради което това равенство очевидно не е вярно. Не противоречи ли това на формулата (5), която ние доказахме в § 4 на тази глава?

Специално при $a=1$, $b=0$, $a_1=0$, $b_1=1$ получаваме интеграла, който разгледахме преди малко.

Пресмятането на интеграла (2) може да се извърши с помощта на субституцията

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=t^k,$$

където k означава най-малкото кратно на знаменателите $q_1, \cdots, q_n$. В такъв случай получаваме

$$x=\frac{b_1t^k-b}{a-a_1t^k}, \quad dx=k\frac{ab_1-ba_1}{(a-a_1t^k)^2}t^{k-1}\,dt \tag{4}$$

и следователно (2) се преобразува в

$$\int R\left[\frac{b_1t^k-b}{a-a_1t^k}, t^{\frac{kp_1}{q_1}}, \cdots, t^{\frac{kp_n}{q_n}}\right]\cdot k\frac{ab_1-ba_1}{(a-a_1t^k)^2}t^{k-1}\,dt. \tag{5}$$

По този начин ние преобразувахме интеграла (2) в интеграл от рационална функция $\left[\text{числата } \frac{kp_1}{q_1}, \cdots, \frac{kp_n}{q_n} \text{ са цели}\right]$.

Пример 1. Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}, \quad x>-1.$$

За да се освободим от радикала под знака на интеграла, полагаме

$$1+x=t^2, \qquad t>0.$$

Това ни дава

$$x=t^2-1, \qquad dx=2t\,dt.$$

По такъв начин даденият интеграл се преобразува в

$$2\int\frac{(t^2-1)t}{1+t}dt=2\int(t-1)t\,dt=\frac{2}{3}t^3-t^2+C$$

и следователно

$$\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-1-x+C.$$

Пример 2. Да се пресметне интегралът

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}, \quad -2<x<2.$$

За да се освободим от корена под знака на интеграла, полагаме

$$\frac{2-x}{2+x}=t^3.$$

Това ни дава

$$x=2\frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad dx=-12\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}.$$

След тази субституция получаваме

$$-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8}t^{-2}+C$$

и следователно

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

III. Субституции на Ойлер

Нека $R(x, y)$ е рационална функция на x и y. Ще покажем как се пресмятат интеграли от вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a\neq 0. \tag{6}$$

При това ще предполагаме, че радикалът $\sqrt{ax^2+bx+c}$ е реален в интервала, в който пресмятаме интеграла. В такъв случай, ако корените на квадратното уравнение на $ax^2+bx+c=0$ са комплексни или равни помежду си, то непременно ще имаме $a>0$. И наистина в противен случай квадратният тричлен $ax^2+bx+c=0$ би приемал само отрицателни стойности с евентуално изключение на една точка противно на направеното допускане, според което радикалът $\sqrt{ax^2+bx+c}$ приема реални стойности в интеграционния интервал.

1. Първа субституция на Ойлер (Euler)

Нека $a>0$. В такъв случай, ако положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u+x\sqrt{a},$$

намираме

$$x=\frac{u^2-c}{b-2u\sqrt{a}}$$

и следователно

$$dx=-2\frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{(b-2u\sqrt{a})^2}du,$$

От друга страна,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u+x\sqrt{a}=\frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{2u\sqrt{a}-b}.$$

По такъв начин интегралът (6) се преобразува в

$$-2\int R\left(\frac{u^2-c}{b-2u\sqrt{a}},\ \frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{2u\sqrt{a}-b}\right)\frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{(b-2u\sqrt{a})^2}\,du,$$

т. е. в интеграл от рационална функция.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Полагаме

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+u.$$

Това ни дава

$$x=\frac{u^2-1}{1-2u},$$

$$dx=\frac{2(u-u^2-1)}{(1-2u)^2}\cdot du,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+u=\frac{u-u^2-1}{1-2u}.$$

По такъв начин намираме

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{du}{1-2u}=-\ln|1-2u|+C=$$

$$=\ln\frac{1}{|1+2x-2\sqrt{x^2+x+1}|}+C.$$

2. Втора субституция на Ойлер

Нека корените на квадратното уравнение $ax^2+bx+c=0$ са реални и различни. В такъв случай интересуващият ни интеграл може да се пресметне с помощта на субституцията

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\,u,$$

където α е един от корените на уравнението $ax^2+bx+c=0$. Да означим с β другия корен. В такъв случай получаваме

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)u$$

и следователно

$$a(x-\beta)=(x-\alpha)u^2,$$

$$x=\frac{\alpha u^2-\beta a}{u^2-a},\quad dx=\frac{2au(\beta-\alpha)}{(u^2-a)^2}\,du$$

и

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(\frac{\alpha u^2-\beta a}{u^2-a}-\alpha\right)u=\frac{ua(\alpha-\beta)}{u^2-a}.$$

По такъв начин интегралът (6) се преобразува в

$$\int R\left[\frac{\alpha u^2-\beta a}{u^2-a},\ \frac{ua(\alpha-\beta)}{u^2-a}\right]\frac{2au(\beta-\alpha)}{(u^2-a)^2}\,du,$$

т. е. в интеграл от рационална функция.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}},\qquad x>1.$$

Полагаме

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=u\,(x-1).$$

Тази субституция ни дава

$$x=\frac{4+u^2}{u^2-1},$$

$$dx=-10\,\frac{u\,du}{(u^2-1)^2}.$$

По такъв начин получаваме интеграла

$$-\frac{2}{5}\int\frac{du}{u^2}=\frac{2}{5u}+C$$

и следователно

$$\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C.$$

3. Трета субституция на Ойлер

Първите две субституции на Ойлер са напълно достатъчни, за да можем да пресмятаме всякакви интеграли от вида (6). Така, ако корените на квадратното уравнение $ax^2+bx+c=0$ не са реални (т. е. ако не може да се използува втората субституция на Ойлер), то, както вече отбелязахме, сигурно $a>0$ и следователно можем да приложим първата субституция. Все пак ние ще посочим още следната субституция, която в някои случаи води по-бързо до целта:

(7) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=xu+\sqrt{c}.$$

Тази субституция може да се прилага при $c>0$. От равенството (7) получаваме

$$x=\frac{b-2u\sqrt{c}}{u^2-a},$$

$$dx=2\,\frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{(a-u^2)^2}\,du$$

и

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{b-2u\sqrt{c}}{u^2-a}u+\sqrt{c}=\frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{a-u^2},$$

откъдето намираме интеграла

$$2\int R\left[\frac{2u\sqrt{c}-b}{a-u^2},\ \frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{a-u^2}\right]\frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{(a-u^2)^2}du.$$

По такъв начин преобразувахме (6) в интеграл от рационална функция.

Нека обърнем внимание на това, че един интеграл може да спада, разбира се, едновременно към няколко от разгледаните типове. Така например към интеграла

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

могат да се приложат и трите субституции на Ойлер. Ще приложим третата от тях:

$$\sqrt{x^2-5x+4}=xu+2.$$

По такъв начин намираме

$$x=\frac{5+4u}{1-u^2},$$

$$dx=\frac{4+10u+4u^2}{(1-u^2)^2}du,$$

$$\sqrt{x^2-5x+4}=xu+2=\frac{2+5u+2u^2}{1-u^2},$$

след което получаваме интеграла

$$2\int\frac{du}{1-u^2}=\int\frac{du}{1-u}+\int\frac{du}{1+u}=-\ln|1-u|+\ln|1+u|+C$$

и следователно

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}=\ln\left|\frac{x-2+\sqrt{x^2-5x+4}}{x+2-\sqrt{x^2-5x+4}}\right|+C.$$

Накрая нека отбележим, че интегралът (6) може да се рационализира и с помощта на други субституции. Така например при $a>0$ може да се използва субституцията

(8) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=u-x\sqrt{a},$$

а при $c>0$ може да се използва субституцията

(9) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=xu-\sqrt{c}$$

и пр. Покажете сами, че субституциите (8) и (9) наистина преобразуват интеграла (6) в интеграли от рационални функции.

IV. Абелеви интеграли

Нека $R(x, y)$ е рационална функция на x и y и нека $y=\varphi(x)$ е една функция, определена в някой интервал Δ, която удовлетворява уравнението

(10) $$F(x, y)=0.$$

Да разгледаме интеграла

(11) $$\int R(x, y)\,dx,$$

където $y=\varphi(x)$ (под интеграла имаме по този начин функция само на x). Интеграл от този вид се нарича Абелев интеграл относно кривата (10).

Така например интегралът

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

който ние разгледахме по-горе, може да се напише във вида

$$\int R(x, y)\,dx,$$

където

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c},$$

и следователно представлява един Абелев интеграл относно коничното сечение

$$y^2=ax^2+bx+c.$$

Има случаи, при които кривата (10) притежава рационално параметрично представяне, т. е. такова параметрично представяне[1]

$$x=f(t),$$
$$y=g(t),$$

[1] Казваме, че уравненията

12) $$x=f(t),$$
$$y=g(t),$$

където параметърът t се мени в някой интервал Δ, ни дават едно параметрично представяне на кривата

(13) $$F(x, y)=0,$$

когато при всеки избор на t от Δ точката с координати $[f(t), g(t)]$ лежи върху кривата (13) и, обратно, всяка точка от кривата (13) с евентуално изключение на краен брой такива точки, може да се получи от уравненията (12) при подходяща стойност на параметъра t от Δ.

при което $f(t)$ и $g(t)$ са рационални функции на t в някой интервал. В такъв случай Абелевият интеграл (11) може да се преобразува в интеграл от рационална функция по следния начин:

$$\int R[f(t), g(t)]\,df(t) = \int R[f(t), g(t)]\,f'(t)\,dt.$$

Кривата, която притежава рационално параметрично представяне, се нарича уникурзална крива. Така например, както е известно от аналитичната геометрия, всяко неизродено конично сечение представлява уникурзална крива. Кривата с уравнение

$$x^3+y^3-3axy=0, \quad a\neq 0$$

(тази крива се нарича Декартов лист) е също тъй уникурзална. И наистина, ако положим $y=tx$, получаваме

$$x^3+t^3x^3-3ax\,.\,tx=0,$$

откъдето[1]

$$x=\frac{3at}{1+t^3},$$

$$y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

V. *Диференциален бином*

Изразът $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, в който m, n, p са рационални числа, а коефициентите a и b са произволни различни от нула константи, се нарича диференциален бином.

Ако поне едно от числата

$$p,\ \frac{m+1}{n},\ \frac{m+1}{n}+p$$

[1] При $t\neq -1$ точката с координати

$$x=\frac{3at}{1+t^3},$$

(14)

$$y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

лежи върху Декартовия лист (това се вижда например с непосредствено заместване) и, обратно, всяка точка (x_0, y_0) от Декартовия лист може да се получи от уравненията (14) при подходящ избор на t (за да се убедим в това, достатъчно е при $x_0\neq 0$ да изберем $t=\frac{y_0}{x_0}$, а при $x_0=0$ да изберем $t=0$).

е цяло, то интегралът

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \tag{15}$$

може да се преобразува в интеграл от рационална функция. Ще разгледаме поотделно всеки един от тези случаи.

1. Ако числото p е цяло, то имаме познатия случай, който разгледахме в т. I (интеграл от рационална функция на радикали).

2. Ако числото $\frac{m+1}{n}$ е цяло, полагаме

$$a+bx^n=u.$$

В такъв случай получаваме

$$x=\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad dx=\frac{1}{n}\,\frac{(u-a)^{\frac{1}{n}-1}}{b^{\frac{1}{n}}}\,du$$

и следователно (15) се преобразува в

$$\frac{1}{n}\,b^{-\frac{m+1}{n}}\int u^p\,(u-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,du.$$

Като вземем под внимание, че числото $\frac{m+1}{n}$ е цяло, заключаваме, че така полученият интеграл спада към класата интеграли, които ние разгледахме в т. I (интеграл от рационална функция на радикали), и следователно може да се преобразува в интеграл от рационална функция.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx,\ x>0.$$

Тук имаме

$$m=-1,\ n=\frac{1}{2},\quad p=\frac{1}{2}.$$

В този специален случай числото

$$\frac{m+1}{n}=0$$

цяло. Поради това извършваме субституцията

$$1+\sqrt{x}=u$$

или, което е същото,

$$x=(u-1)^2,\ \ u>1.$$

Тази субституция ни дава

$$dx=2(u-1)\,du$$

и по такъв начин получаваме интеграла

$$2\int \frac{\sqrt{u}\,(u-1)}{(u-1)^2}\,du=2\int \frac{\sqrt{u}}{u-1}\,du.$$

Така получения интеграл преобразуваме в интеграл от рационална функция с помощта на субституцията

$$u=z^2, \qquad z>1.$$

Довършете сами пресмятанията!

3. Нека числото $\frac{m+1}{n}+p$ е цяло. В такъв случай правим следните преобразувания:

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx=\int x^{m+np}\left(\frac{a}{x^n}+b\right)^p dx=$$

$$=\int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx.$$

По този начин получихме пак интеграл от диференциален бином, т. е. интеграл от вида

$$\int x^{m_1}(b+ax^{n_1})^{p_1}\,dx,$$

където

$$m_1=m+np, \quad n_1=-n, \quad p_1=p.$$

В този случай имаме

$$\frac{m_1+1}{n_1}=\frac{m+np+1}{-n}=-\left[\frac{m+1}{n}+p\right]$$

и следователно числото $\frac{m_1+1}{n_1}$ е цяло. По този начин ние преобразувахме интересуващия ни интеграл в интеграл от познат тип. Съгласно това, което казахме по-горе, ние можем да пресметнем интеграла

$$\int x^{m+np}\,(b+ax^{-n})^p\,dx,$$

а следователно и интеграла

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$$

с помощта на субституцията

$$b+ax^{-n}=u.$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}, \quad x>0.$$

Тук имаме интеграл от диференциален бином, където

$$m=-2, \quad n=2, \quad p=-\frac{1}{2}.$$

В случая числото

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}-\frac{1}{2}=-1$$

е цяло. Поради това правим преобразуването

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^{-2}+1}}$$

и полагаме

$$x^{-2}+1=u$$

или, което е същото,

$$x=(u-1)^{-\frac{1}{2}}, \quad u>1.$$

Тази субституция ни дава

$$dx=-\frac{1}{2}(u-1)^{-\frac{3}{2}}\,du$$

и ни води до интеграла

$$-\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}=-\sqrt{u}+C,$$

откъдето

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

Разгледаните от нас три случая, при които интеграли от типа (15) могат да се изразят чрез познатите на нас елементарни функции, са били познати отдавна. През миналия век П. Л. Чебишев доказа, че ако $a\neq 0$, $b\neq 0$ и никое от трите числа

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n}+p$$

не е цяло, то интегралът

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$$

не може да се изрази с помощта на елементарните функции, без да се извършва граничен преход. Така например интегралът

(16) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad -1<x<1,$$

спада към интегралите от типа (15), като

$$m=0, \; n=4, \; p=-\frac{1}{2}.$$

В този случай обаче никое от числата

$$p=-\frac{1}{2}, \quad \frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}, \quad \frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{4}$$

не е цяло и следователно този интеграл не може да се представи с помощта само на елементарните функции (без граничен преход). Въпреки това функцията

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}, \quad -1<x<1,$$

притежава неопределен интеграл в интервала, в който е дефинирана. Така например функцията

$$F(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

е един неопределен интеграл на $f(x)$ при $-1<x<1$, защото

$$F'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{4n}=$$

$$=(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}.$$

VI. Елиптични и хиперелиптични интеграли

Интегралите от вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdot\cdot\cdot+a_m}\right)dx,$$

където $R(x, y)$ е рационална функция на x и y и цялото число m е по-голямо от 2, обикновено не могат да се представят с помощта само на елементарни функции, без да се извършва граничен преход. Когато $m=3$ или $m=4$, тези интеграли се наричат елиптични. Когато $m>4$, те се наричат хиперелиптични. Така например интегралът (16) е елиптичен.

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I=\int\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx, \quad 0<x<1.$

Отговор. $I=-[x+4\sqrt{x}+4\ln(1-\sqrt{x})]+C.$

2. $I=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}dx, \quad x>0.$

Отговор. $I=-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+x-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}+C.$

3. $I=\int\frac{xdx}{1+\sqrt{1+x}}, \; x>-1.$

Отговор. $I=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-x+C.$

4. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}, \; x>-1.$

Отговор. $I=2\sqrt{1+x}-3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}-6\ln(1+\sqrt[6]{1+x})+C.$

5. $I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}, \; 0<x<1.$

Отговор. $I=\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$

6. $I=\int\sqrt{x^2+2x-1}\,\frac{dx}{x}, \; x>-1+\sqrt{2}.$

Отговор. $I=\sqrt{x^2+2x-1}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x-1})-$
$-2\operatorname{arc\,tg}(x+\sqrt{x^2+2x-1})+C.$

7. $I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}, \; -1<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

Отговор. $I=\ln\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}.$

8. $I=\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}, \; x>1.$

Отговор. $I=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}+C.$

9. $I=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$, $2<x<3$.

Отговор. $I=\ln\frac{\sqrt{-x^2+4x-3}+x-3}{\sqrt{-x^2+4x-3}-x+3}+C$.

10. $I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$, $x>-1$.

Отговор. $I=\ln\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}+C$.

11. $I=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$, $x>0$.

Отговор. $I=\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$.

12. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Отговор. $I=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

13. $I=\int\frac{dx}{(1+x^\alpha)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}$, $x>0$, $\alpha\neq0$.

Отговор. $I=\frac{x}{(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}+C$.

14. $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, $0<x<1$.

Отговор. $I=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

§ 10. Интегриране на трансцендентни функции

Както видяхме, не всички интеграли от алгебрични функции могат да се изразят само с помощта на елементарните функции, без да се извършва граничен преход. Разбира се, същите трудности срещаме и при интегралите на трансцендентни функции. Така например интегралът

$$(1)\qquad \int\frac{dx}{\ln x},\ x>1,$$

който често се среща в анализа и приложенията му, не може, както това доказва строго Лиувил (J. Liouville), да се изрази с елементарните функции без помощта на граничен преход. Въпреки това не е трудно да се убедим в съществуването на неопределения интеграл (1). За тази цел да разгледаме безкрайния ред

$$F(x)=\ln(\ln x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^\nu}{\nu!\,\nu}.$$

Този ред е сходящ при $x>1$ и може почленно да се диференцира, както ни учи теоремата за почленното диференциране на степенните редове и теоремата за диференциране на функция от функция. Като диференцираме, получаваме

$$F'(x)=\frac{1}{x\ln x}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^{\nu-1}}{\nu!\,x}=\frac{1}{x\ln x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\ln x)^\nu}{\nu!}=$$

$$=\frac{1}{x\ln x}e^{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}\cdot x=\frac{1}{\ln x}.$$

Този резултат ни учи, че функцията $F(x)$ е един неопределен интеграл на $\frac{1}{\ln x}$ в интервал $x>1$.

Ние вече казахме по-горе, че функцията $F(x)$ не може да се изрази само с елементарни функции, без да се извършва граничен преход. По такъв начин $F(x)$ представлява нова трансцендентна функция. Тази функция се нарича **интегрален логаритъм**.

Често срещаните в анализа и неговите приложения интеграли

$$\int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{e^x}{x}dx,\ \int e^{-x^2}dx$$

също тъй не могат да се изразят само с елементарни функции.

Случаите, когато ние знаем да пресмятаме неопределените интеграли само с помощта на елементарните функции, са, тъй да се каже, „редки". Ние ще разгледаме два случая, при които подинтегралната функция е трансцендентна, но интегралът може да се изрази с елементарни функции.

I. Нека $R(u, v)$ е рационална функция на u и v. В такъв случай интегралът[1]

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

може да се преобразува в интеграл на рационална функция, грубо казано, с помощта на субституцията

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

във всеки интервал[2] $[a, b]$, в който двете функции

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \text{ и } R(\sin x, \cos x)$$

са дефинирани. Така например, ако $-\pi<a<b<\pi$, то функцията

$$x=2 \operatorname{arc\,tg} t,$$

е дефинирана и диференцуема при $\operatorname{tg}\frac{a}{2}\leq t\leq \operatorname{tg}\frac{b}{2}$, притежава диференцуема обратна функция и най-сетне множеството от стойностите ѝ съвпада точно с интервала $[a, b]$. Това ни позволява да приложим теоремата за смяна на променливите интеграли. По такъв начин, като вземем пред вид, че

$$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

намираме[3]

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx=\int R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}$$

при $-\pi<x<\pi$. Полагаме

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

[1] Очевидно към този интеграл се свеждат всички интеграли от рационални функции на $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, защото

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

[2] В случая, разбира се, не е съществено дали интервалът $[a, b]$ е затворен или отворен.

[3] Смисълът на този по същество неточен начин на записване е ясен.

или по-добре[1]

$$x=2 \operatorname{arc\,tg} t,$$

откъдето

$$dx=\frac{2dt}{2+t^2}.$$

Като вземем пред вид още, че $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, получаваме

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{d\frac{t}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

II. Нека $R(x)$ е рационална функция на x. Интегралите от вида

$$\int R'(x)\ln x\, dx,$$

$$\int R'(x)\operatorname{arc\,tg} x\, dx,$$

$$\int R'(x)\operatorname{arc\,sin} x dx$$

могат да се преобразуват в познати интеграли във всеки интервал, в който е дефинирана подинтегралната функция, с помощта на едно интегриране по части по следния начин:

$$\int R'(x)\ln x\, dx=\int \ln x\, d\,R(x)=R(x)\ln x-\int R(x)\frac{dx}{x},$$

$$\int R'(x)\operatorname{arc\,tg} x dx=\int \operatorname{arc\,tg} x d\,R(x)=R(x)\operatorname{arc\,tg} x-\int R(x)\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int R'(x)\operatorname{arc\,sin} x dx=\int \operatorname{arc\,sin} x\, dR(x)=R(x)\operatorname{arc\,sin} x-\int R(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

По този начин преобразувахме първите два интеграла в интеграли от рационални функции, а третия интеграл — в Абелев интеграл, който може да се рационализира с помощта на Ойлеровите субституции.

[1] С оглед на формула (5) от § IV на тази глава, която ние сега ще приложим.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I=\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$

Като вземем пред вид, че

$$R(x)=\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx=\int \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2}=\frac{-1}{1+x^2}$$

е рационална функция, получаваме

$$I=\int \operatorname{arc\,tg} x\,d\frac{-1}{1+x^2}=\frac{-\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\int \frac{1}{1+x^2}\,d\operatorname{arc\,tg} x=$$

$$=-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}=-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx=$$

$$=-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\int x\,d\frac{1}{1+x^2}=\frac{-\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C.$$

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли в интервала $0<x<\frac{\pi}{2}$:

1. $I=\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

Отговор. $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+C'.$

2. $I=\int \frac{dx}{4-\sin^2 x}$.

Упътване. Положете $\operatorname{tg} x=t$.

Отговор. $I=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2}+C.$

3. $I=\int \frac{dx}{2+\sin x+2\cos x}$.

Отговор. $I=\ln\left(2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$

4. $I=\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx.$

Отговор. $I=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

5. $I=\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx.$

Упътване. Използвайте формулите

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

Отговор. $I=-\operatorname{arc\,tg}(\cos 2x)+C.$

6. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}$.

Отговор. $I=\sqrt{2}\ \ln\frac{1-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$

7. $I=\int \frac{dx}{\sin x}$.

Отговор. $I=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

Да се пресметнат следните интеграли:

8. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\,dx,\ x>0.$

Отговор. $I=-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

9. $\int \arcsin x\,dx,\ -1<x<1.$

Отговор. $I=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

10. $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\ln x\,dx,\ x>0.$

Отговор. $I=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln x+C.$

Глава II

ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Дефиниция на понятието определен интеграл

Нека $f(x)$ е една функция, която е дефинирана и ограничена в един краен[1] и, да кажем, затворен интервал $[a, b]$, където $a<b$. Ние ще разделим интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали[2]

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

с помощта на точките

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n,$$

при което $x_0=a$, $x_n=b$. Нека M_i е точната горна граница, а m_i — точната долна граница[3] на $f(x)$ в i-тия подинтервал $[x_{i-1}, x_i]$. Образуваме двете суми

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$s=\sum_{=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}).$$

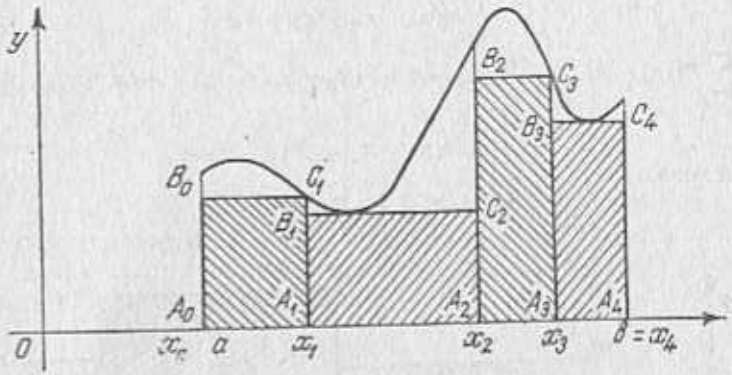
Така образуваните суми се наричат съответно голяма и малка сума на Дарбу (Darboux). Ние можем очевидно да образуваме по безбройно много начини сумите на Дарбу в зависимост от начина на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали. На всеки начин на делението отговаря обаче една единствена голяма и една единствена малка сума.

[1] В предположенията, които направихме, се иска интервалът $[a, b]$ да бъде краен, за да можем да го разложим на краен брой подинтервали, всеки един от които има крайна дължина. Ние впоследствие многократно ще се ползуваме и от обстоятелството, че дължината на целия интервал $[a, b]$ е крайна. Предположението, че интервалът е затворен, не е съществено.

[2] Тези подинтервали не са задължени да бъдат равни помежду си.

[3] В предположенията, които направихме за функцията $f(x)$, ние искахме тя да бъде ограничена, за да можем да говорим за горните граници M_i и долните граници m_i.

В случая, когато разглежданата функция приема само неотрицателни стойности, не е трудно да се даде геометрично тълкуване на сумите на Дарбу. Така например на черт. 2 е изобразена графиката на една функция, стойностите на която са неот-



Черт. 2

рицателни. Интервалът $[a, b]$ в случая е разделен на 4 части. Не е трудно да се види, че малката сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали, представлява точно сумата от лицата на вписаните правоъгълници

$$A_0A_1C_1B_0,\ A_1A_2C_2B_1,\ A_2A_3C_3B_2,\ A_3A_4C_4B_3.$$

Аналогично на черт. 3 е изобразена също функция, която приема само неотрицателни стойности. Интервалът $[a, b]$ е разделен на 3 подинтервала. Голямата сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали, представлява сумата от лицата на правоъгълниците

$$A_0A_1C_1B_0,\ A_1A_2C_2B_1,\ A_2A_3C_3B_2.$$

Не е трудно да се види, че множеството на всички суми на Дарбу (както малките, така и големите) е ограничено (и отгоре, и отдолу). И наистина нека M е една горна граница на функцията $f(x)$, а m е една нейна долна граница в интервала $[a, b]$. В такъв случай, като вземем пред вид неравенствата

$$m\leq m_i\leq M_i\leq M,$$

получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n} M(x_i-x_{i-1}).$$

От друга страна,

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i-x_{i-1})=m[(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})]=$$

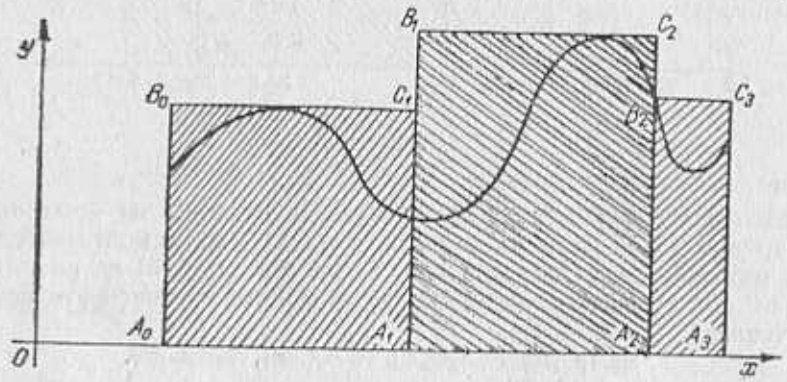
$$=m(x_n-x_0)=m(b-a),$$

$$\sum_{i=1}^{n} M(x_i-x_{i-1})=M[(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})]=$$

$$=M(x_n-x_0)=M(b-a)$$

и следователно

$$m(b-a)\leqq s\leqq S\leqq M(b-a).$$



Черт. 3

По този начин ние установихме не само ограничеността на множеството от сумите на Дарбу, но показахме, че ако S и s са съответно голямата и малката сума на Дарбу, които отговарят на е д и н и с ъ щ начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали, то

(1) $$s\leqq S.$$

Ние ще установим сега валидността на неравенството (1) и в случая, когато голямата сума S и малката сума s са образувани с помощта на два к а к в и д а с а (н е н е п р е м е н н о е д н а к в и) начина на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали. За да се убедим в това, ние ще покажем предварително, че при въвеждане на нови точки на деление големите суми на Дарбу монотонно намаляват, а малките суми монотонно растат. По-точно ние ще установим следното: нека

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

е едно произволно подразделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали, нека M_i е точната горна, а m_i — точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ и нека

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

са съответните суми на Дарбу; въвеждаме нова точка на деление ξ и означаваме с S' и s' сумите на Дарбу, които получаваме, когато към точките на деление $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ причислим още и точката ξ; в такъв случай

$$s\leqq s',\ S'\leqq S.$$

И наистина, ако ξ съвпада с някоя от точките $x_0, x_1, \cdots, x_n$, то новото деление не е различно от старото и следователно $s'=s$ и $S'=S$. За да установим верността на твърдението в общия случай, т. е. когато ξ не съвпада с никоя от точките $x_0, x_1, \cdots, x_n$ означаваме с k най-малкото цяло положително число, за което $\xi<x_k$. В такъв случай $x_{k-1}<\xi$. Нека L_1 е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{k-1}, \xi]$, а L_2 е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[\xi, x_k]$. В такъв случай[1]

$$S'=\sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i-x_{i-1})+L_1(\xi-x_{k-1})+L_2(x_k-\xi)+\sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

Оттук, като вземем пред вид, че

$$S=\sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i-x_{i-1})+M_k(x_k-x_{k-1})+\sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

[1] Разбира се, не е изключено някоя от сумите

$$\sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

да бъде празна.

намираме

$$S'-S=L_1(\xi-x_{k-1})+L_2(x_k-\xi)-M_k(x_k-x_{k-1}).$$

От друга страна,

$$L_1\leq M_k,$$
$$L_2\leq M_k,$$

защото M_k е горна граница на $f(x)$ в целия подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$ и следователно е горна граница и във всеки един от подинтервалите $[x_{k-1}, \xi]$ и $[\xi, x_k]$, докато L_1 и L_2 са най-малките горни граници на $f(x)$ в тези подинтервали. По такъв начин получаваме

$$S'-S\leq M_k(\xi-x_{k-1})+M_k(x_k-\xi)-M_k(x_k-x_{k-1})=0,$$

с което е показано, че $S'\leq S$. Неравенството $s'\geq s$ се установява по аналогичен начин. Сега не е трудно да се установи общата валидност на неравенството (1) и в случая, когато голямата и малката сума са образувани с помощта на различни точки на деление. По-точно ние имаме пред вид следното: нека разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали по два начина с помощта на двете системи от делящи точки

$$a=x'_0<x'_1<\cdots<x'_p=b;$$
$$a=x''_0<x''_1<\cdots<x''_q=b$$

и нека s е малката сума на Дарбу, която отговаря на системата $x'_0, x'_1, \cdots, x'_p$, а S е голямата сума, която отговаря на системата $x''_0, x''_1, \cdots, x''_q$; в такъв случай $s\leq S$. За да докажем това, ние означаваме с s_k малката сума на Дарбу, която получаваме, когато делим интервала $[a, b]$ с помощта на точките

$$x'_0, x'_1, \cdots, x'_p; x''_1, x''_2, \cdots, x''_k \quad (1\leq k\leq q),$$

а с S'_k означаваме голямата сума на Дарбу, която получаваме, когато делим интервала $[a, b]$ с помощта на точките

$$x''_0, x''_1, \cdots, x''_q; x'_1, x'_2, \cdots, x'_k \quad (1\leq k\leq p).$$

Съгласно доказаното по-горе имаме

$$s\leq s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_q,$$
$$S\geq S_1\geq S_2\geq\cdots\geq S_p.$$

От друга страна, сумите s_q и S_p са образувани с помощта на едни и същи точки на деление, т. е.

$$s_q\leq S_p,$$

и следователно

$$s\leq S.$$

С това неравенството (1) е установено в цялата му общност в смисъл, че сега вече не се иска голямата и малката сума да бъдат образувани с помощта на един и същ начин на деление на интервали $[a, b]$ на подинтервали.

Този резултат ни дава възможност да установим следното важно неравенство, което свързва точната горна граница $\underline{I}$ на малките суми с точната долна граница $\overline{I}$ на големите суми на Дарбу:

$$\underline{I}\leq\overline{I}.$$

За да докажем това, фиксираме една голяма сума S и разглеждаме множеството на всичките малки суми s. Неравенството

$$s\leq S$$

ни учи, че голямата сума S е една горна граница на множеството на малките суми. Като вземем пред вид обаче, че $\underline{I}$ е точната горна граница на това множество, т. е. най-малката от всичките му горни граници, заключаваме, че

$$\underline{I}\leq S. \tag{2}$$

И така неравенството (2) е установено при всеки избор на голямата сума S. Този резултат ни учи, че $\underline{I}$ е една долна граница на множеството на големите суми. Като вземем пред вид, че $\overline{I}$ е точната долна граница на това множество, т. е. най-голямата от всичките долни граници, заключаваме, че

$$\underline{I}\leq\overline{I}. \tag{3}$$

С това интересуващото ни неравенство е установено.

Точната горна граница — на множеството на малките суми на Дарбу на една ограничена функция $f(x)$ в един краен интервал $[a, b]$, където $a<b$, се нарича долен интеграл на тази функция в разглеждания интервал и се означава със знака

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Аналогично точната долна граница $\overline{I}$ на множеството на големите суми на Дарбу се нарича горен интеграл и се означава със знака

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

При тези означения неравенството (3) може да се напише по следния начин:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

След тези предварителни бележки ние вече сме готови да дадем дефиниция на понятието Риманов интеграл[1] (или, както се казва често, определен интеграл).

Казваме, че една функция $f(x)$, която е дефинирана и ограничена в един краен интервал $[a, b]$, е интегруема в Риманов смисъл в този интервал, когато горният и долният ѝ интеграл са равни помежду си. Общата стойност на горния и долния интеграл на една интегруема функция се нарича нейн Риманов (или определен) интеграл.

Римановият интеграл на една интегруема функция $f(x)$ в интервала $[a, b]$, където $a<b$, се означава обикновено със знака

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 1. Нека $f(x)=1$ при всички стойности на x в интервала $[a, b]$. Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdot\cdot\cdot<x_n=b.$$

Във всеки един от тези подинтервали точната горна и точната долна граница на разглежданата функция е равна на 1. Поради това съответната голяма и съответната малка сума на Дарбу имат стойност

$$\sum_{i=1}^{n} 1\,(x_i-x_{i-1})=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdot\cdot\cdot+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_0=b-a.$$

Оттук заключаваме, че както точната долна граница на големите суми, така и точната горна граница на малките суми има също тъй стойността $b-a$. Това ни учи, че разглежданата функция е интегруема и стойността на интеграла ѝ в разглеждания интервал е $b-a$.

С помощта на въведените по-горе означения този резултат се записва по следния начин:

$$\int_a^b 1\,dx=b-a.$$

[1] В последно време след работите на Борел и Лебег теорията на интеграла е осъществила важен напредък с въвеждането на понятието Лебегов интеграл, което е много по-общо от разглежданото тук класическо понятие Риманов интеграл.

Ние често ще си служим с по-краткото означение

$$\int_a^b dx=b-a.$$

Пример 2. Нека $f(x)=x$ при $a\leq x\leq b$. Не е трудно да се покаже, че тази функция е интегруема. За тази цел делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdot\cdot\cdot<x_n=b$$

и означаваме с S и s съответната голяма и малка сума, т. е.

$$S=\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\,(x_\nu-x_{\nu-1}), \tag{4}$$

$$s=\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu-1}\,(x_\nu-x_{\nu-1}). \tag{5}$$

Изваждайки двете равенства (4) и (5), получаваме

$$S-s=\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-x_{\nu-1})^2.$$

Оттук, като вземем пред вид неравенствата

$$S\geq\overline{\int_a^b} x\,dx,\quad s\leq\underline{\int_a^b} x\,dx,\quad \underline{\int_a^b} x\,dx\leq\overline{\int_a^b} x\,dx,$$

получаваме

$$0\leq\overline{\int_a^b} x\,dx-\underline{\int_a^b} x\,dx\leq\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-x_{\nu-1})^2.$$

Ние имаме свободата да делим интервала $[a, b]$ на подинтервали по произволен начин. Специално, ако разделим този интервал на n равни части, ще получим

$$0\leq\overline{\int_a^b} x\,dx-\underline{\int_a^b} x\,dx\leq\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 n=\frac{(b-a)^2}{n}.$$

В последното неравенство ние можем да даваме на цялото положително число n произволно големи стойности. Като вземем пред вид, че разликата

$$\overline{\int_a^b} x\,dx-\underline{\int_a^b} x\,dx$$

ни най-малко не зависи от n, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} x\,dx - \underline{\int_a^b} x\,dx = 0.$$

С това е установена интегруемостта на разглежданата функция.

За да пресметнем стойността на интеграла

$$\int_a^b x\,dx,$$

събираме почленно двете равенства (4) и (5). По този начин намираме

$$S+s=\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu^2-x_{\nu-1}^2)=b^2-a^2,$$

откъдето

$$\overline{\int_a^b} x\,dx+s\leq b^2-a^2,$$

$$S+\underline{\int_a^b} x\,dx\geq b^2-a^2$$

и следователно

(6) $$s\leq b^2-a^2-\overline{\int_a^b} x\,dx,$$

(7) $$S\geq b^2-a^2-\underline{\int_a^b} x\,dx.$$

Неравенството (6) ни учи, че числото

$$b^2-a^2-\underline{\int_a^b} x\,dx$$

е една горна граница на множеството на малките суми. Като вземем пред вид, че долният интеграл представлява точната, т. е. н а й-м а л к а т а горна граница на това множество, получаваме

$$\underline{\int_a^b} x\,dx\leq b^2-a^2-\overline{\int_a^b} x\,dx$$

следователно

$$\overline{\int_a^b} x\,dx+\underline{\int_a^b} x\,dx\leq b^2-a^2$$

и още

(8) $$2\int_a^b x\,dx\leq b^2-a^2.$$

Аналогично, изхождайки от неравенството (7), получаваме

(9) $$2\int_a^b x\,dx\geq b^2-a^2.$$

Неравенствата (8) и (9) ни дават

$$\int_a^b x\,dx=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

П р и м е р 3. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $a\leq x\leq b$, където $a<b$, по следния начин:

$f(x)=1$ при рационални стойности на x;
$f(x)=0$ при ирационални „ „ x.

Така дефинираната функция не е интегруема в разглеждания интервал. И наистина горната граница 1 на разглежданата функция се достига във всеки подинтервал на интервала $[a, b]$ и следователно представлява т о ч н а т а горна граница на функцията във всеки подинтервал. Аналогично се убеждаваме, че точната долна граница на функцията във всеки един подинтервал на интервала $[a, b]$ е равна на нула. Оттук заключаваме, че при всеки избор на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

съответната голяма сума S има стойност

$$S=\sum_{\nu=1}^{n}1\,(x_\nu-x_{\nu-1})=x_n-x_0=b-a$$

и съответната малка сума s има стойност

$$s=\sum_{\nu=}^{n}0\,(x_\nu-x_{\nu-1}=0.$$

Оттук заключаваме, че

$$\int_a^b f(x)\,dx=b-a$$

и

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=0,$$

което показва, че разглежданата функция не е интегруема.

§ 2. Достатъчни условия за интегруемост

В този параграф ще дадем няколко достатъчни условия за интегруемост в Риманов смисъл.

I. Всяка функция $f(x)$, която е дефинирана и непрекъсната[1] в един краен и затворен интервал $[a, b]$, е интегруема в него.

Доказателство. Избираме едно произволно положително число ε и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

където

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

по такъв начин, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от ε. Това, както знаем, е възможно.

Нека M_i е точната горна и m_i е точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Разглеждаме съответната голяма сума S и съответната малка сума s:

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i-x_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i-x_{i-1}).$$

В такъв случай

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,(x_i-x_{i-1}).$$

[1] Тук не е нужно да предполагаме, че функцията $f(x)$ е ограничена, защото, както знаем, това вече следва от непрекъснатостта ѝ в крайния и затворен интервал $[a, b]$.

Оттук, като вземем пред вид неравенствата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq S,\ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\geq s,\ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

намираме

$$0\leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,(x_i-x_{i-1}).$$

При избрания начин на делението на интервала $[a, b]$ на подинтервали осцилацията M_i-m_i във всеки един от тях удовлетворява неравенството

$$M_i-m_i\leq\varepsilon$$

и следователно

$$0\leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq \sum_{i=1}^{n}\varepsilon\,(x_i-x_{i-1})=\varepsilon\,(b-a).$$

Като вземем пред вид, че положителното число ε е произволно, а числата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

и $b-a$ ни най-малко не зависят от ε, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=0,$$

защото в противен случай неравенството

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq\varepsilon\,(b-a)$$

сигурно ще бъде нарушено,[1] ако направим положителното число ε достатъчно малко.

II. И така непрекъснатите функции (при наличността на останалите условия, които ние формулирахме в току-що доказаната

[1] Нека припомним тук, че интервалът $[a, b]$ е краен.

теорема) са интегруеми. С непрекъснатите функции обаче съвсем не се изчерпва множеството на интегруемите функции. Така например, ако една функция $f(x)$ е дефинирана и ограничена[1] в интервала $[a, b]$ и има само краен брой точки на прекъсване, тя е също интегруема.

Ние ще докажем тази теорема за случая, когато функцията $f(x)$ има една единствена, и то вътрешна (по отношение на интервала $[a, b]$) точка на прекъсване c. Нека читателят сам обмисли общото доказателство.[2]

Избираме едно достатъчно малко (иначе произволно) положително число ε по такъв начин, че да имаме

$$a<c-\varepsilon,\ c+\varepsilon<b.$$

Делим интервалите $[a,\ c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon,\ b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdot\cdot\cdot<x_p=c-\varepsilon,$$
$$c+\varepsilon=y_0<y_1<y_2<\cdot\cdot\cdot<y_q=b$$

така, че осцилацията на функцията $f(x)$ във всеки един от тях да бъде по-малка от ε. Това може да се направи, защото функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворените интервали $[a,\ c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon,\ b]$.

Означаваме с M_i и m_i съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1},\ x_i]$; с N_i и n_i съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервали $[y_{i-1},\ y_i]$; с L и l съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[c-\varepsilon,\ c+\varepsilon]$ и най-сетне с M и m една горна и една долна граница на $f(x)$ в целия интервал $[a, b]$.

В такъв случай голямата сума S и малката сума s имат съответно стойностите

$$S=\sum_{i=1}^{p} M_i\,(x_i-x_{i-1})+L\,.\,2\varepsilon+\sum_{i=1}^{q} N_i\,(y_i-y_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^{p} m_i\,(x_i-x_{i-1})+l\,.\,2\varepsilon+\sum_{i=1}^{q} n_i\,(y_i-y_{i-1}).$$

[1] Тук се налага да предполагаме изрично ограничеността на функцията, защото тази функция притежава точки на прекъсване и следователно би могла да бъде неограничена.

[2] Което, разбира се, става по същия начин.

Оттук получаваме

$$S-s=\sum_{i=1}^{p}(M_i-m_i)\,(x_i-x_{i-1})+(L-l)\,.\,2\varepsilon+\sum_{i=1}^{q}(N_i-n_i)\,(y_i-y_{i-1}).$$

Като вземем пред вид неравенствата

$$S\geq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx,\ s\leq\underline{\int_a^b} f(x)\,dx,\ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

намираме

$$0\leq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq\sum_{i=1}^{p}(M_i-m_i)\,(x_i-x_{i-1})+(L-l)\,.\,2\varepsilon+$$
$$+\sum_{i=1}^{q}(N_i-n_i)\,(y_i-y_{i-1}),$$

откъдето

$$0\leq\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq\sum_{i=1}^{p}\varepsilon\,(x_i-x_{i-1})+(M-m)\,.\,2\varepsilon+$$
$$+\sum_{i=1}^{q}\varepsilon\,(y_i-y_{i-1})=$$
$$=\varepsilon\,[(c-\varepsilon-a)+2\,(M-m)+(b-c-\varepsilon)]<\varepsilon[b-a+2M-2m].$$

Като вземем пред вид, че положителното число ε е подчинено на единственото ограничение да бъде достатъчно малко, а числата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \text{ и } b-a+2M-2m$$

ни най-малко не зависят от ε, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=0,$$

защото в противен случай неравенството

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \varepsilon\,(b-a+2M-2m)$$

сигурно ще бъде нарушено, ако дадем на положителното число ε достатъчно малка стойност.

III. В известни случаи дори наличието на безбройно много точки на прекъсване не е пречка за интегруемостта Така ние ще видим сега, че монотонните функции (при някои предположения относно дефиниционната им област) са също тъй интегруеми (дори ако притежават безбройно много точки на прекъсване). Точно ние ще докажем следната теорема:

Всяка функция $f(x)$, която е дефинирана и монотонна в един краен и затворен интервал $[a, b]$, е интегруема в него.[1]

Доказателство. Ние ще разгледаме само случая, когато ни е дадена една монотонно растяща функция. Нека читателят сам разгледа случая, когато функцията монотонно намалява.

Избираме едно произволно число ε и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

по такъв начин, че дължината на всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от ε. Разглеждаме съответната голяма сума S и съответната малка сума s. Очевидно имаме

$$S = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

$$s = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu-1})\,(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

[1] Тук не е необходимо да предполагаме, че функцията $f(x)$ е ограничена, защото това вече следва от нейната монотонност: при монотонно растящи функции имаме

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b),$$

а при монотонно намаляващи функции имаме

$$f(a) \geq f(x) \geq f(b).$$

Оттук получаваме

$$S - s = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})]\,(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Като вземем пред вид неравенствата

$$S \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,\quad s \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

намираме

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})]\,(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

откъдето

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})]\,\varepsilon = \varepsilon[f(b) - f(a)]$$

Като вземем пред вид още, че положителното число ε е произволно, а числата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \text{ и } f(b) - f(a)$$

не зависят ни най-малко от ε, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0, \tag{1}$$

защото в противен случай неравенството

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \varepsilon[f(b) - f(a)]$$

сигурно ще бъде нарушено, ако изберем положителното число ε достатъчно малко.

Равенството (1) ни учи, че функцията $f(x)$ е интегруема. С това интересуващата ни теорема е доказана.

§ 3. Основни свойства на определените интеграли

I. Нека функцията $f(x)$ е ограничена в интервала[1] $[a, b]$ и c е коя да с вътрешна точка в този интервал. В такъв случай

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Доказателство. Ние ще докажем само равенството (2). Равенството (3) се доказва по същия начин.

Делим интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_p = c, \tag{4}$$

$$c = x''_0 < x''_1 < \cdots < x''_q = b. \tag{5}$$

Означаваме с m'_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x'_{i-1}, x'_i]$ и с m''_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x''_{i-1}, x''_i]$. Разглеждаме съответните малки суми

$$s' = \sum_{i=1}^{p} m'_i\,(x'_i - x'_{i-1}),$$

$$s'' = \sum_{i=1}^{q} m''_i\,(x''_i - x''_{i-1}).$$

Очевидно числото

$$s' + s'' = \sum_{i=1}^{p} m'_i(x'_i - x'_{i-1}) + \sum_{i=1}^{b} m''_i(x''_i - x''_{i-1})$$

представлява една специална малка сума за функцията $f(x)$, отговаряща на интервала $[a, b]$. От това заключаваме[2], че

[1] Нека припомним на това място, че интервалите, които разглеждаме, са крайни, ако изрично не е казано противното.

[2] Припомняме, че долният интеграл е (точната) горна граница на множеството на малките суми.

$$s' + s'' \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

откъдето

$$s' \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s''. \tag{6}$$

Ние сега ще фиксираме точките (5). С това не е направено никакво ограничение за точките (4). Неравенството (6) ни учи, че числото

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s''$$

е една горна граница на малките суми s'. Като вземем пред вид, че

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx$$

е точната, т. е. най-малката горна граница на тези суми, намираме

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s''. \tag{7}$$

Неравенството (7) ни дава

$$s'' \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx. \tag{8}$$

Ние имахме свободата да фиксираме точките (5) произволно. Сега ще се възползуваме от тази свобода. И така неравенството (8) е установено за всичките малки суми s''. От това заключаваме, че числото

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx$$

е една горна граница за тези суми. Като вземем пред вид, че

$$\overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, намираме

$$\overline{\int_c^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \overline{\int_a^c} f(x)\,dx$$

и следователно

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx. \tag{9}$$

По-нататък делим интервала $[a, b]$ по произволен начин на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Разглеждаме малката сума

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}).$$

Нека x_p е най-голямото от числата[1]

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

което не надминава c. В такъв случай

$$x_p \leq c < x_{p+1}.$$

Означаваме с m' и m'' точната долна граница на $f(x)$ съответно в подинтервалите $[x_p, c]$ и $[c, x_{p+1}]$. Очевидно имаме[2]

$$m' \geq m_{p+1}, \quad m'' \geq m_{p+1},$$

т. е.

$$m'(c - x_p) + m''(x_{p+1} - c) \geq m_{p+1}(x_{p+1} - x_p).$$

[1] Такова число сигурно има, защото $x_0 = a < c$. Това число е по-малко от x_n защото $x_n = b > c$.

[2] Ние бихме могли да се убедим във валидността на тези неравенства така: m_{p+1} е долна граница на $f(x)$ в целия интервал $[x_p, x_{p+1}]$, а следователно и в подинтервала $[x_p, c]$, докато m' е точната долна граница, т. е. най-голямата долна граница на $f(x)$ в същия подинтервал, оттук заключаваме, че $m' \geq m_{p+1}$. Аналогично се установява и неравенството $m'' \geq m_{p+1}$.

От това заключаваме, че[1]

$$s = \sum_{i=1}^{p} m_i (x_i - x_{i-1}) + m_{p+1}(x_{p+1} - x_p) + \sum_{i=p+2}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{p} m_i (x_i - x_{i-1}) + m'(c - x_p)\right] +$$

$$+ \left[m''(x_{p+1} - c) + \sum_{i=p+2}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})\right] \leq \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Това неравенство ни учи, че числото

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

представлява една горна граница на малките суми s. Като вземем под внимание, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

представлява точната, т. е. най-малката им горна граница, получаваме

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx. \tag{10}$$

Неравенствата (9) и (10) ни учат, че

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

[1] При $p = 0$ трябва да се разбира

$$\sum_{i=1}^{p} m_i (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

При $p = n - 1$ трябва да се разбира

$$\sum_{i=p+2}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Следствие I. Ако

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Следствие II. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то тя е интегруема във всеки подинтервал на $[a, b]$. И наистина нека $a<c<b$. В такъв случай

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx+\overline{\int_c^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx+\underline{\int_c^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

и следователно

$$\left(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx-\underline{\int_a^c} f(x)\,dx\right)+\left(\overline{\int_c^b} f(x)\,dx-\underline{\int_c^b} f(x)\,dx\right)=0.$$

Като вземем пред вид, че

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx-\underline{\int_a^c} f(x)\,dx\geq 0 \text{ и } \overline{\int_c^b} f(x)\,dx-\underline{\int_c^b} f(x)\,dx\geq 0,$$

намираме

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx-\underline{\int_a^c} f(x)\,dx=0 \text{ и } \overline{\int_c^b} f(x)\,dx-\underline{\int_c^b} f(x)\,dx=0,$$

т. е. функцията $f(x)$ е интегруема в двата подинтервала $[a, c]$ и $[c, b]$. Оттук може да се установи, че функцията $f(x)$ е интегруема и във всеки подинтервал $[c, d]$, където $a<c<d<b$. И наистина ние вече установихме, че тя е интегруема в подинтервала

$[c, b]$, а от това и от доказаното по-горе следва, че тя е интегруема и в подинтервала $[c, d]$.

Следствие III. Ако функцията $f(x)$ е интегруема както в интервала $a\leq x\leq c$, така и в интервала $c\leq x\leq b$, то тя е интегруема и в интервала $a\leq x\leq b$. И наистина от

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^c} f(x)\,dx+\overline{\int_c^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^c} f(x)\,dx+\overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

и

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^c} f(x)\,dx+\underline{\int_c^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^c} f(x)\,dx+\underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

имаме

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Следствие IV. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и $a<c<b$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

По-общо, ако

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

II. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и ограничена в интервала $[a, b]$ и λ е една константа. В такъв случай при $\lambda\geq 0$ имаме

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx \tag{11}$$

и

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx,$$

а при $\lambda \leq 0$ имаме

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

и

$$\overline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx = \lambda \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Доказателство. Ние ще разгледаме само равенството (11) при $\lambda > 0$, защото останалите равенства се установяват по същия начин, а случаят $\lambda = 0$ е тривиален.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно[1] точната долна граница на $\lambda f(x)$ в същия подинтервал е λm_i.

Разглеждаме двете малки суми

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda m_i (x_i - x_{i-1}).$$

Явно е, че $s = \frac{\sigma}{\lambda}$.

Като вземем пред вид неравенството

$$s \leq \int^{*} f(x)\,dx$$

[1] За да се убедим в това, означаваме с m_i' точната долна граница на $\lambda f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно имаме $m_i \leq f(x)$, $m_i' \leq \lambda f(x)$ при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ и следователно $\lambda m_i \leq \lambda f(x)$, $\frac{m_i'}{\lambda} \leq f(x)$. Тези неравенства ни учат, че числата $\frac{m_i'}{\lambda}$ и λm_i са долни граници съответно на функциите $f(x)$ и $\lambda f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид, че m_i и m_i' са точните, т. е. най-големите им долни граници, намираме $m_i \geq \frac{m_i'}{\lambda}$ и $m_i' \geq \lambda m_i$. Тези неравенства ни дават $m_i' = \lambda m_i$.

(което изразява, че долният интеграл е една горна граница на малките суми), получаваме

$$\frac{\sigma}{\lambda} \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

или

$$\sigma \leq \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

С това е установено, че числото

$$\lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

е една горна граница на множеството на малките суми σ. Като вземем пред вид, че $\overline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx$ е точната горна, т. е. най-малката горна граница на тези суми, получаваме

$$\overline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx \leq \lambda \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Аналогично се установява неравенството

$$\lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx.$$

Оттук заключаваме, че

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Следствие. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и λ е константа, то функцията $\lambda f(x)$ е също тъй интегруема и

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

III. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то и функцията $|f(x)|$ е интегруема в този интервал.

Доказателство. Избираме $\varepsilon>0$ и образуваме една голяма сума на Дарбу S^* и една малка сума s^* за функцията $f(x)$ по такъв начин, че да имаме

$$S^*<\overline{\int_a^b} f(x)\,dx+\varepsilon,$$

$$s^*>\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-\varepsilon.$$

Това е възможно да се направи, защото $\underline{\int_a^b}$ е най-голямата долна граница на големите суми и $\overline{\int_a^b}$ е най-малката горна граница на малките суми на Дарбу, т. е. $\overline{\int_a^b}+\varepsilon$ не е долна граница на големите суми, а $\underline{\int_a^a}-\varepsilon$ не е горна граница на малките суми.

По-нататък делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

по такъв начин, че измежду точките $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ да се намират всичките точки на деление както на сумата S^*, така и на сумата s^*. Означаваме с M_i точната горна, с m_i точната долна граница на $f(x)$, а с M_i' и m_i' съответно точната горна и точната долна граница на $|f(x)|$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ и разглеждаме сумите на Дарбу

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$S'=\sum_{i=1}^{n} M_i'(x_i-x_{i-1}),$$

$$s'=\sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i-x_{i-1}).$$

Очевидно

$$S^*\geqq S,\quad s^*\leqq s$$

и

$$0\leqq\overline{\int_a^b}|f(x)|\,dx-\underline{\int_a^b}|f(x)|\,dx\leqq S'-s'=\sum_{i=1}^{n}(M_i'-m_i')(x_i-x_{i-1}).$$

От друга страна, както и да избираме точките ξ_1 и ξ_2 в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, имаме

$$f(\xi_1)-f(\xi_2)\leqq M_i-m_i,$$

т. е.

$$f(\xi_2)-f(\xi_1)\leqq M_i-m_i,$$

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|\leqq M_i-m_i$$

и толкова повече

$$|f(\xi_1)|-|f(\xi_2)|\leqq M_i-m_i.$$

Оттук не е трудно да се установи, че

$$M_i'-m_i'\leqq M_i-m_i.$$

За тази цел избираме произволно положително число δ и определяме ξ_1 и ξ_2 така, че да имаме

$$|f(\xi_1)|>M_i'-\delta,\quad |f(\xi_2)|<m_i'+\delta.$$

По такъв начин получаваме

$$M_i'-m_i'-2\delta<M_i-m_i.$$

Като вземем пред вид, че положителното число δ е произволно, намираме

$$M_i'-m_i'\leqq M_i-m_i.$$

Този резултат ни позволява да пишем

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i'-m_i')(x_i-x_{i-1})\leqq\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=S-s$$

и следователно

$$0 \leq \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx - \underline{\int_a^b} |f(x)|\,dx \leq S - s \leq s \leq S^* - s^* <$$

$$< \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon - \left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon \right) = 2\varepsilon.$$

Оттук, като вземем пред вид, че положителното число ε е произволно, а неотрицателната разлика

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx - \underline{\int_a^b} |f(x)|\,dx$$

не зависи от ε, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx - \underline{\int_a^b} |f(x)|\,dx = 0,$$

т. е. функцията $|f(x)|$ е наистина интегруема.

IV. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, b]$ и във всички точки от този интервал удовлетворява неравенствата

$$m \leq f(x) \leq M,$$

където m и M са константи.

В такъв случай

$$m(b-a) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a), \tag{12}$$

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a). \tag{13}$$

Доказателство. Ние ще докажем неравенството (12); неравенството (13) се доказва по същия начин.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала

$[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно имаме[1]

$$m \leq m_i \leq M$$

и следователно

$$m(b-a) = \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) = M(b-a).$$

От неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

което изразява, че долният интеграл е една горна граница на малките суми, получаваме

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

От друга страна, неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

ни учи, че константата $M(b-a)$ е една горна граница на множеството на малките суми. Като вземем пред вид, че $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ е точната, т. е. най-малката горна граница на тези суми, намираме

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Следствие. Нека функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$. В такъв случай

[1] И наистина от $m_i \leq f(x) \leq M$ при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ имаме $m_i \leq M$. От друга страна, m е една долна граница на $f(x)$ в целия интервал $[a, b]$, а следователно и в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, докато m_i е точната, т. е. най-голямата долна граница на функцията $f(x)$ в същия подинтервал, т. е. $m \leq m_i$.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqq 0,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqq 0.$$

Специално, ако функцията $f(x)$ е интегруема, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0.$$

V. Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са две ограничени функции в интервала $[a, b]$, които при всички стойности на x удовлетворяват неравенството

$$f_1(x) \leqq f_2(x).$$

В такъв случай

(14) $$\underline{\int_a^b} f_1(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} f_2(x)\,dx$$

и

(15) $$\overline{\int_a^b} f_1(x)\,dx \leqq \overline{\int_a^b} f_2(x)\,dx.$$

Доказателство. Ще докажем неравенството (14); неравенството (15) се доказва по същия начин. Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i' и m_i'' точните долни граници съответно на $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно имаме[1]

$$m_i' \leqq m_i''.$$

От това неравенство получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \leqq \sum_{i=1}^{n} m_i''(x_i - x_{i-1}),$$

[1] Като вземем пред вид неравенствата $m_i' \leqq f_1(x) \leqq f_2(x)$ при $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$, получаваме $m_i' \leqq f_2(x)$. Това неравенство ни учи, че m_i' е една долна граница на $f_2(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид още, че m_i'' е точната, т. е. най-голямата долна граница на $f_2(x)$ в същия подинтервал, получаваме $m_i' \leqq m_i''$.

т. е.[1]

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \leqq \underline{\int_a^b} f_2(x)\,dx.$$

Този резултат ни учи, че числото $\underline{\int_a^b} f_2(x)\,dx$ е една горна граница на множеството на малките суми на $f_1(x)$. Като вземем в съображение, че

$$\underline{\int_a^b} f_1(x)\,dx$$

е точната, т. е. най-малката от горните граници на тези суми, получаваме

$$\underline{\int_a^b} f_1(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} f_2(x)\,dx.$$

Следствие. Ако функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$, $a < b$, то

$$\left| \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \right| \leqq \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx.$$

Следователно, ако функцията $f(x)$ е интегруема, то

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказателство. От неравенствата

$$f(x) \leqq |f(x)|,$$
$$-f(x) \leqq |f(x)|$$

[1] Тук ние се възползуваме от неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} m_i''(x_i - x_{i-1}) \leqq \overline{\int_a^b} f_2(x)\,dx,$$

което изразява, че долният интеграл е една горна граница за малките суми.

получаваме

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geqq \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geqq \int_a^b |f(x)|\,dx \geqq \int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Но

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

е едното (по-голямото) от двете числа

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ и } -\int_a^b f(x)\,dx,$$

тъй че

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geqq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.$$

Забележка. Неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

не винаги е валидно. За да се убедим в това, разглеждаме функцията $f(x)$, дефинирана с условията $f(x)=-1$ при рационални стойности на x и $f(x)=0$ при ирационални стойности на x.

§ 4. Интегриране на сума

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две ограничени функции в интервала $[a, b]$. В такъв случай

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx \geqq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

От това следва, че ако двете функции $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми, то сумата $f(x)+g(x)$ е също така интегруема и

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ние ще извършим доказателството, като разгледаме първо специалния случай, когато $g(x)$ е константа. Да означим с m тази константа. В такъв случай

$$\int_a^b [f(x)+m]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + m(b-a), \tag{16}$$

$$\int_a^b [f(x)+m]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + m(b-a). \tag{17}$$

Доказателство. Ще докажем равенството (16); равенството (17) се доказва по същия начин.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i и m_i' съответно точната долна граница на $f(x)$ и $f(x)+m$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. В такъв случай имаме

$$m_i' = m_i + m. \tag{18}$$

И наистина от неравенството

$$m_i \leqq f(x),$$

валидно при $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$, получаваме

$$m_i + m \leqq f(x) + m,$$

т. е. m_i+m е една долна граница на $f(x)+m$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид, че m_i' е точната, т. е. най-голямата долна граница на тази функция в същия подинтервал, вамираме

$$m_i + m \leqq m_i'. \tag{19}$$

Аналогично от неравенството

$$m_i' \leqq f(x) + m,$$

валидно при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, получаваме

$$m_i' - m \leq f(x),$$

т. е. числото $m_i' - m$ е една долна граница на функцията $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид, че m_i е точната, т. е. най-голямата долна граница на тази функция в същия подинтервал, намираме

$$m_i' - m \leq m_i$$

или

(20) $$m_i' \leq m_i + m.$$

Неравенствата (19) и (20) ни дават $m_i' = m_i + m$.

Равенството (18) ни дава възможност да пишем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (m_i + m)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + m(b-a)$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b f(x)\,dx + m(b-a).$$

С това ние доказахме, че числото

$$\int_a^b f(x)\,dx + m(b-a)$$

е една горна граница на множеството на малките суми на функцията $f(x)+m$. Като вземем пред вид, че числото

$$\int_a^b [f(x)+m]\,dx$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, намираме

(21) $$\int_a^b [f(x)+m]\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx + m(b-a).$$

Аналогично, използувайки неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b [f(x)+m]\,dx - m(b-a),$$

доказваме, че

(22) $$\int_a^b [f(x)+m]\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx + m(b-a).$$

Неравенствата (21) и (22) ни дават

$$\int_a^b [f(x)+m]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + m(b-a).$$

След всичко извършено ние сме готови вече да разгледаме общия случай.

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две ограничени функции в интервала $[a, b]$. В такъв случай

(23) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

(24) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказателство. Ще докажем неравенството (23); неравенството (24) се доказва по същия начин.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i точната долна граница на $g(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Съгласно доказаните по-горе теореми

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x)+g(x)]\,dx \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x)+m_i]\,dx = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx + m_i(x_i - x_{i-1}) \right] =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i-x_{i-1}) \leq \underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

С това доказахме, че числото

$$\underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

е една горна граница на множеството на малките суми на $g(x)$. Като вземем пред вид, че

$$\underline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, получаваме

$$\underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

с което неравенството (23) е установено.

Следствие. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$, то функцията $f(x)+g(x)$ е също тъй интегруема в този интервал и

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказателство. От неравенствата

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx \leq$$

$$\leq \overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

и от равенствата

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx, \quad \underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

получаваме

$$\underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx = \overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Първото равенство ни учи, че функцията $f(x)+g(x)$ е интегруема, а последното ни дава

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

§ 5. Произведение на две интегруеми функции

Ще докажем, че произведението $f(x)\,g(x)$ на две интегруеми в един интервал $a \leq x \leq b$ функции $f(x)$ и $g(x)$ е интегруема функция в този интервал.

Доказателство. Първо ще разгледаме случая, когато функциите $f(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни. Избираме едно положително число ε. Означаваме с S' и s' една голяма и една малка сума на Дарбу на функцията $f(x)$, които удовлетворяват условията

$$S' < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon, \quad s' > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Означаваме с S'' и s'' една голяма и една малка сума на Дарбу на функцията $g(x)$, които удовлетворяват условията

$$S'' < \overline{\int_a^b} g(x)\,dx + \varepsilon, \quad s'' > \underline{\int_a^b} g(x)\,dx - \varepsilon.$$

В такъв случай

$$S' - s' < 2\varepsilon, \quad S'' - s'' < 2\varepsilon,$$

тъй като функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми, т. е.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx, \quad \underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Да разделим интервала $a \leq x \leq b$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

които са избрани така, че между тях да фигурира всяка точка, която се използува при образуването на сумите S', s', S'', s''. Означаваме с M_i', респективно M_i'', точната горна граница на $f(x)$, респективно $g(x)$, в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, а с m_i', респективно m_i'', означаваме точната долна граница на $f(x)$, респективно $g(x)$, в този подинтервал. В такъв случай при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ имаме

$$m_i' m_i'' \leq f(x) g(x) \leq M_i' M_i''$$

и следователно

$$\overline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} f(x) g(x)\, dx \leq \sum_{i=1}^{n} M_i' M_i'' (x_i - x_{i-1}),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} f(x) g(x)\, dx \geq \sum_{i=1}^{n} m_i' m_i'' (x_i - x_{i-1}),$$

откъдето получаваме

$$\overline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i' M_i'' - m_i' m_i'')(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i''(M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} m_i'(M_i'' - m_i'')(x_i - x_{i-1}).$$

Да означим с M една обща горна граница на $f(x)$ и $g(x)$ в целия интервал $a \leq x \leq b$. В такъв случай ще имаме

$$m_i' \leq M \text{ и } M_i'' \leq M$$

и следователно

$$\overline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx \leq M \sum_{i=1}^{n} (M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) +$$

$$+ M \sum_{i=1}^{n} (M_i'' - m_i'')(x_i - x_{i-1}).$$

От друга страна,

$$\sum_{i=1}^{n} M_i'(x_i - x_{i-1}) \leq S', \quad \sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \geq s',$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i''(x_i - x_{i-1}) \leq S'', \quad \sum_{i=1}^{n} m_i''(x_i - x_{i-1}) \geq s''.$$

По такъв начин получаваме

$$\overline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx \leq M(S' - s') + M(S'' - s'') \leq 4M\varepsilon,$$

което е достатъчно да можем да твърдим, че

$$\overline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x) g(x)\, dx.$$

По такъв начин ние установихме интегруемостта на произведението $f(x)\, g(x)$ в случая, когато функциите $f(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни. За да се освободим от това предположение, означаваме с m една обща долна граница на $f(x)$ и $g(x)$. В такъв случай функциите

$$f(x) - m \text{ и } g(x) - m$$

са неотрицателни и следователно въз основа на доказаното можем да твърдим, че произведението

$$[f(x) - m][g(x) - m]$$

е интегруемо. Това обаче ни позволява да твърдим, че функцията

$$f(x) g(x) = [f(x) - m][g(x) - m] + mf(x) + mg(x) - m^2$$

е също тъй интегруема, защото е сума на интегруеми функции. С това доказателството е завършено.

§ 6. Интегралът като функция на една от интеграционните си граници. Теорема на Лайбниц и Нютон. Зависимост между определени и неопределени интеграли

Нека функцията $f(t)$ е интегруема в интервала $a \leq t \leq b$. В такъв случай, както видяхме по-горе, тази функция е интегруема и в подинтервала $a \leq t \leq x$, където $a < x \leq b$.

Стойността на интеграла

$$\int_a^x f(t)\, dt$$

може, разбира се, евентуално да се мени когато x се мени. Тя обаче е еднозначно определена, когато x е дадено, и следователно представлява функция на x, дефинирана в интервала $[a, b]$.

Ние ще пишем за краткост

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

и ще установим, че тази функция е непрекъсната. Ще докажем дори нещо повече: тази функция удовлетворява условието на Липшиц (вж. Диференциално смятане, част III, глава II, § 5).

За да се убедим в това, означаваме с M и m една горна и една долна граница на $f(t)$ в интервала $[a, b]$.

Нека $x_1<x_2$ са две точки от интервала $[a, b]$. В такъв случай

$$F(x_2)=\int_a^{x_2} f(t)\,dt=\int_a^{x_1} f(t)dt+\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$

и следователно

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt.$$

Като се възползуваме от неравенството (12) от предния параграф, получаваме[1]

$$m(x_2-x_1)\leq\int_{x_1}^{x} f(t)\,dt\leq M(x_2-x_1)$$

и следователно

(1) $$m(x_2-x_1)\leq F(x_2)-F(x_1)\leq M(x_2-x_1).$$

[1] В случая функцията $f(t)$ е интегруема и следователно, като приложим неравенството (12) от предния параграф, можем да пишем

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$$

(т. е. вместо долния интеграл вземаме редовния Риманов интеграл) или в нашия специален случай

$$m(x_2-x_1)\leq\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\leq M(x_2-x_1).$$

От това двойно неравенство се вижда непосредствено, че функцията $F(x)$ удовлетворява условието на Липшиц.[1]

За да се убедим, че функцията $F(x)$ е непрекъсната във всяка точка x_0 на интервала $(a, b]$, оставяме x_1 и x_2 да клонят към x_0 чрез две произволни редици от стойности (лежащи, разбира се, в интервала $[a, b]$) по такъв начин, че да имаме

$$x_1\leq x_0\leq x_2.$$

В такъв случай са валидни неравенствата[2] (1). Като вземем пред вид, че разликата x_2-x_1 клони към нула, заключаваме, че разликата

$$F(x_2)-F(x_1)$$

също клони към нула, което, както знаем, е достатъчно да твърдим, че функцията $F(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

След тези предварителни бележки ще докажем следната важна теорема, която е известна под името теорема на Лайбниц и Нютон:

Нека функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и непрекъсната в точката x_0, където $a<x_0\leq b$. В такъв случай функцията

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

е диференцуема в точката x_0 и

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Доказателство. Разглеждаме отношението

$$\frac{F(x_n)-F(\xi_n)}{x_n-\xi_n},$$

където

(2) $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

(3) $$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots,$$

[1] Ако функцията $f(t)$ не е задължена да бъде интегруема в интервала (a, b), но все пак е ограничена, ние можем да приложим горните разсъждения за функциите

$$F_1(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ F_2(x)=\int_a^x f(x)\,dt$$

и да заключим, че те удовлетворяват условието на Липшиц и следователно са непрекъснати.

[2] Дори при $x_1=x_2$. В този случай валидността на тези неравенства не следва от направените по-горе разсъждения, обаче тя се вижда непосредствено, тъй като в този случай $F(x_1)=F(x_2)$.

са две редици, удовлетворяващи условията

$$a<\xi_n\leq x_0\leq x_n\leq b,\quad \xi_n\neq x_n,\quad \lim_{n\to\infty}\xi_n=\lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

Очевидно имаме

$$\frac{F(x_n)-F(\xi_n)}{x_n-\xi_n}=\frac{\int_a^{x_n}f(t)\,dt-\int_a^{\xi_n}f(t)\,dt}{x_n-\xi_n}=$$

$$=\frac{\left[\int_a^{\xi_n}f(t)\,dt+\int_{\xi_n}^{x_n}f(t)\,dt\right]-\int_a^{\xi_n}f(t)\,dt}{x_n-\xi_n}=\frac{1}{x_n-\xi_n}\int_{\xi_n}^{x_n}f(t)\,dt.$$

Избираме едно произволно положително число ε и определяме $\delta>0$ по такъв начин, че при

$$|x_0-t|<\delta\quad a\leq t\leq b,$$

да имаме

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

или, което е същото,

$$f(x_0)-\varepsilon<f(t)<f(x_0)+\varepsilon. \tag{4}$$

След това избираме едно толкова голямо число ν, че при $n>\nu$ да имаме $x_n-x_0<\delta$ и $x_0-\xi_n<\delta$. Това е възможно, защото редиците (2) и (3) клонят към x_0 и защото $\delta>0$. В такъв случай при $\xi_n\leq t\leq x_n$ имаме $|t-x_0|<\delta$ и следователно са в сила неравенствата (4).

Като използуваме неравенствата (12) от предния параграф, получаваме

$$[f(x_0)-\varepsilon](x_n-\xi_n)\leq\int_{\xi_n}^{x_n}f(t)\,dt\leq[f(x_0)+\varepsilon](x_n-\xi_n)$$

и следователно

$$f(x_0)-\varepsilon\leq\frac{F(x_n)-F(\xi_n)}{x_n-\xi_n}\leq f(x_0)+\varepsilon$$

или

$$\left|\frac{F(x_n)-F(\xi_n)}{x_n-\xi_n}-f(x_0)\right|\leq\varepsilon,$$

нещо, което е достатъчно, както знаем, за да твърдим, че функцията $F(x)$ е диференцуема[1] в точката x_0 и че

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Особено е важен случаят, когато подинтегралната функция $f(x)$ е непрекъсната във всичките точки на интервала $a\leq x\leq b$. В такъв случай във всичките точки на интервала $(a, b]$ имаме

$$F'(x)=f(x),$$

т. е. функцията $F(x)$ представлява една примитивна функция на $f(x)$ в интервала $(a, b]$. Върху тази зависимост между определените и неопределените интеграли почива един важен метод за пресмятане на определените интеграли. Ние ще изложим сега този метод.

Нека $\Phi(x)$ е една примитивна функция за функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Това значи, че функцията $\Phi(x)$ е диференцуема в интервала $a\leq x\leq b$ и

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Полагаме

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \text{ при } a<x\leq b$$

и разглеждаме разликата

$$\varphi(x)=F(x)-\Phi(x). \tag{5}$$

Очевидно имаме

$$\varphi'(x)=F'(x)-\Phi'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

[1] Ако функцията $f(x)$ не е подчинена на условието да бъде интегруема, но все пак е ограничена, то ние можем да приложим горните разсъждения за функциите

$$F_1(x)=\underline{\int_a^x} f(t)\,dt,$$

$$F_2(x)=\overline{\int_a^x} f(t)\,dt$$

и да заключим, че във всяка точка x_0, в която функцията $f(x)$ е непрекъсната, двете функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ са диференцуеми и

$$F_1'(x_0)=F_2'(x_0)=f(x_0).$$

т. е. функцията $\varphi(x)$ е една константа. Да означим с C нейната стойност. За да пресметнем стойността на тази константа, извършваме граничен преход $x \to a$.

Като вземем пред вид неравенствата

$$m(x-a) \leq F(x) \leq M(x-a),$$

в които M е една горна, а m е една долна граница на $f(x)$, получаваме

(6) $$\lim_{x \to a} F(x) = 0.$$

От друга страна, функцията $\Phi(x)$ по предположение е диференцуема в затворения интервал $[a, b]$ и следователно е непрекъсната в него. Оттук получаваме по-специално:

(7) $$\lim_{x \to a} \Phi(x) = \Phi(a).$$

Като извършим граничния преход $x \to a$ в равенството (5) и вземем пред вид равенствата (6) и (7), получаваме

$$C = -\Phi(a)$$

и следователно

$$F(x) - \Phi(x) = -\Phi(a),$$

или още

(8) $$\int_a^x f(t)\, dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Така например, за да пресметнем интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx,$$

вземаме пред вид познатия неопределен интеграл

$$\int \cos x\, dx = \sin x.$$

Като приложим формулата (8), получаваме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Накрая ще отбележим, че понякога формулата (8) се записва във вида

$$\int_a^x f(t)\, dt = \Big| \Phi(t) \Big|_a^x,$$

като се използува означението

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \Big| \Phi(t) \Big|_a^x.$$

При този начин на писане имаме например

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \Big| \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

§ 7. Допълнения към дефиницията на понятието интеграл

Ние дефинирахме символа

(1) $$\int_a^b f(x)\, dx$$

само за случая, когато долната интеграционна граница a е по-малка от горната b. Сега ще дефинираме символа (1) при $a \geq b$ по следния начин: при $a = b$ полагаме

(2) $$\int_a^a f(x)\, dx = 0,$$

а при $a > b$ полагаме

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x) dx$$

ние знаем какво значи $\int_b^a f(x)\, dx$, защото $b < a$).

При дефиницията (2) се ръководим от следните съображения: нека $f(x)$ е една интегруема функция в интервала $[a, b]$, $a < b$; ако означим с M и m съответно една нейна горна и една нейна долна граница в разглеждания интервал, то при $a < x \leq b$ имаме

$$m(x-a) \leqq \int_a^x f(t)\ dt \leqq M(x-a);$$

оттук заключаваме, че

$$\lim_{x \to a} \int_a^x f(t)dt = 0$$

(тук x клони към a чрез стойности, по-големи от a); като полагаме

$$\int_a^a f(t)\ dt = 0,$$

ние си осигуряваме непрекъснатостта на функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

в точката a (досега функцията $F(x)$ беше дефинирана и непрекъсната само в интервала $(a, b]$).

При дефиницията (3) ние се ръководим от следните съображения: ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, c]$, $a<c$, и b е една вътрешна точка в този интервал, то

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx; \tag{4}$$

ние се стремим да нагодим дефиницията (3) така (ако това е възможно), че да осигурим валидността на равенството (4), каквото[1] и да е взаимното разположение на точките a, b, c; специално при $c=a$ получаваме от равенството (4)

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^a f(x)\ dx = \int_a^a f(x)\ dx = 0$$

или

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$$

[1] Т. е. не само когато $a<b<c$.

И така, ако желаем да осигурим общата валидност на равенството (4), ние нямаме друг избор освен да възприемем дефиницията (3).

От направените дотук разсъждения обаче съвсем не е ясно дали при така дадените дефиниции (2) и (3) равенството (3) е действително вярно при всички взаимни разположения на точките a, b, c. Този въпрос се решава в положителен смисъл с непосредствена проверка, която ще предоставим на читателя.[1] По такъв начин достигаме до следния резултат:

Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала Δ и a, b, c са три точки от този интервал, то

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$$

(каквото и да е взаимното разположение на точките a, b, c).

В предния параграф ние доказахме следната теорема: ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, $a<b$, то функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt,\ a<x\leqq b,$$

е диференцуема и

$$F'(x) = f(x)$$

(теорема на Лайбниц и Нютон). При тази теорема долната интеграционна граница a е по-малка от независимата променлива x. Не е трудно да се види, че функцията

$$\Phi(x) = \int_c^x f(t)\ dt, \text{ където } a \leqq c \leqq b,$$

е също тъй диференцуема при $a \leqq x \leqq b$ и

$$\Phi'(x) = f(x).$$

[1] Читателят лесно ще даде сам доказателството, като разгледа поотделно случаите, които могат да се представят:

$$c<a<b,\ c=a<b,\ a<c<b,\ a<c=b,\ a<b<c,$$

$$c<b<a,\ c=b<a,\ b<c<a,\ b<c=a,\ b<a<c,$$

$$c<a=b,\ c=a=b,\ a=b<c.$$

Тази теорема се отличава от по-горната по това, че в случая независимата променлива x може да приема както стойности, по-големи от c, така и стойности, по-малки от c.

Доказателството се извършва без труд, като положим $f(x)=f(a)$ при $x<a$ и вземем пред вид, че

$$\Phi(x)=\int_c^p f(t)\,dt+\int_p^x f(t)\,dt,$$

където $p<a$. И наистина ние знаем, че функцията

$$\int_p^x f(t)\,dt$$

е диференцуема (защото тук имаме $p<x\leq b$ и функцията $f(t)$ е непрекъсната при $p\leq t\leq b$). Оттук заключаваме, че функцията $\Phi(x)$ е също диференцуема и

$$\Phi'(x)=\left[\int_c^p f(t)\,dt+\int_p^x f(t)\,dt\right]'=$$

$$=\left[\int_p^x f(t)\,dt\right]'=f(x).$$

Досега разглеждахме определения интеграл като функция на горната му граница. Ние бихме могли обаче да направим аналогични разглеждания, като фиксираме горната граница и оставим да се мени долната граница. Така например, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, $a<b$ и c е една точка от този интервал, то функцията

$$\varphi(x)=\int_x^c f(t)\,dt$$

е диференцуема при $a<x\leq b$ и

$$\varphi'(x)=-f(x),$$

защото[1]

[1] При $x>c$ това дава дефиницията (3); при $x<c$ пак нямаме нищо повече, тъй като дефиницията (3) ни дава

$$\int_c^x f(t)\,dt=-\int_x^c f(t)\,dt;$$

при $x=c$ валидността на това равенство следва от дефиницията (2).

$$\int_x^c f(t)\,dt=-\int_c^x f(t)\,dt,$$

и следователно

$$\varphi'(x)=-\left(\int_c^x f(t)\,dt\right)'=-f(x).$$

§ 8. Смяна на променливите

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някой интервал Δ; нека функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и притежава непрекъсната първа производна в някой интервал[1] $[\alpha, \beta]$; нека всички стойности на $\varphi(t)$ лежат в интервала Δ; нека най-сетне

(1) $$\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b.$$

При тези предположения ще докажем, че

(2) $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Преди да пристъпим към доказателството, нека обърнем внимание върху това, че ние можем да образуваме функцията $f[\varphi(t)]$, защото стойностите на функцията $\varphi(t)$ не напускат дефиниционната област на $f(x)$. Ние можем да образуваме и интеграла

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

защото функцията $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ е непрекъсната като произведение на две непрекъснати функции[2] $f[\varphi(t)]$ и $\varphi'(t)$ и следователно е интегруема. Най-сетне ние можем да образуваме и интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

защото функцията $f(x)$ е непрекъсната.

[1] Тук не трябва да се смята, че α е непременно левият край на този интервал, макар и да пишем $[\alpha, \beta]$.

[2] Функцията $f[\varphi(t)]$ е непрекъсната, защото функциите $f(x)$ и $\varphi(t)$ са непрекъснати.

И така в двете части на равенството (2) имаме две добре дефинирани числа. Остава да покажем, че те са равни помежду си. За тази цел полагаме

$$F(u)=\int_a^u f(x)\,dx$$

и образуваме двете помощни функции

$$\Phi(s)=F[\varphi(s)],$$

$$\psi(s)=\int_\alpha^s f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

в интервала $[\alpha, \beta]$.

Теоремата на Лайбниц и Нютон и правилото за диференциране на функция от функция ни дават

$$\Psi'(s)=F'[\varphi(s)]\cdot\varphi'(s)=f[\varphi(s)]\,\varphi'(s),$$

$$\psi'(s)=f[\varphi(s)]\,\varphi'(s).$$

Оттук заключаваме, че разликата

$$\Phi(s)-\psi(s)$$

е една константа. Специално, като вземем пред вид, че $\varphi(\alpha)=a$ получаваме при $s=\alpha$

$$\Phi(\alpha)-\psi(\alpha)=F[\varphi(\alpha)]-\psi(\alpha)=F(a)-\psi(\alpha).$$

Като вземем пред вид, че

$$F(a)=\int_a^a f(x)\,dx=0,$$

$$\psi(\alpha)=\int_\alpha^\alpha f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=0,$$

намираме

$$\Phi(\alpha)-\psi(\alpha)=0$$

и следователно при всички стойности на s от интервала $[\alpha, \beta]$ имаме

$$\Phi(s)-\psi(s)=0.$$

Специално при $s=\beta$ получаваме

$$\Phi(\beta)-\psi(\beta)=0$$

или

$$F[\varphi(\beta)]=\psi(\beta);$$

но $\varphi(\beta)$ е равно на b, тъй че

$$F(b)=\psi(\beta)$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ние често ще записваме формулата (2) във вида

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\,\varphi(t)$$

и ще казваме, че интегралът

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

е получен от интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

с помощта на субституцията $x=\varphi(t)$.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Решение. Полагаме $x=\cos t$ и решаваме уравненията[1] $-1=\cos\alpha$, $1=\cos\beta$. Очевидно $\alpha=\pi$ и $\beta=0$ са решения на тези уравнения (ние бихме могли да вземем обаче кои да са други техни решения).

Като вземем пред вид, че функцията $\sqrt{1-x^2}$ е непрекъсната в интервала $[-1, 1]$, че функцията $\cos t$ е диференцуема и има непрекъсната производна в интервала $[\pi, 0]$, че стойностите на функцията $\cos t$ не излизат интервала $[-1, 1]$ и най-сетне, че $-1=\cos\pi$ и $1=\cos 0$, заключаваме, че ние можем да използуваме формулата (2). Това ни дава

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_\pi^0\sqrt{1-\cos^2 t}\,d\cos t$$

[1] Тези уравнения съответствуват на уравненията (1).

или

$$I=-\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,dt=\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt.$$

По-нататък пресмятанията се развиват по познатия начин:

$$I=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\left|\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right|_{0}^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

§ 9. Интегриране по части при определените интеграли

Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми и производните им са непрекъснати в интервала $[a, b]$. В такъв случай е валидна следната формула:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(b)\,v(b)-u(a)\,v(a)-\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

И наистина, като вземем пред вид, че функцията $u(x)\,v(x)$ е един неопределен интеграл на непрекъснатата функция $u(x)\,v'(x)+u'(x)\,v(x)$, заключаваме, че

$$\int_a^b [u(x)\,v'(x)+u'(x)\,v(x)]\,dx=u(b)\,v(b)-u(a)\,v(a),$$

откъдето

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx+\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx=u(b)\,v(b)-u(a)\,v(a)$$

или още

$$(1)\qquad \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(b)\,v(b)-u(a)\,v(a)-\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Ние често ще записваме формулата (1) по-кратко по следния начин:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x)=u(b)v(b)-u(a)\,v(a)-\int_a^b v(x)\,du(x)$$

или още

$$\int_a^b u(x)\,dv(x)=\left|u(x)\,v(x)\right|_a^b-\int_a^b v(x)\,du(x).$$

Пример 1. Да се пресметне интегралът

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$$

Решение. Интегрираме по части:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d\sin x=\left|x\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1.$$

Пример 2. Да се пресметне интегралът

$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Решение. Тук непосредственото интегриране по части е възпрепятствувано от обстоятелството, че функцията

$$\sqrt{1-x^2}$$

не е диференцуема при $x=1$ и $x=-1$. За да отстраним тази трудност, прилагаме формулата за интегриране по части към

$$F(\varepsilon)=\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

където $0<\varepsilon<1$. Това ни дава

$$F(\varepsilon)=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}-\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}x\,d\sqrt{1-x^2}=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}+\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

$$=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}+\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}-F(\varepsilon)+\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}-F(\varepsilon)+\left|\arcsin x\right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}.$$

Извършваме граничния преход $\varepsilon \to 0$. Това ни дава

$$F(0)=\left|x\sqrt{1-x^2}\right|_{-1}^{1}-F(0)+\left|\arcsin x\right|_{-1}^{1}=-F(0)+\pi,$$

защото функцията $F(\varepsilon)$ е непрекъсната (дори удовлетворява условието на Липшиц), както това се вижда например от представянето

$$F(\varepsilon)=\int_0^{1-\varepsilon}\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_0^{-1+\varepsilon}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

По такъв начин получаваме

$$F(0)=\frac{\pi}{2}$$

и следователно

$$I=\frac{\pi}{2}.$$

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I=\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}=\left|\ln x\right|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

2. $I=\int_{-1}^{1} x^2\,dx$.

Отговор. $I=\frac{2}{3}$.

3. $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Отговор. $I=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

4. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$.

Упътване. Извършете субституцията $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ или по-точно $x=2\operatorname{arc\,tg} t$

Отговор. $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. $I=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Отговор. $I=\frac{1}{2}a^2\pi$.

6. $I=\int_0^{\pi} \frac{d}{(2+\cos x)^2}$.

Упътване. Тук е удобно да се извърши субституцията $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ или по-точно $x=2\operatorname{arc\,tg} t$. Непосредственото използуване на тази субституция обаче среща една мъчнотия. Функцията $2\operatorname{arc\,tg} t$ не е способна да приема стойността π — нещо, което сгъва използуването на теоремата за смяна на променливите при определените интеграли. Поради това нека читателят пресметне предварително помощния интеграл

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{dx}{(2+\cos x)^2}$$

при $0<\alpha<\pi$ и се възползува от зависимостта

$$I=\lim_{\alpha\to\pi}\varphi(\alpha),$$

която следва от непрекъснатостта на функцията $\varphi(\alpha)$.

Отговор. $I=\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$.

7. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

Отговор. $I=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

8. $I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{1-\cos\alpha\sin x}$, $\alpha\neq k\pi$, $k=0$, ±1, ±2, . . . ,

Отговор. $I=\frac{2\pi}{|\sin\alpha|}$.

9. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x+\sin x}$.

Отговор. $I=\pi\sqrt{2}$.

10. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^3 x\,dx$.

Отговор. $I=\frac{4}{15}$.

11. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Упътване. Като извършите субституцията $x=\operatorname{tg} t$, ще получите

$$I=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt.$$

Покажете, че

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt,$$

като преобразувате първия интеграл с помощта на субституцията $t=\frac{\pi}{4}-z$.

12. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $-a\leq x\leq a$ и нечетна в този интервал, т. е. $f(-x)=-f(x)$. Покажете, че

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,dx=0.$$

13. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $-a\leq x\leq a$ и е четна в този интервал, т. е. $f(-x)=f(x)$. Покажете, че

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int\limits_0^{a}f(x)\,dx.$$

14. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана, непрекъсната при всяко x и периодична с период ω, т. е. $f(x+\omega)=f(x)$. Покажете, че при всеки избор на числото a имаме

$$\int\limits_a^{a+\omega}f(x)\,dx=\int\limits_0^{\omega}f(x)\,dx.$$

Упътване. Покажете, че

$$\int\limits_{\omega}^{a+\omega}f(x)\,dx=\int\limits_0^{a}f(x)\,dx$$

и използувайте равенството

$$\int\limits_a^{a+\omega}f(x)\,dx=\int\limits_a^{0}f(x)\,dx+\int\limits_0^{\omega}f(x)\,dx+\int\limits_{\omega}^{a+\omega}f(x)\,dx.$$

15. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната при всяко x и при всички стойности на t удовлетворява равенството

$$\int\limits_t^{t+\omega}f(x)\,dx=\int\limits_0^{\omega}f(x)\,dx.$$

Покажете, че функцията $f(x)$ е периодична с период ω.

Упътване. Диференцирайте по t

$$\varphi(t)=\int\limits_t^{t+\omega}f(x)\,dx.$$

§ 10. Теорема за средните стойности

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, а функцията $\varphi(x)$ е интегруема и не си мени знака в този интервал. В такъв случай

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=f(\xi)\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

където ξ е една точка, подходящо избрана в затворения интервал $[a, b]$.

Доказателство. Ние ще разгледаме на първо време случая, когато $\varphi(x) \geq 0$ и $a < b$.

Да означим с M точната горна граница на $f(x)$, а с m точната ѝ долна граница в интервала $[a, b]$. В такъв случай, като се възползуваме от обстоятелството, че $\varphi(x) \geq 0$, получаваме

$$m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x).$$

Оттук получаваме

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leq M\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

тъй като $a < b$. От друга страна,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0$$

и следователно, ако

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \neq 0,$$

ние можем да напишем

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \leq M. \tag{3}$$

По предположение функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и следователно тя приема в някоя точка x_1 стойността M и в някоя точка x_2 — стойността m (теорема на Вайерщрас). От това заключаваме, че тази функция приема в интервала $[x_1, x_2]$ всички стойности, които се намират между M и m. Като вземем пред вид, че числото

$$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx}$$

се намира между M и m, заключаваме, че има точка ξ в интервала $[x_1, x_2]$, а следователно и в интервала $[a, b]$, за която

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx},$$

или

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Ние не можем да направим тези разсъждения, ако $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$, защото в такъв случай не можем да се ползуваме от неравенствата (3). Обаче неравенствата (2) ни учат, че и

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0,$$

и следователно равенството (1) е вярно при всеки избор на ξ.

С това ние установихме валидността на теоремата при $\varphi(x) \geq 0$ и $a < b$. При $a = b$ валидността на тази теорема е очевидна, защото в двете страни на равенството (1) имаме нула. Останалите случаи се свеждат без труд към разгледания случай, при който $\varphi(x) \geq 0$ и $a < b$. Така например, ако $\varphi(x) \leq 0$ и $a < b$, ние можем да представим равенството (1) във вида

$$\int_a^b f(x)\,[-\varphi(x)]\,dx = f(\xi)\int_a^b [-\varphi(x)]\,dx$$

и по този начин да получим познатия случай, защото $-\varphi(x) \geq 0$. Аналогично се разглеждат и другите случаи, които могат да се представят. По-специално, ако $\varphi(x) = 1$, равенството (1) добива вида

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a). \tag{4}$$

Тук ние можем да изберем точката ξ в отворения интервал (a, b), когато $a \neq b$. И наистина, ако положим

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

равенството (4) ще добие вида

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)\,(b-a)$$

и следователно то може да се разглежда като специален случай от теоремата за крайните нараствания. (Теоремата за крайните нараствания трябва да се разглежда като по-обща, защото при нея не се иска непрекъснатостта на $F'(x)$.)

§ 11. Друга дефиниция на понятието определен интеграл

Дефиницията на понятието определен интеграл, която дадохме в § 1, произхожда от Дарбу. Сега ще разгледаме дефиницията, която дава Риман, и ще установим еквивалентността на двете дефиниции.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в крайния затворен интервал $[a, b]$. Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$(1) \qquad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и във всеки един от тези подинтервали избираме по една точка. Нека ξ_i е точката, която избираме в i-тия подинтервал $[x_{i-1}, x_i]$, така че

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

Сумата

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

се нарича Риманова интегрална сума, която отговаря на избрания начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали и на направения избор на междинните точки ξ_i. Тази сума ние можем да образуваме, без да има нужда да предполагаме нещо за ограничеността на функцията $f(x)$.

Ако съществува такова число I, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ така, че ако точките на деление (1) удовлетворяват условието $x_i - x_{i-1} < \delta$ при всички цели стойности на i от 1 до n, то

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

казваме, че сумите на Риман σ клонят към граница I, когато дължините на подинтервалите клонят към нула.

Риман дава следната дефиниция на понятието определен интеграл: казваме, че функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, ако Римановите суми σ клонят към някаква граница I, когато дължините на подинтервалите клонят към нула. Границата I се нарича определен интеграл на $f(x)$, разпространен върху интервала $[a, b]$.

При дефиницията на Риман няма нужда да се предполага предварително, че функцията $f(x)$ е ограничена, обаче не е трудно да се види, че от съществуването на определения интеграл според дефиницията на Риман следва, че функцията $f(x)$ е ограничена. И наистина нека ε е произволно положително число и нека I е стойността на определения интеграл от $f(x)$ върху интервала $[a, b]$ според дефиницията на Риман. Делим интервала $[a, b]$ на достатъчно дребни подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

за да имаме

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

при всеки избор на ξ_i от подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. В такъв случай получаваме[1]

$$|f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \left| \sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) - I \right|.$$

Фиксираме ξ_i при $i \neq k$ и оставяме ξ_k да се мени в подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$. Полученото неравенство ни учи, че функцията $f(x)$ е ограничена в подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$. Тъй като ние можем обаче да даваме на k всички цели стойности от 1 до n, заключаваме, че $f(x)$ е ограничена в целия интервал $[a, b]$.

Не е трудно да се убедим, че ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ според дефиницията на Риман, тя е интегруема и според дефиницията на Дарбу и интегралите в двата смисъла са равни помежду си. И наистина нека ε е произволно положително число и нека положителното число δ е толкова

---

[1] Разбира се, някои от сумите $\sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$ и $\sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ може евентуално да бъдат празна.

малко, че ако точките на деление (1) удовлетворяват условието $x_i - x_{i-1} < \delta$ при всички цели стойности на i от 1 до n, да имаме

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

при всеки избор на ξ_i от подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Означаваме с M_i точната горна, а с m_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$.

Ако оставим $f(\xi_i)$ да клони[1] към M_i, получаваме след съответния граничен преход

$$\left| \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - I \right| \leq \varepsilon,$$

откъдето

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\ (x_i - x_{i-1}) \leq I + \varepsilon$$

и толкова повече

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx \leq I + \varepsilon.$$

Ако оставим $f(\xi_i)$ клони към m_i, получаваме

$$\left| \sum_{i=1}^{n} m_i\ (x_i - x_{i-1}) - I \right| \leq \varepsilon,$$

откъдето

$$I - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} m_i\ (x_i - x_{i-1})$$

и следователно

$$I - \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)\ dx.$$

[1] Каквото и да бъде положителното число η, числото $M_i - \eta$ не е горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, тъй като M_i е най-малката горна граница в този подинтервал. От това заключаваме, че може да се избере точка ξ_i в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ така, че да имаме $f(\xi_i) > M_i - \eta$. Оттук, като вземем пред вид, че $f(\xi_i) \leq M_i$, получаваме $M_i - \eta < f(\xi_i) \leq M_i$, т. е. функцията $f(x)$ е способна да приема в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ стойността, произволно близки до M_i. Аналогично се вижда, че тя е способна да приема в този подинтервал и стойности, произволно близки до m_i.

По такъв начин намерихме

$$I - \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\ dx \leq I + \varepsilon$$

при всеки избор на положителното число ε и следователно

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx = \overline{\int_a^b} f(x)\ dx = I.$$

С това ние доказахме, че ако една функция $f(x)$ е интегруема според дефиницията на Риман, тя е интегруема и според дефиницията на Дарбу и интегралите в двата смисъла са равни помежду си.

За да докажем, че и обратното е вярно, ние ще установим следната теорема на Дарбу: когато дължините на подинтервалите клонят към нула, големите суми на Дарбу на всяка ограничена функция клонят към горния, а малките суми на Дарбу клонят към долния интеграл на тази функция. Ние няма да прецизираме точния смисъл на тези думи, понеже едно аналогично прецизиране ние вече направихме по-горе за Римановите суми. ?

Ще докажем теоремата на Дарбу за големите суми; за малките суми тя се доказва аналогично. За тази цел избираме произволно положителното число δ и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdot\ \cdot\ \cdot < \xi_n = b$$

по такъв начин, че да имаме

$$\xi_i - \xi_{i-1} < \delta$$

при всички цели стойности на i от 1 до n. Нека M е една горна граница на $f(x)$ в целия интервал $[a, b]$, нека M_i е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ и нека

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i (\xi_i - \xi_{i-1})$$

е съответната голяма сума на Дарбу. Нека към точките на деление $\xi_0, \xi_1, \cdot\ \cdot\ \cdot, \xi_n$ причислим още една нова точка на деление ξ и да означим с S' съответната голяма сума на Дарбу. При тези условия ще покажем, че

$$S - S' \leq 2M\delta. \tag{2}$$

И наистина, ако ξ съвпада с някоя от точките $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$, то $S-S'=0$, т. е. в този тривиален случай неравенството (2) е вярно. Ако ξ не съвпада с някоя от точките $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$, ние ще означим с k най-малкото цяло положително число, за което $\xi<\xi_k$, т. е. $\xi_{k-1}<\xi<\xi_k$. Нека L_1 е точната горна граница на функцията $f(x)$ в подинтервала $[\xi_{k-1}, \xi]$ и L_2 е точната ѝ горна граница в подинтервала $[\xi, \xi_k]$. В такъв случай

$$S-S'=M_k(\xi_k-\xi_{k-1})-L_1(\xi-\xi_{k-1})-L_2(\xi_k-\xi)$$

и следователно

$$\begin{aligned} S-S' &\leq |M_k|(\xi_k-\xi_{k-1})+|L_1|(\xi-\xi_{k-1})+|L_2|(\xi_k-\xi)\leq \\ &\leq M(\xi_k-\xi_{k-1})+M(\xi-\xi_{k-1})+M(\xi_k-\xi)=2M(\xi_k-\xi_{k-1})\leq \\ &\leq 2M\delta. \end{aligned}$$

Сега не е трудно да се докаже теоремата на Дарбу. Нека ε е произволно положително число и нека S^* е голяма сума на Дарбу, която удовлетворява неравенството

$$S^*<\int_a^b f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Такава сигурно има, защото $\overline{\int_a^b}$ е най-голямата долна граница на множеството на големите суми на Дарбу и следователно $\overline{\int_a^b}+\frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница на това множество.

Означаваме с

$$a=x_0^*<x_1^*<x_2^*<\cdots<x_p^*=b$$

точките на деление, които отговарят на сумата S^*.

Да разгледаме една произволна голяма сума на Дарбу S, чиито точки на деление

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

са подчинени на единственото условие да удовлетворяват неравенствата

$$x_i-x_{i-1}<\delta$$

при всички цели стойности на i от 1 до n, където $\delta=\frac{\varepsilon}{4Mp}$.

Нека S_k е голяма сума на Дарбу, която се получава, когато към точките на деление $x_0, x_1, \cdots, x_n$ причислим още и точките $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*$. В такъв случай съгласно доказаното имаме

$$\begin{aligned} S-S_1 &\leq 2M\delta, \\ S_1-S_2 &\leq 2M\delta, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S_{p-1}-S_p &\leq 2M\delta \end{aligned}$$

и следователно

$$S-S_p\leq 2M\delta p=\frac{\varepsilon}{2}.$$

От друга страна, всичките точки на деление на S^* участвуват при образуване на сумата S_p, откъдето

$$S_p\leq S^*$$

и следователно

$$S-S^*\leq\frac{\varepsilon}{2},$$

което заедно с неравенствата

$$S^*-\overline{\int_a^b} f(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\leq S$$

ни дава

$$0\leq S-\int_a^b f(x)\,dx<\varepsilon.$$

По такъв начин теоремата на Дарбу е доказана.

Сега не е трудно да се покаже, че ако една функция $f(x)$ е интегруема според дефиницията на Дарбу, тя е интегруема и според дефиницията на Риман. И наистина нека $\varepsilon>0$ и нека σ е една сума на Риман. Ако S и s са съответно голямата и малката сума на Дарбу, които са образувани с помощта на същите точки на деление, с които е образувана и сумата σ, то

$$s\leq\sigma\leq S.$$

От друга страна, теоремата на Дарбу ни учи, че ако дължините на подинтервалите са достатъчно малки, то

$$S<\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon,$$

$$s>\int_a^b f(x)\,dx-\varepsilon.$$

Нека функцията $f(x)$ е интегруема според дефиницията на Дарбу. В такъв случай

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

и следователно

$$\int_a^b f(x)\,dx-\varepsilon<s\leqq\sigma\leqq S<\int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon,$$

т. е.

$$\left|\sigma-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

с което е показано, че сумите на Риман наистина клонят към общата стойност на горния и долния интеграл на разглежданата функция, когато дължините на подинтервалите клонят към нула. По такъв начин ние установихме пълната еквивалентност на дефинициите на Дарбу и Риман.

§ 12. Едно обобщение на основната теорема на интегралното смятане и общо условие за интегруемост в Риманов смисъл

Казваме,[1] че едно множество M от точки върху една права има мярка нула в смисъл на Лебег—Борел, ако при всеки избор на положителното число ε множеството M може да се покрие[1] с

[1] Това значи, че се иска всяка точка от M да принадлежи поне на един от интервалите $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$

(евентуално безкрайна) редица от интервали[1]

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots,$$

сумата от дължините на които да е по-малка от ε.

Ще казваме, че една функция удовлетворява някое условие (например има производна или е непрекъсната и пр.) почти навсякъде в едно множество N, ако множеството от точките на N, където това условие не е изпълнено, има мярка нула или е празно.[2]

Ние ще установим следното обобщение на познатата на читателя още от диференциалното смятане теорема за монотонните функции.

Ако една функция $F(x)$, удовлетворяваща условието на Липшиц в един интервал Δ, е диференцуема почти навсякъде в този интервал и производната ѝ е неотрицателна, то функцията е монотонно растяща.

Доказателство. Да допуснем противното. В такъв случай могат да се намерят две числа α и β от интервала Δ, свързани с неравенството $\alpha<\beta$, за които

$$F(\alpha)-F(\beta)>0.$$

Означаваме с K една горна граница на израза

$$\left|\frac{F(x')-F(x'')}{x'-x''}\right|,$$

когато x' и x'' се менят в интервала Δ така, че остават различни помежду си. Такава горна граница съществува, защото функцията $F(x)$ удовлетворява условието на Липшиц.

Нека G е множеството на точките от интервала Δ, където $F(x)$ няма неотрицателна производна. Покриваме G с редица от отворени интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

и означаваме с $\varphi_\nu(x)$ функция, равна на 1, когато x принадлежи на Δ_ν, и на 0, когато x не принадлежи на Δ_ν. Нека p_ν и q_ν са съответно левият и десният край на подинтервала Δ_ν. В такъв случай, като означим с a по-малкото от числата α и p_ν, а с b по-голямото от числата β и q_ν, ще имаме

[1] Без да ограничаваме общността, ние можем да считаме, че интервалите $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ са отворени, като за целта, ако е необходимо, заменим всеки интервал с двойно по-голям, който го съдържа.

[2] Целесъобразно е празното множество да се разглежда като множество с мярка нула.

$$\int_a^\beta \varphi_\nu(t)\,dt \leqq \int_a^b \varphi_\nu(t)\,dt =$$

$$= \int_a^{p_\nu} \varphi_\nu(t)\,dt + \int_{p_\nu}^{q_\nu} \varphi_\nu(t)\,dt + \int_{q_\nu}^{b} \varphi_\nu(t)\,dt = q_\nu - p_\nu.$$

Да си изберем едно толкова малко положително число ε и една такава система от покриващи интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots,$$

че да имаме

$$F(\alpha) - F(\beta) > \varepsilon(\beta - \alpha) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_\nu(t)\,dt.$$

Това е възможно, защото, от една страна,

$$F(\alpha) - F(\beta) > 0,$$

а, от друга,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_\nu(t)\,dt \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} (q_\nu - p_\nu),$$

като при това сумата

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (q_\nu - p_\nu)$$

може да се направи произволно малка, защото множеството G има мярка нула.

Делим интервала $[\alpha, \beta]$ на две равни части и означаваме с $[\alpha_1, \beta_1]$ такава половина на $[\alpha, \beta]$, за която да имаме

$$F(\alpha_1) - F(\beta_1) > \varepsilon(\beta_1 - \alpha_1) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \varphi_\nu(t)\,dt.$$

Не е трудно да се убедим, че поне едната от двете половини на интервала $[\alpha, \beta]$ удовлетворява това условие. И наистина в противен случай, ако положим $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$, ще имаме

$$F(\gamma) - F(\beta) \leqq \varepsilon(\beta - \gamma) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_\gamma^\beta \varphi_\nu(t)\,dt.$$

$$F(\alpha) - F(\gamma) \leqq \varepsilon(\gamma - \alpha) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_\alpha^\gamma \varphi_\nu(t)\,dt.$$

Като съберем почленно тези неравенства, ще получим

$$F(\alpha) - F(\beta) \leqq \varepsilon(\beta - \alpha) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_\nu(t)\,dt,$$

което противоречи на неравенството

$$F(\alpha) - F(\beta) > \varepsilon(\beta - \alpha) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_\nu(t)\,dt.$$

По-нататък делим интервала $[\alpha_1, \beta_1]$ на две равни части и означаваме с $[\alpha_2, \beta_2]$ сигурно съществуващата половина, за която

$$F(\alpha_2) - F(\beta_2) > \varepsilon(\beta_2 - \alpha_2) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \varphi_\nu(t)\,dt,$$

и т. н. По този начин получаваме една Канторова система от интервали $[\alpha_n, \beta_n]$, подчинени на условието

$$(1) \qquad F(\alpha_n) - F(\beta_n) > \varepsilon(\beta_n - \alpha_n) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \varphi_\nu(t)\,dt.$$

Нека x_0 е точка, която принадлежи на всичките интервали $[\alpha_n, \beta_n]$. Ще покажем, че x_0 не принадлежи на G. И наистина в противен случай x_0 ще бъде **вътрешна** точка за някой от интервалите Δ_m и следователно при достатъчно голяма стойност на n интервалът $[\alpha_n, \beta_n]$ ще се съдържа изцяло в Δ_m, поради което ще имаме $\varphi_m(t) = 1$ при всички стойности на t от $[\alpha_n, \beta_n]$, т. е.

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} (t)\,dt = \beta_n - \alpha_n.$$

От друга страна, неравенството (1) ни дава

$$F(\alpha_n) - F(\beta_n) > K \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \varphi_m(t)\,dt,$$

откъдето

$$F(\alpha_n)-F(\beta_n)>K(\beta_n-\alpha_n),$$

нещо, което противоречи на неравенството

$$\left|\frac{F(\alpha_n)-F(\beta_n)}{\alpha_n-\beta_n}\right|\leq K.$$

И така x_0 не принадлежи на G и следователно функцията $F(x)$ е диференцуема в точката x_0. Неравенството (1) ни дава обаче

$$\frac{F(\alpha_n)-F(\beta_n)}{\alpha_n-\beta_n}>\varepsilon.$$

Оттук, извършвайки граничен преход, намираме

$$-F'(x_0)\geq\varepsilon,$$

което не вярно, защото $F'(x_0)\geq 0$. С това доказателството е завършено.

Въз основа на доказаното ние можем да установим следното обобщение на основната теорема на интегралното смятане:

Ако една удовлетворяваща условието на Липшиц функция $F(x)$ е диференцуема почти навсякъде в един интервал Δ и производната ѝ е равна на нула, то функцията $F(x)$ е константа.

И наистина от доказаната по-горе теорема следва, че двете функции $F(x)$ и $-F(x)$ са монотонно растящи, т. е. функцията $F(x)$ е наистина константа.

Като приложение ще докажем следната теорема на Лебег:

За да бъде една функция $f(x)$ интегруема в Риманов смисъл в един интервал $[a, b]$, необходимо и достатъчно е тя да бъде ограничена и почти навсякъде непрекъсната в интервала $[a, b]$.

Доказателство. Ние първо ще покажем, че условието е достатъчно. Нека функцията $f(x)$ е ограничена и почти навсякъде непрекъсната в интервала $[a, b]$. Разглеждаме двете функции

$$F_1(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

и

$$F_2(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

при $a<x\leq b$. Тези функции удовлетворяват условието на Липшиц и в точките на непрекъснатост на $f(x)$ (т. е. почти навсякъде в интервала $[a, b]$) имаме

$$\frac{d}{dx}[F_1(x)-F_2(x)]=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

т. е. разликата $F_1(x)-F_2(x)$ е една константа. От друга страна,

$$\lim_{x\to a}F_1(x)=\lim_{x\to a}F_2(x)=0.$$

Следователно

$$F_1(x)=F_2(x).$$

Оттук получаваме по-специално $F_1(b)=F_2(b)$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,$$

което ни учи, че функцията $f(x)$ е интегруема в Риманов смисъл в интервала $[a, b]$.

Сега ще установим, че условието на Лебег е необходимо. За тази цел на всяко положително число ε съпоставяме по е д н о разлагане на интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките на деление

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

по такъв начин, че разликата между съответната голяма и съответната малка сума на Дарбу да бъде по-малка от ε^2. Нека

$$\Delta_{n_1},\ \Delta_{n_2},\ \cdots,\ \Delta_{n_k}$$

са о нези[1] подинтервали (измежду подинтервалите, на които сме разделили интервала $[a, b]$), в които осцилацията на $f(x)$ е по-голяма от ε. В такъв случай сумата от дължините на подинтервалите

$$\Delta_{n_1},\ \Delta_{n_2},\ \cdots,\ \Delta_{n_k}$$

е по-малка от ε. Нека $A(\varepsilon)$ е множеството от точките, които принадлежат на поне един от интервалите $\Delta n_1, \Delta n_2, \cdots, \Delta n_k$. Всяка вътрешна за интервала $[a, b]$ точка ξ, която не принадле-

[1] Ако изобщо има такива.

жи на $A(\varepsilon)$, лежи в някой затворен подинтервал[1] (евентуално може да бъде и крайна точка на такъв подинтервал), в който осцилацията на $f(x)$ е по-малка или равна на ε. Не е трудно обаче да включим точката ξ и в отворен подинтервал, където осцилацията на $f(x)$ в най-неблагоприятния[2] случай да не надминава 2ε.

Разглеждаме множеството B_n от точките, които принадлежат на поне едно от множествата

$$A\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right),\quad A\left(\frac{1}{2^{n+2}}\right),\quad A\left(\frac{1}{2^{n+3}}\right),\ldots$$

Очевидно множеството B_n може да бъде покрито с редица от интервали, сумата от дължините на които е по-малка от

$$\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+3}}+\ldots=\frac{1}{2^n}.$$

Нека B е множеството на точките, които принадлежат на всичките множества

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ldots$$

Очевидно множеството B се съдържа в B_n при всяка цяла положителна стойност на n и следователно може да се покрие с редица от интервали, сумата от дължините на които е по-малка от $\frac{1}{2^n}$, т. е. тази сума може да се направи произволно малка, стига n да изберем достатъчно голямо. С това ние показахме, че множеството B има мярка нула. По такъв начин доказателството на интересуващата ни теорема ще бъде завършено, ако ние покажем, че във всички вътрешни точки на интервала $[a, b]$, които не принадлежат на B, функцията $f(x)$ е непрекъсната. За да установим това, разглеждаме произволна точка x_0, която не принадлежи на B. В такъв случай може да се намери цяло положително число n по такъв начин, че точката x_0 да не принадлежи на никое от множествата

$$A\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right),\quad A\left(\frac{1}{2^{n+2}}\right),\quad A\left(\frac{1}{2^{n+3}}\right).$$

Избираме едно положително число ε. Нека цялото положително число k е толкова голямо, че да имаме $\frac{1}{2^{n+k}}<\frac{\varepsilon}{2}$. Точката x_0

[1] Този подинтервал избираме измежду подинтервалите, на които сме разделили интервала $[a, b]$.

[2] Това е случаят, когато точката ξ съвпада с някоя от точките $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Нека например $\xi=x_k$. В такъв случай включваме точката ξ в подинтервала $[x_{k-1}, x_{k+1}]$.

не принадлежи на $A\left(\frac{1}{2^{n+k}}\right)$, откъдето заключаваме, че около нея може да се построи околност, в която осцилацията е по-малка от $\frac{2}{2^{n+k}}$, т. е. по-малка и от ε — нещо, което е достатъчно да можем да твърдим, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0. С това ние показахме, че ако една функция е интегруема в Риманов смисъл, тя е непрекъсната почти навсякъде, и следователно завършихме доказателството, защото по-горе ние бяхме изяснили, че за да бъде една функция интегруема в Риманов смисъл, необходимо е тя да бъде ограничена.

Пример 1. Произведение на две функции, интегруеми в Риманов смисъл, е също интегруема функция в Риманов смисъл, защото това произведение е ограничено и почти навсякъде непрекъснато.

Пример 2. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в Риманов смисъл в интервала $a\leq x\leq b$ и почти навсякъде $f(x)\geq 0$, то

$$\int_a^b f(t)\,dt\geq 0.$$

И наистина функцията

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

е диференцуема и $F'(x)=f(x)$ във всички точки, където $f(x)$ е непрекъсната. По такъв начин за удовлетворяващата условието на Липшиц функция $F(x)$ имаме почти навсякъде $F'(x)\geq 0$, т. е. тази функция монотонно расте и следователно $F(x)\geq \lim\limits_{x\to a} F(x)=0$.

Забележка. От доказаното се вижда, че ако за две интегруеми в Риманов смисъл функции $f(x)$ и $g(x)$ имаме почти навсякъде $f(x)\geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx;$$

ако ли пък почти навсякъде $f(x)=g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx.$$

§ 13. Точкови множества

Ще разгледаме в този параграф множеството от точки в една равнина. Всичко, което ще изложим обаче, се пренася без всякакъв труд за случая на произволен брой измерения. Така ние

бихме могли да пренесем всичко казано за множеството от точки върху една права и пр.

Наред с истинските множества ние ще разгледаме и така нареченото празно множество. Това е един помощен символ 0, за който е казано, че никоя точка от равнината не му принадлежи.[1]

Нека ни е дадено едно точково множество A. Една функция се нарича характеристична функция на A, ако тя е дефинирана в цялата равнина (или съответно върху цялата ос OX, или върху цялото пространство и пр. в зависимост от броя на измеренията, които имаме пред вид) и приема стойност единица в точките, които принадлежат на A, и стойността нула в точките, които не принадлежат на A.

Нека ни са дадени две множества A и B. Под сума или обединение $A+B$ на тези множества разбираме множеството от точките, които принадлежат поне на едно от тези множества.[2] На черт. 4 е илюстрирана дефиницията на понятието сума. Под произведение или сечение AB на две множества A и B се разбира множеството от общите им точки.[3] Понятието сечение AB е добре дефинирано дори тогава, когато A и B нямат общи точки. В такъв случай сечението е празното множество, за което говорихме по-горе. На черт. 5 е илюстрирана дефиницията на понятието сечение. Понятията сума и сечение на множества имат смисъл, колкото и да бъдат множествата. Те могат да бъдат дори безбройно много.

При така дефинираните операции събиране и умножение са в сила комутативният, асоциативният и дистрибутивният закон:

$$A+B=B+A, \quad AB=BA,$$

$$(A+B)+C=A+(B+C), \quad (AB)C=A(BC),$$

$$(A+B)C=AC+BC.$$

Доказателството не е сложно. Като пример ние ще докажем дистрибутивния закон

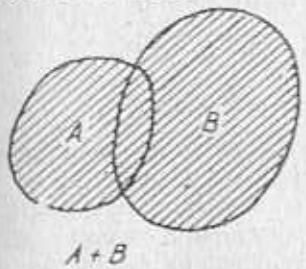
$$(A+B)C=AC+BC$$

[1] Казваме, че ни е дадено едно множество A в равнината, когато за всяка точка P от равнината е казано дали принадлежи на A или не. Две множества A и B от точки в равнината наричаме идентични, когато тези и само тези точки принадлежат на едното от тях, които принадлежат на другото. В този смисъл 0 е едно добре дефинирано множество, защото за всяка точка е казано дали принадлежи, или не принадлежи на 0 (именно казано е, че никоя точка не принадлежи на 0).

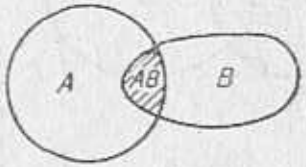
[2] По-точно $A+B$ е множеството, към което се причисляват онези и само онези точки, които принадлежат поне на едното от двете множества A и B. При тази редакция дефиницията може да се прилага и тогава, когато имаме работа с празното множество.

[3] По-точно AB е множеството, към което се причисляват онези и само онези точки, които са причислени и към A, и към B. Тази редакция на дефиницията може да се използува и тогава, когато имаме работа с празното множество.

и ще предоставим останалите закони на читателя (проверката на които става по същия начин). Нека P е една точка, която принадлежи на $(A+B)C$. В такъв случай тази точка принадлежи на $A+B$ и на C. Щом P принадлежи на $A+B$, тя принадлежи поне на едното от двете множества A и B. Например[1] нека тя принадлежи на A. Но като вземем пред вид, че P принадлежи и на C, заключаваме, че тази точка принадлежи на AC, а следователно и на $AC+BC$. И така всяка точка (ако има такава), която принадлежи на $(A+B)C$, принадлежи и на $AC+BC$.



Черт. 4



Черт. 5

Нека Q е една точка, която принадлежи на $AC+BC$; в такъв случай тази точка принадлежи или на AC, или на BC. Нека например[2] тя принадлежи на AC. В такъв случай точката Q принадлежи както на A, така и на C, а от това следва, че тя принадлежи на $A+B$ и на C, т. е. тя принадлежи на $(A+B)C$. И така всяка точка, която принадлежи на $AC+BC$ (ако има такава), принадлежи на $(A+B)C$. С това ние доказахме, че наистина

$$(A+B)C=AC+BC.$$

Понятието сума и произведение на множества, както вече казахме, се обобщава по очевиден начин и за произволно (дори безкрайно) множество събираеми и множители. При това основните закони (комутативният, асоциативният и дистрибутивният) запазват своята валидност (доказателството остава същото).

Под разлика $A-B$ на две множества A и B разбираме множеството[3] от точките, които принадлежат на A, но не принадлежат на B. На черт. 6 е илюстрирана дефиницията на понятието разлика. Специално, ако R означава множеството от всичките точки на равнината, то

[1] Аналогично се разглежда случаят, когато P принадлежи на B.

[2] Аналогично се разглежда случаят, когато Q принадлежи към BC.

[3] По-точно $A-B$ е множеството, към което са причислени онези и само онези точки, които са причислени към A, но не са причислени към B. Тази редакция на дефиницията може да се използува и тогава, когато имаме работа с празното множество.

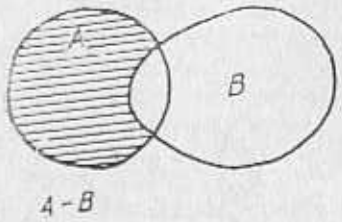
разликата $R-A$ се нарича допълнително множество на A и се означава обикновено със символа A.

Не е трудно да се покаже, че при всеки избор на множествата A и B имаме

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B},$$

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},$$

$$\overline{A-B}=\overline{A}+B.$$



Черт. 6

Доказателството не представлява никаква трудност и може да се извърши, като покажем, че всяка точка, която фигурира в лявата страна на интересуващите ни равенства, фигурира и в дясната страна на съответното равенство и обратно. Нека читателят сам извърши за упражнение доказателството.

Нека ни са дадени две множества A и B. Казваме, че A е едно подмножество на B, когато всяка точка, която принадлежи на A, принадлежи и на B. За да изразим, че A е едно подмножество на B, ние пишем кратко $A\subset B$.

В § 1, глава I, част III на диференциалното смятане ние дефинирахме понятието вътрешна, външна и контурна точка на едно множество M. Множеството на контурните точки на M ще означаваме със символа $K(M)$ и ще наричаме контур на M.

Лесно е да се провери, че външните точки на A са вътрешни за A и обратно. Оттук заключаваме, че множествата A и A имат един и същ контур. Използувайки означенията, които ние току-що въведохме, можем да пишем

(1) $$K(A)=K(A).$$

Не е трудно да се докаже, че

(2) $$K(A+B)\subset K(A)+K(B),$$

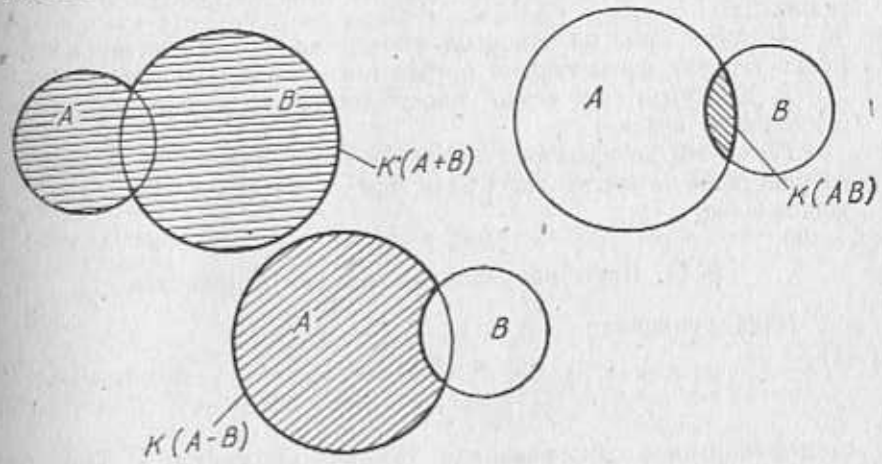
(3) $$K(AB)\subset K(A)+K(B),$$

(4) $$K(A-B)\subset K(A)+K(B).$$

На черт. 7 са илюстрирани тези неравенства.

Доказателство на неравенството (2). Нека P е една контурна точка на $A+B$. Тя не може да бъде външна едновременно за A и B. И наистина, ако допуснем противното, ще можем около P да изберем (кръгова) околност G_1, която няма общи точки с A, и (кръгова) околност G_2, която няма общи точки с B. В такъв случай сечението $G_1\,G_2$ представлява (кръгова)

околност на P, която няма общи точки нито с A, нито с B и следователно няма общи точки и с $A+B$. Оттук заключаваме, че P е една външна точка за множеството $A+B$—нещо, което противоречи на допускането, че P е контурна точка на това множество. И така точката P не е външна поне за едното от двете



Черт. 7

множества A и B. Нека например тя не е външна за множеството A. Точката P обаче не е и вътрешна за A, защото в противен случай тя би била вътрешна и за $A+B$, което не е вярно, тъй като тя е контурна на $A+B$. И така точката P не е нито външна, нито вътрешна за A, т. е. тя е контурна. С това ние доказахме, че точката P принадлежи на $K(A)$ и толкова повече на $K(A)+K(B)$.

Доказателство на неравенството (3).

$$K(AB)=K(\overline{AB})=K(\overline{A}+\overline{B})\subset K(A)+K(B)=K(A)+K(B).$$

Доказателство но неравенството (4).

$$K(A-B)=K(\overline{A-B})=K(A+B)\subset$$
$$\subset K(A)+K(B)=$$
$$=K(A)+K(B).$$

В заключение ще споменем следното:

1. Каквото и да бъде множеството A, множеството $A+K(A)$ е затворено, а множеството $A-K(A)$ е отворено.

2. Ако множеството A е затворено, то множеството $\overline{A}$ е отворено. Ако множеството A е отворено, то множеството $\overline{A}$ е затворено.

3. Сума на краен брой затворени множества е затворено множество. Сечение на краен брой отворени множества е отворено множество.

4. Всяка сума на отворени множества е отворено множество. Всяко сечение на затворени множества е затворено множество.

5. Контурът на всяко множество е затворено множество (евентуално празно).

Ние няма да излагаме доказателствата, които са съвсем непосредствени и могат да бъдат предоставени на читателя като упражнение.

§ 14. Преобразуване на точкови множества

Нека функциите

(1)
$$x=f(u, v),$$
$$y=g(u, v),$$

са дефинирани в едно равнинно точково множество R. Тези две функции ще наричаме трансформация на R. С помощта на трансформацията (1) ние можем на всяка точка P от R с координати (u_0, v_0) да съпоставим точка P' с координати (x_0, y_0), които се определят от равенствата

$$x_0=f(u_0, v_0),$$
$$y_0=g(u_0, v_0).$$

Така дефинираната точка P' ще наричаме образ на P при трансформацията (1).

Когато точката P описва някакво подмножество A на R, образът ѝ P' описва някакво множество, което ще означаваме със символа A' и ще наричаме образ на A. Така образа на R ще означаваме с R'.

В общия случай при една трансформация различни точки не са задължени да се изобразят върху различни точки.

Да разгледаме като пример трансформацията

2)
$$x=a_{11}u+a_{12}v+p,$$
$$y=a_{21}u+a_{22}v+q.$$

Две точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) от равнината UOV се изобразяват върху една и съща точка тогава и само тогава, когато

$$a_{11}u_1+a_{12}v_1+p=a_{11}u_2+a_{12}v_2+p,$$
$$a_{21}u_1+a_{22}v_1+q=a_{21}u_2+a_{22}v_2+q,$$

с. когато

(3)
$$a_{11}(u_1-u_2)+a_{12}(v_1-v_2)=0,$$
$$a_{21}(u_1-u_2)+a_{22}(v_1-v_2)=0.$$

Оттук се вижда, че в разглеждания случай съществуват различни точки в равнината UOV, които при трансформацията (2) се изобразяват върху една и съща точка тогава и само тогава, когато системата (3) (където u_1-u_2 и v_1-v_2 се разглеждат като неизвестни) има нетривиално решение, т. е. когато

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0.$$

Ще казваме, че трансформацията (1) е обратима в R, когато тя изобразява различни точки върху различни точки.

Така трансформацията (2) е обратима в равнината UOV тогава и само тогава, когато е изпълнено

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Читателят знае от геометрията, че трансформация от вида (2) се нарича подобие с модул a, където a е положително число, ако са изпълнени условията

$$a_{11}^2+a_{12}^2=a^2,$$
$$a_{21}^2+a_{22}^2=a^2,$$
$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0.$$

Специално, ако $a=1$, подобието се нарича еднаквост.

Подобието е една обратима трансформация, защото правилото за умножение на детерминанти ни дава

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{vmatrix}=a^4\neq 0.$$

Както и да избираме точка с координати (x, y) от R', винаги съществува точка P от R, чиито координати (u, v) удовлетворяват уравненията (1), защото всяка точка от R' е образ на някоя точка от R. Ако трансформацията (1) е обратима, то точката P е еднозначно определена, когато точката (x, y) е дадена, а с това еднозначно е определена както абсцисата ѝ u, така и ординатата ѝ v. По такъв начин получаваме две функции

4)
$$u=F(x, y),$$
$$v=G(x, x),$$

определени в R', за които точката с координати

$$(F(x, y), G(x, y))$$

не напуска R, когато точката (x, y) се мени в R', и които удовлетворяват условията

$$x=f[F(x, y), G(x, y)], \tag{5}$$
$$y=g[F(x, y), G(x, y)].$$

Така дефинираната трансформация (4) на R' ще наричаме обратна трансформация на трансформацията (1).

Ще покажем, че ако трансформацията (1) е обратима, то нейната обратна трансформация (4) удовлетворява условията

$$u=F(f(u, v), g(u, v)), \tag{7}$$
$$v=G(f(u,v), g(u, v)),$$

където точката (u, v) се избира произволна в R.

И наистина да положим

$$x_1=f(u, v),\ u_1=F(x_1, y_1), \tag{8}$$
$$y_1=g(u, v),\ v_1=G(x_1, y_1).$$

Ще отбележим на това място, че ние можем да образуваме $F(x_1, y_1)$ и $G(x_1, y_1)$, защото точката с координати $(f(u, v), g(u, v))$ принадлежи на R', т. е. принадлежи на дефиниционната област на двете функции (4). Ние обаче знаем, че точката с координати $(F(x_1, y_1), G(x_1, y_1))$ принадлежи на R и следователно можем да образуваме

$$f(u_1, v_1) \text{ и } g(u_1, v_1).$$

По такъв начин получаваме

$$f(u_1, v_1)=f[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)],$$
$$g(u_1, v_1)=g[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)].$$

От друга страна, въз основа на (5) имаме

$$f[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]=x_1,$$
$$g[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]=y_1$$

и следователно

$$f(u_1, v_1)=f(u, v),$$
$$g(u_1, v_1)=g(u, v).$$

Оттук като вземем под внимание, че трансформацията (1) е обратима, получаваме $u_1=u$, $v_1=v$, което заедно с (8) дава (7).

Като пример да разгледаме трансформацията (2) при предположение, че

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В такъв случай, ако означим с A_{ik} адюнгираното количество на a_{ik} и решим системата (2) относно u и v, ще получим

$$u=\frac{A_{11}}{A}x+\frac{A_{21}}{A}y+p', \tag{9}$$
$$v=\frac{A_{12}}{A}x+\frac{A_{22}}{A}y+q',$$

където

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$p'=-\frac{A_{11}}{A}p-\frac{A_{21}}{A}q,$$
$$q'=-\frac{A_{12}}{A}p-\frac{A_{22}}{A}q.$$

Като изхождаме от дефиницията на понятието обратна трансформация, убеждаваме се с директна проверка, че трансформацията (9) е обратна на трансформацията (2).

Специално, ако трансформацията (2) е подобие, то A_{ik} се изразяват просто чрез a_{ik} и A. И наистина, ако решим системата

$$a_{11}a_{11}+a_{12}a_{12}=a^2,$$
$$a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12}=0$$

относно a_{11} и a_{12}, ще получим

$$a_{11}=\frac{a^2}{A}A_{11} \text{ и } a_{12}=\frac{a^2}{A}A_{12}.$$

Аналогично, ако решим системата

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0,$$
$$a_{21}a_{21}+a_{22}a_{22}=a^2$$

относно a_{21} и a_{22}, ще получим

$$a_{21}=\frac{a^2}{A}A_{21},\ a_{22}=\frac{a^2}{A}A_{22},$$

т. е.

$$a_{ik}=\frac{a^2}{A}A_{ik}$$

при $i=1,2$ и $k=1,2$.

По такъв начин трансформацията (9) добива вида

$$u=\frac{a_{11}}{a^2}x+\frac{a_{21}}{a^2}y+p',$$
$$v=\frac{a_{12}}{a^2}x+\frac{a_{22}}{a^2}y+q'.$$

Тази трансформация е подобие, чийто модул е $\frac{1}{a}$, защото

$$\frac{a_{11}^2}{a^4}+\frac{a_{21}^2}{a^4}=\frac{a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}}{a^2A}=\frac{1}{a^2},$$

$$\frac{a_{12}^2}{a^4}+\frac{a_{22}^2}{a^4}=\frac{a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}}{a^2A}=\frac{1}{a^2},$$

$$\frac{a_{11}a_{12}}{a^4}+\frac{a_{21}a_{22}}{a^4}=\frac{a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}}{a^4}=0.$$

Нека C е отворен кръг с център в точката (α, β) и радиус r. Това значи че точката с координати (u, v) се причислява към C тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството

$$(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2<r^2.$$

Нека трансформацията (2) е подобие с модул a. В такъв случай образът C' на C при тази трансформация е отворен кръг с радус ar. И наистина нека (u, v) е една точка от C. Да означим с (x, y) координатите на образа ѝ. Това значи, че

$$x=a_{11}u+a_{12}v+p,$$

$$y=a_{21}u+a_{22}v+q.$$

Да положим

$$\alpha'=a_{11}\alpha+a_{12}\beta+p,$$

$$\beta'=a_{21}\alpha+a_{22}\beta+q.$$

В такъв случай очевидно

$$x-\alpha'=a_{11}(u-\alpha)+a_{12}(v-\beta),$$

$$y-\beta'=a_{21}(u-\alpha)+a_{22}(v-\beta).$$

Като повдигнем в квадрат двете страни на така получените равенства и съберем ще получим

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=a^2[(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2]$$

и следователно

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2<a^2r^2.$$

Този резултат ни учи, че точката (x, y) принадлежи на отворения кръг с център в точката (α', β') и радиус ar.

Съвсем по аналогичен начин се вижда, че всяка точка от отворения кръг с център в (α', β') и радиус ar е образ на някоя точка от C. Нека читателят сам извърши пресмятанията. С това е установено, че C' е отворен кръг с център в точката (α', β') и радиус ar.

От (5) се вижда, че обратната трансформация на една трансформация е обратима. И наистина нека

$$F(x_1, y_1)=F(x_2, y_2),$$

$$G(x_1, y_1)=G(x_2, y_2).$$

В такъв случай от (5) получаваме

$$x_1=f[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]=f[F(x_2, y_2), G(x_2, y_2)]=x_2,$$

$$y_1=g[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]=g[F(x_2, y_2), G(x_2, y_2)]=y_2.$$

Нека трансформацията (1) е дефинирана в R и нека A и B са две подмножества на R. В такъв случай[1]

(10) $$(A+B)'=A'+B',$$

(11) $$(AB)'\subset A'B',$$

(12) $$(A-B)'\supset A'-B',$$

(13) ако $A\subset B$, то $A'\subset B'$.

Ще докажем само зависимостта (10). Зависимостите (11), (12) и (13) се установяват по същия начин.

Нека Q_1 е една точка от $(A+B)'$. Това значи, че тя е образ на някоя точка P_1 от $A+B$. Точката P_1 принадлежи поне на едното от двете събираеми A и B. Нека например тя принадлежи на A (случаят, когато P_1 принадлежи на B, се разглежда по същия начин). В такъв случай нейният образ Q принадлежи на A', а следователно и на $A'+B'$. С това ние показахме, че

$$(A+B)'\subset A'+B'.$$

Нека Q_2 е една точка от $A'+B'$. В такъв случай тя принадлежи поне на едното от двете множества A' и B'. Нека например тя принадлежи на A' (случаят, когато точката Q_2 принадлежи на B', се разглежда по същия начин). В такъв случай Q_2 е образ на някоя точка P_2 от A. Точката P_2 обаче принадлежи на $A+B$ и следователно нейният образ Q_2 принадлежи на $(A+B)'$. С това е показано, че

$$A'+B'\subset(A+B)',$$

а следователно и равенството (10).

Специално, ако трансформацията (1) е обратима в R, то зависимостите (11) и (12) приемат по-прецизния вид

(14) $$(AB)'=A'B',$$

(15) $$(A-B)'=A'-B'.$$

Ще покажем само равенството (14). Равенството (15) се доказва по същия начин.

[1] Нека M и N са две множества. Ще пишем $M\subset N$ или $N\supset M$, ако всяка точка на M принадлежи на N.

Нека Q е една точка от $A'B'$. В такъв случай Q принадлежи както на A', така и на B'. Това обаче значи, че тя е образ както на една точка P_1 от A, така и на една точка P_2 от B. Като вземем под внимание, че трансформацията (1) е обратима, заключаваме, че точките P_1 и P_2 съвпадат, т. е. Q е образ на точка P, която принадлежи както на A, така и на B, т. е. на точка от AB. С това е показано, че Q принадлежи на $(AB)'$ и следователно

$$A'B' \subset (AB)',$$

което заедно с (11) ни дава (14).

Нека (1) е една трансформация (не непременно обратима) на R. Ако функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са непрекъснати в R, то всяко затворено и ограничено подмножество A на R се изобразява върху затворено и ограничено подмножество на R'.

Първо ще покажем, че множеството A' е затворено. За тази цел разглежеаме редица от точки на A'

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots \tag{16}$$

с точка на сгъстяване Q_0. Нашата цел ще бъде да установим, че точката Q_0 принадлежи на A'. Означаваме с (x_0, y_0) координатите на Q_0 и избираме от (16) подредица

$$S_1, S_2, S_3, \ldots,$$

която клони към Q_0. Да означим с (x_n, y_n) координатите на S_n. В такъв случай

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Точката S_n е образ на някоя точка P_n от A. Да означим с (u_n, v_n) координатите на P_n. По такъв начин получаваме

$$x_n = f(u_n, v_n),$$

$$x_n = g(u_n, v_n).$$

Редицата

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

е ограничена, защото множеството A е ограничено. Да изберем от нея една сходяща подредица

$$P_{m_1}, P_{m_2}, \ldots, P_{m_n}, \ldots$$

и да означим с P_0 нейната граница. Като вземем под внимание, че множеството A е затворено, заключаваме, че точката P_0 принадлежи на A. Да означим с (u_0, v_0) координатите на P. В такъв случай

$$u_0 = \lim_{n\to\infty} u_{m_n},$$

$$v_0 = \lim_{n\to\infty} v_{m_n}.$$

Да разгледаме равенствата

$$x_{m_n} = f(u_{m_n}, v_{m_n}),$$

$$y_{m_n} = g(u_{m_n}, v_{m_n})$$

и да оставим n да расте неограничено. В такъв случай ще получим след граничния преход

$$x_0 = f(u_0, v_0),$$

$$y_0 = g(u_0, v_0),$$

с което е показано, че Q_0 е образ на точка от A, т. е. Q_0 принадлежи на A' и следователно множеството A' е затворено. Остава да покажем, че множеството A' е ограничено. Това обаче е очевидно, защото функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са непрекъснати в ограниченото и затвореното множество A и следователно са ограничени.

Ще казваме, че трансформацията (1) е регулярна, ако:

1. Множеството R, където се разглеждат функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$, е отворено.
2. Функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ притежават непрекъснати частни производни от първи ред във всички точки на R.
3. Трансформацията (1) е обратима.
4. Във всички точки на R имаме

$$\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нека трансформацията (1) е регулярна в точковото множество R, нека A е едно подмножество на R и нека (u_0, v_0) е една вътрешна точка на A. В такъв случай образът (x_0, y_0) на точката (u_0, v_0) е една вътрешна точка за A'.

И наистина очевидно имаме

$$x_0 = f(u_0, v_0),$$

$$y_0 = g(u_0, v_0).$$

От друга страна, като вземем под внимание, че трансформацията (1) е регулярна, заключаваме, че са налице условията, при които доказахме теоремата за съществуване на неявни функции Това обстоятелство ни позволява да твърдим, че в достатъчно малка

околност Δ на точката (x_0, y_0) съществуват две непрекъснати функции

$$\varphi(x, y) \text{ и } \psi(x, y),$$

за които точката с координати $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ се намира в отнапред дадена околност D на точката (u_0, v_0) (а следователно се намира в A, щом околността D е достатъчно малка, тъй като точката (u_0, v_0) е вътрешна за A), и които удовлетворяват условията

$$(17) \qquad \begin{aligned} x &= f[\varphi(x, y), \psi(x, y)], \\ y &= g[\varphi(x, y), \psi(x, y)], \\ u_0 &= \varphi(x_0, y_0), \\ v_0 &= \psi(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Равенствата (17) ни учат обаче, че всяка точка от Δ е образ на някоя точка от A, т. е. точката (x_0, y_0) е вътрешна за A'. С това интересуващото ни свойство е установено. От доказаното следва, че отворено множество се преобразува при регулярна трансформация в отворено множество. По-специално множеството R' е отворено.

Въз основа на изложеното не е трудно да се убедим, че ако една точка P от R е външна за едно подмножество A на R, то точката P' е външна за A'. И наистина, щом точката P принадлежи на отвореното множество R и е външна за A, тя ще бъде вътрешна за множеството $R-A$ и следователно P' ще бъде вътрешна точка за $(R-A)'=R'-A'$, следователно ще бъде външна за A'.

Ще покажем, че обратната трансформация на регулярна трансформация е също тъй регулярна трансформация.

И наистина нека (1) е регулярна трансформация на R и (4) е нейната обратна трансформация. От изложеното дотук се вижда, че множеството R' е отворено. Нека (x_0, y_0) е коя да е точка от R' и нека

$$u_0 = F(x_0, y_0),$$
$$v_0 = G(x_0, y_0).$$

В такъв случай

$$x_0 = f(u_0, v_0),$$
$$y_0 = g(u_0, v_0).$$

При условията, в които се намираме, теорията на неявните функции ни осигурява съществуването на две функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ във всяка достатъчно малка околност Δ на точката (x_0, y_0), които имат непрекъснати частни производни от първи ред в Δ,

за които точката с координати $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ принадлежи към R и които удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} x &= f[\varphi(x, y), \psi(x, y)], \\ y &= g[\varphi(x, y), \psi(x, y)], \\ u_0 &= \varphi(x_0, y_0), \\ v_0 &= \psi(x_0, y_0). \end{aligned}$$

От друга страна, имаме

$$\begin{aligned} x &= f[F(x, y), G(x, y)], \\ y &= g[F(x, y), G(x, y)], \end{aligned}$$

както и да избираме точката (x, y) в R'. Като вземем под внимание, че трансформацията (1) е обратима, получаваме

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \varphi(x, y), \\ G(x, y) &= \psi(x, y) \end{aligned}$$

всеки път, когато точката (x, y) принадлежи на $\Delta R'$. Така получените равенства ни учат, че функциите $F(x, y)$ и $G(x, y)$ имат непрекъснати частни производни в достатъчно малка околност на всяка точка (x_0, y_0) от R' и следователно имат непрекъснати първи частни производни навсякъде в R'.

Ние вече видяхме, че обратната трансформация на една обратима трансформация е винаги обратима. Оттук заключаваме, че трансформацията (4) е обратима.

За да можем да твърдим, че трансформацията (4) е регулярна, остава да покажем, че

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Това може да се покаже така:

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'_x f'_u + F'_y g'_u & F'_x f'_v + F'_y g'_v \\ G'_x f'_u + G'_y g'_u & G'_x f'_v + G'_y g'_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

С това ние показахме, че обратната трансформация на регулярна трансформация е също тъй регулярна трансформация.

Нека (1) е една регулярна трансформация на R и нека

$$(19)\qquad \begin{aligned} s&=\varphi(x, y),\\ t&=\psi(x, y)\end{aligned}$$

е една регулярна трансформация R'. Да положим

$$(20)\qquad \begin{aligned} f_1(u, v)&=\varphi[f(u, v), g(u, v)],\\ g_1(u, v)&=\psi[f(u, v), g(u, v)].\end{aligned}$$

Функциите (20) са добре дефинирани в R. Трансформацията на R

$$(21)\qquad \begin{aligned} s&=f_1(u, v),\\ t&=g_1(u, v)\end{aligned}$$

се нарича произведение на двете трансформации (1) и (19). Не е трудно да се види, че тя е регулярна. И наистина множеството R е отворено, функциите (20) имат непрекъснати частни производни поне от първи ред в R, както това се вижда от правилото за диференциране на съставни функции, трансформацията (21) е обратима, защото от

$$\begin{aligned} f_1(u_1, v_1)&=f_1(u_2, v_2),\\ g_1(u_1, v_1)&=g_1(u_2, v_2)\end{aligned}$$

получаваме последователно

$$\begin{aligned} \varphi[f(u_1, v_1), g(u_1, v_1)]&=\varphi[f(u_2, v_2), g(u_2, v_2)],\\ \psi[f(u_1, v_1), g(u_1, v_1)]&=\psi[f(u_2, v_2), g(u_2, v_2)];\\ f(u_1, v_1)&=f(u_2, v_2),\\ g(u_1, v_1)&=g(u_2, v_2)\end{aligned}$$

и следователно

$$u_1=u_2,\ v_1=v_2.$$

Остава да покажем, че

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Това може да се види така. Правилото за диференциране на съставни функции ни дава

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial v}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}.$$

По такъв начин получаваме с помощта на правилото за умножение на детерминанти

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial v}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial v}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Трансформация от вида

$$\begin{aligned} x&=u,\\ y&=g(u, v)\end{aligned}$$

се нарича диагонална трансформация. Диагонални също се наричат и трансформациите

$$\left|\begin{aligned} x&=v\\ y&=g(u, v),\end{aligned}\right.\qquad \left|\begin{aligned} x&=f(u, v)\\ y&=u,\end{aligned}\right.\qquad \left|\begin{aligned} x&=f(u, v)\\ y&=v.\end{aligned}\right.$$

Нека (1) е една регулярна трансформация на R и нека (u_0, v_0) е една точка от R. Ние ще покажем, че в достатъчно малка околност на (u_0, v_0) трансформацията (1) може да се представи като произведение на две регулярни диагонални трансформации. И наистина от условието

$$\begin{vmatrix} f'_u & f'_v\\ g'_u & g'_v\end{vmatrix}\neq 0$$

се вижда, че поне едно от числата $g'_u(u_0, v_0)$ и $g'_v(u_0, v_0)$ е различно от нула. Нека например $g'_v(u_0, v_0)\neq 0$ (случаят, когато $g'_u(u_0, v_0)\neq 0$ се разглежда по същия начин). Да изберем около (u_0, v_0) околност W, която се съдържа в R и в която $g'_v(u, v)\neq 0$. Това може да се направи, защото частната производна $g'_v(u, v)$ е непрекъсната и различна от нула в точката (u_0, v_0).

Да разгледаме диагоналната трансформация

$$\xi = u,$$

(22)

$$\eta = g(u, v).$$

Тази трансформация е регулярна в W. И наистина множеството W е отворено, функциите u и $g(u, v)$ имат непрекъснати производни и детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \end{vmatrix}$$

е различна от нула. Остава да се убедим, че трансформацията (22) е обратима. Това може да се види така. Нека двете точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) от W имат един и същ образ при трансформацията (22). В такъв случай

$$u_1 = u_2,$$

$$g(u_1, v_1) = g(u_2, v_2)$$

и следователно

$$0 = g(u_2, v_2) - g(u_1, v_1) = g(u_1, v_2) - g(u_1, v_1) =$$

$$= (v_2 - v_1)\, g'_v(u_1, v_3),$$

където v_3 е точка между v_1 и v_2. От друга страна, точката (u_1, v_3) очевидно принадлежи на W, поради което $g'_v(u_1, v_3) \neq 0$ и следователно $v_2 = v_1$. С това обратимостта на (22) е установена.

Да означим с W^* образа W при трансформацията (22) и да положим

$$\xi_0 = u_0,$$

$$\eta_0 = g(u_0, v_0).$$

Точката (ξ_0, η_0) очевидно принадлежи на W^*.

Нека

$$u = p(\xi, \eta),$$

(23)

$$v = q(\xi, \eta)$$

е обратната трансформация на (22). В такъв случай съгласно дефиницията на понятието обратна трансформация имаме

$$\xi = p(\xi, \eta),$$

$$\eta = g[p(\xi, \eta), q(\xi, \eta)]$$

и следователно

(24)

$$\eta = g[\xi, q(\xi, \eta)].$$

Трансформацията (22) обаче е обратима, поради което

(25)

$$u = p[u, g(u, v)],$$

$$v = q[u, g(u, v)].$$

Да разгледаме диагоналната трансформация

(26)

$$x = \varphi(\xi, \eta),$$

$$y = \eta,$$

където

$$\varphi(\xi, \eta) = f[\xi, q(\xi, \eta)].$$

Тази трансформация очевидно е добре дефинирана в W^*. Тя обаче е регулярна във всяка околност T на точката (ξ_0, η_0), която се съдържа в W^*. В това ние можем да се убедим с помощта на същите разсъждения, които приложихме към трансформацията (22). За тази цел достатъчно е да покажем, че

$$\varphi'_\xi(\xi, \eta) \neq 0,$$

което може да стане по следния начин. Очевидно

$$\varphi'_\xi(\xi, \eta) = f'_u + f'_v q'_\xi(\xi, \eta).$$

От друга страна, диференцирайки (24) спрямо ξ, получаваме

$$0 = g'_u + g'_v q'_\xi(\xi, \eta),$$

т. е.

$$q'_\xi = -\frac{g'_u}{g'_v},$$

и следователно

$$\varphi'_\xi = f'_u - f'_v \frac{g'_u}{g'_v} =$$

$$= \frac{1}{g'_v} \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Образът на T при трансформацията (23) е някое отворено подмножество на W, което съдържа точката (u_0, v_0). Нека S е околност на (u_0, v_0), която се съдържа в това подмножество. В такъв случай (22) е регулярна трансформация на S. Образът на S при тази трансформация е едно отворено множество S^*, в което трансформацията (26) е регулярна. Да образуваме в S

произведението на двете трансформации (22) и (26). След очевидни пресмятания, като се използува (25), това произведение добива вида

$$x=f[u,\ q\ (u,\ g\ (u,\ v))]=f(u,\ v),$$

$$y=g(u,\ v).$$

По такъв начин ние получихме трансформацията (1). С това е установено, че в достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0) трансформацията (1) действително може да се представи като произведение на две диагонални регулярни трансформации.

Не е трудно да се установи, че ако трансформацията (1) е регулярна в R и A е ограничено множество, което лежи в R заедно с контура си, то контурът на A' лежи в R' и

$$[K(A)]'=K(A').$$

Ще покажем първо, че контурът на A' лежи в R'. И наистина множеството

$$A+K(A)$$

е ограничено и затворено и следователно образът му

$$[A+K(A)]'=A'+[K(A)]'$$

е ограничено и затворено подмножество на R'. Като вземем под внимание неравенството

$$A'\subset A'+[K(A)]',$$

заключаваме, че всичките контурни точки на A' също лежат в

$$A'+[K(A)]',$$

защото множеството (18) е затворено, а всяка контурна точка на A' е точка на сгъстяване на редица от точки на A'. От изложеното се вижда, че

$$K(A')\subset A'+[K(A)]'$$

и още повече

$$K(A')\subset R'.$$

Ще покажем, че

$$[K(A)]'=K(A').$$

И наистина нека P' е една точка от $[K(A)]'$ и нека P е образ на P' при трансформацията (4), т. е. P принадлежи на $K(A)$. В такъв случай P' не може да бъде нито вътрешна, нито външна точка за A', защото P като образ на P' при регулярната трансформация (4) би била вътрешна или съответно външна точка за A, което не е вярно. С това показахме, че

$$[K(A)]'\subset K(A').$$

Аналогично се вижда, че

$$K(A')\subset[K(A)]',$$

с което доказателството се завършва.

Ще казваме, че трансформацията (1) е двойно регулярна в R, ако тя е регулярна и функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ притежават непрекъснати частни производни в R поне до втори ред.

Ние вече видяхме, че щом трансформацията (1) е регулярна, от функциите (4), които определят обратната трансформация, притежават непрекъснати първи частни производни. Теорията на неявните функции ни учи, че

$$F'_x=\frac{g'_v}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}},\quad F'_y=\frac{-f'_v}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}},$$

$$G'_x=\frac{-g'_u}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}},\quad G'_y=\frac{f'_u}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}}.$$

От тези равенства заключаваме, че щом трансформацията (1) е двойно регулярна, то функциите

$$F'_x,\ F'_y,$$

$$G'_x,\ G'_y$$

притежават непрекъснати частни производни от първи ред в R' т. е. функциите (4) притежават непрекъснати частни производни поне до втори ред в R'. От това заключаваме, че обратната трансформация на една двойно регулярна трансформация е също тъй една двойно регулярна трансформация.

Понякога регулярните трансформации ще наричаме още еднократно регулярни за разлика от двойно регулярните трансформции.

§ 15. Основна теорема на интегралното смятане в равнината

Да означим с Δ правоъгълник, определен от неравенствата

(1) $$a\leq x<b,$$

$$c\leq y<d.$$

Това значи, че една точка с координати (x, y) се причислява към Δ тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (1).

Такъв правоъгълник ние ще наричаме полузатворен, без да по сочваме изрично, че става дума за правоъгълник, чиито страни са успоредни на съответните координатни оси.

Нека числата a, b, c, d и p удовлетворяват неравенствата

$$a<p<b, \quad c<d.$$

Да разгледаме двата полузатворени правоъгълника, определени съответно от неравенствата

$$a\leqq x<p, \; p\leqq x<b,$$

$$c\leqq y<d, \; c\leqq y<d.$$

Такива правоъгълници ние ще наричаме съседни по x. Аналогично правоъгълниците, определени с неравенства от вида

$$a\leqq x<b, \quad a\leqq x<b,$$

$$c\leqq y<q, \quad q\leqq y<d,$$

където $c<q<d$ ще наричаме съседни по y. В бъдеще, когато говорим за съседни правоъгълници, ще имаме пред вид или полузатворени правоъгълници, съседни по x, или полузатворени правоъгълници, съседни по y. Очевидно, ако Δ_1 и Δ_2 са два съседни правоъгълника, те нямат обща точка и сумата $\Delta_1+\Delta_2$ е полузатворен правоъгълник.

С помощта на неравенствата (1) ние можем да образуваме безбройно много полузатворени правоъгълници в зависимост от избора на числата a, b, c и d. Нека на всеки полузатворен правоъгълник Δ съпоставим по едно число $\varphi(\Delta)$. Ще казваме, че $\varphi(\Delta)$ е полуадитивна функция на Δ, ако всеки път, когато Δ_1 и Δ_2 са два съседни полузатворени правоъгълника, имаме

$$\varphi(\Delta_1+\Delta_2)\leqq\varphi(\Delta_1)+\varphi(\Delta_2).$$

Ще казваме, че функцията $\varphi(\Delta)$ е неположителна около точката P, ако може да се намери околност $U(P)$ на точката P по такъв начин, че за всеки полузатворен правоъгълник Δ, който съдържа точка P или по контура, или във вътрешността си и който се съдържа в $U(P)$, да имаме $\varphi(\Delta)\leqq 0$.

Теорема. Нека полуадитивната функция $\varphi(\Delta)$ е неположителна около всяка точка P на равнината. В такъв случай при всеки избор на полузатворения правоъгълник Δ е в сила неравенството $\varphi(\Delta)\leqq 0$.

Доказателство. Да допуснем противното. Това значи, че има поне един полузатворен правоъгълник D_1, за който $\varphi(D_1)>0$. Ние ще го разложим на сума от два съседни по x правоъгълника

D' и D'' с помощта на неговата средна линия. В такъв случай е изпълнено поне едно от двете неравенства

$$\varphi(D')>0, \quad \varphi(D'')>0.$$

И наистина в противен случай ще имаме $\varphi(D')\leqq 0$ и $\varphi(D'')\leqq 0$ и следователно

$$\varphi(D_1)=\varphi(D'+D'')\leqq\varphi(D')+\varphi(D'')\leqq 0,$$

което не е вярно. Нека означим с D_2 такъв измежду двата правоъгълника D' и D'', за който

$$\varphi(D_2)>0.$$

Разделяме D_2 с помощта на неговата средна линия на два съседни по y полузатворени правоъгълника и означаваме с D_3 такъв измежду тях, за който $\varphi(D_3)>0$. Както по-горе се убеждаваме, че такъв сигурно има. Продължаваме този процес неограничено.

Така получаваме редицата

$$D_1\supset D_2\supset D_3\supset\ldots$$

от полузатворени правоъгълници, за които

$$\varphi(D_n)>0. \tag{2}$$

Съгласно теоремата на Кантор[1] съществува точка P_0, която принадлежи или на вътрешността, или на контура на всеки един от тези правоъгълници. Функцията $\varphi(\Delta)$ обаче е неположителна около всяка точка на равнината и следователно тя е неположителна и около P_0. Това значи, че съществува такава околност $U(P_0)$ на точката P_0, че за всеки полузатворен правоъгълник Δ, който съдържа точката P_0 или по контура, или във вътрешността си и се съдържа в $U(P_0)$, имаме $\varphi(\Delta)\leqq 0$. От друга страна, правоъгълниците D_n съдържат точката P_0 или във вътрешността, или по контура си, а диагоналите им клонят към нула, когато n расте неограничено. Това ни дава право да твърдим, че при достатъчно голямо n полузатвореният правоъгълник D_n се съдържа в $U(P_0)$ и следователно $\varphi(D_n)\leqq 0$, което противоречи на неравенството (2). С това доказателството е завършено.

§ 16. Характеристични функции

Нека A е едно множество от точки в равнината. Характеристична функция на A се нарича функцията $\varphi(x, y)$, която има стойност единица в точки, които принадлежат на A, и стойност нула в точки, които не принадлежат на A.

[1] Теоремата на Кантор се прилага към редицата от затворени правоъгълници, които се получават от D_n чрез присъединяване на контурните им точки.

Нека A е кръг, определен от неравенството

(1) $$(x-p)^2+(y-q)^2<r^2,$$

и нека $\varphi(x, y)$ е характеристичната му функция. Ние ще пресметнем израза

(2) $$I=\int_a^b\left[\int_a^b \varphi(x, y)\,dy\right]dx$$

при предположение, че квадратът, определен от неравенствата

(3) $$a\leq x\leq b,$$
$$a\leq y\leq b,$$

съдържа A, като същевременно се убедим, че (2) има смисъл.

Ако точката с координати (x, y) удовлетворява неравенството (1), то

$$|x-p|<r$$

и следователно

$$p-r<x<p+r.$$

От друга страна, имаме очевидно

$$(y-q)^2<r^2-(x-p)^2,$$

т. е.

$$q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}<y<q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}.$$

По такъв начин ние виждаме, че ако точката (x, y) принадлежи на кръга A, нейните координати удовлетворяват неравенствата

(4) $$p-r<x<p+r,$$
$$q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}<y<q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}.$$

Обратно, нека точката (x, y) удовлетворява неравенствата (4); в такъв случай лесно се убеждаваме, че е изпълнено и неравенството (1). Оттук заключаваме, че

$$\varphi(x, y)=1$$

тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (4).

Да разгледаме при фиксирано x интеграла

$$F(x)=\int_a^b \varphi(x, y)\,dy.$$

Когато x не принадлежи на интервала $|x-p|<r$, този интеграл съществува и има стойност нула, защото в такъв случай $\varphi(x, y)=0$. Когато $|x-p|<r$, интегралът пак очевидно има смисъл и

$$F(x)=\int_a^{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}}\varphi(x, y)\,dy+\int_{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}}\varphi(x, y)\,dy+\int_{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{b}\varphi(x, y)\,dy=$$

$$=\int_a^{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}}0\,dy+\int_{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}}1\,dy+\int_{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{b}0\,dy=$$

$$=2\sqrt{r^2-(x-p)^2}.$$

По такъв начин

$$F(x)=0$$

при $|x-p|\geq r$ и

$$F(x)=2\sqrt{r^2-(x-p)^2}$$

при $|x-p|<r$. Функцията $F(x)$ е непрекъсната и следователно интегруема в разглеждания от нас интервал $[a, b]$. Очевидно имаме

$$I=\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^{p-r}F(x)\,dx+\int_{p-r}^{p+r}F(x)\,dx+\int_{p+r}^{b}F(x)\,dx=$$

$$=2\int_{p-r}^{p+r}\sqrt{r^2-(x-p)^2}\,dx.$$

Да направим субституцията

$$x=p+r\cos t.$$

Това ще ни даде

$$I=2r^2\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\pi r^2.$$

Нека читателят обърне внимание върху този резултат. Ние ще имаме нужда от него.

Израз от вида (2) се нарича повторен интеграл. Ние ще имаме нужда от още един повторен интеграл.

Нека $\psi(x, y)$ е характеристичната функция на един полузатворен правоъгълник A, който се съдържа в множеството G, определено[1] от неравенствата

[1] Това значи, че една точка (x, y) се причислява към G тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (5).

$$a \leq x \leq b,$$

(5) $$\varphi_0(x) \leq y \leq \varphi_1(x),$$

където $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ са непрекъснати функции в компактния интервал $a \leq x \leq b$, удовлетворяващи условието $\varphi_0(x) \leq \varphi_1(x)$.

Ние ще покажем, че повторният интеграл

$$E = \int_a^b \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy \right] dx$$

има смисъл, и ще пресметнем неговата стойност. Това ще извършим така.

Нека правоъгълникът A се определя от неравенствата

$$p \leq x < q,$$

$$r \leq y < s.$$

В такъв случай $a \leq p < q \leq b$ и $\varphi_0(x) \leq r$, $s \leq \varphi_1(x)$. Да положим

(6) $$\phi(x) = \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy.$$

Ако x не принадлежи на интервала $p \leq x < q$, то $\psi(x, y) = 0$ при всяко y. В този случай $\phi(x)$ очевидно има смисъл и $\phi(x) = 0$. Нека $p \leq x < q$. Тогава $\psi(x, y) = 1$ при $r \leq y < s$ и $\psi(x, y) = 0$ при всички останали стойности на y. По такъв начин при фиксирано x ограничената функция $\psi(x, y)$ има само две точки на прекъсване и следователно е интегруема в Риманов смисъл, т. е. $\phi(x)$ съществува и в този случай и

$$\phi(x) = \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy = \int_{\varphi_0(x)}^{r} \psi(x, y)\, dy + \int_r^s \psi(x, y)\, dy +$$

$$+ \int_s^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy = 0 + (s - r) + 0 = s - r.$$

И така $\phi(x) = s - r$ при $p \leq x < q$ и $\phi(x) = 0$ при всички останали стойности на x. От това виждаме, че функцията $\phi(x)$ е интегруема в Риманов смисъл във всеки краен интервал и

$$\int_a^b \phi(x)\, dx = \int_a^p \phi(x)\, dx + \int_p^q \phi(x)\, dx + \int_q^b \phi(x)\, dx =$$

$$= (s - r)(q - p).$$

По такъв начин ние видяхме, че повторният интеграл E има смисъл и

(7) $$E = (s - r)(q - p).$$

По-общо, ако L е константа, то съгласно познатите ни правила имаме

(8) $$\int_a^b \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} L\psi(x, y)\, dy \right] dx = \int_a^b L \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy \right] dx =$$

$$= L \int_a^b \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy \right] dx = L(s - r)(q - p),$$

като при това можем да твърдим въз основа на същите правила, че (8) съществува.

Ние особено често ще прилагаме формулите (7) и (8) в случая, когато функциите $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ са константи, т.е. когато множеството G е правоъгълник.

Ако множеството G не съдържа A, то равенството (7) не е вярно, но ние можем да получим едно полезно неравенство по следния начин. Нека α, β, γ и δ са константи, избрани така, че правоъгълникът

$$\alpha \leq x \leq \beta,$$

$$\gamma \leq y \leq \delta$$

да съдържа A и освен това да са изпълнени неравенствата

$$\alpha \leq a, \quad b \leq \beta, \quad \gamma \leq \varphi_0(x), \quad \varphi_1(x) \leq \delta.$$

В такъв случай

$$E = \int_a^b \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\, dy \right] dx \leq \int_\alpha^\beta \left[\int_\gamma^\delta \psi(x, y)\, dy \right] dx = (s - r)(q - p)$$

С помощта на характеристични функции могат да се образуват удобно полуадитивни функции по следния начин. Нека $\psi(x, y)$ е ограничена функция, дефинирана в цялата равнина, и нека $\varphi(x, y)$ е характеристичната функция на полузатворения правоъгълник Δ, определен от неравенствата

$$p \leq x < q,$$

$$r \leq y < s.$$

В такъв случай, ако a и b са произволни реални числа, свързани с неравенството $a < b$, функциите

$$I(\Delta)=\int_a^b\left[\int_a^b \varphi(x,y)\ \psi(x,y)\ dy\right]dx,$$

$$H(\Delta)=-\int_a^b\left[\int_a^b \varphi(x,y)\,\psi(x,y)\,dy\right]dx$$

са полуадитивни. И наистина нека Δ_1 и Δ_2 са два съседни полузатворени правоъгълника. Да означим с $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ съответно техните характеристични функции. В такъв случай

$$I(\Delta_1+\Delta_2)=\int_a^b\left[\int_a^b(\varphi_1+\varphi_2)\,\psi\,dy\right]dx\leq$$

$$\leq\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_1\psi\,dy+\int_a^b\varphi_2\psi\,dy\right]dx\leq$$

$$\leq\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_1\psi\,dy\right]dx+\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_2\psi\,dy\right]dx=$$

$$=I(\Delta_1)+I(\Delta_2)$$

и аналогично

$$H(\Delta_1+\Delta_2)=-\int_a^b\left[\int_a^b(\varphi_1+\varphi_2)\,\psi\,dy\right]dy\leq$$

$$\leq-\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_1\psi\,dy+\int_a^b\varphi_2\psi\,dy\right]dx\leq$$

$$\leq-\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_1\psi\,dy\right]dx-\int_a^b\left[\int_a^b\varphi_2\psi\,dy\right]dx=$$

$$=H(\Delta_1)+H(\Delta_2).$$

Като вземем под внимание, че сума от полуадитивни функции е полуадитивна, добиваме възможност да образуваме разнообразни полуадитивни функции. Ние често ще се ползуваме от това обстоятелство.

§ 17. Горна мярка

Нека A е ограничено точково множество в равнината. Покриваме множеството A със система от краен брой отворени кръгове

(1) $$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n.$$

Това значи, че кръговете C_k са избрани така, че

$$A\subset C_1+C_2+\cdots+C_n.$$

Такива системи съществуват, защото множеството A е ограничено. То може да бъде покрито дори с помощта на един-единствен кръг.

Означаваме с r_k радиуса на кръга C_k и разглеждаме сумата

$$S=r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2.$$

Такива суми могат да се образуват по безбройно много начини в зависимост от избора на покриващата система от кръгове (1). Множеството от тези суми обаче е ограничено отдолу, защото те са неотрицателни. Ние ще означим с $\nu(A)$ тяхната точна долна граница. Числото $\nu(A)$ се нарича горна мярка на множеството A. По такъв начин на всяко ограничено множество от точки в равнината ние съпоставихме по едно число $\nu(A)$, т. е. както често се казва, дефинирахме една функция в съвкупността от разглежданите от нас множества. Нашата цел ще бъде да изучим свойствата на тази функция. Това ние ще направим в следващите четири точки.

1. Стойностите на функцията $\nu(A)$ са неотрицателни.

Доказателството, което е тривиално, ние ще предоставим на читателя.

2. Ако A и B са две ограничени точкови множества в равнината и ако $A\subset B$, то $\nu(A)\leq\nu(B)$.

Доказателство. Да покрием B със система от краен брой отворени кръгове

(2) $$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n$$

и да означим с S сумата от квадратите на техните радиуси. Очевидно системата от кръговете (2) покрива и множеството A и следователно

$$\nu(A)\leq S,$$

както това се вижда от дефиницията на $\nu(A)$. По такъв начин $\nu(A)$ е една долна граница на множеството, което описват сумите S, когато меним по всевъзможни начини покриващата система от кръгове (2). Числото $\nu(B)$ е обаче точната долна граница на

това множество, т. е. най-голямата от долните му граници и следователно

$$\nu(B) \geq \nu(A).$$

С това доказателството е завършено.

3. Ако A и B са две ограничени множества от точки в равнината, то

$$\nu(A+B) \leq \nu(A)+\nu(B).$$

Доказателство. Покриваме множеството A със система от кръгове

(3) $$C_1, C_2, \cdots, C_n,$$

а множеството B — със система от кръгове

(4) $$C'_1, C'_2, \cdots, C'_m.$$

Означаваме с S сумата от квадратите на радиусите на кръговете (3) и с S' — сумата от квадратите на радиусите на кръговете (4). Системата от кръговете

$$C_1, C_2, \cdots, C_n, C'_1, C'_2, \cdots, C'_m$$

покрива множеството $A+B$ и следователно

(5) $$\nu(A+B) \leq S+S',$$

както това се вижда от дефиницията на $\nu(A+B)$.

Фиксираме системата (3). С това не е направено никакво ограничение върху начина, по който можем да избираме кръговете (4). От неравенството (5) получаваме

$$\nu(A+B)-S \leq S',$$

което ни учи, че числото $\nu(A+B)-S$ е една долна граница на множеството от сумите S'. Числото $\nu(B)$ е обаче точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми, и следователно

$$\nu(A+B)-S \leq \nu(B)$$

или още

(6) $$\nu(A+B)-\nu(B) \leq S.$$

Системата от кръговете (3) при нас обаче е фиксирана произволно. Това обстоятелство ни позволява да заключим от неравенството (6), че числото $\nu(A+B)-\nu(B)$ е една долна граница на множеството от сумите S от квадратите на радиусите на всевъзможните системи (3) от кръгове, които покриват A. От друга страна, числото $\nu(A)$ е най-голямата от долните граници на такива суми и следователно

$$\nu(A+B)-\nu(B) \leq \nu(A),$$

с което исканото неравенство е установено.

Забележка. Ако $A_1, A_2, \cdots, A_n$ са краен брой ограничени точкови множества в равнината, то

$$\nu(A_1+A_2+\cdots+A_n) \leq \nu(A_1)+\nu(A_2)+\cdots+\nu(A_n).$$

За да се убедим в това, достатъчно е да приложим краен брой пъти неравенството, което доказахме.

4. Нека A е ограничено множество от точки в равнината и нека τ е подобие с модул a. Ако A' е образ на A при τ, то

$$\nu(A') = a^2 \nu(A).$$

От това следва, разбира се, че ако τ е еднаквост, т. е. ако $a=1$, то

$$\nu(A') = \nu(A).$$

Доказателство. Нека

(7) $$C_1, C_2, \cdots, C_n$$

е произволна система от отворени кръгове, която покрива A, и нека радиусът на C_k е r_k. Нека образът на C_k при τ е C'_k. Ние знаем (вж. § 14), че C'_k е отворен кръг с радиус ar_k. Системата от кръговете $C'_1, C'_2, \cdots, C'_k$ покрива A' и следователно

$$\nu(A') \leq (ar_1)^2+(ar_2)^2+\cdots+(ar_n)^2,$$

или още

$$\frac{\nu(A')}{a^2} \leq r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2.$$

Системата от покриващите кръгове (7) е избрана произволно, т. е. $\frac{\nu(A')}{a^2}$ е една долна граница на съвкупността на всевъзможните суми

$$r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2.$$

Числото $\nu(A)$ обаче е точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми и следователно

$$\frac{\nu(A')}{a^2} \leq \nu(A)$$

или още

(8) $$\nu(A') \leq a^2 \nu(A).$$

Като разгледаме обратната трансформация на τ, която, както знаем (вж. § 14), е подобие с модул $\frac{1}{a}$, ще получим

$$\nu(A) \leq \frac{1}{a^2} \nu(A'),$$

което заедно с (8) ни дава

$$\nu(A') = a^2 \nu(A).$$

С това доказателството е завършено.

§ 18. Мярка на правоъгълник

Нека t и s са две положителни числа и нека Δ е правоъгълник, определен от неравенствата

$$0 \leq x < t,$$

(1) $$0 \leq y < s.$$

Това значи, че точката (x, y) се причислява към Δ тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (1).

Ние ще фиксираме s. При всеки избор на $t > 0$ стойността на $\nu(\Delta)$ е еднозначно определена и следователно $\nu(\Delta)$ е функция на t. Ние ще я означим с $\varphi(t)$. Тази функция при нас е дефинирана при $t > 0$.

Да означим с Δ_{ik} правоъгълника, определен от неравенствата

$$(i-1)t \leq x < it,$$
$$(k-1)t \leq y < ks.$$

Еднаквостта (относно терминологията вж. § 14)

$$x' = x + (i-1)t,$$
$$y' = y + (k-1)s$$

преобразува Δ в Δ_{ik} и следователно, както знаем (вж. § 17),

$$\nu(\Delta_{ik}) = \nu(\Delta).$$

Да положим

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ik}.$$

В такъв случай

$$\nu(\Delta_k) \leq \sum_{i=1}^{n} \nu(\Delta_{ik}) = n\nu(\Delta)$$

и по-специално при $k = 1$ ще имаме

$$\nu(\Delta_1) \leq n\nu(\Delta).$$

Не е трудно да се види, че Δ_k е правоъгълник, определен от неравенствата

$$0 \leq x < nt,$$
$$(k-1)s \leq y < ks.$$

Ние ще предоставим доказателството на читателя.

Както се вижда съвсем просто, еднаквостта

$$x' = x,$$
$$y' = y + (k-1)s$$

преобразува Δ_1 в Δ_k и следователно

$$\nu(\Delta_k) = \nu(\Delta_1).$$

Най-сетне да разгледаме сумата

$$D = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k.$$

Както знаем,

$$\nu(D) \leq \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta_k)$$

и следователно

$$\nu(D) \leq n\nu(\Delta_1).$$

От друга страна, съвсем просто се вижда, че D е множеството на онези и само онези точки (x, y) от равенствата, които удовлетворяват неравенствата

$$0 \leq x < nt,$$
$$0 \leq y < ns.$$

От друга страна, също тъй просто се вижда, че подобието

$$x' = nx,$$

(2) $$y' = ny$$

преобразува Δ в D. Ние ще предоставим проверката на тези прости неща на читателя. Като вземем под внимание, че модулът на подобието (2) е n, получаваме

(3) $$\nu(D) = n^2 \nu(\Delta).$$

Да разгледаме неравенствата

$$\nu(D) \leq n\nu(\Delta_1),$$
$$\nu(\Delta_1) \leq n\nu(\Delta).$$

Ако допуснем за момент, че

$$\nu(\Delta_1) < n\nu(\Delta),$$

ще получим

$$\nu(D) < n^2 \nu(\Delta),$$

което противоречи на равенството (3). По такъв начин получаваме

$$\nu(\Delta_1) = n\nu(\Delta)$$

или

$$\varphi(nt) = n\varphi(t).$$

Това равенство, което засега е установено от нас само при цели положителни стойности на n, може да се обобщи така. Нека n и m са две произволни цели положителни числа. В такъв случай

$$\varphi(mt) = m\varphi(t)$$

и

$$\varphi(mt) = \varphi\left(n\frac{mt}{n}\right) = n\varphi\left(\frac{m}{n}t\right)$$

и следователно

$$m\varphi(t) = n\varphi\left(\frac{m}{n}t\right),$$

или

$$\varphi(rt) = r\varphi(t),$$

където $r = \frac{m}{n}$. Специално при $t = 1$ получаваме

$$\varphi(r) = r\varphi(1),$$

където r е произволно рационално положително число.

От друга страна, функцията $\varphi(t)$ е монотонно растяща. И наистина да разгледаме двата правоъгълника Δ' и Δ'', определени съответно от неравенствата

$$0 \leq x < t'$$

$$0 \leq y < s,$$

и

$$0 \leq x < t'',$$

$$0 \leq y < s,$$

където $0 < t' \leq t''$. В такъв случай, както това лесно се вижда $\Delta' \subset \Delta''$ и следователно $\nu(\Delta') \leq \nu(\Delta'')$, т. е

$$\varphi(t') \leq \varphi(t'').$$

Сега вече не е трудно да се определи $\varphi(t)$ при произволно реално и положително t. За тази цел фиксираме t и избираме две положителни рационални числа r_1 и r_2 по такъв начин, че да имаме

(4) $$r_1 < t < r_2.$$

В такъв случай

(5) $$\varphi(r_1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(r_2)$$

и следователно

(6) $$r_1\varphi(1) \leq \varphi(t) \leq r_2\varphi(1).$$

От друга страна, $\varphi(1) \geq 0$ и по такъв начин от (4) получаваме

$$r_1\varphi(1) \leq t\varphi(1) \leq r_2\varphi(1),$$

което заедно с (6) ни дава

$$|\varphi(t) - t\varphi(1)| \leq (r_2 - r_1)\varphi(1).$$

Числата r_1 и r_2 обаче могат да се изберат произволно близо до t, а t, $\varphi(t)$ и $\varphi(1)$ не зависят от избора на r_1 и r_2. Въз основа на това заключаваме, че

$$\varphi(t) = t\varphi(1).$$

Да положим $\varphi(1) = A$. По такъв начин получаваме

$$\nu(\Delta) = At,$$

където A не зависи от t.

Съвсем по същия начин се вижда, че

$$\nu(\Delta) = Bs,$$

където B не зависи от s. По такъв начин получаваме

$$At = Bs$$

и следователно

(7) $$\frac{A}{s} = \frac{B}{t}.$$

Да означим със σ общата стойност на двете отношения $\frac{A}{s}$ и $\frac{B}{t}$. Тъй като лявата страна на (7) не зависи от t, а дясната не зависи от s, то σ не зависи нито от t, нито от s. По такъв начин получаваме $A = \sigma s$ и следователно

$$\nu(\Delta) = \sigma st,$$

където σ не се мени, когато изменяме s и t. Засега се вижда, че σ е неотрицателно число. Точната му стойност ние ще пресметнем по-късно (вж. § 19).

Резултатът, който получихме, може да се обобщи. Нека G е правоъгълник, определен от неравенствата

$$a \leq x < b,$$

$$c \leq y < d.$$

Не е трудно да се види, че еднаквостта

$$x' = x - a,$$

$$y' = y - c$$

го преобразува в правоъгълник G', определен от неравенствата

$$0 \leq x' < b - a,$$

$$0 \leq y' < d - c,$$

и следователно

$$\nu(G) = \nu(G').$$

От друга страна, въз основа на това, което вече знаем, имаме

$$\nu(G') = \sigma(b-a)(d-c)$$

и по такъв начин намираме

$$\nu(G) = \sigma(b-a)(d-c).$$

От получения резултат се вижда, че ако Δ_1 и Δ_2 са два съседни полузатворени правоъгълника, то

$$\nu(\Delta_1 + \Delta_2) = \nu(\Delta_1) + \nu(\Delta_2). \tag{8}$$

И наистина нека Δ_1 и Δ_2 са съседни по x. Това значи, че те могат да се представят съответно с помощта на неравенства от вида

$$a \leq x < p,$$

$$c \leq y < d$$

и

$$p \leq x < b,$$

$$c \leq y < d,$$

където $a < p < b$, $c < d$. В такъв случай $\Delta_1 + \Delta_2$ е полузатворен правоъгълник, определен от неравенствата

$$a \leq x < b,$$

$$c \leq y < d$$

(нека читателят сам докаже това), и следователно съгласно доказаното ще имаме

$$\nu(\Delta_1 + \Delta_2) = \sigma(b-a)(d-c).$$

Остава да вземем под внимание, че

$$\nu(\Delta_1) = \sigma(p-a)(d-c),$$

$$\nu(\Delta_2) = \sigma(b-p)(d-c),$$

за да получим (8). Случаят, когато Δ_1 и Δ_2 са съседни по y, се разглежда по същия начин.

От доказаното се вижда, че $\nu(\Delta)$ и $-\nu(\Delta)$ са полуадитивни функции на полузатворения правоъгълник Δ. Полуадитивността на $\nu(\Delta)$ е тривиална. Тя следва от неравенството, което ние установихме в точка 3 на § 17. От това неравенство следва по-общо полуадитивността на функцията $\nu(\Delta G)$, където G е фиксирано множество. Напротив, полуадитивността на $-\nu(\Delta)$ е нова за нас. Ние ще използуваме този резултат.

§ 19. Измерими множества

Едно множество A се нарича измеримо в смисъл на Пеано — Жордан, ако то е ограничено и горната мярка на контура му е нула.

Ако A и B са измерими множества, то множествата $A+B$, AB и $A-B$ са също измерими, защото са ограничени и както знаем (вж. § 13),

$$K(A+B) \subset K(A) + K(B),$$

$$K(AB) \subset K(A) + K(B),$$

$$K(A-B) \subset K(A) + K(B).$$

За да имаме примери на измерими множества, достатъчно е да забележим, че горната мярка на всяка праволинейна отсечка L е нула. И наистина нека a е нейната дължина. Да разделим отсечката на n равни части и да построим около всяка точка на деление отворен кръг с радиус $\frac{a}{n}$. По този начин получаваме $n+1$ кръга, чиято сума покрива L. В такъв случай

$$\nu(L) \leq (n+1)\frac{a^2}{n^2},$$

откъдето получаваме, като оставим n да расте неограничено, $\nu(L) = 0$.

От доказаното заключаваме, че всяко ограничено множество, чийто контур е съставен от краен брой праволинейни отсечки, е измеримо, защото, както това се вижда от неравенството, което ние установихме в точка 3 на § 17, сума от краен брой множества, чиято горна мярка е нула, е множество, чиято горна мярка е също нула.

За да имаме още по-общ пример на измерими множества, ще забележим, че графиката на всяка функция $f(x)$, която е дефинирана и непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$, представлява също тъй едно множество, чиято горна мярка е

нула. И наистина да изберем едно положително число ε и да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

по такъв начин, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от ε. Да означим с M_i и m_i съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Нека $f(x)$ е графиката на Γ и нека Δ_i е правоъгълникът, определен от неравенствата

$$x_{i-1}\leq x<x_i,$$
$$m_i\leq y<M_i+\varepsilon.$$

Да означим най-сетне с P множеството, съставено от единствената точка $(b, f(b))$. В такъв случай

$$\Gamma-P\subset\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$$

и следователно[1]

$$\nu(\Gamma-P)\leq\sum_{i=1}^{n}\nu(\Delta_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sigma(M_i+\varepsilon-m_i)(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{n}2\sigma\varepsilon(x_i-x_{i-1})=$$

$$=2\sigma\varepsilon(b-a),$$

откъдето получаваме $\nu(\Gamma-P)=0$. Като вземем под внимание още, че $\nu(P)=0$, получаваме $\nu(\Gamma)=0$, както това се вижда от неравенството

$$\nu(\Gamma)\leq\nu(\Gamma-P)+\nu(P).$$

С оглед на това, което ще следва по-късно, ще отбележим че е измеримо всяко множество G което се дефинира с неравенства от вида[2]

$$a\leq x\leq b,$$

(1) $$f(x)\leq y\leq g(x)$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати функции в компактния интервал $a\leq x\leq b$ и удовлетворяват неравенството $f(x)\leq g(x)$.

[1] Относно дефиницията на σ вж. § 18.

[2] Това значи, че една точка с координати (x, y) се причислява към G тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (1).

И наистина, ако за някоя точка (x_0, y_0) имаме строги неравенства

$$a<x_0<b,$$
$$f(x_0)<y_0<g(x_0),$$

то около точката (x_0, y_0) може да се избере достатъчно малка околност U по такъв начин, че за всяка точка (x, y) от U да са изпълнени неравенствата (1) (нека читателят сам докаже това), и следователно такава точка (x_0, y_0) е вътрешна за G. По такъв начин, ако една точка (x, y) от G е контурна, в условията (1) трябва да имаме равенство поне на едно място, т. е. такава точка трябва да принадлежи поне на едно от четирите множества, определени в условията

$$x=a,\ f(a)\leq y\leq g(a),$$
$$x=b,\ f(b)\leq y\leq g(b),$$
$$a\leq x\leq b,\qquad y=f(x),$$
$$a\leq x\leq b,\qquad y=g(x).$$

От изложеното се вижда, че контурът на G се съдържа в сумата от тези четири множества. Горната мярка обаче на всяко едно от тези множества е нула, защото първите две от тях са праволинейни отсечки, а третото и четвъртото са графики на непрекъснати функции, чийто аргумент се мени в компактен интервал. От това се вижда, че горната мярка на контура на G е нула. Остава да вземем под внимание, че множеството G е ограничено (нещо, което читателят сам може лесно да докаже, като вземе под внимание, че функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в компактен интервал и следователно ограничени), за да можем да твърдим, че то е измеримо.

В бъдеще често ще срещаме множества, дефинирани с неравенства от вида (1). Ние ще ги наричаме криволинейни трапеци, чиито основи са перпендикулярни на оста x.

След тези предварителни бележки преминаваме към главните въпроси, които имаме да разгледаме в този параграф.

Лема 1. Нека A, B и C са измерими множества, сеченето на всеки две от които е празно, и нека сумата $A+B+C$ е един полузатворен квадрат D. В такъв случай

(2) $$\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)=\nu(D).$$

Доказателство. Засега е ясно съгласно § 17, че

$$\nu(D)\leq\nu(A)+\nu(B)+\nu(C).$$

За да установим равенството (2), избираме положително число ε и покриваме сумата от контурите на A, B и C със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1, C_2, \cdots, C_n$$

по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси $r_1, r_2, \cdots, r_n$ да бъде по-малка от ε.

Ще означим с $\varphi(x, y)$ характеристичната функция на полузатворения правоъгълник Δ, определен от неравенствата

$$p \leq x < q,$$
$$r \leq y < s,$$

и с $\Psi_k(x, y)$ — характеристичната функция на C_k.

Да образуваме спомагателната функция

$$\theta(\Delta) = \nu(\Delta A) + \nu(\Delta B) + \nu(\Delta C) - \nu(\Delta) - \lambda(\Delta), \tag{3}$$

където[1]

$$\lambda(\Delta) = 3\sigma \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, \psi_k(x, y)\, dy \right] dx.$$

Ние ще изберем правоъгълника, определен от неравенствата

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d, \end{aligned} \tag{4}$$

по такъв начин, че да съдържа във вътрешността си всеки един от кръговете $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

Функцията $\theta(\Delta)$ е очевидно полуадитивна (вж. § 16 и § 18). Ние ще покажем, че тя е неположителна около всяка точка на равнината (относно терминологията вж. § 15). И наистина нека точката P е външна за всяко едно от множествата A, B и C. В такъв случай около P може да се избере околност U, която няма общи точки с никое от множествата A, B и C. В такъв случай, ако $\Delta \subset U$, то сеченията ΔA, ΔB и ΔC са празни, поради което

$$\nu(\Delta A) = \nu(\Delta A) = \nu(\Delta C) = 0$$

и следователно $\theta(\Delta) \leq 0$, както това се вижда от (3).

Остава да разгледаме случая, когато P не е външна поне за едно от множествата A, B и C. Нека например P не е външна за A (случаите, когато P не е външна за B или за C, се разглеждат по

[1] Относно дефиницията на σ вж. § 18.

същия начин). В такъв случай P е или вътрешна, или контурна за A.

Да разгледаме случая, когато P е вътрешна за A. В такъв случай около P може да се избере околност U, която се съдържа в A и следователно няма общи точки нито с B, нито с C, защото A няма общи точки нито с B, нито с C (тук ние използуваме обстоятелството, че сечението на всеки две от множествата A, B и C е празно). В такъв случай, ако $\Delta \subset U$, ще имаме $\Delta A = \Delta$, $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$ и следователно $\theta(\Delta) \leq 0$, както това се вижда от (3).

Остана да разгледаме случая, когато P е контурна за A. Но в такъв случай тя ще лежи поне в един от кръговете $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Нека C_k е такъв кръг, който съдържа P. Тъй като кръгът C_k е отворен, ние можем да изберем околност U около P, която да лежи в C_k. В такъв случай, ако $\Delta \subset U$, ще имаме

$$\varphi(x, y)\, \psi_k(x, y) = \varphi(x, y)$$

и следователно[1]

$$\lambda(\Delta) \geq 3\sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, \psi_k(x, y)\, dx \right] dx =$$

$$= 3\sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx = 3\nu(\Delta).$$

По такъв начин ние и в този случай получаваме $\theta(\Delta) \leq 0$, както това се вижда от (3).

И така полуадитивната функция $\theta(\Delta)$ е неположителна около всяка точка на равнината. Това ни дава възможност да приложим основната теорема на интегралното смятане от § 15. По такъв начин ние можем да твърдим, че $\theta(\Delta) \leq 0$ при всеки избор на полузатворения правоъгълник Δ. Специално при $\Delta = D$ получаваме

$$\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) - \nu(D) - \lambda(D) \leq 0. \tag{5}$$

От друга страна,

$$\varphi(x, y)\, \psi_k(x, y) \leq \psi_k(x, y)$$

и следователно съгласно § 16 имаме

$$\lambda(D) \leq 3\sigma \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \left[\int_c^d \psi_k(x, y)\, dy \right] dx = 3\sigma \sum_{k=1}^{n} \pi r_k^2 < 3\sigma\pi\varepsilon,$$

[1] Вж. § 16 и § 18. Тук ние използуваме обстоятелството, че правоъгълникът (4) съдържа C_k, а следователно и Δ.

защото правоъгълникът (4) съдържа кръговете $C_1, C_2, \cdots, C_n$. По такъв начин получаваме от (5)

$$\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)\leq\nu(D)+3\sigma\pi\varepsilon$$

или след граничния преход $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)\leq\nu(D),$$

което заедно с

$$\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)\geq\nu(D)$$

ни дава (2).

Теорема (1). Ако A и B са измерими множества без обща точка, то

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(B). \tag{6}$$

Доказателство. Избираме полузатворен квадрат D, който да съдържа както A, така и B. Това може да се направи, защото множествата A и B са ограничени. Да положим

$$C=D-(A+B).$$

В такъв случай

$$A+B+C=D.$$

Множеството C очевидно е измеримо и сечението на всеки две от множествата A, B и C е празно. По такъв начин съгласно лема 1 имаме

$$\nu(A)+\nu(B)+\nu(C)=\nu(D).$$

От друга страна, имаме очевидно

$$(A+B)+C+0=D,$$

където 0 е празното множество. В такъв случай пак съгласно лема 1 имаме

$$\nu(A+B)+\nu(C)+\nu(0)=\nu(D)$$

и следователно

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(B),$$

защото $\nu(0)=0$.

Забележка. Равенството (6) е получено при предположение, че $AB=0$. Не е трудно обаче да се покаже валидността на по-общото равенство

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(B)-\nu(AB)$$

при единственото предположение, че множествата A и B са измерими без оглед на това, дали те имат общи точки или не. И наистина, като вземем пред вид лесно доказуемите равенства

$$A+B=A+\overline{A}B,$$

$$\overline{A}B+AB=B$$

и се възползуваме от обстоятелството, че както множествата A и $\overline{A}B$, така и множествата $\overline{A}B$ и AB нямат общи точки помежду си, получаваме

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(\overline{A}B),$$

$$\nu(\overline{A}B)+\nu(AB)=\nu(B)$$

и следователно

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(B)-\nu(AB).$$

Така полученият резултат ни учи, че равенството

$$\nu(A+B)=\nu(A)+\nu(B)$$

е валидно[1] и тогава, когато $\nu(AB)=0$, макар сечението AB да не е празно. Така например, ако множествата A и B нямат общи вътрешни точки, то сечението им има мярка нула, защото множествата A и B (по предположение) са измерим и следователно контурите им имат мярка нула.

Теорема 2. Ако C е отворен кръг с радиус r, то

$$\nu(C)=r^2.$$

Доказателство. Покриваме C по произволен начин със система от отворени кръгове $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Нека радиусите им са $r_1, r_2, \cdots, r_n$. Означаваме с $\varphi(x, y)$ характеристичната функция на C, а с $\varphi_k(x, y)$ характеристичната функция на C_k. В такъв случай

$$\varphi(x, y)\leq\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x, y)$$

и следователно

$$\overline{\int_a^b}\left[\overline{\int_c^d}\varphi(x, y)\,dy\right]dx\leq\sum_{k=1}^{n}\overline{\int_a^b}\left[\overline{\int_c^d}\varphi_k(x, y)\,dy\right]dx, \tag{7}$$

[1] Нека припомним, че множествата A и B са измерими.

където $a<b$, $c<d$. Да изберем правоъгълника, определен от неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$
$$c \leq y \leq d$$

по такъв начин, че да съдържа всичките кръгове $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$. В такъв случай неравенството (7) съгласно § 16 ще приема вида

$$\pi r^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \pi r_k^2$$

или

$$r^2 \leq \sum_{k=1}^{n} r_k^2.$$

И така ние виждаме, че числото r^2 е една долна граница на всевъзможните суми $r_1^2+r_2^2+\ldots+r_n^2$. Като вземем под внимание, че $\nu(C)$ е точната, т. е. най-голямата от такива долни граници, получаваме $r^2 \leq \nu(C)$. От друга страна, системата, съставена от единствения кръг C, покрива C и следователно съгласно дефиницията на $\nu(C)$ имаме $\nu(C) \leq r^2$, т. е. окончателно

$$\nu(C)=r^2.$$

Лема 2. Нека A е измеримо множество и $\varphi(x, y)$ е неговата характеристична функция. Ако правоъгълникът, определен от неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$
$$c \leq y \leq d,$$

съдържа A, то[1]

$$\nu(A)=\sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx = \sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx. \tag{8}$$

Доказателство. Избираме едно положително число ε и покриваме контура на A със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси да бъде по-малка от ε.

[1] Относно дефиницията на σ вж. § 18.

Нека Δ е произволен полузатворен правоъгълник и $\psi(x, y)$ е неговата характеристична функция. Да разгледаме двете полуадитивни функции

$$\Theta_1(\Delta)=\nu(\Delta A)-\sigma \int_a^b \left[\int_c^d \psi(x, y)\varphi(x, y)\, dy \right] dx - \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta C_k)$$

$$\Theta_2(\Delta)=\sigma \int_a^b \left[\int_c^d \psi(x, y)\varphi(x, y)\, dy \right] dx - \nu(\Delta A) - \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta C_k).$$

Полуадитивността на тези функции следва от теорема 1 на този параграф и от § 16.

Тези две функции са неположителни около всяка точка P на равнината (относно смисъла на тези думи вж. § 15). Читателят сам може да се убеди в това, като разгледа отделно случаите, когато точката P е външна, вътрешна и контурна за A. Това ни дава право да заключим с помощта на основната теорема на интегралното смятане в равнината от § 15, че $\Theta_1(\Delta) \leq 0$, $\Theta_2(\Delta) \leq 0$ при всеки избор на полузатворения правоъгълник Δ. По такъв начин, ако изберем Δ така, че да съдържа $A+C_1+C_2+\ldots+C_n$, ще получим

$$\nu(A)-\sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx - \sum_{k=1}^{n} \nu(C_k) \leq 0, \tag{9}$$

$$\sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx - \nu(A) - \sum_{k=1}^{n} \nu(C_k) \leq 0. \tag{10}$$

От друга страна, ако означим с r_k радиуса на C_k, ще имаме $\nu(C_k)=r^2k$ и следователно

$$\sum_{k=1}^{n} \nu(C_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 < \varepsilon.$$

По такъв начин получаваме от неравенствата (9) и (10)

$$\nu(A) \leq \sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y) dy \right] dx + \varepsilon,$$

$$\sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx - \varepsilon \leq \nu(A).$$

което след граничния преход $\varepsilon \longrightarrow 0$ ни дава

$$\sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx \leq \nu(A) \leq \sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx.$$

От друга страна, очевидно

$$\sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx \leq \sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx$$

и така получаваме окончателно (8).

Теорема 3. Числото σ, което е дефинирано в § 18, има стойност $\frac{1}{\pi}$.

Доказателство. Нека C е кръг с радиус r и нека $\varphi(x, y)$ е неговата характеристична функция. В такъв случай съгласно лема 2 и съгласно § 16 имаме

$$\nu(C) = \sigma \int_a^b \left[\int_c^d \varphi(x, y)\, dy \right] dx = \sigma \pi r^2,$$

стига правоъгълникът $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ да съдържа C. От друга страна, теорема 2 ни учи, че $\nu(C) = r^2$, т. е. $\sigma\pi = 1$.

Дефиниция. Нека A е ограничено точково множество в равнината. Числото $\pi\nu(A)$ ще наричаме горна Пеано-Жорданова мярка на A и ще го означаваме със символа $\mu(A)$. Специално, ако множеството A е измеримо, ние ще наричаме това число накратко мярка или лице.

От равенството

$$\mu(A) = \pi\nu(A)$$

се вижда, че е в сила следното.

1. Ако A е ограничено множество, то

$$\mu(A) \geq 0.$$

2. Нека A и B са две ограничени множества и $A \subset B$. В такъв случай $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. Ако A и B са две ограничени множества, то

$$\mu(A+B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

4. Нека A е ограничено множество и τ е подобие с модул a. Нека A' е образ на A при τ. В такъв случай

$$\mu(A') = a^2 \mu(A).$$

Специално, ако τ е еднаквост, то $\mu(A') = \mu(A)$.

5. Ако A и B са две измерими множества, то

$$\mu(A+B) + \mu(AB) = \mu(A) + \mu(B).$$

Специално, ако $\mu(AB) = 0$, то

$$\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B).$$

6. Ако Δ е квадрат със страна 1, то

$$\mu(\Delta) = 1.$$

Читателят само лесно ще докаже тези свойства. По-специално пресмятането на лицето на квадрата се извършва с помощта на формула (8).

§ 20. Преобразуване на измерими множества

Нека A и B са две непразни множества в равнината. Да изберем точка P от A и точка Q от B. Дължината на отсечката PQ зависи от избора на точките P и Q. Точната долна граница на тези дължини ще наричаме разстояние между множествата A и B и ще го означаваме със символа $d(A, B)$. По-специално, ако едното от множествата, например B, съдържа само една точка S, вместо $d(A, B)$ ще пишем често пъти $d(A, S)$ и ще го наричаме разстояние от точката S до множеството A. С аналогични означения ще се ползуваме и тогава, когато двете множества A и B съдържат само по една точка.

Лема 1. Нека R е отворено точково множество в равнината и нека A е затворено и ограничено непразно подмножество на R. В такъв случай може да се избере такова положително число δ, че всяка точка, чието разстояние до A е по-малко от δ, да се съдържа в R.

Доказателство. Да допуснем противното. Това значи, че не съществува положително число δ с исканото свойство. По-специално, ако изберем $\delta = \frac{1}{n}$, ще може да се намери точка P_n, която не принадлежи на R и за която имаме

$$d(A; P_n) < \frac{1}{n}.$$

Това от своя страна означава, че съществува точка Q_n от A, за която

$$d(Q_n, P_n) < \frac{1}{n}.$$

Да разгледаме редицата

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

Членовете ѝ принадлежат на ограниченото множество A и следователно ние можем да изберем сходяща подредица

$$Q_{m_1}, Q_{m_2}, \ldots, Q_{m_n}, \ldots,$$

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots$$

Множеството A обаче е затворено, поради което границата Q_0 на избраната подредица принадлежи на A. От друга страна,

$$d(Q_0, P_{m_n}) \leq d(Q_0, Q_{m_n}) + d(Q_{m_n}, P_{m_n}) \leq$$

$$\leq d(Q_0, Q_{m_n}) + \frac{1}{m_n}$$

и следователно редицата

$$P_{m_1}, P_{m_2}, \ldots, P_{m_n}, \ldots$$

клони към Q_0.

Точката Q_0 обаче принадлежи на A и следователно принадлежи на R. Да изберем околност на Q_0, която се съдържа в R. Това може да се направи, защото множеството R е отворено и следователно Q_0 е негова вътрешна точка. Тази околност ще съдържа точките P_{m_n}, когато n е достатъчно голямо, защото $P_{m_n} \to Q_0$. Това обаче не е възможно, защото никоя от точките P_n не принадлежи на R. По такъв начин ние достигнахме до противоречие, с което доказателството е завършено.

Лема 2. Нека A е едно ограничено точково множество в равнината и δ е едно неотрицателно число. Множеството B от точките P на равнината, за които е изпълнено условието

$$d(A, P) \leq \delta,$$

е ограничено и затворено.

Доказателство. Ще покажем първо, че множеството B е ограничено. Нека O е началото на координатната система. Избираме кръг с център в O и радиус r, който съдържа всичките точки на A. Това може да се направи, защото множеството A е ограничено. Нека P е произволна точка от B. Това значи, че

$$d(A, P) \leq \delta$$

и следователно може да се избере точка Q от A, за която

$$d(Q, P) < \delta + 1.$$

В такъв случай

$$d(O, P) \leq d(O, Q) + d(Q, P) \leq r + \delta + 1,$$

с което е установено, че множеството B е ограничено.

Ще покажем сега, че множеството B е затворено. Нека P_0 е контурна точка на B и нека U_n е кръгова околност на P_0 с радиус $\frac{1}{n}$. В такъв случай в U_n ще има поне една точка P_n от B, т. е.

$$d(A, P_n) \leq \delta.$$

Числото $d(A, P_n)$ е точната (т. е. най-голямата) долна граница на множеството M от числата $d(Q, P_n)$, които получаваме, когато Q описва A. Числото

$$d(A, P_n) + \frac{1}{n}$$

е по-голямо от $d(A, P_n)$ и следователно не е долна граница на M. Това ни дава възможност да твърдим, че има точка Q_n от A, за която

$$d(Q_n, P_n) < d(A, P_n) + \frac{1}{n} \leq \delta + \frac{1}{n}.$$

От друга страна,

$$d(A, P_0) \leq d(Q_n, P_0) \leq d(Q_n, P_n) + d(P_n, P_0) \leq$$

$$\leq \delta + \frac{1}{n} + \frac{1}{n},$$

т. е.

$$d(A, P_0) \leq \delta + \frac{2}{n},$$

откъдето след граничния преход $n \to \infty$ получаваме

$$d(A, P_0) \leq \delta,$$

което ни учи, че точката P_0 принадлежи на B. От тези разсъждения се вижда, че множеството B съдържа всичките си контурни точки и следователно е затворено. С това доказателството е завършено.

Лема 3. Нека C е отворен кръг с радиус r и нека функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са дефинирани в C и притежават непрекъснати първи частни производни. Нека освен това в C са изпълнени неравенствата

$$|f'_u(u, v)| \leq M, \quad |f'_v(u, v)| \leq M,$$

$$|g'_u(u, v)| \leq M, \quad |g'_v(u, v)| \leq M,$$

където M е константа. В такъв случай диаметърът на образа C' на C при трансформацията

$$x=f(u, v),$$
$$y=g(u, v)$$

не надминава $4Mr\sqrt{2}$.

Доказателство. Нека (x_1, y_1) и (x_2, y_2) са две точки от C'. Това значи, че съществуват две точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) от C, за които имаме

$$x_1=f(u_1, v_1), \qquad x_2=f(u_2, v_2),$$
$$y_1=g(u_1, v_1), \qquad y_2=g(u_2, v_2).$$

Според теоремата за крайните нараствания имаме

$$x_2-x_1=f(u_2, v_2)-f(u_1, v_1)=$$
$$=(u_2-u_1)f'_u(u', v')+(v_2-v_1)f'_v(u', v'),$$
$$y_2-y_1=g(u_2, v_2)-g(u_1, v_1)=$$
$$=(u_2-u_1)g'_u(u'', v'')+(v_2-v_1)g'_v(u'', v''),$$

където точките (u', v') и (u'', v'') са избрани по подходящ начин върху отсечката $[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]$. По такъв начин получаваме

$$|x_2-x_1|\leq M[|u_2-u_1|+|v_2-v_1|]\leq 4Mr,$$
$$|y_2-y_1|\leq M[|u_2-u_1|+|v_2-v_1|]\leq 4Mr$$

и следователно

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leq 4Mr\sqrt{2}.$$

Точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2) обаче са избрани произволно в C' и следователно диаметърът на C' не надминава $4Mr\sqrt{2}$. С това доказателството е завършено.

Лема 4. Нека функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в някое отворено множество G в равнината. Ще покажем, че образът A' на всяко затворено и ограничено подмножество A на G с мярка нула при трансформацията

$$x=f(u, v),$$
$$y=x(u, v)$$

е също множество с мярка нула.

Доказателство. Избираме положително число η по такъв начин, че точките, чиято разстояние до A е по-малко от η, да се намират в G. Това може да се направи въз основа на лема 1, защото множеството G е отворено, а множеството A е ограничено и затворено. След това означаваме с δ произволно положително число, строго по-малко от η, и разглеждаме множеството B от точките P на равнината, за които

$$d(A, P)\leq\delta.$$

Съгласно лема 2 това множество е ограничено и затворено. Освен това то се съдържа изцяло в G, защото $\delta<\eta$.

След направения избор на δ избираме положително число ε, по-малко от $\frac{\delta^2}{4}$, и покриваме A със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1, C_2, \ldots, C_n,$$

за които сумата от квадратите на радиусите е по-малка от ε. То ва може да се направи, защото A е множество с мярка нула. Очевидно ние можем да предполагаме, че всеки един от кръговете $C_1, C_2, \ldots, C_n$ има обща точка с A, защото, ако това не е изпълнено, достатъчно е да премахнем онези кръгове, които нямат обща точка с A, за да получим нова система от покриващи кръгове, за която сумата от квадратите на радиусите е още по-малка и която притежава исканото свойство. Тези кръгове се съдържат изцяло в B, защото радиусите им са по-малки от $\sqrt{\varepsilon}<\frac{\delta}{2}$ и следователно разстоянието на коя да е точка от тях до A е по-малко от δ.

Множеството B обаче е ограничено и затворено, а производните f'_u, f'_v, g'_u, g'_v са непрекъснати. Това ни дава възможност да твърдим, че тези производни са ограничени. Да означим с M една обща горна граница на техните модули в B. В такъв случай диаметърът на образа C'_ν на C_ν при разглежданата трансформация съгласно лема 3 няма да надминава $4Mr_\nu\sqrt{2}$, където r_ν е радиусът на C_ν. Да построим отворен кръг D_ν, чийто център е коя да е точка на C'_ν и чийто радиус е $16Mr_\nu$. Този кръг съдържа всичките точки на C'_ν. По такъв начин ние получаваме система от отворени кръгове $D_1, D_2, \ldots, D_m$ която покрива A' и за която сумата от квадратите на радиусите е равна на

$$\sum_{\nu=1}^{n} 256\, M^2 r_\nu^2$$

и следователно не надминава $256\ M^2\varepsilon$. Като вземем под внимание, че положителното число ε е произволно, а M не зависи от ε, заключаваме, че A' има мярка нула. С това доказателството е завършено.

Преминаваме към изследване на някои свойства на регулярните трансформации.

Нека

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v) \end{aligned}$$

е регулярна трансформация на някое отворено точково множество G в равнината.

Лема 5. Ако трансформацията (1) е регулярна и множеството A е измеримо и лежи в G заедно с контура си, то образът му е също тъй измеримо множество.

Доказателство. И наистина контурът на всяко множество е затворено множество. По такъв начин ние имаме в G ограничено и затворено множество $K(A)$, чиято мярка е нула. Въз основа на това, което доказахме, можем да твърдим, че мярката на образа му $[K(A)]'$ е нула. От друга страна, A лежи в G заедно с контура си и следователно контурът на образа A' съвпада с множеството $[K(A)]'$, т. е. има мярка нула. По такъв начин, за да се убедим, че множеството A' е измеримо, достатъчно е да покажем, че то е ограничено, нещо, което може да се види, като вземем под внимание, че множеството $A+K(A)$ е ограничено и затворено подмножество на G и следователно образът му

$$[A+K(A)]' = A' + [K(A)]'$$

е ограничено (и затворено) множество. Това е достатъчно, за да можем да твърдим, че множеството A' е също така ограничено. С това доказателството е завършено.

Досега ние предполагахме, че трансформацията (1) е еднократно регулярна в G. От този момент ще предполагаме, че тя е двойно регулярна в G.

Ще докажем следната лема, която ще играе важна роля в по-нататъшните разсъждения.

Нека (u_0, v_0) е една точка от G и нека Δ е един (отворен) квадрат със страни, успоредни на съответните координатни оси, с център в точката (u_0, v_0), разположен заедно с контура си изцяло в G. Да означим с Δ' образа на Δ. Ние ще докажем следната лема: ако D е едно число, по-голямо[1] от 1, то всеки път, когато

[1] Тук се иска да имаме $D>1$, т. е. равенството $D=1$ се изключва.

квадратът Δ е достатъчно малък и вторите частни производни остават ограничени, е изпълнено неравенството[1]

$$\mu(\Delta') \leq D \begin{Vmatrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0) \\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) \end{Vmatrix} \mu(\Delta).$$

Колко малък трябва да бъде квадратът Δ, зависи от трансформацията (1) и от избора на числото D, обаче не зависи от положението на точката (u_0, v_0), стига квадратът Δ да остава в едно фиксирано ограничено и затворено подмножество на G.

Доказателство. Нека

$$(2)\qquad \begin{aligned} u &= F(x, y), \\ v &= G(x, y) \end{aligned}$$

е трансформация, обратна на трансформацията (1). Полагаме за краткост

$$\begin{aligned} x_0 &= f(u_0, v_0), & y_0 &= g(u_0, v_0), \\ a_{11} &= f'_u(u_0, v_0), & a_{12} &= f'_v(u_0, v_0), \\ a_{21} &= g'_u(u_0, v_0), & a_{22} &= g'_v(u_0, v_0), \\ A_{11} &= F'_x(x_0, y_0), & A_{21} &= F'_y(x_0, y_0), \\ A_{12} &= G'_x(x_0, y_0), & A_{22} &= G'_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

В такъв случай, като вземем пред вид, че функциите (1) удовлетворяват уравненията (2), получаваме с помощта на теоремата за диференциране на съставни функции следните равенства:

[1] Символът

$$\begin{Vmatrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0) \\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) \end{Vmatrix}$$

означава абсолютната стойност на детерминантата

$$\begin{vmatrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0) \\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}.$$

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}&=1,\\
a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}&=0,\\
a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}&=0,\\
a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}&=1.
\end{aligned}
$$

Така например първото от тези равенства се получава, като диференцираме спрямо u равенството

$$(4)\qquad u=F(x,\ y),$$

където

$$x=f(u,\ v),\qquad y=g(u,\ v).$$

Второто от равенствата (3) се получава, като диференцираме равенството (4) спрямо v и пр.

Разглеждаме помощната линейна трансформация[1]

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
x-x_0&=[a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)]\sqrt{D},\\
y-y_0&=[a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)]\sqrt{D}.
\end{aligned}
$$

Тази трансформация преобразува квадрата Δ (както това читателят знае от аналитичната геометрия) в някой успоредник Δ''.

Ако решим системите (5) относно $u-u_0$ и $v-v_0$, ще получим[2]

$$u-u_0=[A_{11}(x-x_0)+A_{21}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}},$$

$$v-v_0=[A_{12}(x-x_0)+A_{22}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}}.$$

---

[1] Касае се тук за една афинна трансформация. Читателят е изучавал свойствата на такива трансформации в аналитичната геометрия. В случая разглежданата от нас трансформация не е изродена, защото

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f'_u(u_0,\ v_0) & f'_v(u_0,\ v_0)\\ g'_u(u_0,\ v_0) & g'_v(u_0,\ v_0)\end{vmatrix}\neq 0.$$

[2] Ако умножим двете страни на равенствата (5) съответно с A_{11} и A_{21}, съберем ги и вземем пред вид зависимостите (3), ще получим

$$u-u_0=[A_{11}(x-x_0)+A_{21}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}};$$

аналогично се получава и равенството

$$v-v_0=[A_{12}(x-x_0)+A_{22}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Да означим с $2d$ страната на квадрата Δ. Една точка с координати $(u,\ v)$ принадлежи на Δ тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата

$$|u-u_0|<d,\quad |v-v_0|<d.$$

Оттук заключаваме, че една точка с координати $(x,\ y)$ принадлежи[1] на Δ'' тогава и само тогава, когато

$$|A_{11}(x-x_0)+A_{21}(y-y_0)|<d\sqrt{D}.$$

$$|A_{12}(x-x_0)+A_{22}(y-y_0)|<d\sqrt{D}.$$

Ние ще докажем, че множеството Δ' лежи изцяло в Δ'', когато d е достатъчно малко. За тази цел е достатъчно да покажем, че всичките точки с координати

$$[f(u,\ v),\ g(u,\ v)]$$

лежат в Δ'', когато $|u-u_0|<d$ и $|v-v_0|<d$. Ние ще направим това, като покажем, че са изпълнени неравенствата

$$(6)\qquad |A_{11}[f(u,\ v)-x_0]+A_{21}[g(u,\ v)-y_0]|<d\sqrt{D},$$

$$(7)\qquad |A_{12}[f(u,\ v)-x_0]+A_{22}[g(u,\ v)-y_0]|<d\sqrt{D}.$$

Формулата на Тейлор ни дава

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
f(u,v)=f(u_0,v_0)&+f'_u(u_0,v_0)(u-u_0)+f'_v(u_0,v_0)(v-v_0)+\\
&+\frac{1}{2}[f''_{uu}(u',v')(u-u_0)^2+2f''_{uv}(u',v')(u-u_0)(v-v_0)+f''_{vv}(u',v')(v-v_0)^2],
\end{aligned}
$$

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
g(u,\ v)=g(u_0,\ v_0)&+g'_u(u_0,\ v_0)(u-u_0)+g'_v(u_0,\ v_0)(v-v_0)+\\
&+\frac{1}{2}[g''_{uu}(u'',v'')(u-u_0)^2+2g''_{uv}(u'',v'')(u-u_0)(v-v_0)+\\
&+g''_{vv}(u'',v'')(v-v_0)^2],
\end{aligned}
$$

---

[1] Нека припомним, че една точка $(x,\ y)$ принадлежи на Δ'' тогава и само тогава, когато точката $(u,\ v)$, където

$$u-u_0=[A_{11}(x-x_0)+A_{21}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}},$$

$$v-v_0=[A_{12}(x-x_0)+A_{22}(y-y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}}$$

принадлежи на Δ.

където (u', v') и (u'', v'') са точки, подходящо избрани върху отсечката $[(u, v), (u_0, v_0)]$. Равенствата (8) и (9) могат да се напишат по-кратко така:

$$f(u, v)=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u', v'),$$

$$g(u, v)=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u'', v'').$$

Като заместим оттук $f(u, v)$ и $g(u, v)$ в (6) и (7) и вземем пред вид зависимостите (3), ще получим

$$\left|u-u_0+\frac{A_{11}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u', v')+\right.$$
$$\left.+\frac{A_{21}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 g(u'', v'')\right|<a\sqrt{D}, \tag{10}$$

$$\left|v-v_0+\frac{A_{12}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u', v')+\right.$$
$$\left.+\frac{A_{22}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 g(u'', v'')\right|<d\sqrt{D}. \tag{11}$$

Да означим с K една горна граница на абсолютната стойност на производните f''_{uu}, f''_{uv}, f''_{vv}. В такъв случай получаваме

$$\left|u-u_0+\frac{A_{11}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u', v')+\right.$$
$$\left.+\frac{A_{21}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 g(u'', v'')\right|\leq|u-u_0|+$$
$$+\left|\frac{A_{11}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u', v')\right|+$$
$$+\left|\frac{A_{21}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 g(u'', v'')\right|<d+$$
$$+\frac{|A_{11}|+|A_{21}|}{2}\,4Kd^2=d+2K[|A_{11}|+|A_{21}|]d^2$$

и аналогично

$$\left|v-v_0+\frac{A_{12}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u', v')+\right.$$
$$\left.+\frac{A_{22}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 g(u'', v'')\right|<d+2K[|A_{12}|+|A_{22}|]d^2.$$

Оттук заключаваме, че неравенствата (10) и (11) сигурно ще бъдат изпълнени, ако

$$1+2K[|A_{11}|+|A_{21}|]d<\sqrt{D};$$
$$1+2K[|A_{12}|+|A_{22}|]d<\sqrt{D}.$$

Последните неравенства обаче наистина са изпълнени, ако d е достатъчно малко, защото $D>1$.

По този начин ние доказахме, че при всички достатъчно малки стойности на d имаме

$$\Delta'\subset\Delta''$$

и следователно

$$\mu(\Delta')\leq\mu(\Delta''). \tag{12}$$

Читателят знае от аналитичната геометрия, че лицето на триъгълника с върхове (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) е равно на абсолютната стойност на детерминантата

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & 1\\ \xi_2 & \eta_2 & 1\\ \xi_3 & \eta_3 & 1\end{vmatrix},$$

която може да се преобразува още по следния начин:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & 1\\ \xi_2 & \eta_2 & 1\\ \xi_3 & \eta_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\xi_1-\xi_3 & \eta_1-\eta_3 & 0\\ \xi_2-\xi_3 & \eta_2-\eta_3 & 0\\ \xi_3 & \eta_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\xi_1-\xi_3 & \eta_1-\eta_3\\ \xi_2-\xi_3 & \eta_2-\eta_3\end{vmatrix}.$$

Ние можем да използуваме това, за да пресметнем лицето на успоредника Δ'', върховете[1] на който имат следните координати:

[1] Тези върхове са образи съответно на точките

$$(u_0+d, v_0-d), (u_0-d, v_0+d), (u_0-d, v_0-d), (u_0+d, v_0+d)$$

при трансформацията

$$x-x_0=[a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)]\sqrt{D},$$
$$y-y_0=[a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)]\sqrt{D}.$$

(13) $(a_{11}\, d\sqrt{D}-a_{12}\, d\sqrt{D},\quad a_{21}\, d\sqrt{D}-a_{22}\, d\sqrt{D})$;

(14) $(-a_{11}\, d\sqrt{D}+a_{12}\, d\sqrt{D},\quad -a_{21}\, d\sqrt{D}+a_{22}\, d\sqrt{D})$;

(15) $(-a_{11}\, d\sqrt{D}-a_{12}\, d\sqrt{D},\quad -a_{21}\, d\sqrt{D}-a_{22}\, d\sqrt{D})$;

(16) $(a_{11}\, d\sqrt{D}+a_{12}\, d\sqrt{D},\quad a_{21}\, d\sqrt{D}-a_{22}\, d\sqrt{D})$.

Оттук заключаваме, че лицето[1] на успоредника Δ'' има стойност

$$\begin{Vmatrix} 2a_{11}\, d\sqrt{D} & 2a_{21}\, d\sqrt{D} \\ 2a_{12}\, d\sqrt{D} & 2a_{22}\, d\sqrt{D} \end{Vmatrix} = 4d^2 D \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = D \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \mu(\Delta).$$

Този резултат ни дава възможност да представим неравенството (12) във вида

$$\mu(\Delta') \leq D \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \mu(\Delta),$$

с което интересуващата ни лема е установена.

Ние ще използуваме доказаната лема, за да изведем следната теорема, която ще ни бъде необходима по-късно:

Ако (1) е една двойно регулярна трансформация, чиято функционална детерминанта удовлетворява неравенствата

$$m \leq \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \leq M$$

във всички точки на едно измеримо множество A, което лежи в G заедно с контура си[2], то са изпълнени неравенствата[3]

(17) $$m\mu(A) \leq \mu(A') \leq M\mu(A).$$

Доказателство. Достатъчно е да покажем валидността само на неравенството

$$\mu(A') \leq M\mu(A),$$

защото оттук ще следва вече валидността и на неравенството

$$m\mu(A) \leq \mu(A').$$

[1] Това лице е два пъти по-голямо от лицето на триъгълника, който е образуван например от точките (13), (14) и (15).

[2] Както казахме в началото на този параграф, с G е означено отворено множество, в което са дефинирани функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$.

[3] Както винаги досега, и този параграф ние означаваме с A' образа на A. С $\mu(A)$ и $\mu(A')$ са означени съответните лица.

За да се убедим в това, разглеждаме обратната трансформация

$$u = F(x, y),$$
$$v = G(x, y)$$

на трансформацията (1). В такъв случай от лесно проверимото тъждество[1]

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1$$

получаваме

$$\left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right| \leq \frac{1}{m}$$

и следователно

$$\mu(A) \leq \frac{1}{m}\mu(A')$$

или

$$m\mu(A) \leq \mu(A').$$

И така въпросът се свежда към доказателство на неравенството

$$\mu(A') \leq M\mu(A).$$

Ние ще извършим това доказателство от противното. Да допуснем, че имаме

$$\mu(A') > M\mu(A).$$

Избираме едно число $D > 1$ толкова близо до 1, че да имаме все още

$$\mu(A') > DM\mu(A).$$

Покриваме контура на A' със сума R' от краен брой отворени квадрати, които лежат заедно с контура си в G' по такъв начин, че да имаме

(18) $$\mu(R') + MD\mu(A) < \mu(A').$$

[1] Това тъждество може да се докаже така:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Това може да се направи, защото множеството A' е измеримо и следователно контурът му има мярка нула.[1]

Покриваме съвкупността A с квадрата Δ, страните на който са успоредни на съответните координатни оси, като към този квадрат причисляваме само онези контурни точки, които лежат върху най-долната му страна без десния й край и най-лявата му страна без горния й край. Делим квадрата Δ на четири равни части S_1,

[1] Тук ние искаме всеки един от покриващите квадрати да лежи в G' заедно с контура си. Това сигурно ще бъде изпълнено, ако покриващите квадрати са достатъчно малки и всеки един от тях съдържа поне една контурна точка на A', защото множеството G' е отворено и съдържа контура на A'. И наистина, ако допуснем противното, ще можем да изберем една редица от квадрати

$$C_1, C_2, C_3, \ldots,$$

размерите на които клонят към нула, като при това всеки един от тези квадрати съдържа поне една точка от контура на A' и поне една точка, която не принадлежи на G'. Тази редица от квадрати ни дава възможност да дефинираме точка, която е контурна за A' и не е вътрешна за G'. По този начин ние достигаме до исканото противоречие.

Накрая нека отбележим, че действително можем да покрием контура на A' със система от краен брой квадрати по такъв начин, че размерите на всеки един от покриващите квадрати да не надминава едно отнапред избрано положително число δ. За целта е достатъчно да изберем една каква да е система от покриващи квадрати $B_1, B_2, \ldots, B_p$, да разделим всеки един от тях на квадратчета със страни, по-малки от $\frac{\delta}{2}$ и да изхвърлим онези от тях, които нямат общи точки с контура на A'. Така получената система от квадратчета

$$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$$

покрива целия контур на A', но може да се случи евентуално някоя от контурните точки на A' да не бъде вътрешна за никой от покриващите квадрати. За да имаме система от отворени квадрати, страните на които са по-малки от δ, която също тъй покрива контура на A', заменяме всеки един от покриващите квадрати D_ν с отворен квадрат R_ν, центърът на който съвпада с центъра на D_ν, а страните на който са успоредни на съответните страни на D_ν и два пъти по-големи от тях. При това можем да си осигурим сумата от лицата на квадратите R_ν да бъде произволно малка. И наистина, ако ε едно какво да е положително число, то избирайки квадратите $B_1, B_2, \ldots, B_p$ така, че да имаме

$$\sum_{\nu=1}^{p} \mu(B_\nu) < \frac{\varepsilon}{4},$$

получаваме

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu(D_\nu) < \frac{\varepsilon}{4}$$

и следователно

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu(R_\nu) < \varepsilon.$$

S_2, S_3, S_4 посредством средните линии, към които също тъй причисляваме само онези контурни точки, които лежат само върху най-долните им страни без десните им краища и най-левите им страни без горните им краища. По този начин ние си осигуряваме, че никои две от четвъртинките S_1, S_2, S_3, S_4 нямат общи точки, но сумата им представлява квадрата Δ. Измежду тези четвъртинки има поне една, да я означим с Δ_1, за която е валидно неравенството

$$\mu[(R\Delta_1)'] + MD\,\mu(A\Delta_1) < \mu[(A\Delta_1)'],$$

където R е множеството, което се изобразява върху R' при трансформацията (1). И наистина, ако допуснем противното, получаваме

$$\mu[(RS_1)'] + MD\,\mu(AS_1) \geqq \mu[(AS_1)'],$$
$$\mu[(RS_2)'] + MD\,\mu(AS_2) \geqq \mu[(AS_2)'],$$
$$\mu[(RS_3)'] + MD\,\mu(AS_3) \geqq \mu[(AS_3)'],$$
$$\mu[(RS_4)'] + MD\,\mu(AS_4) \geqq \mu[(AS_4)']$$

и като съберем тези неравенства, намираме

$$\mu(R') + MD\,\mu(A) \geqq \mu(A'),$$

което противоречи на неравенството (18). Повтаряйки тези разсъждения, получаваме безкрайна редица от квадрати

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots,$$

страните на които клонят към нула и за които са изпълнени неравенствата

$$\mu[(R\Delta_n)'] + MD\,\mu(A\Delta_n) < \mu[(A\Delta_n)']. \tag{19}$$

Както знаем, има една точка P, която лежи във вътрешността или по контура на всеки един от тези квадрати. Точката P не може да бъде външна за A, защото в противен случай сечението $A\Delta_n$ би било празно при всички достатъчно големи стойности на n и неравенството (19) би приело вида

$$\mu[(R\Delta_n)'] < 0,$$

което е абсурд. От друга страна, точката P не може да бъде контурна за A, защото в противен случай тя би била вътрешна[1] за R и сечението $R\Delta_n$ би се редуцирало на Δ_n при всички достатъчно големи стойности на n и в такъв случай неравенството (19) би приело вида

$$\mu(\Delta_n') + MD\,\mu(A\Delta_n) < \mu[(A\Delta_n)'],$$

[1] Това множество е съставено само от вътрешни точки (т. е. отворено), защото множеството R' е съставено само от вътрешни точки.

което не е възможно, защото

$$(A\Delta_n)' \subset \Delta_n'$$

и следователно

$$\mu[(A\Delta_n)'] \leq \mu(\Delta_n').$$

От направените дотук разсъждения заключаваме, че точката P е непременно вътрешна за A. В такъв случай при достатъчно големи стойности на n сечението $A\Delta_n$ се редуцира на Δ_n и неравенството (19) приема вида

$$\mu[(R\Delta_n)'] + MD\mu(\Delta_n) < \mu(\Delta_n'),$$

откъдето следва

$$MD\mu(\Delta_n) < \mu(\Delta_n')$$

и толкова повече

$$(20) \qquad D\begin{vmatrix} f_u'(u_0, v_0) & f_v'(u_0, v_0) \\ g_u'(u_0, v_0) & g_v'(u_0, v_0) \end{vmatrix} \mu(\Delta_n) < \mu(\Delta_n'),$$

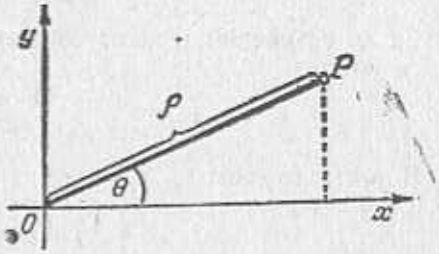
където (u_0, v_0) са координати на центъра на Δ_n. Ние обаче знаем от лемата, която доказахме по-горе, че неравенството (20) е сигурно нарушено, когато размерите на квадрата Δ_n са достатъчно малки, защото вторите частни производни на $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са ограничени поне в $A+K(A)$. Така достигнахме до исканото противоречие и завършихме доказателството на интересуващата ни теорема.

§ 21. Полярни координати

Нека (x, y) са декартовите координати на една точка P. Числата ρ и θ, които са свързани с x и y посредством зависимостите[1]

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\theta, \\ \rho &\geq 0, \end{aligned}$$

се наричат полярни координати на точката P. Геометричният смисъл на тези координати е прост: ρ представлява разстоянието на точката P до началото O на координатната система, а θ е така нареченият полярен ъгъл, т. е. кой да е от ъглите, на който трябва да се завърти положителната част на оста Ox, за да се слее с лъча OP (вж. черт. 8).



Черт. 8

Не е трудно да се убедим по чисто аналитичен път (т. е. без помощта на геометрични съображения), че системата (1) има наистина решение[1] при всеки избор на (x, y), като при това ρ е определено еднозначно, а полярният ъгъл θ е определен многозначно. Ние ще започнем с въпроса за единственост. Като повдигнем в квадрат и съберем почленно равенствата

$$x = \rho\cos\theta,$$

$$y = \rho\sin\theta,$$

получаваме

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

а като вземем пред вид още условието $\rho \geq 0$, намираме

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

При $x^2+y^2=0$ можем да дадем на θ очевидно съвсем произволна стойност. При $x^2+y^2 \neq 0$ имаме

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Като се възползуваме от този резултат и от условието $y = \rho\sin\theta$, ние ще покажем, че θ може да се представи във вида[2]

$$(3) \qquad \theta = 2k\pi + \varepsilon \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

където k е едно цяло число, а $\varepsilon = 1$ при $y \geq 0$ и $\varepsilon = -1$ при $y < 0$. И наистина не е трудно да се покаже, че има цяло число k (зависещо, разбира се, от θ), за което са изпълнени неравенствата

$$-\pi < \theta - 2k\pi \leq \pi$$

---

[1] По-общо, ако ни са дадени две функции

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v), \end{aligned}$$

то числата (u, v), които са свързани с (x, y) посредством равенството (2), се наричат криволинейни координати на точката, чиито декартови координати са (x, y). Равенствата (2) се наричат трансформачни формули, които свързват криволинейните координати (u, v) с декартовите координати (x, y).

[1] Т. е. че всяка точка има полярни координати.

[2] При $y=0$ това представяне не е еднозначно, защото в този случай ние бихме могли да вземем и $\varepsilon = -1$.

или, което е същото,

$$\frac{\theta-\pi}{2\pi}\leqq k<\frac{\pi+\theta}{2\pi}.$$

За да се убедим в това, означаваме с k най-малкото цяло число, за което

$$\frac{\theta-\pi}{2\pi}\leqq k.$$

В такъв случай

$$k-1<\frac{\theta-\pi}{2\pi}$$

или

$$k<\frac{\theta-\pi}{2\pi}+1=\frac{\theta+\pi}{2\pi}.$$

Полагаме

$$\alpha=|\theta-2k\pi|.$$

Очевидно имаме

$$0\leqq\alpha\leqq\pi,$$

$$\cos\alpha=\cos|\theta-2k\pi|=\cos(\theta-2k\pi)=\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

и следователно

$$\alpha=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Оттук получаваме

$$|\theta-2k\pi|=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

или още

$$\theta-2k\pi=\varepsilon\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

където $\varepsilon=\pm1$, и най-сетне

$$\theta=2k\pi+\varepsilon\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Като вземем пред вид уравнението $y=\rho\sin\theta$, намираме

$$y=\varepsilon\rho\sin\left(\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\varepsilon\rho\sqrt{1-\left[\cos\left(\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]^2}=$$

$$=\varepsilon\rho\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}=\varepsilon|y|.$$

Оттук заключаваме, че $\varepsilon=1$, когато $y>0$, и $\varepsilon=-1$, когато $y<0$. При $y=0$ имаме или

$$\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

или

$$\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\pi$$

в зависимост от знака на x. От това заключаваме, че при $y=0$ можем да изберем както $\varepsilon=1$, така и $\varepsilon=-1$.

Сега вече не е трудно да се покаже, че всяка точка има полярни координати. И наистина при $x^2+y^2\neq0$ числата

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \tag{4}$$

$$\theta=2k\pi+\varepsilon\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

където k е произволно цяло число, $\varepsilon=1$ при $y\geqq0$ и $\varepsilon=-1$ при $y<0$ са добре дефинирани, защото числото

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

не надминава по абсолютна стойност единица и следователно принадлежи на дефиниционната област на функцията $\arccos u$. Със заместване се проверява непосредствено, че числата (4) удовлетворяват системата (1). За да получим едно решение при $x^2+y^2=0$, избираме, както казахме по-горе, $\rho=0$ и θ произволно.

Не е трудно да се покаже, че измежду полярните ъгли на една точка има (поне) един, който удовлетворява неравенствата

$$-\pi<\theta\leqq\pi.$$

За да се убедим в това, достатъчно е в равенството (3) да изберем $k=0$. Такъв полярен ъгъл има само един, когато $x^2+y^2\neq0$, защото равенството (3) ни учи, че в този случай разликата на два полярни ъгъла на една и съща точка представлява целочислено кратно на 2π.

Аналогично може да се покаже, че при $x^2+y^2\neq0$ има един и само един полярен ъгъл, който удовлетворява неравенствата

$$0\leqq\theta<2\pi$$

и пр. Нека читателят сам си уясни геометричната страна на въпросите, които ние разгледахме сега.

Задачи

1. Да се покаже, че една различна от началото точка (x, y) лежи върху кривата (Γ) с уравнение

$$(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2) \tag{5}$$

тогава и само тогава, когато полярните ѝ координати удовлетворяват уравнението

$$\rho^2=a\cos 2\theta. \tag{6}$$

Забележка. Уравнението (6) се нарича уравнение на кривата (Γ) в полярни координати. Това уравнение се получава от уравнението (5), като заместим x и y с равните им от трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta.$$

2. Нека

$$x=x(t),$$
$$y=y(t)$$

са две диференцуеми функции на t с непрекъснати производни и интервала $a\leq t\leq b$, удовлетворяващи условието $x^2(t)+y^2(t)\neq 0$, и нека θ_0 е (кой да е) полярен ъгъл на точката $[x(a), y(a)]$. Покажете, че двете функции

$$\theta(t)=\theta_0+\int_a^t \frac{x(u)\,y'(u)-y(u)\,x'(u)}{x^2(u)+y^2(u)}\,du, \tag{7}$$

$$\rho(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$$

удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} x(t)&=\rho(t)\cos\theta(t),\\ y(t)&=\rho(t)\sin\theta(t),\\ \theta(a)&=\theta_0 \end{aligned} \tag{8}$$

и няма други диференцуеми функции, които да удовлетворяват тези условия в същия интервал.

Упътване. За да установите единствеността, покажете, че

$$x'=\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta\theta',$$
$$y'=\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta\theta'$$

и следователно

$$\theta'=\frac{xy'-yx'}{\rho^2},$$

където

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

За да покажете, че функциите (7) наистина удовлетворяват условията (8), образувайте помощните функции

$$u=\cos\theta(t), \tag{9}$$
$$v=\sin\theta(t),$$

$$\xi=\frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}},$$

$$\eta=\frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} \tag{10}$$

и покажете, че

$$u'=-v\theta',$$
$$v'=u\theta',$$
$$\xi'=-\eta\theta',$$
$$\eta'=\xi\theta'.$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че двете функции

$$f(t)=u\xi+v\eta,$$
$$g(t)=u\eta-v\xi$$

са константи, като покажете, че $f'(t)=g'(t)=0$. За да пресметнете стойностите на тези константи, положете $t=a$. Това ще ви даде

$$u\xi+v\eta=1,$$
$$u\eta-v\xi=0.$$

Като решите тази система относно u и v и имаите пред вид, че $\xi^2+\eta^2=1$ ще получите $u=\xi$, $v=\eta$, откъдето вече лесно се доказва с помощта на равенствата (7), (9), (10), че

$$x(t)=\rho(t)\cos\theta(t),$$
$$y(t)=\rho(t)\sin\theta(t),$$
$$\theta(a)=\theta_0.$$

§ 22. Пресмятане на лица с помощта на определени интеграли

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и приема само неотрицателни стойности в него. Ние ще си поставим за задача да пресметнем лицето σ на частта G от равнината,[1] която е заградена от графиката

[1] Нека читателят сам докаже, че множеството G е измеримо. За целта е достатъчно да се покаже, че то е ограничено и контурът му има мярка нула. Това не е трудно да се направи. Така например, за да покажем, че графиката на функцията $y=f(x)$ има мярка нула, бихме могли да постъпим по следния начин: избираме едно положително число ε и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

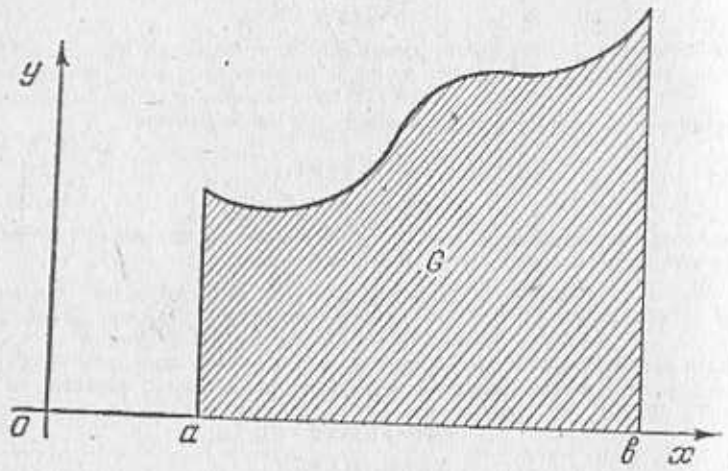
по такъв начин, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от ε; това, както знаем, може да се направи, защото функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$; означаваме с M_ν и m_ν съответно точната горна и точната долна граница на функцията $f[x)$ в подинтервала $[x_{\nu-1}, x_\nu]$; правоъгълниците

$$x_{\nu-1}\leq x\leq x_\nu,$$
$$m_\nu\leq y\leq M_\nu$$

на функцията $y=f(x)$ и от правите $x=a$, $x=b$, $y=0$ (вж. черт. 9). По-точно G е множеството на точките (x, y), които удовлетворяват неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$

$$0 \leq y \leq f(x).$$



Черт. 9

За да пресметнем лицето σ, делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdot\cdot\cdot<x_n=b$$

и означаваме с M_ν и m_ν съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{\nu-1}, x_\nu]$. Да разгледаме съответната голяма и съответната малка сума на Дарбу

очевидно покриват цялата графика Γ на функцията $y=f(x)$ й следователно

(1) $$\mu(\Gamma) \leq \sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

където $\mu(\Gamma)$ означава горната мярка на Пеано — Жордан на графиката Γ на функцията $y=f(x)$. От неравенството (1) получаваме

$$\mu(\Gamma) \leq \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon(x_\nu - x_{\nu-1}) = \varepsilon(b-a).$$

Както вземем пред вид, че положителното число ε е произволно, а $\mu(\Gamma)$ е неотрицателно и не зависи от ε, получаваме $\mu(\Gamma)=0$.

$$S=\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

$$s=\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Очевидно имаме

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Неравенството

$$\sigma \leq S$$

ни учи, че лицето σ е една долна граница на множеството от големите суми S. Като вземем пред вид, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

е точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми, получаваме

$$\sigma \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Аналогично намираме

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \sigma$$

или още

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \sigma \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

От друга страна, функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и следователно е интегруема в него, т. е.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Това ни дава основание да заключим, че

$$\sigma = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

или още

$$\sigma=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример. Да се намери лицето σ на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ако означим с I лицето на половината от елипсата, която е разположена над оста x, имаме

$$\sigma=2I$$

и следователно

$$\sigma=2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

Полагаме $x=a\cos t$. Това ни дава

$$\sigma=2ab\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=$$

$$=2ab\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=2ab\left|\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right|_0^{\pi}=\pi ab.$$

В някои случаи е по-удобно да се търсят лицата, като си служим с полярните координати. Така с помощта на интеграли ние можем да намерим лицето на сектор, дефиниран с неравенствата

$$\alpha\leq\theta\leq\beta,$$

$$\rho\leq f(\theta),$$

където ρ и θ са полярни координати, $f(\theta)$ е една непрекъсната и неотрицателна функция в затворения интервал $\alpha\leq\theta\leq\beta$, дължината на който не надминава 2π (вж. черт. 10).

Ще започнем с най-простия случай, когато имаме кръговия сектор

$$0\leq\theta\leq\alpha,$$

$$\rho\leq r,$$

където $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (вж. черт. 11).

В декартови координати този сектор може да се дефинира с помощта на неравенствата

$$0\leq x\leq r,$$

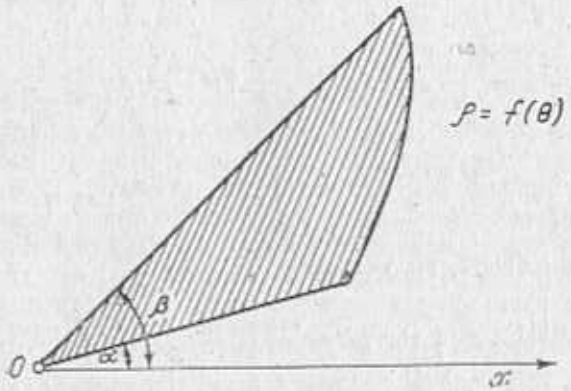
$$0\leq y\leq\varphi(x),$$

където[1]

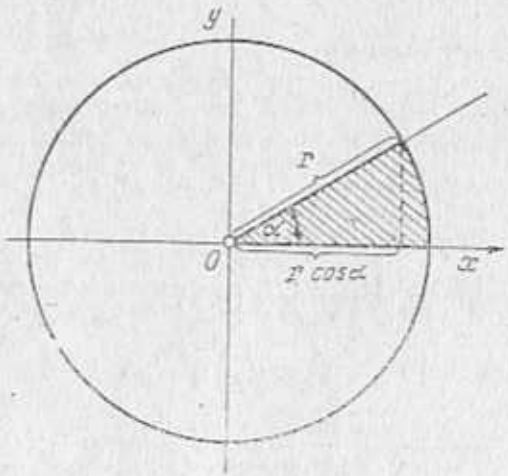
$$\varphi(x)=x\operatorname{tg}\alpha$$

при $0\leq x\leq r\cos\alpha$ и

$$\varphi(x)=\sqrt{r^2-x^2}$$



Черт. 10



Черт. 11

при $r\cos\alpha\leq x\leq r$. Това се вижда веднага геометрически[2] (вж.

[1] Или другояче $\varphi(x)$ е по-малкото от двете числа $x\operatorname{tg}\alpha$ и $\sqrt{r^2-x^2}$.

[2] Но може, разбира се, да се установи чисто аналитично например по следния начин: от неравенствата $0\leq\theta\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$ получаваме

$$y=\rho\sin\theta=x\operatorname{tg}\theta\leq x\operatorname{tg}\alpha.$$

черт. 11). Този резултат ни позволява да пресметнем лицето σ на разглеждания сектор по следния начин:

$$\sigma=\int_0^r \varphi(x)\,dx=\int_0^{r\cos\alpha}\varphi(x)\,dx+\int_{r\cos\alpha}^{r}\varphi(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{r\cos\alpha} x\,\mathrm{tg}\,\alpha\,dx+\int_{r\cos\alpha}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=$$

$$=\frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{2}+\int_{r\cos\alpha}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Полагайки $x=r\cos t$, получаваме

$$\sigma=\frac{r^2\cos\alpha\,\mathrm{s}\sin\alpha}{2}+r^2\int_0^{\alpha}\sin^2 t\,dt=\frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{2}+\frac{r^2}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{r^2\alpha}{2}.$$

а от неравенството $\rho\leq r$ получаваме

$$y=\sqrt{\rho^2-x^2}\leq\sqrt{r^2-x^2}$$

и следователно

$$y\leq\varphi(x).$$

От друга страна, очевидно имаме $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x\leq r$, т. е.

(2)
$$0\leq x\leq r,$$
$$0\leq y\leq\varphi(x).$$

Обратно, ако ни са дадени неравенствата (2), то

$$y\leq x\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$
$$y\leq\sqrt{r^2-x^2},$$

откъдето намираме

$$\sin\theta\leq\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

(3)
$$\rho\sin\theta\leq\sqrt{r^2-\rho^2\cos^2\theta},$$

където можем да предполагаме, че $0\leq\theta\leq 2\pi$. От друга страна, като вземем пред вид неравенствата $x\geq 0, y\geq 0$, получаваме $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. Този резултат и неравенствата (3) ни дават

$$\mathrm{tg}\,\theta\leq\mathrm{tg}\,\alpha,$$
$$\rho^2\sin^2\theta\leq r^2-\rho^2\cos^2\theta$$

и следователно

$$\theta\leq\alpha,$$
$$\rho\leq r.$$

След всичко направено ние можем без труд да пресметнем и лицето S на кръговия сектор

(4)
$$\alpha\leq\theta\leq\beta,$$

стига да имаме $\beta<\frac{\pi}{2}$. И наистина

(5)
$$S=\frac{r^2\beta}{2}-\frac{r^2\alpha}{2}=\frac{r^2}{2}(\beta-\alpha).$$

При направения извод ние предполагахме, че секторът (4) е разположен в първия квадрант. Ние можем обаче да се освободим от това предположение, като вземем пред вид, че от дефиницията, която дадохме на понятието лице, се вижда, че всеки две сходни точкови множества имат една и съща горна мярка на Пеано — Жордан (и са едновременно измерими или едновременно неизмерими). По този начин ние виждаме, че формулата (5) е валидна и тогава, когато секторът не е разположен в първия квадрант, обаче е налице условието $\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$. Най-сетне и това условие не е съществено, защото какъвто и да бъде секторът (4), подчинен на единственото условие да имаме $\beta-\alpha\leq 2\pi$, той може да бъде представен като сума от сектори, централните ъгли на които са по-малки от $\frac{\pi}{2}$. По този начин ние установихме общата валидност на формулата (5).

След тази подготовка ние можем да преминем към общата задача за пресмятане на лицето σ на сектор, зададен в полярни координати с помощта на неравенствата

$$\alpha\leq\theta\leq\beta,$$
$$\rho\leq f(\theta),$$

където $f(\theta)$ е една непрекъсната и неотрицателна функция в затворения интервал $[\alpha,\beta]$, дължината на който не надминава 2π (вж. черт. 10).

За тази цел делим интервала $[\alpha,\beta]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n=\beta$$

и означаваме с R_ν и r_ν точната горна и точната долна граница на $f(\theta)$ в подинтервала $[\theta_{\nu-1},\theta_\nu]$. Очевидно секторът

(6)
$$\theta_{\nu-1}\leq\theta\leq\theta_\nu,$$
$$\rho\leq f(\theta)$$

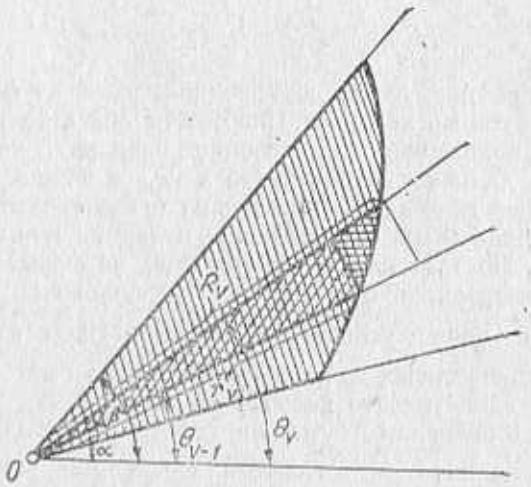
лежи изцяло в сектора

(7)
$$\theta_{\nu-1}\leq\theta\leq\theta_\nu,$$
$$\rho\leq R_\nu$$

и съдържа изцяло сектора

(8) $$\theta_{\nu-1}\leq\theta\leq\theta_\nu,$$
$$\rho\leq r_\nu$$

(вж. черт. 12).



Черт. 12

Да означим със σ_ν лицето на сектора (6). В такъв случай, сравнявайки лицата на трите сектора (6), (7), (8), получаваме неравенствата

$$\frac{r_\nu^2}{2}(\theta_\nu-\theta_{\nu-1})\leq\sigma_\nu\leq\frac{R_\nu^2}{2}(\theta_\nu-\theta_{\nu-1})$$

и следователно

(9) $$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{r_\nu^2}{2}(\theta_\nu-\theta_{\nu-1})\leq\sigma\leq\sum_{\nu=1}^{n}\frac{R_\nu^2}{2}(\theta_\nu-\theta_{\nu-1}).$$

От друга страна, не е трудно да се види, че $\frac{R_\nu^2}{2}$ е точната горна, а $\frac{r_\nu^2}{2}$ е точната долна граница на функцията $\frac{f^2(\theta)}{2}$ в подинтервала $[\theta_{\nu-1}, \theta_\nu]$. Неравенствата (9) ни учат, че лицето σ е една долна граница на множеството на големите суми на Дарбу за функцията $\frac{f^2(\theta)}{2}$. Като вземем пред вид, че

$$\int_\alpha^\beta\frac{f^2(\theta)}{2}\,d\theta$$

е точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми, получаваме

(10) $$\sigma\leq\int_\alpha^\beta\frac{f^2(\theta)}{2}\,d\theta.$$

Аналогично намираме

(11) $$\int_\alpha^\beta\frac{f^2(\theta)}{2}\,d\theta\leq\sigma.$$

От друга страна, функцията $\frac{f^2(\theta)}{2}$ е непрекъсната и следователно е интегруема, т. е.

$$\underline{\int_\alpha^\beta}\frac{f^2(\theta)}{2}\,d\theta=\overline{\int_\alpha^\beta}\frac{f^2(\theta)}{2}\,d\theta.$$

Това равенство и неравенствата (10) и (11) ни дават

$$\sigma=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta.$$

Пример 1. Да се намери лицето σ на кардиоидата

$$\rho=a(1+\cos\theta),\ a>0$$

(вж. черт. 13).

Решение.

$$\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{2}\Big|\theta+2\sin\theta\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta=$$

$$=a^2\pi+\frac{a^2}{2}\Big|\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}\Big|_0^{2\pi}=$$

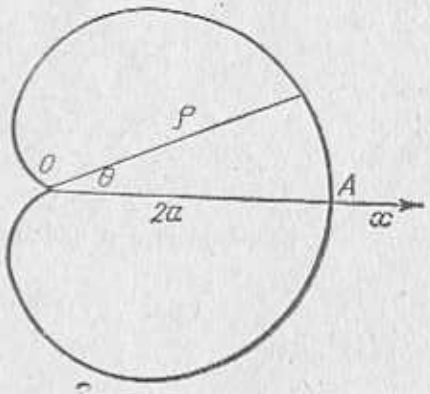
$$=a^2\pi+\frac{a^2\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

Пример 2. Уравнението на Декартовия лист

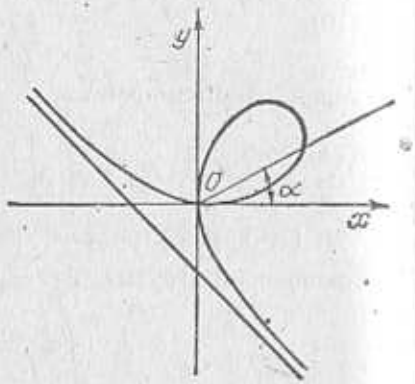
$$x^3+y^3-3axy=0, \quad a>0$$

в полярна координатна система е

$$\rho=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$$



Черт. 13



Черт. 14

и следователно лицето σ на сектора (вж. черт. 14)

$$0\leq\theta\leq\alpha,$$

$$\rho\leq\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta},$$

където $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, ще бъде

$$\sigma=\frac{9a^2}{2}\int_0^\alpha\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,d\theta=\frac{9a^2}{2}\int_0^\alpha\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^\alpha\frac{\operatorname{tg}^2\theta\,d\operatorname{tg}\theta}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=\frac{3a^2}{2}\int_0^\alpha\frac{d\operatorname{tg}^3\theta}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^\alpha(1+\operatorname{tg}^3\theta)^{-2}\,d(1+\operatorname{tg}^3\theta)=-\frac{3a^2}{2}\left|\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\theta}\right|_0^\alpha=\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{1+\operatorname{tg}^3\alpha}.$$

Специално при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ получаваме, след като извършим граничен преход,

$$\sigma=\frac{3a^2}{2}.$$

Задачи

1. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от параболата $y^2=2px$, $p>0$, и от правата $y=ax$, $a>0$.

Отговор. $\frac{2}{3}\frac{p^2}{a^3}$.

2. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от параболата $y^2=2px$, $p>0$, и кривата $y^2=\frac{8(x-p)^3}{27p}$.

Отговор. $\frac{88}{15}p^2\sqrt{2}$.

3. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от астроидата

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \quad a>0.$$

Отговор. $\frac{3}{8}a^2\pi$.

4. Да се пресметне лицето на частта от равнината, заградена от веригата

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad a>0,$$

от абсцисната ос и от правите $x=0$, $x=p$, където $p>0$.

Отговор. $a^2\frac{e^{\frac{p}{a}}-e^{-\frac{p}{a}}}{2}$.

5. Да се пресметне лицето на частта от равнината, заградена от лемнискатата на Бернули (Bernoulli):

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta.$$

Отговор. a^2.

6. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от кривата $\rho=a\sin 2\theta$, $a>0$.

Отговор. $\frac{a^2\pi}{4}$.

7. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и от кривата

$$(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2=0, \quad a>0,\ b>0.$$

Упътване. Въведете полярни координати.

Отговор. $\frac{\pi}{2}(a-b)^2$.

8. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от един свод на циклоидата

$$x=a(t-\sin t),$$
$$y=a(1-\cos t),$$

където $0\leq t\leq 2\pi$, и оста x.

Отговор. $3\pi a^2$.

§ 23. Дефиниция на понятието дъга

Двойка функции

$$(1)\qquad x=f(t),\quad y=g(t),$$

които са дефинирани и непрекъснати в един и същ интервал $\alpha\leq t\leq\beta$, се нарича дъга. Множеството от точките с координати $[f(t), g(t)]$, където t описва интервала $\alpha\leq t\leq\beta$, се нарича графика на дъгата (1). Точката с координати $[f(\alpha), g(\alpha)]$ се нарича начало на дъгата (1), а точката $[f(\beta), g(\beta)]$ се нарича неин край. Дъгата (1) се нарича гладка, ако функциите $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми и производните им са непрекъснати в интервала $\alpha\leq t\leq\beta$.

Пример 1. Графиката на дъгата

$$x=x_1+t(x_2-x_1),$$
$$y=y_1+t(y_2-y_1),$$
$$0\leq t\leq 1$$

представя нейна отсечка, която съединява точките (x_2, y_2) и (x_1, y_1).

Пример 2. Графиката на дъгата

$$x=a+r\cos t$$
$$y=b+r\sin t,$$
$$0\leq t\leq\pi$$

е полуокръжност с център в точката (a, b) и радиус r.

Пример 3. Графиката на дъгата

$$x=t,$$
$$y=f(t),$$
$$a\leq t\leq b$$

съвпада с графиката на функцията $f(x)$, където x се мени в интервала $[a, b]$.

Пример 4. Възможно е две различни дъги да имат една и съща графика. Така дъгата

$$x=\cos t,$$
$$y=\sin t,$$
$$0\leq t\leq 2\pi$$

и дъгата

$$x=\cos t,$$
$$y=\sin t,$$
$$0\leq t\leq 4\pi$$

имат една и съща графика. Също тъй графиката на дъгата

$$x=\cos t,$$
$$y=\sin t,$$
$$0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$$

съвпада с графиката на дъгата

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$y=\frac{2t}{1+t^2},$$
$$0\leq t\leq 1.$$

§ 24. Дължина на дъга

Нека

$$(1)\qquad x=f(t),\quad y=g(t),$$

където $\alpha\leq t\leq\beta$ е една дъга Γ. Делим интервала $[\alpha, \beta]$ с помощта на точките

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=\beta.$$

На всяка една от делящите точки t_i отговаря една точка P с координати

$$x_i=f(t_i),$$
$$y_i=g(t_i).$$

Съединявайки всеки две съседни точки от редицата

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$$

с праволинейни отсечки, получаваме една начупена линия, за която ще казваме, че е вписана в дъгата Γ. Дължината на разглежданата начупена линия е равна на

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}.$$

Ако се случи множеството от дължините на всичките вписани (в изяснения по-горе смисъл) начупени линии да е ограничено отгоре, ние казваме, че дъгата Γ може да бъде ректифицирана (изправена). Под дължина на дъга, която може да бъде ректифицирана, ще разбираме точната горна граница на дължините на вписаните в нея начупени линии. По този начин ние дефинирахме понятието дължина *само за ректифицируемите криви*.

Нека (1) е една ректифицируема дъга и нека l е нейната дължина. Да изберем един подинтервал $[\lambda, \mu]$ на интервала $[\alpha, \beta]$. Дъгата, която се получава от параметричните уравнения (1), когато t се мени в подинтервала $[\lambda, \mu]$, е също тъй ректифици-

руема. И наистина нека разделим подинтервала $[\lambda, \mu]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\lambda=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n=\mu$$

и да означим с P_i точката $[f(\tau_i), g(\tau_i)]$. Ако означим още с Q и R съответно точките $[f(\alpha)], g(\alpha)], [f(\beta), g(\beta)]$, то очевидно [1]

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}\leq\overline{QP_0}+\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}+\overline{P_nR}\leq l,$$

което показва, че множеството от сумите $\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$ е ограничено, т. е. че разглежданата дъга е наистина ректифицируема.

Да означим с l_λ^μ дължината на дъгата

$$x=f(t),$$

(2)

$$y=g(t),$$

където $\lambda\leq t\leq\mu$. Не е трудно да се покаже, че при $\lambda<\nu<\mu$ имаме

$$l_\lambda^\nu+l_\nu^\mu=l_\lambda^\mu.$$

И наистина да разделим по произволен начин подинтервала $[\lambda, \mu]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\lambda=t_0<t_1<\cdots<t_n=\mu.$$

Винаги може да се избере измежду тези точки на деление такава точка t_k, че да имаме

$$t_{k-1}\leq\nu\leq t_k.$$

Да означим с P_i точката $[f(t_i), g(t_i)]$, а с Q точката $[f(\nu), g(\nu)]$. Очевидно имаме[2]

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}=\sum_{i=1}^{k-1}\overline{P_{i-1}P_i}+\overline{P_{k-1}P_k}+\sum_{i=k+1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}.$$

---

[1] С $\overline{AB}$ означаваме дължината на отсечката между точките A и B.

[2] При $k=1$ трябва да се чете $\sum_{i=1}^{k-1}\overline{P_{i-1}P_i}=0$, а при $k=n$ трябва да се чете $\sum_{i=k+1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}=0$.

Като вземем пред вид, че

$$\overline{P_{k-1}P_k}\leq\overline{P_{k-1}Q}+\overline{QP_k},$$

получаваме

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}\leq\left(\sum_{i=1}^{k-1}\overline{P_{i-1}P_i}+\overline{P_{k-1}Q}\right)+\left(\overline{QP_k}+\sum_{i=k+1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}\right)\leq$$

$$\leq l_\lambda^\nu+l_\nu^\mu.$$

С това ние показваме, че числото $l_\lambda^\nu+l_\nu^\mu$ е една горна граница на дължините на начупените линии, вписани в дъгата (2). Като вземем пред вид, че l_λ^μ е точната, т. е. най-малката горна граница на тези дължини, получаваме

(3) $$l_\lambda^\mu\leq l_\lambda^\nu+l_\nu^\mu.$$

По подобен начин може да се установи неравенството

$$l_\lambda^\mu\geq l_\lambda^\nu+l_\nu^\mu.$$

За тази цел ще разделим подинтервалите $[\lambda, \nu]$ и $[\nu, \mu]$ по произволен начин на подинтервали с помощта на точките

(4) $$\lambda=u_0<u_1<u_2<\cdots<u_p=\nu,$$

(5) $$\nu=v_0<v_1<v_2<\cdots<v_q=\mu$$

и ще означим с P_i и Q_i съответно точките $[f(u_i), g(u_i)]$ и $f(v_i), g(v_i)]$. В такъв случай имаме

$$\sum_{i=1}^{p}\overline{P_{i-1}P_i}+\sum_{i=1}^{q}\overline{Q_{i-1}Q_i}\leq l_\lambda^\mu$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{p}\overline{P_{i-1}P_i}\leq l_\lambda^\mu-\sum_{i=1}^{q}\overline{Q_{i-1}Q_i}.$$

Като фиксираме точките (5) и оставим точките (4) да се менят заключаваме, че числото

$$l_\lambda^\mu-\sum_{i=1}^{q}\overline{Q_{i-1}Q_i}$$

е една горна граница на сумите $\sum_{i=1}^{p} \overline{P_{i-1} P_i}$. Като вземем пред вид, че l_λ^v е точната, т. е. най-малката от горните граници на тези суми, намираме

$$l_\lambda^v \leq l_\lambda^\mu - \sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1} Q_i}$$

или още

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1} Q_i} \leq l_\lambda^\mu - l_\lambda^v. \tag{6}$$

Ние фиксирахме точките (5) произволно. Това обстоятелство и неравенството (6) ни позволяват да твърдим, че числото $l_\lambda^\mu - l_\lambda^v$ е една горна граница на сумите

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1} Q_i}.$$

Като вземем пред вид още, че l_ν^μ е точната, т. е. най-малката горна граница на тези суми, получаваме

$$l_\nu^\mu \leq l_\lambda^\mu - l_\lambda^v$$

или

$$l_\nu^\mu + l_\lambda^v \leq l_\lambda^\mu. \tag{7}$$

Неравенствата (3) и (7) ни учат, че

$$l_\lambda^v + l_\nu^\mu = l_\lambda^\mu.$$

§ 25. Пресмятане дължините на дъгите с помощта на интеграли

Нека

$$\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= g(t), \end{aligned} \tag{1}$$

където $\alpha \leq t \leq \beta$ е една дъга. Ако функциите $f(t)$ и $g(t)$ имат ограничени първи производни в интервала $\alpha \leq t \leq \beta$, то дъгата (1) е ректифицируема. И наистина функцията

$$F(u, v) = \sqrt{f'^2(u) + g'^2(v)}$$

е ограничена в затворения квадрат

$$\alpha \leq u \leq \beta,$$
$$\alpha \leq v \leq \beta.$$

Да означим с M една нейна горна граница и да разделим по произволен начин интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta.$$

Теоремата за крайните нараствания ни дава

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) f'(\tau_i),$$
$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) g'(\tau_i^*),$$

където

$$t_{i-1} < \tau_i < t_i, \qquad t_{i-1} < \tau_i^* < t_i$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2} = \tag{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i^*)}\,(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(t_i - t_{i-1}) = M(\beta - \alpha).$$

С това ние показахме, че множеството от дължините на вписаните начупени линии в дъгата (1) е ограничено, т. е. тази дъга е ректифицируема.

Неравенството (2) ни учи, че константата

$$M(\beta - \alpha)$$

е една горна граница на дължините на начупените линии, които са вписани в дъгата (1). С това е доказано, че дъгата (1) е ректифицируема. Като вземем пред вид, че дължината l на разглежданата дъга е точната, т. е. най-малката горна граница на тези дължини, получаваме

$$l \leq M(\beta - \alpha). \tag{3}$$

Ако означим с m една долна граница на $F(u, v)$, получаваме аналогично

$$m(\beta - \alpha) \leq l. \tag{4}$$

Неравенствата (3) и (4) могат да се използват, за да се докаже следната теорема.

Ако функциите $f(t)$ и $g(t)$ имат непрекъснати първи производни в интервала $\alpha \leq t \leq \beta$, то дължината l на дъгата

$$x=f(t),$$
$$y=g(t),$$

където $\alpha \leq t \leq \beta$, се дава с формулата

$$l=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\, du. \tag{5}$$

Доказателство. Да означим с $l(t)$ дължината на дъгата

$$x=f(u),$$
$$y=g(u),$$

където $\alpha \leq u \leq t$, и да изберем t_0 произволно в интервала $(\alpha, \beta]$. Нека ε е едно произволно положително число. Ние ще изберем числата t' и t'', които удовлетворяват неравенствата $t' \leq t_0 \leq t''$, $t' \neq t''$, толкова близо до t_0, че да имаме[1]

$$F(t_0, t_0)-\varepsilon \leq F(u, v) \leq F(t_0, t_0)+\varepsilon$$

при

$$t' \leq u \leq t'', \quad t' \leq v \leq t''.$$

Това може да се направи поради непрекъснатостта на функцията $F(u, v)$.

От доказаното по-горе имаме

$$[F(t_0, t_0)-\varepsilon](t''-t') \leq l(t'')-l(t') \leq [F(t_0, t_0)+\varepsilon](t''-t')$$

или

$$-\varepsilon \leq \frac{l(t'')-l(t')}{(t''-t')}-F(t_0, t_0) \leq \varepsilon.$$

Този резултат ни учи, че функцията $l(t)$ е диференцуема в точката t_0 и

$$l'(t_0)=F(t_0, t_0)=\sqrt{f'^2(t_0)+g'^2(t_0)}, \tag{6}$$

т. е. функцията $l(t)$ е една примитивна функция на непрекъснатата функция

$$\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}.$$

[1] Нека припомним, че с $F(u, v)$ ние сме означили функцията

$$\sqrt{f'^2(u)+g'^2(v)}.$$

Това ни дава възможност да пишем

$$l(t)=C+\int_{\alpha}^{t} \sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\, du,$$

където C е константа. За да пресметнем константата C, извършваме граничния преход $t \to \alpha$. Като вземем пред вид неравенствата $0 \leq l(t) \leq M(t-\alpha)$, където M е една горна граница на функцията $F(u, v)$, заключаваме, че $\lim_{t \to \alpha} l(t)=0$ и следователно $C=0$.

По този начин ние намираме

$$l(t)=\int_{\alpha}^{t} \sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\, du$$

и следователно

$$l=l(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\, du.$$

Забележка. Внимателният читател вероятно е забелязал, чет о разсъжденията, които ние направихме, може да се извлече повече, защото от тях се вижда, че функцията $l(t)$ е диференцуема и равенството (6) е валидно във всяка точка, в която и двете производни $f'(t)$ и $g'(t)$ са непрекъснати. Да допуснем, че тези производни са интегруеми в Риманов смисъл в интервала $[\alpha, \beta]$. В такъв случай те ще бъдат непрекъснати почти навсякъде и следователно равенството (6) ще бъде валидно почти навсякъде. От друга страна, функциите

$$l(t) \text{ и } \int_{\alpha}^{t} \sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\, du$$

удовлетворяват условието на Липшиц. Това ни дава възможност да приложим теоремата от § 10 и да заключим, че

$$l(t)=C+\int_{\alpha}^{t} \sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\, du,$$

където C не зависи от t.

По такъв начин виждаме, че в разглежданата от нас теорема условието за непрекъснатост на $f'(t)$ и $g'(t)$ може да бъде заменено с по-общото условие за интегруемост в Риманов смисъл.

Ние често ще пишем формулата (5) във вида

$$l=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{dx^2+dy^2}$$

Изразът $\sqrt{dx^2+dy^2}$ обикновено се означава със знака ds и се нарича елемент на дъга.

В специалния случай, когато имаме дъгата

$$y=f(x), \quad \alpha\leq x\leq\beta,$$

или по-точно дъгата

$$x=t,$$
$$y=f(t),$$

където $\alpha\leq t\leq\beta$, формулата (5) добива вида

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+f'^2(u)}\,du.$$

Накрая нека отбележим, че под дъга, зададена в полярни координати с уравнение

$$\rho=f(\theta),$$

където $\alpha\leq\theta\leq\beta$, се разбира дъгата, дефинирана в декартови координати със следните уравнения[1]:

$$x=f(\theta)\cos\theta,$$
$$(7) \qquad y=f(\theta)\sin\theta,$$

където $a\leq\theta\leq\beta$.

От (6) получаваме

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta.$$

Това ни дава:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{f'^2(\theta)+f^2(\theta)}=\sqrt{\rho'^2+\rho^2}$$

и следователно изразът за дължината l на дъгата (7) добива следния вид:

$$l=\int_{a}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta.$$

[1] Ние получаваме тези уравнения от трансформачните формули

$$x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\theta,$$

като заместим ρ с $f(\theta)$.

Пример 1. Да се намери дължината l на дъгата от циклоидата[1]

$$x=r(t-\sin t),$$
$$y=r(1-\cos t), \quad r>0,$$

където $0\leq t\leq 2\pi$ (вж черт. 15).

Решение. Очевидно имаме

$$x'=r(1-\cos t),$$
$$y'=r\sin t$$

и следователно

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{r^2(1-\cos t)^2+r^2\sin^2 t}\,dt=r\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=$$
$$=2r\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Оттук получаваме

$$l=2r\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=\left|-4r\cos\frac{t}{2}\right|_0^{2\pi}=8r.$$

Пример 2. Да се намери дължината на дъгата от параболата

$$x=\frac{t^2}{2p}, \quad y=t, \quad p>0,$$

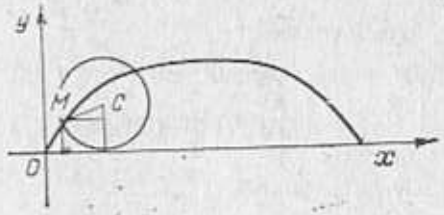
където $0\leq t\leq a$.

Решение. Очевидно имаме

$$x'=\frac{t}{p},$$
$$y'=1$$

следователно

$$ds=\frac{1}{p}\sqrt{t^2+p^2}\,dt,$$



Черт. 15

т. е.

$$l=\frac{1}{p}\int_0^a\sqrt{t^2+p^2}\,dt.$$

Като интегрираме по части, ще получим

$$l=\left|\frac{t}{p}\sqrt{t^2+p^2}\right|_0^a-\frac{1}{p}\int_0^a\frac{t^2}{\sqrt{t^2+p^2}}\,dt=$$

[1] Циклоида се нарича крива, описана от една точка, свързана с окръжност, която се търкаля без хлъзгане по една права.

$$=\frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2}-\frac{1}{p}\int_0^a \frac{t^2+p^2-p^2}{\sqrt{t^2+p^2}}\,dt=$$

$$=\frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2}-l+p\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t^2+p^2}}=$$

$$=\frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2}-l+\left|p\ln\left(t+\sqrt{t^2+p^2}\right)\right|_0^a=$$

$$=\frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2}-l+p\ln\left(a+\sqrt{a^2+p^2}\right)-p\ln p.$$

Оттук

$$2l=\sqrt{a^2+p^2}+p\ln\frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}$$

и следователно

$$l=\frac{a}{2p}\sqrt{a^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}.$$

Пример 3. Да се намери дължината l на кардиоидата

$$\rho=a(1+\cos\theta),\quad a>0,$$

където $0\leq\theta\leq 2\pi$ (черт. 13).

Решение. Очевидно имаме

$$\rho'=-a\sin\theta$$

и следователно

$$ds=\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta=\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2(1+\cos\theta)^2}\,d\theta=$$

$$=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta=a\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta.$$

Оттук получаваме

$$l=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=2a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta+2a\int_{\pi}^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta-2a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\left|4a\sin\frac{\theta}{2}\right|_0^{\pi}-4a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|_{\pi}^{2\pi}=8a.$$

Задачи

1. Да се намери дължината на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ a>0.$$

Отговор. $6a$.

2. Да се намери дължината на дъгата от семикубичната парабола $ay^2=x^3$, $a>0$, за която $0\leq x\leq p$.

Отговор.

$$\frac{(4a+9p)^{\frac{3}{2}}-(4a)^{\frac{3}{2}}}{27\sqrt{a}}.$$

3. Да се намери дължината на спициклоидата

$$x=(a+b)\cos t+b\cos\frac{a+b}{b}t,$$

$$y=(a+b)\sin t+b\sin\frac{a+b}{b}t,$$

където $a>0$, $b>0$, $2a<b$, $0\leq t\leq 2\pi$.

Отговор. $\frac{8b(a+b)}{a}$.

4. Да се намери дължината на кривата

$$x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{2}{5}},\quad a>0.$$

Отговор. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$.

5. Да се намери дължината на дъгата от Архимедовата спирала

$$\rho=a\theta,\ a>0,$$

където $0\leq\theta\leq\alpha$.

Отговор. $\frac{a}{2}[\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})+\alpha\sqrt{1+\alpha^2}]$.

6. Да се намери дължината на дъгата от логаритмичната спирала

$$\rho=e^{a\theta},\quad a>0,$$

където $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$.

Отговор. $\frac{e^{a\theta_2}-e^{a\theta_1}}{a}\sqrt{1+a^2}$.

7. Да се намери дължината на дъгата

$$\rho=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{3}},$$

където $-\pi\leq\theta\leq\pi$.

Отговор. $12\sqrt{3}$.

8. Да се намери дължината на дъгата от трактрисата

$$y=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

където $0<p\leq x\leq q\leq a$.

Отговор. $a\ln\frac{a}{p}$.

§ 26. Криволинейни интеграли

Нека Γ е дъга, дефинирана с уравненията

$$x=f(t),$$
$$y=g(t),$$

където $\alpha\leq t\leq\beta$. Ние ще разделим интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta,$$

ще означим с τ_i едно число от i-тия подинтервал $[t_{i-1}, t_i]$ и ще положим за краткост

$$x_i=f(t_i), \qquad y_i=g(t_i);$$
$$\xi_i=f(\tau_i), \qquad \eta_i=g(\tau_i).$$

Ако функцията $F(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната върху графиката на Γ, а функцията $f(t)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha, \beta]$, то сумите

$$S=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i)\,(x_i-x_{i-1})$$

клонят към някаква граница I, когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула. Това значи, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ по такъв начин, че ако дължините на всички подинтервали $[t_{i-1}, t_i]$ са по-малки от δ, да имаме

$$|I-S|<\varepsilon.$$

За да се убедим, че сумите S наистина имат граници, когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула, преобразуваме разликата x_i-x_{i-1} с помощта на теоремата за крайните нараствания по следния начин:

$$x_i-x_{i-1}=f(t_i)-f(t_{i-1})=(t_i-t_{i-1})f'(\theta_i),$$

където θ_i е някое число, избрано по подходящ начин в интервала (t_{i-1}, t_i). По този начин ние добиваме възможност да представим сумата S във вида

$$S=\sum_{i=1}^{n} F[f(\tau_i),\ g(\tau_i)]f'(\theta_i)(t_i-t_{i-1}).$$

От друга страна, функцията $F[f(t), g(t)]$ е непрекъсната в интервала $[\alpha, \beta]$ и следователно сумите

$$S^*=\sum_{i=1}^{n} F[f(\tau_i),\ g(\tau_i)]f'(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$$

клонят към интеграла

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]f'(t)\,dt,$$

когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула. Това значи, че при всеки избор на положителното число ε имаме

$$|I-S^*|<\varepsilon,$$

когато подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ са достатъчно малки.

Да разгледаме разликата

$$S-S^*=\sum_{i=1}^{n} F[f(\tau_i),\ g(\tau_i)](f'(\theta_i)-f'(\tau_i))(t_i-t_{i-1})$$

и да означим с M една горна граница на непрекъснатата функция $|F[f(t), g(t)]|$. Ако разглежданите подинтервали $[t_{i-1}, t_i]$ са достатъчно малки, то

$$|f'(\theta_i)-f'(\tau_i)|<\varepsilon,$$

защото $f'(t)$ е равномерно непрекъсната[1] функция, и следователно

$$|S-S^*|\leq\sum_{i=1}^{n} M\varepsilon(t_i-t_{i-1})=M(\beta-\alpha)\varepsilon.$$

Оттук, като вземем пред вид неравенството

$$|S-I|\leq|S-S^*|+|S^*-I|,$$

получаваме

$$|S-I|<\varepsilon[M(\beta-\alpha)+1].$$

С това ние показахме, че сумите S наистина имат граница, когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула, и дори показахме, че тя има стойност

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} F[f(t),\ g(t)]f'(t)\,dt.$$

[1] Функцията $f'(t)$ е равномерно непрекъсната, защото е непрекъсната в затворения интервал $[\alpha, \beta]$.

Тази граница се означава със символа

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\, dx$$

и се нарича криволинеен интеграл на функцията $F(x, y)$, разпространен върху кривата Γ.

От изложеното по-горе е ясно, че

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} F[f(t), \quad g(t)] f'(t)\, dt.$$

Този резултат може да се използва за пресмятане на криволинейните интеграли.

Аналогично може да се дефинира криволинейният интеграл

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\, dy$$

като граница на сумите

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i)\ (y_i - y_{i-1}),$$

когато дължините на подинтервалите $(t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула. Най-сетне под

$$\int_{\Gamma} [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy]$$

се разбира

$$\int_{\Gamma} P(x, y)\, dx + \int_{\Gamma} Q(x, y)\, dy.$$

Пример 1. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$\int_{A} \frac{y\, dx}{x^2+y^2},$$

разпространен върху дъгата A, дефинирана с параметричните уравнения

(1) $$x = r\cos t,$$
$$y = r\sin t, \quad r>0,$$

където $0 \le t \le \pi$.

Решение. Очевидно имаме

$$dx = -r\sin t\, dt.$$

Според установеното по-горе правило за пресмятане на криволинейни интеграли имаме

$$\int_{A} \frac{y\, dx}{x^2+y^2} = \int_{0}^{\pi} \frac{r\sin t\,(-r\sin t)\, dt}{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2} =$$

$$= -\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt = -\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Да се пресметне криволинейният интеграл $\int_{B} \frac{y\, dx}{x^2+y^2}$, разпространен върху кривата B, дефинирана с параметричните уравнения

(2) $$x = -r\cos t,$$
$$y = r\sin t, \qquad r>0,$$

където $0 \le t \le \pi$.

(Обърнете внимание върху това, че уравненията (1) и (2) представляват дъга от една и съща окръжност. По какво се различава разглежданият сега пример от предния?)

Решение.

$$\int_{B} \frac{y\, dx}{x^2+y^2} = \int_{0}^{\pi} \frac{r\sin t\, d(-r\cos t)}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt = \int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

§ 27. Криволинеен интеграл от тотален диференциал

Нека са дадени краен брой гладки дъги Γ_ν,

(1) $$x = f_\nu(t)$$
$$y = g_\nu(t),$$
$$\alpha_\nu \le t \le \beta_\nu,$$

всяка една от които има номер. Нека броят на дъгите е n. Ще казваме, че дъгите Γ_ν образуват път, ако началото на всяка дъга $\Gamma_{\nu+1}$, където $\nu \le n-1$, съвпада с края на Γ_ν, т. е.

$$f_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1}) = f_\nu(\beta_\nu),$$
$$g_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1}) = g_\nu(\beta_\nu),$$
$$\nu = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Началото на Γ_1 ще наричаме начало на пътя, а края на Γ_n ще наричаме край на пътя. Ако началото и краят на пътя съвпадат, ще казваме, че той е затворен. Да означим с Γ пътя, определен от дъгите (1). Нека $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са две функции, които са дефинирани и непрекъснати върху графиката на всяка една от дъгите Γ_ν. По дефиниция ще положим

$$\int_\Gamma P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma_\nu} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy.$$

Нека в едно отворено множество G в равнината е дефинирана една функция $F(x, y)$, която в G притежава непрекъснати първи частни производни. Нека множеството G съдържа графиките на всичките дъги Γ_ν. Нека най-сетне (x_0, y_0) е началото, а (x_1, y_1) е краят на пътя Γ, който е определен от дъгите Γ_ν. В такъв случай

$$\int_{\Gamma_\nu} F'_x\,dx+F'_y\,dy=F(x_1, y_1)-F(x_0, y_0). \tag{2}$$

И наистина

$$\int_{\Gamma_\nu} F'_x\,dx+F'_y\,dy=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma_\nu} F'_x\,dx+F'_y\,dy=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu}[F'_x(f_\nu(t),\ g_\nu(t))f'_\nu(t)+F'(f_\nu(t), g_\nu(t))g'_\nu(t)]\,dt=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}[F(f_\nu(\beta_\nu), g_\nu(\beta_\nu))-F(f_\nu(\alpha_\nu), g_\nu(\alpha_\nu))]=F(x_1, y_1)-F(x_0, y_0).$$

Специално, ако пътят Γ е затворен, равенството (2) приема вида

$$\int_\Gamma F'_x\,dx+F'_y\,dy=0.$$

Нека в едно отворено множество G са дадени две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Ако съществува функция $F(x, y)$ с непрекъснати частни производни до втори ред, за която

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x, y),\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x, y)$$

в G, то функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имат непрекъснати първи частни производни и

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x},$$

а следователно

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

Когато множеството G е звездообразно относно някоя негова точка (x_0, y_0), т. е. когато заедно с всяка своя точка (x, y) то съдържа и праволинейната отсечка, която съединява точките (x, y) и (x_0, y_0), обратното на горното твърдение е също тъй вярно. Това значи, че ако в едно отворено множество G, което е звездообразно относно някоя негова точка (x_0, y_0), са дефинирани две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, които имат непрекъснати частни производни от първи ред и удовлетворяват условието

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

съществува функция $F(x, y)$ в G, която притежава непрекъснати частни производни от втори ред и удовлетворява условията

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x, y),\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x, y).$$

И наистина да положим*

$$F(x, y)=(x-x_0)\int_0^1 P(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))\,dt+$$

$$+(y-y_0)\int_0^1 Q(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))\,dt.$$

Ние можем да направим това, защото точката $(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))$ описва отсечката, която съединява точките (x_0, y_0) и (x, y), когато t се мени в интервала $0\leq t\leq 1$, и следователно не напуска G поради условието за звездообразност.

* С други думи,

$$F(x, y)=\int_L P(\xi, \eta)\,d\xi+Q(\xi, \eta)\,d\eta,$$

където криволинейният интеграл е разпространен върху отсечката L с уравнения $\xi=x_0+t(x-x_0)$, $\eta=y_0+t(y-y_0)$, $0\leq t\leq 1$.

Очевидно

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^1 P\,dt+(x-x_0)\int_0^1 tP'_x\,dt+(y-y_0)\int_0^1 tQ'_x\,dt.$$

Като интегрираме по части, получаваме

$$\int_0^1 P\,dt=P(x,y)-\int_0^1 [tP'_x\cdot(x-x_0)+tP'_y\cdot(y-y_0)]\,dt$$

и следователно

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)+(y-y_0)\int_0^1 t(Q'_x-P'_y)\,dt=P(x,y).$$

Аналогично намираме

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y).$$

От изложеното се вижда, че ако в едно звездообразно множество G, съдържащо графиките на гладките дъги Γ_v, които съставят един затворен път Γ, имаме две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ с непрекъснати първи частни производни, удовлетворяващи условието,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

то

$$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy=0.$$

Това е едно важно равенство, което има многобройни приложения.

Предположението за звездообразност на G може да се замени с по-общо. Достатъчно е да се иска множеството G да бъде просто свързано, т. е. да съдържа всяко компактно множество, чийто контур принадлежи на G. На това обобщение няма да се спираме, защото няма да го използуваме.

§ 28. Приблизително пресмятане на интеграли

При някои задачи от приложната математика и физика се налага да познаваме поне приблизително (с една или с друга точност) стойността на даден интеграл. Обаче методите, които ние разгледахме, не ни дават на ръка средство за точното пресмятане на всякакви интеграли. Ето защо става нужда да прибягваме до приблизителни методи. Ние ще изложим в този параграф няколко такива метода.

Ние можем да пресметнем интеграла

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

с всяка точност, като изхождаме от дефиницията на понятието определен интеграл. Така, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то каквото и да е положително число ε, ние можем да изберем точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

по такъв начин, че осцилацията на функцията $f(x)$ да бъде по-малка[1] от ε във всеки един от подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$. Да означим с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ и да разгледаме голямата и малката сума на Дарбу:

$$S=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$s=\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1}).$$

Ние знаем, че при $a<b$

$$s\leq I\leq S.$$

От друга страна, като вземем пред вид неравенството $M_i-m_i<\varepsilon$, получаваме

$$S-s=\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i-x_{i-1})=\varepsilon(b-a).$$

[1] Това ние можем да направим за всяка непрекъсната функция. Специално, ако функцията $f(x)$ удовлетворява условието на Липшиц

$$|f(x')-f(x'')|\leq k|x'-x''|,$$

достатъчно е да вземем $x_i-x_{i-1}<\frac{\varepsilon}{k}$, за да сме сигурни, че осцилацията на $f(x)$ е по-малка от ε във всеки един от подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$.

Този резултат ни учи, че като вземем било S, било s за приблизителна стойност на интеграла I, ние можем да постигнем всяка желана точност.

Но съществуват други методи, които се оказват по-удобни за практически цели. Така например, ако функцията $f(x)$ е два пъти диференцуема и има ограничена втора производна в интервала $[a, b]$, то целесъобразно е за приблизителна стойност на I да се вземе сумата

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}),$$

като при това интервалът $[a, b]$ се дели на равни части.[1]

Като имаме пред вид неравенствата

$$m_i \leq \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2} \leq M_i,$$

получаваме

$$s \leq \sigma \leq S,$$

откъдето е ясно, че сумите σ също както сумите s и S могат да се използват за приблизително пресмятане на интеграла I.

По-прецизна оценка на грешката може да се направи така. Полагаме за удобство

$$\frac{x_{i-1}+x_i}{2} = c,$$

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{2} = h,$$

разглеждаме двете функции

$$\psi(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx - t\,[f(c+t)+f(c-t)],$$

$$\varphi(t) = \psi(t) - \frac{t^3}{h^3}\psi(h)$$

[1] В този случай грешката намалява особено бързо с растенето на n. Както ще видим след малко, тази грешка при най-неблагоприятни обстоятелства е от порядъка на $\frac{1}{n^2}$.

при $0 \leq t \leq h$. Очевидно имаме

$$\varphi'(t) = \left[\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx\right]' - [f(c+t)+f(c-t)] -$$

$$- t[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{3t^2}{h^3}\psi(h).$$

Като вземем пред вид, че

$$\left[\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx\right]' = \left[\int_{c-t}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{c+t} f(x)\,dx\right]' =$$

$$= f(c-t) + f(c+t),$$

получаваме

$$\varphi'(t) = -t[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{3t^2}{h^3}\psi(h)$$

или прилагайки теоремата за крайните нараствания,

$$\varphi'(t) = -2t^2 f''(\xi_i) - \frac{3t^2}{h^3}\psi(h), \tag{1}$$

където ξ_i е число между $c-t$ и $c+t$ и следователно между x_{i-1} и x_i.

От друга страна, имаме $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$ и следователно има точка τ във вътрешността на интервала $(0, h)$, за която $\varphi'(\tau) = 0$. Специално, ако в равенството (1) поставим $t = \tau$, ще получим

$$\psi(h) = -\frac{2h^3}{3} f''(\xi_i),$$

откъдето

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_i).$$

Като дадем на i стойностите $1, 2, \ldots, n$ и съберем получените равенства, ще намерим

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_i). \tag{2}$$

Нека M е една горна граница на $|f''(x)|$ в интервала $[a, b]$. В такъв случай от равенството (2) получаваме

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1})\right|\leq\frac{(b-a)^3 Mn}{12n^3}=\frac{(b-a)^3 M}{12n^2}.$$

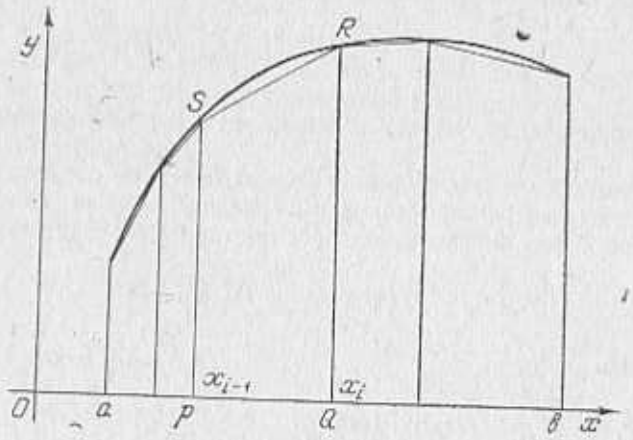
Оттук виждаме, че грешката, която правим при този метод, в най-благоприятния случай е от порядъка на $\frac{1}{n^2}$.

При $f(x)\geq 0$ може да се даде едно просто геометрично тълкуване на разгледания метод: изразът

$$\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1})$$

представлява лицето на трапеца $PQRS$, който е изобразен на черт. 16; по този начин в приложения метод интегралът

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,$$



Черт. 16

който представлява лицето на „криволинейния трапец"

$$x_{i-1}\leq x\leq x_i,$$
$$0\leq y\leq f(x),$$

се заменя с лицето на съответния праволинеен трапец $PQRS$. Поради това разгледания метод се нарича често правило на трапеците.

Има методи, при които грешката намалява още по-бързо.[1] Такова е например правилото на Симпсон (Simpson), което ще разгледаме сега. При това правило делим интервала $[a, b]$ на четен брой равни части с помощта на точките

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{2n-1}<x_{2n}=b$$

и заменяме функцията $f(x)$ във всеки един от подинтервалите $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ с полином (най-много) от втора степен $P_i(x)$, стойностите на който съвпадат със стойностите на функцията $f(x)$ в точките x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}. Както знаем, такъв полином има и той е само един (касае се за една съвсем специална интерполационна задача).

Ние ще представим за удобство полинома $P_i(x)$ във вида

$$P_i(x)=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}(x-x_{2i-1})+\alpha_{i2}(x-x_{2i-1})^2$$

(което, както знаем, е възможно). Коефициентите α_{i0}, α_{i1}, α_{i2} се определят от условията

$$P_i(x_{2i-2})=f(x_{2i-2}),\ P_i(x_{2i-1})=f(x_{2i-1}),\ P_i(x_{2i})=f(x_{2i})$$

или

$$y_{2i-2}=\alpha_{i0}-\alpha_{i1}h+\alpha_{i2}h^2,$$
$$y_{2i-1}=\alpha_{i0},$$
$$y_{2i}=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}h+\alpha_{i2}h^2,$$

където сме положили $f(x_\nu)=y_\nu$ и $\frac{b-a}{2n}=h$.

Очевидно имаме

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_i(x)\,dx=\alpha_{i0}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} dx+\alpha_{i1}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}(x-x_{2i-1})\,dx+$$
$$+\alpha_{i2}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}(x-x_{2i-1})^2\,dx=\frac{h}{3}(6\alpha_{i0}+2\alpha_{i2}h^2)=\frac{b-a}{6n}(y_{2i-2}+$$
$$+4y_{2i-1}+y_{2i});$$

така получаваме следната приблизителна стойност I^* за интересуващия ни интеграл:

[1] Поне когато подинтегралната функция $f(x)$ е диференцуема достатъчен брой пъти.

$$I^*=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_i(x)\,dx=\frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})=$$

$$=\frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+$$

$$+y_{2n-2})].$$

За да оценим грешката $|I-I^*|$, която правим, когато прилагаме формулата на Симпсон, полагаме $x_{2i-1}=c$ и разглеждаме двете помощни функции

$$\psi(t)=\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx-\frac{t}{3}[f(c+t)+4f(c)+f(c-t)],$$

$$\varphi(t)=\psi(t)-\frac{t^6}{h^5}\psi(h)$$

при $0\leq t\leq h$. Като диференцираме три пъти $\varphi(t)$ и след третото диференциране приложим теоремата за крайните нарастания, ще получим

$$\varphi'(t)=\frac{2}{3}[f(c+t)-2f(c)+f(c-t)]-$$

$$-\frac{1}{3}t[f'(c+t)-f'(c-t)]-\frac{5t^4}{h^5}\psi(h),$$

$$\varphi''(t)=\frac{1}{3}[f'(c+t)-f'(c-t)]-$$

$$-\frac{1}{3}t[f''(c+t)+f''(c-t)]-\frac{20t^3}{h^5}\psi(h),$$

(3) $$\varphi'''(t)=-\frac{1}{3}t[f'''(c+t)-f'''(c-t)]-\frac{60t^2}{h^5}\psi(h)=$$

$$=-\frac{2}{3}t^2f^{\mathrm{IV}}(\xi_i)-\frac{60t^2}{h^5}\psi(h).$$

Като вземем пред вид, че $\varphi(0)=\varphi(h)=0$, заключаваме с помощта на теоремата на Рол, че има число τ_1 в отворения интервал $(0, h)$, за което $\varphi'(\tau_1)=0$. Като вземем пред вид още, че $\varphi'(0)=0$, заключаваме, че има число τ_2 в отворения интервал $(0, \tau_1)$, за което $\varphi''(\tau_1)=0$. Най-сетне, като вземем пред вид, че $\varphi''(0)=0$, заключаваме, че има число τ в отворения интервал $(0, \tau_2)$, за

което $\varphi'''(\tau)=0$. Като поставим $t=\tau$ в равенството (3), ще получим

$$\psi(h)=-\frac{h^5}{90}f^{\mathrm{IV}}(\xi_i)$$

или

(4) $$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx-\frac{b-a}{6n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})=-\frac{(b-a)^5}{2880\,n^5}f^{\mathrm{IV}}(\xi_i).$$

Давайки на i стойностите $1, 2, \ldots, n$ и събирайки получените неравенства, намираме

$$\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})=$$

$$=-\frac{(b-a)^5}{2880n^5}\sum_{i=1}^{n}f^{\mathrm{IV}}(\xi_i).$$

Нека K е една горна граница на $|f^{\mathrm{IV}}(x)|$ в интервал $[a, b]$. В такъв случай равенството (4) ни дава

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})\right|\leq\frac{(b-a)^5K}{2880n^4}.$$

Оттук ние виждаме, че грешката, която правим при метода на Симпсон, в най-неблагоприятния случай е от порядъка на $\frac{1}{n^4}$.

Накрая ще разгледаме метода на Котес (Cotes). При този метод избираме произволно n различни точки

(5) $$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

от дефиниционната област на функцията $f(x)$ и заменяме подинтегралната функция $f(x)$ с полином $\varphi(x)$ от възможно най-ниска степен, който съвпада с функцията $f(x)$ в избраните точки (5). Такъв полином ние можем да конструираме например с помощта на интерполационната формула на Лагранж

$$\varphi(x)=f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}+$$

$$+f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+f(x_n)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

В такъв случай, разглеждайки $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ като приближената стойност на интересуващия ни интеграл I, получаваме приблизителното равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n), \tag{6}$$

където сме положили за краткост

$$a_1 = \int_a^b \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}\,dx,$$

$$a_2 = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}\,dx, \tag{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}\,dx.$$

Пресмятането на коефициентите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не е свързано с никаква принципиална трудност, защото в десните страни на равенствата (7) имаме интеграли от полиноми. Тези коефициенти не зависят от функцията $f(x)$, обаче зависят от избора на точките (5). Приближеното равенство (6) е напълно точно, когато $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава $n-1$. И наистина в такъв случай полиномът $f(x)-\varphi(x)$, чиято степен не надминава $n-1$, се анулира в n различни точки и следователно се анулира тъждествено. Оттук получаваме при всички стойности на x

$$f(x) \doteq \varphi(x)$$

и следователно

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n).$$

§ 29. Несобствени интеграли

I. Интеграли от неограничени функции

Ние дефинирахме понятието определен интеграл за ограничени функции. В известни случаи обаче се оказва възможно да се разшири по един целесъобразен начин това понятие. Така например да разгледаме функцията

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

дефинирана с това условие при $0 \leq x < 1$. Тази функция не е интегруема в интервала $[0, 1]$, защото не е ограничена. Напротив, каквото и да е числото α, принадлежащо към отворения интервал $(0, 1)$, интегралът

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

е добре дефиниран, защото подинтегралната функция е непрекъсната в интервала $[0, \alpha]$. Очевидно имаме

$$F(\alpha) = \Big| -2(1-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^\alpha = 2 - 2\sqrt{1-\alpha}.$$

В разглеждания специален случай функцията $F(\alpha)$ има граница, когато α клони към единица чрез стойности, по-малки от единица, и

$$\lim_{\alpha \to 1} F(\alpha) = 2.$$

Ние обикновено изразяваме този резултат, като казваме, че интегралът

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x}}$$

съществува в несобствен смисъл, и пишем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$$

Изобщо, ако функцията $f(x)$ е интегруема[1] във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$, и интегралът

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(x)\,dx, \quad a < \alpha < b,$$

има граница, когато α клони към b чрез стойности, по-малки от

[1] Тази функция може да бъде неограничена в интервала $a \leq x < b$.

b, то ние наричаме тази граница несобствен[1] интеграл от $f(x)$, разпространен върху интервала $[a, b]$, и я означаваме със символа

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx,$$

така че

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to b}\int_a^\alpha f(x)\,dx.$$

Вместо да казваме, че съществува границата

$$\lim_{\alpha\to b} F(\alpha),$$

ние често казваме, че интегралът (1) съществува в несобствен смисъл или още, че този интеграл е сходящ. В противен случай казваме, че интегралът е разходящ.

Много от свойствата на несобствените интеграли приличат на съответните свойства на безкрайните редове. Така, ако интегралите

$$\int_a^b f_1(x)\,dx, \quad \int_a^b f_2(x)\,dx$$

са сходящи, то интегралите

$$I_1 = \int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx, \quad I_2 = \int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx$$

са също сходящи, като при това

$$I_1 = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx, \quad I_2 = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

И наистина нека двете функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са интегруеми във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a<\alpha<b$. Полагайки

$$F_1(\alpha) = \int_a^\alpha f_1(x)\,dx,$$

[1] За разлика от определените интеграли, които ние разглеждахме досега и които се наричат понякога интеграли в собствен смисъл. Нека припомним, че понятието интеграл в собствен смисъл се дефинира за ограничени функции и за крайни интеграционни интервали.

$$F_2(\alpha) = \int_a^\alpha f_2(x)\,dx,$$

имаме

$$\int_a^\alpha [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = F_1(\alpha)+F_2(\alpha),$$

$$\int_a^\alpha [f_1(x)-f_2(x)]\,dx = F_1(\alpha)-F_2(\alpha).$$

От съществуването на границите

$$\lim_{\alpha\to b} F_1(\alpha), \quad \lim_{\alpha\to b} F_2(\alpha)$$

обаче следва съществуването и на границите

$$\lim_{\alpha\to b}[F_1(\alpha)+F_2(\alpha)] = \lim_{\alpha\to b} F_1(\alpha) + \lim_{\alpha\to b} F_2(\alpha),$$

$$\lim_{\alpha\to b}[F_1(\alpha)-F_2(\alpha)] = \lim_{\alpha\to b} F_1(\alpha) - \lim_{\alpha\to b} F_2(\alpha),$$

с което твърдението е доказано.

Ние ще дадем няколко достатъчни условия за сходимост на несобствени интеграли. За целта ще забележим предварително, че ако функцията $F(x)$ е дефинирана, монотонно растяща и ограничена при $a \leq x < b$, то тя има граница, когато x клони към b (чрез стойности, по-малки от b). И наистина нека l е точната горна граница на $F(x)$. Избираме едно произволно положително число ε. Като вземем под внимание, че l е най-малката горна граница на $F(x)$, заключаваме, че $l-\varepsilon$ вече не е горна граница и следователно има поне една точка x_0, за която $F(x_0) > l-\varepsilon$. Като вземем под внимание, че $F(x)$ монотонно расте, получаваме при $x \geq x_0$

$$F(x) \geq F(x_0)$$

и следователно

$$F(x) > l-\varepsilon.$$

От друга страна, l е една горна граница на $F(x)$ и следователно

$$F(x) \leq l,$$

т. е.

$$0 \leq l - F(x) < \varepsilon$$

при $x \geq x_0$. С това ние показахме, че $F(x)$ клони към l, когато x клони към b.

На това място ние ще отбележим още следното: ако функцията $F(x)$ е дефинирана при $a \leq x < b$, монотонно расте и клони към l при $x \to b$, то $F(x) \leq l$. И наистина да допуснем, че в някоя точка x_0 имаме $F(x_0) > l$. От друга страна, имаме $\lim\limits_{x \to b} F(x) = l$ и следователно, като изберем едно положително число ε, ще имаме

$$|F(x) - l| < \varepsilon$$

при всички стойности на x, които са достатъчно близко до b (и, разбира се, по-малки от него). Специално, ако изберем

$$\varepsilon = F(x_0) - l,$$

ще получим

$$|F(x) - l| < F(x_0) - l$$

и толкова повече

$$F(x) - l < F(x_0) - l,$$

откъдето

$$F(x) < F(x_0),$$

което противоречи на условието за монотонното растене на $F(x)$.

Получените по този начин резултати ни позволяват да установим следния принцип за сравняване на несобствени интеграли (аналогичен на принципа за сравняване на редовете): ако двете функции $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$, ако

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

и ако интегралът

$$\int_a^b g(x)\, dx$$

е сходящ, то интегралът

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

е също сходящ.

И наистина функциите

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(x)\, dx,$$

$$G(\alpha) = \int_a^\alpha g(x)\, dx$$

са монотонно растящи при $a < \alpha < b$, защото имаме

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \geq 0,$$

$$G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta g(x)\, dx \geq 0,$$

когато $\alpha \leq \beta$. От друга страна, неравенството $f(x) \leq g(x)$ ни дава

$$F(\alpha) \leq G(\alpha)$$

и следователно

$$F(\alpha) \leq \int_a^b g(x)\, dx,$$

защото

$$G(\alpha) \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

С това ние показахме, че монотонно растящата функция $F(\alpha)$ е ограничена и следователно има граница, когато α клони към b (чрез стойности, по-малки от b).

Нека функцията $f(x)$ е интегруема във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$. Току-що установеният резултат ни позволява да покажем, че от сходимостта на интеграла

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

следва сходимостта на интеграла[1]

$$\int_a^b f(x)\, dx. \tag{2}$$

---

[1] В случая, когато интегралът $\int_a^b |f(x)|\, dx$ е сходящ, ние казваме, че интегралът $\int_a^b f(x)\, dx$ е абсолютно сходящ.

За да покажем това, разглеждаме двата интеграла

$$\int_a^b \frac{|f(x)|+f(x)}{2}dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{|f(x)|-f(x)}{2}dx.$$

Те са сходящи, защото

$$0 \leq \frac{|f(x)|+f(x)}{2} \leq |f(x)|,$$

$$0 \leq \frac{|f(x)|-f(x)}{2} \leq |f(x)|.$$

Като вземем пред вид, че

$$f(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}-\frac{|f(x)|-f(x)}{2},$$

заключаваме, че интересуващият ни интеграл (2) е също сходящ.

В много случаи е от полза следното достатъчно условие за сходимост или разходимост на несобствени интеграли. Нека функцията $f(x)$ е интегруема във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a<\alpha<b$. Ако тази функция удовлетворява неравенството

$$(5) \quad |f(x)| \leq \frac{A}{(b-x)^\lambda},$$

където $\lambda<1$ (A и λ са константи), то интегралът

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

е сходящ; ако ли пък

$$(5) \qquad f(x) \geq \frac{A}{b-x},$$

където $A>0$, то интегралът (4) е разходящ.

И наистина интегралът

$$\int_a^b \frac{A}{(b-x)^\lambda}\,dx$$

е сходящ при $\lambda<1$, защото при $a<\alpha<b$ имаме

$$\int_a^\alpha \frac{A}{(b-x)^\lambda}\,dx = \left| \frac{-A}{(1-\lambda)\,(b-x)^{-1+\lambda}} \right|_a^\alpha =$$

$$= \frac{A}{(1-\lambda)\,(b-a)^{-1+\lambda}} - \frac{A}{(1-\lambda)\,(b-\alpha)^{-1+\lambda}}$$

и следователно границата

$$\lim_{\alpha \to b} \int_a^\alpha \frac{A}{(b-x)^\lambda}\,dx$$

съществува. Като вземем пред вид неравенството (3), заключаваме с помощта на принципа за сравняване на интегралите, че интегралът (4) е абсолютно сходящ и следователно е сходящ.

От друга страна, интегралът

$$(6) \qquad \int_a^b \frac{A\,dx}{b-x}, \quad A>0,$$

е разходящ, защото при $a<\alpha<b$ имаме

$$\int_a^\alpha \frac{A\,dx}{b-x} = \left| -A\ln(b-x) \right|_a^\alpha = A\ln(b-a) - A\ln(b-\alpha)$$

и следователно интегралът

$$\int_a^\alpha \frac{A\,dx}{b-x}$$

расте неограничено при $\alpha \to b$. Оттук заключаваме, че интегралът (4) също не може да бъде сходящ, защото в противен случай от неравенството (5) и от принципа за сравняване на интегралите би следвала сходимостта на интеграла (6), което, както видяхме, не е вярно.

Дотук ние предполагахме, че ни е дадена функция, която е дефинирана (поне) в интервала $a \leq x < b$ и е интегруема във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a<\alpha<b$. В такъв случай ще казваме, че тази функция няма друга особеност освен евентуално около b. Ние ще предоставим на читателя сам да дефинира по този образец понятието функция, която няма други особености в даден интервал освен евентуално около краен брой негови точки, и да обобщи за този случай понятието несобствен интеграл.

II. Интеграли с безкрайни интеграционни граници

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана при $x \geq a$ и интегруема в собствен или несобствен смисъл във всеки интервал $[a, p]$, където $p>a$. Ние можем да образуваме интеграла

$$F(p) = \int_a^p f(x)\,dx$$

при $p>a$, колкото и голямо да е числото p. Ако съществува границата

$$\lim_{p\to\infty} F(p), \tag{7}$$

то тази граница се нарича несобствен интеграл на $f(x)$, разпространен върху безкрайния интервал $a\leq x$, и се означава със символи

$$\int_a^\infty f(x)\,dx. \tag{8}$$

Аналогично се дефинира интегралът

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx, \tag{9}$$

като

$$\lim_{q\to-\infty} \int_q^a f(x)\,dx. \tag{10}$$

Най-сетне под

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

се разбира сумата

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

И тук, вместо да казваме, че съществува границата (7) или (10), ние често казваме съответно, че интегралът (8) или (9) е сходящ.

Пример. Очевидно имаме

$$\int_0^p e^{-x}\,dx = \left| -e^{-x} \right|_0^p = 1-e^{-p}$$

и следователно

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-x}\,dx = 1.$$

Използувайки въведената по-горе терминология, можем да кажем, че интегралът

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

е сходящ и има стойност 1.

Не е трудно да се установи, че и тук е валиден принципът за сравняване на несобствени интеграли, който може да се формулира по следния начин: ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани при $x\geq a$ и са интегруеми във всеки интервал $a\leq x\leq p$, колкото и голямо да бъде числото p, ако $0\leq f(x)\leq g(x)$ и ако интегралът

$$\int_0^\infty g(x)\,dx$$

е сходящ, то интегралът

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

е сходящ. Ние ще предоставим този път доказателството на читателя.

Ако интегралът

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

е сходящ, казваме, че интегралът

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{11}$$

е абсолютно сходящ. Нека читателят сам докаже, че всеки абсолютно сходящ несобствен интеграл от вида (11), където функцията $f(x)$ е интегруема във всеки интервал $a\leq x\leq p$, е сходящ.

В много случаи е от полза следното достатъчно условие за сходимост или разходимост на интеграли: ако функцията $f(x)$ е

дефинирана при $x \geq a$, интегруема е във всеки интервал $a \leq x \leq p$ и удовлетворява неравенството

$$|f(x)| \leq \frac{A}{x^{\lambda}} \tag{12}$$

при всички достатъчно големи стойности на x, където $\lambda > 1$, то интегралът

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \tag{13}$$

е сходящ; ако ли пък при достатъчно големи стойности на x е изпълнено неравенството

$$f(x) \geq \frac{A}{x}, \tag{14}$$

където $A > 0$, то интегралът (13) е разходящ.

И наистина при $c > 0$ и $\lambda > 1$ интегралът

$$\int_c^{\infty} \frac{A\,dx}{x^{\lambda}}$$

е сходящ, защото

$$\int_c^p \frac{A\,dx}{x^{\lambda}} = \left| \frac{A}{(1-\lambda)x^{\lambda-1}} \right|_c^p = \frac{A}{(1-\lambda)p^{\lambda-1}} - \frac{A}{(1-\lambda)c^{\lambda-1}}$$

и следователно границата

$$\lim_{p \to \infty} \int_c^p \frac{A\,dx}{x^{\lambda}}$$

съществува. Оттук и от неравенството (12) заключаваме с помощта на принципа за сравняване на интегралите, че интегралът

$$\int_a^{\infty} |\ (x)|\, dx,$$

а оттук и интегралът (13) е сходящ.

При $A > 0$ интегралът

$$\int_c^{\infty} \frac{A\,dx}{x} \tag{15}$$

е разходящ, защото интегралът

$$\int_c^p \frac{A\,dx}{x} = A \ln p - A \ln c, \quad c > 0,$$

расте неограничено заедно с p. Ако допуснем за момент, че интегралът (13) е сходящ, бихме могли да заключим от неравенството (14), че интегралът (15) е също сходящ, което, както видяхме, не е вярно.

Пример 1. Да се покаже, че интегралът[1]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{16}$$

е сходящ.

Решение. Разглеждаме функцията

$$F(p) = \int_0^p \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Очевидно имаме

$$F(p) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_1^p \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Интегрирайки по части, получаваме

$$\int_1^p \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_1^p \frac{d \cos x}{x} = \cos 1 - \frac{\cos p}{p} - \int_1^p \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Границата

$$\lim_{p \to \infty} \int_1^p \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

съществува, защото

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

и следователно интегралът

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

[1] При $x = 0$ под $\frac{\sin x}{x}$ разбираме 1.

е сходящ. Като вземем пред вид, че границата

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\cos p}{p}$$

също съществува, заключаваме, че съществува и границата $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)$, т. е. интегралът (16) е сходящ.

Пример 2. Да се покаже, че интегралът

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx$$

е сходящ.

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(p)=\int_0^p \sin x^2\, dx=\int_0^1 \sin x^2\, dx+\int_1^p \sin x^2\, dx.$$

Направете в интеграла

$$\int_1^p \sin x^2\, dx$$

субституцията $x=\sqrt{t}$ и интегрирайте по части.

III. Интегрален критерий на Коши за сходимост

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана, монотонно намаляваща и неотрицателна при $x\geqq 0$. В такъв случай редът

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots$$

е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ интегралът

$$\int_0^\infty f(x)\, dx.$$

Доказателство. При $k-1\leqq x\leqq k$ имаме очевидно

$$f(k)\leqq f(x)\leqq f(k-1)$$

и следователно

$$\int_{k-1}^k f(k)\, dx \leqq \int_{k-1}^k f(x)\, dx \leqq \int_{k-1}^k f(k-1)\, dx$$

или още

$$f(k) \leqq \int_{k-1}^k f(x)dx \leqq f(k-1).$$

Давайки на k стойностите $1, 2, \cdots, n$ и събирайки получените неравенства, намираме

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n) \leqq \int_0^n f(x)\, dx \leqq f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1).$$

Ако допуснем, че интегралът

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

е сходящ, то от неравенството

$$\int_0^n f(x)\, dx \leqq \int_0^\infty f(x)\, dx$$

получаваме

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n) \leqq \int_0^\infty f(x)\, dx$$

или още

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(n) \leqq f(0)+\int_0^\infty f(x)\, dx,$$

откъдето заключаваме, че редът

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots \tag{17}$$

е сходящ, защото членовете му са неотрицателни и редицата от частичните му суми е ограничена.

Обратно, нека редът (17) е сходящ и S е неговата сума. Каквото и да е положителното число p, ние можем да изберем цяло число n, по-голямо от p. В такъв случай имаме

$$\int_0^p f(x)\, dx \leqq \int_0^n f(x)\, dx$$

и следователно

$$\int_0^p f(x)\, dx \leqq f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1) \leqq S,$$

нещо, което е достатъчно да твърдим, че интегралът

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

е сходящ.

Пример. Редът

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu \ln \nu}$$

е разходящ. И наистина функцията

$$\frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$$

е неотрицателна и монотонно намаляваща при $x \geqq 0$, а функцията

$$F(p)=\int_0^p \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}=\int_0^p \frac{d\ln(x+2)}{\ln(x+2)}=$$

$$=\ln\ln(p+2)-\ln\ln 2$$

расте неограничено заедно с p, т. е. интегралът

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}$$

е разходящ.

§ 30. Граничен преход под знака на интеграла

Да разгледаме редицата

(1) $$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots$$

с общ член

$$f_n(x)=n(n+1)(1-x)\,x^{n-1}.$$

Очевидно имаме

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=n(n+1)\int_0^1 x^{n-1}\,dx-n(n+1)\int_0^1 x^n\,dx=1$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=1.$$

От друга страна, не е трудно да се види, че редицата (1) клони към нула при $0 \leqq x \leqq 1$. И наистина при $x=0$ и $x=1$ това е очевидно. За да се убедим в това и при $0<x<1$, образуваме реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

и установяваме, като си послужим например с критерия на Даламбер, че този ред е сходящ. По такъв начин получаваме

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx=0.$$

От този пример виждаме, че може да се случи да имаме

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Толкова по-интересно е, че е в сила следната теорема:

Ако функциите $f_n(x)$ са непрекъснати в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и ако редицата

(2) $$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots$$

е равномерно сходяща, то границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

съществува и

(3) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Доказателство. Ние ще пишем за краткост

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

Функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, защото функциите $f_n(x)$ са непрекъснати и редицата (2) е равномерно сходяща. Това обстоятелство ни позволява да образуваме интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Избираме едно произволно положително число ε. В такъв случай ние можем да намерим число ν по такъв начин, че при $n>\nu$ и при всички стойности на x от интервала $[a, b]$ да имаме

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Така получаваме при $n>\nu$ следните неравенства:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b f_n(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\,dx\right|\leq$$

$$\leq\int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,dx\leq\varepsilon(b-a),$$

с което интересуващата ни теорема е доказана.

Нека обърнем внимание върху това, че при безкраен интеграционен интервал равномерната сходимост не е достатъчна за валидността на равенството (3). Така например редицата с общ член

$$f_n(x)=\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}$$

равномерно клони към нула при $x\geq 0$, защото

$$|f_n(x)|\leq\frac{1}{n};$$

въпреки това

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx=\lim_{p\to\infty}\int_0^p\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}dx=\lim_{p\to\infty}\left|-e^{-\frac{x}{n}}\right|_0^p=$$

$$=\lim_{p\to\infty}(1-e^{-\frac{p}{n}})=1$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx\neq 0.$$

Теоремата, която доказахме в този параграф, може да се редактира още и така:

Нека редът

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots,$$

членовете на който са непрекъснати функции на x в интервала $[a, b]$, е равномерно сходящ в този интервал. В такъв случай редът

$$(4)\qquad \int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots$$

е сходящ и

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots$$

За да докажем това, полагаме

$$f_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x),$$

откъдето получаваме чрез почленно интегриране

$$\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

От друга страна, редицата с общ член $f_n(x)$ равномерно клони към $f(x)$ и следователно

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\int_a^b u_\nu(x)\,dx,$$

което означава, че редът (4) е сходящ и

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_a^b u_\nu(x)\,dx.$$

Във връзка с разглеждания в този параграф въпрос за граничен преход под знака на интеграла ние ще докажем следната теорема, върху която може да се изгради едно важно обобщение на понятието интеграл:

Нека

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\cdots$$

е една почти навсякъде сходяща в интервала $a \leq x \leq b$ редица от интегруеми в Риманов смисъл функции, за която съответната редица от интеграли

$$\int_a^b f_1(x)\,dx, \int_a^b f_2(x)\,dx, \ldots$$

е ограничена; ако почти при всички стойности на x от интервала $[a, b]$ тази редица от функции монотонно намалява и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \leq 0.$$

Доказателство. Ние ще извършим доказателството от противното. Нека G е множеството от точките от интервала $[a, b]$, където е нарушено поне едно от условията:

1) Всичките функции $f_n(x)$ са непрекъснати.
2) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ при всички цели положителни стойности на n.
3) $\lim f_n(x)$ съществува.
4) $\lim f_n(x) \leq 0$.

Очевидно множеството G има мярка нула в смисъл на Лебег—Борел.

Нека $[c, d]$, където $c < d$, е кой да е подинтервал на интервала $[a, b]$. Очевидно

$$\int_c^d f_n(x)\,dx = \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^c f_n(x)\,dx - \int_d^b f_n(x)\,dx \geq$$

$$\geq \lim \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^c f_1(x)\,dx - \int_d^b f_1(x)\,dx,$$

т. е. монотонно намаляващата редица

$$\int_c^d f_1(x)\,dx, \int_c^d f_2(x)\,dx, \int_c^d f_3(x)\,dx, \ldots$$

е сходяща. Да положим

$$\lim \int_c^d f_n(x)\,dx = I_c^d.$$

Според нашето допускане имаме

$$I_a^b > 0.$$

Да покрием множеството G с такава редица от отворени интервали (p_ν, q_ν), където $p_\nu < q_\nu$, че да имаме

$$M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_\nu(x)\,dx < I_a^b,$$

където M е една положителна горна граница на $f_1(x)$, а $\varphi_\nu(x)$ е характеристична[1] функция на интервала (p_ν, q_ν). Това е възможно да се направи, защото множеството G има мярка нула и

$$\int_a^b \varphi_\nu(x)\,dx = \int_a^{p_\nu} \varphi_\nu(x)\,dx + \int_{p_\nu}^{q_\nu} \varphi_\nu(x)\,dx + \int_{q_\nu}^b \varphi_\nu(x)\,dx = \int_{p_\nu}^{q_\nu} dx = q_\nu - p_\nu.$$

По такъв начин, ако положителното число ε е достатъчно малко ще имаме

$$I_a^b > \varepsilon(b-a) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_\nu(x)\,dx.$$

Делим интервала $[a, b]$ на две равни части и означаваме с $[a_1, b_1]$ онази половина, за която

$$I_{a_1}^{b_1} > \varepsilon(b_1 - a_1) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_1}^{b_1} \varphi_\nu(x)\,dx.$$

Такава половина сигурно съществува, защото в противен случай, полагайки $c = \frac{a+b}{2}$, ще имаме

$$I_a^c \leq \varepsilon(c-a) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^c \varphi_\nu(x)\,dx,$$

$$I_c^b \leq \varepsilon(b-c) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_c^b \varphi_\nu(x)\,dx,$$

откъдето чрез почленно събиране ще получим

$$I_a^b \leq \varepsilon(b-a) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_\nu(x)\,dx,$$

което не е вярно.

[1] Относно дефиницията вж. § 11 на тази глава.

По-нататък делим интервала $[a_1, b_1]$ на две равни части и означаваме с $[a_2, b_2]$ сигурно съществуващата половина, за която

$$I_{a_2}^{b_2} > \varepsilon (b_2 - a_2) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_2}^{b_2} \varphi_\nu (x)\, dx.$$

Продължавайки този процес неограничено, получаваме една Канторова система от интервали $[a_n, b_n]$, подчинени на условието

$$I_{a_n}^{b_n} > \varepsilon (b_n - a_n) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_\nu (x)\, dx.$$

Нека x_0 е точката, която принадлежи на всички интервали от системата. Ще покажем, че x_0 не принадлежи на G. И наистина в противен случай точката x_0 ще бъде вътрешна за някой покриващ интервал (p_k, q_k) и следователно при достатъчно голяма стойност на n интервалът $[a_n, b_n]$ ще се съдържа изцяло в (p_k, q_k), поради което

$$\int_{a_n}^{b_n} \varphi_k (t)\, dt = \int_{a_n}^{b_n} dt = b_n - a_n,$$

откъдето

$$I_{a_n}^{b_n} > M (b_n - a_n)$$

и толкова повече

$$\int_{a_n}^{b_n} f_1 (x)\, dx > M (b_n - a_n);$$

а това не е възможно, защото

$$f_1 (x) \leq M.$$

И така точката x_0 не принадлежи на G и следователно $\lim f_n(x_0) \leq 0$. Оттук заключаваме, че при достатъчно голяма стойност на m ще имаме $f_m (x_0) < \varepsilon$. Нека n е толкова голямо, че при всяко x от интервала $[a_n, b_n]$ да имаме $f_m (x) < \varepsilon$. Това е възможно, защото функцията $f_m (x)$ е непрекъсната и точката x_0, а дължината на интервала $[a_n, b_n]$ клони към нула, когато n расте неограничено. По такъв начин получаваме

$$\int_{a_n}^{b_n} f_m (x)\, dx \leq \varepsilon (b_n - a_n)$$

и следователно

$$I_{a_n}^{b_n} \leq \varepsilon (b_n - a_n),$$

което противоречи на неравенството

$$I_{a_n}^{b_n} > \varepsilon (b_n - a_n) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_\nu (t)\, dt.$$

С това доказателството е завършено.

Преминаваме към обобщението на понятието интеграл, за което споменахме по-горе. За тази цел ще дадем някои дефиниции.

Интеграла

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

ще наричаме първа[1] интегрална норма на функцията $f(x)$.

Ще казваме, че една редица

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots \tag{4}$$

от интегруеми в интервала (a, b) функции удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма в този интервал, ако при всеки избор на положителното число ε е изпълнено неравенството

$$\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|\, dx < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи цели стойности на n и m.

Ако редицата (3) от интегруеми в интервала (a, b) функции удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма, то редицата

$$\int_a^b f_1(x)\, dx,\ \int_a^b f_2(x)\, dx,\ \ldots$$

[1] По-общо n-та интегрална норма на функцията $f(x)$ се нарича изразът

$$\sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n\, dx}, \text{ където } n \geq 1.$$

е сходяща, защото

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f_m(x)\,dx\right|\leq\int_a^b|f_n(x)-f_m(x)|\,dx$$

и следователно каквото и да бъде положителното число ε, неравенството

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f_m(x)\,dx\right|\leq\varepsilon$$

е изпълнено при всички достатъчно големи цели стойности на n и m.

Една функция $f(x)$, дефинирана почти навсякъде в един интервал (a, b), ще наричаме сумируема, ако съществува редица от непрекъснати функции

$$f_1(x), f_2(x), \ldots,$$

която удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма и клони почти навсякъде към $f(x)$ в този интервал. В такъв случай границата на редицата

$$\int_a^b f_1(x)\,dx, \int_a^b f_2(x)\,dx, \ldots$$

(която, както видяхме, сигурно съществува) ще наричаме Лебегов интеграл на функцията $f(x)$ върху интервала (a, b).

За да се убедим в еднозначността на така дадената дефиниция, разглеждаме още една редица

(6) $$g_1(x), g_2(x), \ldots$$

от непрекъснати функции, която удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма и клони почти навсякъде към $f(x)$.

Избираме редица от цели положителни числа

$$n_1<n_2<n_3<\ldots$$

по такъв начин, че да имаме

$$\int_a^b\left|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right|dx\leq\frac{1}{2^i}\quad(i=1, 2, 3, \ldots),$$

$$\int_a^b\left|g_{n_{i+1}}(x)-g_{n_i}(x)\right|dx\leq\frac{1}{2^i}\quad(i=1, 2, 3, \ldots).$$

Това е възможно да се направи, защото редиците (5) и (6) удовлетворяват условието на Коши относно първата интегрална норма. Очевидно имаме почти при всяко x

$$f_{n_p}(x)+\sum_{i=p}^{\infty}\left[f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right]=$$

$$=g_{n_p}(x)+\sum_{i=p}^{\infty}\left[g_{n_{i+1}}(x)-g_{n_i}(x)\right]$$

и следователно

$$f_{n_p}(x)-g_{n_p}(x)-\sum_{i=p}^{\infty}\left|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right|-\sum_{i=p}^{\infty}\left|g_{n_{i+}}(x)-g_{n_i}(x)\right|\leq 0.$$

По такъв начин, като вземем под внимание, че редицата от непрекъснати функции с общ член

$$\varphi_m(x)=f_{n_p}(x)-g_{n_p}(x)-\sum_{i=p}^{p+m}\left|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right|-$$

$$-\sum_{i=p}^{p+m}\left|g_{n_{i+1}}(x)-g_{n_i}(x)\right|$$

почти при всяко x, монотонно намалявайки, клони към граница която е по-малка или равна на нула, а редицата от интегралите

$$\int_a^b\varphi_m(x)\,dx\geq\int_a^b f_{n_p}(x)\,dx-\int_a^b g_{n_p}(x)\,dx-2\sum_{i=p}^{\infty}\frac{1}{2^i}$$

е ограничена, заключваме, че

$$\lim\int_a^b\varphi_m(x)\,dx\leq 0,$$

т. е.

$$\int_a^b f_{n_p}(x)\,dx-\int_a^b g_{n_p}(x)\,dx-\sum_{i=p}^{\infty}\int_a^b |f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|\,dx-$$

$$-\sum_{i=p}^{\infty}\int_a^b |g_{n_{i+1}}(x)-g_{n_i}(x)|\,dx\leq 0$$

и следователно

$$\int_a^b f_{n_p}(x)\,dx-\int_a^b g_{n_p}(x)\,dx\leq\sum_{i=p}^{\infty}\frac{1}{2^i}+\sum_{i=p}^{\infty}\frac{1}{2^i},$$

откъдето

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f_{n_p}(x)\,dx\leq\lim_{p\to\infty}\int_a^b g_{n_p}(x)\,dx.$$

Аналогично получаваме

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g_{n_p}(x)\,dx\leq\lim_{p\to\infty}\int_a^b f_{n_p}(x)\,dx,$$

което ни дава окончателно

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\,dx.$$

§ 31. Интеграли, зависещи от параметри. Диференциране под знака на интеграла

Нека функцията $f(x, \alpha)$ е дефинирана в правоъгълника[1]

(1) $$a\leq x\leq b,$$
$$c\leq\alpha\leq d.$$

Ако $f(x, \alpha)$ е интегруема функция на x в интервала $[a, b]$ при всяко фиксирано α от интервала $[c, d]$, можем да образуваме интеграла

[1] Тук се иска правоъгълникът да бъде затворен и краен.

$$\int_a^b f(x, \alpha)\,dx.$$

Стойността на този интеграл може евентуално да се мени, когато α се изменя. Тя обаче е еднозначно дефинирана, когато α е дадено, и следователно представлява една функция на α, добре дефинирана в интервала $[c, d]$. Ние ще означим тази функция с $F(\alpha)$, така че

(2) $$F(\alpha)=\int_a^b f(x, \alpha)\,dx.$$

Пример. Интегралът

$$\int_0^{\pi}\cos(\alpha+x)\,dx=\Big|\sin(\alpha+x)\Big|_0^{\pi}=\sin(\alpha+\pi)-\sin\alpha=-2\sin\alpha$$

представлява една функция на α (нека обърнем внимание обаче, че неопределеният интеграл

$$\int\cos(\alpha+x)\,dx=\sin(\alpha+x)$$

зависи не само от α, но и от x).

Ако $f(x, \alpha)$ е непрекъсната функция на двата си аргумента в правоъгълника (1), интегралът (2) е непрекъсната функция на α. И наистина нека α_0 е коя да е точка от интервала $[c, d]$ и ε е едно произволно положително число. Избираме положителното число δ по такъв начин, че при $|\alpha-\alpha_0|<\delta$ и $c\leq\alpha\leq d$ да имаме

$$|f(x, \alpha)-f(x, \alpha_0)|<\varepsilon$$

за всички стойности на x от интервала $[a, b]$. Това може да се направи, защото функцията $f(x, \alpha)$ е непрекъсната в крайния и затворен правоъгълник (1) и следователно е равномерно непрекъсната в същия правоъгълник.

При тези предположения очевидно

$$|F(\alpha)-F(\alpha_0)|=\left|\int_a^b [f(x, \alpha)-f(x, \alpha_0)]\,dx\right|\leq$$

$$\leq\int_a^b |f(x, \alpha)-f(x, \alpha_0)|\,dx\leq\varepsilon(b-a),$$

с което е установена непрекъснатостта на функцията $F(\alpha)$ в точката α_0.

Не е трудно да се докаже и следната теорема, която има многобройни приложения:

Нека функцията $f(x, \alpha)$ е дефинирана в правоъгълника

$$(3)\qquad \begin{aligned} a \leq x \leq b, \\ c \leq \alpha \leq d, \end{aligned}$$

интегруема в интервала $[a, b]$ при всяко фиксирано α и диференцуема частно спрямо α при всяко фиксирано x; нека освен това частната производна $f_\alpha'(x, \alpha)$ е непрекъсната в правоъгълника (3). При тези предположения функцията

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

е диференцуема в интервала $[c, d]$ и при всяко α_0 от този интервал

$$F'(\alpha_0) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx.$$

И наистина при $h \neq 0$ и $c \leq \alpha_0 + h \leq d$ имаме

$$\frac{F(\alpha_0+h) - F(\alpha_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_a^b [f(x, \alpha_0+h) - f(x, \alpha_0)]\, dx.$$

От друга страна, според теоремата за крайните нараствания

$$f(x, \alpha_0+h) - f(x, \alpha_0) = h f_\alpha'(x, \alpha_0 + \theta h),$$

където числото θ се намира в отворения интервал $(0, 1)$ и може да се мени заедно с x и h. Оттук получаваме

$$\frac{F(\alpha_0+h) - F(\alpha_0)}{h} - \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx = \int_a^b [f_\alpha'(x, \alpha_0 + \theta h) - f'_\alpha(x, \alpha_0)]\, dx$$

и следователно

$$\left| \frac{F(\alpha_0+h) - F(\alpha_0)}{h} - \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx \right| \leq \int_a^b |f'_\alpha(x, \alpha_0 + \theta h) - f'_\alpha(x, \alpha_0)|\, dx.$$

От друга страна, функцията $f_\alpha'(x, \alpha)$ е непрекъсната в крайния и затворен правоъгълник (3) и следователно е равномерно непрекъсната. Това обстоятелство ни позволява да твърдим, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ по такъв начин, че при $|k| < \delta$, $c \leq \alpha_0 + k \leq d$ и при $a \leq x \leq b$ да имаме

$$|f'_\alpha(x, \alpha_0 + k) - f'_\alpha(x, \alpha_0)| < \varepsilon$$

и следователно при $|h| < \delta$

$$\left| \frac{F(\alpha_0+h) - F(\alpha_0)}{h} - \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx \right| < \varepsilon (b-a),$$

с което доказателството е завършено.

Доказаната теорема може да се обобщи. Така, ако функцията $f(x, \alpha)$ е непрекъсната в правоъгълника (3), притежава непрекъсната частна производна $f_\alpha(x, \alpha)$ и функциите $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ са дефинирани, диференцуеми в интервала $[c, d]$ и удовлетворяват условията

$$a < \varphi(\alpha) < b, \quad a < \psi(\alpha) < b,$$

функцията

$$\Phi(\alpha) = \int_{\psi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx$$

е диференцуема в интервала (c, d) и

$$\Phi'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + f[\psi(\alpha), \alpha]\, \psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha), \alpha]\, \varphi'(\alpha).$$

И наистина функцията

$$F(\alpha, u, v) = \int_v^u f(x, \alpha)\, dx$$

на трите независими променливи α, u, v притежава непрекъснати частни производни

$$F'_u(\alpha, u, v) = f(u, \alpha),$$

$$F'_v(\alpha, u, v) = -f(v, \alpha),$$

$$F'_\alpha(\alpha, u, v) = \int_v^u f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Непрекъснатостта на производните F'_u и F'_v е очевидна, а непрекъснатостта на производната F'_α може да се установи лесно. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и означаваме с R една горна граница на $|f'_\alpha(x, \alpha)|$. Ние можем да изберем положителното число δ толкова малко, че при $|h|<\delta$, $c \leq \alpha+h \leq d$, $a \leq x \leq b$ да имаме

$$|f'_\alpha(x, \alpha+h) - f'_\alpha(x, \alpha)| < \varepsilon.$$

В такъв случай получаваме при $|h|<\delta$, $|k|<\varepsilon$, $|l|<\varepsilon$.

$$a \leq u \leq b,\ a \leq u+k \leq b,$$
$$a \leq v \leq b,\ a \leq v+l \leq b$$

следните неравенства:

$$|F'_\alpha(\alpha+h,\ u+k,\ v+l) - F'_\alpha(a, u, v)| =$$
$$= \left| \int_{v+l}^{u+k} f'_\alpha(x, \alpha+h)\, dx - \int_v^u f'_\alpha(x, \alpha)\, dx \right| =$$
$$= \left| \int_v^u [f'_\alpha(x, \alpha+h) - f'_\alpha(x, \alpha)]\, dx + \int_{v+l}^{u} f'_\alpha(x, \alpha+h)\, dx + \right.$$
$$\left. + \int_u^{u+k} f'_\alpha(x, a+h)\, dx \right| \leq \varepsilon |u-v| + |l| R + |k| R \leq \varepsilon [b-a+2R],$$

с което непрекъснатостта на производната е доказана.

Тази резултат ни позволява да приложим теоремата за диференциране на съставни функции. И така функцията $\Phi(\alpha)$ е наистина диференцуема и

$$\Phi'(\alpha) = F'_\alpha + F'_u \psi'(\alpha) + F'_v \varphi'(\alpha)$$

или още

$$\Phi'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + f[\psi(\alpha), \alpha]\, \psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha), \alpha]\, \varphi'(\alpha).$$

Пример. Видяхме в § 21 на тази глава, че интегралът

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

е сходящ. Сега ще пресметнем неговата стойност. За тази цел разглеждаме помощната функция

$$F(\alpha, p) = \int_0^p e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Доказаната по-горе теорема за диференциране под знака на интеграла ни дава

$$F'_\alpha(\alpha, p) = -\int_0^p e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \left| \frac{e^{-\alpha x}(\alpha \sin x + \cos x)}{\alpha^2+1} \right|_0^p =$$
$$= \frac{e^{-\alpha p}(\alpha \sin p + \cos p)}{\alpha^2+1} - \frac{1}{\alpha^2+1}$$

и следователно

$$F(\alpha, p) = C - \int_\alpha^\infty \frac{k^{-tp}(t \sin p + \cos p)}{t^2+1}\, dt - \operatorname{arc\,tg} \alpha, \tag{4}$$

където C не зависи от α. Като вземем пред вид неравенството

$$|F(\alpha, p)| \leq \int_0^p e^{-\alpha x} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \leq \int_0^p e^{-\alpha x}\, dx =$$
$$= \frac{1-e^{-\alpha p}}{\alpha} < \frac{1}{\alpha},$$

заключаваме, че $F(\alpha, p)$ клони към нула, когато α расте неограничено. Извършвайки в равенството (4) граничния преход $\alpha \to \infty$, получаваме

$$0 = C - \frac{\pi}{2}$$

и следователно $C = \frac{\pi}{2}$, откъдето

$$F(\alpha, p) = \frac{\pi}{2} - \int_\alpha^\infty \frac{e^{-tp}(t \sin p + \cos p)}{t^2+1}\, dt - \operatorname{arc\,tg} \alpha.$$

Специално при $\alpha=0$

$$F(0,p)=\frac{\pi}{2}-\int_0^\infty \frac{e^{-tp}(t\sin p+\cos p)}{t^2+1}\,dt.$$

Според дефиницията на понятието несобствен интеграл

$$I=\lim_{p\to\infty} F(0,p).$$

По този начин въпросът за пресмятането на I се сведе към въпроса за намирането на границата

$$l=\lim_{p\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-tp}(t\sin p+\cos p)}{t^2+1}\,dt,$$

което може да стане по следния начин:

$$\left|\int_0^\infty e^{-tp}\,\frac{t\sin p+\cos p}{t^2+1}\,dt\right|\leq\int_0^\infty e^{-tp}\,\frac{t|\sin p|+|\cos p|}{t^2+1}\,dt\leq$$

$$\leq\int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{t+1}{t^2+1}\,dt\leq 2\int_0^\infty e^{-pt}\,dt=\frac{2}{p},$$

и следователно интересуващата ни граница l е равна на нула. По такъв начин получаваме окончателно

$$I=\frac{\pi}{2}.$$

Общи задачи

1. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

клони към $\ln 2$.

Упътване. Покажете, че редицата клони към определения интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

2. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}.$$

3. Намерете границата с общ член

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}.$$

4. Покажете, че несобственият интеграл

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$$

е сходящ и пресметнете неговата стойност.

Упътване. Покажете предварително, че

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin 2x}{2}\,dx.$$

Отговор. $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

5. Пресметнете интеграла

$$F(\alpha)=\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx.$$

Упътване. Покажете, че функцията $F(\alpha)$ е четна, като преобразувате интеграла

$$F(-\alpha)=\int_0^\pi \ln(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

с помощта на субституцията

$$x=\pi-y.$$

Покажете след това, че

$$2F(\alpha)=F(\alpha)+F(-\alpha)=\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx+$$

$$+\int_0^\pi \ln(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=$$

$$=\int_0^\pi \ln(1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)\,dx,$$

и направете субституцията $2x=y$. Това ще ви даде

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy.$$

Ако в последния интеграл направите субституцията $y=2\pi-z$, ще получите

$$\int_{\pi}^{2\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy=\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos z+\alpha^4)\,dz$$

и следователно

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha^2)+\frac{1}{2}F(\alpha^2)=F(\alpha^2).$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че

$$F(\alpha)=\frac{F(\alpha^{2^n})}{2^n}.$$

От друга страна, очевидно

$$1-2|\lambda|+\lambda^2\leq 1-2\lambda\cos x+\lambda^2\leq 1+2|\lambda|+\lambda^2$$

и следователно при $\alpha\neq\pm 1$

$$\pi\ln(1-\alpha^{2^n})^2\leq F(\alpha^{2^n})\leq\pi\ln(1+\alpha^{2^n})^2.$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че при $|\alpha|<1$ имаме

$$\lim_{n\to\infty}F\frac{(\alpha^{2^n})}{2^n}=0$$

и следователно $F(\alpha)=0$. За да пресметнете стойността на $F(\alpha)$ при $|\alpha|>1$, положете $\alpha=\frac{1}{\beta}$ и използувайте равенството

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1-2\beta\cos x+\beta^2)\,dx-\pi\ln\beta^2.$$

Това ще ви даде

$$F(\alpha)=\pi\ln\alpha^2.$$

За да пресметнете интеграла при $\alpha=\pm 1$, използувайте по-предната задача. Това ще ви даде $F(1)=F(-1)=0$.

6. Нека $\varphi(x)$ е функция, дефинирана при $0<x\leq 1$ по следния начин: $\varphi(x)=\frac{1}{q}$, когато $x=\frac{p}{q}$, където p и q са цели взаимно прости числа; $\varphi(x)=0$, когато x е ирационално число. Докажете, че функцията $\varphi(x)$ е интегруема в Риманов смисъл в интервала $[0, 1]$ (при все че тя е прекъсната за всички рационални стойности на x от дефиниционния си интервал). Покажете, че функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната за всички ирационални стойности на x от интервала $0<x\leq 1$.

7. Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна и непрекъсната в интервала $[a, b]$. Покажете, че равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx=0$$

е изпълнено само ако $f(x)=0$ за всички стойности на x от интервала $[a, b]$.

Упътване. Нека $a\leq\alpha<\beta\leq b$. Покажете, че

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx=0, \tag{1}$$

като си послужите с равенството

$$\int_a^{\alpha}f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx+\int_{\beta}^{b}f(x)\,dx=0$$

и неравенствата

$$\int_a^{\alpha}f(x)\,dx\geq 0,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx\geq 0,$$

$$\int_{\beta}^{b}f(x)\,dx\geq 0.$$

Приложете за равенството (1) теоремата за средните стойности и покажете по този начин, че функцията $f(x)$ се анулира поне веднъж във всеки подинтервал $[\alpha, \beta]$ на интервала $[a, b]$. Използувайте този резултат, за да покажете, че непрекъснатата функция $f(x)$ се анулира тъждествено.

8. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $[a, b]$. Покажете, че е в сила неравенството

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2\leq\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

При това равенството

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2=\left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$\lambda f(x)+\mu g(x)=0$$

при подходящ избор на константите λ и μ, от които поне едната е различна от нула (Буняковски—Шварц).

Упътване. Квадратичната форма

$$\int_a^b [\lambda f(x)+\mu g(x)]^2\,dx=\lambda^2\int_a^b f^2(x)\,dx+2\lambda\mu\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx+\mu^2\int_a^b g^2(x)\,dx$$

е способна да приема само неотрицателни стойности, когато $a\leq b$, и следователно дискриминантата ѝ не е положителна.

9. Нека функцията $F(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения триъгълник

$$a\leq x\leq b,$$

$$a\leq y\leq x.$$

Покажете, че

$$\int_a^b\left[\int_a^x F(x, y)\,dy\right]dx=\int_a^b\left[\int_y^b F(x, y)\,dx\right]dy$$

(Дирихле — Dirichlet).

Упътване. Сравнете производните на двете функции

$$f(t)=\int_a^t\left[\int_a^x F(x, y)\,dy\right]dx,$$

$$g(t)=\int_a^t\left[\int_y^t F(x, y)\,dx\right]dy,$$

където $a\leq t\leq b$.

10. Да се пресметне интегралът

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx,$$

където n е цяло положително число.

Упътване. Установете предварително следната редукционна формула:

$$I_n=\frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Отговор. Ако n е четно, т. е. $n=2m$, където m е цяло,

$$I_{2m}=\frac{(2m-1)\,(2m-3)\ldots 3\,.\,1}{2m\,(2m-2)\ldots 4\,.\,2}\,.\,\frac{\pi}{2}.$$

Ако n е нечетно, т. е. $n=2m+1$, където m е цяло,

$$I_{2m+1}=\frac{2m\,(2m-2)\ldots 4\,.\,2}{(2m+1)\,(2m-1)\ldots 5\,.\,3}.$$

11. Докажете, че

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\ldots 2n\,.\,2n}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-1)\,(2n+1)} \tag{2}$$

(Формула на Джон Валис — J. Wallis).

Забележка. Често формулата (2) се записва във вида

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\,.\,2}{1\,.\,3}\,.\,\frac{4\,.\,4}{3\,.\,5}\,.\,\frac{6\,.\,6}{5\,.\,7}\ldots\frac{2n\,.\,2n}{(2n-1)\,(2n+1)}\ldots$$

Упътване. Послужете си с неравенствата

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1} x\,dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} x\,dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1} x\,dx$$

и използувайте предната задача.

12. Да се докаже, че

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$$

(Л. Ойлер — L. Euler).

Упътване. Използувайте развитието

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}\,.\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

което е равномерно сходящо при $-1\leq x\leq 1$.

Положете $\arcsin x=t$. По такъв начин ще получите развитието

$$t=\sin t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}\,.\,\frac{\sin^{2n+1} t}{2n+} \tag{3}$$

при $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$, което е също тъй равномерно сходящо. Интегрирайте двете части на равенството (3) от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и използувайте задача 10.

13. Докажете, че

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

(Ойлер).

Упътване. Използувайте предната задача, като покажете, че

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=$$

$$=\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right]+$$

$$+\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right]+$$

$$+\frac{1}{4^2}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right]+$$

. . . . . .

14. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана при $x\geq 0$, има непрекъсната производна и нека интегралът

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$$

е сходящ. Докажете, че

$$\int_0^\infty \frac{f(x)-f(\alpha x)}{x}\,dx=f(0)\ln\alpha,$$

където $\alpha>0$.

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(\alpha,p)=\int_0^p \frac{f(x)-f(\alpha x)}{x}\,dx,$$

където $p>0$. Покажете, че

$$F'_\alpha(\alpha,p)=\frac{f(0)}{\alpha}-\frac{f(\alpha p)}{\alpha},$$

и използувайте този резултат, за да получите равенството

$$F(\alpha,p)=f(0)\ln\alpha-\int_1^\alpha \frac{f(tp)}{t}\,dt,$$

което след субституцията $tp=u$ ще ви даде

$$F(\alpha,p)=f(0)\ln\alpha-\int_p^{p\alpha}\frac{f(u)}{u}\,du.$$

Извършете в последното равенство граничния преход $p\to\infty$.

15. Да се покаже, че

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}\,dx=e^{-2\alpha}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \qquad \alpha\geq 0$$

(Лаплас — Laplace).

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(\alpha,p)=\int_{\frac{\alpha}{p}}^p e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}\,dx,$$

където $p>0$, $\alpha>0$, и използувайте равенството

$$F'_\alpha(\alpha,p)=-2\alpha\int_{\frac{\alpha}{p}}^p e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{p}e^{-\frac{\alpha^2}{p^2}-p^2},$$

което след субституцията $x=\frac{\alpha}{t}$ ще ви даде при $\alpha>0$

$$F'_\alpha(\alpha,p)+2F(\alpha,p)=-\frac{1}{p}e^{-\frac{\alpha^2}{p^2}-p^2}.$$

Покажете, че при $\alpha\geq 0$

$$e^{2\alpha}F(\alpha,p)=C-\frac{e^{-p^2}}{p}\int_0^\alpha e^{\frac{p}{p}+2t}\,dt, \tag{4}$$

където C не зависи от α. За да пресметнете стойността на C, положете $\alpha=0$. Извършете граничен преход $p\to\infty$ в равенството (4).

16. Да се покаже, че

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx=e^{-\alpha^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

Лаплас).

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(\alpha,p)=\int_0^p e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$$

и покажете, че

$$F\alpha'(\alpha,p)=-2\int_0^p e^{-x^2}x\sin 2\alpha x\,dx=$$

$$=e^{-p^2}\sin 2\alpha p-2\alpha\int_0^p e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$$

или още

$$F\alpha'(\alpha,p)+2\alpha F(\alpha,p)=e^{-p^2}\sin 2\alpha p.$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че

$$e^{\alpha^2} F(\alpha, p) = C + e^{-p^2} \int_0^{\alpha} e^{t^2} \sin 2pt\, dt, \tag{5}$$

където C не зависи от α. Пресметнете стойността на C, като поставите $\alpha=0$. Извършете в равенството (5) граничния преход $p \to \infty$.

Дефиниция. Казваме, че две функции $f(x)$ и $g(x)$ са ортогонални помежду си в интервала $[a, b]$, когато

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0.$$

Разбира се, понятието ортогоналност има смисъл само когато произведението $f(x)\, g(x)$ представлява интегруема (в собствен или несобствен смисъл) функция.

Казваме, че редицата от функциите

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$$

образува една ортогонална система в интервала $[a, b]$, когато всеки две (различни по номер) функции от тази редица са ортогонални помежду си. Казваме, че ортогоналната система (6) е нормирана, когато квадратът на всяка една от функциите е интегруем в интервала $[a, b]$ и

$$\int_a^b f_k^2(x)\, dx = 1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

17. Покажете, че функциите

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

образуват ортогонална и нормирана система в интервала $[0, 2\pi]$.

18. Покажете, че функциите

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \ldots$$

образуват ортогонална и нормирана система в интервала $[0, \pi]$.

19. Покажете, че функциите

$$\frac{T_n(x)}{\sqrt[4]{1-x^2}},$$

където

$$T_n(x) = \cos [n \arccos x]$$

е n-ти полином на Чебишев, образуват ортогонална система в интервала $[-1, 1]$.

20. Покажете, че n-тият полином на Лежандър

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

е ортогонален в интервала $[-1, 1]$ на всички полиноми, чиято степен е по-ниска от n.

Упътване. Покажете предварително чрез интегриране по части, че при $k<n$

$$\int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\, dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^n x^k}{dx^n}\, dx = 0.$$

21. Покажете, че полиномите

$$\frac{1}{n!\, 2^n} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

където

$$P_n(x) = \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

(вж. предната задача), образуват ортогонална и нормирана система.

22. Нека непрекъснатите функции

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots \tag{7}$$

образуват ортогонална и нормирана система в крайнинтервал $[a, b]$ и нека редът

$$\varphi(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \ldots \tag{8}$$

е равномерно сходящ. Покажете, че

$$a_k = \int_a^b \varphi(x)\, f_k(x)\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Упътване. Умножете двете части на равенството (8) с $f_k(x)$ и интегрирайте от a до b.

23. Нека функциите

$$f_1(x), \quad f_2(x), \ldots \tag{9}$$

образуват ортогонална и нормирана система в интервала $[a, b]$ и нека $f(x)$ е една функция, за която интегралите

$$\int_a^b f^2(x)\, dx, \quad \int_a^b f(x)\, f_k(x)\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

имат смисъл. Да се докаже, че при всички цели положителни стойности на n е в сила неравенството

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leq \int_a^b f^2(x)\, dx,$$

където

$$a_k=\int_a^b f(x)\,f_k(x)\,dx$$

(Бесел — Bessel).

Упътване. Покажете, че

$$\int_a^b\left[f(x)-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\,f_\nu(x)\right]^2dx=\int_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2.$$

24. Нека функцията $f(x)$ и функциите (9) удовлетворяват условията на предната задача. Покажете, че интегралът[1]

$$\int_a^b\left[f(x)-\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\,f_\nu(x)\right]^2dx$$

има най-малка стойност, когато

$$c_\nu=\int_a^b f(x)\,f_\nu(x)\,dx.$$

Упътване. Положете[2]

$$a_\nu=\int_a^b f(x)\,f_\nu(x)\,dx$$

и използувайте тъждеството

$$\int_a^b\left[f(x)-\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu f_\nu(x)\right]^2dx=\int_a^b\left[f(x)-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu f_\nu(x)\right]^2dx+\sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu-a_\nu)^2$$

---

[1] Стойността на този интеграл зависи от избора на константите

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n.$$

[2] Числата

$$a_\nu=\int_a^b f(x)\,f_\nu(x)\,dx$$

се наричат Фуриерови коефициенти на функцията $f(x)$ по отношение на ортогоналната и нормирана система (9).

Редът

$$a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)+\ldots+a_n f_n(x)+\ldots$$

независимо от това, дали е сходящ, или не и независимо от стойността на неговата сума, се нарича Фуриеров ред на функцията $f(x)$ по отношение на ортогоналната и нормирана система (9).

25. Нека $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ са нулите на n-тия полином на Лежандър

$$P_n(x)=\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Покажете, че:

а) формулата на Котс

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=a_1\,f(x_1)+a_2\,f(x_2)+\ldots+a_n\,f(x_n), \tag{10}$$

където коефициентите $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ се определят от равенствата (6) от § 27 на тази глава, е вярна, когато $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава $2n-1$;

b) коефициентите $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ са положителни;

c) не е възможно да се изберат точките $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ и коефициентите $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ така, че равенството (10) да бъде вярно при всички полиноми, чиято степен не надминава $2n$.

(Гаус — C. F. Gauss).

Упътване. а) Както е известно от алгебрата, полиномът $f(x)$, чиято степен не надминава $2n-1$, може да се представи във вида

$$f(x)=\varphi(x)\,P_n(x)+R(x),$$

където $\varphi(x)$ и $R(x)$ са полиноми, чиято степен не надминава $n-1$.

Използувайте задача (20) и докажете, че

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,P_n(x)\,dx+\int_{-1}^{1}R(x)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}R(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\,R(x_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\,f(x_\nu).$$

б) Разгледайте полиномите

$$\varphi_i(x)=\frac{P_n^2(x)}{(x-x_i)^2},$$

чиято степен е равна на $2n-2$, и използувайте тъждеството

$$\int_{-1}^{1}\varphi_i(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\,\varphi_i(x_\nu)=a_i\,\varphi_i(x_i)=a_i P_n'^2(x_i).$$

в) Разгледайте полинома

$$F(x)=(x-x_1)^2\,(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2.$$

В такъв случай формулата (10) приема вида

$$\int_{-1}^{1}F(x)dx=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\,F_\nu(x_\nu)=0,$$

което не е възможно, защото полиномът $F(x)$ приема само неотрицателни стойности, но не се анулира тъждествено.

76 Да разгледаме редицата от полиномите

$$B_1(x),\ B_2(x),\ B_3(x),\ \ldots,$$

дефинирани с условията

$$B_1(x)=x-1,$$

$$B_{n+1}(x)=n\int_0^x B_n(t)\,dt-nx\int_0^1 B_n(t)\,dt,\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

(полиноми на Бернули), и да положим

$$B_n=B'_{n+1}(1),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

(числа на Бернули).

Докажете, че

1) $$B_n(0)=0,\ n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots;$$
$$B_n(1)=0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

2) $$B'_{n+1}(x)=n\,B_n(x)-n\int_0^1 B_n(t)\,dt,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

3) $$[B_n(x+1)-B_n(x)]'=(n-1)[B_{n-1}(x+1)-B_{n-1}(x)],\ n=2,3,\ \ldots$$

4) $$B_n(x+1)-B_n(x)=x^{n-1},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Извършете доказателството индуктивно и използувайте равенствата $B_n(0)=B_n(1)=0$ (при $n=2,\ 3,\ \ldots$).

5) $$B_n(2)=1,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

6) $$[B_{2n+2}(x)-B_{2n+2}(2-x)]''=(2n+1)2n[B_{2n}(x)-B_{2n}(2-x)],$$
$$n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

7) $$B_{2n}(x)-B_{2n}(2-x)=(x-1)^{2n-1},\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

(Пресметнете стойността на разликата $B_{2n}(x)-B_{2n}(2-x)$ при $x=0$ и $x=1$ и извършете доказателството индуктивно.)

8) $$B'_{2n}(x)+B'_{2n}(2-x)=(2n-1)(x-1)^{2n-2},$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots$$

9) $$B_{2n-1}=0,\ n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

10) $$B'_2(1)=-B'_2(0)=\frac{1}{2},$$

$$B'_{n+1}(0)=B'_{n+1}(1),\qquad n=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

11) $$B_n=-n\int_0^1 B_n(t)\,dt,\quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

12) $$B''_n(x)=(n-1)\,B'_{n-1}(x),\ n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

13) $$B^{(k)}_n(x)=(n-1)B^{(k-1)}_{n-1}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots;\ k=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

14) $$B^{(k)}_n(x)=(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,B'_{n-k+1}(x),\ 2\le k\le n.$$

15) $$B^{(k)}_n(1)=(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)B_{n-k},$$
$$2\le k\le n.$$

16) $$B^{(k)}_n(1)=\frac{k!}{n}\binom{n}{k}B_{n-k},\ 1\le k\le n.$$

17)

(11) $$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{B^{(k)}_n(1)}{k!}(x-1)^k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}\cdot(x-1)^k.$$

18) $$n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

положете $x=2$ в равенството (11)).

19) $$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}B_{n-k}=0,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

(положете в тъждеството (11) $x=0$).

20) $$1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k=B_{k+1}(n+1)$$

21) $$|B_n(x)|\le(n-1)!\,2^{n-1},\quad 0\le x\le 1.$$

22) $$|B_n|\le n!\,2^{n-1},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

23) $$\frac{xe^x}{e^x-1}=B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\ldots+\frac{B_n}{n!}x^n+\ldots$$

при достатъчно малки значения на $|x|$.

Упътване. Покажете, че редът $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}x^\nu$ е сходящ при достатъчно малки значения на $|x|$ и

$$(e^x-1)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu\,x^\nu}{\nu!}=xe^x.$$

27. Нека $B_n(x)$ е n-тият полином на Бернули[1], а B_n е n-тото Бернулиево[1] число. Нека $P_n(x)$ са периодични функции с период 1, дефинирани при $0 \leq x < 1$ с условието

$$P_n(x) = \frac{nB_n(x) + B_n}{n!}.$$

Покажете, че[2]

(1) $$P_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}.$$

2) Функциите $P_n(x)$, $n = 2, 3, \ldots$, са непрекъснати дори тогава, когато x е цяло число.

Упътване. Покажете, че

$$\lim_{x \to 1} P_n(x) = P_n(0).$$

3) Покажете, че функциите $P_n(x)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$, са диференцуеми дори тогава, когато x е цяло число.

4) $$P'_{n+1}(x) = P_n(x), \quad n = 2, 3, \ldots$$

5) $$P_n(1) = P_n(0) = \frac{B_n}{n!}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

28. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема и има непрекъсната първа производна при $x \leq 0$. Покажете, че[3]

12) $$f(0) + f(1) + \ldots + f(n) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{f(0) + f(n)}{2} + \int_0^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx$$

сумационна формула на Ойлер—Маклорен).

Упътване. Използвайте равенството

$$\int_0^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx$$

и интегрирайте по части.

29. Нека функцията $f(x)$ е диференцуема $2k+1$ път при $x \geq 0$ и производната ѝ от ред $2k+1$ е непрекъсната. Да се докаже, че при означенията в задачи 26 и 27 имаме

$$f(0) + f(1) + \ldots + f(n) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{f(0) + f(n)}{2} +$$

[1] Вижте предната задача.
[2] Символът $[x]$ означава най-голямото цяло число, което не надминава x.
[3] Символът $[x]$ означава най-голямото число, което не надминава x.

$$+ \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(0)] + \frac{B_4}{4!}[f'''(n) - f'''(0)] + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + R_k,$$

където

$$R_k = \int_0^n P_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x)\,dx$$

(сумационна формула на Ойлер—Маклорен; обобщение на сумационната формула от предната задача).

Упътване. Извършете във формулата (12) неколкократно интегриране по части и използвайте задача 27.

30. Нека функцията $f(x)$ е положителна и монотонно намаляваща при $x \geq 0$. Ако при всички достатъчно големи стойности на x имаме

(13) $$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leq q < 1,$$

то редът

14) $$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots$$

е сходящ. Ако при всички достатъчно големи стойности на x имаме

15) $$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \geq 1,$$

то редът (14) е разходящ (критерий на Ермаков).

Упътване. Ако е изпълнено условието (13), то при $x \geq x_0$, където x_0 е достатъчно голямо, имаме

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} e^t f(e^t)\,(dt) \leq q \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

и следователно

$$(1-q) \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt \leq q \left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt\right] \leq$$

$$\leq q \left[\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt - \int_{x}^{e^x} f(t)\,dt\right] \leq q \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt.$$

Заключете оттук, че интегралът $\int_0^\infty f(t)\,dt$ е сходящ и приложете интегралния критерий на Коши.

Ако е изпълнено условието (15), то при $x \geq x_1$, където x_1 е достатъчно голямо, имаме

$$\int_{e^{x_1}}^{e^x} t f(t)\, dt = \int_{x_1}^{x} e^t f(e^t)\, dt \geq \int_{x_1}^{x} f(t)\, dt$$

и следователно

$$\int_{x}^{e^x} f(t)\, dt \geq \int_{x_1}^{e^{x_1}} f(t)\, dt.$$

Заключете оттук, че интегралът $\int_0^\infty f(t)\, dt$ е разходящ и приложете интегралния критерий на Коши.

31. Нека дефинираме функцията $\Gamma(x)$ (четете — гама икс) при $x>0$ по следния начин:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{16}$$

Наричаме интеграла (16) сходящ, когато двата интеграла

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt, \quad \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

а сходящи, и полагаме по дефиниция

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Забележка. Означенията, които ще въвеждаме в някои от точките, ще използуваме и в следните точки.

Да се докаже следното:

1) Интегралът

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

е сходящ при $x>0$.

2) Ако x е цяло положително число, то

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

3) Функцията $\Gamma(x)$ е диференцуема безбройно много пъти.

4) Ако една функция $\varphi(x)$ е диференцуема два пъти в някой интервал Δ и втората ѝ производна е неотрицателна, то при фиксирано x отношението

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

е монотонно растяща функция на h, когато x и $x+h$ принадлежат към Δ.

5) Функцията $\Gamma(x)$ притежава следните свойства при всички положителни стойности на x:

а) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

б) $\Gamma(x) > 0$;

в) $\frac{d^2}{dx^2}[\ln \Gamma(x)] > 0$;

г) $\Gamma(1) = 1$.

Тези условия ще наричаме кратко условия на Бор—Молеруп.

6) Ако една функция $f(x)$ е дефинирана при $x>0$, два пъти е диференцуема и удовлетворява при всички положителни стойности на x условията

а) $f(x+1) = x f(x)$;

б) $f(x) > 0$;

в) $\frac{d^2}{dx^2}[\ln f(x)] > 0$;

г) $f(1) = 1$,

то $f(x) = \Gamma(x)$.

(H. Bohr и J. Mollerup; E. Artin).

Упътване. Като използуваме неравенствата

$$\frac{\ln f(-1+n) - \ln f(n)}{(-1+n)-n} \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{(x+n)-n} \leq \frac{\ln f(1+n) - \ln f(n)}{(1+n)-n}$$

при цели, по-големи от 1 стойности на n и при $0<x\leq 1$, покажете, че

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \cdot \frac{x+n}{n}$$

и заключете оттук, че

$$\frac{n}{x+n} f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \leq f(x).$$

Използувайте тези неравенства, за да установите, че

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

и следователно $f(x) = \Gamma(x)$ при $0<x\leq 1$. Разпространете този резултат за всичките положителни стойности на x, като използувате равенствата $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ и $f(x+1) = xf(x)$.

Забележка. Представянето

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

произхожда от Гаус.

7) Нека при $x>0$ положим

$$g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1.$$

Покажете, че

$$0<g(x)<\frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}.$$

Упътване. Очевидно

$$g(x)=\frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{5(2x+1)^4}+\frac{1}{7.(2x+1)^6}+\ldots<$$

$$<\frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{3(2x+1)^4}+\frac{1}{3(2x+1)^6}+\ldots=\frac{1}{12x(x+1)}=\frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}.$$

8) Да се докаже, че редът

$$\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g(x+n)$$

е сходящ при $x>0$ и $0<\mu(x)<\frac{1}{12x}$.

9) Да се покаже, че

$$\Gamma(x)=x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\frac{\theta}{12x}}\sqrt{2\pi},$$

където $0<\theta<1$ (θ изобщо зависи от x) (Стирлинг — Stirling).

Упътване. Покажете, че функцията

$$f(x)=Ax^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}$$

удовлетворява условията на Бор — Молеруп при подходящ избор на константата A. Пресметнете A от формулата на Валис, която може да се напише във вида

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2 n}$$

(вж. задача 11).

10) Да се покаже, че

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x)$$

(Лежандр).

11) Покажете, че дефиницията на $\Gamma(x)$ може еднозначно да се продължи и за отрицателни стойности на x, които не са цели, по такъв начин, че да имаме

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

12) Покажете, че при всички стойности на x, които не са цели, имаме

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Упътване. Разгледайте функцията $\varphi(x)$, дефинирана с условието

$$\varphi(x)=\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x,$$

при нецели стойности на x и с условието $\varphi(x)=\pi$, когато x е цяло. Покажете, че

$$\varphi(x+1)=\varphi(x) \text{ и } \varphi(x)>0.$$

Покажете, че функцията $\varphi(x)$ е безбройно много пъти диференцуема, включително и в целочисленитe точки, като вземете под внимание, че при $-1<x<1$ е валидно представянето

$$\varphi(x)=\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\left(\pi-\frac{\pi^3x^2}{3!}+\frac{\pi^5x^4}{5!}-\ldots\right)$$

и като използвате периодичността на $\varphi(x)$. Покажете с помощта на формулата на Лежандр от т. 10, че

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=C\varphi(x),$$

където C е константа. Положете

$$g(x)=\frac{d^2}{dx^2}\ln\varphi(x)$$

и покажете, че

$$\frac{1}{4}\left[g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]=g(x). \tag{17}$$

Установете, че функцията $g(x)$ е периодична и непрекъсната и следователно е ограничена. Нека L е точната горна граница на $g(x)$. Покажете с помощта на (17), че

$$|g(x)|\leq\frac{1}{2}L$$

и следователно $L\leq\frac{1}{2}L$, т. е. $L=0$. Установете с помощта на този резултат, че функцията $\ln\varphi(x)$ е линейна. Покажете, че тя е константа, като използвате нейната периодичност. Покажете, че при всяко x имаме $\varphi(x)=\pi$.

13) Покажете, че при всяко x имаме

$$\sin\pi x=\lim_{n\to\infty}\left[\pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right]$$

(Ойлер).

Забележка. Често тази формула се записва във вида

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

Упътване. Използувайте, че при всяко x, което не е цяло,

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)},$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

По този начин ще получите исканото представяне на $\sin \pi x$ при нецели стойности на x. Когато x е цяло, направете директна проверка.

14) Да се покаже, че при $x>0$ и $y>0$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

Упътване. Покажете, че функцията

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

при фиксирано y удовлетворява условията на Бор—Молеруп.

32. Да се покаже, че Неперовото число е трансцендентно, т. е. че то не удовлетворява никое алгебрично уравнение с цели коефициенти (Ермит — Hermite).

Упътване. Допуснете, че числото e удовлетворява уравнението

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0,$$

чиито коефициенти са цели; положете

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(m)}(x),$$

където $f(x)$ е полином от m-та степен, и като използувате, че

$$F(x) = e^x F(0) - e^x \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt,$$

установете тъждеството

$$a_0 F(0) + a_1 F(1) + \ldots + a_n F(n) + \sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}\,dt = 0.$$

Изберете полинома $f(x)$ по следния начин:

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (n-x)^p.$$

Като вземете под внимание, че произведение на p последователни цели числа винаги се дели на $p!$, покажете, че коефициентите на полиномите

$$f^{(p)}(x),\ f^{(p+1)}(x),\ \ldots\ f^{(pn+p-1)}(x)$$

а цели числа, които се делят на p. Като използувате това обстоятелство и обстоятелството, че

$$f^{(s)}(1) = f^{(s)}(2) = \ldots = f^{(s)}(n) = 0$$

при $s = 0, 1, \ldots, p-1$, покажете, че числата

$$F(1),\ F(2),\ \ldots,\ F(n)$$

са цели и се делят на p. От друга страна, като вземете под внимание, че

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(p-2)}(0) = 0$$

и

$$f^{(p-1)}(0) = (n!)^p,$$

покажете, че числото

$$F(0) = f(0) + f'(0) + \ldots + f^{(p-2)}(0) + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \ldots + f^{(pn+n-1)}(0)$$

е цяло, но не се дели на p, ако p е просто число, по-голямо от n. Използувайте този резултат и обстоятелството, че $a_0 \neq 0$, за да покажете, че числото

$$a_0 F(0) + a_1 F(1) + \ldots + a_n F(n)$$

е цяло и различно от нула, когато p е достатъчно голямо.

След всичко това използувайте оценката

$$\left| \int_0^k f(t)e^{-t}\,dt \right| \leq \frac{1}{(p-1)!} n^{np+p-1} \int_0^k e^{-t}\,dt < \frac{1}{(p-1)!} n^{np+p-1},$$

валидна при $0 \leq k \leq n$, за да покажете, че числото p може да се избере толкова голямо, че да имаме

$$|a_0 F(0) + a_1 F(1) + \ldots + a_n F(n)| < 1,$$

което не е възможно.

ЧАСТ II

ДВОЙНИ И ТРОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

Глава I

ДВОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Дефиниция на понятието двоен интеграл

Нека ни е дадена една функция $f(x, y)$, дефинирана и ограничена в едно измеримо точково множество R. Делим множеството R на краен брой измерими подмножества

$$R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n \tag{1}$$

по такъв начин, че мярката на сечението на всеки две от тях да бъде нула и сумата

$$R_1+R_2+\ldots+R_n$$

да представлява точно множеството R. Нека σ_i е лицето на множеството R_i и нека M_i и m_i са съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството R_i. Сумата

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\sigma_i$$

се нарича голяма, а сумата

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\,\sigma_i$$

се нарича малка сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на множеството R на измерими подмножества (1). Не е трудно да се установят неравенствата

$$m\,.\,\sigma\leq s\leq S\leq M\,\sigma, \tag{2}$$

където M и m означават съответно една горна и една долна граница на $f(x, y)$ в множеството R, а σ е лицето на R.

И наистина неравенствата

$$m\leq m_i\leq M_i\leq M$$

ни дават

$$m\sigma_i\leq m_i\sigma_i\leq M_i\sigma_i\leq M\sigma_i$$

и следователно

$$m\sum_{i=1}^{n}\sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i \leq M\sum_{i=1}^{n}\sigma_i,$$

откъдето получаваме веднага неравенствата (2), като вземем пред вид, че

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i=\sigma.$$

Неравенствата (2) ни учат, че както множеството на малките, така и множеството на големите суми на Дарбу е ограничено (и отгоре, и отдолу). Точната горна граница на множеството на малките суми се означава със символа

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy$$

и се нарича долен интеграл на функцията $f(x, y)$, разпространен върху множеството R, а точната долна граница на големите суми се означава със символа

$$\overline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy$$

и се нарича горен интеграл на функцията $f(x, y)$, разпространен върху множеството R.

Не е трудно да се установи неравенството

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy \leq \overline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy.$$

За тази цел делим множеството R по два произволни начина на измерими подмножества

$$A_1, A_2, \cdots, A_p$$

и

$$B_1, B_2, \cdots, B_q$$

така, че да имаме

$$R=A_1+A_2+\cdots+A_p,$$
$$R=B_1+B_2+\cdots+B_q$$

и

$$\mu(A_i A_k)=0, \quad \mu(B_i B_k)=0$$

при $i \neq k$.

Да означим с M_i точната горна граница на $f(x, y)$ в A_i, а с m_k — точната долна граница на $f(x, y)$ в B_k. Ще покажем, че между голямата сума

$$S=\sum_{i=1}^{p} M_i\mu(A_i)$$

и малката сума

$$s=\sum_{k=1}^{q} m_k\mu(B_k)$$

на Дарбу е в сила неравенството

$$s \leq S. \tag{3}$$

За да покажем това, означаваме с M_{ik} и m_{ik} съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството[1] $A_i B_k$ и разглеждаме двете суми на Дарбу

$$S^*=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_{ik}\mu(A_i B_k),$$

$$s^*=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_{ik}\mu(A_i B_k).$$

Не е трудно да се види, че

$$\begin{aligned} m_k\mu(A_i B_k) &\leq m_{ik}\mu(A_i B_k) \leq \\ &\leq M_{ik}\mu(A_i B_k) \leq M_i\mu(A_i B_k). \end{aligned} \tag{4}$$

И наистина, ако сечението $A_i B_k$ не е празно, очевидно

$$m_k \leq m_{ik} \leq M_{ik} \leq M_i$$

и следователно в този случай неравенството (4) е вярно. Ако ли пък сечението $A_i B_k$ е празно, $\mu(A_i B_k)=0$ и следователно неравенствата (4) са верни и в този случай, както и да избираме числата M_{ik} и m_{ik}.

Като съберем почленно неравенствата (4), получаваме

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_k\mu(A_i B_k) \leq s^* \leq S^* \leq \tag{5}$$

[1] Ако сечението $A_i B_k$ е празно, то с M_{ik} и m_{ik} означаваме кои да са две числа.

$$\leq \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_i\,\mu(A_i B_k).$$

От друга страна, като вземем пред вид, че

$$A_i B_k . A_s B_k \subset A_i A_s$$

и следователно при $i \neq s$

$$\mu(A_i B_k . A_s B_k) = 0,$$

намираме

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_k\,\mu(A_i B_k) = \sum_{k=1}^{q} m_k \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i B_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} m_k\,\mu(B_k) = s.$$

Аналогично получаваме

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_i\,\mu(A_i B_k) = \sum_{i=1}^{p} M_i \sum_{k=1}^{q} \mu(A_i B_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} M_i\,\mu(A_i) = S.$$

По такъв начин неравенствата (5) приемат вида

$$s \leq s^* \leq S^* \leq S.$$

С това е установена валидността на неравенството (3).

След всичко изложено не е трудно да се покаже, че

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy \leq \overline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy.$$

И наистина, като фиксираме в неравенството (3) една голяма сума S и оставим малката сума s да се мени, заключаваме, че S е една горна граница на множеството на малките суми. Като вземем пред вид, че

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, получаваме

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy \leq S. \tag{6}$$

Така полученото неравенство (6) ни учи, че

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy$$

е една долна граница на множеството от големите суми на Дарбу. Като вземем пред вид, че

$$\overline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy$$

е точната, т. е. най-голямата от долните граници на тези суми, получаваме

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy \leq \overline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Сега вече сме в състояние да дадем следната обща дефиниция на понятието двоен Риманов интеграл:

Една ограничена функция $f(x, y)$, дефиниционната област R на която е едно измеримо точково множество, ще наричаме интегруема в Риманов смисъл в R, когато

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy = \overline{\iint_R} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Общата стойност на горния и долния интеграл ще наричаме двоен Риманов интеграл и ще я означаваме със символа[1]

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

Тук ще изброим по-важните основни свойства на двойните интеграли, които са съвсем аналогични на съответните свойства на простите интеграли. Доказателства този път обаче няма да даваме, защото те могат да се дадат по същия начин, както при простите интеграли.

[1] Понякога двойният интеграл се означава по-кратко така:

$$\int_R f(x, y)\,d\sigma.$$

1. Ако функциите $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ са интегруеми в едно измеримо точково множество R, сумата

$$f_1(x, y)+f_2(x, y)$$

е също тъй интегруема в R и

$$\iint\limits_R [f_1(x, y)+f_2(x, y)]\,dx\,dy=\iint\limits_R f_1(x, y)\,dx\,dy+$$

$$+\iint\limits_R f_2(x, y)\,dx\,dy.$$

2. Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в измеримото точково множество R и a е константа, функцията $af(x, y)$ е също тъй интегруема в R и

$$\iint\limits_R af(x, y)\,dx\,dy=a\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

3. Ако A и B са две измерими точкови множества, ако мярката на сечението AB е равна на нула и ако функцията $f(x, y$ е интегруема както в A, така и в B, тази функция е интегруема и в множеството $A+B$, като при това

$$\iint\limits_{A+B} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy+\iint\limits_B f(x, y)\,dx\,dy.$$

4. Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в измеримото точково множество R и удовлетворява неравенствата

$$m\leqq f(x, y)\leqq M,$$

то

$$m\,\mu(R)\leqq\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy\leqq M\,\mu(R).$$

Следствие 1. Ако $f(x, y)\geqq 0$, то

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy\geqq 0.$$

Следствие 2. Ако $\mu(R)=0$, то

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy=0.$$

Следствие 3. Ако

$$R_1, R_2, R_3, \cdots$$

е една редица от измерими подмножества на R, за които

$$\lim_{n\to\infty}\mu(R_n)=0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{R_n} f(x, y)\,dx\,dy=0.$$

Следствие 4.

$$\iint\limits_R 1\,dx\,dy=\mu(R).$$

5. Всяка функция $f(x, y)$, която е дефинирана и непрекъсната в едно измеримо и затворено точково множество R, е интегруема.

Доказателствата на горните твърдения протичат така, както при простите интеграли. Ще докажем за пример само петото твърдение.

Функцията $f(x, y)$ е ограничена, защото тя е непрекъсната в едно ограничено и затворено точково множество. Поради това можем да говорим за горен и долен интеграл на тази функция. Нашата задача е да покажем, че тези два интеграла са равни помежду си. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и делим множеството R на подмножества

$$R_1, R_2, \cdots, R_n, \tag{7}$$

подчинени на условието $\mu(R_i R_k)=0$ при $i\neq k$ по такъв начин, че осцилацията на $f(x, y)$ във всяко от тези подмножества да бъде по-малка от ε. Това, както знаем, може да се постигне, стига диаметрите на подмножествата (7) да бъдат достатъчно малки.[1]

Означаваме с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множествата R_i и разглеждаме съответната голяма и малка сума на Дарбу:

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\mu(R_i),$$

[1] Ние можем вишаги да разделим множеството R на измерими подмножества с произволно малки диаметри, например с помощта на хоризонтални и вертикални прави, както това е показано на черт. 17. Подмножествата, на които се разпада по този начин R, са измерими, защото те представляват сечения на измеримото множество R с правоъгълници (т. е. пак с измерими множества).

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(R_i).$$

Както знаем, неравенствата

$$s \leq \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy \leq \overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy \leq S$$

са в сила и следователно

$$0 \leq \overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy - \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy \leq S - s =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \mu(R_i) \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(R_i) = \varepsilon \mu(R). \tag{8}$$

От друга страна, положителното число ε е произволно, а $\mu(R)$ и разликата

$$\overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy - \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy$$

ни най-малко не зависят от ε. Това ни позволява да заключим,[1] че

$$\overline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy - \underline{\iint_R} f(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

По този начин ние доказахме, че непрекъснатата функция $f(x, y)$ е интегруема. Доказателството запазва валидността си и в случая, когато измеримото множество R не е непременно затворено, стига да знаем, че функцията $f(x, y)$ е равномерно непрекъсната в него.

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в едно измеримо точково множество R. Да разделим множеството R на краен брой измерими подмножества

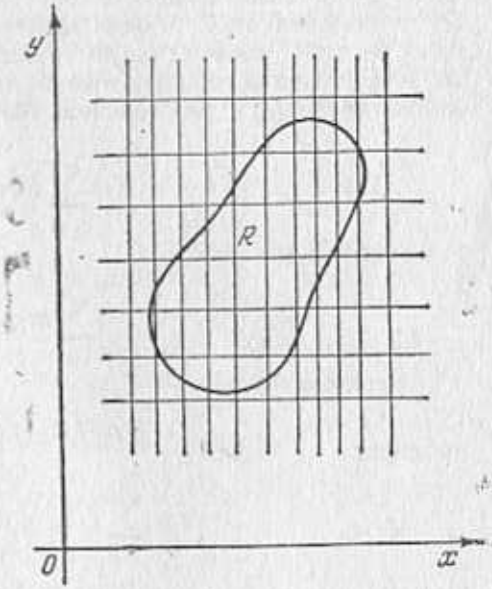
$$R_1, R_2, \ldots, R_n,$$

[1] В противен случай неравенството (8) сигурно би било нарушено, ако ε е достатъчно малко.

подчинени на условието $\mu(R_i R_k)=0$ при $i \neq k$, и да изберем във всяко едно от тези подмножества R_i по една точка (ξ_i, η_i). Сумите от вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \mu(R_i) \tag{9}$$

се наричат Риманови интегрални суми на функцията $f(x, y)$. Разбира се, когато множеството R съдържа безбройно много точки, ние можем за дадена функция $f(x, y)$ да образуваме безбройно много[1] Риманови интегрални суми в зависимост от начина на деление на множеството R на подмножества и в зависимост от избора на точките (ξ_i, η_i). Нека отбележим още, че за да образуваме сумите от вида (9), няма нужда да предполагаме нищо за ограничеността на функцията $f(x, y)$.



Черт. 17

Специално, ако функцията $f(x, y)$ е интегруема, сумите (9) клонят към интеграла[2]

$$I=\iint_R f(x, y)\, dx\, dy,$$

когато диаметрите на подмножествата R_i клонят към нула. Това трябва да се разбира така: каквото и да е положително число ε, можем да изберем такова положително число δ, че ако диаметрите на множествата R_i са по-малки от δ, да имаме

[1] Ние не твърдим обаче, че стойностите на тези суми са непременно различни.

[2] Често Римановият интеграл се дефинира с помощта на суми от вида (9) по следния начин: казваме, че една функция $f(x, y)$, дефинирана и ограничена в едно измеримо множество R, е интегруема в Риманов смисъл, ако сумите (9) имат граница I, когато диаметрите на R_i клонят към нула; числото I се нарича интеграл на $f(x, y)$. Тази дефиниция е еквивалентна на дефиницията, която ние дадохме в текста, обаче ние няма да се спираме по-подробно върху този въпрос. Трудолюбивият читател нека сам го обмисли. Ние ще обърнем внимание само върху обстоятелството, че за разлика от еднопомерния случай тук от съществуване на границата на Римановите суми на една функция не следва ограничеността на тази функция.

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu(R_i) \right| < \varepsilon.$$

Ние няма да даваме общото доказателство на това твърдение, а ще се задоволим (с оглед на конкретните задачи, които ни предстоят) само със случая, когато множеството R е затворено, а функцията $f(x, y)$ е непрекъсната. В такъв случай тази функция е и равномерно непрекъсната[1] и можем да изберем положителното число δ по такъв начин, че ако диаметрите на подмножествата R_i са по-малки от δ, осцилацията на функцията $f(x, y)$ във всяко едно от тези множества да бъде по-малка от ε. Означаваме с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в подмножеството R_i и разглеждаме голямата сума

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\mu(R_i)$$

и малката сума

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\mu(R_i).$$

Неравенствата

$$m_i \leq f(\xi_i, \eta_i) \leq M_i$$

ни дават

$$s \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu(R_i) \leq S.$$

Като вземем пред вид още и неравенствата

$$s \leq I \leq S,$$

получаваме

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu(R_i) \right| \leq S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\mu(R_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\,\mu(R_i) = \varepsilon\,\mu(R),$$

с което доказателството е завършено.

[1] Нека припомним, се множеството R е измеримо и следователно е ограничено.

Разбира се, доказателството запазва валидността си в случая, когато измеримото множество R не е непременно затворено, стига функцията $f(x, y)$ да е равномерно непрекъсната в него.

Целесъобразно е дефиницията на понятието двоен интеграл малко да се разшири, като се съгласим под символа

$$\iint_A f(x, y)\,dx\,dy,$$

когато A е празното множество, да разбираме нула, каквато и да бъде функцията $f(x, y)$. Свойствата 1, 2, 3, 4 и 5, които ние формулирахме в този параграф, запазват валидността си при така разширената дефиниция. Читателят, разбира се, сам може да провери това. Така например свойството 2 може да се установи така: ако множеството A е празно, то, каквото и да бъде измеримото множество B, ще имаме

$$\iint_{A+B} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_B f(x, y)\,dx\,dy = \iint_A f(x, y)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint_B f(x, y)\,dx\,dy.$$

Ние често ще използуваме интеграли, разпространени върху празното множество. Това ще облекчи нашата работа.

§ 2. Пресмятане на двойни интеграли

Нека R е едно множество от точки в равнината, дефинирано с неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$

(1) $$\varphi_0(x) \leq y \leq \varphi_1(x),$$

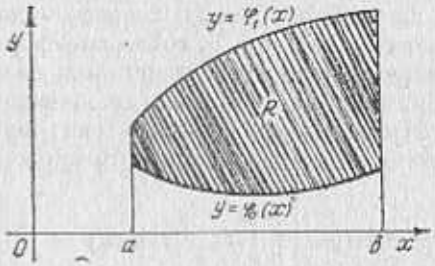
където $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ са две непрекъснати функции на x в ком пактния интервал $a \leq x \leq b$, удовлетворяващи условието

$$\varphi_0(x) \leq \varphi_1(x).$$

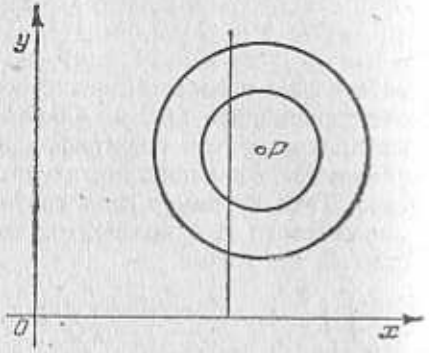
Това значи, че една точка (x, y) се причислява към R тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват неравенствата (1). Тук се касае за едно точково множество от твърде специален вид[1] (вж. черт. 18). Такова множество, както вече имахме случай

[1] Ако областта R е дефинирана с неравенства от вида (1), то всяка права, успоредна на оста y, или не съдържа повече от две контурни точки на R, или съдържа безбройно много такива точки. Ако следователно едно точково множество не удовлетворява това условие, то сигурно не представлява криволинеен трапец с вертикални основи. Така например кръговият венец, който е изобразен на черт. 19, не представлява такъв трапец, защото има прави, успоредни на оста y, които секат контура му в 4 точки.

да споменем по-рано, се нарича криволинеен трапец, чиито основи са перпендикулярни на оста x. Ние знаем, че такова множество е измеримо (вж. част I, глава II, § 19). Лесно се вижда, че то е и затворено, защото границата на редица от точки, които удовлетворяват неравенствата (1), също удовлетворява тези неравенства.



Черт. 18



Черт. 19

Нека $f(x, y)$ е функция, която е дефинирана и непрекъсната в R. В такъв случай, както знаем, тя е интегруема, защото множеството R е затворено и измеримо. Това ни дава възможност да образуваме интеграла

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

Да фиксираме x в интервала $a \leq x \leq b$. В такъв случай $f(x, y)$ ще бъде функция на единствената променлива y, дефинирана и непрекъсната, а следователно и интегруема в интервала $[\varphi_0(x), \varphi_1(x)]$. Това ни дава възможност да образуваме

$$F(x) = \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\,dy.$$

Теорема. Функцията $F(x)$ е интегруема[1] в интервала $[a, b]$ и

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{1'}$$

[1] Тя дори е непрекъсната. Нека читателят сам обмисли доказателството

Доказателство. Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

и разглеждаме кривите

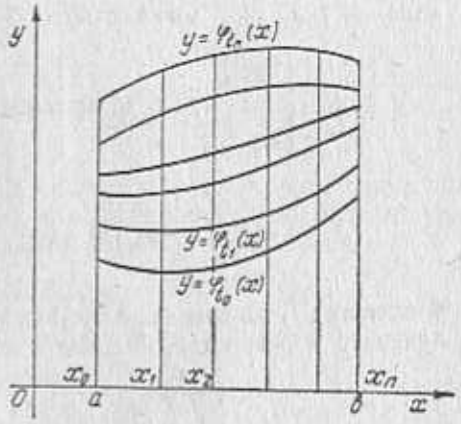
$$\varphi_t(x) = \varphi_0(x) + t[\varphi_1(x) - \varphi_0(x)],$$

където на t даваме стойностите

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1.$$

Правите $x = x_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ и кривите $y = \varphi_{t_k}(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, разделят криволинейния трапец R, определен с неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$
$$\varphi_0(x) \leq y \leq \varphi_1(x),$$



Черт. 20

на по-малки трапеци G_{ik}, дефинирани с неравенствата

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$
$$\varphi_{t_{k-1}}(x) \leq y \leq \varphi_{t_k}(x)$$

(вж. черт. 20) в смисъл, че $R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} G_{ik}$, както това лесно се доказва.

Не е трудно да се види, че функциите

$$F_k(x) = \int_{\varphi_{t_{k-1}}(x)}^{\varphi_{t_k}(x)} f(x, y)\,dy$$

са ограничени в интервала $a \leq x \leq b$. И наистина, ако означим с M една горна граница на $|f(x, y)|$, ще получим

$$|F_k(x)| \leq M[\varphi_{t_k}(x) - \varphi_{t_{k-1}}(x)] = M(t_k - t_{k-1})(\varphi_1(x) - \varphi_0(x)).$$

Функциите $\varphi_1(x)$ и $\varphi_0(x)$ обаче са непрекъснати в компактния интервал $a \leq x \leq b$ и следователно са ограничени. С това е установена и ограничеността на $F_k(x)$. По такъв начин добиваме възможност да образуваме горния и долния интеграл от $F_k(x)$ във всеки подинтервал на интервала $a \leq x \leq b$.

Означавайки с M_{ik} и m_{ik} точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството G_{ik}, получаваме[1]

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{\varphi_{ik-1}(x)}^{\varphi_{ik}(x)} f(x, y)\, dy \right] dx \leq M_{ik} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{\varphi_{ik-1}(x)}^{\varphi_{ik}(x)} dy \right] dx =$$

$$= M_{ik} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_{ik}(x) - \varphi_{ik-1}(x)]\, dx = M_{ik}\, \mu(G_{ik}).$$

Фиксираме i, даваме на k стойности $1, 2, \ldots, n$ и събираме получените неравенства. По такъв начин намираме

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\, dy \right] dx \leq \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\, \mu(G_{ik})$$

или още

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\, \mu(G_{ik}).$$

Като дадем на i в последното неравенство стойностите $1, 2, \ldots, n$ и съберем получените неравенства, ще намерим

$$\int_a^b F(x)\, dx \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\, \mu(G_{ik}).$$

Аналогично получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\, \mu(G_{ik}) \leq \int_a^b F(x)\, dx.$$

---

[1] Лицето на множеството G_{ik} е равно на разликата на двата интеграла

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{ik}(x)\, dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{ik-1}(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_{ik}(x) - \varphi_{ik-1}(x)]\, dx.$$

От друга страна, сечението на всеки два различни трапеца G_{ik} има мярка нула, както това лесно се доказва. Въз основа на това заключаваме, че

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\, \mu(G_{ik}) \leq \iint_R f(x, y)\, dx\, dy \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\, \mu(G_{ik}),$$

и следователно

$$\left| \iint_R f(x, y)\, dx\, dy - \int_a^b F(x)\, dx \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (M_{ik} - m_{ik})\, \mu(G_{ik}).$$

Функцията $f(x, y)$ е обаче непрекъсната и следователно при всеки избор на положителното число ε можем да направим диаметрите на подмножествата G_{ik} толкова малки,[1] че да имаме

$$M_{ik} - m_{ik} < \varepsilon.$$

Оттук получаваме следното неравенство:

$$\left| \iint_R f(x, y)\, dx\, dy - \int_a^b F(x)\, dx \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \mu(G_{ik}) = \varepsilon \mu(R).$$

Положителното число ε обаче е произволно, а константите $\mu(G)$ и

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy - \int_a^b F(x)\, dx$$

не зависят от него. Това ни позволява да заключим, че

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy - \int_a^b F(x)\, dx = 0.$$

По аналогичен път получаваме

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b F(x)\, dx.$$

---

[1] За тази цел избираме както точките

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

така и точките

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

достатъчно близо една до друга.

От това следва, че

$$\underline{\int_a^b} F(x)\,dx = \overline{\int_a^b} F(x)\,dx,$$

т. е. функцията $F(x)$ е интегруема в интервала $a \leq x \leq b$ и

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx.$$

С това доказателството е завършено.

Ние можем да получим същия резултат и с помощта на основната теорема на интегралното смятане в равнината по следния начин.

Нека Δ е полузатворен правоъгълник и $\psi(x, y)$ е неговата характеристична функция. Избираме произволно положително число ε и покриваме контура на R със система от краен брой отворени кръгове $C_1, C_2, \ldots, C_n$ по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси да бъде по-малка от ε.

Образуваме двете спомагателни полуадитивни функции:

$$\theta_1(\Delta) = \overline{\int_a^b}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\psi(x, y)\,dy\right]dx - \iint_{\Delta R} f(x, y)\,dx\,dy - \tag{2}$$

$$-2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta R),$$

$$\theta_2(\Delta) = \iint_{\Delta R} f(x, y)\,dx\,dy - \underline{\int_a^b}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\psi(x, y)\,dy\right]dx - \tag{3}$$

$$-2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta R),$$

където M е една горна граница на $|f(x, y)|$. Полуадитивността на тези функции е очевидна (вж. част I, глава II, § 16). Също тъй не е трудно да се види, че те са неположителни около всяка точка P на равнината (относно смисъла на тези думи вж. част I, глава II, § 15). Ние ще покажем това за функцията $\theta_1(\Delta)$. Читателят ще може сам да извърши проверката за функцията $\theta_2(\Delta)$.

Нека точката P е външна за R. В такъв случай, ако Δ се намира в достатъчно малка околност на P, сеченето на Δ с R ще бъде празно и следователно в R ще имаме $\psi(x, y) = 0$. По такъв начин получаваме в този случай

$$\theta_1(\Delta) = -2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta R) \leq 0.$$

Нека точката P е вътрешна за R. Да означим с (x_0, y_0) нейните координати. В такъв случай около P може да се избере достатъчно малка околност U, която се съдържа в R и в която са изпълнени неравенствата

$$f(x_0, y_0) - \varepsilon \leq f(x, y) \leq f(x_0, y_0) + \varepsilon,$$

защото функцията $f(x, y)$ е непрекъсната. По такъв начин всеки път, когато Δ се съдържа в U, ще имаме

$$\theta_1(\Delta) \leq \overline{\int_a^b}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} (f(x_0, y_0) + \varepsilon)\psi(x, y)\,dy\right]dx -$$

$$-\iint_{\Delta} (f(x_0, y_0) - \varepsilon)\,dx\,dy - 2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta) \leq$$

$$\leq (f(x_0, y_0) + \varepsilon)\mu(\Delta) - (f(x_0, y_0) - \varepsilon)\mu(\Delta) - 2\varepsilon\mu(\Delta) = 0,$$

защото, както знаем (вж. част I глава II, § 16),

$$\overline{\int_a^b}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} (f(x_0, y_0) + \varepsilon)\psi(x, y)\,dy\right]dx = (f(x_0, y_0) + \varepsilon)\mu(\Delta).$$

Остана да разгледаме случая, когато точката P е контурна за R. В такъв случай P е вътрешна за някой от покриващите кръгове $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Нека U е околност на P, която се съдържа в $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$. В такъв случай всеки път, когато Δ се съдържа в U, ще имаме

$$\theta_1(\Delta) \leq M\overline{\int_a^b}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\,dy\right]dx +$$

$$+M\iint_{\Delta R} dx\,dy - 2M\mu(\Delta) - 2\varepsilon\mu(\Delta R) \leq$$

$$\leq M\mu(\Delta) + M\mu(\Delta) - 2M\mu(\Delta) - 2\varepsilon\mu(\Delta R) \leq 0,$$

защото, както знаем,

$$\overline{\int_a^b}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\,dy\right]dx \leq \mu(\Delta)$$

(вж. част I, глава II, § 16).

Този резултат ни дава възможност да приложим основната теорема на интегралното смятане в равнината (вж. част I, глава II, § 15). По такъв начин имаме

$$\theta_1(\Delta) \leq 0$$

при всеки избор на полузатворения правоъгълник Δ. Специално, ако изберем Δ така, че да съдържа R, ще получим

$$\underline{\int_a^b} F(x)\,dx - \iint_R f(x, y)\,dx\,dy - 2M\sum_{k=1}^{n}\mu(C_k) - 2\varepsilon\mu(R) \leq 0.$$

От друга страна, $\sum_{k=1}^{n}\mu(C_k) < \varepsilon$ и следователно

$$\underline{\int_a^b} F(x)\,dx \leq \iint_R f(x, y)\,dx\,dy + 2M\varepsilon + 2\varepsilon\mu(R)$$

или след граничния преход $\varepsilon \to 0$,

$$\underline{\int_a^b} F(x)\,dx \leq \iint_R f(x, y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

Като изучим по аналогичен начин функцията $\theta_2(\Delta)$, ще получим

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy \leq \overline{\int_a^b} F(x)\,dx. \tag{5}$$

От друга страна, очевидно

$$\underline{\int_a^b} F(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} F(x)\,dx,$$

което заедно с (4) и (5) ни дава

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \underline{\int_a^b} F(x)\,dx = \overline{\int_a^b} F(x)\,dx.$$

По такъв начин ние виждаме, че функцията $F(x)$ е интегруема и

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx.$$

С това доказателството е завършено.

Аналогично, ако интеграционната област R представлява криволинеен трапец с хоризонтални основи, т. е. ако тази област се определя с неравенства от вида

$$c \leq y \leq d,$$
$$g_0(y) \leq x \leq g_1(y),$$

където функциите $g_0(y)$ и $g_1(y)$ са дефинирани и непрекъснати в интервала $[c, d]$ и удовлетворяват неравенството

$$g_0(y) \leq g_1(y),$$

имаме формулата

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{g_0(y)}^{g_1(y)} f(x, y)\,dx\right] dy. \tag{6}$$

Ще изясним с няколко примера как се използват формулите (1′) респ. (6).

Пример 1. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R x^2\,dx\,dy,$$

разпространен върху трапеца R, заграден от правите $x=1$, $x=2$, $y=\frac{x+2}{2}$, $y=\frac{3-x}{2}$ (вж. черт. 21).

Решение. Една точка (x, y) принадлежи на R тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват неравенствата

$$1 \leq x \leq 2,$$
$$\frac{3-x}{2} \leq y \leq \frac{x+2}{2}.$$

Оттук получаваме с помощта на формулата (1′)

$$I = \int_1^2 \left[\int_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{x+2}{2}} x^2\,dy\right] dx = \int_1^2 x^2 \left[\int_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{x+2}{2}} dy\right] dx =$$

$$= \int_1^2 x^2 \left| y \right|_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{x+2}{2}} dx = \int_1^2 x^2 \frac{2x-1}{2}\,dx = \left| \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} \right| = \frac{31}{12}.$$

Пример 2. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R \sqrt{x+y}\,dx\,dy,$$

разпространен върху триъгълника R, заграден от правите

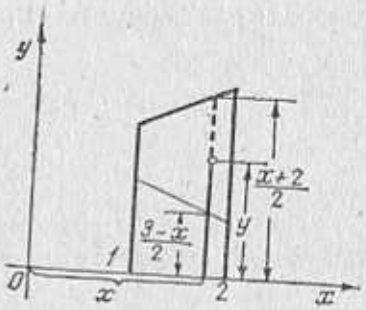
$$x=0,\quad y=0,\quad x+y=1$$

(вж. черт. 22).

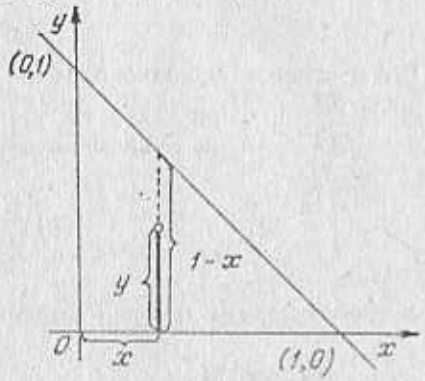
Решение. Една точка (x, y) принадлежи на интеграционната област R тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват неравенствата

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1-x.$$



Черт. 21



Черт. 22

Оттук получаваме въз основа на формулата (2)

$$I=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,dy\right]dx=\frac{2}{3}\int_0^1\left|(x+y)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{2}{3}\left|x-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right|_0^1=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}.$$

Пример 3. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R y\,dx\,dy,$$

разпространен върху полукръга R, който се намира над оста x и се загражда от окръжността $x^2+y^2=r^2$ и оста x.

Решение. В този случай интеграционната област R представлява криволинеен трапец, определен от неравенствата

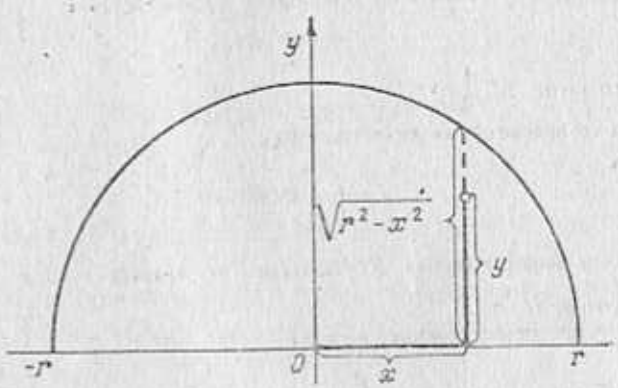
$$-r \leq x \leq r,$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}$$

(вж. черт. 23). Това ни позволява да пишем

$$I=\int_{-r}^{r}\left[\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy\right]dx=\int_{-r}^{r}\left|\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{r^2-x^2}}dx=\int_{-r}^{r}\frac{r^2-x^2}{2}\,dx=$$

$$=\left|\frac{r^2x}{2}-\frac{x^3}{6}\right|_{-r}^{r}=\frac{2}{3}r^3.$$



Черт. 23

Задачи

1. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R (x+y)\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, заградена от правите $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

Отговор. $I=\frac{8}{3}$.

2. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, заградена от правите $y=0$, $x=y$, $x=1$.

Отговор. $I=\frac{1}{3}$.

3. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint_R (x+y)\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, заградена от правата $x=y$ и от параболата $y^2=x$.

Отговор. $I=\frac{3}{20}$.

4. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_R x^2\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, дефинирана с неравенството

$$|x|+|y|\leq 1.$$

Отговор. $I=\frac{1}{3}$.

5. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_R xy\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, заградена от правата $x=2$ и от параболата $y^2=2x$.

Отговор. $I=0$.

6. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_R y\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, определена от неравенствата

$$x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1.$$

Отговор. $\frac{3\pi a^3 b^2}{32}$.

§ 3. Смяна на променливите при двойните интеграли

Нека двойно регулярната[1] трансформация

$$(1)\qquad \begin{aligned} x&=f(u,v),\\ y&=g(u,v)\end{aligned}$$

изобразява едно отворено точково множество R от равнината u, v върху едно точково множество R' в равнината x, y. Знаем, че всяко измеримо множество A, което лежи заедно с контура си в R, се изобразява върху измеримо точково множество A'. Ще докажем, че

[1] Срв. с част I, глава II, § 14 и 20.

$$\mu(A')=\iint\limits_A \Delta\,du\,dv,$$

където Δ означава абсолютната стойност на функционалната детерминанта

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Доказателство. Делим множеството A на краен брой измерими подмножества

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$$

по такъв начин, че мярката на сечението на две от тях да бъде нула. Нека A_i' е образът на A_i при трансформацията (1) и нека M_i и m_i са съответно точната горна и точната долна граница на Δ в множеството A_i'. В такъв случай, както знаем (вж. § 20, глава II, част I), са в сила неравенствата

$$m_i\mu(A_i)\leq\mu(A_i')\leq M_i\mu(A_i)$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^n m_i\mu(A_i)\leq\sum_{i=1}^n\mu(A_i')\leq\sum_{i=1}^n M_i\mu(A_i)$$

или още

$$\sum_{i=1}^n m_i\mu(A_i)\leq\mu(A')\leq\sum_{i=1}^n M_i\mu(A_i).$$

От друга страна, имаме

$$\sum_{i=1}^n m_i\mu(A_i)\leq\iint\limits_A\Delta\,du\,dv\leq\sum M_i\mu(A_i)$$

и следователно

$$\left|\iint\limits_A\Delta\,du\,dv-\mu(A')\right|\leq\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\mu(A_i).$$

Избираме едно произволно положително число ε. Можем да направим диаметрите на подмножествата A_i толкова малки,[1] че да имаме

$$M_i - m_i \leq \varepsilon$$

и следователно

$$(3) \qquad \left| \iint_A \Delta\, du\, dv - \mu(A') \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\mu(A_i) = \varepsilon\mu(A).$$

От това неравенство заключаваме, че

$$\iint_A \Delta\, du\, dv - \mu(A') = 0,$$

защото в противен случай неравенството (3) сигурно би било нарушено при достатъчно малки стойности на ε. С това равенство (2) е доказано.

Ние ще използуваме този резултат, за да установим следната важна формула:

$$(4) \qquad \iint_A F(x, y)\, dx\, dy = \iint_A F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du dv,$$

която е сигурно валидна поне когато функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в A' и измеримото множество A е затворено (това са, разбира се, само достатъчни условия за валидността на формулата (4)).

Доказателство. Делим множеството A' на краен брой измерими подмножества

$$A'_1, A'_2, \cdots, A'_n$$

така, че сечението на всеки две от тях да има мярка нула. Означаваме с A_i образа на A'_i при обратната трансформация на трансформацията (1) и с M_i и m_i съответно точната горна и точната долна граница на функцията

$$F[f(u, v), g(u, v)]$$

в множеството A_i. В такъв случай

$$m_i \iint_{A_i} \Delta\, du\, dv \leq \iint_{A_i} F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv \leq M_i \iint_{A_i} \Delta\, du\, dv$$

[1] Това може да се направи, защото A лежи в R заедно с контура си и следователно непрекъснатата функция Δ е равномерно непрекъсната в A.

или още

$$m_i \mu(A'_i) \leq \iint_{A_i} F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv \leq M_i \mu(A'_i).$$

Като дадем на i стойностите $1, 2, \cdots, n$ и съберем получените неравенства, намираме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(A'_i) \leq \iint_A F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(A'_i).$$

От друга страна, не е трудно да се види, че M_i и m_i са точната горна и точната долна граница на $F(x, y)$ в множеството A'_i и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(A'_i) \leq \iint_A F(x, y)\, dx\, dy \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(A'_i),$$

откъдето

$$\left| \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_A F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \mu(A'_i).$$

Избираме произволно положително число ε. Ние можем да направим диаметрите на множеството A'_i толкова малки, че да имаме

$$M_i - m_i \leq \varepsilon$$

и следователно

$$(5) \qquad \left| \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_A F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\mu(A'_i) = \varepsilon\mu(A'),$$

откъдето заключаваме, че

$$\iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_A F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv = 0$$

защото в противен случай неравенството (5) сигурно би било нарушено при достатъчно малки стойности на ε. С това формулата (4) е доказана.

* * *

Сега ще изведем формулата (4) по друг път, като предполагаме, че трансформацията (1) е еднократно регулярна (относно терминологията вж. част I, глава II, § 14 и § 20).

Да разгледаме първо специалния случай, когато трансформачните формули (1) имат вида

$$x=u,$$

(6) $$y=g(u, v),$$

т. е. разглежданата трансформация е диагонална. Освен това нека A е правоъгълник, определен от неравенствата

$$p\leq u\leq q,$$

(7) $$r\leq v\leq s,$$

който лежи в R и нека

(8) $$g'_v(u, v)>0$$

в A. В такъв случай A' е криволинеен трапец, определен от неравенствата

$$p\leq x\leq q,$$

9) $$g(x, r)\leq y\leq g(x, s).$$

И наистина нека (u_0, v_0) е точка от A и (x_0, y_0) е нейният образ. Това значи, че

$$p\leq u_0\leq q,$$

$$r\leq v_0\leq s$$

и

$$x_0=u_0,$$

$$y_0=g(u_0, v_0).$$

В такъв случай

$$g(u_0, r)\leq y_0\leq g(u_0, s),$$

защото функцията $g(u_0, v)$ монотонно расте, както това следва от условието (8). Като вземем под внимание още равенството $x_0=u_0$, заключаваме, че точката (x_0, y_0) удовлетворява неравенствата (9). И така образът на всяка точка от A удовлетворява неравенствата (9).

Обратно, нека една точка (x_1, y_1) удовлетворява неравенствата (9). Ще покажем, че тя е образ на някоя точка от A. И наистина от неравенствата

$$g(x_1, r)\leq y_1\leq g(x_1, s)$$

заключаваме, че има число v_1 в интервала $[r, s]$, за което

$$g(x_1, v_1)=y_1,$$

защото функцията $g(x_1, v)$ е непрекъсната в разглеждания интервал $[r, s]$. Да положим $u_1=x_1$. В такъв случай

$$x_1=u_1$$

$$y_1=g(u_1, v_1)$$

и

$$p\leq u_1\leq q,$$

$$r\leq v_1\leq s,$$

т. е. точката (x_1, y_1) е образ на точката (u_1, v_1) от A. С това е показано, че образът на (A) при трансформацията (6) е криволинейният трапец (9).

Сега вече не е трудно да проверим верността на равенството (4) в разглеждания от нас специален случай. И наистина

$$\iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_p^q\left[\int\limits_{g(x, r)}^{g(x, s)} F(x, y)\,dy\right]dx.$$

Да разгледаме интеграла

$$\phi(x)=\int\limits_{g(x, r)}^{g(x, s)} F(x, y)\,dy$$

и да направим смяна на интеграционната променлива y с помощта на субституцията

$$y=g(x, v),$$

където x е фиксирано. Това ще ни даде

$$\phi(x)=\int\limits_r^s F[x, g(x, v)]\,g'_v(x, v)\,dv$$

и следователно

$$\iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_p^q \phi(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_p^q\left[\int\limits_r^s F[(x, g(x, v)]\,g'_v(x, v)\,dv\right]dx=$$

$$= \iint\limits_{A} F[x, g(x, v)]\, g'_v(x, v)\, dv\, dx.$$

По такъв начин ние установихме равенството (4), когато трансформацията (1) има вида (6), защото в този специален случай

$$\Delta = g'_v(u, v).$$

Със същата леснина се установява формулата (4) и в случая, когато трансформацията (6) удовлетворява условието

$$g'_v(u, v) < 0$$

в A. Тогава A' е криволинеен трапец, определен от неравенствата

$$p \leq x \leq q,$$

$$g(x, s) \leq y \leq g(x, r),$$

а

$$\Delta = -g'_v(u, v).$$

Нека читателят сам обмисли подробностите.

Също така не е съществено предположението, че нашата диагонална трансформация има точно вида (6). Направените разсъждения са приложими и в случая, когато трансформацията (1) има вида

$$x = f(u, v),$$

$$y = v,$$

стига $f'_u(u, v)$ да не си мени знака в A. Този случай не е съществено различен от разгледания и се свежда към него със смяна в означенията.

От доказаното следва също, че формулата (4) е валидна и тогава, когато трансформацията (1) е диагонална и A е полузатворен правоъгълник, стига Δ да не си мени знака в A. И наистина да положим

$$B = K(A) - A.$$

В такъв случай мярката на B е нула (защото $B \subset K(A)$), множеството $A+B$ е затворен правоъгълник и $AB=0$. От доказаното имаме

$$\iint\limits_{(A+B)'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{A+B} F[f(u, v), g(u, v)]\, \Delta\, du\, dv,$$

защото $A+B$ е затворен правоъгълник. От друга страна,

$$\iint\limits_{(A+B)'} F\, dx\, dy = \iint\limits_{A'+B'} F\, dx\, dy = \iint\limits_{A'} F\, dx\, dy +$$

$$+ \iint\limits_{B'} F\, dx\, dy = \iint\limits_{A'} F\, dx\, dy,$$

тъй като B' е подмножество на множеството $[K(A)]'$, чиято мярка е нула и следователно $\mu(B')=0$. Аналогично имаме

$$\iint\limits_{A+B} F(f, g)\, \Delta\, du\, dv = \iint\limits_{A} F(f, g)\, \Delta\, du\, dv + \iint\limits_{B} F(f, g)\, \Delta\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{A} F(f, g)\, \Delta\, du\, dv,$$

защото $\mu(B)=0$ и по такъв начин получаваме

$$\iint\limits_{A'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{A} F(f, g)\, \Delta\, du\, dv.$$

Сега ще установим, че формулата (4) е валидна и тогава когато (1) е диагонална регулярна трансформация (от кой да е вид), и A е произволно затворено и измеримо подмножество на R. За тази цел избираме положително число δ_0 толкова малко, че всяка точка, която се намира на разстояние, по-малко от δ_0 до A, да лежи в R. Това може да се направи съгласно лема 1 от § 20, глава II, част I. Означаваме с δ положително число, по-малко от δ_0. В такъв случай множеството L на точките, чието разстояние до A не надминава δ, ще бъде ограничено и затворено (вж. лема 2, § 20, глава II, част I) и ще се съдържа изцяло в R, защото $\delta < \delta_0$. Избираме положително число ε, по-малко от $\frac{\delta^2}{4}$, и покриваме контура на A със система от отворени кръгове $C_1, C_2, \cdots, C_n$ по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси да бъде по-малка от ε. Това може да се направи, защото контурът на A има мярка нула. Освен това ние можем да смятаме, че всеки един от кръговете $C_1, C_2, \cdots, C_n$ съдържа поне една точка от контура на A, защото ако това не е изпълнено, ние можем да премахнем онези кръгове, които нямат обща точка с $K(A)$, и по такъв начин ще получим нова система от кръгове, които покриват $K(A)$, притежават исканото свойство, а сумата от квадратите на техните радиуси е още по-малка. Радиусите на кръговете C_r са по-малки от

$$\sqrt{\varepsilon} < \frac{\delta}{2}$$

и следователно всяка тяхна точка се намира на разстояние, по-малко от δ до A. От това заключаваме, че кръговете C_r се съдържат в L, а следователно и в R.

Да образуваме спомагателната полуадитивна функция

$$\theta(D)=\left|\iint\limits_{(DA)'} F(x, y)\,dx\,dy-\iint\limits_{AD} F(f, g)\,\Delta\,du\,dv\right|-$$

(10)

$$-M\sum_{k=1}^{n}\mu((ADC_k)')-N\sum_{k=1}^{n}\mu(ADC_k)$$

на полузатворения правоъгълник D, където M е една горна граница на $|F(x, y)|$ в A', а N е една горна граница на

$$|F[f(u, v), g(u, v)]|\,\Delta$$

в A.

Не е трудно да се види, че функцията $\theta(D)$ е неположителна около всяка точка P на равнината (относно смисъла на тези думи вж. част I, глава II, § 15).

Да разгледаме първо случая, когато точката P е външна за A. В такъв случай, ако D се намира в достатъчно малка околност на P, сечението AD ще бъде празно и следователно $\theta(D)=0$.

Нека точката P е контурна за A. В такъв случай тя е вътрешна за някой от кръговете $C_1, C_2, \cdots, C_n$, защото тези кръгове са отворени. Нека C_r е кръг, който съдържа P и нека U е околност на P, която се съдържа в C_r. В такъв случай всеки път, когато $D\subset U$, ще имаме $DC_r=D$, т. е.

$$M\sum_{k=1}^{n}\mu((ADC_k)')+N\sum_{k=1}^{n}\mu(ADC_k)\geq$$
$$\geq M\mu((ADC_r)')+N\mu(ADC_r)=$$
$$=M\mu(AD)')+N\mu(AD)$$

и следователно

$$\theta(D)\leq\left|\iint\limits_{DA'} F(x, y)\,dx\,dy\right|+\left|\iint\limits_{DA} F(f, g)\,\Delta\,du\,dv\right|-$$

$$-M\mu((AD)')-N\mu(AD)\leq 0.$$

Остава да разгледаме случая, когато точката P е вътрешна за A. Тогава ние можем да изберем околност U на точката P, която лежи изцяло в A. Нека $D\subset U$. В такъв случай $DA=D$ и следователно

$$\theta(D)=\left|\iint\limits_{D'} F(x, y)\,dx\,dy-\iint\limits_{D} F(f, g)\,\Delta\,du\,dv\right|-$$

$$-M\sum_{k=1}^{n}\mu((ADC_k)')-N\sum_{k=1}^{n}\mu(ADC_k).$$

Множеството D обаче е правоъгълник, а трансформацията (1) е диагонална по предположение. Този случай ние вече разгледахме и знаем, че

$$\iint\limits_{D'} F(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D} F(f, g)\,\Delta\,du\,dv.$$

По такъв начин получаваме

$$\theta(D)=-M\sum_{k=1}^{n}\mu((DC_k)')-N\sum_{k=1}^{n}\mu(DC_k)\leq 0.$$

С това е установено, че функцията $\theta(D)$ е неположителна около всяка точка на равнината. Тази функция удовлетворява всичките условия, при които ние доказахме основната теорема на интегралното смятане в равнината (вж. част I, глава II, § 15). Това ни дава възможност да твърдим, че при всеки избор на полузатворения правоъгълник D имаме $\theta(D)\leq 0$. Специално, ако изберем D така, че да съдържа A, ще получим

$$\left|\iint\limits_{A'} F(x,y)\,dx\,dy-\iint\limits_{A} F(f, g)\,\Delta\,du\,dv\right|-$$

$$-M\sum_{k=1}^{n}\mu((AC_k)')-N\sum_{k=1}^{n}\mu(AC_k)\leq 0$$

и толкова повече

$$\iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy-\iint\limits_{A} F(f, g)\,\Delta\,du\,dv\Big|\leq$$

$$\leq M\sum_{k=1}^{n}\mu(C_k')+N\sum_{k=1}^{n}\mu(C_k).$$

Да означим с r_k радиуса на кръга и с H една обща горна граница на $|f_u|, |f_v|, |g_u|, |g_v|$ в L. В такъв случай съгласно лема 3 от § 20 на глава II, част I, диаметърът на C_k' няма да надми-

нава $4\,Hr_k'\sqrt{2}$. Да построим кръг G_k, чийто център се намира в коя да е точка C_k', а радиусът е $4\,Hr_k\sqrt{2}$. Този кръг съдържа всичките точки на C_k', поради което

$$\mu(C_k') \leq \mu(G_k) = 32\pi H^2 r_k^2$$

и следователно

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(C_k') \leq 32\pi H^2 \sum_{k=1}^{n} r_k^2 < 32\pi H^2 \varepsilon.$$

Като вземем под внимание още, че

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(C_k) = \pi \sum_{k=1}^{n} r_k^2 < \pi\varepsilon,$$

получаваме

$$\left| \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_{A'} F(f, g)\, \Delta du\, dv \right| \leq$$

$$\leq (32\pi H^2 \boldsymbol{M} + \pi N)\, \varepsilon,$$

което след граничния преход $\varepsilon \to 0$ ни дава

$$\left| \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_{A} F(f, g)\, \Delta du\, dv \right| \leq 0 \tag{11}$$

и следователно

$$\iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A} F(f, g)\, \Delta du\, dv. \tag{12}$$

Тук ще направим следната забележка. Предположението, че множеството A е затворено, може да се изостави, ако функцията $F(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната в $A+K(A)$, стига множеството A да бъде измеримо и да лежи в R заедно с контура си. И наистина множеството $A+K(A)$ е затворено и измеримо. Следователно съгласно с това, което доказахме, ще имаме

$$\iint_{[A+K(A)]'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A+K(A)} F(f, g)\, \Delta du\, dv.$$

Да положим

$$B = K(A) - A.$$

В такъв случай $\mu(B)=0$, защото $B \subset K(A)$, и $\mu(B')=0$, защото $B' \subset [K(A)]'$. От друга страна, $A+K(A)=A+B$, $AB=0$ и следователно

$$\iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A'} F(x, y)\, dx\, dy + \iint_{B'} F(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{A'+B'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(A+B)'} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A+B} F(f, g)\, \Delta du\, dv =$$

$$= \iint_{A} F(f, g)\, \Delta du\, dv + \iint_{B} F(f, g)\, \Delta du\, dv = \iint_{A} F(f, g)\, \Delta du\, dv.$$

Преминаваме към разглеждане на общия случай.

Нека (1) е регулярна трансформация на отвореното множество R и A е затворено и измеримо негово подмножество. Ще покажем, че равенството (4) е вярно и в този случай. За тази цел пак ще разгледаме спомагателната полуадитивна функция (10). Тази функция и сега е неположителна около всяка точка P на равнината. Случаят, когато точката P е външна или контурна за A, се разглежда по същия начин, както в случая, когато трансформацията (1) е диагонална. По-интересен е случаят, когато точката P е вътрешна за A. В такъв случай ние знаем, че в достатъчно малка околност W на точката P трансформацията (1) може да се представи като произведение на две диагонални регулярни трансформации (вж. § 14, глава II, част I). Нека тези трансформации са

$$\xi = u, \qquad \eta = \varphi(u, v) \tag{13}$$

и

$$x = \psi(\xi, \eta), \qquad y = \eta. \tag{14}$$

По такъв начин имаме

$$\psi(u, \varphi(u, v)) = f(u, v), \qquad \varphi(u, v) = g(u, v)$$

и следователно

$$\psi(u, g(u, v)) = f(u, v). \tag{15}$$

Нека околността W е толкова малка, че да се съдържа в A. Това може да се постигне, тъй като точката P е вътрешна за A. В такъв случай, ако $D \subset W$, ще имаме $AD = D$ и следователно

$$\theta(D) = \iint_{D'} F(x, y)\, dx\, dy - \iint_{D} F(f, g)\, \Delta du\, dv -$$

$$- \boldsymbol{M} \sum_{k=1} \mu((DC_k)') - N \sum_{k=1}^{n} \mu(DC_k).$$

Да разгледаме диагоналната трансформация (13) в W. Тя преобразува W в някое отворено множество W^*, а D в някое измеримо множество D^*, което се съдържа в W^*. Трансформацията (14) преобразува W^* в отворено множество W', а D^* в D'. Съгласно с това, което доказахме за диагоналните трансформации, ще имаме

$$\iint\limits_{D'} F(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D^*} F[\psi(\xi, \eta), \quad \eta]\,|\psi'_\xi(\xi, \eta)|\,d\xi\,d\eta$$

и

$$\iint\limits_{D^*} F[\psi(\xi, \eta), \eta]\,|\psi'_\xi|\,d\xi\,d\eta = \iint\limits_{D} F[f(u, v), g(u, v)]\,|\psi'_\xi \varphi'_v|\,du\,dv.$$

От друга страна, ако диференцираме равенството (15) частно по u и по v, ще получим

$$\psi'_\xi + \psi'_\eta g'_u = f'_u,$$
$$\psi'_\eta g'_v = f'_v$$

и следователно

$$\psi'_\xi = f'_u - \frac{g'_u f'_v}{g'_v} = \frac{f'_u g'_v - g'_u f'_v}{g'_v}.$$

Като вземем под внимание още, че $\varphi(u, v) = g(u, v)$, намираме

$$\psi'_\xi \varphi'_v = f'_u g'_v - g'_u f'_v,$$

т. е.

$$\iint\limits_{D'} F(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D} F(f, g)\,\Delta\,du\,dv.$$

По такъв начин получаваме

$$\theta(D) = -M\sum_{k=1}^{n} \mu[(DC_k)'] - N\sum_{k=1}^{n} \mu(DC_k).$$

И така функцията $\theta(D)$ е неположителна около всяка точка на равнината. Това ни дава възможност да приложим основната теорема на интегралното смятане в равнината. По-нататък разсъжденията се извършват по същия начин, както в случая на диагонална трансформация.

* * *

Формулата (4) намира многобройни и важни приложения. Особено често се използва трансформацията

$$(6) \qquad \begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\theta, \end{aligned}$$

която е двойно регулярна в безкрайния правоъгълник, лежащ в равнината на правоъгълната декартова координатна система θ, ρ, определен от неравенствата

$$-\pi < \theta < \pi, \ \rho > 0.$$

В такъв случай

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

и формулата (4) добива вида

$$\iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{A} F[\rho\cos\theta, \ \rho\sin\theta]\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Трансформачните формули (6) могат да се използват с успех например в случай, когато интеграционната област A' е дефинирана в полярни координати с помощта на неравенствата

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\alpha \leq \theta \leq \beta, \\ &f(\theta) \leq \rho \leq g(\theta), \end{aligned}$$

където $-\pi < \alpha < \beta < \pi$, а функциите $f(\theta)$ и $g(\theta)$ са непрекъснати в затворения интервал $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяват неравенствата

$$0 < f(\theta) \leq g(\theta).$$

В този случай ще казваме, че интеграционната област A' е сектор, който няма общи точки с неположителната част на оста OX. Трансформачните формули (6) преобразуват този сектор в криволинеен трапец с основи, перпендикулярни на оста θ, лежащ в равнината на правоъгълната декартова координатна система θ, ρ, и следователно

$$(8) \qquad \iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{f(\theta)}^{g(\theta)} F[\rho\cos\theta, \ \rho\sin\theta]\,\rho\,d\rho \right] d\theta.$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Решение. Полагаме

$$I(p)=\int_0^p e^{-x^2}\,dx$$

и разглеждаме двойния интеграл

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

разпространен върху квадрата R, определен от неравенствата

$$0\leq x\leq p,$$
$$0\leq y\leq p.$$

Очевидно имаме

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^p\left[\int_0^p e^{-x^2-y^2}\,dy\right]dx=\int_0^p e^{-x^2}\left[\int_0^p e^{-y^2}\,dy\right]dx=$$

$$=\int_0^p e^{-x^2}I(p)\,dx=I(p)\int_0^p e^{-x^2}\,dx=I^2(p).$$

Въвеждаме полярни координати

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta.$$

Функционалната детерминанта ρ се анулира при $x=y=0$. Поради това ние изолираме началото с кръгова област $\rho<r$, където $r<p$, и разглеждаме интеграла

$$\iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

където $A(r)$ е частта от квадрата R, която се намира вън от кръга $\rho<r$. В такъв случай, полагайки

$$\rho(\theta)=\frac{p}{\cos\theta}\quad\text{при } 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\quad\text{и}\quad \rho(\theta)=\frac{p}{\sin\theta}\quad\text{при } \frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},$$

получаваме[1]

[1] Областта $A(r)$ може да се дефинира в полярни координати с помощта на неравенствата

$$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},$$

$$r\leq\rho\leq\rho(\theta).$$

$$\iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_r^{\rho(\theta)} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{-e^{-\rho^2}}{2}\right|_r^{\rho(\theta)}d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-r^2}-e^{-\rho^2(\theta)}}{2}\,d\theta=e^{-r^2}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho^2(\theta)}\,d\theta,$$

тъй като $A(r)$ няма общи точки с неположителната част на оста OX. От друга страна, като означим с $B(r)$ сектора $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, $\rho<r$, получаваме

$$I^2(p)-\iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\iint_{B(r)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

и следователно

$$\left|I^2(p)-\iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\right|\leq\mu(B(r))=\frac{\pi r^2}{4}$$

или още

$$\left|I^2(p)-e^{-r^2}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho^2(\theta)}\,d\theta\right|\leq\frac{\pi r^2}{4},$$

откъдето

$$\left|I^2(p)-e^{-r^2}\frac{\pi}{4}\right|\leq\frac{\pi r^2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho^2(\theta)}\,d\theta$$

и следователно[1]

$$\left|I^2(p)-e^{-r^2}\frac{\pi}{4}\right|\leq\frac{\pi r^2}{4}+\frac{1}{2}e^{-p^2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Като извършим граничния преход $r\to 0$, намираме

$$\left|I^2(p)-\frac{\pi}{4}\right|\leq\frac{\pi}{4}e^{-p^2},$$

откъдето

$$\lim_{p\to\infty}\left[I^2(p)-\frac{\pi}{4}\right]=0$$

[1] Тъй като $\rho(\theta)\geq p$.

и следователно

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Не е трудно да се убедим, че формулата (8) запазва своята валидност и тогава, когато интеграционната област A' се определя в полярни координати с неравенствата (7), където α и β удовлетворяват неравенствата

$$-\pi\leq\alpha<\beta\leq\pi,$$

функциите $f(\theta)$ и $g(\theta)$ са непрекъснати в затворения интервал $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяват неравенствата

$$0\leq f(\theta)\leq g(\theta)$$

и функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в A'.

Тези условия са по-общи от разгледаните по-горе, защото сега не се иска да имаме $\alpha\neq-\pi$; $\beta\neq\pi$ и $f(\theta)\neq 0$. Читателят ще може сам да установи валидността на това обобщение, като проучи упътването на задача 1 към този параграф.

В разглежданията, които направихме, интервалът $[-\pi, \pi]$ може очевидно да се замени с произволен интервал, чиято дължина е 2π.

Задачи

1. Нека A е едно измеримо и затворено множество от точки в безкрайния правоъгълник

$$0\leq u\leq 2\pi,$$

9) $$v\geq 0,$$

който лежи в равнината с декартови координати u и v. Нека A' е образ на A при трансформацията

$$x=v\cos u,$$

(10) $$y=v\sin u.$$

В такъв случай, ако $F(x, y)$ е функция, която е непрекъсната в A', е валидно равенството

(11) $$\iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{A} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv.$$

Забележка. По такъв начин равенството (11) е валидно и в този случай въпреки че трансформацията (10) не е регулярна в (9).

Упътване. Изберете едно положително число r толкова голямо, че правоъгълникът

$$0\leq u\leq 2\pi,$$

$$0\leq v\leq r$$

да покрива A. Нека B е сумата от правоъгълниците

(12) $$0\leq u\leq\varepsilon,\quad 0\leq v\leq r;\quad 2\pi-\varepsilon\leq u\leq 2\pi,\quad 0\leq v\leq r;\quad 0\leq u\leq 2\pi,\quad 0\leq v\leq\varepsilon$$

и нека C е сумата от секторите в равнината XOY, които в полярни координати се определят от същите неравенства (12) (тук u е полярният ъгъл, а v е полярното разстояние).

Използувайте, че

$$\iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{A'-C} F(x, y)\,dx\,dy+\iint\limits_{A'C} F(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{A} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv=\iint\limits_{A-B} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv+$$

$$+\iint\limits_{AB} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_{A'-C} F(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{A-B} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv.$$

Нека M е една горна граница на $|F(x, y)|$ в A'. В такъв случай

$$\left|\iint\limits_{A'C} F(x, y)\,dx\,dy\right|\leq M\mu(A'C)\leq M(\varepsilon r^2+\pi\varepsilon^2),$$

$$\left|\iint\limits_{AB} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv\right|\leq Mr\mu(AB)\leq Mr(2\varepsilon r+2\pi\varepsilon)$$

следователно

$$\left|\iint\limits_{A'} F(x, y)\,dx\,dy-\iint\limits_{A} F(v\cos u,\ v\sin u)\,u\,du\,dv\right|\leq$$

$$\leq\left|\iint\limits_{A'C} F(x, y)\,dx\,dy\right|+\left|\iint\limits_{AB} F(v\cos u,\ v\sin u)\,v\,du\,dv\right|\leq$$

$$\leq M(\varepsilon r^2+\pi\varepsilon^2)+Mr(2\varepsilon r+2\pi\varepsilon).$$

Извършете в така полученото неравенство граничния преход $\varepsilon\to 0$.

2. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_{R}(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

разпространен върху областта R, определена от неравенствата

$$x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad x^2+y^2\leq a^2.$$

Упътване. Въведете полярни координати.

Отговор. $I=\frac{\pi a^4}{8}$.

3. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_R \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

разпространен във вътрешността R на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Упътване. Направете смяната на променливите

$$x=au,$$

$$y=bv$$

и след това въведете полярни координати.

Отговор. $I=\frac{2\pi ab}{3}$.

4. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_R (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

взет във вътрешността R на кръга

$$x^2+y^2-2y=0.$$

Упътване. Въведете полярни координати.

Отговор. $I=\frac{3\pi}{2}$.

5. Да се пресметне двойният интеграл

$$I=\iint\limits_R \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

разпространен върху частта R от първия квадрант, заградена от оста x и от кривата

$$\rho^2=4\cos^2\theta-1.$$

Отговор. $I=\sqrt{3}-\frac{\pi}{9}$.

§ 4. Несобствени двойни интеграли от неотрицателни функции

Нека G е едно измеримо множество от точки в равнината и S е негово подмножество с мярка нула. Нека $f(x, y)$ е функция, дефинирана в $G-S$, която приема само неотрицателни стойности. Нека най-сетне функцията $f(x, y)$ е интегруема върху всяко измеримо подмножество A на G, чието разстояние до S е различно от нула. Ще казваме, че функцията $f(x, y)$ е интегруема в несобствен смисъл върху G, ако интегралът

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy \tag{1}$$

остава ограничен отгоре, когато A се мени. Точната горна граница на (1) ще означаваме със символа

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

Нека

$$A_1, A_2, \ldots$$

е редица от измерими подмножества на G, за които

$$d(A_n, S)\neq 0, \quad \lim_{n\to\infty}\mu(G-A_n)=0.$$

Не е трудно да се покаже, че ако редицата

$$\iint\limits_{A_1} f(x, y)\,dx\,dy, \quad \iint\limits_{A_2} f(x, y)\,dx\,dy, \ldots$$

е сходяща, то функцията $f(x, y)$ е интегруема в несобствен смисъл върху G и

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{A_n} f(x, y)\,dx\,dy.$$

И наистина нека A е произволно измеримо подмножество на G, чието разстояние до S е различно от нула. Очевидно имаме

$$A\subset A_n+(A-A_n).$$

Оттук, като вземем под внимание, че функцията $f(x, y)$ е неотрицателна, получаваме

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy\leq\iint\limits_{A_n} f(x, y)\,dx\,dy+\iint\limits_{A-A_n} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Да означим с M една горна граница на $f(x, y)$ върху A. В такъв случай

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy\leq\iint\limits_{A_n} f(x, y)\,dx\,dy+M\mu(A-A_n)$$

и толкова повече

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy\leq\iint\limits_{A_n} f(x, y)\,dx\,dy+M\mu(G-A_n).$$

Като извършим граничен преход в последното неравенство, получаваме

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\, dx\, dy \leqq \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x, y)\, dx\, dy,$$

което ни учи, че функцията $f(x, y)$ е интегруема върху G и

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy \leqq \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x, y)\, dx\, dy.$$

От друга страна, съгласно дефиницията на (2) имаме

$$\iint\limits_{A_n} f(x, y)\, dx\, dy \leqq \iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy,$$

което след граничен преход ни дава

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x, y)\, dx\, dy \leqq \iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy$$

следователно

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{A_n} f(x, y)\, dx\, dy.$$

С това доказателството е завършено.

Глава II

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДВОЙНИТЕ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Дефиниция на понятието обем

Въвеждането на понятието обем може да стане строго, като се следва пътят, по който въведохме понятието лице. Тук няма да се спираме на подробностите, а ще покажем само в общи черти как това може да се направи.

1. Нека Δ е правоъгълен паралелепипед с измерения a, b и c. Ние ще означаваме произведението abc кратко със символа $m(\Delta)$.

2. Ако A е едно ограничено множество точки в пространството, можем (по безбройно много начини) да изберем система от краен брой отворени кубове $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ по такъв начин, че да имаме

$$A \subset \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n.$$

Точната долна граница на числата

$$m(\Delta_1) + m(\Delta_2) + \cdots + m(\Delta_n)$$

ще наричаме горна Пеано-Жорданова мярка на множеството A и ще я означаваме със символа $\mu(A)$.

3. Специално, ако A е едно ограничено точково множество и контурът му има мярка нула, ще казваме, че множеството A е измеримо в смисъл на Пеано—Жордан.

Доказва се (по същия начин, както и в двуизмеримия случай), че:

1. Каквото и да е ограниченото точково множество A в пространството, имаме $\mu(A) \geqq 0$.

2. Ако двете точкови множества A и B в пространството са измерими и мярката на сечението им е нула, то

$$\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B).$$

3. Ако A и B са две сходни помежду си ограничени множества от точки в пространството, то

$$\mu(A) = \mu(B).$$

4. Ако Δ е куб, чийто ръб има дължина 1, то

$$\mu(\Delta) = 1$$

без оглед на това, дали към този куб са причислени или не едни или други точки от контура му.

Специално, ако едно множество A от точки в пространството е измеримо, то неговата горна Пеано-Жорданова мярка се нарича негов обем. Често измеримите точкови множества, за които ние говорим в този параграф (т. е. за които е дефинирано понятието обем), се наричат още кубируеми за разликата от измеримите точкови множества, за които е дефинирано понятието лице и които се наричат квадрируеми.

2. Нека читателят сам докаже следното:

1. Ако A и B са ограничени точкови множества в пространството и $A \supset B$, то $\mu(A) \geq \mu(B)$.

Нека $OXYZ$ е една произволна ортогонална координатна система и нека R е едно квадрируемо множество от точки в равнината OXY. Нека G е едно изправено цилиндрично тяло с височина $h>0$, за основа на което служи множеството R. Това значи, че една точка (x, y, z) е причислена към G тогава и само тогава, когато (x, y) е точка, принадлежаща на R, и $0 \leq z \leq h$. В такъв случай множеството G е кубируемо и обемът му V се определя от формулата

$$V = Sh,$$

където S е лицето на R и h, както казахме по-горе, е височината на G.

§ 2. Пресмятане на обеми с помощта на двойни интеграли

Нека функцията $z = f(x, y)$ е дефинирана, непрекъсната и неотрицателна в едно затворено и квадрируемо точково множество R в равнината XOY. Да разгледаме изправеното цилиндрично тяло G, което е заградено отгоре с повърхнината $z = f(x, y)$, а долната основа на което представлява множеството R. Това цилиндрично тяло G може по-точно да се дефинира така: една точка с координати (x, y, z) се причислява към G тогава и само тогава, когато точката с координати (x, y) принадлежи на R и

$$0 \leq z \leq f(x, z)$$

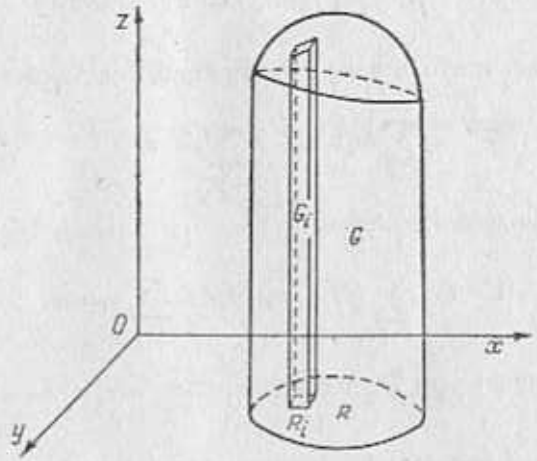
(вж. черт. 24).

Не е трудно да се види, че множеството G е кубируемо.[1] Тук ще си поставим за задача да пресметнем обема V на тялото G. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и делим множеството R на измерими подмножества

$$R_1, R_2, \cdots, R_n$$

[1] Т. е. то е ограничено и контурът му има мярка нула. Ние ще предоставим доказателството на читателя.

без общи точки по такъв начин, че осцилацията на $f(x, y)$ във всяко едно от тези подмножества да бъде по-малка от ε. Това може да се направи (стига да изберем диаметрите на R_i, $i=1, 2, \cdots, n$, достатъчно малки), защото функцията $f(x, y)$ е непре-



Черт. 24

късната, а множеството R е ограничено и затворено. По такъв начин тялото G се разпада на по-малки цилиндрични тела G_1, $G_2, \cdots, G_n$ с основи $R_1, R_2, \cdots, R_n$. Да означим с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството R_i, със σ_i лицето на R_i и с v_i обема на G_i. В такъв случай очевидно са в сила неравенствата

$$m_i \sigma_i \leq v_i \leq M_i \sigma_i,$$

защото $m_i \sigma_i$ представлява обемът на цилиндър, вписан в G_i, а $M_i \sigma_i$ представлява обемът на цилиндър, описан около G_i. Оттук получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} v_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i$$

или още

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i.$$

От друга страна, функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в квадрируемото и затворено точково множество R и следователно е интегруема в това множество. Това ни дава право да образуваме двойния интеграл

$$I=\iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

Този интеграл, както знаем, удовлетворява неравенствата

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \leq I \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i.$$

По такъв начин получаваме

$$(1) \qquad |V-I| \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\ \sigma_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \varepsilon\sigma,$$

където σ е лицето на R, и следователно

$$V-I=0,$$

защото в противен случай неравенството (1) сигурно би било нарушено при достатъчно малки стойности на ε. По такъв начин получихме

$$V=\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

или по-кратко

$$V=\iint_R z\, dx\, dy.$$

Пример. Да се пресметне обемът на триосния елипсоид

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a>0,\ b>0,\ c>0.$$

Решение. Да означим с V обема на елипсоида. Този обем е два пъти по-голям от обема на частта от този елипсоид, която е разположена над равнината $z=0$. По такъв начин получаваме

$$V=2\iint_R z\, dx\, dy,$$

където R означава вътрешността на елипсата

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравнението на частта от елипсоида (2), която е разположена над равнината $z=0$, е

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

По такъв начин намираме

$$V=2c\iint_R \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy.$$

За да пресметнем този двоен интеграл, правим смяна на променливите

$$(4) \qquad x=au, \qquad y=bv.$$

Като вземем пред вид, че

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=ab,$$

намираме

$$(5) \qquad V=2\,abc\iint_A \sqrt{1-u^2-v^2}\, du\, dv,$$

където контурът на интеграционната област A представлява окръжността

$$(6) \qquad u^2+v^2=1$$

интеграционната област A е образът на интеграционната област R при трансформацията (4); уравнението (6) се получава от уравнението (3) с помощта на субстанцията (4)).

Пресмятането на интеграла (5) може да се извърши с помощта на полярни координати по следния начин:

$$\iint_A \sqrt{1-u^2-v^2}\, du\, dv=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\, d\rho\right] d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{2\pi}{3}.$$

По такъв начин получаваме

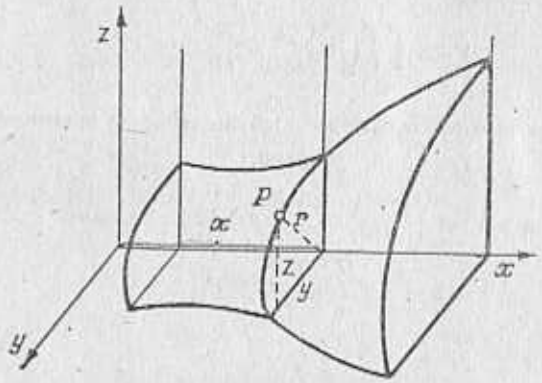
$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

В специалния случай, когато $a=b=c$, получаваме позната от елементарната геометрия формула за обема на сферата

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 3. Обеми на ротационни тела

В предния параграф показахме как понс в някои случаи можем да намираме обемите на телата с помощта на двойни интеграли. Има обаче някои специални случаи, когато обемът може



Черт. 25

да се изрази с прост интеграл. Такъв случай имаме например при ротационните тела.

Нека функцията $y=f(x)$ е дефинирана, непрекъсната и неотрицателна в интервала $a\leq x\leq b$. Ако завъртим тази крива около оста x, ще получим една ротационна повърхнина S (вж. черт. 25). Очевидно една точка P с абсциса x лежи върху повърхнината S тогава и само тогава, когато разстоянието ѝ r до оста x е равно на $f(x)$. Когато вземем пред вид, че

$$r=\sqrt{y^2+z^2},$$

получаваме, че точката P лежи върху повърхнината S тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението

$$f(x)=\sqrt{y^2+z^2}.$$

Като решим така полученото уравнение относно z, заключаваме че уравнението на частта от повърхнината S, която е разположена над равнината $z=0$, е

$$z=\sqrt{f^2(x)-y^2}.$$

След всичко казано не е трудно да се намери обемът V на ротационното тяло, което е заградено от повърхнината S и от равнините $x=a$ и $x=b$. Очевидно този обем е четири пъти по-голям

от обема на частта от разглежданото ротационно тяло, която е разположена в първия октант. По такъв начин получаваме

$$V=4\iint\limits_R z\,dx\,dy=4\iint\limits_R\sqrt{f^2(x)-y^2}\,dx\,dy,$$

където интеграционната област R се определя от неравенствата

$$a\leq x\leq b,$$
$$0\leq y\leq f(x),$$

откъдето

$$V=4\int_a^b\left[\int_0^{f(x)}\sqrt{f^2(x)-y^2}\,dy\right]dx.$$

Като положим

$$y=f(x)\cos t,$$

намираме

$$\int_0^{f(x)}\sqrt{f^2(x)-y^2}\,dy=f^2(x)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=$$

$$=f^2(x)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=f^2(x)\,\frac{\pi}{4},$$

откъдето

$$V=4\,\frac{\pi}{4}\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

т. е.

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{1}$$

Пример. В предния параграф пресметнахме обема на сферата, като използувахме двойни интеграли. Ние обаче можем да пресметнем обема на сферата с помощта на прости интеграли, като използуваме формулата (1). И наистина сферата

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{2}$$

може да се получи от завъртване на окръжността

$$x^2+y^2=R^2$$

около оста x. Това обстоятелство ни позволява да пресметнем обема V на сферата (2) по следния начин:

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-x^2})^2dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=$$

$$=\pi\left|R^2x-\frac{x^3}{3}\right|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Задачи

1. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на овала на строфоидата

$$(x^2+y^2)\,x-a\,(x^2-y^2)=0\,;\ a>0$$

около оста x.

Отговор. $2a^3\pi\left(\ln 2-\frac{2}{3}\right)$.

2. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на дъгата от циклоидата

$$x=a\,(t-\sin t),$$

$$y=a\,(1-\cos t),\ 0\leq t\leq 2\pi\,;\ a>0,$$

около оста x.

Отговор. $5a^3\pi^2$.

3. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на кардиоидата

$$\rho=a\,(1+\cos\theta),\ a>0,$$

около оста x.

Отговор. $\frac{8\pi a^3}{3}$.

4. Да се намери обемът на триосния елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,;\ a>0,\ b>0,\ c>0,$$

с помощта само на прости интеграли.

Отговор. $\frac{4}{3}\pi abc$.

5. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$x^2+y^2=cz,\ c>0,\ x^4+y^4=a^2\,(x^2+y^2),\ z=0.$$

Отговор. $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{a^4}{c}$.

6. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$x^2+y^2+z^2\leq a^2,\ (x^2+y^2)^2\leq a^2\,(x^2-y^2)\,;\ a>0.$$

Отговор. $\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{8}{9}\,(4\sqrt{2}-5)\,a^3$.

7. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$x^2+y^2+z^2\leq a^2,$$

$$x^2+y^2\leq ax\,;\ a>0$$

(задача на Вивиани).

Отговор. $\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{8}{9}\,a^3$.

8. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнината

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1\,;\ a>0,\ b>0,\ c>0.$$

Отговор. $\frac{\pi^2}{2}abc$.

9. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\ \frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ z=0\,;$$

$$a>0,\ b>0,\ c>0.$$

Отговор. $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}abc$.

10. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$x^2+y^2+z^2\leq a^2,$$

$$y^2+z^2\leq ax\,;\ a>0.$$

Отговор. $\frac{5\pi a^3}{4}\left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

11. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$y^2+z^2=2p\,(x+aq),$$

$$y^2+z^2=-2q\,(x-ap)\,;$$

$$a>0,\ p>0,\ q>0.$$

Отговор. $\pi a^2(p+q)\,pq$.

12. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$\frac{x^2}{3}+y^2-2z=0,$$

$$\frac{2x^2}{3}+3y^2+2z-4=0.$$

Отговор. 2π.

13. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$2z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b},$$

$$2z=ab\frac{bx^2+ay^2}{b^2x^2+a^2y^2};\ a>0,\ b>0.$$

Отговор. $\frac{ab(a+b)}{8}\pi$.

14. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};\ a>0.$$

Отговор. $\frac{4\pi a^3}{35}$.

§ 4. Допирателна равнина

Нека функцията

(1) $$z=f(x,\ y)$$

е дефинирана в някоя околност на точката $(x_0,\ y_0)$ и притежава непрекъснати първи частни производни в тази околност. Равнината с уравнение

(2) $$z-z_0=f'_x(x_0,\ y_0)\ (x-x_0)+f'_y(x_0,\ y_0)\ (y-y_0),$$

където

$$z_0=f(x_0,\ y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина към повърхнината (1) в точката $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

На читателя е известно от аналитичната геометрия, че числата

$$f'_x(x_0,\ y_0),\ f'_y(x_0,\ y_0),-1$$

представляват директорните параметри[1] на нормалата на равнината (2). Оттук заключаваме, че директорните косинуси на тази нормала са или

$$\frac{f'_x(x_0,\ y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,\ y_0)+1}},\ \frac{f'_y(x_0,\ y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,\ y_0)+1}},$$

[1] Т. е. това са числа, пропорционални на косинусите (тези косинуси се наричат директорни косинуси) на ъглите, които сключва коя да е от посоките на разглежданата права с посоките на координатните оси.

$$\frac{-1}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,y_0)+1}},$$

или

$$\frac{-f'_x(x_0,\ y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,\ y_0)+1}},\quad \frac{-f'_y(x_0,\ y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,\ y_0)+1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{f'^2_x(x_0,\ y_0)+f'^2_y(x_0,\ y_0)+1}},$$

в зависимост от посоката, която сме избрали за положителна върху разглежданата нормала.

§ 5. Лица на повърхнини

Нека функцията

(1) $$z=f(x,\ y)$$

е дефинирана и има равномерно непрекъснати първи частни производни в едно квадрируемо и отворено точково множество G чиято мярка е различна от нула. Делим множеството G на квадрируеми подмножества

(2) $$G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_n$$

с различни от нула мерки по такъв начин, че мярката на сечението на всеки две от тях да бъде нула, и избираме във всяко от тези подмножества G_i по една вътрешна точка $(\xi_i,\ \eta_i)$. Разглеждаме допирателната равнина

(3) $$z-f(\xi_i,\ \eta_i)=f'_x(\xi_i,\ \eta_i)\ (x-\xi_i)+f'_y(\xi_i,\ \eta_i)\ (y-\eta_i)$$

и точката

$$[\xi_i,\ \eta_i,\ f(\xi_i,\ \eta_i)]$$

към повърхнината (1) (вж. предния параграф). Не е трудно да се покаже, че частта H_i от допирателната равнина (3), която се проектира върху G_i, е квадрируема (ние ще предоставим доказателството на читателя). Нека σ_i е нейното лице. Ще покажем, че сумите

(4) $$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i$$

притежават граница, когато диаметрите на подмножествата (2) клонят към нула. За да установим това, означаваме с S_i лицето

на множеството G_i. Като вземем пред вид, че G_i е ортогонална проекция на H_i върху равнината (3), получаваме

$$S_i = \sigma_i \, |\cos \gamma_i| ,$$

където γ_i е кой да е от ъглите, които нормалата на равнината (3) сключва с оста OZ. От предния параграф имаме

$$\cos \gamma_i = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)}}$$

и следователно

$$\sigma_i = \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \; S_i,$$

откъдето

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \; S_i.$$

По този начин ние представихме σ като Риманова интегрална сума на функцията

$$\varphi(x, y) = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}.$$

От друга страна, лесно се доказва, че тази функция е равномерно непрекъсната в G и следователно сумите σ клонят към интеграла

$$\iint_G \varphi(x, y) \; dx \; dy = \iint_G \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \; dx \, dy,$$

когато диаметрите на подмножествата G_i клонят към нула. С това ние не само установихме съществуването на интересуващата ни граница, но дори можахме да изразим тази граница с помощта на един двоен интеграл.

След тези предварителни бележки ще дефинираме понятието лице на повърхнината (1) така: границата на сумите (4), когато диаметрите на подмножествата (2) на G клонят към нула, се нарича лице на повърхнината (1).

Да означим с S лицето на повърхнината (1). От изложеното по-горе се вижда, че

$$S = \iint_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy. \tag{5}$$

Целесъобразно е да се обобщи понятието лице по следния начин: нека функцията $z = f(x, y)$ е дефинирана и притежава частни производни f_x и f_y навсякъде в едно измеримо точково множество G с евентуално изключение на едно подмножество с мярка нула

в смисъл на Пеано — Жордан; в такъв случай ние под лице на повърхнината $z = f(x, y)$ ще разбираме стойността на интеграла (5) всеки път, когато този интеграл съществува (в собствен или несобствен смисъл).

§ 6. Лица на ротационни повърхнини

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана, положителна и има непрекъсната производна в интервала $a \leq x \leq b$. Ако завъртим тази крива около оста x, ще получим една ротационна повърхнина S (вж. черт. 25). Видяхме в § 3 на тази глава, че уравнението на частта S' от повърхнината S, която е разположена над равнината $z = 0$, е

$$z = \sqrt{f^2(x) - y^2} .$$

Тук оставяме точката (x, y) да се мени в отвореното множество G, определено от неравенствата

$$a < x < b,$$
$$-f(x) < y < f(x).$$

Ще пресметнем лицето σ' на частта S'. Очевидно имаме

$$z'_x = \frac{f(x) f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - y^2}} ,$$

$$z'_y = \frac{-y}{\sqrt{f^2(x) - y^2}} .$$

По такъв начин формула (5) от предния параграф ни дава

$$\sigma' = \iint_G \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \, dx \, dy =$$

$$= \iint_G \sqrt{1 + \frac{f^2(x) f'^2(x)}{f^2(x) - y^2} + \frac{y^2}{f^2(x) - y^2}} \, dx \, dy =$$

$$= \iint_G \frac{f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x) - y^2}} \, dx \, dy,$$

където интегралът трябва да се разбира в несобствен смисъл.

Означаваме с G^ε произволно измеримо и затворено подмножество на G, което няма общи точки с контура на G. В такъв случай при всички достатъчно малки положителни стойности на ε имаме

$$\iint\limits_{G^*} \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy \leq \int\limits_a^b \left[f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} \int\limits_{-f(x)+\varepsilon}^{f(x)-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} \int\limits_{-f(x)+\varepsilon}^{f(x)-\varepsilon} \frac{d\frac{y}{f(x)}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{f(x)}\right)^2}} \right] dx =$$

$$= 2\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\arcsin\frac{f(x)-\varepsilon}{f(x)}\,dx <$$

$$< \pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

защото $\arcsin\frac{f(x)-\varepsilon}{f(x)} < \frac{\pi}{2}$.

Така получената оценка ни позволява да твърдим, че интегралът

$$\iint\limits_G \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy$$

съществува в несобствен смисъл и

$$\iint\limits_G \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy \leq \pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

От друга страна, горната граница

$$\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

на интегралите

$$\iint\limits_{G^*} \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy$$

е точна, защото

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \left[f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} \int\limits_{-f(x)+\varepsilon}^{f(x)-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{f^2(x)-y^2}} \right] dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\arcsin\frac{f(x)-\varepsilon}{f(x)}\,dx =$$

$$= \pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

От това следва, че

$$\iint\limits_G \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,dx\,dy = \pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{1}$$

Понятието лице може малко да се обобщи, като под лице σ на цялата повърхнина S се условим да разбираме $2\sigma'$. Обръщаме още веднъж вниманието на читателя върху това, че тук се касае за едно малко обобщение на формула (5) от предния параграф, а не за едно нейно следствие. По такъв начин получаваме

$$\sigma = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \tag{2}$$

или по-кратко

$$\sigma = 2\pi \int\limits_a^b y\,ds, \tag{3}$$

където

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad ds = \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Целесъобразно е да се обобщи още повече понятието лице на ротационна повърхнина по следния начин: нека двете функции

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \tag{4}$$

където $a \leq t \leq b$, са диференцуеми в интервала $[a, b]$ с евентуално изключение на краен брой точки и нека $y(t) \geq 0$; уравненията (4) представят параметрично някоя крива (Γ), върху която няма точки, лежащи под оста x; ще наричаме лице на ротационната повърхнина S, която се получава от въртенето на кривата (Γ) около оста x, стойността на интеграла

$$\sigma = 2\pi \int\limits_a^b y\,ds,$$

където

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

всеки път, когато този интеграл има (собствен или несобствен) смисъл.

Пример. Да се намери лицето σ на сферата

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\ r>0.$$

Решение. Тази сфера може да се получи чрез завъртване на полуокръжността

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\quad -r\leq x\leq r,$$

около оста x. Очевидно имаме

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}},\qquad ds=\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

и следователно

$$\sigma=2\pi\int_{-r}^{r} y\,ds=2\pi\int_{-r}^{r} r\,dy=4\pi r^2.$$

Задачи

1. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на дъгата

$$y=\sin x,\quad 0\leq x\leq\pi,$$

около оста x.

Отговор. $2\pi\,[\ln(1+\sqrt{2})\ +\sqrt{2}\,]$.

2. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на дъгата от циклоидата

$$x=a\,(t-\sin t),$$

$$y=a\,(1-\cos t),\quad 0\leq t\leq 2\pi,\ a>0,$$

около оста x.

Отговор. $\dfrac{64\,\pi\,a^2}{3}$.

3. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на трактрисата

$$a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}=|x|+\sqrt{a^2-y^2},$$

$$a>0,\quad 0<y\leq a,$$

около оста x.

Забележка. Тази ротационна повърхнина се нарича псевдосфера.

Отговор. $4\pi a^2$.

4. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\quad a>0,$$

около абсцисната ос.

Отговор. $\dfrac{12}{5}\pi a^2$.

5. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на кардиоидата

$$\rho=2a\,(1+\cos\theta),\quad 0\leq\theta\leq\pi,$$

около оста x.

Отговор. $\dfrac{128}{5}\pi a^2$.

6. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на кривата

$$\rho^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta,\quad 0\leq\theta\leq\pi,\quad a^2>b^2>0,$$

около оста x.

Отговор. $2\pi\left[a^2+\dfrac{b^4}{a^2+b^2}\ln\dfrac{a^2+\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\right]$.

7. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на кривата

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta$$

около оста x.

Отговор. $4\pi a^2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

8. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на окръжността

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

където $q>r>0$, около оста x.

Забележка. Тази ротационна повърхнина се нарича тор.

Отговор. $4\pi^2 qr$.

9. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$z=\frac{xy}{a},\ a>0,$$

която се проектира върху равнината XOY в областта, ограничена от оста x и от частта от кривата

$$\rho^2=a^2\,(4\cos^2\theta-1),$$

която се намира в първия квадрант.

Отговор. $a^2\sqrt{3}-\dfrac{\pi a^2}{9}$.

10. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$2z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b},\ a>0,\ b>0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2.$$

Отговор. $\frac{2}{3}\pi ab\left[(1+c^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

11. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$x^2+y^2=2az, \quad a>0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

Отговор. $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$.

12. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$az=xy, \quad a>0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$(x^2+y^2)^2=2a^2\,xy.$$

Отговор. $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$.

13. Да се намери лицето на повърхнината

$$z=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

където

$$1<x^2+y^2<4, \quad x>0, \quad y>0.$$

Отговор. $\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{18}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\right]$.

14. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$2z=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}, \quad a>0, \quad b>0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

Отговор. $\frac{20-3\pi}{9}ab$.

Глава III

ТРОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Тройни интеграли

Нека ни е дадена една функция $f(x, y, z)$, която е дефинирана и ограничена в едно кубируемо точково множество R. Делим множеството R на краен брой кубируеми подмножества

(1) $$R_1, R_2, \ldots, R_n$$

по такъв начин, че мярката на сечението на всеки две от тях да бъде нула. Нека v_i е обемът на множеството R_i и нека M_i и m_i са съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y, z)$ в множеството R_i. Сумата

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\, v_i$$

се нарича голяма, а сумата

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i$$

се нарича малка сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на множеството R на измерими подмножества (1). Не е трудно да се установят неравенствата

(2) $$mv\leq s\leq S\leq Mv,$$

където M и m означават една горна и една долна граница на $f(x, y, z)$ в множеството R, а v е обемът на R.

И наистина неравенствата

$$m\leq m_i\leq M_i\leq M$$

ни дават

$$mv_i\leq m_iv_i\leq M_iv_i\leq Mv_i$$

и следователно

$$m\sum_{i=1}^{n} v_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\, v_i \leq M\sum_{i=1}^{n} v_i,$$

откъдето получаваме веднага неравенствата (2), като вземем пред вид, че

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = v.$$

Неравенствата (2) ни учат, че както множеството на малките, така и множеството на големите суми на Дарбу е ограничено (и отгоре, и отдолу). Точната горна граница на множеството от малките суми се означава със символа

$$\underline{\iiint}_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

и се нарича долен интеграл на функцията $f(x, y, z)$, разпространен върху множеството R, а точната долна граница на големите суми се означава със символа

$$\overline{\iiint}_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

и се нарича горен интеграл на функцията $f(x, y, z)$, разпространен върху множеството R.

Не е трудно да се установи неравенството

$$\underline{\iiint}_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dy \leq \overline{\iiint}_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Това може да стане по същия начин, както при двойните интеграли. Този път ние ще предоставим доказателството на читателя.

Една ограничена функция $f(x, y, z)$, чиято дефиниционна област R е едно кубируемо точково множество, се нарича интегруема в Риманов смисъл в R, когато

$$\underline{\iiint}_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

В такъв случай общата стойност на горния и долния интеграл се нарича троен Риманов интеграл на функцията $f(x, y, z)$, разпространен върху множеството R, и се означава със символа[1]

[1] Понякога тройният интеграл се означава по-кратко така:

$$\int_R f(x, y, z)\, dv.$$

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Тук ние ще изброим по-важните основни свойства на тройните интеграли, които са съвсем аналогични на съответните свойства на простите и на двойните интеграли. Доказателствата ние няма да даваме, защото те могат да се дадат по същия начин, както при простите интеграли.

1. Ако функциите $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ са интегруеми в едно кубируемо точково множество R, то сумата

$$f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)$$

е също тъй интегруема в R и

$$\iiint_R [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz = \iiint_R f_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_R f_2(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

2. Ако функцията $f(x, y, z)$ е интегруема в кубируемото точково множество R и a е една константа, то функцията $af(x, y, z)$ е също тъй интегруема в R и

$$\iiint_R af(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = a\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

3. Ако A и B са две кубируеми точкови множества, ако мярката на сечението AB е нула и ако функцията $f(x, y, z)$ е интегруема и в множеството $A+B$, като при това

$$\iiint_{A+B} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

4. Ако функцията $f(x, y, z)$ е интегруема в кубируемото точково множество R и удовлетворява неравенствата

$$m \leq f(x, y, z) \leq M$$

то

$$mv \leq \iiint\limits_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leq Mv,$$

където v е обемът на R.

Всяка функция $f(x, y, z)$, която е дефинирана и непрекъсната в едно кубируемо и затворено точково множество R, е интегруема.

Ние бихме могли да продължим и по-нататък списъка на свойствата на тройните интеграли, които са аналогични на съответните свойства на простите и двойните интеграли, но ще се ограничим с изброените дотук.

Накрая ще отбележим още, че понятието интеграл може да се дефинира без труд в пространство с произволен брой измерения. Ние обаче няма да навлизаме в подробностите, още повече, че е ясно как това може да стане.

§ 2. Пресмятане на тройни интеграли

Нека G е едно затворено квадрируемо точково множество в равнината XOY и нека $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ са две функции, които са дефинирани, непрекъснати и удовлетворяват неравенството

$$\varphi_0(x, y) \leq \varphi_1(x, y)$$

във всички точки на G. Да разгледаме точковото множество R което е съставено от онези и само онези точки (x, y, z), за които точката (x, y) принадлежи на G и

$$\varphi_0(x, y) \leq z \leq \varphi_1(x, y).$$

Не е трудно да се покаже, че множеството R е измеримо. Ние обаче ще изоставим доказателството.

Нека $f(x, y, z)$ е една функция, която е дефинирана и непрекъсната в R. Функцията $f(x, y, z)$ е интегруема в R, защото е непрекъсната и защото множеството R е не само кубируемо, но и затворено. В разглеждания случай обаче интеграционната област R има твърде специален вид. Благодарение на това обстоятелство тройният интеграл

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

може да се изрази с помощта на един двоен и един прост интеграл по следния начин:

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_G \left[\int\limits_{\varphi_0(x, y)}^{\varphi_1(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy. \tag{1}$$

Доказателството може да се извърши по същия начин, както доказахме съответната формула за пресмятане на двойните интеграли с помощта на прости. Ние няма да се спираме на доказателството, а ще се задоволим само с един пример, който ще ни илюстрира как се използува формулата (1).

Пример. Да се пресметне тройният интеграл

$$I = \iiint\limits_R z^2\, dx\, dy\, dz,$$

разпространен в частта R от пространството, която е заградена от сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Решение. Да означим с G кръга, който се ограничава от окръжността

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Една точка с координати (x, y, z) принадлежи на R тогава и само тогава когато точката с координати (x, y) принадлежи на G и освен това

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Този резултат ни позволява да пишем

$$\iiint\limits_R z^2\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_G \left\{ \int\limits_{-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} z^2\, dz \right\} dx\, dy$$

и следователно

$$\iiint\limits_R z^2\, dx\, dy\, dz = \frac{2}{3} \iint\limits_G (r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\, dz\, dy.$$

По този начин изразихме интересуващия ни интеграл I с помощта на един двоен интеграл. Пресмятането на този двоен интеграл може да се извърши по познати пътища. Въвеждаме полярни координати

$$x = \rho \cos \theta,$$
$$y = \rho \sin \theta.$$

Това ни дава

$$I = \frac{2}{3} \int\limits_0^{\pi} \left[\int\limits_0^{r} r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho d\rho \right] d\theta = \frac{4}{15} r^5 \pi.$$

§ 3. Смяна на променливите при тройни интеграли

Нека

$$
(1)\qquad \begin{aligned} x &= f(u, v, w), \\ y &= g(u, v, w), \\ z &= h(u, v, w) \end{aligned}
$$

е една двойно регулярна трансформация на едно отворено точково множество R. Това значи, че функциите (1) удовлетворяват следните условия:

1. Функциите (1) са дефинирани в R и притежават непрекъснати частни производни поне до втори ред включително.
2. Различните точки от R се изобразяват върху различни точки при трансформацията (1).
3. Функционалната детерминанта

$$
\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix}
$$

не се анулира никъде в R

При тези предположения може да се покаже по същия начин, както в двуизмеримия случай, че всяко кубируемо точково множество A, което лежи в R заедно с контура си, се изобразява върху някое кубируемо точково множество A'.

Нека A е едно кубируемо и затворено точково множество, което лежи в R, и нека $F(x, y, z)$ е една непрекъсната функция в A', където A' е образът на A. В такъв случай е валидна следната важна формула:

$$
(2)\qquad \begin{aligned} &\iiint\limits_{A'} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \\ &= \iiint\limits_{A} F[f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)]\, \Delta\, du\, dv\, dw, \end{aligned}
$$

където Δ е абсолютната стойност на функционалната детерминанта

$$
\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}
$$

Ние няма да се спираме върху доказателството, защото то може да се извърши така, както в двуизмеримия случай.

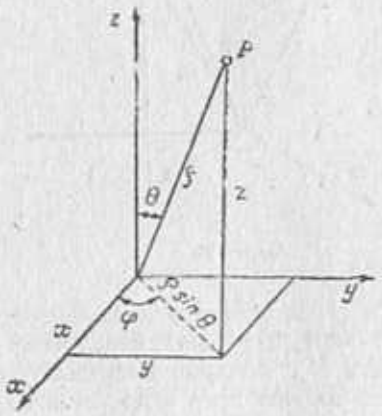
Специално, ако (ρ, θ, φ) са сферични координати (или, както се казва понякога, пространствени полярни координати) на точката P, чиито декартови координати са (x, y, z), то

$$
(3)\qquad \begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= \rho \cos\theta \end{aligned}
$$

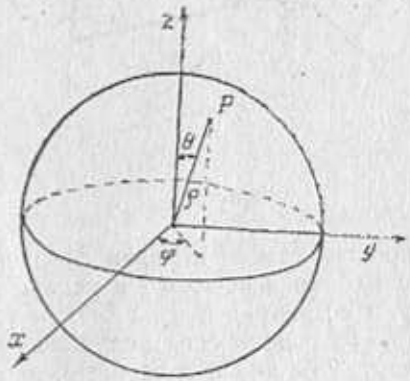
$$
\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi
$$

(вж. черт. 26). В такъв случай функционалната детерминанта $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)}$ има стойност

$$
\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\theta.
$$



Черт. 26



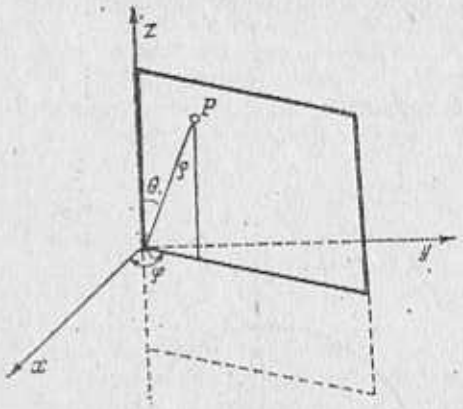
Черт. 27

В специалния случай, когато извършваме смяна на променливите с помощта на трансформачните формули (3), равенството (2) добива следния вид:

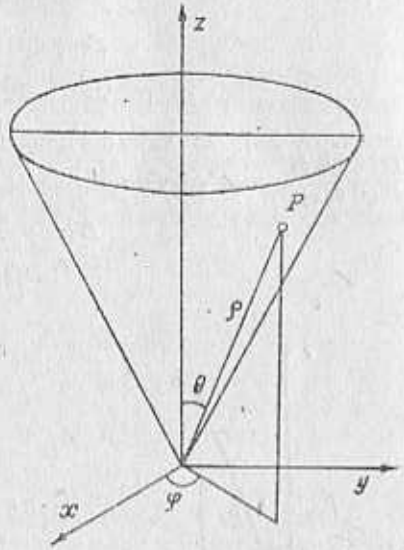
$$
\begin{aligned} &\iiint\limits_{A'} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \\ &= \iiint\limits_{A} F[\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\theta]\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \end{aligned}
$$

Изразът $\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$ се нарича елемент на обем в полярни координати. Ние ще дадем едно просто геометрично тълкуване на този израз.

За тази цел да отбележим предварително следното: когато фиксираме ρ и оставим φ и θ да се менят, то точката P, чиито



Черт. 28



Черт. 29

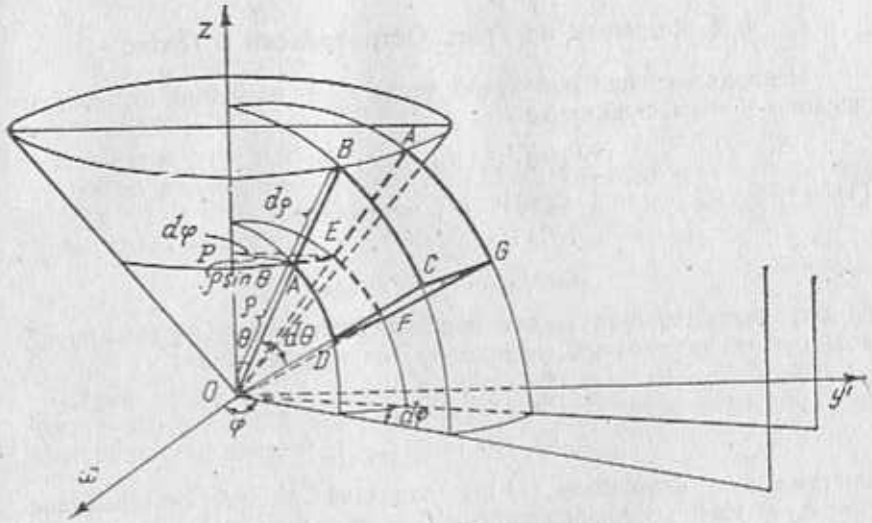
пространствени полярни координати са (ρ, φ, θ), ще описва сфера с център в началото и радиус ρ (вж. черт. 27); ако фиксираме φ, а оставим ρ и θ да се менят, точката P с полярни координати (ρ, φ, θ) ще описва полуравнина, която минава през оста z (вж. черт. 28); ако фиксираме θ, а оставим ρ и φ да се менят, точката P, чиито полярни координати са (ρ, φ, θ), ще описва ротационен конус с връх в началото, чиято ротационна ос е оста z (вж. черт. 29).

Трите системи повърхнини

$$\rho = \text{const},$$
$$\varphi = \text{const},$$
$$\theta = \text{const}$$

се наричат координатни повърхнини при сферичната координатна система. Не е трудно да се види, че всеки две координатни повърхнини от различни системи се пресичат под прав ъгъл. Това значи, че когато и да изберем една точка P върху пресечната

крива Γ на две координатни повърхнини S_1 и S_2, които принадлежат на различни системи, допирателните равнини в точката P съответно към S_1 и към S_2 са перпендикулярни помежду си. Няма да доказваме това твърдение, защото читателят е запознат с него от геометрията.



Черт. 30

В бъдеще за краткост ще си служим със следната терминология: сфера с център в началото и радиус ρ ще наричаме сфера ρ; полуравнина, която минава през оста z и сключва ъгъл φ с полуравнината $+XOZ$, ще наричаме полуравнина φ; ротационен конус с връх в началото, чиито образуващи сключват ъгъл θ с положителната посока на оста z, ще наричаме конус θ.

Да разгледаме частта от пространството, заградена от сферите ρ и $\rho + d\rho$, полуравнините φ и $\varphi + d\varphi$ и конусите θ и $\theta + d\theta$ (вж. черт. 30).

Тук $AB = d\rho$; страната AD като дъга от окръжност с радиус ρ, чийто централен ъгъл е $d\theta$, е равна на $\rho d\theta$; най-сетне AE е дъга от окръжност с радиус

$$PA = \rho \sin\theta$$

и тъй като

$$\sphericalangle APE = d\varphi,$$

то

$$AE = \rho \sin\theta \, d\varphi.$$

Ръбовете AB, AD и AE са взаимно перпендикулярни. Разглеждайки тялото $ABCDEFGH$ (приближено) като правоъгълен паралелепипед, получаваме за обема му dv следния приблизителен израз:

$$dv = d\rho \,.\, \rho d\theta \,.\, \rho \sin\theta \, d\varphi = \varphi^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$

§ 4. Формули на Грин, Остроградски и Стокс

Нека цялото неотрицателно число k е по-малко от цялото число n и нека функциите

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= f_1(t_0, t_1, \cdots, t_k), \\ x_2 &= f_2(t_0, t_1, \cdots, t_k), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= f_n(t_0, t_1, \cdots, t_k) \end{aligned}$$

са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в множеството G, определено от неравенствата

$$t_0 \geq 0,\ t_1 \geq 0, \cdots, t_k \geq 0,$$

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_k \leq 1.$$

Системата от функциите (1) ще наричаме гладка k-повърхнина. При $k=0$ така дефинираната k-повърхнина ще наричаме дъга, а при $k=1$ накратко ще я наричаме повърхнина.

Да означим с Γ определената от (1) k-повърхнина. Множеството, което се описва от точката с координати

$$[f_1(t_0, t_1, \cdots, t_k),\ f_2(t_0, t_1, \cdots, t_k), \cdots, f_n(t_0, t_1, \cdots, t_k)],$$

когато точката $(t_0, t_1, \cdots, t_k)$ описва G, ще наричаме графика на k-повърхнината Γ. Ако всяка от независимите променливи $t_0, t_1, \cdots, t_k$ е снабдена с номер, както това е направено при нас, ще казваме, че повърхнината Γ е ориентирана. Ако функциите (1) притежават непрекъснати частни производни и от втори ред, ще казваме, че Γ е (двукратно) гладка k-повърхнина. Гладките $(k-1)$-повърхнини $\Gamma_{\nu+1}$ при $\nu \geq 0$, определени от

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_0, t_1, \cdots, t_{\nu-1}, 0, t_{\nu+1}, \cdots, t_k), \\ x_2 &= f_2(t_0, t_1, \cdots, t_{\nu-1}, 0, t_{\nu+1}, \cdots, t_k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= f_n(t_0, t_1, \cdots, t_{\nu-1}, 0, t_{\nu+1}, \cdots, t_k), \end{aligned}$$

$$t_0 \geq 0,\ t_1 \geq 0, \cdots, t_{\nu-1} \geq 0,\ t_{\nu+1} \geq 0, \cdots, t_k \geq 0,$$

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_{\nu-1} + t_{\nu+1} + \cdots + t_k \leq 1,$$

както и $(k-1)$-повърхнината Γ_0, определена от

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_k, t_1, t_2, \cdots, t_k), \\ x_2 &= f_2(1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_k, t_1, t_2, \cdots, t_k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= f_n(1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_k, t_1, t_2, \cdots, t_k), \end{aligned}$$

$$t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0, \cdots, t_k \geq 0,$$

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_k \leq 1,$$

ще наричаме стени на Γ.

За да получим по-прости резултати, ще превърнем $\Gamma_{\nu+1}$ при $\nu = 0, 1, \cdots, k$ в ориентирана $(k-1)$-повърхнина, като номерираме независимите променливи в следния ред:

$$t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{\nu-1}, t_{\nu+1}, \cdots, t_k,$$

За $(k-1)$-повърхнината Γ_0 ще извършим номерирането в реда $t_1, t_2, \cdots, t_k$.

Нека $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ е една функция, която е дефинирана и непрекъсната върху графиката на k-повърхнината Γ. По дефиниция ще пишем*

$$(2) \qquad \int_\Gamma F(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_{\alpha_0}\, dx_{\alpha_1} \cdots dx_{\alpha_k} =$$

$$= \int_G F(f_1, f_2, \cdots, f_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t_k} \\ \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix} dt_0\, dt_1 \cdots dt_k.$$

По такъв начин стойността на интеграла (2) зависи от реда, в който пишем диференциалите $dx_{\alpha_0}, dx_{\alpha_1}, \cdots, dx_{\alpha_k}$. Ако разменим местата на два диференциала, интегралът си сменя знака.

При тази дефиниция се позволява някои от индексите $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ да съвпадат. В такъв случай стойността на интеграла (2) ще бъде нула, защото някои редове в детерминантата от дефиниционния му израз ще съвпадат.

---

* Тук знакът $\int_G$ в дефиниционния израз на (2) представлява съкратено означение на интеграл в пространство с $k+1$ измерения.

Интегралът (2) зависи от ориентировката на Γ, т. е. от начина, по който са номерирани променливите на функциите (1), защото от това зависи в какъв ред ще бъдат написани стълбовете на детерминантата, която ни интересува.

С оглед на нашите цели ще намерим някои изрази за интеграли върху стените $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$ на една функция $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, която е дефинирана и непрекъсната върху графиките им. Поради това ще означим с G_ν множеството на точките

$$(t_0, t_1, \cdots, t_{\nu-1}, t_{\nu+1}, \cdots, t_k),$$

които удовлетворяват неравенствата

$$t_0 \geqq 0,\ t_1 \geqq 0,\ \cdots,\ t_{\nu-1} \geqq 0,\ t_{\nu+1} \geqq 0, \cdots,\ t_k \geqq 0,$$
$$t_0 + t_1 + \cdots + t_{\nu-1} + t_{\nu+1} + \cdots + t_k \leqq 1.$$

Очевидно имаме

$$\int_{\Gamma_\nu} F(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \cdots dx_{\alpha_k} = \int_{G_\nu} (F\Delta)_{t_0 = v_0}\, dt_1 dt_2 \cdots dt_k,$$

където

(3) $$v_0 = 1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_k$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} - \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} - \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} - \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} - \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} \end{vmatrix}.$$

Да положим

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_{s-1}} & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_{s+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \frac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_0} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_{s-1}} & \frac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_{s+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_{s-1}} & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_{s+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix}.$$

В такъв случай

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} - \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} - \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} - \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} - \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \Delta_s.$$

Така получаваме

$$\int_{\Gamma_\nu} F(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \cdots dx_{\alpha_k} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{G_\nu} (F\Delta_s)_{t_0 = v_0}\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_k,$$

където

$$v_0 = 1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_k.$$

Да направим в интеграла

$$\int_{G_\nu} (F\Delta_s)_{t_0 = v_0}\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_k, \quad s = 1, \cdots, k,$$

смяната на променливите

$$t_1 = u_1$$
$$\cdots$$
$$t_{s-1} = u_{s-1}$$
$$t_s = 1 - u_0 - u_1 - \cdots - u_{s-1} - u_{s+1} - \cdots - u_k$$
$$t_{s+1} = u_{s+1}$$
$$t_k = u_k.$$

По такъв начин, след като се върнем към старото означение на променливите, получаваме

$$\int_{G_\nu} (F\Delta_s)_{t_0 = v_0}\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_k = \int_{G_s} (F\Delta_s)_{t_s = v_s}\, dt_0 \cdots dt_{s-1}\, dt_{s+1} \cdots dt_k,$$

където сме положили

(5) $$1 - t_0 - \cdots - t_{s-1} - t_{s+1} - \cdots - t_k = v_s.$$

Това ни дава

$$\int_{\Gamma_v} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_k} =$$

(6)

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{G_s} (F\Delta_s)_{t_s=v_s}\, dt_0 \ldots dt_{s-1}\, dt_{s+1} \ldots dt_k.$$

При $0 \leq s \leq k$ получаваме непосредствено от дефиницията

(7)

$$\int_{\Gamma_{s+1}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_k} =$$

$$= \int_{G_s} (F\Delta_s)_{t_s=0}\, dt_0 \ldots dt_{s-1}\, dt_{s+1} \ldots dt_k.$$

Теорема. Нека в някое отворено множество R и пространство с n измерения е дефинирана една функция $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, която притежава непрекъснати първи частни производни. Нека Γ е една двукратно гладка k-повърхнина, определена от (1), чиято графика лежи в R. В такъв случай при $1 \leq k < n$ е валидна формулата

(8)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial x_\nu} dx_\nu\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_k} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k+1} (-1)^{\nu-1} \int_{\Gamma_\nu} P\, dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_k}.$$

Доказателство. Очевидно

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial x_\nu} dx_\nu\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_k} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \int \frac{\partial P}{\partial x_\nu} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_\nu}{\partial t_0} & \frac{\partial f_\nu}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_\nu}{\partial t_k} \\ \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix} dt_0\, dt_1 \ldots dt_k.$$

Като развием детерминантите по първия ред и използуваме означението (4), ще получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial x_\nu} dx_\nu\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_k} =$$

$$= \int_{G} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_\nu} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{\partial f_\nu}{\partial t_s} \Delta_s\, dt_0\, dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{G} \Delta_s \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial t_s} \right) dt_0\, dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{G} \Delta_s \frac{\partial P}{\partial t_s} dt_0\, dt_1 \ldots dt_k.$$

От друга страна,

$$\int_{G} \Delta_s \frac{\partial P}{\partial t_s} dt_0\, dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= \int_{G_s} \left[\int_0^{v_s} \Delta_s \frac{\partial P}{\partial t_s} dt_s \right] dt_0 \ldots dt_{s-1}\, dt_{s+1} \ldots dt_k,$$

където v_s се определят от (3) и (5). Следователно, като интегрираме по части, ще получим

$$\int_{G} \Delta_s \frac{\partial P}{\partial t_s} dt_0\, dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= \int_{G_s} \Big| \Delta_s P \Big|_{t_s=0}^{t_s=v_s} dt_0 \ldots dt_{s-1}\, dt_{s+1} \ldots dt_k -$$

$$- \int_{G_s} \left[\int_0^{v_s} P \frac{\partial \Delta_s}{\partial t_s} dt_s \right] dt_0 \ldots dt_{s-1}\, dt_{s+1} \ldots dt_k =$$

$$= \int_{G_s} [(\Delta_s P)_{t_s=v_s} - (\Delta_s P)_{t_s=0}]\, dt_0 \ldots dt_{s-1}\, dt_{s+1} \ldots dt_k -$$

$$- \int_{G} P \frac{\partial \Delta_s}{\partial t_s} dt_0\, dt_1 \ldots dt_k.$$

Така получаваме

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,dx_\nu\,dx_{\alpha_1}\cdots dx_{\alpha_k}=$$

$$=\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\int_{G_s}[(P\Delta_s)_{t_s=v_s}-(P\Delta_s)_{t_s=0}]\,dt_0\cdots dt_{s-1}dt_{s+1}\cdots dt_k-$$

$$-\int_{G}P\left(\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{\partial\Delta_s}{\partial t_s}\right)dt_0\,dt_1\cdots dt_k.$$

От друга страна,

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{\partial\Delta_s}{\partial t_s}=0,$$

както това се вижда, след като извършим групиране по вторите производни. Това ни дава

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,dx_\nu\,dx_{\alpha_1}\cdots dx_{\alpha_k}=$$

$$=\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\int_{G_s}(P\Delta_s)_{t_s=v_s}dt_0\cdots dt_{s-1}\,dt_{s+1}\cdots dt_k+$$

$$+\sum_{s=0}^{k}(-1)^{s-1}\int_{G_s}(P\Delta_s)_{t_s=0}\,dt_0\cdots dt_{s-1}\,dt_{s+1}\cdots dt_k$$

и като вземем под внимание формулите (6) и (7), получаваме

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,dx_\nu\,dx_{\alpha_1}\cdots dx_{\alpha_k}=$$

$$=\sum_{s=0}^{k+1}(-1)^{s-1}\int_{\Gamma_s}P\,dx_{\alpha_1}\cdots dx_{\alpha_k}.$$

С това доказателството е завършено.

При $n=2$ и $k=1$ формулата (8) се нарича *формула на Грин*. При $n=3$ и $k=2$ тя се нарича *формула на Остроградски*. При $n=3$ и $k=1$ тази формула се нарича *формула на Стокс*. Тези три частни случая се използват в хидродинамиката, електродинамиката и на много други места.

Общи задачи

1. Нека G е едно квадрируемо точково множество в равнината XOY. Да се докаже, че лицето на G има стойност

$$\iint_G dx\,dy.$$

2. Нека R е едно кубируемо точково множество в пространството. Да се покаже, че обемът на R има стойност

$$\iiint_R dx\,dy\,dz,$$

3. Да се пресметне обемът на елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

като се пресметне тройният интеграл

$$\iiint_R dx\,dy\,dz,$$

разпространен във вътрешността R на разглеждания елипсоид.

4. Да се намери обемът на частта от първия октант, която е заградена от повърхнината

$$(x^2+y^2+z^2)^3=a^6xyz,\ a>0.$$

Отговор. $\frac{a^3}{24}$.

5. Нека функцията $p(x)$ е дефинирана и неотрицателна при всички стойности на x, нека интегралите

$$a=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx,$$

$$b=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,dx,$$

$$c=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)\,dx$$

имат смисъл и нека $a=1$. В такъв случай е валидно неравенството

$$c-b^2\geqq 0.$$

Забележка. Тази и следващите две задачи изясняват, че е възможно да се изгради теорията на вероятностите, без да се въвежда понятието вероятност. Читателят, който е изучавал теорията на вероятностите, ще разпознае в следващите две задачи две теореми на Чебишев.

Упътване. Използувайте равенството

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-b)^2 p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 p(x)\,dx-2b\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,dx+b^2\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx=c-b^2$$

или пък си послужете с неравенството на Буняковски — Шварц.

6. Нека функцията $p(x)$ е дефинирана и неотрицателна при всички стойности на x, нека интегралите

$$a=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx,$$

$$b=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,dx,$$

$$c=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 p(x)\,dx$$

имат смисъл и нека $a=1$. В такъв случай при всеки избор на положителното число ε е валидно неравенството

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}p(x)\,dx\geq 1-\frac{c-b^2}{\varepsilon^2}$$

(Чебишев).

Упътване. Използувайте неравенството

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-b)^2 p(x)\,dx\geq\int_{-\infty}^{b-\varepsilon}(x-b)^2 p(x)\,dx+\int_{b+\varepsilon}^{\infty}(x-b)^2 p(x)\,dx\geq$$

$$\geq\varepsilon^2\int_{-\infty}^{b-\varepsilon}p(x)\,dx+\varepsilon^2\int_{b+\varepsilon}^{\infty}p(x)\,dx$$

или, което е същото,

$$c-b^2\geq\varepsilon^2\left[\int_{-\infty}^{b-\varepsilon}p(x)\,dx+\int_{b+\varepsilon}^{\infty}p(x)\,dx\right].$$

7. Нека е дадена една редица от функции

$$p_1(x),\quad p_2(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ \ldots,$$

които са дефинирани, непрекъснати и неотрицателни при всички стойности на x, нека интегралите

$$a_n=\int_{-\infty}^{\infty}p_n(x)\,dx,$$

$$b_n=\int_{-\infty}^{\infty}xp_n(x)\,dx,$$

$$c_n=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 p_n(x)\,dx$$

имат смисъл и нека най-сетне са изпълнени следните условия:

$$a_1=a_2=\ldots=1,$$

$$b_1=b_2=\ldots=b,$$

$$c_n-b_n^2\leq k,$$

където k е константа, която не зависи от n. Разглеждаме функциите

$$P_n(t)=$$

$$=n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}p_1(x_1)\,p_2(x_2)\ldots p_{n-1}(x_{n-1})\,p_n(nt-x_1-x_2-\ldots-$$

$$-x_{n-1})\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1},$$

които по този начин са добре дефинирани, когато многократният несобствен интеграл е сходящ при всички стойности на t.

В такъв случай при всеки избор на положителното число ε имаме

$$\lim_{n\to\infty}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}P_n(t)\,dt=1.$$

Упътване. Направете смяната на променливите

$$x_1=\xi_1,$$
$$x_2=\xi_2,$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_{n-1}=\xi_{n-1},$$
$$nt-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}=\xi_n$$

и покажете следното:

1) $P_n(t)\geq 0$;

2) интегралите

$$A_n=\int_{-\infty}^{\infty}P_n(t)\,dt$$

имат смисъл и тяхната стойност е равна на единица;

3) интегралите

$$B_n = \int_{-\infty}^{\infty} t\, P_n(t)\, dt$$

имат смисъл и тяхната стойност е равна на b;

4) интегралите

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, P_n(t)\, dt$$

имат смисъл и

$$C_n - B_n^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu - b_\nu^2);$$

5) $$C_n - B_n^2 \leq \frac{k}{n}.$$

След тази предварителна работа използвайте неравенството на Чебишев

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} P_n(t)\, dt \geq 1 - \frac{C_n - B_n^2}{\varepsilon^2}$$

очевидното неравенство

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} P_n(t)\, dt \leq 1.$$

8. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати и монотонно растящи при $a \leq x \leq b$. В такъв случай е валидно неравенството

$$(b-a)\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \geq \left[\int_a^b f(x)\, dx\right]\left[\int_a^b g(x)\, dx\right]$$

Чебишев).

Упътване. Използвайте тъждеството

$$\iint_R [f(x) - f(y)]\,[g(x) - g(y)]\, dx\, dy =$$

$$= 2(b-a)\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx - 2\left[\int_a^b f(x)\, dx\right]\left[\int_a^b g(x)\, dx\right],$$

където R е квадрат, определен от неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$
$$a \leq y \leq b.$$

9. Нека функцията $f(z)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Да се покаже че при $a \leq x \leq b$

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t)\, dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)\,(x-t)^{n-1}\, dt$$

и

$$\int_a^x t_1\, dt_1 \int_a^{t_1} t_2\, dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} t_n\, dt_n \int_a^{t_n} f(t)\, dt = \frac{1}{n!\,2^n}\int_a^x f(t)\,(x^2 - t^2)^n\, dt.$$

10. Да се покаже, че интегралите

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\, dx,$$

$$\int_0^{\infty} \cos x^2\, dx$$

са сходящи, и да се пресметне тяхната стойност (интеграли на Френел—Fresnel)

Упътване. Разгледайте двете функции

$$u = e^{y^2 - x^2} \cos 2xy,$$
$$v = -e^{y^2 - x^2} \sin 2xy$$

и покажете, че

$$u'_x = v'_y,$$
$$u'_y = -v'_x.$$

Да означим с D триъгълника

$$0 \leq x \leq R.$$
$$0 \leq y \leq x.$$

Пресметнете интегралите

$$I_1 = \iint_D u'_x\, dx\, dy,$$

$$I_2 = \iint_D v'_x\, dx\, dy$$

при постоянно y и интегралите

$$I_3=\iint\limits_D v'_y\,dx\,dy,$$

$$I_4=\iint\limits_D u'_y\,dx\,dy$$

при постоянно x. Използувайте равенствата

$$I_1=I_3,$$
$$I_2=-I_4.$$

Това ще ви даде

$$\text{(A)}\qquad \int\limits_0^R e^{y^2-R^2}\cos 2Ry\,dy-\int\limits_0^R \cos 2y^2dy=\int\limits_0^R \sin 2x^2\,dx,$$

$$\text{(B)}\qquad -\int\limits_0^R e^{y^2-R^2}\sin 2Ry\,dy+\int\limits_0^R \sin 2y^2\,dy=-\int\limits_0^R \cos 2x^2\,dx+\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx.$$

Покажете, че

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R e^{y^2-R^2}\cos 2Ry\,dy=0,$$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R e^{y^2-R^2}\sin 2Ry\,dy=0.$$

За целта си послужете с неравенствата

$$\left|\int\limits_0^R e^{y^2-R^2}\cos 2Ry\,dy\right|\le\int\limits_0^R e^{y^2-R^2}\,dy=\frac{\int\limits_0^R e^{y^2}\,dy}{e^{R^2}},$$

$$\left|\int\limits_0^R e^{y^2-R^2}\sin 2Ry\,dy\right|\le\int\limits_0^R e^{y^2-R^2}\,dy=\frac{\int\limits_0^R e^{y^2}\,dy}{e^{R^2}}$$

и използувайте например правилото на Лопитал. Докажете с помощта на равенствата (A) и (B), че интегралите

$$\int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt,$$

$$\int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt$$

са сходящи. Извършете граничния преход $R\to\infty$ в равенствата (A) и (B) и докажете, че

$$\int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt=\int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt,$$

$$\int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt+\int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt=\sqrt{2}\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Това ще ви даде

$$\int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt=\int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

14. Нека R е едно затворено и измеримо точково множество в пространство с n измерения и нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е една непрекъсната в R функция. Да се покаже, че могат да се намерят две неотрицателни числа p и q, подчинени на условието $p+q=1$, и две точки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ от R, всички зависещи от избора на $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, по такъв начин, че да е изпълнено равенството

$$\iint\cdots\int\limits_R f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=[pf(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)+qf(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)]\,\mu(R).$$

Забележка. В случай че множеството R е свързано, т. е. всеки две негови точки могат да се съединят с непрекъсната дъга, лежаща в R, то валидна е едночленната формула за средните стойности

$$\iint\cdots\int\limits_R f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\,\mu(R),$$

където $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ е точка от R. В общия случай такава едночленна формула за средните стойности не съществува, както читателят лесно може сам да се убеди с пример.

Упътване. Нека M е най-голямата, а m е най-малката стойност на

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ в } R.$$

Да положим

$$I=\iint\cdots\int\limits_R f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Покажете, че

$$m\mu(R) \leq I \leq M\mu(R).$$

След това разгледайте двете неотрицателни числа

$$\alpha_1 = M\mu(R) - I, \quad \alpha_2 = I - m\mu(R)$$

и покажете, че

$$I = \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} M + \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} m\right] \mu(R).$$

стига да имаме $\alpha_1+\alpha_2 \neq 0$. Ако $\alpha_1+\alpha_2=0$, то $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=0$, откъдето

$$I = M\mu(R) = m\mu(R)$$

и случаят е тривиален.

ЧАСТ III

ПРИЛОЖЕНИЯ

Глава I

ПРИЛОЖЕНИЯ КЪМ ГЕОМЕТРИЯТА

§ 1. Тангента и нормала

Нека е дадена кривата

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= g(t), \end{aligned}$$

където двете функции $f(t)$ и $g(t)$ са дефинирани в някой интервал Δ. Нека t_0 и t са две точки от Δ. Очевидно уравнението на правата, която съединява двете точки

$$[f(t_0),\ g(t_0)] \text{ и } [f(t),\ g(t)],$$

стига те да са различни, може да се напише във вида

$$(2) \qquad \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}[x-f(t_0)] - \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}[y-g(t_0)] = 0.$$

Ако двете функции $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0, можем да извършим граничен преход в равенството (2), като оставим t да клони към t_0. След този граничен преход намираме

$$(3) \qquad g'(t_0)[x-f(t_0)] - f'(t_0)[y-g(t_0)] = 0.$$

Така полученото уравнение представлява една права, ако от двете производни $f'(t_0)$ и $g'(t_0)$ поне едната е различна от нула. Тази права се нарича допирателна или тангента към кривата (1) в точката $[f(t_0), g(t_0)]$. Очевидно тази права може да се представи параметрично по следния начин:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \xi &= f(t_0) + uf'(t_0), \\ \eta &= g(t_0) + ug'(t_0). \end{aligned}$$

Дефиницията на понятието допирателна, която даваме сега, може да се разглежда като обобщение на познатата ни от по-рано дефиниция. И наистина ние знаем, че на функцията

$$(5) \qquad y = F(x)$$

могат да се съпоставят параметричните уравнения

$$x=t,$$
$$y=F(t).$$

В този специален случай уравненията (4) добиват вида

$$\xi=x_0+u,$$
$$\eta=F(x_0)+uF'(x_0)$$

при $t_0=x_0$ и следователно декартовото уравнение на тангентата и разглежданата точка е

$$\eta-F(x_0)=F'(x_0)\,(\xi-x_0).$$

Двете дефиниции на понятието допирателна обаче не са напълно еквивалентни. Сега ние даваме една по-обща дефиниция. При тая дефиниция не се изключва случаят, когато тангентата е успоредна на оста y.

Нека функциите (1) удовлетворяват уравнението

$$\varphi(x,\ y)=0, \tag{6}$$

когато t се мени в интервала Δ. Тук предполагаме, че функцията $\varphi(x,\ y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни в някоя околност на точката (x_0, y_0), където $x_0=f(t_0)$, $y_0=g(t_0)$. В такъв случай, като диференцираме равенството

$$\varphi[f(t),\ \ g(t)]=0,$$

при $t=t_0$ получаваме съгласно правилото за диференциране на съставни функции

$$\varphi'_x(x_0,\ y_0)\,f'(t_0)+\varphi'_y(x_0,\ y_0)\,g'(t_0)=0$$

и следователно всички точки от тангентата (4) удовлетворяват уравнението

$$(\xi-x_0)\,\varphi'_x+(\eta-y_0)\,\varphi'_y=0, \tag{7}$$

което лесно се вижда, като заместим ξ и η с равните им от (4

Ако поне едната от частните производни $\varphi'_x(x_0, y_0)$ и $\varphi'_y(x_0, y^0$ е различна от нула, уравнението (7) представлява една права. Тази права не е нищо друго освен тангентата (4), защото видяхме, че всички точки от правата (4) лежат на правата (7).

Понякога уравнение от вида (6) се нарича крива. Това понятие е различно от понятието дъга, което въведохме в § 16, глава II, част IV. Казваме, че една точка (x_1, y_1) лежи на кривата $\varphi(x, y)=0$, когато $\varphi(x_1, y_1)=0$. След всичко изложено досега е

естествено да дефинираме понятието тангента (допирателна) към кривата $\varphi(x,\ y)=0$ в точката (x_0, y_0) като права с уравнение

$$(\xi-x_0)\,\varphi'_x(x_0,\ y_0)+(\eta-y_0)\,\varphi'_y(x_0,\ y_0)=0,$$

стига точката (x_0, y_0) да лежи върху кривата $\varphi(x, y)=0$, обаче поне една от частните производни $\varphi'_x(x_0, y_0)$ и $\varphi'_y(x_0, y_0)$ да е различна от нула.

В специалния случай, когато

$$\varphi'_x(x_0,\ y_0)=0, \qquad \varphi'_y(x_0,\ y_0)=0, \tag{8}$$

точката (x_0, y_0) се нарича особена. Нека припомним, че точката (x_0, y_0) лежи върху кривата (6), т. е. че

$$\varphi(x_0,\ y_0)=0.$$

По този начин понятието особена точка се дефинира с помощта на три уравнения

$$\varphi'_x(x_0,\ y_0)=0, \qquad \varphi'_y(x_0,\ y_0)=0, \quad \varphi(x_0,\ y_0)=0,$$

а не само с помощта на двете уравнения (8). По-късно ще изучим особените точки по-подробно.

Права, която минава през точката M от една крива Γ и е перпендикулярна към тангентата на кривата Γ в тази точка, се нарича нормала към кривата Γ в точката M. Специално, ако кривата има уравнение

$$y=F(x),$$

където функцията $F(x)$ е дефинирана в някоя околност на точката x_0 и притежава различна от нула първа производна в тази точка, ъгловият коефициент на нормалата е $-\frac{1}{F'(x_0)}$ и следователно уравнението на нормалата е

$$\eta-y_0=\frac{-1}{F'(x_0)}\,(\xi-x_0),$$

където $y_0=F(x_0)$.

Нека

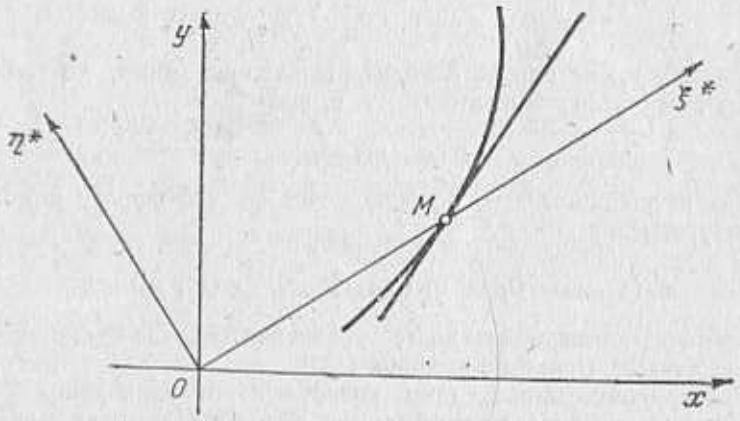
$$\rho=f(\theta), \quad f(\theta)>0, \quad \alpha\leq\theta\leq\beta$$

е уравнение на една крива в полярни координати. По-точно тук се касае за дъга, дефинирана с параметричните уравнения

$$x=f(\theta)\cos\theta,$$
$$y=f(\theta)\sin\theta.$$

Да разгледаме точката M върху тази крива, чиито полярни координати са $(\theta_0, f(\theta_0))$. Ако функцията $f(\theta)$ е диференцуема при $\theta=\theta_0$, кривата има дефинирана тангента. Тази тангента може да се представи в параметричен вид по следния начин:

$$x=f(\theta_0)\cos\theta_0+u[f'(\theta_0)\cos\theta_0-f(\theta_0)\sin\theta_0], \tag{9}$$
$$y=f(\theta_0)\sin\theta_0+u[f'(\theta_0)\sin\theta_0+f(\theta_0)\cos\theta_0].$$



Черт. 31

Тук не можем да имаме едновременно

$$f'(\theta_0)\cos\theta_0-f(\theta_0)\sin\theta_0=0,$$
$$f'(\theta_0)\sin\theta_0+f(\theta_0)\cos\theta_0=0,$$

защото от тези равенства би следвало $f(\theta_0)=0$, което не е вярно.

Уравненията (9) добиват особено прост вид, ако ги отнесем към ортогоналната координатна система $\xi^*O\eta^*$, която е еднакво ориентирана с координатната система xOy и за която лъчът $O\xi^*$ съвпада с лъча OM (вж. черт. 31).

За да се убедим в това, ще използуваме трансформачните формули

$$\xi^*=x\cos\theta_0+y\sin\theta_0,$$
$$\eta^*=-x\sin\theta_0+y\cos\theta_0,$$

които читателят познава от аналитичната геометрия. По такъв начин ние получаваме

$$\xi^*=f(\theta_0)+uf'(\theta_0),$$
$$\eta^*=uf(\theta_0).$$

Елиминирайки параметъра u, намираме уравнението на тангентата в следния вид:

$$f'(\theta_0)\eta^*=f(\theta_0)\xi^*-f^2(\theta_0).$$

Ако $f'(\theta_0)\neq 0$, ние можем да представим това уравнение в декартов вид

$$\eta^*=\frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}\xi^*-\frac{f^2(\theta_0)}{f'(\theta_0)}$$

и следователно ъгловият коефициент m на тангентата в избраната координатна система има стойността

$$m=\frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}.$$

§ 2. Дължина на тангента, нормала, субтангента и субнормала

Нека TQ е тангента и NS е нормалата в точката M към кривата $y=f(x)$, която е изобразена на черт. 32. Дължината τ на отсечката[1] MT се нарича дължина на тангентата, а дължината ν на отсечката[2] MN се нарича дължина на нормалата. Сегментът[3] $S_\tau=PT$ се нарича субтангента, а сегментът $S_\nu=PN$ се нарича субнормала.

Нека (x, y) са координати на точката M. Уравненията на тангентата и нормалата могат да се напишат съответно във вида

$$\eta-y=y'(\xi-x),$$
$$\eta-y=-\frac{1}{y'}(\xi-x)$$

(разбира се, ако $y'\neq 0$) и следователно координатите на точка T са $\left(x-\frac{y}{y'}, 0\right)$, а на точка N са $(x+yy', 0)$. Оттук намираме

$$\tau=\sqrt{y^2+\frac{y^2}{y'^2}},$$
$$\nu=\sqrt{y^2+y^2y'^2},$$
$$S_\tau=PT=\left(x-\frac{y}{y'}\right)-x=-\frac{y}{y'},$$
$$S_\nu=PN=(x+yy')-x=yy'.$$

[1] Т. е. на отсечката между допирната точка M и пресечната точка T на тангентата с оста x.

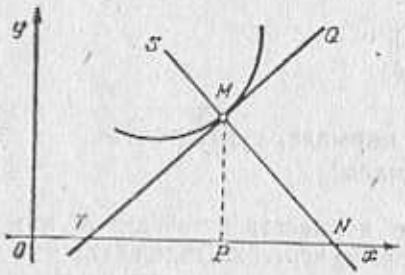
[2] Т. е. между допирната точка M на тангентата и пресечната точка на нормалата с оста x.

[3] Нека припомним тук, че сегментът е дефиниран не само по абсолютна стойност, но и по знак.

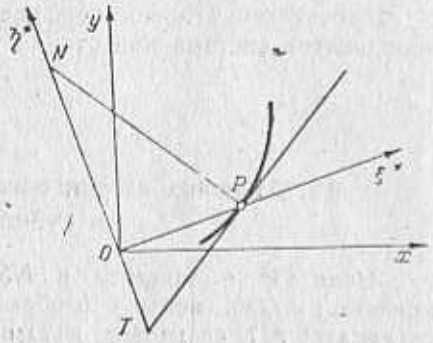
Нека е дадена кривата

(1) $$\rho=f(\theta),\ f(\theta)>0$$

в полярни координати (вж. черт. 33). Дължините[1] на отсечките $\tau=TP$ и $\nu=NP$ се наричат съответно дължина на тангентата и нормалата в полярни координати, а сегментите $S_\tau=TO$ и $S_\nu=ON$ се наричат съответно



Черт. 32



Черт. 33

субтангента и субнормала в полярни координати. Видяхме, че уравнението на тангентата в координатната система $\xi^* O\eta^*$ може да се напише във вида

$$\eta^*=\frac{\rho}{\rho'}\xi^*-\frac{\rho^2}{\rho'}$$

(разбира се, когато $\rho'\neq 0$). Като вземем пред вид, че координатите на P са $(\rho, 0)$, заключаваме, че уравнението на нормалата е

$$\eta^*=-\frac{\rho'}{\rho}(\xi^*-\rho).$$

Координатите на точката T са $\left(0,-\frac{\rho^2}{\rho'}\right)$, а на точката N са $(0,\rho')$. Като вземем пред вид още, че координатите на точката P са $(\rho, 0)$, получаваме

$$\tau=\sqrt{\rho^2+\frac{\rho^4}{\rho'^2}}=\rho\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\rho'^2}},$$

[1] Правата PT е тангента в точката P към кривата (1); правата PN е нормала към тази крива. Координатната система $\xi^* O\eta^*$ е ортогонална и еднакво ориентирана с координатната система XOY.

$$\nu=\sqrt{\rho^2+\rho'^2},$$

$$S_\tau=TO=\frac{\rho^2}{\rho'},$$

$$S_\nu=ON=\rho'.$$

§ 3. Директорни косинуси на тангентата и нормалата

Нека функцията $y=f(x)$ е дефинирана и диференцуема в някой интервал Δ. Ще положим

(1) $$\alpha=\operatorname{arc\,tg} f'(x).$$

По този начин ъгълът α е еднозначно определен (когато x е дадено) и удовлетворява неравенствата

(2) $$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Като вземем пред вид неравенствата (2), не е трудно да се убедим, че

(3) $$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

(4) $$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Ще изведем например формулата (3):

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}}=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha}}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=|\cos\alpha|=\cos\alpha.$$

Като вземем пред вид, че

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(x),$$

получаваме

(5) $$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}},$$

(6) $$\sin\alpha=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}.$$

Числата $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, където α е определено от (1), се наричат директорни косинуси на тангентата. Като вземем пред вид, че $f'(x)$ е ъгловият коефициент на тангентата, заключаваме, че тези директорни косинуси представляват точно косинусите на

ъглите, които сключва една подходящо избрана посока върху тангентата с положителните посоки на координатните оси. Тази посока върху тангентата се нарича положителна.

За положителна посока на нормалата се избира онази посока, която сключва с положителните посоки съответно на абсцисната и ординатната ос ъгли, чиито косинуси са

$$-\sin\alpha,\ \cos\alpha.$$

Тези косинуси се наричат директорни косинуси на нормалата.

Накрая ще отбележим, че ако дефинираме s като функция на x посредством

$$ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

получаваме

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,$$

$$\frac{dy}{ds}=\sin\alpha.$$

§ 4. Асимптоти

Нека функцията

(1) $$y=f(x)$$

е дефинирана при $x>a$. Ще казваме, че правата

(2) $$y=mx+l$$

е асимптота на кривата (1), ако разстоянието на точката $(x, f(x))$ до правата (2) клони към нула, когато x расте неограничено. Да означим с $\delta(x)$ това разстояние. За да пресметнем $\delta(x)$, представяме уравнението на правата (2) в нормален вид:

$$\frac{y-mx-l}{\sqrt{1+m^2}}=0.$$

В такъв случай, както това е известно от аналитичната геометрия,

$$\delta(x)=\frac{|f(x)-mx-l|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Нека допуснем, че правата (2) е асимптота на кривата (1). В такъв случай

(3) $$\lim_{x\to\infty}\delta(x)=0$$

и следователно

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx-l)=0$$

и най-сетне

(4) $$l=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx).$$

И така, за да притежава кривата (1) асимптота, необходимо е да съществува границата (4) при някой избор на константата m. Не е трудно да се види, че константата m е еднозначно определена от обстоятелството, че границата

(5) $$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$$

съществува. И наистина от съществуването на границата следва, че

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-mx}{x}=0$$

или

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)=0$$

и най-сетне

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Съществуването на границата (4) е не само необходимо, но и достатъчно за съществуването на асимптота. И наистина от условието (4) получаваме

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx-l)=0$$

и следователно

$$\lim_{x\to\infty}\delta(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-mx-l}{\sqrt{1+m^2}}=0.$$

По такъв начин не само получихме на ръка средство да познаем дали дадена крива (1) има асимптота, или не, но добихме възможност да намерим уравнението на асимптотата (разбира се, в случай че тя съществува). Така ъгловият коефициент m в уравнението (2) се определя от формулата

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

След като сме намерили m, определяме l от зависимостта

$$l=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx).$$

§ 5. Обвивки

Нека функцията $F(x, y, \alpha)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до втори ред в някоя околност на точката (x_0, y_0, α_0). При всяко фиксирано α уравнението

(1) $$F(x, y, \alpha)=0$$

представлява една крива. Когато оставим α да се мени, получаваме една фамилия L от криви.

Черт. 34

Една дъга Γ с уравнения

$$x=f(t),$$
$$y=g(t),$$

където t се мени в достатъчно малка околност Δ на α_0, се нарича **обвивка** на фамилията L (когато α се мени в Δ), ако във всяка точка P от Γ се допира[1] към Γ по някоя крива от L (вж. черт. 34) и всяка крива от L се допира в някоя точка до Γ.

Ще докажем следната теорема: ако

(2) $$F(x_0, y_0, \alpha_0)=0,$$

(3) $$F'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0)=0,$$

(4) $$\begin{vmatrix} F'_x(x_0, y_0, \alpha_0) & F'_y(x_0, y_0, \alpha_0) \\ F''_{\alpha x}(x_0, y_0, \alpha_0) & F''_{\alpha y}(x_0, y_0, \alpha_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

(5) $$F''_{\alpha\alpha}(x_0, y_0, \alpha_0) \neq 0,$$

фамилията криви, която се получава от (1), когато α се мени в някоя достатъчно малка околност на α_0, има обвивка, която може да се представи в параметричен вид

(6) $$x=f(\alpha),$$
$$y=g(\alpha),$$

където функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ се определят от системата

(7) $$F(x, y, \alpha)=0,$$
$$F'_\alpha(x, y, \alpha)=0.$$

Функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са диференцуеми и производните им не се анулират едновременно.

[1] Това значи, че Γ и кривата от L имат обща тангента в точката P.

Доказателство. Като вземем пред вид условията (2), (3) и (4), заключаваме с помощта на теоремата за съществуване на неявни функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката α_0 има един и само един чифт непрекъснати функции

$$x=f(\alpha),$$
$$y=g(\alpha),$$

които удовлетворяват системата (7) и за които

$$x_0=f(\alpha_0),$$
$$y_0=g(\alpha_0).$$

Като вземем пред вид още веднъж условието (4) и обстоятелството, че функциите $F(x, y, \alpha)$ и $F'_\alpha(x, y, \alpha)$ притежават непрекъснати частни производни, заключаваме, че функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са диференцуеми.

Прилагаме правилото за диференциране на съставни функции към равенството

(8) $$F'_\alpha[f(\alpha), g(\alpha), \alpha]=0.$$

Това ни дава

(9) $$f'(\alpha)F''_{\alpha\alpha x}+g'(\alpha)F''_{\alpha y}+F''_{\alpha\alpha}=0.$$

Сега не е трудно да се покаже, че $f'(\alpha)$ и $g'(\alpha)$ не се анулират едновременно, когато α се мени в някоя достатъчно малка околност на точката α_0. И наистина в противен случай, като изхождаме от уравнението (9), бихме получили

$$F''_{\alpha\alpha}(f(\alpha), g(\alpha), \alpha)=0.$$

Това обаче не е вярно, когато α е достатъчно близо до α_0, защото функциите $F''_{\alpha\alpha}(x, y, \alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са непрекъснати и

$$F''_{\alpha\alpha}(x_0, y_0, \alpha_0)\neq 0.$$

Ние ще покажем, че дъгата

(10) $$x=f(\alpha),$$
$$y=g(\alpha)$$

и кривата

$$F(x, y, \alpha_1)=0,$$

където α_1 е коя да е константа, достатъчно близка до α_0, се допират[1] в точката

$$[f(\alpha_1), g(\alpha_1)].$$

[1] Това значи, че те имат обща тангента в тази точка.

И наистина, като вземем пред вид, че $f'(\alpha_1)$ и $g'(\alpha_1)$ не са едновременно нули, заключаваме, че допирателната към дъгата (10) може да се представи във вида

$$\xi = f(\alpha_1) + uf'(\alpha_1), \qquad (11)$$
$$\eta = g(\alpha_1) + ug'(\alpha_1),$$

където u е параметър. От друга страна, уравнението на допирателната към кривата $F(x, y, \alpha_1) = 0$ може да се представи във вида

$$[\xi - f(\alpha_1)]\, F'_x + [\eta - g(\alpha_1)]\, F'_y = 0. \qquad (12)$$

(Тук двете частни производни F'_x и F'_y не могат да се анулират едновременно, когато α_1 е достатъчно близо до α_0, защото в противен случай би било нарушено условието (4).)

За да се убедим, че тангентите (11) и (12) се сливат, достатъчно е да покажем, че всичките точки на правата (11) лежат върху правата (12). За целта заместваме в уравнението (12) текущите координати с

$$[f(\alpha_1) + uf'(\alpha_1),\quad g(\alpha_1) + ug'(\alpha_1)].$$

Това ни дава

$$u\,[f'(\alpha_1)\, F'_x + g'(\alpha_1)\, F'_y] = 0.$$

За да се убедим, че полученото равенство е удовлетворено, прилагаме правилото за диференциране на съставни функции към тъждеството

$$F[f(\alpha), g(\alpha), \alpha] = 0.$$

Това ни дава

$$f'(\alpha) F'_x + g'(\alpha) F'_y + F'_\alpha = 0$$

Като вземем пред вид още зависимостта

$$F'_\alpha [f(\alpha),\ g(\alpha),\ \alpha] = 0,$$

получаваме

$$f'(\alpha) F'_x + g'(\alpha) F'_y = 0.$$

§ 6. Център на кривината, радиус на кривината, кривина, еволюта, еволвента

Нека ни е дадена кривата

$$y = f(x). \qquad (1)$$

Ще предполагаме, че функцията $f'(x)$ притежава производни до втори ред в някой интервал Δ, като при това $f'(x) \neq 0$ и $f''(x) \neq 0$

Да разгледаме нормалите

$$\eta - f(x) = -\frac{1}{f'(x)}(\xi - x) \qquad (2)$$

и

$$\eta - f(x+h) = -\frac{1}{f'(x+h)}(\xi - x - h) \qquad (3)$$

в две различни точки $(x, f(x))$ и $(x+h, f(x+h))$. Пресечната точка на тези нормали има координати

$$\xi = x - f'(x)\,\frac{1 + f'(x+h)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}},$$

$$\eta = f(x) + \frac{1 + f'(x+h)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}}.$$

Като извършим граничния преход $h \to 0$, получаваме

$$\xi = x - f'(x)\,\frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)},$$

$$\eta = f(x) + \frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}. \qquad (4)$$

Точката с така получените координати се нарича пресечна точка на нормалата (2) с безкрайно близката ѝ съседна нормала или по-кратко — център на кривината на кривата (1), който отговаря на точката $[x, f(x)]$.

Разстоянието между точката $[x, f(x)]$ и съответния ѝ център на кривината се нарича радиус на кривината на кривата (1) в разглежданата точка. Очевидно за радиуса на кривината получаваме следния израз:

$$\sqrt{(\xi - x)^2 + [\eta - f(x)]^2} = \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}.$$

По този начин ние дефинирахме понятието радиус на кривината само по абсолютна стойност. Целесъобразно е обаче да се разглежда радиусът на кривината като насочена отсечка, чиято алгебрична мярка представлява релативно число. Това може да стане, като по дефиниция под радиус на кривината R разбираме

$$R = \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}. \qquad (5)$$

Реципрочната стойност на радиуса на кривината в дадена точка на кривата се нарича кривина в същата точка. Означавайки кривината с k, получаваме

(6) $$k=\frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Формулите

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}},$$

(7) $$\sin\alpha=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

от § 3 от тази глава (значението на буквите е дадено там) и формулата (5) ни позволяват да представим уравненията (4) в следния по-прост вид:

(8) $$\xi=x-R\sin\alpha,\qquad \eta=y+R\cos\alpha.$$

На това място ние ще дадем една проста зависимост, която свързва кривината k с ъгъла α. За да получим тази зависимост, диференцираме равенството

$$\sin\alpha=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

спрямо x. Това ни дава

$$\cos\alpha\frac{d\alpha}{dx}=\frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}$$

или

(9) $$k=\cos\alpha\frac{d\alpha}{dx}.$$

Като вземем пред вид, че

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\ \text{където}\ ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

(вж. § 3 от тази глава), можем да запишем този резултат по-кратко така:

$$k=\frac{d\alpha}{ds},$$

като

Диференцирайки спрямо s равенствата

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,$$

$$\frac{dy}{ds}=\sin\alpha,$$

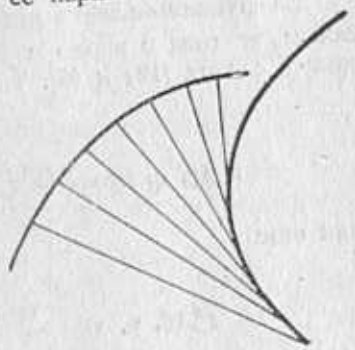
получаваме така наречените формули на Френе за равнинните криви

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-k\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=k\frac{dx}{ds}.$$

Геометричното място на центровете на кривините, т. е. кривата с параметричните уравнения (4), се нарича еволюта на кривата (1), а кривата (1) се нарича еволвента на кривата (4).

Нека функцията $f(x)$ е три пъти диференцуема и третата ѝ производна е непрекъсната в някоя околност на точката x_0; нека освен това $f'(x_0)\neq 0$, $f''(x_0)\neq 0$ и най-сетне нека производната на кривината k е различна от нула при $x=x_0$. В такъв случай еволютата е обвивка за фамилията нормали, когато x се мени в достатъчно малка околност на x_0 (вж. черт. 35).



Черт. 35

За да се убедим в това, разглеждаме функцията

$$F(\xi,\eta,x)=\eta-f(x)+\frac{\xi-x}{f'(x)}.$$

Очевидно

(10) $$F'_x(\xi,\eta,x)=-f'(x)-\frac{f'(x)+(\xi-x)f''(x)}{f'^2(x)}.$$

Решавайки относно ξ и η системата

$$\eta-f(x)+\frac{\xi-x}{f'(x)}=0,$$

$$-f'(x)-\frac{f'(x)+(\xi-x)f''(x)}{f'^2(x)}=0,$$

получаваме

(11) $$\xi=x-f'(x)\frac{1+f'^2(x)}{f''(x)},$$

$$\eta=f(x)+\frac{1+f'^2(x)}{f''(x)}.$$

Така получените уравнения съвпадат точно с уравненията на еволютата (4). За да се убедим, че тези параметрични уравнения дават една обвивка на нормалите (2), достатъчно[1] е да вземем пред вид, че функционалната детерминанта

$$\begin{vmatrix} F'_\xi & F'_\eta \\ F''_{x\xi} & E''_{x\eta} \end{vmatrix} = \frac{f''(x)}{f'^2(x)}$$

и производната

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x)$$

приемат стойности, различни от нула, когато на ξ и η даваме стойности, определени от уравненията (11).

За функционалната детерминанта това е очевидно. За да покажем, че това е вярно и за производната $F''_{xx}(\xi, \eta, x)$, елими ни раме $f''(x)$ от (10) и (6). Това ни дава

$$F'_x(\xi, \eta, x) = -\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} \left[\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} + (\xi - x)k\right]$$

или още

$$F'_x(\xi, \eta, x) = -\frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} [\sin\alpha + (\xi - x)k].$$

Оттук получаваме

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x) = -[\sin\alpha + (\xi - x)k] \frac{d}{dx} \frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} -$$

$$-\left[\cos\alpha \frac{d\alpha}{dx} - k + (\xi - x)\frac{dk}{dx}\right] \frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)}$$

[1] Ако положим

$$\xi_0 = x_0 - f'(x_0)\frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)},$$

$$\eta_0 = f(x_0) + \frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)},$$

очевидно ще имаме

$$F(\xi_0, \eta_0, x_0) = 0, \quad F_x'(\xi_0, \eta_0, x_0) = 0.$$

или като вземем пред вид формулата (9),

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x) = -[\sin\alpha + (\xi - x)k] \frac{d}{dx} \frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} -$$

$$-(\xi - x)\frac{dk}{dx} \cdot \frac{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)}.$$

При

$$\xi = x - f'(x)\frac{1+f'^2(x)}{f''(x)} = x - R\sin\alpha$$

получаваме

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x) = \frac{(1+f'^2(x))^{\frac{5}{2}}}{f'(x) \cdot f''(x)} \frac{dk}{dx} \neq 0.$$

С това доказателството е завършено.

§ 7. Особени точки на алгебричните криви

Нека $F(x, y)$ е един полином от n-та степен на двете променливи x и y. Казваме, че (x_0, y_0) е една особена точка върху кривата

(1) $$F(x, y) = 0,$$

когато са изпълнени следните условия:

(2) $$F(x_0, y_0) = 0,$$

$$F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Теорема 1. Ако са изпълнени условията (2) и ако

$$F''^2_{xy}(x_0, y_0) - F''_{xx}(x_0, y_0) F''_{yy}(x_0, y_0) > 0, \quad F''_{yy}(x_0, y_0) \neq 0,$$

то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има две и само две[1] диференцуеми функции на x, които, поставени на мястото на y, удовлетворяват уравнението (1) и приемат стойност y_0 при $x = x_0$.

Доказателство. Да положим за краткост

$$\frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} F(x_0, y_0) = a_{ik}.$$

Като вземем пред вид условията (2), добиваме възможност да напишем Тейлоровото развитие

[1] Точката (x_0, y_0) се нарича в този случай двойна точка.

$$F(x, y)=F(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}[(x-x_0)F'_x(x_0, y_0)+(y-y_0)F'_y(x_0, y_0)]+$$
$$+\frac{1}{2!}[(x-x_0)^2F''_{xx}(x_0, y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)F''_{xy}(x_0, y_0)+$$
$$+(y-y_0)^2F''_{yy}(x_0, y_0)]+$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n F(x_0, y_0)$$

във вида

$$F(x, y)=\frac{1}{2!}[a_{20}(x-x_0)^2+2a_{11}(x-x_0)(y-y_0)+a_{02}(y-y_0)^2]+$$
$$+\frac{1}{3!}[a_{30}(x-x_0)^3+3a_{21}(x-x_0)^2(y-y_0)+$$
$$+3a_{12}(x-x_0)(y-y_0)^2+a_{03}(y-y_0)^3]+$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}[a_{n0}(x-x_0)^n+na_{n-11}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+\cdots+$$
$$+a_{0n}(y-y_0)^n].$$

Полагаме

$$y=y_0+u(x-x_0).$$

В такъв случай уравнението $F(x, y)=0$ добива вида

$$a_{20}+2a_{11}u+a_{02}u^2+(x-x_0)p(x, u)=0,$$

където $p(x, u)$ е полином на x и u. Да означим с α кой да е от двата корена на уравнението

(3) $$a_{20}+2a_{11}u+a_{02}u^2=0$$

и да разгледаме функцията

$$G(x, u)=a_{20}+2a_{11}u+a_{02}u^2+(x-x_0)p(x, u).$$

Очевидно имаме

$$G(x_0, \alpha)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}G(x_0, \alpha)=2a_{11}+2a_{02}\alpha=\pm 2\sqrt{a_{11}^2-a_{02}a_{20}}\neq 0.$$

Този резултат ни позволява да приложим към уравнението

(4) $$G(x, u)=0$$

теоремата за съществуване на неявни функции. И тъй във всяка околност на точката x_0 има една (и само една) непрекъсната функция

$$u=\varphi(x),$$

която удовлетворява уравнението

$$G(x, u)=0$$

и приема стойност α в точката x_0. Теоремата за диференциране на неявни функции ни учи, че функцията $\varphi(x)$ е диференцуема. След като функцията $\varphi(x)$ е дефинирана, разглеждаме функцията

$$f(x)=y_0+(x-x_0)\varphi(x).$$

С непосредствена проверка се вижда, че функцията

$$y=f(x)$$

удовлетворява уравнението (1), тъй като функцията $\varphi(x)$ удовлетворява уравнението (4). Не е трудно да се убедим също така, че функцията $f(x)$ е диференцуема, като вземем пред вид, че функцията $\varphi(x)$ е диференцуема. Най-сетне нека отбележим, че $f'(x_0)=\alpha$. За да установим това, разглеждаме отношението

$$\frac{f(x)-y_0}{x-x_0}=\varphi(x),$$

което клони към $\varphi(x_0)=\alpha$ (поради непрекъснатостта на $\varphi(x)$), когато $x\to x_0$.

Използувайки втория корен β на уравнението (3), можем да дефинираме още една диференцуема функция $g(x)$, която удовлетворява уравнението (1) и приема стойност y_0 в точката x_0. Тази функция $g(x)$ е различна от функцията $f(x)$, защото $f'(x_0)=\alpha$, докато $g'(x_0)=\beta$.

Не е трудно да се убедим, че в достатъчно малка околност на точката x_0 не може да има трета диференцуема функция $h(x)$, която да удовлетворява уравнението $F(x, y)=0$ и за която $h(x_0)=y_0$. И наистина да допуснем противното. В такъв случай функцията $\psi(x)$, дефинирана е условието

$$\psi(x)=\frac{h(x)-y_0}{x-x_0}$$

при $x\neq x_0$ и

$$\psi(x_0)=h'(x_0)$$

е непрекъсната дори при $x=x_0$. Не е трудно да се види, че функцията $u=\psi(x)$ удовлетворява уравнението

(5) $$G(x, u)=0.$$

И наистина при $x \neq x_0$ това се вижда непосредствено, а при $x = x_0$ това се получава с граничния преход $x \to x_0$ от равенството

$$G(x, \psi(x)) = 0$$

поради непрекъснатостта на $\psi(x)$. Извършвайки този граничен преход, получаваме

$$a_{20} + 2a_{11}\psi(x_0) + a_{02}\psi^2(x_0) = 0.$$

Оттук заключаваме, че или

$$\psi(x_0) = \alpha, \tag{6}$$

или

$$\psi(x_0) = \beta. \tag{7}$$

Непрекъснатата функция $\psi(x)$ обаче е еднозначно определена с помощта на условието (5) и едното от условията (6) или (7). От това следва, че функцията $h(x)$ съвпада или с $f(x)$, или с $g(x)$.

Пример. Да разгледаме функцията

$$F(x, y) = 6x^2 - 5xy + y^2 + x^3 - x^2y + y^3.$$

Тук имаме

$$F(0, 0) = F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0) = 0,$$

$$F''^2_{xy}(0, 0) - F''_{xx}(0, 0)\, F''_{yy}(0, 0) = 1 > 0, \quad F''_{yy}(0, 0) = 2 \neq 0$$

следователно през точката (0, 0) минават два клона от кривата

$$6x^2 - 5xy + y^2 + x^3 - x^2y + y^3 = 0.$$

Теорема 2. Ако са изпълнени условията (2) и ако

$$F''^2_{xy}(x_0, y_0) - F''_{xx}(x_0, y_0)\, F''_{yy}(x_0, y_0) < 0,$$

то (x_0, y_0) е една изолирана точка на кривата $F(x, y) = 0$. Това значи, че около точката (x_0, y_0) може да се построи околност, която да не съдържа друга точка от кривата освен точката (x_0, y_0).

Доказателство. Като вземем пред вид условията (2), добиваме възможност да напишем формулата на Тейлор

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[(x - x_0)F'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0)] +$$

$$+ \frac{1}{2!}[(x - x_0)^2 F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ 2(x - x_0)(y - y_0)\, F''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ (y - y_0)^2 F''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)],$$

където

$$h = x - x_0, \quad k = y - y_0, \quad 0 < \theta < 1,$$

във вида

$$F(x, y) = \frac{1}{2!}[(x - x_0)^2 F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ 2(x - x_0)(y - y_0)\, F''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ (y - y_0)^2 F''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)].$$

Ако точката (x, y) се намира достатъчно близо до точката (x_0, y_0), очевидно

$$F''^2_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\, F''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) < 0$$

и следователно квадратичната форма

$$\lambda^2 F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2\lambda\mu F''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) +$$

$$+ \mu^2 F''_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

е дефинитна. Оттук заключаваме, че равенството

$$(x - x_0)^2 F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2(x - x_0)(y - y_0)\, F''_{xy}(x_0 + \theta h$$

$$y_0 + \theta k) + (y - y_0)^2 F''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0$$

е изпълнено само когато $x = x_0$ и $y = y_0$.

Пример. Да разгледаме функцията

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

Тук очевидно имаме

$$F(0, 0) = F'_x(0, 0) = F'_x(0, 0) = 0,$$

$$F''^2_{xy}(0, 0) - F''_{xx}(0, 0)\, F''_{yy}(0, 0) = -4a^2b^2 < 0.$$

Оттук заключаваме, че (0, 0) е една изолирана точка на кривата

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0.$$

Ако

$$F''^2_{xy}(x_0, y_0) - F''_{xx}(x_0, y_0)\, F''_{yy}(x_0, y_0) = 0,$$

могат да се представят различни случаи.

Така например при

$$F(x, y) = y^2 - x^3$$

имаме

$$F(0, 0) = F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0) = 0$$

и

$$F''^2_{xy}(0, 0) - F''_{xx}(0, 0)\, F''_{yy}(0, 0) = 0.$$

Видът на кривата $y^2 - x^3 = 0$ е изобразен на черт. 36. В този случай казваме, че в началото имаме рог от първи вид (двата клона, които образуват рога, са разположени от различни страни на общата си тангента).

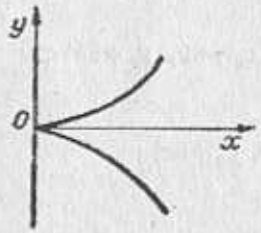
Като втори пример ще разгледаме функцията

$$F(x, y)=(y-x^2)^2-x^5.$$

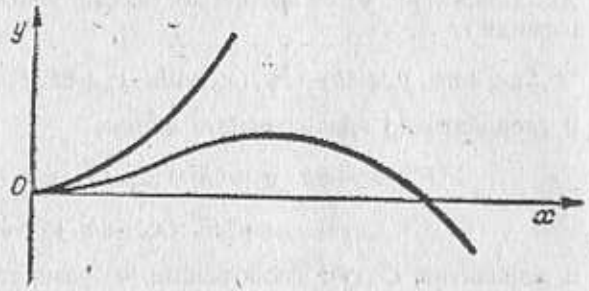
И тук имаме

$$F(0, 0)=F'_x(0, 0)=F'_y(0, 0)=0,$$

$$F''^2_{xy}(0, 0)-F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0)=0.$$



Черт. 36



Черт. 37

Изследването на кривата $F(x, y)=0$ е удобно да се извърши, като се реши уравнението относно y. Това ще ни даде

$$y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}.$$

Тази крива е изобразена на черт. 37.

В началото имаме така наречен рог от втори вид (двата клона, които образуват рога, са от една и съща страна на общата си тангента в съседство на допирната точка).

Като трети пример ще разгледаме функцията

$$F(x, y)=x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2.$$

И тук имаме

$$F(0, 0)=F'_x(0, 0)=F'_y(0, 0)=0,$$

$$F''^2_{xy}(0, 0)-F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0)=0.$$

Кривата $F(x, y)=0$ се разпада на двата клона

$$y=\frac{3x^2+x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2}$$

и

$$y=\frac{3x^2-x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2},$$

които се допират в началото.

Като четвърти пример ще разгледаме функцията

$$F(x, y)=y^2-2xy+x^2+x^4-x^6.$$

И тук имаме

$$F(0, 0)=F'_x(0, 0)=F'_y(0, 0)=0,$$

$$F''^2_{xy}(0, 0)-F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0)=0.$$

В този специален случай началото е една изолирана точка за кривата $F(x, y)=0$. За да се убедим в това, представяме уравнението във вида

$$(y-x)^2+x^4(1-x^2)=0.$$

Това уравнение е удовлетворено при $|x|<1$ само когато $y-x=0$, $x=0$ и следователно $x=0$, $y=0$.

Повече няма да се задълбочаваме в изследването на различните случаи, които могат да се представят.

Накрая ще отбележим, че само за простота се ограничихме със случая на алгебрични криви. Методът, с който си послужихме, може да се използува при много по-общи предположения.

Задачи

Да се построят следните криви:

1) $y=\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$.

2) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$.

3) $y=x\ln x$.

4) $y=e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

5) $y^2=\frac{x+1}{x-1}$.

6) $y^2=\frac{x-1}{1+x}$.

7) $y^2=\frac{x^2}{x+1}$.

8) $y^2=x^2(1-x)$.

9) $y^2=x(x-1)^2$.

10) $y^2=x^2\frac{1+x}{1-x}$.

11) $y^2=x^2\frac{1-x}{x+1}$.

12) $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$, $c\leq b\leq a$.

13) $\rho=\operatorname{tg}\theta$.

14) $\rho=a\theta$.

15) $\rho=e^{a\theta}$.

16) $\rho^2=\cos 2\theta$.

17) $\rho=\operatorname{tg}\theta$.

18) $\rho=\frac{1}{\theta}$, $\theta>0$.

19) $\rho=\frac{1}{4\theta-\pi}$, $\theta>\frac{\pi}{4}$.

20) $\rho=\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

21) $x^4+y^4=8xy^2$.

22) $(x^2+y^2)^2=2xy$.

23) $y^2-2x^2y+x^5$.

24) $x^3+y^3-3axy=0$.

25) $x=\frac{t-t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t^2-t^3}{1+t^2}$.

26) $x=\frac{t}{1-t^2}$, $y=\frac{t-2t^3}{1-t^2}$.

27) $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

28) $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y=\frac{t^2-1}{t^3+t}$.

Глава II

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дефиниции

Уравнение от вида

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0,$$

където y е неизвестна функция на x, се нарича обикновено[1] диференциално уравнение от n-ти ред.

Решенията на едно диференциално уравнение се наричат негови интеграли.

Не всяко диференциално уравнение има решение. И наистина нека $f(x)$ е функция, която приема както положителни, така и отрицателни стойности в един интервал Δ, но не се анулира.[2] В такъв случай уравнението

$$y'=f(x)$$

не притежава решение, защото в противен случай съгласно теоремата на Дарбу (вж. задача 59 в края на част II) би съществувала в Δ поне една точка x_0, в която y', а следователно и $f(x)$ се анулира, което не е вярно.

Има диференциални уравнения, които имат само едно решение. И наистина нека Δ е произволен интервал. Дефинираме една функция $\varphi(x)$ в Δ по следния начин: ако x е рационално, то $\varphi(x)=1$; ако x е ирационално, $\varphi(x)=-1$. Разглеждаме уравнението

$$y'=\varphi(x)\,y.$$

Очевидно константата нула е едно негово решение. Ще покажем, че това уравнение няма друго решение. За тази цел ще установим, че във всеки подинтервал на интервала Δ функцията y се анулира поне един път. И наистина, ако допуснем, че в Δ има подинтервал (p, q), където y не се анулира, ще имаме в

[1] За разлика от диференциални уравнения, които съдържат частни производни. Така например диференциалното уравнение $y'-y=0$ е едно обикновено диференциално уравнение, а уравнението $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ е едно диференциално уравнение с частни производни.

[2] Тази функция, разбира се, притежава поне една точка на прекъсване.

този подинтервал

$$\frac{y'}{y}=\varphi(x)$$

или още

$$\frac{d\ln|y|}{dx}=\varphi(x).$$

От друга страна, функцията $\varphi(x)$ приема в интервала (p, q) както положителни, така и отрицателни стойности и следователно съгласно теоремата на Дарбу (вж. задача 59 в края на част II) трябва да се анулира поне един път, което не е вярно. С това ние доказахме, че функцията y се анулира във всеки подинтервал на Δ и следователно се анулира тъждествено, защото е непрекъсната.

Не е трудно да се покажат примери за диференциални уравнения, които имат безбройно много решения. Така, ако функцията $g(x)$ е непрекъсната в някой интервал Δ, уравнението

$$y'=g(x)$$

има безбройно много решения в Δ и, както знаем, те се изчерпват от формулата

$$y=G(x)+C,$$

където $G(x)$ е една примитивна функция на $g(x)$ в разглеждания интервал.

Последният пример, както ще се види от това, което следва, може да се разглежда в известен смисъл като типичен. Към това ще прибавим още, че могат да се дадат твърде общи достатъчни условия, при които може да се твърди съществуването на безбройно много решения на диференциалните уравнения.

§ 2. Уравнение, в което променливите се отделят

Уравнение от вида

$$f(x)+g(y)\,y'=0 \tag{1}$$

се нарича диференциално уравнение, в което променливите се отделят.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката x_0, а $g(t)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката y_0. Ако $g(y_0)\neq 0$, то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува една и само една диференцуема функция $y(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение (1) и за която $y(x_0)=y_0$.

За да докажем това, разглеждаме двете функции

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(u)\,du,$$

$$G(t)=\int_{y_0}^{t} g(u)\,du$$

и образуваме уравнението

(2) $$F(x)+G(v)=0.$$

Като вземем пред вид, че функциите $F(x)$ и $G(t)$ притежават непрекъснати производни и че

$$F(x_0)+G(y_0)=0,$$
$$G'(y_0)=g(y_0)\neq 0,$$

заключаваме с помощта на теоремата за съществуване на неявни функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува функция $y=\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението (2) и условието $\varphi(x_0)=y_0$, и че тази функция е диференцуема. Чрез диференциране намираме, че функцията $\varphi(x)$ удовлетворява уравнението

$$F'(x)+G'(\varphi(x))\,\varphi'(x)=0$$

или, което е същото,

$$f(x)+g(\varphi(x))\,\varphi'(x)=0.$$

По такъв начин ние намерихме функция $y=\varphi(x)$ в достатъчно малка околност на точката x_0, която удовлетворява уравнението (2) и условието $\varphi(x_0)=y_0$. За да установим, че такава функция има само една, означаваме с $\psi(x)$ диференцуема функция, която е дефинирана в достатъчно малка околност на точката x_0 и удовлетворява условията

$$f(x)+g(\psi(x))\,\psi'(x)=0,$$
$$\psi(x_0)=y_0.$$

Разглеждаме функцията

$$p(x)=F(x)+G(\psi(x)).$$

В такъв случай

$$p'(x)=f(x)+g(\psi(x))\,\psi'(x)=0,$$

т. е. функцията $p(x)$ е константа. Тази константа е равна на нула, защото

$$F(x_0)+G(\psi(x_0))=F(x_0)+G(y_0)=0.$$

И така непрекъснатата функция $y=\psi(x)$ удовлетворява уравнението (3) и условието $\psi(x_0)=y_0$. От това и от теоремата за единственост на неявни функции следва, че функцията $\psi(x)$ съвпада с разглежданата по-горе функция $\varphi(x)$, когато x е достатъчно близо до x_0.

Забележка. От изложеното се вижда, че диференциалното уравнение (1) при допълнителното условие $y(x_0)=y_0$ съществено се свежда към уравнението (2), което не съдържа производната на неизвестната функция.

§ 3. Хомогенни диференциални уравнения

Уравнение от вида

(1) $$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

се нарича хомогенно.

Нека функцията $f(t)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката t_0, нека $f(t_0)-t_0\neq 0$ и нека x_0 е произволно различно от нула число. Ние ще докажем, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една диференцуема функция $y=\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението (1) и приема стойността t_0x_0 в точката x_0.

Доказателство. Полагаме

(2) $$u(x)=\frac{\varphi(x)}{x}.$$

В такъв случай

$$\varphi'(x)=u'x+u.$$

Очевидно функцията $y=\varphi(x)$ удовлетворява уравнението (1) и условието $\varphi(x_0)=t_0x_0$ тогава и само тогава, когато функцията $u(x)$ удовлетворява уравнението

(3) $$u'x+u-f(u)=0$$

и условието $u(x_0)=t_0$. От друга страна, уравнението (3) е еквивалентно на уравнението

$$\frac{1}{x}+\frac{u'}{u-f(u)}=0, \tag{4}$$

което удовлетворява условията, при които разгледахме уравнението (1) от предния параграф. И така във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува една и само една функция $u(x)$, която удовлетворява уравнението (3) и условието $u(x_0)=t_0$, и следователно съществува една и само една функция $y=\varphi(x)$, която удовлетворява уравнението (1) и условието $\varphi(x_0)=t_0 x_0$.

Забележка. Изложеното може да се резюмира кратко така: субституцията (2) ни позволява да преобразуваме уравнението (1) в уравнение, чиито променливи се отделят.

§ 4. Линейни диференциални уравнения

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати в някой интервал Δ. Уравнение от вида

$$y'=f(x)y+g(x) \tag{1}$$

се нарича линейно диференциално уравнение.

Да допуснем, че y е едно решение на уравнението (1). Разглеждаме помощната функция

$$u=ye^{-\int f(x)\,dx}$$

В такъв случай

$$y=u\,e^{\int f(x)\,dx},$$

$$y'=u'\,e^{\int f(x)\,dx}+ue^{\int f(x)\,dx}f(x).$$

Оттук заключаваме, че функцията u удовлетворява уравнението

$$u'\,e^{\int f(x)\,dx}+ue^{\int f(x)\,dx}f(x)=f(x)\,ue^{\int f(x)\,dx}+g(x)$$

и следователно

$$u'=g(x)\,e^{-\int f(x)\,dx}.$$

Това ни позволява да пишем

$$u=C+\int g(x)\,e^{-\int f(x)\,dx}\,dx$$

и следователно всяко решение y на уравнението (1) може да се представи във вида

$$y=e^{\int f(x)\,dx}\left[C+\int g(x)\,e^{-\int f(x)\,dx}\,dx\right] \tag{2}$$

при подходящ избор на константата C.

Обратно, каквато и да е константата C, функцията y, определена от (2), удовлетворява уравнението (1). Доказателството се извършва с непосредствена проверка, която предоставяме на читателя.

От равенството (2) се вижда, че каквато и да е точката x_0 от Δ и каквато и да е константата a, уравнението (1) има едно и само едно решение $y=y(x)$, което удовлетворява условието $y(x_0)=a$.

§ 5. Уравнение на Бернули

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати в някой интервал Δ. Уравнение от вида

$$y'=f(x)y+g(x)y^m, \text{ където } m\neq 1, \tag{1}$$

се нарича диференциално уравнение на Бернули (Bernoulli).

Това уравнение може да се преобразува в линейно с помощта на подходяща субституция поне тогава, когато търсим[1] негови решения, които не се анулират.

И наистина нека y е едно решение на уравнението (1) и нека $y\neq 0$ при всички стойности на x от Δ. В такъв случай

$$y^{-m}y'=f(x)y^{1-m}+g(x)$$

и следователно функцията

$$u=y^{1-m}$$

удовлетворява диференциалното уравнение

$$\frac{1}{1-m}\cdot\frac{du}{dx}=f(x)u+g(x),$$

което е линейно.

§ 6. Уравнение на Рикати

Нека функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ са дефинирани и непрекъснати в някой интервал Δ. Уравнение от вида

$$y'=f_1(x)+f_2(x)y+f_3(x)y^2 \tag{1}$$

се нарича диференциално уравнение на Рикати (Riccati).

[1] Разбира се, стойностите на търсената функция y трябва да принадлежат дефиниционната област на функцията t^m.

Ако u е един интеграл на уравнението (1), т. е. ако

(2) $$u'=f_1(x)+f_2(x)u+f_3(x)u^2,$$

уравнението на Рикати (1) може да се преобразува в уравнение на Бернули с помощта на субституцията

$$y=z+u,$$

където z е нова неизвестна функция. И наистина

$$y'=z'+u'$$

и следователно

$$z'+u'=f_1(x)+f_2(x)(z+u)+f_3(x)(z+u)^2,$$

откъдето, като вземем пред вид (2), намираме

$$z'=[f_2(x)+2f_3(x)u]z+f_3(x)z^2,$$

което е едно уравнение на Бернули.

§ 7. Уравнение на Лагранж

Уравнение от вида

(1) $$y=f(y')x+g(y')$$

се нарича уравнение на Лагранж (Lagrange).

Нека функциите $f(t)$ и $g(t)$ са дефинирани и имат непрекъснати първи производни в някоя околност на точката t_0. Ако $f(t_0)-t_0\neq 0$ и $f'(t_0)x_0+g'(t_0)\neq 0$, то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една функция $y=y(x)$, която притежава непрекъснатата втора производна, удовлетворява уравнението (1) и е подчинена на условието $y'(x_0)=t_0$.

Първо ще разгледаме въпроса за единственост. Нека функцията $y=y(x)$ е дефинирана в достатъчно малка околност Δ на точката x_0, притежава непрекъснатата втора производна и удовлетворява условията (1) и $y'(x_0)=t_0$. Полагаме $y'(x)=p(x)$. В такъв случай

2) $$y(x)=f(p)x+g(p).$$

Диференцираме спрямо x. Това ни дава

$$p=f(p)+[f'(p)x+g'(p)]p'(x).$$

Специално при $x=x_0$ получаваме

$$t_0-f(t_0)=[f'(t_0)x_0+g'(t_0)]p'(x_0)$$

и следователно $p'(x_0)\neq 0$. Оттук, като вземем пред вид, че $t_0-p(x_0)=0$, заключаваме с помощта на теоремата за съществуване на неявни функции и теоремата за съществуване на производни на неявни функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката t_0 има функция $\xi(t)$ с непрекъсната производна, която удовлетворява уравнението $t-p[\xi(t)]=0$ и условието $\xi(t_0)=x_0$.

Ако t е достатъчно близо до t_0, то $\xi(t)$ ще принадлежи на Δ и следователно ще имаме

$$p[\xi(t)]=f\{p[\xi(t)]\}+[f'\{p[\xi(t)]\}\xi(t)+g'\{p[\xi(t)]\}]p'[\xi(t)],$$

откъдето, като вземем пред вид, че

$$p[\xi(t)]=t \quad \text{и} \quad p'[\xi(t)]\xi'(t)=1,$$

намираме

$$t=f(t)+[f'(t)\xi(t)+g'(t)]\frac{1}{\xi'(t)}$$

или още

(3 $$\xi'(t)=\frac{f'(t)}{t-f(t)}\xi(t)+\frac{g'(t)}{t-f(t)}.$$

Така полученото уравнение (3) е линейно. То има само едно решение $\xi(t)$, което удовлетворява условието $\xi(t_0)=x_0$. Ние ще използуваме това обстоятелство, за да покажем, че функцията $p(x)$ е също тъй еднозначно определена в достатъчно малка околност на точката x_0. За тази цел вземаме пред вид, че $x_0-\xi(t_0)=0$. От друга страна, $\xi'(t_0)\neq 0$, защото $p'[\xi(t)]\xi'(t)=1$. Това ни позволява да заключим, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува (непрекъсната) функция $q(x)$, която удовлетворява уравнението $x-\xi[q(x)]=0$ (и условието $q(x_0)=t_0$). По този начин дефиницията на функцията $q(x)$ зависи от еднозначно определената функция $\xi(t)$, но не зависи ни най-малко от функцията $p(x)$. Полученият резултат ни дава възможност да пишем $x=\xi[q(x)]$ при всички стойности на x, които са достатъчно близо до x_0. Оттук получаваме

$$p(x)=p[\xi(q(x))]=q(x),$$

с което е показано, че функцията $p(x)$ е наистина еднозначно определена в достатъчно малка околност на точката x_0. Найсетне, като вземем пред вид равенството

$$y(x)=f[p(x)]x+g[p(x)],$$

заключаваме, че функцията $y(x)$ е също така еднозначно определена.

За да установим, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 разглежданото уравнение (1) наистина има решение

$y=y(x)$ с непрекъсната втора производна, което удовлетворява условието $y'(x_0)=t_0$, образуваме уравнението (3). Това уравнение е линейно и следователно притежава решение $\xi(t)$, което удовлетворява условието $\xi(t_0)=x_0$, стига t да се мени в достатъчно малка околност G на точката t_0. Равенството (3) ни позволява да заключим, че $\xi'(t)$ е непрекъсната функция на t. От друга страна, $x_0-\xi(t_0)=0$ и

$$\xi'(t_0)=\frac{f'(t_0)\,\xi(t_0)+g'(t_0)}{t_0-f(t_0)}=\frac{f'(t_0)\,x_0+g'(t_0)}{t_0-f(t_0)}\neq 0.$$

Оттук, като използуваме теорията на неявните функции, заключаваме, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува функция $\varphi(x)$ с непрекъсната производна, която удовлетворява условията

$$x-\xi(\varphi(x))=0,$$

$$\varphi(x_0)=t_0.$$

Ако x е достатъчно близо до x_0, $\varphi(x)$ принадлежи на G и следователно

$$\xi'[\varphi(x)]=\frac{f'[\varphi(x)]}{\varphi(x)-f[\varphi(x)]}\,\xi[\varphi(x)]+\frac{g'[\varphi(x)]}{\varphi(x)-f[\varphi(x)]}.$$

От друга страна,

$$\xi[\varphi(x)]=x \quad \text{и} \quad \xi'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)=1$$

и следователно

$$\frac{1}{\varphi'(x)}=\frac{f'[\varphi(x)]}{\varphi(x)-f[\varphi(x)]}\,x+\frac{g'[\varphi(x)]}{\varphi(x)-f[\varphi(x)]},$$

откъдето

$$\varphi(x)=f[\varphi(x)]+\{f'[\varphi(x)]+g'[\varphi(x)]\}\,\varphi'(x)$$

или още

$$\varphi(x)=\frac{d}{dx}\{f[\varphi(x)]\,x+g[\varphi(x)]\}. \tag{4}$$

Да разгледаме функцията

$$v(x)=f[\varphi(x)]\,x+g[\varphi(x)]. \tag{5}$$

Равенството (4) ни учи, че $y'(x)=\varphi(x)$. Оттук заключаваме следното:

1. Функцията $y(x)$ притежава непрекъсната втора производна, защото функцията $\varphi(x)$ притежава непрекъсната първа производна.

2. $y'(x_0)=t_0$, защото $\varphi(x_0)=t_0$.

3. Равенството (5) ни дава

$$y(x)=f[y'(x)]\,x+g[y'(x)],$$

т. е. функцията $y(x)$ удовлетворява уравнението (1).

По такъв начин показахме, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 уравнението (1) наистина има решение $y(x)$ с непрекъсната втора производна, което удовлетворява условието $y'(x_0)=t_0$.

§ 8. Уравнение на Клеро

Уравнение от вида

$$y=xy'+g(y') \tag{1}$$

се нарича уравнение на Клеро (Clairaut).

Нека функцията $g(t)$ притежава непрекъсната втора производна в някоя околност на точката t_0 и нека $g''(t_0)\neq 0$. Ще покажем, че във всяка достатъчно малка околност на точката $x_0=-g'(t_0)$ съществуват две и само две функции $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, които имат непрекъснати втори производни, удовлетворяват уравнението (1) и за които $\varphi'(x_0)=t_0$, $\psi'(x_0)=t_0$. И наистина нека y е едно такова решение. Полагаме $y'=p(x)$. Уравнението (1) добива вида

$$y=xp+g(p). \tag{2}$$

Като диференцираме спрямо x, намираме

$$\{x+g'[p(x)]\}\,p'(x)=0. \tag{3}$$

Ако $p'(x_0)\neq 0$, то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 имаме $p'(x)\neq 0$ и следователно

$$x+g'[p(x)]=0. \tag{4}$$

От друга страна, като вземем пред вид, че

$$x_0+g'(t_0)=0, \tag{5}$$

$$g''(t_0)\neq 0, \tag{6}$$

заключаваме от теорията на неявните функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има **само една** непрекъсната функция $p(x)$, която удовлетворява уравнението (4) и условието $p(x_0)=t_0$. След като установихме, че функцията $p(x)$ е еднозначно определена, заключаваме с помощта на равенството (2), че функцията y е също така еднозначно определена.

Преминаваме към случая, когато $p'(x_0)=0$. Да разгледаме функцията

$$\varphi(x)=x+g'[p(x)].$$

В такъв случай

$$\varphi'(x_0)=1+g''[p(x_0)]\,p'(x_0)=1$$

и следователно в достатъчно малка околност на точката x_0 имаме $\varphi'(x)\neq 0$. Оттук заключаваме, че функцията $\varphi(x)$ приема всяка своя стойност само един път. По-специално тя не може да се анулира повече от един път. Това ни позволява да заключим от равенството (3), че в достатъчно малка околност на точката x_0 имаме $p'(x)=0$, т. е.

$$p(x)=\text{const}=p(x_0)=t_0.$$

По такъв начин ние и в този случай виждаме от равенството (2) че функцията y е еднозначно определена. Тя има вида

$$y=t_0x+g(t_0).$$

От направените разсъждения се вижда, че в достатъчно малка околност на точката x_0 не може да има повече от две решения с непрекъснати втори производни, чиито първи производни приемат стойността t_0 в точката x_0.

За да покажем, че наистина съществуват две решения с интересуващите ни свойства, разглеждаме уравнението (4). Като изземем пред вид условията (5) и (6), заключаваме с помощта на теорията на неявните функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има функция $p(x)$ с непрекъсната производна, която удовлетворява уравнението (4) и условието $p(x_0)=t_0$.

Разглеждаме функцията

$$y=xp(x)+g[p(x)], \tag{7}$$

която очевидно е добре дефинирана в достатъчно малка околност на точката x_0 и притежава производна. В такъв случай

$$y'=p(x)+\{x+g'[p(x)]\}p'(x)=p(x). \tag{8}$$

Оттук заключаваме, че функцията y притежава непрекъсната втора производна, защото функцията $p(x)$ има непрекъсната първа производна. Най-сетне равенствата (7) и (8) ни дават $y=xy'+g(y')$, т. е. функцията (7) е едно решение на уравнението (1). От друга страна, $y'(x_0)=p(x_0)=t_0$. С това е намерено едно решение на (1), което притежава всички свойства, които ни интересуват. Друго такова решение ни представя линейната функция

$$y=t_0x+g(t_0).$$

Двете намерени решения са сигурно различни, защото функцията (7) не е линейна, както това се вижда от равенството (4), което ни дава

$$1+g''[p(x)]\,p'(x)=0,$$

откъдето $p'(x)\neq 0$ и следователно $y''\neq 0$.

Забележка 1. С директна проверка се вижда, че линейните функции

$$y=Cx+g(C) \tag{9}$$

представляват решения на (1) при всяко x и при всеки избор на константата C от дефиниционната област на $g(t)$.

Фамилията решения (9) се нарича общ интеграл на уравнението на Клеро.

Забележка 2. Кривата (7) представлява обвивка на фамилията (9), когато C се мени в достатъчно малка околност на точката t_0. За да се убедим в това, полагаме

$$y_0=t_0x_0+g(t_0)$$

и разглеждаме функцията $F(x, y, C)=Cx+g(C)-y$, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред в съседство с точката (x_0, y_0, t_0). Очевидно

$$F(x_0, y_0, t_0)=0,$$

$$F'_C(x_0, y_0, t_0)=x_0+g'(t_0)=0.$$

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F'_{Cx} & F'_{Cy} \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

$$F''_{CC}(x_0, y_0, t_0)=g''(t_0)\neq 0.$$

Оттук заключаваме, че уравненията

$$F(x, y, C)=0,$$

$$F'_C(x, y, C)=0$$

дават търсената обвивка. Последните две уравнения обаче са

$$Cx+g(C)-y=0,$$

$$x+g'(C)=0$$

и съвпадат с уравненията (4) и (7).

Функцията (7) се нарича особен интеграл на уравнението на Клеро.

Забележка 3. Ако $x_0\neq -g'(t_0)$, уравнението (3) ни дава $p'(x_0)=0$. В този случай, както видяхме по-горе, уравнението на Клеро няма друго решение в достатъчно малка околност на точката x_0, което да притежава непрекъснатата втора производна и да удовлетворява условието $y'(x_0)=t_0$, освен решението

$$y=t_0x+g(t_0).$$

Забележка 4. Освен намерените два пъти диференцуеми решения изобщо съществуват и други, които не притежават втора производна. Така например, означавайки с $\varphi(x)$ функцията (7), можем да конструираме ново решение, като положим

$$y(x)=\varphi(x),$$

когато x е достатъчно близо до x_0, но е по-малко от x_0 и

$$y(x)=t_0 x+g(t_0),$$

когато $x \geq x_0$.

§ 9. Интегриращ множител

Нека $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са две функции, които са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в някоя околност D на точката (x_0, y_0), и нека $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Ще търсим диференцуема функция $y=y(x)$ в достатъчно малка околност на точката x_0, която при $x=x_0$ да приема стойността y_0 и която да удовлетворява уравнението

$$P(x, y)+Q(x, y)y'=0. \tag{1}$$

Ако съществува в D функция $F(x, y)$, която притежава непрекъснати производни поне до втори ред и удовлетворява уравненията

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}&=P(x, y), \\ \frac{\partial F}{\partial y}&=Q(x, y), \end{aligned} \tag{2}$$

търсената функция може да се определи като неявна функция на x от уравнението

$$F(x, y)=F(x_0, y_0),$$

тъй като уравнението (1) е удовлетворено тогава и само тогава когато функцията $F(x, y(x))$ е константа.

За да съществува функция $F(x, y)$ с исканите свойства, необходимо е да имаме

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

тъй като, от една страна,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x},$$

а, от друга,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}.$$

Ще покажем, че условието (3) е и достатъчно за съществуване на функцията $F(x, y)$, която удовлетворява уравненията (2). За тази цел ще отбележим, че уравнението

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x, y)$$

е равносилно с уравнението

$$F(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(t, y)\,dt+\varphi(y),$$

където $\varphi(y)$ е произволна два пъти диференцуема функция на y, която не зависи от x. Така определената функция $F(x, y)$ удовлетворява условието

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x, y)$$

тогава и само тогава, когато

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y}\,dt+\varphi'(y)=Q(x, y)$$

или

$$\varphi'(y)=Q(x, y)-\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y}\,dt,$$

т. е. за да съществува функция $F(x, y)$ с исканите свойства, необходимо и достатъчно е функцията

$$\psi(x, y)=Q(x, y)-\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y}\,dt$$

да не зависи от x, което е сигурно изпълнено, ако

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

защото в такъв случай

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

Условието (3) се нарича условие за интегруемост на уравнението (1).

Една функция $\mu(x, y)$, която притежава непрекъснати частни производни поне до втори ред и не се анулира в D, се нарича **интегриращ множител** на уравнението (1), когато уравнението

$$\mu P+\mu Qy'=0$$

удовлетворява условието за интегруемост, т. е. когато

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

или още

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

За да притежава уравнението (1) интегриращ множител, зависещ само от x, необходимо и достатъчно е да съществува функция $\mu=\mu(x)$, която не зависи от y и за която е изпълнено уравнението

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{d\mu}{dx}+\mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

или

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q},$$

за тази цел пък необходимо и достатъчно е отношението

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

да не зависи от y.

§ 10. Съществуване и единственост на решенията на линейните диференциални уравнения от n-ти ред при дадени начални условия

Уравнение от вида

(1) $$y^{(n)}+p_1(x)y^{(y-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_n(x)y=f(x),$$

където $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$ и $f(x)$ са дадени непрекъснати функции на x в някой интервал Δ, а y е неизвестна функция, се нарича линейно диференциално уравнение от n-ти ред. Нека x_0 е произволна точка от Δ и $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ са произволни константи. Ще покажем, че диференциалното уравнение (1) притежава едно и само едно решение $y=y(x)$ в интервала Δ, което удовлетворява условията

(2) $$y(x_0)=a_0,\ y'(x_0)=a_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1}.$$

Най-напред ще разгледаме въпроса за единственост. За целта ще допуснем, че поставената задача има решение, и ще положим

(3) $$y^{(n)}(x)=\varphi(x).$$

В такъв случай

(4) $$y(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{a_\nu}{\nu!}(x-x_0)^\nu+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\varphi(t)(x-t)^{n-1}dt,$$

което се вижда без всякакъв труд например индуктивно с интегриране по части. Оттук получаваме при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$

(5) $$y^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n-k-1}\frac{a_{k+\nu}}{\nu!}(x-x_0)^\nu+\frac{1}{(n-k-1)!}\int_{x_0}^{x}\varphi(t)(x-t)^{n-k-1}dt.$$

Заместваме $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y$ в (1) с равните им от (3) и (5). Това ни дава

(6) $$\varphi(x)=g(x)+\int_{x_0}^{x}K(x, t)\varphi(t)\,dt,$$

където

$$g(x)=f(x)-\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\sum_{\nu=0}^{i-1}\frac{a_{n+\nu-i}}{\nu!}(x-x_0)^\nu$$

и

$$K(x, t)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu(x)(x-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

Очевидно $g(x)$ и $K(x, t)$ са непрекъснати функции.

Ще покажем, че уравнението (6) не може да има повече от едно решение. И наистина нека $\psi(x)$ е още едно решение на уравнението (6), т. е.

$$\psi(x)=g(x)+\int_{x_0}^{x}K(x, t)\psi(t)\,dt.$$

В такъв случай

(7) $$\varphi(x)-\psi(x)=\int_{x_0}^{x}K(x, t)[\varphi(t)-\psi(t)]\,dt.$$

От друга страна, функцията $K(x, t)$ е непрекъсната и следователно функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са също тъй непрекъснати. Да означим с M една горна граница на $|K(x,t)|$, а с A една горна граница на $|\varphi(x)-\psi(x)|$, когато x се мени в произволен краен[1] и затворен подинтервал D на Δ и t принадлежи на интервала $[x_0, x]$, респ. $[x, x_0]$. В такъв случай уравнението (7) ни дава

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leq MA|x-x_0|. \tag{8}$$

Като използуваме още веднъж уравнението (7) и като вземем пред вид оценката (8), ще получим

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M.MA(t-x_0)\,dt \right| = \frac{M^2 A(x-x_0)^2}{2!}.$$

Като продължаваме тези разсъждения, получаваме изобщо

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leq \frac{M^n A|x-x_0|^n}{n!}$$

и следователно $\varphi(x)-\psi(x)=0$, защото

$$\frac{M^n A|x-x_0|^n}{n!}$$

е общ член на един сходящ ред и следователно клони към нула когато n расте неограничено. И така уравнението (6) не може да има повече от едно решение. Този резултат и равенството (4) ни учат, че и уравнението (1) не може да има повече от едно решение, което удовлетворява условията (2).

Преминаваме към въпроса за съществуване на решение на уравнението (1) при допълнителните условия (2). За целта ще приложим към уравнението (6) метода на последователните приближения.

Разглеждаме редицата

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,$$

за която $\varphi_0(x)$ е произволна непрекъсната функция в интервала Δ, а $\varphi_{n+1}(x)$ се дефинира чрез $\varphi_n(x)$ посредством равенството

$$\varphi_{n+1}(x)=g(x)+\int_{x_0}^{x} K(x, t)\,\varphi_n(t)\,dt. \tag{9}$$

[1] Самият интервал Δ не е задължен да бъде нито краен, нито затворен.

В такъв случай

$$\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)=\int_{x_0}^{x} K(x, t)[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]\,dt.$$

Да означим с M една горна граница на $|K(x, t)|$ и с A една горна граница на $|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|$, когато x се мени в кой да е краен и затворен подинтервал D на интервала Δ. В такъв случай получаваме последователно

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)| \leq MA|x-x_0|,$$

$$|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M.MA(t-x_0)\,dt \right| \leq \frac{M^2 A(x-x_0)^2}{2!},$$

$$|\varphi_4(x)-\varphi_3(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M\frac{M^2 A(t-x_0)^2}{2!}\,dt \right| = \frac{M^3 A|x-x_0|^3}{3!},$$

. . . . . .

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \leq \frac{AM^n|x-x_0|^n}{n!}.$$

Тези неравенства ни осигуряват равномерната сходимост в D на реда

$$\varphi_0(x)+[\varphi_1(x)-\varphi_0(x)]+[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]+\cdots+$$
$$+[\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)]+\cdots,$$

а следователно и равномерната сходимост на редицата от частичните му суми

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \cdots$$

Да положим

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x).$$

В такъв случай, ако извършим граничен преход в уравнението (9), ще получим

$$\varphi(x)=g(x)+\int_{x_0}^{x} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{6}$$

След като е дефинирана по такъв начин функцията $\varphi(t)$, разглеждаме функцията

$$(10)\quad y(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{a_\nu}{\nu!}(x-x_0)^\nu+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\varphi(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Тази функция удовлетворява условията

$$y(x_0)=a_0,\ y'(x_0)=a_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)+a_{n-1},$$

което се вижда с непосредствена проверка. Тя обаче удовлетворява и уравнението (1), защото, замествайки y с равното му от (10) в (1), ще получим (6), което е изпълнено съгласно дефиницията на $\varphi(x)$. По такъв начин установихме съществуването на решението на уравнението (1) при допълнителните условия (2).

Ако оставим произволните константи $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ да се менят, получаваме всичките решения на уравнението (1). Оттук става ясно, че общото решение на уравнението (1) зависи от n произволни константи.

§ 11. Фундаментална система на едно линейно диференциално уравнение от n-ти ред

Нека

$$(1)\qquad y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x)$$

е едно линейно диференциално уравнение, където $p_1(x), \ldots p_n(x)$ и $f(x)$ са дадени непрекъснати функции в някой интервал Δ. Нека y_0 е едно решение на уравнението (1), т. е.

$$y_0^{(n)}+p_1(x)y_0^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y_0=f(x).$$

Ако извършим субституцията

$$(2)\qquad y=z+y_0$$

в уравнението (1), ще получим

$$(3)\qquad z^{(n)}+p_1(x)z^{(n-1)}+p_2(x)z^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)z=0.$$

Това е пак едно линейно уравнение. То обаче е по-просто от уравнението (1) в това отношение, че дясната му страна е равна на нула. Такова линейно уравнение се нарича хомогенно.

Ако $z_1, z_2, \ldots, z_k$ са решения на уравнението (3) и $C_1, C_2, \ldots, C_k$ са константи, функцията

$$z=C_1z_1+C_2z_2+\ldots+C_kz_k$$

е пак решение на уравнението (3), защото

$$z^{(n)}+p_1(x)z^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)z=$$
$$=C_1(z_1^{(n)}+p_1(x)z_1^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)z_1)+$$

$$+C_2(z_2^{(n)}+p_1(x)z_2^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)z_2)+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+C_k(z_k^{(n)}+p_1(x)z_k^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)z_k)=0.$$

Ще установим сега следното важно свойство на хомогенните линейни уравнения: ако $z_1, z_2, \ldots, z_n, z$ са $n+1$ решения на едно хомогенно линейно уравнение от n-ти ред, то могат да се намерят $n+1$ константи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$, от които поне една е различна от нула, по такъв начин, че да имаме тъждествено

$$(4)\qquad \lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\ldots+\lambda_nz_n+\lambda z=0.$$

За да докажем това, разглеждаме $n+1$ решения $z_1, z_2, \ldots z_n, z$ на уравнението (3). Избираме произволно една точка x_0 в интервала Δ и означаваме с $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$ едно нетривиално решение на системата

$$\lambda_1z_1(x_0)+\lambda_2z_2(x_0)+\ldots+\lambda_nz_n(x_0)+\lambda z(x_0)=0,$$
$$\lambda_1z_1'(x_0)+\lambda_2z_2'(x_0)+\ldots+\lambda_nz_n'(x_0)+\lambda z'(x_0)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_1z_1^{(n-1)}(x_0)+\lambda_2z_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+\lambda_nz_n^{(n-1)}(x_0)+\lambda z^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Както е известно от алгебрата, такова решение сигурно съществува. Образуваме помощната функция

$$\varphi(x)=\lambda_1z_1(x)+\lambda_2z_2(x)+\ldots+\lambda_nz_n(x)+\lambda z(x).$$

Тази функция удовлетворява уравнението

$$\varphi^{(n)}(x)+p_1(x)\varphi^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)\varphi(x)=0$$

и условията

$$(5)\qquad \varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\ldots=\varphi^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Константата нула обаче също тъй удовлетворява уравнението (3) и условията (5) и следователно съгласно теоремата за единственост, която доказахме в предния параграф, функцията $\varphi(x)$ се анулира тъждествено. Така ние успяхме да намерим $n+1$ константи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$, от които поне една е различна от нула, по такъв начин, че да е изпълнено условието (4) при всяко x от Δ.

Ако функциите $z_1, z_2, \ldots, z_n$ са линейно независими в Δ, т. е. ако не могат да се намерят n константи $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, от които поне едната е различна от нула, по такъв начин, че да имаме

$$\mu_1z_1+\mu_2z_2+\ldots+\mu_nz_n=0$$

при всяко x от Δ, коефициентът λ в зависимостта (4) е различен от нула. Това обстоятелство ни позволява да пишем

$$z=C_1z_1+C_2z_2+\ldots+C_nz_n,$$

където

$$C_1=-\frac{\lambda_1}{\lambda},\quad C_2=-\frac{\lambda_2}{\lambda},\ \ldots,\quad C_n=-\frac{\lambda_n}{\lambda}.$$

Оттук и от (2) добиваме възможност да представим общото решение на уравнението (1) във вида

$$y=y_0+C_1z_1+C_2z_2+\cdots+C_nz_n.$$

По такъв начин въпросът за намиране на общото решение на уравнението (1) се свежда към намирането на едно негово частно решение и на n линейно независими решения на хомогенното уравнение (3).

Една система от n линейно независими решения на едно хомогенно линейно уравнение от n-ти ред се нарича негова фундаментална система. За да установим съществуването на една фундаментална система от уравнението (3), избираме n^2 на брой числа a_{ik}, където i и k приемат цели положителни стойности между 1 и n, по такъв начин, че

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

След това, като се основаваме на доказаната по-горе теорема за съществуване, построяваме n решения, $z_1, z_2, \ldots, z_n$, които удовлетворяват условията

$$z_\nu(x_0)=a_{1\nu},\ z_\nu'(x_0)=a_{2\nu},\ \ldots,\ z_\nu^{(n-1)}(x_0)=a_{n\nu}$$

при $\nu=1, 2, \ldots, n$, където x_0 е точка от Δ. Така построените функции $z_1, z_2, \ldots, z_n$ са сигурно линейни независими в Δ. И наистина да допуснем, че съществуват такива n числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, от които поне едно е различно от нула, че да имаме

$$(7)\qquad \mu_1z_1+\mu_2z_2+\cdots+\mu_nz_n=0$$

при всяко x от Δ. Като диференцираме това равенство последователно $n-1$ пъти, ще получим

$$\mu_1z_1'+\mu_2z_2'+\cdots+\mu_nz_n'=0,$$

$$\mu_1z_1''+\mu_2z_2''+\cdots+\mu_nz_n''=0,$$

$$\mu_1z_1^{(n-1)}+\mu_2z_2^{(n-1)}+\cdots+\mu_nz_n^{(n-1)}=0.$$

Тези уравнения заедно с уравнението (7) дават при $x=x_0$

$$a_{11}\mu_1+a_{12}\mu_2+\cdots+a_{1n}\mu_n=0,$$

$$a_{21}\mu_1+a_{22}\mu_2+\cdots+a_{2n}\mu_n=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}\mu_1+a_{n2}\mu_2+\cdots+a_{nn}\mu_n=0,$$

което не е възможно, защото детерминантата (6) е различна от нула.

§ 12. Линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти

Нека в линейното и хомогенно уравнение

$$(1)\qquad y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_ny=0$$

коефициентите $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са константи. Ще търсим една негова фундаментална система. За тази цел ще се опитаме да го удовлетворим с функции от вида

$$y=e^{\alpha x},$$

където α е константа. Като заместим y с равното му, ще получим

$$e^{\alpha x}(\alpha^n+p_1\alpha^{n-1}+p_2\alpha^{n-2}+\cdots+p_n)=0.$$

Това уравнение е удовлетворено тогава и само тогава, когато е удовлетворено уравнението

$$(2)\qquad \alpha^n+p_1\alpha^{n-1}+p_2\alpha^{n-2}+\cdots+p_n=0.$$

Така полученото уравнение (2) се нарича характеристично уравнение на уравнението (1).

Да разгледаме случая, когато корените $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ на уравнението (2) са реални и прости. Ще докажем, че решенията

$$e^{\alpha_1x},\quad e^{\alpha_2x},\ \ldots,\ e^{\alpha_nx}$$

на уравнението (1) образуват една негова фундаментална система. И наистина да допуснем, че съществуват такива константи $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, от които поне едната, например μ_n, е различна от нула, така че да имаме тъждествено

$$\mu_1e^{\alpha_1x}+\mu_2e^{\alpha_2x}+\cdots+\mu_ne^{\alpha_nx}=0.$$

Ако разделим с e^{α_1x} и диференцираме спрямо x, ще получим

$$\mu_2(\alpha_2-\alpha_1)e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}+\mu_3(\alpha_3-\alpha_1)e^{(\alpha_3-\alpha_1)x}+\cdots+\mu_n(\alpha_n-\alpha_1)e^{(\alpha_n-\alpha_1)x}=0.$$

Делим полученото равенство с $e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}$ и пак диференцираме спрямо x. В такъв случай получаваме

$$\mu_3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\,e^{(\alpha_3-\alpha_2)x}+\ldots+\mu_n(\alpha_n-\alpha_1)\,(\alpha_n-\alpha_2)\,e^{(\alpha_n-\alpha_2)x}=0$$

и т. н. Продължаваме тези пресмятания и най-сетне получаваме

$$\mu_n(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})\,e^{(\alpha_n-\alpha_{n-1})x}=0,$$

което очевидно не е вярно.

И така функциите $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}$ наистина образуват една фундаментална система решения на уравнението (1) и следователно общото му решение ще има вида

$$y=C_1e^{\alpha_1 x}+C_2e^{\alpha_2 x}+\ldots+C_ne^{\alpha_n x}.$$

Характеристичното уравнение може да се използува, за да се намери една фундаментална система на уравнението (1) и тогава, когато не всичките му корени са реални и прости. За да съкратим изложението, ще изясним това в случая, когато уравнението (1) е от втори ред, т. е. когато то има вида

(3) $$y''+p_1y'+p_2y=0.$$

В този случай характеристичното му уравнение е

(4) $$\alpha^2+p_1\alpha+p_2=0.$$

По-горе разгледахме случая, когато корените α_1 и α_2 на това уравнение са реални и прости, и видяхме, че общото решение на уравнението (3) е

(5) $$y=C_1e^{\alpha_1 x}+C_2e^{\alpha_2 x}.$$

Сега ще разгледаме случая, когато корените на уравнението (4) не са реални и прости, т. е. когато

$$p_1^2-4p_2\leqq 0.$$

За да не напишем много, ще положим

$$p_2-\frac{p_1^2}{4}=a^2$$

и ще направим субституцията

$$y=ze^{-\frac{p_1}{2}x}.$$

В такъв случай уравнението (3) приема вида

(6) $$z''+a^2z=0.$$

Ако $a=0$, то $z''=0$ и следователно z има вида

$$z=C_1x+C_2,$$

където C_1 и C_2 са константи. По такъв начин намираме

$$y=(C_1x+C_2)e^{-\frac{p_1}{2}x}.$$

Преминаваме към случая, когато $a^2>0$. С непосредствена проверка се вижда, че функциите

$$z_1=\cos ax,$$

c(7) $$z_2=\sin ax$$

а две решения на уравнението (6). Ние ще покажем, че те са линейно независими. И наистина, ако допуснем, че при някой избор на константите μ_1 и μ_2 имаме

$$\mu_1\cos ax+\mu_2\sin ax=0$$

при всяко x, то чрез диференциране намираме

$$-a\mu_1\sin ax+a\mu_2\cos ax=0.$$

От друга страна,

$$\begin{vmatrix}\cos ax & \sin ax\\ -a\sin ax & a\cos ax\end{vmatrix}=a\neq 0$$

и следователно $\mu_1=\mu_2=0$. С това е установено, че решенията (7) на уравнението (6) образуват една негова фундаментална система. По такъв начин общото решение на уравнението (6) е

$$z=A\cos ax+B\sin ax,$$

където A и B са две произволни константи. Оттук заключаваме, че общото решение на уравнението (3) е

$$y=e^{-\frac{p_1}{2}x}(A\cos ax+B\sin ax).$$

Полученият резултат може да се представи в друга форма, като се дефинира показателната функция за комплексни стойности на показателя. Това може да стане, като положим по дефиниция

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

при всички реални стойности на x и y. В такъв случай ще имаме

$$e^{\alpha_1 x}=e^{-\frac{p_1}{2}x}(\cos ax+i\sin ax),$$

(8)

$$e^{\alpha_1 x} = e^{-\frac{p_1}{2}x}(\cos ax - i \sin ax),$$

където

$$\alpha_1 = -\frac{p_1}{2} + ai,$$

$$\alpha_2 = -\frac{p_1}{2} - ai$$

са двата корена на характеристичното уравнение (4). Равенствата (8) ни позволяват да представим общото решение на уравнението (3) във вида

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x},$$

където

$$C_1 = \frac{A - iB}{2}, \quad C_2 = \frac{A + iB}{2}.$$

т. е. формулата (5) може да се използува и тогава, когато корените на характеристичното уравнение (4) не са реални.

Ние вече отбелязахме по-горе, че и в случая, когато разглежданото линейно уравнение с постоянни коефициенти е от n-ти ред, може да са намери една негова фундаментална система, каквито и да се корените на характеристичното му уравнение. Ние няма обаче да се спираме върху този въпрос, при все че решението му не е свързано с някакви трудности.

ИЗПОЛЗУВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Брадистилов, Г.—Сборник от задачи и теореми по диференциално и интегрално смятане, част I и II, София, 1947.
2. Гребенча, М. К., С. И. Новоселов—Курс математического анализа, т. I, Москва, 1948, т. II, 1949.
3. Гюнтер, Н. М. и Р. О. Кузьмин—Сборник задач по высшей математике, т. I и II, Москва — Ленинград, 1949.
4. Ковалевский, Г. — Основы дифференциального и интегрального исчислений, Одесса, 1911.
5. Лузин, Н. И. — Дифференциальное исчисление, Москва, 1946.
6. Лузин, Н. И. — Интегральное исчисление, Москва, 1946.
7. Немыцкий, В., М. Слудская, А. Черкасов—Курс математического анализа, т. I и II, издание второе.
8. Попов, К. — Учебник по диференциално и интегрално смятане, София.
9. Фихтенгольц, Г. М. — Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II и III, Москва — Ленинград, 1948.
10. Чезаро, Э. — Элементарный учебник алгебрического анализа и исчисления бесконечно малых, часть I и II, Одесса, 1913.
11. Шифф, В. — Сборник упражнений и задач по дифференциальному и интегральному исчислениям, ч. I и II, Москва, 1910.
12. Baire, R. — Leçons sur les théories générales de l'analyse, t. I, II, Paris, 1908
13. Brahy, M. — Exercices méthodiques de calcul différentiel, Paris, 1895.
14. Courant, R. — Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. I, II, Berlin, 1929.
15. Fabry, E. — Problèmes et exercices de mathématiques générales, Paris, 1918.
16. Goursat, E. — Cours d'analyse mathématique, t. I, Paris, 1910.
17. Hardy, G. H. — A course of pure mathematis.
18. Tisserand, F. — Recueil complementaire d'exercices sur le calcul infinitésimal, Paris, 1933.
19. Knopp, K. — Theorie und Anwendung der unendichen Reihen, Berlin, 1931.
20. Landau, E. — Einführung in die Differentailrechnung und Integralrechnung, 1934.
21. Mangoldt, H., K. Knopp — Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I, II, III, Leipzig, 1942.
22. Pòlya G., Szegö, G. — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, II, Berlin, 1925.
23. Jordan, C. — Cours d'analyse de l'école polytechnique, t. I, Paris, 1909.
24. Artin, E. — Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1931.

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор 5

Част I

Интегрално смятане — прости интеграли

Глава I. **Неопределени интеграли** 7
§ 1. Увод 7
§ 2. Неопределен интеграл 9
§ 3. Таблица на основните интеграли 12
§ 4. Елементарни свойства на неопределените интеграли 14
Задачи 23
§ 5. Интегриране по части 29
Задачи 41
§ 6. Разлагане на дробни рационални функции 45
§ 7. Пресмятане на коефициентите 54
§ 8. Интегриране на рационални функции 60
Задачи 62
§ 9. Интегриране на ирационални функции 64
I. Интегриране на рационални функции на радикали на x 64
II. Интегриране на рационални функции на x и на радикали от една (дробна) линейна функция на x 65
III. Субституции на Ойлер 67
IV. Абелеви интеграли 71
V. Диференциален бином 72
VI. Елиптични и хиперелиптични интеграли 76
Задачи 77

§ 10. Интегриране на трансцендентни функции 78
Задачи 82

Глава II. **Определени интеграли** 84
§ 1. Дефиниция на понятието определен интеграл 84
§ 2. Достатъчни условия за интегруемост 94
§ 3. Основни свойства на определените интеграли 100
§ 4. Интегриране на сума 114
§ 5. Произведение на две интегруеми функции 119

§ 6. Интегралът като функция на една от интеграционните си граници. Теорема на Лайбниц и Нютон. Зависимост между определени и неопределени интеграли 121
§ 7. Допълнения към дефиницията на понятието интеграл 127
§ 8. Смяна на променливите 131
§ 9. Интегриране по части при определените интеграли 134
Задачи 136
§ 10. Теорема за средните стойности 139
§ 11. Друга дефиниция на понятието определен интеграл 142
§ 12. Едно обобщение на основната теорема на интегралното смятане и общо условие за интегруемост в Риманов смисъл 148
§ 13. Точкови множества 155
§ 14. Преобразуване на точкови множества 160
§ 15. Основна теорема на интегралното смятане в равнината 175
§ 16. Характеристични функции 177
§ 17. Горна мярка 183
§ 18. Мярка на правоъгълник 186
§ 19. Измерими множества 191
§ 20. Преобразуване на измерими множества 201
§ 21. Полярни координати 216
Задачи 220
§ 22. Пресмятане на лица с помощта на определени интеграли 221
Задачи 231
§ 23. Дефиниция на понятието дъга 232
§ 24. Дължина на дъга 233
§ 25. Пресмятане на дължините на дъгите с помощта на интеграли 236
Задачи 242
§ 26. Криволинейни интеграли 244
§ 27. Криволинеен интеграл от тотален диференциал 247
§ 28. Приближително пресмятане на интеграли 250
§ 29. Несобствени интеграли 258
I. Интеграли от неограничени функции 258
II. Интеграли с безкрайни интеграционни граници 265
III. Интегрален критерий на Коши за сходимост 270
§ 30. Граничен преход под знака на интеграла 272
§ 31. Интеграли, зависещи от параметри. Диференциране под знака на интеграла 282
Общи задачи 288

Част II

Двойни и тройни интеграли

Глава I. **Двойни интеграли** 311
§ 1. Дефиниция на понятието двоен интеграл 311
§ 2. Пресмятане на двойни интеграли 321
Задачи 331

§ 3. Смяна на променливите при двойните интеграли 332
Задачи 348
§§ 4. Несобствени двойни интеграли от неотрицателни функции 350

Глава II. **Приложения на двойните интеграли** 353
§ 1. Дефиниция на понятието обем 353
§ 2. Пресмятане на обеми с помощта на двойни интеграли 354
§ 3. Обеми на ротационни тела 358
Задачи 360
§ 4. Допирателна равнина 362
§ 5. Лица на повърхнини 363
§ 6. Лица на ротационни повърхнини 365
Задачи 368

Глава III. **Тройни интеграли** 371
§ 1. Тройни интеграли 371
§ 2. Пресмятане на тройни интеграли 374
§ 3. Смяна на променливите при тройни интеграли 376
§ 4. Формули на Грин, Остроградски и Стокс 380
Общи задачи 387

Част III

Приложения

Глава I. **Приложения към геометрията** 395
§ 1. Тангента и нормала 395
§ 2. Дължина на тангента, нормала, субтангента и субнормала 399
§ 3. Директорни косинуси на тангентата и нормалата 401
§ 4. Асимптоти 402
§ 5. Обвивки 404
§ 6. Център на кривината, радиус на кривината, кривина, еволюта, еволвента 406
§ 7. Особени точки на алгебричните криви 411
Задачи 417

Глава II. **Диференциални уравнения** 418
§ 1. Дефиниции 418
§ 2. Уравнение, в което променливите се отделят 419
§ 3. Хомогенни диференциални уравнения 421
§ 4. Линейни диференциални уравнения 422
§ 5. Уравнение на Бернули 423
§ 6. Уравнение на Рикати 424
§ 7. Уравнение на Лагранж 424
§ 8. Уравнение на Клеро 427
§ 9. Интегриращ множител 430
§ 10. Съществуване и единственост на решенията на линейните диференциални уравнения от n-ти ред при дадени начални условия 432
§ 11. Фундаментална система на едно линейно диференциално уравнение от n-ти ред 436
§ 12. Линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти 439
Използувана литература 443

Ярослав Александров Тагамлицки

ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ

Шесто издание

Художествен редактор Светлозар Писаров
Технически редактор Стела Петрова
Коректор Бянка Василева

Дадена за набор на 26. VIII. 1977 г. Подписана за печат на 10. II. 1978 г. Излязла от печат на 28. II. 1978 г. Формат 16/60/90 Печатни коли 28 Издателски коли 28 Издателски № 23723 Литературна група I-4 Тираж 8076

Цена 1,68 лв. КОД 02 9534Е 71511 / 4790-96-78

ДИ „Наука и изкуство"
ДП „Тодор Димитров" кл. Лозенец