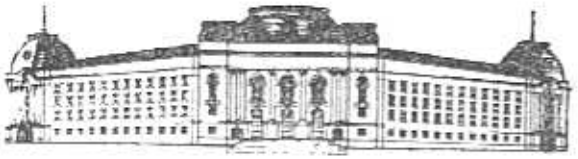


СЪВМЕСТНО ИЗДАНИЕ
МЕЖДУ
МОСКОВСКИ ДЪРЖАВЕН УНИВЕРСИТЕТ
„М. В. ЛОМОНОСОВ"
И СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ",
НАПИСАНО ПО ЕДИННА ПРОГРАМА
ЗА ОБУЧЕНИЕТО НА СТУДЕНТИТЕ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ
ЗА СПЕЦИАЛНОСТИТЕ
МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА
И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА

Владимир Александрович Илин
Виктор Антонович Садовничи
Благовест Христов Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

ПЪРВА ЧАСТ

Под редакцията на
академик А. Н. Тихонов

Второ преработено
издание

НАУКА И ИЗКУСТВО
1984
СОФИЯ

Владимир Бабев

Индекс 51

Книгата представлява учебник по математически анализ по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за първата година на обучение на студентите по специалностите „математика", „механика" и „приложна математика". В нея са включени теория на реалните числа, теория на границите, непрекъснатост на функции, диференциално и интегрално смятане на функции на една променлива и техните приложения, диференциално смятане на функции на повече променливи и теория на неявните функции (както в евклидови, така и в нормирани пространства).

Учебникът съдържа три ясно отделени нива на изложение: елементарно, основно и повишено. Елементарното ниво съответствува на програмата за техническите вузове със задълбочено изучаване на математика; основното ниво отговаря на програмата за специалностите „приложна математика" и „физика" в университетите; повишеното ниво включва допълнителен материал, който обикновено се изучава в механо-математическите факултети на университетите.

В предлагания „Математически анализ" са намерили голямо отражение порасналата роля на числените методи и приложението на математическия анализ за тяхното развитие.

©
ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ИЛИН
ВИКТОР АНТОНОВИЧ САДОВНИЧИ
ВЛАГОВЕСТ ХРИСТОВ СЕНДОВ
1979, 1984
C/O JUSAUTOR, SOFIA

Съдържание

Предговор към второто издание — 13
Предговор към първото издание — 14
Увод — 17

1. Увод в математическия анализ

2. Теория на реалните числа

2.1. Множеството на числата, представими с безкрайни десетични дроби и неговата наредба — 38
2.1.1. Свойства на рационалните числа 38. 2.1.2. Недостатъчност на рационалните числа за измерване на отсечки от числовата ос 40. 2.1.3. Наредба на множеството на безкрайните десетични дроби 43.

2.2. Множества от реални числа, ограничени отгоре или отдолу. Съществуване на точни граници — 48
2.2.1. Основни определения 48. 2.2.2. Съществуване на точни граници 50.

2.3. Приближаване на реалните числа с рационални — 52

2.4. Операции събиране и умножение на реални числа — 54
2.4.1. Дефиниране на операциите. Точно описание на понятието реално число 54. 2.4.2. Съществуване и единственост на сумата и произведението на реални числа 56.

2.5. Свойства на реалните числа — 58
2.5.1. Основни свойства на реалните числа 58. 2.5.2. Две важни съотношения 60. 2.5.3. Някои конкретни множества от реални числа 60.

2.6. Допълнителни въпроси от теорията на реалните числа — 62
2.6.1. Пълнота на множеството от реални числа 62. 2.6.2. Аксиоматично въвеждане на множеството на реалните числа 66. 2.6.3. Доказателство на теоремата за изоморфизъм 66.

2.7. Елементи на теорията на множествата — 70
2.7.1. Изброими и неизброими множества. Неизброимост на сегмента [0,1]. Мощност на множество 70. 2.7.2. Наредба. Частична наредба. Лема на Цорн 74.

3. Теория на границите

3.1. Редица. Граница на редица — 77
3.1.1. Редица. Аритметични операции с редици 77. 3.1.2. Ограничени, неограничени, безкрайно малки и безкрайно големи редици 78. 3.1.3. Основни свойства на безкрайно малките редици 81. 3.1.4. Сходящи редици. Свойства 83.

3.2. Монотонни редици — 89
3.2.1. Понятието монотонна редица 89. 3.2.2. Теорема за сходимост на монотонна ограничена редица 90. 3.2.3. Числото e 92. 3.2.4. Други примери на сходящи, монотонни редици 94.

3.3. Произволни редици — 95
3.3.1. Точка на сгъстяване. Горна и долна точка на сгъстяване на редица 95. 3.3.2. Разширяване на понятието точка на сгъстяване 102. 3.3.3. Критерий на Коши за сходимост на редица 104.

3.4. Граница на функция — 108
3.4.1. Понятие за променлива величина и функция 108. 3.4.2. Граница на функция по Хайне и по Коши 111. 3.4.3. Критерий на Коши за съществуване на граница на функция 117. 3.4.4. Аритметични действия с функции, имащи граница 119. 3.4.5. Безкрайно малки и безкрайно големи функции 121.

3.5. По-общо определение за граница на функция по база — 123

4. Непрекъснатост на функция

4.1. Понятие за непрекъснатост на функция — 128
4.1.1. Определение за непрекъснатост на функция 128. 4.1.2. Аритметични операции с непрекъснати функции 132. 4.1.3. Сложна функция. Непрекъснатост 132.

4.2. Свойства на монотонните функции — 133
4.2.1. Монотонни функции 133. 4.2.2. Понятието обратна функция 134.

4.3. Основни елементарни функции — 139
4.3.1. Показателна функция 139. 4.3.2. Логаритмична функция 145. 4.3.3. Степенна функция 146. 4.3.4. Тригонометрични функции 148. 4.3.5. Обратни тригонометрични функции 154. 4.3.6. Хиперболични функции 156. — 156

4.4. Две забележителни граници — 157
4.4.1. Първа забележителна граница 157. 4.4.2. Втора забележителна граница 158.

4.5. Точки на прекъсване на функция и тяхната класификация — 161
4.5.1. Класификация на точките на прекъсване на функция 161. 4.5.2. За точките на прекъсване на монотонна функция 163.

4.6. Локални и глобални свойства на непрекъснатите функции — 164
4.6.1. Локални свойства на непрекъснати функции 165. 4.6.2. Глобални свойства на непрекъснати функции 167. 4.6.3. Понятие за равномерна непрекъснатост на функция 173. 4.6.4. Модул на непрекъснатост на функция 177.

4.7. Понятието компактност на множество — 179
4.7.1. Отворени и затворени множества 179. 4.7.2. Покритие на множество със система от отворени множества 180. 4.7.3. Понятието компактност на множество 182.

4.8. Горна и долна функция на Бер — 183

5. Диференциално смятане

5.1. Понятие за производна — 186
5.1.1. Нарастване на функция. Диференчна форма на условието за непрекъснатост 186. 5.1.2. Определение на производна 187. 5.1.3. Геометричен смисъл на производната 189.

5.2. Понятие за диференцируемост на функция — 190
5.2.1. Определение за диференцируемост на функция 190. 5.2.2. Диференцируемост и непрекъснатост 192. 5.2.3. Понятие за диференциал на функция 192.

5.3. Диференциране на сложна функция и обратна функция — 194
5.3.1. Диференциране на сложна функция 194. 5.3.2. Диференциране на обратна функция 196. 5.3.3. Инвариантност на формата на първия диференциал 197. 5.3.4. Приложение на диференциала за намиране на приближени формули 198.

5.4. Диференциране на сума, разлика, произведение и частно на функции — 199

5.5. Производни на основните елементарни функции — 201
5.5.1. Производни на тригонометричните функции 202. 5.5.2. Производна на логаритмичната функция 203. 5.5.3. Производни на показателната и обратните тригонометрични функции 204. 5.5.4. Производна на степенната функция 206. 5.5.5. Таблица за производните на основните елементарни функции 206. 5.5.6. Таблица за диференциалите на основните елементарни функции 207. 5.5.7. Логаритмична производна. Производна на степенно-показателната функция 208.

5.6. Производни и диференциали от по-висок ред — 209
5.6.1. Понятие за производна от n-ти ред 209. 5.6.2. n-ти производни на някои функции 210. 5.6.3. Формула на Лайбниц за n-тата производна на произведение от две функции 212. 5.6.4. Диференциали от по-висок ред 214.

6. Основни теореми за диференцируемите функции

6.1. Нарастване (намаляване) на функция в точка. Локален екстремум — 217

6.2. Теорема за анулиране на производната — 220

6.3. Формула за крайните нараствания (формула на Лагранж) — 221

6.4. Някои следствия от формулата на Лагранж — 222
6.4.1. Константност на функция, която има нулева производна в даден интервал 222. 6.4.2. Условия за монотонност на функция в интервал 223. 6.4.3. Липса на прекъсвания от първи род и отстранимите прекъсвания на производната 225. 6.4.4. Извеждане на някои неравенства 226.

6.5. Обобщение на формулата за крайните нарастванія (формула на Коши) — 227

6.6. Разкриване на неопределености (правило на Лопитал) — 228
6.6.1. Разкриване на неопределеност от вида 0/0 **228**. 6.6.2. Разкриване на неопределеност от вида ∞/∞ **232**. 6.6.3. Разкриване на други видове неопределености **235**.

6.7. Формула на Тейлор — 236

6.8. Различни форми на остатъчния член. Формула на Маклорен — 239
6.8.1. Остатъчният член във форма на Лагранж, Коши и Пеано **239**. 6.8.2. Друго записване на формулата на Тейлор **242**. 6.8.3. Формула на Маклорен **242**.

6.9. Оценка на остатъчния член. Разлагания на някои елементарни функции — 243
6.9.1. Оценка на остатъчния член за произволна функция **243**. 6.9.2. Разлагане по формулата на Маклорен на някои елементарни функции **243**.

6.10. Примери за приложения на формулата на Маклорен — 246
6.10.1. Пресмятане на числото *e* на АСМ **246**. 6.10.2. Доказателство за ирационалността на числото *e* **247**. 6.10.3. Пресмятане стойностите на тригонометричните функции **247**. 6.10.4. Пресмятане стойностите на логаритмичната функция **248**. 6.10.5. Пресмятане стойностите на обратните тригонометрични функции **250**. 6.10.6. Асимптотична оценка на елементарните функции и пресмятане на граници **251**.

7. Изследване графиката на функция и намиране на екстремални стойности

7.1. Стационарни точки — 254
7.1.1. Признаци за монотонност на функция **254**. 7.1.2. Намиране на стационарни точки **254**. 7.1.3. Първо достатъчно условие за екстремум **255**. 7.1.4. Второ достатъчно условие за екстремум **257**. 7.1.5. Трето достатъчно условие за екстремум **259**. 7.1.6. Екстремум на функция, която не е диференцируема в дадена точка **260**. 7.1.7. Обща схема за намиране на екстремум **262**.

7.2. Изпъкналост на графиката на функция — 263

7.3. Точки на инфлексия — 265
7.3.1. Определение на инфлексна точка. Необходимо условие за инфлексия **265**. 7.3.2. Първо достатъчно условие за инфлексия **268**. 7.3.3. Някои обобщения на първото достатъчно условие за инфлексия **268**. 7.3.4. Второ достатъчно условие за инфлексия **269**. 7.3.5. Трето достатъчно условие за инфлексия **270**.

7.4. Асимптоти на графиката на функция — 271

7.5. Построяване на графиката на функция — 273

7.6. Глобален максимум и глобален минимум на функция в сегмент. Граничен (контурен) екстремум — 276
7.6.1. Определяне на максималната и минималната стойност на функция, дефинирана в сегмент **276**. 7.6.2. Граничен (контурен) екстремум **278**. 7.6.3. Теорема на Дарбу **279**.

Допълнение към глава 7. Алгоритъм за намиране на екстремалните стойности на функция, използващ само стойностите на тази функция — 280

8. Примитивна функция и неопределен интеграл

8.1. Понятие за примитивна функция и неопределен интеграл — 283
8.1.1. Понятие за примитивна функция **283**. 8.1.2. Неопределен интеграл **284**. 8.1.3. Основни свойства на неопределения интеграл **285**. 8.1.4. Таблица на основните неопределени интеграли **286**.

8.2. Основни методи за интегриране — 289
8.2.1. Интегриране чрез смяна на променливата (субституция) **289**. 8.2.2. Интегриране по части **292**.

8.3. Класове от функции, интегруеми в елементарни функции — 295
8.3.1. Кратки сведения за комплексните числа **296**. 8.3.2. Кратки сведения за корените (нулите) на алгебричните полиноми **299**. 8.3.3. Разлагане на алгебрични полиноми с реални коефициенти на произведение от неразложими множители **302**. 8.3.4. Разлагане на правилна рационална дроб на сума от елементарни дроби **303**. 8.3.5. Интегруемост на рационалните дроби и елементарни функции **307**. 8.3.6. Интегруемост в елементарни функции на някои тригонометрични и ирационални изрази **310**. 8.3.7. Интегриране на диференциален бином **315**.

8.4. Елиптични интеграли — 317

9. Определен интеграл на Риман

9.1. Определение на интеграл. Интегруемост — 319

9.2. Голяма и малка сума и техните свойства — 323
9.2.1. Определение на голяма и малка сума **322**. 9.2.2. Основни свойства на големите и малките суми **324**.

9.3. Теореми за необходими и достатъчни условия за интегруемост на функции. Класове интегруеми функции — 328
9.3.1. Необходими и достатъчни условия за интегруемост **329**. 9.3.2. Класове интегруеми функции **330**.

9.4. Свойства на определения интеграл — 336
9.4.1. Свойства на интеграла **336**. 9.4.2. Оценки за интегралите **339**.

9.5. Примитивна на непрекъснатата функция. Правила за интегриране на функции — 346
9.5.1. Примитивна **347**. 9.5.2. Основна формула на интегралното смятане **349**. 9.5.3. Важни правила за пресмятане на определени интеграли **350**. 9.5.4. Остатъчният член на формулата на Тейлор в интегрална форма **351**.

9.6. Неравенства за суми и интеграли — 354
9.6.1. Неравенство на Юнг **354**. 9.6.2. Неравенство на Хьолдер за суми **355**. 9.6.3. Неравенство на Минковски за суми **356**. 9.6.4. Неравенство на Хьолдер за интеграли **356**. 9.6.5. Неравенство на Минковски за интеграли **357**.

9.7. Критерий на Лебег за интегруемост на функция върху сегмент — 358
9.7.1. Множество с мярка нула и с жорданова мярка нула 358. 9.7.2. Осцилация на функция в точка. Изследване на множеството от точки на прекъсване на функция 362. 9.7.3. Критерий за интегруемост на функция 364.

9.8. Несобствени интеграли — 367
9.8.1. Понятие за несобствен интеграл от първи род 367. 9.8.2. Критерий на Коши за сходимост на несобствени интеграли от първи род. Достатъчни условия за сходимост 370. 9.8.3. Абсолютна и условна сходимост на несобствените интеграли 373. 9.8.4. Смяна на променливите под знака на несобствен интеграл и формула за интегриране по части 375. 9.8.5. Несобствени интеграли от втори род 377.

9.9. Главна стойност на несобствен интеграл — 380

9.10. Интеграл на Стилтес — 382
9.10.1. Дефиниция на интеграл на Стилтес и условия за неговото съществуване 382. 9.10.2. Свойства на интеграла на Стилтес 386.

10. Геометрични приложения на определения интеграл

10.1. Дължина на дъга на крива — 389
10.1.1. Понятие за проста крива 389. 10.1.2. Понятие за параметризуема крива 390. 10.1.3. Дължина на дъга на крива. Понятие за ректифицируема крива 392. 10.1.4. Критерии за ректифицируемост на крива. Пресмятане дължината на дъга на крива 395. 10.1.5. Диференциал на дъга 400.

10.2. Лице на равнинна фигура — 402
10.2.1. Понятие за контур на множество и равнинна фигура 402. 10.2.2. Лице на равнинна фигура 403. 10.2.3. Лице на криволинеен трапец и криволинеен сектор 410.

10.3. Обем на тяло в пространството — 414
10.3.1. Обем на тяло 415. 10.3.2. Някои класове измерими тела 416.

Допълнение към глава 10. Пример за неизмерима фигура, ограничена от неректифицируема крива — 419

11. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения и определени интеграли

11.1. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения — 425
11.1.1. Метод на „пилката" (метод на разполовяването) 425. 11.1.2. Метод на итерациите 426. 11.1.3. Методи на хордите и допирателните 429.

11.2. Приближени методи за пресмятане на определени интеграли — 434
11.2.1. Уводни бележки 434. 11.2.2. Метод на правоъгълниците 437. 11.2.3. Метод на трапеците 438. 11.2.4. Метод на параболите 441.

12. Метрични, топологични, нормирани пространства

12.1. Метрични пространства — 445
12.1.1. Определение на метрично пространство 445. 12.1.2. Отворени и затворени множества 448. 12.1.3. Декартово произведение на метрични пространства 450. 12.1.4. Навсякъде гъсти и съвършени множества 451. 12.1.5. Сходимост. Непрекъснати изображения 453. 12.1.6. Компактност 455. 12.1.7. Базис на пространство 457.

12.2. Свойства на метричните пространства — 460

12.3. Топологични пространства. Отворени и затворени множества — 467
12.3.1. Определение на топологично пространство 467. 12.3.2. Отворени и затворени множества 469.

12.4. Свойства на топологичните пространства — 471
12.4.1. Аксиоми за отделимост 471. 12.4.2. Нормални и напълно регулярни (тихоновски) пространства. Лема на Урисон 472. 12.4.3. Регулярни пространства с изброим базис. Теорема на Тихонов 473. 12.4.4. Компактни и нормални пространства 474.

12.5. Линейни нормирани пространства, линейни оператори — 475
12.5.1. Определение на линейно пространство 475. 12.5.2. Нормирани пространства. Банахови пространства 476. 12.5.3. Оператори в линейни нормирани пространства 478. 12.5.4. Пространство на операторите 480. 12.5.5. Норма на оператор 480. 12.5.6. Понятие за хилбертово пространство 482.

13. Функции на няколко променливи

13.1. Понятие за функция на m променливи — 486
13.1.1. Понятие за m-мерно координатно и m-мерно евклидово пространство 486. 13.1.2. Множество от точки в m-мерното евклидово пространство 487. 13.1.3. Понятие за функция на m променливи 491.

13.2. Граница на функция на m променливи — 493
13.2.1. Редица от точки в пространството E^m 493. 13.2.2. Свойство на ограничените редици от точки в E^m 496. 13.2.3. Граница на функция на m променливи 497. 13.2.4. Безкрайно малки функции на m променливи 499. 13.2.5. Многократна граница 499.

13.3. Непрекъснатост на функция на m променливи — 501
13.3.1. Понятие за непрекъснатост на функция на m променливи 501. 13.3.2. Непрекъснатост на функция на m променливи по една от променливите 503. 13.3.3. Основни свойства на непрекъснатите функции на няколко променливи 505.

13.4. Производни и диференциали на функция на няколко променливи — 509
13.4.1. Частни производни на функции на няколко променливи 509. 13.4.2. Диференцируемост на функция на няколко променливи 510. 13.4.3. Геометричен смисъл на условието за диференцируемост на функция на две променливи 513. 13.4.4. Достатъчни условия за диференцируемост 515. 13.4.5. Диференциал на функция на няколко променливи 516. 13.4.6. Диференциране на сложна функция 517.

13.4.7. Инвариантност на формата на първия диференциал 520. 13.4.8. Производна по посока. Градиент 522.

13.5. Частни производни и диференциали от по-висок ред — 525

13.5.1. Частни производни от по-висок ред 525. 13.5.2. Диференциали от по-висок ред 531. 13.5.3. Формула на Тейлор с остатъчен член във форма на Лагранж и в интегрална форма 536. 13.5.4. Формула на Тейлор с остатъчен член във форма на Пеано 539.

13.6. Локален екстремум на функция на m променливи — 543

13.6.1. Понятие за екстремум на функция на m променливи. Необходими условия за екстремум 543. 13.6.2. Достатъчни условия за локален екстремум на функция на m променливи 545. 13.6.3. Случай на функции на две променливи 552.

13.7. Диференциално смятане в линейни нормирани пространства — 554

13.7.1. Понятие за диференцируемост. Силна и слаба диференцируемост в линейни нормирани пространства 555. 13.7.2. Формула на Лагранж за крайните нараствания 558. 13.7.3. Връзка между слаба и силна диференцируемост 561. 13.7.4. Диференцируемост на функционали 562. 13.7.5. Производни от втори ред 563.

13.8. Изследване на екстремуми на функционали в нормирани пространства — 563

13.8.1. Необходимо условие за екстремум 564.

14. Неявни функции

14.1. Съществуване и диференцируемост на неявно зададена функция — 569

14.1.1. Теорема за съществуване и диференцируемост на неявна функция 569. 14.1.2. Пресмятане на частните производни на функция, зададена неявно 574. 14.1.3. Особени точки на повърхнина и равнинна крива 576.

14.2. Неявни функции, определени от система функционални уравнения 578

14.2.1. Теорема за решимост на система функционални уравнения 578. 14.2.2. Пресмятане на частните производнина функции, неявно определени посредством система функционални уравнения 584. 14.2.3. Взаимно еднозначно изображение на две множества от m-мерното пространство 584.

14.3. Зависимост на функции — 586

14.3.1. Понятие за зависимост на функции. Достатъчно условие за независимост 586. 14.3.2. Функционални матрици и тяхното приложение 588.

14.4. Условен екстремум — 592

14.4.1. Понятие за условен екстремум 592. 14.4.2. Метод на неопределените множители на Лагранж 596. 14.4.3. Достатъчни условия 597. 14.4.4. Кривина на равнинна крива. Еволюта и еволвента 599. 14.4.5. Смяна на променливите 603.

Азбучен указател — 606

Предговор
към второто издание

Второто издание на учебника не се различава много от първото издание. Съкратени са няколко параграфа, главно от третото равнище. Усъвършенствувани са някои доказателства и са направени редица редакционни изменения. Отстранени са печатните грешки забелязани в първото издание.

В това издание са рационализирани означенията и е използван знакът □ за край на доказателството.

АВТОРИТЕ

Предговор
към първото издание

Днешният прогрес в математиката до голяма степен е свързан с развитието на електронната изчислителна техника. Математическите методи за изследване проникват във всички области на човешката дейност. Всичко това повишава интереса към математиката от страна на другите науки, използващи в различна степен математическите знания, и поставя нови задачи пред самата математика.

Във връзка с това възниква необходимостта да се напише учебник по математически анализ, в който са взети пред вид тези закономерности.

Обстоятелството, че решаването на математическите задачи се реализира чрез автоматични сметачни машини (АСМ) с помощта на алгоритми, поставя повишени изисквания за точност в алгоритмичното ниво на изложение на математическите дисциплини. Разбира се, едно такова изложение трябва да се основава върху класическите концепции на математиката, без да ги замъглява. Тези общи принципи заедно със задачата за точно, ясно и достъпно изложение са заложени в предлаганата на читателя книга. Тя е написана в съответствие със съгласуваната между Московския и Софийския университет програма за преподаване на математически анализ първа част.

В предлагания учебник е отделено голямо внимание на въпросите за оптимизиране, които играят важна роля в математиката и нейните приложения. По-специално в него за първи път в учебната литература от този род е изложен в завършен вид алгоритъм за намиране както на вътрешен, така и на контурен екстремум на функция. В учебника е отделено значително място за изучаване на въпроса за изходната информация, която е достъпна при решаването на дадена задача. Така например за намиране екстремума на

функция на една променлива авторите предлагат алгоритъм, основан само на информацията за стойностите на функцията в точките от дефиниционната ѝ област. Предлаганият алгоритъм не използва стойностите на производната на функцията в дефиниционната ѝ област и е приложим за намиране на екстремум на недиференцируеми функции. Тази постановка е типична при решаване на задачи за оптимизиране на производствени процеси.

При избора на метода на изложение авторите са се ръководили от това, че подборът на алгоритъма за решаване на дадена задача зависи от информацията, която може да бъде използвана при поставянето на тази задача. Така например при въвеждането на понятието определен интеграл на Риман авторите тръгват от концепция, основаваща се на използване стойностите на функцията в точки от сегмента. Тази концепция е очевидно за предпочитане в сравнение с въвеждането на определен интеграл на Риман с помощта на примитивна функция, тъй като тя отговаря на идеите на числените методи за пресмятане на определени интеграли чрез използване на АСМ.

В заключение искам да изкажа увереност, че предлаганата книга ще способствува за повишаване на математическата култура на читатели с различни изисквания към обема на математическите знания.

АКАД. А. Н. ТИХОНОВ

Увод

Тази книга е учебник по математически анализ, написана по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за първата година на обучение. Тя напълно обхваща материала за първата година на обучение, предвиден в програмата за студенти от университетите на СССР и НРБ по специалностите „математика" „механика" и „приложна математика".

Особеност на книгата е, че тя съдържа три ясно отделими едно от друго нива на изложение: елементарно, основно и по-„вишено, като за разбирането на материала от елементарното ниво не се изисква да се чете материалът от основното и повишеното ниво, а за разбиране на материала от основното ниво не се изисква да се чете материалът от повишеното ниво.

Елементарното ниво отговаря на програмите за техническите ВУЗ-ове в СССР с по-ниско изучаване на математически анализ; основното ниво на изложение отговаря на програмите за специалностите „приложна математика" и „физика" на университетите в СССР и България; материалът от повишеното ниво допълва материала от основното ниво с раздели, които обикновено се изучават в механо-математическите факултети на университетите.

Текстът, отделен в книгата с две вертикални черти, се отнася към повишеното ниво на изложение; текстът, отделен с една вертикална черта — към основното ниво, а останалият текст с съдържанието на елементарното ниво на изложение.

Книгата съдържа уводна глава, в която се илюстрира възникването на основните понятия в математическия анализ с цел да се улесни възприемането на следващия материал.

В нея е отразена нарасналата роля на числените методи и

са поместени редица примери за приложение на апарата на математическия анализ при пресмятане стойностите на елементарни функции, интеграли, корени на уравнения и намиране на екстремални точки.

Днес в СССР и у нас има много учебници по математически анализ, сред които особено сполучливи по наше мнение са учебниците, написани от Л. Д. Кудрявцев и С. М. Николски в СССР и от Я. Тагамлицки в НР България. Авторите на тази книга несъмнено са изпитали влиянието на тези прекрасни учебници. При написването на текста те са използвали и някои материали от книгата на В. А. Илин и Е. Г. Позняк „Основи на математическия анализ", а също така опита от преподаването в университетите.

Авторите изказват дълбока благодарност на главния редактор на тази книга акад. А. Н. Тихонов за многобройните ценни съвети и забележки.

С особена благодарност те отбелязват труда на В. М. Говоров и Г. Христов, който далеч надхвърли рамките на обикновеното редактиране.

Авторите са благодарни също за ценните бележки на Л. Д. Кудрявцев, И. И. Ляшко, В. Л. Макарова, Д. Дойчинов и Т. Боянов.

1. Увод в математическия анализ

Ще започнем нашето изложение с изясняване на кръга от понятия и проблеми, които предстои да срещнем при изучаването на математическия анализ. При това веднага трябва да се уговорим, че дадените в тази уводна глава формулировки често имат предварителен характер и изискват допълнително уточняване.

1. Да разгледаме най-простия вид движение — движението на материална точка по права линия, и да изясним какви математически понятия възникват при описването на такова движение.

Да предположим, че материалната точка се движи по оста Oy, а x е времето, отчитано от даден начален момент. За характеризиране на това движение трябва да се знае правилото, посредством което на всеки момент от време x се съпоставя координата y на движещата се точка. Такова правило се нарича *закон на движение*.

Като се абстрахираме от физическия смисъл на променливите x и y, идваме до понятието функция, което е вече известно от курса по математика в средните училища. Това е едно от най-важните понятия в цялата математика.

Ако по някакво правило на всяка стойност на една променлива x се съпоставя определена стойност $f(x)$ на друга променлива y, казваме, че променливата y е функция на променливата x, и пишем $y=y(x)$ или $y=f(x)$.

При това променливата x се нарича ***аргумент*** *или* ***независима променлива,*** *а променливата y —* ***функция*** *или* ***зависима променлива.***

Буквата f в записа $y=f(x)$ често се нарича ***характеристика*** *на разглежданата функция, а стойността $f(x)$, отговаряща на дадена фиксирана стойност на x, се нарича* ***частна стойност*** *или просто* ***стойност на функцията в точката*** *x.*

Ще отбележим веднага, че дадената формулировка на понятието функция се нуждае от уточняване, тъй като в нея нищо не се казва за това, от какво множество се вземат стойностите на независимата променлива x.

Множеството, от което се вземат стойностите на независимата променлива x, се нарича обикновено ***дефиниционна област на функцията.*** Задаването на дефиниционните области на функциите изисква развиването на теорията на числовите множества и общата теория на множествата.*

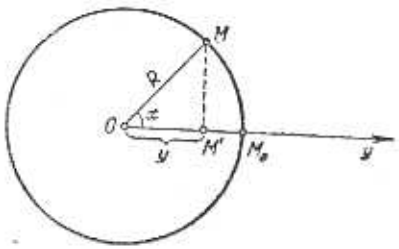
За означаване на аргумента, функцията и нейната характеристика могат да се използват различни букви. Така например записът $\alpha = \varphi(t)$ означава, че променливата α е функция на аргумента t, при това характеристиката на тази функция е означена с φ.

2. Често се налага да се разглежда такава функция $y = f(x)$, аргументът x на която е също функция $x = \varphi(t)$ на друга променлива t. В такъв случай се казва, че променливата y е ***сложна функция*** на аргумента t, а променливата x се нарича ***междинен аргумент.*** Такава сложна функция се нарича още ***суперпозиция*** на функциите f и φ и се означава с $y = f(\varphi(t))$.

Ще разгледаме един прост пример, илюстриращ използването на понятието сложна функция. Нека материалната точка M се върти равномерно по окръжност с радиус R с постоянна ъглова скорост ω. Ще намерим закона на движението на проекцията M' на точката M върху оста Oy, минаваща през центъра O на окръжността и лежаща в нейната равнина (фиг. 1.1). Естествено е да предполагаме, че в началния момент $t=0$ движещата се точка M се намира в точката M_0, която е пресечна точка на окръжността с оста Oy. Да означим с y координатата на проекцията M' на точката M върху оста Oy, а с x — ъгъла M_0OM, на който се завърта точката M за време t. Очевидно $y = R\cos x$, $x = \omega t$ и ще получим, че координатата y на проекцията M' е сложна функция на времето t от вида $y = R\cos x$, където $x = \omega t$. Тази сложна функция може да се запише във вида $y = R\cos\omega t$. Ще отбележим, че движението по закона $y = R\cos\omega t$ е прието да се нарича в механиката ***хармонично трептене.***

3. Важна характеристика на движението на материална точка е нейната скорост във всеки момент от времето t (моментна скорост). Ако материална точка се движи по оста Oy по закона $y = f(x)$, то като фиксираме произволен момент от време x и вземем някакво нарастване на времето Δx, можем да твърдим, че в

* В зависимост от характера на дефиниционната област на функцията и от множеството на стойностите ѝ в различните раздели на анализа функциите се наричат още ***изображения, оператори, функционали*** и т. н. Едно изображение се нарича ***взаимно еднозначно*** или ***1,1-значно,*** ако при него всяко y съответствува само на едно x. При взаимно еднозначните изображения съществува ***обратно изображение,*** съпоставящо на всяко y определено x (именно това, което съответствува на даденото y при изходното изображение).



Фиг. 1.1

момента x движещата се точка има координата $f(x)$, а в момента $x + \Delta x$ — координата $f(x + \Delta x)$.

По такъв начин числото $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ представлява пътят, изминат от движещата се точка за интервала време от x до $x + \Delta x$.

Оттук следва, че частното

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{1.1}$$

наричано ***диференчно частно,*** представлява ***средна скорост*** на движещата се точка за интервала време от x до $x + \Delta x$.

Моментна скорост (или просто ***скорост***) *на движещата се точка се нарича границата, към която клони средната скорост* (1.1), *когато интервалът от време* Δx *клони към нула.*

Ако се използва символът за граница, моментната скорост $v(x)$ в момента x се записва така:

$$v(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.2}$$

Физическото понятие за моментна скорост води до основното математическо понятие производна. Като се абстрахираме от механичния смисъл на разглежданата по-горе функция f, *ще наречем производна на произволна функция* f *в дадена фиксирана точка* x *границата в дясната страна на* (1.2) (*разбира се, при условие, че тази граница съществува*).

За означаване на производната на функцията f в точката x се използва символът $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операцията намиране на производна се нарича **диференциране**

Горните разглеждания показват, че при дефиниране на производна на функция основна роля играе понятието граница на функция.

Предварителна представа за понятието граница на функция (а и за понятието производна) се дава в курса по математика в средното училище.

Строгото и последователно изучаване на понятието граница е възможно само на основата на строго изградена теория на реалните числа. Така например без строго изградена теория на реалните числа е невъзможно да се установи съществуването на следните две важни граници:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \quad \text{и} \quad \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t},$$

които възникват, както ще видим по-нататък, при пресмятане производните на функциите $y=\sin x$ и $y=\log_a x$.

Горните разглеждания показват, че въпросът за съществуване и пресмятане на производни води до необходимостта от изграждане на строга теория на реалните числа и на тази основа — теория на границите.

4. Ще пристъпим към намирането на производните на две конкретни елементарни функции $y=\sin x$ и $y=\log_a x$ и ще изясним какви математически проблеми възникват при това.

Най-напред ще намерим производната на функцията $y=\sin x$ в произволна фиксирана точка x. За тази функция диференчното частно (1.1) има вида

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\cdot\cos(x+\Delta x/2).$$

Така производната на функцията $y=\sin x$ в точката x е равна по определение на границата

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\cdot\cos(x+\Delta x/2)\right\} \tag{1.3}$$

(при условие, че тя съществува).

Може да се очаква, че

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x. \tag{1.4}$$

Ще отбележим обаче, че не за всяка функция f е изпълнено равенството

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x/2)=f(x). \tag{1.5}$$

Функцията f, за която е изпълнено равенството (1.5), *се нарича* ***непрекъсната*** (в точката x). Понятието непрекъснатост на функция е едно от най-важните математически понятия и ще бъде основно изучено в този курс по математически анализ. В частност ще бъде доказано, че функцията $y=\cos x$ е непрекъсната във всяка точка x, т. е. във всяка точка x е изпълнено равенството (1.4).

За пресмятането на границата (1.3) не е достатъчно да се докаже само верността на (1.4). Необходимо е още да се пресметне и границата

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \quad (t=\Delta x/2). \tag{1.6}$$

По-нататък ще докажем, че границата (1.6), наричана ***първа забележителна граница***, съществува и е равна на единица.

Само след като установим непрекъснатостта на функцията $y=\cos x$ (т. е. равенство (1.4)) и пресметнем първата забележителна граница (1.6), можем да твърдим, че границата (1.3) съществува и е равна на $\cos x$ или че производната на функцията $y=\sin x$ съществува и е равна на $\cos x$.

Ще минем сега към пресмятане на производната на функцията $y=\log_a x$, считайки, че $0<a\neq 1$, като ще фиксираме произволна точка $x>0$. За тази функция диференчното частно (1.1) е

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

($\Delta x\neq 0$ и се избира така, че $x+\Delta x>0$). Производната на функцията $y=\log_a x$ във всяка точка $x>0$ е равна по определение на границата

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} \tag{1.7}$$

(при условие, че тази граница съществува). Да преобразуваме дробта (1.7) чрез следните операции: 1) заменяме разликата от логаритми с логаритъм на частно; 2) умножаваме и разделяме на една и съща величина $x>0$); 3) внасяме множителя, стоящ пред логаритъма, под знака на логаритъма, с което той става степенен показател. В резултат за границата (1.7) получаваме

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right\}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right\}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right\}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{x}\log_a(1+t)^{1/t}\right\}\\&\qquad(t=\Delta x/x\to 0).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Да разгледаме отделно границата на израза $(1+t)^{1/t}$ при $t\to 0$:

$$\lim_{t\to 0}[(1+t)^{1/t}]. \tag{1.9}$$

Тази граница се нарича ***втора забележителна граница.*** В този курс ще бъде доказано, че тази граница съществува и че тя е равна на ирационалното число e, което с точност до петнадесетия знак след десетичната запетая е

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

Освен това ще бъде доказана непрекъснатостта на функцията $y = \log_a x$ във всяка точка $x > 0$ и по-специално в точката $x = e$. Но тогава от съществуването на граница (1.9), равна на e, следва, че

$$\lim_{t\to 0} \log_a [(1+t)^{1/t}] = \log_a e.$$

Последното равенство и равенството (1.8) ни позволяват да твърдим, че границата на (1.7) е

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\log_a (x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

След като бъде пресметната втората забележителна граница и установена непрекъснатостта на функцията $y = \log_a x$ в точката e, ще можем да твърдим, че логаритмичната функция има производна и

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e \text{ при } 0<a\neq 1,\ x>0.$$

5. В математиката освен разгледаните две функции $y=\sin x$ и $y=\log_a x$ се изучават още и следните функции: $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y = x^\alpha$ (α — реално число), $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$. *Тези функции е прието да се наричат* ***основни елементарни функции.***

Забележително е, че при пресмятането на производните на основните елементарни функции не възникват никакви други трудности освен тези, които срещнахме при пресмятането на производните на функциите $y=\sin x$ и $y=\log_a x$. За пресмятане на производните на основните елементарни функции са необходими само аритметичните свойства на операцията граничен преход, двете забележителни граници и непрекъснатостта на всяка от тези функции.

Таблицата на производните на всички основни елементарни функции е следната:

1°. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x>0,\ \alpha$ — реално число$)$.

2°. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$ $(0<a\neq 1,\ x>0)$,

при $a=e$ имаме $(\log_e x)' = \frac{1}{x}$.

3°. $(a^x)' = a^x \log_e a$ $(0<a\neq 1)$,

при $a=e$ имаме $(e^x)' = e^x$.

4°. $(\sin x)' = \cos x$.

5°. $(\cos x)' = -\sin x$.

6°. $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$ $(x \neq \pi/2 + n\pi$, където $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7°. $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$ $(x \neq n\pi$, където $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

8°. $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ $(|x|<1)$.

9°. $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$ $(|x|<1)$.

10°. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = 1/(1+x^2)$.

11°. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -1/(1+x^2)$.

Обосновка на горната таблица е една от задачите на тази част от математическия анализ, която се нарича ***диференциално смятане.***

Традиционната задача на класическото диференциално смятане е пресмятането на производната на всяка функция f, която се получава от изброените по-горе основни елементарни функции чрез краен брой суперпозиции и краен брой аритметични действия (събиране, умножение, изваждане и деление). Такава функция f е прието да се нарича ***елементарна функция.***

И така ***елементарна функция*** *се нарича такава функция, която е получена от основните елементарни функции чрез краен брой суперпозиции и четирите аритметични действия.*

Пример за елементарна функция е функцията

$$f(x) = 5^{\operatorname{arc\,tg}((x+1)/(x^2+2))}.$$

За пресмятане производната на произволна елементарна функция са необходими освен таблицата за производните на основните елементарни функции още правилата: 1) правило за диференциране на сложна функция; 2) правила за диференциране на сума, разлика, произведение и частно на функции.

Правилото за диференциране на сложна функция $y=f(u)$, където $u=\varphi(x)$, има следния вид: *ако функцията $u=\varphi(x)$ има производна в дадена точка x_0, а функцията $y=f(u)$ има производна в съответната точка $u_0=\varphi(x_0)$, то сложната функция $y=f(\varphi(x))$ има производна в точката x_0 и тази производна y' е*

$$y' = f'(\varphi(x_0)).\varphi'(x_0), \tag{1.10}$$

т. е. е равна на произведението на производната на функцията $y=f(u)$ в точката $u_0=\varphi(x_0)$ и производната на функцията $u=\varphi(x)$ в точката x_0.

Удобно е и едно друго записване на формулата (1.10), при което индексите долу показват по коя променлива се диференцира:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Верността на формулата за производна на сложна функция (1.10) лесно може да се подкрепи с интуитивни съображения, но строгото й извеждане не е лесно и ще бъде дадено в следващото изложение.

Много по-просто е да се установят правилата за диференциране на сума, разлика, произведение и частно на две функции и те са:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

(в последната формула се изисква $v(x)$ да не е нула в разглежданата точка x).

Важни задачи на диференциалното смятане са обосноваването на таблицата за производните на основните елементарни функции и на правилата за диференциране на сложна функция, на сума, разлика, произведение и частно на функции, а също така и за производна на обратна функция. Това ще ни позволи да пресмятаме производната на всяка елементарна функция f.

Оказва се, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна функция, т. е. операцията диференциране не извежда вън от класа на елементарните функции. Това обстоятелство оправдава въвеждането на класа от елементарни функции като традиционен обект на класическия анализ.

6. Да се върнем към разглежданата механична задача за движение на материална точка по права линия — оста Oy, но този път ще предположим, че за всеки момент от време x е дадена моментната скорост $f(x)$ на движещата се точка и трябва да се намери законът на движение на тази точка.

Тъй като моментната скорост $f(x)$ е производна на функцията $y=F(x)$, определяща закона на движение, то задачата се свежда до това по дадена функция f да се намери такава функция F, чиято производна F' е равна на f. Като изоставим механичния смисъл на функциите f и F, идваме до математическите понятия ***примитивна функция*** и ***неопределен интеграл***.

Примитивна функция *на функцията f се нарича такава функция F, производната F' на която е равна на f.*

Ще отбележим, че ако функцията F е примитивна на функцията f, то и функцията $F+C$, където C е произволна константа, е също примитивна на функцията f (тъй като производната на константа е равна на нула).

По-трудно се установява обратното твърдение: Всеки две примитивни на една и съща функция f в интервала (a, b) се различават само със събираемо константа. Доказателството на това твърдение е по-сложно и ще бъде проведено в следващото изложение.

Въз основа на горното твърдение можем да констатираме следното: Ако функцията F е някоя примитивна на функцията f, то всяка примитивна на функцията f има вида $F+C$, където C е константа.

Съвкупността от всички примитивни на дадена функция f се нарича ***неопределен интеграл*** *от тази функция и се означава със символа*

$$\int f(x)\,dx.$$

Следователно, ако F е една от примитивните на функцията f то неопределеният интеграл от функцията f може да се представи в следния вид:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

където C е произволна константа.

Да се върнем към поставената задача за определяне на закона за движение на материална точка по оста Oy, ако е известна моментната скорост $f(x)$ в тази точка. Сега можем да твърдим, че търсеният закон за движение се определя от функцията $y=F(x)+C$, където F е коя да е примитивна на функцията f, а C е константа.

Както виждаме, по моментната скорост законът за движение се определя неоднозначно: с точност до адитивна константа C.

За определяне на константата C трябва да се наложат допълнителни условия, например задаване на координатата y_0 на движещата се точка в даден момент от времето x_0. Като използваме това условие, ще получим $y_0 = F(x_0) + C$, откъдето $C = y_0 - F(x_0)$, така че окончателно търсеният закон на движението е

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0).$$

7. Ще разгледаме въпроса за намиране на примитивни функции и неопределени интеграли на някои елементарни функции. Тъй като

функцията $f(x) = \cos x$ е производна на $F(x) = \sin x$, то $F(x) = \sin x$ е една от примитивните на функцията $f(x) = \cos x$ и затова всяка примитивна на $f(x) = \cos x$ има вида $\sin x + C$, където C е константа, т. е.

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

Тези разсъждения имат общ характер.

Всяка формула на диференциалното смятане $F'(x) = f(x)$, която показва, че функцията f е производна на функцията F, поражда еквивалентна формула на интегралното смятане $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, т. е. неопределеният интеграл от функцията f е равен на $F + C$, където C е произволна константа.

Така от таблицата за производните на основните елементарни функции се получава следната таблица на важни неопределени интеграли:

1°. $\int x^\alpha\, dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C \qquad (\alpha \neq -1).$

2°. $\int \frac{dx}{x} = \log_e x + C \qquad (x > 0).$

3°. $\int a^x\, dx = a^x/\log_e a + C \qquad (0 < a \neq 1).$

По-специално при $a = e$ имаме $\int e^x\, dx = e^x + C.$

4°. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

5°. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

6°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ ($x \neq \pi/2 + n\pi$, където $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

7°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ ($x \neq n\pi$, където $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

8°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (|x| < 1).$

9°. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

Горната таблица ще бъде допълнена по-нататък с две важни правила за интегриране (интегриране чрез смяна на променливите, т. е. субституция, и интегриране по части).

Така се получава апарат за смятане в тази част на математическия анализ, която се нарича ***интегрално смятане***.

Трябва да отбележим, че за пресмятане на много важни неопределени интеграли този апарат е недостатъчен. Например той е недостатъчен за пресмятане на неопределения интеграл

$$\int e^{-x^2/2}\, dx, \tag{1.11}$$

който играе важна роля в теорията на вероятностите и нейните приложения.

Интегралът (1.11) е пример на интеграл от елементарна функция, който не е елементарна функция, така че *за разлика от диференцирането операцията интегриране не запазва класа на елементарните функции*. Това обстоятелство показва условността на понятието елементарна функция като традиционен обект на класическия анализ.

8. Отново ще предположим, че функцията f представлява моментната скорост на движеща се материална точка по оста Oy. Нека да пресметнем пътя, изминат от тази точка за интервала време от $x = a$ до $x = b$. За простота при разсъжденията ще предполагаме, че скоростта f е неотрицателна във всеки момент от времето x.

За решаване на поставената задача ще разделим интервала от време $[a, b]$ на малки подинтервали, ограничени от моментите $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Естествено е да считаме, че във всеки такъв малък подинтервал от x_{k-1} до x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) скоростта f се изменя малко (което е изпълнено, когато f е непрекъсната), така че можем да я приемем във всеки подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$ за константа със стойност $f(\xi_k)$, където ξ_k е някой момент от време в интервала $[x_{k-1}, x_k]$.

Следователно пътя $S[x_{k-1}, x_k]$, изминат от движещата се точка за подинтервала време от x_{k-1} до x_k, можем да считаме приближено равен на произведението $f(\xi_k)$ и дължината $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ на подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$, т. е.

$$S[x_{k-1}, x_k] \approx f(\xi_k)\, \Delta x_k.$$

Тогава пътят $S[a, b]$, изминат от материалната точка за целия интервал време от $x = a$ до $x = b$, е приближено равен на сумата

$$S[a, b] \approx f(\xi_1)\, \Delta x_1 + f(\xi_2)\, \Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\, \Delta x_n. \tag{1.12}$$

Сумата в дясната страна на (1.12) *се нарича* ***интегрална сума*** *или още* ***риманова сума.***

Естествено е да очакваме, че точната стойност на пътя $S[a, b]$ можем да получим, като преминем в интегралната сума (1.12) към

граница, оставяйки най-голямата дължина Δx_k да клони към нула (при това, разбира се, броят n на подинтервалите ще расте неограничено). Като означим с d най-голямото от числата Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и използваме означението за граница, ще получим, че

$$S[a, b] = \lim_{d \to 0} \{f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n\}. \tag{1.13}$$

Разбира се, необходимо е да се уточни какво разбираме под граница на интегралната сума в (1.13). Този път операцията граничен преход е в нова, по-сложна форма, отколкото при обикновената граница на функцията $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Точното определение и изучаване на свойствата на граница от вида (1.13) е дадено в този курс. Тук ще отбележим само, че *границата в дясната страна на* (1.13) *се нарича* ***определен интеграл*** *от функцията* $f(x)$ *в граници от* a *до* b *и се означава със символа*

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.14}$$

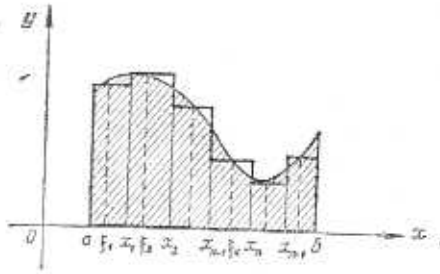
И така определеният интеграл (1.14) е точно равен на пътя $S[a, b]$, изминат от движеща се материална точка със скорост f за интервала време от $x=a$ до $x=b$.

Заедно с това е очевидно, че интегралната сума в дясната страна на (1.12) геометрично представлява сумата от лицата на правоъгълниците с основи Δx_k и височини $f(\xi_k)$. С други думи, интегралната сума в (1.12) е равна на лицето на стъпаловидната фигура, очертана на фиг. 1.2 с плътна линия. Естествено е да се очаква, че ако дължината d на най-голямото от числата Δx_k клони към нула, лицето на посочената стъпаловидна фигура ще клони към лицето на криволинейната фигура, лежаща под графиката на функцията f в интервала $a \leq x \leq b$ (на фиг. 1.2 тя е защрихована). Тази криволинейна фигура е прието да се нарича ***криволинеен трапец***.

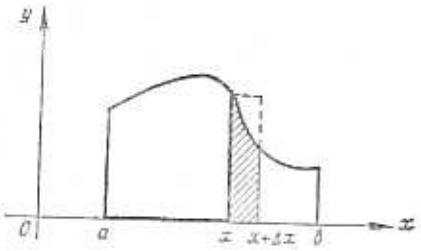
По такъв начин *определеният интеграл* (1.14) *е равен на лицето на споменатия криволинеен трапец*.

Разбира се, дадените нагледни разсъждения се нуждаят от уточнения. По-специално в системния курс по анализ подлежи на уточняване и самото понятие лице на криволинеен трапец и въобще лице на равнинна фигура.

И така горните разглеждания показват, че с понятието определен интеграл (1.14) са свързани две основни задачи: физическата задача за пресмятане дължина на път и геометричната задача за пресмятане лице на криволинеен трапец.



Фиг. 1.2



Фиг. 1.3

9. Сега ще се спрем на въпроса за връзката на определения интеграл (1.14) с въведения по-рано неопределен интеграл (или с примитивната), а също така и върху начините за пресмятане на определените интеграли.

Да означим с F определения интеграл от функцията f в граници от a до x, където a е някоя фиксирана стойност на аргумента, а x е променлива стойност. С други думи, полагаме*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{1.15}$$

От геометрична гледна точка този интеграл, както пояснихме по-горе, е равен на лицето на трапеца, лежащ под графиката на функцията f в интервала $[a, x]$. На фиг. 1.3 този криволинеен трапец е ограден с плътна линия.

Чрез нагледни геометрични съображения, ще се убедим в това, че въведената от нас функция (1.15) е една от примитивните на функцията f, т. е. че $F'(x) = f(x)$.

Нека Δx е достатъчно малко нарастване на аргумента x. Очевидно разликата $F(x + \Delta x) - F(x)$ представлява лицето на „тесния" криволинеен трапец, защрихован на фиг. 1.3. От друга страна, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка x, т. е. ако стойностите на тази функция се менят малко при малки изменения на аргумента, то лицето на „тесния" криволинеен трапец ще се отличава малко от лицето $f(x)\Delta x$ на правоъгълника с основа Δx и височина $f(x)$.

Оттук следва, че при малко Δx диференчното частно

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{1.16}$$

* Променливата под знака на определения интеграл означаваме с t, за да не се смесва с горната граница на интегриране x.

малко ще се различава от височината $f(x)$ на посочения правоъгълник, т. е. при $\Delta x \to 0$ границата на диференчното частно (1.16) трябва да бъде равна на $f(x)$. Заедно с това по определение тази граница е равна на производната $F'(x)$.

И така ние се убедихме, че $F'(x) = f(x)$, т. е. функцията (1.15) е една от примитивните на функцията f. Но тогава всяка примитивна на функцията f е равна на

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C, \tag{1.17}$$

където C е константа.

Направените разсъждения имат предварителен характер, но при наличие на развит апарат на математическия анализ може леко да се прецизират и строго да се докаже, че за всяка непрекъсната функция f съществува примитивна и тя се определя с равенството (1.17).

Равенството (1.17) на свой ред позволява да се установи връзката между определения интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ и всяка примитивна $\Phi(x)$ на функцията $f(x)$. За намиране на тази връзка ще вземем в равенството (1.17) за горна граница на интегрирането x отначало числото b, а после числото a. Така ще получим

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C = \int_a^b f(x)\,dx + C, \tag{1.18}$$

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = C \tag{1.19}$$

(интегралът $\int_a^a f(t)\,dt$ е очевидно равен на нула).

Изваждаме от равенството (1.18) равенството (1.19) и получаваме знаменитата ***формула на Нютон — Лайбниц***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

свеждаща въпроса за пресмятане на определения интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ до пресмятане на разликата от стойностите на произволна примитивна Φ на функцията f в точките b и a.

Обосноваването на формулата на Нютон — Лайбниц е една от важните задачи на математическия анализ.

10. Ще отбележим обаче, че точни аналитични изрази на примитивните функции могат да се получат само за тесен клас функции. Затова формулата на Нютон — Лайбниц не решава изцяло въпроса за пресмятане на определени интеграли.

Най-простият начин за приближено пресмятане на определен интеграл е т. нар. ***метод на правоъгълниците***, при който интегралът се заменя с интегралната сума от дясната страна на (1.12), в която за точките ξ_k се вземат средите на съответните им интервали $[x_{k-1}, x_k]$, а те от своя страна са с еднаква дължина, т. е. числата $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ са равни помежду си.

В този курс ще бъде доказано, че при определени изисквания за функцията f грешката, която правим при заменяне на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с посочената специална интегрална сума, е от порядък n^{-2}, където n е броят на подинтервалите.

Методът на правоъгълниците (както и много други методи за приближено пресмятане на определени интеграли) е много удобен при използване на автоматични сметачни машини (АСМ). Това обстоятелство и равенството (1.17) правят тези методи ефективно средство за намиране на примитивни и неопределени интеграли.

В таблица 1 привеждаме резултатите от пресмятането на калкулатор по метода на правоъгълниците на интеграла на Поасон

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$

за някои стойности на x. В първата колона на таблицата са стойностите на аргумента x на интеграла на Поасон, във втората колона е посочен броят n на подинтервалите, а в третата колона — резултатите от пресмятанията.

От таблица 1 се вижда, че за пресмятане на интеграла на Поасон с точност до 10^{-5} при $x=0{,}1$ е достатъчно да вземем $n=10$, при $x=0{,}5$ е достатъчно $n=40$, а при $x=1$ е достатъчно да вземем $n=60$.

ТАБЛИЦА 1

x	n	$\approx F(x)$	x	n	$\approx F(x)$
0,1	2	0,0398319	0,5	10	0,191480
0,1	5	0,0398284	0,5	20	0,191466
0,1	10	0,0398279	0,5	40	0,191463
0,1	20	0,0398278	0,5	50	0,191463
0,2	10	0,0792609	1	30	0,341355
0,2	20	0,0792599	1	60	0,341347
0,2	30	0,0792597	1	80	0,341346
0,2	40	0,0792597	1	100	0,341345

11. Наред с приближените методи за пресмятане на интеграли важна роля в съвременната математика играят и приближените методи за определяне на корените на различни уравнения.

Да разгледаме уравнението

$$f(x)=0. \tag{1.20}$$

В този курс ще бъде доказано, че при определени изисквания за функцията f коренът $x=c$ на уравнението (1.20) може да бъде намерен като граница на редица x_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$, първият член на която се взема произволно в някакъв достатъчно широк интервал, а останалите се получават по итерационната формула

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n). \tag{1.21}$$

Този метод за приближено пресмятане на корен на уравнението (1.20) се нарича ***метод на Нютон*** (или ***метод на допирателните***).

Като конкретен пример ще разгледаме уравнението (1.20) с функция $f(x)$ от вида $f(x)=x^k-a$, където a е положително реално число, а $k\geqq 2$ — цяло положително число. За такава функция $f(x)$ положителен корен на уравнението (1.20) е $\sqrt[k]{a}$ (т. е. k-ти корен от положителното реално число a). Формулата (1.21), определяща последователните приближения по метода на Нютон, в този случай ще има вида

$$x_{n+1}=\frac{k-1}{k}x_n+\frac{a}{kx_n^{k-1}} \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{1.22}$$

(за да се убедим в това, достатъчно е да отчетем, че $f'(x)=kx^{k-1}$).

Формулата (1.22) дава един ефективен и лесно реализуем на АСМ алгоритъм за пресмятане на k-ти корен от реално положително число a.

Ще приведем примери за пресметнати с АСМ корени по тази формула.

Всяко положително реално число a може да се представи (и то по единствен начин) във вида $a=2^L.x$, където L е цяло число, а x удовлетворява неравенствата $1/2\leqq x<1$. Ще избираме всеки път за първо приближение x_1 числото $x_1=2^{[L/k]}$, където k е степента на извлечения корен, а символът $[L/k]$ означава цялата част на числото L/k.

Резултатите от пресмятанията са събрани в таблица 2, в първата колона на която стоят числата a, от които извличаме корен, във втората колона е коренният показател, в третата колона са пресметнатите стойности на корените и в четвъртата колона е даден броят на направените итерации.

ТАБЛИЦА 2

a	k	$\sqrt[k]{a}$	n
2	2	1,414213181	4
3	2	1,732049942	5
4	2	1,999999046	5
2	5	1,148697853	5
3	5	1,245730400	5
4	5	1,319507599	6
2	10	1,071773529	5
3	10	1,116123199	6
4	10	1,148697853	6

12. Ние разгледахме постановката на най-важните задачи на математическия анализ, тръгвайки от най-простия механичен модел — движение на материална точка по права линия. Този модел естествено ни доведе до необходимостта да построим диференциалното и интегралното смятане за функции $f(x)$ на **една** независима променлива x. При описването на по-сложни задачи е естествено да възникне понятието функция на **няколко** независими променливи $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Така например температурата u на нагрявано тяло е функция на четири независими променливи: трите координати x_1, x_2, x_3 на точка от това тяло и времето t. Тази функция е естествено да означим със символа $u=f(x_1, x_2, x_3, t)$.

За функция на няколко променливи се въвежда понятието производна по всяка от променливите (такава производна се нарича ***частна производна*** по дадената променлива).

Важна задача за по-нататъшното развитие на математическия анализ е построяването на диференциално и интегрално смятане за функции на няколко променливи. В теорията на функциите на няколко променливи се изучава също така задачата за намиране на функция $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, която е решение на функционалното уравнение $F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y)=0$. Тази задача може да се разглежда като обобщение на задачата за намиране на корен на уравнението (1.20).

Накрая математическият анализ, разбиран в най-широк смисъл, включва теорията на диференциалните уравнения (т. е. уравнения, съдържащи и производните на търсените функции).

През последните десетилетия широко развитие получиха теории, изхождащи от обобщено третиране на понятията функция, производна и решение на диференциално уравнение. Създаването на математическия анализ е едно от най-великите постижения на човешкия ум. То даде възможност от разглеждането на отделни, разпокъсани физически и геометрични задачи (като падане на тяло под действието на силата на тежестта, пресмятане на лица на фигури и др.) да се премине към развиване на общи методи за решаване на големи класове от задачи. Развитието на математическия анализ от своя страна оказва огромно влияние за прогреса на науката и техниката.

Класическият математически анализ е много удобен математически модел за описание на различни явления, при които се допуска, че разполагаме с точни стойности за всички изходни величини и можем да намерим точните стойности на пресмятаните величини.* Ще отбележим, че опирайки се на този модел, обикновено можем да оценим грешката, възникваща вследствие на това, че изходните величини са зададени с някаква грешка, и всички пресмятания могат да се направят само с определена точност.** По такъв начин апаратът на математическия анализ може да бъде използван за построяване на числени методи и оценки на грешките.

Накрая нека систематизираме най-важните проблеми, възникнали в резултат от направените предварителни разглеждания.

1. Уточняване на понятията реално число, множество и функция.

2. Развиване на теорията на границите и свързаното с тази теория понятие непрекъснатост на функция.

* Специално ще подчертаем, че този модел обхваща широки класове задачи, различни по своя характер — от физиката, биологията, икономиката, социологията и другите науки.

** Може например да се разглеждат изображения, поставящи в съответствие на всяка стойност на аргумента x цял интервал от стойности за y. Такива изображения в редица случаи представляват доста удобен математически апарат за отчитане на грешките от изходните данни и обработката на данните.

3. Построяване на апарата на диференциалното и интегралното смятане.

4. Построяване на теорията на определения интеграл като граница на суми от специален вид.

5. Развиване на приближени методи за пресмятане на определени интеграли и приближени методи за решаване на уравнения.

6. Изясняване на някои геометрични понятия (като лице на равнинна фигура, дължина на дъга и др.).

2. Теория на реалните числа

Елементарна представа за реалните числа се дава в средното училище, но тази представа не е достатъчна за последователното изучаване на понятието граница.

В основната част на тази глава се излагат посочените въпроси от теорията на реалните числа, необходими за построяване на строга теория на границите. В края на главата се изучават допълнителни въпроси от теорията на реалните числа, които не са свързани с теорията на границите и въобще с курса по математически анализ (пълнотата на множеството на реалните числа в смисъл на Хилберт, аксиоматичното построяване на теорията на реалните числа, връзката между различните начини за въвеждане на реалните числа).

В последния параграф са дадени някои въпроси от теорията на множествата, близки до съответните въпроси от теорията на реалните числа.

2.1. Множеството на числата, представими с безкрайни десетични дроби, и неговата наредба

2.1.1. Свойства на рационалните числа. В тази точка ще систематизираме добре известната теория на рационалните числа.

Рационално *се нарича число, което може да се представи (поне по един начин) като отношение на две цели числа, т. е. във вид на дроб m/n, където m и n са цели числа и $n \neq 0$.*

Рационалните числа притежават следните шестнадесет основни свойства.* (При формулирането на тези свойства вместо термина „рационално число" ще употребяваме за краткост „число".)

* Всички приведени свойства на рационалните числа могат да се получат от свойствата на целите числа.

1°. Всеки две числа a и b са свързани с един и само един от трите знака $>$, $<$ или $=$, при това, ако $a>b$, то $b<a$. С други думи, съществува правило, позволяващо да се установи кой от посочените три знака свързва дадените две числа. Това правило се нарича ***правило за наредба*** и се формулира така: 1) *две неотрицателни числа $a=m_1/n_1$ и $b=m_2/n_2$, за които $n_1>0$, $n_2>0$, са свързани със същия знак, както двете цели числа m_1n_2 и m_2n_1*; 2) *две неположителни числа a и b са свързани със същия знак, както неотрицателните числа $|b|$ и $|a|$*; 3) *ако a е неотрицателно, а b е отрицателно, то $a>b$.*

2°. Съществува правило, чрез което на всеки две числа a и b се съпоставя трето число c, наричано тяхна ***сума*** и означавано със символа $c=a+b$. *Сумата на две рационални числа $a=m_1/n_1$ и $b=m_2/n_2$ се определя от равенството*

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}.$$

Операцията намиране на сума се нарича ***събиране.***

3°. Съществува правило, посредством което на всеки две числа a и b се съпоставя трето число c, наричано тяхно ***произведение*** и означавано със символа $c=a.b$. *Произведението на две рационални числа $a=m_1/n_1$ и $b=m_2/n_2$ се определя от равенството*

$$\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1.m_2}{n_1.n_2}.$$

Операцията намиране на произведение се нарича ***умножение.***

4°. От $a>b$ и $b>c$ следва, че $a>c$ (транзитивно свойство на знака $>$); от $a=b$ и $b=c$ следва, че $a=c$ (транзитивно свойство на знака $=$).

Операцията събиране притежава следните четири свойства:

5°. $a+b=b+a$ (комутативност).

6°. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (асоциативност).

7°. Съществува такова число 0, че $a+0=a$ за всяко a (особена роля на нулата).

8°. За всяко число a съществува такова противоположно на него число a', че $a+a'=0$.

Аналогични четири свойства има и операцията умножение.

9°. $a.b=b.a$ (комутативност).

10°. $(a.b).c=a.(b.c)$ (асоциативност).

11°. Съществува число 1, такова, че $a.1=a$ за всяко число a (особена роля на единицата).

12°. За всяко число $a\neq 0$ съществува такова обратно число a', че $a.a'=1$.

Операциите събиране и умножение са свързани със следното свойство:

13⁰. $(a+b).c=a.c+b.c$ (дистрибутивност или разпределително свойство на умножението относно събирането).

Следващите две свойства свързват операцията наредба съответно с операциите събиране и умножение:

14⁰. От $a>b$ следва, че $a+c>b+c$.

15⁰. От $a>b$ и $c>0$ следва, че $a.c>b.c$.

Особена роля има свойството

16⁰. Каквото и да е числото a, то числото 1 може да се прибави към себе си толкова пъти, че получената сума да е по-голяма от a.*

Изброените шестнадесет свойства се наричат *основни*, тъй като всички други алгебрични свойства, отнасящи се до операциите събиране и умножение и връзката им с равенства и неравенства, могат да бъдат получени като логически следствия от тях.

Така например от основните свойства произтича следното често използвано свойство, позволяващо да събираме почленно еднопосочни неравенства:

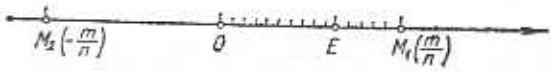
ако $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

Наистина от неравенствата $a>b$ и $c>d$ и от свойства 14⁰ и 5⁰ следва, че $a+c>b+c$ и $b+c>b+d$, а от последните две неравенства и от свойство 4⁰ следва, че $a+c>b+d$.

2.1.2. Недостатъчност на рационалните числа за измерване на отсечки от числовата ос. Числова ос ще наричаме права, на която са избрани определена точка O (начало за отчитане), мащабна отсечка OE, дължината на която приемаме равна на единица, и положително направление (обикновено от O към E). *На всяко рационално число съответствува определена точка от числовата ос.* Действително известно е как се построява отсечка с дължина $1/n$-та част от дължината на мащабната отсечка OE (n — произволно цяло положително число). Естествено можем да построим и отсечка с дължина m/n-та част от дължината на мащабната отсечка, където m и n са произволни цели положителни числа. Като нанесем такава отсечка надясно (наляво) от точката O, ще получим точка M_1 (M_2), съответствуваща на рационалното число $+m/n$ ($-m/n$) (фиг. 2.1).

Ще видим сега, че *не всяка точка M от числовата ос съответствува на рационално число.* Например нека точката M е избрана така, че дължината на отсечката OM да е равна на диагонала на квадрат със страна отсечката OE. Тъй като дължината на мащабната отсечка OE е равна на единица, то по питагоровата теорема дължината x на отсечката OM ще бъде корен

* Това свойство се нарича *аксиома на Архимед*.



Фиг. 2.1

на уравнението $x^2=2$ и не е рационално число. Но това означава, че на посочената точка M не съответствува рационално число.

Естествено възниква потребността от разширяване на рационалните числа и въвеждане на по-широко множество от числа така, че всяка точка от числовата ос да съответствува на някое число от това по-широко множество (или с помощта на това по-широко множество от числа да може да се изрази дължината на всяка отсечка OM от числовата ос).

Ще покажем, че посредством измерване на отсечката OM на всяка точка M от числовата ос може да се постави в съответствие напълно определена безкрайна десетична дроб.

Нека M е произволна точка от числовата ос. За определеност ще предполагаме, че точката M лежи надясно от O. Ще опишем процеса на измерване на отсечката OM с помощта на мащабната отсечка OE.

Най-напред определяме колко пъти мащабната отсечка се нанася изцяло върху отсечката OM*. Възможни са два случая:

1) Отсечката OE се нанася в отсечката OM цяло число a_0 пъти с някакъв остатък NM, по-малък от OE (вж. фиг. 2.2). В този случай цялото число a_0 представлява резултат от измерването на OM с точност до 1 и недостиг.

2) Отсечката OE се нанася в отсечката OM цяло число a_0 пъти без остатък. В този случай процесът на измерване е завършен и цялото число a_0 е дължината на отсечката OM. На точката M съответствува безкрайната десетична дроб $a_0,000\ldots$, която се отъждествява с рационалното число a_0.

В първия случай процесът на измерване продължава, за да се види колко пъти $\frac{1}{10}$ част от мащабната отсечка OE се нанася в отсечката NM (която е остатък от измерването с помощта на цялата отсечка OE). Отново са възможни два случая:

1) $\frac{1}{10}$ част от OE се нанася a_1 пъти в отсечката NM с някакъв остатък PM, по-малък от $\frac{1}{10}$ част от OE (вж. фиг. 2.2). В този

* От аксиомата на Архимед за отсечки следва, че каквито и да са две отсечки a и b, ако съберем едната от двете сама със себе си достатъчен брой пъти, ще получим отсечка с по-голяма дължина от другата.

Фиг. 2.2

случай рационалното число a_0, a_1 е резултатът от измерването на OM с недостиг, с точност до числото $\frac{1}{10}$.

2) $\frac{1}{10}$ част от OE се нанася в отсечката NM цяло число пъти a_1 без остатък. В този случай процесът на измерване е завършен и рационалното число a_0,a_1 е дължината на отсечката OM. На точката M съответствува безкрайната десетична дроб $a_0,a_1000\ldots$, която отъждествяваме с рационалното число a_0, a_1.

Като продължим тези разсъждения, ще стигнем до двете възможности: 1) или описаният процес на измерване ще прекъсне на n-тата стъпка поради това, че на точката M съответствува рационалното число $a_0,a_1a_2\ldots a_n$ (в този случай на точката M съответствува безкрайната десетична дроб $a_0,a_1a_2\ldots a_n000\ldots$, която отъждествяваме с рационалното число $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$); 2) или описаният процес на измерване няма да прекъсне никога и ще получим безкрайна редица от рационални числа

2.1) $$a_0;\ a_0,a_1;\ a_0,a_1a_2;\ \ldots;a_0,a_1a_2\ldots a_n;\ \ldots,$$

представляващи резултатите от измерването на отсечката OM с недостиг, с точност съответно до $1, 1/10, 1/10^2, \ldots, 1/10^n, \ldots$

Всяко от числата в редицата (2.1) може да бъде получено чрез прекъсване до съответния знак на безкрайната десетична дроб

(2.2) $$a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$$

По такъв начин в случай 2) на точката M от числовата ос съответствува безкрайната десетична дроб (2.2). Може да се каже, че и в случай 1) на точката M отговаря безкрайна десетична дроб (2.2), но от известно място нататък всички десетични знаци на тази дроб са нули.

Направените разсъждения имат място и в случая, когато точката M лежи наляво от точката 0, само че в този случай естествено е да смятаме, че всички елементи на редицата (2.1) и безкрайната десетична дроб имат отрицателен знак.

И така чрез описания процес за измерване на всяка точка от числовата ос съпоставихме напълно определена безкрайна десетична дроб. Това обстоятелство естествено води до идеята да се разглеждат числа, представими като безкрайни десетични дроби.

Забележка. Разбира се, описаният процес за измерване на отсечката OM може да се видоизмени така, че да води не до безкрайни десетични дроби, а например до безкрайни ***двоични*** или ***троични*** дроби. Желанието да се разглеждат безкрайни десетични дроби идва само от особената роля, която традиционно играе десетичната бройна система.

2.1.3. Наредба на множеството на безкрайните десетични дроби. В уводната глава вече отбелязахме, че понятието число се отнася към т. нар. ***основни понятия***. Ние ще въведем понятието реално число, като тръгнем от множеството на безкрайните десетични дроби.

Да разгледаме множеството на всички възможни безкрайни десетични дроби (както положителни, т. е. взети със знак +, така и отрицателни, т. е. взети със знак —).

Числата, представими с такива дроби, ще се условим да наричаме ***реални***.

Веднага ще подчертаем, че това условяне има предварителен характер и се нуждае от уточняване. Ние сме длъжни да въведем за числата, представими с безкрайни десетични дроби, трите операции (наредба, събиране и умножение). След като тези операции бъдат въведени, можем да дадем по-точно описание на понятието реално число, а именно, че реални наричаме числата, представими с безкрайни десетични дроби при условие, че за тези числа е установен определен начин за въвеждане на операциите наредба, събиране и умножение.

След всичко това ще се убедим, че при избрания начин за въвеждане на операциите наредба, събиране и умножение реалните числа притежават същите шестнадесет свойства, които формулирахме в т. 1 за рационалните числа.

Да пристъпим към реализация на посочената програма.

В тази точка ще въведем за числата, представими с безкрайни десетични дроби, операцията наредба и ще установим, че тази операция притежава свойство 4°, формулирано в 2.1.1 за рационалните числа (т. е. свойството транзитивност на знаците $>$ и $=$).

Ще напомним още веднъж, че се уговорихме числата, представими с безкрайни десетични дроби, за краткост да наричаме реални (тази договореност няма да бъде в противоречие с даденото по-нататък по-точно описание на реалните числа).

Да разгледаме реално число, представимо с безкрайна десетична дроб, различна от 0,000 . . . Това число ще наричаме *положително*, ако представящата го дроб е взета със знак „+“, и *отрицателно*, ако представящата го дроб е взета със знак „—“.

Реалните числа, които не са положителни, ще наричаме ***неположителни***, *а тези, които не са отрицателни —* ***неотрицателни***.

В множеството на реалните числа влизат, разбира се, всички рационални числа, тъй като те са представими с безкрайни десетични дроби. Представянето на дадено рационално число с безкрайна десетична дроб може да се получи по два начина:

1) взимаме точка M, съответствуваща на даденото рационално число, на числовата ос и измерваме отсечката OM с помощта на мащабната отсечка по начина, посочен в т. 2;

2) взимаме обикновената дроб m/n, представяща даденото рационално число, и делим числителя m на знаменателя n.*

Предоставяме на читателя да се убеди, че тези два начина са еквивалентни. Така при всеки от посочените начини на рационалното число 1/2 се съпоставя безкрайната десетична дроб 0,5000 . . ., на рационалното число 1/3 — безкрайната десетична дроб 1,333 . . .

Преди да преминем към формулиране на правилото за наредба на реалните числа, ще разгледаме въпроса за представяне с безкрайни десетични дроби на онези рационални числа, които се представят и с крайни десетични дроби.

Ще отбележим, че такива рационални числа допускат две представяния с безкрайни десетични дроби. Например рационалното число $1/2 = 0{,}5$ може да се представи и с двете безкрайни десетични дроби: $1/2 = 0{,}5000 \ldots$ и $1/2 = 0{,}4999 \ldots$

Въобще рационалното число $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$, където $a_n \neq 0$, може да се запише във вид на две безкрайни десетични дроби:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 000 \ldots \text{ и}$$
$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} (a_n - 1) 999 \ldots$$

Естествено ние трябва да отъждествяваме тези две безкрайни десетични дроби (т. е. да считаме, че те представляват едно и също реално число).

Нека сега разгледаме две произволни реални числа a и b и да предположим, че те са представени с безкрайните десетични дроби

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \quad b = \pm b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots, \tag{2.3}$$

като във всяко представяне е взет кой да е от знаците + или —.

Ще изключим разгледания вече случай, когато двете безкрайни десетични дроби са с еднакви знаци и са две различни представяния на едно и също рационално число, представими и с крайна десетична дроб. След това ще се уговорим да наричаме две числа a и b равни, ако техните представяния с безкрайни десетични дроби (2.3) имат еднакви знаци и ако са изпълнени безкрайната редица равенства

$$a_0 = b_0, \; a_1 = b_1, \; \ldots, \; a_n = b_n, \ldots \tag{2.4}$$

* При такова деление се получава задължително периодична безкрайна десетична дроб.

И така *ще казваме, че две числа a и b са равни, ако представящите ги безкрайни десетични дроби са с еднакви знаци и ако те или удовлетворяват редицата равенства* (2.4), *или са два представителя на едно и също рационално число, представимо с крайна десетична дроб.*

Нека са дадени две неравни реални числа a и b. Ще установим правило, позволяващо да заключим кой от двата знака $>$ или $<$ ги свързва.

Ще наричаме ***модул*** или ***абсолютна стойност*** на реалното число a онова реално число, означавано със символа $|a|$, което се представя със същата безкрайна десетична дроб, както и числото a, но винаги взета със знак +. Така $|a|$ е винаги неотрицателно реално число.

Ще разгледаме поотделно трите възможни случая:

1) Нека a и b са неотрицателни и имат представянията $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$; $b = b_0, b_1 b_2 \ldots$ Тъй като числата a и не са равни, то ще бъде нарушено поне едно от равенствата (2.4).

Да означим с k най-малкия номер n, при който се нарушава равенството $a_n = b_n$, т. е.

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, \text{ но } a_k \neq b_k.$$

Тогава ще считаме, че $a > b$, ако $a_k > b_k$, и че $a < b$, ако $a_k < b_k$.

2) Нека сега двете числа a и b са отрицателни. Тогава ще считаме, че $a > b$, ако $|b| > |a|$ и $a < b$, ако $|b| < |a|$.

3) Нека накрая едното число (например a) е неотрицателно, а другото (b) — отрицателно. Тогава естествено ще считаме, че $a > b$.

И така правилото за наредба на реалните числа е формулирано.

За да направим това правило безупречно от логическа гледна точка (или, както се казва в математиката, коректно), ще докажем следната лема:

Лема. *Ако $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ е произволно неотрицателно реално число, а $b' = b_0, b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n 000 \ldots$ и $b'' = b_0, b_1 b_2 \ldots b_{n-1} (b_n - 1) 999 \ldots$ при $b_n > 0$ са две различни представяния на едно и също рационално число $b_0, b_1 b_2 \ldots b_n$, то условието $a < b'$ е еквивалентно на условието $a < b''$, а условието $a > b'$ е еквивалентно на $a > b''$.*

Тази лема позволява при наредба на две неравни реални числа да не се грижим за това, кое от двете възможни представяния с безкрайна десетична дроб е взето за числата, представими с крайни десетични дроби.

Доказателство на лемата. За пълното доказателство на лемата трябва да се докажат следните четири твърдения:

1) от $a<b'$ следва $a<b''$; 2) от $a<b''$ следва $a<b'$;
3) от $a>b'$ следва $a>b''$; 4) от $a>b''$ следва $a>b'$.

Ще се ограничим с доказателствата на твърдения 1) и 2), тъй като твърденията 3) и 4) се доказват аналогично.

Нека $a<b'$. Тогава според правилото за наредба ще се намери такъв номер k, че

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots,\ a_{k-1}=b_{k-1},\ a_k<b_k \tag{2.5}$$

(в тези съотношения трябва да считаме всички $b_{n+1}, b_{n+2}, \cdots$ равни на нула).

Веднага ще отбележим, че $k\leqq n$, тъй като при $k>n$ неравенството $a_k<b_k$ е невъзможно, понеже $0\leqq a_k\leqq 9$, а $b_k=0$.

Тъй като при $k<n$ всички десетични знакове до ред k в числата b' и b'' съвпадат, условията $a<b'$ и $a<b''$ са очевидно еквивалентни.

Остава да разгледаме случая $k=n$. В този случай съотношенията (2.5) имат вида $a_0=b_0, a_1=b_1, \cdots, a_{n-1}=b_{n-1}, a_n<b_n$. Последното неравенство е еквивалентно на $a_n\leqq b_n-1$. Ако при това $a_n<b_n-1$, то по правилото за наредба $a<b''$.

Ако в посоченото неравенство $a_n=b_n-1$, то всички десетични знакове на числата a и b'' до ред n съвпадат. Понеже в числото b'' всички десетични знакове с ред, по-голям от n, са равни на девет, то и в този случай $a<b''$, тъй като в числото a не всички десетични знакове с ред, по-голям от n, могат да бъдат равни на девет (поради това, че a не е равно на b').

И така твърдение 1) е доказано.

2) Нека $a<b''$.

Безкрайните десетични дроби, представящи числата b' и b'', означаваме с $b'=b'_0, b'_1 b'_2 \cdots b'_n \cdots$ и $b''=b''_0, b''_1 b''_2 \cdots b''_n \cdots$

При тези означения

$$b'_0=b''_0=b_0,\ b'_1=b''_1=b_1,\ \cdots,\ b'_{n-1}=b''_{n-1}=b_{n-1},$$
$$b'_n=b_n,\ b''_n=b_n-1.$$

С други думи, изпълнени са съотношенията

$$b'_0=b''_0,\ b'_1=b''_1,\ \cdots,\ b'_{n-1}=b''_{n-1},\ b''_n<b'_n.$$

От друга страна, тъй като $a<b''$, ще се намери такъв номер k, че да са изпълнени съотношенията

$$a_0=b''_0,\ a_1=b''_1,\ \cdots,\ a_{k-1}=b''_{k-1},\ a_k<b''_k.$$

Да означим с m по-малкото от двете числа n и k и да съпоставим двете последни редици от съотношения. Като използваме свойството транзитивност на $>$ и $=$ за целите числа, ще получим следните съотношения:

$$a_0=b'_0,\ a_1=b'_1,\ \cdots,\ a_{m-1}=b'_{m-1},\ a_m<b'_m.$$

Съгласно правилото за наредба на реални числа от тези съотношения следва $a<b'$. □

Лесно можем да се убедим в това, че формулираното правило за наредба на реални числа, приложено за две рационални числа, води до същия резултат, както и правилото за наредба на рационални числа, представени във вид на отношение на две цели числа.

Наистина достатъчно е да разгледаме случая на две неотрицателни рационални числа a и b. Нека $a>b$ съгласно предишното правило за наредба на рационални числа и нека $a=a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, $b=b_0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ Като нанесем рационалните числа a и b върху числовата ос, ще получим съответстващите им точки M_1 и M_2, при което, понеже $a>b$, отсечката OM_1 е по-голяма от OM_2. От описания в т. 2 процес за измерване на отсечки върху числовата ос следва, че цялото число $a_0 a_1 a_2 \cdots a_k$ показва колко пъти 10^{-k}-та част от мащабната отсечка OE се нанася в отсечката OM_1, а цялото число $b_0 b_1 b_2 \cdots b_k$ показва колко пъти 10^{-k}-та част от OE се нанася в OM_2. Тъй като отсечката OM_1 е по-голяма от OM_2, то ще се намери такъв номер k, че $a_0 a_1 a_2 \cdots a_{k-1}=b_0, b_1 b_2 \cdots b_{k-1}$, но $a_0, a_1 a_2 \cdots a_k>b_0, b_1 b_2 \cdots b_k$, което означава, че $a>b$ съгласно правилото за наредба на реални числа.

Сега ще докажем, че за формулираното правило за наредба на реални числа е в сила свойство 4°, приведено в т. 1 за рационалните числа, т. е. ще докажем, че *за произволни реални числа a, b и c от неравенствата $a>b$ и $b>c$ следва неравенството $a>c$ (транзитивно свойство на знака „$>$“), а от равенствата $a=b$ и $b=c$ следва равенството $a=c$ (транзитивно свойство на знака „$=$“).* Транзитивното свойство на знака $=$ следва непосредствено от съответното свойство за целите числа. Ще докажем транзитивността на знака $>$. Нека $a>b$, $b>c$. Трябва да се докаже, че $a>c$. Ще разгледаме трите възможни случая: 1) c е неотрицателно; 2) c е отрицателно, a е неотрицателно; 3) c е отрицателно и a отрицателно.

1) Нека c е неотрицателно. Тогава b е също неотрицателно, тъй като в противен случай съгласно правилото за наредба ще имаме $c>b$, а това противоречи на условието $b>c$. По-нататък чрез същите разсъждения заключаваме, че a е неотрицателно

(понеже в противен случай $b>a$, а това противоречи на условието $a>b$).

И така в разглеждания случай и трите числа a, b и c са неотрицателни. Записвайки ги като безкрайни десетични дроби

$$a=a_0,a_1a_2\cdots,\ b=b_0,b_1b_2\cdots,\ c=c_0,c_1c_2\cdots,$$

от условието $a>b$ ще следва, че съществува такъв номер k, че

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots,\ a_{k-1}=b_{k-1},\ a_k>b_k. \tag{2.6}$$

Аналогично от $b>c$ следва, че има номер p, за който

$$b_0=c_0,\ b_1=c_1,\ b_2=c_2,\ \cdots,\ b_{p-1}=c_{p-1},\ b_p>c_p. \tag{2.7}$$

Означаваме с m по-малкия от двата номера k и p. Тогава очевидно от (2.6) и (2.7) и от транзитивността на $>$ и $=$ за целите числа получаваме

$$a_0=c_0,\ a_1=c_1,\ \cdots,\ a_{m-1}=c_{m-1},\ a_m>c_m,$$

а това означава (по правилото за наредба), че $a>c$.

2) Нека сега c е отрицателно, а a е неотрицателно. Тогава (независимо от знака на числото b) неравенството $a>c$ е вярно съгласно правилото за наредба на реалните числа.

3) Да разгледаме накрая случая, когато двете числа c и a са отрицателни. Ще отбележим, че в този случай и b е отрицателно (в противен случай ще получим от правилото за наредба, че $b>a$, а това противоречи на условието $a>b$).

И така в разглеждания случай и трите числа a, b и c са отрицателни. Но тогава (поради правилото за наредба на реални числа) неравенствата $a>b$, $b>c$ са еквивалентни на неравенствата $|b|>|a|$ и $|c|>|b|$. От последните две неравенства (поради свойството транзитивност на знака $>$, вече доказано в случай 1) за неотрицателни числа) следва, че $|c|>|a|$, което означава (поради наредбата на отрицателните числа a и c), че $a>c$. С това доказателството на свойството транзитивност на знака $>$ е завършено.

2.2. Множества от реални числа, ограничени отгоре или отдолу. Съществуване на точни граници

2.2.1. Основни определения. В този параграф ще разгледаме произволни множества от реални числа. За означаване на произволно множество от реални числа ще използваме символа $\{x\}$.

Отделните числа, участвуващи в множеството $\{x\}$, ще наричаме ***елементи*** на това множество.

Навсякъде в този параграф ще искаме множеството $\{x\}$ да съдържа поне един елемент. Такова множество се нарича ***непразно.***

Ще въведем важното понятие ограниченост на множество отгоре (съответно отдолу).

Определение 1. *Множеството от реални числа $\{x\}$ се нарича* ***ограничено отгоре*** *(съответно* ***ограничено отдолу****), ако съществува такова реално число M (реално число m), че всеки елемент x от множеството $\{x\}$ да удовлетворява неравенството*

$$x\leq M \text{ (съответно } x\geq m). \tag{2.8}$$

Числото M (числото m) се нарича ***горна граница*** *(****долна граница****) на множеството $\{x\}$.*

Разбира се, всяко ограничено отгоре множество $\{x\}$ има безбройно много горни граници. Наистина, ако реалното число M е една горна граница на множеството $\{x\}$, то всяко реално число M', по-голямо от числото M, е също горна граница на това множество (тъй като от неравенството (2.8) следва, че $x\leq M'$). Аналогична забележка важи и за долните граници на ограничено отдолу множество $\{x\}$.

Така например множеството на всички отрицателни реални числа е ограничено отгоре. За горна граница може да се вземе всяко неотрицателно число. Множеството на всички цели положителни числа 1, 2, 3, $\cdots$ е ограничено отдолу. За долна граница може да се вземе всяко реално число m, удовлетворяващо неравенството $m\leq 1$.

Естествено възниква въпросът за съществуване на най-малка горна граница за ограничените отгоре множества и най-голяма долна граница за ограничените отдолу множества.

Определение 2. *Най-малката от всички горни граници на ограничено отгоре множество $\{x\}$ се нарича* ***точна горна граница*** *на това множество и се означава със символа $\overline{x}=\sup\{x\}$*.*

Най-голямата от всички долни граници на ограничено отдолу множество $\{x\}$ се нарича ***точна долна граница*** *на това множество и се означава със символа $\underline{x}=\inf\{x\}$**.*

Определение 2 може да се формулира и по следния начин:

Числото $\overline{x}$ (числото $\underline{x}$) се нарича ***точна горна (точна долна) граница*** *на ограничено отгоре (отдолу) множество $\{x\}$, ако са изпълнени следните две условия: 1) всеки елемент x на множеството*

* sup — първите три букви от латинската дума supremum (супремум), която означава „най-висш".

** inf — първите три букви от латинската дума infimum (инфимум), която означава „най-низш".

$\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$ ($x \geq \underline{x}$); 2) каквото и да е реалното число x', по-малко от $\bar{x}$ (по-голямо от $\underline{x}$), съществува поне един елемент x на множеството $\{x\}$, за който $x > x'$ ($x < x'$).

В това определение условието 1) показва, че числото $\bar{x}$ (числото $\underline{x}$) е горна (долна) граница на множеството $\{x\}$, а условието 2) показва, че тази граница е най-малката (най-голямата) и не може да се намали (увеличи).

2.2.2. Съществуване на точни граници. Съществуването на точна горна (точна долна) граница за всяко ограничено отгоре (отдолу) множество не е очевидно.

Ще докажем следната основна теорема.

Основна теорема 2.1. *Всяко непразно, ограничено отгоре (отдолу) множество от реални числа има точна горна (точна долна) граница.*

Доказателство. Ще дадем доказателство само за съществуването на точна горна граница за всяко ограничено отгоре множество, тъй като съществуването на точна долна граница за всяко ограничено отдолу множество се доказва аналогично.

И така нека множеството $\{x\}$ е ограничено отгоре, т. е. съществува такова реално число M, че всеки елемент на множеството $\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq M$.

Възможни са следните два случая: 1°. Сред елементите на множеството $\{x\}$ има поне едно неотрицателно реално число. 2°. Всички елементи на множеството $\{x\}$ са отрицателни реални числа. Ще разгледаме тези случаи поотделно.

1°. Да разгледаме само неотрицателните реални числа от множеството $\{x\}$. Всяко от тези числа е представимо с безкрайна десетична дроб. Да разгледаме целите части на тези десетични дроби. Поради неравенството $x \leq M$ всички цели части не надминават числото M и затова ще се намери най-голяма от целите части, която ще означим с $\bar{x}_0$. Да запазим измежду неотрицателните числа на множеството $\{x\}$ онези, чиято цяла част е равна на $\bar{x}_0$, и да пренебрегнем останалите. В запазените числа разглеждаме първия десетичен знак след запетаята. Най-големия от тези знакове означаваме с $\bar{x}_1$. Запазваме измежду неотрицателните числа на множеството $\{x\}$ онези, на които цялата част е равна на $\bar{x}_0$ и първият десетичен знак е равен на $\bar{x}_1$, а останалите пренебрегваме. В запазените числа разглеждаме втория десетичен знак след запетаята. Най-големия от тях означаваме с $\bar{x}_2$. Продължавайки аналогично тези разсъждения, ще определим някое реално число

$$\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \tag{2.9}$$

Ще докажем, че това реално число $\bar{x}$ е точната горна граница на множеството $\{x\}$. За това е достатъчно да покажем верността на двете твърдения: 1) всеки елемент x на множеството $\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$; 2) за всяко реално число x', по-малко от $\bar{x}$, съществува поне един елемент x от множеството $\{x\}$, удовлетворяващ неравенството $x > x'$.

Ще докажем най-напред твърдението 1). Тъй като $\bar{x}$ по построение е неотрицателно реално число, то всеки отрицателен елемент x на множеството $\{x\}$ очевидно удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$. Затова е достатъчно да се докаже, че всеки неотрицателен елемент x на множеството $\{x\}$ удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$.

Да допуснем, че някой неотрицателен елемент $x = x_0, x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ не удовлетворява неравенството $x \leq \bar{x}$. Тогава $x > \bar{x}$ и по правилото за наредбата ще се намери такъв номер k, че $x_0 = \bar{x}_0, x_1 = \bar{x}_1, \cdots, x_{k-1} = \bar{x}_{k-1}, x_k > \bar{x}_k$. Но последното съотношение противоречи на това, че $\bar{x}_k$ е най-големият от десетичните знакове x_k за тези елементи x, на които цялата част и първите $k-1$ знака след запетаята са съответно равни на $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{k-1}$. Полученото противоречие доказва твърдение 1).

Сега ще докажем твърдение 2). Нека x' е произволно реално число, за което $x' < \bar{x}$. Трябва да докажем, че съществува поне един елемент x от множеството $\{x\}$, удовлетворяващ неравенството $x > x'$.

Ако числото x' е отрицателно, то неравенството $x > x'$ се удовлетворява очевидно от всеки неотрицателен елемент x на множеството $\{x\}$ (по предположение поне един такъв елемент съществува).

Остава да разгледаме случая, когато числото x', удовлетворяващо условието $x' < \bar{x}$, е неотрицателно. Нека $x' = x'_0, x'_1 x'_2 \cdots x'_n \cdots$ От условието $x' < \bar{x}$ и от правилото за наредбата следва, че съществува такъв номер m, че

$$x'_0 = \bar{x}_0, x'_1 = \bar{x}_1, \cdots, x'_{m-1} = \bar{x}_{m-1}, x'_m < \bar{x}_m. \tag{2.10}$$

От друга страна, от построението на числото (2.9) следва, че за всеки номер m съществува неотрицателен елемент $x = x_0, x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ на множеството $\{x\}$, такъв, че цялата му част и първите му m знака след запетаята са същите, както в числото $\bar{x}$. С други думи, за номера m може да се намери такъв елемент x, че

$$x_0 = \bar{x}_0, x_1 = \bar{x}_1, \cdots, x_{m-1} = \bar{x}_{m-1}, x_m = \bar{x}_m. \tag{2.11}$$

Съпоставяйки (2.10) и (2.11), получаваме

$$x_0=x'_0,\ x_1=x'_1,\ \cdots,\ x_{m-1}=x'_{m-1},\ x_m>x'_m,$$

а това означава (поради правилото за наредба), че $x>x'$. Твърдение 2), а с това и теоремата за случая 1° са доказани.

2°. Аналогично се доказва съществуването на точна горна граница и във втория случай, когато всички елементи x на множеството $\{x\}$ са отрицателни реални числа. В този случай ще представим всички елементи x с отрицателни безкрайни десетични дроби и ще означим с $\bar{x}_0$ и най-малката от целите части на тези дроби, с $\bar{x}_1$ — най-малкия от първите десетични знакове на тези дроби, цялата част на които е равна на $\bar{x}_0$, с $\bar{x}_2$ — най-малкия от вторите десетични знакове на тези дроби, цялата част и първия десетичен знак на които са съответно равни на $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$, и т. н.

По този начин получаваме неположителното реално число

$$\bar{x}=-\bar{x}_0,\bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n\cdots$$

Напълно аналогично на случай 1° се доказва, че това число е точна горна граница на множеството $\{x\}$, т. е. верността на твърдения 1) и 2), формулирани при разглеждането на случай 1°. Теоремата е доказана.

2.3. Приближаване на реалните числа с рационални

Ще докажем няколко важни леми за приближаване на реалните числа с рационални.

Отначало ще установим, че всяко реално число може да бъде приближено с отнапред зададена точност чрез рационални числа.

Да разгледаме произволно реално число a. За определеност ще предполагаме, че това число е неотрицателно, и ще го представим с десетичната дроб $a=a_0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$

Отсичайки тази дроб до n-тия знак включително след запетаята, ще получим рационалното число $a_0,a_1a_2\cdots a_n$, при което от правилото за наредба на реалните числа непосредствено следва, че $a_0,a_1a_2\cdots a_n\leqq a$.

Като увеличим това число с 10^{-n}, ще получим друго рационално число $a_0,a_1a_2\cdots a_n+10^{-n}$, което (поради правилото за наредба на реалните числа) ще удовлетворява неравенството

$$a\leqq a_0,a_1a_2\cdots a_n+10^{-n}.$$

И така за всеки номер n намерихме такива две рационални числа $\alpha_1=a_0,a_1a_2\cdots a_n$ и $\alpha_2=a_0,a_1a_2\cdots a_n+10^{-n}$, че $\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2$ и $\alpha_2-\alpha_1=10^{-n}$.

Ще се убедим в това, че за всяко отнапред зададено положително рационално число ε от известно място нататък (т. е. от някое n нататък) е изпълнено неравенството $10^{-n}<\varepsilon$.

Действително според аксиомата на Архимед има само краен брой естествени числа, ненадминаващи числото $1/\varepsilon$. Следователно само за краен брой номера n е изпълнено неравенството $10^n\leqq 1/\varepsilon$, или $10^{-n}\geqq\varepsilon$. За всички останали номера n е изпълнено противоположното неравенство $10^{-n}<\varepsilon$, което и трябваше да докажем.

Стигнахме до следното твърдение:

Лема 1. *За произволно реално число a и за всяко отнапред избрано положително рационално число ε съществуват такива две рационални числа α_1 и α_2, че $\alpha_1\leqq a\leqq\alpha_2$ и $\alpha_2-\alpha_1<\varepsilon$.*

Ще докажем още две леми, характеризиращи гъстотата на разпределение на рационалните числа в реалните числа.

Лема 2. *Каквито и да са двете реални числа a и b, за които $a>b$, съществува рационално число α, заключено между тях, т. е. такова, че $a>\alpha>b$ (а следователно съществуват и безбройно много различни рационални числа, заключени между a и b).*

Доказателство. Достатъчно е да разгледаме случая, когато числата a и b са неотрицателни, тъй като случаят, когато a и b са неположителни, се свежда към първия, като използваме модулите, а случаят, когато a е положително, а b — отрицателно, е тривиален (за α може да се вземе нулата).

И така нека $a>b\geqq 0$. Да предположим, че $a=a_0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $b=b_0,b_1b_2\cdots b_n\cdots$, при това, ако a е рационално число, представимо с крайна десетична дроб, ще приемем за представител на a онази десетична дроб, която окончава на безкраен брой деветки.

Тъй като $a>b$, ще се намери такъв номер k, че $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $\cdots$, $a_{k-1}=b_{k-1}$, $a_k>b_k$.

Поради направената по-горе уговорка всички десетични знаци a_n при $n>k$ не могат да бъдат нули.

Означаваме с p най-малкото от числата n, по-големи от k, за които $a_n\neq 0$. Тогава числото a може да се запише във вида

$$a=a_0,a_1a_2\cdots a_k00\cdots0a_p\cdots\qquad(a_p>0).$$

С помощта на правилото за наредба на реални числа лесно се проверява, че рационалното число

$$\alpha=a_0,a_1a_2\cdots a_k00\cdots0(a_p-1)999$$

удовлетворява неравенствата $a>\alpha>b$. □

Лема 3. *Нека x_1 и x_2 са две реални числа. Нека за всяко положително рационално число ε да съществуват такива две рационални числа γ_1 и γ_2, че $\gamma_1 \leq x_1 \leq \gamma_2$, $\gamma_1 \leq x_2 \leq \gamma_2$, и $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$.* Тогава *числата x_1 и x_2 са равни.*

Доказателство. Допускаме противното, т. е. че $x_1 \neq x_2$. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че $x_1 < x_2$. Съгласно лема 2 съществуват такива две рационални числа α_1 и α_2, че

$$x_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < x_2.$$

Нека сега γ_1 и γ_2 са какви да е рационални числа, удовлетворяващи неравенствата

$$\gamma_1 \leq x_1 \leq \gamma_2, \ \gamma_1 \leq x_2 \leq \gamma_2.$$

От горните неравенства и свойствата транзитивност на $>$ и $=$ получаваме $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2$. Но тогава $\gamma_2 - \gamma_1 > \alpha_2 - \alpha_1$, което противоречи на това, че разликата $\gamma_2 - \gamma_1$ може да бъде направена по-малка от всяко отнапред избрано положително рационално число ε. □

2.4. Операции събиране и умножение на реални числа

Един от най-важните въпроси от теорията на реалните числа е въпросът за дефиниране на операциите събиране и умножение на реални числа и свойствата на тези операции.

2.4.1. Дефиниране на операциите. Точно описание на понятието реално число. За да се съберат две реални числа a и b, те се заменят с исканата точност с рационални числа и за приближена стойност на сумата им се взема сумата на посочените рационални числа.

Фактически посоченият практически начин за събиране на реални числа предполага, че колкото по-точно рационалните числа α и β приближават съответно реалните числа a и b, толкова по-точно сумата $\alpha+\beta$ приближава реалното число, което би трябвало да бъде сумата на реалните числа a и b.

Желанието да се оправдае посоченият практически начин за събиране на две реални числа води до следното определение на сума на две реални числа.

Определение 1. ***Сума на две реални числа*** *a и b наричаме такова реално число x, което за всеки четири рационални числа α_1, α_2, β_1, β_2, за които са изпълнени неравенствата $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq b \leq \beta_2$, удовлетворява неравенствата*

$$\alpha_1 + \beta_1 \leq x \leq \alpha_2 + \beta_2.$$

Това число x се означава със символа $a+b$. В 2.4.2 ще бъде доказано, че такова число x съществува и е само едно. Там ще бъде установено, че това число x е точната горна граница на множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ от сумите на всички рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $\alpha_1 \leq a$, $\beta_1 \leq b$, или точната долна граница на множеството $\{\alpha_2+\beta_2\}$ от сумите на всички рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leq \alpha_2$, $b \leq \beta_2$.

В 2.4.2 ще бъде доказано също, че ако приложим даденото определение за две рационални числа, стигаме до същия резултат, както и при старото определение за сума на рационални числа.

Определение 2. ***Произведение*** *на две положителни реални числа a и b се нарича такова реално число x, което при всеки избор на рационалните числа α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяващи съотношенията $0 < \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, $0 < \beta_1 \leq b \leq \beta_2$, удовлетворява неравенствата $\alpha_1\beta_1 \leq x \leq \alpha_2\beta_2$.*

Това число x се означава със символа $a.b$. В 2.4.2 ще бъде установено, че такова число x съществува и то е само едно. Това число x е точната горна граница на множеството $\{\alpha_1.\beta_1\}$ от произведенията на всички рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $0 < \alpha_1 \leq a$, $0 < \beta_1 \leq b$, или точната долна граница на множеството $\{\alpha_2.\beta_2\}$ от произведенията на всички рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $0 < a \leq \alpha_2$, $0 < b \leq \beta_2$.

Произведение на реални числа с произволен *знак се определя по следното правило:*

1) *за всяко реално число a полагаме $a.\ 0 = 0 = 0.a$;*

2) $$a.b = \begin{cases} |a|.|b|, & \text{ако } a \text{ и } b \text{ имат еднакви знаци,} \\ -|a|.|b|, & \text{ако } a \text{ и } b \text{ са с различни знаци.} \end{cases}$$

В 2.4.2 ще бъде установено, че приложено към две рационални числа, това правило води до същия резултат, както и старото определение за произведение на рационални числа.

Сега можем да уточним понятието реално число.

Определение 3. *Ще наричаме реални числата, представими във вид на безкрайни десетични дроби, при условие, че за тези числа са определени по посочения по-горе начин операциите наредба, събиране и умножение.*

2.4.2. Съществуване и единственост на сумата и произведението на реални числа.

Теорема за съществуване на сума на реални числа. *За всеки две реални числа a и b съществува реално число x, което е тяхна сума.*

Доказателство. Фиксираме две произволни рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a\leq\alpha_2$, $b\leq\beta_2$, и разглеждаме всевъзможните рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $\alpha_1\leq a$, $\beta_1\leq b$.

Ще се убедим, че множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ от всички суми $\alpha_1+\beta_1$ на посочените рационални числа е ограничено отгоре.

Съгласно свойството транзитивност на знаците $>$ и $=$ от неравенствата $a\leq\alpha_2$ и $\alpha_1\leq a$ следва, че $\alpha_1\leq\alpha_2$, а от неравенствата $b\leq\beta_2$ и $\beta_1\leq b$ следва, че $\beta_1\leq\beta_2$.

По двете неравенства $\alpha_1\leq\alpha_2$ и $\beta_1\leq\beta_2$ са еднопосочни, свързват рационални числа и могат да бъдат почленно събрани (вж. края на 2.1.1). Тогава $\alpha_1+\beta_1\leq\alpha_2+\beta_2$, което и доказва ограничеността на множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ отгоре и това, че $\alpha_2+\beta_2$ е една горна граница на това множество.

Според основната теорема 2.1 (вж. 2.2.2) за множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$ съществува точна горна граница, която ще означим с x. Остава да се убедим, че това реално число е сума на числата a и b, т. е. удовлетворява неравенствата

$$\alpha_1+\beta_1\leq x\leq\alpha_2+\beta_2.$$

Верността на лявото неравенство $\alpha_1+\beta_1\leq x$ следва от това, че x е горна граница на множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$, а верността на дясното неравенство $x\leq\alpha_2+\beta_2$ следва от това, че числото $\alpha_2+\beta_2$ е горна граница за множеството $\{\alpha_1+\beta_1\}$, а x е точната горна граница, т. е. най-малката от горните граници на това множество. Теоремата е доказана.

Забележка. Съвсем аналогично се доказва, че сумата на числата a и b е точна долна граница на множеството $\{\alpha_2+\beta_2\}$ от сумите $\alpha_2+\beta_2$ на всички възможни рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a\leq\alpha_2$, $b\leq\beta_2$.

Теорема за единственост на сумата на две реални числа. *Съществува само едно реално число x, което е сума на две дадени реални числа a и b.*

Доказателство. Да предположим, че съществуват две реални числа x_1 и x_2, удовлетворяващи неравенствата

$$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1\leq x_1\leq\alpha_2+\beta_2,\\ \alpha_1+\beta_1\leq x_2\leq\alpha_2+\beta_2\end{cases}\tag{2.12}$$

за всички възможни рационални числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяващи неравенствата

$$\alpha_1\leq a\leq\alpha_2,\ \beta_1\leq b\leq\beta_2.\tag{2.13}$$

Да фиксираме едно произволно положително рационално число ε. Съгласно лема 1 от 2. 3 за положителното рационално число $\varepsilon/2$ и за даденото реално число a съществуват такива рационални числа α_1 и α_2, че $\alpha_1\leq a\leq\alpha_2$, при което $\alpha_2-\alpha_1<\varepsilon/2$.

Аналогично за избраното $\varepsilon/2$ и за даденото реално число b съществуват такива рационални числа β_1 и β_2, че $\beta_1\leq b\leq\beta_2$ и $\beta_2-\beta_1<\varepsilon/2$.

Ако вземем в неравенствата (2.13) посочените α_1, α_2, β_1 и β_2, ще получим, че двете числа x_1 и x_2 удовлетворяват неравенствата 2.12), които могат да се препишат във вида

$$\gamma_1\leq x_1\leq\gamma_2,\ \gamma_1\leq x_2\leq\gamma_2,$$

където $\gamma_1=\alpha_1+\beta_1$, $\gamma_2=\alpha_2+\beta_2$.

Тъй като $\gamma_2-\gamma_1=(\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_1)=(\alpha_2-\alpha_1)+(\beta_2-\beta_1)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$, ще получим, че двете числа x_1 и x_2 са заключени между рационалните числа γ_1 и γ_2, разликата между които е по-малка от отна пред избраното положително рационално число ε.

Поради лема 3 от 2.3 имаме $x_1=x_2$. □

Следствие. Ако приложим даденото определение за сума на реални числа за две рационални числа a и b, ще получим същия резултат, както и с определението за сума на рационални числа.

Наистина нека a и b са две рационални числа, $a+b$ е сумата им съгласно старото определение, α_1, α_2, β_1 и β_2 са произволни рационални числа, удовлетворяващи неравенствата (2.13). Тогава очевидно са верни неравенствата*

$$\alpha_1+\beta_1\leq a+b\leq\alpha_2+\beta_2,\tag{2.14}$$

при това съгласно теоремата за единственост числото $a+b$ е единственото реално число, удовлетворяващо неравенствата (2.14).

Съвсем аналогично се доказва съществуването и единствеността на произведението на две реални числа.

Ясно е, че е достатъчно да се докаже съществуването и единствеността на произведението на две положителни числа a и b.

За да докажем съществуването на произведението, фиксираме произволни рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a\leq\alpha_2$, $b\leq\beta_2$, и разглеждаме всички рационални числа α_1 и β_1, удовлетворяващи неравенствата $0<\alpha_1\leq a$, $0<\beta_1\leq b$. Лесно е да се убедим, че множеството $\{\alpha_1.\beta_1\}$ от всички произведения $\alpha_1.\beta_1$ е

* Тъй като за рационалните числа еднопосочните неравенства могат да бъдат събирани почленно.

ограничено отгоре и числото $\alpha_2 . \beta_2$ е една горна граница на това множество.

Съгласно основната теорема 2.1 съществува точна горна граница x на това множество, която, както лесно се проверява, удовлетворява неравенствата $\alpha_1\beta_1 \leq x \leq \alpha_2\beta_2$, т. е. е произведение на числата a и b.

Аналогично може да се докаже, че произведението на положителните числа a и b е точна долна граница на множеството $\{\alpha_2 . \beta_2\}$ от произведенията $\alpha_2 . \beta_2$ на всички рационални числа α_2 и β_2, удовлетворяващи неравенствата $a \leq \alpha_2$, $b \leq \beta_2$.

За да докажем единствеността на произведението на две реални числа a и b, ще предположим, че съществуват две такива реални числа x_1 и x_2, удовлетворяващи неравенствата

$$\alpha_1 . \beta_1 \leq x_1 \leq \alpha_2 . \beta_2, \quad \alpha_1 . \beta_1 \leq x_2 \leq \alpha_2 . \beta_2 \tag{2.15}$$

за всички рационални числа α_1, α_2, β_1 и β_2, че*

$$0 < \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2 \leq M, \quad 0 < \beta_1 \leq b \leq \beta_2 \leq M. \tag{2.16}$$

Фиксираме произволно положително рационално число ε, с помощта на лема 1 намираме за дадените реални числа a и b такива рационални числа α_1, α_2, β_1 и β_2, удовлетворяващи неравенствата (2.16), за които $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon/2M$ и $\beta_2 - \beta_1 < \varepsilon/2M$.

Но тогава поради (2.15) числата x_1 и x_2 ще бъдат заключени между рационалните числа $\alpha_1 . \beta_1$ и $\alpha_2 . \beta_2$, чиято разлика е

$$\alpha_2 . \beta_2 - \alpha_1 . \beta_1 = \alpha_2(\beta_2 - \beta_1) + \beta_1(\alpha_2 - \alpha_1) < 2M . \varepsilon/2M = \varepsilon.$$

Съгласно лема 3 от 2.3 $x_1 = x_2$.

С помощта на теоремата за единственост, както и при сума, се доказва, че за рационални числа това определение е еквивалентно на определението за произведение на рационални числа, дадено по-рано.

2.5. Свойства на реалните числа

2.5.1. Основни свойства на реалните числа. В тази точка ще установим, че за реалните числа са валидни всички основни свойства на рационалните числа, изброени в 2.1.1. Вече бе установено, че реалните числа притежават свойствата 1^0—4^0, така че остава да се изясни само въпросът за свойствата 5^0—16^0. Лесно се убеждаваме, че за реалните числа са налице свойствата 5^0—8^0 и 14^0 свързани с понятието сума. Валидността на свойствата 5^0—8^0

* За M може да се вземе например числото $2(a+b)$.

произтича непосредствено от определението за сума на реални числа и от валидността на тези свойства за рационални числа.

Ще се спрем на доказателството на свойство 14^0, т. е. ще докажем, че ако a, b и c са три произволни реални числа и $a > b$, то $a + c > b + c$.

Тъй като $a > b$, то съгласно лема 2 от 2.3 съществуват такива рационални числа α_1 и β_2, че $a > \alpha_1 > \beta_2 > b$. За реалното число c и за положителното рационално число $\varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$ съществуват такива рационални числа γ_1 и γ_2, че $\gamma_1 \leq c \leq \gamma_2$, при което $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$ (вж. лема 1, 2.3). Нека сега α_2 и β_1 са произволни рационални числа, удовлетворяващи неравенствата $\alpha_2 \geq a$, $b \geq \beta_1$. Тогава по определението за сума на реални числа

$$\alpha_2 + \gamma_2 \geq a + c \geq \alpha_1 + \gamma_1, \quad \beta_2 + \gamma_2 \geq b + c \geq \beta_1 + \gamma_1.$$

За доказване на $a + c > b + c$ поради транзитивността на знака $>$ е достатъчно да покажем, че $\alpha_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2$, но това непосредствено следва от неравенството $\gamma_2 - \gamma_1 < \alpha_1 - \beta_2$.

Ще отбележим, че въпросът за изваждане на реални числа като действие, обратно на събирането, се изчерпва напълно въз основа на свойства 5^0—8^0. ***Разлика на две реални числа*** *a и b ще наричаме реалното число c,* за което $c + b = a$.

Ще се убедим, че тази разлика е числото $c = a + b'$, където b' е противоположното число на b.

Наистина от свойства 5^0—8^0 следва $c + b = (a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$.

Ще се убедим също, че съществува само едно реално число, което е разлика на две дадени реални числа. Да предположим, че освен посоченото число $c = a + b'$ съществува още едно такова число d, че $d + b = a$. Тогава, от една страна, $(d + b) + b' = a + b' = c$, а, от друга, $(d + b) + b' = d + (b + b') = d + 0 = d$, т. е. $c = d$.

От определението на разлика и от свойство 8^0 следва, че числото a', противоположно на a, е равно на разликата $0 - a$. Това число се записва $-a$.

Не представлява трудност да се пренесат за реалните числа свойствата 9^0—13^0 и 15^0, свързани с понятието произведение. Ще отбележим само, че по отношение на свойство 12^0, ако a е реално положително число, а α_1 и α_2 са произволни рационални числа, удовлетворяващи неравенствата $0 < \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, то числото a', обратно на a, се определя като единственото реално число, удовлетворяващо неравенствата $1/\alpha_2 \leq a' \leq 1/\alpha_1$.*

* За a' може да бъде взета точната горна граница на множеството на всички рационални числа $\{1/\alpha_2\}$, където $\alpha_2 \geq a$.

От свойствата 9^0—12^0 заключаваме, че *за всеки две реални числа a и b ($b \neq 0$) съществува и при това само едно число c, удовлетворяващо $c \cdot b = a$. Това число c се нарича* ***частно на числата*** *a и b.* От определението за частно и от свойство 12^0 следва, че числото a', обратно на числото a, е равно на числото $1/a$.

Ще отбележим накрая, че за реалните числа е в сила и последното 16^0-то свойство, а именно: Каквото и да е реалното число a, то числото 1 може да се прибави към себе си толкова пъти, че получената сума да надвишава a.

Да докажем това свойство. В случая $a<0$ то е вярно, тъй като $1>a$. Нека $a \geq 0$, $a = a_0, a_1 a_2 \cdots$ Достатъчно е да се докаже, че за числото a съществува цяло число n, за което $n>a$, тъй като чрез сумиране на числото 1 n пъти ще получим цялото число n. Но това е очевидно: достатъчно е да вземем $n = a_0 + 2$. □

По такъв начин за реалните числа са валидни всички основни свойства на рационалните числа, формулирани в 2.1.1.

Следователно за реалните числа са в сила всички алгебрични правила, отнасящи се за аритметичните действия и съчетаването им с равенства и неравенства.

2.5.2. Две важни съотношения. При работа с рационални числа често се използват съотношенията:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \tag{2.17}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{2.18}$$

Равенството (2.17) следва непосредствено от определението за произведение на две реални числа. Ще докажем неравенството (2.18). От определението за модул и правилото за наредба следва, че за произволни реални числа a и b са изпълнени неравенствата

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Съгласно основните свойства еднопосочните неравенства могат да се събират почленно. Затова

$$-(|a| + |b|) \leq a+b \leq (|a| + |b|).$$

Използвайки в случая $a+b>0$ дясното, а в случая $a+b \leq 0$ лявото от последните неравенства, ще получим неравенството (2.18).

2.5.3. Някои конкретни множества от реални числа. По-нататък често ще срещаме различни множества от реални числа. Както вече се условихме, произволно множество от реални числа ще означаваме с символа $\{x\}$, а числата от него ще наричаме елементи или точки на това множество. Ще казваме, че точката

x_1 от множеството $\{x\}$ ($x_1 \in \{x\}$) е различна от точката x_2 на това множество, ако реалните числа x_1 и x_2 не са равни помежду си. Ако при това е вярно неравенството $x_1 > x_2$ ($x_1 < x_2$), ще казваме, че точката x_1 лежи надясно (наляво) от точката x_2.

Да разгледаме някои често употребявани множества от реални числа.

1°. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a \leq x \leq b$, ще наричаме* ***сегмент*** *или* ***затворен интервал*** *и ще го означаваме със символа $[a, b]$.*

2°. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a<x<b$, ще наричаме* ***интервал*** *или* ***отворен интервал*** *и ще го означаваме със символа (a, b).*

3°. *Интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, където $\varepsilon>0$, ще наричаме* ***ε-околност на точката*** *a.*

4°. *Всеки интервал (отворен интервал), съдържащ точката a, ще наричаме* ***околност на точката*** *a.*

5°. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенствата $a \leq x < b$ (или $a < x \leq b$), ще наричаме* ***полусегмент*** *или* ***полузатворен отдолу (отгоре) интервал,*** *или* ***полузатворен отляво (отдясно) интервал*** *и ще го означаваме със символа $[a, b)$ (или $(a, b]$).*

6°. *Множеството на всички реални числа ще наричаме* ***числова (безкрайна) права*** *и ще го означаваме със символа $(-\infty, +\infty)$.*

7°. *Множеството на реалните числа x, удовлетворяващи неравенството $x \geq a$ (или $x \leq b$), ще наричаме* ***полуправа*** *и ще го означаваме със символа $[a, +\infty)$ (или $(-\infty, b]$).*

8°. *Множеството от реални числа x, удовлетворяващи неравенството $x>a$ (или $x<b$), ще наричаме* ***отворена полуправа*** *и ще го означаваме със символа $(a, +\infty)$ (или $(-\infty, b)$).*

Забележка 1. Най-общо под понятието „*интервал*" се разбира множество от вида 1°, 2°, 5°, 6°, 7° и 8°. В първите три случая имаме „*крайни интервали*", а в последните три — „*безкрайни интервали*". Ако в текста се среща понятието „интервал" без прилагателно (отворен, затворен, краен, безкраен и т. н.), то видът му или е отнапред посочен, или се изяснява от символа, с който е означен. Когато липсва каквато и да било информация за вида на интервала, ще смятаме, че е „краен отворен интервал".

Забележка 2. В случаите 1°, 2° и 5° точките a и b се наричат ***гранични точки, контурни точки*** или ***краища*** на интервала. В случая 1° те принадлежат на интервала, в 2° не принадлежат на интервала, а в 5° едната принадлежи, а другата не принадлежи на интервала. И в трите случая всяка точка, която удовлетворява неравенствата $a<x<b$, се нарича ***вътрешна точка на интервала.***

Произволно множество $\{x\}$ ще наричаме ***плътно (навсякъде гъсто) в себе си,*** *ако всяка околност на всяка точка x от това множество съдържа поне една точка от множеството $\{x\}$, различна от x.* Пример за плътно (навсякъде гъсто) в себе си множество е всяко от определените по-горе множества 1°—8°. Други примери за плътни (навсякъде гъсти) в себе си множества са множествата на рационалните числа, принадлежащи на кое да е от множествата 1°—8°.

2.6. Допълнителни въпроси от теорията на реалните числа

За въвеждане на реалните числа използвахме безкрайните десетични дроби. За множеството на безкрайните десетични дроби бяха определени правила за наредба, събиране и умножение и беше установено, че тези правила удовлетворяват шестнадесет основни свойства (изброени в 2.1.1 за рационалните числа). Използваният метод за въвеждане на реалните числа не е единствено възможният. Реалните числа могат да се въведат с помощта на безкрайни двоични дроби, с помощта на т. нар. дедекиндови сечения в областта на рационалните числа, с помощта на редици от рационални числа и по други начини. За да изясним връзката между различните методи за въвеждане на реалните числа, ще въведем някои нови понятия и ще установим още едно важно свойство на множеството на реалните числа.

2.6.1. ***Пълнота на множеството от реалните числа.*** Нека A и B са две произволни множества. *Ще казваме, че между множествата A и B е установено* ***взаимно еднозначно съответствие (1,1-значно съответствие),*** *ако на всеки елемент на множеството A отговаря единствен елемент от множеството B, така че на всеки елемент на множеството B е съпоставен някой елемент от множеството A и на различни елементи на множеството A съответстват различни елементи на множеството B.*

Две множества, за елементите на всяко от които са определени правила за наредба, събиране и умножение, ще наричаме ***изоморфни едно на друго*** *(или за краткост* ***изоморфни****) относно тези правила, ако между елементите на тези множества може да се установи такова взаимно еднозначно съответствие, че ако на елементите a и b от първото множество съответстват елементите a' и b' от второто множество, то: 1) елементите a' и b' са свързани със същия знак ($>, <$ или $=$), както и елементите a и b; 2) на елемента $a+b$ съответствува елементът $a'+b'$; 3) на елемента $a \,.\, b$ съответствува елементът $a' \,.\, b'$.*

Аналогично може да се въведе понятието изоморфни множества въз основа и на други правила, характеризиращи някакви съотношения между елементите на множествата, различни от правилата за наредба, събиране и умножение.

Пример на две изоморфни множества относно правилата наредба, събиране и умножение са множеството на рационалните числа, въведени като отношение на цели числа със съответните (вж. 2.1.1) правила за наредба, събиране и умножение, и множеството на рационалните числа, записани във вид на безкрайни десетични дроби с обикновените правила за наредба, събиране и умножение на реални числа.

Ще разгледаме по-внимателно две множества: множеството на рационалните числа и множеството на реалните числа. За всяко от тези множества са определени правила за наредба, събиране и умножение и са изпълнени шестнадесетте основни свойства. Ясно е, че множеството на реалните числа е „по-широко" от множеството на рационалните числа, тъй като множеството на реалните числа не е изоморфно на множеството на рационалните числа относно правилата за наредба, събиране и умножение,* но в множеството на реалните числа може да се отдели част, изоморфна на множеството на рационалните числа относно посочените правила.

Естествено възниква въпросът: възможно ли е и за множеството на реалните числа да се построи „по-широко" множество от обекти със следните свойства: 1) в това „по-широко" множество да са определени правила за наредба, събиране и умножение и да са изпълнени останалите от 16-те основни свойства; 2) това „по-широко" множество да не е изоморфно на множеството на реалните числа относно посочените правила; 3) в „по-широкото" множество да може да се отдели част, изоморфна на множеството на реалните числа относно посочените правила.

Ще докажем, че такова „по-широко" множество не съществува, т. е. множеството на реалните числа е пълно относно правилата наредба, събиране и умножение и останалите от 16-те основни свойства.

Въобще *произволно множество от обекти, за които са определени някои правила и са изпълнени някои свойства, се нарича пълно относно тези правила и свойства, ако не може да се построи такова „по-широко" множество от обекти, че:*

* В 2.7.3 ще бъде доказано, че не може да се установи взаимно еднозначно съответствие между рационалните и реалните числа от сегмента [0, 1], откъдето следва твърдението.

1) в това „по-широко" множество да са определени същите правила и да има същите свойства; 2) това „по-широко" множество да не е изоморфно на даденото относно посочените правила; 3) в това „по-широко" множество да съществува част, изоморфна на даденото множество относно посочените правила.

Можем да твърдим, че множеството на рационалните числа не е пълно относно правилата наредба, събиране и умножение и останалите от 16-те основни свойства, тъй като съществува „по-широко" множество (множеството на реалните числа), удовлетворяващо изискванията 1), 2), 3) от току-що формулираното определение.

Сега ще докажем, че множеството на реалните числа е пълно относно правилата за наредба, събиране и умножение и останалите от 16-те основни свойства.

Да предположим противното, т. е. че съществува такова „по-широко" множество от обекти $\{x'\}$, че да са изпълнени 1), 2) и 3) от формулираното по-горе определение, и да означим с $\{\bar{x}'\}$ тази част от множеството $\{x'\}$, която е изоморфна на множеството $\{x\}$ от реалните числа относно правилата за наредба, събиране и умножение.

Ще отбележим най-напред, че в множеството $\{x'\}$ съществува единствена двойка елементи $0'$ и $1'$, играещи особената роля на нула и единица.* Можем да твърдим, че елементите $0'$ и $1'$ принадлежат на множеството $\{\bar{x}'\}$ и са във взаимно еднозначно съответствие с реалните числа 0 и 1.**

Нека α' е кой да е елемент на множеството $\{x'\}$, непринадлежащ на множеството $\{\bar{x}'\}$. Като използваме правилото за наредба, можем да разделим елементите $\bar{x}'$ на множеството $\{\bar{x}'\}$ на два класа — горен и долен, отнасяйки към горния клас всички елементи $\bar{x}'$, удовлетворяващи неравенството $\bar{x}'>\alpha'$, а към долния клас — всички елементи $\bar{x}'$, удовлетворяващи неравенството $\bar{x}'<\alpha'$. Тези два класа не са празни. Наистина ще докажем на-

* Ако имаше два елемента $0_1'$ и $0_2'$, играещи особената роля на нулата, то от свойствата на сумата ще получим $0_1'=0_1'+0_2'=0_2'+0_1'=0_2'$, т. е. $0_1'=0_2'$. Аналогично се доказва единствеността на елемента $1'$, играещ особената роля на единица.

** Ще докажем например, че елементът $0'$ принадлежи на множеството $\{\bar{x}'\}$ и се намира във взаимно еднозначно съответствие с реалното число 0. Да предположим, че на реалното число 0 съответствува някой елемент θ' от множеството $\{\bar{x}'\}$. Тъй като $0+0=0$, то $\theta'+\theta'=\theta'$. В множеството $\{x'\}$ съществува такъв елемент θ'', че $\theta''+\theta'=0'$. Прибавяйки към двете страни на равенството $\theta'+\theta'=\theta'$ елемента θ'', получаваме $(\theta''+\theta')+\theta'=\theta''+\theta'$, т. е. $0'+\theta'=0'$, или $\theta'=0'$. Аналогично се провеждат и разсъжденията за единичния елемент.

пример, че горният клас не е празен. Събирайки елемента $1'$ сам със себе си достатъчен брой пъти, поради свойство 16° ще получим елемент n' от множеството $\{\bar{x}'\}$, удовлетворяващ неравенството $n'>\alpha'$, т. е. принадлежащ на горния клас. От свойство 4° следва, че всеки елемент от долния клас е по-малък от произволен елемент от горния клас.

Поради изоморфизма между множеството $\{\bar{x}'\}$ и множеството $\{x\}$ на реалните числа можем да твърдим, че множеството на реалните числа се разделя на два класа, при това всяко число от долния клас е по-малко от всяко число от горния клас. Но това означава, че долният клас от реални числа е ограничен отгоре и има (според теорема 2.1) точна горна граница m, а горният клас има точна долна граница M. От определенията за точни граници следва, че двете граници m и M са заключени между произволно близки реални числа и затова $m=M$. Тъй като числото $m=M$ е реално число, то принадлежи на един от двата класа, т. е. или съществува най-малък елемент в горния клас, или най-голям елемент в долния клас. Ще докажем, че и двете твърдения са абсурдни. Нека например съществува най-малък елемент в горния клас от реални числа. Тогава съществува най-малък елемент m' и в горния клас при съответното разделяне на множеството $\{\bar{x}'\}$. Според определението на горния клас $m'>\alpha'$. Съгласно свойствата на сума съществува разликата $m'-\alpha'$ и $m'-\alpha'>0'$. Но тогава от 11° за елемента $m'-\alpha'$ съществува обратен, който съгласно свойствата на произведение е равен на частното $1'/(m'-\alpha')$. Поради свойство 16° от елемента $1'$ може да се получи „цял" елемент n', който принадлежи на $\{\bar{x}'\}$ и удовлетворява неравенството $n'>1'/(m'-\alpha')$. От това неравенство и свойствата на произведение и сума получаваме*

$$m'-1'/n'>\alpha'. \tag{2.19}$$

Тъй като елементите m', $1'$ и n' принадлежат на множеството $\{\bar{x}'\}$, то и елементът $(m'-1'/n')$ също така принадлежи на това множество и очевидно удовлетворява неравенството $m'-1'/n'<m'$. Но тогава неравенството (2.19) означава, че горният клас има елемент, по-малък от m', т. е. m' не е най-малкият елемент. Полученото противоречие доказва пълнотата на множеството на реалните числа.**

* Тези свойства осигуряват приложимостта на всички правила на алгебрата.

** При доказателството на тази теорема се използва идеята на така нареченото дедекиндово сечение. Дедекиндово сечение в областта на рационалните числа се нарича разделянето на множеството на рационалните числа на две непразни подмножества A и B, такива, че всеки елемент на A да е по-малък от всеки елемент на B.

2.6.2. Аксиоматично въвеждане на множеството на реалните числа. За въвеждане на реалните числа използвахме множеството на безкрайните десетични дроби. Определяйки за множеството на тези дроби правила за наредба, събиране и умножение, установихме, че елементите на това множество притежават 16-те основни свойства и освен това свойството пълнота относно тези правила.

Описаният начин за въвеждане на реални числа, въпреки че притежава, както вече отбелязахме, несъмнени евристични и методични достойнства, не е единствено възможният и целесъобразният от научна гледна точка. За окончателното оформяне и пълната логическа завършеност на нашите представи за реалните числа е добре да се разгледа и аксиоматичният метод за въвеждане на тези числа.

Този метод се заключава в следното: Множеството от реални числа се въвежда като съвкупност от обекти,* удовлетворяващи 17 аксиоми. Това са 16-те основни свойства и аксиомата за пълнотата относно тях. Тези 17 аксиоми ще наричаме ***аксиоми на реалните числа.*** Конкретна реализация на съвкупност от обекти, удовлетворяващи 17-те аксиоми на реалните числа, е изученото вече множество на безкрайните десетични дроби. Възможни са и други реализации.

В сила е следното забележително твърдение:

Теорема за изоморфизъм. *Всяка реализация на съвкупност от обекти, удовлетворяващи 17-те аксиоми на реалните числа, е изоморфна на изученото множество на безкрайните десетични дроби.*

Доказателството на тази теорема е приведено в 2.6.3.

В геометрията множество от точки върху права се въвежда като съвкупност от обекти, удовлетворяващи известен брой аксиоми, между които основна роля играе аксиомата за пълнотата на тази съвкупност относно останалите аксиоми. Споменатите аксиоми позволяват да се установи взаимно еднозначно съответствие между множеството на точките върху правата и множеството на всички реални числа. Това съответствие позволява реалните числа да се изобразяват като точки на права линия (числовата ос), което ние широко ще използваме с илюстративни цели.

2.6.3. Доказателство на теоремата за изоморфизъм. За удобство ще разделим доказателството на отделни пунктове.

1°. Нека $\{x'\}$ е множество от обекти, удовлетворяващо 17-те аксиоми на реалните числа. Преди всичко ще отбележим, че аксиомите гарантират съществуването на елементите $0'$ и $1'$ в множеството $\{x'\}$, играещи особена роля на нула и единица. От аксиомата на Архимед 16° имаме $1'>0'$.* В множеството $\{x'\}$ отделяме съвкупността от „рационални обекти". Във връзка с това ще отбележим, че всяко рационално число може да се получи от числата 0 и 1 чрез операциите събиране, изваждане и деление. Действително, сумирайки 1 достатъчен брой пъти, можем да получим всяко цяло положително число n; изваждайки от 0 достатъчен брой 1, ще получим всяко цяло отрицателно число; с деление на две цели числа получаваме всяко рационално число. Тъй като съгласно аксиомите в множеството $\{x'\}$ са определени операциите събиране, изваждане и деление, то с помощта на първите две операции от $0'$ и $1'$ ще получим всички (положителни и отрицателни) „цели обекти", а с деление на два „цели обекта" — и всички (положителни и отрицателни) „рационални обекти". Тези обекти ще означаваме, както целите и рационалните числа, но с „'".

Ще докажем, че построената съвкупност от рационални обекти на множеството $\{x'\}$ е изоморфна на съвкупността на рационалните числа на множеството $\{x\}$. Поставяме в съответствие на рационалното число m/n „рационалния обект" m'/n'. От начина на построяване на „рационалните обекти" следва, че на сумата и произведението на рационалните числа m/n и p/q съответстват сумата и произведението на „рационалните обекти" m'/n' и p'/q'. Остава да се убедим, че m'/n' и p'/q' са свързани със същия знак за равенство или неравенство, както m/n и p/q. Тъй като за построените „рационални обекти" правилото за наредба посредством умножаване на „цели обекти" може да се сведе до наредба на „цели обекти", то е достатъчно да се убедим, че за всеки два „цели обекта" m' и n' имаме $m'>n'$ при $m>n$. За това е достатъчно да докажем, че $(n+1)'>n'$. Последното следва от това, че $1'>0'$, и оттук $(n+1)'=n'+1'>n'+0'=n'$.

2°. Нека a' е произволен обект от множеството $\{x'\}$. Ще покажем, че на този обект може да се съпостави напълно определена „безкрайна десетична дроб". За определеност ще предположим, че $a'>0'$. Според аксиома 16° сред „целите обекти", строго по-малки от a', има най-голям обект, който ще означим с a'_0; сред „рационалните обекти" a'_0, $0'$; a'_0, $1'$; . . . ; a'_0, $9'$, строго по-малки от a', има най-голям, който означаваме с a'_0, a'_1, и т. н.

По такъв начин ние съпоставихме на всеки обект $a'>0'$ безкрайна съвкупност от „рационални обекти"

$$a'_0;\ a'_0,\ a'_1;\ a'_0,\ a'_1 a'_2;\ \cdot\cdot\cdot;\ a'_0,\ a'_1\ a'_2 \cdot\cdot\cdot a'_n;\ \cdot\cdot\cdot, \tag{2.20}$$

* При това нищо не се предполага за естеството на тези обекти.

* Наистина, ако допуснем противното: $1'\leqq 0'$, ще получим $1'+1'+\ldots+1'\leqq 0'+0'+\ldots+0'=0'$ (колкото и единици да съберем), което противоречи на аксиома 16°.

или „безкрайната десетична дроб“

(2.21) $$a'_0,\ a'_1\ a'_2 \cdot \cdot \cdot a'_n \cdot \cdot$$

Същите разсъждения са валидни и за $a'<0'$, но в този случай както обектите (2.20), така и „безкрайната десетична дроб“ (2.21) ще имат знак „—“. От построението на съвкупността обекти (2.20) е очевидно, че за всеки номер n са изпълнени неравенствата

(2.22) $$a'_0,\ a'_1\ a'_2 \cdot \cdot \cdot a'_n < a' \leqq a'_0,\ a'_1\ a'_2 \cdot \cdot \cdot a'_n + 1'/(10^n)',$$

т. е. всеки обект a' е заключен между два „рационални обекта“, разликата между които $1'/(10^n)'$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен“ обект.*

3°. Ще докажем сега, че ако два обекта a' и b' могат да се заключат между два „рационални обекта“ α' и β' ($\beta'>\alpha'$), разликата между които $\beta'-\alpha'$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен обект“, то $a'=b'$. Да допуснем, че $a'\neq b'$. Нека например $a'<b'$. Тогава $\alpha'\leqq a'<b'\leqq\beta'$. От тези неравенства и от аксиомите получаваме

(2.23) $$0'<b'-a'\leqq\beta'-\alpha'.$$

Но тогава за обекта $b'-a'$ ще се намери обратен $1'/(b'-a')$, а за него „цял обект“ n', за който $n'>1'/(b'-a')$, така че $1'/n'<b'-a'$. Съпоставяйки последното неравенство с (2.23), получаваме $1'/n'<\beta'-\alpha'$, което противоречи на това, че разликата $\beta'-\alpha'$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен“ обект.

4°. Ще се убедим, че на два различни обекта от множеството $\{x'\}$ се съпоставят различни „безкрайни десетични дроби“. Действително да предположим, че на два обекта от $\{x'\}$ съответствува една и съща „безкрайна десетична дроб“ (например (2.21)). Тогава поради неравенствата (2.22) тези два обекта могат да бъдат заключени между „рационални обекти“, разликата между които може да бъде направена по-малка от всеки отнапред зададен „положителен“ обект. Въз основа на 3° разглежданите обекти са равни. Доказаното твърдение оправдава представянето на всеки обект от множеството $\{x'\}$ с „безкрайна десетична дроб“.

5°. Съгласно първите три аксиоми за обектите от множеството $\{x'\}$ са определени правила за наредба и операциите събиране и умножение. Ще докажем, че ако всички обекти на множеството $\{x'\}$ се представят с „безкрайни десетични дроби“, то

* Действително за всеки обект $\varepsilon'>0'$ вследствие на аксиомите съществува обратен елемент $1'/\varepsilon'$, а за него — „цял обект“ n', за който $n'>1'/\varepsilon'$, така че $1'/(10^n)'<1'/n'<\varepsilon'$.

за тези „дроби“ правилото за наредба и определенията на сума и произведение се формулират точно така, както за обикновените безкрайни десетични дроби, изучени по-горе.

Нека a' и b' са произволни обекти от множеството $\{x'\}$ и нека на тези обекти съответствуват „безкрайните десетични дроби“*

(2.24) $$a'_0,\ a'_1\ a'_2 \cdot \cdot \cdot \text{ и } b'_0,\ b'_1\ b'_2 \cdot \cdot \cdot$$

Най-напред ще установим правилото за наредба на обектите a' и b', представени с „безкрайните десетични дроби“ (2.24). Трябва да се докажат следните две твърдения: 1) ако дробите (2.24) съвпадат, т. е. ако $a'_0=b'_0,\ a'_1=b'_1, \cdot \cdot \cdot, a'_n=b'_n, \cdot \cdot \cdot$, то обектите a' и b' са равни; 2) ако се намери такъв номер n, че да са изпълнени съотношенията

(2.25) $$a'_0=b'_0,\ a'_1=b'_1, \cdot \cdot \cdot, a'_{n-1}=b'_{n-1},\ a'_n<b'_n,$$

то обектите a' и b' са свързани с неравенството $a'<b'$. Твърдението 1) е вече доказано в 4°. Ще докажем твърдението 2). Последното от съотношенията (2.25) може да се напише във вида $a'_n+1'\leqq b'_n$. Като използваме това съотношение и останалите съотношения от (2.25) и запишем за a' дясното неравенство (2.22), а за b' — лявото неравенство (2.22), ще получим

$$a'<a'_0,a'_1a'_2 \cdot \cdot \cdot a'_{n-1}a'_n+1'/(10^n)'=a'_0,a'_1a'_2 \cdot \cdot \cdot a'_{n-1}(a'_n+1')$$
$$\leqq a'_0,a'_1a'_2 \cdot \cdot \cdot a'_{n-1}\ b'_n\leqq b',\ \text{т. е. } a'<b'.$$

За обектите a' и b' са валидни същите определения за сума и произведение с използването на „рационални обекти“, както при обикновените реални числа. Ще се ограничим с доказателство за случай на сума. Нека α'_1, α'_2, β'_1 и β'_2 са произволни „рационални обекти“, удовлетворяващи неравенствата

(2.26) $$\alpha'_1\leqq a'\leqq\alpha'_2,\ \beta'_1\leqq b'\leqq\beta'_2.$$

Тогава сумата $a'+b'$ на обектите a' и b' е единственият обект, удовлетворяващ неравенствата

(2.27) $$\alpha'_1+\beta'_1\leqq a'+b'\leqq\alpha'_2+\beta'_2.$$

Действително от аксиомите следва възможността за почленно събиране на неравенствата, а оттук, че сумата $a'+b'$ удовлетворява неравенствата (2.27). Освен това тази сума е единственият обект, удовлетворяващ неравенствата (2.27), тъй като всяка от

* При установяването на правилото за наредба можем да се ограничим със случая на „положителни“ обекти a' и b', тъй като общият случай се свежда към този с помощта на правилото за знаците.

разликите $\alpha_2'-\alpha_1'$ и $\beta_2'-\beta_1'$, а оттук и разликата $(\alpha_2'+\beta_2')-(\alpha_1'+\beta_1')$ може да бъде направена по-малка от всеки отнапред избран „положителен" обект (съгласно 2⁰). Аналогично се разглежда случаят за произведение.

6⁰. Ще докажем, че множеството $\{x'\}$ е изоморфно на множеството на реалните числа, представими с безкрайни десетични дроби. На обекта x', представен с „безкрайната десетична дроб" $a_0', a_1' a_2' \cdots a_n' \cdots$, ще съпоставим реалното число $a=a_0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$ Нека на обектите a' и b' съответствуват реалните числа a и b. От резултатите в 5⁰ следва, че 1) a' и b' са свързани със същия знак за равенство или неравенство, както и числата a и b; 2) сумата $a'+b'$ съответствува на сумата $a+b$; 3) произведението $a'.b'$ съответствува на произведението $a.b$.*

Остава да се докаже, че при установеното съответствие на всяко реално число съответствува обект от множеството $\{x'\}$. Ако това не е така, то множеството $\{x'\}$ може да се допълни с недостигащите му „безкрайни десетични дроби", запазвайки валидността на 16-те аксиоми. Така стигаме до противоречие с това, че множеството $\{x'\}$ е пълно относно тези аксиоми. □

2.7. Елементи на теорията на множествата

2.7.1. Изброими и неизброими множества. Неизброимост на сегмента [0, 1]. Мощност на множество. Важен въпрос при изучаването на множествата е въпросът за тяхното сравняване по отношение на „количеството" на съдържащите се в тях елементи. Ако имаме две множества с краен брой елементи, то елементите на тези множества могат да се номерират. При това може да се окаже, че двете множества съдържат по еднакъв брой елементи. Такива две множества, съдържащи краен и еднакъв брой елементи, ще наричаме еквивалентни. Ако в едното множество елементите са повече, ще казваме, че то има по-голяма мощност от другото.

Да разгледаме сега множества, състоящи се, общо казано, от безбройно много елементи. Примери за такива множества са множеството на рационалните числа или множеството на реалните числа в сегмента [0, 1].

* Тъй като правилата за наредба, сума и произведение на обектите a' и b' и реалните числа a и b се определят по един и същ начин.

Две множества A и B ще наричаме ***еквивалентни,*** *ако съществува между тях взаимно еднозначно съответствие, т. е. на всеки елемент $a \in A$ отговаря единствен елемент $b \in B$, всеки елемент $b \in B$ е съпоставен на някой елемент $a \in A$ и на различни елементи от множеството A отговарят различни елементи от множеството B.* Взаимно еднозначното съответствие се нарича още ***биекция*** *или* ***биективно съответствие.***

В частност множества, съдържащи краен брой елементи, са еквивалентни тогава и само тогава, когато съдържат еднакъв брой елементи. Еквивалентността на две множества означаваме така: $A \sim B$.

Ще покажем например, че множеството $R=\{r\}$ на рационалните числа и множеството $N=\{n\}$ на естествените числа са еквивалентни. Да отбележим най-напред, че при всяко цяло $k \neq 0$ двете рационални числа m/n и km/kn са равни ($n \neq 0$). Тогава всяко рационално число r може да се запише във вида $r=p/q$, $q>0$ (p и q — цели) и дробта е несъкратима. Числото 0 ще смятаме, че е записано по единствения начин: $0=0/1$.

Числото $h=|p|+q$ ще наричаме ***височина*** на рационалното число. Ясно е, че рационалните числа с дадена височина са краен брой. Да номерираме рационалните числа по нарастваща височина с помощта на естествените числа: първо ще номерираме всички рационални числа с височина $h=1$. Такова число е само едно: 0, и на него ще поставим индекс 1. След това ще номерираме рационалните числа с височина $h=2$. Такива числа са две: $1=1/1$ и $-1=-1/1$. На първото от тях ще съпоставим естественото число 2 (т. е. поставяме му индекс 2), а на второто — числото 3. След това ще номерираме рационалните числа с височина 3 и т. н. Ясно е, че по този начин ще установим взаимно еднозначно съответствие между рационалните и естествените числа, т. е. $R \sim N$.

Даваме следното определение:

Определение 1. *Едно множество се нарича* ***изброимо,*** *ако е еквивалентно на множеството на естествените числа.*

От проведените по-горе разсъждения се вижда, че множеството на рационалните числа е изброимо множество съгласно това определение.

Ще докажем следните две прости леми, отнасящи се за изброими множества:

Лема 1. *Всяко непразно подмножество на изброимо множество е или множество с краен брой елементи, или изброимо множество.*

Доказателство. Нека A е изброимо множество, т. е. $A \sim N$ е множеството на естествените числа. Това означава, че

елементите на A могат да се номерират по някакъв начин. Да разположим елементите на A във вид на редица: $a_1, a_2, a_3, \cdots$ Нека $\emptyset \neq B \subset A$. Разглеждаме редицата от елементи $a_1, a_2, a_3, \cdots$ Ако $a_1 \in B$, то този елемент означаваме с b_1, ако $a_1 \overline{\in} B$, минаваме към следващия елемент a_2. При разглеждане на елемента a_2 има две възможности: а) елементът $a_2 \in B$; ако при това сме имали, че и $a_1 \in B$, то a_2 означаваме с b_2, а ако $a_1 \overline{\in} B$, то елементът a_2 се означава с b_1; б) елементът $a_2 \overline{\in} B$, тогава минаваме към елемента a_3 и т. н. Ясно е, че може да се случи елементите на множеството B да се разположат във вид на крайна редица: $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_M$, $M < +\infty$. В този случай множеството B се състои от краен брой елементи. Ако това не се случи, то ние ще запишем всички елементи от множеството B във вид на безкрайна редица $b_1, b_2, b_3, \cdots$, откъдето следва, че множеството B е изброимо, тъй като очевидно $B \sim N$. □

Лема 2. *Обединението на краен брой или изброима съвкупност изброими множества е изброимо множество.*

Доказателство. Ще разгледаме случая, когато имаме изброима съвкупност изброими множества. Нека $A_1, A_2, A_3, \cdots$ е съвкупност от множества, всяко от които е изброимо. Да разположим елементите на множествата $A_1, A_2, A_3, \cdots$ във вид на редици:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\},$$
$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\},$$
$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Нека $A = \bigcup_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ще номерираме елементите a на множеството $A = \{a\}$ по следния начин:

$$a_1 = a_{11},\ a_2 = a_{21},\ a_3 = a_{12},\ a_4 = a_{31},\ a_5 = a_{22},\ a_6 = a_{13} \text{ и т. н.}$$

В някои от множествата A_i и A_j могат да се окажат общи елементи $(i \neq j)$. В този случай отчитаме тези елементи само веднъж.

По този начин елементите на множеството A могат да се номерират, т. е. да се установи взаимно еднозначно съответствие с множеството на естествените числа N, и следователно $A = \bigcup_n A_n \sim N$. □

Възниква въпросът: Съществуват ли безкрайни неизброими множества, т. е. безкрайни множества, на които не може да се съпостави във взаимно еднозначно съответствие множеството на естествените числа? Отговорът се дава от следното твърдение:

Теорема 22. *Множеството от всички точки на сегмента* [0, 1] *е неизброимо.*

Доказателство. Да разгледаме интервала (0, 1). Очевидно, ако докажем, че интервалът (0, 1) е неизброим, то и сегментът [0, 1] ще бъде неизброим, тъй като множеството от точките на сегмента [0, 1] се отличава от множеството от точките на интервала (0, 1) само с двете точки: 0 и 1. И така ще докажем, че множеството от точките на интервала (0, 1) е неизброимо. Ще допуснем противното, т. е. ще предположим, че всички реални числа от интервала (0, 1) могат да се номерират.

Записваме всички числа на интервала (0, 1) като безкрайни десетични дроби:

$$x_1 = 0{,}a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots,$$
$$x_2 = 0{,}a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = 0{,}a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Да разгледаме реалното число $x = 0{,}b_1b_2\cdots b_n\cdots$, където b_1 е коя да е цифра, различна от a_{11}, 0 и 9, и т. н., b_n е коя да е цифра, различна от a_{nn}, 0 и 9. Числото x не съдържа след запетаята нули и деветки, т. е. то не принадлежи към класа на рационалните числа, представими по два начина като безкрайни десетични дроби. В такъв случай числото x има единствено представяне и то е различно от всички числа $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, тъй като от съвпадането на x с някое число x_n би следвало съвпадане на b_n и a_{nn}. По такъв начин интервалът (0, 1), а заедно с него и сегментът [0, 1] е неизброим.

Определение 2. *Множество, еквивалентно на сегмента* [0, 1], *наричаме* ***множество с мощност на континуум.***

От доказаната теорема 2.2 следва, че множество с мощност на континуум и изброимо множество не са еквивалентни. По-специално от теорема 2.2 следва, че съществуват ирационални числа, тъй като в сегмента [0, 1] не всички числа са рационални: в противен случай бихме могли да ги номерираме. От теорема 2.2 също така следва, че ирационалните числа са неизброимо множество, тъй като, ако бяха изброимо или крайно множество, то по лема 2 и всичките числа — рационални и ирационални, биха били изброимо множество.

Ще преминем сега към по-подробно изучаване на понятието мощност на множество. На всяко множество A ще съпоставим един обект $m(A)$, наречен *мощност* или *кардинално число* на A. При това на две множества A и B се съпоставя едно и също кардинално число тогава и само тогава, когато $A \sim B$. Ще казваме, че *две множества A и B са* **равномощни** *или имат еднаква мощност, ако са еквивалентни, т. е. между елементите им може да се установи взаимно еднозначно съответствие.* Ако множеството A се състои от краен брой елементи, мощността му е равна на броя на елементите.

Нека сега A и B са две произволни множества, а $m(A)$ и $m(B)$ са мощностите им. Ние вече казахме, че ако $A \sim B$, то $m(A)=m(B)$. Ако A е еквивалентно на някое подмножество на B и при това A не съдържа подмножество, еквивалентно на B, ще приемем, че мощността на A е по-малка от мощността на B: $m(A) < m(B)$. Например от определението за множество с мощност на континуума, теорема 1 и лема 1 за изброимите множества следва, че мощността на изброимо множество е по-малка от мощността на сегмента [0, 1], т. е. от мощността на континуума.

И така въведохме сравняване на мощностите на две множества. Логически са възможни още два случая:

а) множеството A съдържа подмножество, еквивалентно на множеството B, а множеството B съдържа подмножество, еквивалентно на множеството A;

б) множествата A и B не са еквивалентни и нито едно от тях не съдържа подмножество, еквивалентно на другото.

Може да се покаже, че в случая а) множествата A и B са еквивалентни. Що се отнася до случая б), той е невъзможен.

Ще отбележим, че особено труден проблем се оказа съществуването на междинна мощност — между мощността на изброимите множества и мощността на континуума. Доказано е, че твърдението „няма междинна мощност" не противоречи на аксиомите на теорията на множествата и не може да бъде изведено от тях. Така че са възможни две различни системи от аксиоми на теорията на множествата. В едната система се приема като аксиома наличието, а в другата — липсата на междинна мощност.

2.7.2. Наредба. Частична наредба. Лема на Цорн. Нека за някои двойки елементи $a, b, c, \cdots$ на множеството A е въведена наредба, означена със символа $\prec$. Записването $a \prec b$ означава, че елементът a „предхожда" елемента b. Ще предположим, че това съотношение удовлетворява следните условия:

а) от $a \prec b$ и $b \prec c$ следва $a \prec c$;

б) винаги $a \prec a$;

в) от $a \prec b$ и $b \prec a$ следва $a=b$.

Когато са изпълнени тези предположения, множеството A се нарича *частично наредено*; елементи a и b, свързани със съотношение $a \prec b$ или $b \prec a$, се наричат сравними.

Множеството A се нарича **наредено,** *ако за всеки два различни елемента a и b е изпълнено едно от двете съотношения $a \prec b$ или $b \prec a$.*

Пример на наредено множество е множеството на реалните числа, ако за съотношение на наредба се приема съотношението „$\leqq$", което беше въведено по-рано. Леко се проверява, че условията а) — в) са изпълнени. Пример за частично наредено множество е множеството на всички възможни триъгълници, лежащи в равнината, ако за съотношение на наредба „$\prec$" приемем условието: триъгълникът T_1 „предхожда" триъгълника T_2, ако триъгълникът T_1 се съдържа в триъгълника T_2, т. е. всяка точка на триъгълника T_1 е точка на триъгълника T_2. Очевидно е, че не всеки два триъгълника в равнината са сравними при тази наредба.

Подмножеството B на частично нареденото множество A се нарича ограничено отгоре, ако съществува такъв елемент $a \in A$, че за всеки елемент $b \in B$ е изпълнено $b \prec a$. Елементът a се нарича горна граница на множеството B. Най-малката горна граница, т. е. такава, която „предхожда" всички останали, се нарича точна горна граница. Аналогично се определят долна граница и точна долна граница.

Елементът $z_0 \in A$ се нарича **максимален,** *ако в A не съществува $a \neq z_0$, удовлетворяващ съотношението $z_0 \prec a$.*

В сила е следната лема:

Лема на Цорн. *Ако в частично наредено множество A всяко наредено подмножество B притежава горна граница, то в A съществува максимален елемент.*

Едно наредено множество се нарича **напълно наредено,** *ако всяко негово непразно подмножество има най-малък елемент, т. е. елемент, предхождащ всички елементи на подмножеството.*

Теорема на Цермело. *Всяко непразно множество може да се направи напълно наредено чрез въвеждане на подходящо съотношение на наредба.*

Доказателството на теоремата на Цермело се опира на т. нар. аксиома за произволния избор, според която, ако е дадена произволна система от непразни, две по две непресичащи се множества, то съществува ново множество, имащо с всяко от множествата на системата по един и само един общ елемент.

В аксиомата за избора не се посочва начин, по който да се прави този избор, и затова тя води до неконструктивни доказа-

телства. Някои от теоремите, доказани с помощта на тази аксиома, противоречат на нагледността.

Може да се докаже, че лемата на Цорн, теоремата на Цермело и аксиомата за произволния избор са еквивалентни твърдения. Те са обобщение на принципа на математическата индукция в случая на неизброими множества.

Накрая ще докажем, че сегментът [0, 1] и интервалът (0, 1) са еквивалентни (равномощни) множества. За това ще установим взаимно еднозначно съответствие между елементите им. Избираме в сегмента [0, 1] и интервала (0, 1) редица от точки

$$\{1/2,\ 1/3,\ 1/4, \cdots, 1/n, \cdots\}.$$

Точката 0 от сегмента [0, 1] съпоставяме на точката 1/2 от интервала (0, 1), точката 1 от сегмента [0, 1] съпоставяме на точката 1/3 от интервала (0, 1), по-нататък точката 1/2 от сегмента [0, 1] съпоставяме на точката 1/4 от интервала (0, 1) и т. н., точката $1/n$ от сегмента [0, 1] съпоставяме на $1/(n+2)$ от интервала (0, 1) ($n \geq 2$). Всички останали точки от сегмента (т. е. точките, различни от 0, 1 и непринадлежащи на избраната редица) съпоставяме на същите точки от интервала. По такъв начин е установено взаимно еднозначно съответствие между сегмента [0, 1] и интервала (0, 1).

3. Теория на границите

В глава 1 бе казано, че една от основните операции в математическия анализ е граничният преход и че тази операция се среща в различни форми.

В тази глава се изучават различните форми на операцията граничен преход, като се започва с най-простата от тях, основана на понятието граница на числова редица.

Понятието граница на числова редица ще ни улесни при въвеждането на друга, доста по-важна форма на операцията граничен преход, основана на понятието гранична стойност (или кратко граница) на функция.

В края на главата се дава най-общо определение на граница на функция по база.

3.1. Редица. Граница на редица

3.1.1. Редица. Аритметични операции с редици. Примери на числови редици са: 1) редицата от всички елементи на аритметичната или геометричната прогресия; 2) редицата от периметрите на правилните n-ъгълници, вписани в дадена окръжност; 3) редицата от рационалните числа $x_1=0{,}3$, $x_2=0{,}33$, $x_3=0{,}333, \cdots$, приближаващи числото 1/3.

Ако на всяко число n от естествения ред на числата 1, 2, 3, $\cdots$, n, $\cdots$ *се съпостави по определен закон някое реално число x_n, то множеството на номерираните реални числа*

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots, x_n, \cdots \tag{3.1}$$

ще наричаме ***числова редица*** *или само* ***редица.***

Числата x_n ще наричаме ***елементи*** или ***членове на редицата*** (3.1). За краткост редицата (3.1) ще означаваме със символа $\{x_n\}$ или $\{x_n\}_1^\infty$.

Така например символът $\{1/n^2\}$ означава редицата 1, $1/2^2$, $1/3^2, \cdots, 1/n^2, \cdots$, а символът $\{1+(-1)^n\}$ — редицата 0, 2, 0, 2, $\cdots$.

Да разгледаме наред с редицата (3.1) още една редица

(3.2) $$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots$$

Редицата $x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \cdots, x_n+y_n, \cdots$ *ще нарича-ме* ***сума*** *на редиците* (3.1) и (3.2), *редицата* $x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3, \cdots, x_n-y_n, \cdots$ — ***разлика*** *на редиците* (3.1) *и* (3.2), *редицата* $x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \cdots, x_n \cdot y_n, \cdots$ —***произведение*** *на редиците* (3.1) и (3.2) *и накрая редицата* $x_1/y_1, x_2/y_2, x_3/y_3, \cdots, x_n/y_n, \cdots$ — ***частно*** *на редиците* (3.1) и (3.2).

Разбира се, при определението за частно на редиците (3.1) и (3.2) е необходимо да се изисква всички елементи на редицата (3.2) да бъдат различни от нула. Ще отбележим обаче, че ако в редицата $\{y_n\}$ само краен брой елементи са нули, то частното $\{x_n/y_n\}$ може да се определи от този номер нататък, след който всички елементи y_n са различни от нула.

3.1.2. Ограничени, неограничени, безкрайно малки и безкрайно големи редици. Съвкупността от всички елементи на произволна редица $\{x_n\}$ образува числово множество. Тръгвайки от понятията ограничено отгоре, отдолу или от двете страни множество, идваме до следните определения:

Определение 1. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***ограничена отгоре (отдолу),*** *ако съществува такова реално число* M *(реално число* m*), че всеки елемент* x_n *на редицата да удовлетворява неравенството*

$$x_n \leq M \qquad (x_n \geq m).$$

При това числото M *(числото* m*) се нарича* ***горна (долна) граница на редицата*** $\{x_n\}$, *а неравенството* $x_n \leq M\ (x_n \geq m)$ — ***условие за ограниченост*** *на тази редица отгоре (отдолу).*

Всяка ограничена отгоре редица има безбройно много горни граници и в условието за ограниченост на редицата отгоре, т. е. в $x_n \leq M$, за M може да се вземе всяка от горните граници. Аналогична забележка се отнася за долната граница и ограничените отдолу редици.

Определение 2. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***ограничена от двете страни*** *(или просто* ***ограничена****), ако е ограничена отгоре и отдолу, т. е. ако съществуват такива две реални числа* M *и* m*, че всеки елемент* x_n *на редицата да удовлетворява неравенствата*

(3.3) $$m \leq x_n \leq M.$$

Числата m *и* M *се наричат съответно* ***долна*** *и* ***горна граница*** *на редицата* $\{x_n\}$, *а неравенствата* (3.3) — ***условия за ограниченост*** *на редицата* $\{x_n\}$.

Условието за ограниченост на редица може да се запише и в друга еквивалентна форма: Редицата $\{x_n\}$ е ограничена тогава и само тогава, когато съществува такова положително реално число A, че всеки елемент x_n на редицата да удовлетворява неравенството

(3.4) $$|x_n| \leq A.$$

Наистина, ако всеки елемент x_n удовлетворява неравенството (3.4), то при $m=-A$, $M=+A$ ще получим, че x_n удовлетворява неравенствата (3.3). Ако, обратно, всеки елемент x_n удовлетворява неравенствата (3.3), то като означим с A по-голямото от двете числа $|m|$ и $|M|$, ще получим, че x_n удовлетворява и неравенството (3.4).

В съответствие с определение 2 за ограничена редица и условието за ограниченост, взето във формата (3.4), може да се определи понятието неограничена редица.

Определение 3. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***неограничена,*** *ако за всяко положително реално число* A*, колкото и голямо да е то, съществува поне един елемент* x_n *от редицата, удовлетворяващ неравенството*

(3.5) $$|x_n| > A.$$

Съгласно това определение всяка редица, която е ограничена само отгоре или само отдолу, е неограничена.

Така например редицата 1, 2, 1, 4, $\cdots$, 1, $2n$, $\cdots$, която е ограничена само отдолу, е неограничена: каквото и положително реално число A да вземем, ще се намери елемент на тази редица с четен номер, удовлетворяващ неравенството (3.5).

Редицата $\{1/n\}$ очевидно е ограничена: всеки елемент на тази редица удовлетворява неравенствата (3.3) за всяко $m \leq 0$ и $M \geq 1$.

Определение 4. *Редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***безкрайно голяма,*** *ако за всяко положително реално число* A*, колкото и голямо да е то, съществува такъв номер* $N=N(A)$*, че при всяко* $n \geq N$ *елементите* x_n *на тази редица да удовлетворяват неравенството* (3.5).

Очевидно е, че всяка безкрайно голяма редица е неограничена, тъй като в определението за безкрайно голяма редица се иска за всяко $A>0$ неравенството (3.5) да се удовлетворява от всички елементи на редицата от известен номер N нататък, а в определението за неограничена редица се иска за всяко $A>0$ неравенството (3.5) да се удовлетворява поне за един елемент на редицата.

От друга страна, не всяка неограничена редица е безкрайно голяма. Така например разгледаната редица 1, 2, 1, 4, $\cdots$, 1,

$2n, \cdots$ е неограничена, но не е безкрайно голяма, тъй като за всяко $A>1$ неравенството (3.5) не е изпълнено за елементите x_n с произволно голям нечетен номер n.

Определение 5. *Редицата $\{\alpha_n\}$ се нарича* ***безкрайно малка****, ако за всяко положително число ε, колкото и малко да е то, съществува такъв номер $N=N(\varepsilon)$, че при всички $n \geqq N$ елементите α_n на тази редица да удовлетворяват неравенството*

$$|\alpha_n|<\varepsilon. \tag{3.6}$$

Ще докажем, че редицата $q, q^2, q^3, \cdots, q^n$ е безкрайно голяма при $|q|>1$ и безкрайно малка при $|q|<1$.

Нека най-напред $|q|>1$. Тогава $|q|=1+\delta$, където $\delta>0$. Като използваме формулата за бинома на Нютон, получаваме $|q|^N=(1+\delta)^N=1+N\delta+$ положителни членове. Оттук следва неравенството

$$|q|^N>\delta N. \tag{3.7}$$

Фиксираме произволно положително число A и избираме такъв номер N, че да е изпълнено неравенството

$$\delta N>A. \tag{3.8}$$

Ще покажем, че това е възможно. Ще се условим да означаваме със символа $[x]$ цялата част на положителното реално число x. Тъй като неравенството (3.8) е еквивалентно на неравенството $N>A/\delta$, то това неравенство очевидно ще се удовлетворява от номер N, за който $N=[A/\delta]+1=[A/(|q|-1)]+1$.

Понеже $|q|>1$, при всички $n \geqq N$ имаме

$$|q|^n \geqq |q|^N. \tag{3.9}$$

От неравенствата (3.7), (3.8) и (3.9) получаваме, че за всяко $A>0$ съществува такъв номер $N=[A/(|q|-1)]+1$, че при всички $n \geqq N$ —

$$|q^n|=|q|^n>A.$$

С това е доказано, че при $|q|>1$ редицата $\{q^n\}$ е безкрайно голяма.

Ще разгледаме сега случая $|q|<1$. Трябва да докажем, че $\{q^n\}$ е безкрайно малка редица. Изключваме тривиалния случай $q=0$ и полагаме $1/|q|=1+\delta$, където $\delta>0$. Използвайки, както по-горе, бинома на Нютон, вместо (3.7) ще получим неравенството

$$1/|q|^N>\delta N, \text{ или } |q|^N>1/\delta N. \tag{3.7'}$$

Фиксираме произволно положително число ε и избираме номера N така, че да е изпълнено неравенството

$$1/\delta N<\varepsilon. \tag{3.8'}$$

Тъй като неравенството (3.8′) е еквивалентно на неравенството $N>1/\varepsilon\delta$, то за N можем да изберем

$$N=[1/\varepsilon\delta]+1=[|q|/\varepsilon(1-|q|)]+1.$$

За всички $n \geqq N$ при $|q|<1$ е изпълнено неравенството

$$|q|^n \leqq |q|^N. \tag{3.9'}$$

От неравенствата (3.7′), (3.8′) и (3.9′) получаваме, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв номер $N=[|q|/\varepsilon(1-|q|)]+1$, че за всички $n \geqq N$ е изпълнено неравенството

$$|q^n|=|q|^n<\varepsilon.$$

С това е доказано, че при $|q|<1$ редицата $\{q^n\}$ е безкрайно малка.

3.1.3. Основни свойства на безкрайно малките редици.

Теорема 3.1. *Сумата $\{\alpha_n+\beta_n\}$ на две безкрайно малки редици $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка редица.*

Доказателство. Фиксираме произволно положително число ε. Тъй като редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка, то за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такъв номер N_1, че при $n \geqq N_1$ да е изпълнено неравенството

$$|\alpha_n|<\varepsilon/2. \tag{3.10}$$

Аналогично, тъй като редицата $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка, то за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такъв номер N_2, че при $n \geqq N_2$ да е изпълнено неравенството

$$|\beta_n|<\varepsilon/2. \tag{3.11}$$

Да означим с N по-големия от двата номера N_1 и N_2. Тогава при $n \geqq N$ ще са изпълнени и двете неравенства (3.10) и (3.11).

Тъй като модулът на сума на две числа не надминава сумата от модулите им, то за всички номера n имаме

$$|\alpha_n+\beta_n| \leqq |\alpha_n|+|\beta_n|. \tag{3.12}$$

От (3.12), (3.10) и (3.11) следва, че при $n \geqq N$ е изпълнено неравенството

$$|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon.$$

Това показва, че редицата е безкрайно малка. □

Теорема 3.2. *Разликата $\{\alpha_n-\beta_n\}$ на две безкрайно малки редици $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка редица.*

Доказателството на тази теорема се различава от доказателството на теорема 3.1 само по това, че вместо неравенството (3.12) трябва да се вземе неравенството

$$|\alpha_n-\beta_n| \leqq |\alpha_n|+|\beta_n|.$$

Следствие. *Алгебричната сума на краен брой безкрайно малки редици е безкрайно малка редица.*

Теорема 3.3. *Произведението на ограничена редица и безкрайно малка редица е безкрайно малка редица.*

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е ограничена редица и $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица. Съгласно определението на ограничена редица съществува такова реално число $A>0$, че за всички елементи x_n е изпълнено неравенството

$$|x_n| \leq A. \tag{3.13}$$

Да фиксираме произволно положително число ε. Тъй като редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка, то за положителното число ε/A съществува такъв номер N, че при $n \geq N$ е изпълнено неравенството

$$|\alpha_n| < \varepsilon/A. \tag{3.14}$$

Тъй като модулът на произведението на две числа е равен на произведението от модулите на тези числа, от неравенствата (3.13) и (3.14) получаваме, че за всички $n \geq N$

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \varepsilon/A = \varepsilon.$$

Това означава, че редицата $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ е безкрайно малка. □

Теорема 3.4. *Всяка безкрайно малка редица е ограничена.*

Доказателство. Нека $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица. Да фиксираме произволно положителното число ε. Съгласно определението на безкрайно малка редица съществува такъв номер N, че $|\alpha_n| < \varepsilon$ за всички $n \geq N$. Ако означим с A най-голямото от следните N числа: ε, $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, $\cdots$, $|\alpha_{N-1}|$, то очевидно $|\alpha_n| < A$ за всички номера n. Това означава, че редицата $\{\alpha_n\}$ е ограничена. □

Следствие от теореми 3.3 и 3.4. *Произведението на краен брой безкрайно малки редици е безкрайно малка редица.*

Теорема 3.5. *Ако всичките елементи на безкрайно малката редица $\{\alpha_n\}$ са равни на едно и също число c, то $c=0$.*

Доказателство. Да допуснем, че $c \neq 0$. Означаваме с ε положителното число $\varepsilon = |c|$. Според определението на безкрайно малка редица за избраното $\varepsilon = |c|$ съществува такъв номер N, че $|\alpha_n| < |c|$ при всички $n \geq N$. Но неравенството $|\alpha_n| < |c|$ (поради това, че $\alpha_n = c$ за всяко n) води до абсурда $|c| < |c|$. □

Теорема 3.6. *Ако $\{x_n\}$ е безкрайно голяма редица, то от известен номер n нататък е определено частното $1/x_n$ и $\{1/x_n\}$ е безкрайно малка редица. Ако всички елементи на безкрайно малката редица $\{\alpha_n\}$ са различни от нула, то частното $\{1/\alpha_n\}$ е безкрайно голяма редица.*

Доказателство. Ще докажем най-напред първата част на теоремата. Очевидно е, че в безкрайно голяма редица само краен брой елементи могат да бъдат равни на нула. Наистина съгласно определението на безкрайно голяма редица за числото $A=1$ съществува такъв номер N^*, че $|x_n| > A = 1$ за всички $n \geq N^*$. Следователно при $n \geq N^*$ всички елементи x_n са различни от нула и можем да разглеждаме частното $1/x_n$. Ще докажем, че тези частни образуват безкрайно малка редица. Фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определението на безкрайно голяма редица за положителното число $1/\varepsilon$ съществува такъв номер N (този номер ще изберем по-голям от N^*), че $|x_n| > 1/\varepsilon$ при $n \geq N$ или че $|1/x_n| = 1/|x_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Това показва, че редицата $\{1/x_n\}$ е безкрайно малка.

За да докажем втората част, фиксираме произволно положително число A. Тъй като $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица, то за положителното число $1/A$ съществува такъв номер N, че $|\alpha_n| < 1/A$ при $n \geq N$ или $|1/\alpha_n| = 1/|\alpha_n| > A$ при $n \geq N$. Това показва, че редицата $\{1/\alpha_n\}$ е безкрайно голяма. □

3.1.4. Сходящи редици. Свойства. Ще въведем важните понятия сходяща редица и граница на сходяща редица.

Определение 1. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***сходяща****, ако съществува такова реално число a, че редицата $\{x_n - a\}$ да е безкрайно малка. Числото a се нарича* ***граница*** *на редицата $\{x_n\}$.*

Това, че редицата $\{x_n\}$ е сходяща и има за граница числото a, се записва така:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Според горното определение всяка безкрайно малка редица е сходяща и има за граница числото $a=0$.

Като се използва определението за безкрайно малка редица, може да се даде друго определение на понятието сходяща редица, еквивалентно на определение 1.

Определение 2. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***сходяща****, ако съществува такова реално число a, че за всяко положително число ε съществува такъв номер $N=N(\varepsilon)$, че за всяко $n \geq N$ членовете на тази редица да удовлетворяват неравенството*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3.15}$$

Числото a се нарича ***граница*** *на редицата $\{x_n\}$.*

Неравенството (3.15) може да се запише в еквивалентната форма

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

или още така

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \tag{3.15'}$$

Неравенствата (3.15′) означават, че елементите x_n при $n \geqq N$ лежат в интервала $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, който се условихме да наричаме ε-околност на точката a.

Това ни дава право да формулираме още едно определение на сходяща редица, еквивалентно на определенията 1 и 2.

Определение 3. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***сходяща****, ако съществува такова число a, че във всяка ε-околност на точката a да се съдържат всички членове на редицата $\{x_n\}$ от някакъв номер (зависещ, разбира се, от ε) нататък.*

Ще намерим едно специално представяне за членовете на всяка сходяща редица $\{x_n\}$. Съгласно определение 1 разликата $x_n - a = \alpha_n$ е елемент на безкрайно малка редица. Следователно елементът x_n на сходящата редица с граница a може да бъде представен в следния специален вид:

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{3.16}$$

където $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица.

Забележка 1. От определението за сходяща редица и граница на сходяща редица непосредствено следва, че отстраняването на краен брой елементи от дадена редица не оказва влияние върху сходимостта на редицата и стойността на границата ѝ.

Забележка 2. Редица, която не е сходяща, се нарича ***разходяща.***

Забележка 3. Понякога ще разглеждаме безкрайно големите редици като сходящи редици с граница безкрайност (∞). Такава формализация за безкрайно голяма редица $\{x_n\}$ е следното означение:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Ако при това елементите на безкрайно голямата редица от известно място нататък имат положителен (отрицателен) знак, записваме

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad (\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

За пример ще докажем, че редицата $\{x_n\}$ с елементи

$$x_n = 0{,}\underbrace{33\ldots3}_{n\ \text{пъти}}$$

клони към границата $a = 1/3$. Ще фиксираме произволно положително число ε и ще покажем възможността да се намери такъв номер N, че $|x_n - 1/3| < \varepsilon$ при всички $n \geqq N$. Тъй като числото 1/3 се представя с безкрайната десетична дроб $0{,}333\ldots$, то от правилото за наредба на реални числа следват неравенствата

$$0{,}\underbrace{33\ldots3}_{n\ \text{пъти}} \leqq 1/3 \leqq 0{,}\underbrace{33\ldots3}_{n\ \text{пъти}} + 1/10^n,$$

изпълнени за всеки номер n.

От последните неравенства за числото $x_n = 0{,}\underbrace{333\ldots3}_{n\ \text{пъти}}$ получаваме съотношението

$$|x_n - 1/3| \leqq 1/10^n.$$

Тъй като $1/10^n \leqq 1/10^N$ за всички $n \geqq N$, то за да намерим при избраното $\varepsilon > 0$ такъв номер N, че $|x_n - 1/3| < \varepsilon$ за всички $n \geqq N$, достатъчно е да изберем N, така че $1/10^N < \varepsilon$.

В 3.1.2 установихме възможността да се избере номер N, за който $|q|^N < \varepsilon$ за всяко $|q| < 1$. Там показахме, че номерът N може да се вземе $N = [|q|/\varepsilon(1-|q|)] + 1$. В този случай $|q| = 0{,}1$, така че $N = [1/9\varepsilon] + 1$.

Ще преминем към установяване на някои свойства на сходящите редици.

Теорема 3.7. *Всяка сходяща редица има само една граница.*

Доказателство. Да предположим, че двете реални числа a и b са граници на сходящата редица $\{x_n\}$. Тогава според специалното представяне (3.16) на елементите на сходяща редица ще имаме $x_n = a + \alpha_n$ и $x_n = b + \beta_n$, където $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ са безкрайно малки редици. Оттук получаваме $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Съгласно теорема 3.2 редицата $\{\alpha_n - \beta_n\}$ е безкрайно малка, а от равенството $\alpha_n - \beta_n = b - a$ следва, че всички елементи на тази безкрайно малка редица са равни на едно и също реално число $b - a$. Съгласно теорема 3.5 това число $b - a$ е равно на нула, т. е. $b = a$. □

Теорема 3.8. *Всяка сходяща редица е ограничена.*

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е сходяща редица с граница a. Съгласно (3.16) $x_n = a + \alpha_n$, където $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица. От теорема 3.4 следва, че $\{\alpha_n\}$ е ограничена и следователно съществува такова число A, че $|\alpha_n| \leqq A$ за всяко натурално n. Тогава $|x_n| \leqq |a| + A$ за всички номера n. □

Забележка 4. Не всяка ограничена редица е сходяща. Така например редицата 0, 1, 0, 1, . . . , 0, 1, . . . е ограничена, но не е сходяща. Действително да означим n-тия член на тази редица с x_n и да предположим, че тази редица е сходяща и има граница a. Но тогава всяка от редиците $\{x_{n+1} - a\}$ и $\{x_n - a\}$ трябва да бъде безкрайно малка. Очевидно и разликата на тези редици $\{x_{n+1} - x_n\}$ ще бъде безкрайно малка, а това е невъзможно, тъй като $|x_{n+1} - x_n| = 1$ за всички n.

Следващите четири теореми показват, че четирите аритметични действия над елементите на сходящи редици водят към аналогични действия и с техните граници.

Теорема 3.9. *Сумата на сходящите редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ е сходяща редица с граница, равна на сумата от границите на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказателство. Нека редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са сходящи и имат съответно граници a и b. Съгласно специалното представяне (3.16) ще имаме

$$x_n=a+\alpha_n, \quad y_n=b+\beta, \tag{3.17}$$

където $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ са безкрайно малки редици. От (3.17) следва, че

$$(x_n+y_n)-(a+b)=\alpha_n+\beta_n. \tag{3.18}$$

Тъй като сумата $\{\alpha_n+\beta_n\}$ на двете безкрайно малки редици $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка редица (теорема 3.1), то от (3.18) и определение 1 следва, че редицата $\{x_n+y_n\}$ е сходяща и има за граница числото $a+b$. □

Теорема 3.10. *Разликата на сходящите редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ е сходяща редица с граница, равна на разликата от границите на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказателството на тази теорема е аналогично на доказателството на теорема 3.9. Вместо (3.18) ще имаме съотношението $(x_n-y_n)-(a-b)=\alpha_n-\beta_n$.

Теорема 3.11. *Произведението на сходящите редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ е сходяща редица с граница, равна на произведението от границите на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказателство. Нека редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ клонят съответно към границите a и b. Тогава за елементите на тези редици имаме специалните представяния (3.17), които след умножение дават

$$x_n \cdot y_n=a \cdot b+a \cdot \beta_n+b \cdot \alpha_n+\alpha_n \cdot \beta_n,$$

или

$$x_n \cdot y_n-a \cdot b=a \cdot \beta_n+b \cdot \alpha_n+\alpha_n \cdot \beta_n. \tag{3.19}$$

За да докажем теоремата, трябва да се убедим, че дясната страна на (3.19) е елемент на безкрайно малка редица. Това веднага следва от теорема 3.3 (съгласно тази теорема редиците $\{a \cdot \beta_n\}$ и $\{b \cdot \alpha_n\}$ са безкрайно малки), от следствието на теоремите 3.3 и 3.4 (според това следствие редицата $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ е безкрайно малка) и от теорема 3.1 (според тази теорема сумата на трите безкрайно малки редици $\{a \cdot \beta_n\}$, $\{b \cdot \alpha_n\}$ и $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ е безкрайно малка редица). □

Преди теоремата за частно на две сходящи редици ще докажем следната лема:

Лема 1. *Ако редицата $\{y_n\}$ клони към различното от нула число b, то от известно място нататък е определено частното $1/y_n$ и редицата $\{1/y_n\}$ е ограничена.*

Доказателство. Понеже $b \neq 0$, означаваме с ε положителното число $\varepsilon=|b|/2$. За това ε съществува такъв номер N, че при $n \geq N$ да е изпълнено неравенството $|y_n-b|<\varepsilon$, т. е.

$$|y_n-b|<|b|/2. \tag{3.20}$$

И така за всички номера n от известен номер N нататък е изпълнено неравенството (3.20). Ще покажем, че от неравенството (3.20) следва неравенството

$$|y_n|>|b|/2, \tag{3.21}$$

което също така ще бъде изпълнено за всички номера n от известен номер N нататък. Действително, тъй като модулът на сумата на две числа не надминава сумата от модулите на тези числа, то от тъждеството $b=(b-y_n)+y_n$ и неравенството (3.20) получаваме

$$|b| \leq |b-y_n|+|y_n|<|b|/2+|y_n|.$$

От последното неравенство непосредствено следва неравенство (3.21).

Неравенството (3.21) ни дава право да твърдим, че при $n \geq N$ елементите y_n са различни от нула и следователно можем да разглеждаме частните $1/y_n$ за $n \geq N$.

От (3.21) на свой ред следва, че за всички $n \geq N$ е изпълнено неравенството $|1/y_n|<2/|b|$. Оттук следва, че редицата $\{1/y_n\}$ е ограничена. □

Теорема 3.12. *Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са две сходящи редици със съответни граници a и b, при което $b \neq 0$. Тогава частното x_n/y_n е определено от известен номер нататък; редицата $\{x_n/y_n\}$, взета от този номер нататък, е сходяща и нейната граница е a/b.*

Доказателство. Според лема 1 съществува такъв номер N, че при $n \geq N$ елементите y_n са различни от нула; определена е редицата $\{1/y_n\}$ и тази редица е ограничена. Ние ще разглеждаме частните $\{x_n/y_n\}$ от този номер нататък. Съгласно определение 1 достатъчно е да докажем, че редицата $\{x_n/y_n-a/b\}$ е безкрайно малка. Ще използваме тъждеството

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{x_n \cdot b-y_n \cdot a}{y_n \cdot b}. \tag{3.22}$$

Тъй като за x_n и y_n е в сила специалното представяне (3.17), то

$$x_n \cdot b-y_n \cdot a=(a+\alpha_n)\,b-(b+\beta_n)\,a=\alpha_n \cdot b-\beta_n \cdot a. \tag{3.23}$$

Като заместим (3.23) в (3.22), получаваме

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right). \tag{3.24}$$

Остава да докажем, че в дясната страна на (3.24) стои елемент на безкрайно малка редица. Но това веднага следва от теорема 3.3 и от факта, че редицата $\{1/y_n\}$ (поради лема 1) е ограничена, а редицата $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\}$ (като разлика на две безкрайно малки редици) е безкрайно малка. □

Ще се убедим сега, че ако елементите на сходящи редици удовлетворяват някакви неравенства, то подобни неравенства удовлетворяват и границите им.

Теорема 3.13. *Ако всички елементи на сходящата редица $\{x_n\}$ от известно място нататък удовлетворяват неравенството $x_n \geqq b$ ($x_n \leqq b$), то и границата x на тази редица удовлетворява неравенството $x \geqq b$ ($x \leqq b$).*

Доказателство. Ще предположим, че всички елементи x_n от известен номер N^* нататък удовлетворяват неравенството $x_n \geqq b$. Ще докажем, че границата x на тази редица удовлетворява неравенството $x \geqq b$. Да допуснем противното, т. е. че $x < b$.

Тогава по определението на сходяща редица за положителното число $\varepsilon = b - x$ съществува такъв номер N (избираме го така, че да бъде по-голям от N^*), че при $n \geqq N$ да са изпълнени неравенствата $|x_n - x| < \varepsilon$ или $|x_n - x| < b - x$. Последното неравенство е еквивалентно с неравенствата $-(b-x) < x_n - x < b - x$, дясното от които означава, че $x_n < b$ при всички $n \geqq N$. Но това противоречи на условието на теоремата.

Случаят $x_n \leqq b$ се разглежда аналогично.

Забележка 5. Ако всички елементи на сходящата редица $\{x_n\}$ удовлетворяват строгото неравенство $x_n > b$, оттук не следва, че границата x ще удовлетворява строгото неравенство $x > b$. Можем да твърдим само, че $x \geqq b$.

Например, ако $x_n = 1/n$, то всички $x_n > 0$, но границата $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = x = 0$ не удовлетворява неравенството $x > 0$.

Следствие 1. *Ако всички елементи на две сходящи редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ от известно място нататък удовлетворяват неравенството $x_n \leqq y_n$, то и границите на тези редици удовлетворяват същото неравенство*

(3.25) $$\lim_{n\to\infty} x_n \leqq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Действително от известно място нататък всички елементи на редицата $\{y_n - x_n\}$ ще бъдат неотрицателни. Съгласно теорема 3.13 и границата на тази редица $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n)$ ще бъде неотрицателна. От теорема 3.10 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, откъдето получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqq 0$. От последното неравенство следва (3.25).

Следствие 2. *Ако всички членове на сходящата редица $\{x_n\}$ принадлежат на сегмента $[a, b]$, то и границата x на тази редица принадлежи на същия сегмент.*

Наистина, тъй като $a \leqq x_n \leqq b$ за всички n, то (съгласно теорема 3.13) $a \leqq x \leqq b$.

Следващата теорема се нарича принцип на двустранното ограничение.

Теорема 3.14. *Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са две сходящи редици с една и съща граница a и нека всички елементи на редицата $\{z_n\}$ от известно място нататък удовлетворяват неравенствата*

(3.26) $$x_n \leqq z_n \leqq y_n.$$

Тогава редицата z_n е сходяща и има същата граница a.

Доказателство. Да предположим, че неравенствата (3.26) са изпълнени от номер N^* нататък. Тогава за $n \geqq N^*$

(3.27) $$x_n - a \leqq z_n - a \leqq y_n - a.$$

От неравенствата (3.27) следва, че за всеки номер n, по-голям от N^*, имаме

(3.28) $$|z_n - a| \leqq \max\{|x_n - a|, |y_n - a|\}$$

(това записване означава, че $|z_n - a|$ не надминава по-голямото от двете числа $|x_n - a|$ и $|y_n - a|$).

Избираме произволно положително число ε. Тогава от сходимостта на редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ към границата a следва, че съществуват такива номера N_1 и N_2, че

(3.29) $$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n \geqq N_1, \\ |y_n - a| < \varepsilon \text{ при } n \geqq N_2. \end{cases}$$

Ако сега означим с N най-голямото от трите числа N^*, N_1 и N_2, то при $n \geqq N$ ще бъдат изпълнени двете неравенства (3.29) и съгласно (3.28) ще получим, че при $n \geqq N$ е изпълнено $|z_n - a| < \varepsilon$. Това доказва сходимостта на редицата $\{z_n\}$ към границата a. □

3.2. Монотонни редици

3.2.1. Понятието монотонна редица.

Определение 1. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***ненамаляваща (нерастяща)****, ако всеки член на тази редица от втория нататък не е по-малък (не е по-голям) от предхождащия го член, т. е. ако за всички номера n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) е изпълнено неравенството*

(3.30) $$x_n \leqq x_{n+1} \qquad (x_n \geqq x_{n+1}).$$

Определение 2. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***монотонна****, ако тя е или ненамаляваща, или нерастяща.*

Ако елементите на ненамаляваща редица удовлетворяват строгото неравенство $x_n < x_{n+1}$ за всички номера n, то тази редица се нарича ***растяща****.*

Аналогично, ако елементите на нерастяща редица удовлетворяват строгото неравенство $x_n > x_{n+1}$ за всички номера n, то тази редица се нарича ***намаляваща****.*

Ще отбележим, че всяка монотонна редица е очевидно ограничена от едната страна (или отгоре, или отдолу). Действително всяка ненамаляваща редица е ограничена отдолу (за долна граница може да се вземе първият ѝ член), а всяка нерастяща редица е ограничена отгоре (за горна граница може да се вземе също първият ѝ член).

Оттук следва, че ненамаляващите редици са ограничени от двете страни или просто ограничени тогава и само тогава, когато са ограничени отгоре, а нерастящите редици са ограничени тогава и само тогава, когато са ограничени отдолу.

Примери:

1. Редицата $1, 1, 2, 2, \cdots, n, n, \cdots$ е ненамаляваща. Тя е ограничена отдолу от стойността на първия си член и е неограничена отгоре.

2. Редицата $2/1, 3/2, 4/3, \cdots, (n+1)/n, \cdots$ е намаляваща. Тя е ограничена от двете страни: отгоре от стойността на първия си член 2, а отдолу например от числото 1.

3.2.2. Теорема за сходимост на монотонна ограничена редица. В сила е следното основно твърдение:

Основна теорема 3.15. *Всяка ненамаляваща (нерастяща) и ограничена отгоре (отдолу) редица $\{x_n\}$ е сходяща.*

Доказателство. Ще разгледаме случая на ненамаляваща и ограничена отгоре редица $\{x_n\}$. Множеството от всички членове на такава редица е ограничено отгоре и затова според основната теорема 2.1 това множество има точна горна граница, която ще означим с $\bar{x}$. Ще докажем, че числото $\bar{x}$ е граница на редицата $\{x_n\}$. Първо ще отбележим, че съгласно определението за горна граница всеки член на редицата $\{x_n\}$ удовлетворява неравенството

$$x_n \leqq \bar{x}. \tag{3.31}$$

Избираме произволно положително число ε и съгласно определението за точна горна граница ще съществува поне един член x_N на редицата, удовлетворяващ неравенството

$$\bar{x} - \varepsilon < x_N. \tag{3.32}$$

Но редицата $\{x_n\}$ е ненамаляваща, поради което $x_N \leqq x_n$ за всяко $n \geqq N$. От неравенството $x_N \leqq x_n$ и (3.32) получаваме, че за всяко $n \geqq N$ имаме

$$\bar{x} - \varepsilon < x_n. \tag{3.33}$$

Като обединим неравенствата (3.31) и (3.33), получаваме, че за всички $n \geqq N$ са изпълнени неравенствата $\bar{x} - \varepsilon < x_n \leqq \bar{x}$.

Тогава за всички $n \geqq N$ е в сила неравенството $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$, откъдето следва, че редицата $\{x_n\}$ клони към границата $\bar{x} = \sup\{x_n\}$.

Ако редицата $\{x_n\}$ е нерастяща и ограничена отдолу, то съвсем аналогично се доказва, че тя клони към границата $\underline{x} = \inf\{x_n\}$. □

Забележка 1. Съгласно казаното в 3.2.1 редицата $\{x_n\}$, удовлетворяваща условието на теорема 3.15, е ограничена от двете страни или просто ограничена. Затова теорема 3.15 може да се изкаже така: *За да бъде монотонната редица $\{x_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно тя да бъде ограничена* (необходимостта следва от теорема 3.8).

Забележка 2. Разбира се, не всяка сходяща редица е монотонна. Например клонящата към нула редица $1/2, -1/2, 1/3, -1/3, \cdots, 1/n, -1/n, \cdots$ не е монотонна, тъй като знаците на членовете ѝ се сменят алтернативно.

Забележка 3. От приведеното доказателство следва, че всички членове на една ненамаляваща, ограничена отгоре редица $\{x_n\}$ не надминават границата ѝ $\bar{x}$ $(x_n \leqq \bar{x})$. Аналогично лесно се вижда, че всички членове на една нерастяща, ограничена отдолу редица не са по-малки от границата ѝ $\underline{x}$.

Ще извлечем едно важно следствие от теорема 3.15.

Ще се условим да наричаме безкрайната редица от сегменти $[a_1, b_1], [a_2, a_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots$ ***свиваща се система*** *от сегменти, ако:*

1) *всеки следващ сегмент се съдържа в предидущия, т. е. $a_n \leqq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqq b_n$ за всяко $n = 1, 2, 3, \cdots$*

2) *дължината на n-тия сегмент $[a_n, b_n]$, т. е. разликата $b_n - a_n$, клони към нула при $n \to \infty$.*

Следствие от теорема 3.15. *За всяка свиваща се система от сегменти $\{[a_n, b_n]\}$ съществува, и то само една точка c, която принадлежи на всеки сегмент от тази система.*

Доказателство. Най-напред ще покажем, че точката c, която принадлежи на всички сегменти, може да бъде само една. Действително да допуснем, че има още една точка d, различна от c, която принадлежи на всички сегменти, като за определеност нека $d > c$. Това означава, че сегментът $[c, d]$ принадлежи на всички сегменти $[a_n, b_n]$. Но тогава за всеки номер n ще бъдат

изпълнени неравенствата $b_n - a_n \geq d - c > 0$, което е невъзможно, тъй като $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Ще докажем сега, че съществува точка c, която принадлежи на всички сегменти. Понеже системата от сегменти е свиваща се, то редицата от левите им краища $\{a_n\}$ е ненамаляваща, а редицата от десните им краища $\{b_n\}$ — нерастяща. Тъй като и двете редици са ограничени (всичките им членове принадлежат на сегмента $[a_1, b_1]$), то те са сходящи (според теорема 3.15). От това, че разликата $\{b_n - a_n\}$ е безкрайно малка редица, следва, че двете редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ клонят към една и съща граница, която ще означим с c. Според забележка 3 за всяко n са изпълнени неравенствата $a_n \leq c \leq b_n$, т. е. c принадлежи на всички сегменти $[a_n, b_n]$. □

3.2.3. Числото e. Ще приложим теорема 3.15, за да докажем сходимостта на редицата $\{x_n\}$, членовете x_n на която се определят от равенството

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Съгласно теорема 3.15 достатъчно е да докажем, че тази редица е: 1) растяща; 2) ограничена отгоре.

От формулата за бинома на Нютон за x_n получаваме следния израз:

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Този израз преобразуваме във вида

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \tag{3.34}$$

За следващия член на редицата аналогично на (3.34) се получава изразът

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \tag{3.35}$$

За да се убедим, че редицата $\{x_n\}$ е растяща, ще сравним изразите (3.34) и (3.35). Най-напред ще отбележим, че дясната страна на (3.34) се състои от n събираеми, а дясната страна на (3.35) — от $n+1$ събираеми, като $(n+1)$-вото събираемо в дясната страна на (3.35) е строго положително.

Ще съпоставим сега помежду им всяко от останалите събираеми в дясната страна на (3.35) със съответните им събираеми в дясната страна на (3.34). Лесно се вижда, че за всеки номер k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ е изпълнено неравенството

$$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Това неравенство означава, че k-тото събираемо в (3.34) е по-малко от съответното k-то събираемо в (3.35).

И така доказахме, че $x_n < x_{n+1}$, т. е. редицата $\{x_n\}$ е растяща.

Ще докажем сега, че тази редица е ограничена отгоре. Ако изразите в кръглите скоби в дясната страна на (3.34) заменим с единица, ще получим нещо по-голямо. Затова

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \tag{3.36}$$

От друга страна, за всяко $k \geq 2$ е изпълнено неравенството $k! = 2.3.4 \cdots k \geq 2^{k-1}$. Затова неравенството (3.36) ни дава право да твърдим, че

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{k-1}} < 3 \tag{3.37}$$

(използвахме формулата за сума на геометрична прогресия). От неравенството (3.37) следва ограничеността на редицата $\{x_n\}$.

Според основната теорема 3.15 редицата $\{x_n\}$ е сходяща и нейната граница, следвайки Л. Ойлер*, ще означаваме с e.

Ще покажем, че числото e удовлетворява неравенствата $2 \leq e \leq 3$. Затова (поради следствие 2 от теорема 3.13) е достатъчно да се докаже, че всеки член x_n на редицата $\{x_n\}$ удовлетворява неравенството $2 \leq x_n \leq 3$.

Неравенството $x_n \leq 3$ следва от (3.37), а неравенството $2 \leq x_n$ се получава от (3.34), като премахнем в дясната страна на (3.34) всички членове освен първия.

Числото e играе важна роля в математиката и по-нататък ще бъде даден начин за пресмятането на това число с произволна точност.

* Леонард Ойлер, швейцарски математик, член на Петербургската академия на науките, работил през по-голямата част от живота си в Русия (1707—1783).

3.2.4. Други примери на сходящи, монотонни редици. Ще започнем с разглеждането на редица, която се използва за приближено намиране на квадратен корен от реално положително число a. Тази редица се определя от следната рекурентна формула*:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right), \quad n=1, 2, 3, \cdots, \tag{3.38}$$

където за първо приближение x_1 може да се вземе произволно положително число.

Най-напред ще докажем, че тази редица е сходяща. За това е достатъчно (съгласно теорема 3.15) да покажем, че тя е ограничена отдолу и от втория си член нататък е нерастяща.

Ще започнем с доказателството на ограничеността отдолу. По условие $x_1>0$. Но тогава от рекурентната формула (3.38) при $n=1$ следва, че $x_2>0$, по-нататък от същата формула (3.38) при $n=2$ следва, че $x_3>0, \cdots$ Така установяваме, че за всяко n имаме $x_n>0$, т. е. разглежданата редица е ограничена отдолу.

Ще докажем сега, че при $n\geqq 2$ всички членове x_n удовлетворяват неравенството $x_n\geqq\sqrt{a}$. Записваме формула (3.38) във вида

$$x_{n+1}=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \tag{3.39}$$

и използваме тривиалното неравенство $t+\frac{1}{t}\geqq 2$, вярно за всяко $t>0$.

Като поставим в това неравенство $t=x_n/\sqrt{a}>0$, ще получим, че $x_n/\sqrt{a}+\sqrt{a}/x_n\geqq 2$, и затова съотношението (3.39) ни дава $x_{n+1}\geqq\sqrt{a}$ при $n=1, 2, \cdots$ Това означава, че $x_n\geqq\sqrt{a}$ при $n=2, 3, \cdots$

Ще докажем накрая, че редицата $\{x_n\}$ от втория член нататък е нерастяща.

От рекурентната формула (3.38) следва, че

$$x_{n+1}/x_n=\frac{1}{2}\left(1+a/x_n^2\right).$$

От това равенство, понеже $x_n\geqq\sqrt{a}$ при $n\geqq 2$, получаваме, че $x_{n+1}/x_n\leqq 1$ при $n\geqq 2$ или $x_{n+1}\leqq x_n$ при $n\geqq 2$. И така при $n\geqq 2$ редицата $\{x_n\}$ е нерастяща.

Според теорема 3.15 редицата $\{x_n\}$ е сходяща към някаква граница x. Остава да намерим тази граница. Тъй като $x_n\geqq\sqrt{a}$ при $n\geqq 2$, получаваме (според теорема 3.13), че $x\geqq\sqrt{a}>0$.

* Рекурентната формула (от латинската дума recurrens — възвръщащ се) е формула, изразяваща $(n+1)$-вия член на една редица чрез предидущите n члена на тази редица.

Вземаме под внимание, че $x>0$, и правим граничен преход в равенството (3.38) при $n\to\infty$. След граничния преход при $n\to\infty$ от (3.38) ще получим следното равенство:

$$x=(x+a/x)/2.$$

Единственият положителен корен на това уравнение е $x=\sqrt{a}$.

И така окончателно доказахме, че редицата $\{x_n\}$, определена с рекурентната формула (3.38) при всеки избор на $x_1>0$, е сходяща и границата ѝ е $\sqrt{a}$.

Като друго приложение на теорема 3.15 ще намерим границата на редицата $\{x_n\}$, чиито членове имат вида

$$x_n=t^n/n!, \tag{3.40}$$

където t е фиксирано реално число. За всяко фиксирано t съществува такъв номер N, че $|t|<n+1$ при всички $n\geqq N$. Но тогава, тъй като $x_{n+1}/x_n=t/(n+1)$, ще получим, че $|x_{n+1}|<|x_n|$ при всички $n\geqq N$, т. е. от номера N нататък редицата $\{|x_n|\}$ е намаляваща. Тъй като освен това тази редица е ограничена отдолу (например от числото нула), то съгласно теорема 3.15 тя е сходяща към някаква граница x. За да намерим границата x, ще запишем съотношението (3.40) за номера $n+1$:

$$x_{n+1}=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{t^n}{n!}\cdot\frac{t}{n+1}=x_n\cdot\frac{t}{n+1},$$

т. е. $|x_{n+1}|=|x_n|\cdot|t|/(n+1)$. Като минем в това равенство към граница при $n\to\infty$, ще получим

$$x=x\cdot\lim_{n\to\infty}|t|/(n+1)=0.$$

И така редицата $\{|x_n|\}$ е сходяща, а заедно с нея и редицата (3.40) е сходяща с граница $x=0$.

И в двата случая използвахме един често употребяван прийом: най-напред доказваме съществуването на граница на редицата с помощта на теорема 3.15, а след това намираме тази граница от уравнението, което се получава след граничен преход в рекурентното съотношение, изразяващо $(n+1)$-вия член на редицата чрез n-тия ѝ член.

3.3. Произволни редици

3.3.1. Точка на сгъстяване. Горна и долна точка на сгъстяване на редица. Да разгледаме редицата $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ и произволна растяща редица от цели положителни числа $k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots$ Да изберем от редицата $\{x_n\}$ членовете с номера $k_1, k_2,$

$\cdots, k_n, \cdots$ и да ги разположим по реда на нарастване на тези номера. Ще получим нова редица $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$, която е прието да се нарича ***подредица*** на изходната редица $\{x_n\}$. По-специално и самата редица $\{x_n\}$ може да се разглежда като подредица с номера $k_n=n$.

Ще отбележим, че винаги $k_n \geq n$, тъй като всяка подредица, несъвпадаща с цялата редица, се получава чрез някакво разреждане на елементите на редицата.

Верни са следните две твърдения.

1°. *Ако редицата $\{x_n\}$ е сходяща с граница a, то всяка нейна подредица е сходяща и има същата граница.*

2°. *Ако всички подредици на дадената редица $\{x_n\}$ са сходящи, то всички те имат една и съща граница (същата граница има и дадената редица).*

Ще докажем най-напред твърдението 1°. Избираме произволно положително число ε и намираме такъв номер N, че $|x_n-a|<\varepsilon$ при всички $n \geq N$. Нека $\{x_{k_n}\}$ е произволна подредица на редицата $\{x_n\}$. Тъй като $k_N \geq N$, то от номера k_N нататък членовете на подредицата $\{x_{k_n}\}$ ще удовлетворяват неравенството $|x_{k_n}-a|<\varepsilon$, а това означава, че подредицата $\{x_{k_n}\}$ е сходяща и има за граница a.

За да се докаже твърдение 2°, е достатъчно да се вземе пред вид, че и редицата $\{x_n\}$ (като частен случай на подредица) клони към някаква граница a. От 1° следва, че и всяка нейна подредица клони към същата граница a.

Напълно аналогично на 1° се доказва, че всяка подредица на безкрайно голяма редица е също безкрайно голяма редица.

Ще въведем основното понятие точка на сгъстяване на редица.

Определение 1. *Точката x се нарича* ***точка на сгъстяване*** *на редицата $\{x_n\}$, ако всяка ε-околност на точката x съдържа безбройно много членове на тази редица.*

Определение 2. *Точката x се нарича* ***точка на сгъстяване*** *на редицата $\{x_n\}$, ако от тази редица може да се избере сходяща подредица с граница x.*

Ще покажем, че определенията 1 и 2 са еквивалентни.

1. Нека всяка ε-околност на x съдържа безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$. Ще разгледаме съвкупността от ε-околностите на точката x, за които ε е равно на 1, 1/2, 1/3, $\cdots$, $1/n, \cdots$.

В първата от тези околности избираме член x_{k_1} от редицата с някакъв номер k_1, във втората от тези околности избираме член x_{k_2} на редицата с номер $k_2>k_1$, в третата от посочените околности избираме член x_{k_3} от редицата с номер $k_3>k_2, \cdots$ Този процес може да се продължи неограничено, тъй като във всяка ε-околност на точката x има безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$. В резултат ще получим подредицата $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$ на редицата $\{x_n\}$, която клони към x, тъй като $|x_{k_n}-x|<1/n$.

2. Да предположим, че от редицата $\{x_n\}$ може да се избере подредица, клоняща към x. Тогава във всяка ε-околност на точката x се съдържат безбройно много членове на подредицата (всичките от известно място нататък). Тъй като всеки член на подредицата е член и на редицата, то във всяка ε-околност на точката x ще се съдържат безбройно много членове и от тази редица. □

Ще изясним въпроса за съществуване на точки на сгъстяване на сходящите редици.

Лема 1. *Всяка сходяща редица има само една точка на сгъстяване и тя съвпада с границата на редицата.*

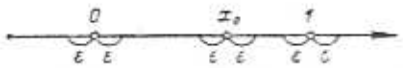
Доказателство. Нека редицата $\{x_n\}$ клони към граница a. Тогава във всяка ε-околност на a се съдържат безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$ (всичките от известно място нататък) и затова a е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$.

Остава да докажем, че нито едно число a', различно от a, не е точка на сгъстяване за редицата $\{x_n\}$. Но това следва непосредствено от доказаното твърдение 1°, според което от сходимостта на една редица с граница a следва сходимостта на всяка нейна подредица към същата граница a. □

Ще приведем пример на ограничена редица $\{x_n\}$ с две точки на сгъстяване. Ще докажем, че редицата 1/2, 1−1/2, 1/3, 1−1/3, $\cdots$, $1/n$, $1-1/n, \cdots$ има само две точки на сгъстяване $x=0$ и $x=1$. Това, че точките $x=0$ и $x=1$ са точките на сгъстяване, следва от факта, че подредицата от членовете с нечетни номера е сходяща с граница $x=0$, а подредицата от членовете с четни номера е сходяща с граница $x=1$. Остава да се докаже, че нито едно число x_0, различно от 0 и 1, не е точка на сгъстяване на тази редица. Тъй като $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 1$, то очевидно може да се избере толкова малко положително число ε, че ε-околностите на трите точки 0, 1 и x_0 да нямат общи точки (вж. фиг. 3.1).

Но всички членове на редицата с нечетни номера от известно място нататък се съдържат в ε-околността на точката 0, а всички членове на редицата с четни номера от известно място нататък се съдържат в ε-околността на точката 1. Поради това извън ε-околностите на точките 0 и 1 (по-специално в ε-околността на точката x_0) има най-много краен брой членове на редицата. Това означава, че x_0 не е точка на сгъстяване за редицата.

Ще приведем сега пример за редица $\{x_n\}$, която има безбройно много точки на сгъстяване. По-рано (2.7.3) установихме, че множеството на всички рационални числа в сегмента [0, 1] може да се нареди във вид на редица $\{x_n\}$. Ще докажем, че *всяко реално*



Фиг. 3.1

число x от сегмента $[0, 1]$ *е точка на сгъстяване за тази редица* $\{x_n\}$. Отбелязваме, че каквото и да е числото x от сегмента $[0,1]$, за всяко $0<\varepsilon<1/2$ поне едно от двете числа $x-\varepsilon$ и $x+\varepsilon$ принадлежи на сегмента $[0, 1]$.

Да предположим за определеност, че числото $x+\varepsilon$ принадлежи на сегмента $[0,1]$. Между двете различни помежду си числа x и $x+\varepsilon$ според лема 2 от глава 2 се съдържат безбройно много различни рационални числа. Това означава, че за всяко $0<\varepsilon<1/2$ в ε-околностите на точката x се съдържат безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$, т. е. x е точка на сгъстяване за тази редица.

Естествено възниква въпросът за най-голямата и най-малката точка на сгъстяване на дадена редица.

Определение 3. *Най-голямата точка на сгъстяване на редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***горна точка на сгъстяване*** *(лимес супериор*) на тази редица и се означава със символа* $\bar{x}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Определение 4. *Най-малката точка на сгъстяване на редицата* $\{x_n\}$ *се нарича* ***долна точка на сгъстяване*** *(лимес инфериор**) на тази редица и се означава със символа* $\underline{x}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

В сила е следната забележителна теорема.

Основна теорема 3.16. *Всяка ограничена редица има горна и долна точка на сгъстяване и по-специално има поне една точка на сгъстяване.*

Доказателство. Ще се спрем на доказателството за съществуване на поне една точка на сгъстяване и на горна точка на сгъстяване (лимес супериор) за всяка ограничена редица (съществуването на долна точка на сгъстяването се доказва аналогично).

Нека $\{x_n\}$ е произволна ограничена редица. От условието за ограниченост следва, че съществуват такива две реални числа m и M, че всеки член x_n на редицата $\{x_n\}$ да удовлетворява неравенствата $m\leq x_n\leq M$.

Ще разгледаме множеството $\{x\}$ на всички реални числа x, надясно от които или няма членове на редицата $\{x_n\}$, или има само краен брой такива членове.

С други думи, реалното число x принадлежи на множеството $\{x\}$, ако надясно от x лежат не повече от краен брой членове на

* От латинското limes superior, което означава „най-голяма граница.
** От латинското limes inferior, което означава „най-малка граница"

редицата $\{x_n\}$, и не принадлежи на множеството $\{x\}$, ако надясно от това число x има безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$.

Ще отбележим, че множеството $\{x\}$ очевидно не е празно: към него принадлежи всяко реално число x, удовлетворяващо неравенство $x\geq M$ (тъй като надясно от такова x няма членове на редицата $\{x_n\}$). Освен това е очевидно, че множеството $\{x\}$ е ограничено отдолу и за неговa долна граница може да се вземе всяко число, по-малко от m (надясно от такова число лежат всички членове на редицата $\{x_n\}$, а те са безбройно много).

Според теорема 2.1 за множеството $\{x\}$ съществува точна долна граница, която ще означим с $\bar{x}$. Ще докажем, че това число $\bar{x}=\inf\{x\}$ е горна точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$.

Достатъчно е да се докажат двете твърдения:

1°. Числото $\bar{x}$ е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$ (т. е. във всяка ε-околност на $\bar{x}$ има безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$).

2°. Нито едно число $\bar{\bar{x}}$, по-голямо от $\bar{x}$, не е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$ (това означава, че $\bar{x}$ е най-голямата точка на сгъстяване, т. е. горната точка на сгъстяв не на $\{x_n\}$).

За да докажем твърдението 1°, фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определението за долна граница числото $\bar{x}-\varepsilon$ не принадлежи на определеното по-горе множество $\{x\}$. Тогава надясно от $\bar{x}-\varepsilon$ ще лежат безбройно много членове от редицата $\{x_n\}$.

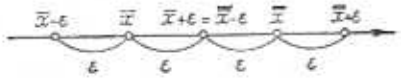
Тъй като числото $\bar{x}$ е точна долна граница на множеството $\{x\}$, от неравенството $\bar{x}<\bar{x}+\varepsilon$ следва, че съществува поне един елемент x' от множеството $\{x\}$, удовлетворяващ неравенството $\bar{x}\leq x'<\bar{x}+\varepsilon$, т. е. лежащ наляво от $\bar{x}+\varepsilon$ (вж. фиг. 3.2). Според определението на множеството $\{x\}$ надясно от това число x' ще лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$.

На фиг. 3.2 е посочено условно, че надясно от числото $\bar{x}-\varepsilon$ лежат безбройно много членове от редицата $\{x_n\}$, а надясно от числото x' лежат не повече от краен брой членове на тази редица.

Тъй като надясно от $\bar{x}-\varepsilon$ лежат безбройно много, а надясно от x' — само краен брой членове на редицата $\{x_n\}$, то стигаме до извода, че в полусегмента $(\bar{x}-\varepsilon, x']$ (а очевидно и в интервала $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$) лежат безбройно много членове на редицата $\{x_n\}$.

И така доказахме, че за всяко $\varepsilon>0$ в ε-околността на точката $\bar{x}$ лежат безбройно много членове на редицата $\{\bar{x}\}$. Това означава, че $\bar{x}$ е точка на сгъстяване за тази редица. □

Фиг. 3.2



Фиг. 3.3

Същевременно доказахме, че за всяко $\varepsilon>0$ надясно от числото $\bar{x}+\varepsilon$ има не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$.

Този факт ще използваме при доказателството на твърдение 2°, а именно че $\bar{x}$ е най-голямата точка на сгъстяване.

Нека $\bar{\bar{x}}$ е произволно число, по-голямо от $\bar{x}$. Да означим с ε положителното число $\varepsilon=(\bar{\bar{x}}-\bar{x})/2$. При този избор на ε интервалите $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ и $(\bar{\bar{x}}-\varepsilon, \bar{\bar{x}}+\varepsilon)$, т. е. ε-околностите на точките $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$, няма да имат общи точки, а по-точно ε-околността на точката $\bar{\bar{x}}$ изцяло ще лежи надясно от числото $\bar{x}+\varepsilon$, което е дясна граница на ε-околността на точката $\bar{x}$ (вж. фиг. 3.3).

По-горе установихме, че за всяко $\varepsilon>0$ надясно от $\bar{x}+\varepsilon$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$.

Очевидно в разглежданата ε-околност на точката $\bar{\bar{x}}$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$, а това означава че $\bar{\bar{x}}$ не е точка на сгъстяване на тази редица. □

Доказахме, че всяка ограничена редица $\{x_n\}$ има горна точка на сгъстяване (т. е. най-голяма точка на сгъстяване). Съвършено аналогично се доказва съществуването на долна точка на сгъстяване, която е точната горна граница на множеството от реалните числа $\{x\}$, наляво от които лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. □

Следствие 1. *Ако $\{x_n\}$ е ограничена редица, $\underline{x}$ и $\bar{x}$ са съответно нейната долна и горна точка на сгъстяване, ε е произволно положително число, то в интервала $(\underline{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ се съдържат всички членове на тази редица от известен номер нататък (който зависи, разбира се, от ε).*

Достатъчно е да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ вън от интервала $(\underline{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Разбира се, за това е достатъчно да се докаже например, че надясно от $\bar{x}+\varepsilon$ и наляво от $\underline{x}-\varepsilon$ лежат най-много краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Фактът, че за всяко $\varepsilon>0$ надясно от $\bar{x}+\varepsilon$ лежат не повече от краен брой членове на $\{x_n\}$, беше установен при доказването на теорема 3.16. Съвсем аналогично се доказва, че за всяко $\varepsilon>0$ наляво от $\underline{x}-\varepsilon$ лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. □

Следствие 2. *Нека $\{x_n\}$ е ограничена редица с долна и горна точка на сгъстяване съответно $\underline{x}$ и $\bar{x}$, (a, b) е интервал, вън от който лежат не повече от краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Тогава интервалът $(\underline{x}, \bar{x})$ се съдържа в интервала (a, b) и по-специално $\bar{x}-\underline{x}\leq b-a$.*

Доказателство. Достатъчно е да се докажат двете неравенства $\bar{x}\leq b$ и $\underline{x}\geq a$. Първото от тях следва от това, че точката b, надясно от която лежат само краен брой членове от редицата $\{x_n\}$, принадлежи на множеството $\{x\}$, разгледано при доказателството на теорема 3.16, а $\bar{x}$ е точна долна граница на това множество. Второто неравенство $a\leq\underline{x}$ се установява аналогично. □

Следствие 3 (теорема на Болцано — Вайерщрас*). *От всяка ограничена редица може да се избере сходяща подредица.*

Тази теорема е непосредствено следствие от теорема 3.16 и определение 2 за точка на сгъстяване.

Теорема 3.16 хвърля светлина върху структурата на множеството от всички точки на сгъстяване на произволна ограничена редица. Ако както и по-горе, означим с $\underline{x}$ и $\bar{x}$ съответно долната и горната точка на сгъстяване на такава редица, то всички точки на сгъстяване се съдържат в сегмента $[\underline{x}, \bar{x}]$, при което, ако редицата не е сходяща, тя има поне две точки на сгъстяване $\underline{x}$ и $\bar{x}$. Разгледаната по-рано редица $1/2$, $1-1/2$, $1/3$, $1-1/3$, $\cdots$, $1/n$, $1-1/n$, $\cdots$ е пример за редица със само две точки на сгъстяване $\underline{x}=0$ и $\bar{x}=1$.

Другата разгледана редица $\{x_n\}$ от всички рационални числа на сегмента $[0, 1]$ е пример за редица, чиито точки на сгъстяване покриват целия сегмент $[0, 1]$.

* Бернхард Болцано — чешки философ и математик (1781—1848). Карл Вайерщрас — немски математик (1815—1897).

Лесно е да се построи пример за редица $\{x_n\}$, която има за точки на сгъстяване: 1) отнапред зададено крайно множество от точки $a_1, a_2, \cdots, a_k$; 2) отнапред избрана безкрайна редица от точки $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$* (във втория случай всяка точка на сгъстяване на редицата от точките на сгъстяване $\{a_n\}$ ще бъде точка на сгъстяване и за изходната редица $\{x_n\}$).

3.3.2. Разширяване на понятието точка на сгъстяване. Аналог на теоремата на Болцано — Вайерщрас за неограничени редици е следното твърдение:

Лема 2. *От всяка неограничена редица може да се избере безкрайно голяма подредица (и по-специално безкрайно голяма подредица, всички членове на която имат еднакъв знак).*

Доказателство. Най-напред ще отбележим, че ако в неограничена редица премахнем произволен брой от първите членове, то редицата от останалите членове е също неограничена. Нека $\{x_n\}$ е произволна неограничена редица. Тогава съществува член x_k, от тази редица, удовлетворяващ неравенството $|x_{k_1}|>1$. Като вземем пред вид, че редицата $\{x_n\}$, разглеждана от номера k_1+1 нататък, е също неограничена, то ще съществува член x_{k_2}, който удовлетворява неравенството $|x_{k_2}|>2$, а $k_2>k_1$. Продължавайки тези разсъждения, ще получим, че за всеки номер n съществува член x_{k_n}, за който е изпълнено неравенството $|x_{k_n}|>n$ и $k_n>k_{n-1}$.

Очевидно е, че построената по този начин подредица $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$ е безкрайно голяма. Тъй като тази редица съдържа безбройно много или положителни, или отрицателни членове, ние можем да изберем от нея безкрайно голяма подредица, членовете на която имат един и същ знак. □

От лема 2 и теоремата на Болцано — Вайерщрас следва твърдението:

Лема 3. *От произволна редица може да се избере или сходяща подредица, или безкрайно голяма подредица, всички членове на която имат един и същ знак.*

Лема 3 естествено води до идеята за разширяване на понятието точка на сгъстяване на редица. Ще се уговорим формално да допълним въведените по-рано крайни точки на сгъстяване на редица с още две възможни точки на сгъстяване $+\infty$ и $-\infty$.

Ще казваме, че $+\infty$ $(-\infty)$ е точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$, ако от тази редица може да се избере безкрайно голяма подредица, всички членове на която са положителни (отрицателни).

При такова разширение на понятието точка на сгъстяване от лема 3 следва твърдението: *Всяка редица има поне една точка на сгъстяване* (или крайна, или равна на $+\infty$ или $-\infty$).

* Такава е редицата $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, \cdots$

Естествено е да считаме, че $+\infty$ и $-\infty$ са свързани с всяко крайно реално число x с неравенствата $-\infty<x<+\infty$. Ще покажем, че всяка редица $\{x_n\}$ има горна и долна точка на сгъстяване.

За определеност ще се спрем на доказателството за съществуване на горна точка на сгъстяване.

Съгласно теорема 3.16 е достатъчно да разгледаме само случая, когато редицата $\{x_n\}$ е неограничена.

Ако при това редицата $\{x_n\}$ е неограничена отгоре, то от нея може да се избере безкрайно голяма подредица, всичките членове на която са положителни и затова $+\infty$ ще бъде точка на сгъстяване на редицата $\{x_n\}$.

Остава да се разгледа случаят, в който неограничената редица $\{x_n\}$ е ограничена отгоре, т. е. когато съществува такова реално число M, че всички членове x_n на редицата удовлетворяват неравенството $x_n\leq M$. Понеже при това редицата $\{x_n\}$ е неограничена отдолу, то от нея може да се избере безкрайно голяма подредица, всички членове на която са отрицателни, т. е. $-\infty$ е точка на сгъстяване на тази редица.

Ако при това редицата $\{x_n\}$ няма нито една крайна точка на сгъстяване, то единствената точка на сгъстяване $-\infty$ е и горна точка на сгъстяване на тази редица.

Ако редицата има поне една крайна точка на сгъстяване x_0, то като фиксираме някое $\varepsilon>0$, можем да изберем от тази редица подредицата от всички членове, които удовлетворяват неравенствата

$$x_0-\varepsilon\leq x_n\leq M.$$

Избраната подредица е ограничена и според теорема 3.16 за нея съществува най-голяма точка на сгъстяване, която е най-голямата точка на сгъстяване и на редицата $\{x_n\}$. Съществуването на горна точка на сгъстяване за всяка редица е доказано. Аналогично се доказва, че за всяка редица съществува долна точка на сгъстяване.

В заключение ще отбележим, че почти всички понятия и твърдения, установени в тази и в предишните точки, се прenасят и за произволно числово множество $\{x\}$ с безкраен брой елементи.

Точката α от безкрайната права $(-\infty, +\infty)$ ще наричаме точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$, ако във всяка ε-околност на точката α се съдържат безкрайно много елементи от това множество.

Най-голямата и най-малката точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$ ще наречем съответно *горна* и *долна точка на сгъстяване* на това множество.

Като повторим разсъжденията в теорема 3.16 и заменим термина „редицата $\{x_n\}$" с термина „множеството $\{x\}$, съдържащо безкраен брой елементи", ще дойдем до следното твърдение: *Всяко ограничено числово множество $\{x\}$, съдържащо безкраен брой елементи, има горна и долна точка на сгъстяване (и по-специално има поне една точка на сгъстяване).*

От това твърдение следва едно обобщение на теоремата на Болцано — Вайерщрас: *От елементите на всяко ограничено безкрайно множество $\{x\}$ може да се избере сходяща подредица, всички членове на която са различни помежду си.*

Както и в случая на редица, удобно е да разширим понятието точка на сгъстяване и да приемем, че $+\infty$ $(-\infty)$ *е точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$, ако от елементите на това множество може да се избере безкрайно голяма редица от положителни (отрицателни) числа.*

Тази формализация ни позволява да твърдим, че *безкрайно числово множество $\{x\}$ има поне една точка на сгъстяване, а така също горна и долна точка на сгъстяване.*

3.3.3. Критерий на Коши* за сходимост на редица. При изучаване на сходимостта на една редица $\{x_n\}$ се оценява обикновено разликата $x_n - a$ между членовете на редицата и предполагаемата ѝ граница a. С други думи, трябва да предугаждаме стойността на границата a на тази редица.

Сега ще дадем „вътрешен" критерий за сходимост на редица, позволяващ да определяме нейната сходимост, без да познаваме предполагаемата граница на тази редица.

Определение 5. *Редицата $\{x_n\}$ се нарича* ***фундаментална*****, *ако за всяко положително число ε съществува такъв номер N, че за всяко n, удовлетворяващо условието $n \geq N$, и за всяко естествено число p $(p = 1, 2, \cdots)$ да е изпълнено неравенството*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Ще докажем две важни свойства на фундаменталните редици.

Свойство 1. Нека е дадена фундаменталната редица $\{x_n\}$. За всяко положително число ε съществува такъв член x_N, че в ε-околността на този член x_N се съдържат всички членове x_n на редицата с номера $n \geq N$.

С други думи, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува член от фундаменталната редица, вън от ε-околността на който има най-много краен брой членове на тази редица.

* Огюстен Луи Коши — френски математик (1789 — 1857).
** Използува се още наименованието *редица на Коши*.

Доказателство. Фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определението за фундаментална редица съществува такъв номер N, че за всяко естествено число p $(p = 1, 2, 3, \cdots)$ членовете на фундаменталната редица удовлетворяват неравенството

$$|x_{N+p} - x_N| < \varepsilon,$$

или

$$x_N - \varepsilon < x_{N+p} < x_N + \varepsilon.$$

Тъй като p е произволно естествено число, то от последните неравенства следва, че всички членове на фундаменталната редица с номера, по-големи от N, се съдържат в интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$, т. е. в ε-околността на x_N. □

Свойство 2. Всяка фундаментална редица е ограничена.

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е фундаментална редица. Избираме произволно числото $\varepsilon > 0$. Съгласно свойство 1 за това ε съществува такъв член x_N, че всички членове x_n с номера $n \geq N$ удовлетворяват неравенството

$$x_N - \varepsilon < x_n < x_N + \varepsilon.$$

Да означим с A най-голямото от следните $N+1$ числа: $|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N-1}|, |x_N - \varepsilon|, |x_N + \varepsilon|$. Тогава очевидно за всички номера n ще бъде изпълнено неравенството $|x_n| \leq A$, откъдето следва ограничеността на редицата $\{x_n\}$. □

Ще докажем сега следната помощна теорема.

Теорема 3.17. *За да бъде редицата $\{x_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно тя да е ограничена и горната ѝ точка на сгъстяване $\bar{x}$ да съвпадне с долната ѝ точка на сгъстяване $\underline{x}$.*

Доказателство. 1) *Необходимост.* Нека редицата $\{x_n\}$ е сходяща. Тогава тя е ограничена (съгласно теорема 3.8) и има само една точка на сгъстяване (съгласно лема 1). Това означава, че горната ѝ и долната ѝ точка на сгъстяване $\bar{x}$ и $\underline{x}$ съвпадат.

2) *Достатъчност.* Нека редицата $\{x_n\}$ е ограничена (съгласно теорема 3.16 тя има горна точка на сгъстяване $\bar{x}$ и долна точка на сгъстяване $\underline{x}$) и нека $\bar{x} = \underline{x}$. Да положим $x = \bar{x} = \underline{x}$. Съгласно следствие 1 на теорема 3.16 за всяко $\varepsilon > 0$ интервалът $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ съдържа всички членове на редицата $\{x_n\}$ от даден номер нататък. Според определение 3 за сходяща редица (вж. 3.1.4) това означава, че редицата $\{x_n\}$ клони към границата x. Теорема 3.17 е доказана.

Ще докажем следната важна теорема:

Основна теорема 3.18 (критерий на Коши за сходимост на

редица). *За да бъде редицата $\{x_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно тя да бъде фундаментална.*

Доказателство. 1. *Необходимост.* Нека редицата $\{x_n\}$ е сходяща с граница x. Ще докажем, че тази редица е фундаментална. Фиксираме произволно положителното число ε. Тъй като x е граница на редицата $\{x_n\}$, то за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такъв номер N, че за всяко $n \geq N$

$$|x_n - x| < \varepsilon/2. \tag{3.41}$$

Ако p е произволно естествено число, то за всички $n \geq N$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|x_{n+p} - x| < \varepsilon/2, \tag{3.42}$$

тъй като $n+p \geq N$.

От неравенствата (3.41) и (3.42) получаваме, че за всяко $n \geq N$ и за всяко естествено число p

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x) + (x - x_n)|$$
$$\leq |x_{n+p} - x| + |x_n - x| < \varepsilon,$$

а това означава, че редицата $\{x_n\}$ е фундаментална.

2. *Достатъчност.* Нека редицата $\{x_n\}$ е фундаментална. Трябва да се докаже, че тя е сходяща. Съгласно теорема 3.17 е достатъчно да докажем, че редицата $\{x_n\}$ е ограничена и че горната и долната ѝ точка на сгъстяване $\bar{x}$ и $\underline{x}$ съвпадат.

По-горе установихме, че всяка фундаментална редица е ограничена (вж. свойство 2). Остава да докажем, че горната точка на сгъстяване $\bar{x}$ и долната точка на сгъстяване $\underline{x}$ на редицата $\{x_n\}$ съвпадат. Фиксираме произволно положителното число ε. Съгласно свойство 1 на фундаменталните редици съществува такъв член x_N от редицата $\{x_n\}$, че вън от ε-околността на този член, т. е. вън от интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$, лежат най-много краен брой членове на редицата $\{x_n\}$. Но тогава съгласно следствие 2 на теорема 3.16 интервалът $(\underline{x}, \bar{x})$ се съдържа в интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ и по-специално е изпълнено неравенството $\bar{x} - \underline{x} \leq (x_N + \varepsilon) - (x_N - \varepsilon) = 2\varepsilon$. Тъй като освен това $\bar{x} \geq \underline{x}$, то за всяко $\varepsilon > 0$ са изпълнени неравенствата $0 \leq \bar{x} - \underline{x} \leq 2\varepsilon$. От произволния избор на ε и от тези неравенства следва, че $\bar{x} - \underline{x} = 0$, т. е. $\bar{x} = \underline{x}$. Критерият на Коши е доказан.

Примери:

1. Ще приложим критерия на Коши, за да установим разходимостта на редицата $\{x_n\}$ с членове $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Ще отбележим, че ако за всяко n изберем естественото число p, равно на n, ще получим, че за всяко n

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{2n} - x_n| = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

По този начин за положителното число $\varepsilon = 1/2$ не съществува такъв номер N, че за всяко $n \geq N$ и за всяко естествено число p да е изпълнено неравенството $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Следователно разглежданата редица не е фундаментална и (по критерия на Коши) е разходяща.

2. Ще приложим критерия на Коши, за да установим сходимостта на редицата $\{x_n\}$ с членове $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, където q е произволно число от интервала $0 < q < 1$.

За всеки номер n и всяко естествено число p $(p = 1, 2, 3, \cdots)$ е изпълнено неравенството

$$|x_{n+p} - x_n| = (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n+p}) - (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \tag{3.43}$$
$$= q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^{n+p} = \frac{q^{n+1} - q^{n+p+1}}{1-q} < \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Фиксираме произволно положителното число ε. Тъй като редицата $\{q^n\}$ поради $0 < q < 1$ е безкрайно малка, то за положителното число $\varepsilon(1-q)$ съществува такъв номер N, че за всяко $n \geq N$ е изпълнено неравенството

$$q^n < \varepsilon(1-q). \tag{3.44}$$

От неравенствата (3.43) и (3.44) следва, че за всяко $n \geq N$ и за всяко естествено число p имаме

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon(1-q)}{1-q} = \varepsilon,$$

а това означава, че разглежданата редица е фундаментална и следователно (по критерия на Коши) сходяща.

3.4. Граница на функция

Ще преминем към изучаването на друга, по-сложна форма на граничен преход, основана на понятието граница (или гранична стойност) на функция. Но преди това ще се спрем на понятията променлива величина и функция.

3.4.1. Понятие за променлива величина и функция. Разглеждането на реални физически променливи величини показва, че те не всякога могат да приемат произволни стойности. Така например скоростта на материална точка не може да бъде по-голяма от 3.10^{10} m/s (т. е. скоростта на светлината във вакуум), температурата на тяло не може да бъде по-малка от -273°C, отместването на материална точка, извършваща хармонични трептения по закона $y = A\cos(\omega t+\delta)$, може да приема стойности само от сегмента $[-A, A]$.

Като се абстрахираме от конкретните физически свойства на наблюдаваните в природата променливи величини, стигаме до понятието ***математическа променлива величина***, характеризираща се само с числените стойности, които тя приема.

Множеството $\{x\}$ от всички стойности, които дадена променлива величина x може да приема, се нарича ***област на изменение*** *на тази променлива величина. Променливата величина е зададена, ако е дадена нейната област на изменение.*

По-нататък обикновено ще означаваме променливите величини с малките латински букви $x, y, t, \ldots$, а областите на изменение на тези величини — съответно със символите $\{x\}, \{y\}, \{t\}, \ldots$

Ще преминем сега към уточняване на понятието функция.

Нека е зададена променливата величина x, която има област на изменение някое множество $\{x\}$.

Ако на всяка стойност на променливата x от множеството $\{x\}$ е съпоставено някое число y от множеството $\{y\}$, казваме, че върху множеството $\{x\}$ е ***зададена (дефинирана) функцията*** $y = f(x)$ *или* $f: \{x\} \to \{y\}$.

Променливата x се нарича ***аргумент*** *или* ***независима променлива****, множеството $\{x\}$ се нарича* ***дефиниционна област*** *на функцията, а числото $f(x)$, което съответствува на дадена стойност на x, се нарича* ***стойност на функцията f в точката*** *x. Съвкупността $\{y\}$ от всички възможни стойности на функцията f се нарича* ***област на изменение на тази функция.***

В означението $y = f(x)$ буквата f често се нарича ***характеристика*** на функцията.

Ако f и g са две функции с една и съща дефиниционна област $\{x\}$, тогава сума $f+g$ на функциите f и g се нарича функцията h, която е дефинирана за всяко $x \in \{x\}$ с равенството $h(x) = f(x) + g(x)$. Аналогично се дефинира разлика $f-g$, произведение $f.g$ и частно f/g на две функции. Разбира се, частното f/g е дефинирано само за онези стойности $x \in \{x\}$ на аргумента, за които $g(x) \neq 0$.

Примери:

1. $y = \sqrt{4-x^2}$. Тази функция е дефинирана върху сегмента $-2 \leq x \leq 2$ (при тези стойности на x изразът под знака на корена е неотрицателен), а множеството от всичките ѝ стойности е сегментът $0 \leq y \leq 2$ (вж. фиг. 3. 4).

2. Функцията на Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 0, \text{ ако } x \text{ е ирационално число,} \\ 1, \text{ ако } x \text{ е рационално число.} \end{cases}$$

Функцията D е дефинирана върху безкрайната права $-\infty < x < \infty$ а множеството от всичките ѝ стойности съдържа само точките 0 и 1.

3.
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, \text{ ако } x > 0, \\ 0, \text{ ако } x = 0, \\ -1, \text{ ако } x < 0 \end{cases}$$

(sgn от латинската дума signum — знак). Чете се „сигнум x". Тази функция е дефинирана върху безкрайната права $-\infty < x < \infty$ а множеството от всичките ѝ стойности съдържа трите точки $y = -1$, $y = 0$ и $y = 1$ (вж. фиг. 3.5).

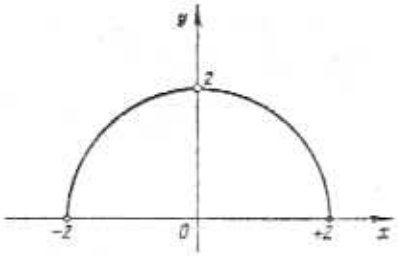
4. Символът $[x]$ означава цялата част на числото x, или по-точно най-голямото цяло число, ненадминаващо x. Чете се „скобки от x". Функцията $f(x) = [x]$ е дефинирана върху цялата безкрайна права $-\infty < x < \infty$, а множеството от всичките ѝ стойности е множеството от всичките цели числа (вж. фиг. 3.6).

5. $f(n) = n!$. Тази функция** е дефинирана върху множеството на всички естествени числа $n = 1, 2, 3, \ldots$ Множеството от всичките ѝ стойности е множеството от естествените числа от вида $n! = 1.2.3 \ldots n$, където $n = 1, 2, 3, \ldots$ (вж. фиг. 3.7).

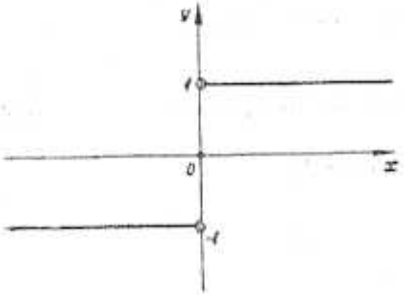
Често съответствието между множеството от стойности на аргумента и множеството от стойности на функцията се задава с формула. Този начин на задаване на функцията се нарича аналитичен.

Ще отбележим, че функцията може да се задава с различни

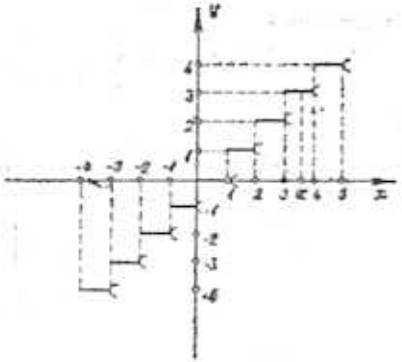
* Петер Густав Льожоп-Дирихле — немски математик (1805 — 1859).
** Символът „$n!$" се чете „n факториел".



Фиг. 3.4



Фиг. 3.5



Фиг. 3.6

формули върху различните участъци от дефиниционната си област. Например функцията

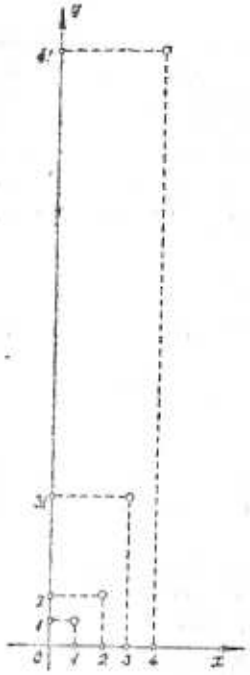
$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{при } x<0, \\ x^2 & \text{при } x\geqq 0 \end{cases}$$

е зададена аналитично върху безкрайната права $-\infty<x<+\infty$ (вж. фиг. 3.8).

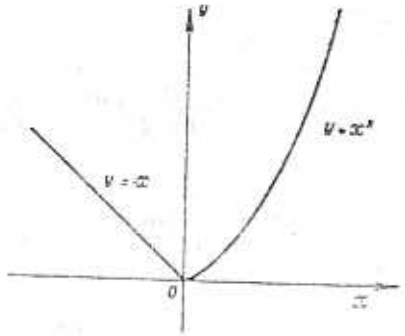
Възможно е стойностите на аргумента и съответните стойности на функцията да са дадени във вид на таблица.

Като пример за таблично зададена функция може да служи разписанието за движение на влак, което определя местоположението на влака в отделни моменти от времето. Чрез интерполация, при която функцията в интервала между две съседни таблични стойности се заменя с някаква функция от прост вид (например линейна или квадратна), може приближено да се определи местоположението на влака и във всеки междинен момент от времето.

В практиката на физическите измервания много разпространен е още един начин — графичният начин за задаване на функции, при



Фиг. 3.7



Фиг. 3.8

който съответствието между аргумент и функция се задава чрез графика.

3.4.2. Граница на функция по Хайне и по Коши. Нека функцията f е дефинирана върху някое безкрайно множество $\{x\}$ и нека a е точка на сгъстяване за множеството $\{x\}$, която може и да не принадлежи на това множество.

Например нека множеството $\{x\}$ е интервалът (a, b); в този случай точката a не принадлежи на интервала, но всяка δ-околност на точката a съдържа точки от интервала.

Друг пример за множеството x е множеството на рационалните числа, принадлежащи на интевала $(a-\delta,\ a+\delta)$, без точката a.

Ще отбележим, че при всяко $\delta>0$ интервалът $(a-\delta,\ a+\delta)$, от който е изключена точката a, се нарича ***прободена δ-околност*** на точката a.

Определение 1 (граница на функция по Хайне*). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f в точката a (или при $x\to a$), ако за всяка редица от стойности на*

* Хайнрих Едуард Хайне — немски математик (1821 — 1881).

аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, клоняща към a и състояща се от числа x_n, различни от a, съответната редица от стойности на функцията $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ клони към числото b.

Определение 1′ (граница на функцията по Коши). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f в точката a (или при $x \to a$), ако за всяко положително число ε съществува такова положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $0 < |x-a| < \delta$, да е изпълнено неравенството*

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \tag{3.45}$$

Граничната стойност на функцията $y = f(x)$ в точката a се означава с:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ или } f(x) \to b \text{ при } x \to a.$$

Преди да докажем еквивалентността на определения 1 и 1′, ще направим няколко забележки, които поясняват смисъла на тези определения.

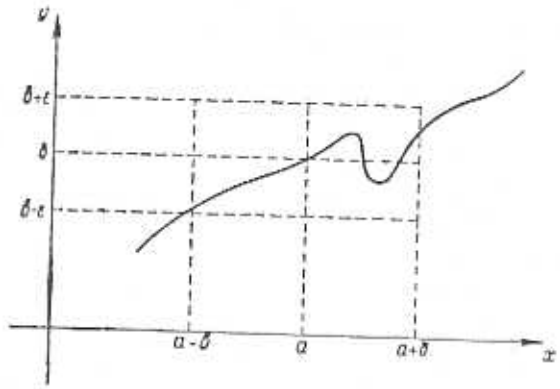
Забележка 1. Ще подчертаем важността на изискването в определение 1 членовете x_n на редицата да бъдат различни от a и аналогичното изискване в определение 1′, което налага за аргумента x условието $0 < |x-a|$, т. е. x да бъде различно от a. Това се налага от обстоятелството, че функцията f може да не е дефинирана в точката a. Без това изискване е невъзможно да се използва граница на функция за определяне на производна на функция. Действително, производната $f'(a)$ на функцията f в точката a е границата при $x \to a$ на следната функция:

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Очевидно е, че функцията F не е дефинирана в точката a.

Забележка 2. Множеството $\{x\}$, върху което е дефинирана функцията f, не е необходимо изцяло да покрива някоя прободена δ-околност на точката a. Това множество $\{x\}$ трябва да има само поне един елемент във всяка прободена околност на точката a. Пример за такова множество $\{x\}$ е множеството на всички членове на редицата $\{1/n\}$, лежащи във фиксирана δ-околност на точката $a=0$.

Забележка 3. Условието $0 < |x-a| < \delta$ в определение 1′ е еквивалентно на съотношенията $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$, т. е. x принадлежи на прободената δ-околност на точката a. Неравенството (3.58) е еквивалентно на неравенствата $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, т. е. $f(x)$ принадлежи на ε-околност на b.



Фиг. 3.9

Забележка 4. Като използваме идеята за приближаване на функцията f в околност на точката a с отнапред зададена точност ε, можем да изкажем определението на граница на функция по Коши (определение 1′) така: Числото b се нарича гранична стойност на функцията f в точката a, ако при всяка отнапред зададена точност $\varepsilon > 0$ може да се намери такава δ-околност на точката a, че за всички стойности на аргумента x, различни от a и принадлежащи на тази δ-околност на точката a, числото b приближава стойността на функцията $f(x)$ с точност ε (фиг. 3.9).

Забележка 5. Функцията f може да има в точката a само една граница. Действително при определянето на граница на функция по Хайне това следва от единствеността на границата на редицата $\{f(x_n)\}$, а при определянето на граница на функция по Коши то следва от еквивалентността на двете определения, която сега ще докажем.

Теорема 3.19. *Определенията 1 и 1′ за граница на функция по Хайне и по Коши са еквивалентни.*

Доказателство. 1. Нека числото b е граница на функцията f в точката a по Коши. Ще докажем, че числото b е граница на функцията f в точката a и по Хайне. Нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента, всичките членове на която са различни от a. Трябва да се докаже, че съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към b.

Фиксираме произволно положително число ε и избираме положителното число δ, което според определението за граница на функция по Коши осигурява верността на неравенства (3.45) за всички стойности на x, за които $0 < |x-a| < \delta$.

От сходимостта на редицата $\{x_n\}$ към a за посоченото положително число δ съществува такъв номер N, че при всички $n \geq N$ е изпълнено неравенството $|x_n - a| < \delta$. Тъй като $x_n \neq a$ за всички номера n, то за всички $n \geq N$ са изпълнени неравенствата $0 < |x_n - a| < \delta$ и съгласно определението за граница на функция по Коши за всички $n \geq N$ е изпълнено неравенството $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Това означава, че редицата $\{f(x_n)\}$ клони към b.

2. Нека сега числото b е граница на функцията f в точката a по Хайне. Ще докажем, че това число b е граница на функцията f в точката a и по Коши. Да допуснем противното. Тогава съществува положително число ε_0 такова, че за всяко положително число δ може да се намери поне една такава стойност на аргумента x, че $0 < |x - a| < \delta$, но $|f(x) - b| \geq \varepsilon_0$.

По този начин, ако вземем редицата $\delta_n = 1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, можем да твърдим, че за всеки неин член $\delta_n = 1/n$ съществува поне една такава стойност на аргумента x_n, че

$$0 < |x_n - a| < 1/n, \text{ но } |f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0. \tag{3.46}$$

Лявото от неравенствата (3.46) означава, че редицата $\{x_n\}$ клони към a със стойности, различни от a. Но в такъв случай съгласно определението на граница по Хайне съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ трябва да клони към b, а това противоречи на дясното от неравенства (3.46), изпълнено за всички номера n. Полученото противоречие доказва теоремата.

Примери:

1. Функцията $f(x) = c = \text{const}$ има граница c във всяка точка a от безкрайната права. Наистина за всяка стойност на аргумента x разликата $f(x) - c$ е равна на нула и затова $|f(x) - c| < \varepsilon$ за всяко $\varepsilon > 0$ и за всички стойности на аргумента (в дадения случай, за всяко $\varepsilon > 0$ в определението за граница по Коши, за δ може да се избере всяко положително число).

2. Функцията $f(x) = x$ има граница a във всяка точка a на безкрайната права. Наистина за тази функция редицата от стойности на аргумента съвпада със съответната редица от стойности на функцията и ако редицата $\{x_n\}$ клони към a, то и редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към a.

3. Функцията на Дирихле D, стойностите на която в рационалните точки са единица, а в ирационалните точки — нула, няма граница в нито една точка на безкрайната права. Това следва от факта, че за клоняща към a редица от рационални стойности на аргумента границата на редицата от съответните стойности на функцията е единица, а за клоняща към a редица от ирационални стойности на аргумента границата на редицата от съответните стойности на функцията е равна на нула.

Ще въведем сега понятието едностранна (дясна или лява) граница на функция в дадена точка a. За целта най-напред ще уточним характера на множеството $\{x\}$, върху което е зададена функцията f. Ще поискаме от множеството $\{x\}$ за всяко $\delta > 0$ да има поне един елемент, принадлежащ на интервала $(a, a+\delta)$ (интервала $(a-\delta, a)$).

Определение 2 (дясна (лява) граница на функция по Хайне). *Числото b се нарича* ***дясна (лява) граница*** *на функцията f в точката a, ако за всяка редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$, клоняща към a и състояща се от числа, по-големи от a (по-малки от a), съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към b.*

Определение 2′ (дясна (лява) граница на функция по Коши). Числото b се нарича ***дясна (лява) граница на функцията*** f в точката a, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $a < x < a+\delta$ $(a-\delta < x < a)$, е изпълнено неравенството (3.45).

Дясната (лявата) граница на функцията f в точката a се означава с:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \quad \left(\lim_{x \to a-0} f(x) = b\right),$$

или по-краткото

$$f(a+0) = b \quad (f(a-0) = b).$$

Напълно аналогично на теорема 3.19 се доказва еквивалентността на определенията 2 и 2′ — трябва само да се вземат стойности на аргумента x и членове на редицата $\{x_n\}$, по-големи от числото a (по малки от числото a).

За пример ще разгледаме функцията

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ако } x > 0, \\ 0, & \text{ако } x = 0, \\ -1, & \text{ако } x < 0. \end{cases}$$

Тази функция има в точката $a = 0$ както дясна, така и лява граница, при което $\operatorname{sgn}(0+0) = +1$, $\operatorname{sgn}(0-0) = -1$. Наистина за всяка клоняща към $a = 0$ редица $\{x_n\}$, състояща се от числа, по-големи от нула, съответната редица $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ клони към 1, за всяка клоняща към $a = 0$ редица $\{x_n\}$ от числа, по малки от нула, съответната редица $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ клони към -1.

От тези разсъждения следва, че разглежданата функция, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ няма граница в точката $a = 0$.

И така функцията sgn няма граница в точката $a = 0$, но има в тази точка дясна граница, равна на 1, и лява граница, равна на -1.

Фактът, че дясната и лявата граница на тази функция не са равни, не е случаен, тъй като е в сила следното твърдение: *Ако функцията f има в точката a дясна и лява граница и тези едностранни граници са равни на едно и също число b, то тази функция има граница в точката a, равна на b.* Очевидно е вярно и обратното твърдение: Ако функцията f има в точката a граница, равна на b, то дясната и лявата граница на f в точката a съществуват и са равни на b.

За доказателството на това твърдение можем да се възползваме от определенията 1′ и 2′, като отчетем, че ако неравенството (3.45) е изпълнено за стойности на аргумента x, удовлетворяващи условията $a<x<a+\delta$ и $a-\delta<x<a$, то неравенството (3.45) е изпълнено и за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $0<|x-a|<\delta$.

Ще формулираме сега понятието граница на функция при $x\to\infty$. За въвеждането на това понятие трябва да поискаме множеството $\{x\}$, върху което е дефинирана функцията f, да има поне един елемент, лежащ вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ за всяко $\delta>0$.

Определение 3 (граница на функция при $x\to\infty$ по Хайне). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to\infty$, ако за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към числото b.*

Определение 3′ (граница на функция при $x\to\infty$ по Коши). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to\infty$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $|x|>\delta$, е изпълнено неравенството* (3.45).

Границата на функцията f при $x\to\infty$ се означава с: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Напълно аналогично на теорема 3.19 се доказва еквивалентността на определенията 3 и 3′. Трябва само да се замени „сходяща редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$" с „безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$", а неравенството $0<|x-a|<\delta$ да се замени с неравенството $|x|>\delta$.

Пример за функция, която има граница при $x\to\infty$, е функцията $f(x)=1/x$ $(x\neq 0)$. Наистина за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $f(x_n)=1/x_n$ (по теорема 3.6) е безкрайно малка, т. е. има за граница числото $b=0$. Съгласно определение 3 $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x=0$.

Ще формулираме накрая понятието граница на функция, когато x клони към безкрайност с определен знак. За да въведем това понятие, ще искаме функцията f да е дефинирана в такова

множество $\{x\}$, което за всяко $\delta>0$ има поне един елемент, лежащ надясно от δ (наляво от $-\delta$).

Определение 4 (граница на функция при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ по Хайне). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), ако за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$, всички членове на която са положителни (отрицателни), съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към числото b.*

Определение 4′ (граница на функция при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ по Коши). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $x>\delta$ $(x<-\delta)$, да е изпълнено неравенството* (3.45).

Въведените понятия се означават с: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b)$.

Еквивалентността на определенията 4 и 4′ се доказва по същата схема, както в теорема 3.19: трябва само да се замени „сходяща редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$" с „безкрайно голяма редица от положителни (отрицателни) стойности на аргумента $\{x_n\}$", а неравенството $0<|x-a|<\delta$ се замеря с неравенството $x>\delta$ $(x<-\delta)$.

Забележка 6. Понятието за граница на числова редица $\{x_n\}$ може да се разглежда като частен случай на граница на функция при $x\to+\infty$. Ако вземем за $\{x\}$ множеството от всички естествени числа $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, а за f функция, дефинирана върху това множество, която на всяка стойност на аргумента n съпоставя n-тия член на редицата $\{x_n\}$, то определение 4′ за граница на такава функция при $x\to+\infty$ съвпада с определението за граница на числовата редица $\{x_n\}$.

3.4.3. Критерий на Коши за съществуване на граница на функция. За определеност ще разгледаме подробно случая за граница на функции f в точката a, въведена с определенията 1 и 1′.

Определение 5. *Ще казваме, че функцията f* ***удовлетворява в точката a условието на Коши,*** *ако за всяко положително ε съществува такова положително число δ, че за всеки две стойности на аргумента x' и x'', удовлетворяващи условията*

$$0<|x'-a|<\delta,\ 0<|x''-a|<\delta, \tag{3.47}$$

да е изпълнено неравенството

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{3.48}$$

Теорема 3.20 (критерий на Коши за съществуване на граница на функция в точка a). *За да има функцията f крайна гра-*

ница в точката a, е необходимо и достатъчно тя да удовлетворява в тази точка условието на Коши.

Доказателство. *1. Необходимост.* Нека да съществува крайна граница $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. Фиксираме произволно положително число ε. Съгласно определение 1′ за граница на функция по Коши за положителното число $\varepsilon/2$ съществува такова положително число δ, че каквито и да са стойностите на аргумента x' и x'', удовлетворяващи условията $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$, съответните стойности на функцията удовлетворяват неравенствата

$$|f(x')-b|<\varepsilon/2,\ |f(x'')-b|<\varepsilon/2. \tag{3.49}$$

От неравенствата (3.49) получаваме, че

$$|f(x')-f(x'')|=|(f(x')-b)+(b-f(x''))|$$
$$\leq|f(x')-b|+|f(x'')-b|<\varepsilon,$$

което означава, че функцията f удовлетворява в точката a условието на Коши.

2. Достатъчност. Нека функцията f удовлетворява в точката a условието на Коши. Трябва да се докаже, че f има граница в точката a. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица от стойности на аргумента, клоняща към a и състояща се от числа, различни от a. Според определение 1 за граница по Хайне е достатъчно да се докаже, че съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към някакво число b и че това число b е едно и също за всички клонящи към a редици $\{x_n\}$ от числа, различни от a.

Ще докажем най-напред, че за всяка клоняща към a редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, различни от a, съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към някаква граница. Фиксираме произволно положително число ε и избираме съгласно условието на Коши съответно положително число δ. От сходимостта на редицата $\{x_n\}$ към a и от условието $x_n\neq a$ следва, че за това $\delta>0$ съществува такъв номер N, че $0<|x_n-a|<\delta$ при $n\geq N$. Ако сега p е произволно естествено число ($p=1, 2, 3, \cdots$), то още повече $0<|x_{n+p}-a|<\delta$ при $n\geq N$.

По такъв начин при $n\geq N$ и за всяко естествено p са изпълнени неравенствата $0<|x_{n+p}-a|<\delta$, $0<|x_n-a|<\delta$. От тези неравенства и от условието на Коши следва, че при $n\geq N$ и за всяко естествено p имаме

$$|f(x_{n+p})-f(x_n)|<\varepsilon,$$

а това означава, че редицата $\{f(x_n)\}$ е фундаментална. Съгласно критерия на Коши за сходимост на числови редици (вж. теорема 3.18) редицата $\{f(x_n)\}$ клони към някое число b.

Остава да се докаже, че за две произволни клонящи към a редици от стойности на аргумента $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$ с елементи, различни от a, съответните редици от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ са сходящи и имат една и съща граница. Да предположим, че редиците $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ клонят съответно към границите b и b'. Да разгледаме новата редица от стойности на аргумента $x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', \cdots, x_n, x_n', \cdots$, която също клони към a и се състои от числа, различни от a. От доказаното по-горе следва, че редицата от стойности на функцията $f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'), \cdots, f(x_n), f(x_n'), \cdots$ е сходяща и има за граница някакво число b''. Но тогава от твърдението, доказано в 3.3.1, следва, че всяка подредица на тази редица е също сходяща и има граница b''. Очевидно подредицата от нечетните членове $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$ и подредицата от четните членове $f(x_1'), f(x_2'), \cdots, f(x_n'), \cdots$ са сходящи и имат граница b''. Оттук следва, че $b=b'=b''$. □

Аналогично се формулира условието на Коши и се доказва критерият на Коши за случаите на дясна (лява) граница в точката a, граница при $x\to\infty$ и граница при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

При формулировката на условието на Коши е достатъчно в приведеното по-горе определение да се замени условие (3.47) за случая на дясна (лява) граница в точката a с условията $a<x'<a+\delta$, $a<x''<a+\delta$ ($a-\delta<x'<a$, $a-\delta<x''<a$), за случая на граница при $x\to\infty$ — с условията $|x'|>\delta$, $|x''|>\delta$, и накрая за случая на граница при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) — с условията $x'>\delta$, $x''>\delta$ ($x'<-\delta$, $x''<-\delta$).

Съответният критерий на Коши се доказва по схемата на доказателството на теорема 3.20: трябва само под „редици от стойности на аргумента $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$" в случай на дясна (лява) граница в точката a да се разбира „редица, клоняща към a и състояща се от числа, по-големи от a (по-малки от a)", в случая на граница при $x\to\infty$ — „безкрайно голяма редица" и накрая в случая на граница при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) — „безкрайно големи редици от положителни (отрицателни) числа".

3.4.4. Аритметични действия с функции, имащи граница. В сила е следната основна теорема:

Основна теорема 3.21. *Нека двете функции f и g са дефинирани върху едно и също множество $\{x\}$ и имат в точката a граници, съответно равни на b и c. Тогава функциите $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ и f/g имат в точката a граници, съответно равни на $b+c$, $b-c$, $b\cdot c$ и b/c (в случая на частно трябва да предполагаме, че c е различно от нула).*

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента, различни от a. Съгласно опре-

деление 1 на граница по Хайне съответните редици от стойности на функциите $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ са сходящи и клонят съответно към b и c. Но тогава съгласно теореми 3.9—3.12 редиците $\{f(x_n)+g(x_n)\}$, $\{f(x_n)-g(x_n)\}$, $\{f(x_n).g(x_n)\}$ и $\{f(x_n)/g(x_n)\}$ клонят съответно към границите $b+c$, $b-c$, $b.c$ и b/c. Поради това, че редицата $\{x_n\}$ е произволна, от определение 1 за граница по Хайне следва, че функциите $f+g$, $f-g$, $f.g$ и f/g имат в точката a граници, съответно равни на $b+c$, $b-c$, $b.c$ и b/c. □

Доказателствата на съответните теореми за случаите на дясна (лява) граница в точката a, граница при $x\to\infty$ и граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ се провеждат по същата схема. Разликата е само в това, че редицата $\{x_n\}$ с случая на дясна (лява) граница клони към точката a със стойности, по-големи от a (по-малки от a), в случая на граница при $x\to\infty$ тя е безкрайно голяма редица и накрая в случая на граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ тя е безкрайно голяма редица от положителни (отрицателни) числа.

Примери:

1. В 3.4.2 се убедихме, че за всяка точка a от безкрайната права $\lim\limits_{x\to a} x=a$. Съгласно теорема 3.21 можем да твърдим, че

$$\lim_{x\to a} x^2=\lim_{x\to a} x\,.\lim_{x\to a} x=a\,.\,a=a^2$$

и изобщо за всяко естествено число n

$$\lim_{x\to a} x^n=a^n.$$

2. Нека сега $P_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdot\cdot\cdot+b_nx^n$, където $b_0, b_1, b_2, \cdot\cdot\cdot, b_n\neq 0$ са дадени константи. *Такава функция P_n се нарича* ***полином от степен*** *n*. Съгласно теорема 3.21

$$\lim_{x\to a} P_n(x)=\lim_{x\to a}(b_0+b_1x+\cdot\cdot\cdot+b_nx^n)$$
$$=b_0+b_1a+b_2a^2+\cdot\cdot\cdot+b_na^n=P_n(a)$$

за всяка точка a от безкрайната права.

И така полиномът P_n има граница във всяка точка a от безкрайната права и тази граница е равна на стойността $P_n(a)$ на полинома в точката a.

3. Нека P_n и Q_m са два произволни полинома от степени съответно n и m. *Частното $R=P_n/Q_m$ се нарича* ***рационална дроб***. От теорема 3.21 за случая на частно имаме

$$\lim_{x\to a} R(x)=\lim_{x\to a}(P_n(x)/Q_m(x))=\lim_{x\to a} P_n(x)/\lim_{x\to a} Q_m(x)$$
$$=P_n(a)/Q_m(a)=R(a)$$

във всяка точка a, която не е корен на полинома Q_m. Следователно рационалната дроб има граница във всяка точка a от безкрайната права, която не е корен на знаменателя ѝ, и тази граница е равна на стойността на рационалната дроб в точката a.

3.4.5. Безкрайно малки и безкрайно големи функции. За определеност ще разглеждаме граница на функция в точката a.

Определение 6. *Функцията α се нарича* ***безкрайно малка*** *в точката a, ако границата ѝ в тази точка е равна на нула.*

Като пример за функция, която е безкрайно малка в точката a, може да служи функцията $\alpha(x)=(x-a)^n$, където n е произволно естествено число.

Наистина в края на предишната точка установихме, че полиномът $(x-a)^n$ има граница в точката a и тази граница е равна на стойността му в точката a, т. е. равна е на нула.

Ще отбележим, че ако функцията f има граница в точката a, равна на числото b, то функцията $\alpha(x)=f(x)-b$ е безкрайно малка в точката a. Това следва от факта, че границите на всяка от функциите f и $g=b$ в точката a са равни на числото b, и от теорема 3.21, приложена за разликата $f-g$.

Формулираното твърдение ни води до следното специално представяне на функцията f, чиято граница в точката a е равна на числото b:

$$f(x)=b+\alpha(x), \tag{3.50}$$

където α е някоя безкрайно малка в точката a функция. Представянето (3.50) е много удобно в различните приложения на теорията на границите.

Ще въведем сега понятието функция, безкрайно голяма отдясно (отляво) в дадена точка a.

Функцията A се нарича ***безкрайно голяма отдясно (отляво) на точката*** *a, ако за всяка клоняща към a редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, всички членове на която са по-големи от a (по-малки от a), съответната редица от стойности на функцията $\{A(x_n)\}$ е безкрайно голяма редица, чиито членове от някой номер нататък са или само положителни, или само отрицателни.*

Безкрайно големите отдясно (отляво) на точката a функции се означават с:

$$\lim_{x\to a+0} A(x)=+\infty \quad (\lim_{x\to a-0} A(x)=+\infty)$$

или

$$\lim_{x\to a+0} A(x)=-\infty \quad (\lim_{x\to a-0} A(x)=-\infty).$$

Употребява се и по-лаконичната символика:

$$A(a+0)=+\infty \qquad (A(a-0)=+\infty)$$

или

$$A(a+0)=-\infty \qquad (A(a-0)=-\infty).$$

Ще се спрем на методиката за сравняване на две безкрайно малки функции в дадена точка a. Нека α и β са две безкрайно малки в точката a функции, дефинирани за едни и същи стойности на аргумента.

1°. Казва се, че α е ***безкрайно малка от по-висок ред*** от β в точката a, ако

$$\lim_{x\to a} \alpha(x)/\beta(x) = 0. \tag{3.51}$$

2°. Казва се, че α и β са ***безкрайно малки от еднакъв ред*** в точката a, ако границата в лявата страна на (3.51) е равна на число, различно от нула.

3°. Казва се, че α и β са ***еквивалентно безкрайно малки*** в точката a, ако границата в лявата страна на (3.51) е равна на единица.

Това, че α е безкрайно малка от по-висок ред от β в дадена точка a, се записва така:

$$\alpha = o(\beta)$$

(чете се „a равно на o малко от β").

И така символът $o(\beta)$ означава безкрайно малка функция от по-висок ред от безкрайно малката функция β в дадена точка a. От това определение на символа „o малко" получаваме следните негови свойства:

1) $o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$, $o(\beta)-o(\beta)=o(\beta)$;

2) ако $\gamma = o(\beta)$, то $o(\beta)\pm o(\gamma)=o(\beta)$;

3) ако α и β са две безкрайно малки в дадена точка функции, то $\alpha.\beta=o(\alpha)$ и $\alpha.\beta=o(\beta)$.

Аналогично се сравняват две безкрайно големи отдясно (отляво) на дадена точка a функции.

Нека A и B са дефинирани за едни и същи стойности на аргумента и за определеност $\lim\limits_{x\to a+0} A(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} B(x)=+\infty$.

1°. Казва се, че *A има отдясно на точката a* ***по-висок ред на нарастване*** *от B, ако функцията A/B е безкрайно голяма отдясно на точката a.*

2°. *Казва се, че A и B имат отдясно на точката a* ***еднакъв ред на нарастване,*** *ако границата на функцията A/B при $x\to a+0$ е число, различно от нула.*

Примери:

1. Функциите $\alpha(x)=x^3-x^5$ и $\beta(x)=5x^3+x^4$ са безкрайно малки от един и същ ред в точката $x=0$, тъй като

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^5}{5x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{5+x}=\frac{1}{5}.$$

2. Функциите $\alpha(x)=(x-2)^2.(x-1)$ и $\beta(x)=(x-2)^2$ са еквивалентно безкрайно малки в точката $x=2$, понеже

$$\lim_{x\to 2}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1.$$

3. Функциите $A(x)=(2+x)/x$ и $B(x)=1/x$ са безкрайно големи от еднакъв ред както отдясно, така и отляво на точката $x=0$, тъй като

$$\lim_{x\to 0} A(x)/B(x)=\lim_{x\to 0}(2+x)=2.$$

Аналогично се определят и сравняват функции, безкрайно малки или безкрайно големи при $x\to\infty$, а също и при $x\to+\infty$ (съответно при $x\to-\infty$).

3.5. По-общо определение за граница на функция по база

Като анализираме определенията за различните видове граница на функция f по Коши, забелязваме че във всички тях се изисква за всяко $\varepsilon>0$ всички стойности на тази функция, отговарящи на стойности на аргумента x от някое множество C_δ, да удовлетворяват неравенството (3.45), т. е. да принадлежат на ε-околност на точката b.

При това множеството C_δ, определено за всяко $\delta>0$, има различен вид при определянето на различните видове граница. При определяне на граница в точка a множеството C_δ е прободена δ-околност на точката a; при определяне на дясна (лява) граница в точка a множеството C_δ е интервалът $(a,\ a+\delta)$ (съответно $(a-\delta,\ a)$); при определяне на граница при $x\to\infty$ множеството C_δ е външната част на сегмента $[-\delta,\ \delta]$ и накрая при определяне на граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ множеството C_δ е отворената полуправа $(\delta,+\infty)$ (съответно $(-\infty,-\delta)$).

Ако функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, то във всички определения на граница по Коши се иска неравенството (3.45) да бъде изпълнено за тези елементи от множеството $\{x\}$, които принадлежат и на съответното множество C_δ. Ще означим с B_δ подмножеството от онези елементи на $\{x\}$, които принадлежат и на C_δ, т. е. полагаме $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$.

Анализът на условията, при които се формулират определенията 1′—4′ за граница на функция по Коши, ни води до извода, че множеството $\{x\}$, върху което е дефинирана функцията f, съдържа винаги поне един елемент, т. е. множеството B_δ никога не е празно.

Лесно е да се убедим също така, че за всичките видове граници сечението на две произволни множества от съвкупността $\{B_\delta\}$ е също множество от тази съвкупност.

Така например сечението на две множества B_δ и $B_{\delta'}$, първото от които се състои от стойности на аргумента, принадлежащи на прободената δ-околност на точката a, а второто — от стойности на аргумента, принадлежащи на прободената δ'-околност на точката a, е съвкупността от стойности на аргумента, принадлежащи на прободената δ''-околност на точката a, където δ'' е по-малкото от двете положителни числа δ и δ', т. е. е множеството $B_{\delta''}$ от съвкупността $\{B_\delta\}$.

В по-общи случаи, които се срещат при изучаването на функции на няколко променливи, сечението на две произволни множества от съвкупността $\{B_\delta\}$ може да не е елемент на тази съвкупност, но обезателно съдържа елемент на тази съвкупност.

Приведените разглеждания ни водят естествено до понятието база на множеството $\{x\}$.

Определение 1. *Ще казваме, че безкрайната съвкупност $B=\{B_\delta\}$ от подмножества B_δ на множеството $\{x\}$ образува* ***база*** *(или* ***базис на филтър****) в множеството $\{x\}$, ако елементите на тази съвкупност удовлетворяват двете изисквания: 1) всеки елемент B_δ е непразно подмножество на множеството $\{x\}$; 2) сечението на всеки два елемента на съвкупността $\{B_\delta\}$ съдържа елемент на тази съвкупност.*

Примери:

1. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент във всяка прободена δ-околност на точката a. Тази прободена δ-околност на точката a означаваме с C_δ и полагаме $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Очевидно съвкупността $B=\{B_\delta\}$ от множества B_δ при всички $\delta>0$ образува база на множеството $\{x\}$, тъй като всяко множество B_δ при всяко $\delta>0$ не е празно и сечението на две множества от съвкупността $\{B_\delta\}$ е също множество от тази съвкупност.

Разгледаната база $\{B_\delta\}$ се означава със символа $x\to a$.

2. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент, принадлежащ на интервала $(a, a+\delta)$ (съответно $(a-\delta, a)$) при всяко $\delta>0$. Означаваме този интервал със символа C_δ и полагаме $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Тривиално се проверява, че съвкупността $B=\{B_\delta\}$ от множествата B_δ, отговарящи на всички $\delta>0$, образуват база на множеството $\{x\}$.

Разгледаната база е прието да се означава със символа $x\to a+0$ (съответно $x\to a-0$).

3. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ за всяко $\delta>0$. Полагаме $C_\delta=(-\infty, +\infty)\setminus[-\delta, \delta]$, $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Съвкупността $B=\{B_\delta\}$ е база на множеството $\{x\}$.

Тази база се означава със символа $x\to\infty$.

4. Нека множеството $\{x\}$ има поне един елемент от полуправата $(+\delta, +\infty)$ (съответно от $(-\infty, -\delta)$) при всяко $\delta>0$. Означаваме тази полуправа с C_δ и полагаме $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Съвкупността $B=\{B_\delta\}$ образува база в множеството $\{x\}$.

Тази база се означава със символа $x\to+\infty$ (съответно $x\to-\infty$).

5. Нека $\{x\}$ е множеството от всички естествени числа $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Полагаме $B_\delta=\{x\}\cap(+\delta, +\infty)$ за всяко $\delta>0$. Съвкупността $B=\{B_\delta\}$ е база на множеството $\{x\}$.

Тази база се означава със символа $n\to\infty$.

Ще формулираме сега определението за граница на функция f относно база B на дефиниционната ѝ област, което съдържа всички разгледани по-горе определения за граница на функция, а също така и определението за граница на числова редица.

Ще предполагаме, че функцията f е дефинирана върху множеството $\{x\}$ и съвкупността $B=\{B_\delta\}$ от подмножества B_δ на множеството $\{x\}$ образува база в множеството $\{x\}$.

Множеството от всички стойности, които приема функцията f, когато аргументът ѝ x пробягва множеството B_δ, ще наричаме *образ* на множеството B_δ и ще означаваме със символа $f(B_\delta)$.

Определение 2. *Числото b се нарича* ***граница на функцията $f(x)$ по базата*** *B на дефиниционната ѝ област, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв елемент B_δ от базата B, образът на който $f(B_\delta)$ принадлежи на ε-околността на точката b, т. е. принадлежи на интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.*

Границата на функцията f по базата B на дефиниционната ѝ област ще означаваме с $\lim\limits_{B} f(x)=b$. Това по-общо определение за граница по база съдържа в себе си всички частни случаи за граници, изучени по-горе, отговарящи на бази

$$x\to a,\ x\to a+0,\ x\to a-0,\ x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty \text{ и } n\to\infty.$$

Лесно се проверява също така, че общото определение на граница по база притежава основните свойства на граница, отговарящи на най-простата база $B=(x\to a)$.

Ще докажем критерия на Коши за съществуване на граница на функция по база.

Теорема 3.22 *За съществуване на граница на функцията f по база $B=\{B_\delta\}$ на дефиниционната ѝ област е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществува елемент B_δ от базата B, чийто образ $f(B_\delta)$ да се съдържа в някой интервал с дължина 2ε.*

Доказателство. 1. *Необходимостта* е очевидна; ако съществува граница b на функцията f по база B, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува елемент от тази база B_δ, чийто образ $f(B_\delta)$ принадлежи на интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ с дължина 2ε.

2. *Достатъчност.* Нека за всяко $\varepsilon>0$ съществува елемент B_δ на базата B, чийто образ $f(B_\delta)$ принадлежи на интервал с дължина 2ε. Да разгледаме безкрайно малката редица от положителни числа $\varepsilon_n=1/n$, $n=1, 2, 3, \cdots$ За всяко ε_n съществува елемент от базата B_{δ_n}, чийто образ $f(B_{\delta_n})$ принадлежи на интервал с дължина $2\varepsilon_n$.

По определението на база сечението на елементите B_{δ_1} и B_{δ_2} съдържа задължително някой елемент на базата, който ще означим с $\hat{B}_{\delta_2}$. Образът на този елемент $f(\hat{B}_{\delta_2})$ се съдържа както в някакъв интервал I_1 с дължина $2\varepsilon_1$, така и в някакъв интервал I_2' с дължина $2\varepsilon_2$. Сечението на интервалите I_1 и I_2' е интервал I_2 с дължина, не по-голяма от $2\varepsilon_2$, съдържащ се в интервала I_1. По-нататък съгласно определението на база сечението на елементите $\hat{B}_{\delta_2}$ и B_{δ_3} задължително съдържа някой елемент на базата, който ще означим със символа $\hat{B}_{\delta_3}$. Образът на този елемент $f(\hat{B}_{\delta_3})$ принадлежи както на интервала I_2 с дължина $2\varepsilon_2$, така и на някакъв интервал I_3' с дължина $2\varepsilon_3$. Сечението на интервалите I_2 и I_3' е интервал I_3 с дължина, не по-голяма от $2\varepsilon_3$, съдържащ се в интервала I_2.

Продължавайки тези разсъждения, ще построим редица от такива елементи на базата $\hat{B}_{\delta_2}, \hat{B}_{\delta_3}, \cdots, \hat{B}_{\delta_n}, \cdots$, че образът $f(\hat{B}_{\delta_n})$ на всеки елемент $\hat{B}_{\delta_n}$ се съдържа в някакъв интервал I_n с дължина, не по-голяма от $2\varepsilon_n$, при което в редицата от интервали $I_2, I_3, \cdots, I_n, \cdots$ всеки следващ интервал се съдържа в предидущия. Да означим със символа $\overline{I}_n$ сегмента, който се получава, като към интервала I_n прибавим неговите краища. Тъй като редицата $\overline{I}_2, \overline{I}_3, \cdots, \overline{I}_n, \cdots$ е свиваща се система от сегменти (вж. 3.2.2), то съгласно следствието от теорема 3.15 съществува, и то единствена точка b, принадлежаща на всички сегменти.

Остава да се докаже, че b е граница на функцията f по базата B, т. е. да се убедим в това, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува елемент на базата B, образът на който се съдържа в интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

Тъй като системата от сегменти $\{\overline{I}_n\}$ е свиваща се и b е обща точка на всички сегменти, можем да твърдим, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува сегмент $\overline{I}_n$ с достатъчно голям номер n, който се съдържа в интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Това означава, че за този номер n образът $f(\hat{B}_{\delta_n})$ на елемента на базата $\hat{B}_{\delta_n}$ принадлежи на интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. □

От доказаната теорема следват както критерият на Коши за сходимост на числова редица, така и критерият на Коши за съществуване на всички разгледани по-горе видове граница на функция.

Като възможни обобщения на изложената теория могат да се разглеждат функции, дефинирани върху подмножества на произволно метрично пространство (вж. глава 12).

Забележка. Базите B и D на множеството $\{x\}$ се наричат *еквивалентни*, ако за всеки елемент B_{δ_1} на базата B съществува такъв елемент D_{δ_2} на базата D, че $D_{\delta_2}\subset B_{\delta_1}$, и за всеки елемент D_{δ_1} на базата D съществува такъв елемент B_{δ_2} на базата B, че $B_{\delta_2}\subset D_{\delta_1}$.

Съвкупността на всички еквивалентни бази B на множеството $\{x\}$ се нарича ***филтър на множеството*** $\{x\}$.

Не е трудно да се убедим, че твърденията за граници на функции и редици по еквивалентни бази B и D са едновременно верни.

4. Непрекъснатост на функция

В тази глава ще бъде разгледано важното понятие непрекъснатост на функция. При това, както и в глава 3, ще разглеждаме функция f на една реална променлива. В глава 12 понятието непрекъснатост ще бъде въведено в общия случай на изображение на едно метрично пространство в друго.

4.1. Понятие за непрекъснатост на функция

4.1.1. Определение за непрекъснатост на функция. Нека точката a принадлежи на дефиниционната област на функцията f и всяка δ-околност на точката a съдържа точки от дефиниционната област на f, различни от a.

Формално определение за непрекъснатост в точката a. *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** a, *ако в тази точка тя има граница и тази граница е равна на стойността $f(a)$ на функцията f в точката a.*

Като използваме определенията за граница на функцията f в точката a по Хайне и по Коши, ще стигнем до определение за непрекъснатост на функция в дадена точка по Хайне и по Коши.

Определение 1 (непрекъснатост в точка a по Хайне). *Функцията $f(x)$ се нарича* ***непрекъсната*** *в точката a, ако за всяка клоняща към a редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, съответната редица $\{f(x_n)\}$ от стойности на функцията е сходяща и има граница $f(a)$.*

Забележка 1. В сравнение с определение 1 за граница на функция по Хайне (вж. 3.4.2) в определението за непрекъснатост по Хайне няма изискване всички членове на редицата $\{x_n\}$ да бъдат различни от a. Това е така, защото прибавянето на произволен брой нови членове, равни на $f(a)$, към членовете на редицата

$\{f(x_n)\}$, клоняща към $f(a)$, не изменя сходимостта на тази редица и границата ѝ е $f(a)$.

Определение 1′ (непрекъснатост в точка a по Коши). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната*** *в точката a, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $|x-a|<\delta$, е изпълнено неравенството $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.*

Забележка 2. В сравнение с определение 1′ за граница на функция по Коши (вж. 3.4.2) в определението за непрекъснатост по Коши не се иска всички стойности на аргумента x да удовлетворяват неравенството $0<|x-a|$, т. е. да са различни от x. Това е така, защото за стойности $x=a$ разликата $f(x)-f(a)$ е равна на нула и удовлетворява неравенството $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ при всяко $\varepsilon>0$.

Условисто за непрекъснатост на функцията f в точката a се записва:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Тъй като $a=\lim\limits_{x\to a} x$, то това равенство се записва и във формата

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x).$$

Следователно за непрекъсната в точката a функция символът „$\lim\limits_{x\to a}$" за граничен преход и символът „f" за характеристиката на функцията могат да сменят местата си.

От теоремата за еквивалентност на определенията за граница по Хайне и по Коши (вж. теорема 3.19) следва, че определенията за непрекъснатост на функция по Хайне и по Коши (определения 1 и 1′) са еквивалентни.

Ще формулираме сега определение за едностранна непрекъснатост на функция f в точката a, т. е. непрекъснатост на f в точката a или само отдясно, или само отляво.

От множеството $\{x\}$, което е дефиниционна област на функцията f, ще трябва да поискаме този път да включва точката a и за всяко $\delta>0$ да има поне един елемент от интервала $(a, a+\delta)$ (съответно от $(a-\delta, a)$).

Формално определение за непрекъснатост в точка a отдясно (отляво). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката a отдясно (отляво)****, ако дясната (лявата) граница на функцията в точката a съществува и е равна на стойността $f(a)$ на функцията $f(x)$ в точката a.*

Като използваме определенията за дясна (лява) граница на функция $f(x)$ в точка a по Хайне и по Коши, идваме до определенията за непрекъснатост на функция f в точка a отдясно (отляво) по Хайне и по Коши.

Определение 2 (непрекъснатост на функция в точка a отдясно (отляво) по Хайне). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** *a* ***отдясно (отляво),*** *ако за всяка клоняща към a редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$, членовете на която удовлетворяват условието $x_n>a$ $(x_n<a)$, съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към $f(a)$.*

Ще отбележим, че в това определение условието $x_n>a$ $(x_n<a)$ може да се замени с по-слабото условие $x_n\geq a$ $(x_n\leq a)$, тъй като, ако добавим към редицата $\{f(x_n)\}$, клоняща към $f(a)$, произволен брой нови членове, равни на $f(a)$, ще получим редица, която също клони към $f(a)$.

Определение 2′ (непрекъснатост на функция в точка a отдясно (отляво) по Коши). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** *a* ***отдясно (отляво),*** *ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, които удовлетворяват условието $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$, да е изпълнено неравенството*

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Ще отбележим, че и в това определение условието $a<x<a+$ $(a-\delta<x<a)$ може да се замени с по-слабото условие $a\leq x<a+$ $(a-\delta<x\leq a)$.

Еквивалентността на определения 2 и 2′ следва от еквивалентността на съответните определения за граница на функция.

Непрекъснатостта на функцията f в точка a отдясно (отляво) се записва така:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a) \quad \text{или} \quad f(a+0)=f(a)$$

$$\left[\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a) \quad \text{или} \quad f(a-0)=f(a)\right].$$

Забележка 3. Ако функцията f е непрекъсната в точката a отляво и отдясно, то тя е непрекъсната в тази точка. Действително съгласно твърдението, доказано в 3.4.2, в този случай съществува граница на функцията в точката a и тя е равна на $f(a)$. Точки, в които функцията не притежава свойството непрекъснатост, се наричат ***точки на прекъсване*** за тази функция.

Примери:

1. Степенната функция $f(x)=x^n$, където n е естествено число, е непрекъсната във всяка точка a на безкрайната права $-\infty<x<+\infty$.

Наистина в глава 3 беше установено, че границата на тази функция във всяка точка a от безкрайната права е равна на a^n.

2. Полиномите и рационалните дроби имат граница във всяка точка от дефиниционната си област, равна на стойността им в тази точка (вж. 3.4.3). Затова те са непрекъснати функции във всяка точка от дефиниционната си област.

3. Функцията sgn е прекъсната в точката $x=0$ и непрекъсната във всички останали точки от числовата ос. Наистина в точката $x=0$, както беше показано в глава 3, съществуват дясна граница (равна на $+1$) и лява граница (равна на -1) на функцията sgn. Тъй като тези едностранни граници не са равни помежду си, функцията $\operatorname{sgn} x$ е прекъсната в точката нула. В останалите точки от числовата ос тя притежава граница, равна съответно на стойността ѝ в тези точки, и следователно е непрекъсната.

4. Функцията на Дирихле D (вж. 3.4.1) е прекъсната във всяка точка от числовата ос, понеже няма граница в нито една точка.

Ще отбележим обаче, че функцията $f(x)=xD(x)$, където D е функцията на Дирихле, е непрекъсната в точката $x=0$ и прекъсната във всички останали точки от безкрайната права. Прекъснатостта на f във всяка точка $x_0\neq 0$ се установява също както за функцията D (за всяка сходяща към x_0 редица $\{x_n\}$ от рационални точки съответната редица $\{f(x_n)\}$ клони към $x_0\neq 0$, а за всяка сходяща към x_0 редица $\{x'_n\}$ от ирационални точки съответната редица $\{f(x'_n)\}$ клони към нула).

Ще се убедим, че функцията $f(x)=xD(x)$ е непрекъсната в точката $x=0$. За всяка безкрайно малка редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$ редицата $\{D(x_n)\}$ е ограничена и затова (според теорема 3 от глава 3) редицата $f(x_n)=x_nD(x_n)$ е безкрайно малка, т. е. има за граница числото нула, равно на $f(0)$.

Ще казваме, че дадена функция е ***непрекъсната в множеството*** *$\{x\}$, ако тя е непрекъсната във всяка точка на това множество.*

Например функция, непрекъсната във всяка точка на даден интервал, се нарича непрекъсната в този интервал.

Специално ще *наричаме функцията f* ***непрекъсната в сегмента*** *$[a, b]$, ако е непрекъсната във всяка вътрешна точка на този сегмент, непрекъсната отдясно в точката a и непрекъсната отляво в точката b.*

По-рано, когато дадохме определение за непрекъснатост на функция f в точката a, предположихме, че във всяка δ-околност на точката a се съдържат точки от дефиниционната област на функцията, различни от a. Формално можехме да минем без това предположение, т. е. да включим и случаи, когато в някоя δ-околност на точката a не се съдържат точки от дефиниционната област на функцията, различни от a. В този случай можем да приемем, че f е непрекъсната в точката a. Разбира се, понятието непрекъснатост на функция е съдържателно, когато a е точка на сгъстяване за дефиниционната област на функцията.

Определението за непрекъснатост на функция може да се даде и в следната еквивалентна форма.

Определение 1″. *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** *a, ако за всяка околност на точката $f(a)$ съществува околност на точката a, образът на която при изображението f се съдържа в избраната околност на точката $f(a)$.*

В глава 12 ще бъде показано (даже и в по-общи случаи), че последното определение за непрекъснатост е еквивалентно на предишните. За упражнение читателят може сам да провери това.

Като използваме въведението в 3.5 общо определение за граница на функция по база, можем да обединим понятията непрекъснатост в точката a, непрекъснатост в точката a отдясно и непрекъснатост в точката a отляво.

Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, което съдържа точката a и има база B от вида $x \to a$, $x \to a+0$ или $x \to a-0$.

Функцията f се нарича непрекъсната в точката a, ако границата ѝ по базата B на дефиниционната ѝ област съществува и е равна на $f(a)$.

4.1.2. Аритметични операции с непрекъснати функции. В сила е следната теорема:

Основна теорема 4.1. *Нека функциите f и g имат една и съща дефиниционна област и са непрекъснати в точката a. Тогава и функциите $f+g$, $f-g$, $f.g$ и f/g са непрекъснати в точката a (в случая на частно е нужно допълнителното изискване $g(a) \neq 0$).*

Доказателство. Тъй като функциите f и g са непрекъснати в точката a, границите им в тази точка са съответно $f(a)$ и $g(a)$ и съгласно теорема 3.21 границите на функциите $f+g$, $f-g$, $f.g$ и f/g съществуват и са съответно равни на $f(a)+g(a)$, $f(a)-g(a)$, $f(a).g(a)$ и $f(a)/g(a)$. Но тъй като това са стойностите на тези функции в точката a, то по определение те са непрекъснати в тази точка. □

4.1.3. Сложна функция. Непрекъснатост. Функция, получена в резултат от суперпозиция на две или повече функции, ще нарича*ме сложна (съставна) функция.*

Ще определим понятието суперпозиция на две функции, тъй като обобщението за суперпозиция на повече функции е очевидно.

Нека функцията $x=\varphi(t)$ е дефинирана в множеството $\{t\}$ и нека $\{x\}$ е множеството от стойностите ѝ, а функцията $y=f(x)$ е дефинирана в множеството $\{x\}$. Тогава функцията $y=f(\varphi(t))=F(t)$ е суперпозиция на функциите $f(x)$ и $\varphi(t)$, т. е. $f(\varphi(t))$ е сложна (съставна) функция.

В сила е следната теорема.

Теорема 4.2. *Нека функцията φ е непрекъсната в точката a, а функцията f е непрекъсната в точката $b=\varphi(a)$. Тогава сложната функция $F(t)=f(\varphi(t))$ е непрекъсната в точката a.*

Доказателство. Нека $\{t_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента на сложната функция. Тъй като функцията $x=\varphi(t)$ е непрекъсната в точката a, то (според определение 1 за непрекъснатост по Хайне) съответната редица от стойности на функцията $x_n=\varphi(t_n)$ е сходяща с граница $b=\varphi(a)$. Но функцията f е непрекъсната в точката $b=\varphi(a)$, а редицата $\{x_n\}$ от стойности на аргумента ѝ клони към $b=\varphi(a)$. Следователно съответната редица от стойностите на функцията

$$f(x_n)=f(\varphi(t_n))=F(t_n)$$

(според определение 1 за непрекъснатост по Хайне) клони към $f(b)=f(\varphi(a))=F(a)$.

И така за всяка редица $\{t_n\}$, клоняща към a, от стойности на аргумента на сложната функция съответната редица от стойностите на функцията $\{f(\varphi(t_n))\}=\{F(t_n)\}$ е сходяща и има за граница числото $f(\varphi(a))=F(a)$. Съгласно определение 1 за непрекъснатост по Хайне сложната функция е непрекъсната в точката a. □

4.2. Свойства на монотонните функции

4.2.1. Монотонни функции. Ще дадем следното определение:

Определение 1. *Функцията f се нарича* ***ненамаляваща (нерастяща) в множеството*** *$\{x\}$, ако за произволни точки x_1 и x_2 от това множество, такива, че $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).*

Ненамаляващите и нерастящите функции се наричат *монотонни функции.*

Определение 2. *Функцията f се нарича* ***растяща (намаляваща)*** *в множеството $\{x\}$, ако за произволни точки x_1 и x_2 от това множество, такива, че $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$).*

Растящите и намаляващите функции се наричат *строго монотонни.*

Примери:

1. Функцията $f(x)=x$ е строго монотонна, по-точно растяща върху цялата числова ос.

2. Функцията $f(x)=x^2$ е растяща върху полуоста $x \geq 0$ и намаляваща за $x \leq 0$.

3. Функцията $f(x)=\operatorname{sgn} x$ е ненамаляваща върху цялата числова ос.

4. Функцията $f(x)=1/x$ е намаляваща при $x<0$ и $x>0$.

4.2.2. Понятието обратна функция. *Нека функцията f е дефинирана в сегмента $[a, b]$ и нека множеството $\{y\}$ от стойностите на тази функция е сегментът $[\alpha, \beta]$. Нека освен това на всяко y от сегмента $[\alpha, \beta]$ съответствува само една стойност на x от сегмента $[a, b]$, за която $f(x)=y$. При тези условия в сегмента $[\alpha, \beta]$ може да се дефинира функция, която на всяко y от $[\alpha, \beta]$ съпоставя тази стойност на x от $[a, b]$, за която $f(x)=y$. Тази функция се означава със символа f^{-1} и се нарича* ***обратна функция*** *на функцията f.*

Нека $\{x\}$ и $\{y\}$ са произволни множества и f е взаимно еднозначно изображение на множеството $\{x\}$ в множеството $\{y\}$ (биективно изображение, вж. 2.7). Тогава може да се определи обратното на f изображение f^{-1} на множеството $\{y\}$ в множеството $\{x\}$. В този случай уравнението $y=f(x)$ има, и то единствено решение относно x, т. е. за даден елемент y еднозначно се определя x и f^{-1}.

Ще отбележим, че ако $x=f^{-1}$ е обратната функция на f, то очевидно функцията f е обратна на функцията f^{-1}. Затова функциите f и f^{-1} се наричат *взаимно обратни*. Очевидно е, че

$$f(f^{-1}(y))=y, \quad f^{-1}(f(x))=x.$$

Примери:

1. Нека функцията $y=2x$ е дефинирана в сегмента $[a, b]$. Множеството от стойности на тази функция е сегментът $[2a, 2b]$. Функцията $x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y$, дефинирана в сегмента $[2a, 2b]$, ще бъде обратна на дадената функция $y=2x$.

2. Да разгледаме функцията $y=x^2$ в сегмента $[0, 2]$. Множеството от стойности на тази функция е сегментът $[0, 4]$. В този сегмент е дефинирана функцията $x=\sqrt{y}$, обратна на дадената функция.

3. Да разгледаме в сегмента $[0, 1]$ функцията

$$y=\begin{cases} x, & \text{ако } x \text{ е рационално число,} \\ 1-x, & \text{ако } x \text{ е ирационално число.} \end{cases}$$

Не е трудно да се убедим, че дефинираната в сегмента функция

$$x=\begin{cases} y, & \text{ако } y \text{ е рационално число,} \\ 1-y, & \text{ако } y \text{ е ирационално число} \end{cases}$$

е обратна на дадената функция.

Ще докажем няколко твърдения за монотонни функции.

Ще започнем с доказателство на една лема, която е вярна за всяка монотонна (не е задължително строго монотонна) функция.

Лема. *Ако функцията f е монотонна в сегмента $[a, b]$, то тя има дясна и лява граница във всяка вътрешна точка на сегмента $[a, b]$ и освен това има дясна граница в точката a и лява граница в точката b.*

Доказателство. За доказателството на лемата е достатъчно да се докаже: 1) съществуването на дясна граница във всяка точка c при $a \leq c < b$; 2) съществуването на лява граница във всяка точка c при $a < c \leq b$.

Ще докажем само първото твърдение, тъй като второто се доказва аналогично. При това ще разгледаме случая, когато функцията f е ненамаляваща в сегмента $[a, b]$ (случаят на нерастяща функция се разглежда аналогично).

И така нека функцията f е ненамаляваща в $[a, b]$ и c е произволна точка, за която $a \leq c < b$. Разглеждаме множеството $\{f(x)\}$ от всички стойности на функцията f за стойности на аргумента x, удовлетворяващи неравенствата $c < x \leq b$. Множеството $\{f(x)\}$ не е празно (тъй като $c < b$) и е ограничено отдолу (понеже функцията f е ненамаляваща в полусегмента $c < x \leq b$ и $f(c)$ ще бъде долната граница на това множество). От теорема 2.1 следва, че разглежданото множество има точна долна граница, която ще означим с γ. Ще докажем, че γ е дясна граница на функцията f в точката c, т. е. че $\gamma = f(c+0)$.

Избираме произволно положително число ε. От определението на точна долна граница следва, че съществува такова положително число δ, ненадминаващо $b-c$, че стойността $f(c+\delta)$ на функцията да удовлетворява неравенството $f(c+\delta) < \gamma + \varepsilon$.

Но тогава поради монотонността на функцията f за всяко x от интервала $c < x < c+\delta$ ще имаме $f(x) < \gamma + \varepsilon$. Тъй като за всяко x от този интервал е изпълнено и неравенството $\gamma \leq f(x)$, то за всяко x от интервала $c < x < c+\delta$ ще са изпълнени и неравенствата

$$\gamma \leq f(x) < \gamma + \varepsilon \text{ или } |\gamma - f(x)| < \varepsilon,$$

а това означава (според определението за дясна граница по Коши), че числото γ е дясна граница на функцията f в точката c. □

Забележка към лемата. При предположенията на лемата и при условие, че f е ненамаляваща функция, за всяко c и всяко x, удовлетворяващи съотношенията $a \leq c < x \leq b$, ще са изпълнени неравенствата

$$f(a) \leq f(c) \leq f(c+0) \leq f(x) \leq f(b), \tag{4.1}$$

а за всяко c и всяко x, удовлетворяващи съотношенията $a \leq x < c \leq b$, ще бъдат изпълнени

$$f(a) \leq f(x) \leq f(c-0) \leq f(c) \leq f(b). \tag{4.2}$$

При условие, че функцията f е нерастяща, знаците в неравенствата (4.1) и (4.2) се сменят с противоположни.

Нека например f е ненамаляваща в $[a, b]$ и $a \leq c < x \leq b$. Тогава $f(a) \leq f(c) \leq f(x) \leq f(b)$. От последните неравенства веднага следва, че $f(a) \leq f(c) \leq f(c+0) \leq f(b)$. За да завършим доказателството на неравенствата (4.1), трябва да се убедим, че $f(c+0) \leq f(x) \leq f(b)$ за всяко x от полусегмента $c < x \leq b$, но то следва непосредствено от това, че числото $\gamma = f(c+0)$ е (както е доказано в лемата) точна долна граница на множеството от стойности на функцията f в полусегмента $c < x \leq b$. Верността на неравенствата (4.2) се проверява аналогично.

Сега ще докажем три теореми за строго монотонни функции.

Теорема 4.3. *Нека функцията f расте (намалява) в сегмента $[a, b]$ и нека $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Ако множеството от всички стойности на функцията е сегментът $[\alpha, \beta]$ (съответно сегментът $[\beta, \alpha]$), то в сегмента $[\alpha, \beta]$ е дефинирана функцията f^{-1}, обратна на функцията f, която е също растяща (намаляваща) в този сегмент.*

Доказателство. Ще проведем всички разсъждения при предположението, че функцията f е растяща в сегмента $[a, b]$ (за намаляваща функция разсъжденията са аналогични).

Функцията f осъществява взаимно еднозначно съответствие между сегментите $a \leq x \leq b$ и $\alpha \leq y \leq \beta$. Наистина това, че на всяко x от $[a, b]$ съответствува само една стойност y от $[\alpha, \beta]$, следва от определението на функция, а това, че на всяко y от $[\alpha, \beta]$ съответствува само едно x от $[a, b]$, следва от условието, че функцията f е растяща.

Да покажем сега, че ако f расте в $[a, b]$, то и f^{-1} също расте в $[\alpha, \beta]$. Нека $y_1 < y_2$, където y_1 и y_2 са произволни числа от $[\alpha, \beta]$. Тогава $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$, тъй като в противен случай при $x_1 \geq x_2$ от това, че функцията $y = f(x)$ е растяща, ще следва, че $y_1 \geq y_2$, което противоречи на условието $y_1 < y_2$. □

Забележка 1. Съвсем аналогично се доказва едно по-общо твърдение: Нека f е дефинирана и растяща (намаляваща) в множеството $\{x\}$, а $\{y\}$ е множеството от всички стойности на функцията. Тогава в множеството $\{y\}$ е дефинирана функцията f^{-1}, обратна на функцията f, и тя е също растяща (намаляваща) в множеството $\{y\}$.

Теорема 4.4. *Нека функцията f е растяща (намаляваща) в сегмента $[a, b]$ и нека $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Необходимо и достатъчно условие функцията f да бъде непрекъсната в сегмента $[a, b]$ е всяко число γ, заключено между α и β, да бъде стойност на тази функция.*

Доказателство. Всички разсъждения ще проведем за растяща функция, тъй като за намаляваща функция те са аналогични.

1. Необходимост. Нека функцията f е растяща и непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Трябва да се докаже, че всяко число γ, удовлетворяващо условията $\alpha < \gamma < \beta$, е стойност на функцията в някоя точка c от сегмента $[a, b]$.

Нека $\{x\}$ е множеството от онези стойности на x от сегмента $[a, b]$, за които $f(x) \leq \gamma$. Множеството $\{x\}$ не е празно (то съдържа точката a, понеже $f(a) = \alpha < \gamma$) и е ограничено отгоре (например от числото b). Според основната теорема 2.1 множеството $\{x\}$ има точна горна граница, която ще означим с c: $c = \sup\{x\}$. Остава да се докаже, че $f(c) = \gamma$.

Най-напред ще се убедим, че $f(x) \leq \gamma$ за всяко x от $[a, b]$, лежащо наляво от c, и $f(x) > \gamma$ за всяко x, лежащо надясно от c.

Действително, ако $x < c$, то според определението на точна горна граница съществува x' от полуинтервала $x < x' \leq c$, принадлежащо на множеството $\{x\}$, т. е. такова, че $f(x') \leq \gamma$. Но понеже f е растяща, ще следва, че $f(x) \leq \gamma$ (тъй като $f(x) < f(x')$).

Освен това всяко x, лежащо надясно от c, не принадлежи на множеството $\{x\}$ и затова за него ще бъде изпълнено неравенството $f(x) > \gamma$.

Сега ще се убедим, че c е вътрешна точка на сегмента $[a, b]$. Ще докажем, че $c < b$. Да предположим, че това не е така, т. е. допускаме, че $c = b$. Да вземем произволна клоняща към $c = b$ растяща редица $\{x_n\}$ от точки на сегмента $[a, b]$. Тъй като всичките ѝ членове x_n са наляво от c, то $f(x_n) \leq \gamma$ за всеки номер n и (теорема 3.13) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq \gamma$. Но понеже функцията f е непрекъсната в точката $c = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(b) = \beta$. Така получаваме неравенството $\beta \leq \gamma$, което противоречи на условието $\gamma < \beta$. Полученото противоречие доказва, че $c < b$.

Съвършено аналогично се доказва, че $a < c$.

И така доказахме, че c е вътрешна точка на сегмента $[a, b]$.

За да докажем, че $f(c) = \gamma$, ще разгледаме две клоняци към c от различни страни редици от точки на сегмента $[a, b]$ — растяща редица $\{x'_n\}$ и намаляваща редица $\{x''_n\}$. Тъй като функцията f е непрекъсната в точката c, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = f(c).$$

От друга страна, тъй като $x'_n < c < x''_n$ за всеки номер n, то $f(x'_n) \leq \gamma$, $f(x''_n) \geq \gamma$ (за всеки номер n). Но тогава от теорема 3.13

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(c) \leq \gamma, \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = f(c) \geq \gamma,$$

т. е. $f(c) = \gamma$. □

2. *Достатъчност.* Нека функцията f е растяща в сегмента $[a, b]$ и нека всяко число γ от сегмента $[\alpha, \beta]$ е стойност на тази функция. Ще докажем, че функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Достатъчно е да докажем, че f е непрекъсната отдясно във всяка точка c, удовлетворяваща условията $a \leq c < b$, и непрекъсната отляво във всяка точка c, удовлетворяваща условията $a < c \leq b$.

Ще се ограничим с доказателството за непрекъснатост отдясно във всяка точка c, която удовлетворява условията $a \leq c < b$, тъй като втората част на твърдението се доказва аналогично.

Да предположим, че функцията f не е непрекъсната отдясно в някоя точка c, удовлетворяваща условията $a \leq c < b$. Тогава нейната дясна граница $f(c+0)$, която съществува въз основа на доказаната по-горе лема, ще се различава от стойността $f(c)$ и съгласно забележката към същата лема неравенствата (4.1) ще приемат вида

$$\alpha = f(a) \leq f(c) < f(c+0) \leq f(x) \leq f(b) = \beta \tag{4.2'}$$

(за всички x от полуинтервала $c < x \leq b$).

Неравенствата (4.2′) показват, че съдържащият се в $[\alpha, \beta]$ сегмент $[f(c), f(c+0)]$ не съдържа стойности на функцията $f(x)$, което противоречи на това, че всяко число γ от сегмента $[\alpha, \beta]$ е стойност на тази функция. □

Теорема 4.5. *Нека функцията f е растяща (намаляваща) и непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и нека $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Тогава в сегмента $[\alpha, \beta]$ (съответно в $[\beta, \alpha]$) е дефинирана функцията f^{-1}, обратна на функцията f, и тя е също растяща (намаляваща) и непрекъсната в посочения сегмент.*

Накратко от строгата монотонност и непрекъснатост на една функция в сегмента $[a, b]$ следва съществуването на строго монотонна и непрекъсната обратна функция в съответния сегмент.

Доказателство. Ще проведем всички разсъждения за растяща функция, тъй като за намаляваща функция те са аналогични.

Тъй като f е растяща и непрекъсната в сегмента $[a, b]$, множеството от всичките ѝ стойности е сегментът $[\alpha, \beta]$ (теорема 4.4, необходимост). Но тогава от теорема 4.3 следва, че в сегмента $[\alpha, \beta]$ съществува обратната ѝ функция f^{-1}, която е растяща. Остава да се докаже, че обратната функция е непрекъсната в сегмента $[\alpha, \beta]$. Това следва непосредствено от теорема 4.4, като се вземе пред вид, че множеството от всички стойности на обратната функция f^{-1} е сегментът $[a, b]$, където $a = f^{-1}(\alpha)$ и $b = f^{-1}(\beta)$. □

Забележка 2. Може да се докаже, че от съществуването на обратна функция на функцията f, непрекъсната в сегмента $[a, b]$, следва, че $f(x)$ е строго монотонна в този сегмент (вж. 4.6.2).

4.3. Основни елементарни функции

Основни елементарни функции се наричат функциите: $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Ще разгледаме въпроса за непрекъснатост на основните елементарни функции, като се спрем на въпросите за дефинирането и някои свойства на тези функции.

4.3.1. Показателна функция. Ще започнем с дефинирането на рационална степен на положително число. За да се повдигне реалното число x в цяла положителна степен n, трябва да се умножи това число само на себе си n пъти.

Следователно при цяло n можем да считаме, че функцията $y = x^n$ е определена за всяко реално число x. Ще установим някои от най-простите свойства на тази функция.

Лема 1. *Степенната функция $y = x^n$ при $x \geq 0$ и цяло положително n е растяща и непрекъсната.*

Доказателство. Ще покажем, че функцията $y = x^n$ е растяща. Нека $0 \leq x_1 < x_2$. Тогава $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_1 + \cdots + x_1^{n-1})$. Двата множителя в дясната страна са положителни поради избора на x_1 и x_2. Затова и лявата страна на равенството е положителна, т. е. $x_2^n > x_1^n$, а това означава, че функцията $y = x^n$ е растяща при $x \geq 0$.

Непрекъснатостта на функцията $y = x^n$ във всяка точка a на безкрайната права $-\infty < x < +\infty$ беше установена в пример 1 на 4.1.1. □

Да разгледаме степенната функция $y = x^n$ в сегмента $[0, N]$, където N е произволно положително число. Тъй като функцията е непрекъсната и растяща в този сегмент, то според теорема 4.5 тя има непрекъсната и растяща обратна функция в сегмента $[0, N^n]$, която ще означим с $x = y^{1/n}$. Тъй като N може да се избере произволно голямо, то и N^n може да се направи произволно голямо. Следователно функцията $x = y^{1/n}$ е дефинирана за всички неотрицателни стойности на y. Ако сменим в тази функция означението на аргумента y с x, а означението на функцията x с y, ще получим степенната функция $y = x^{1/n}$, дефинирана за всяко реално $x \geq 0$.

Сега можем да дефинираме всяка рационална степен r на положителното число a. Определяме най-напред $a^{1/n}$ като реално число b, равно на стойността на функцията $y = x^{1/n}$ в точката a. По-нататък, ако $r = m/n$, където m и n са цели положителни числа, полагаме

$$a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m.$$

Освен това по определение полагаме

$$a^0 = 1,\ a^{-r} = (1/a)^r \text{ (при } r>0).$$

Така дефинирахме произволна рационална степен на положително реално число a.

Рационалните степени на положителните реални числа имат следните свойства:

$$(a^r)^s = a^{rs},\ a^r . b^r = (ab)^r,\ a^r a^s = a^{r+s}.$$

Ще докажем най-напред първото свойство. Ще отбележим, че при цяло положително p равенството $(a^{m/n})^p = a^{mp/n}$, където m и n са произволни цели положителни числа, е очевидно вярно, тъй като лявата и дясната му страна се получават чрез умножаване на числото $a^{1/n}$ само на себе си $m.p$ пъти.

Ще докажем равенството $(a^r)^s = a^{rs}$ за всички положителни рационални r и s. Нека $r = m_1/n_1$ и $s = m_2/n_2$. Полагаме $c_1 = (a^{m_1/n_1})^{m_2/n_2}$, $c_2 = a^{m_1 m_2/n_1 n_2}$. Ако допуснем, че $c_1 \neq c_2$, то и $c_1^{n_2} \neq c_2^{n_2}$, тъй като функцията $y = x$ е растяща и оттук поради верността на равенството $(a^{m/n})^p = a^{mp/n}$ за цели стойности на p ще получим $(a^{m_1/n_1})^{m_2} \neq a^{m_1 m_2/n_1}$. Но това противоречи на доказаното вече равенство $(a^{m_1/n_1})^{m_2} = a^{m_1 m_2/n}$ при цели m_1, n_1 и m_2. Така $c_1 = c_2$, с което първото свойство е доказано за произволни положителни рационални числа r и s.

Валидността на това равенство лесно може да се разшири за неположителни r и s, като се има пред вид, че по определение

$$a^0 = 1,\ a^{-r} = (1/a)^r \text{ при } r>0.$$

Второто равенство $a^r . b^r = (ab)^r$ е също така достатъчно да се докаже само за положителни рационални числа r. Полагаме $r = m/n$, където m и n са цели положителни числа. Ще отбележим, че е достатъчно да се докаже равенството $a^{1/n} b^{1/n} = (a.b)^{1/n}$, тъй като общото равенство $a^r . b^r = (a . b)^r$ се получава от това чрез умножаването му само на себе си m пъти.

За доказване на равенството $a^{1/n} . b^{1/n} = (a.b)^{1/n}$ ще вземем пред вид, че от свойствата на взаимно обратните функции $y = x^{1/n}$ и $x = y^n$ следва $(b^{1/n})^n = b$, $(a^{1/n})^n = a$, $((ab)^{1/n})^n = ab$. Ако положим $c_1 = a^{1/n} . b^{1/n}$, $c_2 = (ab)^{1/n}$ и предположим $c_1 \neq c_2$, ще получим, че $c_1^n \neq c_2^n$, което противоречи на равенството $ab = ab$.

Ще докажем сега последното свойство $a^r . a^s = a^{r+s}$, отчитайки, че първите две са вече доказани. Нека $r = m_1/n_1$, $s = m_2/n_2$; тогава $r = m_1 n_2/n_1 n_2$, $s = m_2 n_1/n_1 n_2$ и стигаме до следните равенства:

$$a^r a^s = (a^{1/n_1 n_2})^{m_1 n_2} (a^{1/n_1 n_2})^{m_2 n_1} = (a^{1/n_1 n_2})^{m_1 n_2 + m_2 n_1}.$$

Последното равенство е вярно, защото $m_1 n_2$ и $m_2 n_1$ са цели числа.

По такъв начин

$$a^r . a^s = a^{(m_1 n_2 + m_2 n_1)/n_1 n_2} = a^{m_1/n_1 + m_2/n_2} = a^{r+s},$$

което трябваше да докажем.

При $a>1$ и рационално $r>0$ е изпълнено неравенството $a^r>1$. Наистина нека $r = m/n$ и $a^r = a^{m/n} \leq 1$. Умножавайки почленно n пъти горното неравенство, ще получим $a^m \leq 1$. Но това неравенство противоречи на неравенството $a^m>1$, получено от почленното умножение на неравенството $a>1$ само на себе си m пъти.

Ще отбележим също, че ако рационалната дроб $r = m/n$ има нечетен знаменател n, то определението за рационална степен може да се разшири и за отрицателни числа, като при $a>0$ положим

$$(-a)^r = a^r, \text{ ако } m \text{ е четно},$$

$$(-a)^r = -a^r, \text{ ако } m \text{ е нечетно}.$$

Да се убедим, че функцията $y = a^x$ при $a>1$, дефинирана в множеството на рационалните числа, е монотонно растяща в това множество.

Наистина нека r_1 и r_2 са две такива рационални числа, че $r_2 > r_1$. Тогава

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1). \tag{4.3}$$

Понеже $r_2 - r_1 > 0$ и $a>1$, от доказаното по-рано имаме $a^{r_2 - r_1} > 1$, така че дясната страна на равенството (4.3) е положителна. Следователно

$$a^{r_2} - a^{r_1} > 0, \text{ т. е. } a^{r_2} > a^{r_1},$$

което трябваше да докажем.

Ще дефинираме накрая функцията $y = a^x$ не само за рационални стойности на x, но и за всички реални стойности. Нека x е произволно реално число. Ще разгледаме всички двойки рационални числа α и β, които удовлетворяват неравенствата

$$\alpha < x < \beta. \tag{4.4}$$

Ще дефинираме a^x за $a>1$ като реално число y, удовлетворяващо неравенствата

$$a^\alpha \leq y \leq a^\beta \tag{4.5}$$

за всички двойки рационални числа α и β, които удовлетворяват неравенствата (4.4).

Оказва се, че такова число съществува и то е само едно. Следователно функцията $y = a^x$ ще бъде дефинирана в множеството на всички реални числа x.

Ще покажем, че тази функция е растяща и непрекъсната върху цялата реална права. Тези твърдения се съдържат в следващите леми.

Лема 2. *За всеки две фиксирани реални числа x и $a>1$ и всички възможни двойки рационални числа α и β, удовлетворяващи неравенствата* (4.4), *съществува, и то само едно реално число y, което удовлетворява неравенствата* (4.5).

Доказателство. Ще докажем най-напред съществуването на такова число y. Фиксираме произволно рационалното число β, така че да удовлетворява дясното неравенство (4.4), и разглеждаме всевъзможните рационални числа α, удовлетворяващи лявото неравенство (4.4). Тъй като $\alpha<\beta$ и показателната функция, дефинирана в множеството на рационалните числа, е растяща, то $a^\alpha<a^\beta$. Тогава множеството $\{a^\alpha\}$ е ограничено отгоре и числото a^β е негова горна граница. От основната теорема 2.1 следва, че множеството $\{a^\alpha\}$ има точна горна граница, която ще означим с y. Ще покажем, че y удовлетворява неравенствата (4.5). От определението за точна горна граница следва верността на лявото неравенство (4.5), а верността на дясното неравенство (4.5) следва от това, че a^β е една горна граница и y е точната горна граница за множеството $\{a^\alpha\}$.

Ще докажем сега, че това число y е само едно. За това е достатъчно да се покаже, че за всяко $\varepsilon>0$ съществуват рационални числа α и β, удовлетворяващи неравенствата (4.4), за които $a^\beta-a^\alpha<\varepsilon$. Тогава всеки две числа y_1 и y_2, удовлетворяващи неравенствата (4.5), трябва да съвпадат, тъй като разликата между тях по абсолютна стойност е по-малка от всяко отнапред избрано число $\varepsilon>0$.

Фиксираме произволно положително число ε и рационално число β_0, удовлетворяващо дясното неравенство (4.4). Тогава, тъй като $a^\alpha<a^{\beta_0}$, то

$$a^\beta-a^\alpha=a^\alpha(a^{\beta-\alpha}-1)<a^{\beta_0}(a^{\beta-\alpha}-1).$$

Неравенството $a^\beta-a^\alpha<\varepsilon$ ще бъде доказано, ако установим съществуването на такива рационални α и β, че $a^{\beta-\alpha}-1<\varepsilon/a^{\beta_0}$.

В глава 2 беше доказано, че за всяко естествено число n съществуват такива рационални числа α и β, удовлетворяващи неравенството (4.4), че разликата им $\beta-\alpha$ да е по-малка от $1/n$. Следователно достатъчно е да се докаже съществуването на такова естествено число n, че $a^{1/n}-1<\varepsilon^{\beta_0}$. Нека $a^{1/n}=1+\delta_n$. Тъй като $a^{1/n}>1$, то δ_n е положително. Използвайки първите два члена в развитието на бинома на Нютон, получаваме

$$a=(a^{1/n})^n=(1+\delta_n)^n>1+n\delta_n.$$

Оттук $a-1>n\cdot\delta_n$, т. е. $0<\delta_n<(a-1)/n$. И така $a^{1/n}-1=\delta_n<(a-1)/n$. Да изберем сега естествено число n, което да удовлетворява неравенството $(a-1)/n<\varepsilon/a^{\beta_0}$, т. е. $n>(a-1)a^{\beta_0}/\varepsilon$. Тогава $a^{1/n}-1<(a-1)/n<\varepsilon a^{\beta_0}$. С това доказателството за единствеността на числото y, удовлетворяващо неравенствата (4.5), е завършено. □

Ще отбележим, че ако x е рационално число и a^x е стойността на показателната функция в точката x, първоначално дефинирана само в множеството на рационалните числа, то a^x е това единствено число y, което удовлетворява неравенствата (4.5).

Лема 3. *Показателната функция $y=a^x$ при $a>1$ е растяща върху цялата безкрайна права.*

Доказателство. Нека x_1 и x_2 са такива произволни числа, че $x_1<x_2$. Винаги съществуват такива рационални числа α и β, че $x_1<\alpha<\beta<x_2$ (вж. лема 2 от 2.3). Тъй като $x_1<\alpha$ и $\beta<x_2$, то от определението на показателната функция следват неравенствата $a^{x_1}\leq a^\alpha$, $a^\beta\leq a^{x_2}$. От друга страна, тъй като $\alpha<\beta$ и показателната функция е растяща в множеството на рационалните числа, е изпълнено неравенството $a^\alpha<a^\beta$. От неравенствата $a^{x_1}<a^\alpha$, $a^\alpha<a^\beta$, $a^\beta<a^{x_2}$ и свойството транзитивност на знаците $<$ и $=$ получаваме $a^{x_1}<a^{x_2}$, а това показва, че функцията $y=a^x$ е растяща. □

Лема 4. *Показателната функция $y=a^x$ $(a>1)$ е непрекъсната във всяка точка на безкрайната права.*

Доказателство. Нека x е произволно реално число, а $\{x_n\}$ е клоняща към x редица. Съгласно определението за непрекъснатост по Хайне е достатъчно да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв номер N, че $|a^{x_n}-a^x|<\varepsilon$ за всяко $n\geq N$. Избираме произволно $\varepsilon>0$ и такива рационални числа α и β, че $\alpha<x<\beta$ и $a^\beta-a^\alpha<\varepsilon$. Възможността за всяко $\varepsilon>0$ да се изберат такива числа α и β беше доказана в лема 2. Тъй като редицата $\{x_n\}$ клони към x и $\alpha<x<\beta$, то съществува такъв номер N, че за всяко $n\geq N$ да са изпълнени неравенствата $\alpha<x_n<\beta$. Понеже показателната функция е монотонно растяща, то $a^\alpha<a^x<a^\beta$, $a^\alpha<a^{x_n}<a^\beta$ при всички $n\geq N$.

Следователно двете числа a^x и a^{x_n} при $n\geq N$ са заключени между числата a^α и a^β, разликата между които $a^\beta-a^\alpha$ е по-малка от ε. Оттук следва, че при $n\geq N$ е изпълнено неравенството $|a^{x_n}-a^x|<\varepsilon$, което показва, че показателната функция е непрекъсната в произволна точка x. □

Ще получим сега някои следствия от доказаните свойства на показателната функция. Преди това ще отбележим, че ако $0<a<1$, то $a=1/b$, където $b>1$. Затова функцията $y=a^x$ при $0<a<1$ може да се дефинира като функция $y=b^{-x}$ при $b>1$.

Следствие 1. *Показателната функция $y=a^x$ е положителна за всички стойности на x.*

Ако x е произволна точка от числовата ос, а r е такова рационално число, че $r<x$, то според определението на показател

ната функция в множеството на рационалните числа имаме $a^r>0$, а от лема 3 — че $a^r<a^x$. Следователно $a^x>0$.

Следствие 2. *Показателната функция $y=a^x$ при $a>1$ удовлетворява условията:* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$.

Наистина, тъй като $a>1$, то $a=1+\delta$, където $\delta>0$ и $a^n=(1+\delta)^n>1+n\delta$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=+\infty$. От монотонността на функцията $y=a^x$ получаваме, че и $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$. Понеже $a^{-n}=1/a^n$, то $\lim\limits_{n\to-\infty} a^n=0$, откъдето $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$.

Следствие 3. *Стойностите на функцията $y=a^x$ запълват изцяло положителната полуправа $y>0$.*

Действително функцията $y=a^x$ приема само положителни стойности (следствие 1) — както произволно малки, така и произволно големи (следствие 2). От непрекъснатостта и строгата монотонност на функцията a^x и от теорема 4.4 следва, че всяко положително число е стойност на функцията $y=a^x$.

Следствие 4. *За всеки две реални числа x_1 и x_2 са изпълнени съотношенията*

$$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2},\quad a^{x_1}.b^{x_1}=(a.b)^{x_1},\quad a^{x_1}.a^{x_2}=a^{x_1+x_2}.$$

Наистина тези съотношения вече бяха установени при рационални показатели. Оттук следва и верността им при произволни реални показатели. Ще се убедим в това например за първото съотношение. Нека $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ са редици от рационални числа, клонящи съответно към x_1 и x_2. Тогава $(a^{r'_n})^{r''_n}=a^{r'_nr''_n}$.

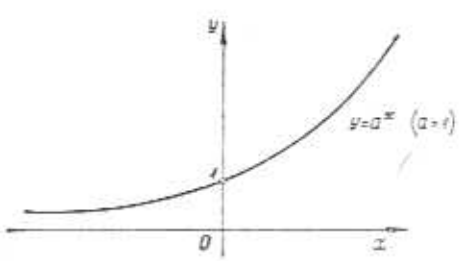
Граничният преход при $n\to\infty$, като използваме свойството непрекъснатост на показателната функция, ни дава $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$. Аналогично се установява верността и на останалите съотношения.

Ако $0<a<1$, като положим $b=1/a$, то $b>1$ и определяме $a^x=b^{-x}$.

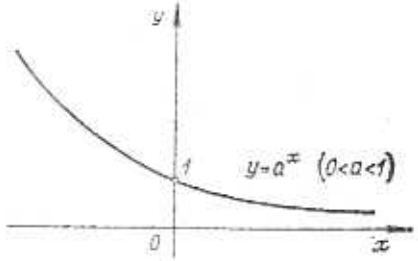
Ще отбележим, че досега фактически изучихме и свойствата на показателната функция $y=a^x$ при $0<a<1$. Наистина непрекъснатостта ѝ следва от самото определение. От определението следва също така, че тази функция е монотонно намаляваща върху безкрайната права. Следствия 1, 3 и 4 са верни и за функцията $y=a^x$ при $0<a<1$, а следствие 2 очевидно ще изглежда така:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} a^x=0.$$

На фиг. 4.1 и 4.2 са изобразени графиките на функцията $y=a^x$ за случаите $a>1$ и $0<a<1$.



Фиг. 4.1



Фиг. 4.2

Забележка. Показателната функция може да се определи и като решение на функционално уравнение, удовлетворяващо определени условия. Може да се докаже, че съществува, и то единствена функция f, дефинирана върху безкрайната права и удовлетворяваща следните три условия:

1) за всеки две реални числа x_1 и x_2 е изпълнено равенството $f(x_1+x_2)=f(x_1).f(x_2)$;

2) $f(0)=1$*, $f(1)=a$ при $a>1$;

3) функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката $x=0$.

Такава функция е построената по-горе функция a^x при $a>1$.

4.3.2. Логаритмична функция. Логаритмичната функция ще определим като обратна на показателната. Нека $[c, d]$ е произволен сегмент от безкрайната права. В този сегмент функцията $y=a^x$ при $a>1$ е непрекъсната и растяща. Затова според теорема 4.5 функцията $y=f(x)=a^x$ има растяща и непрекъсната обратна функция $x=f^{-1}(y)$ в сегмента $[a^c, a^d]$, която се нарича логаритмична функция и се означава така:

$$x=f^{-1}(y)=\log_a y.$$

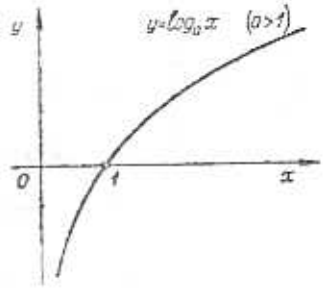
Като заменим означението на аргумента y с x, а означението на функцията x с y, ще запишем функцията в обичайния ѝ вид

$$y=\log_a x.$$

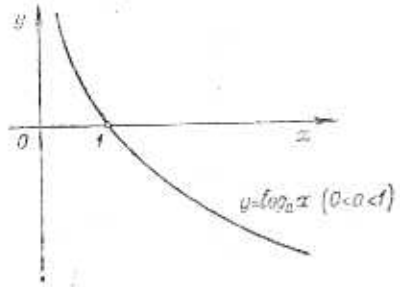
Случаят $0<a<1$ се разглежда аналогично. Ще отбележим някои свойства на логаритмичната функция, следващи непосредствено от определението ѝ.

1. *Логаритмичната функция е дефинирана за всички положителни стойности на x.* Наистина стойности на аргумента на лога-

* Може да се докаже, че условието $f(0)=1$ е следствие от останалите (и затова може да се изпусне).



Фиг. 4.3



Фиг. 4.4

ритмичната функция са стойностите на показателната функция, които, както видяхме, са само положителни и запълват полуправата $x>0$.

2. *Логаритмичната функция е непрекъсната и растяща върху цялата полуправа $x>0$ при $a>1$ и непрекъсната и намаляваща върху цялата полуправа $x>0$ при $0<a<1$; при това*

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \text{ при } a>1;$$

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \text{ при } 0<a<1.$$

Тези свойства следват от свойствата на показателната функция.

3. *За произволни положителни числа x_1 и x_2*

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

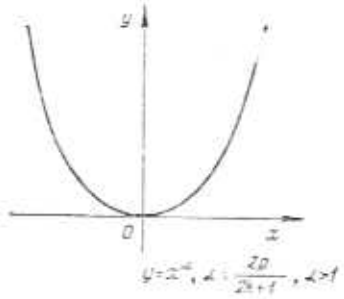
Това свойство също така следва от свойствата на показателната функция.

Забележка. Специално ще отделим логаритмичната функция $y=\log_e x$, където $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. За тази функция се използва означението $y=\ln x$. Логаритъм при основа e се нарича натурален логаритъм.

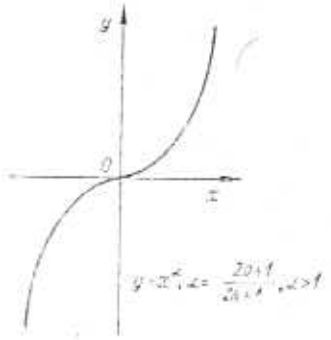
На фиг. 4.3 и 4.4 са дадени графиките на логаритмичната функция $\log_a x$ за случаите $a>1$ и $0<a<1$.

4.3.3. Степенна функция. Степенната функция при произволен реален показател α може да се дефинира и като суперпозиция на логаритмична и показателна функция. Нека $x>0$. Тогава степенната функция се представя така:

$$y=x^\alpha=(a^{\log_a x})^\alpha=a^{\alpha\log_a x},$$



Фиг. 4.5



Фиг. 4.6

където a е произволно фиксирано число и за определеност ще го вземем по-голямо от единица.

От това представяне и от факта, че при $a>1$ логаритмичната функция е растяща върху цялата полуправа $x>0$, а показателната функция е растяща върху цялата безкрайна права следва, че степенната функция $y=x^\alpha=a^{\alpha\log_a x}$ е растяща при $\alpha>0$ и намаляваща при $\alpha<0$ върху полуправата $x>0$.

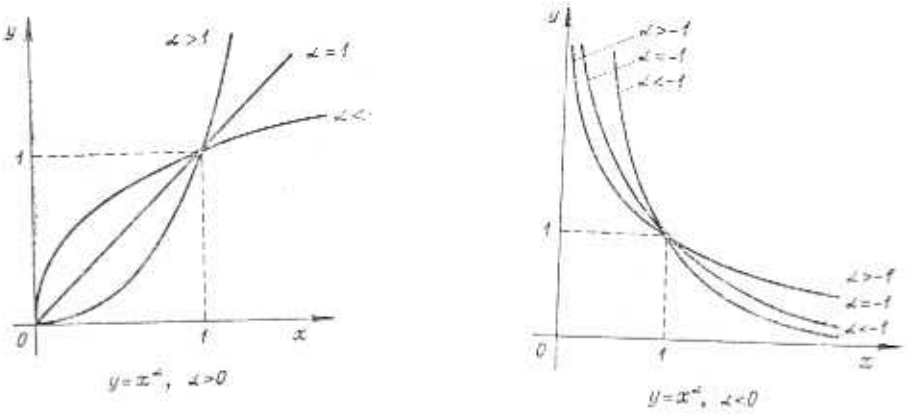
Степенната функция има следните свойства:

1. *За степенната функция са изпълнени съотношенията* $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\alpha=0$ *при* $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\alpha=+\infty$ *при* $\alpha<0$. Наистина нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща отдясно към нула редица от стойности на аргумента x_n. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n=-\infty$, то от свойствата на показателната функция следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha\log_a x_n}=0$ при $\alpha>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha\log_a x_n}=+\infty$ при $\alpha<0$. По дефиниция полагаме $0^\alpha=0$ при $\alpha>0$ и ще считаме този израз за неопределен при $\alpha\leqq 0$.

2. *Степенната функция $y=x^\alpha=a^{\alpha\log_a x}$ е непрекъсната във всяка точка x на отворената полуправа $x>0$.*

Това следва непосредствено от теорема 4.2 за непрекъснатост на сложна функция, като се вземе пред вид, че функцията $u=\alpha\log_a x$ е непрекъсната във всяка точка $x>0$, а функцията $y=a^u$ е непрекъсната във всяка точка от безкрайната права.

Забележка. Ако показателят α на степенната функция е рационално число m/n, където n е нечетно цяло число, то степенната функция $y=x^\alpha$ може да се дефинира върху цялата числова ос чрез формулите:



Фиг. 4.7

$$y=|x|^{\alpha}, \text{ ако } \alpha=m/n \text{ и } m \text{ е четно,}$$

$$y=-|x|^{\alpha}, \text{ ако } \alpha=m/n \text{ и } m \text{ е нечетно.}$$

На фиг. 4.5 и 4.6 са дадени графиките на степенната функция $y=x^{\alpha}$ за различни стойности на α.

4.3.4. Тригонометрични функции. Вече имаме представа за тригонометричните функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ и функциите, които се изразяват чрез тях:

$$y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\ y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\ y=\sec x=\frac{1}{\cos x},$$

$y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$. Определенията на функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$ чрез нагледни геометрични съображения е логически несъвършено. Логически безупречно тези функции могат да се определят като решения на система функционални уравнения. По-точно може да се докаже следното твърдение: *Съществува и при това единствена двойка функции f и g, определени за всички реални стойности на аргумента x и удовлетворяващи условията:*

$$\begin{aligned}
&1)\quad f(x_1+x_2)=f(x_1)g(x_2)+g(x_1)f(x_2),\\
&\qquad g(x_1+x_2)=g(x_1)g(x_2)-f(x_1)f(x_2),\\
(4.6)\qquad &\qquad f^2(x)+g^2(x)=1;\\
&2)\quad f(0)=0,\ g(0)=1,\ f(\pi/2)=1,\ g(\pi/2)=0;
\end{aligned}$$

$$3)\quad \text{ако } 0<x<\pi/2, \text{ то } 0<f(x)<x<f(x)/g(x)^{*}.$$

Първата от тези функции наричаме **синус** *и я означаваме със символа* sin, *а втората —* **косинус** *и я означаваме със символа* cos.

Доказателството на това твърдение може да се види в допълнението към глава 4 на книгата на В. А. Ильин и Э. Г. Позняк „Основы математического анализа, I".

Не е трудно да се докаже, че от свойствата 1), 2) и 3) могат да се получат като следствия всички други свойства на функциите sin и cos, известни от средния курс по математика и доказани там с помощта на нагледни геометрични съображения. Впрочем то следва от това, че свойствата 1), 2) и 3) определят единствена двойка функции f и g и че въведените в средния курс чрез нагледни геометрични съображения функции $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$ притежават тези свойства.

За пример ще установим с помощта на свойствата 1), 2) и 3) някои свойства на функциите $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$, които ще ни бъдат необходими при доказателството на непрекъснатостта на тези функции и при определяне на интервалите им на монотонност.

а) От третото равенство на 1), а именно $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, непосредствено следва, че $\sin^2 x\leq 1$ и $\cos^2 x\leq 1$, т. е.

$$(4.7)\qquad |\sin x|\leq 1,\ |\cos x|\leq 1.$$

б) С помощта на първите две равенства от 1) и първите две равенства от 2) получаваме

$$\sin 0=\sin(x+(-x))=\sin x\,.\cos(-x)+\cos x\,.\sin(-x)=0,$$
$$\cos 0=\cos(x+(-x))=\cos x\,.\cos(-x)-\sin x\,.\sin(-x)=1.$$

Получените две равенства са система от две уравнения относно двете неизвестни $\cos(-x)$ и $\sin(-x)$. Като решим тази система и вземем пред вид, че $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получаваме

$$(4.8)\qquad \cos(-x)=\cos x,\ \sin(-x)=-\sin x,$$

т. е. $g(x)=\cos x$ е четна функция, а $f(x)=\sin x$ е нечетна функция.**

в) От равенствата в 1) на свой ред следват равенствата

$$(4.9)\qquad \begin{aligned}\sin(x_1-x_2)&=\sin(x_1+(-x_2))=\sin x_1\,.\cos(-x_2)\\&+\cos x_1\,.\sin(-x_2)=\sin x_1\,.\cos x_2-\cos x_1\,.\sin x_2,\end{aligned}$$

* Верността на неравенството $x<f(x)/g(x)$ за $0<x<\pi/2$ следва от останалите условия.

** Функцията h, дефинирана за всички реални стойности на x, се нарича четна, ако $h(-x)=h(x)$ (за всяка стойност на x), и нечетна ако $h(-x)=-h(x)$ (също за всяка стойност на x).

$$\cos(x_1-x_2)=\cos(x_1+(-x_2))=\cos x_1 \,.\, \cos(-x_2)$$
$$-\sin x_1 \,.\, \sin(-x_2)=\cos x_1 \,.\, \cos x_2+\sin x_1 \,.\, \sin x_2.$$

г) От първото равенство на 1) и първото равенство на (4.9) получаваме, че

$$\sin x_2=\sin\left(\frac{x_2+x_1}{2}+\frac{x_2-x_1}{2}\right)=\sin\frac{x_2+x_1}{2} \,.\, \cos\frac{x_2-x_1}{2}$$
$$+\cos\frac{x_2+x_1}{2} \,.\, \sin\frac{x_2-x_1}{2},$$

$$\sin x_1=\sin\left(\frac{x_2+x_1}{2}-\frac{x_2-x_1}{2}\right)=\sin\frac{x_2+x_1}{2} \,.\, \cos\frac{x_2-x_1}{2}$$
$$-\cos\frac{x_2+x_1}{2} \,.\, \sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

Като съберем и извадим получените две равенства, намираме

(4.10) $$\sin x_2+\sin x_1=2\sin\frac{x_2+x_1}{2} \cdot \cos\frac{x_2-x_1}{2},$$

$$\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2} \cdot \sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

д) По-нататък от първото равенство на (4.9) и от последните две равенства на 2) получаваме

$$\sin(\pi/2-x)=\sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos x-\cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin x=\cos x,$$

т. е.

(4.11) $$\cos x=\sin(\pi/2-x).$$

е) Ще се убедим накрая в периодичността на функциите $g(x)=\cos x$ и $f(x)=\sin x$ с период 2π. От първите две равенства на 1) при $x=x_1=x_2$ ще получим

(4.12) $$\sin 2x=2\sin x \,.\, \cos x, \quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

От 2) имаме $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$. Използваме (4.12) при $x=\pi/2$ и получаваме, че $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$. Като използваме повторно (4.12), при $x=\pi$ имаме $\sin 2\pi=0$, $\cos 2\pi=1$.

От последните две равенства и първите две равенства на 1) следва

$$\sin(x+2\pi)=\sin x \,.\, \cos 2\pi+\cos x \,.\, \sin 2\pi=\sin x,$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos x \,.\, \cos 2\pi-\sin x \,.\, \sin 2\pi=\cos x,$$

а това означава, че функциите $\sin x$ и $\cos x$ са периодични с период 2π.

ж) В заключение ще усилим малко неравенствата от условие 3). Ще установим валидността на следното по-общо неравенство:

(4.13) $$|\sin x|\leq|x|.$$

При $0<x<\pi/2$ неравенството (4.13) следва от неравенството в условие 3).

При $-\pi/2<x<0$ неравенството (4.13) следва от $\sin(-x)=-\sin x$ и от неравенствата

$$0<\sin(-x)<-x \quad \text{при} \quad -\pi/2<x<0,$$

а тези неравенства са изпълнени вследствие на това, че $(-x)$ е в интервала $(0, \pi/2)$. При $x=0$ имаме $\sin x=x$.

При $\pi/2\leq|x|$ имаме $|\sin x|\leq 1<\pi/2\leq|x|$, т. е. $|\sin x|\leq|x|$.

Ще преминем към установяване на две основни свойства на функциите $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$.

1°. *Функциите* $\sin x$ *и* $\cos x$ *са непрекъснати във всяка точка* x *на безкрайната права.*

Доказателство. Достатъчно е да установим непрекъснатостта на функцията $f(x)=\sin x$ във всяка точка x, тъй като непрекъснатостта на функцията $g(x)=\cos x$ във всяка точка x ще следва от (4.11).

Най-напред ще докажем, че функцията $\sin x$ е непрекъсната в точката $x=0$. Понеже съгласно 2) $\sin 0=0$, то според определението за непрекъснатост по Хайне е достатъчно да докажем, че за всяка безкрайно малка редица $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $\{\sin x_n\}$ е също безкрайно малка.

От неравенството (4.13) и от условието $|\sin x|\geq 0$ имаме

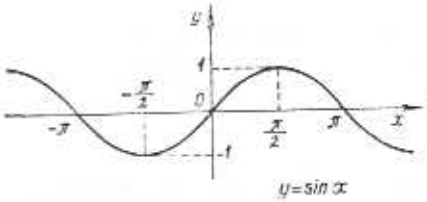
(4.13') $$0\leq|\sin x|\leq|x|;$$

следователно

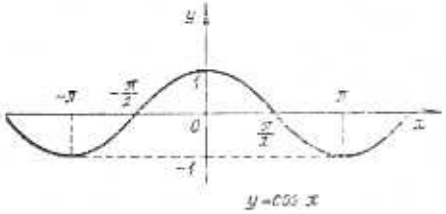
$$0\leq|\sin x_n|\leq|x_n|.$$

От последното неравенство (вж. теорема 3.14) следва, че редицата $\{|\sin x_n|\}$, а оттук и редицата $\{\sin x_n\}$ е безкрайно малка. Непрекъснатостта на функцията sin в точката $x=0$ е доказана.

Ще докажем сега, че функцията sin е непрекъсната във всяка точка x на безкрайната права. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица, клоняща към x. Трябва да докажем, че съответната редица $\{\sin x\}$ клони към $\sin x$.



Фиг. 4.8



Фиг. 4.9

Като използваме второто равенство от (4.10) при $x_1=x$ и $x_2=x_n$, получаваме

$$\sin x_n-\sin x = 2\cos\frac{x_n+x}{2}\cdot\sin\frac{x_n-x}{2}. \tag{4.14}$$

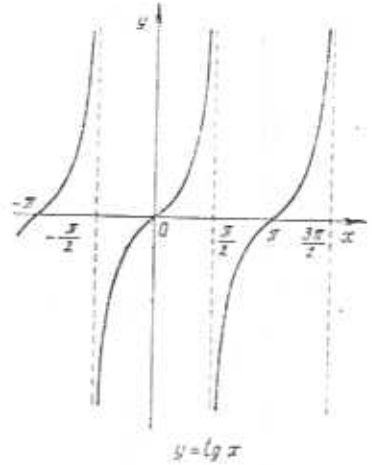
Остава да покажем, че дясната страна на (4.14) е член на безкрайно малка редица, което непосредствено следва от това, че редицата $\left\{\sin\frac{x_n-x}{2}\right\}$ е безкрайно малка поради непрекъснатостта на синуса в точката нула, а редицата $\left\{2\cos\frac{x_n+x}{2}\right\}$ е ограничена (вж (4.7)).

2°. *Функцията* sin *е растяща във всеки от сегментите* $[2k\pi-\pi/2,\ 2k\pi+\pi/2]$ *и намаляваща във всеки от сегментите* $[(2k+1)\pi-\pi/2,\ (2k+1)\pi+\pi/2]$, *а функцията* cos *е намаляваща във всеки от сегментите* $[2k\pi,\ 2k\pi+\pi]$ *и растяща във всеки от сегментите* $[2k\pi-\pi,\ 2k\pi]$ (навсякъде тук $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$).

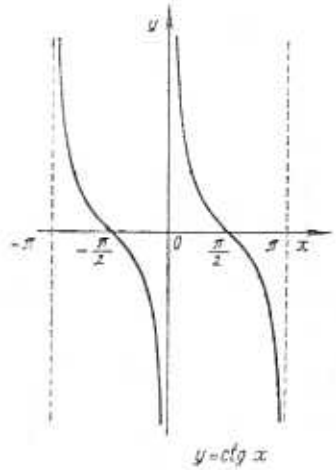
Доказателство. Достатъчно е да проведем всички разсъждения само за функцията sin, тъй като след намирането на всички интервали на монотонност на функцията sin интервалите на монотонност на функцията cos могат да бъдат получени от равенствата (4.11).

Понеже sin е периодична функция с период 2π, ще намерим интервалите на монотонност само в рамките на един период например за сегмента $[-\pi/2,\ 2\pi-\pi/2]$. Най-напред ще докажем, че функцията sin расте в сегмента $[0,\ \pi/2]$. Нека x_1 и x_2 са произволни числа от този сегмент и $x_2>x_1$. Тогава очевидно числата $\frac{x_2+x_1}{2}$ и $\frac{x_2-x_1}{2}$ принадлежат на интервала $(0,\ \pi/2)$ и от второто равенство на (4.10) следва

$$\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}. \tag{4.15}$$



Фиг. 4.10



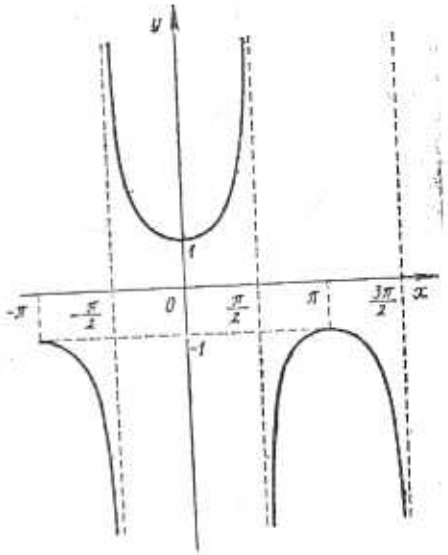
Фиг. 4.11

Но функцията sin има в интервала $(0,\ \pi/2)$ положителни стойности (условие 3)). Функцията cos има също положителни стойности в интервала $(0,\ \pi/2)$ (следва от (4.11)). Следователно дясната страна на (4.15) е положително число.

И така доказахме, че функцията sin е растяща в сегмента $[0,\ \pi/2]$. От нечетността на функцията sin (съотношение (4.81)) следва, че тя е растяща и в сегмента $[-\pi/2,\ 0]$.

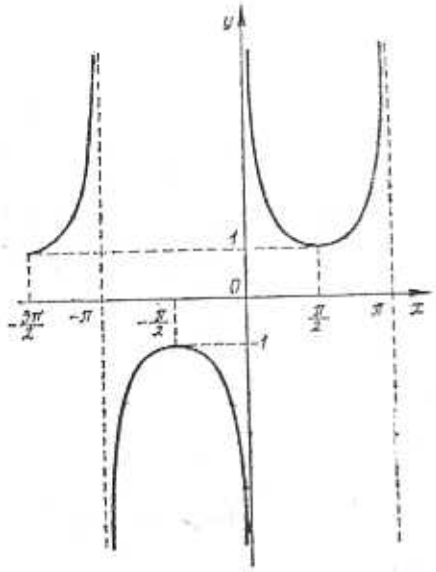
С това е доказано, че функцията sin е растяща в сегмента $[-\pi/2,\ \pi/2]$. Остава да се изследва поведението на функцията sin в сегмента $[\pi/2,\ \pi+\pi/2]$. В точка е) се убедихме, че $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$, а оттук и от първото равенство на 1) следва $\sin(x+\pi)=\sin x\cdot\cos\pi+\cos x\cdot\sin\pi=-\sin x$. От полученото равенство заключаваме, че функцията sin е намаляваща в сегмента $[\pi/2,\ \pi+\pi/2]$, понеже е растяща в сегмента $[-\pi/2,\ \pi/2]$. □

От представянията $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$ и от теорема 4.1 за случая на частно следва, че функцията tg е дефинирана и непрекъсната във всяка точка x, различна от $k\pi+\pi/2$, а функцията ctg е дефинирана и непрекъсната във всяка точка $x\neq k\pi$. Като използваме равенствата $\sin(x+\pi)=-\sin x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$, ще получим $\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg}x$ и аналогично $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg}x$. Това показва, че tg и ctg са периодични функции с период π. За да



$y=\sec x$

Фиг. 4.12



$y=\operatorname{cosec} x$

Фиг. 4.13

определим областите на монотонност на тези функции, достатъчно е да изследваме интервал с дължина π. От равенствата

$$\operatorname{tg} x_2-\operatorname{tg} x_1=\frac{\sin x_2}{\cos x_2}-\frac{\sin x_1}{\cos x_1}=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_2\,.\,\cos x_1} \tag{4.16}$$

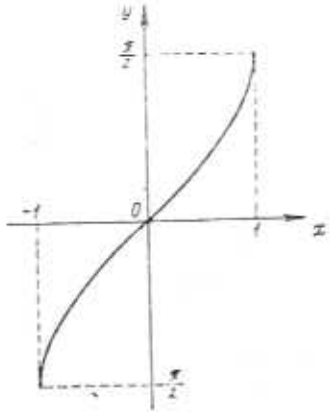
и от това, че sin има също положителни стойности в интервала $(0, \pi)$, а cos има само положителни стойности в интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, следва, че функцията tg е растяща в интервала $(-\pi/2, \pi/2)$. (При всеки x_1 и x_2 от интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, за които $x_2>x_1$, дясната страна на (4.16) е положителна величина.)

Аналогично се установява, че функцията ctg е намаляваща в интервала $(0, \pi)$.

Няма да се спираме на функциите $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ и $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$.

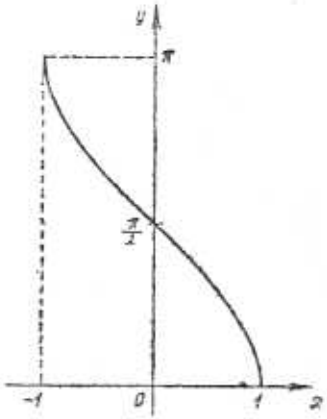
Графиките на всички тригонометрични функции са дадени на фиг. 4.8—4.13.

4.3.5. Обратни тригонометрични функции. Ще дефинираме обратните тригонометрични функции и ще се спрем на въпроса за тяхната непрекъснатост и монотонност.



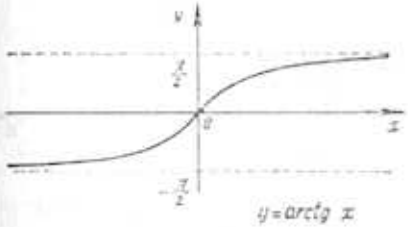
$y=\arcsin x$

Фиг. 4.14



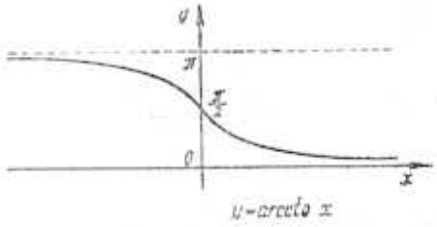
$y=\arccos x$

Фиг. 4.15



$y=\operatorname{arctg} x$

Фиг. 4.16

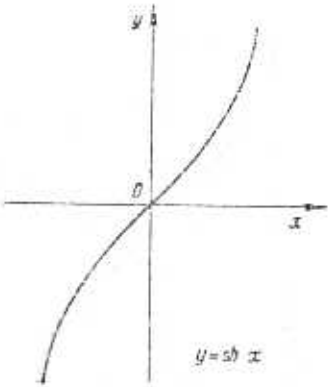


$y=\operatorname{arcctg} x$

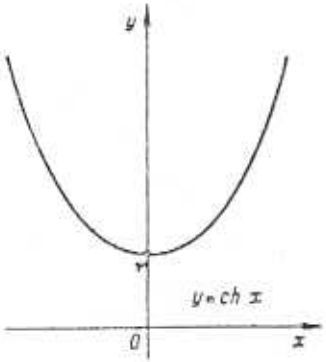
Фиг. 4.17

За дефиниране на функцията arcsin ще разгледаме функцията sin в сегмента $[-\pi/2, \pi/2]$. В този сегмент функцията sin е растяща и непрекъсната (вж. 4.3.4). Множеството от стойностите ѝ е сегментът $[-1, 1]$. Според теорема 4.5 съществува непрекъсната, растяща обратна функция в сегмента $[-1, 1]$, приемаща стойности $-\pi/2$ в точката -1 и $\pi/2$ в точката 1. Тази функция се означава със символа arcsin. По същия начин в сегмента $[-1, 1]$ се дефинира функцията arccos — обратна на функцията cos, намаляваща и непрекъсната в сегмента $[0, \pi]$.

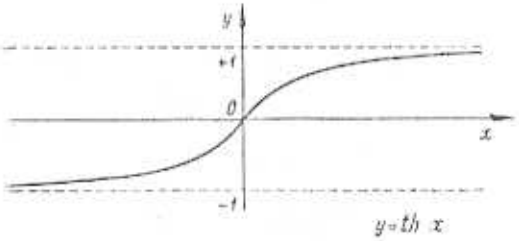
Функцията arccos е намаляваща и непрекъсната в сегмента $[-1, 1]$ и приема в точките $x=-1$ и $x=1$ съответно стойностите π и 0.



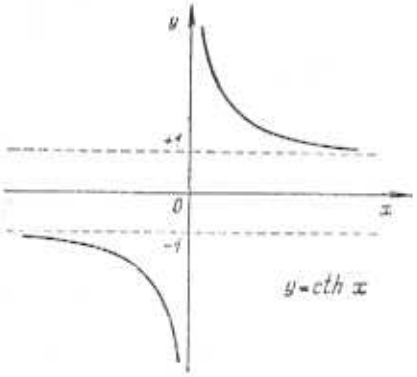
Фиг. 4.18 а



Фиг. 4.18 б



Фиг. 4.18 в



Фиг. 4.18 г

Функциите arctg и arcctg се дефинират като обратни функции на тангенс и котангенс, разглеждани в интервалите $(-\pi/2, \pi/2)$ и $(0, \pi)$. Тези функции са дефинирани и монотонни върху цялата безкрайна права. На фиг. 4.14—4.17 са изобразени графиките на обратните тригонометрични функции.

4.3.6. Хиперболични функции. Функциите $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ се наричат съответно *хиперболичен косинус* и *хиперболичен синус* и се означават ch и sh:

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Хиперболичният тангенс и хиперболичният котангенс се определят съответно от формулите

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

От определението за хиперболични функции следва, че хиперболичният косинус, хиперболичният синус и хиперболичният тангенс са дефинирани върху цялата числова ос, а хиперболичният котангенс — върху цялата числова ос с изключение на точката $x=0$. На фиг. 4.18 а) — 4.18 г) са дадени графиките на тези функции.

Хиперболичните функции са непрекъснати във всяка точка от дефиниционната си област (това следва от непрекъснатостта на показателната функция и от теорема 4.1).

Те притежават редица свойства, аналогични на свойствата на тригонометричните функции. Например за хиперболичните функции са в сила теореми за събиране, аналогични на теоремите за събиране при тригонометричните функции:

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\,.\,\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\,.\,\operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x\,.\,\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\,.\,\operatorname{sh} y.$$

Непосредствено се проверяват и формулите $\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\,.\,\operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$. Епитетът „хиперболичен" е свързан с обстоятелството, че формулите $x=a\operatorname{ch} t$, $y=a\operatorname{sh} t$ определят хипербола, както формулите $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ определят окръжност. Наистина в първия случай имаме $x^2-y^2=a^2$, т. е. уравнение на хипербола, а във втория $x^2+y^2=a^2$ — уравнение на окръжност.

4.4. Две забележителни граници

4.4.1. Първа забележителна граница. Най-напред ще докажем една теорема, функционален аналог на теорема 3.14.

Теорема 4.6 (функционален аналог на принципа за двустранните ограничения). *Нека в някоя прободена δ-околност Ω на точката a са зададени функциите f, h и g, двете от които f и g имат в точката a обща граница, равна на b. Тогава, ако за всяко $x\in\Omega$ са изпълнени неравенствата*

$$f(x)\leq h(x)\leq g(x), \tag{4.17}$$

то и функцията h има граница в точката a, равна на b.

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента, всички членове на която са различни от a. Тогава съгласно определението на граница по Хайне двете редици от съответните стойности на функциите $\{f(x_n)\}$,

и $\{g(x_n)\}$ клонят към b и според (4.17) за всички n са изпълнени неравенствата

$$f(x_n) \leqq h(x_n) \leqq g(x_n).$$

Съгласно теорема 3.14 редицата $\{h(x_n)\}$ е сходяща и клони също към b. Това означава, че числото b е граница на функцията h в точката a. □

Теорема 4.7. *Границата на функцията* $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ *в точката* $x=0$ *съществува и*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказателство. Ще тръгнем от неравенствата

(4.18) $$0<\sin x<x<\operatorname{tg} x \qquad (\text{при } 0<x<\pi/2),$$

разгледани в 4.3.4. Чрез деление на $\sin x>0$ от (4.18) получаваме следните неравенства:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{при } 0<x<\pi/2.$$

За реципрочните величини очевидно са изпълнени обратните неравенства

(4.19) $$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad \text{при } 0<x<\pi/2.$$

Ще отбележим, че (4.19) са изпълнени и при $-\pi/2<x<0$, понеже функциите $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ и 1 са четни.

Установихме, че неравенствата (4.19) са изпълнени за всички стойности на x от интервала $-\pi/2<x<\pi/2$ с изключение на точката $x=0$, т. е. навсякъде в една прободена δ-околност на точката $x=0$. Тъй като двете функции $f(x)=\cos x$ и $g(x)=1$ имат в точката $x=0$ еднаква граница, равна на единица, то от теорема 4.6 следва, че и функцията $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ има в точката $x=0$ граница, равна на единица. □

4.4.2. Втора забележителна граница.

Теорема 4.8. *Границата на функцията* $f(x)=(1+x)^{1/x}$ *в точката* $x=0$ *съществува и е равна на числото* e.*

Доказателство. Достатъчно е да се докаже, че дясната и лявата граница на функцията $f(x)=(1+x)^{1/x}$ в точката $x=0$ съществуват и са равни на e.

* Числото e бе въведено в 3.2.3 като граница на редицата $\{(1+1/n)^n\}$, когато $n\to\infty$.

1. Първо ще докажем, че дясната граница на тази функция в точката $x=0$ съществува и е равна на e.

Ще използваме определението за дясна граница по Коши и ще покажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че за всяко $x\in(0,\delta)$ да е изпълнено неравенството

(4.20) $$|(1+x)^{1/x}-e|<\varepsilon.$$

Избираме произволно $\varepsilon>0$ и разглеждаме двете редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с членове $a_n=(1+1/(1+n))^n$, $b_n=(1+1/n)^{n+1}$. Ще се убедим, че тези две редици клонят към e. Като използваме, че $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$, и теоремите за граница на частно и произведение на две сходящи редици, получаваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/(n+1))^{n+1}}{1+1/(n+1)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/(n+1))^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/(n+1))}=\frac{e}{1}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}((1+1/n)^n(1+1/n))=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\lim_{n\to\infty}(1+1/n)=e\,.1=e.$$

Тъй като редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ клонят към e, то за избраното по-горе $\varepsilon>0$ съществуват такива номера N_1 и N_2, че $|a_n-e|<\varepsilon$ при $n>N_1$, $|b_n-e|<\varepsilon$ при $n\geq N_2$. Нека N е по-голямото от числата N_1 и N_2. Тогава при $n\geq N$ ще са изпълнени и двете неравенства

(4.21) $$|a_n-e|<\varepsilon \text{ и } |b_n-e|<\varepsilon.$$

Нека x е произволно число от интервала $0<x<\delta=1/N$. Тогава $1/x>N$. Означаваме с n цялата част на числото $1/x$, т. е. полагаме $n=[1/x]$. Поради $1/x>N$ имаме $n\geq N$ и са изпълнени неравенствата

(4.22) $$n\leq 1/x<n+1.$$

От (4.22) следват неравенствата

(4.23) $$1+\frac{1}{n+1}<1+x\leq 1+\frac{1}{n}.$$

От неравенствата (4.22), (4.23) и от това, че показателната функция е растяща при основа по-голяма от единица, следва

$$(1+1/(n+1))^n<(1+x)^{1/x}<(1+1/n)^{n+1}, \text{ или } a_n<(1+x)^{1/x}<b_n.$$

И така доказахме, че за всяко x от интервала $0<x<\delta=1/N$ при някое $n\geq N$ (зависещо, разбира се, от x) са изпълнени неравенствата $a_n<(1+x)^{1/x}<b_n$ и неравенствата

(4.24) $$a_n-e<(1+x)^{1/x}-e<b_n-e.$$

Като съпоставим (4.24) с неравенствата (4.21), вярни за всяко $n\geq N$,

окончателно се убеждаваме, че за всяко x от интервала $0<x<\delta=1/N$ са изпълнени неравенствата (4.20).

2. Ще докажем сега, че и лявата граница на функцията $f(x)=(1+x)^{1/x}$ в точката $x=0$ съществува и е равна на e.

Съгласно определението за лява граница по Хайне достатъчно е да докажем, че за всяка безкрайно малка редица от отрицателни числа $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $f(x_n)=(1+x_n)^{1/x_n}$ клони към e.

Нека $\{x_n\}$ е безкрайно малка редица от отрицателни числа. Ще разглеждаме членовете на редицата от този номер N нататък, от който всички елементи x_n са по модул по-малки от единица.

Полагаме $y_n=-x_n/(1+x_n)$. Тогава $x_n=-y_n/(1+y_n)$. Очевидно $\{y_n\}$ ще е безкрайно малка редица, състояща се само от положителни числа и

$$f(x_n)=(1+x_n)^{1/x_n}=(1-y_n/(1+y_n))^{-(1+y_n)/y_n}$$
$$=(1/(1+y_n))^{-(1/y_n+1)}=(1+y_n)^{1+1/y_n}.$$

Следователно

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(1+y_n)^{1/y_n}\,.\,\lim_{n\to\infty}(1+y_n)=e\,.\,1=e. \tag{4.25}$$

Тъй като редицата $\{y_n\}$ клони към нула и има само положителни членове, то $\lim\limits_{n\to\infty}(1+y_n)^{1/y_n}=e$ (вече доказахме съществуването на дясна граница, равна на e), а $\lim\limits_{n\to\infty}(1+y_n)=1$. □

Следствие. *Границата на функцията $f(t)=(1+1/t)^t$ при $t\to\infty$ съществува и е равна на e.*

Съгласно определението на граница при $t\to\infty$ по Хайне трябва да се докаже, че за всяка безкрайно голяма редица $\{t_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $f(t_n)=(1+1/t_n)^{t_n}$ клони към e. Ще разгледаме безкрайно голямата редица $\{t_n\}$ от този член с номер N нататък, от който всички нейни членове t_n са по модул по-големи от единица. Полагаме $x_n=1/t_n$, така че $t_n=1/x_n$. Според теорема 3.6 редицата $\{x_n\}$ е безкрайно малка и $f(t_n)=(1+1/t_n)^{t_n}=(1+x_n)^{1/x_n}$.

Остава да отбележим, че съгласно теорема 4.8

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n)=\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n}=e.$$

4.5. Точки на прекъсване на функция и тяхната класификация

4.5.1. Класификация на точките на прекъсване на функция. В § 1 нарекохме точки на прекъсване на функцията f онези точки, в които функцията не е непрекъсната. Предполагахме, че функцията е дефинирана в разглежданите точки.

Ще разширим нашите разглеждания, като включим и тези точки, в които функцията f не е дефинирана, но те са точки на сгъстяване за дефиниционната област на функцията.

Ще изясним възможните видове точки на прекъсване.

1°. Отстранимо прекъсване. *Точката a се нарича* ***точка на отстранимо прекъсване*** *на функцията f, ако съществува $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, но или функцията f не е дефинирана в точката a, или е дефинирана, но $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$.*

Пример: *Функцията*

$$f(x)=\begin{cases} x^{-1}\sin x & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

има в точката $x=0$ отстранимо прекъсване.

Наистина границата на функцията в точката $x=0$, както показахме в 4.4.1, е равна на 1, но стойността ѝ $f(0)$ в точката 0 е равна на 0.

Ако функцията f има в точката a отстранимо прекъсване, това прекъсване може да се отстрани, без да се изменят стойностите на функцията в точките, различни от a. Достатъчно е да положим стойността на функцията в точката a равна на граничната ѝ стойност в тази точка. Така в разгледания пример трябва да положим $f(0)=1$ и тогава $\lim\limits_{x\to 0} x^{-1}\sin x=f(0)=1$, т. е. функцията f ще бъде непрекъсната в точката $x=0$.

2°. Прекъсване от първи род. *Точката a се нарича* ***точка на прекъсване от първи род*** *на функцията f, ако в тази точка функцията f има дясна и лява граница, но различни една от друга:*

$$\lim_{x\to a+0} f(x)\neq\lim_{x\to a-0} f(x).$$

Образно казано, прекъсването от първи род може да се нарече краен скок.

Примери:

1. Функцията

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & \text{при } x>0, \\ 0 & \text{при } x=0, \\ -1 & \text{при } x<0 \end{cases}$$

има в точката $x=0$ прекъсване от първи род. Действително

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x=1, \quad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x=-1.$$

2. За функцията $f(x)=|x|^{-1}\sin x$ имаме

$$\lim_{x\to 0+0} |x|^{-1}\sin x=1, \quad \lim_{x\to 0-0} |x|^{-1}\sin x=-1.$$

Точката $x=0$ е точка на прекъсване от първи род.

3. Функцията $f(x)=1/(1+2^{1/(x-1)})$, дефинирана навсякъде освен в точката $x=1$, има в точката $x=1$ прекъсване от първи род. Действително, ако $\{x_n\}$ клони към 1 и се състои от членове $x_n>1$, то $\{1/(x_n-1)\}$ е безкрайно голяма редица с положителни членове. Затова $\{1+2^{1/(x_n-1)}\}$ е безкрайно голяма редица и следователно редицата с общ член $f(x_n)=1/(1+2^{1/(x_n-1)})$ е безкрайно малка, т. е. $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=0$.

Ако пък $\{x_n\}$ клони към 1 и се състои от членове $x_n<1$, то $\{1/(x_n-1)\}$ е безкрайно голяма редица с отрицателни членове. Затова $\{2^{1/(x_n-1)}\}$ клони към нула и следователно редицата с общ член $f(x_n)=1/(1+2^{1/(x_n-1)})$ клони към единица, т. е. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1$.

3°. Прекъсване от втори род. *Точката a се нарича* ***точка на прекъсване от втори род*** *на функцията f, ако функцията f няма поне една от едностранните граници в тази точка или поне една от едностранните граници е безкрайна.*

Примери:

1. Функцията

$$f(x)=\begin{cases} x\cos x^{-1} & \text{при } x<0, \\ 0 & \text{при } x=0, \\ \cos x^{-1} & \text{при } x>0 \end{cases}$$

има лява граница в точката $x=0$, равна на нула: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=0$. Наистина, ако $\{x_n\}$ е редица, клоняща към нула с членове $x_n<0$, то

$$0\leq |f(x_n)|=|x_n||\cos x_n^{-1}|\leq |x_n|.$$

И понеже $|x_n|\to 0$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x_n)=0$.

Разглежданата функция няма дясна граница в точката $x=0$. Наистина да вземем две редици с положителни членове, клонящи към нула: $x_n=1/(\pi/2+\pi n)$ и $x_n'=1/2\pi n$. Ако функцията имаше

дясна граница в точката $x=0$, двете редици $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ щяха да клонят към едно и също число.

Обаче $f(x_n')=\cos 2\pi n=1$, а $f(x_n)=\cos(\pi/2+\pi n)=0$, т. е. $1=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')\neq\lim f(x_n)=0$.

Следователно разглежданата функция има в точката $x=0$ прекъсване от втори род.

2. Функцията $f(x)=\operatorname{tg} x$ очевидно има прекъсване от втори род във всяка точка $x_k=\pi/2+k\pi$, където $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, тъй като във всяка такава точка

$$\lim_{x\to x_k-0} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to x_k+0} f(x)=-\infty.$$

Образно казано, функцията $\operatorname{tg} x$ има във всяка точка x_k безкраен скок.

3. Функцията

$$f(x)=\begin{cases} \sin x^{-1} & \text{при } x\neq 0, \\ 1 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

има прекъсване от втори род в точката $x=0$, тъй като в тази точка тя няма нито дясна, нито лява граница. Понеже $\sin(-1/x)=-\sin(1/x)$, достатъчно е да покажем, че тя няма дясна граница в точката $x=0$, което следва непосредствено от това, че на двете редици от стойности на аргумента $x_n=1/\pi n$ и $x_n'=1/(\pi/2+2\pi n)$ отговарят съответно редиците от стойности на функцията $f(x_n)=\sin\pi n=0$ и $f(x_n')=\sin(\pi/2+2\pi n)=1$, първата от които клони към нула, а втората — към единица.

Ще въведем понятието частично непрекъсната функция, което често се среща в математиката и нейните приложения.

Една функция се нарича ***частично непрекъсната*** *в сегмента $[a, b]$, ако е дефинирана навсякъде в този сегмент, непрекъсната е във всяка вътрешна точка с изключение евентуално на краен брой точки, в които има прекъсване от първи род, и има дясна граница в точката a и лява граница в точката b.*

Една функция се нарича ***частично непрекъсната в интервал (или върху безкрайната права),*** *ако е частично непрекъсната във всеки сегмент, принадлежащ на интервала (безкрайната права).*

Например функцията $f(x)=[x]$ е частично непрекъсната както във всеки сегмент, така и върху безкрайната права.

4.5.2. За точките на прекъсване на монотонна функция. Следващото твърдение хвърля светлина върху характера на точките на прекъсване на монотонните функции.

Теорема 4.9. *Ако функцията f, дефинирана в сегмента $[a, b]$, е монотонна в този сегмент, тя може да има само точки на прекъсване от първи род и множеството от точките ѝ на прекъсване е най-много изброимо множество.*

Доказателство. Според лемата, доказана в 4.2.1, една монотонна функция има крайни десни и леви граници във всички вътрешни точки на сегмента $[a, b]$ и освен това крайна дясна граница в точката a и крайна лява граница в точката b. Оттук следва, че точките на прекъсване на монотонна функция могат да бъдат само от първи род.

За да докажем втората част на теоремата — че точките на прекъсване са най-много изброимо множество, — ще приемем за определеност, че функцията f е ненамаляваща в сегмента $[a, b]$. Достатъчно е да се докаже, че точките на прекъсване в интервала (a, b), т. е. точките, които са вътрешни за сегмента $[a, b]$, са най-много изброимо много. Ще отбележим, че във всяка такава точка на прекъсване x за дясната и лявата граница е изпълнено неравенството $f(x+0)>f(x-0)$ (вж. забележката към посочената по-горе лема). Според лема 2 от глава 2 за всеки две различни реални числа съществува рационално число, заключено между тях.

Тъй като във всяка точка на прекъсване x е изпълнено неравенството $f(x+0)>f(x-0)$, то на всяка точка на прекъсване x може да се съпостави едно рационално число $r(x)$, удовлетворяващо неравенствата $f(x+0)>r(x)>f(x-0)$.

Ще отбележим, че при това на различните точки на прекъсване ще бъдат съпоставени различни рационални числа. Наистина, ако x_1 и x_2 са две точки на прекъсване, за които $x_1<x_2$, то понеже функцията е ненамаляваща, имаме $f(x_1+0)\leq f(x_2-0)$, откъдето $r(x_1)<r(x_2)$.

По такъв начин множеството от всички точки на прекъсване на функцията f, разположени вътре в сегмента $[a, b]$, е подмножество на множеството на рационалните числа, което, както видяхме в 2.7, е изброимо. □

4.6. Локални и глобални свойства на непрекъснатите функции

Локални свойства на една функция са тези, които са валидни в достатъчно малки околности на дадена точка от дефиниционната ѝ област. Тези свойства характеризират поведението на функцията, когато аргументът се приближава към изследваната точка. Например непрекъснатостта на функция в някоя точка на дефиниционната ѝ област е локално свойство на тази функция.

Глобални свойства са тези свойства, които функцията притежава в цялата си дефиниционна област. Например монотонността на функцията f в сегмента $[a, b]$ е нейно глобално свойство.

4.6.1. Локални свойства на непрекъснати функции. Ще въведем някои нови понятия. Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$.

Определение 1. *Функцията f се нарича* ***ограничена отгоре (отдолу)*** *в множеството $\{x\}$, ако съществува такова реално число M (реално число m), че за всяко $x\in\{x\}$ е изпълнено неравенството $f(x)\leq M$ ($f(x)\geq m$). Числото M (числото m) се нарича* ***горна (долна) граница*** *на функцията f в множеството $\{x\}$.*

Определение 2. *Функцията f се нарича* ***ограничена от двете страни*** *(или просто* ***ограничена****) в множеството $\{x\}$, ако в това множество тя е ограничена и отгоре, и отдолу, т. е. ако съществуват такива реални числа m и M, че за всяко $x\in\{x\}$ е изпълнено неравенството $m\leq f(x)\leq M$.*

Ограничеността на функцията f в множеството $\{x\}$ фактически означава ограниченост на множеството $\{f(x)\}$ от всички стойности на тази функция (отговарящи на стойностите на аргумента от множеството $\{x\}$).

Примери:

1. Функцията $f(x)=\operatorname{tg} x$ в интервала $(0, \pi/2)$ е ограничена отдолу (за долна граница може да се вземе число $m\leq 0$) и неограничена отгоре.

2. Функцията на Дирихле, равна на нула в ирационалните точки и на единица в рационалните точки, е ограничена (от двете страни) върху всяко множество $\{x\}$.

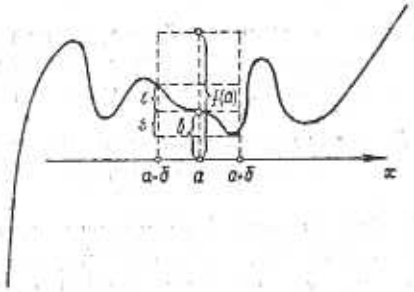
В сила е следната теорема за локална ограниченост на функции с крайни граници:

Теорема 4.10 (за локалната ограниченост на функции, имащи крайна граница). *Нека функцията f, дефинирана в множеството $\{x\}$, има крайна граница в точката a. Тогава съществува такова положително число δ, че функцията f е ограничена в множеството $B_\delta=\{x\}\cap(a-\delta, a+\delta)$.*

Доказателство. Нека границата на f в точката a е равна на b. Според определението на граница по Коши за положителното число $\varepsilon=1$ съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x от прободената δ-околност на точката a е изпълнено неравенството $|f(x)-b|<1$, или

$$b-1<f(x)<b+1. \tag{4.26}$$

Ако множеството $\{x\}$ не съдържа точката a, теоремата е доказана, тъй като в този случай неравенствата (4.26) показват, че за всяка точка от множеството B_δ стойностите на функцията f са заключени между числата $m=b-1$ и $M=b+1$.



Фиг. 4.19

Ако множеството $\{x\}$ съдържа точката a и стойността на функцията в тази точка е $f(a)$, то, като означим с m по-малкото от двете числа $b-1$ и $f(a)$, а с M по-голямото от $b+1$ и $f(a)$, ще получим, че за всички точки от множеството B_δ са изпълнени неравенствата

$$m \leq f(x) \leq M, \tag{4.27}$$

които показват, че функцията f е ограничена в множеството B_δ. □

Фиг. 4.19 илюстрира доказаната теорема.

Следствие. *Ако функцията f е непрекъсната в точката a, тя е ограничена върху множеството от всички стойности на аргумента си, принадлежащи на някоя δ-околност на точката a.*

Достатъчно е да отбележим, че функция, непрекъсната в точката a, има в тази точка крайна граница.

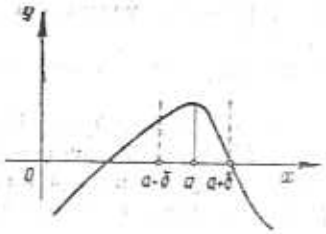
Теорема 4.11 (за неизменността на знака на функция, непрекъсната в точка). *Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, непрекъсната в точката $a \in \{x\}$ и стойността ѝ $f(a)$ е положителна (отрицателна). Тогава съществува такова положително число δ, че функцията f е положителна (отрицателна) навсякъде в множеството $B_\delta = \{x\} \cap (a-\delta, a+\delta)$.*

Доказателство. Според определението за непрекъснатост по Коши, каквото и да е положителното число ε, съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x от δ-околността на точката a да е изпълнено неравенството $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, или

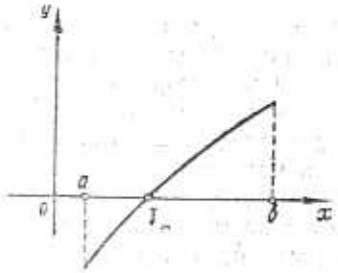
$$f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon. \tag{4.28}$$

Ако за ε вземем положителното число $|f(a)|/2$, то двете числа $f(a)-\varepsilon$ и $f(a)+\varepsilon$ ще са положителни при $f(a)>0$ и отрицателни при $f(a)<0$.

Затова неравенствата (4.28) означават, че за всички стойности на аргумента от δ-околността на точката a функцията f е положителна при $f(a)>0$ и отрицателна при $f(a)<0$. □



Фиг. 4.20



Фиг. 4.21

Фиг. 4.20 илюстрира теорема 4.11.

Теорема 4.11 лесно може да се формулира и за случаите, когато функцията f е непрекъсната в точката a само отдясно или само отляво.

Ще се уговорим да наричаме полусегмента $[a, a+\delta)$ *дясна δ-полуоколност на точката a*, а полусегмента $(a-\delta, a]$ — *лява δ-полуоколност на точката a*.

Теорема 4.11'. *Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, непрекъсната отдясно (отляво) в точката a от това множество и стойността ѝ $f(a)$ е различна от нула. Тогава съществува такова положително число $\delta>0$, че функцията f е различна от нула и има същия знак, както в точката a, за всички стойности на x от множеството $\{x\}$, принадлежащи на дясната (лявата) δ-полуоколност на точката a.*

За доказателството на тази теорема трябва дословно да се повтори доказателството на теорема 4.11, като се смени терминът „δ-околност на точката a" с термина „дясна (лява) δ-полуоколност на точката a".

Забележка 3. Към локалните свойства на непрекъснатите в дадена точка функции спадат и доказаните теореми 4.1 и 4.2 за непрекъснатост в дадена точка на сума, разлика, произведение и частно на две непрекъснати в тази точка функции и за непрекъснатост на сложна функция.

4.6.2. Глобални свойства на непрекъснати функции.

Теорема 4.12 (анулиране на непрекъсната функция при смяна на знака). *Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и стойностите ѝ в краищата на този сегмент $f(a)$ и $f(b)$ са числа с различни знаци. Тогава вътре в сегмента $[a, b]$ съществува точка ξ, за която $f(\xi)=0$.*

Доказателство. Без ограничение на общността можем да смятаме, че $f(a)<0$, $f(b)>0$. Нека $\{x\}$ е множеството от всички стойности на x от сегмента $[a, b]$, за които $f(x)<0$. Това мно-

жество не е празно (негов елемент е например точката $x=a$) и е ограничено отгоре (например от числото $x=b$).

Съгласно теорема 2.1 множеството $\{x\}$ има точна горна граница, която ще означим с ξ.

Точката ξ е вътрешна точка за сегмента $[a, b]$, тъй като от непрекъснатостта на функцията f в $[a, b]$ и от условията $f(a)<0$, $f(b)>0$ според теорема 4.11′ следва, че съществува дясна δ-полуоколност на точката a, в която $f(x)<0$, и лява δ-полуоколност на точката b, в която $f(x)>0$.

Ще се убедим, че $f(\xi)=0$. Ако това не е така, според теорема 4.11 ще съществува δ-околност $\xi-\delta<x<\xi+\delta$ на точката ξ, в която функцията f има един и същ знак. Но това е невъзможно, тъй като съгласно определението на точна горна граница съществува поне една стойност на x от полусегмента $\xi-\delta<x\leq\xi$, за която $f(x)<0$, а за всяка стойност x от интервала $\xi<x<\xi+\delta$ имаме $f(x)\geq 0$. Полученото противоречие доказва, че $f(\xi)=0$. □

Фиг. 4.21 илюстрира теорема 4.12.

Теорема 4.13 (преминаване на непрекъснатата функция през всяка междинна стойност). *Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Нека γ е произволно число между α и β. Тогава съществува точка ξ от сегмента $[a, b]$, за която $f(\xi)=\gamma$.*

Доказателство. Очевидно от доказателство се нуждае само случаят, когато $\alpha\neq\beta$ (в противен случай $\gamma=\alpha=\beta$ и например $\xi=a$). По същите причини отпадат и случаите, когато γ съвпада с едно от числата α или β.

Без ограничаване на общността можем да считаме, че $\alpha<\beta$, $\alpha<\gamma<\beta$. Да разгледаме функцията $\varphi(x)=f(x)-\gamma$. Тази функция е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ (като разлика на непрекъснати функции) и има в краищата му стойности с различни знаци:

$$\varphi(a)=f(a)-\gamma=\alpha-\gamma<0,\ \varphi(b)=f(b)-\gamma=\beta-\gamma>0.$$

Според теорема 4.12 в сегмента $[a, b]$ съществува такава вътрешна точка ξ, че $\varphi(\xi)=f(\xi)-\gamma=0$, т. е. $f(\xi)=\gamma$. Теорема е доказана.

Като използваме току-що доказаната теорема, ще се убедим във верността на забележка 2 от 4.2.2.

Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и съществува обратна функция на функцията f. Тогава f е строго монотонна в сегмента $[a, b]$.

Доказателство. От съществуването на обратна функция на f следва, че $f(a)\neq f(b)$. Нека $f(a)<f(b)$ ($f(a)>f(b)$). Ще покажем, че f строго монотонно расте (намалява) в сегмента $[a, b]$. Ще разгледаме случая $f(a)<f(b)$. (Ако $f(a)>f(b)$, разсъжденията са аналогични.) Най-напред ще установим верността на неравенството $f(x)<f(b)$ за всяко $x\in(a, b)$. Да допуснем противното — че съществува такова $x_1\in(a, b)$, че $f(x_1)>f(b)$. (Равенството $f(x_1)=f(b)$ е невъзможно поради съществуването на обратна функция на функцията f.) Като приложим теорема 4.13 за сегментите $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ и използваме следващите от $f(a)<f(b)<f(x_1)$ неравенства

$$f(a)<\frac{1}{2}(f(x_1)+f(b))<f(x_1),$$

$$f(x_1)>\frac{1}{2}(f(x_1)+f(b))>f(b),$$

се убеждаваме в съществуването на числа $\xi_1\in(a, x_1)$ и $\xi_2\in(x_1, b)$, за които $f(\xi_1)=f(\xi_2)=\frac{1}{2}(f(x_1)+f(b))$. И така $\xi_1\neq\xi_2$, но $f(\xi_1)=f(\xi_2)$, което противоречи на съществуването на обратна функция на функцията f в сегмента $[a, b]$.

Ще установим сега, че функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща в сегмента $[a, b]$. Да допуснем противното — че съществуват две числа $x_1<x_2$ от полусегмента $[a, b)$, за които $f(x_1)>f(x_2)$. Ще покажем, че това допускане води до противоречие. Като приложим теорема 4.13 за сегментите $[x_1, x_2]$ и $[x_2, b]$ и използваме следващите от $f(x_1)>f(x_2)$, $f(x_1)<f(b)$ неравенства

$$f(x_1)>\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))>f(x_2),$$

$$f(x_2)<\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))<f(b),$$

се убеждаваме в съществуването на такива числа $\xi_3\in(x_1, x_2)$ и $\xi_4\in(x_2, b)$, че $f(\xi_3)=f(\xi_4)=\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$. И така $\xi_3\neq\xi_4$, а $f(\xi_3)=f(\xi_4)$, което противоречи на съществуването на обратна функция на функцията f в сегмента $[a, b]$. Понеже условието $f(x_1)=f(x_2)$ за $x_1<x_2$ е също невъзможно, стигаме до извода, че $f(x_1)<f(x_2)$ за всеки $x_1<x_2$ от сегмента $[a, b]$. □

Теорема 4.14 (теорема на Вайерщрас). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тя е ограничена в този сегмент.*

Доказателство. Ще докажем, че функцията f е ограничена отгоре в сегмента $[a, b]$ (ограничеността отдолу се доказва аналогично).

Да допуснем, че f не е ограничена отгоре в сегмента $[a, b]$. Тогава за всяко естествено число n съществува поне една точка x_n от $[a, b]$, за която $f(x_n)>n$. (В противен случай f би била ограничена в сегмента $[a, b]$.)

Намерихме такава редица $\{x_n\}$ от сегмента $[a, b]$, че съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ е безкрайно голя-

ма. Според теоремата на Болцано — Вайерщрас (вж. 3.3.1, следствие 3 от теорема 3.16) от редицата $\{x_n\}$ може да се избере сходяща подредица $\{x_{k_n}\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ с граница някакво число ξ. Тъй като всички членове на редицата $\{x_{k_n}\}$ са от сегмента $[a, b]$, то и точката ξ принадлежи на този сегмент. От непрекъснатостта на функцията f в точката ξ следва, че подредицата от стойности на функцията $\{f(x_{k_n})\}$ клони към $f(\xi)$. Но това ни води до противоречие, тъй като редицата $\{f(x_{k_n})\}$ е безкрайно голяма като подредица на безкрайно голямата редица $\{f(x_n)\}$. □

Забележка 1. За интервал (или полусегмент) твърдението от теорема 4.14 не е вярно, т. е. от непрекъснатостта на функция в интервал (или полусегмент) не следва нейната ограниченост.

Пример: Функцията $f(x)=1/x$ в интервала $(0, 1)$ (или в полусегмента $(0, 1]$). Тази функция е непрекъсната в посочените множества, но не е ограничена. Наистина редицата $x_n=1/n$, $n=2, 3, 4, \cdots$, принадлежи на интервала $(0, 1)$ (полусегмента $(0, 1]$), а редицата от стойности на функцията $\{f(x_n)\}=\{n\}$ е безкрайно голяма.

Определение. *Числото M (m) се нарича* ***точна горна (точна долна) граница на функцията*** *f в множеството $\{x\}$, ако са изпълнени двете условия: 1) за всяка стойност на x от множеството $\{x\}$ е изпълнено неравенството $f(x)\leq M$ $(f(x)\geq m)$; 2) за всяко число $\varepsilon>0$ съществува такава стойност на x от множеството $\{x\}$, че за съответната стойност на функцията f е изпълнено неравенството*

$$f(x)>M-\varepsilon \qquad (f(x)<m+\varepsilon).$$

В даденото определение условието 1) означава, че числото M (числото m) е една от горните (долните) граници за функцията f в множеството $\{x\}$, а условието 2) означава, че тази граница е най-малката (най-голямата).

Точната горна граница M на функцията f в множеството $\{x\}$ се означава:

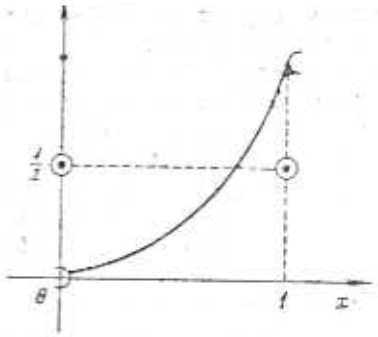
$$M=\sup_{\{x\}} f(x)=\sup\{f(x): x\in\{x\}\}.$$

Аналогично точната долна граница m на функцията $f(x)$ в множеството $\{x\}$ се означава със символа

$$m=\inf_{\{x\}} f(x)=\inf\{f(x): x\in\{x\}\}.$$

По-специално точната горна граница на функцията f в сегмента $[a, b]$ се означава по един от следните четири начина:

$$\sup_{a\leq x\leq b} f(x)=\sup_{x\in[a,b]} f(x)=\sup\{f(x): a\leq x\leq b\}=\sup\{f(x): x\in[a, b]\}.$$



Фиг. 4.22

Аналогично за точната долна граница:

$$\inf_{a\leq x\leq b} f(x)=\inf_{x\in[a,b]} f(x)=\inf\{f(x): a\leq x\leq b\}=\inf\{f(x): x\in[a, b]\}.$$

В сила са следните твърдения:

1. Ако функцията f е ограничена отгоре (отдолу) в множеството $\{x\}$, то тя има в това множество точна горна (точна долна) граница.

2. Ако функцията f е ограничена (от двете страни) в множеството $\{x\}$, то тя има в това множество както точна горна, така и точна долна граница.

Тези твърдения са пряко следствие от теорема 2.1, тъй като ограничеността отгоре (отдолу) на функцията f в множеството $\{x\}$ означава, че множеството от всички стойности на тази функция е ограничено отгоре (отдолу).

Следващият пример показва, че точните граници на една ограничена върху дадено множество функция в общия случай не се достигат.

Да разгледаме функцията f (вж. фиг. 4.22):

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } 0<x<1, \\ 1/2 & \text{при } x=0,\ x=1. \end{cases}$$

Тази функция е ограничена върху сегмента $[0, 1]$ и има в него точна горна граница $M=1$ и точна долна граница $m=0$. Обаче тези граници не се достигат: сред точките на сегмента $[0, 1]$ няма точки, в които стойностите на функцията да са равни на нула или единица.

Ще отбележим, че разглежданата функция f не е непрекъсната в сегмента $[0, 1]$ (тя има точки на прекъсване $x=0$ и $x=1$). Оказва се, че това обстоятелство не е случайно, тъй като е в сила следното твърдение:

Теорема 4.15 (втора теорема на Вайерщрас). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тя достига в този сегмент точната си горна и точната си долна граница, т. е. има такива точки x_1 и x_2 от сегмента $[a, b]$, че стойността $f(x_1)$ е равна на точната горна граница на f в сегмента $[a, b]$, а стойността $f(x_2)$ е равна на точната долна граница на f в сегмента $[a, b]$.*

Доказателство. Според първата теорема на Вайерщрас 4.14 функцията f е ограничена в сегмента $[a, b]$ и затова тя има в този сегмент точна горна граница M и точна долна граница m.

Ще се спрем на доказателството за достигане на точната горна граница M, тъй като достигането на точната долна граница m се доказва аналогично.

Да предположим, че функцията f не достига точната си горна граница, т. е. че във всички точки от сегмента $[a, b]$ функцията f има стойности, строго по-малки от M. Тогава да разгледаме функцията

$$F(x) = 1/(M-f(x)).$$

Знаменателят $M-f$ е непрекъсната и строго положителна в сегмента $[a, b]$ функция. Затова съгласно теорема 4.1 (за случая на частно) функцията F ще бъде непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Но според първата теорема на Вайерщрас 4.14 функцията F е ограничена в сегмента $[a, b]$, т. е. съществува такова положително число A, че $F(x)=1/(M-f(x))\leq A$ за всички x от сегмента $[a, b]$. Тъй като функцията $M-f$ е строго положителна в $[a, b]$, то последното неравенство е еквивалентно на неравенството $f(x)\leq M-1/A$ за всички x от $[a, b]$. Но последното противоречи на това, че M е точна горна граница, т. е. най-малката от всички горни граници на функцията f в сегмента $[a, b]$.

Тъй като получихме противоречие, направеното предположение, че точната горна граница не се достига, не е вярно. □

Забележка 2. След като доказахме, че всяка непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция достига точната си горна и точната си долна граница, можем да наречем точната горна граница M максимална стойност, а точната долна граница m — минимална стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$. Теорема 4.15 може да се формулира и така: Всяка непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция f има в този сегмент максимална и минимална стойност.

Максималната стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$ се означава с:

$$\max_{a\leq x\leq b} f(x) = \max_{x\in[a,\ b]} f(x)$$
$$=\max\{f(x): a\leq x\leq b\}=\max\{f(x): x\in[a,\ b]\}.$$

Аналогично за минималната стойност:

$$\min_{a\leq x\leq b} f(x) = \min_{x\in[a,\ b]} f(x)$$
$$= \min\{f(x): a\leq x\leq b\}=\min\{f(x): x\in[a,\ b]\}.$$

Забележка 3. Функция, която не е непрекъсната в даден сегмент, може да достигне в този сегмент точната си горна и точната си долна граница. Като пример може да се вземе функцията на Дирихле D, чиито стойности са равни на нула за всички ирационални x и на единица за всички рационални стойности на x. Тази функция е прекъсната във всяка точка на сегмента $[0, 1]$, но очевидно достига в този сегмент точната си горна граница, равна на единица, и точната си долна граница, равна на нула.

Забележка 4. Твърдението в теорема 4.15 не е вярно, ако във формулировката ѝ заменим термина „сегмент" с термина „интервал" или „полусегмент".

Така функцията $f(x)=x$ е непрекъсната в интервала $(0, 1)$ или в полусегмента $[0, 1)$, но не достига точната си горна граница $M=1$ в този интервал или полусегмент.

Трябва да добавим, че за функция, която е непрекъсната в интервал или полусегмент, точните граници могат дори да не съществуват, тъй като тя може да не е ограничена в този интервал или полусегмент (вж. забележка 1).

4.6.3. Понятие за равномерна непрекъснатост на функция. Нека функцията f е дефинирана в множество $\{x\}$, всяка точка на което е точка на сгъстяване за това множество. Примери за такова множество са сегмент, интервал, полусегмент, полуправа, безкрайната права и множеството на всички рационални числа, принадлежащи на всяко от изброените по-горе множества.

Определение. *Функцията f се нарича* ***равномерно непрекъсната в множеството*** *$\{x\}$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всеки две точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|<\delta$, е изпълнено неравенството*

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{4.29}$$

Забележка 1. Ако функцията f е равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$, то тя е непрекъсната във всяка точка x_0 на това множество. Наистина при $x''=x_0$ получаваме определението за непрекъснатост по Коши в точката x_0.

Забележка 2. В определението за равномерна непрекъснатост е основно изискването за всяко $\varepsilon>0$ да съществува универсално $\delta>0$, за което да е изпълнено неравенството (4.29) за всяка

двойка точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$.

Ако поискаме непрекъснатост на функцията f във всяка точка x_0 от множеството $\{x\}$, то за всяко $\varepsilon>0$ и за всяка точка x_0 на множеството $\{x\}$ се гарантира съществуването на „собствено" положително число $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$, което зависи не само от ε, но и от x_0 и осигурява верността на неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ за всички x от множеството $\{x\}$, които удовлетворяват условието $|x-x_0|<\delta(\varepsilon, x_0)$. При това може и да не съществува положителна точна долна граница на числата $\delta(\varepsilon, x_0)$ по всички точки x_0 на множеството $\{x\}$, т. е. равномерната непрекъснатост на функция върху множеството $\{x\}$ не следва от непрекъснатостта на тази функция във всяка точка x_0 от множеството $\{x\}$.

Забележка 3. От даденото определение за равномерна непрекъснатост непосредствено следва, че ако функцията f е равномерно непрекъсната върху множеството $\{x\}$, то тя е равномерно непрекъсната и върху всяко подмножество на множеството $\{x\}$.

Примери:

1. Функцията $f(x)=1/x$ е равномерно непрекъсната върху полуправата $x\geq 1$. Наистина за всеки две точки x' и x'' от тази полуправа е изпълнено

$$|f(x')-f(x'')|=|1/x'-1/x''|=|(x''-x')/x'x''|$$
$$=|x'-x''|/x'x''\leq|x'-x''|.$$

Ако за всяко $\varepsilon>0$ вземем $\delta=\varepsilon$, ще получим, че за всеки две точки x' и x'' от полуправата $[1,+\infty)$, удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$, е изпълнено неравенството $|f(x')-f(x'')|\leq\delta=\varepsilon$.

2. Функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ не е равномерно непрекъсната в интервала $(0, 1)$, въпреки че е непрекъсната във всяка точка на интервала $(0, 1)$. За да се убедим в това, е достатъчно да докажем, че за *някое* $\varepsilon>0$ и за *произволно малко* $\delta>0$ съществува поне една двойка точки x' и x'' от интервала $(0, 1)$, за които $|x'-x''|<\delta$, но $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$.

Да разгледаме две редици от точки $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, принадлежащи на интервала $(0, 1)$, с членове $x_n'=1/\pi n$, $x_n''=1/(2\pi n+\pi/2)$, $n=1, 2, 3, \ldots$

Тези две редици, а така и също и тяхната разлика са безкрайно малки редици. Затова за всяко произволно малко $\delta>0$ съществува такъв номер n, че $|x_n'-x_n''|<\delta$. Заедно с това за всеки номер n имаме

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=|\sin\pi n-\sin(2\pi n-\pi/2)|=1.$$

Следователно за $\varepsilon=1/2$ и произволно малко $\delta>0$ съществува двойка точки x_n' и x_n'' от интервала $(0, 1)$, за които

$$|x_n'-x_n''|<\delta \text{ и } |f(x_n')-f(x_n'')|=1>\varepsilon=1/2,$$

а това означава, че разглежданата функция не е равномерно непрекъсната в интервала $(0, 1)$.

Ще отбележим, че ако разгледаме същата функция $f(x)=\sin x^{-1}$ не в интервала $(0, 1)$, а в интервала $(\gamma, 1)$, където γ е произволно число от интервала $(0, 1)$, проведените разсъждения вече не са валидни. По-нататък ще покажем, че тази функция е равномерно непрекъсната в интервала $(\gamma, 1)$ за $0<\gamma<1$.

3. Функцията $f(x)=x^2$ не е равномерно непрекъсната върху полуправата $x\geq 1$.

Ще покажем, че не само за *някое* $\varepsilon>0$, а за всяко $\varepsilon>0$ и за всяко произволно малко $\delta>0$ съществува такава двойка точки x', x'' от полуправата $x\geq 1$, за която $|x'-x''|<\delta$, но $|f(x')-f(x'')|>\varepsilon$.

За всяка двойка точки x', x'' от полуправата $x\geq 1$ имаме

$$(4.30)\quad |f(x')-f(x'')|=|(x')^2-(x'')^2|=|x'-x''|\cdot|x'+x''|>|x'-x''|x'.$$

Фиксираме произволни $\varepsilon>0$ и $\delta>0$, вземаме за x' произволно число, по-голямо от единица и от $2\varepsilon/\delta$, и полагаме $x''=x'+\delta/2$. За такива x' и x'' е изпълнено неравенството $|x''-x'|=\delta/2<\delta$. От друга страна, според (4.30) за същите x' и x'' ще бъде изпълнено и неравенството

$$|f(x')-f(x'')|\geq(\delta/2)(2\varepsilon/\delta)=\varepsilon.$$

Ако разглеждаме обаче функцията $f(x)=x^2$ не върху полуправата $[1,+\infty)$, а в произволен сегмент $[1, b]$, където $b>1$ е произволно число, проведените разсъждения нямат място.

Това ще стане ясно от следната основна теорема:

Основна теорема 4.16 (теорема на Кантор*). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тя е равномерно непрекъсната в този сегмент.*

Доказателство. Да предположим, че функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, но не е равномерно непрекъсната. Тогава за някое $\varepsilon>0$ и за произволно малко $\delta>0$ съществуват две такива точки x' и x'' от сегмента $[a, b]$, че $|x'-x''|<\delta$, но $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$. Да изберем безкрайно малка редица от положителни числа $\delta_n=1/n$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Можем да твърдим, че за избраното $\varepsilon>0$ и за всеки номер n съществуват точки x_n' и x_n'' от сегмента $[a, b]$, за които

* Георг Кантор — немски математик (1845 — 1918).

(4.31) $$|x'_n - x''_n| < 1/n, \text{ но } |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Тъй като $\{x'_n\}$ е редица от точки на сегмента $[a, b]$, тя е ограничена и съгласно теоремата на Болцано — Вайерщрас (вж. следствие 3 от теорема 3.16) от нея може да се избере сходяща подредица $\{x'_{k_n}\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$. Границата ξ на тази подредица (според следствие 2 от теорема 3.13) също принадлежи на сегмента $[a, b]$. Лявото неравенство (4.31) показва, че съответната подредица $\{x''_{k_n}\}$ е също сходяща и има за граница точката ξ.

Понеже функцията f е непрекъсната във всяка точка на сегмента $[a, b]$, тя е непрекъсната и в точката ξ.* Но тогава според определението за непрекъснатост по Хайне двете подредици от съответните стойности на функцията $\{f(x'_{k_n})\}$ и $\{f(x''_{k_n})\}$ са сходящи с граница $f(\xi)$, т. е. разликата на тези подредици $\{f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})\}$ е безкрайно малка редица. Това противоречи на дясното неравенство (4.31), което е изпълнено за всички номера n и следователно и за всички номера k_n.

Полученото противоречие показва, че нашето допускане не е вярно. □

Ще се върнем сега към разгледания пример 2 и ще покажем, че функцията $f(x) = \sin x^{-1}$ е равномерно непрекъсната в интервала $(\gamma, 1)$ при всяко γ от интервала $(0, 1)$. Действително при всяко такова γ функцията $f(x) = \sin x^{-1}$ е непрекъсната в сегмента $[\gamma, 1]$. Следователно по теоремата на Кантор тя е равномерно непрекъсната в сегмента $[\gamma, 1]$. Съгласно забележка 3 към определението за равномерна непрекъснатост функцията $f(x) = \sin x^{-1}$ е равномерно непрекъсната и в интервала $(\gamma, 1)$, който е подмножество на сегмента $[\gamma, 1]$.

Теоремата на Кантор се формулира удобно чрез понятието осцилация на функция.

Нека функцията f е ограничена върху сегмента $[c, d]$. ***Осцилация на функцията*** *f в сегмента $[c, d]$ ще наричаме разликата $\omega = M - m$ между точната горна и точната долна граница на функцията f в този сегмент.*

За непрекъсната функция f в сегмента $[c, d]$ осцилацията е равна на разликата между максималната и минималната ѝ стойност в този сегмент.

От теоремата на Кантор 4.16 непосредствено се получава следното твърдение:

* Ако ξ съвпада с един от краищата на сегмента $[a, b]$, под непрекъснатост трябва да се разбира едностранна непрекъснатост.

Следствие от теорема 4.16. *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че осцилацията на функцията $f(x)$ във всеки сегмент с дължина, по-малка от δ, съдържащ се в сегмента $[a, b]$, е по-малка от ε.*

Забележка 4. Като анализираме доказателствата на теоремите 4.14 и 4.15 на Вайерщрас и 4.16 на Кантор, не е трудно да забележим, че в тези три теореми вместо сегмента $[a, b]$ може да се вземе произволно множество $\{x\}$, което удовлетворява условията: 1) множеството $\{x\}$ е ограничено; 2) множеството $\{x\}$ съдържа всичките си точки на сгъстяване (такова множество се нарича *затворено*).

Множество $\{x\}$, което удовлетворява посочените две условия, ще наричаме *компактно множество* или *компакт*. Следователно посочените три теореми (двете теореми на Вайерщрас и теоремата на Кантор) са в сила не само за функции, непрекъснати в сегмент, но и за функции, непрекъснати върху произволен компакт.

4.6.4. Модул на непрекъснатост на функция. Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в някакво множество $\{x\}$, всяка точка на което е точка на сгъстяване.

Определение. *За всяко $\delta > 0$* ***модул на непрекъснатост на функцията*** *$f(x)$ в множеството $\{x\}$ ще наричаме точната горна граница на разликата $|f(x') - f(x'')|$ по всички точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x' - x''| \leq \delta$.*

Модулът на непрекъснатост на функцията f в множеството $\{x\}$ е прието да се означава със символа $\omega(f; \delta)$, т. е.

(4.32) $$\omega(f; \delta) = \sup \{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \leq \delta,\ x', x'' \in \{x\}\}.$$

Ще отбележим две свойства на модула на непрекъснатост $\omega(f; \delta)$.

1°. Модулът на непрекъснатост $\omega(f; \delta)$ е винаги неотрицателен.

Това свойство следва непосредствено от определението за модул на непрекъснатост (4.32).

2°. Модулът на непрекъснатост $\omega(f; \delta)$ е ненамаляваща функция на δ върху полуправата $\delta > 0$.

Действително при намаляване на δ множеството, по което се взема супремумът (4.32), се стеснява, а супремум върху част от множество не надминава супремума върху цялото множество.

Примери:

Ще пресметнем модулите на непрекъснатост на някои функции.

1. Ще сметнем модула на непрекъснатост на функцията $f(x) = x^2$ в сегмента $[0, 1]$.

Нека x' и x'' са такива две произволни точки от сегмента $[0, 1]$, че $|x'-x''|\leqq\delta$, където $0<\delta<1$. Тогава очевидно $x'-\delta\leqq x''\leqq x'+\delta$ и получаваме

$$|f(x')-f(x'')|=|(x')^2-(x'')^2|\leqq(x')^2-(x'-\delta)^2=2\delta x'-\delta^2\leqq 2\delta-\delta^2.$$

От последното неравенство имаме

$$\omega(f;\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:|x'-x''|<\delta,\ x',x''\in\{x\}\}\leqq 2\delta-\delta^2.$$

От друга страна, като вземем $x'=1$ и $x''=1-\delta$, получаваме

$$f(x')-f(x'')=1-(1-\delta)^2=2\delta-\delta^2.$$

Следователно $\omega(f;\delta)=\omega(x^2;\delta)=2\delta-\delta^2\leqq 2\delta$.

2. Ще сметнем модула на непрекъснатост на функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ в интервала $(0, 1)$.

Тъй като

$$|f(x')-f(x'')|=|\sin(1/x')-\sin(1/x'')|\leqq|\sin(1/x')|+|\sin(1/x'')|\leqq 2,$$

то $\omega(f;\delta)\leqq 2$.

От друга страна, като вземем две безкрайно малки редици $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ от точки в интервала $(0, 1)$ от вида

$$x_n'=1/(2\pi n+\pi/2),\quad x_n''=1/(2\pi n-\pi/2),$$

където $n=1, 2, 3, \ldots$, за всяко $\delta>0$ можем да изберем такъв номер n, че $0<x_n'<\delta$, $0<x_n''<\delta$ и $|x_n'-x_n''|\leqq\delta$, при което

$$f(x_n')-f(x_n'')=\sin(1/x_n')-\sin(1/x_n'')=2.$$

Оттук следва, че $\omega(f;\delta)=\omega(\sin x^{-1};\delta)=2$.

3. Модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)=1/x$ в интервала $(0, 1)$ е равен на $+\infty$.

Фиксираме произволно $\delta>0$ и разглеждаме само тези точки x' и x'', които удовлетворяват съотношенията $0<x'\leqq\delta$, $x''=\delta$, така че $|x'-x''|\leqq\delta$. Очевидно

$$\omega(x^{-1};\delta)\geqq\sup\{1/x'-1/\delta:\ 0<x'<\delta\}=+\infty.$$

Ще докажем една теорема, която свързва равномерната непрекъснатост на функцията f върху множеството $\{x\}$ с модула на непрекъснатост на тази функция върху същото множество.

Теорема 4.17. *За да бъде функцията f равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$, е необходимо и достатъчно модулът ѝ на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$ в това множество да удовлетворява съотношението*

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0. \tag{4.33}$$

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$. Трябва да се докаже, че е изпълнено съотношението (4.33), т. е. че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова число $\delta_\varepsilon>0$, че за всяко δ, удовлетворяващо условието $0<\delta<\delta_\varepsilon$, да е изпълнено неравенството $\omega(f;\delta)<\varepsilon$.

Според определението за равномерна непрекъснатост за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta_\varepsilon>0$, че за всички x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|<\delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$. Но това означава, че за всяко δ от интервала $0<\delta<\delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството

$$\omega(f;\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:|x'-x''|\leqq\delta,\ x',x''\in\{x\}\}\leqq\varepsilon/2<\varepsilon.$$

Достатъчност. Нека е изпълнено съотношението (4.33), т. е. за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta_\varepsilon>0$, че за всяко δ, удовлетворяващо условието $0<\delta<\delta_\varepsilon$, да е изпълнено неравенството $\omega(f;\delta)<\varepsilon$.

От определението на модул на непрекъснатост следва, че за всички x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|\leqq\delta<\delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, а това означава, че функцията f е равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$. □

По-рано пресметнахме модулите на непрекъснатост на три функции: функцията x^2 в сегмента $[0, 1]$ и функциите $\sin x^{-1}$ и $1/x$ в интервала $(0, 1)$.

Тъй като $\omega(x^2;\delta)=2\delta-\delta^2$, $\omega(\sin x^{-1};\delta)=2$, $\omega(1/x;\delta)=+\infty$, от теорема 4.17 следва, че функцията x^2 е равномерно непрекъсната в сегмента $[0, 1]$, а функциите $\sin x^{-1}$ и $1/x$ не са равномерно непрекъснати в интервала $(0, 1)$.

4.7. Понятието компактност на множество

4.7.1. Отворени и затворени множества. Нека $\{x\}$ е произволно множество от реални числа.

Определение 1. *Точката x на множеството $\{x\}$ се нарича* ***вътрешна точка*** *за това множество, ако съществува такова положително число δ, че δ-околността на точката x да се съдържа в множество $\{x\}$.*

Определение 2. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***отворено,*** *ако всяка негова точка е вътрешна точка за множеството.*

Примери за отворени множества са интервалите, отворената полуправа, безкрайната права и обединението на няколко непресичащи се интервала.

Определение 3. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***затворено,*** *ако неговото допълнение (т. е. разликата $(-\infty,+\infty)\setminus\{x\}$) е отворено множество.*

Определение 3'. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***затворено,*** *ако съдържа всичките си точки на сгъстяване.*

Ще се убедим, че за произволни числови множества определенията 3 и 3' са еквивалентни.

1. Нека множеството $\{x\}$ е допълнение на отворено множество. Ще докажем, че всяка точка на сгъстяване на това множество $\{x\}$ му принадлежи.

Наистина, ако предположим, че точката на сгъстяване x не принадлежи на множеството $\{x\}$, то x ще принадлежи на допълнението на множеството $\{x\}$, което е отворено множество. Но тогава x ще принадлежи на това отворено множество заедно с някоя своя δ-околност, т. е. някоя δ-околност на точката x няма да съдържа точки от множеството $\{x\}$. Последното противоречи на това, че x е точка на сгъстяване за множеството $\{x\}$.

2. Нека сега всяка точка на сгъстяване x на множеството $\{x\}$ принадлежи на това множество. Ще докажем, че множеството $\{x\}$ е допълнение на отворено множество. Нека x е произволна точка от допълнението на множеството $\{x\}$. Трябва да се докаже, че в допълнението се съдържа и някоя δ-околност на точката x.

Ако това не е така, то всяка δ-околност на точката x ще съдържа точки от множеството $\{x\}$, т. е. точката x ще бъде точка на сгъстяване за множеството $\{x\}$ и по условие принадлежи към него, което противоречи на това, че x е точка от допълнението на множеството $\{x\}$.

4.7.2. Покритие на множество със система от отворени множества

Определение 1. *Ще казваме, че системата $\{\Sigma_\alpha\}$ от множества Σ_α е* ***покритие*** *на множеството $\{x\}$, ако всяко от множествата Σ_α е отворено и всяка точка x от множеството $\{x\}$ принадлежи на поне едно от множествата на системата $\{\Sigma_\alpha\}$.*

Ще докажем две забележителни леми за покритие на множество със системи от отворени множества.

Лема на Хайне — Борел* за сегмент. *От всяко покритие на сегмента $[a, b]$ може да се избере крайна подсистема, която също е покритие на този сегмент.*

Доказателство. Ако системата $\{\Sigma_\alpha\}$ е покритие на сегмента $[a, b]$ и не е безкрайна, лемата е доказана. Нека системата $\{\Sigma_\alpha\}$ е покритие на сегмента $[a, b]$ и е безкрайна.

Допускаме, че системата $I=[a, b]$ не може да се покрие от краен брой множества на системата $\{\Sigma_\alpha\}$. Ако разделим този сегмент наполовина, поне една от двете му половини също не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. Да означим тази половина с I_1. Разделяме I_1 наполовина и получаваме,

* Емил Борел — френски математик (1871—1956).

че поне едната от двете половини на I_1 (означаваме я с I_2) не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$.

Продължавайки така, ще получим система от включващи се сегменти $\{I_n\}$, всеки от които не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. Дължината на n-тия сегмент I_n е 2^{-n}-та част от дължината на основния сегмент и клони към нула при $n\to\infty$.

Съгласно следствието от теорема 3.15 (вж. 3.2.2) съществува, и то единствена точка c, съдържаща се във всички сегменти I_n. Понеже тази точка c се съдържа и в сегмента $I=[a, b]$, то в системата $\{\Sigma_\alpha\}$ има множество Σ_{α_0}, което съдържа точката c. От това, че множеството Σ_{α_0} е отворено, следва съществуването на такова $\delta>0$, че δ-околността на точката c, т. е. интервалът $(c-\delta, c+\delta)$, също принадлежи на множеството Σ_{α_0}.

Тъй като всички сегменти I_n съдържат точката c и дължината им клони към нула при $n\to\infty$, можем да твърдим, че съществува такъв номер n_0, че при $n\geqq n_0$ всички сегменти I_n се съдържат в интервала $(c-\delta, c+\delta)$.

Но това означава, че всеки сегмент I_n при $n\geqq n_0$ може да бъде покрит само от множеството Σ_{α_0} на сегмента $\{\Sigma_\alpha\}$. Така стигнахме до противоречие с това, че нито един от сегментите I_n не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. □

Ще докажем сега едно по-общо твърдение.

Лема на Хайне — Борел за затворено ограничено множество. *От всяко покритие на затворено ограничено множество $\{x\}$ може да се избере крайна подсистема, също образуваща покритие на множеството $\{x\}$.*

Доказателство. Нека $\{x\}$ е затворено ограничено множество, а $\{\Sigma_\alpha\}$ — система от отворени множества, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.

Тъй като множеството $\{x\}$ е ограничено, има сегмент $[a, b]$, който го съдържа. Означаваме със Σ_β отвореното множество, което е допълнение на затвореното множество $\{x\}$. Тогава обединението на системата $\{\Sigma_\alpha\}$ с отвореното множество Σ_β образува покритие на сегмента $[a, b]$. Според лемата на Хайне — Борел за сегмент от това покритие може да се избере крайна подсистема, образуваща покритие на сегмента $[a, b]$.

Ако множеството Σ_β влиза в тази крайна подсистема, като го изключим от нея, ще получим крайна подсистема на системата $\{\Sigma_\alpha\}$, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.*

Ако множеството Σ_β не влиза в крайната подсистема, образуваща покритие на сегмента $[a, b]$, то тази крайна подсистема

* Множеството Σ_β е допълнение към множеството $\{x\}$ и не съдържа нито една точка от множеството $\{x\}$.

ще се състои от множества Σ_n на системата $\{\Sigma_n\}$ и ще образува крайно покритие на множеството $\{x\}$, което се съдържа в сегмента $[a, b]$. □

4.7.3. Понятието компактност на множество. Нека $\{x\}$ е произволно множество от реални числа.

Определение 1. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***компактно множество*** (или ***компакт***), *ако от всяка система, образуваща покритие на множеството $\{x\}$, може да се избере крайна подсистема, която е също покритие на множеството $\{x\}$.*

В забележка 4 на 6.3 беше дадено друго определение за компактно множество. Ще напомним неговата формулировка.

Определение 1'. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***компактно***, *ако е затворено и ограничено.*

Ще докажем, че за произволни числови множества определенията 1 и 1' са еквивалентни.

1. Нека множеството $\{x\}$ е затворено и ограничено. Тогава от лемата на Хайне — Борел следва, че от всяко покритие на множеството $\{x\}$ може да се избере крайна подсистема, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.

2. Нека множеството $\{x\}$ е такова, че от всяко негово покритие да може да се избере крайна подсистема, образуваща също покритие на $\{x\}$.

Ще докажем, че множеството $\{x\}$ е затворено и ограничено.

Най-напред ще докажем затвореността на множеството $\{x\}$. Достатъчно е да се докаже, че допълнението D на множеството $\{x\}$ е отворено множество.

Нека y е произволна точка от допълнението D. Трябва да се докаже, че съществува δ-околност на точката y, която се съдържа в допълнението D.

Нека x е произволна точка на множеството $\{x\}$. Тъй като $x \neq y$, то числото $\delta(x) = |x-y|/2$ е положително и $\delta(x)$-околностите на точките x и y

$$\Sigma_x = (x-\delta(x),\ x+\delta(x)),\quad \Psi_x = (y-\delta(x),\ y+\delta(x))$$

не се пресичат.

Понеже системата от отворени множества $\{\Sigma_x\}$, съответстващи на всички точки x от множеството $\{x\}$, образува покритие на множеството $\{x\}$, то от тази система може да се избере крайна подсистема $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.

Означаваме с $\Psi_{x_1}, \Psi_{x_2}, \ldots, \Psi_{x_n}$ съответната крайна подсистема от δ-околности на точката y. Най-малката от тези δ-околности ще се съдържа във всички множества $\Psi_{x_1}, \Psi_{x_2}, \ldots, \Psi_{x_n}$ и няма да има общи точки нито с едно от множествата $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$. Но тогава, тъй като подсистемата $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$ образува покритие на множеството $\{x\}$, посочената най-малка δ-околност на точката y няма да съдържа точки от множеството $\{x\}$, т. е. изцяло ще се съдържа в допълнението D на множеството $\{x\}$.

С това е доказано, че множеството D е отворено, и следователно множеството $\{x\}$ е затворено.

Сега ще докажем, че множеството $\{x\}$ е ограничено. Ако това не е така, ще съществува редица $\{x_n\}$ от точки на множеството $\{x\}$, удовлетворяващи условието

$$|x_n| > n,\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тъй като тази редица няма крайна точка на сгъстяване, то всяка точка x_n има δ-околност Σ_{x_n}, несъдържаща други точки от редицата $\{x_n\}$.

Очевидно, че от системата отворени множества $\{\Sigma_{x_n}\}$, образуваща покритие на множеството от точки $\{x_n\}$, не може да се избере крайна подсистема, образуваща покритие на всички точки $\{x_n\}$.

Тъй като множеството $\{x_n\}$ е подмножество на $\{x\}$, то няма да може и от всяка система отворени множества, образуващи покритие на множеството $\{x\}$, да се избере крайна подсистема, покриваща множеството $\{x\}$. Полученото противоречие доказва ограничеността на множеството $\{x\}$.

4.8. Горна и долна функция на Бер*

Нека в сегмента $[a, b]$ е дефинирана функцията f, която приема както крайни, така и безкрайни стойности.

Избираме произволна точка x_0 от сегмента $[a, b]$ и произволно положително число δ и означаваме с $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$ съответно точната долна и точната горна граница функцията f в множеството от тези точки на сегмента $[a, b]$, които принадлежат на интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, т. е. полагаме

$$m_\delta(x_0) = \inf\{f(x) : x \in [a, b],\ x_0-\delta < x < x_0+\delta\},$$

$$M_\delta(x_0) = \sup\{f(x) : x \in [a, b],\ x_0-\delta < x < x_0+\delta\}.$$

Очевидно, че за всяко $\delta > 0$

$$m_\delta(x_0) \leq f(x_0) \leq M_\delta(x_0). \tag{4.34}$$

Ако положителното число δ намалява, то $m_\delta(x_0)$ не намалява а $M_\delta(x_0)$ не нараства. Затова съществуват границите

$$m(x_0) = \lim_{\delta\to 0} m_\delta(x_0),\quad M(x_0) = \lim_{\delta\to 0} M_\delta(x_0),$$

* Р. Бер — френски математик (1874 — 1932).

при това очевидно са изпълнени неравенствата

$$m_\delta(x_0) \leq m(x_0) \leq f(x_0) \leq M(x_0) \leq M_\delta(x_0).$$

Определение 1. *Функциите M и m се наричат съответно* ***горна и долна функция на Бер*** *за функцията f.*

Теорема. *Нека функцията f е крайна* (т. е. приема крайна стойност) *в точката x_0. Тогава, за да бъде функцията f непрекъсната в точката x_0, е необходимо и достатъчно да е изпълнено равенството*

$$M(x_0) = m(x_0).$$

Доказателство. 1. *Необходимост.* Нека функцията f е непрекъсната в точката x_0. Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и намираме такова $\delta > 0$, че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. С други думи, ако $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Но оттук следва, че

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m_\delta(x_0) \leq M_\delta(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

(тъй като $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$ са точната долна и точната горна граница на функцията f в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$).

Следователно

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m(x_0) \leq M(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

От последните неравенства поради произволния избор на $\varepsilon > 0$ получаваме

$$M(x_0) = m(x_0) = f(x_0).$$

2. *Достатъчност.* Ако $M(x_0) = m(x_0)$, то очевидно $M(x_0) = m(x_0) = f(x_0)$ и общата стойност на функциите на Бер в точката x_0 е крайна.

Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и вземаме такова $\delta > 0$, че

$$m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leq m(x_0),\ M(x_0) \leq M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Тези неравенства показват, че

$$f(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0),\ M_\delta(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Ако точката x принадлежи на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то, както видяхме, стойността $f(x)$ лежи между $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$. Затова, ако x принадлежи на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

С други думи, за всички x от $[a, b]$, за които $|x - x_0| < \delta$, е изпълнено неравенството $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т. е. функцията f е непрекъсната в точката x_0. □

Забележка. За дефиниционна област на функцията f вместо сегмента $[a, b]$ може да се вземе произволно множество $\{x\}$, за което точката x_0 е точка на сгъстяване.

Определение 2. *Функцията f, дефинирана в сегменти $[a, b]$, се нарича* ***полунепрекъсната отгоре*** (***отдолу***) *в точката x_0 от сегмента $[a, b]$, ако**

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0) \quad (\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0)).$$

В това определение не се предполага крайност на функцията $f(x)$ нито в точката x_0, нито в другите точки от сегмента $[a, b]$. По-специално функцията $f(x)$ е полунепрекъсната отгоре (отдолу) във всяка точка x_0, където

$$f(x_0) = M(x_0) \quad [f(x_0) = m(x_0)].$$

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, то тя е и полунепрекъсната и отгоре, и отдолу в тази точка. Обратно, ако функцията е крайна в точката x_0 и полунепрекъсната както отгоре, така и отдолу в точката x_0, тя е непрекъсната в тази точка.

Тези твърдения са друга формулировка на твърденията, съдържащи се в доказаната по-рано теорема за горната и долната функция на Бер.

* За всяка редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, различни от x_0, която клони към x_0, разглеждаме $\overline{\lim_{n \to \infty}} f(x_n)$. Най-голямата от $\overline{\lim_{n \to \infty}} f(x_n)$ означаваме с $\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x)$. Аналогично се определя $\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x)$. Например

$$\overline{\lim_{x \to 0}} \sin x^{-1} = 1,\ \underline{\lim_{x \to 0}} \sin x^{-1} = -1,$$

$$\overline{\lim_{x \to 0}} (x^{-2} \sin x^{-1}) = +\infty,\ \underline{\lim_{x \to 0}} (x^{-2} \sin x^{-1}) = -\infty.$$

5. Диференциално смятане

В тази глава ще бъдат въведени основните понятия производна и диференциал на функция. Ще установим основните правила за диференциране и ще пресметнем производните на всички основни елементарни функции. В края на главата ще бъдат разгледани производни и диференциали от по-висок ред и въпросът за диференциране на функции, зададени параметрично.

5.1. Понятие за производна

5.1.1. Нарастване на функция. Диференчна форма на условието за непрекъснатост. Да разгледаме функцията f, дефинирана в интервала (a, b).* Нека x е произволна точка от интервала (a, b), а Δx е произволно число, толкова малко, че числото $x+\Delta x$ също да принадлежи на интервала (a, b). Числото Δx ще наричаме нарастване на аргумента.

Нарастване на функцията *f в точката x, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, ще наричаме числото*

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x). \tag{5.1}$$

Така за функцията $y=\sin x$ нарастването ѝ в точката x, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, е

$$\Delta \sin x=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2). \tag{5.2}$$

В сила е следното твърдение:

За да бъде функцията f непрекъсната в точката x, е необходимо и достатъчно нарастването $\Delta f(x)$ на тази функция в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, да бъде безкрайно малко при $\Delta x \to 0$.

* За дефиниционна област на функцията вместо интервала (a, b) може да се вземе всяко гъсто в себе си множество $\{x\}$.

Действително според определението за непрекъснатост на функцията f в точката x трябва да имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x). \tag{5.3}$$

Съгласно 3.4.4 съществуването на границата (5.3) е еквивалентно на това, че функцията $[f(x+\Delta x)-f(x)]$ на аргумента Δx е безкрайно малка при $\Delta x \to 0$.

Доказаното твърдение позволява условието за непрекъснатост на функцията f в точката x да се изкаже в следната форма: *Функцията f е непрекъсната в точката x, ако нарастването $\Delta f(x)$ на тази функция в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, е безкрайно малко при $\Delta x \to 0$, т. е. ако*

$$\lim_{\Delta x\to 0} [f(x+\Delta x)-f(x)]=0. \tag{5.4}$$

Условието (5.4) ще наричаме ***диференчна форма*** *на условието за непрекъснатост на функцията f в точката x.* Това условие нееднократно ще използваме по-нататък.

С помощта на условието (5.4) още веднъж ще се убедим, че функцията $\sin x$ е непрекъсната във всяка точка x от безкрайната права. Наистина от (5.2), от условието $|\cos(x+\Delta x/2)|\leq 1$ и от равенството $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \sin(\Delta x/2)=0$ непосредствено следва, че $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x)=0$.

5.1.2. Определение на производна. Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b), x фиксирана точка от този интервал и Δx е нарастване на аргумента, за което $x+\Delta x$ принадлежи също на интервала (a, b).

Ще смятаме, че $\Delta x \neq 0$, и ще разгледаме в избраната точка x частното на функцията f в тази точка и съответното нарастване на аргумента Δx:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{5.5}$$

Частното (5.5) ще наричаме ***диференчно частно*** (в дадената точка x). Тъй като x е фиксирано, диференчното частно (5.5) е функция на аргумента Δx. Тази функция е дефинирана за всички стойности на аргумента Δx от някоя достатъчно малка δ-околност на точката $\Delta x=0$ с изключение на точката $\Delta x=0$, т. е. дефинирана е навсякъде в достатъчно малка прободена δ-околност на точката $\Delta x=0$. Това ни дава право да разглеждаме въпроса за съществуване на граница на тази функция при $\Delta x \to 0$ $(\Delta x \neq 0)$.

Определение 1. ***Производна на функцията*** *f в дадена точка x се нарича границата на диференчното частно (5.5) при $\Delta x \to 0$ (при условие, че тази граница съществува).*

Производната на функцията f в дадена точка x ще означаваме със символа $f'(x)$.

И така по определение

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Ако функцията има производна във всяка точка x на интервала (a, b), то тази производна ще бъде също функция на аргумента x, дефинирана в интервала (a, b).

Примери:

1. $f(x)=C=\text{const}$. Очевидно производната $f'(x)$ на тази функция е тъждествено равна на нула, тъй като нарастването на функцията $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ е равно на нула за всяко x и всяко Δx.

2. $f(x)=x$. За тази функция диференчното частно (5.5) е

$$\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Оттук следва, че производната на тази функция е равна на единица във всяка точка x от безкрайната права.

Напълно аналогично на понятията дясна и лява граница на функция в дадена точка се въвеждат понятията дясна и лява производна на функцията f в дадена точка x.

Определение 2. ***Дясна (лява) производна на функцията*** *f в дадена точка x се нарича дясната (лявата) граница на диференчното частно (5.5) в точката $\Delta x=0$ (при условие, че тази граница съществува).*

За означаване на дясната (лявата) производна на функцият f в точката x се използва символът $f'(x+0)$ ($f'(x-0)$).

От съпоставянето на определенията 1 и 2 и от свойството на дясна и лява граница на функция, установено в 3.4.2, следват твърденията:

1) *Ако функцията f има в точката x производна $f'(x)$, то тази функция има в точката x както дясна, така и лява производна и $f'(x+0)=f'(x-0)=f'(x)$.*

2) *Ако функцията f има в точката x дясна и лява производна и ако тези производни са равни помежду си, то функцията f има в точката x производна $f'(x)$ и $f'(x)=f'(x+0)=f'(x-0)$.*

В допълнение на твърдение 2) ще отбележим, че ако функцията f има дясна и лява производна в точката x, но тези производни не са равни помежду си, то функцията няма производна в точката x. Иначе ще получим противоречие с твърдение 1). Пример за такава функция е

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{при } x\geq 0,\\ -x & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Тази функция има в точката $x=0$ дясна производна, равна на $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x/\Delta x)=1$, и лява производна, равна на $\lim\limits_{\Delta x\to 0}((-\Delta x)/\Delta x)=-1$, но няма производна в точката $x=0$.

5.1.3. Геометричен смисъл на производната. Да разгледаме графиката на функцията f, дефинирана и непрекъсната в интервала (a, b).

Избираме произволна точка x от интервала (a, b) и даваме нарастване $\Delta x\neq 0$ на аргумента x, толкова малко, че числото $x+\Delta x$ да принадлежи също на интервала (a, b). Нека M и P са точки от графиката на функцията f с абсциси, съответно равни на x и $x+\Delta x$ (вж. фиг. 5.1). Точките M и P ще имат очевидно координати

$$M(x,\ f(x)),\ P(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x)).$$

Правата, минаваща през точките M и P от графиката на функцията f, ще наричаме *секуща*. Понеже точката M е фиксирана, то ъгълът, който всяка секуща MP сключва с оста Ox, е функция на аргумента Δx (тъй като стойността на Δx еднозначно определя точката P от графиката на функцията f). Ще означим ъгъла между секущата MP и оста Ox със символа $\varphi(\Delta x)$.

Определение. *Ако съществува гранично положение на секущата MP, когато точката P клони към точката M по графиката на функцията (т. е. когато $\Delta x\to 0$), то това гранично положение се нарича* ***допирателна*** *към графиката на функцията f в точката M от тази графика.*

От това определение следва, че за да съществува допирателна към графиката на функцията f в точката M, е достатъчно да съществува границата $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\varphi_0$, при това тази граница φ_0 е равна на ъгъла, който допирателната сключва с оста Ox.

Ще докажем следното твърдение:

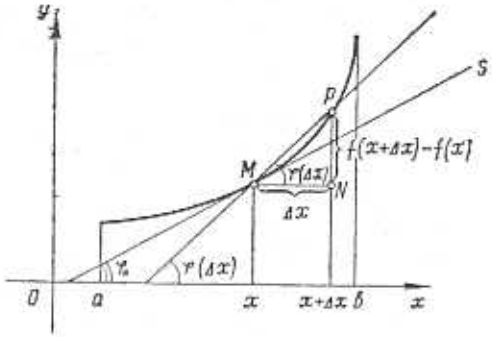
Ако функцията f има в дадена точка x производна, то съществува допирателна към графиката на функцията f в точката $M(x,\ f(x))$ и ъгловият коефициент на тази допирателна (т. е. тангенсът на ъгъла, който тя сключва с оста Ox) е равен на производната $f'(x)$.

Спускаме от точките M и P перпендикуляри към абсцисната ос (вж. фиг. 5.1). Прекарваме права през точката M, успоредна на абсцисната ос, и означаваме с N точката на пресичане на тази права с перпендикуляра, спуснат от P към абсцисната ос. От триъгълника MNP имаме

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

така че

$$\varphi(\Delta x)=\operatorname{arc\,tg}(\Delta y/\Delta x). \tag{5.6}$$



Фиг. 5.1

Ще се убедим, че съществува граница на дясната (а следователно и на лявата) страна на (5.6) при $\Delta x \to 0$. Действително от съществуването на производната $f'(x)$ следва съществуването на границата $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta f(x)/\Delta x) = f'(x)$. Оттук и от непрекъснатостта на функцията $\operatorname{arc\,tg} u$ за всички u следва, че съществува границата на дясната страна на (5.6) и тя е равна на $\operatorname{arc\,tg} f'(x)$.

И така доказахме, че съществува границата

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arc\,tg} f'(x).$$

Но това означава, че съществува гранично положение на секущите, т. е. съществува допирателната към графиката на функцията в точката $M(x, f(x))$ и ъгълът φ_0 между тази допирателна и оста Ox е равен на $\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} f'(x)$. Следователно ъгловият коефициент на тази допирателна $\operatorname{tg} \varphi_0$ е равен на $f'(x)$. С това твърдението е доказано.

5.2. Понятие за диференцируемост на функция

5.2.1. Определение за диференцируемост на функция. Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b), x е произволно число от този интервал, Δx е такова нарастване на аргумента, че $x + \Delta x$ принадлежи също на интервала (a, b) и $f(x + \Delta x) - f(x)$ е нарастването на функцията в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx.

Определение. *Функцията f се нарича* ***диференцируема*** *в точката x, ако нарастването $\Delta f(x)$ на тази функция в точка-*

та x, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, може да се представи във вида

$$\Delta f(x) = A \,.\, \Delta x + \alpha(\Delta x) \,.\, \Delta x, \tag{5.7}$$

където A е число, независещо от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ е функция на аргумента Δx, безкрайно малка в точката $\Delta x = 0$.

В точката $\Delta x = 0$ функцията $\alpha(\Delta x)$ е неопределена и можем да ѝ припишем в тази точка произволна стойност. За в бъдеще ще бъде удобно да считаме $\alpha(0) = 0$. Така функцията α ще бъде непрекъсната в точката $\Delta x = 0$ и равенството (5.7) може да се разпространи и за стойността $\Delta x = 0$.

Забележка. Второто събираемо в дясната страна на (5.7) $\alpha(\Delta x) \,.\, \Delta x$ може да се запише във вида $o(\Delta x)$*. Наистина, тъй като и двете функции $\alpha = \alpha(\Delta x)$ и Δx са безкрайно малки в точката Δx, то и произведението им е безкрайно малка функция в точката $\Delta x = 0$ от по-висок ред, отколкото Δx (вж. 3.4.5). Тогава (5.7) може да се запише във вида

$$\Delta f(x) = A \Delta x + o(\Delta x).$$

Ще докажем следното твърдение:

Теорема 5.1. *За да бъде функцията f диференцируема в точката x, е необходимо и достатъчно тя да има в тази точка крайна производна $f'(x)$.*

Доказателство. *1. Необходимост.* Нека функцията f е диференцируема в точката x, т. е. нарастването ѝ $\Delta f(x)$ в тази точка, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, е представимо във вида (5.7). Като разделим (5.7) на Δx (приемаме, че $\Delta x \neq 0$), получаваме

$$\Delta f(x)/\Delta x = A + \alpha(\Delta x). \tag{5.8}$$

Дясната (следователно и лявата) страна на (5.8) има граница, равна на A, в точката $\Delta x = 0$. Остава да отбележим, че границата при $\Delta x \to 0$ на лявата страна на (5.8) (в случай че тя съществува) по определение е равна на производната $f'(x)$.

И така доказахме, че ако за функцията f е в сила представянето (5.7), то тази функция има в точката x производна $f'(x)$ и $f'(x) = A$.

2. Достатъчност. Нека съществува крайна производна $f'(x)$, т. е. съществува крайната граница

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x). \tag{5.9}$$

Да означим със символа $\alpha(\Delta x)$ разликата $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x)$, т. е. да положим

* Ще напомним, че символът $o(\Delta x)$ означава безкрайно малка функция от по-висок ред от Δx в точката $\Delta x = 0$.

$$\alpha(\Delta x)=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f'(x). \tag{5.10}$$

От съществуването на границата (5.9) следва, че функцията $\alpha(\Delta x)$, определена от (5.10), има граница при $\Delta x \to 0$, равна на нула.

Като умножим съотношението (5.10) с Δx, ще получим представянето

$$\Delta f(x)=f'(x).\Delta x+\alpha(\Delta x).\Delta x,$$

което съвпада с представянето (5.7) при $A=f'(x)$. □

С това е доказано, че от съществуването на крайна производна $f'(x)$ следва диференцируемостта на функцията f в точката x, при това в условието за диференцируемост (5.7) числото A съвпада с $f'(x)$.

Доказаната теорема позволява да отъждествяваме диференцируемост на функция в дадена точка със съществуване на производна на тази функция в тази точка.

Операцията намиране на производна ще наричаме *диференциране*.

5.2.2. Диференцируемост и непрекъснатост. Лесно се доказва следното твърдение:

Теорема 5.2. *Ако функцията f е диференцируема в дадена точка x, тя е непрекъсната в тази точка.*

Доказателство. Тъй като функцията f е диференцируема в точката x, то за нарастването ѝ $\Delta f(x)$ в тази точка е валидно представянето (5.7), от което следва, че $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$, а това означава, че функцията f е непрекъсната в точката x (според диференчната форма на условието за непрекъснатост (5.4). □

Ще отбележим, че обратното твърдение на теорема 5.2 не е вярно, т. е. от непрекъснатостта на функцията f в дадена точка x не следва диференцируемостта ѝ в тази точка.

За пример може да служи функцията $y=|x|$, която е очевидно непрекъсната в точката $x=0$, но няма в тази точка производна.

Ще отбележим, че съществуват функции, непрекъснати във всяка точка на даден интервал, но нямащи производна нито в една точка на този интервал. (Първият пример за такава функция е бил построен от Вайерщрас. Един пример на такава функция е даден в допълнението към глава 10.)

5.2.3. Понятие за диференциал на функция. Разглеждаме функцията f, диференцируема в дадена точка x. Нарастването $\Delta f(x)$ на такава функция в точката x може да се представи във вида (5.7).

Ще отбележим, че нарастването (5.7) е сума от две събираеми, първото от които $A.\Delta x$ е линейно относно Δx, а второто $\alpha(\Delta x).\Delta x$ в точката $\Delta x=0$ е безкрайно малка функция от по-висок ред, отколкото Δx.

Ако числото A, равно съгласно теорема 5.1 на производната $f'(x)$, е различно от нула, то първото събираемо $A\Delta x=f'(x)\Delta x$ представлява ***главната част*** на нарастването $\Delta f(x)$ на диференцируемата функция f. Тази главна част на нарастването е линейна хомогенна функция на аргумента* Δx и се нарича ***диференциал*** на функцията f.

В случай че $A=f'(x)=0$, диференциалът на функцията се приема равен на нула по определение.

И така диференциалът на функцията f в дадена точка x, отговарящ на нарастване на аргумента Δx, се означава със символа df и

$$df=f'(x)\Delta x. \tag{5.11}$$

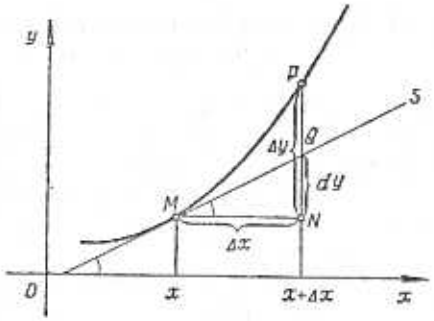
Когато $f'(x)\neq 0$, това число представлява главната част на нарастването на функцията f, която е линейна и хомогенна относно нарастването на аргумента Δx.

Веднага ще отбележим, че диференциалът df и нарастването Δf на функцията f в дадена точка, отговарящи на едно и също нарастване на аргумента Δx, изобщо не са равни помежду си. Това лесно се вижда от графиката на f (вж. фиг. 5.2). Нека M и P са точки от графиката на функцията f, отговарящи съответно на аргумента x и $x+\Delta x$, MS е допирателната към графиката в точката M, $MN \parallel Ox$, $NP \parallel Oy$, Q е пресечната точка на допирателната MS с правата PN. Тогава нарастването Δf на функцията f в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, е очевидно равно на дължината на отсечката NP, а диференциалът df на функцията в точката x, отговарящ на същото нарастване на аргумента Δx, е равен на дължината на отсечката NQ. (Това непосредствено следва от формула (5.11) и от факта, че в правоъгълния триъгълник MQN отсечката MN е равна на Δx, а тангенсът на ъгъла QMN е равен на $f'(x)$.) Ясно е, че дължините на отсечките NP и NQ в общия случай са различни.

Много удобно е да се въведе и понятието ***диференциал на аргумента*** x, но трябва да се различават двата случая: 1) когато аргументът x е независима променлива, и 2) когато аргументът x е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя нова променлива t, която можем да считаме независима.

Ще се уговорим в случая, когато аргументът x е независима променлива, да отъждествяваме диференциала на този аргумент dx

* Ще напомним, че линейна функция на аргумента t се нарича функция от вида $y=At+B$, където A и B са константи. В случай че $B=0$, линейната функция се нарича хомогенна.



Фиг. 5.2

с нарастването* му Δx, т. е. ще считаме, че $dx=\Delta x$. Като следствие на тази уговорка равенство (5.11) приема вида

$$df=f'(x)\,.\,dx. \tag{5.12}$$

По такъв начин в случая, когато аргументът x е независима променлива, за диференциала на функцията f е валидно представянето (5.12).

По-нататък в 5.3.3 ще докажем, че представянето (5.12) има универсален характер и е валидно и в случая, когато аргументът x не е независима променлива, а е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t. (В този случай във формулата (5.12) dx не трябва да се смята равно на Δx, тъй като от казаното по-горе имаме $dx=\varphi'(t)\,dt$.)

5.3. Диференциране на сложна функция и обратна функция

5.3.1. Диференциране на сложна функция. Ще установим правило за намиране производната на сложна функция $y=f(\varphi(t))$ в точката t при условие, че са известни производните на съставящите я функции φ и f съответно в точките t и $x=\varphi(t)$.

Теорема 5.3. *Нека функцията φ е диференцируема в точката t, а функцията f е диференцируема в съответната точка $x=\varphi(t)$. Тогава сложната функция $f(\varphi(t))$ е диференцируема в точката t и производната ѝ в тази точка е*

$$\{f(\varphi(t))\}'=f'(x)\,.\,\varphi'(t)=f'(\varphi(t))\,\varphi'(t). \tag{5.13}$$

* Тази уговорка се съгласува с разглеждането на независимата променлива x като функция от вида $f(x)=x$, за която $f'(x)\,.\,\Delta x=\Delta x$, т. е. $dx=\Delta x$.

Доказателство. Да дадем на аргумента на функцията φ в дадена точка t произволно, различно от нула нарастване Δt. На това нарастване отговаря нарастването $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$ на функцията $x=\varphi(t)$, при това нарастването Δx може да бъде и нула.

На нарастването Δx отговаря нарастване $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ на функцията f в съответната точка $x=\varphi(t)$. Тъй като функцията f по условие е диференцируема в точката $x=\varphi(t)$, то нарастването ѝ Δf в тази точка може да се представи във вида

$$\Delta f=f'(x)\,.\,\Delta x+\alpha(\Delta x)\,.\,\Delta x, \tag{5.14}$$

където $\alpha(\Delta x)$ клони към нула при $\Delta x\to 0$.

Ще подчертаем, че както беше казано в 5.2.1, представянето (5.14) е в сила и при $\Delta x=0$.

Разделяме (5.14) на $\Delta t\neq 0$ и получаваме

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\alpha(\Delta x)\,.\,\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{5.15}$$

Ще докажем, че дясната (следователно и лявата) страна на (5.15) има граница при $\Delta t\to 0$, равна на дясната страна на (5.13). С това ще бъдат доказани диференцируемостта на сложната функция и формула (5.13) за нейната производна.

От диференцируемостта на функцията $x=\varphi(t)$ в точката t следва, че частното $\Delta x/\Delta t$ има граница при $\Delta t\to 0$, равна на $\varphi'(t)$. Остава да се докаже, че функцията $\alpha(\Delta x)$ при $\Delta t\to 0$ клони към нула, което непосредствено следва от това, че $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и че $\Delta x\to 0$ при $\Delta t\to 0$, въз основа на диференчната форма на условията за непрекъснатост на диференцируемата в точката t функция $x=\varphi(t)$. И така цялата дясна страна на (5.15) има граница при $\Delta t\to 0$ и тази граница е равна на дясната страна на (5.13). Теоремата е доказана.

Забележка 1. Теорема 5.3 и съдържащото се в нея правило за пресмятане на производна на сложна функция могат да се пренесат последователно за сложни функции, които са суперпозиции на три и повече функции. Така за сложна функция, която е суперпозиция на три функции $F(f(\varphi(t)))$, правилото за диференциране има вида

$$\{F(f(\varphi(t)))\}'=F'(f(\varphi(t)))\,.\,f'(\varphi(t))\,.\,\varphi'(t), \tag{5.16}$$

при което формулата (5.16) е валидна, ако функцията φ е диференцируема в точката t, функцията f е диференцируема в съответната точка $\varphi(t)$, а функцията $F(u)$ е диференцируема в съответната точка $f(\varphi(t))$.

5.3.2. Диференциране на обратна функция

Теорема 5.4. *Нека функцията f расте (намалява) и е непрекъсната в някоя околност на точката x. Нека освен това тази функция е диференцируема в точката x и производната ѝ $f'(x)$ е различна от нула. Тогава в някоя околност на съответната точка $y=f(x)$ е дефинирана функцията $x=f^{-1}(y)$, обратна на функцията f, която е диференцируема в точката $y=f(x)$ и за производната ѝ в точката y е валидна формулата*

$$\{f^{-1}(y)\}'=1/f'(x). \tag{5.17}$$

Доказателство. Понеже функцията f е строго монотонна и непрекъсната в някоя околност на точката x, то според теорема 4.5 (вж. 4.2) обратната ѝ функция f^{-1} е дефинирана, строго монотонна и непрекъсната в някоя околност на съответната точка $y=f(x)$.

Даваме на аргумента на обратната функция в точката y произволно, достатъчно малко и различно от нула нарастване Δy. На това нарастване Δy отговаря нарастване на обратната функция $\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)$ в съответната точка $y=f(x)$, което поради строгата монотонност на функцията е различно от нула.

Това ни дава право да напишем следното тъждество*:

$$\Delta x/\Delta y=1/(\Delta y/\Delta x). \tag{5.18}$$

Нека сега в тъждеството (5.18) нарастването Δy клони към нула. Тогава съгласно диференчната форма на условието за непрекъснатост на обратната функция $x=f^{-1}(y)$ в съответната точка $y=f(x)$ нарастването на тази функция Δx ще клони също към нула. Ще се убедим, че в този случай съществува граница на дясната страна на (5.18), равна на дясната страна на (5.17). С това ще бъде доказано, че същата граница има и лявата страна на (5.18), т. е. че обратната функция има производна в съответната точка $y=f(x)$ и за тази производна е вярно равенството (5.17).

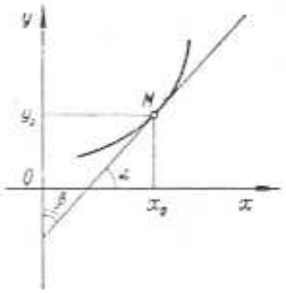
И така, за да завършим доказателството на теоремата, остава да се убедим, че дясната страна на (5.18) има граница при $\Delta x\to 0$, равна на $1/f'(x)$, където x е дадената точка.

Тъй като $x=f^{-1}(y)$, $\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)$, то $x+\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)$, т. е. $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ и $\Delta y=f(x+\Delta x)-y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Оттук следва, че дясната страна на (5.18) може да бъде записана във вида

$$1/(\Delta y/\Delta x)=1/\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right).$$

* Това тъждество може да се напише за всеки две числа Δy и Δx, различни от нула.



Фиг. 5.3

От последното равенство съгласно определението за производна $f'(x)$ и предположението $f'(x)\neq 0$ веднага следва, че границата на дясната страна на (5.18) съществува при $\Delta x\to 0$ и е равна на $1/f'(x)$. Теоремата е доказана.

Примери за приложение на доказаната теорема ще бъдат дадени в следващия параграф.

Доказаната теорема има просто геометрично тълкуване. Нека M е точка от графиката на функцията $y=f(x)$, отговаряща на дадена стойност на аргумента x (вж. фиг. 5.3). Тогава очевидно производната $f'(x)$ е равна на тангенса на ъгъла α, който допирателната в точката M сключва с оста Ox, а производната на обратната функция $\{f^{-1}(y)\}'$ в съответната точка $y=f(x)$ е равна на тангенса на ъгъла β, който тази допирателна сключва с оста Oy. Тъй като сумата на ъглите α и β е равна на $\pi/2$, то формулата (5.17) изразява очевидния факт: $\operatorname{tg}\beta=1/\operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha+\beta=\pi/2$.

5.3.3. Инвариантност на формата на първия диференциал. В 5.2.3 се убедихме, че когато аргументът x на диференцируемата функция f е независима променлива, за диференциала df на тази функция имаме представянето (5.12)

$$df=f'(x)\,.\,dx.$$

Сега ще докажем, че представянето (5.12) е универсално и е в сила и в случая, когато аргументът x е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t. Това свойство на диференциала на функциите е прието да се нарича ***инвариантност на неговата форма.***

И така нека аргументът x на диференцируемата функция f е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t. В този случай f може да се разглежда като сложна функция от вида $f(\varphi(t))$ на аргумента t. Понеже този аргумент t

е независима променлива, то за сложната функция $f(\varphi(t))$ и за функцията $x=\varphi(t)$ диференциалите са представими във формата (5.12), т. е. във вида

(5.19) $$df=\{f(\varphi(t))\}'dt, \quad dx=\varphi'(t)\,dt.$$

По правилото за диференциране на сложна функция

(5.13) $$\{f(\varphi(t))\}'=f'(x)\,.\,\varphi'(t).$$

Замествайки (5.13) в първата от формулите (5.19), получаваме

(5.20) $$df=f'(x)\varphi'(t)\,dt.$$

Като съпоставим полученото равенство (5.20) с второто от равенствата от (5.19), получаваме окончателно за df израза

$$df=f'(x)\,dx,$$

който съвпада с представянето (5.12). □

Забележка. Може да се даде и друга еквивалентна формулировка на свойството инвариантност на формата на първия диференциал, непосредствено следваща от универсалността на представянето (5.12): *Производната на диференцируемата функция f е равна на отношението на диференциала на тази функция df и диференциала на аргумента ѝ dx, т. е. се определя от равенството*

(5.21) $$f'(x)=df/dx,$$

както в случая, когато аргументът x е независима променлива, така и в случая, когато самият аргумент x е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t.

Универсалността на представянето на производната (5.21) позволява да се използва отношението df/dx за означаване на производната на функцията f относно аргумента x.

5.3.4. Приложение на диференциала за намиране на приближени формули. Нека за простота аргументът x на функцията f е независима променлива. В 5.2.3 показахме, че диференциалът df на функцията f в общия случай не е равен на нарастването Δf на тази функция. Обаче с точност до безкрайно малка функция от по-висок ред в сравнение с Δx е изпълнено следното приближено равенство:

(5.22) $$\Delta f\approx df.$$

Частното $(\Delta f-df)/\Delta x$ е естествено да се нарича относителна грешка на равенството (5.22). Тъй като $\Delta f-df=o(\Delta x)$, то относителната грешка на неравенството (5.22) става произволно малка при намаляване на $|\Delta x|$.

Съотношението (5.22) позволява да заменяме с известно приближение нарастването Δf на диференцируема функция f с диференциала df на тази функция. Целесъобразността на тази замяна се оправдава с това, че диференциалът df е линейна функция на Δx, докато нарастването Δf в общия случай е по-сложна функция на аргумента Δx.

Като вземем пред вид, че $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$, $df=f'(x)\,dx$, можем да запишем приближеното равенство (5.22) във вида $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x$ или във вида

(5.23) $$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,.\,\Delta x.$$

Приближеното равенство (5.23), също както и (5.22), е валидно за всяка диференцируема функция f в дадена точка x с точност до величината $o(\Delta x)$, която е безкрайно малка от по-висок ред, отколкото Δx.

Това приближено равенство позволява с грешка $o(\Delta x)$ да се замени функцията f в малка околност на точката x (т. е. за малки Δx) с линейната функция на аргумента Δx от дясната страна на (5.23). Приближената формула (5.23) се използва много често в практиката.

5.4. Диференциране на сума, разлика, произведение и частно на функции

Теорема 5.5. *Ако всяка от функциите u и v е диференцируема в дадена точка x, то сумата, разликата, произведението и частното на тези функции (частното при условие, че $v(x)\neq 0$) са също диференцируеми в тази точка и са в сила формулите*

(5.24) $$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x),$$
$$[u(x)\,.\,v(x)]'=u'(x)\,.\,v(x)+u(x)\,.\,v'(x),$$
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\,v(x)-u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказателство. Ще разгледаме поотделно случаите на сума (разлика), произведение и частно.

1°. Нека $y(x)=u(x)\pm v(x)$. Означаваме с Δu, Δv и Δy нарастванията на функциите u, v и y в точката x, отговарящи на нарастване на аргумента Δx. Тогава очевидно

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]$$
$$-[u(x)\pm v(x)]=[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]=\Delta u\pm\Delta v.$$

Следователно

(5.25) $$\Delta y/\Delta x=\Delta u/\Delta x\pm\Delta v/\Delta x.$$

Нека сега $\Delta x \to 0$. От съществуването на производните на функциите u и v в точката x следва, че съществува граница на дясната страна на (5.25), която е равна на $u'(x) \pm v'(x)$. Следователно съществува граница (при $\Delta x \to 0$) и на лявата страна на (5.25). Според определението за производна тази граница е равна на $y'(x)$ и така получаваме $y'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

2°. Нека $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Запазвайки за Δu, Δv и Δy същия смисъл, ще имаме

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x)\, v(x)$$
$$= (u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)\, v(x)) + (u(x+\Delta x)\, v(x) - u(x)\, v(x))$$

(прибавяме и изваждаме събираемото $u(x+\Delta x)\, v(x)$).

По-нататък можем да запишем

$$\Delta y = u(x+\Delta x)(v(x+\Delta x) - v(x)) + v(x)(u(x+\Delta x) - u(x))$$
$$= u(x+\Delta x) \cdot \Delta v + v(x)\, \Delta u,$$

така че

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{5.26}$$

Нека сега $\Delta x \to 0$. Тогава от диференцируемостта на функциите u и v в точката x следва, че съществуват границите на отношенията $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ и са съответно равни на $u'(x)$ и $v'(x)$. По-нататък от диференцируемостта на функцията u в точката x и от теорема 5.2 следва непрекъснатостта на u в тази точка. Следователно съществува границата $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x)$ и тя е равна на $u(x)$.

Тогава съществува границата на дясната страна на (5.26) при $\Delta x \to 0$ и тя е равна на $u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$.

Следователно съществува и граница (при $\Delta x \to 0$) на лявата страна на (5.26). Според определението на производна тази граница е равна на $y'(x)$ и получаваме търсената формула $y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

3°. Нека накрая $y(x) = u(x)/v(x)$. Понеже $v(x) \neq 0$, съгласно теорема 4.11 за постоянството на знака на непрекъснатите функции $v(x+\Delta x) \neq 0$ за всички достатъчно малки Δx и можем да напишем, че

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$= \frac{u(x+\Delta x)\, v(x) - v(x+\Delta x)\, u(x)}{v(x) \cdot v(x+\Delta x)}.$$

Като прибавим и извадим в числителя събираемото $u(x) \cdot v(x)$, ще получим

$$\Delta y = \frac{[u(x+\Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)] - [v(x+\Delta x)\, u(x) - u(x)\, v(x)]}{v(x) \cdot v(x+\Delta x)}$$
$$= \frac{v(x)[u(x+\Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x) \cdot v(x+\Delta x)} = \frac{v(x)\, \Delta u - u(x)\, \Delta v}{v(x) \cdot v(x+\Delta x)},$$

така че

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x) \cdot v(x+\Delta x)}. \tag{5.27}$$

Нека сега $\Delta x \to 0$. От диференцируемостта (и следващата от нея непрекъснатост) на функциите u и v в точката x следва съществуването на границите:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)}{\Delta x} = v'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x).$$

Тъй като $v(x) \neq 0$, границата на дясната страна на (5.27) при $\Delta x \to 0$ съществува и е равна на

$$\frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Следователно границата (при $\Delta x \to 0$) и на лявата страна на (5.27) съществува. По определението за производна тази граница е равна на $y'(x)$, откъдето получаваме търсената формула

$$y'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}. \quad \square$$

Следствие. *Ако за функциите u и v в дадена точка x са изпълнени същите предположения, както и в теорема 5.5, то в тази точка x са вярни следните равенства за диференциалите:*

$$\begin{cases} d(u \pm v) = du \pm dv, \\ d(uv) = v\, du + u\, dv \\ d(u/v) = (v\, du - u\, dv)/v^2. \end{cases} \tag{5.28}$$

За доказателството на (5.28) е достатъчно да се умножат равенствата (5.24) с dx и да се използва универсалното представяне (5.12) на диференциала на произволна функция f.

5.5. Производни на основните елементарни функции

Вече знаем, че ***основни елементарни функции*** са: показателната функция $y = a^x$ и логаритмичната функция $y = \log_a x$, разглеждани за всяка фиксирана стойност на a, такава, че $0 < a \neq 1$;

степенната функция $y=x^{\alpha}$, където α е фиксирано реално число; четирите тригонометрични функции sin, cos, tg и ctg и четирите обратни тригонометрични функции arc sin, arc cos, arc tg и arc ctg.

В този параграф ще пресметнем и систематизираме в таблица производните на всички основни елементарни функции.

5.5.1. Производни на тригонометричните функции

1°. Производна на функцията $y=\sin x$. Тъй като за тази функция

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2),$$

то при всяко $\Delta x\neq 0$ диференчното частно ще има вида

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos(x+\Delta x/2)\,.\,\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\,.$$

По определението на производна

$$(5.29)\quad (\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\cos(x+\Delta x/2)\,.\,\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\right\}.$$

Поради непрекъснатостта на функцията $y=\cos x$ във всяка точка x на безкрайната права имаме

$$(5.30)\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x.$$

По-нататък, като използваме първата забележителна граница, с елементарната смяна на променалвата $t=\Delta x/2$ получаваме

$$(5.31)\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

От съществуването на границите (5.30), (5.31) и от теоремата за граница на произведение на две функции следват съществуването на граница на дясната страна на (5.29) и равенството

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\cos(x+\Delta x/2)\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\right\}=\cos x,$$

или

$$(5.32)\qquad (\sin x)'=\cos x$$

за всяка точка x от безкрайната права.

2°. Производна на функцията $y=\cos x$. Тъй като за всяка точка x от безкрайната права

$$\cos x=\sin(\pi/2-x),$$

то по правилото за диференциране на сложна функция и по формула (5.32) имаме

$$(\cos x)'=(\sin(\pi/2-x))'=\cos(\pi/2-x)\,.\,(\pi/2-x)'$$
$$=\cos(\pi/2-x)\,.\,(-1)=-\sin x,$$

или

$$(5.33)\qquad (\cos x)'=-\sin x.$$

3°. Производна на функцията $y=\operatorname{tg} x$. Тъй като $\operatorname{tg} x=\sin x/\cos x$, то по правилото за диференциране на частно и от (5.32) и (5.33) във всяка точка x, в която $\cos x\neq 0$, ще имаме

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\,.\,\cos x-(\cos x)'\,.\,\sin x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

И така

$$(3.34)\qquad (\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$$

във всяка точка $x\neq\pi n+\pi/2$, където $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

4°. Производна на функцията $y=\operatorname{ctg} x$. Понеже $\operatorname{ctg} x=\cos x/\sin x$, като използваме правилото за диференциране на частно и (5.32), (5.33), за всяка точка x, в която $\sin x\neq 0$, ще имаме

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\,.\,\sin x-(\sin x)'\,.\,\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Получихме

$$(5.35)\qquad (\operatorname{ctg} x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\operatorname{ctg}^2 x)$$

във всяка точка $x\neq\pi n$, където $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

5.5.2. Производна на логаритмичната функция. Нека $y=\log_a x$, където $0<a\neq 1$ и $x>0$ е фиксирана точка. Тогава за всяко достатъчно малко $\Delta x\neq 0$ имаме

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{x}\,.\,\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}.$$

По определението на производна

$$(5.36)\qquad (\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}.$$

Като използваме втората забележителна граница и елементарната смяна на променливата $t=\Delta x/x$, имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e. \tag{5.37}$$

От съществуването на границата (5.37) и от непрекъснатостта на функцията $y=\log_a x$ в точката x следва, че границата в дясната страна на (5.36) съществува и е равна на $\frac{1}{x}\log_a e$.

И така

$$(\log_a x)'=x^{-1}\log_a e \tag{5.38}$$

за всяко $0<a\neq 1$ и $x>0$.

По-специално при $a=e$ имаме

$$(\ln x)'=1/x \text{ за всяко } x>0.$$

5.5.3. Производни на показателната и обратните тригонометрични функции. За намирането на производните на тези функции ще използваме теорема 5.4 за диференциране на обратна функция, доказана в 5.3.2.

1°. Производна на функцията $y=a^x$, $0<a\neq 1$. Тъй като функцията $y=a^x$, дефинирана върху цялата безкрайна права $-\infty<x<+\infty$, е обратна на функцията $x=\log_a y$, дефинирана от своя страна върху полуправата $0<y<+\infty$, и за функцията $x=\log_a y$ в околност на всяка точка от полуправата $0<y<+\infty$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4, то функцията $y=a^x$ е диференцируема във всяка точка $x=\log_a y$ и за производната ѝ е вярна формулата

$$(a^x)'=1/(\log_a y)'=1/(y^{-1}\log_a e)=y/\log_a e$$

(използвахме израза (5.38) за производна на логаритмичната функция).

От последното равенство и от равенствата $y=a^x$, $1/\log_a e=\ln a$ получаваме окончателно

$$(a^x)'=a^x.\ln a \tag{5.39}$$

за всяка точка x от безкрайната права.

По-специално при $a=e$ имаме

$$(e^x)'=e^x.$$

2°. Производна на функцията $y=\arcsin x$. Функцията $y=\arcsin x$ е дефинирана в интервала $-1<x<1$ и е обратна на функцията $x=\sin y$, дефинирана в интервала $-\pi/2<y<\pi/2$. За функцията $x=\sin y$ в околност на всяка точка y от интервала $-\pi/2<y<\pi/2$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\arccos x$ е диференцируема във всяка точка $x=\sin y$ и производната ѝ имаме формулата

$$(\arcsin x)'=1/(\sin y)'=1/\cos y=1/\sqrt{1-\sin^2 y}. \tag{5.40}$$

Използвахме равенството (5.32) със знак „+" пред корена, понеже $\cos y$ е положителен в интервала $-\pi/2<y<\pi/2$.

Като вземем пред вид, че $\sin y=x$, от (5.40) получаваме окончателно

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(за всички x от интервала $-1<x<1$).

3°. Производна на функцията $y=\arccos x$. Функцията $y=\arccos x$ е дефинирана в интервала $-1<x<1$ и е обратна на функцията $x=\cos y$, дефинирана в интервала $0<y<\pi$. За функцията $x=\cos y$ в околност на всяка точка y от интервала $0<y<\pi$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\arccos x$ е диференцируема във всяка точка $x=\cos y$ и производната ѝ е

$$(\arccos x)'=1/(\cos x)'=1/(-\sin x)=-1/\sqrt{1-\cos^2 y}. \tag{5.41}$$

Тук използвахме равенството (5.33) със знак „+" пред корена понеже $\sin y$ е положителен в интервала $0<y<\pi$.

От това, че $\cos y=x$, и от (5.41) получаваме

$$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

за всички x от интервала $-1<x<1$.

4°. Производна на функцията $y=\operatorname{arctg} x$. Функцията $y=\operatorname{arctg} x$ е дефинирана върху безкрайната права $-\infty<x<\infty$ и е обратна на функцията $x=\operatorname{tg} y$, дефинирана в интервала $-\pi/2<y<\pi/2$. За функцията $x=\operatorname{tg} y$ в околност на всяка точка y от интервала $-\pi/2<y<\pi/2$ са изпълнени условията на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\operatorname{arctg} x$ е диференцируема във всяка точка $x=\operatorname{tg} y$ и за производната ѝ имаме формулата

$$(\operatorname{arctg} x)'=1/(\operatorname{tg} y)'=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

(използвахме съотношението (5.34)).

И така

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

за всяка точка x от безкрайната права.

5⁰. Производна на функцията $y=\operatorname{arc\,ctg} x$. Функцията $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ е дефинирана върху безкрайната права $-\infty<x<+\infty$ и е обратна на функцията $x=\operatorname{ctg} y$, дефинирана в интервала $0<y<\pi$. За функцията $x=\operatorname{ctg} y$ в околност на всяка точка y от интервала $0<y<\pi$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ е диференцируема във всяка точка $x=\operatorname{tg} y$ и за производната ѝ в тази точка имаме

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'}=\frac{1}{-(1+\operatorname{ctg}^2 x)}=\frac{-1}{1+x^2}$$

(използвахме (5.35)).

Така

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$$

за всяка точка x от безкрайната права.

5.5.4. Производна на степенната функция. Нека $y=x^\alpha$, където α е произволно реално число и x е произволна точка от полуправата $0<x<+\infty$. В глава 4 вече разгледахме степенната функция $y=x^\alpha$ като суперпозиция на логаритмичната и показателната функция:

$$y=x^\alpha=(a^{\log_a x})^\alpha=a^{\alpha\log_a x}$$

(където a е произволно фиксирано число, по-голямо от единица).

По правилото за диференциране на сложната функция $y=a^u$, където $u=\alpha\log_a x$, ще получим

$$y'=(a^u)'\,.\,(\alpha\log_a x)'=a^u\ln a\,.\,\alpha\,x^{-1}\log_a e$$
$$=a^{\alpha\log_a x}\,.\,\alpha\,.\,x^{-1}=x^\alpha\,.\,\alpha\,.\,x^{-1}=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}\,.$$

И така окончателно имаме

$$(x^\alpha)'=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}$$

за всяко $x>0$.

5.5.5. Таблица за производните на основните елементарни функции. Ще подредим в таблица производните на всички основни елементарни функции:

1⁰. $(x^\alpha)'=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}\quad(x>0)$.

Специално $(1/x)'=-1/x^2$, $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2⁰. $(\log_a x)'=x^{-1}\log_a e\ (0<a\neq1,\ x>0)$.

Специално $(\ln x)'=1/x$.

3⁰. $(a^x)'=a^x\ln a\qquad(0<a\neq1)$.

Специално $(e^x)'=e^x$.

4⁰. $(\sin x)'=\cos x$.

5⁰. $(\cos x)'=-\sin x$.

6⁰. $(\operatorname{tg} x)'=\cos^{-2}x=1+\operatorname{tg}^2 x\ (x\neq\pi n+\pi/2;\ n=0,\ \pm1,\ \cdots)$.

7⁰. $(\operatorname{ctg} x)'=-\sin^{-2}x=-(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,(x\neq\pi n;\ n=0,+1,\ \pm2,\ldots)$.

8⁰. $(\arcsin x)'=(1-x^2)^{-1/2}\qquad(-1<x<1)$.

9⁰. $(\arccos x)'=-(1-x^2)^{-1/2}\qquad(-1<x<1)$.

10⁰. $(\operatorname{arc\,tg} x)'=1/(1+x^2)$.

11⁰. $(\operatorname{arc\,ctg} x)'=-1/(1+x^2)$.

В глава 4 разгледахме хиперболичните функции $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{ch} x$, $y=\operatorname{th} x$ и $y=\operatorname{cth} x$, които са прости комбинации на показателната функция. От представянето на тези функции чрез показателната функция елементарно се получават следните изрази за производните им:

12⁰. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$.

13⁰. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$.

14⁰. $(\operatorname{th} x)'=\operatorname{ch}^{-2}x$.

15⁰. $(\operatorname{cth} x)'=-\operatorname{sh}^{-2}x\qquad(x\neq0)$.

Таблицата на производните заедно с правилото за диференциране на сложна функция и правилата за диференциране на сума, разлика, произведение и частно са изчислителният апарат на тази част от математическия анализ, която се нарича ***диференциално смятане***.

В глави 1 и 4 вече въведохме понятието елементарна функция като функция, изразяваща се чрез основните елементарни функции посредством четирите аритметични действия и краен брой суперпозиции.

От дадената таблица на производните и правилата за диференциране на сума, разлика, произведение, частно и сложна функция следва важният извод, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна функция, т. е. операцията диференциране не извежда вън от класа на елементарните функции.

5.5.6. Таблица за диференциалите на основните елементарни функции. В 5.3.3 установихме, че диференциалът df на функцията f е винаги равен на производната на тази функция $f'(x)$, умножена с диференциала на аргумента dx. Затова от таблицата на производните непосредствено се получава таблицата на диференциалите на основните елементарни функции:

1⁰. $d(x^\alpha)=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}\,.\,dx\quad(x>0)$.

Специално $d(1/x)=-x^{-2}\,.\,dx$, $d(\sqrt{x})=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

2°. $d(\log_a x)=x^{-1}\log_a e\,.\,dx$ $(0<a\neq 1,\ x>0)$.

Специално $d(\ln x)=\frac{dx}{x}$.

3°. $d(a^x)=a^x\ln a\,.\,dx$ $(0<a\neq 1)$.

Специално $d(e^x)=e^x\,.\,dx$.

4°. $d(\sin x)=\cos x\,.\,dx$.

5°. $d(\cos x)=-\sin x\,.\,dx$.

6°. $d(\operatorname{tg} x)=\cos^{-2}x\,.\,dx=(1+\operatorname{tg}^2 x)\,.\,dx$ $(x\neq\pi n+\pi/2;$ $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$.

7°. $d(\operatorname{ctg} x)=-\sin^{-2}x\,.\,dx=-(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,.\,dx$ $(x\neq\pi n;$ $n=0,\ \pm 1,\ \cdots)$.

8°. $d(\arcsin x)=(1-x^2)^{-1/2}\,.\,dx$ $(-1<x<1)$.

9°. $d(\arccos x)=-(1-x^2)^{-1/2}\,.\,dx$ $(-1<x<1)$.

10°. $d(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{dx}{1+x^2}$.

11°. $d(\operatorname{arc\,ctg} x)=-\frac{dx}{1+x^2}$.

5.5.7. Логаритмична производна. Производна на степенно-показателната функция. Нека функцията f е положителна и диференцируема в дадена точка x. Тогава и сложната функция на аргумента x от вида $w=\ln f$ е също диференцируема в точката x съгласно теорема 5.3 и за производната на тази сложна функция относно аргумента x имаме

(5.42) $$(\ln f(x))'=f'(x)/f(x).$$

Величината (5.42) е прието да се нарича ***логаритмична производна*** на функцията f в точката x.

Логаритмичната производна може да се използва при пресмятането на някои функции. За пример ще пресметнем производната на функцията $y=u(x)^{v(x)}$, където u и v са две функции, диференцируеми в точката x, като $u(x)$ е строго положителна в тази точка.

При тези ограничения функцията $w=\ln y=v(x).\ln u(x)$ ще бъде диференцируема в точката x. Наистина според теорема 5.3 функцията $\ln u(x)$ е диференцируема в точката x. Следователно въз основа на теоремата за диференцируемост на произведение на две диференцируеми функции функцията $w=\ln y=v(x)\ln u(x)$ е

диференцируема в точката x и по втората формула на (5.24) получаваме

(5.43) $$(\ln y)'=v'(x)\,.\,\ln u(x)+v(x)\,(\ln u(x))'$$
$$=v'(x)\,.\,\ln u(x)+v(x)\,.\,u'(x)/u(x).$$

От (5.42) и (5.43) имаме

$$y'/y=v'(x)\,.\,\ln u(x)+v(x)\,.\,u'(x)/u(x).$$

Отчитайки, че $y=u(x)^{v(x)}$, получаваме окончателно

(5.44) $$(u(x)^{v(x)})'=u(x)^{v(x)}\,(v'(x)\ln u(x)+v(x)\,u'(x)/u(x)).$$

Формула (5.44) е вярна при предположение, че u и v са диференцируеми в точката x и $u(x)>0$ в тази точка.

5.6. Производни и диференциали от по-висок ред

5.6.1. Понятие за производна от n-ти ред. Производната f' на функцията f, дефинирана и диференцируема в интервала $(a,\ b)$, е също функция, дефинирана в интервала $(a,\ b)$. Възможно е тази функция да бъде диференцируема в някоя точка x на интервала $(a,\ b)$, т. е. да има в тази точка производна. Тогава тази производна се нарича ***втора производна*** (или ***производна от 2-ри ред***) на функцията f в точката x и се означава със символа $f^{(2)}(x)$, или $f''(x)$.

След като е въведено понятието втора производна, последователно могат да се въведат понятията трета производна, четвърта производна и т. н. Ако предположим, че вече сме въвели понятието $(n-1)$-ва производна и че $(n-1)$-вата производна е диференцируема в някоя точка на интервала $(a,\ b)$, т. е. има в тази точка производна, то тази производна се нарича ***n-та производна*** (или ***производна от n-ти ред***) на функцията f в точката x и се означава със символа $f^{(n)}(x)$.

По този начин определяме понятието n-та производна индуктивно

(5.45) $$f^{(n)}=(f^{(n-1)})'.$$

Функция, която има в дадено множество $\{x\}$ производна от n-ти ред и няма производна от по-висок ред, се нарича n пъти диференцируема в даденото множество.

Понятието производна от по-висок ред има голямо приложение. Тук ще се ограничим с това да покажем механичния смисъл

на втората производна. Ако функцията f описва закона за движение на материална точка по оста Oy, то, както знаем от глава 1, първата производна $f'(x)$ изразява моментната скорост на движещата се точка в момента x. Тогава втората производна $f''(x)$ е равна на скоростта на изменение на скоростта, т. е. на ускорението на движещата се точка в момента x.

Методиката за пресмятане на производните от по-висок ред изисква само умение за пресмятане на производни от първи ред, тъй като последователното прилагане на формулите (5.45) представлява многократно пресмятане на първи производни. За пример ще пресметнем производните от n-ти ред на някои от основните елементарни функции.

5.6.2. n-ти производни на някои функции

1°. Ще пресметнем n-тата производна на степенната функция $y=x^\alpha$ ($x>0$, α — произволно реално число). Диференцирайки последователно, получаваме

$$y'=\alpha x^{\alpha-1},\ y^{(2)}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\ y^{(3)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\ \cdots,$$

откъдето лесно се вижда общият закон

$$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Строгото доказателство на този закон става лесно с метода на индукцията.

В частния случай при $\alpha=m$, където m е естествено число, имаме

$$(x^m)^{(m)}=m!,$$
$$(x^m)^{(n)}=0 \qquad \text{при } n>m.$$

Следователно n-тата производна на полином от степен m при $n>m$ е равна на нула.

2°. Сега ще пресметнем n-тата производна на показателната функция $y=a^x$ ($0<a\neq1$). Диференцирайки последователно, ще получим

$$y'=a^x\ln a,\ y^{(2)}=a^x\ln^2 a,\ y^{(3)}=a^x\ln^3 a,\ \cdots$$

Общата формула се установява лесно посредством индукция и има вида $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$.

В частност

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

3°. Ще сметнем сега n-тата производна на функцията $y=\sin x$. Първата производна на тази функция може да се запише във вида $y'=\cos x=\sin(x+\pi/2)$. По този начин диференцирането на функцията $y=\sin x$ прибавя към аргумента ѝ величината $\pi/2$. Оттук получаваме формулата:

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\pi/2).$$

4°. Съвсем аналогично установяваме формулата

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\pi/2).$$

5°. Следващата, n-тата производна, която ще пресметнем, е на функцията $y=\operatorname{arctg} x$. Ще докажем с помощта на метода на индукцията, че е в сила следната формула:

5.46) $$(\operatorname{arctg} x)^{(n)}=(n-1)!\,(1+x^2)^{-n/2}\sin[n(\pi/2+\operatorname{arctg} x)].$$

Тъй като $y=\operatorname{arctg} x$, $x=\operatorname{tg} y$, $1/(1+x^2)=1/(1+\operatorname{tg}^2 y)=\cos^2 y$, можем да препишем формулата във вида

(5.46′) $$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\,.\,\sin[n(\pi/2+y)].$$

Ще се убедим индуктивно във верността на формулата (5.46′).

При $n=1$ $y'=(\operatorname{arctg} x)'=1/(1+x^2)=\cos^2 y$. Същия израз получаваме и при $n=1$ от (5.46′) (достатъчно е да отчетем, че $\sin(\pi/2+y)=\cos y$).

Следователно при $n=1$ формула (5.46′) е вярна.

Ще предположим сега, че формула (5.46′) е вярна за някое n, и ще се убедим, че тя е вярна и за $n+1$.

Наистина, диференцирайки (5.46′), получаваме

$$y^{(n+1)}=(n-1)!\,\frac{d}{dx}\{\cos^n y\,.\,\sin[n(\pi/2+y)]\}$$

$$=(n-1)!\,\frac{d}{dy}\{\cos^n y\,.\,\sin[n(\pi/2+y)]\}\,\frac{dy}{dx}$$

$$=(n-1)!\left\{\frac{d}{dy}(\cos^n y)\,.\,\sin[n(\pi/2+y)]+\cos^n y\,.\,\frac{d}{dy}(\sin[n(\pi/2+y)])\right\}y'.$$

Като отчетем, че $y'=\cos^2 y$, $\frac{d}{dy}(\cos^n y)=n\cos^{n-1}y\,.\,(-\sin y)$,

$\frac{d}{dy}(\sin[n(\pi/2+y)])=n\cos[n(\pi/2+y)]$, ще получим

$$y^{(n+1)}=n!\cos^{n+1}y\,.\,\{-\sin y\,.\,\sin[n(\pi/2+y)]+\cos y\,.\,\cos[n(\pi/2+y)]\}$$

$$=n!\cos^{n+1}y\,.\,\cos[(n+1)y+n\pi/2]=n!\cos^{n+1}y\,.\,\sin[(n+1)(\pi/2+y)].$$

Получихме за $y^{(n+1)}$ формула от вида (5.46′) при номер $n+1$. С това индукцията е завършена и формула (5.46′) е доказана.

6°. Накрая ще пресметнем n-тата производна на дробно-линейна функция $y=(ax+b)/(cx+d)$, където a, b, c и d са произволни константи. Диференцираме последователно функцията и получаваме

$$y' = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = (ad-bc)\,.\,(cx+d)^{-2},$$

$$y^{(2)} = (ad-bc)(-2)\,.\,(cx+d)^{-3}\,.\,c,$$

$$y^{(3)} = (ad-bc)(-2)\,.\,(-3)\,.\,(cx+d)^{-4}\,.\,c^2, \ . \ . \ .$$

Лесно се вижда общият закон

$$y^{(n)} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\,n\,!\,(ad-bc)\,c^{n-1}\,(cx+d)^{-n-1},$$

който се доказва по метода на индукцията.

5.6.3. Формула на Лайбниц за n-тата производна на произведение от две функции. Докато установеното по-рано правило за пресмятане на първата производна на сума или разлика от две функции $(u \pm v)' = u' \pm v'$ се пренася лесно (например по метода на индукцията) и в случая на производна от n-ти ред $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$, то при пресмятането на n-тата производна на произведение на две функции нещата са по сложни.

Съответното правило носи названието ***формула на Лайбниц*** и има следния вид

$$(5.47) \qquad (u\,.\,v)^{(n)} = u^{(n)}\,.\,v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}\,.\,v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}\,.\,v'' + \ . \ . \ . \ + u\,.\,v^{(n)}.$$

Лесно се вижда законът, по който е построена дясната страна на формулата на Лайбниц (5.47): тя съвпада с формулата за развитие на бинома $(u+v)^n$, но вместо степените на u и v са взети производните от съответния ред. Това сходство става още по-пълно, ако вместо самите функции u и v напишем съответно $u^{(0)}$ и $v^{(0)}$ (т. е. ако разглеждаме функцията като производна от нулев ред).

Ще докажем формулата на Лайбниц по метода на индукцията. При $n=1$ тя има вида $(u\,.\,v)' = u'\,.\,v + u\,.\,v'$, който съвпада с правилото за диференциране на произведение на две функции. Затова достатъчно е да предположим верността на (5.47) за някое n и да докажем верността ѝ за $n+1$. И така нека за някой номер n формулата (5.47) да е вярна. Ще диференцираме тази формула и ще обединим събираемите в дясната страна по следния начин:

$$(5.48) \qquad (u\,.\,v)^{(n+1)} = u^{(n+1)}\,.\,v + \left[\binom{n}{0} u^{(n)}\,.\,v' + \binom{n}{1} u^{(n)}\,.\,v'\right]$$
$$+ \left[\binom{n}{1} u^{(n-1)}\,.\,v^{(2)} + \binom{n}{2} u^{(n-1)}\,.\,v^{(2)}\right]$$
$$+ \left[\binom{n}{2} u^{(n-2)}\,.\,v^{(3)} + \binom{n}{3} u^{(n-2)}\,.\,v^{(3)}\right] + \ . \ . \ . \ + u\,.\,v^{(n+1)}$$

(използвахме, че $1 = \binom{n}{0}$).

Лесно се проверява, че за всеки номер k, който не надминава n, е в сила

$$(5.49) \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

За да се убедим във верността на формула (5.49), е достатъчно да видим, че

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-k+1)}{k\,!}, \quad \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-k+2)}{(k-1)\,!},$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)\,n\,.\,.\,.\,(n-k+2)}{k\,!}.$$

От написаните съотношения следва, че

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-k+1)}{k\,!} + \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-k+2)}{(k-1)\,!}$$
$$= \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-k+1) + n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-k+2)\,.\,k}{k\,!}$$
$$+ \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-k+2)(n-k+1+k)}{k\,!} = \frac{(n+1)n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-k+2)}{k\,!}$$
$$= \binom{n+1}{k}.$$

Като използваме формула (5.49), можем да препишем съотношението (5.48) във вида

$$(u\,.\,v)^{(n+1)} = u^{(n+1)}\,v + \binom{n+1}{1} u^{(n)}\,.\,v' + \binom{n+1}{2} u^{(n-1)}\,.\,v^{(2)}$$
$$+ \binom{n+1}{3} u^{(n-2)}\,.\,v^{(3)} + \ . \ . \ . \ + u\,.\,v^{(n+1)}.$$

С това се убеждаваме във верността на формула (5.47) за $n+1$. □

Пример: Да пресметнем n-тата производна на функцията $y=x^2 . e^x$. Полагаме във формулата на Лайбниц (5.47) $u=e^x$, $v=x^2$ и отчитайки, че $u^{(k)}=e^x$ (за всяко k), $v'=2x$, $v^{(2)}=2$, $v^{(3)}=v^{(4)}=\ldots=0$, ще получим

$$(x^2 . e^x)^{(n)}=e^x . x^2+\binom{n}{1}e^x . 2x+\binom{n}{2}e^x . 2$$
$$=(x^2+2nx+n(n-1))e^x.$$

Ще подчертаем, че формулата на Лайбниц е много удобна, когато едната функция-множител има само краен брой, различни от нула производни, а пресмятането на всички производни на другата функция-множител не представлява затруднение.

5.6.4. Диференциали от по-висок ред. По-рано за означаване на диференциала на аргумента и съответния диференциал на функцията използвахме символите dx и df. В тази точка ще се наложи да използваме и други символи за означаване на тези диференциали. По-специално ще означаваме диференциала на аргумента и съответстващия му диференциал на функцията със символите δx и δf. В тези означения инвариантният по форма израз за първия диференциал на функцията f ще има вида $\delta f=f'(x) . \delta x$.

Ще разгледаме израза за първия диференциал на диференцируема в дадена точка x функция f:

$$df=f'(x)\,dx. \tag{5.50}$$

Да предположим, че величината в дясната страна на (5.50) е функция на аргумента x, диференцируема в дадената точка x. За това е достатъчно да поискаме функцията f да бъде два пъти диференцируема в дадената точка x, а аргументът x или да бъде независима променлива, или два пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

При тези предположения можем да разглеждаме диференциала

$$\delta(df)=\delta(f'(x)\,dx)$$

на величината (5.50).

Определение 1. *Стойността $\delta(df)$ на диференциала на първия диференциал (5.50), взета при $\delta x=dx$, се нарича* ***втори диференциал*** *на функцията f (в дадената точка x) и се означава със символа $d^2 f$.*

И така по определение*

$$d^2 f=\delta(df)\,|_{\delta x=dx}=\{\delta[f'(x)\,dx]\}\,|_{\delta x=dx}.$$

Диференциалът $d^n f$ от произволен ред n се определя по индукция.

Нека вече е определен диференциалът $d^{n-1}f$ от ред $n-1$ и нека функцията f е n пъти диференцируема в дадената точка x, а аргументът ѝ x е или независима променлива, или n пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

Определение 2. *Стойността $\delta(d^{n-1}f)$ на диференциала от $(n-1)$-вия диференциал $d^{n-1}f$, взет при $\delta x=dx$, се нарича* ***n-ти диференциал*** *на функцията f (в дадената точка x) и се означава със символа $d^n f$.*

И така по определение

$$d^n f=\delta(d^{n-1}f)_{\delta x=dx}.$$

При пресмятането на втория и следващите диференциали трябва съществено да се различават двата случая: 1) когато аргументът x е независима променлива; 2) когато аргументът x е съответствуващ брой пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

В първия случай, когато x е независима променлива, имаме право да считаме, че dx не зависи от x и е равно на едно и също нарастване на аргумента Δx (за всички точки x). При това ще получим $\delta(dx)=(dx)'\delta x=0$.

Последното равенство и второто съотношение в (5.28) ни дават право да напишем следните равенства:

$$\begin{aligned} d^2 f&=\delta(df)\,|_{\delta x=dx}=\{\delta[f'(x) . dx]\}\,|_{\delta x=dx}\\ &=\{\delta[f'(x)]\,dx+f'(x)\,\delta(dx)\}|_{\delta x=dx}\\ &=\{\delta[f'(x)]\,dx\}\,|_{\delta x=dx}=\{f^{(2)}(x) . \delta x . dx\}\,|_{\delta x=dx}\\ &=f^{(2)}(x)\,(dx)^2. \end{aligned} \tag{5.51}$$

И така в случая, когато аргументът x е независима променлива, за втория диференциал на функцията f в точката x имаме

$$d^2 f=f^{(2)}(x)\,(dx)^2. \tag{5.52}$$

Съвсем аналогично (лесно се убеждаваме в това по индукция), когато аргументът x е независима променлива, за n-тия диференциал на n пъти диференцируема функция f имаме

$$d^n f=f^{(n)}(x) . (dx)^n.$$

Следователно в случая, когато аргументът x е независима променлива, производната от ред n на функцията f е равна на отношението на n-тия диференциал на тази функция $d^n f$ към n-тата степен на диференциала на аргумента dx.

* Символът $\{\ldots\}\,|_{\delta x=dx}$ означава, че в израза, заключен в големите скоби, трябва да се положи $\delta x=dx$.

Съвсем друг вид имат вторият и следващите диференциали в случая, когато аргументът x е съответно n пъти диференцируема фукция на някоя независима променлива t. Ще пресметнем втория диференциал при предположение, че функцията f е два пъти диференцируема в дадена точка x, а аргументът ѝ x е два пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

Като повторим разсъжденията от (5.51), този път ще получим

$$d^2 f = \delta(dv)|_{\delta x = dx} - \{\delta[f'(x) \,.\, dx]\}|_{\delta x = dx}$$
$$= \{\delta[f'(x)] \,.\, dx + f'(x) \,.\, \delta(dx)\}|_{\delta x = dx}$$
$$= \{f^{(2)}(x) \,.\, \delta x \,.\, dx\}|_{\delta x = dx} + \{f'(x)\,\delta(dx)\}|_{\delta x = dx}.$$

Съгласно определението за втори диференциал на функцията x имаме

$$\delta(dx)|_{\delta x = dx} = d^2 x$$

и следователно

$$d^2 f = f^{(2)}(x)(dx)^2 + f'(x) \,.\, d^2 x. \tag{5.53}$$

Като сравним (5.53) с (5.52), виждаме, че (за разлика от първия диференциал) вторият диференциал няма свойството инвариантност на формата.

Толкова повече диференциалите от по-висок ред не притежават свойството инвариантност на формата.

6. Основни теореми за диференцируемите функции

В тази глава са дадени редици важни теореми на диференцируемите функции. Тези теореми са удобни при изследване поведението на функции, както в околности на отделни точки, така и в цели участъци от дефиниционните им области.

6.1. Нарастване (намаляване) на функция в точка. Локален екстремум

Нека функцията f е дефинирана навсякъде в някоя околност на точката c.

Определение 1. *Ще казваме, че функцията f* ***нараства в точката*** *c, ако съществува δ-околност на тази точка, в която $f(x) < f(c)$ при $x < c$ и $f(x) > f(c)$ при $x > c$.*

Определение 2. *Ще казваме, че функцията f* ***намалява в точката*** *c, ако съществува δ-околност на тази точка, в която $f(x) > f(c)$ при $x < c$ и $f(x) < f(c)$ при $x > c$.*

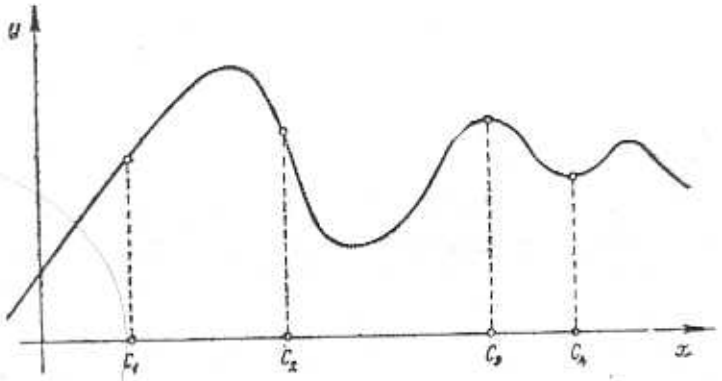
Определение 3. *Ще казваме, че функцията f има в точката c* ***локален максимум (локален минимум),*** *ако съществува такава δ-околност на точката c, че $f(c)$ е най-голямата (най-малката) измежду всички стойности $f(x)$ на функцията в тази околност.*

Определение 4. *Ще казваме, че функцията f има в точката c* ***локален екстремум,*** *ако тя има в тази точка или локален максимум, или локален минимум.*

На фиг. 6.1 е изобразена функция, нарастваща в точката c_1, намаляваща в точката c_2, имаща локален максимум в точката c_3 и локален минимум в точката c_4.

Ще докажем следните две теореми:

Теорема 6.1 (достатъчно условие за нарастване или намаляване на функция в точка). *Ако функцията f е диференцируема в*



Фиг. 6.1

точката c и производната ѝ $f'(c)$ е положителна (отрицателна) в тази точка, то тя е нарастваща (намаляваща) в точката c.

Доказателство. Ще разгледаме случая $f'(c)>0$ (понеже случаят $f'(c)<0$ е аналогичен).

Тъй като

$$f'(c) := \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

то според определението за граница на функция по Хайне за положителното число $\varepsilon = f'(c)$ съществува такова $\delta>0$, че

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right| < f'(c) \text{ при } 0<|x-c|<\delta,$$

или

$$0<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<2f'(c) \quad \text{при} \quad c-\delta<x<c+\delta, \quad x\neq c.$$

Така навсякъде в прободената δ-околност на точката c имаме

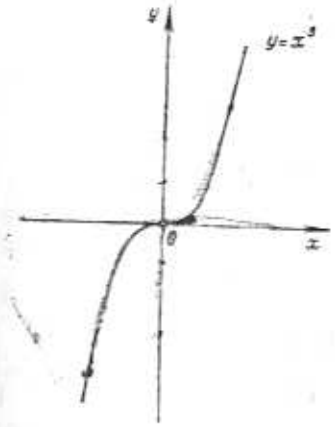
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0.$$

Следователно в тази δ-околност на точката c

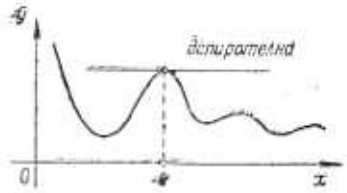
$$f(x)>f(c) \text{ при } x>c,$$
$$f(x)<f(c) \text{ при } x<c,$$

т. е. функцията f е нарастваща в точката c. □

Забележка 1. Положителността (отрицателността) на производната $f'(c)$ не е необходимо условие за нарастването (намаляването) на функцията f в точката c. Така функцията $f(x)=x^3$



Фиг. 6.2



Фиг. 6.3

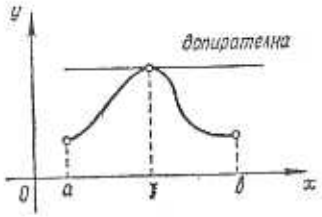
нараства в точката $c=0$, а производната ѝ в тази точка е равна на нула (вж. фиг. 6.2).

Теорема 6.2 (необходимо условие за локален екстремум на диференцируема в дадена точка функция). *Ако функцията f е диференцируема в точката c и има в тази точка локален екстремум, то $f'(c)=0$.*

Доказателство. Съгласно условието на теоремата съществува крайна производна $f'(c)$. Тъй като функцията f има в точката c локален екстремум, то в тази точка тя не е нито нарастваща, нито намаляваща. Следователно според теорема 6.1 производната ѝ $f'(c)$ не може да бъде нито положителна, нито отрицателна. □

Теорема 6.2 има много прост геометричен смисъл: ако в някоя точка на кривата $y=f(x)$ се достига локален екстремум и съществува допирателна в тази точка, тя е успоредна на оста Ox (вж. фиг. 6.3).

Забележка 2. Примерът с функцията $f(x)=x^3$ (вж. фиг. 6.2) показва, че анулирането на производната е само необходимо условие, но не е достатъчно за локален екстремум (производната $f'(x)=3x^2$ на тази функция се анулира в точката $x=0$, но в тази точка функцията няма екстремум).



Фиг. 6.4

6.2. Теорема за анулиране на производната

Теорема 6.3 (теорема на Рол*). *Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, диференцируема във всички вътрешни точки на този сегмент и $f(a)=f(b)$. Тогава съществува такава вътрешна точка ξ от сегмента $[a, b]$, че стойността на производната $f'(\xi)$ в тази точка е равна на нула.*

Накратко: между две равни стойности на диференцируема функция непременно има нула на производната на тази функция.

Доказателство. Тъй като функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то съгласно теорема 4.15 тази функция достига в този сегмент максималната си стойност M и минималната си стойност m. Възможни са два случая: 1) $M=m$; 2) $M>m$. В случая 1) $f(x)=M=m=\text{const}$. Затова производната $f'(x)$ е равна на нула във всяка вътрешна точка на сегмента $[a, b]$. В случая $M>m$, тъй като $f(a)=f(b)$, то функцията достига в някоя вътрешна точка ξ на сегмента $[a, b]$ поне една от двете стойности M или m. Но тогава функцията f има в точката ξ локален екстремум. Понеже функцията f е диференцируема в точката ξ, то съгласно теорема 6.2 $f'(\xi)=0$. □

Теоремата на Рол има просто геометрично тълкуване: Ако в краищата на сегмента ординатите на кривата $y=f(x)$ са равни, то съгласно теоремата на Рол има точка, в която допирателната към тази крива е успоредна на оста Ox (фиг. 6.4).

Както ще видим по-нататък, теоремата на Рол е в основата на много формули и теореми на математическия анализ.

* Мишел Рол — френски математик (1652 — 1719).

6.3. Формула за крайните нараствания (формула на Лагранж)

Голямо значение в анализа и неговите приложения има следната теорема, принадлежаща на Лагранж*.

Теорема 6.4 (теорема на Лагранж). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и диференцируема в интервала (a, b), то съществува точка ξ от интервала (a, b), за която е в сила формулата*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi). \tag{6.1}$$

Формулата (6.1) се нарича ***формула на Лагранж*** или ***формула за крайните нараствания.***

Доказателство. Да разгледаме функцията

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)(f(b)-f(a))/(b-a), \tag{6.2}$$

за която са изпълнени всички условия от теоремата на Рол. Наистина F е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ (като разлика между функцията f и една линейна функция) и във всички точки на интервала (a, b) има производна, равна на

$$F'(x)=f'(x)-(f(b)-f(a))/(b-a).$$

От формула (6.2) е очевидно, че $F(a)=F(b)=0$.

Съгласно теоремата на Рол вътре в сегмента $[a, b]$ има такава точка ξ, че

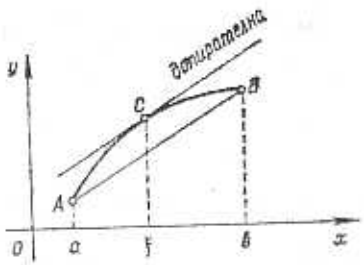
$$F'(\xi)=f'(\xi)-(f(b)-f(a))/(b-a)=0. \tag{6.3}$$

От равенството (6.3) следва формулата на Лагранж (6.1). Ще подчертаем, че във формула (6.1) не е необходимо $b>a$. Формулата е вярна и при $b<a$.

Забележка. Ние получихме теоремата на Лагранж като следствие от теоремата на Рол. Ще отбележим заедно с това, че теоремата на Рол е частен случай от теоремата на Лагранж (при $f(a)=f(b)$).

За изясняване геометричния смисъл на теоремата на Лагранж ще отбележим, че величината $(f(b)-f(a))/(b-a)$ е ъгловият коефициент на секущата, минаваща през точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ на кривата $y=f(x)$, а $f'(\xi)$ е ъгловият коефициент на допирателната към кривата $y=f(x)$ в точката $C(\xi, f(\xi))$. Формулата на Лагранж означава, че има точка C от кривата $y=f(x)$ между точките A и B, допирателната в която е успоредна на секущата AB (фиг. 6.5).

* Жозеф Луи Лагранж — френски математик и механик (1736—1813).



Фиг. 6.5

Формулата на Лагранж за сегмента $[x_0, x_0+\Delta x]$ ще има вида

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x \,.\, f'(\xi), \tag{6.4}$$

където ξ е някоя точка, заключена между x_0 и $x_0+\Delta x$. Тогава има такова число θ от интервала $0<\theta<1$, че

$$\xi=x_0+\theta \,.\, \Delta x.$$

По този начин формула (6.4) добива вида

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x \,.\, f'(x_0+\theta \,.\, \Delta x), \tag{6.5}$$

където θ е някое число от интервала $0<\theta<1$. Формулата на Лагранж във вида (6.5) ни дава нарастването на функцията, предизвикано от произволното крайно нарастване Δx на аргумента. Този вид на формулата на Лагранж оправдава термина ***формула за крайните нараствания.***

6.4. Някои следствия от формулата на Лагранж

6.4.1. Константност на функция, която има нулева производна в даден интервал.

Теорема 6.5. *Ако функцията f е диференцируема навсякъде в интервала (a, b) и ако навсякъде в този интервал $f'(x)=0$, то функцията f е константа в интервала (a, b).*

Доказателство. Нека x_0 е някоя фиксирана точка в интервала (a, b), а x е произволна точка от този интервал.

Сегментът $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$) се съдържа в интервала (a, b). Затова функцията f е диференцируема (а също така и непрекъсната) в този сегмент. Това ни дава право да приложим теоремата

на Лагранж за функцията f в сегмента $[x_0, x]$. Съгласно тази теорема вътре в сегмента $[x_0, x]$ има точка ξ, за която

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\,f'(\xi). \tag{6.6}$$

По условие производната на функцията f е равна на нула навсякъде в интервала (a, b) и следователно $f'(\xi)=0$. Тогава от (6.6) получаваме

$$f(x)=f(x_0). \tag{6.7}$$

Равенството (6.7) показва, че стойността на функцията f във всяка точка x на интервала (a, b) е равна на стойността ѝ във фиксираната точка x_0. Това означава, че функцията f е константа в интервала (a, b). □

6.4.2. Условия за монотонност на функция в интервал. Като второ следствие от формулата на Лагранж ще разгледаме въпроса за условията, които осигуряват ненамаляване (ненарастване) на функцията в даден интервал. Ще напомним определенията за ненамаляваща, ненарастваща, растяща и намаляваща функция в даден интервал.

1°. Казва се, че функцията f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b), ако за всеки две точки x_1 и x_2 от този интервал, за които $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството

$$f(x_1)\leqq f(x_2) \quad (f(x_1)\geqq f(x_2)).$$

2°. Казва се, че функцията f е растяща (намаляваща) в интервала (a, b), ако за всеки две точки x_1 и x_2 от този интервал, за които $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (f(x_1)>f(x_2)).$$

Теорема 6.6. *Необходимо и достатъчно условие функцията f, диференцируема в интервала (a, b), да бъде ненамаляваща (ненарастваща) в този интервал е производната ѝ да бъде неотрицателна (неположителна) в този интервал.*

Доказателство. 1. *Достатъчност.* Нека $f'(x)\geqq 0\ (\leqq 0)$ навсякъде в интервала (a, b). Трябва да се докаже, че f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b). Нека x_1 и x_2 са произволни точки от интервала (a, b), за които $x_1<x_2$. Функцията f е диференцируема (следователно и непрекъсната) в сегмента $[x_1, x_2]$. Като приложим теоремата на Лагранж за функцията f в сегмента $[x_1, x_2]$, ще получим

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\,f'(\xi), \tag{6.8}$$

където $x_1<\xi<x_2$.

По условие $f'(\xi)\geqq 0\ (\leqq 0)$ и $x_2-x_1>0$. Затова дясната, а сле-

дователно и лявата страна на (6.8) е неотрицателна (неположителна), което доказва, че f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b).

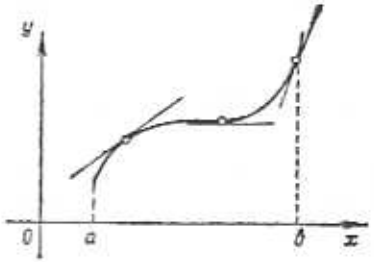
2. *Необходимост.* Нека функцията f е диференцируема и ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b). Трябва да се докаже, че $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) в този интервал. Тъй като f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b), то тя е ненамаляваща (ненарастваща) във всяка точка на интервала (a, b). Следователно съгласно теорема 6.1 производната f' не може да бъде отрицателна (положителна) в нито една точка на интервала (a, b). □

Теорема 6.7. *За да бъде функцията f растяща (намаляваща) в интервала (a, b), е достатъчно производната ѝ f' да бъде положителна (отрицателна) в този интервал.*

Доказателството е аналогично на доказателството за достатъчността в теорема 6.6. Нека x_1 и x_2 са произволни точки от интервала (a, b), удовлетворяващи условието $x_1 < x_2$. Като запишем формулата на Лагранж за сегмента $[x_1, x_2]$, ще получим равенството (6.8), но сега в това равенство $f'(\xi) > 0$ (< 0).

Поради това лявата страна на (6.8) е положителна (отрицателна), което доказва, че f е растяща (намаляваща) в интервала (a, b).

Забележка. Положителността (отрицателността) на производната f' в интервала (a, b) не е необходимо условие за нарастването (намаляването) на функцията f в интервала (a, b). Така например функцията $f(x) = x^3$ расте в интервала $(-1, 1)$, но производната ѝ $f'(x) = 3x^2$ не е навсякъде положителна в този интервал (тя е нула в точката $x = 0$). Въобще леко се доказва, че функцията f е растяща (намаляваща) в интервала (a, b), ако производната ѝ f' е положителна (отрицателна) навсякъде в този интервал с изключение на краен брой точки, в които тази производна е равна на нула. (За да докажем това, е достатъчно да приложим теорема 6.7 към всеки от крайния брой интервали, в които f' е строго положителна (отрицателна), и да отчетем, че f е непрекъсната в точките, в които производната е равна на нула.) Установената в теорема 6.7 връзка между знака на производната и посоката на изменението на функцията се разбира лесно по геометрични съображения. Тъй като производната е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията $y = f(x)$, то знакът на производната показва дали допирателната сключва с положителната посока на оста Ox остър или тъп ъгъл. Ако $f'(x) > 0$ навсякъде в интервала (a, b), то навсякъде в този интервал допирателната сключва с оста Ox остър ъгъл и очевидно кривата $y = f(x)$ се „изкачва нагорс" навсякъде в този интервал (фиг. 6.6).



Фиг. 6.6

6.4.3. Липса на прекъсвания от първи род и отстраними прекъсвания на производната. Теоремата на Лагранж позволява да се установи едно забележително свойство на производната. Ще започнем с доказателството на следната лема:

Лема 1. *Нека функцията f има крайна производна f' навсякъде в интервала $(c, c+\delta)$ $((c-\delta, c))$, където δ е някое положително число, и освен това има дясна производна $f'(c+0)$ (лява производна $f'(c-0)$). Тогава, ако производната f' има в точката c дясна (лява) граница, то тази граница съвпада с дясната производна $f'(c+0)$ (лявата производна $f'(c-0)$).*

Доказателство. От съществуването на дясна производна $f'(c+0)$ (лява производна $f'(c-0)$) следва съществуването на крайната граница

$$\lim_{x \to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \quad \left(\lim_{x \to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right).$$

Но това означава, че

$$\lim_{x \to c+0} (f(x)-f(c)) = 0 \quad (\lim_{x \to c-0} (f(x)-f(c)) = 0),$$

т. е. функцията f е непрекъсната в точката c отдясно (отляво).

Фиксираме произволно x в интервала $(c, c+\delta)$ $((c-\delta, c))$. Тъй като функцията f е диференцируема (следователно непрекъсната) в този интервал и освен това непрекъсната отдясно (отляво) в точката c, то за тази функция в сегмента $[c, c+\delta]$ (в $[c-\delta, c]$) са изпълнени всички условия от теоремата на Лагранж 6.4.

Съгласно тази теорема между x и c съществува такава точка ξ, че е изпълнено равенството

$$(f(x)-f(c))/(x-c) = f'(\xi). \tag{6.9}$$

Да направим в (6.9) граничен преход при $x \to c+0$ $(x \to c-0)$. Ако производната $f'(x)$ има в точката c крайна дясна граница $\lim\limits_{x \to c+0} f'(x)$ (крайна лява граница $\lim\limits_{x \to c-0} f'(x)$), то дясната страна на

(6.9) ще клони към тази граница (тъй като $\xi \to c+0$ ($\xi \to c-0$) при $x \to c+0$ ($x \to c-0$).

Същата граница при $x \to c+0$ ($x \to c-0$) трябва да има и лявата страна на (6.9). Но границата на лявата страна на (6.9) при $x \to c+0$ ($x \to c-0$) по определение е равна на дясната производна $f'(c+0)$ (лявата производна $f'(c-0)$). □

Прилагайки лема 1 за всяка точка c на даден интервал (a, b), идваме до следното твърдение: Ако функцията f има крайна производна навсякъде в интервала (a, b), то производната f' не може да има в този интервал нито точки на отстранимо прекъсване, нито точки на прекъсване от първи род.

Наистина, ако в някоя точка c на интервала (a, b) съществуват крайни дясна и лява граница на функцията f', то f' е непрекъсната в точката c (според доказаната лема*). Ако не съществува нито една от границите $\lim\limits_{x \to c+0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to c-0} f'(x)$, то функцията f' по определение има в точката c прекъсване от втори род. И така производната f' във всяка точка c на интервала (a, b) е или непрекъсната, или има прекъсване от втори род. □

Ще приведем пример на функция, чиято производна съществува и е крайна навсякъде в даден интервал и има в дадена точка от този интервал прекъсване от втори род.

Ще разгледаме в интервала $(-1, 1)$ функцията

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \cos x^{-1} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0. \end{cases}$$

Очевидно за всяко $x \neq 0$ производната на тази функция съществува и е $f'(x)=2x \cos x^{-1}+\sin x^{-1}$. Съществуването на производната f' в точката $x=0$ непосредствено следва от съществуването на границата

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cos(1/\Delta x)=0.$$

Производната f' няма в точката $x=0$ нито дясна, нито лява граница, тъй като събираемото $2x \cos x^{-1}$ има в точката $x=0$ граница, равна на нула, а второто събираемо $\sin x^{-1}$ няма в точката $x=0$ нито дясна, нито лява граница.

6.4.4. Извеждане на някои неравенства. В заключение ще покажем как с помощта на теоремата на Лагранж могат да бъдат получени някои полезни неравенства. За пример ще докажем следните две неравенства:

(6.10) $$|\sin x_1-\sin x_2| \leqq |x_1-x_2|,$$

(6.11) $$|\operatorname{arc\,tg} x_1-\operatorname{arc\,tg} x_2| \leqq |x_1-x_2|$$

(тук x_1 и x_2 са какви да е стойности на аргумента). За да установим неравенството (6.10), ще приложим теоремата на Лагранж за функцията $f(x)=\sin x$ в сегмента $[x_1, x_2]$. Получаваме

(6.12) $$\sin x_1-\sin x_2=(x_1-x_2) \cdot f'(\xi).$$

Като отчетем, че $f'(\xi)=\cos \xi$ и че $|\cos \xi| \leqq 1$ за всяко ξ, и като вземем абсолютните стойности в (6.12), получаваме неравенството (6.10).

За доказване на неравенството (6.11) ще приложим теоремата на Лагранж към функцията $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ в сегмента $[x_1, x_2]$ и ще вземем пред вид, че $f'(\xi)=1/(1+\xi^2) \leqq 1$.

6.5. Обобщение на формулата на крайните нараствания (формула на Коши)

В този параграф ще докажем теорема, принадлежаща на Коши, която обобщава доказаната теорема на Лагранж.

Теорема 6.8 (теорема на Коши). *Ако всяка от двете функции f и g е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и диференцируема във всяка вътрешна точка на този сегмент и освен това производната $g'(x)$ е различна от нула навсякъде вътре в сегмента $[a, b]$, то съществува такава точка ξ от вътрешността на този сегмент, че да е изпълнено равенството*

(6.13) $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Формула (6.13) се нарича ***обобщена формула на крайните нараствания*** или ***формула на Коши.***

Доказателство. Най-напред ще докажем, че $g(a) \neq g(b)$. Наистина, ако това не е така, за функцията g в сегмента $[a, b]$ ще са изпълнени всички условия от теорема 6.3 (теоремата на Рол) и следователно вътре в сегмента $[a, b]$ ще съществува точка ξ, в която $g'(\xi)=0$. Това противоречи на условието на теоремата. И така $g(a) \neq g(b)$ и можем да разгледаме следната помощна функция:

(6.14) $$F(x)=f(x)-f(a)-(g(x)-g(a))(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)).$$

Поради изискванията, наложени на функциите f и g, функцията $F(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и диференцируема във всич

* Според тази лема $\lim\limits_{x \to c+0} f'(x)=f'(c+0)$, $\lim\limits_{x \to c-0} f'(x)=f'(c-0)$, а тъй като $f'(c+0)=f'(c-0)=f'(c)$, то $\lim\limits_{x \to c-0} f'(x)=\lim\limits_{x \to c+0} f'(x)=f'(c)$. Следователно $f'(x)$ е непрекъсна а в точката c.

ки вътрешни точки на този сегмент. Освен това е очевидно, че $F(a)=F(b)$. Тогава за F са изпълнени всички условия на теорема 6.3 (на Рол). Съгласно тази теорема съществува вътрешна за сегмента $[a, b]$ точка ξ, за която

(6.15) $$F'(\xi)=0.$$

Тъй като $F'(x)=f'(x)-g'(x)(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a))$, то от (6.15) получаваме

(6.16) $$f'(\xi)-g'(\xi)(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)).$$

Отчитайки, че $g'(\xi)\neq 0$, от равенството (6.16) получаваме формулата на Коши (6.13). □

Забележка 1. Формулата на Лагранж (6.1) е частен случай от формулата на Коши (6.13) при $g(x)=x$.

Забележка 2. Във формула (6.13) не е задължително да имаме $b>a$. Формулата е вярна и при $b<a$.

6.6. Разкриване на неопределености (правило на Лопитал)

6.6.1. Разкриване на неопределеност от вида 0/0. Ще казваме, че отношението на две функции f/g е неопределеност от вида 0/0 при $x\to a$, ако

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Да се разкрие тази неопределеност означава да се пресметне границата $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x))$ (при условие, че тя съществува).

Аналогично се въвеждат понятията неопределеност от вида 0/0 при $x\to a+0$ $(x\to a-0)$, при $x\to\infty$, а също и при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

Следващата теорема ни дава правило за разкриване на неопределеност от вида 0/0 при $x\to a$.

Теорема 6.9 (правило на Лопитал*). *Нека множеството C_δ е прободена δ-околност на точката a, функциите f и g са дефинирани и диференцируеми в C_δ и производната g' не се анулира в C_δ. Нека също*

(6.17) $$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Тогава, ако съществува (крайна или безкрайна) граница

* Гийом Франсоа дьо Лопитал — френски математик (1661—1704).

(6.18) $$\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x)),$$

то съществува и

(6.19) $$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))$$

и е в сила съотношението

(6.20) $$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x)).$$

Теоремата 6.9 ни дава правило за разкриване на неопределеност от вида 0/0, което свежда пресмятането на границата на частното на две функции в точката a до пресмятане на границата на частното на производните на тези функции в същата точка.

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица от стойности на аргумента, клоняща към a, чиито членове x_n са различни от a. Ще додефинираме функциите f и g в точката a, като ще ги положим равни на нула в тази точка. При това додефиниране на функциите f и g те са непрекъснати навсякъде в множеството C_δ, допълнено с точката a, т. е. навсякъде в δ-околността на точката a. Наистина непрекъснатостта на f и g във всички точки на δ-околността на точката a с изключение на точката a следва от тяхната диференцируемост в тези точки, а непрекъснатостта на f и g в точката a следва от това, че границите им в точката a са равни на стойностите им в тази точка съгласно додефинирането на тези функции.

Отчитайки, че всички елементи на редицата $\{x_n\}$ принадлежат на множеството C_δ, ще разгледаме произволен сегмент, ограничен от точките a и x_n.

Според казаното двете функции f и g са непрекъснати върху такъв сегмент. Освен това функциите f и g са диференцируеми във всяка вътрешна точка на избрания сегмент и производната g' не се анулира във вътрешните му точки.

Това ни дава право да приложим към функциите f и g в сегмента, ограничен от точките a и x_n, теоремата на Коши 6.8.

Според тази теорема между точките a и x_n съществува такава точка ξ_n, че да е изпълнено равенството

(6.21) $$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Като вземем пред вид, че $f(a)=g(a)=0$, можем да напишем съотношението (6.21) във вида

(6.22) $$f(x_n)/g(x_n)=f'(\xi_n)/g'(\xi_n).$$

Нека сега в (6.22) n расте неограничено, т. е. $x_n\to a$. Понеже ξ_n е заключено между a и x_n, то и $\xi_n\to a$ при $n\to\infty$. От съще-

ствуването на границата (6.18) и от определението за граница на функция по Хайне следва, че дясната страна на (6.22) има граница при $n \to \infty$, равна на границата (6.18). Следователно същата граница при $n \to \infty$ има и лявата страна на (6.22). Понеже клоняща към a редица $\{x_n\}$ е произволна и според определението за граница на функция по Хайне съществуването на граница при $n \to \infty$ на лявата страна на (6.22), равна на (6.18), означава съществуване на граница на функцията (6.19), която също е равна на (6.18).

И така чрез граничен преход в (6.22) при $n \to \infty$ получаваме съотношението (6.20). □

Забележка 1. Правилото на Лопитал не винаги „действува", т. е. границата на частното на функциите (6.19) може да съществува и в случаи, когато границата на частното на производните (6.18) не съществува.

Например при $a=0$, $f(x)=x^2\cos x^{-1}$, $g(x)=\sin x$ съществува

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x^{-1}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}x\cos x^{-1}=0,$$

докато

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^{-1}+\sin x^{-1}}{\cos x}$$

не съществува.

Забележка 2. Ако към условията (6.9) добавим изискването за непрекъснатост на производните f' и g' в точката a, то при условие $g'(a)\neq 0$ съотношението (6.20) може да се напише във вида

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=f'(a)/g'(a).$$

Забележка 3. Ако производните f' и g' удовлетворяват същите изисквания, както и функциите f и g, то правилото на Лопитал може да се приложи повторно, т. е. границата на частното на първите производни на функциите f и g може да се замени с границата на частното на вторите производни на тези функции. Така ще получим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Примери:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=1/2.$

2. Следващата граница се намира с двукратно прилагане на правилото на Лопитал:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=1/6.$$

3. С трикратно прилагане на правилото на Лопитал се пресмята следната граница:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+2\cos x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2x-2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{2-2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{24x}{2\sin x}=12.$$

Ние разгледахме въпроса за разкриване на неопределеност от вида 0/0 за случая на граница в точката a. Съвършено аналогични резултати са в сила и за случаите на граница в точката a отдясно (отляво), граница при $x\to\infty$, а също така и за граница при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

Сега ще се убедим, че теорема 6.9 е в сила във всеки от следните три случая:

1. Когато в теорема 6.9 за множество C_δ вземем интервала $(a, a+\delta)$ (съответно $(a-\delta, a)$), а всички граници (6.17) — (6.20) са взети при $x\to a+0$ (съответно при $x\to a-0$).

2. Когато в теорема 6.9 за C_δ вземем множеството от всички точки, лежащи вън от сегмента $[-\delta, \delta]$, а границите (6.17)—(6.20) са взети при $x\to\infty$.

3. Когато в теорема 6.9 за множество C_δ е взета полуправата $(\delta, +\infty)$ (съответно $(-\infty, \delta)$), а границите (6.17)—(6.20) са при $x\to+\infty$ (съответно при $x\to-\infty$).

Случай 1. В сила е цялата схема на доказателството на теорема 6.9, само че вместо редицата $\{x_n\}$, клоняща към a, от точки x_n, различни от a, трябва да вземем редица $\{x_n\}$ от интервала $(a, a+\delta)$ (съответно от $(a-\delta, a)$), клоняща към a.

Случай 2. Нека функциите f и g са дефинирани и диференцируеми навсякъде вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ при някое $\delta>0$ и производната g' не се анулира вън от посоченият сегмент. Нека освен това съществува границата

$$\lim_{x\to\infty}(f'(x)/g'(x)). \tag{6.18'}$$

Да направим смяна на променливата $t=1/x$ и да положим $G(t)=g(1/t)=g(x)$, $F(t)=f(1/t)=f(x)$. Тогава очевидно функциите F и G са дефинирани и диференцируеми в прободената $1/\delta$-околност на точката $t=0$ и производната

$$G'(t)=g'(1/t)(-1/t^2)=g'(x)(-x^2)$$

не се анулира в тази прободена $1/\delta$-околност.

Освен това поради съществуването на границата (6.18′) съществува и границата

$$\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.23}$$

Но тогава според теорема 6.9 ще съществува и границата

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}, \tag{6.24}$$

при това е изпълнено съотношението (6.20), което приема (поради (6.23) и (6.24)) вида

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

Случай 3. Използваме същата смяна $t=1/x$, както в случай 2, но сега тази смяна води вместо до разглеждане на границата при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ до границата при $x\to 0+0$ $(x\to 0-0)$, разгледана в случай 1.

Примери: 1. Да се пресметне $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x^\delta}{\ln(1+x)}$ за всяко $\delta>1$ (този пример се отнася към случай 1).

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x^\delta}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\delta x^{\delta-1}}{(1/(1+x))}=\lim_{x\to 0+0}\delta x^{\delta-1}(1+x)=0.$$

2. Да се пресметне $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi/4-\operatorname{arc\,tg}(1-1/x)}{\sin(1/x)}$ (този пример се отнася към случай 2).

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/4-\operatorname{arc\,tg}(1-1/x)}{\sin(1/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{1+(1-1/x)^2}\cdot\frac{1}{x^2}}{(-1/x^2)\cos(1/x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+(1-1/x)^2}\cdot\frac{1}{\cos(1/x)}=\frac{1}{2}.$$

6.6.2. Разкриване на неопределеност от вида ∞/∞. Ще казваме, че отношението на две дефинирани в околност на точката a функции f и g представлява неопределеност от вида ∞/∞ при $x\to a$, ако

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty.^* \tag{6.25}$$

За разкриване на тази неопределеност, т. е. за пресмятане на границата $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x))$, е в сила твърдение, напълно аналогично на теорема 6.9.

* Вместо ∞ в (6.25) може да имаме $+\infty$ или $-\infty$.

Теорема 6.9* (второ правило на Лопитал). *Нека множеството C_δ е прободена δ-околност на точката a, функциите f и g са дефинирани и диференцируеми в C_δ и производната g' не се анулира в C_δ. Нека по-нататък*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty. \tag{6.17'}$$

Тогава, ако съществува (крайна или безкрайна) границата

$$\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x)), \tag{6.18'}$$

то съществува и границата

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)), \tag{6.19'}$$

при което е в сила съотношението

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.20'}$$

Доказателство. 1. Ще предположим най-напред, че съществува крайна граница (6.18′) и тя е равна на числото b. Ще докажем, че в този случай съществува и границата (6.19′) и е също равна на b.

Нека $\{x_n\}$ е произволна редица от стойности на аргумента, клоняща към a или отдясно, или отляво. Тъй като всички членове на тази редица принадлежат на множеството C_δ, то каквито и да са двата члена от редицата x_m и x_n, за функциите f и g в сегмента $[x_m, x_n]$ са изпълнени всички условия на теоремата на Коши (6.8). Според тази теорема между x_m и x_n съществува такава точка $\xi_{m,n}$, че е изпълнено равенството

$$\frac{f(x_n)-f(x_m)}{g(x_n)-g(x_m)}=\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\cdot\frac{1-f(x_m)/f(x_n)}{1-g(x_m)/g(x_n)}=\frac{f'(\xi_{m,n})}{g'(\xi_{m,n})}.$$

От това равенство заключаваме, че

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_{m,n})}{g'(\xi_{m,n})}\cdot\frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)}. \tag{6.26}$$

Сега избираме произволно положително число ε. Тъй като по условие $\lim\limits_{x\to a}(f'(x)/g'(x))=b$, а редицата $\{x_n\}$ клони към a, то за положителното число $\varepsilon/2$ може да се намери такъв номер m, че за всеки номер n, по-голям от m, да са изпълнени условията

$$f'(\xi_{m,n})/g'(\xi_{m,n})=b+\alpha_{m,n} \text{ и } |\alpha_{m,n}|<\varepsilon/2. \tag{6.27}$$

Ще отбележим, че според условие (6.17′) $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=\infty$ и тъй като номерът m е фиксиран, съществува границата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)}=1.$$

Това означава, че за положителното число $\frac{\varepsilon/2}{|b|+\varepsilon/2}$ и за избрания номер m съществува такъв номер n_0, че при всички $n>n_0$ имаме

$$\frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)}=1+\beta_{m,n}, \tag{6.28}$$

където $|\beta_{m,n}|<\frac{\varepsilon/2}{|b|+\varepsilon/2}$.

От (6.26), (6.27) и (6.28) следва, че

$$f(x_n)/g(x_n)=(b+\alpha_{m,n})(1+\beta_{m,n})=b+(b+\alpha_{m,n})\beta_{m,n}+\alpha_{m,n}.$$

Следователно е изпълнено неравенството

$$|f(x_n)/g(x_n)-b|\leq(|b|+|\alpha_{m,n}|)\cdot|\beta_{m,n}|+|\alpha_{m,n}|.$$

Отчитайки условията (6.27) и (6.28), при всички $n\geq n_0$ получаваме

$$(|b|+|\alpha_{m,n}|)\cdot|\beta_{m,n}|+|\alpha_{m,n}|<(|b|+\varepsilon/2)\frac{\varepsilon/2}{(|b|+\varepsilon/2)}+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

И така за произволно избраното $\varepsilon>0$ намерихме такъв номер n_0, че при всички $n>n_0$ да имаме

$$|f(x_n)/g(x_n)-b|<\varepsilon.$$

Това означава, че границата (6.19′) е равна на числото b и е изпълнено (6.20′). По такъв начин теоремата е доказана за случая на крайна граница (6.18′).

2. Нека сега границата (6.18′) е равна на безкрайност. Тогава очевидно границата на реципрочното отношение $\lim(g'(x)/f'(x))$ е равна на нула и съгласно току-що разгледания случай на крайна граница (6.18′) ще получим*, че $\lim\limits_{x\to a}(g(x)/f(x))=0$.

Последното съотношение поради (6.18′) е еквивалентно на

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=\infty. \square$$

Също както и теорема 6.9, теорема 6.9* е вярна и за всеки от следните три случая:

1) Когато за множество C_δ се вземе интервалът $(a, a+\delta)$ (съответно $(a-\delta, a)$), а границите (6.17′)—(6.20′) се разглеждат при $x\to a+0$ (съответно при $x\to a-0$).

* Отчитаме, че за реципрочното отношение са изпълнени всички условия на теорема 6.9*. По-специално производната f' не се анулира в достатъчно малка прободена δ-околност на точката a (това следва от съществуването на границата (6.18′), равна на ∞, и от неанулирането на производната g' в посочената прободена δ-околност).

2) Когато за множество C_δ се избере съвкупността от всички x, лежащи вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ и всички граници (6.17′)—(6.20′) са взети при $x\to\infty$.

3) Когато за множество C_δ се вземе полуправата $(\delta, +\infty)$ (съответно $(-\infty, -\delta)$) и всички граници (6.17′)—(6.20′) се вземат при $x\to+\infty$ (съответно при $x\to-\infty$).

Доказателството на теорема 6.9* в тези три случая може да се заимствува от предишната точка.

Примери:

1. $$\lim_{x\to0+0}\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{x^{-1/2}}$$
$$=\lim_{x\to0+0}\frac{x^{-1}}{(-1/2)x^{-3/2}}=-2\lim_{x\to0+0}\sqrt{x}=0.$$

2. С n-кратно прилагане на правилото на Лопитал се пресмята

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

6.6.3. Разкриване на други видове неопределености. Освен изучените по-горе неопределености от вида 0/0 и ∞/∞ често се срещат и неопределености от следните видове: $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Всички тези неопределености се свеждат до изучените две неопределености с помощта на алгебрични преобразувания. Ще покажем това за последните три от изброените неопределености. Всяка от тях има вида

$$f^g, \tag{6.29}$$

където f клони съответно към 1, 0 или ∞ при $x\to a$, g — съответно към ∞ или 0. Като логаритмуваме израза (6.29), получаваме (считаме, че $f(x)>0$)

$$g\ln f. \tag{6.30}$$

За да намерим границата на израза (6.29), достатъчно е да намерим границата на (6.30).

Ще отбележим, че за всеки от разглежданите три случая изразът (6.30) е неопределеност от вида $0.\infty$ при $x\to a$. Следователно е достатъчно да се научим да привеждаме неопределеност от вида $0.\infty$ към неопределеност от вида 0/0 или ∞/∞. Ще покажем как се прави това. Нека

$$z=\varphi.\psi, \tag{6.31}$$

при това

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0, \qquad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty.$$

Можем да запишем (6.31) във вида

$$z=\varphi\,.\,\psi=\frac{\varphi}{1/\psi}. \tag{6.32}$$

Очевидно изразът (6.32) е неопределеност от вида 0/0 при $x\to a$. Нашата цел е достигната.

Примери:

1. Да пресметнем $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$. Означаваме $y=x^x$. Тогава $\ln y=x\ln x=\frac{\ln x}{1/x}$. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+0}x=0,$$

откъдето е ясно, че $\lim\limits_{x\to 0+0} y=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)}$. Нека $y=(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)}$. Тогава да пресметнем

$$\ln y=\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}.$$

Като използваме правилото на Лопитал, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x/(1+x^2)}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)\,2x}=2,$$

откъдето е ясно, че $\lim\limits_{x\to 0} y=e^2$.

6.7. Формула на Тейлор

В този параграф ще получим една от най-важните формули в математическия анализ, която има многобройни приложения както в математиката, така и в близките ѝ дисциплини.

Теорема 6.10 (теорема на Тейлор*). *Нека функцията f има в някоя околност на точката a производна от $(n+1)$-ви ред (n е произволно естествено число).* Нека x е произволна точка от тази околност, *а p — произволно положително число. Тогава между точките a и x съществува такава точка ξ, че е в сила формулата*

* Брук Тейлор — английски математик (1685—1731).

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_{n+1}(x), \tag{6.33}$$

където

$$R_{n+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,.\,p}f^{(n+1)}(\xi). \tag{6.34}$$

Забележка. Тъй като точката ξ е между x и a, то дробта $(x-a)/(x-\xi)$ е винаги положителна и за всяко $p>0$ е определена степента $\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p$.

Формула (6.33) се нарича ***формула на Тейлор*** (с център в точката a), а изразът $R_{n+1}(x)$ се нарича ***остатъчен член***. Както ще видим по-нататък, остатъчният член може да се запише не само във вида (6.34), но и по друг начин. Остатъчният член, записан във вида (6.34), е прието да се нарича ***остатъчен член в обща форма.***

Доказателство. Да положим

$$\varphi(x,\,a)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \tag{6.35}$$

и да означим със символа $R_{n+1}(x)$ разликата

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x,\,a). \tag{6.36}$$

Теоремата ще бъде доказана, ако покажем, че $R_{n+1}(x)$ се определя от формулата (6.34).

Фиксираме произволно x от посочената във формулировката на теоремата околност. За определеност можем да приемем, че $x>a$. Означаваме с t променлива, която се изменя в сегмента $[a,\,x]$, и разглеждаме помощната функция:

$$\psi(t)=f(x)-\varphi(x,\,t)-(x-t)^p\,.\,Q(x), \tag{6.37}$$

където

$$Q(x)=(x-a)^{-p}R_{n+1}(x). \tag{6.38}$$

Подробно ψ може да се запише и така:

$$\psi(t)=f(x)-f(t)-\frac{(x-t)}{1!}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f^{(2)}(t)-\ldots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-(x-t)^p\,.\,Q(x). \tag{6.39}$$

Нашата цел е да определим Q, като използваме свойствата на помощната функция ψ. Ще покажем, че функцията ψ удовлетворява всички условия на теоремата 6.3 (на Рол) в сегмента $[a, x]$.

От формула (6.39) и от условията, наложени на функцията f, е очевидно, че функцията ψ е непрекъсната в сегмента $[a, x]$ и диференцируема във всички вътрешни точки на този сегмент.* Ще се убедим, че $\psi(a)=\psi(x)=0$. Полагайки в (6.37) $t=a$, като вземем пред вид равенство (6.38), имаме

$$\psi(a)=f(x)-\varphi(x, a)-R_{n+1}(x).$$

Оттук въз основа на (6.36) получаваме $\psi(a)=0$. Равенството $\psi(x)=0$ следва непосредствено от формула (6.39).

И така за функцията ψ са изпълнени всички условия на теорема 6.3 (на Рол) в сегмента $[a, x]$. Според тази теорема съществува точка ξ, вътрешна за сегмента $[a, x]$, за която

$$\psi'(\xi)=0. \tag{6.40}$$

Като диференцираме равенството (6.39), получаваме

$$\psi'(t)=-f'(t)+\frac{1}{1!}f'(t)-\frac{x-t}{1!}f^{(2)}(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f^{(2)}(t) \tag{6.41}$$
$$-\cdots+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+p(x-t)^{p-1}Q(x).$$

Лесно се вижда, че всички членове в дясната страна на (6.41) с изключение на последните два, се унищожават взаимно. Следователно

$$\psi'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+p(x-t)^{p-1}Q(x). \tag{6.42}$$

Полагаме във формула (6.42) $t=\xi$ и като използваме равенството (6.40), получаваме

$$Q(x)=\frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi). \tag{6.43}$$

Като съпоставим (6.43) и (6.38), намираме окончателно

$$R_{n+1}(x)=(x-a)^p Q(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi).$$

Случаят, когато $x<a$, се разглежда съвършено аналогично. □

* От условието за съществуване на производна от $(n+1)$-ви ред за функцията f в околност на точката a следва непрекъснатостта на функцията и всичките ѝ производни до n-ти ред в тази околност, а оттук и в сегмента $[a, x]$. По-нататък може да се твърди, че функцията f и всичките ѝ производни до n-ти ред са един път диференцируеми в посочената околност на точката a и следователно навсякъде вътре в сегмента $[a, x]$.

Ще намерим разлагането по формулата на Тейлор на алгебричните полиноми от n-та степен. Нека

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n.$$

Тогава, понеже $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$, остатъчният член $R_{n+1}(x)=0$, и формулата на Тейлор (6.33) приема вида

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

(Тук за точка a може да се вземе всяка точка от безкрайната права.) Следователно формулата на Тейлор дава възможност всеки полином f да се представи във вид на полином по степените на $x-a$, където a е произволно реално число.

Нека сега f е произволна функция, удовлетворяваща условията на теорема 6.10. Ще се постараем да изясним какви свойства притежава полиномът (6.35), фигуриращ във формулата на Тейлор за тази функция. Както и по-рано, ще означаваме този полином със символа $\varphi(x, a)$. Със символа $\varphi^{(n)}(x, a)$ означаваме n-тата производна на $\varphi(x, a)$ относно x. Като диференцираме формула (6.35) по x и положим след това $x=a$, получаваме следните равенства:

$$\begin{aligned}\varphi(a, a)&=f(a),\\ \varphi'(a, a)&=f'(a),\\ \varphi^{(2)}(a, a)&=f^{(2)}(a),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \varphi^{(n)}(a, a)&=f^{(n)}(a).\end{aligned} \tag{6.44}$$

Тогава фигуриращият във формулата на Тейлор полином $\varphi(x, a)$ за произволна функция f има следните свойства: той и производните му до n-ти ред включително в точката $x=a$ са равни съответно на f и производните ѝ до n-ти ред.

6.8. Различни форми на остатъчния член. Формула на Маклорен

6.8.1. Остатъчният член във форма на Лагранж, Коши и Пеано. По-рано получихме формулата на Тейлор с остатъчен член в обща форма. Сега ще установим други възможни представяния на остатъчния член. Две от тях могат да бъдат получени като частен случай от общата формула.

Най-напред ще преобразуваме формулата за остатъчния член (6.34). Тъй като точката ξ е между точките a и x, то има такова

число* θ от интервала $0<\theta<1$, че $\xi-a=\theta(x-a)$. При това $\xi=a+\theta(x-a)$, $x-\xi=(x-a)(1-\theta)$. Така формула (6.34) може да се запише във вида

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{6.45}$$

Ще разгледаме сега два важни частни случая на формула (6.45): 1) $p=n+1$; 2) $p=1$ (ще напомним, че във формулите (6.34) и (6.45) p може да бъде произволно положително число). Първият от тези частни случаи ($p=n+1$) довежда до ***остатъчен член във форма на Лагранж***

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{6.46}$$

Тази форма на остатъчния член се употребява най-често в приложенията. Остатъчният член във формата на Лагранж напомня последния член във формулата на Тейлор, само че $(n+1)$-вата производна на функцията f се пресмята не в точката a, а в някоя точка $\xi=a+\theta(x-a)$ между a и x.

Вторият от посочените по-горе частни случаи ($p=1$) води до ***остатъчен член във формата на Коши***:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{6.47}$$

Тъй като формите на Лагранж и Коши отговарят на различни стойности на p, а θ зависи от p, то стойностите на θ във формулите (6.46) и (6.47) са в общия случай различни. За оценка на някои функции формата на Коши е за предпочитане пред формата на Лагранж. Тези две форми на остатъчния член се използват обикновено в случаите, когато се иска при една или друга фиксирана стойност на x, различна от a, да се пресметне приближено стойността на функцията f.

Естествено е да заменим стойността на функцията $f(x)$ със стойността на полинома $\varphi(x, a)$ и да оценим грешката при това приближение. Срещат се задачи, в които ни интересува не числената стойност на тази грешка, а само порядъкът ѝ относно величината $(x-a)$. За тази цел е удобна друга форма за записване на остатъчния член, която сега ще изведем.

Ще докажем предварително една лема.

Лема 2. *Нека функцията g е дефинирана в околността Ω на точката a, има производни до ред $n-1$ в Ω и n-та производна в*

* Трябва да подчертаем, че ξ, а следователно и θ зависят от p.

точката a. Ако $g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(n)}(a)=0$, то за всяко $x\in\Omega$ е в сила съотношението

$$g(x)=o((x-a)^n). \tag{6.48}$$

Доказателство. Ще извършим доказателството индуктивно по отношение на натуралното число n.

За $n=1$ представянето (6.48) е в сила, тъй като g е диференцируема в точката a и $g'(a)=0$.

Да допуснем, че твърдението е вярно за n и да го докажем за $n+1$. От направеното допущане следва, че за всяко $x\in\Omega$ е в сила представянето

$$g'(x)=o((x-a)^n). \tag{6.49}$$

От друга страна, от теоремата за крайните нараствания имаме, че за всяко $x\in\Omega$ е в сила равенството

$$g(x)=g(x)-g(a)=(x-a)\,g'(\xi), \tag{6.50}$$

където ξ е между x и a, т. е. $|\xi-a|<|x-a|$.
От (6.49) и (6.50) получаваме

$$g(x)=(x-a)\,o((\xi-a)^n)=(x-a)\,o((x-a)^n)=o((x-a)^{n+1}). \quad \square$$

Ще предполагаме, че функцията f има производна от $(n-1)$-ви ред в някоя околност на точката a и производна от n-ти ред в самата точка a.

При тези предположения ще разгледаме полинома $\varphi(x, a)$, определен от съотношението (6.35). Разликата между $f(x)$ и този полином, както и при доказателството на теорема 6.10, ще означим със символа $R_{n+1}(x)$, т. е. полагаме $R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x, a)$.

Ще докажем, че при направените предположения за остатъчния член $R_{n+1}(x)$ е в сила следното представяне:

$$R_{n+1}(x)=o((x-a)^n). \tag{6.51}$$

Представянето (6.51) е прието да се нарича ***остатъчен член във форма на Пеано****.

Като използваме установеното в края на предишния параграф свойство на полинома $\varphi(x, a)$, изразяващо се с равенствата (6.44), получаваме следните равенства:

$$R_{n+1}(a)=0,\ R'_{n+1}(a)=0,\ R''_{n+1}(a)=0,\ \cdots,\ R^{(n)}_{n+1}(a)=0. \tag{6.52}$$

От равенствата (6.52) и лема 2 следва представянето (6.51).

В заключение ще запишем формулата на Тейлор с остатъчен член във формата на Пеано

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+o((x-a)^n).$$

* Джузепе Пеано — италиански математик (1853—1932).

6.8.2. Друго записване на формулата на Тейлор. Полагаме в (6.33) $a=x_0$, $x-a=\Delta x$ и вземаме остатъчния член във формата на Лагранж (6.46). При това $x=x_0+\Delta x$ и получаваме

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\frac{f'(x_0)}{1!}+(\Delta x)^2\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}+\cdots+(\Delta x)^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+(\Delta x)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\,.\,\Delta x)}{(n+1)!} \tag{6.53}$$

(тук θ е число от интервала $0<\theta<1$). Формулата на Тейлор (6.53) е естествено обобщение на формулата на Лагранж (6.5). Формулата на Лагранж (6.5) се получава от формулата (6.53) при $n=0$.

6.8.3. Формула на Маклорен. Формулата на Тейлор (6.33) с център в точката $a=0$ е прието да се нарича ***формула на Маклорен****, така че формулата на Маклорен представя функцията в околност на точката $x=0$. Ще запишем формулата на Маклорен за произволна функция f с остатъчен член във формите на Лагранж, Коши и Пеано:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_{n+1}(x), \tag{6.54}$$

където остатъчният член има вида:

1) във форма на Лагранж

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\qquad(0<\theta<1); \tag{6.55}$$

2) във форма на Коши

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)\qquad(0<\theta<1); \tag{6.56}$$

3) във форма на Пеано

$$R_{n+1}(x)=o(x^n). \tag{6.57}$$

(Използвахме формулите (6.46), (6.47) и (6.48).)

Ще преминем към оценка на остатъчния член във формулата на Тейлор — Маклорен, намиране на разлаганията по формулата на Маклорен на най-важните елементарни функции и разглеждане на различни приложения на тази формула.

* Колин Маклорен — английски математик (1698—1746).

6.9. Оценка на остатъчния член. Разлагания на някои елементарни функции

6.9.1. Оценка на остатъчния член за произволна функция. Ще оценим остатъчния член за произволна функция f във формулата на Маклорен (6.54), взет във формата на Лагранж (6.55).

Ще предположим, че разглежданата функция f притежава следните свойства: съществува такова реално число M, че за всички номера n и за всички стойности на аргумента x от разглежданата околност на точката $x=0$ да е изпълнено неравенството

$$|f^{(n)}(x)|\leqq M. \tag{6.58}$$

От неравенството (6.58) следва

$$|f^{(n)}(\theta x)|\leqq M\quad\text{за } 0<\theta<1 \tag{6.59}$$

и затова от формулата (6.55) получаваме

$$|R_{n+1}(x)|=\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}|f^{(n+1)}(\theta x)|\leqq M|x|^{n+1}/(n+1)!.$$

Така получаваме следната универсална оценка за остатъчния член в околност на точката $x=0$:

$$|R_{n+1}(x)|\leqq M|x|^{n+1}/(n+1)!. \tag{6.60}$$

Напомняме, при всяко фиксирано x

$$\lim_{n\to\infty}|x|^{n+1}/(n+1)!=0$$

(вж. примера от 3.2.4). Оттук следва, че ако изберем достатъчно голям номер n, можем да направим дясната страна на (6.60) произволно малка. Това дава възможност да се използва формулата на Маклорен за приближено пресмятане на функции, притежаващи посоченото свойство, с произволна отнапред зададена точност. Ще приведем примери на функции, съвкупността от всички производни на които е ограничена в околност на точката $x=0$.

1. $f(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$. Съвкупността на всички производни на тази функция е ограничена във всеки сегмент $[-r, r]$ $(r>0)$ от числото $M=e^r$.

2. $f(x)=\cos x$ или $f(x)=\sin x$. Съвкупността от всички производни на всяка от тези функции е ограничена навсякъде върху безкрайната права от числото $M=1$.

6.9.2. Разлагане по формулата на Маклорен на някои елементарни функции.

1°. $f(x)=e^x$. Тъй като $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ за всяко n, формулата на Маклорен (6.54) има вида

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x), \tag{6.61}$$

където остатъчният член във формата на Лагранж е

(6.62) $$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\ (0<\theta<1).$$

Във всеки сегмент $[-r, r]$ $(r>0)$ поради $|e^{\theta x}|<e^r$ получаваме следната оценка за остатъчния член:

(6.62′) $$|R_{n+1}(x)|<\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r.$$

2°. $f(x)=\sin x$. Тъй като $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\pi/2)$,

$$f^{(n)}(0)=\sin(n\pi/2)=\begin{cases}0 & \text{при четно } n,\\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{при нечетно } n,\end{cases}$$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

(6.63) $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{(n-1)/2}\frac{x^n}{n!}+R_{n+2}(x),$$

където n е нечетно число, а остатъчният член във формата на Лагранж е

$$R_{n+2}(x)=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\sin(\theta x+(n+2)\pi/2)\quad(0<\theta<1).$$

Очевидно във всеки сегмент $[-r, r]$ $(r>0)$ за остатъчния член е в сила следната оценка:

(6.64) $$|R_{n+2}(x)|\leqq r^{n+2}/(n+2)!.$$

3°. $f(x)=\cos x$. Тъй като $f^{(n)}(x)=\cos(x+n\pi/2)$,

$$f^{(n)}(0)=\cos(n\pi/2)=\begin{cases}0 & \text{при нечетно } n,\\ (-1)^{n/2} & \text{при четно } n,\end{cases}$$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

(6.65) $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n/2}\frac{x^n}{n!}+R_{n+2}(x),$$

където n е четно число, а остатъчният член във формата на Лагранж е

$$R_{n+2}(x)=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos(\theta x+(n+2)\pi/2)\qquad(0<\theta<1).$$

Във всеки сегмент $[-r, r]$ $(r>0)$ получаваме за остатъчния член оценката (6.64).

4°. $f(x)=\ln(1+x)$. Тъй като

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(1+x)^{-n}(n-1)!,\quad f(0)=0,\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

(6.66) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}(x).$$

Остатъчния член този път ще запишем и оценим във формите на Лагранж и Коши:

(6.67) $R_{n+1}(x)=(-1)^n x^{n+1}(1+\theta x)^{-n-1}/(n+1)$ (форма на Лагранж),

(6.68) $R_{n+1}(x)=(-1)^n x^{n+1}(1-\theta)^n(1+\theta x)^{-n-1}$ (форма на Коши).

За оценка на R_{n+1} за стойност на x от сегмента $0\leqq x\leqq 1$ е удобно да се използва формата на Лагранж (6.67). Ако във формулата (6.67) вземем абсолютните стойности, получаваме за всяко x от сегмента $0\leqq x\leqq 1$

(6.69) $$|R_{n+1}(x)|<1/(n+1).$$

От оценката (6.69) е очевидно, че за всяко x от сегмента $0\leqq x\leqq 1$ $R_{n+1}(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Да оценим сега R_{n+1} за отрицателни стойности на x от сегмента $-r\leqq x\leqq 0$, където $0<r<1$. За тази цел ще използваме формата на Коши (6.68).

Преписваме този остатъчен член във вида

(6.70) $$R_{n+1}(x)=(-1)^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}.$$

Като вземем под внимание, че за разглежданите стойности на x $(1-\theta)/(1+\theta x)<1$, от (6.70) за модула на остатъчния член получаваме

(6.71) $$|R_{n+1}(x)|<r^{n+1}/(1-r).$$

Тъй като $r<1$, то от оценката (6.71) следва, че $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$.

5°. $f(x)=(1+x)^\alpha$, където α е реално число и $x>-1$. Тъй като

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),$$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

(6.72) $$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x),$$

където остатъчният член във формата на Лагранж е

(6.73) $$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

В частния случай, когато, $\alpha=n$ е цяло число, $R_{n+1}(x)=0$ и получаваме известната от елементарния курс формула за бинома на Нютон:

(6.74) $$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n.$$

Ако трябва да получим разлагане не на двучлена $(1+x)^n$, а на двучлена $(a+x)^n$, то можем да изнесем a^n пред скоби и да използваме формула (6.74). Така ще получим

$$(a+x)^n=a^n(1+x/a)^n$$
$$=a^n\left(1+\frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdot\cdot\cdot+\left(\frac{x}{a}\right)^n\right).$$

Следователно общият случай на бинома на Нютон е частен случай от формулата на Маклорен.

6°. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$. Понеже

$$f^{(n)}(x)=(1+x^2)^{-n/2}(n-1)!\,\sin(n(\operatorname{arc\,tg} x+\pi/2))$$

(вж. пример 5 от 5.6.2), то

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{при четно } n,\\ (-1)^{(n-1)/2}(n-1)! & \text{при нечетно } n\end{cases}$$

и формулата на Маклорен приема вида

(6.75) $$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdot\cdot\cdot+(-1)^{(n-1)/2}\frac{x^n}{n}+R_{n+2}(x),$$

където n е нечетно число, а остатъчният член във формата на Лагранж е

$$R_{n+2}(x)=x^{n+2}(n+2)^{-1}(1+(\theta x)^2)^{-(n+2)/2}\sin((n+2)(\operatorname{arc\,tg} x+\pi/2))$$
$$(0<\theta<1).$$

За остатъчния член във всеки сегмент $[-r, r]$ (където $r>0$) имаме оценката

(6.76) $$|R_{n+2}(x)|<r^{n+2}/(n+2).$$

От оценката (6.76) е очевидно, че при всяко $r\leq 1$ остатъчният член $R_{n+2}(x)$ клони към нула при $n\to\infty$.

6.10. Примери за приложения на формулата на Маклорен

6.10.1. Пресмятане на числото e на АСМ. В 3.2.3 въведохме числото e като граница на редицата $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и получихме за e груба оценка от вида $2\leq e\leq 3$. В тази точка ще покажем как може да се пресметне числото e с произволна точност.

Ще използваме формулата на Маклорен (6.61) и оценката на остатъчния член (6.62'), като ще положим в тях $x=r=1$. Ще получим

(6.77) $$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n!}+R_{n+1}(1),$$

където

(6.78) $$|R_{n+1}(1)|\leq e/(n+1)!<3/(n+1)!.$$

Като изберем в (6.77) и (6.78) n достатъчно голямо, можем да пресметнем с помощта на тези формули числото e с произволна отнапред зададена точност.

6.10.2. Доказателство за ирационалността на числото e. С помощта на формулата на Маклорен (6.77) ще докажем, че числото e е ирационално.

Като използваме за $R_{n+1}(1)$ представянето (6.62), при $x=1$ ще получим

(6.79) $$R_{n+1}(1)=e^{\theta}/(n+1)!,$$

където $0<\theta<1$. Следователно $R_{n+1}(1)$ удовлетворява неравенствата

(6.80) $$1/(n+1)!<R_{n+1}(1)<3/(n+1)!.$$

И така за e е в сила представянето (6.77) с неравенствата (6.80) за $R_{n+1}(1)$.

Ще предположим сега, че числото e е рационално, т. е. може да се представи във вида $e=m/n$, $n\geq 2$.

Като изберем във формулата на Маклорен (6.77) номера n, равен на знаменателя на рационалната дроб $e=m/n$, и като умножим (6.77) с $n!$, ще получим, че всяко от числата $n!e$ и $n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n!}\right)$ е цяло, докато числото $n!\,R_{n+1}(1)$ поради неравенството (6.80) удовлетворява условията $1/(n+1)<n!\,R_{n+1}(1)<3/(n+1)$ и следователно не е цяло. Така при умножаване на формулата на Маклорен (6.77) с числото $n!$ получаваме съотношението

$$n!e-n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n!}\right)=n!\,R_{n+1}(1),$$

лявата страна на което е цяло число, а дясната не е цяло число. □

6.10.3. Пресмятане стойностите на тригонометричните функции. Лесно е да се убедим, че стойностите на тригонометричните функции $\sin x$ и $\cos x$ за x от сегмента $[0, \pi/4]$ напълно определят стойностите на тези функции за всяко x. Затова можем да се

ограничим с пресмятането на $\sin x$ и $\cos x$ за стойности на x само от този сегмент. За да осигурим точност 10^{-4}, ще положим във формула (6.63) и в оценката (6.64) $n=5$, $r=\pi/4$. Тогава

$$|R_{n+2}(x)|=|R_7(x)|\leqq(\pi/4)^7/7!<10^{-4}$$

и затова за всяко x, удовлетворяващо условието $|x|\leqq\pi/4$, с точност до 10^{-4} имаме

$$\sin x\approx x-x^3/6+x^5/120.$$

Аналогично, като положим във формулата (6.65) и в оценката (6.64) $n=6$, $r=\pi/4$, получаваме

$$|R_{n+2}(x)|=|R_8(x)|\leqq(\pi/4)^8/8!<10^{-5}$$

и затова за всяко x, удовлетворяващо условието $|x|\leqq\pi/4$, с точност до 10^{-5}

$$\cos x\approx 1-x^2/2+x^4/24-x^6/720.$$

6.10.4. Пресмятане стойностите на логаритмичната функция. Всяко положително число a се представя, и то по единствен начин, във вида

(6.81) $$a=2^p\,.\,M,$$

където p е цяло число (с произволен знак), а M удовлетворява неравенствата*

(6.82) $$1/2\leqq M<1.$$

От (6.81) следва

(6.83) $$\ln a=p\ln 2+\ln M.$$

Като въведем вместо M нова променлива x, свързана с M чрез изразите

(6.84) $$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+x}{1-x},\quad x=\frac{M\sqrt{2}-1}{M\sqrt{2}+1},$$

ще получим от (6.82) и втората от формулите (6.84), че x не напуска границите на интервала**

(6.85) $$|x|<0{,}172.$$

* Наистина за всяко $a>0$, като положим $p=[\log_2 a]+1$, където $[x]$ е цялата част на числото x, $M=a\,.\,2^{-p}$, ще получим, че $p-1\leqq\log_2 a<p$, и затова $2^{p-1}\leqq a<2^p$, така че $a=2^p\,.\,M$, където $1/2\leqq M<1$.

** Достатъчно е да се намери максималната и минималната стойност на функцията, определена с втората от формулите (6.84) и сегмента $[1/2,1]$.

От (6.83) и първата от формулите на (6.84) следва

(6.86) $$\ln a=(p-1/2)\ln 2+\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

За пресмятане стойността на $\ln a$ ще използваме формулата (6.86), като ще развием в нея функцията $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ по формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Лагранж и ще отчетем, че x удовлетворява неравенството (6.85).

Тъй като при $n\geqq 1$ за тази функция f имаме

$$f^{(n)}(x)=(\ln(1+x))^{(n)}-(\ln(1-x))^{(n)}$$
$$=(-1)^{n-1}(1+x)^{-n}(n-1)!+(1-x)^{-n}(n-1)!,$$
$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{при четно } n,\\ 2(n-1)! & \text{при нечетно } n,\end{cases}$$

то формулата на Маклорен (6.54) с остатъчен член във формата на Лагранж има вида

(6.87) $$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\ldots+\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}+R_{2n+3}(x),$$

където

(6.88) $$R_{2n+3}(x)=x^{2n+3}(2n+3)^{-1}\{(1+\theta x)^{-2n-3}+(1-\theta x)^{-2n-3}\},\quad 0<\theta<1.$$

Ще оценим остатъчния член (6.88). От (6.85) получаваме, че изразът в големите скоби на (6.88) не надминава сумата $1+(1-0{,}172)^{-2n-3}$. Следователно за целия остатъчен член R_{2n+3} ще бъде в сила оценката

(6.89) $$|R_{2n+3}(x)|\leqq(0{,}172)^{2n+3}(2n+3)^{-1}\{1+(1-0{,}172)^{-2n-3}\}$$
$$\leqq(2n+3)^{-1}\{(0{,}172)^{2n+3}+(0{,}208)^{2n+3}\}.$$

От (6.86) и (6.87) следва, че за пресмятане на $\ln a$ може да се използва приближената формула

(6.90) $$\ln a\approx(p-1/2)\ln 2+2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right),$$

при която грешката не надминава стоящата в дясната страна на (6.89) величина.

При пресмятания с помощта на АСМ обикновено се използва формулата (6.90) при $n=6$. Ще отбележим, че при $n=6$ получаваме

$$\ln a\approx(p-1/2)\ln 2+2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{13}}{13}\right)$$

с грешка, не по-голяма от $15^{-1}(0{,}172)^{15}+(0{,}208)^{15})<5\,.\,10^{-12}$.

6.10.5. Пресмятане стойностите на обратните тригонометрични функции. Достатъчно е да се ограничим с пресмятането на стойностите на $\operatorname{arc\,tg} x$, тъй като пресмятането на стойностите на функцията $\operatorname{arc\,ctg} x$, $\arcsin x$ и $\arccos x$ се свежда до пресмятане на стойностите на $\operatorname{arc\,tg} x$ с помощта на формулите:

$$\operatorname{arc\,ctg} x=\pi/2-\operatorname{arc\,tg} x,\quad \arcsin x=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x=\pi/2-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Освен това достатъчно е да можем да пресмятаме стойностите на функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ само за положителни стойности на аргумента, тъй като при произволен знак на x имаме $\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{sgn} x\,.\operatorname{arc\,tg}|x|$. Нещо повече, пресмятането на стойностите на функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ за всяка стойност на аргумента x се свежда лесно към пресмятане стойностите на тази функция за стойности на аргумента, принадлежащи на сегмента $0\leq x\leq 1/8$.

Нека отначало аргументът x на функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ удовлетворява условието $x>1$. Полагаме

$$x_1=\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} 1)=\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x-\pi/4).$$

Тогава

$$\operatorname{arc\,tg} x_1=\operatorname{arc\,tg} x-\pi/4,\ \text{т. е.}$$

(6.91) $$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,tg} x_1+\pi/4,$$

при което

$$x_1=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)-\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 1)}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)\,.\,\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 1)}=\frac{x-1}{x+1}<1.$$

Така формулата (6.91) свежда пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на $x\geq 1$ до пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x_1$ за стойности на $x_1\leq 1$.

Нека сега k е кое да е от числата 0, 1, 2 или 3. Ако стойността $\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1}$ е известна при всяко $k=0$, 1, 2 и 3, ще покажем как пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за x от сегмента $2^{-k-1}\leq x\leq 2^{-k}$ се свежда до пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x_1$ за стойности на x_1 от сегмента $0\leq x_1\leq 2^{-k-1}$. Полагаме

$$x_1=\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1}).$$

Тогава

(6.92) $$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,tg} x_1+\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1},$$

при което

(6.93) $$x_1=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)-\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1})}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1})}=\frac{x-2^{-k-1}}{1+x\,.\,2^{-k-1}}.$$

Понеже $2^{-k-1}\leq x\leq 2^{-k}$, от (6.93) е очевидно, че $0\leq x_1\leq 2^{-k-1}$. Затова равенството (6.92) свежда пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на x от сегмента $2^{-k-1}\leq x\leq 2^{-k}$ до пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x_1$ за стойности на x_1 от сегмента $0<x_1<2^{-k-1}$.

Като приложим формула (6.92) най-много четири пъти (за $k=0$, 1, 2 и 3), пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на x от сегмента [0, 1] се свежда до пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на x от сегмента [0, 1/8].

За пресмятането на стойностите на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на аргумента x от сегмента [0, 1/8] използваме формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Лагранж

(6.94) $$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+R_{2n+3}(x),$$

където

(6.95) $$R_{2n+3}(x)=x^{2n+3}(2n+3)^{-1}(1+(\theta x)^2)^{-(2n+3)/2}$$
$$\times\sin((2n+3)\operatorname{arc\,tg}(\theta x)+\pi/2)),\quad 0<\theta<1.$$

При всяко x от сегмента $0\leq x\leq 1/8$ за остатъчния член (6.95) е в сила оценката

(6.96) $$|R_{2n+3}(x)|\leq(2n+3)^{-1}\,.\,8^{-2n-3}.$$

От (6.94) следва, че за пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на аргумента от сегмента $0\leq x\leq 1/8=0{,}125$ може да се използва приближената формула

(6.97) $$\operatorname{arc\,tg} x\approx x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

при която грешката не надминава величината от дясната страна на (6.96).

При смятане на АСМ може да се използва формула (6.97) при $n=6$. Тогава

$$\operatorname{arc\,tg} x\approx x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{13}}{13}$$

с грешка, която не надминава $15^{-1}\,.\,8^{-15}<2\,.\,10^{-15}$.

6.10.6. Асимптотична оценка на елементарните функции и пресмятане на граници. Формулата на Тейлор — Маклорен е мощно средство за пресмятане на граници. От установеното в 6.9.2 разлагане на елементарните функции следват асимптотични оценки за тези функции, характеризиращи тяхното поведение в околността на точката $x=0$, т. е. при малки стойности на $|x|$, с точност до членовете от произволна степен n на малката величина x.

Като вземем във формулата на Маклорен за функциите e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ остатъчния член във формата на Пеано, ще получим, че за всяко n са в сила следните оценки:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),$$

(6.98)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$$

$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),$$

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2}).$$

Примери:

1. Като използваме втората от оценките (6.98), взета при $n=1$, пресмятаме границата

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x^3/3!+o(x^4)-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}(-1/3!+o(x))=-1/3!.$$

2. $$I=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\cdot\sin x}.$$

От вида на знаменателя може да се заключи, че определяща роля имат членовете от четвърта степен спрямо x (понеже $\sin x=x+o(x)$). Ползвайки формулите (6.98), записваме

(6.99) $$\cos x=1-x^2/2!+x^4/4!+o(x^5),$$

(6.100) $$\sin x=x+o(x),$$

(6.101) $$e^z=1+z+z^2/2+o(z^2).$$

Очевидно при $z=-x^2/2$ от (6.101) получаваме

(6.102) $$e^{-x^2/2}=1-x^2/2+x^4/8+o(x^4).$$

Съгласно формулите (6.99), (6.100) и (6.102) търсената гранична стойност може да се запише във вида

$$I=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2/2+x^4/8+o(x^4)-1+x^2/2-x^4/24}{x^4+o(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1/8+1/24+\alpha(x)}{1+\alpha(x)}=1/8-1/24=1/12.$$

(Тук със символа $\alpha(x)$ сме означили величината $x^{-4}o(x^4)$, която е безкрайно малка при $x\to0$.)

3. $I=\lim\limits_{x\to0}(\cos x+x^2/2)^{-x(\sin x-x)}$.

Означаваме с y величината $y=(\cos x+x^2/2)^{-x(\sin x-x)}$. Тогава $I=\lim\limits_{x\to0}y$. Като логаритмуваме* израза за y, ще имаме

$$\ln y=\frac{\ln(\cos x+x^2/2)}{x(\sin x-x)}.$$

Да пресметнем

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x+x^2/2)}{x(\sin x-x)}.$$

Тъй като $\cos x=1-x^2/2+x^4/24+o(x^5)$, $\sin x=x-x^3/6+o(x^4)$, ще получим

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^4/24+o(x^5))}{-x^4/6+o(x^5)}.$$

Ще отчетем сега, че $\ln(1+z)=z+o(z)$. От тази формула следва

$$\ln(1+x^4/24+o(x^5))=x^4/24+o(x^4),$$

така че

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{x^4/24+o(x^4)}{-x^4/6+o(x^5)}=\lim_{x\to0}\frac{1/24+x^{-4}o(x^4)}{-1/6+o(x)}=-1/4,$$

откъдето

$$I=\lim_{x\to0}y=e^{-1/4}.$$

* При малки стойности на x изразът $\cos x+x^2/2$ е очевидно положителен.

7. Изследване графиката на функция и намиране на екстремални стойности

Разработеният в предишните две глави апарат на диференциалното смятане се прилага в тази глава за изследване графиката на функция и за намиране както на локалните, така и на глобалните екстремални стойности на функция.

7.1. Стационарни точки

7.1.1. Признаци за монотонност на функция. От предишната глава вече знаем, че изучаването на участъците на монотонност на диференцируема функция се свежда до изследване знака на първата производна на тази функция.

За удобство ще формулираме още веднъж намерените в предишната глава условия за монотонност на функция.

1°. *За да бъде диференцируемата в интервала (a, b) функция f ненамаляваща (нерастяща), е необходимо и достатъчно производната ѝ f' да бъде неотрицателна (неположителна) навсякъде в този интервал.*

2°. *За да бъде диференцируемата в интервала (a, b) функция f растяща (намаляваща), е достатъчно производната ѝ f' да бъде положителна (отрицателна) навсякъде в този интервал.*

Ще намерим областите на монотонност на функцията $f(x) = x^3-3x^2-4$. Производната $f'(x) = 3x(x-2)$ на тази функция е положителна при $-\infty<x<0$, отрицателна при $0<x<2$ и положителна при $2<x<+\infty$. Затова съгласно казаното дадената функция f расте на полуправата $(+\infty, 0)$, намалява в интервала $(0, 2)$ и расте на полуправата $(2, +\infty)$. Графиката на тази функция е изобразена на фигура 7.1.

7.1.2. Намиране на стационарни точки. Ще напомним определенията за локален максимум и локален минимум на функция.

*Нека функцията f е дефинирана навсякъде в някоя околност на точката c. Тогава тази функция има в точката c **локален максимум** (или съответно **локален минимум**), ако съществува такава околност на точката c, че стойността $f(c)$ да е най-голяма (или съответно най-малка) измежду всички стойности $f(x)$ на тази функция от тази околност.*

Локалният максимум и локалният минимум се обединяват под общото название ***локален екстремум***.

В 6.1 установихме необходимо условие за екстремум на диференцируема в дадена точка функция.

Ако функцията f е диференцируема в точка c и има в тази точка локален екстремум, то $f'(c)=0$.

Заедно с това в 6.1 беше показано, че анулирането на производната е само необходимо, но не и достатъчно условие за локален екстремум на диференцируема в дадена точка функция.

Така функцията $f(x)=x^3$ има производна $f'(x)=3x^2$, която се анулира в точката $x=0$, но няма екстремум в тази точка (вж. графиката на тази функция на фиг. 6.2).

Точките, в които производната f' на функцията f се анулира, ще наричаме ***стационарни точки*** на функцията f.

Всяка стационарна точка е точка на възможен екстремум на функцията. Обаче, за да се направи заключението, че в дадена стационарна точка действително има екстремум, са необходими допълнителни изследвания, за които трябва да разполагаме с достатъчни условия за екстремум.

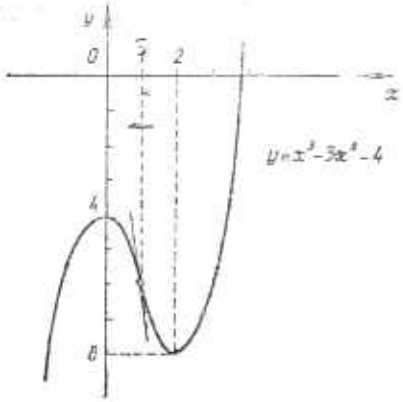
Такива условия ще бъдат установени в следващите три точки.

7.1.3. Първо достатъчно условие за екстремум.

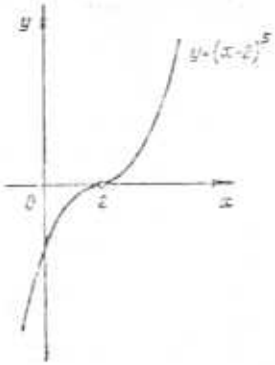
Теорема 7.1. *Нека функцията f е диференцируема навсякъде в някоя околност на точката c и нека c е стационарна точка за функцията f. Тогава, ако в тази околност производната f' е положителна (отрицателна) отляво на точката c и отрицателна (положителна) отдясно на точката c, функцията f има в точката c локален максимум (минимум). Ако производната f' има в тази околност един и същ знак отляво и отдясно на точката c, то функцията f няма екстремум в точката c.*

Доказателство. 1. Нека отначало производната f' в разглежданата околност е положителна (отрицателна) отляво на точката c и отрицателна (положителна) отдясно на точката c. Трябва да се докаже, че стойността $f(c)$ е най-голяма (най-малка) измежду всички стойности $f(x)$ в разглежданата околност. Означаваме с x_0 произволна точка от разглежданата околност, различна от c. Достатъчно е да се докаже, че $f(c)-f(x_0)>0$ (<0).

Тъй като функцията f е диференцируема навсякъде в разглежданата околност на точката c, то в сегмента, ограничен от



Фиг. 7.1



Фиг. 7.2

точките c и x_0, за функцията f са изпълнени всички условия на теорема 6.4 на Лагранж. Според тази теорема

$$f(c)-f(x_0)=(c-x_0)f'(\xi), \tag{7.1}$$

където ξ е някоя стойност на аргумента между x_0 и c. Тъй като производната $f'(\xi)$ е положителна (отрицателна) при $x_0<c$ и отрицателна (положителна) при $x_0>c$, дясната страна на (7.1) е положителна (отрицателна).

2. Нека сега производната f' има един и същ знак отляво и отдясно на c. Означавайки, както по-рано, с x_0 произволна точка от разглежданата околност, различна от c, и повтаряйки горните разсъждения, ще получим, че дясната страна на (7.1) има различни знаци при $x_0<c$ и $x_0>c$. Това доказва, че в точката c нямаме екстремум. □

Следващото от теорема 7.1 правило може да се формулира така:

1. *Ако при преминаването през дадена стационарна точка с производната f' сменя знака си от плюс на минус (от минус на плюс), то функцията f има в точката с локален максимум (минимум).* 2. *Ако при преминаването през дадена стационарна точка с производната f' не сменя знака си, то функцията няма екстремум в точката c.*

Примери:

1. Намерете точките на екстремум на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. Тъй като $f'(x)=3x(x-2)$, функцията f има две стационарни точки $x=0$ и $x=2$. При преминаване през точката $c=0$ производната сменя знака си от плюс на минус, а при преминаване

през точката $c=2$ — от минус на плюс. Следователно $x=0$ е точка на локален максимум, а $x=2$ е точка на локален минимум (вж. фиг. 7.1).

2. Намерете точките на екстремум на функцията $f(x)=(x-2)^5$. Производната $f'(x)=5(x-2)^4$ се анулира единствено в точката $x=2$. Тъй като $f'(x)$ е положителна както отляво, така и отдясно на тази точка, то функцията $f(x)=(x-2)^5$ няма точка на екстремум. Графиката на тази функция е дадена на фиг. 7.2.

Понякога изследването на знака на първата производна отляво и отдясно на стационарна точка може да се окаже доста трудно. За такива случаи ще дадем друго достатъчно условие за екстремум в дадена стационарна точка c, което не изисква изследване на знака на f' в околност на точката c, но предполага съществуването на различна от нула втора производна $f^{(2)}(x)$ в точката c.

7.1.4. Второ достатъчно условие за екстремум

Теорема 7.2. *Нека функцията f има в дадена стационарна точка с крайна втора производна. Тогава функцията $f(x)$ има в точката с локален максимум, ако $f^{(2)}(c)<0$, и локален минимум, ако $f^{(2)}(c)>0$.*

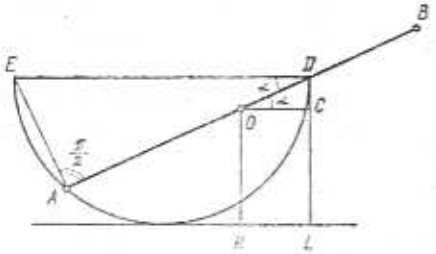
Доказателство. От условието $f^{(2)}(c)<0\,(>0)$ и от теорема 6.1 следва, че функцията f' намалява (расте) в точката c. Тъй като по условие $f'(c)=0$, то съществува околност на точката c, в която $f'(c)$ е положителна (отрицателна) отляво на c и отрицателна (положителна) отдясно на c. Но тогава съгласно предишната теорема f има в точката c локален максимум (минимум). □

Забележка. Теорема 7.2 има, общо казано, по-тясна сфера на действие от теорема 7.1. Така например теорема 7.2 не решава въпроса за екстремум, когато втората производна $f^{(2)}(x)$ не съществува в точката c и когато $f^{(2)}(c)=0$. В последния случай при решаване на въпроса за наличие на екстремум е необходимо да се изучи в точката c и поведението на производните от по-висок ред, което ще направим по-нататък.

Примери:

1. В чаша с формата на полукълбо с радиус r е сложен хомогенен прът с дължина l (фиг. 7.3). При предположението, че $2r<l<4r$, да се намери равновесното положение на пръта.

Равновесното положение на пръта съответствува на минималната стойност на потенциалната му енергия, т. е. на най-ниското положение на центъра на тежестта му O (тъй като прътът е хомогенен, центърът на тежестта му съвпада с неговата среда). Като означим с OK перпендикуляра към равнината, на която стои чашата, ще сведем задачата до намирането на такова положение



Фиг. 7.3

на пръта AB, при което отсечката OK има най-малка дължина. Най-напред ще пресметнем дължината на отсечката OK като функция от ъгъла α на наклона на пръта към равнината, на която стои чашата. Нека DL е успоредна на OK, а OC е перпендикулярна на OK (D е точката, в която прътът се опира в ръба на чашата).

От правоъгълния триъгълник EAD имаме $AD=ED\cos\alpha=2r\cos\alpha$. По условие $AO=l/2$, така че

$$OD=AD-AO=2r\cos\alpha-l/2.$$

От друга страна, $DC=DL=OK=r-OK$. Затова от правоъгълния триъгълник ODC имаме

$$\sin\alpha=\frac{DC}{OD}=\frac{r-OK}{2r\cdot\cos\alpha-l/2}.$$

Следователно дължината на отсечката OK, която ще означим с f, е $f(\alpha)=r+\frac{l}{2}\sin\alpha-r\sin 2\alpha$. Преминаваме към определянето на тази стойност на ъгъла α, за която f има минимум. (Ясно е, че можем да се ограничим със стойности за ъгъл α от първия квадрант.) Тъй като

$$f'(\alpha)=\frac{l}{2}\cos\alpha-2r\cos 2\alpha=\frac{l}{2}\cos\alpha+2r-4r\cos^2\alpha,$$

то стационарните точки ще са решения на квадратното уравнение $4r\cos^2\alpha-\frac{l}{2}\cos\alpha-2r=0$. Понеже $\cos\alpha$ е положителен в първия квадрант, то ще ни интересува само положителният корен на това уравнение

$$\cos\alpha_0=\frac{l+\sqrt{l^2+128r^2}}{16r}. \tag{7.2}$$

Макар и от смисъла на задачата да е ясно, че единствената ста-

ционарна точка α_0 е точка на минимум за функцията f, ще установим това с помощта на теорема 7.2. Достатъчно е да се убедим, че $f^{(2)}(\alpha_0)>0$. Тъй като

$$f^{(2)}(\alpha)=-\frac{l}{2}\sin\alpha+4r\sin 2\alpha=8r\sin\alpha\,.\,(\cos\alpha-l/16r),$$

то от (7.2) имаме

$$f^{(2)}(\alpha_0)=8r\sin\alpha_0(\cos\alpha_0-l/16r)=\frac{1}{2}\sin\alpha_0.\sqrt{l^2+128r^2}>0.$$

С това е установено, че на равновесното положение на пръта отговаря определеният от формула (7.2) ъгъл на наклона му към равнината, на която стои чашата.

2. Още веднъж ще намерим точките на екстремум на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. Стационарните точки на тази функция, както вече видяхме, са $x=0$ и $x=2$. Понеже

$$f^{(2)}(x)=6x-6,\ f^{(2)}(0)=-6<0,\ f^{(2)}(2)=6>0,$$

то според теорема 7.2 функцията f има максимум в точката 0 и минимум в точката 2. Екстремалните стойности на тази функция са

$$f_{\max}=f(0)=-4,\ f_{\min}=f(2)=-8.$$

7.1.5 Трето достатъчно условие на екстремум

Теорема 7.3. *Нека $n\geq 1$ е нечетно число и нека функцията f има производна от ред n в някоя околност на точката c и производна от ред $n+1$ в точката c. Тогава, ако са изпълнени съотношенията*

$$f'(c)=f^{(2)}(c)=\ldots=f^{(n)}(c)=0,\ f^{(n+1)}(c)\neq 0, \tag{7.3}$$

функцията f има в точката c локален екстремум, по-точно локален максимум при $f^{(n+1)}(c)<0$ и локален минимум при $f^{(n+1)}(c)>0$.

Доказателство. При $n=1$ теорема 7.3 съвпада с доказаната теорема 7.2, така че трябва да проведем доказателството само за нечетно $n\geq 3$.

Нека нечетното число n удовлетворява условието $n\geq 3$ и нека за определеност $f^{(n+1)}(c)>0$. Ще докажем, че функцията f има в точката c локален минимум.

Тъй като $f^{(n+1)}(c)>0$, функцията $f^{(n)}$ расте в точката c съгласно теорема 6.1. Но тогава, понеже $f^{(n)}(c)=0$, може да се твърди, че навсякъде в достатъчно малка околност на точката c функцията $f^{(n)}$ е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c.

Като имаме пред вид това, ще развием функцията f' в околност на точката c по формулата на Тейлор, като ще запишем остатъчния член във формата на Лагранж (вж. 6.8.7). Ще по-

лучим, че за всяко x от достатъчно малка околност на точката c съществува такава точка ξ между x и c, че

$$f'(x)=f'(c)+\frac{(x-c)}{1!}f^{(2)}(c)+\ldots+\frac{(x-c)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(c)$$
$$+\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi).$$

Съгласно съотношенията (7.3) това разлагане добива вида

$$f'(x)=\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi). \tag{7.4}$$

По-рано установихме, че за всяко x от достатъчно малка околност на точката c производната $f^{(n)}$ е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c. Тъй като ξ е между x и c, то за всяко x от достатъчно малка околност на точката c величината $f^{(n)}(\xi)$ (а очевидно поради нечетността на n и цялата дясна страна на (7.4)) е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c.

И така с помощта на равенство (7.4) доказахме, че производната $f'(x)$ за всички x от достатъчно малка околност на точката c е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c. В този случай според първото достатъчно условие за екстремум (т. е. теорема 7.1) функцията f има в точката c локален минимум.

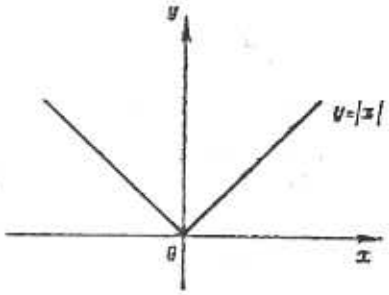
Случаят $f^{(n+1)}(c)<0$ се разглежда съвършено аналогично. Същите разсъждения и формула (7.4) в този случай дават възможност да се заключи, че функцията f има в точката c локален максимум.

Забележка. Много важно е изискването за нечетност на числото n в теорема 7.3. При четно n и при запазване на всички останали условия на теорема 7.3 функцията f няма да има екстремум в точката c (вж. по този повод теорема 7.10).

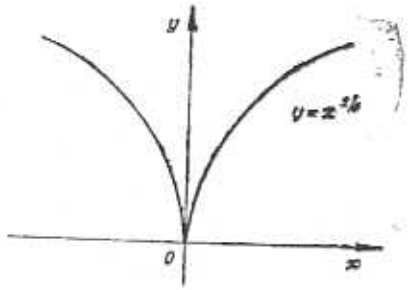
7.1.6. Екстремум на функция, която не е диференцируема в дадена точка. По-рано разгледахме въпроса за съществуване на екстремум на функцията f в точката c, в която функцията f е диференцируема. В тази точка ще изучим въпроса за съществуване на екстремум в точката c на такава функция, която не е диференцируема в точката c, но е диференцируема във всяка друга точка на някоя околност на точката c и освен това е непрекъсната в точката c.

Оказва се, че теорема 7.1 може да бъде обобщена в случай на такава функция. В сила е следното твърдение:

Теорема 7.4. *Нека функцията f е диференцируема навсякъде в някоя околност на точката c с изключение евентуално на точката c и е непрекъсната в точката c. Тогава, ако в тази околност производната f' е положителна (отрицателна) отляво на точката*



Фиг. 7.4



Фиг. 7.5

c и отрицателна (положителна) отдясно на точката c, функцията f има в точката c локален максимум (минимум). Ако производната f' има един и същ знак отляво и отдясно на точката c, функцията няма екстремум в точката c.

Доказателството съвпада напълно с доказателството на теорема 7.1.

Достатъчно е да отбележим, че условията на теорема 7.4 и този път осигуряват приложимостта на теорема 6.4 на Лагранж към функцията f в сегмента, ограничен от точките c и x_0, където x_0 е произволна точка от достатъчно малка околност на точката c.

Примери:

1. Да се намерят точките на екстремум на функцията $f(x)=|x|$. Тази функция е диференцируема навсякъде върху безкрайната права освен в точката $x=0$ и е непрекъсната в точката $x=0$; при това $f'(x)=1$ при $x>0$ и $f'(x)=-1$ при $x<0$.

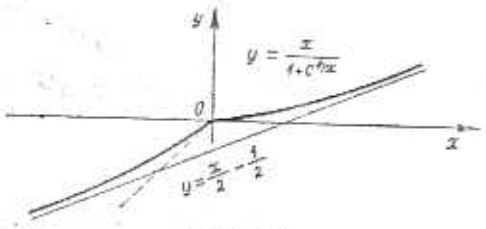
Теорема 7.1 не е приложима за тази функция, а съгласно теорема 7.4 тя има минимум при $x=0$ (фиг. 7.4).

2. Да се намерят точките на екстремум на функцията $f(x)=x^{2/3}$. Тази функция е непрекъсната върху цялата безкрайна права и е диференцируема навсякъде върху тази права с изключение на точката $x=0$. Производната ѝ при $x\neq 0$ е

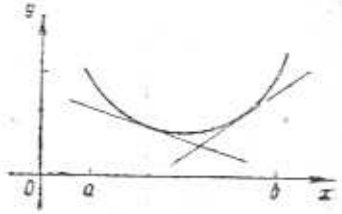
$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

В предишния пример производната имаше в точката $x=0$ прекъсване от първи род*; този път производната има в точката $x=0$ прекъсване от втори род („безкраен скок"). От израза за производната заключаваме, че тя е отрицателна отляво на точката $x=0$

* Въпреки че тази производна не съществува в точката $x=0$, тя има в тази точка крайни дясна и лява граница, несъвпадащи помежду си.



Фиг. 7.6



Фиг. 7.7

и положителна отдясно на тази точка. Следователно теорема 7.4 позволява да твърдим, че разглежданата функция има минимум в точката $x=0$ (графиката на тази функция е дадена на фиг. 7.5).

3. Да се намерят точките на екстремум на функцията

$$f(x)=\begin{cases} x/(1+e^{1/x}) & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0. \end{cases}$$

Лесно се вижда, че функцията е непрекъсната върху цялата безкрайна права. Действително единствената „съмнителна" точка е $x=0$, но и в тази точка функцията е непрекъсната, тъй като

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} f(x)=0.$$

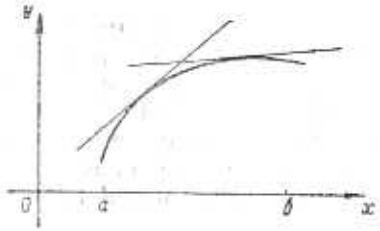
Очевидно разглежданата функция е диференцируема върху цялата безкрайна права с изключение на точката $x=0$. Навсякъде освен в тази точка производната се определя от формулата

$$f'(x)=(1+e^{1/x}+x^{-1}e^{1/x})(1+e^{1/x})^{-2}.$$

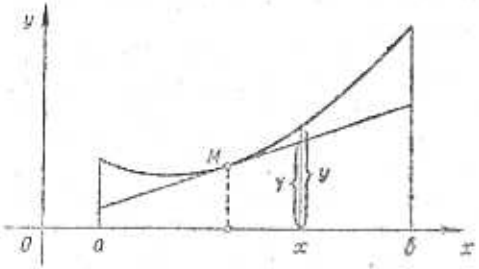
Тъй като $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{1/x}}$ не съществува, функцията f не е диференцируема в точката $x=0$. Понеже производната f' е положителна и отляво, и отдясно на точката $x=0$, то съгласно теорема 7.4 разглежданата функция няма екстремум в точката $x=0$ и следователно въобще няма екстремум. (Графиката на функцията е изобразена на фиг. 7.6.)

7.1.7. Обща схема за намиране на екстремум. Ще предполагаме, че функцията f е непрекъсната в интервала* (a, b) и производната ѝ f' съществува и непрекъсната в този интервал с изключение евентуално на краен брой точки. Освен това ще предполагаме, че

* Вместо интервала (a, b) може да се разглежда безкрайната права или отворена полуправа.



Фиг. 7.8



Фиг. 7.9

производната f' се анулира в интервала (a, b) само в краен брой точки. С други думи, предполагаме, че интервалът (a, b) има само краен брой точки, в които производната f' не съществува или се анулира. Означаваме тези точки с $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ $(a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b)$. Съгласно направените предположения производната f' запазва постоянен знак във всеки от интервалите (a, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_n, b). Следователно въпросът за съществуване на екстремум във всяка от точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$ може да бъде решен (в положителен или отрицателен смисъл) с помощта на теорема 7.4.

7.2. Изпъкналост на графиката на функция

Да предположим, че функцията f е диференцируема във всяка точка на интервала (a, b). Тогава, както установихме в 5.1.3, съществува допирателна към графиката на функцията във всяка точка $M(x, f(x))$ на тази графика $(a<x<b)$, при това тази допирателна не е успоредна на оста Oy.

Определение. *Ще казваме, че графиката на функцията f има в интервала (a, b)* ***изпъкналост, насочена надолу (нагоре),*** *ако графиката ѝ в този интервал няма точки под (над) всяка своя допирателна.*

Забележка 1. Терминът *над* (*или под*) има смисъл, къ́м като допирателната не е успоредна на оста Oy.

На фиг. 7.7 е дадена графиката на функция, която има в интервала (a, b) изпъкналост, насочена надолу, а на фиг. 7.8 — графиката на функция, която има изпъкналост, насочена нагоре.

Теорема 7.5. *Ако функцията f има в интервала (a, b) крайна втора производна и ако тази производна е неотрицателна (неположителна) навсякъде в този интервал, то графиката на функ-*

цията f има в интервала (a, b) изпъкналост, насочена надолу (нагоре).

Доказателство. За определеност ще разгледаме случая, когато $f^{(2)}(x) \geq 0$ навсякъде в (a, b). Ще означим с c произволна точка от интервала (a, b) (фиг. 7.9). Трябва да се докаже, че графиката на функцията f в интервала (a, b) няма точки под допирателната, минаваща през точката $M(c, f(c))$. Записваме уравнението на тази допирателна, означавайки текущата ѝ ордината с Y. Тъй като ъгловият коефициент на допирателната е равен на $f'(c)$, то уравнението ѝ има вида

$$Y - f(c) = f'(c)(x - c). \tag{7.5}$$

Разлагаме функцията f по формулата на Тейлор при $n=1$ в околност на точката c:

$$f(x) = f(c) + \frac{x-c}{1!} f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2!} f^{(2)}(\xi), \tag{7.6}$$

където остатъчният член е във формата на Лагранж, ξ е между c и x. (Понеже по условие f има втора производна в интервала (a, b), формулата (7.6) е вярна за всяко x от интервала (a, b) (вж. 6.8.7).

Като съпоставим (7.6) и (7.5), ще имаме

$$f(x) - Y = \frac{1}{2}(x-c)^2 f^{(2)}(\xi). \tag{7.7}$$

Тъй като втората производна по условие е неотрицателна навсякъде в (a, b), то дясната страна на (7.7) е неотрицателна, т. е. за всяко x от (a, b) имаме $f(x) \geq Y$.

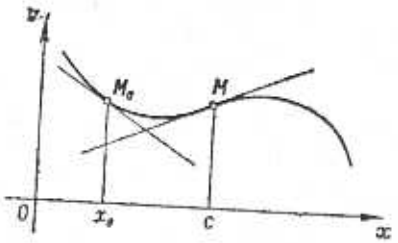
Последното неравенство доказва, че графиката на функцията f навсякъде в интервала (a, b) лежи над допирателната (7.5).

Теоремата се доказва аналогично за случая $f^{(2)}(x) \leq 0$. □

Забележка 2. Ако $f^{(2)}(x) = 0$ навсякъде в интервала (a, b), то, както лесно можем да се убедим, f е линейна функция, т. е. графиката ѝ е права линия. В този случай можем да считаме посоката на изпъкналостта ѝ произволна.

Теорема 7.6. *Нека втората производна на функцията f е непрекъсната и положителна (отрицателна) в точката c. Тогава съществува околност на точката c, в която графиката на функцията f има изпъкналост, насочена надолу (нагоре).*

Доказателство. Според теоремата за постоянство на знака на непрекъсната функция съществува околност на точката c, в която втората ѝ производна $f^{(2)}$ е положителна (отрицателна). От предишната теорема следва, че графиката на функцията f има в тази околност изпъкналост, насочена надолу (нагоре).



Фиг. 7.10

Следователно посоката на изпъкналост на графиката на функция се характеризира напълно със знака на втората производна на тази функция.

Пример:

Да се изследва посоката на изпъкналост на графиката на функцията $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$. От вида на втората ѝ производна $f^{(2)}(x) = 6(x-1)$ следва, че тази производна е отрицателна при $x < 1$ и положителна при $x > 1$. Следователно изпъкналостта на графиката на функцията $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ е насочена нагоре в интервала $(-\infty, 1)$ и надолу в интервала $(1, +\infty)$ (вж. фиг. 7.1).

7.3. Точки на инфлексия

7.3.1. Определение на инфлексна точка. Необходимо условие за инфлексия. Нека a, b и c са три числа, за които $a < c < b$. Ще предполагаме, че функцията f е диференцируема в интервала (a, b), т. е. съществува допирателна към графиката на тази функция във всички точки, абсцисите на които принадлежат на интервала (a, b). Ще предполагаме още, че графиката на функцията f има определена посока на изпъкналост във всеки от интервалите (a, c) и (c, b).

Определение. *Точката $M(c, f(c))$ от графиката на функцията f се нарича* ***точка на инфлексия (инфлексна точка)*** *на тази графика, ако съществува околност на точката c от абсцисната ос, в която графиката на функцията f има отляво и отдясно на точката c различни посоки на изпъкналост.*

На фиг. 7.10 е изобразена графиката на функция, която има ***инфлексия*** в точката $M(c, f(c))$.

Понякога при определянето на инфлексна точка на графиката на функцията f се иска допълнително в достатъчно малка околност на точката c от абсцисната ос графиката отдясно и отляво на точката c да лежи от различни страни на допирателната ѝ в точката $M(c, f(c))$. По-нататък ще докажем, че това свойство

следва от даденото определение при предположението, че производната е непрекъсната в точката c.

Ще докажем следните две леми:

Лема 1. *Нека функцията f има производна f' навсякъде в една δ-околност на точката c, при това тази производна е непрекъсната в точката c. Тогава, ако графиката на функцията f има в интервала $(c, c+\delta)$ изпъкналост, насочена надолу (нагоре), то навсякъде в интервала $(c, c+\delta)$ няма точки от тази графика, които да са под (над) допирателната към графиката в точката $M(c, f(c))$.*

Доказателство. Да разгледаме редицата $\{x_n\}$ от точки на интервала $(c, c+\delta)$, клоняща към c. През всяка точка $M_n(x_n, f(x_n))$ на графиката на функцията f да прекараме допирателната към тази графика, т. е. правата

$$Y_n = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n).$$

Тъй като по условие графиката на функцията f има в интервала $(c, c+\delta)$ изпъкналост, насочена надолу (нагоре), то за всяко n и всяка фиксирана точка x на интервала $(c, c+\delta)$ имаме

$$f(x) - Y_n = f(x) - f(x_n) - (x - x_n) f'(x_n) \geq 0 \ (\leq 0). \tag{7.8}$$

От условието за непрекъснатост на f' (и още повече на f) в точката c и от определението за непрекъснатост по Хайне следва, че съществува границата

$$\lim_{n\to\infty} (f(x) - Y_n) = \lim_{n\to\infty} \{f(x) - f(x_n) - (x - x_n) f'(x_n)\}$$
$$= f(x) - f(c) - (x - c) f'(c).$$

Ще означим тази граница с $f(x) - Y$, където под Y се разбира текущата ордината на допирателната към графиката на функцията f в точката $M(c, f(c))$ (уравнението на тази допирателна има вида $Y = f(c) + (x - c) f'(c)$).

Като извършим в неравенството (7.8) граничен преход при $n \to \infty$ и използваме теорема 3.13, ще получим, че $f(x) - Y \geq 0$ (≤ 0) за всяка фиксирана точка x от интервала $(c, c+\delta)$, при което Y означава текущата ордината на допирателната в точката $M(c, f(c))$. □

Забележка. Аналогично се формулира и доказва лема 1 и в случая, когато графиката на функцията има определена посока на изпъкналост в интервала $(c-\delta, c)$.

Лема 2. *Нека функцията f има производна f' в някоя околност на точката c и тази производна е непрекъсната в точката c. Тогава, ако графиката на функцията f има инфлексия в точката c, то в достатъчно малка δ-околност на тази точка отдясно и отляво на c тази графика лежи в различни полуравнини, определени от допирателната в точката $M(c, f(c))$.*

За доказване на тази лема трябва да се избере $\delta > 0$ толкова малко, че във всеки от интервалите $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$ графиката на функцията f да има определена посока на изпъкналост (тези посоки ще бъдат различни в интервалите $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$). След това прилагаме лема 1 за функцията f за всеки от интервалите $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$. □

Лема 2 дава необходимо условие за инфлексия в графиката на два пъти диференцируема в дадена точка функция.

Теорема 7.7 (необходимо условие за инфлексия в графиката на два пъти диференцируема функция). *Ако функцията f има в точката c втора производна и графиката ѝ има инфлексия в точката $M(c, f(c))$, то $f^{(2)}(c) = 0$.*

Доказателство. Нека, както и по-горе, Y е текущата ордината на допирателната $Y = f(c) + (x - c) f'(c)$, минаваща през точката $M(c, f(c))$ от графиката на функцията.

Ще разгледаме функцията

$$F(x) = f(x) - Y = f(x) - f(c) - (x - c) f'(c).$$

Тази функция F, както и функцията f, има в точката c втора производна (и затова има и първа производна в някоя околност на c, при това тя е непрекъсната в точката c). Според лема 2 в достатъчно малка околност на точката c графиката на функцията $y = f$ лежи в различни полуравнини, определени от допирателната в точката $M(c, f(c))$ отляво и отдясно на c.

Затова в достатъчно малка околност на точката c не могат да се намерят две точки $x_1 < c < x_2$, за които $F(x_1) \cdot F(x_2) > 0$, т. е. в тези две точки $F(x)$ да има еднакъв знак.

Да допуснем, че $f^{(2)}(c) \neq 0$. Понеже $F'(x) = f'(x) - f'(c)$, $F^{(2)}(x) = f^{(2)}(x)$, то $F'(c) = 0$, $F^{(2)}(c) \neq 0$ и съгласно теорема 7.2 функцията F има в точката c локален екстремум. Полученото противоречи на това, че в достатъчно малка околност на точката c не могат да се намерят две точки $x_1 < c < x_2$, за които $F(x_1)$ и $F(x_2)$ да имат еднакъв знак. □

Анулирането на втората производна е само необходимо условие за инфлексия на два пъти диференцируема функция. Това се вижда например от графиката на функцията $f(x) = x^4$. За тази функция втората производна $f''(x) = 12x^2$ се анулира в точката $x = 0$, но графиката ѝ няма инфлексия в точката $M(0, 0)$.

Според теорема 7.7, за да се намерят всички инфлексни точки на графиката на два пъти диференцируема функция f, трябва да се разгледат всички корени на уравнението $f''(x) = 0$.

Тъй като анулирането на втората производна е само необходимо условие за инфлексия, нужно е допълнително изследване за съществуване на инфлексия във всяка точка, за която $f''(x)$

$=0$. За провеждането на такова изследване трябва да се намерят и достатъчни условия за инфлексия, към което преминаваме.

7.3.2. Първо достатъчно условие за инфлексия

Теорема 7.8. *Нека функцията f има втора производна в някоя околност на точката c и $f''(c)=0$. Тогава, ако в тази околност втората производна f'' има различни знаци отдясно и отляво на c, то графиката на тази функция има инфлексия в точката $M(c, f(c))$.*

Доказателство. Графиката на функцията f има допирателна в точката $M(c, f(c))$, тъй като от условията на теоремата следва съществуването на крайна производна $f'(c)$. От това, че f'' отляво и отдясно на c има различни знаци, и от теорема 7.4 следва, че посоката на изпъкналост отляво и отдясно на c е различна. □

Пример:

Да се намерят инфлексните точки на графиката на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. Тази функция разглеждахме неедкократно (графиката й е изобразена на фиг. 7.1). Понеже $f''(x)=6(x-1)$, то единствената стойност на аргумента, при която е възможна инфлексия, е $x=1$. На тази стойност на аргумента съответствува точката $M(1, -6)$ от графиката. Тъй като f'' има различни знаци при $x>1$ и при $x<1$, то $M(1, -6)$ е инфлексна точка за графиката на разглежданата функция.

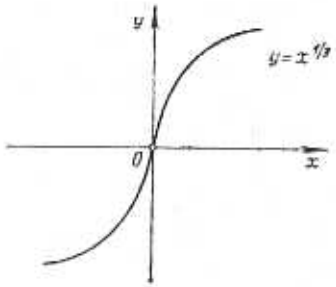
7.3.3. Някои обобщения на първото достатъчно условие за инфлексия. В условията на теорема 7.8 можем да се откажем от изискването за двукратна диференцируемост на функцията f в самата точка c, като запазим това изискване само за точките, които лежат в някоя околност отляво и отдясно на тази точка. При това трябва допълнително да предположим обаче съществуването на крайна производна $f'(c)$.

Доказателството на теорема 7.8 с посочените изменения дословно съвпада с приведеното доказателство.

По-нататък можем да се условим при определянето на инфлексните точки да не изключваме случая, когато допирателната към графиката в разглежданата точка е успоредна на оста Oy.* При това условие в теорема 7.8 можем да се откажем даже от изискването за еднократна диференцируемост в самата точка c и да формулираме тази теорема по следния начин:

Нека функцията f има крайна втора производна навсякъде в някоя околност на точката c с изключение евентуално в точката c. Нека освен това функцията f е непрекъсната в точка c и графиката й има допирателна в точката $M(c, f(c))$, евентуално успоредна на оста Oy. Тогава, ако в разглежданата околност втората производна $f^{(2)}$ има различни знаци отляво и отдясно на точката c, то графиката на функцията f има инфлексия в точката $M(c, f(c))$.

* В този случай първата производна f' е безкрайна в точката c.



Фиг. 7.11

Доказателството на формулираното твърдение е напълно аналогично на доказателството на теорема 7.8.

Пример:

Да се намерят инфлексните точки на графиката на функцията $y=x^{1/3}$. Тази функция има втора производна навсякъде върху безкрайната права с изключение на точката $x=0$. В точката $x=0$ разглежданата функция е непрекъсната, но вече първата й производна е безкрайност. Обаче графиката на функцията $y=x^{1/3}$ има в точката $(0, 0)$ допирателна, успоредна на оста Oy* (фиг. 7.11). Тъй като втората производна има отляво и отдясно на точката $x=0$ различни знаци, то графиката на функцията $y=x^{1/3}$ има инфлексия в точката $(0, 0)$.

7.3.4. Второ достатъчно условие за инфлексия

Теорема 7.9. *Ако функцията f има в точката c крайна трета производна и удовлетворява в тази точка условията $f^{(2)}(c)=0$, $f^{(3)}(c)\neq 0$, то графиката й има инфлексия в точката $M(c, f(c))$.*

Доказателство. От условието $f^{(3)}(c)\neq 0$ и от теорема 6.1 следва, че функцията $f^{(2)}(x)$ или расте, или намалява в точката c. Тъй като $f^{(2)}(c)=0$, то и в единия, и в другия случай съществува околност на точката c, в която $f^{(2)}(x)$ има различни знаци отляво и отдясно на c. Но тогава съгласно предишната теорема графиката на функцията f има инфлексия в точката $M(c, f(c))$. □

* Следва например от това, че графиката на обратната функция $x=y^3$ има в тази точка допирателна.

Забележка. Разбира се, теорема 7.9 има по-тясна сфера на действие, отколкото теорема 7.8. Така теорема 7.9 не решава въпроса за наличие на инфлексия, когато функцията f няма крайна трета производна, а също така и когато $f^{(3)}(c)=0$. В последния случай, за да се реши въпросът за наличие на инфлексия, е нужно да се изучи поведението на производните от по-висок ред в точката c, което ще бъде направено по-нататък.

Ще се върнем към примера, разгледан в предишната точка, и ще покажем, че въпросът за наличие на инфлексия на графиката на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$ може да бъде решен и с помощта на теорема 7.9. Наистина $f^{(3)}(x)=6\neq 0$, следователно $M(1,-6)$ е инфлексна точка съгласно теорема 7.9.

7.3.5. Трето достатъчно условие за инфлексия. Ще установим още едно достатъчно условие за инфлексия, приложимо за случая, когато в дадена точка c се анулират както втората, така и третата производна на разглежданата функция.

Аналог на теорема 7.3 е следното твърдение:

Теорема 7.10. *Нека $n\geq 2$ е четно число и нека функцията f има производни до n-ти ред в някоя околност на точката c и производна от $(n+1)$-ви ред в самата точка c. Тогава, ако са изпълнени съотношенията*

$$f^{(2)}(c)=f^{(3)}(c)=\ldots=f^{(n)}(c)=0,\ f^{(n+1)}(c)\neq 0, \tag{7.3'}$$

то графиката на функцията f има инфлексия в точката $M=(c, f(c))$.

Доказателство. При $n=2$ теорема 7.10 съвпада с вече доказаната теорема 7.9, така че е нужно да се даде доказателство само за четно $n\geq 4$.

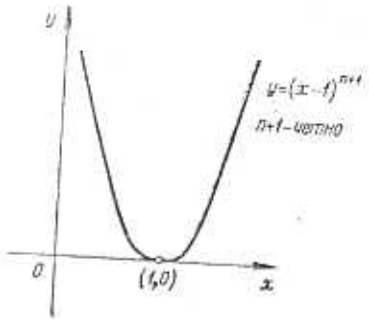
Нека четното число n удовлетворява условието $n\geq 4$ и нека $f^{(n+1)}(c)\neq 0$. Тогава според теорема 6.1 функцията $f^{(n)}$ или намалява в точката c (при $f^{(n+1)}(c)<0$), или расте в тази точка (при $f^{(n+1)}(c)>0$). Понеже освен това $f^{(n)}(c)=0$, то и в двата случая функцията $f^{(n)}$ има в достатъчно малка околност на точката c различни знаци отдясно и отляво на c.

Да разложим функцията $f^{(2)}$ в околността на точката c по формулата на Тейлор, като запишем остатъчния член във формата на Лагранж (вж. 6.8.7). Ще получим, че за всяко x от достатъчно малка околност на точката c съществува точка ξ между x и c, за която

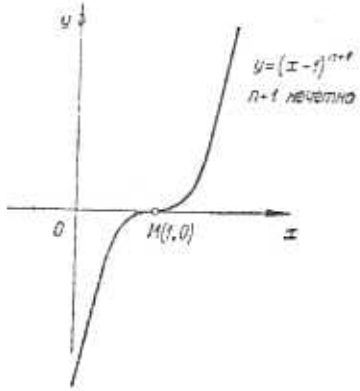
$$f^{(2)}(x)=f^{(2)}(c)+\frac{x-c}{1!}f^{(3)}(c)+\ldots+\frac{(x-c)^{n-3}}{(n-3)!}f^{(n-1)}(c)+\frac{(x-c)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(\xi).$$

Поради съотношенията (7.3′) написаното разлагане добива вида

$$f^{(2)}(x)=\frac{(x-c)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(\xi). \tag{7.4'}$$



Фиг. 7.12



Фиг. 7.13

По-рано установихме, че за всички x от достатъчно малка околност на точката c производната $f^{(n)}$ има различни знаци отдясно и отляво на c. Тъй като ξ лежи между x и c, то за всяко x от достатъчно малка околност на точката c величината $f^{(n)}(\xi)$ (а очевидно поради четността на n и цялата дясна страна на (7.4′)) има различни знаци отдясно и отляво на c. И така съгласно равенството (7.4′) за всяко x от достатъчно малка околност на точката c производната $f^{(2)}$ има различни знаци отдясно и отляво на c. Според теорема 7.8 графиката на функцията f има инфлексия в точката $M(c, f(c))$.□

Забележка. Много важно е изискването за четност на n в теорема 7.10 (сравнете тази теорема с теорема 7.3). (Вж. фиг. 7.12, 3.13.)

7.4. Асимптоти на графиката на функция

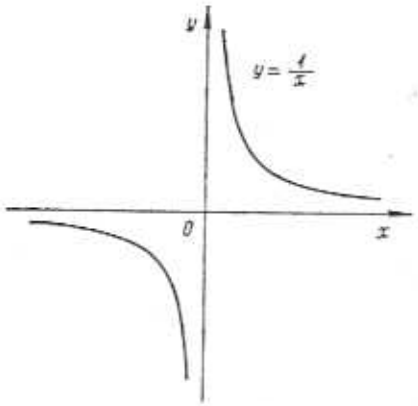
Определение 1. *Казва се, че правата $x=a$ е* ***вертикална асимптота*** *на графиката на функцията f, ако поне една от границите*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

е равна на $+\infty$ или $-\infty$.

Пример:

Графиката на функцията $f(x)=1/x$ има вертикална асимптота $x=0$, тъй като $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} x^{-1}=-\infty$ (фиг. 7.14).



Фиг. 7.14

Да предположим по-нататък, че функцията f е дефинирана за произволно големи стойности на аргумента. За определеност ще разглеждаме произволно големи положителни стойности.

Определение 2. *Правата $Y=kx+b$ се нарича* ***наклонена асимптота*** *към графиката на функцията f при $x\to+\infty$, ако функцията f се представя във вида*

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \tag{7.9}$$

където $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$.

Теорема 7.11. *Необходимо и достатъчно условие функцията f да има наклонена асимптота при $x\to+\infty$ е да съществуват двете граници*

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-1}f(x)=k \text{ и } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b. \tag{7.10}$$

Доказателство. *Необходимост.* Нека графиката на функцията f има при $x\to+\infty$ наклонена асимптота, т. е. за f е в сила представянето (7.9). Тогава

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-1}f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{-1}(kx+b+\alpha(x))=\lim_{x\to+\infty}(k+b/x+\alpha(x)/x)=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b.$$

Достатъчност. Нека съществуват границите (7.10). Втората от тези граници ни дава право да твърдим, че разликата $f(x)-kx-b$ е безкрайно малка при $x\to+\infty$. Като означим тази безкрайно малка с α, ще получим за f представянето (7.9). □

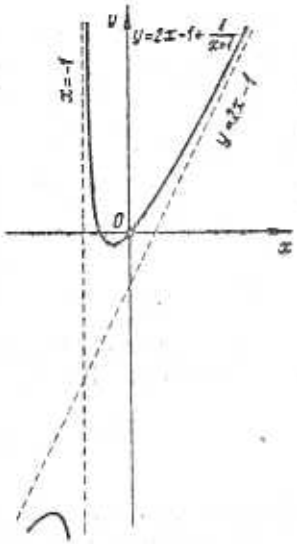
Забележка. Аналогично се определя наклонена асимптота и се доказва теорема 7.11 и за случая $x\to-\infty$.

Пример: Графиката на функцията $f(x)=(2x^2+x)/(x+1)$ има наклонена асимптота $Y=2x-1$ и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$ и освен това има вертикална асимптота $x=-1$ (фиг. 7.15). Действително

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{-1}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(2x+1)/(x+1)=2,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\pm\infty}(-1+1/(x+1))=-1,$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-1-0} f(x)=-\infty.$$



Фиг. 7.15

Наред с линейните асимптоти се разглеждат и асимптоти от по-сложен вид.

Казва се, че параболата от n-ти ред, определена от многочлена

$$Y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, \tag{7.11}$$

е асимптота *за графиката на функцията f при $x\to+\infty$, ако функцията f се представя във вида*

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0+\alpha(x),\quad \lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0.$$

Лесно се доказва следващото твърдение.

Необходимо и достатъчно условие графиката на функцията f при $x\to+\infty$ да има асимптота (7.11) е да съществуват следните $n+1$ граници:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-n}f(x)=a_n,\quad \lim_{x\to+\infty} x^{-(n-1)}(f(x)-a_nx^n)=a_{n-1},$$

$$\ldots,\quad \lim_{x\to+\infty} x^{-1}(f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2))=a_1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x))=a_0.$$

7.5. Построяване на графиката на функция

В този параграф ще изложим схема, по която е целесъобразно да се провеждат изследванията на графиката на функция, и ще илюстрираме тази схема с пример.

При изучаването на графиката на дадена функция f е целесъобразно да се направят следните изследвания:

1°. Да се уточни дефиниционната област на функцията.

2°. Да се изясни въпросът за съществуване на асимптоти (вертикални и наклонени).

3°. Да се намерят областите на растене и намаляване на функцията и точките на екстремум.

4°. Да се намерят областите, в които се запазва посоката на изпъкналост, и инфлексните точки.

5°. Да се намерят точките, в които графиката на функцията пресича оста Ox.

По получените данни лесно се построява ескиз на графиката на функцията. За пример ще построим графиката на функцията

$$f(x)=\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}. \tag{7.12}$$

Ще следваме изложената по-горе схема.

1°. Понеже функцията (7.12) е рационална дроб, тя е дефинирана и непрекъсната навсякъде върху безкрайната права освен в точката $x=0$, в която знаменателят се анулира.

2°. Ще изясним въпроса за съществуване на асимптоти. Очевидно

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}=-\infty$$

и затова графиката на функцията има вертикална асимптота $x=0$. Освен това от съществуването на границите

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^{-1}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^3}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x/2)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^2+14x-6}{4x^2}=-\frac{5}{4}$$

следва, че при $x\to\infty$ и при $x\to-\infty$ графиката на функцията има наклонена асимптота $Y=x/2-5/4$.

3°. За да намерим областите на растене и намаляване, ще пресметнем първата производна на функцията (7.12)

$$f'(x)=\frac{x^3-7x+6}{2x^3}=\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.$$

Като вземем пред вид освен това, че функцията и първата ѝ производна не съществуват при $x=0$, ще получим следните области, в които f' запазва постоянен знак:

Област на стойностите на x	$-\infty<x<-3$	$-3<x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$2<x<+\infty$
Знак на f'	+	−	+	−	+
Поведение на функцията f	расте	намалява	расте	намалява	расте

От приведената таблица е очевидно, че функцията има екстремуми в следните точки:

1) максимум при $x=-3$ и $f(-3)=-49/12$,
2) максимум при $x=1$ и $f(1)=5/4$,
3) минимум при $x=2$ и $f(2)=9/8$.

4°. За да намерим областите, в които се запазва посоката на изпъкналост, пресмятаме втората производна:

$$f^{(2)}(x)=\frac{7x-9}{x^4}=\frac{7(x-9/7)}{x^4}.$$

Отчитаме също, че функцията и производните ѝ не съществуват в точката $x=0$, и получаваме следните области:

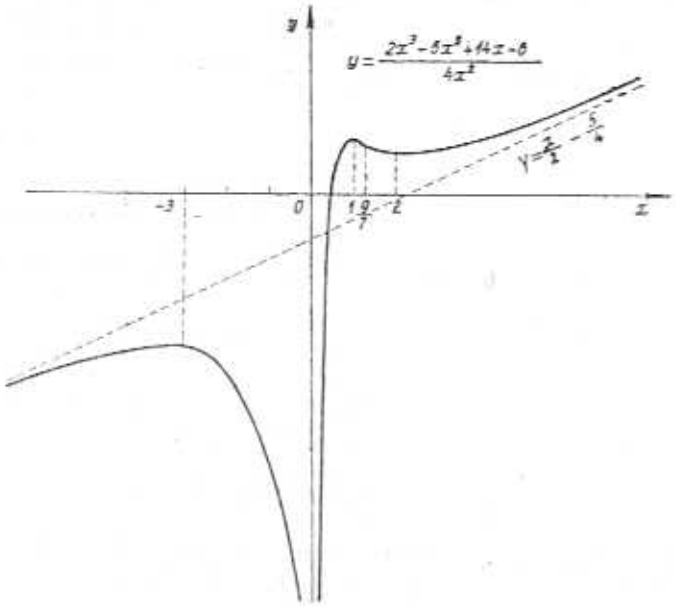
Област на стойностите на x	$-\infty<x<0$	$0<x<9/7$	$9/7<x<+\infty$
Знак на $f^{(2)}$	−	−	+
Посока на изпъкналост на f	нагоре	нагоре	надолу

От приведената таблица е очевидно, че графиката на функцията има инфлексия в точката $(9/7,\ f(9/7))$ и $f(9/7)=913/756$.

5°. Остава да намерим точките, в които графиката пресича оста Ox. Тези точки съответстват на реалните корени на уравнението

$$2x^3-5x^2+14x-6=0.$$

Лесно се вижда, че $2x^3-5x^2+14x-6=2(x-1/2)(x^2-2x+6)$. Понеже квадратният тричлен x^2-2x+6 има комплексни корени, то уравнението има само един реален корен $x=1/2$, така че графиката на функцията пресича оста Ox в точката $(1/2,\ 0)$. По получените данни построяваме ескиз на графиката на разглежданата функция (фиг. 7.16).

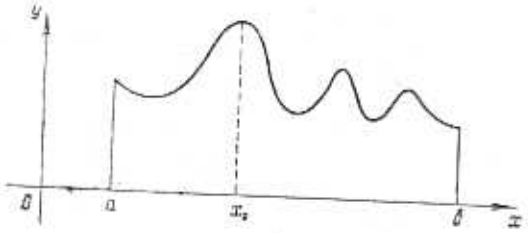


Фиг. 7.16

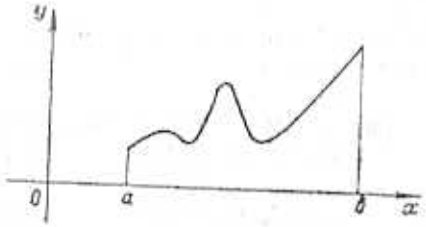
7.6. Глобален максимум и глобален минимум на функция в сегмент. Граничен (контурен) екстремум

7.6.1. Определяне на максималната и минималната стойност на функция, дефинирана в сегмент. Да разгледаме функцията f, дефинирана и непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Досега се занимавахме само с намирането на локалните максимуми и минимуми на функция. Сега ще поставим задачата за намиране на глобалните максимуми и минимуми, т. е. на максималната и минималната стойност на функцията в сегмента $[a, b]$. Ще подчертаем, че според теоремата на Вайерщрас (вж. теорема 4.15) непрекъсната функция f в сегмента $[a, b]$ непременно достига максималната и минималната си стойност. За определеност ще се спрем на намирането на максималната стойност на f в сегмента $[a, b]$.

Максималната си стойност функцията f може да достига или във вътрешна точка x_0 от сегмента $[a, b]$ (тогава тя съвпада с един от локалните максимуми на функцията f, вж. фиг. 7.17), или в



Фиг. 7.17



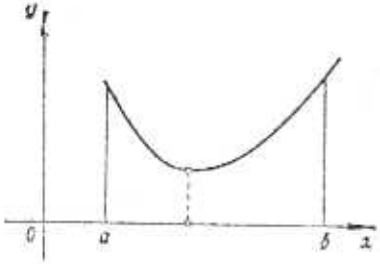
Фиг. 7.18

един от краищата на сегмента $[a, b]$ (фиг. 7.18). Оттук е ясно, че за намиране на максималната стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$ трябва да сравним стойностите на функцията f във всички точки на локален максимум и в крайните точки на сегмента a и b. Най-голямата от тези стойности ще бъде максималната стойност на f в сегмента $[a, b]$. Аналогично се намира и минималната стойност на f в сегмента $[a, b]$.

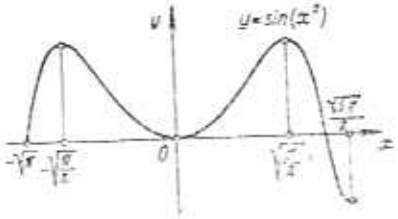
Изследването на стационарните точки може да се избегне, като се сравнят стойностите на f във всички стационарни точки и в крайните точки a и b. Най-голямата (най-малката) от тези стойности е очевидно максималната (минималната) стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$.

Ще отбележим, че ако f има в сегмента $[a, b]$ само една точка на локален максимум (или на локален минимум), то, без да сравняваме стойността на f в тази точка с $f(a)$ и $f(b)$, можем да твърдим, че тази стойност е максималната (минималната) стойност на f в сегмента $[a, b]$ (фиг. 7.19). С аналогични средства се решава въпросът за намиране на максималната (минималната) стойност на функцията f в интервал, полуправа и безкрайната права (при условие, че тази стойност се достига).

Може да се случи така, че диференцируема функция да няма в сегмента $[a, b]$ (или полуправата $a \leq x < \infty$) стационарни точки



Фиг. 7.19



Фиг. 7.20

В такъв случай f е монотонна в този сегмент (полуправа) и нейната максимална и минимална стойност се достигат в краищата на сегмента (полуправата).

За пример ще разгледаме задачата за намиране на максималната и минималната стойност на функцията $f(x)=\sin x^2$ в сегмента $-\sqrt{\pi}\leq x\leq\sqrt{5\pi}/2$.

Тъй като $f'(x)=2x\cos x^2$, то в разглеждания интервал функцията има стационарни точки $x=0$ и $x=\pm\sqrt{\pi/2}$. Като сравним стойностите на функцията в тези точки и в краищата на сегмента

$$f(0)=0,\ f(\pm\sqrt{\pi/2})=1,\ f(-\sqrt{\pi})=0,$$
$$f(\sqrt{5\pi}/2)=\sin(5\pi/4)=-\sqrt{2}/2,$$

виждаме, че максималната стойност на разглежданата функция е 1 и се достига в две вътрешни точки на сегмента $x_1=-\sqrt{\pi/2}$ и $x_2=\sqrt{\pi/2}$, а минималната ѝ стойност е равна на $-\sqrt{2}/2$ и се достига в десния край на сегмента $\sqrt{5\pi}/2$. Графиката на разглежданата функция е изобразена на фиг. 7.20.

7.6.2. Граничен (контурен) екстремум. Нека функцията f е дефинирана в някой сегмент $[a, b]$. *Ще казваме, че тази функция има в крайната (контурната) точка b на този сегмент* ***граничен (контурен) максимум (минимум)****, ако съществува лява полуоколност на точката b, в която стойността $f(b)$ е най-голяма (най-малка) измежду всички стойности на тази функция.*

Аналогично се определя граничен (контурен) максимум и граничен (контурен) минимум в крайната (контурната) точка a на сегмента $[a, b]$.

Граничният максимум и граничният минимум се обединяват с общото название ***граничен (контурен) екстремум.***

В сила е следното достатъчно условие за граничен екстремум: За да има функцията f в точката b на сегмента $[a, b]$ граничен максимум (граничен минимум), е достатъчно тя да има в точката b положителна (отрицателна) лява производна.* (Доказателството е съвършено аналогично на доказателството на теорема 6.1.) От това достатъчно условие за граничен екстремум непосредствено се получава и следното необходимо условие за граничен екстремум на функция, имаща в точката b лява производна: Функцията f, имаща в точката b лява производна, има в тази точка граничен максимум (граничен минимум) само тогава, когато производната в точката b е неотрицателна (неположителна).

Аналогично необходимо условие функцията f, имаща в точката a дясна производна, да има в тази точка граничен максимум (граничен минимум) е производната в точката a да бъде неположителна (неотрицателна).

7.6.3. Теорема на Дарбу.**

Определение. *Ще казваме, че функцията f има* ***производна*** *в сегмента $[a, b]$, ако f има крайна производна във всяка вътрешна точка на $[a, b]$ и освен това има крайни едностранни производни $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$.*

Очевидно функция, която има производна в сегмента $[a, b]$, е непрекъсната в този сегмент.

Ще докажем сега следващата теорема.

Теорема 7.12 (теорема на Дарбу). *Нека функцията f има производна в сегмента $[a, b]$. Тогава каквото и да е числото C, заключено между $A=f'(a+0)$ и $B=f'(b-0)$, съществува точка ξ от този сегмент, за която $f'(\xi)=C$.*

Доказателство. Най-напред ще докажем следното твърдение: Ако F има производна в $[a, b]$ и ако $F'(a+0)$ и $F'(b-0)$ са числа с различни знаци, то съществува такава точка ξ от сегмента $[a, b]$, че $F'(\xi)=0$.

Нека за определеност $F'(a+0)<0$, $F'(b-0)>0$. Тогава функцията F има граничен максимум и в двата края на сегмента $[a, b]$. Но това означава, че минималната стойност на F в сегмента $[a, b]$ се достига в някоя вътрешна точка ξ на този сегмент (функцията F е диференцируема, а очевидно и непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и затова достига минимума си в този сегмент). В точката ξ функцията F има локален минимум и затова $F'(\xi)=0$.

* За контурната точка a достатъчно условие за граничен максимум (граничен минимум) е отрицателността (положителността) на дясната производна в точката a.

** Гастон Дарбу — френски математик (1842—1917).

За доказателството на теорема 7.12 остава да положим $F(x) = f(x) - Cx$* и да приложим към F току-що доказаното твърдение. □

Ще отбележим, че не предполагахме непрекъснатост на производната f'.

Допълнение към глава 7

АЛГОРИТЪМ ЗА НАМИРАНЕ НА ЕКСТРЕМАЛНИТЕ СТОЙНОСТИ НА ФУНКЦИЯ, ИЗПОЛЗУВАЩ САМО СТОЙНОСТИТЕ НА ТАЗИ ФУНКЦИЯ

Да предположим, че функцията f е зададена в сегмента $[a, b]$ и знаем стойностите ѝ във възлите на мрежа, която се получава при деление на сегмента $[a, b]$ на 2^n равни части ($n=1, 2, 3, \cdots$). За определеност ще разгледаме случая за намиране точка на минимум за функцията f. При това ще предполагаме, че са изпълнени следните две условия: 1) функцията f има в сегмента $[a, b]$ единствена точка на минимум c; 2) при $a<c$ функцията f намалява в сегмента $[a, c]$ (т. е. намалява наляво от точката на минимума), а при $c<b$ функцията f расте в сегмента $[c, b]$ (т. е. расте надясно от точката на минимума).

Тези условия са изпълнени например, ако функцията f е два пъти диференцируема в сегмента $[a, b]$ и $f'(c)=0$, а f'' е строго положителна в $[a, b]$. Разбира се, функцията f може да удовлетворява двете условия и без да е диференцируема.

Ще дадем един алгоритъм за построяване на свиваща се система от сегменти, съдържащи точката c, в която функцията f достига минимума си.

Ще се спрем на построяването на първия сегмент на свиващата се система, тъй като всички останали сегменти се строят по същия начин. Разделяме сегмента $[a, b]$ с помощта на точките $a=x_0, x_1, x_2, x_3, x_4=b$ на четири равни подсегмента $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, 3, 4$.

Един подсегмент $[x_{i-1}, x_i]$ ще наричаме ***сегмент на намаляване,*** *ако $f(x_{i-1})>f(x_i)$, т. е. ако стойността на функцията f в левия му край е строго по-голяма от стойността ѝ в десния край, и съответно* ***сегмент на нарастване,*** *ако $f(x_{i-1})<f(x_i)$,*

* При това без ограничения на общността предполагаме, че $f'(a+0)=A<C<B=f'(b-0)$.

т. е. ако стойността на функцията f в левия край е строго по-малка от стойността ѝ в десния край.

Понеже функцията f има в сегмента $[a, b]$ единствена точка на минимум c, то тази точка c ще принадлежи на един от четирите подсегмента $[x_{i-1}, x_i]$.

Подсегментът $[x_{i-1}, x_i]$, съдържащ точката c, е или сегмент на намаляване, или сегмент на нарастване, или сегмент, в краищата на който функцията приема равни стойности.

Понеже функцията f по условие намалява наляво от точката на минимума c и расте надясно от тази точка, ако даден подсегмент съдържа точката на минимума c, то всеки подсегмент, лежащ наляво от него, е сегмент на намаляване и всеки подсегмент надясно от него е сегмент на нарастване. Следователно можем да твърдим, че подсегментът, който съдържа точката на минимума c, е или най-десният от сегментите на намаляване, или най-левият от сегментите на нарастване, или подсегмент, в краищата на който функцията f приема равни стойности.

Това твърдение позволява да се даде алгоритъм за построяване на първия сегмент $[a_1, b_1]$ от свиващата се система сегменти $\{[a_n, b_n]\}$, всеки от които съдържа точката на минимума c.

Ще разгледаме четирите възможни случая.

1. Между подсегментите $[x_{i-1}, x_i]$ има сегмент, в краищата на който f приема равни стойности. Тогава този сегмент съдържа точката на минимума c и го приемаме за първи сегмент $[a_1, b_1]$ на свиващата се система.

2. Всички подсегменти $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, 3, 4$, са сегменти на намаляване. В този случай точката на минимума се съдържа в най-десния сегмент, т. е. в сегмента $[x_3, x_4]$, който приемаме за $[a_1, b_1]$.

3. Всички подсегменти $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, 3, 4$, са сегменти на нарастване. Тогава минимумът лежи в най-левия от подсегментите, т. е. в сегмента $[x_0, x_1]$, който приемаме за $[a_1, b_1]$.

4. Измежду подсегментите има както сегменти на намаляване, така и лежащи надясно от тях сегменти на нарастване. В този случай може да се твърди, че точката на минимума c лежи в обединението на най-десния сегмент на намаляване и най-левия сегмент на нарастване. Обединението на тези два сегмента приемаме за $[a_1, b_1]$.

Така определихме еднозначен алгоритъм за построяване на първия сегмент $[a_1, b_1]$ за свиващата се система от сегменти $\{[a_n, b_n]\}$.

Вторият сегмент на тази система $[a_2, b_2]$ се построява, като тръгнем от $[a_1, b_1]$, по същия начин, както построихме сегмента $[a_1, b_1]$, тръгвайки от $[a, b]$. По същия начин, тръгвайки от n-тия

сегмент $[a_n, b_n]$, се построява $(n+1)$-вия сегмент $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ на свиващата се система.

Ясно е, че така построената система от сегменти $\{[a_n, b_n]\}$ е свиваща се, и понеже всички те съдържат точката на минимума c, и двете редици от десните краища $\{b_k\}$ и левите краища $\{a_n\}$ на тези сегменти клонят към точката на минимума c.

Аналогично се построява алгоритъм за намиране на точката на максимума на функцията f, имаща в сегмента $[a, b]$ единствена точка на максимум c, при условие, че функцията расте наляво от c при $c>a$ и намалява надясно от c при $c<b$.

8. Примитивна функция и неопределен интеграл

В тази глава ще изучим обратната операция на операцията диференциране, т. е. ще се заемем с въпроса за възстановяване на функция, ако е известна нейната производна. Изучаването на този въпрос ще ни доведе естествено до понятията ***примитивна функция*** и ***неопределен интеграл*** (вече споменати в глава 1).

Ще отложим въпроса за съществуване на примитивна функция и неопределен интеграл до глава 9, а тук ще изучим най-важните методи за интегриране, както и класовете функции, чито неопределени интеграли се изразяват чрез елементарни функции.

8.1. Понятие за примитивна функция и неопределен интеграл

8.1.1. Понятие за примитивна функция.

Определение. *Функцията F се нарича* ***примитивна функция*** *(или просто* ***примитивна****) на функцията f в интервала (a, b), ако тя е диференцируема във всяка точка x на този интервал и производната ѝ F' е равна на f.*

Забележка. Аналогично се определя примитивна на функцията f върху безкрайната права и върху полуправа.*

Примери:

1. Функцията $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ е примитивна на функцията $f(x)=-x/\sqrt{1-x^2}$ в интервала $(-1, 1)$, тъй като във всяка точка x на този интервал $(\sqrt{1-x^2})'=-x/\sqrt{1-x^2}$.

* Може да се въведе примитивна на функция f и в сегмента $[a, b]$ като такава функция F, която има производна F' във всяка вътрешна точка на сегмента $[a, b]$, равна на f, и освен това има дясна производна $F'(a+0)$, равна на $f(a)$, и лява производна $F'(b-0)$, равна на $f(b)$.

2. Функцията $F(x)=\sin x$ е примитивна на функцията $f(x)=\cos x$ върху безкрайната права $(-\infty, +\infty)$, тъй като във всяка точка x на безкрайната права $(\sin x)'=\cos x$.

3. Функцията $F(x)=\ln x$ примитивна на функцията $f(x)=1/x$ върху отворената полуправа $x>0$, тъй като във всяка точка x на тази полуправа $(\ln x)'=1/x$.

Ако F е примитивна на функцията f в интервала (a, b), то очевидно и функцията $F+C$, където C е произволна константа, е примитивна на функцията f в същия интервал.

Естествено възниква въпросът, каква е връзката между различните примитивни на една и съща функция f. В сила е следната основна теорема:

Теорема 8.1. *Ако F_1 и F_2 са примитивни на функцията f в интервала (a, b), то навсякъде в този интервал $F_1(x)-F_2(x)=C$, където C е константа.*

С други думи, две произволни примитивни на една и съща функция могат да се различават само с константа.

Доказателство. Полагаме $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Тъй като всяка от функциите F_1 и F_2 е диференцируема в интервала (a, b), то според теорема 5.5 и функцията Φ е диференцируема в интервала (a, b), при това навсякъде в този интервал $\Phi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$.

В 6.4.1 беше доказана теорема 6.5 със следното съдържание: Ако функцията Φ е диференцируема навсякъде в интервала (a, b) и ако навсякъде в този интервал $\Phi'(x)=0$, то функцията Φ е константа в интервала (a, b).

От тази теорема получаваме, че $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)=C=\text{const}$. □

Следствие. *Ако F е една от примитивните на функцията f в интервала (a, b), то всяка примитивна Φ на функцията f в същия интервал има вида $\Phi(x)=F(x)+C$, където C е константа.*

8.1.2. Неопределен интеграл.

Определение. *Съвкупността от всички примитивни функции на дадена функция f в интервала (a, b) се нарича* ***неопределен интеграл*** *от функцията f (в този интервал) и произволен елемент на тази съвкупност се означава със символа*

$$\int f(x)\,dx. \tag{8.1}$$

В това означение знакът $\int$ се нарича интеграл, изразът $f(x)\,dx$ — подинтегрален израз, а функцията f — подинтегрална функция.

Ако F е една от примитивните на функцията f в интервала (a, b), то според следствието от теорема 8.1

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{8.2}$$

където C е произволна константа.

Ще подчертаем, че ако примитивната (а следователно и неопределеният интеграл) на функцията f в интервала (a, b) съществува, то подинтегралният израз във формулата (8.1) представлява диференциалът на всяка от тези примитивни. Действително нека F е произволна примитивна на функцията f в интервала (a, b), т. е. за всяко x от интервала (a, b) имаме $F'(x)=f(x)$. Тогава $f(x)\,dx=F'(x)\,dx=dF$.

Примери:

1. $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sqrt{1-x^2}+C$ в интервала $-1<x<1$, тъй като фуркцията $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ е една от примитивните на функцията $f(x)=-x/\sqrt{1-x^2}$ в този интервал.

2. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$ върху безкрайната права $-\infty<x<\infty$, тъй като функцията $F(x)=\sin x$ е една от примитивните на функцията $f(x)=\cos x$ върху безкрайната права.

В тази глава няма да се занимаваме с въпроса за съществуването на примитивни (или неопределени интеграли). Тук само ще отбележим, че в 9.4 ще бъде доказано, че за всяка функция f, непрекъсната в интервала (a, b), съществува примитивна функция (и неопределен интеграл) в този интервал.

8.1.3. Основни свойства на неопределения интеграл. Най-напред ще отбележим две свойства, непосредствено следващи от определението на неопределен интеграл:

1°. $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$.

2°. $\int dF(x)=F(x)+C$.

Свойство 1° означава, че знаците d и $\int$ „взаимно се съкращават", когато знакът на диференциала стои пред знака на интеграла.

Свойство 2° означава, че знаците $\int$ и d „взаимно се съкращават" и когато знакът на интеграла стои пред знака на диференциала, но в този случай към F трябва да се добави произволна константа C.

За установяването на свойство 1° е достатъчно да се вземе диференциалът на двете страни на формула (8.2) и да се вземе пред вид, че $dF(x)=F'(x)\,dx=f(x)\,dx$.

За установяването на свойство 2° е достатъчно в лявата страна на (8.2) да използваме равенството $dF(x)=f(x)\,dx$.

Следващите две свойства се наричат ***линейни свойства на интеграла***:

3°. $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$

4°. $\int [Af(x)]\,dx=A\int f(x)\,dx \quad (A=\text{const}).$

Равенствата във формулите на 3° и 4° имат условен характер: те трябва да се разбират като равенства на дясната и лявата страна с точност до събираемо произволна константа (това е разбираемо, тъй като всеки от интегралите, фигуриращи във формулите на 3° и 4°, е определен с точност до произволна константа).

Понеже две примитивни на една и съща функция могат да се различават само с константа, то за доказателството на свойство 3° е достатъчно да се покаже, че ако F е примитивна на f, а G — примитивна на g, то функцията $F\pm G$ е примитивна на $f\pm g$, което непосредствено следва от това, че производната на (алгебричната) сума на функции е равна на сумата от производните на тези функции, т. е. $(F\pm G)'=F'\pm G'=f\pm g$. Аналогично се доказва и свойство 4°. В този случай се използва равенството $(AF(x))'=AF'(x)=Af(x)$.

8.1.4. Таблица на основните неопределени интеграли. В глава 5 получихме таблицата на производните на основните елементарни функции, което е основа на апарата за смятане в диференциалното смятане. Всяка формула на тази таблица, показваща, че дадена функция F има производна, равна на f, ни води съгласно определението за неопределен интеграл към съответна формула на интегралното смятане

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

По този начин идваме до следната таблица на основните неопределени интеграли:

1°. $\int 0\,dx=C.$

2°. $\int 1\,dx=x+C.$

3°. $\int x^{\alpha}\,dx=x^{\alpha+1}/(\alpha+1)+C \qquad (\alpha\neq-1).$

4°. $\int x^{-1}\,dx=\ln|x|+C \qquad (x\neq0).$

5°. $\int a^x\,dx=a^x/\ln a+C \ (0<a\neq1),\ \int e^x\,dx=e^x+C.$

6°. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$

7°. $\int \cos x\,dx=\sin x+C.$

8°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\int(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx=\operatorname{tg}x+C \quad (x\neq\pi n+\pi/2,$ където $n=0,\pm1,\pm2,\ldots).$

9°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\int(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx=-\operatorname{ctg}x+C \quad (x\neq\pi n,$ където $n=0,\pm1,\pm2,\ldots).$

10°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C\\ -\arccos x+C\end{cases} \quad (-1<x<1).$

11°. $\int \frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}x+C,\\ -\operatorname{arc\,ctg}x+C.\end{cases}$

12°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm1}\right|+C$ (в случая на знак минус се разглежда $|x|>1$).

13°. $\int \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C \quad (|x|\neq1).$

Към тези формули могат да се присъединят и съответните формули за хиперболичните функции:

14°. $\int \operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C.$

15°. $\int \operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C.$

16°. $\int \operatorname{ch}^{-2}x\,dx=\operatorname{th}x+C.$

17°. $\int \operatorname{sh}^{-2}x\,dx=-\operatorname{cth}x+C \quad (x\neq0).$

Ще направим някои бележки по отношение на формулите 4°, 12° и 13°. Формула 4° е вярна за всеки интервал, несъдържащ $x=0$. Наистина, ако $x>0$, то от формулата $(\ln x)'=1/x$ заключаваме, че $\int x^{-1}\,dx=\ln x+C$, а ако $x<0$, то от $(\ln(-x))'=1/x$ заключаваме, че $\int x^{-1}\,dx=\ln(-x)+C$. Следователно формула 4° е вярна за всяко $x\neq 0$.

Формулите 12° и 13° заемат изключително положение в нашата таблица, тъй като те нямат аналози сред формулите от таблицата на производните.

Разбира се, за проверка на формулите 12° и 13° е достатъчно да се убедим, че производните на изразите в десните страни на тези формули съвпадат със съответните подинтегрални функции.

Нашата най-близка цел е да допълним таблицата на неопределените интеграли с основни начини и методи за интегриране. Но преди да пристъпим към реализацията на тази цел, ще направим една важна забележка.

В главите 1 и 4 въведохме понятието елементарна функция, а в 5.5.5 установихме, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна функция. С други думи, установихме, че операцията диференциране не ни извежда от класа на елементарните функции. Ще отбележим веднага, че при операцията интегриране нещата стоят другояче. Може да се докаже, че интеграли от някои елементарни функции вече не са елементарни функции. Примери за такива интеграли са следните:

1°. $\int e^{-x^2}\,dx$. 2°. $\int \cos(x^2)\,dx$.

3°. $\int \sin(x^2)\,dx$. 4°. $\int \frac{dx}{\ln x}$ $(0<x\neq 1)$.

5°. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ $(x\neq 0)$. 6°. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Никой от изброените интеграли не е елементарна функция. Разгледаните функции не само че реално съществуват, но и играят голяма роля в различни въпроси на физиката. Така например интегралът 1°, наречен ***интеграл на Поасон*** или ***интеграл на грешките,*** се използва широко в статистическата физика, в теорията на топлопроводността и дифузията, интеграли 2° и 3°, наречени ***интеграли на Френел,*** се прилагат широко в оптиката. Често се срещат в приложенията и интегралите 4°—6°, първият от които се нарича ***интегрален логаритъм,*** а последните два — ***интегрален косинус*** и ***интегрален синус.***

8.2. Основни методи за интегриране

8.2.1. Интегриране чрез смяна на променливата (субституция). Смяната на променливата е един от най-ефективните методи за интегриране. Той се основава на следното елементарно твърдение:

Нека функцията φ е дефинирана и диференцируема в множеството $\{x\}$, което представлява или интервал, или отворена полуправа, или безкрайната права, и нека $\{t\}$ е множеството от всички стойности на тази функция. Нека освен това за функцията g да съществува в множеството $\{t\}$ примитивна функция G, т. е.

$$\int g(t)\,dt = G(t)+C. \tag{8.3}$$

Тогава навсякъде в множеството $\{x\}$ за функцията $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ съществува примитивна функция, равна на $G(\varphi(x))$, т. е.

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = G(\varphi(x))+C. \tag{8.4}$$

За доказателството на това твърдение е достатъчно да използуваме правилото за диференциране на сложна функция

$$\frac{d}{dx}\{G(\varphi(x))\} = G'(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

и да отчетем, че по определението на примитивна $G'=g$. Да предположим сега, че трябва да пресметнем интеграла

$$\int f(x)\,dx. \tag{8.5}$$

В редица случаи е удобно за нова променлива да се избере такава диференцируема функция $t=\varphi(x)$, че да е изпълнено равенството

$$f(x) = g(\varphi(x))\,\varphi'(x), \tag{8.6}$$

при което функцията g се интегрира лесно, т. е. интегралът

$$\int g(t)\,dt = G(t)+C$$

се пресмята просто. Доказаното твърдение ни позволява да напишем следната формула за интеграла (8.5):

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi(x))+C. \tag{8.7}$$

Този начин за пресмятане на интеграла (8.5) се нарича именно ***интегриране чрез смяна на променливата.***

Разбира се, той не е приложим към всеки интеграл. Освен това трябва да подчертаем, че изборът на сполучлива субститу-

ция в голяма степен се определя от умението на този, който смята.

Примери:

1. Да се пресметне $\int \sin 3x\,dx$. За пресмятането на този интеграл трябва да се направи простата субституция $t=3x$, $dt=3dx$. В резултат от тази смяна ще получим

$$\int \sin 3x\,dx = \int \frac{1}{3}\sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

2. Да се пресметне $\int \frac{dx}{x+a}$. Този интеграл се пресмята посредством смяната $t=x+a$, $dt=dx$. При това получаваме

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+a| + C \quad (x \neq -a).$$

3. Да се пресметне $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$. Лесно се вижда, че този интеграл се пресмята със субституцията $t=\cos x$. Наистина при това $dt=-\sin x\,dx$ и

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C.$$

4. Да се пресметне $\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx$. За пресмятането на този интеграл е удобна субституцията $t=\operatorname{arc\,tg} x$. Наистина при тази субституция $dt=\frac{dx}{1+x^2}$ и

$$\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx = \int t^{100}\,dt = \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{1}{101}(\operatorname{arctg} x)^{101} + C.$$

5. Да се пресметне $I = \int (5x-6)^{1979}\,dx$. Разбира се, развивайки подинтегралната функция по формулата за бинома на Нютон, можем да доведем този интеграл до сума на хиляда деветстотин и осемдесет таблични интеграла. Но много по-просто е да се направи субституцията $t=5x-6$, $dt=5dx$, в резултат на което ще получим

$$I = \frac{1}{5}\int t^{1979}\,dt = \frac{1}{9900}t^{1980} + C = \frac{1}{9900}(5x-6)^{1980} + C.$$

6. Да се пресметне $\int \frac{dx}{\cos x}$. За да предвидим субституцията, която трябва да направим, ще приведем интеграла във вида

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}.$$

Сега е ясно, че трябва да положим $t=\sin x$, $dt=\cos x\,dx$. В резултат ще получим

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln|\operatorname{tg}(x/2+\pi/4)| + C.$$

7. Да се пресметне $\int \frac{x^5\,dx}{(3x)^{12}+1}$. За пресмятане на този интеграл е удобна субституцията $t=(3x)^6$, $dt=2\,.\,3^7 x^5\,dt$. В резултат на посочената субституция получаваме

$$\int \frac{x^5\,dx}{(3x)^{12}+1} = \frac{1}{4374}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4374}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{4374}\operatorname{arc\,tg}(3x)^6 + C.$$

8. Да се пресметне $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. За пресмятане на този интеграл е удобна тригонометричната субституция

$$t = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}, \quad x = a\operatorname{tg} t, \quad dx = a\cos^{-2} t\,dt.$$

В резултат на тази субституция интегралът приема вида

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = a^{-2}\int \cos t\,dt = a^{-2}\sin t + C$$
$$= \frac{\operatorname{tg} t}{a^2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

9. Да се пресметне $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$. Тук е удобна субституцията $t=\arcsin\frac{x}{a}$, $x=a\sin t$, $dx=a\cos t\,dt$, при което

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = a^{-2}\int \cos^{-2} t\,dt = a^{-2}\operatorname{tg} t + C$$
$$= \frac{\sin t}{a^2\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

10. Да се пресметне $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$. За пресмятане на този интеграл е удобна субституцията $2t=\arccos\frac{x}{a}$, $x=a\cos 2t$, $dx = -2a\sin 2t\,dt$. Получаваме

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = -4a\int \cos^2 t\,dt = -2a\int (1+\cos 2t)\,dt$$
$$= -2at - 2a\int \cos 2t\,dt = -2at - a\sin 2t + C$$
$$= -a\left(\arccos\frac{x}{a} + \sqrt{1-(x/a)^2}\right) + C.$$

8.2.2. Интегриране по части. Нека всяка от функциите u и v е диференцируема в множеството $\{x\}$ и в това множество нека да съществува примитивна на функцията $v.u'$. Тогава в $\{x\}$ съществува примитивна и на функцията $u.v'$ и е в сила следната формула:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)\,dx. \tag{8.8}$$

Забележка. Определението за диференциал и свойството инвариантност на формата му позволяват формула (8.8) да се запише във вида

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x).v(x) - \int v(x)\,du(x). \tag{8.9}$$

За доказателството на формулираното твърдение ще запишем формулата за производна на произведението на двете функции $u(x)$ и $v(x)$:

$$[u(x).v(x)]' = u(x).v'(x) + u'(x).v(x). \tag{8.10}$$

Интегрираме равенството (8.10). Тъй като по условие за всяко x от множеството $\{x\}$ съществуват $\int v(x)u'(x)\,dx$ и $\int [u(x).v(x)]'\,dx = u(x).v(x)+C$, то за всяко x от множеството $\{x\}$ съществува и интегралът $\int u(x)v'(x)\,dx$, при това е вярна формулата (8.8) (или (8.9)).

Формулата (8.9) свежда въпроса за намиране на интеграла $\int u\,dv$ до намиране на интеграла $\int v\,du$. В редица конкретни случаи вторият интеграл може лесно да се пресметне.

Пресмятането на интеграла $\int u\,dv$ посредством формула (8.9) се нарича ***интегриране по части***. Ще отбележим, че при конкретно прилагане на формулата за интегриране по части (8.9) е много удобно да се използва таблицата на диференциалите от 5.5.6.

Примери:

1. Да се пресметне $I = \int x^n \ln x\,dx\ (n \neq -1)$. Като положим $u = \ln x$, $dv = x^n dx$ и използваме формула (8.9), получаваме $du = x^{-1}\,dx$, $v = x^{n+1}/(n+1)$,

$$I = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)x^{n+1} + C.$$

2. Да се пресметне $I = \int x \operatorname{arctg} x\,dx$. Като положим $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = x\,dx$ и използваме формула (8.9), получаваме

$$I = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x - x/2 + C.$$

3. Да се пресметне $I = \int x^2 \cos x\,dx$. Най-напред ще приложим формула (8.9), като ще положим $u = x^2$, $dv = \cos x\,dx$. Получаваме $du = 2x\,dx$, $v = \sin x$, $I = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$. За пресмятането на последния интеграл ще приложим формула (8.9) още веднъж, като този път ще положим $u = x$, $dv = \sin x\,dx$. Получаваме $du = dx$, $v = -\cos x$,

$$I = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C.$$

По такъв начин интегралът $\int x^2 \cos x\,dx$ се пресмята посредством двукратно интегриране по части. Лесно е да се разбере, че интегралът $\int x^n \cos x\,dx$ (където n е произволно цяло положително число) може да се пресметне по аналогичен начин посредством n-кратно интегриране по части.

4. Ще пресметнем сега $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$). Най-напред ще приложим формула (8.9), като ще положим $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\,dx$. Получаваме

$$du = ae^{ax}\,dx,\ v = b^{-1}\sin bx,$$

$$I = b^{-1}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

За пресмятане на последния интеграл още веднъж прилагаме формула (8.9), като ще положим този път $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx\,dx$. Получаваме

$$I = b^{-1}e^{ax}\sin bx + ab^{-2}e^{ax}\cos bx - a^2b^{-2}I. \tag{8.11}$$

По такъв начин чрез двукратно интегриране на I по части получаваме за интеграла I уравнението от първа степен (8.11). От това уравнение намираме

$$I = (a^2+b^2)^{-1}(a\cos bx + b\sin bx)e^{ax}.$$

Практиката показва, че голямата част от интегралите, които могат да се решат чрез интегриране по части, може да се раздели на следните три групи:

1. Към първата група се отнасят интегралите, чиято подинтегрална функция съдържа като множител една от следните функции: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $(\operatorname{arc\,tg} x)^2$, $(\arccos x)^2$, $\ln \varphi(x)$, $\cdots$, а другият множител е произволна на позната функция (вж. разгледаните примери **1** и **2**). За пресмятане на интегралите от първата група прилагаме формулата (8.9), като полагаме в нея u равна на една от изброените функции.

2. Към втората група се отнасят интеграли от вида

$$\int (ax+b)^n \cos(cx)\,dx,\ \int (ax+b)^n \sin(cx)\,dx,\ \int (ax+b)^n e^{cx}\,dx,$$

където a, b, c са константи, n е произволно цяло положително число (вж. разгледания пример **3**). Интегралите от втората група се решават чрез n-кратно прилагане на формулата за интегриране по части (8.9), като за u трябва всеки път да се взема $(ax+b)$ в съответните степени. След всяко интегриране по части тази степен ще намалява с единица.

3. Към тази група се отнасят интеграли от вида $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int \sin(\ln x)\,dx$, $\int \cos(\ln x)\,dx$, $\cdots$ (вж. пример **4**). Като означим всеки от интегралите в тази група с I и двукратно интегрираме по части, стигаме до уравнение от първа степен за I.

Разбира се, посочените три групи не изчерпват всички интеграли, които се решават с интегриране по части. Ще приведем примери на интеграли, които не влизат в нито една от изброените три групи, но могат да се пресметнат с помощта на формула (8.9).

Да пресметнем $I=\int x\sin^{-2} x\,dx$. Този интеграл не влиза в нито една от споменатите три групи. Въпреки това, като приложим формула (8.9), полагайки в нея $u=x$, $dv=\sin^{-2} x\,dx$, получаваме $du=dx$, $v=-\operatorname{ctg} x$,

$$I=-x\operatorname{ctg} x+\int \operatorname{ctg} x\,dx=-x\operatorname{ctg} x+\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$=-x\operatorname{ctg} x+\int \frac{d\sin x}{\sin x}=-x\operatorname{ctg} x+\ln|\sin x|+C$$

(в проведените разсъждения $x\neq \pi n$, където $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

Аналогично се пресмята и интегралът $\int x\cos^{-2} x\,dx$.

Ще пресметнем накрая важния за по-нататък интеграл

$K_\lambda=\int (t^2+a^2)^{-\lambda}\,dt$, където $a=\text{const}$, $\lambda=1, 2, 3, \cdots$ Този интеграл също не влиза в споменатите по-горе три групи. За пресмятането му ще установим рекурентна формула, свеждаща пресмятането на K_λ до пресмятане на $K_{\lambda-1}$.

Можем да запишем (при $\lambda\neq 1$)

$$K_\lambda=a^{-2}\int a^2(t^2+a^2)^{-\lambda}\,dt=a^{-2}\int ((t^2+a^2)-t^2)(t^2+a^2)^{-\lambda}\,dt$$

$$=a^{-2}\int (t^2+a^2)^{-\lambda+1}\,dt-\frac{1}{2}a^{-2}\int t(t^2+a^2)^{-\lambda}\,2t\,dt$$

$$=a^{-2}K_{\lambda-1}-\frac{1}{2}a^{-2}\int t(t^2+a^2)^{-\lambda}\,d(t^2+a^2).$$

За пресмятане на последния интеграл прилагаме формулата за интегриране по части (8.9), като полагаме $u=t$, $dv=(t^2+a^2)^{-\lambda}\,d(t^2+a^2)$. Получаваме $du=dt$, $v=-(t^2+a^2)^{-\lambda+1}/(\lambda-1)$,

$$K_\lambda=a^{-2}K_{\lambda-1}+\frac{1}{2(\lambda-1)}a^{-2}t(t^2+a^2)^{-\lambda+1}-\frac{1}{2(\lambda-1)}a^{-2}K_{\lambda-1}.$$

От последното равенство получаваме рекурентната формула

$$K_\lambda=\frac{1}{2(\lambda-1)}a^{-2}\cdot t(t^2+a^2)^{-\lambda+1}+\frac{2\lambda-3}{2\lambda-2}a^{-2}K_{\lambda-1}. \tag{8.12}$$

Ще се убедим, че рекурентната формула (8.12) позволява да се пресметне интегралът K_λ за всяко $\lambda=2, 3, \cdots$ Наистина интегралът K_1 се пресмята елементарно

$$K_1=\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\int \frac{d(t/a)}{(t/a)^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C.$$

След като е пресметнат интегралът K_1, като положим във формула (8.12) $\lambda=2$, без труд намираме K_2. На свой ред, като знаем K_2 и положим във формула (8.12) $\lambda=3$, получаваме K_3. Продължавайки по този начин, ще пресметнем интеграла K_λ за всяко естествено число λ.

8.3. Класове от функции, интегруеми в елементарни функции

Макар че, както отбелязахме, неопределеният интеграл от елементарна функция може да не се изразява чрез елементарни функции, все пак съществуват широки класове от функции,

неопределените интеграли от които се изразяват чрез елементарни функции. Този параграф е посветен на изучаването на такива класове от функции.

Най-важен измежду тези класове от функции е класът на рационалните дроби, представляващи частно на два алгебрични полинома. Изучаването на класа на рационалните дроби се предшествува от кратки сведения за комплексните числа и алгебричните полиноми.

8.3.1. Кратки сведения за комплексните числа. Две реални числа x и y ще наричаме ***наредена двойка***, ако е казано кое от тези числа е първо и кое е второ.

Нареденатa двойка от реалните числа x и y ще означаваме със символа (x, y), записвайки на първо място първия елемент на двойката.

Комплексно число *се нарича нареденатa двойка* (x, y) *от реални числа, първото от които* x *се нарича* ***реална част,*** *а второто* y — ***имагинерна част*** *на това комплексно число.*

Когато имагинерната част y е равна на нула, съответната двойка $(x, 0)$ се отъждествява с реалното число x. Това позволява множеството на реалните числа да се разглежда като подмножество на комплексните числа.

Две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ са равни, ако $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Казва се, че комплексното число $z=(x, y)$ е равно на нула, ако $x=0$ и $y=0$.

Ще определим операциите събиране и умножение на комплексните числа. Понеже реалните числа са подмножество на комплексните числа, тези операции трябва да се определят така, че приложени към две реални числа, да водят до същия резултат, както операциите събиране и умножаване на реални числа, известни ни от 2.4.

Сума на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ наричаме комплексното число

$$z=(x_1+x_2,\ y_1+y_2). \tag{8.13}$$

Произведение на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ наричаме комплексното число

$$z=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1). \tag{8.14}$$

Лесно се проверява, че сумата и произведението на комплексни числа притежават същите свойства, както сумата и произведението на реални числа. В сила са следните свойства:

1°. $z_1+z_2=z_2+z_1$ (комутативно свойство на сумата).

2°. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (асоциативно свойство на сумата).

3°. $z+(0, 0)=z$ (особена роля на числото $(0, 0)$).

4°. За всяко число $z=(x, y)$ съществува противоположно на него число $z'=(-x, -y)$, за което $z+z'=(0, 0)$.

5°. $z_1 . z_2=z_2 . z_1$ (комутативно свойство на произведението).

6°. $(z_1 . z_2) . z_3=z_1 . (z_2 . z_3)$ (асоциативно свойство на произведението).

7°. $z . (1,0)=z$ (особена роля на числото $(1, 0)$).

8°. За всяко комплексно число $z=(x, y)$, различно от нула, съществува реципрочно на него число $\frac{1}{z}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$, за което $z . \frac{1}{z}=(1, 0)$.

9°. $(z_1+z_2) . z_3=z_1 . z_3+z_2 . z_3$ (дистрибутивно свойство на произведението относно сумата).

Свойствата 1°—9° позволяват да се твърди, че за комплексните числа се запазват напълно всички правила на елементарната алгебра, отнасящи се до аритметичните действия и почленното събиране на равенствата. Освен това тези свойства напълно решават въпроса за изваждането на комплексни числа като действие, обратно на събирането, и за деленето на комплексни числа като действие, обратно на умножението.

Разлика на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ се нарича такова комплексно число z, което, събрано със z_2, дава z_1. С помощта на свойства 1°—4° се установява съществуването и единствеността на разликата на две произволни комплексни числа.

Лесно се проверява, че разликата на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ е комплексното число

$$z=(x_1-x_2,\ y_1-y_2). \tag{8.15}$$

Частно на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$, второто от които не е нула, се нарича такова комплексно число z, което при умножаване със z_2 дава z_1. С помощта на свойства 5°—8° се установява лесно, че единственото частно на споменатите две комплексни числа е комплексното число

$$z=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right).$$

В операциите с комплексни числа особена роля играе числото, представено с двойката $(0, 1)$, което се означава с буквата i. Умножавайки тази двойка сама на себе си (т. е. повдигайки я в квадрат), според определението за произведение на комплексни числа получаваме

$$(0, 1) . (0, 1)=(-1, 0)=-1, \text{ т. е. } i^2=-1.$$

Като вземем пред вид това, всяко комплексно число $z=(x, y)$ може да се представи във вида

$$z=(x, y)=(x, 0)+(0, y)=(x, 0)+(y, 0).(0, 1)=x+iy.$$

По-нататък широко ще използваме представянето $z=x+iy$ за комплексното число $z=(x, y)$.

Комплексното число $\bar{z}=(x, -y)=x-iy$ *се нарича* ***спрегнато на комплексното число*** $z=(x, y)=x+iy$.

Очевидно едно комплексно число е равно на нула тогава и само тогава, когато спрегнатото му число е равно на нула.

За геометрично представяне на комплексните числа се използва правоъгълна декартова координатна система. Комплексното число $z=(x, y)$ се представя или с точката M с координати (x, y), или с вектора $\overrightarrow{OM}$ с начало в началото на координатната система. По този начин събирането и изваждането на комплексни числа се свеждат до събиране и изваждане на съответните им вектори (това се разбира от формулите (8.13) и (8.15)).

Непосредствено от определението (8.14) за произведение на комплексните числа следва твърдението: *Произведението на две (и повече) комплексни числа е равно на нула тогава и само тогава, когато поне един от множителите е нула.*

Наистина, ако поне едно от числата $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ е равно на $(0, 0)$, то от (8.14) е очевидно, че $z=z_1 . z_2=(0, 0)$.

Ако, обратно, $z=z_1 . z_2$ е равно на $(0, 0)$, то от (8.14) следва, че

$$(8.14') \qquad \begin{cases} x_1 x_2-y_1 y_2=0 \\ y_1 x_2+x_1 y_2=0, \end{cases}$$

и ако $z_1\neq(0, 0)$, т. е. $x_1^2+y_1^2\neq 0$, то (8.14′) представлява хомогенна система от две уравнения относно двете неизвестни x_2 и y_2 с детерминанта $x_1^2+y_1^2$ различна от нула. Такава система има само тривиалното решение, т. е. $z_2=(x_2, y_2)=(0, 0)$.

Непосредствено от определението (8.14) за произведение на две комплексни числа следва още едно твърдение: Комплексното число, спрегнато на произведението на две (и повече) комплексни числа, е равно на произведението от комплексните числа, спрегнати съответно на всеки от множителите, т. е.

$$(8.14'') \qquad \overline{(z_1 . z_2)}=\bar{z}_1 . \bar{z}_2.$$

С помощта на правилото за умножаване на комплексни числа (8.14) лесно се проверява, че дясната и лявата страна на (8.14″) са равни на едно и също комплексно число $(x_1x_2-y_1y_2, -x_1y_2-x_2y_1)$.

8.3.2. Кратки сведения за корените (нулите) на алгебричните полиноми.

1°. ***Алгебричен полином от n-та степен*** *се нарича израз от вида*

$$(8.16) \qquad f(z)=c_n z^n+c_{n-1} z^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+c_1 z+c_0,$$

където $z=(x, y)=x+iy$ *е променливо комплексно число, а* $c_n, c_{n-1}, \cdot\cdot\cdot, c_0$ *са комплексни константи, първата от които е различна от нула.* Като делим един алгебричен полином f от степен n на друг алгебричен полином φ от степен, не по-голяма от n, стигаме до заключението, че каквито и да са двата полинома f и φ (степента на φ да не надминава степента на f), то е в сила равенството

$$(8.17) \qquad f(z)=\varphi(z) . q(z)+r(z),$$

в което q и r са полиноми, при това степента на q е равна на разликата от степените на полиномите f и φ, а степента на r е по-малка от степента на φ.

По отношение на фигуриращите в равенството (8.17) полиноми f, φ, q и r обикновено се използват напълно разбираемите термини „делимо", „делител", „частно" и „остатък".

Казва се, че *полиномът* f *се дели на полинома* $\varphi(z)$, *ако във формула* (8.17) *остатъкът* $r(z)=0$.

Ще се уговорим да наричаме полином от нулева степен всяка комплексна константа. Ясно е, че всеки полином се дели на различен от нула полином от нулева степен.

Определение. *Комплексното число* b *се нарича* ***корен на полинома*** f, *ако* $f(b)=0$.

Теорема 8.2. *Полиномът от ненулева степен* f *се дели на двучлена* $z-b$ *тогава и само тогава, когато* b *е корен на този* ***полином.***

Доказателство. Записваме за полиномите f и $\varphi(z)=z-b$ формула (8.17). Тъй като степента на остатъка r в тази формула трябва да бъде по-ниска от степента на делителя $\varphi(z)=z-b$, то r е полином на нулева степен, т. е. $r(z)=c=\text{const}$. Така формула (8.17) приема вида

$$(8.18) \qquad f(z)=(z-b)\, q(z)+c.$$

Като положим във формула (8.18) $z=b$, намираме, че $c=f(b)$. По определение f се дели на $z-b$ тогава и само тогава, когато остатъкът във формула (8.18) $c=f(b)$ е равен на нула, т. е. когато b е корен на f.□

2°. Естествено възниква въпросът, дали всеки алгебричен полином има корени. Отговор на този въпрос дава основната тео-

рема на алгебрата: *Всеки полином от ненулева степен има поне един корен.*

От тази теорема следва, че *алгебричен полином от n-та степен има точно n корена, като се отчита тяхната кратност.* Наистина нека f е полином от n-та степен. Съгласно основната теорема на алгебрата f има поне един корен b_1, т. е. за f е в сила представянето

$$f(z)=(z-b_1)f_1(z), \tag{8.19^1}$$

в което f_1 е полином от $(n-1)$-ва степен. Ако $n\neq 1$, то съгласно основната теорема на алгебрата f_1 има поне един корен b_2, т. е. за f_1 е в сила представянето

$$f_1(z)=(z-b_2)f_2(z), \tag{8.19^2}$$

в което f_2 е полином от $(n-2)$-ра степен. Продължавайки тези разсъждения, получаваме представянията

$$f_2(z)=(z-b_3)f_3(z), \tag{8.19^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n-1}(z)=(z-b_n)f_n(z). \tag{8.19^n}$$

В последното от тези представяния f_n е полином от нулева степен, т. е. $f_n(z)=c=\text{const}$. Като съпоставим равенствата (8.19^1)—(8.19^n) и отчетем, че $f_n(z)=c$, ще получим

$$f(z)=c(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n). \tag{8.20}$$

Ще отбележим, че комплексната константа c не е равна на нула, тъй като в противен случай полиномът f ще бъде тъждествено равен на нула и няма да бъде от n-та степен.

От равенството (8.20) е очевидно, че $f(b_1)=f(b_2)=\cdots=f(b_n)=0$, т. е. всяко от числата $b_1, b_2, \cdots, b_n$ е корен на полинома f. Освен това от (8.20) е очевидно, че каквото и да е комплексното число b, различно от $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$, комплексното число $f(b)$ не е равно на нула. Следователно полиномът f има точно n корена: $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$.

Равенството (8.20) дава разлагане на полинома f на множители.

Полином (8.16), в който $c_n=1$, се нарича приведен. За приведен полином формулата за разлагане (8.20) има вида

$$f(z)=(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n). \tag{8.21}$$

По-нататък, ако не е казано противното, ще разглеждаме приведени полиноми.

Между корените на полинома f може да има и равни. Нека

$a, b, \cdots, c$ са различните корени на приведения полином $f(z)$. Тогава за този полином представянето (8.21) приема следния вид:

$$f(z)=(z-a)^\alpha(z-b)^\beta\cdots(z-c)^\gamma. \tag{8.22}$$

В това разлагане $\alpha, \beta, \cdots, \gamma$ са цели числа, всяко от които не е по-малко от единица, и $\alpha+\beta+\cdots+\gamma=n$, където n е степента на полинома f.

Ако за полинома f е в сила разлагането (8.22), казваме, че комплексното число a е α-кратен корен на f, комплексното число b е β-кратен корен на f ... комплексното число c е γ-кратен корен на f.

Корен с кратност единица се нарича ***еднократен (прост корен)****, а корен с кратност, по-голяма от единица,* ***се нарича многократен (кратен).***

Може да се даде и друго еквивалентно определение на корен с далена кратност: комплексното число a се нарича ***α-кратен корен*** на полинома f, ако за f е в сила представянето

$$f(z)=(z-a)^\alpha\varphi(z), \text{ където } \varphi(a)\neq 0. \tag{8.23}$$

3°. Нека сега

$$f(z)=z^n+c_{n-1}z^{n-1}+c_{n-2}z^{n-2}+\cdots+c_0 \tag{8.24}$$

е приведен алгебричен полином с реални коефициенти $c_{n-1}, c_{n-2}, \cdots, c_0$. Ще докажем, че този полином притежава следното важно свойство.

Теорема 8.3. *Ако комплексното число a е λ-кратен корен на полинома (8.24) с реални коефициенти, то и спрегнатото му комплексно число $\bar{a}$ е също λ-кратен корен на този полином.*

Доказателство. Ще започнем с доказването на следния помощен факт: Ако f е полином с реални коефициенти, то комплексното число $f(\bar{z})$ е спрегнато на числото $f(z)$.

Тъй като коефициентите на полинома (8.24) са реални числа, то за доказателството на този факт е достатъчно да се убедим, че за всеки номер n комплексното число $(\bar{z})^n$ е спрегнато на z^n. Но това следва непосредствено от съотношението (8.14″). Като положим в това съотношение $z_1=z_2=z$, ще получим $\overline{(z^2)}=(\bar{z})^2$. По-нататък полагаме в (8.14″) $z_1=z^2$, $z_2=z$ и получаваме $\overline{(z^3)}=\overline{(z^2)}\cdot\bar{z}=(\bar{z})^2\cdot\bar{z}=(\bar{z})^3$.

Продължавайки аналогично, се убеждаваме, че $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$ за всеки номер n.

И така доказано е, че числото $\overline{f(z)}$ е спрегнато на числото $f(\bar{z})$, т. е. $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$, или

$$f(z)=\overline{f(\bar{z})}. \tag{8.25}$$

Нека сега комплексното число a е λ-кратен корен на полинома с реални коефициенти f, т. е. е в сила представянето

(8.26) $$f(z)=(z-b)^{\lambda}\varphi(z),$$

където

(8.27) $$\varphi(a)\neq 0.$$

От (8.26) и (8.25) следва

$$f(z)=\overline{(\bar{z}-a)^{\lambda}\varphi(\bar{z})},$$

а последното равенство поради (8.14″) може да се напише във вида

(8.28) $$f(z)=\overline{(\bar{z}+a)^{\lambda}}\,.\,\overline{\varphi(\bar{z})}.$$

Ще отбележим сега, че съгласно установеното по-горе съотношението $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$ е изпълнено равенството

(8.29) $$\overline{(\bar{z}-a)^{\lambda}}=\overline{(\bar{z}-a)}^{\lambda}=(z-\bar{a})^{\lambda}.$$

От (8.29) и (8.28) получаваме

(3.30) $$f(z)=(z-\bar{a})^{\lambda}\psi(z),$$

където

(8.31) $$\psi(z)=\overline{\varphi(\bar{z})}.$$

За да завършим доказателството на теорема 8.3, остава да се убедим, че $\psi(\bar{a})\neq 0$. Това следва веднага от факта, че съгласно (8.31) $\psi(\bar{a})=\overline{\varphi(a)}$, а $\overline{\varphi(a)}\neq 0$, тъй като $\varphi(a)\neq 0$ съгласно (8.27). □

8.3.3. Разлагане на алгебрични полиноми с реални коефициенти на произведение от неразложими множители. По-нататък ще разглеждаме само полиноми на реална променлива. Затова променливата ще означаваме с x, а не със z.

Като използуваме теорема 8.3, ще намерим разлагането на полином с реални коефициенти f на произведение от неразложими реални множители. Нека полиномът f има реални корени $b_1, b_2, \ldots, b_m$ с кратности съответно $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ и комплексно спрегнати корени a_1 и $\bar{a}_1$, a_2 и $\bar{a}_2, \ldots, a_n$ и $\bar{a}_n$ с кратности съответно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Тогава съгласно резултатите от 8.3.2 полиномът се представя във вида

(8.32) $$f(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}$$
$$\times(x-a_1)^{\lambda_1}(x-\bar{a}_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}(x-\bar{a}_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}(x-\bar{a}_n)^{\lambda_n}.$$

Да означим реалната и имагинерната част на корена a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ съответно с u_k и v_k, т. е. нека $a_k=u_k+iv_k$. Тогава $\bar{a}_k=u_k-iv_k$. Преобразуваме за всяко $k=1, 2, 3, \ldots, n$ израза

(8.33) $$(x-a_k)^{\lambda_k}(x-\bar{a}_k)^{\lambda_k}=((x-a_k)(x-\bar{a}_k))^{\lambda_k}$$
$$=((x-u_k-iv_k)(x-u_k+iv_k))^{\lambda_k}$$
$$=((x-u_k)^2+v_k^2)^{\lambda_k}=(x^2+p_kx+q_k)^{\lambda_k},$$

където $p_k=-2u_k$, $q_k=u_k^2+v_k^2$.

От (8.33) и (8.32) получаваме за полинома f следното разлагане на произведение от реални неразложими множители:

(8.34) $$f(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}.$$

Така идваме до извода, че полиномът f с реални коефициенти се представя като произведението (8.34) от неразложими реални множители, при което множителите, съответствуващи на реалните корени, са линейни двучлени със степени, равни на кратностите на корените, а множителите, съответствуващи на комплексните двойки корени, са квадратни тричлени със степени, равни на кратностите на тези двойки корени.

8.3.4. Разлагане на правилна рационална дроб на сума от елементарни дроби. ***Рационална дроб*** *се нарича частното на два алгебрични полинома.*

Навсякъде по-нататък ще разглеждаме рационални дроби, които са частно на два алгебрични полинома с реални коефициенти (такива дроби се наричат рационални дроби с реални коефициенти).

Рационалната дроб P/Q се нарича ***правилна,*** *ако степента на полинома P в числителя е по-малка от степента на полинома Q в знаменателя.*

В противен случай рационалната дроб се нарича ***неправилна.***

Ще докажем две помощни твърдения.

Лема 1. *Нека P/Q е правилна рационална дроб с реални коефициенти, знаменателят Q на която има за α-кратен корен реалното число a, т. е.*

(8.35) $$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\varphi(x),\ \text{където}\ \varphi(a)\neq 0.$$

Тогава за тази дроб е вярно следното представяне:

(8.36) $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k}\varphi(x)}.$$

В това представяне A е реална константа, равна на $P(a)/\varphi(a)$, k е цяло число, удовлетворяващо условието $k \geqq 1$, ψ е такъв полином с реални коефициенти, че последната дроб в дясната страна на (8.36) е правилна.

Доказателство. Да означим с A реалното число $A = P(a)/\varphi(a)$ и да разгледаме разликата

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha}.$$

Като приведем тази разлика към общ знаменател, ще имаме

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{P(x) - A\varphi(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)} = \frac{\Phi(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)}, \tag{8.37}$$

където с Φ е означен полиномът с реални коефициенти $\Phi(x) = P(x) - A\varphi(x)$.

Тъй като $\Phi(a) = P(a) - A \cdot \varphi(a) = P(a) - \varphi(a) \cdot P(a)/\varphi(a) = 0$, реалното число a е корен на полинома Φ с някаква кратност $k \geqq 1$. Това означава, че е вярно представянето

$$\Phi(x) = (x-a)^k \psi(x), \tag{8.38}$$

където $\psi(a) \neq 0$, а ψ е полином с реални коефициенти.

От представянето (8.38) и равенството (8.37) окончателно получаваме

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k} \varphi(x)}. \tag{8.39}$$

С това представянето (8.36) е доказано. Остава само да се убедим, че дробта в дясната страна на (8.39) е правилна, което непосредствено следва от факта, че разликата на две правилни рационални дроби е правилна рационална дроб (за да се убедим в това, е достатъчно да приведем разликата на правилните рационални дроби към общ знаменател). □

Лема 2. *Нека P/Q е правилна рационална дроб с реални коефициенти, знаменателят Q на която има за λ-кратни корени комплексните числа $a = u + iv$ и $\bar{a} = u - iv$, т. е.*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\lambda \varphi(x), \tag{8.40}$$

където $\varphi(a) \neq 0$, $\varphi(\bar{a}) \neq 0$, $p = -2u$, $q = u^2 + v^2$. Тогава за тази дроб е в сила следното представяне:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \frac{\psi(x)}{(x^2 + px + q)^{\lambda - k} \varphi(x)}. \tag{8.41}$$

В това представяне M и N са реални константи, k е цяло число, удовлетворяващо условието $k \geqq 1$, а ψ е такъв полином с реални коефициенти, че последната дроб в дясната страна на (8.41) е правилна.

Доказателство на лема 2. Ще се уговорим да означаваме реалната част на комплексната величина A със символа $\mathrm{Re}[A]$, а имагинерната ѝ част със символа $\mathrm{Im}[A]$. Полагаме

$$M = v^{-1} \mathrm{Im}[P(a)/\varphi(a)], \quad N = \mathrm{Re}[P(a)/\varphi(a)] - uv^{-1} \mathrm{Im}[P(a)/\varphi(a)].$$

Не е трудно да се провери, че M и N са решение на следното уравнение:

$$P(a) - (Ma + N)\varphi(a) = 0. \tag{8.42}$$

Наистина, като разделим това уравнение на $\varphi(a)$ и приравним реалната и имагинерната част на нула, получаваме двете равенства

$$\begin{cases} Mu + N = \mathrm{Re}[P(a)/\varphi(a)], \\ Mv = \mathrm{Im}[P(a)/\varphi(a)], \end{cases}$$

от които се определят M и N. Да разгледаме сега разликата

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\lambda}.$$

Като приведем тази разлика към общ знаменател, ще имаме

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\lambda} = \frac{P(x) - (Mx + N)\varphi(x)}{(x^2 + px + q)^\lambda \varphi(x)} = \frac{\Phi(x)}{(x^2 + px + q)^\lambda \varphi(x)}. \tag{8.43}$$

Тук с Φ е означен полиномът с реални коефициенти $\Phi(x) = P(x) - (Mx + N)\varphi(x)$. Равенството (8.42) позволява да се твърди, че комплексното число a, а следователно съгласно теорема 8.3 и спрегнатото му число $\bar{a}$ са корени на полинома Φ от някаква кратност $k \geqq 1$. В такъв случай за полинома Φ е в сила представянето

$$\Phi(x) = (x^2 + px + q)^k \psi(x), \tag{8.44}$$

където $\psi(x)$ е полином с реални коефициенти, който няма за корени числата a и $\bar{a}$. От представянето (8.44) и формула (8.43) получаваме представянето (8.41). Последната дроб в дясната страна на (8.41) е правилна, понеже тази дроб е равна на разликата на две правилни дроби. □

Последователното прилагане на леми 1 и 2 към дробта P/Q по отношение на всички корени на знаменателя води до следното забележително твърдение:

Теорема 8.4. *Нека P/Q е правилна рационална дроб с реални коефициенти, знаменателят на която има вида*

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1} (x - b_2)^{\beta_2} \cdots (x - b_m)^{\beta_m} \times (x^2 + p_1 x + q_1)^{\lambda_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{\lambda_2} \cdots (x^2 + p_n x + q_n)^{\lambda_n}. \tag{8.45}$$

Тогава за тази дроб е в сила следното разлагане на сума от елементарни дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_1^{(1)}}{(x-b_1)}+\frac{B_2^{(1)}}{(x-b_1)^2}+\cdots+\frac{B_{\beta_1}^{(1)}}{(x-b_1)^{\beta_1}}+\cdots+\frac{B_1^{(m)}}{(x-b_m)}+\frac{B_2^{(m)}}{(x-b_m)^2}+\cdots+\frac{B_{\beta_m}^{(m)}}{(x-b_m)^{\beta_m}}+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}}+\cdots+\frac{M_1^{(n)}x+N_1^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)}+\frac{M_2^{(n)}x+N_2^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^2}+\cdots+\frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x+N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}}. \tag{8.46}$$

В това разлагане $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{\beta_m}^{(m)}, M_1^{(1)}, N_1^{(1)}, \ldots, M_{\lambda_n}^{(n)}, N_{\lambda_n}^{(n)}$ *са реални константи, част от които могат да бъдат нули.*

Забележка. За определяне на константите равенството (8.46) трябва да се приведе към общ знаменател и да се сравнят коефициентите пред еднаквите степени на x в числителя.

Примери:

1. Да се разложи на сума от елементарни дроби

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}. \tag{8.47}$$

Тъй като квадратният тричлен x^2+x+1 има комплексни корени, ще търсим съгласно теорема 8.4 разлагане на дробта (8.47) от вида

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}. \tag{8.48}$$

Като приведем равенството (8.48) към общ знаменател, получаваме

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{B_1(x^3-1)+B_2(x^2+x+1)+(Mx+N)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Чрез сравняване в числителя коефициентите пред x^0, x^1, x^2 и x^3, стигаме до системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} B_1+M=2\\ B_2+N-2M=4\\ B_2+M-2N=1\\ B_1+B_2+N=2.\end{array}\right.$$

Като решим тази система, намираме $B_1=2$, $B_2=3$, $M=0$, $N=1$. Окончателно получаваме

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2+x+1}. \tag{8.49}$$

Този метод за намиране на разлагането на правилна рационална дроб се нарича ***метод на неопределените коефициенти.***

2. Да се намери разлагането на правилната дроб

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Тъй като квадратният тричлен x^2+1 има комплексни корени, ще търсим съгласно теорема 8.4 разлагане от вида

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{B}{x-2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Привеждаме последното равенство към общ знаменател и сравняваме числителите. Така получаваме

$$3x^4+2x^3+3x^2-1=B(x^4+2x^2+1)+(M_1x+N_1)(x^3-2x^2+x-2)+(M_2x+N_2)(x-2).$$

Като сравним коефициентите пред x^0, x^1, x^2, x^3 и x^4, стигаме до системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} B+M_1=3\\ N_1-2M_1=2\\ 2B+M_1-2N_1+M_2=3\\ N_1-2M_1+N_2-2M_2=0\\ B-2N_1-2N_2=-1.\end{array}\right.$$

Като решим системата, намираме $B=3$, $M_1=0$, $N_1=2$, $M_2=1$, $N_2=0$. Окончателно получаваме

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}. \tag{8.50}$$

8.3.5. Интегруемост на рационалните дроби в елементарни функции. Сега сме готови да решим в общ вид проблема за интегриране на рационални дроби с реални коефициенти. Този проблем се свежда до интегриране само на правилни рационални дроби, тъй като всяка неправилна рационална дроб (посредством разделяне числителя на знаменателя) може да се представи като сума на алгебричен полином и правилна рационална дроб.

Пример:

$$\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x+2}=x^2-2x+\frac{4x+1}{x^2+x+2},$$

тъй като

$$\begin{array}{l|l} x^4-x^3+1 & x^2+x+2 \\ \hline -\;\; x^4+x^3+2x^2 & x^2-2x \\ \hline \quad -2x^3-2x^2+1 & \\ -\;\; -2x^3-2x^2-4x & \\ \hline \text{остатък } 4x+1 & \end{array}$$

Ние знаем да интегрираме полиноми.

Остава да се научим да интегрираме правилна рационална дроб. Съгласно теорема 8.4 проблемът за интегриране на правилни рационални дроби се свежда до интегриране на елементарни дроби от следните четири типа:

$$(8.51)\quad 1)\ \frac{B}{x-b};\ 2)\ \frac{B}{(x-b)^{\beta}};\ 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}.$$

Тук $\beta=2, 3, 4, \cdots$; $\lambda=2, 3, 4, \cdots$; B, M, N, b, p и q са реални числа, при това тричленът x^2+px+q няма реални корени, т. е. $q-p^2/4>0$.

Ще докажем, че всяка от посочените четири вида дроби се интегрира в елементарни функции.

Дробите от вида 1) и 2) се интегрират с помощта на субституцията $t=x-b$. Получаваме

$$(8.52)\quad \int \frac{B}{x-b}\,dx = B\int \frac{dt}{t} = B\ln|t|+C = B\ln|x-b|+C,$$

$$(8.53)\quad \int \frac{B}{(x-b)^{\beta}}\,dx = B\int t^{-\beta}\,dt = \frac{-B}{\beta-1}\,t^{-\beta+1}+C$$
$$= \frac{-B}{\beta-1}\,(x-b)^{-\beta+1}+C.$$

За пресмятане на интеграла от дроб от тип 3 ще представим квадратния тричлен във вида $x^2+px+q=(x+p/2)^2+(q-p^2/4)$ и понеже $q-p^2/4>0$, $a=\sqrt{q-p^2/4}$ е реално число. Като направим субституцията $t=x+p/2$, получаваме

$$(8.54)\quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{t^2+a^2}\,dt$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + (N-Mp/2)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + (N-Mp/2)\,\frac{1}{a}\int \frac{d(t/a)}{(t/a)^2+1}$$
$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Остава да се сметне интегралът от дроб от тип 4. Като използваме въведените означения $t=x+p/2$, $a=\sqrt{q-p^2/4}$, ще имаме

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}\,dx = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{(t^2+a^2)^{\lambda}}\,dt$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\lambda}} + (N-Mp/2)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda}}.$$

Въвеждаме означенията

$$I_{\lambda} = \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\lambda}},\qquad K_{\lambda} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda}}.$$

Интересуващият ни интеграл ще бъде решен, ако се пресметнат интегралите I_{λ} и K_{λ}. Интегралът I_{λ} се решава елементарно

$$I_{\lambda} = -\frac{1}{\lambda-1}(t^2+a^2)^{-\lambda+1}+C = -\frac{1}{\lambda-1}(x^2+px+q)^{-\lambda+1}+C.$$

Интегралът K_1 беше решен в края на 8.2.2. Така получихме за този интеграл рекурентната формула (8.12), която ни позволява да пресметнем K_{λ} за всяко $\lambda=2, 3, 4, \cdots$, понеже

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C.$$

И така пресметнати са интегралите от посочените четири типа (8.51) и е доказано, че всеки от тези интеграли представлява елементарна функция. С това идваме до следващата теорема, с която се изчерпва проблемът за интегриране на рационални дроби.

Теорема 8.5. *Всяка рационална дроб е интегруема в елементарни функции.*

В заключение ще разгледаме някои примери за пресмятане на неопределени интеграли от рационални дроби, а именно неопределените интеграли от дробите (8.49), (8.50), разгледани в предишния параграф. Като използваме за тях формулите (8.52), (8.53) и (8.54), ще получим

1. $$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx$$
$$= \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

2. $$\int \frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=3\ln|x-2|+2\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=3\ln|x-2|+2\operatorname{arc\,tg}x-1/2\,(x^2+1)+C.$$

3. $$\int\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}dx=\int\frac{dx}{2x}-\int\frac{2dx}{x-1}+\int\frac{3dx}{2(x-2)}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-2\ln|x-1|+3/2\ln|x-2|+C.$$

8.3.6. Интегруемост в елементарни функции на някои тригонометрични и ирационални изрази. За разсъжденията в тази точка важна роля ще играе рационалната функция на два аргумента. Ще започнем с определянето на тази функция и изясняване на някои нейни свойства.

Полином от степен *n на два аргумента x и y се нарича израз от вида*

$$P_n(x,\ y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2$$
$$+\cdots+a_{n0}x^n+a_{n-1,1}xy^{n-1}+\cdots+a_{0n}y^n,$$

в който с $a_{00}, a_{10}, \ldots, a_{0n}$ са означени такива реални константи, че сред числата $a_{n,0}, a_{n-1,1}, a_{n-2,2}, \ldots, a_{0,n}$ да има поне едно, различно от нула.

Рационална функция на два аргумента *x и y се нарича израз от вида*

$$R(x,\ y)=\frac{P_n(x,\ y)}{Q_m(x,\ y)},$$

в който P_n е полином на двата аргумента x и y от степен n а Q_m — полином на двата аргумента x и y от степен m.

В сила е следното тривиално твърдение: ако R е рационална функция на двата аргумента x и y, а R_1, R_2 и R_3 са три произволни рационални функции на една променлива t, то израз от вида

(8.55) $$R(R_1(t),\ R_2(t))\,.\,R_3(t)$$

е рационална функция на една променлива.

За доказване на това твърдение е достатъчно да отбележим, че в резултат от прилагане на операциите събиране, изваждане, умножение и деление към рационални функции на една променлива t се получава пак рационална функция на една променлива t.

По-нататък, за да докажем интегруемостта в елементарни функции на някои изрази, с помощта на специално подбрани субституции ще сведем интегралите от разглежданите изрази към интеграли от рационални дроби. *При това ще казваме, че интегралът от разглеждания израз* ***се рационализира*** *с посочената специална субституция.*

1°. Интегриране на някои тригонометрични изрази. Със символа R ще означаваме рационална функция на двата аргумента x и y.

В тази точка ще докажем интегруемостта в елементарни функции на всяка функция от вида

(8.56) $$R(\sin x,\ \cos x),$$

като ще покажем, че интеграл от такава функция се рационализира със субституцията $t=\operatorname{tg}(x/2)$. Наистина

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arc\,tg}t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

така че

(8.57) $$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ако положим $R_1(t)=2t/(1+t^2)$, $R_2=(1-t^2)/(1+t^2)$, $R_3(t)=2/(1+t^2)$, в дясната страна на (8.57) получаваме интеграл от вида (8.55), който е интеграл от рационална функция на аргумента t.

Пример:

Да се пресметне $I_1=\int\frac{dx}{1+a\cos x}$, $a>0$, $a\neq1$. Като приложим универсалната тригонометрична субституция $t=\operatorname{tg}(x/2)$, получаваме

$$x=2\operatorname{arc\,tg}t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$I_1=2\int\frac{dt}{a+1+t^2(1-a)}=\frac{2}{a+1}\int\frac{dt}{1+t^2(1-a)/(1+a)}.$$

По-нататък трябва отделно да разгледаме двата случая:

1) $0<a<1$; 2) $a>1$.

В случая $0<a<1$ имаме

$$I_1=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(t\sqrt{(1-a)/(1+a)}\right)+C$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

В случая $a>1$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{(a-1)/(a+1)}}{1-t\sqrt{(a-1)/(a+1)}}\right|+C$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{(a-1)/(a+1)}\operatorname{tg}(x/2)}{1-\sqrt{(a-1)/(a+1)}\operatorname{tg}(x/2)}\right|+C.$$

2°. Интегриране на дробно-линейни ирационалности. В тази точка ще докажем интегруемостта в елементарни функции на всяка функция от вида

$$R(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}), \tag{8.58}$$

където a, b, c и d са константи, n е цяло положително число. Функция от този вид ще наричаме ***дробно-линейна ирационалност.***

Ще докажем, че интеграл от функция от вида (8.58) при $ad-bc \neq 0$ се рационализира посредством субституцията $t=\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$. Наистина

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d}, \quad x=\frac{d\,.\,t^n-b}{a-c\,.\,t^n}, \quad dx=\frac{(ad-bc)\,n\,t^{n-1}}{(a-c\,.\,t^n)^2}\,dt,$$

така че

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}\right)dx = \int R\left(\frac{d\,.\,t^n-b}{a-c\,.\,t^n},\ t\right)\frac{n\,(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}\,t^{n-1}\,dt. \tag{8.59}$$

Ако положим $R_1(t)=\frac{d\,.\,t^n-b}{a-c\,.\,t^n}$, $R_2(t)=t$, $R_3(t)=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-c\,.\,t^n)^2}$, то в дясната страна на (8.59) ще получим интеграл от вида (8.55), който е интеграл от рационална функция на аргумента t. С това е доказано, че интегралът от дробно-линейната ирационалност (8.58) се рационализира със субституцията $t=\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$.

Пример:

Да се пресметне $I=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{1-x}$. Правим субституцията

$$t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad t^2=\frac{1+x}{1-x}, \quad x=\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

получаваме

$$I=2\int\frac{t^2\,dt}{t^2+1}=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-2\operatorname{arc\,tg} t+C$$
$$=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

3°. Интегриране на квадратични ирационалности. В тази точка ще докажем интегруемостта в елементарни функции на всяка функция от вида

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}), \tag{8.60}$$

където a, b и c са константи. Функция от този вид ще наричаме ***квадратична ирационалност.*** При това, разбира се, ще смятаме, че квадратният тричлен ax^2+bx+c няма равни корени (иначе квадратният корен от този тричлен може да се замени с рационален израз).

Ще докажем, че интеграл от функция от вида (8.60) винаги се рационализира с една от т. нар. субституции на Ойлер.

Най-напред ще разгледаме случая, когато квадратният тричлен ax^2+bx+c има комплексни корени. В този случай знакът на квадратния тричлен съвпада със знака на a и тъй като квадратният тричлен трябва да бъде положителен (от него се извлича квадратен корен), то $a>0$.

Тогава имаме право да направим следната субституция:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}. \tag{8.61}$$

Субституцията (8.61) обикновено се нарича ***първа субституция на Ойлер.*** Ще докажем, че тази субституция рационализира интеграла на функцията (8.60) за разглеждания случай. Повдигаме в квадрат двете страни на равенството $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$ и получаваме $bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,tx$, така че

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$
$$dx=2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt.$$

По такъв начин

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},\ \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt. \tag{8.62}$$

Под знака на интеграла в дясната страна на (8.62) имаме израз от вида (8.55) при $R_1(t)=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}$, $R_2(t)=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}$, $R_3(t)=2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}$, така че в дясната страна на (8.62) получаваме интеграл от рационална дроб.

Ще разгледаме сега случая, когато квадратният тричлен ax^2+bx+c има реални корени x_1 и x_2. Тогава $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, а интегралът от функция от вида (8.60) се рационализира чрез субституцията

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}, \tag{8.63}$$

наричана обикновено ***втора субституция на Ойлер.*** Наистина, като повдигнем в квадрат двете страни на равенството $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ и съкратим на $x-x_1$, ще получим $a(x-x_2)=t^2(x-x_1)$, така че

$$x=\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t,$$

$$dx=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

По такъв начин

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \tag{8.64}$$

$$=\int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\ \frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}\right)\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

Дясната страна на (8.64) е израз от вида (8.55) при

$$R_1(t)=\frac{-ax_2+x_1t}{t^2-a},\quad R_2(t)=\frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a},$$

$R_3(t)=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}$. Така в дясната страна на (8.64) получаваме интеграл от рационална дроб.

Примери:

1. Да се сметне $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. Тъй като квадратният тричлен x^2+x+1 има комплексни корени, ще направим първата субституция на Ойлер

$$t=\sqrt{x^2+x+1}+x.$$

Повдигаме на квадрат двете страни на равенството $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$ и получаваме $x^2+x+1=t^2-2tx+x^2$, или $x+1=t^2-2tx$, така че

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t},\quad dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt.$$

По такъв начин

$$I=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}\right)dt.$$

Неопределените коефициенти A, B и C се пресмятат лесно: $A=2$, $B=-3$, $C=-3$. Окончателно получаваме

$$I=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+3/2\,(1+2t)+C$$

$$=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|$$

$$+\frac{3}{2}(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})^{-1}+C.$$

2. Да се пресметне $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$. Тъй като квадратният тричлен $1-2x-x^2$ има реални корени $x_1=-1+\sqrt{2}$ и $x_2=-1-\sqrt{2}$, ще направим втората субституция на Ойлер (8.63)

$$t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x+1+\sqrt{2}}.$$

Като повдигнем на квадрат двете страни на равенството $\sqrt{1-2x-x^2}=t(x+1+\sqrt{2})$, ще имаме $-(x+1-\sqrt{2})=t^2(x+1+\sqrt{2})$, тъй че

$$x=\frac{-t^2(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1}{t^2+1},\quad \sqrt{1-2x-x^2}=\frac{2\sqrt{2}}{t^2+1}t,$$

$$1+\sqrt{1-2x-x^2}=\frac{t^2+2\sqrt{2}t+1}{t^2+1},\quad dx=-\frac{4\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}dt.$$

По такъв начин

$$I=-4\sqrt{2}\int\frac{tdt}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}.$$

Получаваме интеграл от рационална дроб, пресмятането на който предоставяме на читателя.

8.3.7. Интегриране на диференциален бином

Диференциален бином ще наричаме израз от вида

$$x^m(a+bx^n)^p,$$

където a и b са константи, а степенните показатели m, n и p са рационални числа. Ще изучим въпроса за интегриране в елементарни функции на диференциален бином.

Най-напред ще отбележим три случая, в които интегралът от диференциален бином допуска рационализираща субституция.

Първият случай е, когато p е цяло число. В този случай диференциалният бином е дробно-линейна ирационалност от вида $R(x,\sqrt[r]{x})$, където r е най-малкото общо кратно на знаменателите на рационалните числа m и n. Следователно интегралът от диференциалния бином в този случай се рационализира със субституцията $t=\sqrt[r]{x}$.

Втори случай имаме, когато $(m+1)/n$ е цяло число. В този случай, като направим субституцията $z=x^n$ и положим за краткост $(m+1)/n-1=q$, ще получим

(8.65) $$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = n^{-1}\int (a+bz)^p z^q\,dz.$$

Подинтегралната функция в дясната страна на (8.65) е дробно-линейна ирационалност от вида $R(z, \sqrt[s]{a+bz})$, където s е знаменателят на рационалното число p.

Така че в този случай диференциалният бином се рационализира със субституцията $t=\sqrt[s]{a+bz}=\sqrt[s]{a+bx^n}$.

Трети случай имаме, когато $(m+1)/n+p$ е цяло число. В този случай подинтегралната функция в дясната страна на (8.65) е дробно-линейна ирационалност от вида $R(z, \sqrt[s]{(a+bz)/z})$, така че интегралът от диференциалния бином се рационализира със субституцията $t=\sqrt[s]{(a+bz)/z}=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$.

В средата на миналия век П. Л. Чебишов* е доказал, че изброените три случая изчерпват случаите, при които диференциалният бином е интегруем в елементарни функции.

Примери:

1. Да се пресметне интегралът

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}}=\int x^{-2}(a+bx^2)^{-1/2}dx.$$

В случая $m=-2$, $n=2$, $p=-1/2$, така че $(m+1)/n+p=-1$ (трети случай). Като направим субституцията

$$t=\sqrt{ax^{-2}+b},\ x=\sqrt{a}/\sqrt{t^2-b},\ dx=-\sqrt{a}\,t\,(t^2-b)^{-3/2}\,dt,$$

ще получим

$$I=\int\left(-\frac{dt}{a}\right)=-\frac{t}{a}+C=a^{-1}\sqrt{ax^{-2}+b}+C.$$

2. Да се пресметне $I=\int x^5(1-x^2)^{-1/2}dx$. В дадения случай $m=5$, $n=2$, $p=-1/2$, така че $(m+1)/n=3$ (втори случай). Правим субституцията

$$t=\sqrt{1-x^2},\ x=\sqrt{1-t^2},\quad dx=-\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$$

и получаваме

$$I=-\int(1-t^2)^2dt=-\int dt+2\int t^2dt-\int t^4dt$$
$$=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C$$
$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}+C.$$

* Пафнутий Лвович Чебишов — руски математик (1821—1894).

8.4. Елиптични интеграли

Към интегралите от квадратични ирационалности естествено се отнасят и следните интеграли:

(8.65) $$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\,dx,$$

(8.66) $$\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,dx,$$

чиито подинтегрални функции съдържат квадратен корен от полиноми от трета или четвърта степен (с реални коефициенти).

Тези интеграли се срещат често в приложенията. Интегралите (8.65) и (8.66) не са елементарни функции. Тези два интеграла е прието да се наричат ***елиптични***, когато не се изразяват чрез елементарни функции, и ***псевдоелиптични***, когато се изразяват чрез елементарни функции.*

Поради важността на интегралите (8.65) и (8.66) за приложенията се съставят таблици и графики на функциите, определени с тези интеграли. При произволни коефициенти a, b, c, d и e такива таблици и графики се съставят доста трудно. Затова възниква задачата за свеждане на всички интеграли от вида (8.65) и (8.66) до няколко типа интеграли, съдържащи по възможност по-малко произволни коефициенти (или, както се казва, за привеждане на интегралите (8.65) и (8.66) в канонична форма).

Интегралът (8.65) се свежда към интеграла (8.66). Действително кубичният полином има винаги поне един реален корен x_0 и затова той може да се представи във вида $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_0)(x^2+px+q)$.

Като направим субституцията $x-x_0=\pm t^2$, както лесно се вижда, можем да преобразуваме интеграла (8.65) в (8.66). Следователно достатъчно е да разгледаме само интеграла (8.66).

Съгласно 8.4. полином от четвърта степен се разлага на произведение от два квадратни тричлена с реални коефициенти:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x^2+px+q)(x^2+p'x+q').$$

Съществува линейна или дробно-линейна субституция, която унищожава линейните членове в двата квадратни тричлена. Като направим такава субституция, ще преобразуваме интеграла (8.66) с точност до събираемо елементарна функция във вида

* Тези названия идват от това, че за първи път тези интеграли са възникнали при решаване на задачата на ректифициране на елипса (вж. пример 4 от 10.1.5).

(8.67) $$\int \frac{R(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}},$$

където R е някоя рационална функция. Освен това може да се покаже, че при всяка комбинация на абсолютните стойности и знаците на константите A, m и m' има субституция, която свежда интеграла (8.67) към т. нар. ***каноничен интеграл***

(8.68) $$\int \frac{R_1(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

в който с k е означена константа, удовлетворяваща условието $0<k<1$.

Всеки каноничен интеграл (8.68) се привежда с точност до събираемо елементарна функция до следните три стандартни интеграла:

(8.69) $$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

и

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad (0<k<1).$$

Интегралите (8.69) е прието да се наричат ***елиптични интеграли*** съответно ***от 1-ви, 2-ри и 3-ти род.*** Тези интеграли, както е показано от Лиувил*, не са елементарни функции. Елиптичните интеграли от 1-ви и 2-ри род съдържат само един параметър k, приемащ реални стойности от интервала $0<k<1$, а елиптичните интеграли от 3-ти род съдържат освен това и параметър h, който може да приема и комплексни стойности.

Льожандър** подлага интегралите (8.69) на по-нататъшно опростяване чрез субституцията $z=\sin\varphi$ $(0\leq\varphi\leq\pi/2)$.

С помощта на тази субституция първият от интегралите (8.69) се преобразува във вида

(8.70) $$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Вторият от интегралите (8.69) при тази смяна с точност до постоянен множител е равен на разликата на интеграла (8.70) и интеграла

(8.71) $$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Третият от интегралите (8.69) се преобразува във вида

(8.72) $$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Интегралите (8.70), (8.71) и (8.72) е прието да се наричат ***елиптични интеграли*** съответно ***от 1-ви, 2-ри и 3-ти род във форма на Льожандър.***

* Жозеф Лиувил — френски математик (1809—1882).
** Адриан Мари Льожандър — френски математик (1752—1833).

9. Определен интеграл на Риман

В уводната глава беше показано, че към понятието определен интеграл водят редица важни задачи на естествознанието. В тази глава ще построим строга теория на определения интеграл на Риман.

9.1. Определение на интеграл. Интегруемост

Ще въведем понятията деление на сегмента $[a, b]$, дробене на това деление и обединение на две деления.

Определение 1. *Ще казваме, че е дадено едно* ***деление*** *на сегмента $[a, b]$, ако са дадени точките $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$, за които $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$.*

Това деление на сегмента $[a, b]$ ще означаваме със символа $\{x_k\}$.

Определение 2. *Делението $\{x'_k\}$ на сегмента $[a, b]$ се нарича* ***дробно*** *на делението $\{x_k\}$ на този сегмент, ако всяка точка на делението $\{x_k\}$ съвпада с някоя от точките на делението $\{x'_k\}$,* т. е. $\{x_k\}\subset\{x'_k\}$.

Определение 3. *Делението $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ се нарича* ***обединение*** *на двете деления $\{x'_k\}$ и $\{x''_k\}$ на този сегмент, ако всички точки на деленията $\{x'_k\}$ и $\{x''_k\}$ са точки на делението $\{x_k\}$ и делението $\{x_k\}$ не съдържа други точки.*

Ще отбележим, че обединението на две деления е дробно на всяко от тях.

Да разгледаме в сегмента $[a, b]$ функция f, която има край ни стойности във всички точки от този сегмент. По дадено деление $\{x_k\}$ ще намерим числото, т. нар. ***интегрална сума***, $\sigma(x_k,$

$\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, където ξ_k е някоя точка от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. Интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ зависи както от деленето $\{x_k\}$, така и от избора на точките $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Ако означим с Δx_k разликата $x_k - x_{k-1}$, то интегралната сума може да се запише така:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Сегментите $[x_{k-1}, x_k]$ се наричат понякога ***частични сегменти***, а точките ξ_k — ***междинни точки***.

Числото $d = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, 3, \ldots, n\}$ ще наричаме ***диаметър на деленето*** $\{x_k\}$. Ще въведем основните понятия граница на интегрални суми и интегруемост на функция по Риман.

Определение 4. *Числото I се нарича* ***граница на интегралните суми*** σ, *когато диаметърът d на деленето $\{x_k\}$ клони към нула, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, че при $d < \delta$ при всеки избор на междинните точки ξ_k е в сила неравенството*

$$|I - \sigma| < \varepsilon.$$

Лесно можем да се убедим, че съществува само една граница на интегралните суми σ при $d \to 0$.

За означаване на границата на интегрални суми се използва символът

$$I = \lim_{d \to 0} \sigma(x_k, \xi_k).$$

Определение 5. *Функцията f се нарича* ***интегруема по Риман*** *в сегмента $[a, b]$, ако за тази функция в дадения сегмент съществува границата I на интегралните ѝ суми σ, когато диаметърът d на деленето $\{x_k\}$ клони към нула.*

Числото I се нарича ***определен интеграл на Риман*** на функцията f в граници от a до b и се означава със символа

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Следователно по определение

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d \to 0} \sigma(x_k, \xi_k).$$

Числото a се нарича ***долна граница на интегрирането***, а числото b — ***горна граница на интегрирането***. Променливата x под знака на определения интеграл се нарича **интеграционна променлива** и може да се означи с произволна буква:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt \text{ и т. н.}$$

Ще илюстрираме въведените понятия с примери.

Примери:

1. Геометрично тълкуване на интегралната сума. Ще разгледаме криволинеен трапец, т. е. фигурата, ограничена от графиката на непрекъсната неотрицателна функция f, зададена в сегмента $[a, b]$, правите $x = a$ и $x = b$, перпендикулярни на абсцисната ос, и сегмента $[a, b]$ от абсцисната ос (фиг. 9.1). Очевидно интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$, отговаряща на избраното деление $\{x_k\}$ и избраните междинни точки ξ_k, представлява лицето на стъпаловидната фигура, защрихована на този чертеж.

В следващата глава ще бъде дадено понятието лице на равнинна фигура и ще бъде установено, че при $d \to 0$ границата на тази стъпаловидна фигура е равна на лицето на криволинейния трапец.

2. Пример на най-проста интегруема по Риман функция. Ще покажем, че функцията $f(x) = c = \text{const}$ е интегруема във всеки сегмент $[a, b]$ и $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$. Наистина при всяко деление $\{x_k\}$ и при всеки избор на точките $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ имаме $f(\xi_k) = c$. Следователно

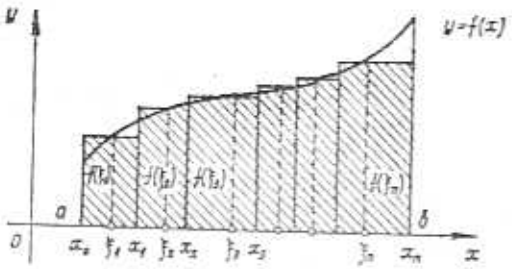
$$\begin{aligned}\sigma(x_k, \xi_k) &= c \,.\, \Delta x_1 + c \,.\, \Delta x_2 + \cdots + c \,.\, \Delta x_n \\ &= c \,.\, (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = c \,.\, (b - a)\end{aligned}$$

за всяко деление $\{x_k\}$ и всеки избор на точките $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ Затова

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{d \to 0} \sigma(x_k, \xi_k) = \lim_{d \to 0} c \,.\, (b - a) = c \,.\, (b - a).$$

3. Пример на ограничена в сегмента $[a, b]$, но неинтегруема по Риман функция. Ще разгледаме функцията на Дирихле D, стойностите на която в рационалните точки на сегмента $[a, b]$ са равни на единица, а в ирационалните — на нула.

Избираме произволно деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$. Във



Фиг. 9.1

всеки от частичните сегменти съществува поне една рационална точка ξ_k. Написваме съответната интегрална сума

$$\sigma(x_k, \xi_k)=\sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=b-a.$$

Освен това в тези сегменти $[x_{k-1}, x_k]$ има ирационални точки η_k $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Затова интегралната сума, отговаряща на дадения избор от междинни точки $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, ще се запише така:

$$\sigma(x_k, \eta_k)=\sum_{k=1}^{n} D(\eta_k)\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} 0\,.\,\Delta x_k=0.$$

Ясно е, че интегралните суми на функцията на Дирихле нямат граница, когато диаметърът на делението клони към нула: при един избор на междинните точки ξ_k интегралната сума е равна на $b-a\neq 0$, а при друг — на нула и това е така, колкото и малък да е диаметърът на делението.

4. Неинтегруемост по Риман на неограничените в сегмента $[a, b]$ функции. Нека f не е ограничена в $[a, b]$. Ще покажем, че за всяко деление $\{x_k\}$ интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ може да стане по абсолютна стойност произволно голяма в зависимост от избора на междинните точки ξ_k. Наистина, ако функцията f не е ограничена в сегмента $[a, b]$, а сегментът $[a, b]$ е разделен на краен брой сегменти $[x_{k-1}, x_k]$, то функцията ще бъде неограничена поне в един частичен сегмент от делението. Без да нарушаваме общността, ще приемем, че f е неограничена в сегмента $[x_0, x_1]$. Избираме произволно в останалите сегменти $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ междинните точки $\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n$ и ги фиксираме. Означаваме със $\sigma_1(x_k, \xi_k)$ величината

$$\sigma_1(x_k, \xi_k)=f(\xi_2)\,\Delta x_2+f(\xi_3)\,\Delta x_3+\cdots+f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Ще разгледаме сега функцията f само върху сегмента $[x_0, x_1]$. Тъй като f е неограничена в този сегмент, то за всяко отнапред зададено положително число M ще се намери такава точка ξ_1 от този сегмент, че

$$|f(\xi_1)|\geqq(|\sigma_1|+M)/\Delta x_1.$$

Оттук следва, че $|f(\xi_1)|\,\Delta x_1\geqq|\sigma_1|+M$, и затова

$$|\sigma(x_k, \xi_k)|=\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\right|=|f(\xi_1)\,\Delta x_1+\sigma_1(x_k, \xi_k)|$$

$$\geqq|f(\xi_1)|\,\Delta x_1-|\sigma_1(x_k, \xi_k)|\geqq M.$$

Да изберем сега редица от такива числа $\{M_n\}$, че $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=+\infty$, а също и такава редица от деления на сегмента $[a, b]$, че съответните диаметри $d_n\to 0$. По посочения по-горе начин построяваме редицата от интегрални суми σ_n, удовлетворяващи условието $|\sigma_n|\geqq M_n$. Тази редица от интегрални суми е разходяща, т. е. функцията f не е интегруема в интервала $[a, b]$.

9.2. Голяма и малка сума и техните свойства

9.2.1. Определение на голяма и малка сума. Пример 4 от 9.1 ни дава основание да разглеждаме само ограничени в даден сегмент функции (тъй като неограничените функции не са интегруеми по Риман). Нека $f(x)$ е ограничена в сегмента $[a, b]$ функция и $\{x_k\}$ е произволно деление на този сегмент. Понеже f е ограничена в сегмента $[a, b]$, тя е ограничена и във всеки частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ и затова има точна долна граница m_k и точна горна граница M_k в частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$.

И така нека

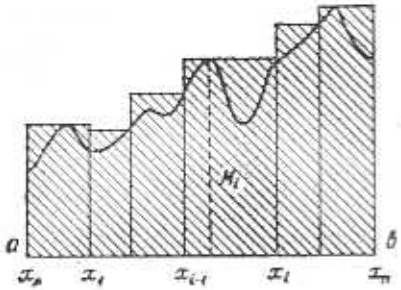
$$m_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\},\quad M_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}.$$

Определение 1. *Сумите*

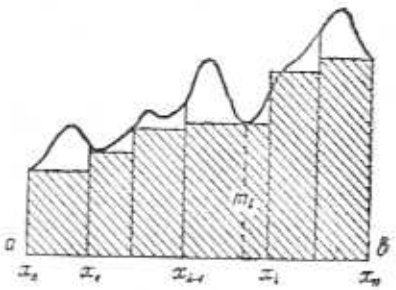
$$S=M_1\,\Delta x_1+M_2\,\Delta x_2+\cdots+M_n\,\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k$$

и

$$s=m_1\,\Delta x_1+m_2\,\Delta x_2+\cdots+m_n\,\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k$$



Фиг. 9.2



Фиг. 9.3

ще наричаме съответно ***голяма и малка сума на Дарбу на*** *функцията $f(x)$ за даденото деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$.*

Ще изясним геометричния смисъл на голямата и малката сума. Ще разгледаме отново криволинейния трапец, т. е. фигурата, ограничена от сегмента $[a, b]$ на оста Ox, отгоре — от графиката на непрекъснатата функция $y=f(x)\geq 0$ и правите $x=a$ и $x=b$, перпендикулярни на оста Ox (фиг. 9.2). Нека е дадено произволно деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$. Тъй като f е непрекъсната, числото M_k е нейната максимална стойност в сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. Затова голямата интегрална сума е равна на лицето на стъпаловидната фигура, съдържаща криволинейния трапец. Това лице е защриховано на фиг. 9.2.

Аналогично малката сума е равна на лицето на стъпаловидната фигура, която се съдържа в криволинейния трапец (фиг. 9.3). Числото m_k е минималната стойност на функцията f в частния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$.

9.2.2. Основни свойства на големите и малките суми. Ще докажем следните леми:

Лема 1. *Нека $\sigma(x_k, \xi_k)$ е интегрална сума, отговаряща на делението $\{x_k\}$. Тогава при всеки избор на междинните точки ξ_k са в сила неравенствата*

$$s\leq\sigma\leq S,$$

където s и S са съответно малката и голямата сума, отговарящи на това деление.

Доказателство. От определението на числата m_k и M_k заключаваме, че $m_k\leq f(\xi_k)\leq M_k$ за всяко $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$. Като умножим тези неравенства с Δx и ги сумираме по k от 1 до n, получаваме исканите неравенства. □

Лема 2. *Нека $\{x_k\}$ е произволно фиксирано деление на сегмента $[a, b]$, а ε е произволно фиксирано число. Тогава могат да се изберат така междинните точки ξ_k, че интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ и голямата сума S да удовлетворяват неравенството $0\leq S-\sigma(x_k, \xi_k)<\varepsilon$. Междинните точки η_k могат да се изберат и така, че интегралната сума $\sigma(x_k, \eta_k)$ и малката сума s да удовлетворяват неравенството $0\leq\sigma(x_k, \eta_k)-s<\varepsilon$.*

Доказателство. Нека $\{x_k\}$ е фиксирано деление на сегмента $[a, b]$ и $\varepsilon>0$. Ще докажем най-напред първото твърдение на лемата. Тъй като $M_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}$, то за избраното $\varepsilon>0$ съществува такава точка $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$, че $0\leq M_k-f(\xi_k)<\varepsilon/(b-a)$. Като умножим тези неравенства с Δx_k и ги сумираме по k от 1 до n, ще получим

$$0\leq S-\sigma(x_k, \xi_k)<\varepsilon.$$

Аналогично, понеже $m_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}$, съществува такава точка $\eta_k\in[x_{k-1}, x_k]$, че

$$0\leq f(\eta_k)-m_k<\varepsilon/(b-a).$$

Последните неравенства след умножаване с Δx_k и сумиране водят до оценките $0\leq\sigma(x_k, \eta_k)-s<\varepsilon$. □

Следствие. *За всяко фиксирано деление $\{x_k\}$ са верни съотношенията*

$$S=\sup\{\sigma(x_k, \xi_k): \{\xi_k\}\},\ s=\inf\{\sigma(x_k, \eta_k): \{\eta_k\}\},$$

където точната горна и точната долна граница се вземат при всеки избор на междинните точки.

Лема 3. *При раздробяване на дадено деление голямата сума може само да се намали, а малката — само да се увеличи.*

Доказателство. Нека $\{x_k\}$ е дадено деление, а делението $\{x_k'\}$ се получава от него с добавяне на само една нова точка $\bar{x}$. Лесно се вижда, че общият случай се свежда към този. Да предположим, че $\bar{x}\in[x_{k-1}, x_k]$. Тогава в израза за S събираемото $M_k\Delta x_k$ се заменя с $M_k'(\bar{x}-x_{k-1})+M_k''(x_k-\bar{x})$, където

$$M_k'=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, \bar{x}]\},\ M_k''=\sup\{f(x): x\in[\bar{x}, x_k]\}.$$

Точната горна граница на функцията върху част от сегмента не надминава точната горна граница на функцията в целия сегмент. Затова $M_k'\leq M_k$, $M_k''\leq M_k$ и

$$M_k'(\bar{x}-x_{k-1})+M_k''(x_k-\bar{x})\leq M_k[(\bar{x}-x_{k-1})+(x_k-\bar{x})]=M_k\Delta x_k.$$

Тъй като всички други събираеми в израза за голямата сума са същите, то при добавяне на точката $\bar{x}$ голямата сума може само да се намали. Случаят, когато към дадено деление се прибавят няколко нови точки, се свежда очевидно към разглеждания. По същия начин се установява, че при раздробяване на дадено деление малката сума може само да се увеличи. □

Лема 4. *За две произволни деления на сегмента малката сума за едното от тези деления не надминава голямата сума за другото деление.*

Доказателство. Нека $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$ са две произволни деления на сегмента $[a, b]$, а S', s', S'', s'' са съответно големите и малките суми за тези деления. Да означим с $\{x_k\}$ обединението на делениятa $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$, а с S и s голямата и малката сума на делението $\{x_k\}$. Ще отбележим, че $\{x_k\}$ е дребно деление както на делението $\{x_k'\}$, така и на делението $\{x_k''\}$. Съгласно лема 3 са изпълнени неравенствата

$$S' \geq S, \quad s'' \leq s.$$

Освен това от лема 1 имаме $s \leq S$. Като използваме тези три неравенства, заключаваме, че $s'' \leq S'$. Аналогично се установява, че $s' \leq S''$. □

Следствие. *Множеството на големите суми на функцията f, които отговарят на всички възможни деления на сегмента $[a, b]$, е ограничено отдолу. Множеството на малките суми е ограничено отгоре.*

Действително всяка голяма сума не е по-малка от коя да е фиксирана малка сума, така че множеството на големите суми е ограничено отдолу. Аналогични са разсъжденията за малките суми. Съгласно основната теорема 2.1 ще съществуват точна долна граница за множеството $\{S\}$ и точна горна граница за множеството $\{s\}$.

Определение 2. ***Горен интеграл на Дарбу*** *от функцията f се нарича точната долна граница I^* на множеството на големите суми $\{S\}$ на f за всички възможни деления на сегмента $[a, b]$.* ***Долен интеграл на Дарбу*** *от функцията $f(x)$ се нарича точната горна граница I_* на множеството от малките суми $\{s\}$ на f за всички възможни деления на сегмента $[a, b]$.*

Лема 5. *Долният интеграл на Дарбу никога не надминава горния интеграл на Дарбу, т. е. $I_* \leq I^*$.*

Доказателство. Допускаме противното, т. е. че $I_* > I^*$. Нека $I_* - I^* = \varepsilon > 0$.

За това ε съгласно определението на числото I^* съществува такова деление $\{x_k'\}$ на сегмента $[a, b]$, че за съответната му голяма сума S' е изпълнено неравенството $S' < I^* + \varepsilon/2$. По същия начин се показва съществуването на такова деление $\{x_k''\}$ на сегмента $[a, b]$, че малката му сума s'' удовлетворява неравенството $s'' > I_* - \varepsilon/2$. Като извадим почленно второто неравенство от първото, получаваме $S' - s'' < I^* - I_* + \varepsilon$. Но $I^* - I_* = -\varepsilon$, затова $S' - s'' < 0$, т. е. $s'' > S'$. Полученото неравенство противоречи на лема 4. Следователно $I_* \leq I^*$. □

Нека $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, а $\{x_k\}$ е произволно деление на сегмента $[a, b]$, d е диаметърът на това деление. Означаваме с $\{x_k'\}$ деление, получено от делението $\{x_k\}$ с добавяне на l произволни нови точки. Нека S и s са голямата и малката сума за делението $\{x_k\}$, а S' и s' са голямата и малката сума за делението $\{x_k'\}$. В сила е следното твърдение:

Лема 6. *Разликите $S - S'$ и $s' - s$ удовлетворяват неравенствата $S - S' \leq (M - m) . l . d$, $s' - s \leq (M - m) . l . d$.*

Доказателство. Без да ограничаваме общността, може да смятаме, че към точките на делението $\{x_k\}$ е добавена само една точка $\bar{x}$, и да докажем, че в този случай са изпълнени неравенствата $S - S' \leq (M - m) d$, $s' - s \leq (M - m) d$.

Нека добавената точка $\bar{x}$ принадлежи на сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. Тогава голямата сума S ще се различава от голямата сума S' само с това, че събираемото $M_k \Delta x_k$ в сумата S ще се замени с двете събираеми $M_k'(\bar{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \bar{x})$ сумата S' (тук с M_k, M_k' и M_k'' са означени точните горни граници на f в сегментите $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_{k-1}, \bar{x}]$ и $[\bar{x}, x_k]$). Всички останали събираеми в сумите S и S' ще бъдат едни и същи. Оттук следва, че

$$S - S' = M_k \Delta x_k - [M_k'(\bar{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \bar{x})].$$

От последното съотношение, като отчетем свойствата на точните (горна и долна) граници $M_k \leq M$, $M_k' \geq m$, $M_k'' \geq m$, получаваме

$$S - S' \leq M \Delta x_k - m[(\bar{x} - x_{k-1}) + (x_k - \bar{x})]$$
$$= (M - m) \Delta x_k \leq (M - m) d.$$

Доказателството на оценката за малките суми е аналогично. □

Определение 3. *Числото A се нарича* ***граница на големите суми*** *S, когато диаметърът на делениятa d клони към нула, ако за всяко положително число ε може да се намери такова положително число δ, че при $d < \delta$ да е изпълнено неравенството*

$$|S - A| < \varepsilon.$$

За означаване на тази граница е естествено да се използва символът

$$A = \lim_{d \to 0} S.$$

Аналогично се определя и границата B на малките суми s, когато d клони към нула.

Основна лема на Дарбу. *Горният интеграл на Дарбу I^* е равен на границата на големите суми S, когато диаметърът d на*

деленията клони към нула, т. е. $\lim\limits_{d\to 0} S = I^*$. *Аналогично* $\lim\limits_{d\to 0} s = I_*$

Доказателство. Ще докажем първото твърдение на лемата. Ако $f(x)=c=\text{const}$, то $S=c(b-a)=I^*$ за всяко деление. Затова $\lim\limits_{d\to 0} S=I^*$. Ако функцията f не е константа, то $M=\sup\{f(x): x\in[a, b]\} > m=\inf\{f(x): x\in[a, b]\}$. Избираме произволно положително число ε. Съгласно определението на числото I^* съществува такова деление $\{x_k^*\}$, че голямата сума S^* на това деление да удовлетворява условието $S^*-I^*<\varepsilon/2$. Означаваме с l броя на точките на делението $\{x_k^*\}$, несъвпадащи с краищата на сегмента $[a, b]$.

Нека $\{x_k\}$ е произволно деление на сегмента $[a, b]$, диаметърът на което удовлетворява неравенството $d<\delta=\varepsilon/2l(M-m)$, и нека S е голямата сума на това деление. Раздробяваме делението $\{x_k\}$, като добавяме към него отбелязаните по-горе l точки на делението $\{x_k^*\}$. Така полученото деление означаваме с $\{x_k'\}$. Съгласно лема 6 голямата сума S' на последното деление ще удовлетворява условието

$$0\leq S-S'\leq (M-m)\,l\,.\,d<\varepsilon/2.$$

Но делението $\{x_k'\}$ може да се разглежда и като дробно на делението $\{x_k^*\}$, към което се добавят точките на делението $\{x_k\}$, несъвпадащи с краищата на сегмента $[a, b]$. Затова съгласно определението на I^* и лема 3

$$I^*\leq S'\leq S^*, \text{ т. е. } 0\leq S'-I^*\leq S^*-I^*.$$

Но по-горе беше предположено, че $S^*-I^*<\varepsilon/2$, затова $0\leq S'-I^*<\varepsilon/2$. От това неравенство и от неравенството $0\leq S-S'<\varepsilon/2$ получаваме, че $0\leq S-I^*<\varepsilon$, когато d е по-малко от избраното по-горе δ. Следователно $I^*=\lim\limits_{d\to 0} S$. За малките суми доказателството е аналогично. □

9.3. Теореми за необходими и достатъчни условия за интегруемост на функции. Класове интегруеми функции

Доказаните свойства на големите и малките интегрални суми ни дават възможност да получим необходими и достатъчни условия за интегруемост по Риман на произволна ограничена функция.

9.3.1. Необходими и достатъчни условия за интегруемост.

Помощна теорема. *Ограничената функция f в сегмента $[a, b]$ е интегруема в този сегмент тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $I_*=I^*$.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$. Тогава съществува границата I на интегралните ѝ суми σ при клонене към нула на диаметъра d.

Съгласно определението за граница на интегралните суми за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че при всеки избор на междинните точки ξ_k за делението $\{x_k\}$ с диаметър $d<\delta$ е изпълнено неравенството

$$|I-\sigma(x_k, \xi_k)|<\varepsilon/4.$$

Според лема 2 за даденото деление $\{x_k\}$ може така да се изберат междинните точки ξ_k' и ξ_k'' във всеки частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$, че да са изпълнени неравенствата

$$S-\sigma(x_k, \xi_k')\leq\varepsilon/4, \quad \sigma(x_k, \xi_k'')-s\leq\varepsilon/4.$$

Ще подчертаем, че за даденото деление $\{x_k\}$ са изпълнени и неравенствата

$$|I-\sigma(x_k, \xi_k')|<\varepsilon/4, \quad |I-\sigma(x_k, \xi_k'')|<\varepsilon/4.$$

Остава да отбележим, че

$$S-s=[S-\sigma(x_k, \xi_k')]+[\sigma(x_k, \xi_k')-I]+[I-\sigma(x_k, \xi_k'')]+[\sigma(x_k, \xi_k'')-s].$$

Оттук, като отчетем, че модулът на сума не надминава сумата от модулите на събираемите, получаваме $S-s<\varepsilon$. По такъв начин при клонене към нула на диаметъра d на делението $\{x_k\}$, границите на големите и малките интегрални суми съвпадат. Наистина, тъй като за всяко деление са изпълнени неравенствата

$$s\leq I_*\leq I^*\leq S,$$

то от неравенството $S-s<\varepsilon$, понеже $\varepsilon>0$ е произволно избрано, следва, че $I_*=I^*$.

Достатъчност. Нека $I_*=I^*=A$. Според основната лема на Дарбу $I^*=\lim\limits_{d\to 0} S$, $I_*=\lim\limits_{d\to 0} s$, т. е. горният интеграл е граница на големите суми, а долният интеграл е граница на малките суми, когато диаметърът на делението d клони към нула. Затова за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова число $\delta>0$, че при всяко деление с диаметър $d<\delta$ да са изпълнени неравенствата $I_*-s=A-s<\varepsilon$, $S-I^*=S-A<\varepsilon$. При всяко дадено деление с диаметър, по-малък от δ, всяка интегрална сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ удовлетворява

неравенството $s \leqq \sigma(x_k, \xi_k) \leqq S$, а следователно и неравенството

$$A-\varepsilon<s \leqq \sigma(x_k, \xi_k) \leqq S<A+\varepsilon.$$

Оттук получаваме $|A-\sigma(x_k, \xi_k)|<\varepsilon$ (за всяко деление с диаметър d, по-малък от δ), така че $A=\lim\limits_{d\to 0} \sigma(x_k, \xi_k)$, т. е. функцията f е интегруема. □

Ще докажем една теорема, която има важно значение в теорията на римановия интеграл.

Основна теорема. *За да бъде ограничената в сегмента $[a, b]$ функция f, интегруема в този сегмент, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществува деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, за което $S-s<\varepsilon$.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$. При доказателство на необходимостта в спомагателната теорема показахме, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за всяко деление на сегмента $[a, b]$ с диаметър d, по-малък от δ, е изпълнено неравенството $S-s<\varepsilon$. Необходимостта е доказана.

Достатъчност. Дадено е, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, че за съответните големи и малки суми е изпълнено съотношението: $S-s<\varepsilon$. Тогава, тъй като

$$s \leqq I_* \leqq I^* \leqq S,$$

то $I^*-I_*<\varepsilon$. От това неравенство и произволния избор на ε заключаваме, че $I^*=I_*$, а от помощната теорема получаваме, че функцията f е интегруема. □

9.3.2. Класове интегруеми функции. По-горе в 9.1 на тази глава видяхме, че ако функцията е константа в сегмента $[a, b]$, тя е интегруема по Риман в този сегмент, а също така, че интегруемите в даден сегмент функции трябва да бъдат ограничени в този сегмент (вж. пример 4). Естествено възниква въпросът за описване на класове функции, интегруеми по Риман в сегмента $[a, b]$. Измежду тях важна роля играе класът на непрекъснатите в сегмента $[a, b]$ функции.

Теорема 9.1. *Непрекъснатите в сегмента $[a, b]$ функции са интегруеми по Риман в този сегмент.*

Доказателство. Нека f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Избираме произволно число $\varepsilon>0$. Понеже f е непрекъсната, тя е равномерно непрекъсната и затова за избраното $\varepsilon>0$ съществува такова число $\delta>0$, че ако ξ' и ξ'' са произволни точки от сегмента $[a, b]$, за които $|\xi'-\xi''|<\delta$, то $|f(\xi')-f(\xi'')|<\varepsilon/(b-a)$. Оттук следва, че разликата между точните горна и долна граници на f в произволен сегмент с дължина, по-малка от δ, е по-малка от числото $\varepsilon/(b-a)$. Избираме деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ с диаметър d, по-малък от указаното, $\delta: d<\delta$. Нека

$$M_k=\sup\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\},\ m_k=\inf\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Съгласно дефиницията за голяма и малка сума

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k.$$

Като използваме, че за избраното деление $M_k-m_k<\varepsilon/(b-a)$, ще получим

$$S-s<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\varepsilon.$$

От основната теорема заключаваме, че функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$. □

Следващата теорема дава достатъчно условие за интегруемост на един клас прекъснати функции.

Ще казваме, че *точката x е покрита* от интервал, ако се съдържа в този интервал.

Теорема 9.2. *Ако функцията f е дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$, то тя е интегруема по Риман в този сегмент, ако за всяко число $\varepsilon>0$ съществуват краен брой интервали, покриващи всички точки на прекъсване на тази функция, с обща дължина, по-малка от ε.*

Доказателство. Нека M и m са точната горна и точната долна граница на функцията f в сегмента $[a, b]$. Ще отбележим, че ако $M=m$, т. е. ако f е константа, тя е интегруема. Затова ще считаме, че $M>m$. Нека $\varepsilon>0$ е произволно число. Покриваме точките на прекъсване на функцията f с краен брой интервали, сумата от дължините на които е по-малка от числото $\varepsilon_1=\varepsilon/2(M-m)$. Точките на сегмента $[a, b]$, които не принадлежат на тези интервали, образуват множество от краен брой непресичащи се сегменти. Ще наречем тези сегменти допълнителни. Понеже във всеки от тях функцията е непрекъсната, тя е равномерно непрекъсната. Следователно съществуват такива числа $\delta_p>0$, че ако $|\xi'-\xi''|<\delta_p$, то $|f(\xi')-f(\xi'')|<\varepsilon/2(b-a)$, за произволни ξ' и ξ'', принадлежащи на p-тия допълнителен сегмент.

Нека $\delta=\min\delta_p$. Тогава, ако вземем такова деление на допълнителните сегменти на частични сегменти, че диаметърът на всеки от частичните сегменти да не надминава δ, то разликата между точните горна граница M_p и долна граница m_p на функцията f в p-тия частичен сегмент ще бъде не по-голяма от $\varepsilon/2(b-a)$. Като обединим всички деления на допълнителните сегменти и из-

браните по-горе интервали, взети с техните краища, ще получим деление $\{x_k\}$ на целия сегмент $[a, b]$. За така построеното общо деление на $[a, b]$ имаме

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum{}'(M_k-m_k)\Delta x_k+\sum{}''(M_k-m_k)\Delta x_k,$$

където сумата с прим съдържа всички събираеми, отговарящи на частичните сегменти, образувани от интервалите, покриващи точките на прекъсване, а сумата със секонд — всички останали. Да разгледаме първото събираемо в дясната страна на горното равенство. Понеже $M_k-m_k<M-m$ за всяко k, то

$$\sum{}'(M_k-m_k)\Delta x_k\leqq(M-m)\sum{}'\Delta x_k<(M-m)\varepsilon_1=\varepsilon/2.$$

По-нататък съгласно казаното по-горе от равномерната непрекъснатост на функцията f в допълнителните сегменти получаваме

$$\sum{}''(M_k-m_k)\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum{}''\Delta x_k\leqq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon/2.$$

По такъв начин намерихме деление $\{x_k\}$, за което $S-s<\varepsilon$. От основната теорема получаваме, че функцията f е интегруема. □

Следствие 1. *Функцията f, ограничена в сегмента $[a, b]$ и имаща само краен брой точки на прекъсване, е интегруема в този сегмент. По-специално частично непрекъснатите в даден сегмент функции са интегруеми в този сегмент.*

Наистина според предишната теорема е достатъчно да изберем интервалите, покриващи точките на прекъсване, с еднаква дължина, по-малка от $\varepsilon/2p$, където p е броят на точките на прекъсване на функцията f.

Следствие 2. Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, а функцията g съвпада с функцията f във всички точки на сегмента $[a, b]$ с изключение евентуално на краен брой точки. Тогава функцията g е интегруема в сегмента $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$.

Теорема 9.3. *Всяка монотонна в сегмента $[a, b]$ функция f е интегруема в този сегмент.*

Доказателство. Случаят, когато f е константа в сегмента $[a, b]$, може да се изключи. Ще разгледаме например не-

намаляваща в сегмента $[a, b]$ функция f. Нека $\varepsilon>0$ е произволно число. Избираме деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ с диаметър $d<\varepsilon/(f(b)-f(a))$. Ще отбележим, че понеже f не е константа, то $f(b)>f(a)$. Да оценим разликата $S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$, където M_k и m_k са точната горна и точната долна граница на f в $[x_{k-1}, x_k]$. Получаваме $S-s<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)/(f(b)-f(a))$. Но за ненамаляваща функция $\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)=f(b)-f(a)$. Затова $S-s<\varepsilon$ и функцията f е интегруема. За нерастяща функция разсъжденията са аналогични. □

Ще докажем сега една теорема за интегруемост на суперпозиция от две функции.

Теорема 9.4. *Нека функцията f е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$, M и m са точната ѝ горна и точната ѝ долна граница в този сегмент. Нека освен това функцията φ да е дефинирана в сегмента $[m, M]$ и да удовлетворява следното условие*: съществува такова неотрицателно число C, че за произволни x_1 и x_2 от сегмента $[m, M]$ да е изпълнено неравенството $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqq C|x_1-x_2|$, тогава функцията $h(x)=\varphi(f(x))$ е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$.*

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Поради интегруемостта на функцията f в сегмента $[a, b]$ може да се избере такова разделяне $\{x_k\}$ на този сегмент, че $S-s<\varepsilon/C$, където S и s са съответно горната и долната интегрална сума на функцията f, а C е константата от условието на теоремата. Нека M_k и m_k са точните граници на функцията f в частичните сегменти Δx_k на разделянето $\{x_k\}$, а M_k^* и m_k^* са съответните точни граници за функцията h. Тогава съгласно условието, наложено на функцията φ за произволни точки x и y, принадлежащи на частичния сегмент Δx_k от разделянето $\{x_k\}$, е в сила неравенството $h(x)-h(y)\leqq|h(x)-h(y)|=|\varphi(f(x))-\varphi(f(y))|\leqq C|f(x)-f(y)|\leqq C(M_k-m_k)$.

Понеже неравенството $h(x)-h(y)\leqq C(M_k-m_k)$ е изпълнено

* Това условие се нарича условие на Липшиц. Очевидно, ако една функция удовлетворява условието на Липшиц, тя е непрекъсната.

за произволни точки x и y, принадлежащи на сегмента Δx_k, то още повече ще бъде изпълнено и неравенството $M_k^* - m_k^* \leq C(M_k - m_k)$. Нека сега S^* и s^* да са съответните горна и долна интегрална сума на функцията h за избраното разделяне $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$. Тогава $S^* - s^* = \sum_{k=1}^{n} (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k \leq C \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon$. Тъй като ε е произволно положително число, то съгласно основната теорема, функцията h е интегруема в сегмента $[a, b]$. □

Теорема 9.4'. *Нека f е функция, интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$, M и m са точните ѝ горна и долна граница в $[a, b]$. Нека освен това функцията $\varphi(x)$ да е непрекъсната в сегмента $[m, M]$. Тогава сложната функция $h(x) = \varphi(f(x))$ е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$.*

Доказателство. Нека $C = \max\{|\varphi(t)| : m \leq t \leq M\}$ и ε е произволно положително число. Полагаме $\varepsilon_1 = \varepsilon/(b-a+2C)$. Поради това, че φ е равномерно непрекъсната в $[m, M]$, съществува такова $\delta > 0$, че $|\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon_1$, ако $|s-t| < \delta$ и $s, t \in [m, M]$. Избираме δ още така, че $\delta < \varepsilon_1$. Поради интегруемостта на функцията f в $[a, b]$ съществува такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, за което съответната горна и долна интегрална сума на f удовлетворяват неравенството $S - s < \delta^2$. Нека

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$M_k^* = \sup\{h(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad m_k^* = \inf\{h(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

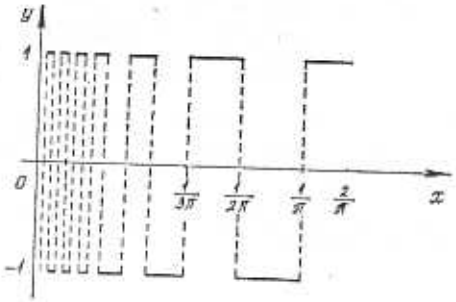
Разделяме целите числа $1, 2, \ldots, n$ на две множества A и B: числото $k \in A$, ако $M_k - m_k < \delta$, числото $k \in B$, ако $M_k - m_k \geq \delta$. Ако $k \in A$, то $M_k - m_k < \delta$, следователно от равномерната непрекъснатост на функцията φ в сегмента $[m, M]$ получаваме $M_k^* - m_k^* \leq \varepsilon_1$. Наистина, ако се разглежда индекс $k \in A$, ще получим, че $M_k - m_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} - \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} < \delta$, т. е. при $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ разликата $f(x) - f(y) = s - t$ по абсолютна стойност не надминава δ: $|s-t| < \delta$, $s = f(x)$, $t = f(y)$. Следователно поради равномерната непрекъснатост на функцията φ получаваме

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| = |\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon_1.$$

Тъй като последното неравенство е изпълнено при всяко x и всяко y от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$, то и

$$\sup\{\varphi(f(x)) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} - \inf\{\varphi(f(x)) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} < \varepsilon_1.$$

По-нататък, ако $k \in B$, то очевидно $M_k^* - m_k^* \leq 2C$. Да запишем



Фиг. 9.4

сега разликата $S^* - s^*$ (S^* и s^* са съответно голямата и малката сума на функцията h за разглежданото деление $\{x_k\}$):

$$S^* - s^* = \sum_{k=1}^{n} (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k = \sum_{k \in A} (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k$$

$$+ \sum_{k \in B} (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k \leq \varepsilon_1 (b-a) + 2C \sum_{k \in B} \Delta x_k.$$

Остава да направим оценка на величината $\sum_{k \in B} \Delta x_k$. Имаме

$\delta \sum_{k \in B} \Delta x_k \leq \sum_{k \in B} (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k$, тъй като разликата $M_k - m_k \geq 0$, $\Delta x_k > 0$, то събираемите в последната сума са само неотрицателни. Отчитайки, че при даденото деление $\{x_k\}$ имаме $\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k = S - s < \delta^2$, получаваме $\delta \sum_{k \in B} \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k < \delta^2$, т. е. $\sum_{k \in B} \Delta x_k < \delta$. Понеже $\delta < \varepsilon_1$, окончателно намираме

$$S^* - s^* \leq \varepsilon_1 (b-a) + 2C \sum_{k \in B} \Delta x_k \leq \varepsilon_1 (b-a) + 2C\delta$$

$$< \varepsilon_1 (b-a+2C) = \varepsilon.$$

Следователно функцията h е интегруема. □

Следствие. *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, то при всяко положително число α функцията $|f|^\alpha$ е интегруема в този сегмент.*

Наистина достатъчно е да разгледаме непрекъснатата функция $\varphi(t) = |t|^\alpha$ и да приложим предишната теорема.

Примери :

1. Пример за интегруема функция с безкрайно много точки на прекъсване. Нека в сегмента $[0, 2/\pi]$ е дадена функцията (фиг. 9.4)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin x^{-1}), & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тази функция има прекъсване от 1-ви род във всички точки $x_k = 1/k\pi$, $k = 1, 2, \cdots$, а също така и прекъсване от 2-ри род в точката 0. Фиксираме числото $\varepsilon > 0$. Покриваме точката $x = 0$ с интервала $(-\varepsilon/4, \varepsilon/4)$. Вън от този интервал има само краен брой p точки на прекъсване на функцията. Числото p зависи от избраното $\varepsilon > 0$. Покриваме всяка от тези точки с интервал с дължина, по-малка от $\varepsilon/2p$. Тогава всички точки на прекъсване на функцията f ще бъдат покрити с краен брой интервали, сумата от дължините на които не надминава $\varepsilon/2 + p \cdot \varepsilon/2p = \varepsilon$. Според теорема 9.2 функцията f е интегруема в сегмента $[0, 2/\pi]$.

2. От интегруемостта на функцията $|f|$ не следва изобщо интегруемостта на f. Наистина да разгледаме функцията D_1, равна на единица за рационални x, и на минус единица за ирационални x. Тогава $|D_1(x)| = 1$ е интегруема. Също както и за функцията на Дирихле D, се показва, че функцията D_1 не е интегруема (вж. пример 3 от 9.1).

9.4. Свойства на определения интеграл

9.4.1. Свойства на интеграла. Ще изясним основните свойства на интеграла на Риман.

а) *Нека функциите f и g са интегруеми в сегмента $[a, b]$. Тогава функцията $f \pm g$ е също интегруема в този сегмент и*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$$

Наистина при произволно деление на сегмента $[a, b]$ и при произволен избор на междинните точки ξ_k е изпълнено равенството

$$\sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k) \pm g(\xi_k)]\, \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k \pm \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\, \Delta x_k.$$

Затова, ако съществува границата на дясната страна, когато диаметърът на делението клони към нула, то ще съществува и границата на лявата страна. Поради линейните свойства на този вид граница получаваме исканото. □

б) *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, то функцията $C.f$, където $C = \text{const}$, е също интегруема в този сегмент и*

$$\int_a^b C \cdot f(x)\, dx = C \int_a^b f(x)\, dx.$$

Наистина за всяко деление на сегмента $[a, b]$ и всеки избор на междинните точки ξ_k е изпълнено съотношението

$$\sum_{k=1}^{n} C \cdot f(\xi_k)\, \Delta x_k = C \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k,$$

откъдето, както по-горе, получаваме твърдението б). □

Следствие. *Линейна комбинация $\sum_{i=1}^{n} C_i f_i$ на интегруеми функции f_i е интегруема функция.*

в) *Нека функциите f и g са интегруеми в сегмента $[a, b]$. Тогава $f.g$ е интегруема в този сегмент.*

Написваме очевидното тъждество

$$4 f(x) \cdot g(x) = (f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2.$$

Разглеждаме функцията $\varphi(t) = t^2$. Съгласно теорема 9.4 от интегруемостта на коя да е функция следва интегруемостта на нейния квадрат. Тъй като функциите $f+g$ и $f-g$ според свойство а) са интегруеми, то са интегруеми и квадратите им, а следователно (поради тъждеството) функцията $f.g$ е интегруема. □

г) *Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$. Тогава тази функция е интегруема и във всеки сегмент $[c, d]$, съдържащ се в сегмента $[a, b]$.*

Избираме произволно число $\varepsilon > 0$ и такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, че $S - s < \varepsilon$. Добавяме към точките на делението $\{x_k\}$ точките c и d. За големите суми S' и малките суми s' на новото деление $\{x'_k\}$ съгласно лема 3 от 9.2 също ще бъде вярна оценката: $S' - s' < \varepsilon$. Да разгледаме делението $\{x_k\}$ на сегмента $[c, d]$, образувано от точките на делението $\{x'_k\}$ от целия сегмент

$[a, b]$. За големите и малките суми $\overline{S}$ и $\overline{s}$ на делението $\{\overline{x}_k\}$ е изпълнено очевидното съотношение $\overline{S}-\overline{s}<S'-s'$, тъй като всяко неотрицателно събираемо $(M_k-m_k)\Delta x_k$ в израза $\overline{S}-\overline{s}$ е събираемо и в израза $S'-s'$, така че $\overline{S}-\overline{s}<\varepsilon$ и функцията f е интегруема в сегмента $[c, d]$. □

Ще считаме по определение, че *интеграл на Риман от функция* в граници от точката a до точката a е равен на нула*, т. е. $\int_a^a f(x)\,dx=0$. Това свойство трябва да се разглежда като уговорка. Ще се условим също така, че по определение $-\int_a^b f(x)\,dx = +\int_b^a f(x)\,dx$ *при* $a<b$ *за всяка интегруема функция*. Тази формула трябва също да се разглежда като уговорка.

д) *Ако функцията f е интегруема в сегментите $[a, c]$ и $[c, b]$ то f е интегруема и в сегмента $[a, b]$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

При $a=b$ твърдението е вярно съгласно казаното по-горе.

Ще предположим най-напред, че $a<c<b$. Избираме произволно число $\varepsilon>0$. Нека $\{x'_k\}$ и $\{x''_k\}$ са такива деления на сегментите $[a, c]$ и $[c, b]$, че в всеки от тези сегменти $S-s<\varepsilon/2$. Нека $\{x_k\}$ е деление на сегмента $[a, b]$, образувано от точките на делениятa $\{x'_k\}$ и $\{x''_k\}$. Очевидно разликата между голямата и малката сума на делението $\{x_k\}$ няма да надминава ε. Интегруемостта на функцията f в сегмента $[a, b]$ е доказана. Нека сега $\{x_k\}$ е произволно деление на сегмента $[a, b]$, съдържащо точката c. Тогава

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum{}' f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum{}'' f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

където $\sum'$ отговаря на делението на сегмента $[a, c]$, а $\sum''$ – на сегмента $[c, b]$. Тъй като това е вярно за всяко деление, то като

* Функцията е дефинирана и има крайна стойност в точката a.

минем към граница при клонене на диаметъра на делението към нула, получаваме

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ако точката $c\notin[a, b]$, то сегментът $[a, b]$ се съдържа или в $[c, b]$, или в $[a, c]$. Нека например $c<a<b$. Съгласно свойство г) функцията f е интегруема в $[a, b]$. Наистина f е интегруема в $[c, b]$ по условие, а $[a, b]\subset[c, b]$. По-нататък, понеже $c<a<b$, то

$$\int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Но, както казахме вече, $\int_c^a f(x)\,dx = -\int_a^c f(x)\,dx$. □

Ще отбележим, че формулата, изразяваща свойство д), може да се запише и така:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0.$$

9.4.2. Оценки за интегралите.

а) *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$ и $f(x)\geqq 0$ за всяко $x\in[a, b]$, то интегралът от f в този сегмент е неотрицателен.*

Доказателството следва от това, че за всяко деление $\{x_k\}$ и всеки избор на ξ_k интегралната сума

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \geqq 0.$$

В този случай границата на интегралните суми също ще бъде неотрицателна. □

б) Интегриране на неравенства. *Ако функциите f и g са интегруеми в сегмента $[a, b]$ и $f(x)\leqq g(x)$ за всяко $x\in[a, b]$, то* $\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$.

Действително функцията $g-f$ е интегруема и неотрицателна в $[a, b]$, така че

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geqq 0.$$

Но тогава от свойство *а*) на 9.4.1 следва $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$. □

в) *Нека функцията f е непрекъсната и неотрицателна в сегмента $[a, b]$. Ако съществува поне една точка $x_0 \in [a, b]$, за която $f(x_0) > 0$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha > 0.$$

Наистина нека $f(x_0) = \beta > 0$. Тогава поради непрекъснатостта на функцията f в точката x_0 съществува такава околност на точката x_0, че за всеки сегмент $[c, d]$, $c \neq d$, изцяло лежащ в тази околност, да е изпълнено неравенството $f(x) > \beta/2$. Но тогава според оценката от б) $\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_c^d f(x)\,dx \geqq \int_c^d (\beta/2)\,dx = \beta(d-c)/2 = \alpha > 0$. □

г) *Ако функцията f е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$, то и функцията $|f|$ е интегруема в този сегмент и*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Разглеждаме непрекъснатата функция $\varphi(t) = |t|$. Съгласно теорема 9.4 от интегруемостта на f следва интегруемостта на $\varphi(f(x)) = |f(x)|$. Да изберем сега числото $\alpha = \pm 1$, така че $\alpha \int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$.

Очевидно $\alpha f(x) \leqq |\alpha f(x)| = |f(x)|$. Тогава $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \alpha \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \alpha f(x)\,dx \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$. □

д) Първа формула за средните стойности. *Нека всяка от функциите f и g е интегруема в сегмента $[a, b]$ и освен това g е неотрицателна (или неположителна) в този сегмент.*

Означаваме с M и m точните граници на f в сегмента $[a, b]$. Тогава съществува такова число μ, удовлетворяващо неравенствата $m \leqq \mu \leqq M$, че е в сила следната формула:*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{9.1}$$

При допълнителното предположение за *непрекъснатост на f в сегмента $[a, b]$* може да се твърди, че *съществува такава точка ξ от този сегмент, че е изпълнено равенството*

$$\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{9.2}$$

Формула (9.2) се нарича ***първа формула за средните стойности.*** *Формула (9.1) също се нарича* ***първа формула*** *за средните стойности.*

Формулата (9.2) следва непосредствено от формулата (9.1) и от това, че непрекъснатата в сегмента $[a, b]$ функция f достига в този сегмент точните си граници M и m и приема всяка междинна стойност μ $(m < \mu < M)$.

Следователно достатъчно е да докажем само формулата (9.1). Съгласно определението за долна и горна граница за всяко x от $[a, b]$ са изпълнени неравенствата

$$m \leqq f(x) \leqq M.$$

Като предположим за определеност, че g е неотрицателна в $[a, b]$, и умножим последните неравенства с $g(x)$, ще получим, че за всяко x от $[a, b]$ имаме

$$m\,.\,g(x) \leqq f(x)\,.\,g(x) \leqq M\,.\,g(x). \tag{9.3}$$

Тъй като освен това според свойства б) и в) от 9.4.1 всяка от функциите $m\,.\,g$, $M\,.\,g$ и $f\,.\,g$ е интегруема в $[a, b]$, то оценката (9.3) показва, че са верни следните неравенства:

$$\int_a^b m\,.\,g(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqq \int_a^b M\,.\,g(x)\,dx,$$

* Функция, интегруема в $[a, b]$, е ограничена в $[a, b]$ и затова съществуват точните ѝ граници в $[a, b]$.

или, че

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx \leqq M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{9.4}$$

Възможни са два случая: 1) $\int_a^b g(x)\,dx = 0$; 2) $\int_a^b g(x)\,dx > 0$.

В първия случай от неравенството (9.4) следва, че $\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx = 0$, и затова формула (9.1) е вярна за всяко μ.

Във втория случай, като разделим неравенствата (9.4) на $\int_a^b g(x)\,dx$, получаваме

$$m < \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \Big/ \int_a^b g(x)\,dx \leqq M.$$

За да завършим доказателството на формула (9.1), остава да означим с μ числото

$$\mu = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \Big/ \int_a^b g(x)\,dx. \square$$

Ще формулираме отделно доказаната теорема за частния случай $g(x) \equiv 1$.

Следствие. *Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, а M и m са точните граници на f в този сегмент. Тогава съществува такова число μ, удовлетворяващо неравенствата $m \leqq \mu \leqq M$, че е в сила формулата*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a).$$

При допълнителното предположение за непрекъснатост на f в сегмента $[a, b]$ може да се твърди, че съществува такава точка ξ от този сегмент, че е в сила формулата

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi).$$

Тази формула се нарича ***формула за средните стойности.***

е) ***Втора формула за средните стойности.*** *Нека функцията f е интегруема, а функцията g е монотонна в сегмента $[a, b]$. Тогава съществува такова число ξ от този сегмент, че*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Ще установим отначало следното твърдение:

Лема на Абел*. *Нека числата p_i удовлетворяват условията $p_i \geqq p_j \geqq 0$ при $i \leqq j$, а числата $S_i = \sum_{k=1}^{i} q_k$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, удовлетворяват неравенствата $m \leqq S_i \leqq M$, където q_k, m, M са също някакви числа. Тогава $mp_1 \leqq \sum_{k=1}^{n} p_k q_k \leqq M p_1$.*

Доказателство. Лесно се проверява, че

$$\sum_{k=1}^{n} p_k q_k = \sum_{k=1}^{n} p_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} S_k (p_k - p_{k+1}),$$

където $S_0 = 0$, $p_{n+1} = 0$. Тъй като $p_k \geqq 0$, $p_k - p_{k+1} \geqq 0$, то като заменим в последното равенство всяко S_i най-напред с m, а после с M, получаваме

$$m\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k+1}) \leqq \sum_{k=1}^{n} p_k q_k \leqq M\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k+1}),$$

но

$$\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k+1}) = p_1 - p_{n+1} = p_1. \square$$

Ще установим сега втората формула за средните стойности.

Да допуснем, че функцията g не расте в $[a, b]$ и е неотрицателна. Функцията fg е интегруема като произведение на две интегруеми функции. Нека M_k и m_k са точните граници на f в частичните сегменти $[x_{k-1}, x_k]$. Тогава очевидно

$$\sum_{k=1}^{n} m_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k \leqq \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k \leqq \sum_{k=1}^{n} M_k\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k.$$

* Нилс Хенрик Абел — норвежки математик (1802—1829).

Поради монотонността на $g(x)$ е вярна оценката

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k \leqq g(a)\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k.$$

Понеже f е интегруема, сумата в лявата страна на последното неравенство клони към нула, когато диаметърът d на деленето клони към нула. Следователно за всички числа μ_k, за които $m_k \leqq \mu_k \leqq M_k$, сумите

$$\sum_{k=1}^{n} m_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k,\quad \sum_{k=1}^{n}\mu_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k,\quad \sum_{k=1}^{n} M_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k$$

клонят към интеграла $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ при $d\to 0$. Това следва от двустранните оценки за интегралната сума на функцията $f\,.\,g$.

Съгласно свойство д) числата μ_k, където $m_k \leqq \mu_k \leqq M_k$, могат да се изберат така, че $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx=\mu_k\Delta x_k$.

Ще отбележим сега, че функцията $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тъй като

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\mu\,.\,\Delta x,$$

$$\inf\{f(t): t\in[x,\ x+\Delta x]\}\leqq\mu\leqq\sup\{f(t): t\in[x,\ x+\Delta x]\}$$

и следователно $\Delta F\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Да разгледаме числата $S_i=\sum_{=1}^{i}\mu_k\Delta x_k=\int_a^{x_i} f(t)\,dt$.

Ясно е, че $m\leqq S_i\leqq M$, където m и M са точните граници на функцията F в сегмента $[a, b]$. Въвеждаме следните означения:

$$p_k=g(x_{k-1}),\quad q_k=\mu_k\Delta x_k,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n.$$

Поради монотонността и неотрицателността на функцията g имаме $p_i\geqq p_j\geqq 0$ при $i\leqq j$. Числата p_k, S_k, q_k удовлетворяват условията на лемата на Абел. Затова

$$mg(a)\leqq\sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\,\mu_k\Delta x_k\leqq Mg(a).$$

Сумата $\sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\,\mu_k\Delta x_k$ е заключена между $mg(a)$ и $Mg(a)$. Ако оставим сега диаметърът d на деленето да клони към нула, то и границата на тази сума ще бъде заключена между $m.g(a)$ и $M\,.\,g(a)$, т. е. ще са в сила неравенствата

$$m\,.\,g(a)\leqq\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx\leqq M\,.\,g(a).$$

Непрекъснатата функция $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ приема всяка стойност, заключена между точните ѝ граници m и M. Тъй като

$$m\leqq\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\leqq M,$$

съществува такава точка ξ, че

$$F(\xi)=\int_a^{\xi} f(t)\,dt=\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Следователно в случая, когато g не расте и е неотрицателна, е доказано, че:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=g(a)\int_a^{\xi} f(t)\,dt.$$

Ще разгледаме сега общия случай на нерастяща функция g. Тогава функцията $h(x)=g(x)-g(b)$ е нерастяща и неотрицателна. Като я поставим вместо g в равенството по-горе, имаме

$$\int_a^b f(x)(g(x)-g(b))\,dx=(g(a)-g(b))\int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Окончателно получаваме

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_a^b f(x)\,dx - g(b)\int_a^\xi f(x)\,dx$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \square$$

Примери:

1. Да разгледаме функцията $f(x) = \begin{cases} x^x, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ Тя е непрекъсната в сегмента $[0, 1]$. Като пресметнем производната ѝ, лесно се убеждаваме, че тази функция има локален минимум при $x_0 = 1/e$. При това $f(1/e) = e^{-1/e}$ и тази стойност е най-малката ѝ стойност в сегмента $[0, 1]$. Като използваме свойство б) от тази точка, намираме, че $e^{-1/e} \leqq \int_0^1 x^x dx \leqq 1$ $(e^{-1/e} = 0{,}692\ldots)$. Ще отбележим, че в този случай стойностите на интеграла не могат да бъдат определени чрез стойности на елементарни функции.

2. Ако функцията f не е непрекъсната, формулата за средните стойности може да не бъде вярна. Да разгледаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leqq x \leqq 1/2, \\ 3/4, & 1/2 < x \leqq 1. \end{cases}$$

Тогава $\int_0^1 f(x)\,dx = 5/8$. Функцията $f(x)$ не приема стойността $5/8$ в нито една точка $\xi \in [0, 1]$. Следователно не съществува число $\xi \in [0, 1]$, за което $\int_0^1 f(x)\,dx = f(\xi)$.

9.5. Примитивна на непрекъсната функция. Правила за интегриране на функции

Досега достатъчно пълно бяха изучени свойствата на римановия интеграл. По-специално беше показано, че като се използва определеното за интеграл, могат да бъдат пресметнати интеграли от някои елементарни функции. Разбира се, пресмятането на интеграли с помощта на граничен преход в интегралните суми е неудобно и води до значителни трудности. Затова е важно да се намерят прости правила за пресмятане на определени интеграли

на Риман. По-нататък ще бъде дадено едно такова правило, а именно ще бъде доказана основната формула на интегралното смятане (формулата на Нютон — Лейбниц).

9.5.1. Примитивна. Да разгледаме функцията f, интегруема в сегмента $[a, b]$. Нека $p \in [a, b]$. Тогава за всяко $x \in [a, b]$ функцията f е интегруема в $[p, x]$ и затова в сегмента $[a, b]$ е дефинирана функцията $F(x) = \int_p^x f(t)\,dt$, която се нарича интеграл с променлива горна граница. Аналогично се дефинира функция F, ако f е интегруема във всеки сегмент $[c, d] \subset (a, b)$, като в този случай $p \in (a, b)$.

Теорема 9.5. *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$ и $p \in [a, b]$, то производната на функцията $F(x) = \int_p^x f(t)\,dt$ съществува във всяка точка на непрекъснатост x_0 на подинтегралната функция и $F'(x_0) = f(x_0)$.**

Доказателство. Поради непрекъснатостта на функцията f в точката x_0 за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, ако $|x - x_0| < \delta$. За всяко $t \in [x_0, x]$ е изпълнено неравенството $|t - x_0| \leqq |x - x_0| < \delta$. Затова

$$f(x_0) - \varepsilon \leqq f(t) \leqq f(x_0) + \varepsilon.$$

Съгласно свойство б) от 9.4.2 независимо от знака на разликата $x - x_0$ имаме

$$f(x_0) - \varepsilon \leqq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt \leqq f(x_0) + \varepsilon, \quad |x - x_0| < \delta.$$

(Стойността $\mu = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ не се изменя при размяна на границите на интегриране, тъй като при това едновременно се сменят знаците на $x - x_0$ и на интеграла $\int_{x_0}^x f(t)\,dt$.)

Но $\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$, следователно при $|x - x_0| < \delta$ имаме

* Ако точката x_0 съвпада с един от краищата на сегмента $[a, b]$, то под производна в точката x_0 на функцията $F(x)$ се разбира съответно лява или дясна производна. При това доказателството на теоремата не се изменя.

$$f(x_0)-\varepsilon \leqq \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leqq f(x_0)+\varepsilon,$$

т. е. $F'(x_0)$ съществува и $F'(x_0)=f(x_0)$. □

Следствие. *Всяка непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция f има в този сегмент примитивна. Една от примитивните е функцията* $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Забележка 1. Теоремата остава вярна, ако f е непрекъсната в интервала (a, b). В този случай за долна граница трябва да се вземе точка $p \in (a, b)$. Всички разсъждения се запазват.

Забележка 2. Може да се разглежда и функцията на долната граница на интеграла от f, т. е. функцията $\Phi=\int_x^b f(t)\,dt$. За такава функция

$$\Phi'(x)=-f(x).$$

Забележка 3. Ако функцията f е интегруема във всеки сегмент, съдържащ се в интервала (a, b), то интегралът с променлива горна граница е непрекъсната в (a, b) функция на горната граница.

Действително нека $F(x)=\int_p^x f(t)\,dt$, $p \in (a, b)$. Тогава

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\mu\Delta x, \text{ където}$$

$$\inf\{f(t): t \in [x, x+\Delta x]\} \leqq \mu \leqq \sup\{f(t): t \in [x, x+\Delta x]\}$$

съгласно първата формула за средните стойности. Ако функцията f е интегруема, то тя е ограничена и затова за всички достатъчно малки Δx е ограничена и величината μ, зависеща от x и Δx. Поточно $\inf\{f(x): x \in [c, d]\} \leqq \mu \leqq \sup\{f(x): x \in [c, d]\}$*. Затова $\Delta F \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Забележка 4. Интеграли с променлива горна (или долна) граница могат да се използват за дефиниране на нови функции, които не се изразяват чрез елементарни функции.

* Тук $[c, d]$ е произволен фиксиран сегмент, съдържащ се в интервала (a, b) и такъв, че $x \in [c, d]$, $x+\Delta x \in [c, d]$.

Както вече отбелязахме, интегралът $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ се нарича интеграл на Поасон, интегралът $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, $0<k<1$, се нарича елиптичен интеграл, интегралът $\int_0^x t^{-1}\sin t\,dt$ — интегрален синус, $\int_0^x t^{-1}\cos t\,dt$ — интегрален косинус, $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ — интегрален логаритъм и т. н.

9.5.2. Основна формула на интегралното смятане. Знаем, че всеки две примитивни на функцията $f(x)$, дефинирана в сегмента $[a, b]$, се различават с константа. Затова, ако $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, а Φ е произволна примитивна на непрекъснатата функция f, то $F-\Phi=C$ $=\text{const}$, т. е. $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C$ (вж. теорема 9.5). Полагаме в последната формула отначало $x=a$, а след това $x=b$. Тъй като $\int_a^a f(t)\,dt=0$ за всяка функция, приемаща крайни стойности в точката a, то

$$\Phi(a)=C,\ \Phi(b)=\int_a^b f(x)\,dx+C.$$

Оттук $\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)$ и така получихме основната формула на интегралното смятане.

Ще я формулираме във вид на теорема.

Теорема (основна теорема на интегралното смятане). *За да се пресметне определеният интеграл от непрекъснатата функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, трябва да се пресметнат стойностите на произволна нейна примитивна в точката b и в точката a и от първата да се извади втората.*

Задачата за пресмятане на определен интеграл се сведе до задачата за намиране на примитивна на непрекъснатата функция.

Естествено не е лесно да се намери примитивна на всяка функция. Ние неедкократно посочвахме функции, чиито примитивни не се изразяват с елементарни функции. В тези случаи естествено възниква въпросът за приближено пресмятане на определени интеграли, за което ще стане дума по-нататък.

Основната формула на интегралното смятане се записва често във формата

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

където

$$\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

9.5.3. Важни правила за пресмятане на определени интеграли

При пресмятането на определени интеграли и при други въпроси често се използва правилото за смяна на променливата под знака на определения интеграл.

Нека функцията g има непрекъсната производна в сегмента $[m, M]$ и $\min\{g(t) : t \in [m, M]\} = a$, $\max\{g(t) : t \in [m, M]\} = b$, при което $g(m) = a$, $g(M) = b$. Тогава, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Тази формула се нарича ***формула за смяна на променливата под знака на определения интеграл.***

Доказателство. Нека Φ е някоя примитивна на функцията f. Функциите Φ и g са диференцируеми съответно в сегментите $[a, b]$ и $[m, M]$. Затова съгласно правилото за пресмятане на производна на сложна функция

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = \Phi'(g(t))\,g'(t).$$

Ще отбележим, че производната Φ' в израза отдясно е относно аргумента x: $\Phi'(g(t)) = \Phi'(x)$, $x = g(t)$. Ще отбележим също, че $\Phi'(x) = f(x)$. Като заместим в дясната страна на формулата за $\frac{d}{dt}\Phi(g(t))$, получаваме

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = f(g(t))\,g'(t).$$

По такъв начин функцията $\Phi(g(t))$, $t \in [m, M]$, е примитивна на функцията $f(g(t))\,g'(t)$, т. е.

$$\int_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt = \Phi(g(M)) - \Phi(g(m)) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

съгласно условието. Следователно, от една страна, $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, а, от друга, $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt$. □

Сега ще формулираме и установим правилото за интегриране по части.

Нека функциите f и g са непрекъснато диференцируеми в сегмента $[a, b]$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,.\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.$$

Наистина $\frac{d}{dx}(f\,.\,g) = f.g' + f'.g$. Затова функцията $f\,.\,g$ е примитивна на функцията $f\,.\,g' + f'\,.\,g$. Следователно

$$\int_a^b (f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x))\,dx = f(x)\,.\,g(x)\Big|_a^b. \ \square$$

Последната формула е удобно да се записва във вида

$$\int_a^b f\,dg = f\,.\,g\Big|_a^b - \int_a^b g\,df.$$

9.5.4. Остатъчният член на формулата на Тейлор в интегрална форма.

Нека функцията f има в някоя околност на точката a непрекъсната $(n+1)$-ва производна. Нека x принадлежи на тази околност. Разглеждаме равенството

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Като положим $u(t) = f'(t)$, $v(t) = -(x-t)$ и приложим към интеграла

$\int_a^x f'(t)\,dt=\int_a^x u(t)\,dv(t)$ формулата за интегриране по части, получаваме

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt=-f'(t)(x-t)\Big|_a^x+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

$$=(x-a)f'(a)+\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt.$$

По такъв начин чрез последователно интегриране по части намираме

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt=(x-a)f'(a)+\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$$

$$=(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2f'''(t)\,dt$$

$$=\dots=(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\dots+\frac{1}{n!}(x-a)^nf^{(n)}(a)$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(x-a)^kf^{(k)}(a)+R_{n+1}(x),$$

където $R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt.$

Виждаме, че R_{n+1} е остатъчният член в разлагането на Тейлор на функцията f в околност на точката a. Тази форма на ***остатъчния член*** се нарича ***интегрална форма.***

Ако приложим първата формула за средните стойности (вж. д) от 9.4.2), то

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x (x-t)^n\,dt$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

където $\xi\in[a,x]$. Следователно при същите предположения ще получим остатъчния член във форма на Лагранж. Действително лесно се вижда (като се използва теоремата на Дарбу, според

която производната приема всички междинни стойности), че равенството $R_{n+1}(x)=(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$ е в сила само при условието за съществуване и интегруемост на $f^{(n+1)}(x)$.

Примери:

1. Пресметнете интегралите, като използвате основната формула на интегралното смятане:

а) $\int_a^b x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1},\ n\neq-1.$

б) $\int_a^b \sin x dx=-\cos x\Big|_a^b=\cos a-\cos b,\ \int_a^b \cos x dx=\sin b-\sin a.$

в) $\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^a=\operatorname{arc\,tg} a.$

г) $\int_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}dx=\frac{1}{3}\ln(a^3+x^3)\Big|_0^a=\frac{1}{3}\ln 2,\ a>0.$

2. Изчислете интегралите с помощта на правилото за смяна на променливата (с помощта на субституции):

а) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 t^4dt=\frac{1}{5}t^5\Big|_0^1=1/5,$

където е положено $t=\operatorname{tg} x$.

б) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_1^{\sqrt{2}} t^2dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{2}}=(2\sqrt{2}-1)/3,\ t=\sqrt{1+x^2}.$

3. Да се пресметне интегралът, като се приложи правилото за интегриране по части:

$$I_m=\int_0^{\pi/2}\sin^m x dx=-\frac{\cos x\sin^{m-1}x}{m}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{m-1}{m}\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x dx$$

$$=\frac{m-1}{m}I_{m-2},$$

$m\geq 2$, m е естествено число.

Лесно се вижда, че $I_0=\pi/2$, $I_1=1$. По индукция получаваме, че

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\dots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\dots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

4. Да се докаже, че за функцията $f(x)=(1+x)^\alpha$ остатъчният член $R_{n+1}(x)$ в интегрална форма клони към нула при $n\to\infty$, когато $|x|<1$. Имаме

$$R_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdot\cdot(\alpha-n)}{n!}\int_0^x(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt.$$

От очевидните неравенства $t/x\geqq 0$, $1+x>0$ следва, че

$$t/x+t=\frac{t}{x}(1+x)\geqq 0 \text{ или } \frac{x-t}{x}=1-\frac{t}{x}\leqq 1+t.$$

По-нататък, тъй като x и $x-t$ са числа с еднакъв знак, то

$$\left|\frac{x-t}{x}\right|=1-\frac{t}{x}\leqq 1+t=|1+t|, \text{ или } \left|\frac{x-t}{1+t}\right|\leqq|x|.$$

Следователно

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{(1+t)^n}(1+t)^{\alpha-1}dt\right|\leqq|x|^n\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}dt=C(x,\alpha)\,.\,|x|^n,$$

където $C(x,\alpha)$ не зависи от n. С други думи,

$$|R_{n+1}|\leqq C(x,\alpha)\,|\alpha(\alpha-1)\cdot\cdot\cdot(\alpha-n)|\,|x|^n/n!=p_n.$$

Разглеждаме произволно число q, удовлетворяващо условието $|x|<q<1$. Тъй като

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{|\alpha-n-1|\,|x|}{n+1}\to|x|\ (n\to\infty),$$

то съществува такъв номер N, че $p_{n+1}/p_n<q$ при $n\geqq N$. Оттук следва, че $p_n\leqq p_N q^{n-N}$ при $n\geqq N$. Като оставим в това неравенство n да расте неограничено, се убеждаваме, че p_n, а следователно и R_{n+1} клонят към нула.

9.6. Неравенства за суми и интеграли

9.6.1. Неравенство на Юнг*. *Да разгледаме две неотрицателни числа a и b и две числа p и q, по-големи от единица и такива, че $1/p+1/q=1$. Ще докажем следното неравенство на Юнг:*

$$ab\leqq a^p/p+b^q/q.$$

Доказателство. Разглеждаме функцията $f(x)=x^{1/p}-x/p$

* Уилям Хенри Юнг — английски математик (1882—1946).

при $x\geqq 0$. Понеже $f'(x)=\frac{1}{p}(x^{-1/q}-1)$, то $f'(x)>0$ при $0<x<1$, $f'(x)<0$ при $x>1$. В точката $x=1$ функцията f приема най-голямата си стойност, при това $f(1)=1-1/p=1/q$. Следователно $x^{1/p}-x/p\leqq 1/q$ за всяко $x\geqq 0$. В последното неравенство полагаме $x=a^p/b^q$, $b\neq 0$. С това неравенството на Юнг е доказано при $b\neq 0$. При $b=0$ то е очевидно. □

9.6.2. Неравенство на Хьолдер* за суми. *Нека $a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot, a_n$ и $b_1, b_2, \cdot\cdot\cdot, b_n$ са произволни неотрицателни числа. Тогава*

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqq\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q},$$

където $1/p+1/q=1$, $p>1$, $q>1$.

Това неравенство се нарича неравенство на Хьолдер за суми. То е хомогенно в смисъл, че ако е изпълнено за числата a_i, b_i, то е изпълнено и за числата ta_i, tb_i. Затова е достатъчно да установим, че $\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqq 1$ при условия $\sum_{i=1}^n a_i^p=1$, $\sum_{i=1}^n b_i^q=1$, тъй като винаги можем да разделим числата a_i и b_i съответно на $\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}$ и $\left(\sum_{i=1}^n b^q\right)^{1/q}$ **. Записвайки неравенството на Юнг за такива числа a_i и b_i и сумирайки тези неравенства по i, получаваме

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqq\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n a_i^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^n b_i^q.$$

Затова $\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqq 1/p+1/q=1$. □

Забележка. В случая $p=2$, $q=2$ неравенството на Хьолдер се превръща в неравенството

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqq\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}.$$

* О. Хьолдер — немски математик (1859—1937).

** Предполагаме, че поне едно от числата a_i и поне едно от числата b_i е различно от нула. В противен случай неравенството е очевидно.

наречено ***неравенство на Коши — Буняковски* за суми***

9.6.3. Неравенство на Минковски за суми.** *Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ са произволни неотрицателни числа и $p>1$. Тогава е изпълнено следното неравенство на Минковски за суми:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}.$$

Доказателство. Записваме равенството

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1}.$$

Към всяка от сумите в дясната страна прилагаме неравенството на Хьолдер. Ако $1/p+1/q=1$, $p>1$, $q>1$, то $(p-1)q=p$, $\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$. Затова

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$
$$=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{(p-1)/p}.$$

Като разделим последното неравенство на $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{(p-1)/p}$, ще получим исканото неравенство.

9.6.4. Неравенство на Хьолдер за интеграли. *Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две произволни интегруеми в сегмента $[a, b]$ функции; нека p и q са две числа, по-големи от единица, и $1/p+1/q=1$. Тогава е изпълнено неравенството на Хьолдер за интеграли:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx\right| \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,d\right)^{1/q}$$

* Виктор Яковлевич Буняковски — руски математик (1804—1889).
** Херман Минковски — немски математик и физик (1864—1909).

(всички написани интеграли съществуват според следствието от теорема 9.4).

Доказателство. Ще отбележим, че както и в 9.6.2, достатъчно е да разгледаме случая, когато $\int_a^b |f(x)|^p dx=1$ и $\int_a^b |g(x)|\,dx=1$, и да докажем неравенството $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqq 1$. Записваме неравенството на Юнг за произволна точка x за функциите $|f(x)|$ и $|g(x)|$. Имаме

$$|f(x)|\,.\,|g(x)| \leqq \frac{1}{p}|f(x)|^p+\frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Като интегрираме това неравенство, получаваме

$$\int_a^b |f(x)|\,.\,|g(x)|\,dx \leqq 1.$$

Но съгласно свойство г) от 9.4.2

$$\left|\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,.\,|g(x)|\,dx. \quad \square$$

Както и при извода на неравенството на Хьолдер за суми, предполагаме, че $\int_a^b |f(x)|dx \neq 0$ и $\int_a^b |g(x)|\,dx \neq 0$. В противен случай неравенството е очевидно.

Забележка. В случая, когато $p=2$, $q=2$, неравенството на Хьолдер се превръща в неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx\right| \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

което се нарича ***неравенство на Коши — Буняковски за интеграли.***

9.6.5. Неравенство на Минковски за интеграли. *Нека f и g са две произволни неотрицателни и интегруеми върху сегмента $[a, b]$ функции и числото $p \geqq 1$. Тогава е в сила неравенството на Минковски за интеграли:*

$$\left\{\int_a^b (f(x)+g(x))^p\,dx\right\}^{1/p} \leqq \left\{\int_a^b f^p(x)\,dx\right\}^{1/p}+\left\{\int_a^b g^p(x)dx\right\}^{1/p}.$$

Ще отбележим, че съгласно следствието от теорема 9.4 всички подинтегрални функции са интегруеми.

Доказателство. Точно както и при доказателството на неравенството на Минковски за суми, тръгваме от

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^p\,dx = \int_a^b f(x)(f(x)+g(x))^{p-1}dx + \int_a^b g(x)(f(x)+g(x))^{p-1}\,dx.$$

По-нататък, прилагайки към интегралите в дясната страна неравенството на Хьолдер, както и в 9.6.3 получаваме искания резултат. □

По индукция може да се докаже и по-общо неравенство за n функции $f_1, f_2, \cdots, f_n$, неотрицателни и интегруеми в сегмента $[a, b]$:

$$\left\{\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x))^p\,dx\right\}^{1/p}$$

$$\leq \left\{\int_a^b f_1^p(x)dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b f_2^p(x)\,dx\right\}^{1/p} + \cdots + \left\{\int_a^b f_n^p(x)\,dx\right\}^{1/p}.$$

9.7. Критерий на Лебег* за интегруемост на функция върху сегмент

9.7.1. Множества с мярка нула и с жорданова мярка нула. В тази точка ще въведем някои понятия, необходими за доказателството на критерия на Лебег.

Определение 1. *Множеството $A=\{x\}$, принадлежащо на сегмента $[a, b]$, ще наричаме* ***множество с мярка нула (лебегова мярка нула),*** *ако за всяко число $\varepsilon>0$ съществува най-много изброимо покритие на множеството $A=\{x\}$ със сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \cdots$, такова, че*

* Анри Лебег — френски математик (1875—1941).

$\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} (b_k-a_k)<\varepsilon$*. Обстоятелството, че множеството A има мярка нула, обикновено се записва така: $\mu(A)=0$.

Очевидно в определението за множество с мярка нула сегментите $[a_k, b_k]$ могат да се заменят с интервалите (a_k, b_k).

Ще докажем следните твърдения:

Твърдение 1. *Нека A и B са две подмножества на сегмента $[a, b]$ и $B\subset A$. Тогава, ако $\mu(A)=0$, то и $\mu(B)=0$.*

Доказателство. Тъй като $\mu(A)=0$, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува най-много изброима система от сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \cdots$, такава, че $A\subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ и $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} (b_k-a_k)<\varepsilon$.

Понеже $B\subset A$, то $B\subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ и следователно $\mu(B)=0$.

Твърдение 2. *Нека множествата A_k, $k=1, 2, 3, \cdots$, принадлежат на сегмента $[a, b]$ и $A\subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогава, ако $\mu(A_k)=0$, $k=1, 2, 3, \cdots$, то и $\mu(A)=0$.*

Доказателство. Тъй като множеството A_k има мярка нула, то за всяко положително число ε и всеки номер $k=1, 2, 3, \cdots$ съществува съвкупност от такива сегменти $I_{k,n}=[a_{k,n}, b_{k,n}]$, че

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}\supset A_k \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} (b_{k,n}-a_{k,n})<2^{-k}\varepsilon. \text{ Понеже } A\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$\text{то } A\subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}\right).$$

Системата от сегменти $I_{k,n}$ $k, n=1, 2, 3, \cdots$, е най-много изброима. Да я преномерираме с помощта на един индекс и да означим с $I_1=[a_1, b_1]$ сегмента $I_{1,1}$, с $I_2=[a_2, b_2]$ — сегмента $I_{1,2}$, с $I_3=[a_3, b_3]$ — сегмента $I_{2,1}$ и т. н. С други думи, сегментите

* Това неравенство може да се запише и така: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k-a_k) < \varepsilon$, където под символа $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k-a_k)$ се разбира $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} (b_k-a_k)$.

$I_{k,n}$ номерираме в естествените числа по реда на нарастване на $k+n$, а за еднаквите $k+n$ — по реда на нарастване на k. Очевидно за всяко естествено число $N \geqq 1$ е изпълнено неравенството

$$\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m) \leqq \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N}(b_{k,n}-a_{k,n})\right),$$

където $[a_m, b_m]=I_m$ е сегментът с номер m при новата номерация.

Тъй като съгласно избора на сегментите $[a_{k,n}, b_{k,n}]$ за всеки номер k са изпълнени неравенствата

$$\sum_{n=1}^{N}(b_{k,n}-a_{k,n}) \leqq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(b_{k,n}-a_{k,n})<2^{-k}\varepsilon,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$$

то за всяко $N \geqq 1$ имаме

$$\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m) \leqq \varepsilon\sum_{k=1}^{N}2^{-k}<\varepsilon.$$

Следователно

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m)=\sup_{N}\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m) \leqq \varepsilon.$$

Затова $\mu(A)=0$. □

Следствие. *Ако множеството A се състои от изброим или краен брой точки на сегмента $[a, b]$, то $\mu(A)=0$. По-специално множеството на рационалните числа, принадлежащи на сегмента $[a, b]$, има мярка нула.*

Определение 2. *Ще казваме, че множеството $A=\{x\}$, принадлежащо на сегмента $[a, b]$, има жорданова мярка нула, ако за всяко число $\varepsilon>0$ съществува такова крайно покритие на множеството A със сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \cdots$,*

$$N=N(\varepsilon),\ \text{че}\ \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}(b_k-a_k)<\varepsilon.$$

Очевидно в определението за множество с жорданова мярка нула сегментите $[a_k, b_k]$ могат да се заменят с интервалите (a_k, b_k), а системата $\{I_k\}$ може да се избере от два по два непресичащи се сегмента.

Непосредствено от определението следва, че всяко подмножество на сегмента $[a, b]$, състоящо се от краен брой точки, има жорданова мярка нула.*

Ще отбележим също, че ако множеството A има жорданова мярка нула, то има също така и лебегова мярка $\mu(A)$, равна на нула.

Твърдение 3. *Да разгледаме сегмента $[a, b]$ и произволно негово покритие със сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \cdots, m$. Тогава*

$$\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k) \geqq (b-a)>0.$$

Доказателство. Ще докажем твърдението индуктивно. При $m=1$ то е вярно, тъй като $I_1=[a_1, b_1] \supset [a, b]$ и $b_1-a_1 \geqq b-a>0$. Допускаме, че твърдението е вярно за покрития, съставени от m сегмента $I_1, I_2, \cdots, I_m$. Като изменим, ако е необходимо, номерацията на сегментите, ще приемем, че $a \in [a_1, b_1]=I_1$. Тогава $a_1 \leqq a \leqq b_1$. Ако $b \leqq b_1$, то $b_1-a_1 \geqq b-a>0$ и всичко е доказано. Нека $b_1<b$. Тогава системата $I_2, I_3, \cdots, I_{m+1}$ образува покритие на сегмента $[b_1, b]$, състоящо се от m сегмента, и съгласно индуктивното допускане $\sum_{k=2}^{m}(b_k-a_k) \geqq b-b_1>0$. Но тогава $\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k) \geqq (b_1-a)+(b-b_1)=b-a>0$, което трябваше да се докаже.

Следствие 1. *Сегментът $[a, b]$ не може да има жорданова мярка нула.*

Следствие 2. *Нека $\{x_k\}$ е едно деление на сегмента $[a, b]$ и $I_k=[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, 3, \cdots, n$, са частичните сегменти на това деление. Нека $\{P_m\}$, $m=1, 2, 3, \cdots, p$, е такава крайна система от сегменти $P_m=[a_m, b_m]$, че $\bigcup_{m=1}^{p}P_m \supset \bigcup_{j=1}^{l}I_{k_j}$. Тогава*

$$\sum_{m=1}^{p}(b_m-a_m) \geqq \sum_{j=1}^{l}(x_{k_j}-x_{k_{j-1}}).$$

Твърдение 4. *Нека K е компактно множество, принадлежащо на сегмента $[a, b]$, и $\mu(K)=0$. Тогава K има и жорданова мярка нула.*

Доказателство. Тъй като множеството K има мярка нула, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова най-много изброимо покритие на множеството K с интервали $\overset{\circ}{I}_k=(a_k, b_k)$, че $\bigcup_{k=1}^{\infty}\overset{\circ}{I}_k$

* Не е трудно да се убедим, че всяко изброимо затворено подмножество на сегмента $[a, b]$ е също множество с жорданова мярка нула.

$= \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \supset K$, при което $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \varepsilon$.

Поради компактността на множеството K от покритието $\{\mathring{I}_k\}$ може да се отдели крайно подпокритие $\{\mathring{I}_{k_j}\}$, $j=1, 2, 3, \ldots, m$, за което $\bigcup_{j=1}^{m} \mathring{I}_{k_j} \supset K$. Очевидно $\sum_{j=1}^{m} (b_{k_j} - a_{k_j}) < \varepsilon$. □

Като следствие получаваме, че всяко изброимо затворено множество от елементи на сегмента $[a, b]$ (то е компактно) има жорданова мярка нула.

9.7.2. Осцилация на функция в точка. Изследване на множеството от точки на прекъсване на функция. В 4.8 осцилация $\omega(f; x_0)$ на функцията f в точката x_0 нарекохме разликата $M(x_0) - m(x_0) = \omega(f, x_0)$ между горната и долната функция на Бер за функцията f в точката x_0.

Ще докажем едно обобщение на теорема 4.16 за случая на прекъснати функции.

Твърдение 5. *Нека функцията f е дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. Нека съществува такова число $\omega \geq 0$, че $0 \leq \omega(f; x) \leq \omega$ за всяка точка x от сегмента $[a, b]$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова деление $\{x_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, на сегмента $[a, b]$, че*

$\omega_k = M_k - m_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} - \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} < \omega + \varepsilon$*

за всяко $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

Доказателство. Нека ε е произволно фиксирано положително число. По условие $0 \leq \omega(f; x) \leq \omega$ за всяка точка x от сегмента $[a, b]$. Тъй като $\omega(f; x) = M(x) - m(x) = \lim_{\delta\to 0+0} \{M_\delta(x) - m_\delta(x)\}$ (вж. 4.8), то за всяка точка x_0 от сегмента $[a, b]$ съществува такъв интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, че

$$\omega(f; [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) < \omega + \varepsilon.$$

Ще отбележим, че е налице включването $[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a, b]} (x - \delta(x), x + \delta(x))$. Поради компактността на сегмента $[a, b]$ можем да изберем крайно подпокритие на сегмента $[a, b]$ с интервали $(a_1, b_1) = (x_1 - \delta(x_1), x_1 + \delta(x_1)), \ldots, (a_N, b_N) = (x_N - \delta(x_N), x_N + \delta(x_N))$ така, че $[a, b] \subset \bigcup_{m=1}^{N} (a_m, b_m)$. Нека $\{x_k\}$ е едно такова деление на сегмента $[a, b]$, че всички точки $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N$, принадлежащи на сегмента $[a, b]$, да участвуват в това деление и всеки частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ от деленето $\{x_k\}$ да се съдържа в някой сегмент $[a_p, b_p]$, $p=1, 2, 3, \ldots, N$. Тогава очевидно $\omega(f; [x_{k-1}, x_k]) < \omega + \varepsilon$ за всяко $k=1, 2, 3, \ldots, n$. □

* Числото ω_k се означава още и с $\omega(f, [x_{k-1}, x_k])$ и се нарича осцилация на функцията $f(x)$ в сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ (вж. 4.6.2).

Следствие. *Нека са изпълнени условията на твърдение 5. Тогава съществува такова деление $\{x_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, на сегмента $[a, b]$, че за това деление е изпълнено $\Omega = S - s < (\omega + \varepsilon)(b - a)$.* Наистина

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$< (\omega + \varepsilon) \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = (\omega + \varepsilon)(b - a).$$

Нека функцията f е дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. Означаваме с

$$R(\varepsilon) = \{x \in [a, b] : \omega(f; x) \geq \varepsilon > 0\}$$

множеството от точки x в сегмента $[a, b]$, за които осцилацията на функцията f е по-голяма или равна на числото $\varepsilon > 0$.

Вярно е следното твърдение:

Твърдение 6. *За всяко $\varepsilon > 0$ множеството $R(\varepsilon)$ е затворено.*

Доказателство. Ще напомним, че осцилацията на функция в дадена точка x_0 е долната граница на осцилациите на тази функция във всички симетрични интервали, които съдържат точката x_0 (x_0 е среда на интервала). В случая, когато x_0 е край на интервала, се вземат интервалите, които имат за край x_0 и лежат в сегмента $[a, b]$.

Нека x_0 е контурна точка за $R(\varepsilon)$. Ще покажем, че тя принадлежи на $R(\varepsilon)$. Очевидно всеки интервал, който съдържа x_0, съдържа и някоя точка от $R(\varepsilon)$ и затова осцилацията на f в този интервал (или в сегмента, получен чрез присъединяване на краищата на интервала) е не по-малка от ε, т. е. точката x_0 принадлежи на $R(\varepsilon)$. Тъй като всяка контурна точка на $R(\varepsilon)$ принадлежи на множеството $R(\varepsilon)$, то това множество е затворено. □

За да бъде една дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$ функция f непрекъсната в точката x, е необходимо и достатъчно осцилацията $\omega(f; x)$ в точката x да бъде равна на нула (или, което е същото, $M(x) = m(x)$). Затова, ако осцилацията $\omega(f; x) > 0$, то точката x е точка на прекъсване за функцията f.

Нека R е множеството от всички точки на прекъсване на

функцията $f(x)$, дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. Тогава очевидно

$$R=\bigcup_{m=1}^{\infty} R(1/m)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{x\in[a, b]:\omega(f; x)\geqq 1/m\}.$$

9.7.3. Критерий за интегруемост на функция.

Теорема 9.6 (критерий на Лебег). *За да бъде ограничената в сегмента $[a, b]$ функция f интегруема по Риман в този сегмент, е необходимо и достатъчно множеството от точки на прекъсване на тази функция да има мярка нула.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е дефинирана и интегруема в сегмента $[a, b]$ и R е множеството от точките ѝ на прекъсване в този сегмент. Тъй като $R=\bigcup_{m=1}^{\infty} R(1/m)$, то съгласно твърдение 2 е достатъчно да докажем, че $\mu(R(1/m))=0$ за $m=1, 2, 3, \cdots$ Ще покажем, че жордановата мярка на всяко множество $R(1/m)$ е равна на нула, толкова повече $\mu(R(1/m))=0$.

Понеже функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, то за всяко $\varepsilon>0$ и за всяко естествено число m съществува според основната теорема от 9.3 такова деление $\{x_k\}$, $k=0, 1, 2, \cdots, m$, на сегмента $[a, b]$, че $0\leqq Q=S-s=\varepsilon/2m$. Разглеждаме съвкупността $\{I_k\}$, $I_k=[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, 3, \cdots, m$, от всички частични сегменти на даденото деление. Нека $\overset{\circ}{I}_k=(x_{k-1}, x_k)$ е съответстващият на частичния сегмент интервал, а $\partial I_k=\{x_{k-1}, x_k\}$ е множеството от двете точки x_{k-1} и x_k, $k=1, 2, 3, \cdots, n$.

Разглеждаме двете множества $R'(1/m)$ и $R''(1/m)$, определени по следния начин:

$$R'(1/m)=R(1/m)\cap\bigcup_{k=1}^{n}\overset{\circ}{I}_k;\ R''(1/m)=R(1/m)\cap\bigcup_{k=1}^{n}\partial I_k.$$

Очевидно множеството $\bigcup_{k=1}^{n}\partial I_k$ има жорданова мярка нула, понеже се състои от краен брой точки.

По-нататък $R''(1/m)\subset\bigcup_{k=1}^{n}\partial I_k$, затова и множеството $R''(1/m)$ има жорданова мярка нула. Следователно за избраното по-горе $\varepsilon>0$ съществува такава крайна система $\{P_l\}$, $l=1, 2, 3, \cdots, L=L(\varepsilon)$, от сегменти $P_l=[a_l, b_l]$, че

$$\sum_{l=1}^{L}(b_l-a_l)<\varepsilon/2,\ R''(1/m)\subset\bigcup_{l=1}^{L}P_l. \tag{9.5}$$

Ще докажем, че множеството $R'(1/m)$ също има жорданова мярка нула. Нека $x_0\in R'(1/m)\neq\varnothing$. Тогава съществува такова k_0, че $x_0\in\overset{\circ}{I}_{k_0}=(x_{k_0-1}, x_{k_0})$, и затова съществува $\delta>0$, за което $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset I_{k_0}$. Следователно

$$\omega_{k_0}=\omega(f; I_{k_0})\geqq\omega(f; (x_0-\delta, x_0+\delta))\geqq\omega(f; x_0)\geqq 1/m>0.$$

По този начин установихме, че

$$R(1/m)\subset\bigcup_{k\in Q_m} I_k,$$

където $Q_m=\{k: 1\leqq k\leqq m,\ \omega(f; I_k)\geqq 1/m\}$.

Ще запишем следните очевидни неравенства:

$$\frac{1}{m}\sum_{k\in Q_m}(x_k-x_{k-1})\leqq\sum_{k\in Q_m}\omega_k(x_k-x_{k-1})$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{n}\omega(f; [x_{k-1}, x_k])(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})=S-s<\varepsilon/2m.$$

Неравенството $S-s<\varepsilon/2m$ следва от избора на делението $\{x_k\}$.

Следователно получаваме

$$\sum_{k\in Q_m}(x_k-x_{k-1})<\varepsilon/2. \tag{9.6}$$

Окончателно имаме

$$R(1/m)=R'(1/m)\cup R''(1/m)\subset\left(\bigcup_{k\in Q_m} I_k\right)\cup\left(\bigcup_{l=1}^{L}P_l\right),$$

където поради (9.5) и (9.6) сумата от дължините на крайния брой сегменти I_k и P_l не надминава ε. Понеже ε е произволно избрано, множеството $R(1/m)$ има жорданова мярка нула.□

Достатъчност. Нека R е множеството от точките на прекъсване на функцията f, дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. За всяко $\varepsilon>0$ имаме

$$R(\varepsilon)=\{x\in[a, b]:\omega(f; x)\geqq\varepsilon\}\subset R\subset[a, b]$$

и следователно $R(\varepsilon)$ е ограничено. Съгласно твърдение 6 множеството $R(\varepsilon)$ е затворено. Затова според определението от 4.6.3 множеството $R(\varepsilon)$ е компактно. Тъй като $\mu(R)=0$ и $R(\varepsilon)\subset R$, то от твърдение 1 следва, че $\mu(R(\varepsilon))=0$, а от твърдение 4 — че и жордановата мярка на множеството $R(\varepsilon)$ е равна на нула. С други думи, за всяко $\varepsilon>0$ съществува такава крайна система от сегменти $P_l=[a_l, b_l]$, $l=1, 2, \cdots, N$, че системата от интервали $\overset{\circ}{P}_l=(a_l, b_l)$ покрива $R(\varepsilon)$, т. е.

$$\bigcup_{l=1}^{N} P_l \supset \bigcup_{l=1}^{N} \overset{\circ}{P}_l \supset R(\varepsilon),$$

при което $\sum_{l=1}^{N}(b_l-a_l)<\varepsilon$.

Нека $\{x_k\}$, $k=1, 2, 3, \cdots, n$, е деление на сегмента $[a, b]$, състоящо се от точките a, b и всички краища на сегментите P_l, $l=1, 2, \cdots, N$, които се съдържат в $[a, b]$. Нека $I_k=[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \cdots, n$, е частичен сегмент от делението $\{x_k\}$. По построение интервалът $\overset{\circ}{I}_k=(x_{k-1}, x_k)$ не съдържа краищата на сегментите $\{P_l\}$. Възможни са два случая:

а) Съществува такъв индекс l_0, че $I_k\subset P_{l_0}$. Означаваме тази група от сегменти с $I'=\{I_{k'}\}$.

б) За всеки номер l сечението $(x_{k-1}, x_k)\cap P_l=\varnothing$. В този случай точката x_{k-1} (или x_k) може да бъде край на някой сегмент от системата $\{P_l\}$. Означаваме тази група от сегменти с $I''=\{I_{k''}\}$. Ще покажем, че в случая б) нито точката x_{k-1}, нито точката x_k принадлежи на $R(\varepsilon)$. Наистина, ако например $x_{k-1}\in R(\varepsilon)$, то понеже системата от интервали $\{P_l\}$ покрива множеството $R(\varepsilon)$, ще съществува индекс l_1, за който $x_{k-1}\in \overset{\circ}{P}_{l_1}\neq\varnothing$, и тогава очевидно $(x_{k-1}, x_k)\cap P_{l_1}\neq\varnothing$ въпреки избора на делението $\{x_k\}$. И така в този случай $I_k\cap R(\varepsilon)=\varnothing$.

Ще подчертаем, че всеки от сегментите I_k на делението $\{x_k\}$ се съдържа или в групата I', или в групата I''.

Тъй като f е ограничена в сегмента $[a, b]$: $|f(x)|\leq M$ за всяко $x\in[a, b]$, то $\omega_k=\omega(f; [x_{k-1}, x_k])\leq 2M$ за $k=1, 2, 3, \cdots, n$. По-специално, ако $I_{k'}\in I'$ и $I_{k'}=[x_{k'-1}, x_{k'}]$, то

$$\sum_{(k')}\omega_{k'}(x_{k'}-x_{k'-1})\leq 2M\sum_{l=1}^{N}(b_l-a_l)<2M\varepsilon.$$

Нека сега $I_{k''}\in I''$. Тогава $I_{k''}\cap R(\varepsilon)=\varnothing$ и затова осцилацията

$\omega(f; x)<\varepsilon$ за всяко $x\in I_{k''}$. Ще приложим следствието на твърдение 5 към сегмента $I_{k''}=[x_{k''-1}, x_{k''}]$, като за ω ще изберем числото ε. Може да се твърди, че съществува такова деление $\{y_k\}$ на сегмента $I_{k''}$, $x_{k''-1}=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n(k'')}=x_{k''}$ с частични сегменти $[y_{k-1}, y_k]$, че

$$\sum_{k=1}^{n(k'')}\omega(f; [y_{k-1}, y_k])(y_k-y_{k-1})<2\varepsilon(x_{k''}-x_{k''-1}).$$

Образуваме сега делението $\{z_r\}$ като обединение на делението $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ и деленията $\{y_k\}$ на сегментите $I_{k''}$ и означаваме със $[z_{r-1}, z_r]$ неговите частични сегменти. За делението $\{z_r\}$ имаме

$$0\leq S-s=\sum_{r\in Q'}\omega_r(z_r-z_{r-1})+\sum_{r\in Q''}\omega_r(z_r-z_{r-1})$$

$$\leq 2\varepsilon M+2\varepsilon\sum_{(k'')}(x_{k''}-x_{k''-1})<2\varepsilon(M+(b-a)),$$

където $Q'=\{r:[z_{r-1}, z_r]\subset I_{k'}\in I'\}$, $Q''=\{r:[z_{r-1}, z_r]\subset I_{k''}\in I''\}$. От произволния избор на ε и основната теорема от 9.3.1 следва интегруемостта по Риман на функцията f в сегмента $[a, b]$.

9.8. Несобствени интеграли

При изученото в глава 9 понятие за определен интеграл на Риман съществено се използват две обстоятелства: 1) че интервалът $[a, b]$ на интегриране е краен; 2) че подинтегралната функция f е ограничена в разглеждания интервал.

Сега ще обобщим понятието определен интеграл на Риман за следните два случая: 1) когато интервалът на интегриране е безкраен*; 2) когато подинтегралната функция f е неограничена в околност на някои точки от областта на интегриране.

Понятието интеграл при едно такова обобщение е прието да се нарича несобствен интеграл съответно от първи и втори род.

9.8.1. Понятие за несобствен интеграл от първи род. Ще въвевем понятието определен интеграл в случая, когато областта, върху която се интегрира, е безкрайна. Върху правата $-\infty<x<\infty$ има три вида безкрайни свързани области: 1) полуправата

* Т. е. представлява полуправа или цялата безкрайна права.

$-\infty < x \leq b$; полуправата $a \leq x < +\infty$; 3) цялата права $-\infty < x < \infty$.

За определеност ще разгледаме подробно една от тези области, а именно полуправата $a \leq x < +\infty$.

Ще предполагаме, че функцията f е дефинирана върху полуправата $a \leq x < +\infty$ и за всяко число A, удовлетворяващо неравенството $A \geq a$, съществува определеният интеграл на Риман

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx. \tag{9.7}$$

Възниква въпросът за съществуването на граница на $F(A)$ при $A \to +\infty$:

$$\lim_{A \to +\infty} F(A) = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx. \tag{9.8}$$

Определение. *Границата* (9.8) *в случая, когато съществува, се нарича* ***несобствен интеграл от първи род*** *на функцията* f *върху полуправата* $[a, +\infty)$ *и се означава със символа*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{9.9}$$

При това се казва, че несобственият интеграл (9.9) е ***сходящ***, и това се записва с равенството

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Впрочем символът (9.9) се употребява и в случая, когато границата (9.8) не съществува, но тогава се казва, че несобственият интеграл (9.9) е ***разходящ***.

Аналогично се определят несобствените интеграли върху полуправата $-\infty < x \leq b$ и върху безкрайната права $-\infty < x < +\infty$.

Първият от тези интеграли се определя като граница $\lim\limits_{A \to -\infty} \int_A^b f(x)\,dx$ и се означава със символа $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Що се касае до интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, то той се определя

като границата

$$\lim_{\substack{A' \to +\infty \\ A'' \to -\infty}} \int_{A''}^{A'} f(x)\,dx,$$

където A' клони към $+\infty$ независимо от клоненето на A'' към $-\infty$. От тези определения следва, че ако за някое реално число a всеки от несобствените интеграли $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ, то и несобственият интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ и е в сила равенството

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Ако несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ и b е число, по-голямо от a, то и несобственият интеграл $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ и е изпълнено равенството

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Това следва непосредствено от определението за сходимост на несобствен интеграл.

Примери:

1. Ще изучим въпроса за сходимост на несобственния интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Тъй като функцията $f(x) = 1/(1+x^2)$ е интегруема в сегмента $[0, A]$ за всяко $A > 0$ и за нея

$$F(A) = \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^A = \operatorname{arc\,tg} A,$$

то

$$\lim_{A\to+\infty} F(A)=\lim_{A\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} A=\pi/2.$$

Следователно несобственият интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ е сходящ и

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}=\pi/2.$$

2. Ще разгледаме въпроса за сходимостта на несобствения интеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^\lambda\, dx$, където a и λ са произволни реални числа, първото от които е положително ($a>0$).

Тъй като функцията $f(x)=x^\lambda$ е интегруема в сегмента $[a, A]$ при всяко $A>0$ и

$$F(A)=\int\limits_a^A x^\lambda\, dx=\begin{cases} x^{\lambda+1}/(\lambda+1)\big|_a^A=(A^{\lambda+1}-a^{\lambda+1})/(\lambda+1) & \text{при } \lambda\neq-1,\\ \ln x\big|_a^A=\ln A-\ln a & \text{при } \lambda=-1,\end{cases}$$

то за $\lambda<-1$ границата на $F(A)$ при $A\to+\infty$ съществува и е равна на $-a^{\lambda+1}/(\lambda+1)$, а за $\lambda\geq-1$ тази граница не съществува.

Следователно при $\lambda<-1$ несобственият интеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^\lambda\, dx$ е сходящ и е равен на $-a^{\lambda+1}/(\lambda+1)$, а при $\lambda\geq-1$ той е разходящ.

9.8.2. Критерий на Коши за сходимост на несобствени интеграли от първи род. Достатъчни условия за сходимост. Сходимостта на несобствен интеграл от първи род е еквивалентна на съществуването на граница на функцията

$$F(A)=\int\limits_a^A f(x)\,dx \text{ при } A\to+\infty.$$

Както е известно, за съществуването на граница на функцията $F(A)$ при $A\to\infty$ е необходимо и достатъчно тя да удовлетворява следното условие на Коши: За всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова число B, че за произволни A_1 и A_2, по-големи от B, да е изпълнено неравенството

$$|F(A_2)-F(A_1)|=\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Следователно в сила е следното твърдение:

Твърдение 1 (критерий на Коши за сходимост на несобствен интеграл). *Необходимо и достатъчно условие несобственият интеграл (9.9) да бъде сходящ е за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова $B>a$, че при всеки избор на числата A_1 и A_2, по-големи от B, да е изпълнено*

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Забележка. От сходимостта на несобствения интеграл не следва дори ограниченост на подинтегралната функция. Например интегралът $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$, където функцията f е равна на нула за всички нецели x и е равна на n при $x=n$ (n е цяло число), очевидно е сходящ, въпреки че подинтегралната функция не е ограничена.

Ще докажем следното твърдение:

Твърдение 2 (общ критерий за сравнение). *Нека върху полуправата $a\leq x<+\infty$ имаме*

$$|f(x)|\leq g(x). \tag{9.10}$$

Тогава от сходимостта на интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следва сходимостта на интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Доказателство. Нека $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ е сходящ. Тогава съгласно критерия на Коши за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери такова $B>a$, че при всеки избор на числата $A_1>B$ и $A_2>B$ да е изпълнено неравенството

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx\right|<\varepsilon. \tag{9.11}$$

От известните неравенства за интеграли и неравенството (9.10) получаваме

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx.$$

Оттук и от неравенството (9.11) следва, че за всеки две числа $A_1>B$ и $A_2>B$ е верно неравенството $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$. Следователно интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ.□

Твърдение 3 (частен критерий за сравнение). *Нека функцията f удовлетворява върху полуправата $0<a\leq x<+\infty$ съотношението $|f(x)|\leq cx^{\lambda}$, където c и λ са константи, $\lambda<-1$. Тогава интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ. Ако съществува такава константа $c>0$, че върху полуправата $0<a\leq x<+\infty$ да е в сила съотношението $f(x)\geq cx^{\lambda}$, в което $\lambda\geq -1$, то интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ.*

Това твърдение следва от твърдение 2 и примера, разгледан в предишната точка (достатъчно е да се положи $g(x)=cx^{\lambda}$).

Следствие (частен критерий за сравнение в гранична форма). *Ако при $\lambda<-1$ съществува крайната граница $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\lambda}|f(x)|=c$, то интегралът $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ е сходящ. Ако при $\lambda\geq-1$ съществува положителната граница $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\lambda}f(x)=c>0$, то интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ.*

Ще се убедим във верността на първата част от следството. За тази цел ще отбележим, че от съществуването на границата при $x\to+\infty$ следва ограниченост на функцията $x^{-\lambda}|f(x)|$, т. е. има константа $c_0>0$, за която е изпълнено неравенството $|f(x)|\leq c_0x^{\lambda}$.

След това прилагаме първата част на твърдение 3. Верността на втората част на следството се получава от следните разсъждения: Понеже $c>0$, може да се намери толкова малко $\varepsilon>0$, че $c-\varepsilon>0$. На това ε отговаря такова B, че при $x>B$ да е изпълнено неравенството $x^{-\lambda}f(x)>c-\varepsilon$ (това неравенство следва от определението за граница). Тогава $f(x)>(c-\varepsilon)x^{\lambda}$ и можем да приложим втората част на твърдение 3.

9.8.3. Абсолютна и условна сходимост на несобствените интеграли. Ще въведем понятията за абсолютна и условна сходимост на несобствените интеграли. Нека f е интегруема във всеки сегмент $[a, A]$.*

Определение 1. *Несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ се нарича* ***абсолютно сходящ,*** *ако е сходящ $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.*

Определение 2. *Несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ се нарича* ***условно сходящ,*** *ако той е сходящ, но интегралът $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ е разходящ.*

Забележка. Като положим в твърдение 2 $g(x)=|f(x)|$, получаваме, че от абсолютната сходимост на несобственият интеграл следва неговата сходимост.

Ще отбележим, че твърдения 2 и 3 позволяват да се установи само абсолютната сходимост на изследваните несобствени интеграли.

Ще дадем още един критерий за сходимост на несобствени интеграли от първи род, годен за установяване и на условна сходимост.

Твърдение 4 (критерий на Дирихле — Абел). *Нека са изпълнени следните условия:*

1) *функцията f е непрекъсната върху полуправата $a\leq x<+\infty$ и има върху тази полуправа ограничена примитивна F;*

2) *функцията g е дефинирана и монотонно нарастяща върху полуправата $a\leq x<+\infty$ и има граница, равна на нула, при $x\to+\infty$;*

* Тогава и функцията $|f(x)|$ е интегруема във всеки сегмент $[a, A]$.

3) *производната* $g'(x)$ *на функцията* g *съществува и е непрекъсната във всяка точка от полуправата* $a \leq x < +\infty$.

Тогава несобственият интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx \tag{9.12}$$

е сходящ.

Доказателство. Ще използваме критерия на Коши за сходимост на несобствени интеграли. Предварително ще интегрираме по части интеграла $\int_{A_1}^{A_2} f(x)\, g(x)\, dx$ върху произволен сегмент $[A_1, A_2]$, $A_2 > A_1$, от полуправата $a \leq x < +\infty$. Получаваме

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)\, g(x)\, dx = F(x)\, g(x) \Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)\, g'(x)\, dx. \tag{9.13}$$

Съгласно условието на теоремата F е ограничена: $|F(x)| \leq k$. Тъй като g не е растяща и клони към нула при $x \to +\infty$, то $g(x) \geq 0$, а $g'(x) \leq 0$. Като оценим съотношението (9.13), получаваме следното неравенство:

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leq K(g(A_1) + g(A_2)) + K \int_{A_1}^{A_2} (-g'(x))\, dx.$$

Тъй като интегралът в дясната страна на това неравенство е равен на $g(A_1) - g(A_2)$, то очевидно

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leq 2K\, g(A_1). \tag{9.14}$$

Нека ε е произволно положително число. Понеже $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то в зависимост от ε може да се избере число B така, че при $A_1 > B$ да е изпълнено $g(A_1) < \varepsilon/2K$. Оттук и от неравенството (9.14) следва, че за всеки две A_1 и A_2, по-големи от B, е изпълнено неравенството $\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon$, което съгласно критерия на Коши гарантира сходимостта на интеграла (9.12). □

Забележка. Условие 3) на твърдение 4 е излишно и е предизвикано само от метода на доказателство (прилагането на интегриране по части). За да се докаже твърдение 4 без условието 3), за оценката на интеграла $\int_{A_1}^{A} f(x)\, g(x)\, dx$ трябва да се приложи втората формула за средните стойности (вж. свойство в) 9.4.2.

Примери:

1. Да разгледаме интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx, \quad \alpha > 0. \tag{9.15}$$

Като положим $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^{-\alpha}$, лесно се вижда, че за този интеграл са изпълнени условията на твърдение 3. Следователно интегралът (9.15) е сходящ.

2. Да разгледаме интеграла на Френел $\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx$. Съгласно т. 1 на това допълнение от сходимостта на интеграла $\int_1^{+\infty} \sin x^2\, dx$ следва сходимостта на изследвания интеграл. Затова ще изследваме сходимостта на интеграла

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot x \sin x^2\, dx.$$

Като положим $f(x) = x \sin x^2$, $g(x) = 1/x$, виждаме, че са изпълнени всички условия на твърдение 4. Следователно интегралът на Френел е сходящ.

9.8.4. Смяна на променливите под знака на несобствения интеграл и формула за интегриране по части. В тази точка ще формулираме условията, при които са в сила формулите за смяна на променливите и интегриране по части за несобствени интеграли от първи род. Най-напред ще разгледаме въпроса за смяна на променлива под знака на несобствен интеграл.

Ще предполагаме, че са изпълнени следните условия:

1) функцията f е непрекъсната върху полуоста $a \leq x < +\infty$;

2) полуоста $a \leq x < +\infty$ е множеството от стойностите на някоя строго монотонна функция g, зададена върху полуоста $\alpha \leq t < +\infty$ (или $-\infty < t \leq \alpha$), и g има върху тази полуос непрекъсната производна;

3) $g(\alpha) = a$.

При тези условия от сходимостта на някой от несобствените интеграли

$$(9.16)\quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ и } \int_a^{+\infty} f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(\text{или } -\int_{-\infty}^{a} f(g(t))\,g'(t)\,dt\right)$$

следва сходимостта на другия и равенството им.

Формулираното твърдение се установява с помощта на следните разсъждения: Разглеждаме произволен сегмент $[a, A]$. На този сегмент поради строгата монотонност на функцията $g(t)$ отговаря такъв сегмент $[\alpha, \rho]$ (или $[\rho, \alpha]$) от оста t, че когато t обхожда сегмента $[\alpha, \rho]$, стойностите на функцията g обхождат сегмента $[a, A]$ и $g(\rho)=A$. По този начин за разглежданите сегменти са изпълнени всички условия от 9.4.3, при които е в сила формулата за смяна на променливата под знака на определения интеграл. Следователно е изпълнено равенството

$$(9.17)\quad \int_a^{A} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\rho} f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(\text{или}=-\int_{\rho}^{\alpha} f(g(t))\,g'(t)\,dt\right).$$

Поради строгата монотонност на функцията g имаме $A\to+\infty$ при $\rho\to+\infty$ и, обратно, $\rho\to\infty$ при $A\to+\infty$ (или $A\to+\infty$ при $\rho\to-\infty$ и $\rho\to-\infty$ при $A\to+\infty$). Затова от формула (9.17) следва верността на формулираното по-горе твърдение.

Ще преминем сега към въпроса за интегриране по части на несобствени интеграли от първи род.

Ще докажем следното твърдение:

Нека функциите u и v имат непрекъснати производни върху полуправата $a\leq x<+\infty$ и освен това съществува граничната стойност $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\,v(x)=L$. При тези условия от сходимостта на единия от интегралите

$$(9.18)\quad \int_a^{+\infty} u(x)\,v'(x)\,dx \text{ и } \int_a^{+\infty} v(x)\,u'(x)\,dx$$

следва сходимостта на другия. В сила е също формулата

$$(9.19)\quad \int_a^{+\infty} u(x)\,v'(x)\,dx=L-u(a)\,v(a)-\int_a^{+\infty} v(x)\,u'(x)\,dx.$$

За доказателството на това твърдение ще разгледаме произволен сегмент $[a, A]$. В този сегмент е в сила обикновената формула за интегриране по части и следователно

$$\int_a^{A} u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)\Big|_a^A-\int_a^{A} v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Тъй като при $A\to+\infty$ изразът $u(x)\,v(x)\Big|_a^A$ клони към $L-u(a)\,v(a)$, то от горното равенство следва едновременната сходимост на интегралите (9.18) и верността на формулата (9.19) в случая, когато единият от интегралите (9.18) е сходящ.

9.8.5. Несобствени интеграли от втори род

Нека в полусегмента $[a, b)$ е дефинирана функцията f. *Ще наричаме точката b* ***особена,*** *ако функцията не е ограничена в полусегмента, но е ограничена във всеки сегмент $[a, b-\alpha]$, $\alpha>0$, принадлежащ на полусегмента $[a, b)$.* Ще предполагаме също, че във всеки такъв сегмент функцията f е интегруема.

При тези предположения в полусегмента $(0, b-a]$ е зададена функция на аргумента α, дефинирана със съотношението

$$F(\alpha)=\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Ще изследваме сега въпроса за дясна граница на фунцията $F(\alpha)$ в точката $\alpha=0$:

$$(9.20)\quad \lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Определение. *Дясната граница (9.20), ако съществува, се нарича* ***несобствен интеграл от втори род*** *от функцията f в сегмента $[a, b]$ и се означава със символа*

$$(9.21)\quad \int_a^{b} f(x)\,dx.$$

Казва се още, че несобственият интеграл (9.21) е ***сходящ,*** *и се записва*

$$\int_a^{b} f(x)\,dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Символът (9.21) се употребява и в случая, когато границата (9.20) не съществува, но тогава се казва, че несобственият интеграл (9.21) ***е разходящ.***

Забележка. Понятието несобствен интеграл от втори род се пренася леко и в случая, когато функцията f има краен брой особени точки:

Пример:

Да разгледаме в полусегмента $[a, b)$ функцията $(b-x)^\lambda$, $\lambda<0$. Ясно е, че точката b е особена точка за тази функция. Освен това очевидно тази функция е интегруема във всеки сегмент $[a, b-\alpha]$, $\alpha>0$.

$$\int_a^{b-\alpha}(b-x)^\lambda\,dx=\begin{cases}-(b-x)^{\lambda+1}/(\lambda+1)\Big|_a^{b-\alpha}=\dfrac{(b-a)^{\lambda+1}-\alpha^{\lambda+1}}{\lambda+1} & \text{при } \lambda\neq-1,\\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\alpha}=\ln(b-a)-\ln\alpha & \text{при } \lambda=-1.\end{cases}$$

Очевидно границата $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha}(b-x)^\lambda\,dx$ съществува и е равна на $b-a)^{\lambda+1}/(\lambda+1)$ при $\lambda>-1$ и не съществува при $\lambda\leq-1$. Следователно разглежданият несобствен интеграл е сходящ при $\lambda>-1$ и разходящ при $\lambda\leq-1$.

Ще формулираме критерия на Коши за сходимост на несобствен интеграл от втори род. При това ще предполагаме, че функцията f е дефинирана в полусегмента $[a, b)$ и b е особена точка на функцията.

Твърдение 5 (критерий на Коши). *За да бъде несобственият интеграл от втори род (9.21) сходящ, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова число $\delta>0$, че при всеки избор на числата α' и α'', удовлетворяващи условията $0<\alpha''<\alpha'<\delta$, да е изпълнено неравенството*

$$\left|\int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''}f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Верността на тази теорема следва от това, че сходимостта на интеграл по определение е еквивалентна на съществуването на граница на функцията F, въведена в началото на тази точка. Няма да развиваме подробно теорията на несобствените интеграли от втори род, тъй като основните изводи за несобствени интеграли от първи род лесно се пренасят и за интегралите от втори род. Затова ще се ограничим само с някои бележки.

1°. При някои ограничения за подинтегралните функции интегралите от втори род се свеждат към интеграли от първи род. Именно нека функцията f е непрекъсната в полусегмента $[a, b)$ и b е нейна особена точка. При тези условия в интеграла $\int_a^{b-\alpha}f(x)\,dx$ можем да извършим смяна на променливите:

$$x=b-1/t,\ dx=t^{-2}\,dt,\ 1/(b-a)\leq t\leq 1/\alpha.$$

В резултат на тази смяна получаваме

$$\int_a^{b-\alpha}f(x)\,dx=\int_{1/(b-a)}^{1/\alpha}f(b-1/t)\,t^{-2}\,dt. \tag{9.22}$$

Нека интегралът $\int_a^b f(x)\,dx$ да е сходящ, т. е. границата $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha}f(x)\,dx$ да съществува. От равенството (9.22) се вижда, че и границата на израза в дясната страна на (9.22) при $1/\alpha\to\infty$ съществува. С това са доказани сходимостта на несобственият интеграл от първи род

$$\int_{1/(b-a)}^{+\infty}f(b-1/t)t^{-2}\,dt$$

и равенството му с интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Очевидно сходимостта на този интеграл от първи род влече сходимостта на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ и равенството на тези два интеграла. И така от сходимостта на единия от интегралите

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ и } \int_{1/(b-a)}^{+\infty}f(b-1/t)\,t^{-2}\,dt$$

следват сходимостта на другия и равенството помежду им.

2°. За несобствените интеграли от втори род се доказват лесно твърдения, аналогични на твърденията в 9.8.2, които могат да се обединят под общото название „критерии за срав-

нение". Ще отбележим, че във всички формулировки функцията f трябва да се разглежда в полусегмента $[a, b)$, където b е особена точка за тази функция.

Частният критерий за сравнение ще има следния вид:

Ако $|f(x)| \leq c(b-x)^{\lambda}$, където $\lambda > -1$, то несобственият интеграл (9.21) е сходящ. Ако $f(x) \geq c(b-x)^{\lambda}$, където $c > 0$ и $\lambda \leq -1$, то несобственият интеграл (9.21) е разходящ. Доказателството следва от общия критерий за сравнение и от примера, разгледан в предишната точка.

В пълна аналогия с 9.8.4 могат да се формулират за несобствените интеграли от втори род и правилата за интегриране чрез смяна на променливите и интегриране по части.

9.9. Главна стойност на несобствен интеграл

Определение. *Нека функцията f е дефинирана върху правата $-\infty < x < \infty$ и е интегруема във всеки сегмент от тази права. Ще казваме, че функцията f е* ***интегруема по Коши,*** *ако съществува границата* $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$.

Тази граница ще наричаме ***главна стойност на несобственият интеграл от функцията*** $f(x)$ ***в смисъл на Коши*** и ще я означаваме със символа*

$$\text{V. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

За разлика от понятието несобствен интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, дефиниран като границата $\lim\limits_{\substack{A' \to -\infty \\ A'' \to +\infty}} \int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx$, когато A' клони към $-\infty$ независимо от клонането на A'' към $+\infty$, интегралът на Коши

* V. p. са началните букви на „Valeur principal", означаващо „главна стойност".

се дефинира като граница на интеграла $\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$ при $A \to +\infty$ в симетрични интеграционни граници.

Пример:

Ще намерим главната стойност на интеграла от функцията $f(x) = x$. Понеже $f(x) = x$ е нечетна функция, т. е.

$$\int\limits_{-A}^{A} x\,dx = 0, \text{ то V. p. } \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx = 0.$$

По същия начин заключаваме, че и V. p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = 0$.

Твърдение. *Ако функцията $f(x)$ е нечетна, то тя е интегруема по Коши главната стойност на интеграла ѝ е равна на нула.*

Ако функцията $f(x)$ е четна, тя е интегруема по Коши тогава и само тогава, когато е сходящ несобственият интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{9.23}$$

Първата част на това твърдение е очевидна. За доказателството на втората част е достатъчно да използваме равенството

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{A} f(x)\,dx,$$

което е вярно за произволна четна функция, и определението за сходимост на несобственият интеграл (9.23).

Понятието интегруемост по Коши може да се въведе и за несобствените интеграли от втори род в случая, когато особената точка е вътрешна за сегмента, в който се извършва интегрирането.

Определение. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в сегмента $[a, b]$ с изключение евентуално на точката c, $a < c < b$, и интегруема във всеки подсегмент на $[a, b]$, несъдържащ c. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е* ***интегруема по Коши,*** *ако съществува границата*

$$\lim_{\alpha \to +0} \left(\int\limits_{a}^{c-\alpha} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\alpha}^{b} f(x)\,dx \right) = \text{V. p.} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

която ще наричаме ***главна стойност на интеграла в смисъл на Коши.***

Пример:

Функцията $1/(x-c)$ не е интегруема в сегмента $[a, b]$, $a<c<b$, в несобствен смисъл, но е интегруема по Коши. При това

$$\text{V. p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\alpha}^b \frac{dx}{x-c}\right) = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

9.10. Интеграл на Стилтес*

Понятието интеграл на Стилтес е непосредствено обобщение на понятието интеграл на Риман.

Ще дадем основните сведения за интеграла на Стилтес.

9.10.1. Дефиниция на интеграл на Стилтес и условия за неговото съществуване. Нека функциите f и u са дефинирани и ограничени в сегмента $[a, b]$ и $\{x_k\}$ е едно деление на този сегмент:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b.$$

Сума от вида

$$\sigma=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(u(x_i)-u(x_{i-1})). \tag{9.24}$$

където $x_{i-1}\leqq\xi_i\leqq x_i$, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, се нарича ***интегрална сума на Стилтес.***

Числото I се нарича ***граница на интегралните суми*** (9.24) при $\max\{\Delta x_i : i=1, 2, \ldots, n\}\to 0$, ако при всеки избор на $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че при $\max\{\Delta x_i : i=1, 2, \ldots, n\}<\delta$ да е изпълнено неравенството $|\sigma-I|<\varepsilon$.

Определение. *Функцията f се нарича* ***интегруема относно функцията*** *u в сегмента $[a, b]$, ако съществува крайна граница на интегралните суми* (9.24) *при* $\max\{\Delta x_i : i=1, 2, \ldots, n\}\to 0$. *Тази граница се нарича* ***интеграл на Стилтес*** *(или* ***интеграл на Риман — Стилтес) от функцията*** *f* ***по*** *u в сегмента $[a, b]$ и се означава със символа*

$$I=\int_a^b f(x)\,du(x). \tag{9.25}$$

Функцията u се нарича ***интегрираща функция.***

* Томас Йоанес Стилтес — холандски математик (1856 — 1894).

Стилтес идва до идеята за такъв интеграл при разглеждането на положително „разпределение на маси" върху права, което е зададено с растяща функция u, чиито точки на прекъсване съответстват на масите, „концентрирани в една точка".

Интегралът на Риман е частен случай от интеграла на Стилтес, когато за интегрираща функция е взета функцията $x+c$, където c е константа.

Ще дадем няколко условия за съществуване на интеграла на Стилтес (т. е. условия, когато функцията f е интегруема относно фунцията u).

Да предположим, че интегриращата функция u е растяща. Оттук следва, че от $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ имаме $\Delta u(x_i)=u(x_i)-u(x_{i-1})>0$. Това позволява, като заменим Δx_i с $\Delta u(x_i)$, да повторим всички разсъждения, проведени при разглеждане интеграла на Риман.

Аналогично на сумите на Дарбу за интеграла на Риман тук се въвеждат ***малка*** и ***голяма сума на Дарбу—Стилтес***

$$S=\sum_{i=1}^n M_i(u(x_i)-u(x_{i-1})),\quad s=\sum_{i=1}^n m_i(u(x_i)-u(x_{i-1})), \tag{9.26}$$

където M_i и m_i са точната горна и точната долна граница на функцията f в сегмента $[x_{i-1}, x_i]$.

Както при сумите на Дарбу (т. е. в най-простия случай $u=x+c$, $c=\text{const}$) при едно и също деление са изпълнени неравенствата $s\leqq\sigma\leqq S$, като s и S са точните граници за стилтесовите суми σ, взети по всички възможни вътрешни точки на частичните сегменти.

Сумите на Дарбу—Стилтес имат (както и в най-простия случай) следните свойства:

а) ако към точките на деление добивам нови точки, то малката сума на Дарбу—Стилтес евентуално може само да расте, а голямата сума — само да намалява;

б) всяка малка сума на Дарбу—Стилтес не надминава коя да е от големите суми, отговарящи на едно или друго деление на сегмента $[a, b]$.

Аналогично на начина, използван за построението на интеграла на Риман, се въвеждат горен и долен интеграл на Дарбу—Стилтес:

$$I^*=\inf\{S\},\quad I_*=\sup\{s\},$$

където долната и горната граница се вземат по всички възможни деления на сегмента $[a, b]$.

Лесно се проверява верността на съотношението

$$s\leqq I_*\leqq I^*\leqq S.$$

Както при интеграла на Риман, и при интеграла на Стилтес горният интеграл на Дарбу—Стилтес е долна граница на големите суми S, когато диаметърът на делението клони към нула. Аналогично долният интеграл на Дарбу—Стилтес е горна граница на малките суми s (вж. 9.2.2, основна лема на Дарбу).

Ще формулираме сега теоремата, която е обобщение на основната теорема от 9.3.1.

Основна теорема. *Необходимото и достатъчно условие функцията f, ограничена в сегмента $[a, b]$, да бъде интегруема в този сегмент относно растящата функция u е за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, че $S-s<\varepsilon$.*

Доказателството на тази теорема (както впрочем и на дадените по-горе факти и свойства) е дословно повторение на разсъжденията, проведени за интеграла на Риман.

Ще изброим сега някои класове функции, интегруеми по Риман—Стилтес.

1°. *Ако функцията f е непрекъсната, а u е растяща в сегмента $[a, b]$, то интегралът на Стилтес $\int_a^b f(x)du(x)$ съществува.*

Доказателството на това твърдение е напълно аналогично на доказателството на теоремата 9.1.

Забележка. Даденото свойство е вярно и в случая, когато функцията u е с ограничена вариация.* За функцията с ограничена вариация е в сила следният основен критерий:

Необходимо и достатъчно условие функцията u да има ограничена вариация в сегмента $[a, b]$ е тя да може да се представи в този сегмент като разлика на две растящи и ограничени функции:

$$u = g - h.$$

Следователно, когато u е функция с ограничена вариация, сумата на Стилтес може да се запише така:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta u(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta h(x_i) = \sigma_1 - \sigma_2,$$

* Така се нарича функция $u(x)$, дефинирана в сегмента $[a, b]$, за която числовото множество $V(\{x_k\}) = \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|$ е ограничено отгоре, където $\{x_k\}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, е произволно деление на сегмента $[a, b]$. Точната горна граница на множеството $V(\{x_k\})$ се нарича вариация на функцията $u(x)$ в сегмента $[a, b]$ и се означава със символа $V_a^b u = \sup\{V(\{x_k\})\}$.

където

$$\Delta u(x_i) = u(x_i) - u(x_{i-1}),\ \Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}),$$

$$\Delta h(x_i) = h(x_i) - h(x_{i-1}).$$

Сумите σ_1 и σ_2 клонят към крайни граници, когато диаметърът на делението клони към нула, тъй като g и h са растящи функции. Тогава съществува крайна граница и на сумите σ при клонене на диаметъра на деление към нула.

Следователно теорията на интеграла на Стилтес може да се построи и в случая, когато интегриращата функция u има ограничена вариация, напълно аналогично на случая на растяща функция u.

Ще отделим още един клас функции, за които интегралът на Стилтес съществува.

2°. *Интегралът на Стилтес (9.25) съществува при условие, че функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$ по Риман, а функцията u удовлетворява в този сегмент условието на Липшиц, т. е.*

$$|u(x') - u(x'')| \leqq c\,|x' - x''|$$

за всяко x' и x'' от $[a, b]$, където c е константа.

Тъй като всяка функция, удовлетворяваща условието на Липшиц, е функция с ограничена вариация, то за доказателството на този критерий е достатъчно очевидно да се разгледа само случаят на растяща липшицова функция и да се отбележи, че

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta u(x_i) \leqq c \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i, \tag{9.27}$$

където $M_i = \sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $m_i = \inf\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ и c е константата от условието на Липшиц. Стойността на израза $\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i$ в неравенството (9.27) поради интегруемостта на функцията f по Риман може да бъде направена произволно малка за сметка на избора на делението на сегмента $[a, b]$. Следователно величината $S - s$ може да бъде направена по-малка от отнапред зададено число $\varepsilon>0$, ако диаметърът на делението се избере достатъчно малък. Съгласно основната теорема функцията f е интегруема по Стилтес.

В общия случай за функцията u, която удовлетворява условието на Липшиц, също може да се разгледа представянето

$$u(x) = cx - (cx - u(x)) = u_1(x) - u_2(x).$$

В него двете функции u_1 и u_2 са растящи и удовлетворяват условието на Липшиц и разсъжденията са същите, както по-горе.

Ще дадем накрая още един клас интегруеми по Стилтес функции.

3°. Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$ по Риман, а функцията u допуска представяне във вид на интеграл с променлива горна граница:

$$u(x)=A+\int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

където φ е интегруема по Риман функция в сегмента $[a, b]$, то интегралът (9.25) съществува.

Действително, понеже φ е интегруема по Риман, то тя е ограничена: $|\varphi(t)|\leqq K=\text{const}$. Следователно

$$|u(x')-u(x'')|=\left|\int_{x'}^{x''}\varphi(t)\,dt\right|\leqq K\,|x'-x''|.$$

Така верността на този критерий следва от верността на предишния критерий.

Ще отбележим, че ако са изпълнени формулираните в този критерий условия, интегралът на Стилтес $I=\int_a^b f(x)\,du(x)$ се свежда към интеграла на Риман по формулата

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{9.28}$$

По-специално равенството (9.28) е валидно в случая, когато $u(x)$ има ограничена и интегруема по Риман производна u' в сегмента $[a, b]$. В този случай $\varphi=u'$.

9.10.2. Свойства на интеграла на Стилтес. Ще формулираме някои свойства на интеграла на Стилтес, непосредствено следващи от определението му.

а) Линейно свойство относно интегруемата и относно интегриращата функция (при условие, че всеки от интегралите на Стилтес в дясната страна съществува):

$$\int_a^b(\alpha f_1+\beta f_2)\,du=\alpha\int_a^b f_1\,du+\beta\int_a^b f_2\,du,$$

$$\int_a^b f\,d(\alpha u_1+\beta u_2)=\alpha\int_a^b f\,du_1+\beta\int_a^b f\,du_2.$$

Тук α, β са произволни числа.

б) Ако е изпълнено условието $a<c<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\int_a^c f(x)\,du(x)+\int_c^b f(x)\,du(x)$$

при предположение, че и трите интеграла съществуват.

Подчертаваме, че от съществуването на интегралите $\int_a^c f(x)\,du(x)$ и $\int_c^b f(x)\,du(x)$ не следва съществуването на интеграла $\int_a^b f(x)\,du(x)$. Ето такъв пример:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ ако } -1\leqq x\leqq 0,\\ A\neq 0, \text{ ако } 0<x\leqq 1,\end{cases}\qquad u(x)=\begin{cases}0, \text{ ако } -1\leqq x<0,\\ B\neq 0, \text{ ако } 0\leqq x\leqq 1.\end{cases}$$

Интегралите $\int_{-1}^0 f(x)\,du(x)$, $\int_0^1 f(x)\,du(x)$ съществуват и са равни на нула, понеже съответстващите им суми на Стилтес са равни на нула. Наистина в първия интеграл $f(x)=0$, $-1\leqq x\leqq 0$, във втория $\Delta u(x_i)=u(x_i)-u(x_{i-1})=0$ за всяко деление $\{x_k\}$ на сегмента $[0, 1]$. Обаче интегралът $\int_{-1}^1 f(x)\,du(x)$ не съществува. Действително нека $\{x_k\}$ е деление на сегмента $[a, b]$, което няма за елемент точката 0. Тогава в сумата на Стилтес

$$\sigma=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta u(x_i)$$

остава само едно събираемо, а именно събираемото

$$f(\xi_k)\,(u(x_k)-u(x_{k-1}))=B\,f(\xi_k),\quad B\neq 0,$$

за което точката 0 се съдържа в сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. В зависимост от това, дали $\xi_k\leqq 0$, или $\xi_k>0$, получаваме $\sigma=0$ или

$\sigma = A \cdot B \neq 0$, така че σ няма граница, когато диаметърът на деленето клони към нула.

Този факт е свързан с това, че за функциите $f(x)$ и $u(x)$ точката нула е точка на прекъсване.

в) За интеграла на Стилтес (9.25) е в сила формулата за средните стойности.

Нека функцията $f(x)$ е ограничена в сегмента $[a, b]$, така че $m \leq f(x) \leq M$, а функцията $u(x)$ е растяща в този сегмент. Тогава съществува такова число μ, удовлетворяващо неравенствата $m \leq \mu \leq M$, че за интеграла на Стилтес е изпълнена формулата за средните стойности:

$$\int_a^b f(x)\, du(x) = \mu\,(u(b) - u(a)).$$

По-специално, ако поискаме и непрекъснатост на $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, то съществува такава точка $\xi \in [a, b]$, че $\mu = f(\xi)$.

Доказателството на тази формула е съвсем аналогично на доказателството на формулата за средните стойности за интеграла на Риман (вж. 9.4.2).

10. Геометрични приложения на определения интеграл

10.1. Дължина на дъга на крива

10.1.1. Понятие за проста крива. Нека в сегмента $[\alpha, \beta]$ са зададени две непрекъснати функции φ и ψ.

Ще дадем определение за проста равнинна крива.

Определение. *Множеството $\{M\}$ от всички точки M, координатите на които се определят с уравненията*

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t);\ \alpha \leq t \leq \beta, \tag{10.1}$$

се нарича ***проста равнинна крива*** *L, ако на различни стойности на параметъра t от $[\alpha, \beta]$ отговарят различни точки от множеството $\{M\}$.*

Всяка точка от множеството $\{M\}$, определящо проста равнинна крива, се нарича точка на тази крива, като точките, отговарящи на стойностите α и β на параметъра t, се наричат краища на простата крива.

При това се казва, че „уравненията (10.1) определят проста равнинна крива L“ или „проста равнинна крива L, параметризирана с уравненията (10.1)“.

Пример за проста крива е графиката на полуокръжност с радиус r, лежаща в горната полуравнина с център началото на координатната система:

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t \text{ при } 0 \leq t \leq \pi.$$

По-общ пример за проста крива е графиката на непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция f, която може да се параметризира по правилото

$$x = t,\ y = f(t) \text{ при } t \in [a, b].$$

Ще отбележим, че простите криви не изчерпват цялото множество на кривите, които могат да бъдат определени с уравненията (10.1).

В следващата точка ще разгледаме по-общи криви, които се определят с тези уравнения.

Забележка 1. Една и съща проста крива L може да се параметризира по различни начини. Целесъобразно е да се разглеждат само онези параметризации, които се получават от дадена параметризация чрез представяне на параметъра t като непрекъсната, строго монотонна функция на друг параметър s. При такива преобразувания на параметъра се запазва редът, в който следват точките на кривата L.

Забележка 2. Нека L_1 и L_2 са две прости криви и краищата на L_1 съвпадат с краищата на L_2, а всички останали точки на кривите L_1 и L_2 са различни. Кривата L, получена от обединението на кривите L_1 и L_2, се нарича проста затворена крива.

10.1.2. Понятие за параметризуема крива. В математическия анализ често се налага да се разглеждат криви, които не са прости, например криви, имащи точка на самопресичане или цели участъци на съвпадане. Във връзка с това се въвежда понятието параметризуема крива.

Ще смятаме, че множеството $\{t\}$ е или сегмент, или полусегмент, или интервал, или числовата права, или отворена, или затворена полуправа. *Ще казваме, че крайната или безкрайната система от сегменти* $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ ***е деление на множеството*** $\{t\}$, *ако, първо, обединението на тези сегменти дава цялото множество* $\{t\}$ *и, второ, общи точки на два сегмента могат да бъдат само техните краища.*

Примери:

1. Системата от сегменти $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$ е очевидно деление на сегмента $[0, 1]$.

2. Системата от сегменти $\{[n-1, n]\}$, където $n=1, 2, 3, \ldots$, е деление на полуправата $[0, +\infty)$.

3. Системата от сегменти $\{[n-1, n]\}$, където n приема всички цели стойности, очевидно дели числовата права.

Нека множеството $\{t\}$ е едно от изброените по-горе множества, а функциите φ и ψ са непрекъснати в това множество. Ще дадем следното определение.

Определение. *Ще казваме, че уравненията*

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \tag{10.2}$$

задават ***параметризуемата крива*** L, *ако съществува такава система от сегменти* $\{[t_{i-1}, t_i]\}$, *деляща множеството* $\{t\}$, *че за стойности на* t *от всеки сегмент системата уравнения* (10.2) *да определя проста крива.*

Между точките на кривата L може да се въведе известна наредба. Нека точката M_1 съответствува на стойност на параметъра t_1, а точката M_2 — на стойност t_2.

Казваме, че точката M_1 ***предшествува*** *точката* M_2 (което записваме $M_1 \prec M_2$), *ако* $t_1 < t_2$.

Ще отбележим, че точките, отговарящи на различни стойности на параметъра, се считат винаги различни.

По такъв начин параметризуемата крива може да се разглежда като обединение на прости криви, при което тези прости криви се пробягват от точка M, координатите на която се определят с уравненията (10.2), когато параметърът t пробягва множеството $\{t\}$, като расте монотонно.

Забележка 1. Простата крива може да се разглежда като частен случай на параметризуема крива. В този случай системата от сегменти, деляща сегмента $[\alpha, \beta]$, се състои от един сегмент, а именно от сегмента $[\alpha, \beta]$.

Забележка 2. За параметризуема крива, определена с уравненията (10.2), се казва също така, че е параметризирана с помощта на уравненията (10.2). Една и съща крива L може да се параметризира по различни начини. Ще разглеждаме всички възможни параметризации на кривата L, които се получават от произволна дадена параметризация чрез представяне на параметъра t като непрекъсната строго растяща функция на друг параметър s. Само при такива преобразувания на параметъра се запазва наредбата на точките на кривата L.

Забележка 3. Понятието ***пространствена крива*** се въвежда съвсем аналогично. Както при равнинна проста крива, пространствена проста крива е множеството $\{M\}$ от точки на пространството с координати x, y, z, които се определят от уравненията

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\theta(t);\ \alpha \leqq t \leqq \beta, \tag{10.3}$$

при условие, че функциите φ, ψ, θ са непрекъснати в сегмента $[\alpha, \beta]$ и че на различни стойности на параметъра t отговарят различни точки на множеството $\{M\}$.

Като използваме понятието проста пространствена крива и понятието деление на множеството $\{t\}$ на изменение на параметъра, както и в равнинния случай, се дава определение за параметризуема пространствена крива.

Примери:

1. Нека равнинната крива L е зададена с уравненията

$$x=\cos t,\ y=\sin t;\ 0 \leqq t \leqq 3\pi.$$

Очевидно сегментът $[0, 3\pi]$ може да се раздели на сегментите $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, като за стойности на t от всеки от тези сегменти горните уравнения определят проста крива, а именно полуокръжност. В дадения случай кривата L представлява окръж-

ност, в която полуокръжността, лежаща в горната полуравнина, се изминава два пъти.

2. Уравненията

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t;\ -\infty<t<\infty,$$

задават простата пространствена крива, наречена винтова линия.

10.1.3. Дължина на дъга на крива. Понятие за ректифицируема крива. Ще въведем понятието дължина на дъга на параметризуема крива и ще разгледаме някои свойства на криви, които имат дължина (такива криви се наричат ректифицируеми).

Ще наричаме ***права линия*** *кривата, определена с параметричните уравнения* $x=at+b$, $y=ct+d$. Константите a, b, c, d могат да се изберат така, че правата да минава през две дадени точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Частта от правата, заключена между точките M_1 и M_2, се нарича отсечка, съединяваща тези точки, а съвкупност от краен брой свързани една с друга отсечки се нарича начупена линия.

Нека кривата L се представя с уравненията

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t);\ t\in[\alpha, \beta].$$

Нека освен това T е произволно деление на сегмента $[\alpha, \beta]$ с точките $\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$. Означаваме с $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ съответните точки от кривата L, т. е. точките с координати $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $M_1(\varphi(t_1), \psi(t_1))$, $M_2(\varphi(t_2), \psi(t_2))$, $\ldots$, $M_n(\varphi(t_n), \psi(t_n))$. Начупената линия $l(t_i)=M_0M_1M_2\ldots M_n$ ще наричаме начупена линия, вписана в кривата L и отговаряща на делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$. Дължина $|l_i|$ на отсечката $l_i=M_{i-1}M_i$ от тази начупена линия е разстоянието между точките $M_{i-1}(\varphi(t_{i-1}), \psi(t_{i-1}))$ и $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Затова

$$|l_i|=((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)^{1/2},$$

а дължината $|l|$ на цялата начупена линия $l=M_0M_1M_2\ldots M_n$ е

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}|l_i|=\sum_{i=1}^{n}((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)^{1/2}.$$

Определение. *Кривата L се нарича* ***ректифицируема,*** *ако множеството $\{|l|\}$ от дължините на вписаните в кривата L начупени линии $l=l(t_i)$, отговарящи на всички възможни деления T на сегмента $[\alpha, \beta]$, е ограничено. При това точната горна граница на множеството $\{|l|\}$ се нарича* ***дължина на дъгата*** *на кривата L и се означава със символа $|L|$.*

От това определение се вижда, че дължината на кривата L е винаги положително число.

Забележка 1. Съществуват неректифицируеми криви (вж. допълнението към тази глава).

Ще докажем следното помощно твърдение:

Лема. *Нека $|l_0|$ е дължина на начупена линия, вписана в кривата L и отговаряща на делението T_0 на сегмента $[\alpha, \beta]$, а $|l_1|$ е дължина на начупена линия, вписана в кривата L и отговаряща на делението T_1, получено от делението на T_0 посредством добавянето на една или няколко нови точки. Тогава $|l_0|\leq|l_1|$.*

Доказателство. Достатъчно е да разгледаме случая, когато към делението T_0 е добавена само една точка γ. В този случай начупената линия, отговаряща на делението T_0, се различава от начупената линия, отговаряща на делението T_1, само с това, че една отсечка M_kM_{k+1} от начупената линия, отговаряща на делението T_0, се заменя с две отсечки M_kN и NM_{k+1} на начупената линия, отговаряща на делението T_1 (всички останали отсечки в начупените линии, отговарящи на деленията T_0 и T_1, са едни и същи). Тъй като $|M_kM_{k+1}|\leq|M_kN|+|NM_{k+1}|$, то $|l_0|\leq|l_1|$. □

Ще приведем някои свойства на ректифицируемите криви:

1°. *Ако кривата L е ректифицируема, то дължината на дъгата ѝ не зависи от параметризацията на тази крива.*

Наистина нека имаме две параметризации на кривата L, а t и s са съответните параметри, определени съответно на сегментите $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$. Тъй като t е строго монотонна и непрекъсната функция на s, а s е строго монотонна и непрекъсната функция на t, то на всяко деление T на сегмента $[\alpha, \beta]$ съответствува определено деление P на сегмента $[a, b]$ и обратно.

Очевидно е, че вписаните в L начупени линии, отговарящи на съответни деления на сегментите $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$, са тъждествени и затова дължините им са равни. Но тогава и точните им горни граници ще бъдат равни, т. е. дължината на дъгата на кривата L при две различни параметризации ще бъде една и съща.

2°. *Ако ректифицируемата крива L е разделена с помощта на краен брой точки $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ на краен брой криви L_i, като точките $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ съответствуват на стойностите $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ на параметъра t и $\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$, то всяка от кривите L_i е ректифицируема и сумата от дължините $|L_i|$ на всичките криви L_i е равна на дължината $|L|$ на кривата L.*

Очевидно достататъчно е това свойство да се докаже за случая, когато кривата L е разделена на две криви L_1 и L_2 от точката C. Да означим с γ стойността на параметъра t, на която отговаря точката C. Тогава точките от кривата L_1 съответствуват на стойности на параметъра t от сегмента $[\alpha, \gamma]$, а точките от кривата L_2 съответствуват на стойности на параметъра t от сегмента $[\gamma, \beta]$. Нека

T_1 и T_2 са произволни деления на тези сегменти, а T е деление на сегмента $[\alpha, \beta]$, получено от обединението на деленията T_1 и T_2. Ако $|l_1|$, $|l_2|$, $|l|$, са дължини на начупените линии, вписани в кривите L_1, L_2 и L и отговарящи на деленията T_1, T_2 и T на сегментите, то очевидно

$$|l_1|+|l_2|=|l|. \tag{10.4}$$

Тъй като числата $|l_1|$, $|l_2|$ и $|l|$ са положителни, то от равенството (10.4) и ректифицируемостта на кривата L следва, че множествата от дължините на вписаните в кривите L_1 и L_2 начупени линии, отговарящи на всички възможни деления на сегментите $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, са ограничени, т. е. кривите L_1 и L_2 са ректифицируеми. От равенството (10.4) и от определението за дължина на дъга на крива следва, че дължините $|L_1|$, $|L_2|$ и $|L|$ на дъгите на кривите L_1, L_2 и L удовлетворяват неравенството

$$|L_1|+|L_2|\leqq|L|. \tag{10.5}$$

Действително от равенството (10.4) следва, че за произволни деления T_1 и T_2 на сегментите $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$ е изпълнено неравенството $|l_1|+|l_2|\leqq|l|$. От това неравенство и от определението за точна горна граница се получава неравенството (10.5).

Ще покажем, че в неравенството (10.5) знакът за неравенство може да се замени със знак за равенство. Да допуснем противното, т. е. че $|L_1|+|L_2|<|L|$. Тогава числото

$$|L|-(|L_1|+|L_2|)=\varepsilon \tag{10.6}$$

е положително. От определението за дължината $|L|$ на дъга на кривата L следва, че за положителното число ε може да се намери такова деление T_0 на сегмента $[\alpha, \beta]$, че дължината $|l_0|$ на начупената линия l_0, вписана в кривата L и отговаряща на това деление, да удовлетворява неравенството $|L|-|l_0|<\varepsilon$. Да добавим към делението T_0 точката γ и да означим полученото деление с T. Тогава съгласно доказаната лема дължината $|l|$ на начупената линия, отговаряща на делението T, още повече ще удовлетворява неравенството $|L|-|l|<\varepsilon$. Тъй като делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$ е образувано от обединението на някакви деления T_1 и T_2 на сегментите $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, то дължините $|l_1|$ и $|l_2|$ на кривите, отговарящи на тези деления, ще удовлетворяват съотношението (10.4). Затова е изпълнено неравенството $|L|-(|l_1|+|l_2|)<\varepsilon$. Тъй като $|l_1|+|l_2|\leqq|L_1|+|L_2|$, то още повече ще бъде в сила неравенството $|L|-(|L_1|+|L_2|)<\varepsilon$. Но това неравенство противоречи на неравенството (10.6). Полученото противоречие доказва, че предположението $|L_1|+|L_2|<|L|$ не е вярно, и следователно $|L_1|+|L_2|=|L|$. □

Забележка 2. Понятието дължина на дъга на пространствена крива, зададена параметрично с уравненията (10.3), се въвежда точно както дължина на дъга на равнинна крива. Както и в равнинния случай, се разглежда дължина $|l|$ на начупена линия, вписана в кривата L; при това

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2+(\theta(t_i)-\theta(t_{i-1}))^2)^{1/2}.$$

Пространствената крива L, определена от уравненията (10.3), *се нарича* ***ректифицируема,*** *ако множеството $\{|l|\}$ на дължините на начупените линии l, вписани в тази крива, е ограничено. Точната горна граница $|L|$ на това множество се нарича дължина на дъгата на L.*

Пространствените ректифицируеми криви притежават свойствата 1° и 2°. Доказателствата на тези свойства са аналогични на доказателствата за равнинни криви.

10.1.4. Критерии за ректифицируемост на крива. Пресмятане дължината на дъга на крива. Ще дадем достатъчно условие за ректифицируемост на крива и формула за пресмятане дължината на дъга.

Ще употребяваме следната терминология:

1°. Ще казваме, че функцията f има в сегмента $[\alpha, \beta]$ непрекъсната първа производна, ако производната ѝ f' съществува и е непрекъсната във всяка вътрешна точка на този сегмент и ако освен това съществуват крайните граници

$$\lim_{t\to\alpha+0} f'(t) \text{ и } \lim_{t\to\beta-0} f'(t).^*$$

При това определение функцията $f'(t)$ ще бъде непрекъсната в сегмента $[\alpha, \beta]$, ако стойностите на тази функция в краищата на сегмента положим равни съответно на границите

$$\lim_{t\to\alpha+0} f'(t) \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\beta-0} f'(t).$$

2°. Ще казваме, че функцията f има в сегмента $[\alpha, \beta]$ ограничена първа производна, ако f' съществува и удовлетворява за всички вътрешни точки на сегмента $[\alpha, \beta]$ неравенството $|f'(t)|\leqq M$, където M е константа.

* Ако в условията на определение 1° се поиска допълнително съществуването на дясна производна $f'(\alpha+0)$ и лява производна $f'(\beta-0)$, то според 6.4.3 може да се твърди, че

$$\lim_{x\to\alpha+0} f'(x)=f'(\alpha+0), \quad \lim_{x\to\beta-0} f'(x)=f'(\beta-0).$$

Теорема 10.1. *Нека функциите φ и ψ са непрекъснати и имат непрекъснати първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$. Тогава кривата L, определена с параметричните уравнения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ при $t\in[\alpha, \beta]$, е ректифицируема и дължината $|L|$ на дъгата ѝ се пресмята по формулата*

$$|L|=\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi'^2(t)+\psi'^2(t))^{1/2}\,dt. \tag{10.7}$$

Доказателство. Най-напред ще докажем, че кривата L е ректифицируема. Да разгледаме формулата за дължината $|l|$ на начупената линия l, вписана в кривата L и отговаряща на произволно деление на сегмента $[\alpha, \beta]$:

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}((\varphi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)^{1/2}.$$

За всяка от функциите φ и ψ са изпълнени всички условия на теорема 6.4 на Лагранж във всеки от частичните сегменти $[t_{i-1}, t_i]$ (при $i=1, 2, 3, \cdots, n$). Според тази теорема между t_{i-1} и t_i съществуват такива точки ξ_i и η_i, че са изпълнени равенствата

$$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\xi_i)\,\Delta t_i,\quad \psi(t_i)-\psi(t_{i-1})=\psi'(\eta_i)\,\Delta t_i,$$

където $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. Следователно

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i))^{1/2}\,\Delta t_i. \tag{10.8}$$

Според условията на теоремата функциите φ и ψ имат в сегмента $[\alpha, \beta]$ непрекъснати и затова ограничени първи производни, т. е. за всяка вътрешна точка t на сегмента $[\alpha, \beta]$ са изпълнени неравенствата $|\varphi'(t)|\leqq M$, $|\psi'(t)|\leqq M$. Затова от формула (10.8) следва

$$0<|l|\leqq\sum_{i=1}^{n}(M^2+M^2)^{1/2}\Delta t_i=\sqrt{2}\,M\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\sqrt{2}\,(\beta-\alpha)\,M.$$

По такъв начин множеството $\{|l|\}$ от дължините на вписаните в кривата L начупени линии, отговарящи на всички възможни деления T на сегмента $[\alpha, \beta]$, е ограничено и по определение кривата L е ректифицируема.

Ще докажем сега, че дължината $|L|$ на кривата L се пресмята по формулата (10.7).

Ще разгледаме следната интегрална сума:

$$\sigma(t_i, \xi_i)=\sum_{i=1}^{n}(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i))^{1/2}\,\Delta t_i,$$

отговаряща на делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$ и избора на междинните точки ξ_i, определено във формулата (10.8). Нека d е диаметърът на делението T, т. е. $d=\max\{\Delta t_i:\ 1\leq i\leq n\}$. Ще докажем, че за всяко положително число ε може да се намери такова $\delta>0$, че при $d<\delta$ да е изпълнено неравенството

$$||l|-I|<\varepsilon/2, \tag{10.9}$$

където I е границата на интегралните суми $\sigma(t_i, \xi_i)$ при $d\to 0$, т. е. $I=\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi'^2(t)+\psi'^2(t))^{1/2}\,dt$. С други думи, ще покажем, че може да се избере деление T с толкова малък диаметър, че дължината $|l|$ на начупената линия l, вписана в кривата L и отговаряща на това деление T, да се различава от интеграла I с величина, по-малка от някое отнапред зададено число $\varepsilon/2$. Ще отбележим, че*

$$|(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i))^{1/2}-(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i))^{1/2}|\leqq|\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)|\leqq M_i-m_i,$$

където M_i и m_i са точните граници на функцията $\psi'(t)$ в частичния сегмент $[t_{i-1}, t_i]$. Затова

$$||l|-\sigma|=\left|\sum_{i=1}^{n}((\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i))^{1/2}-(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i))^{1/2})\Delta t_i\right| \tag{10.10}$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}|(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i))^{1/2}-(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i))^{1/2}|\,\Delta t_i$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta t_i=S-s,$$

* Първото от тези неравенства следва от оценката

$$|(a^2+b_1^2)^{1/2}-(a^2+b^2)^{1/2}|=\frac{|b_1^2-b^2|}{(a^2+b_1^2)^{1/2}+(a^2+b^2)^{1/2}}\leq\frac{|b_1-b|\cdot|b_1+b|}{|b_1|+|b|}\leq|b_1-b|,$$

вярна за произволни числа a, b, b_1.

където S и s са съответно голямата и малката сума на функцията ψ' за делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$.

Функциите $(\varphi'^2+\psi'^2)^{1/2}$ и ψ' са непрекъснати, а следователно и интегруеми в сегмента $[\alpha, \beta]$, тъй като по условие $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ са непрекъснати в сегмента $[\alpha, \beta]$.

От определението за интегруемост и от основната теорема на 9.3 следва, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова $\delta>0$, че при диаметър на делението $d<\delta$ да са изпълнени неравенствата

$$|\sigma(l_i, \xi_i)-I|<\varepsilon/4, \quad S-s<\varepsilon/4. \tag{10.11}$$

Затова при $d<\delta$ съгласно (10.10) и (10.11) са в сила неравенствата

$$||l|-I|=||l|-\sigma+\sigma-I|\leq||l|-\sigma|+|\sigma-I|<\varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon/2,$$

с което верността на (10.9) е доказана.

Ще докажем сега, че сред всички възможни начупени линии l, чиято дължина $|l|$ удовлетворява неравенството (10.9), има начупени линии, дължината на които се различава от дължината $|L|$ на дъгата на кривата L с по-малко от $\varepsilon/2$.

Действително $|L|$ е точната горна граница на множеството $\{|l|\}$ от дължините на начупените линии l, вписани в кривата L и отговарящи на всички възможни деления на сегмента $[\alpha, \beta]$. Затова съществува такова деление T^*, че дължината $|l^*|$, съответстваща на начупената линия l^* на това деление, удовлетворява неравенството

$$0\leq|L|-|l^*|<\varepsilon/2. \tag{10.12}$$

Да раздробим делението T^*, като прибавим към него нови точки на деление така, че да се получи ново деление T с диаметър d, по-малък от δ. При това, както показахме, дължината $|l|$ на начупената линия l, отговаряща на това деление T, удовлетворява неравенството (10.9). Тъй като всички върхове на начупената линия, отговаряща на делението T^*, са също върхове и на начупената линия, отговаряща на делението T, то съгласно доказаната в 10.1.3 лема $0<|l^*|\leq|l|\leq|L|$. Затова неравенствата (10.12) ни дават право да твърдим, че

$$0\leq|L|-|l|<\varepsilon/2. \tag{10.13}$$

И така доказахме, че в множеството на начупените линии $\{l\}$, дължината на които удовлетворява неравенството (10.9), има начупени линии, дължините на които удовлетворяват и неравенството (10.12). От неравенствата (10.9) и (10.13) получаваме

$$||L|-I|<\varepsilon.$$

Понеже ε е произволно положително число, то $|L|=I$.□

Забележка 1. Ако функциите φ и ψ са непрекъснати и имат ограничени първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$, то кривата L, определена от уравненията $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, е ректифицируема.

Действително в хода на доказателството на теорема 10.1 установихме, че ако функциите φ и ψ са непрекъснати в $[\alpha, \beta]$, то при условие, че първите им производни са ограничени в $[\alpha, \beta]$, дължините $|l|$ на начупените линии, вписани в кривата L и отговарящи на възможните деления T на сегмента $[\alpha, \beta]$, са ограничени.

Забележка 2. Формулата (10.7) за пресмятане дължината на дъга е в сила, ако функциите φ и ψ са непрекъснати, а производните им φ' и ψ' са само интегруеми в сегмента $[\alpha, \beta]$. Действително от интегруемостта на тези производни следва тяхната ограниченост и затова съгласно забележка 1 кривата L е ректифицируема. За извеждането на неравенствата (10.10), (10.11), а следователно и на неравенството (10.9) са достатъчни непрекъснатостта на φ и ψ и интегруемостта на φ' и ψ' в сегмента $[\alpha, \beta]$, тъй като от тях съгласно следствието на теорема 9.4 следва интегруемостта на функцията $(\varphi'^2+\psi'^2)^{1/2}$ в сегмента $[\alpha, \beta]$. Останалите разсъждения са същите, както при доказателството на теорема 10.1.

Забележка 3. Ако кривата L е графика на функцията f, която е непрекъсната и има непрекъсната производна f' в сегмента $[a, b]$, то кривата L е ректифицируема и дължината ѝ $|L|$ може да се намери по формулата

$$|L|=\int_a^b (1+f'^2(x))^{1/2}\,dx. \tag{10.14}$$

Действително графиката на разглежданата функция е крива, определена параметрично с уравненията $x=t$, $y=f(t)$; $a\leq t\leq b$. При това всички условия на теорема 10.1 са изпълнени. Като положим във формула (10.7) $\varphi(t)=t$, $\psi(t)=f(t)$ и сменим интеграционната променлива t с x, получаваме формулата (10.14).

Забележка 4. Ако кривата L се определя с полярно уравнение $z=r(\theta)$, $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$, и функцията r е непрекъсната с непрекъсната производна в сегмента $[\theta_1, \theta_2]$, то кривата L е ректифицируема и

$$|L|=\int_{\theta_1}^{\theta_2} (r^2(\theta)+r'^2(\theta))^{1/2}\,d\theta. \tag{10.15}$$

За доказателството трябва да използваме формулите за преминаване от полярни координати в декартови $x=r(\theta)\cos\theta$, y

$=r(\theta)\sin\theta$. По такъв начин кривата L се определя от параметричните уравнения $\varphi=r(\theta)\cos\theta$, $\psi=r(\theta)\sin\theta$; $\theta\in[\theta_1, \theta_2]$, при което са изпълнени всички условия на теорема 10.1. Прости пресмятания довеждат до формулата (10.15).

Забележка 5. Ако се разглежда пространствена параметризуема крива L, зададена с уравненията $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\theta(t)$, и функциите φ, ψ, θ са непрекъснати и имат непрекъснати производни в $[\alpha, \beta]$, то кривата L е ректифицируема и дължината на дъгата ѝ $|L|$ се пресмята по формулата

$$|L|=\int_\alpha^\beta (\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\theta'^2(t))^{1/2}\,dt. \tag{10.16}$$

Доказателството е аналогично на доказателството на теорема 10.1.

Забележка 6. Ако функциите φ, ψ, θ са непрекъснати и имат ограничени първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$, то кривата L, определена от уравненията (10.3), е ректифицируема. Ако при това производните на тези функции са интегруеми в сегмента $[\alpha, \beta]$, то дължината $|L|$ на дъгата на кривата L може също така да се пресметне по формулата (10.16) (вж. забележки 1 и 2).

10.1.5. Диференциал на дъга. Нека функциите $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ са непрекъснати и имат непрекъснати първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$. В такъв случай променливата дължина на дъгата $L(t)$, отговаряща на стойности на параметъра от сегмента $[\alpha, t]$, съгласно теорема 10.1 се представя във вида

$$L(t)=\int_\alpha^t (\varphi'^2(\tau)+\psi'^2(\tau))^{1/2}\,d\tau. \tag{10.17}$$

Подинтегралната функция в дясната страна на формула (10.17) е непрекъсната, затова функцията L е диференцируема и

$$L'(t)=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}.$$

Като повдигнем това равенство на квадрат и го умножим с $(dt)^2$, ще имаме

$$(L'(t)\,dt)^2=(\varphi'(t)\,dt)^2+(\psi'(t)\,dt)^2. \tag{10.18}$$

Тъй като $L'(t)\,dt=dL$, $\varphi'(t)\,dt=dx$, $\psi'(t)\,dt=dy$, то от формула (10.18) за ***диференциала*** dL ***на дъгата*** на равнинната крива L получаваме

$$dL^2=dx^2+dy^2. \tag{10.19}$$

Ако се разглежда пространствена крива, определена с уравненията (10.3), то при условие за непрекъснатост на функциите φ и θ и на техните първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$ за ***диференциала*** dL ***на дъгата*** на пространствената крива L имаме формулата

$$dL^2=dx^2+dy^2+dz^2. \tag{10.20}$$

Примери:

1. Ще намерим дължината $|L|$ на частта от дъгата на астроидата $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, лежаща в първия квадрант. Тази част, както не е трудно да се види, съответствува на изменение на параметъра t от 0 до $\pi/2$. В разглеждания случай $\varphi'(t)=-3a\cos^2 t\sin t$, $\psi'(t)=3a\sin^2 t\,.\cos t$. Затова по формула (10.7)

$$|L|=\int_0^{\pi/2}(9a^2\cos^4 t\,.\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t)^{1/2}\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=3a/2.$$

2. Ще пресметнем дължината $|L|$ на дъга от параболата $y=ax^2$, $0\leq x\leq 1$. Тъй като $y'=2ax$, то по формула (10.14) получаваме

$$|L|=\int_0^1\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{4a}\ln|2a+\sqrt{1+4a^2}|.$$

3. Ще намерим дължината на дъгата на логаритмичната спирала $r=ae^{b\varphi}$ от точката (φ_0, r_0) до точката (φ, r). По формула (10.15) имаме

$$|L|=\int_{\varphi_0}^{\varphi}(a^2e^{2b\varphi}+a^2b^2e^{2b\varphi})^{1/2}\,d\varphi=(1+b^{-2})^{1/2}(r-r_0).$$

4. Ще намерим дължината на дъга от елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, отчитана от точката $M_0(0, b)$. Разглеждаме параметричното уравнение на елипсата $x=a\sin t$, $y=b\cos t$; $t\in[0,2\pi]$. По формула (10.17) получаваме

$$L(t)=\int_0^t(a^2\cos^2\tau+b^2\sin^2\tau)^{1/2}\,d\tau \tag{10.21}$$

$$=a\int_0^t(1-\varepsilon^2\sin^2\tau)^{1/2}\,d\tau=a\,.\,E(\varepsilon, t).$$

Числото $\varepsilon=(1-b^2/a^2)^{1/2}$ се нарича ексцентрицитет на елипсата

Неопределеният интеграл $\int \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt$, който се анулира при $t=0$, се нарича ***елиптичен интеграл от втори род*** (вж. 8.4). Този интеграл се означава със символа $E(\varepsilon, t)$ и не се изразява с елементарни функции.

10.2 Лице на равнинна фигура

Ще изучим въпроса за определяне и съществуване на лице на равнинна фигура, като под равнинна фигура ще разбираме произволно ограничено множество от точки в равнината.

10.2.1. Понятие за контур на множество и равнинна фигура. Да разгледаме множеството на всички точки в равнината и да фиксираме една от тези точки A.

Ще наричаме ***ε-околност на точка*** *A множеството от онези точки в равнината, които са разположени вътре в кръг с радиус ε и с център точката A.*

Нека сега $\{M\}$ е произволно множество от точки в равнината.

Точката M от множеството $\{M\}$ ще наричаме ***вътрешна точка*** *на това множество, ако съществува такова $\varepsilon>0$, че ε-околността на точката M да се съдържа в множеството $\{M\}$.*

Точка M, непринадлежаща на множеството $\{M\}$, наричаме ***външна точка*** *за множеството $\{M\}$, ако съществува такова $\varepsilon>0$, че ε-околността на точката M да няма обща точка с множеството $\{M\}$.*

Точката M ще наричаме ***контурна точка*** *на множеството $\{M\}$, ако тази точка не е нито вътрешна, нито външна точка за това множество.*

Ще отбележим, че точката M е контурна точка на множеството $\{M\}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ в ε-околността на точката M се съдържат както точки от множеството $\{M\}$, така и точки, непринадлежащи на това множество.

Наистина, ако в някоя ε-околност на точката M не се съдържа точка от множеството $\{M\}$ или точка, която не принадлежи на това множество, то точката M ще бъде или външна, или вътрешна точка за множеството $\{M\}$ и няма да бъде контурна за това множество.

Съвкупността на всички контурни точки на едно множество ще наричаме ***контур*** *на това множество.*

Забележка. За най-простите видове множества $\{M\}$, представляващи част от равнината, заградена с проста затворена крива или с няколко такива криви, въведеното понятие контур на множество съвпада с интуитивната представа за контур. За множества от произволен вид контурът в определения от нас смисъл може да има доста необичаен вид и да не се вмества в интуитивните ни представи за контур. Така за множеството $\{M\}$ от точките на кръга с рационални абсциса и ордината контурът в определения от нас смисъл е целият кръг.

Ще наричаме множеството $\{M\}$ от точки в равнината ***ограничено****, ако съществува кръг, съдържащ всички точки на това множество.*

Произволно ограничено множество F от точки в равнината ще наричаме ***равнинна фигура****.*

Контура на равнинна фигура F ще означаваме със символа ∂F.

10.2.2. Лице на равнинна фигура. За въвеждането на понятието лице на равнинна фигура ще тръгнем от един специален частен вид равнинни фигури — т. нар. многоъгълни фигури.

Многоъгълна фигура *в равнината ще наричаме множество, съставено от краен брой ограничени многоъгълници, лежащи в тази равнина.*

Известно е понятието ***лице на многоъгълна фигура.*** Лицето на многоъгълна фигура P ще означаваме със символа $\mu(P)$.

Ще напомним, че лицето на многоъгълна фигура е неотрицателно число със следните три свойства:

1° (адитивност). Ако P_1 и P_2 са две многоъгълни фигури без общи вътрешни точки и $P_1 \cup P_2$ е обединението на тези фигури, то

$$\mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2). \tag{10.22}$$

2° (инвариантност). Ако многоъгълните фигури P_1 и P_2 са равни помежду си, то

$$\mu(P_1) = \mu(P_2). \tag{10.23}$$

3° (монотонност). Ако многоъгълната фигура P_1 се съдържа в многоъгълната фигура P_2, то $\mu(P_1) \leq \mu(P_2)$.

Свойството монотонност е следствие от свойството адитивност и от това, че лицето е неотрицателно число. Наистина, ако P_1 се съдържа в P_2, то $P_2 = P_1 \cup (P_2 \setminus P_1)$* и тъй като P_1 и $P_2 \setminus P_1$ нямат общи вътрешни точки, то съгласно свойството адитивност $\mu(P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2 \setminus P_1)$. Остава да отбележим, че $\mu(P_2 \setminus P_1) \geq 0$.

Забележка. Ще подчертаем, че лицето на многоъгълната фигура е естествено да считаме равно на едно и също число независимо от това, дали многоъгълната фигура се разглежда

* При което разликата $P_2 \setminus P_1$ на две многоъгълни фигури е също многоъгълна фигура.

със или без контура си. При разглеждане на разликата на две многоъгълни фигури $P_2 \setminus P_1$ може да се условим да считаме, че фигурата P_2 е взета с контура си, а фигурата P_1 — без контура си. При такава договореност разликата ще представлява многоъгълна фигура, взета с контура си.

Ще преминем сега към определението за лице на произволна равнинна фигура F (т. е. на произволно ограничено множество от точки в равнината).

Да разгледаме всички многоъгълни фигури P, съдържащи се в F, и всички многоъгълни фигури Q, съдържащи F.

Фигурите P ще наричаме вписани, а фигурите Q — описани. Числовото множество $\{\mu(P)\}$ от лицата на всички вписани многоъгълни фигури е ограничено отгоре (например от лицето на коя да е описана многоъгълна фигура Q). Числовото множество $\{\mu(Q)\}$ от лицата на всички описани около F многоъгълни фигури Q е ограничено отдолу (например от нулата). Затова съществуват точната горна граница

$$\mu_* = \mu_*(F) = \sup\{\mu(P):\ P \subset F\} \tag{10.24}$$

на лицата на всички многоъгълни фигури, вписани в F, и точната долна граница

$$\mu^* = \mu^*(F) = \inf\{\mu(Q) : Q \supset F\} \tag{10.25}$$

на лицата на всички многоъгълни фигури, описани около F.

Ако в F не може да се впише нито един многоъгълник, то по определение се полага $\mu_* = 0$.

Величината μ_* се нарича ***долна мярка на лицето*** на фигурата F, а μ^* — ***горна мярка на лицето*** на тази фигура. От това, че лицето на всяка вписана фигура е не по-голямо от лицето на всяка описана фигура, следва

$$\mu_*(F) \leq \mu^*(F).$$

Определение 1. *Равнинната фигура F се нарича* ***измерима*** (или ***имаща лице***), *ако горната мярка на лицето μ^* на тази фигура съвпада с долната мярка на лицето ѝ μ_*. При това числото $\mu = \mu(F) = \mu^* = \mu_*$ се нарича* ***лице*** *на фигурата F.*

Ясно е, че всяка многоъгълна фигура F е измерима в смисъла на даденото определение и лицето ѝ $\mu(F) = \mu^*(F) = \mu_*(F)$.

По такъв начин разширихме понятието лице на многоъгълници върху един по-широк клас от фигури.

Запазването на свойствата адитивност, инвариантност и монотонност ще бъде доказано по-нататък.

Ще започнем с доказателството на следния критерий за измеримост на равнинна фигура:

Теорема 10.2. *За да бъде равнинната фигура F измерима, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да съществуват описана около F многоъгълна фигура Q и вписана в F многоъгълна фигура P, за които*

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon. \tag{10.26}$$

Доказателство. *Необходимост.* Нека фигурата F е измерима, т. е. $\mu^* = \mu_*$. Според определението за точни граници (10.22) и (10.23) за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват вписана многоъгълна фигура P и описана многоъгълна фигура Q, такива, че

$$\mu_* - \varepsilon/2 < \mu(P) \leq \mu_*, \quad \mu^* \leq \mu(Q) < \mu^* + \varepsilon/2.$$

От тези неравенства и от $\mu^* = \mu_*$ заключаваме, че $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. □

Достатъчност. Нека за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват многоъгълни фигури Q и P със свойствата, дадени във формулировката на теоремата. Тогава от неравенството (10.26) и от съотношенията $\mu(P) \leq \mu_* \leq \mu^* \leq \mu(Q)$ получаваме, че

$$0 \leq \mu^* - \mu_* \leq \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

Тъй като ε е произволно положително число, от условието $0 \leq \mu^* - \mu_* < \varepsilon$ следва, че $\mu^* = \mu_*$. □

Теорема 10.2 допуска просто, но важно обобщение: във формулировката ѝ вместо описана и вписана многоъгълна фигура Q и P могат да се вземат произволни описана и вписана измерима равнинна фигура Q и P. В сила е следната теорема:

Теорема 10.2¹. *За измеримостта на равнинната фигура F е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да съществуват измерима равнинна фигура Q, съдържаща F, и измерима равнинна фигура P, съдържаща се в F, за които*

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

Не е нужно да се доказва необходимостта, тъй като многоъгълните фигури Q и P са измерими.

Ще докажем достатъчността. Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и построяваме измерими равнинни фигури Q и P, първата от които съдържа F, а втората се съдържа в F, такива, че

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon/2. \tag{10.26'}$$

Тъй като Q и P са измерими равнинни фигури, то съществуват многоъгълна фигура $\hat{Q}$, съдържаща Q, и многоъгълна фигура $\hat{P}$, съдържаща се в P, за които

$$\mu(\hat{Q}) - \mu(Q) < \varepsilon/4, \quad \mu(P) - \mu(\hat{P}) < \varepsilon/4.$$

От двете неравенства и от (10.26′) следва, че $\mu(\hat{Q}) - \mu(\hat{P}) < \varepsilon$. Но

понеже многоъгълната фигура $\hat{Q}$ съдържа F, а многоъгълната фигура $\hat{P}$ се съдържа в F, то фигурата F е измерима съгласно теорема 10.2. □

Ще установим още една еквивалентна формулировка на теорема 10.2. Нека F е произволна равнинна фигура, Q е многоъгълна фигура, взета с контура си и съдържаща фигурата F, а P е многоъгълна фигура, взета без контура си и съдържаща се във фигурата F. Тогава разликата $Q \setminus P$ е многоъгълна фигура, взета с контура си и съдържаща всички точки от контура ∂F на фигурата F.*

От адитивността на лицето на многоъгълна фигура следва равенството $\mu(Q \setminus P) = \mu(Q) - \mu(P)$, а от него — че неравенството (10.26) във формулировката на теорема 10.2 може да се запише във вида

$$\mu(Q \setminus P) < \varepsilon. \tag{10.26''}$$

Определение 2. *Множество от точки в равнината ще наричаме* ***множество с мярка нула,*** *ако се съдържа в многоъгълна фигура с произволно малко лице.*

Неравенството (10.26″) и това, че многоъгълната фигура $Q \setminus P$ съдържа всички точки на контура ∂F на равнинната фигура F, дават право да се изкаже теорема 10.2 по следния начин:

Теорема 10.2″. *Равнинната фигура F е измерима тогава и само тогава, когато контурът ѝ ∂F има мярка нула.*

Необходимостта е очевидна.

Ще се спрем на доказателството на достатъчността. Вписваме равнинната фигура F в квадрат E със страни, успоредни на координатните оси, и разделяме квадрата на елементарни квадрати със страна h с помощта на прави, успоредни на координатните оси. Това разделяне на квадрата ще наричаме мрежа със стъпка h.

Ще докажем най-напред, че ако контурът ∂F на фигурата F се съдържа в многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, то при достатъчно малка стъпка h на мрежата контурът ∂F на фигурата F се съдържа в обединението на елементарни квадрати от мрежата с общо лице, ненадминаващо 32ε.

Наистина достатъчно е да отбележим, че всяка многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, е сума от краен брой триъгълници без общи вътрешни точки; всеки триъгълник е равен на обединението на два правоъгълни триъгълника (без общи вътрешни точки); всеки правоъгълен триъгълник се съдържа в два пъти по-голям по лице правоъгълник; всеки правоъгълник се съдържа в обединението на краен брой квадрати, сумата от лицата на които не е по-голяма от два пъти лицето на правоъгълника; всеки квадрат се съдържа в два пъти по-голям по лице квадрат със страни, успоредни на координатните оси.

* Следва от това, че всяка вътрешна точка на многоъгълната фигура P е вътрешна точка на F, а всяка външна точка на многоъгълната фигура Q е външна точка на F. Достатъчно е да вземем пред вид, че разликата $Q \setminus P$ съдържа всички точки от равнината с изключение на външните точки на Q и вътрешните точки на P.

И така всяка многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, се съдържа в обединението на краен брой квадрати със страни, успоредни на координатните оси, и с общо лице, по-малко от 8ε.

От тези краен брой квадрати избираме квадрата с най-малка страна (ако има няколко такива квадрата, избираме един от тях) и вземаме за стъпка h на мрежата половината от дължината на страната на този квадрат.

При този избор на h всеки от описаните квадрати (със страни, успоредни на координатните оси) ще се съдържа в обединението на елементарни квадрати на мрежата, общото лице на които не надминава учетвореното лице на дадения квадрат.

Затова всяка многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, се съдържа в обединението на елементарни квадрати от мрежата, общото лице на които е по-малко от 32ε.

Следователно, ако контурът ∂F на равнинната фигура F има лице, равно на нула, то за всяко $\varepsilon > 0$ при посочения избор на стъпката h на мрежата целият контур ∂F ще се съдържа в обединението от елементарни квадрати на мрежата, общото лице на които е по-малко от 32ε.

За да завършим доказателството, е достатъчно да отбележим, че обединението на всички елементарни квадрати, които съдържат само вътрешни точки на фигурата F, е многоъгълна фигура, съдържаща се в F, а обединението на тази фигура P с всички елементарни квадрати на мрежата, съдържащи точки от контура ∂F на фигурата F, е многоъгълна фигура Q, съдържаща фигурата F, и $\mu(Q) - \mu(P) < 32\varepsilon$. □

Като използваме тази теорема, ще установим измеримостта на широк клас равнинни фигури.

Лема. *Всяка ректифицируема крива има лице, равно на нула.*

Доказателство. Нека L е ректифицируема крива, а $|L|$ е дължината ѝ. Разделяме тази крива с помощта на $n+1$ точки на части с дължина $|L|/n$. Вземаме всяка от тези $n+1$ точки за център на квадрат със страна $2|L|/n$. Сумата от тези квадрати е многоъгълна фигура, описана около кривата L, а лицето на тази многоъгълна фигура не надминава сумата от лицата на съставящите я квадрати, т. е. числото $4|L|^2(n+1)n^{-2}$. Тъй като $|L|$ е фиксирано, а n може да се избере произволно голямо, то числото

$4|L|^2(n+1)n^{-2}$ може да се направи по-малко от всяко отнапред избрано число $\varepsilon>0$. Следователно кривата L може да се включи в многоъгълна фигура с произволно малко лице. □

От тази лема и от теорема 10.2″ следва теоремата:

Теорема 10.3. *Всяка равнинна фигура, чийто контур се състои от една или няколко ректифицируеми криви, е измерима.*

Ще покажем сега, че въведеното понятие лице на равнинна фигура притежава свойствата адитивност (вж. 10.22)), инвариантност (вж. (10.23)) и монотонност. Ще се убедим най-напред в адитивността на лицето. Нека F_1 и F_2 са измерими фигури без общи вътрешни точки и F е обединението им. Тогава F е измерима и

$$\mu(F)=\mu(F_1)+\mu(F_2). \tag{10.27}$$

Измеримостта на фигурата F следва от теорема 10.2″ и от това, че контурът ѝ ∂F е съставен от множества с лица, равни на нула, тъй като ∂F е част от обединението на контурите ∂F_1 и ∂F_2 на фигурите F_1 и F_2. (Очевидно всяка част на множество с лице, равно на нула, също има лице, равно на нула.)

Ще докажем верността на равенството (10.27). Разглеждаме многоъгълните фигури P_1 и P_2, вписани съответно в F_1 и F_2, и многоъгълните фигури Q_1 и Q_2, описани съответно около F_1 и F_2. Фигурите P_1 и P_2 съставят многоъгълна фигура P и нямат общи вътрешни точки. Затова съгласно (10.24)

$$\mu(P)=\mu(P_1\cup P_2)=\mu(P_1)+\mu(P_2).$$

Многоъгълните фигури Q_1 и Q_2, евентуално пресичащи се, като сума съставят многоъгълната фигура Q, лицето на която не надминава $\mu(Q_1)+\mu(Q_2)$. Затова

$$\mu(P)=\mu(P_1)+\mu(P_2)\leqq\mu(F)\leqq\mu(Q)\leqq\mu(Q_1)+\mu(Q_2).$$

От друга страна, според определението за измеримост за фигурите F_1 и F_2 са верни неравенствата $\mu(P_1)\leqq\mu(F_1)\leqq\mu(Q_1)$ и $\mu(P_2)\leqq\mu(F_2)\leqq\mu(Q_2)$, от които следва, че

$$\mu(P_1)+\mu(P_2)\leqq\mu(F_1)+\mu(F_2)\leqq\mu(Q_1)+\mu(Q_2).$$

По такъв начин двете величини $\mu(F)$ и $\mu(F_1)+\mu(F_2)$ са заключени между числата $(\mu(Q_1)+\mu(Q_2))$ и $(\mu(P_1)+\mu(P_2))$, разликата между които

$$(\mu(Q_1)+\mu(Q_2))-(\mu(P_1)+\mu(P_2))=(\mu(Q_1)-\mu(P_1))+(\mu(Q_2)-\mu(P_2))$$

може да бъде направена произволно малка.

Следователно тези две величини са равни, т. е. в сила е равенството (10.27). □

Свойството инвариантност на лице на произволна равнинна фигура непосредствено следва от инвариантността на лицето на многоъгълна фигура (вж. 10.23)) и от начина на определяне на лице на измерима фигура чрез лицата на многоъгълни фигури.

Накрая свойството монотонност на лицето следва непосредствено от определението за измеримост на равнинна фигура.

Забележка. Сечението на две измерими фигури е измерима фигура.

Действително нека $F=F_1\cap F_2$ и F_1 и F_2 са измерими.

Всяка контурна точка на F е контурна или за F_1, или за F_2. Затова твърдението следва от теорема (10.2″) и от това, че обединението на две множества с лица, равни на нула, има също лице, равно на нула.

Въведеното в тази точка понятие лице се нарича ***лице по Жордан**** или ***мярка на Жордан.***

По-рано се убедихме, че лицето по Жордан притежава свойството адитивност, т. е. ако $F=F_1\cup F_2$, а F_1 и F_2 са измерими фигури без общи вътрешни точки, то F е измерима и $\mu(F)=\mu(F_1)+\mu(F_2)$. Това свойство е очевидно в сила и за обединението на произволен краен брой $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ измерими фигури без общи вътрешни точки. Ако

$$F=\bigcup\{F_i : i=1, 2, \ldots, n\},$$

то F е измерима и $\mu(F)=\sum_{i=1}^{n}\mu(F_i)$ (свойство крайна адитивност).

Обаче лицето по Жордан (мярката на Жордан) не притежава свойството изброима адитивност, т. е. обединението на изброима съвкупност от измерими фигури $F_1, F_2, F_3, \ldots$, без общи вътрешни точки може да не бъде измерима фигура. Ще илюстрираме това с пример. Разглеждаме в равнината квадрата $D: 0<x<1$, $0<y<1$. Вземаме в квадрата D точките с рационални координати. Не е трудно да се покаже, че тези точки са изброимо множество. Разполагаме ги във вид на редица

$$z_1=(x_1, y_1),\ z_2=(x_2, y_2), \ldots, z_n=(x_n, y_n), \ldots$$

Фиксираме числото $\varepsilon>0$ и построяваме кръг O_1 с център в точката z_1 и радиус $r_1<\varepsilon/2$, изцяло съдържащ се в квадрата D.

Първата от точките $z_2, z_3, z_4, \ldots$, която не попада в кръга O_1, означаваме със z_{n_2}, и построяваме кръг O_2 с център точката z_{n_2} и радиус $r_2<\varepsilon\cdot 2^{-2}$, който да не пресича кръга O_1 и изцяло да се съдържа в квадрата D.

* Камил Жордан — френски математик (1838—1922).

Продължавайки тези разсъждения, построяваме редица от кръгове $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n, \ldots$ с радиуси $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n \ldots$, $r_n < \varepsilon \cdot 2^{-n}$, които не се пресичат помежду си и изцяло се съдържат в квадрата D.

Всеки от тези кръгове е измерим и има лице, равно на $\pi \cdot r_n^2$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Ще се убедим, че обединението F на тези изброимо много кръгове $F = O_1 \cup O_2 \cup \ldots$ е фигура, неизмерима по Жордан. Нека Q е произволна многоъгълна фигура, съдържаща фигурата F. Очевидно във всяка ε-околност на всяка точка на квадрата D има точки от редицата $\{z_n\}$, т. е. има точки от фигурата F. Но това означава, че всяка точка на квадрата D е или вътрешна, или контурна точка на фигурата F, т. е. многоъгълната фигура Q съдържа целия квадрат D и следователно

$$\mu(Q) \geq \mu(D) = 1.$$

Нека сега P е произволна многоъгълна фигура, съдържаща се в F. Тогава лицето $\mu(P)$ няма да надминава сумата от лицата на всички кръгове $O_1, O_2, O_3, \ldots$, т. е.

$$\mu(P) \leq \pi(r_1^2 + r_2^2 + \ldots) < \pi\varepsilon^2(2^{-2} + 2^{-4} + \ldots) = \pi\varepsilon^2/3.$$

И така $\mu(Q) \geq 1$ и $\mu(P) \leq \pi\varepsilon^2/3$ за всяка многоъгълна фигура Q, съдържаща F, и всяка многоъгълна фигура P, съдържаща се в F. Но това означава, че при малко ε разликата $\mu(Q) - \mu(P)$ е по-голяма от $1 - \pi\varepsilon^2/3$ и не може да бъде направена произволно малка, т. е. фигурата F не е измерима по Жордан.

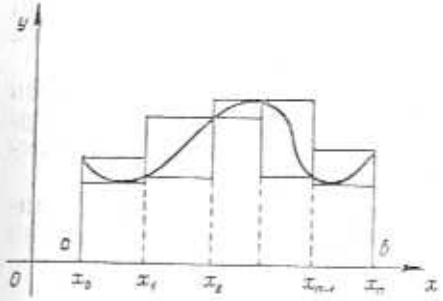
Ще отбележим, че може да се въведе друго, обобщено понятие за лице — т. нар. мярка на Лебег*, която вече притежава и свойството изброима адитивност.

10.2.3. Лице на криволинеен трапец и криволинеен сектор. Криволинеен трапец се нарича фигурата, заградена от графиката на дефинирана върху сегмента $[a, b]$ непрекъсната и неотрицателна функция f, перпендикулярните към оста Ox прави $x = a$ и $x = b$ и отсечката от оста Ox, заключена между точките a и b (фиг. 10.1).

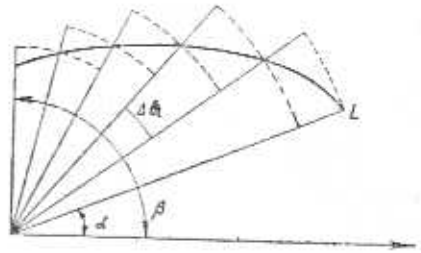
В сила е следното твърдение:

Криволинейният трапец *представлява измерима фигура F, лицето $\mu(F)$ на която се пресмята по формулата*

* Анри Лебег — френски математик (1875—1941).



Фиг. 10.1



Фиг. 10.2

$$\mu(F) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{10.28}$$

Доказателство. Непрекъснатата в сегмента $[a, b]$ функция f е интегруема, следователно за всяко положително число ε може да се намери деление на сегмента $[a, b]$, за което разликата между голямата сума S и малката сума s да бъде по-малка от ε. Но S и s са равни съответно на $\mu(Q)$ и $\mu(P)$, където $\mu(Q)$ и $\mu(P)$ са лицата на многоъгълни фигури, първата от които съдържа криволинейния трапец, а втората се съдържа в криволинейния трапец (на фиг. 10.1 са изобразени също и тези многоъгълни фигури). По такъв начин $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$ и съгласно теорема 10.2 криволинейният трапец е измерим. Тъй като за всяка интегруема функция границата както на големите суми S, така и на малките суми s е равна на $\int_a^b f(x)\,dx$, когато диаметърът на делението клони към нула, и $s \leq \mu(F) \leq S$, то лицето $\mu(F)$ на криволинейния трапец се намира по формулата (10.28). □

Забележка. Ако функцията f е непрекъсната и неположителна в сегмента $[a, b]$, то стойността на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, взет с отрицателен знак, е равна на лицето на криволинейния трапец, ограничен от графиката на функцията f, ординатите в точките a и b и отсечката от оста Ox между точките a и b. Затова, ако f си сменя знака, то $\int_a^b f(x)\,dx$ е равен на сумата от

лицата на криволинейните трапеци, взети със съответния знак, разположени над и под оста Ox, при това лицата на първите са взети със знак плюс, а на вторите — със знак минус.

Ще преминем сега към разглеждане на лицето на криволинеен сектор. Нека кривата L е зададена с уравнения в полярни координати $r=r(\theta)$; $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$ (фиг. 10.2), при което функцията r е непрекъсната и неотрицателна в сегмента $[\alpha, \beta]$.

Ще наричаме криволинеен сектор равнинната фигура, ограничена от кривата L и двата лъча, сключващи с полярната ос ъгли α и β.

Ще докажем следното твърдение:

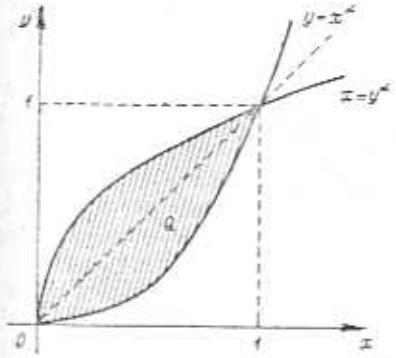
***Криволинейният сектор** е измерима фигура F, лицето на която се пресмята по формулата*

$$\mu(F)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\,d\theta. \tag{10.29}$$

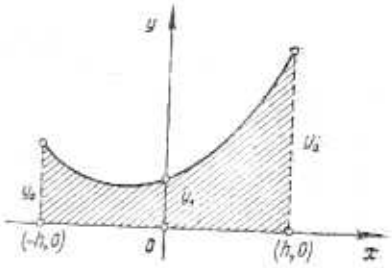
Доказателство. Разглеждаме деление на сегмента $[\alpha, \beta]$ с точките $\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\beta$ и за всеки частичен сегмент $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ построяваме кръгови сектори с радиуси минималната r_i и максималната R_i стойност на функцията r в сегмента $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. В резултат получаваме две измерими фигури, първата фигура A, съдържаща се в криволинейния сектор, а втората B, съдържаща този сектор (вж. фиг. 10.2). Лицата $\mu(A)$ и $\mu(B)$ на тези измерими фигури A и B са съответно равни на $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\theta_{i-1})r_i^2$ и на $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\theta_{i-1})R_i^2$. Обръщаме внимание на това, че първата от тези суми е малката сума s, а втората — голямата сума S на функцията $\frac{1}{2}r^2$ в сегмента $[\alpha, \beta]$ за посоченото деление на този сегмент. Тъй като непрекъснатата в сегмента $[\alpha, \beta]$ функция $\frac{1}{2}r^2$ е интегруема в този сегмент, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува деление, за което разликата $S-s=\mu(B)-\mu(A)$ е по малка от ε.

Тъй като A и B са две измерими фигури, първата от които се съдържа в криволинейния сектор F, а втората съдържа F, то съгласно теорема 10.2′ криволинейният сектор е измерим.

Валидността на формулата (10.29) за лицето следва от това, че мярката му $\mu(F)$ е заключена между $s=\mu(A)$ и $S=\mu(B)$, а двете суми s и S клонят към интеграла в дясната страна на (10.29) при клонене на диаметъра на делението към нула. □



Фиг. 10.3



Фиг. 10.4

Примери:

1. Да се намери лицето $\mu(F)$ на фигурата F, ограничена от графиките на функциите $y=x^\alpha$ и $x=y^\alpha$, $\alpha\geqq1$ (фиг. 10.3). Понеже фигурата е симетрична относно бисектрисата на първия квадрант, лицето ѝ може да бъде получено, като от единица (лицето на квадрата) се извади удвоеното лице на криволинейния трапец, зададен с графиката на функцията $y=x^\alpha$, $\alpha\geqq1$, в сегмента $[0, 1]$. Така по формулата (10.28) получихме, че

$$\mu(F)=1-2\int_0^1 x^\alpha\,dx=1-2x^{\alpha+1}/(\alpha+1)\Big|_0^1=(\alpha-1)/(\alpha+1).$$

2. През три точки с координати $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) минава само една парабола $y=Ax^2+Bx+D$ (или права, ако тези точки лежат на една права).

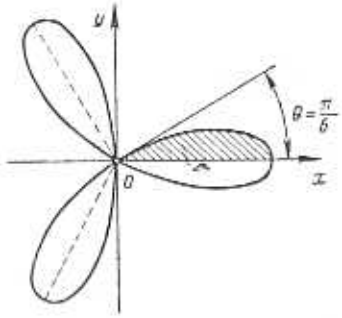
Наистина условието трите точки $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) да лежат на параболата ни води до система уравнения относно A, B, D:

$$\begin{cases} Ah^2-Bh+D=y_0, \\ D=y_1, \\ Ah^2+Bh+D=y_2. \end{cases}$$

Тази система има единствено решение

$$A=(y_0-2y_1+y_2)/2h^2,\quad B=(y_2-y_0)/2h,\quad D=y_1.$$

Ще намерим лицето $\mu(F)$ на криволинейния трапец F, определен от разгледаната парабола, правите, успоредни на оста Oy и минаващи през точките $(-h, 0)$ и $(h, 0)$, и отсечката от оста Ox, заключена между тези точки (фиг. 10.4).



Фиг. 10.5

По формулата (10.28) имаме

$$\mu(F)=\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+D)\,dx=\frac{1}{3}Ax^3+\frac{1}{2}Bx^2+Dx\Big|_{-h}^{h}$$

$$=2Ah^3/3+2Dh.$$

Като заместим намерените стойности за A и D чрез ординатите y_0, y_1 и y_2 и величината h, получаваме

$$\mu(F)=h(y_0+4y_1+y_2)/3.$$

3. Да се намери лицето $\mu(F)$ на трилистника $r=a\cos 3\theta$ (фиг. 10.5). От чертежа се вижда, че е достатъчно да се пресметне онази част от лицето на трилистника, която отговаря на изменението на θ от 0 до $\pi/6$, и полученият резултат да се умножи на шест. Затова по формула (10.29) получаваме

$$\mu(F)=6\,.\,\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6}\cos^2 3\theta\,d\theta=3a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\theta}{2}\,d\theta$$

$$=3a^2\left(\pi/12+\frac{1}{12}\sin 6\theta\Big|_0^{\pi/6}\right)=\pi\,.\,a^2/4.$$

10.3. Обем на тяло в пространството

Основните определения и твърдения тук са аналогични на съответните определения и твърдения от 10.2. Това ни позволява да се ограничим с основни формулировки.

10.3.1. Обем на тяло. Да разгледаме множеството от всички точки на пространството и да фиксираме една от тези точки A.

ε-околност на точката A ще наричаме множеството от всички точки на пространството, разположени вътре в кълбо с радиус ε и център в точката A.

Точката A ще наричаме ***вътрешна (външна) точка*** на множеството $\{M\}$ от точки на пространството, ако съществува такова $\varepsilon>0$, че ε-околността на точката A изцяло принадлежи (не принадлежи) на множеството $\{M\}$.

Точките на множеството $\{M\}$, които не са нито вътрешни, нито външни, ще наричаме ***контурни точки*** на множеството $\{M\}$, а съвкупността от всички контурни точки ще наричаме ***контур*** на множеството $\{M\}$.

Множеството $\{M\}$ от точки на пространството ще наричаме ***ограничено множество*** или ***тяло***, ако съществува кълбо, съдържащо всички точки на това множество.

Сред всички тела ще отделим т. нар. ***многостенни тела***, представляващи обединение на краен брой ограничени многостени. Понятието обем на многостенно тяло е известно. Ще подчертаем, че този обем (както и лицето на многоъгълна фигура) притежава свойствата адитивност, инвариантност и монотонност.

Да разгледаме произволно тяло F, а също и всички многостенни тела P, съдържащи се в F, и всички многостенни тела Q, съдържащи F.

Ще наречем горна мярка на обема на тялото F точната долна граница на числовото множество $\{\mu(Q)\}$ от обемите на всички многостенни тела Q, съдържащи F, т. е. числото

$$\mu^*=\mu^*(F)=\inf\{\mu(Q):Q\supset F\}.$$

Аналогично ще наречем долна мярка на обема на тялото F точната горна граница на числовото множество $\{\mu(P)\}$ от обемите на всички многостенни тела P, съдържащи се в F, т. е. числото

$$\mu_*=\mu_*(F)=\sup\{\mu(P):P\subset F\}.$$

От тези определения е ясно, че $\mu_*\leq\mu^*$.

Определение 1. *Тялото F се нарича* ***измеримо (имащо обем)***, *ако $\mu^*=\mu_*$. При това числото $\mu=\mu(F)=\mu^*=\mu_*$ се нарича* ***обем*** *на тялото F.*

Напълно аналогично на теорема 10.2 се доказва следното твърдение:

Теорема 10.4. *Необходимото и достатъчно условие тялото F да бъде измеримо е за всяко $\varepsilon>0$ да съществуват многостенно тяло P, съдържащо се в F, и многостенно тяло Q, съдържащо F за които $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$.*

Забележка. Във формулировката на теорема 10.4 вместо многостенни тела P и Q могат да се вземат произволни измеримо тела P и Q, удовлетворяващи всички останали условия на теоремата.

Определение 2. *Множество от точки на пространството ще наричаме* ***множество с нулев обем,*** *ако това множество се съдържа в многостенно тяло с произволно малък обем.*

Теорема 10.4 може да се преформулира така:

Теорема 10.4. *Тялото F е измеримо тогава и само тогава, когато неговият контур има нулев обем.*

Въведеното от нас понятие за обем на тяло има свойствата адитивност, инвариантност и монотонност.

10.3.2. Някои класове измерими тела. ***Цилиндрично тяло*** *ще наричаме тялото, ограничено с цилиндрична повърхност, чиито образуващи са успоредни на дадена ос, и с две равнини, перпендикулярни на тази ос.*

Сеченията на тези равнини с цилиндричната повърхност са равнинни фигури, наречени **основи** на цилиндричното тяло, а разстоянието h между основите се нарича **височина** на цилиндричното тяло (фиг. 10.6).

В сила е следното твърдение:

Ако основата на цилиндричното тяло F е измерима равнинна фигура G, то тялото F е измеримо и обемът му $\mu(F)$ е равен на $\mu(G).h$, където $\mu(G)$ е лицето на основата G, а h е височината на това цилиндрично тяло.

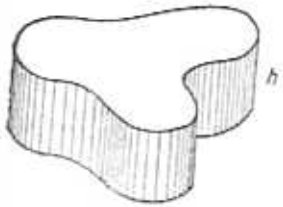
Доказателство. Тъй като равнинната фигура G е измерима, то за всяко $\varepsilon>0$ могат да се намерят описана и вписана в тази фигура многоъгълни фигури Q и P, за които $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon/h$.

Обемите на многостенните тела F_Q и F_P, за основи на които служат многоъгълните фигури Q и P, а височината им е равна на h, са равни съответно на $\mu(Q).h$ и $\mu(P).h$. Затова

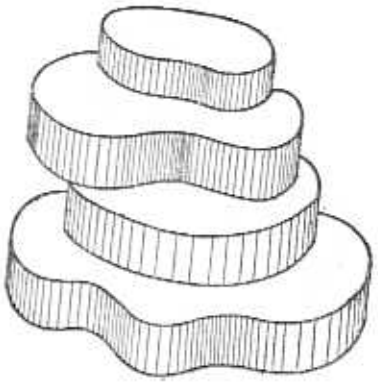
$$\mu(Q).h-\mu(P).h=(\mu(Q)-\mu(P)).h<\frac{\varepsilon}{h}.h=\varepsilon.$$

Тъй като многостенното тяло F_Q съдържа F, а многостенното тяло F_P се съдържа в F, то съгласно теорема 10.4 тялото F е измеримо. Понеже $\mu(Q)h\leq\mu(G)h\leq\mu(Q)h$, обемът на цилиндричното тяло F е равен на $\mu(G).h$. □

От свойството адитивност на обема и доказаното твърдение следва, че стъпаловидните тела са измерими (стъпаловидно тяло се нарича обединението на краен брой цилиндрични тела, разположени така, че горната основа на всяко предидущо тяло лежи в една равнина с долната основа на следващото (вж. фиг. 10.7).



Фиг. 10.6



Фиг. 10.7

От предишните разсъждения непосредствено следва твърдението:

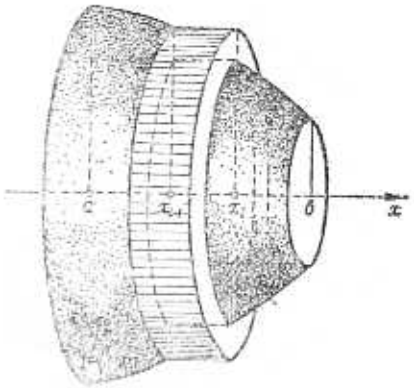
Ако за всяко положително число ε съществуват стъпаловидно тяло F_1, съдържащо F, и стъпаловидно тяло F_2, съдържащо се в F, за които $\mu(F_1)-\mu(F_2)<\varepsilon$, то тялото F е измеримо.

Използвайки това твърдение, ще докажем измеримостта на ротационните тела. В сила е следното твърдение:

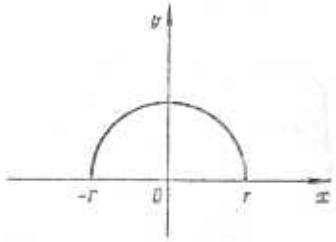
Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Тогава тялото F, образувано от завъртането около оста Ox на криволинейния трапец, ограничен от графиката на функцията f, правите $x=a$ и $x=b$ и отсечката от оста Ox от a до b е измеримо и обемът му $\mu(F)$ се дава с формулата

$$\mu(F)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{10.31}$$

Доказателство. Разделяме сегмента $[a, b]$ на частични сегменти с точките $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Нека m_i и M_i са точните граници на f в частичния сегмент $[x_{i-1}, x_i]$. На всеки такъв сегмент построяваме два правоъгълника с височини m_i и M_i (на фиг. 10.8 тези правоъгълници са изобразени само за един сегмент $[x_{i-1}, x_i]$). В резултат се получават две стъпаловидни фигури, едната от които се съдържа в криволинейния трапец, а другата го съдържа. При завъртането на криволинейния трапец и тези стъпаловидни фигури ще получим тялото F и две стъпаловидни тела, едното от които Q съдържа F, а другото P се съдържа в F. Обемите на тези тела Q и P са съответно



Фиг. 10.8



Фиг. 10.9

$$\mu(Q)=\pi\sum_{i=1}^{n}M_i^2\,\Delta x_i, \qquad \mu(P)=\pi\sum_{i=1}^{n}m^2\,\Delta x_i.$$

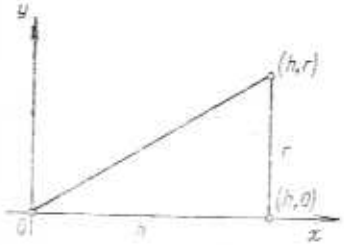
Очевидно е, че тези изрази са голяма и малка сума за функцията πf^2. Понеже тази функция е интегруема, то разликата между тези суми при подходящо деление на сегмента $[a, b]$ може да се направи по-малка от всяко отнапред избрано положително число ε. Следователно тялото е измеримо. Тъй като границите на тези суми, когато диаметърът на деленето на сегмента $[a, b]$ клони към нула е равна на $\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$, то обемът $\mu(F)$ на тялото F се дава с формулата (10.31).

Примери:

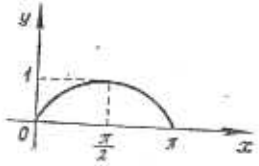
1. Да намерим обема $\mu(F)$ на кълбо F с радиус r. Разглеждаме това кълбо като резултат от завъртането на окръжността $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\leq x\leq r$, около оста Ox (вж. фиг. 10.9). С формулата (10.31) получаваме

$$\mu(F)=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi r^2x\Big|_{-r}^{r}-\frac{1}{3}\pi x^3\Big|_{-r}^{r}$$
$$=2\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Ще намерим обема $\mu(F)$ на прав кръгов конус с височина h и радиус на основата r. Този конус може да се разглежда като



Фиг. 10.10



Фиг. 10.11

ротационно тяло, получено от завъртането на триъгълника с върхове в точките $(0, 0)$, $(h, 0)$ и (h, r) около оста Ox (фиг. 10.10), и съгласно формула (10.31) имаме за обема му

$$\mu(F)=\pi\,.\,r^2\,.\,h^{-2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{1}{3}\pi r^2h^{-2}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

3. Ще намерим обема на тялото F, получено от завъртането около оста Ox на синусоидата $y=\sin x$ в сегмента $[0, \pi]$. Имаме

$$\mu(F)=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\pi^2/2$$

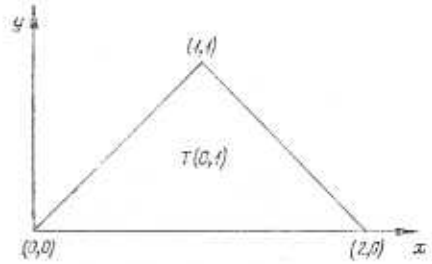
(фиг. 10.11).

Допълнение към глава 10*

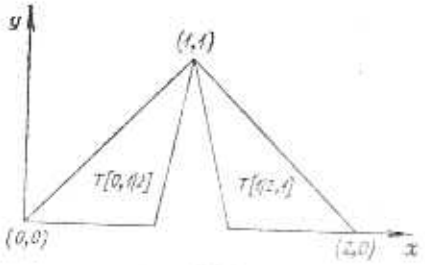
ПРИМЕР ЗА НЕИЗМЕРИМА ФИГУРА, ОГРАНИЧЕНА ОТ НЕРЕКТИФИЦИРУЕМА КРИВА

1. ***Полуотворен триъгълник*** *ще наричаме множеството от точките на триъгълник без точките на две от страните му и двата върха, прилежащи към тях.* Ще разгледаме построяването на крива L, която ще бъде част от контура на неизмерима фигура Q. Това построение се извършва по пътя на последователното отделяне на определени полуотворени триъгълници от даден равнобедрен правоъгълен триъгълник T, който за удобство ще означим с T [0, 1]. Координатите на върховете на този триъгълник са

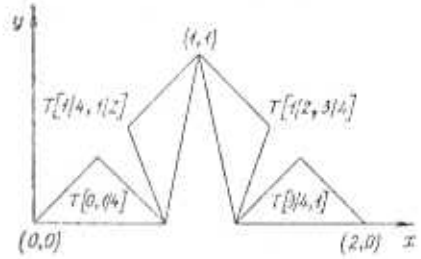
* Това допълнение е заимствувано от книгата на В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, „Основы математического анализа", изд. „Наука", Москва, 1971.



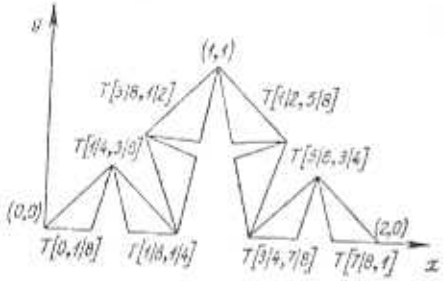
Фиг. 10.12



Фиг. 10.13



Фиг. 10.14



Фиг. 10.15

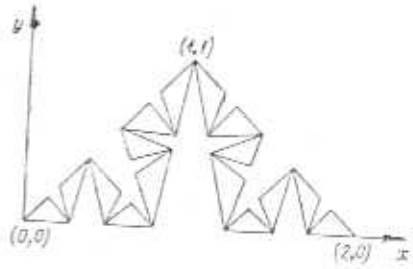
(0, 0), (1, 1) и (2, 0) (фиг. 10.12). Ще опишем сега процеса на последователното отделяне от триъгълника T [0, 1] на определени полуотворени триъгълници:

1) Отделяме полуотворения триъгълник, единият от върховете на който има координати (1, 1), а другите два са разположени на оста Ox. Лицето S_1 на отделения триъгълник е равно на 1/4. Получената в резултат фигура е изобразена на фиг. 10.13. Тя се състои от два триъгълника T [0, 1/2] и T [1/2, 1] с равни лица.

2) От триъгълниците T [0, 1/2] и T [1/2, 1] се отделя по един триъгълник, сумата S_2 от лицата на които е равна на 1/8. Получената фигура е изобразена на фиг. 10.14. Тя се състои от четири триъгълника T [0, 1/4], T [1/4, 1/2], T [1/2, 3/4], T [3/4, 1] с равни лица.

3) От всеки от тези триъгълници отделяме по един триъгълник, сумата S_3 от лицата на които е равна на 1/16. Получената фигура е изобразена на фиг. 10.15. Тя се състои от осемте триъгълника T [0, 1/8], T [1/8, 1/4], T [1/4, 3/8], T [3/8, 1/2], T [1/2, 5/8], T [5/8, 3/4], T [3/4, 7/8], T [7/8, 1] с равни лица.

4) От всеки от тези триъгълници се отделя по един триъгълник, сумата S_4 на лицата на които е равна на 1/32. Получената



Фиг. 10.16

фигура е изобразена на фиг. 10.16. Тя се състои от шестнадесет триъгълника с равни лица. Всеки от тези триъгълници ще означим със символа

$$T[p \,.\, 2^{-4},\ (p+1) \,.\, 2^{-4}],\ p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 15.$$

По-нататък процесът продължава аналогично. Ще преминем сега към определяне на кривата L. Триъгълниците $T[p \,.\, 2^{-n},\ (p+1) \,.\, 2^{-n}]$ (p и n са произволни цели числа, удовлетворяващи условието $p<2^n$), получени в описания процес, притежават следното свойство: Нека $T[p_1 \,.\, 2^{-n_1},\ (p_1+1) \,.\, 2^{-n_1}]$ и $T[p_2 \,.\, 2^{-n_2},\ (p_2+1) \,.\, 2^{-n_2}]$ са два такива триъгълника, че $p_1 \,.\, 2^{-n_1} \leqq p_2 2^{-n_2} < (p_2+1) \,.\, 2^{-n_2} \leqq (p_1+1)\, 2^{-n_1}$. Тогава вторият от тези триъгълници се съдържа в първия. Ще отбележим още следното очевидно свойство на триъгълниците $T[p.2^{-n},\ (p+1) \,.\, 2^{-n}]$: При $n \to \infty$ диаметърът им* клони към нула.

Нека $\{T[p_k 2^{-n_k},\ (p_k+1) \,.\, 2^{-n_k}]\}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, е свиваща се система от триъгълници (това означава, че триъгълникът с индекс k съдържа триъгълника с индекс $k+1$ и при $k \to \infty$ диаметърът на триъгълника клони към нула). Всяка такава свиваща се система от триъгълници има точно една обща точка. Разглеждаме всички свиващи се системи от посочените по-горе триъгълници. Кривата L определяме с множеството $\{M\}$ от общите точки на всички свиващи се системи от триъгълници $T[p \,.\, 2^{-n},\ (p+1) \,.\, 2^{-n}]$.

На множеството $\{M\}$ (на кривата L) принадлежат върховете на всички триъгълници $T[p \,.\, 2^{-n},\ (p+1) \,.\, 2^{-n}]$, тъй като върхът на всеки такъв триъгълник принадлежи на свиващата се система от триъгълници $\{T[2^k p \,.\, 2^{-(n+k)},\ (2^k \,.\, p+1) \,.\, 2^{-(n+k)}]\}$ и на системата $\{T[(2^k \,.\, p-1)\, 2^{-(n+k)},\ 2^k \,.\, p \,.\, 2^{-(n+k)}]\}$. За да се убедим, че построеното множество $\{M\}$ е проста крива в смисъл на определението, дадено в 10.1.1, трябва да докажем, че всички точки M на мно-

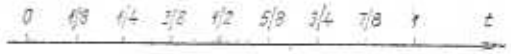
* Диаметър на триъгълник се нарича дължината на най-голямата му страна.

жеството $\{M\}$ се определят с параметрични уравнения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$; $a \leqq t \leqq b$, където φ и ψ са непрекъснати функции.*

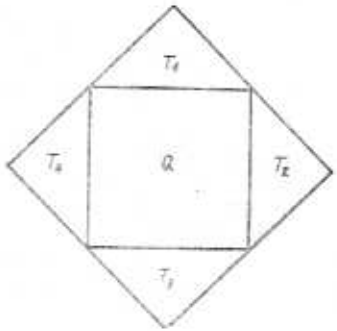
Да разгледаме сегмента $[0, 1]$ на оста t. На всеки сегмент $[p \,.\, 2^{-n}, (p+1) \,.\, 2^{-n}]$, където p и n са произволни неотрицателни цели числа, $p<2^n$, съпоставяме триъгълника $T[p \,.\, 2^{-n}, (p+1) \,.\, 2^{-n}]$. На фиг. 10.17 са изобразени сегментите, които отговарят на триъгълниците $T(p \,.\, 2^{-3}, (p+1) \,.\, 2^{-3}]$. Всяка точка t от сегмента $[0, 1]$ принадлежи на всички сегменти от някоя свиваща се система $\{[p_k \,.\, 2^{-n_k}, (p_k+1) \,.\, 2^{-n_k}]\}$ от сегменти. Съпоставяме на тази точка t общата точка M на свиващата се система от триъгълници $\{T[p_k \,.\, 2^{-n_k}, (p_k+1) \,.\, 2^{-n_k}]\}$. По такъв начин на всяка стойност на t от сегмента $[0, 1]$ се съпоставят две числа x и y — координати на точката M. Следователно x и y са функции на параметъра t. Ще се убедим, че тези функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ са непрекъснати в сегмента $[0, 1]$. Действително нека ε е произволно положително число, t е фиксирана точка от сегмента $[0, 1]$ и M е точката от кривата L, определена от тази стойност на параметъра t. От свиващата се система от триъгълници $\{T[p_k \,.\, 2^{-n_k}, (p_k+1) \,.\, 2^{-n_k}]\}$, определяща точката M, избираме триъгълник с диаметър, по-малък от ε, и разглеждаме сегмента $[p_k \,.\, 2^{-n_k}, (p_k+1) \,.\, 2^{-n_k}]$, който отговаря на този триъгълник и съдържа точката t, определяща M (а следователно x и y). Всички точки на кривата L, съответстващи на стойности на t от този сегмент, са разположени в посочения по-горе триъгълник и затова координатите им ще се различават от координатите на точката M най-много с ε. По това означава, че функциите φ и ψ са непрекъснати в тази точка.

2. Ще премина към построяване на неизмерима фигура Q. Разглеждаме квадрат $\underline{Q}$ със страна, равна на 2. На всяка страна на този квадрат построяваме равнобедрени правоъгълни триъгълници T_1, T_2, T_3, T_4, в резултат на което получаваме квадрата $\overline{Q}$ със страната $2\sqrt{2}$ (фиг. 10.18). След това от всеки от тези триъгълници отделяме полуотворени триъгълници така, както това е описано в т. 1. В резултат ще получим фигура Q, ограничена от затворена крива, състояща се от четири криви, конгруентни на кривата L. Ще докажем, че получената фигура Q е неизмерима. Разглеждаме две специални редици от многоъгълници $\{\underline{Q}_n\}$ и $\{\overline{Q}_n\}$, първата от които се състои от вписани във фигурата Q многоъгълници, а втората — от описани около Q многоъгълници. Редицата $\{\underline{Q}_n\}$ се получава чрез присъединяване към квадрата $\underline{Q}$ на полуотворените триъгълници, отделени от триъгълниците T_1, T_2, T_3,

* Това, че на различни стойности на t отговарят различни точки от множеството $\{M\}$, е очевидно от построението на кривата L.



Фиг. 10.17



Фиг. 10.18

T_4 на всяка нечетна стъпка от процеса, описан в т. 1. Редицата $\{\overline{Q}_n\}$ се получава чрез отделяне от квадрата Q на полуотворените триъгълници, отделени от триъгълниците T_1, T_2, T_3, T_4 на всяка четна стъпка от процеса, описан в т. 1. Очевидно е, че всеки вписан във фигурата Q многоъгълник се съдържа в някой многоъгълник $\underline{Q}_n$, а всеки описан около фигурата Q многоъгълник съдържа някой многоъгълник $\overline{Q}_n$. Затова границата на редицата $\{\underline{S}_n\}$ от лицата на многоъгълниците $\underline{Q}_n$ е равна на долната мярка на лицето $\underline{P}$ на фигурата Q, а границата на редицата $\{\overline{S}_n\}$ от лицата на многоъгълниците $\overline{Q}_n$ е равна на горната мярка на лицето $\overline{P}$ на фигурата Q. Лесно се убеждаваме, че $\underline{S}_n=4+\sum_{k=1}^{n} 4^{-k+1}$, $\overline{S}_n=8-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 4^{-k+1}$. Затова $\underline{P}=\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n=16/3$, а $\overline{P}=\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n=22/3$. Тъй като $\underline{P}\neq\overline{P}$, то фигурата Q е неизмерима. Ще отбележим, че $\overline{P}-\underline{P}=2$. Следователно контурът на разглежданата фигура има лице, равно на 2.

3. Ще докажем, че всяка част от кривата L, ограничена от две различни точки, е ректифицируема. Най-напред ще покажем, че такава част L' от кривата L има различно от нула лице, т. е. всеки многоъгълник, покриващ L', има лице, по-голямо от някое

положително число. Ще отбележим, че L' съдържа част L'', отговаряща на точките от някой сегмент $[p \cdot 2^{-n}, (p+1) \cdot 2^{-n}]$, и затова L'' се съдържа в триъгълника $T[p \cdot 2^{-n}, (p+1) \cdot 2^{-n}]$ и може да бъде получена чрез отделяне от този триъгълник на определени полуотворени триъгълници.

Лесно се пресмята, че сумата от лицата на всички отделени полуотворени триъгълници е по-малка от лицето S_T на триъгълника $T[p \cdot 2^{-n}, (p+1) \cdot 2^{-n}]$. Следователно частта L'' има лице, равно на $S_T - S > 0$. В 10.2 при доказателството за измеримост на фигура, ограничена от ректифицируема крива, доказахме, че лицето на ректифицируема крива е равно на нула.

Затова частта L'' на кривата L, а следователно и частта L съдържаща L'', е неректифицируема.

Забележка. Всяка от построените функции φ и ψ няма производна в нито една точка на сегмента $[0, 1]$.

11. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения и определени интеграли

В тази глава се разглеждат приближени методи за намиране корените на алгебрични и трансцендентни уравнения и за пресмятане на определени интеграли.

11.1. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения

Ще се заемем с приближеното пресмятане на един от корените на уравнението $f(x)=0$, където f е непрекъсната функция. Ще считаме, че интересуващият ни корен на това уравнение е отделен в някакъв сегмент $[a, b]$, т. е. че този корен е вътрешна точка за сегмента $[a, b]$, който не съдържа други корени на разглежданото уравнение.

11.1.1. Метод на „вилката" (метод на разполовяването). Ще започнем с метода, който често се използва за приближено пресмятане на корени с помощта на съвременните бързодействуващи математически машини. За основа на този метод служи едно ново доказателство на теорема 4.12 относно анулирането на непрекъсната функция при смяна на знака ѝ. Ще изложим това доказателство.

Трябва да се докаже следното твърдение:

Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и ако стойностите ѝ $f(a)$ и $f(b)$ в краищата на сегмента $[a, b]$ са числа с различни знаци, то съществува точка c вътре в сегмента $[a, b]$, в която стойността на функцията $f(c)$ е равна на нула, т. е. c е корен на уравнението $f(x)=0$.

Ще наричаме „вилка" всеки сегмент, в краищата на който функцията f има стойности с различни знаци. По условие сегментът $[a, b]$ е вилка. Нека за определеност $f(a)<0$, $f(b)>0$. Разделяме сегмента $[a, b]$ наполовина. Възможни са два случая: 1) стойността на функцията в средата на сегмента $[a, b]$ е равна

на нула (в този случай теоремата е доказана); 2) тази стойност не е равна на нула. В този случай едната от половинките на сегмента $[a, b]$ е „вилка". Означаваме тази половинка с $[a_1, b_1]$. Очевидно $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$. Със сегмента $[a_1, b_1]$ постъпваме така, както със сегмента $[a, b]$, т. е разделяме сегмента $[a_1, b_1]$ наполовина.

Продължавайки аналогично, ще имаме двете възможности: 1) или описаният процес прекъсва поради това, че в средата на някой от сегментите стойността на функцията е равна на нула (в този случай теоремата е доказана); 2) или описаният процес продължава неограничено, в резултат на което получаваме свиваща се система от сегменти-„вилки" $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, $\cdots$, $[a_n, b_n]$, $\cdots$, като за всеки номер n имаме $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$. Съгласно следствието от теорема 3.15 тази свиваща се система от сегменти има една обща точка c, към която клони всяка от редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Ще докажем, че $f(c)=0$. Тъй като функцията f е непрекъсната в точката c, то всяка от редиците $\{f(a_n)\}$ и $\{f(b_n)\}$ клони към $f(c)$. Но от условията $f(a_n)<0$ и $f(b_n)>0$ и от теорема 3.13 получаваме, че едновременно са изпълнени неравенствата $f(c)\leq 0$ и $f(c)\geq 0$, т. е. $f(c)=0$. □

Сега ще предположим, че при условията на доказаното по-горе твърдение сегментът $[a, b]$ съдържа само един корен c на уравнението $f(x)=0$. Тогава за приближена стойност на този корен може да се вземе точката $(a_n+b_n)/2$, т. е. средата на сегмента $[a_n, b_n]$. Понеже дължината на сегмента $[a_n, b_n]$ е равна на $(b-a)\cdot 2^{-n}$, то числото $(a_n+b_n)/2$ се различава от точната стойност на корена с не повече от $(b-a)\cdot 2^{-n-1}$. По такъв начин описаният процес на последователно разполовяване на сегментите-„вилки" позволява да се пресметне търсеният корен c с произволна, отнапред зададена точност. Тъй като описаният процес води до многократно повтаряне на еднотипни пресмятания, той е особено удобен за програмна реализация на автоматични сметачни машини.

11.1.2. Метод на итерациите.* Изложеният тук метод лежи в основата на много други приближени методи. Той се прилага за решаване на уравнението

$$x=F(x). \tag{11.1}$$

Ще въведем понятието итерационна редица.

Редицата $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ ще наричаме ***итерационна***, ако за всяко $n\geqq 1$ членът ѝ x_n се изразява чрез x_{n-1} по рекурентната формула $x_n=F(x_{n-1})$, като x_0 е произволно число от дефиниционната област на функцията F.

* Този метод се нарича също така и ***метод на последователните приближения***.

Ще докажем, че при определени условия итерационната редица клони към корена на уравнението (11.1) и следователно нейните членове могат да се вземат за приближени стойности на този корен. В сила е следното твърдение:

Твърдение 1. *Нека функцията F е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и всички членове на итерационната редица $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ принадлежат на този сегмент. Тогава, ако тази редица клони към някое число c, това число е корен на уравнението* (11.1).

Доказателство. Тъй като редицата $\{x_n\}$ клони към c и всичките ѝ членове принадлежат на сегмента $[a, b]$, то и границата c принадлежи на сегмента $[a, b]$ (вж. следствие 2 от теорема 3.13). По условие функцията F е непрекъсната в точката c и затова редицата $\{F(x_n)\}$ клони към $F(c)$. Така от равенството $x_n=F(x_{n-1})$ при граничен преход, когато $n\to\infty$, получаваме равенството $c=F(c)$, т. е. c е корен на уравнението (11.1). □

Ще докажем още едно твърдение, което често се използва за приближено пресмятане на корените на уравнение (11.1) с помощта на итерационна редица.

Твърдение 2. *Нека c е корен на уравнението* (11.1) *и в някой симетричен относно точката c сегмент $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ производната на функцията F удовлетворява условието $|F'(x)|\leq\alpha<1$. Тогава итерационната редица $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ при произволно x_0 от сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ клони към корена c.*

Доказателство. Най-напред ще докажем, че всички членове на итерационната редица $\{x_n\}$ принадлежат на сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Действително x_0 принадлежи на този сегмент по условие. Затова е достатъчно, като предположим, че x_{n-1} принадлежи на този сегмент, да докажем, че и x_n му принадлежи. За целта ще използваме формулата на Лагранж за разликата $F(x_{n-1})-F(c)$, като ще отчетем, че $F(c)=c$, $x_n=F(x_{n-1})$. Получаваме

$$x_n-c=F(x_{n-1})-F(c)=(x_{n-1}-c)F'(\xi), \tag{11.2}$$

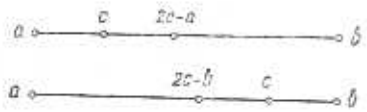
където ξ е някоя точка между x_{n-1} и c и следователно принадлежи на сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Тъй като $|F'(\xi)|\leq\alpha<1$, то от равенството (11.2) следва

$$|x_n-c|\leq\alpha|x_{n-1}-c|. \tag{11.3}$$

Понеже $0<\alpha<1$, от (11.3) на свой ред получаваме

$$|x_n-c|<|x_{n-1}-c|. \tag{11.4}$$

Неравенството (11.4) показва, че всеки следващ елемент x_n е разположен по-близко до c от предидущия елемент x_{n-1} и тъй като x_{n-1} принадлежи на сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, който е симетричен от-



Фиг. 11.1

носно точката c, то и x_n принадлежи на този сегмент. Остава да се докаже, че редицата $\{x_n\}$ клони към c. Понеже неравенството (11.3) е изпълнено за всеки номер n, то с помощта на това неравенство получаваме

$$|x_n-c|\leq\alpha^n|x_0-c|, \tag{11.5}$$

откъдето е очевидно, че $x_n\to c$, тъй като $\alpha^n\to 0$. □

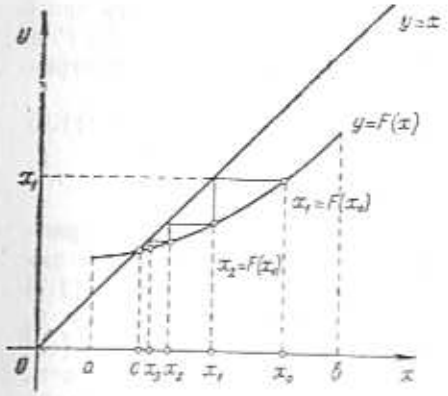
Ще направим една практическа забележка относно току-що доказаното твърдение. Да предположим, че с предварителни пресмятания сме установили, че търсеният корен на уравнението (11.1) е отделен в сегмента $[a, b]$ и производната на функцията F удовлетворява в този сегмент условието $|F'(x)|\leq\alpha<1$. Тъй като сегментът $[a, b]$ в общия случай няма да бъде симетричен относно търсения корен, то естествено възниква въпросът, как да се избере нулевото приближение x_0, за да може да се приложи доказаното твърдение 2.

Ще отбележим, че където и да се намира вътре в сегмента $[a, b]$ търсеният корен c, то поне единият от двата симетрични относно c сегменти $[a, 2c-a]$, $[2c-b, b]$ (вж. фиг. 11.1) изцяло принадлежи на сегмента $[a, b]$. Затова поне една от точките a или b принадлежи на симетричен относно корена c сегмент, навсякъде в който $|F'(x)|\leq\alpha<1$.

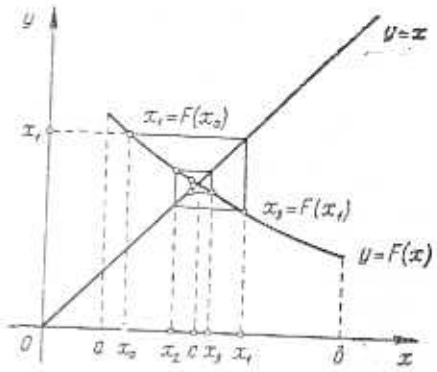
Следователно поне една от точките a или b може да се избере за x_0 съгласно доказаното твърдение 2. Конкретно за x_0 трябва да се избере онази от точките a или b, за която приближението $x_1=F(x_0)$ не излиза извън сегмента $[a, b]$.

На практика често се среща случаят, когато производната F' има постоянен знак в сегмента $[a, b]$. Ако този знак е положителен, от формула (11.2) следва, че редицата $\{x_n\}$ е монотонна. Този случай води до стъпаловидна диаграма, изобразена на фиг. 11.2. Ако производната F' е отрицателна в сегмента $[a, b]$, то от същата формула (11.2) се вижда, че всеки два последователни члена x_{n-1} и x_n лежат от различни страни на корена c. Този случай води до спираловидна диаграма, изобразена на фиг. 11.3.

Забележка. Възниква въпросът за оценка на грешката при метода на итерациите, т. е. за оценка на отклонението на n-тото приближение x_n от точната стойност на корена c. От фор-



Фиг. 11.2



Фиг. 11.3

мула (11.5) непосредствено се получава следната оценка:

$$|x_n-c|\leq\alpha^n(b-a),$$

където α е точната горна граница на функцията $|F'(x)|$ в сегмента $[a, b]$, в който е отделен търсеният корен.

Ако производната F' е отрицателна в сегмента $[a, b]$, то, както е показано по-горе, x_{n-1} и x_n лежат от различни страни на корена c и затова е в сила следната оценка:

$$|x_n-c|\leq|x_n-x_{n-1}|.$$

Ако в разглеждания случай се вземе за приближена стойност на корена полусумата на две последователни приближения

$$x_n^*=(x_n+x_{n-1})/2,$$

получаваме следната оценка за грешката:

$$|x_n^*-c|\leq\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|.$$

11.1.3. Методи на хордите и допирателните. Към широко разпространените методи за приближено решаване на уравнението $f(x)=0$ се отнасят методът на хордите и методът на допирателните, които представляват конкретни варианти на метода на итерациите.

Най-напред ще разгледаме метода на хордите. Нека търсеният корен на уравнението

$$f(x)=0 \tag{11.6}$$

е отделен в сегмента $[a, b]$. Ще предположим, че функцията f има в сегмента $[a, b]$ монотонна и непрекъсната първа производна с постоянен знак.

Възможни са четири случая: 1°) f' е ненамаляваща и положителна в $[a, b]$; 2°) f' е нерастяща и отрицателна в $[a, b]$; 3°) f' е нерастяща и положителна в $[a, b]$; 4°) f' е ненамаляваща и отрицателна в $[a, b]$.

Подробно ще разгледаме случая 1°. Вместо уравнението (11.6) вземаме уравнение от вида

(11.7) $\quad x=F(x)$, където $F(x)=x-(b-x)f(x)/(f(b)-f(x))$.*

Лесно се вижда, че отделните в сегмента $[a, b]$ корени на уравненията (11.6) и (11.7) съвпадат и затова тези уравнения са еквивалентни в сегмента $[a, b]$. За решаване на уравнението (11.7) използваме метода на итерациите, като за нулево приближение x_0 избираме точката a. Както обикновено, определяме редицата $\{x_n\}$ по рекурентната формула $x_n=F(x_{n-1})$, $n=1, 2, 3, \cdots$ Ще докажем, че редицата $\{x_n\}$ клони към търсения корен c. Затова съгласно твърдение 1 от 11.1.2 е достатъчно да се докаже, че всички x_n принадлежат на сегмента $[a, b]$ и че редицата $\{x_n\}$ е сходяща.

По индукция ще докажем, че всички x_n лежат в сегмента $[a, b]$, по-точно в сегмента $[a, c]$, където c е търсеният корен. Тъй като x_0 принадлежи на сегмента $[a, c]$, то за провеждане на индукцията е достатъчно да допуснем, че x_n принадлежи на сегмента, и да докажем, че x_{n+1} също принадлежи на този сегмент. Понеже

(11.8) $$x_{n+1}=F(x_n)=x_n-(b-x_n)f(x_n)/(f(b)-f(x_n)),$$

то като отчетем, че $f(c)=0$, ще имаме**

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}=\frac{(b-x_n)[f(c)-f(x_n)]}{[f(b)-f(c)]+[f(c)-f(x_n)]}.$$

Прилагайки към изразите в средните скоби формулата на Лагранж, получаваме

(11.9) $$x_{n+1}-x_n=\frac{(b-x_n)(c-x_n)f'(\theta_n)}{(b-c)f'(\theta_n^*)+(c-x_n)f'(\theta_n)},$$

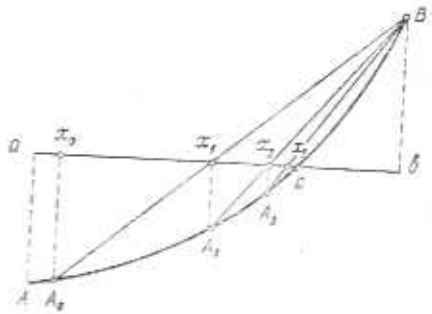
където $x_n<\theta_n<c$, $c<\theta_n^*<b$, т. е. $\theta_n<\theta_n^*$.

Понеже производната f' е ненамаляваща и положителна, можем да запишем $0<f'(\theta_n)\leq f'(\theta_n^*)$. А оттук, тъй като $b-c>0$ и $c-x_n>0$, ще получим

$$(b-c)f'(\theta_n^*)+(c-x_n)f'(\theta_n)\geq[(b-c)+(c-x_n)]f'(\theta_n)$$
$$=(b-x_n)f'(\theta_n).$$

* При това считаме, че $F(b)=b-f(b)/f'(b)$. Тогава функцията F е непрекъсната в целия сегмент $[a, b]$.

** По-нататък ще предполагаме, че $x_n<c$, тъй като, ако $x_n=c$, то $f(x_n)=f(c)=0$ и следователно $x_{n+1}=x_n=c$, т. е. x_{n+1} принадлежи на сегмента $[a, c]$.



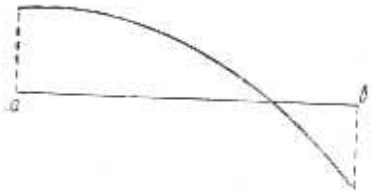
Фиг. 11.4

По такъв начин от равенствата (11.9) намираме $x_{n+1}-x_n<c-x_n$, или $x_{n+1}<c$, т. е. индукцията е завършена.

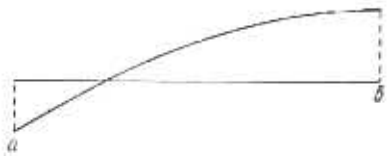
Ще докажем сега, че редицата $\{x_n\}$ е ненамаляваща. За това е достатъчно да покажем, че частното в дясната страна на равенството (11.8) е неположително. Тъй като производната f' е положителна в сегмента $[a, b]$, то функцията f е растяща в този сегмент и от неравенството $x_n\leq c<b$ следва, че $f(x_n)\leq f(c)=0$, $f(b)-f(x_n)>0$. Оттук следва и неположителността на разглежданото частно.

И така редицата $\{x_n\}$ е ненамаляваща и ограничена отгоре с числото c. По теорема 3.15 тази редица е сходяща и нейна граница е търсеният корен c.

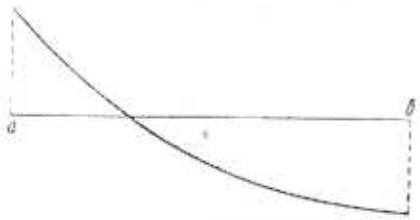
Ще дадем геометрична илюстрация на разгледания случай 1°. От формула (11.8) следва, че x_{n+1} е абсциса на точката на пресичане на хордата, съединяваща точките $A_n(x_n, f(x_n))$ и $B(b, f(b))$, от графиката на функцията f (на фиг. 11.4 са изобразени точките A_1 и A_2). Както беше казано, освен разгледания случай 1° възможни са още три случая: 2°) производната f' е нерастяща и отрицателна в сегмента $[a, b]$; 3°) производната f' е нерастяща и положителна в сегмента $[a, b]$; 4°) производната е ненамаляваща и отрицателна в сегмента $[a, b]$. Тези случаи са изобразени съответно на фиг. 11.5, 11.6, 11.7. В случая 2° уравнението (11.6), както по-горе, се заменя с уравнението (11.7) и за нулево приближение се избира точката $x_0=a$ (при това редицата $\{x_n\}$ се оказва също ненамаляваща). В случаите 3° и 4° уравнението (11.6) се заменя не с уравнението (11.7), а със следното уравнение: $x=F(x)$, където $F(x)=x-(a-x)f(x)/(f(a)-f(x))$, и за нулево приближение се взема точката $x_0=b$ (при това редицата $\{x_n\}$ се оказва нерастяща).



Фиг. 11.5



Фиг. 11.6



Фиг. 11.7

Приведената геометрична илюстрация дава названието на ***метода на хордите.***

Ще преминем сега към изложението на метода на допирателните или метода на Нютон.

Нека, както по-горе, търсеният корен c на уравнението (11.6) е отделен в сегмента $[a, b]$, в който f има непрекъсната и монотонна първа производна, запазваща постоянен знак. И тук са възможни същите четири случая, които отбелязахме при метода на хордите.

Ще разгледаме подробно случая 1°, т. е. предполагаме, че производната f' е ненамаляваща и положителна в сегмента $[a, b]$. Уравнението (11.6) е еквивалентно на уравнението

$$x = F(x), \tag{11.10}$$

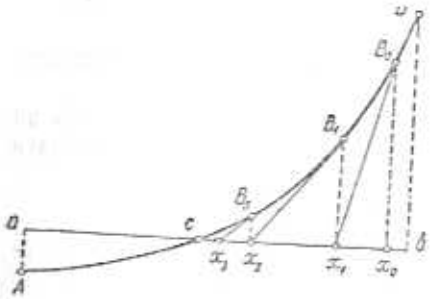
където

$$F(x) = x - f(x)/f'(x),$$

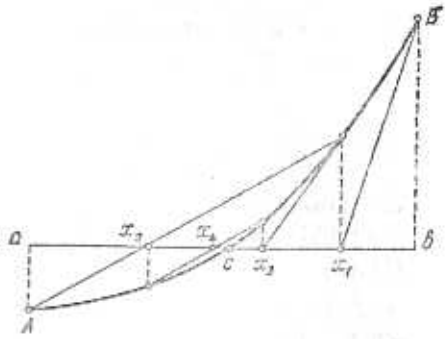
в сегмента $[a, b]$ и ще решаваме последното уравнение по метода на итерациите, като ще вземем за нулево приближение x_0 точката b и ще определим редицата $\{x_n\}$ по рекурентната формула

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - f(x_n)/f'(x_n). \tag{11.11}$$

За да докажем, че редицата $\{x_n\}$ клони към търсения корен c, е достатъчно съгласно твърдение 1 от 11.1.2 да покажем, че всички x_n лежат в сегмента $[a, b]$ и редицата $\{x_n\}$ е сходяща.



Фиг. 11.8



Фиг. 11.9

С индукция ще докажем, че всички x_n лежат в сегмента $[a, b]$, по-точно в сегмента $[c, b]$, където c е търсеният корен. Тъй като $x_0 = b$ принадлежи на сегмента $[c, b]$, то за провеждане на индукцията е достатъчно, като допуснем, че x_n принадлежи на сегмента $[c, b]$, да докажем, че и x_{n+1} също принадлежи на този сегмент.

Ако $x_n = c$, то $f(x_n) = f(c) = 0$ и от формула (11.11) следва, че $x_{n+1} = x_n = c$, т. е. индукцията е проведена. Нека сега $x_n > c$. Тогава от формула (11.11), отчитайки, че $f(c) = 0$, получаваме

$$x_n - x_{n+1} = (f(x_n) - f(c))/f'(x_n).$$

Като приложим към израза в числителя на дробта формулата на Лагранж, намираме

$$x_n - x_{n+1} = (x_n - c) f'(\xi_n)/f'(x_n),$$

където $c < \xi_n < x_n$. Понеже производната е ненамаляваща и положителна, дробта $f'(\xi_n)/f'(x_n)$ е положителна и не надминава единица, т. е. $x_n - x_{n+1} \leqq x_n - c$, или $x_{n+1} \geqq c$.

Индукцията е проведена. От положителността на производната f' следва, че функцията f е растяща, и затова от неравенството $c \leqq x_n$ получаваме $0 = f(c) \leqq f(x_n)$. Тогава $f(x_n)/f'(x) \geqq 0$. Оттук съгласно формула (11.11) $x_{n+1} \leqq x_n$, т. е. редицата $\{x_n\}$ е нерастяща. Понеже тази редица освен това е ограничена отдолу от числото c, то според теорема 3.15 тя е сходяща. Съгласно твърдение 1 от 11.1.2 границата ѝ е търсеният корен c.

Ще дадем геометрична илюстрация на разгледания случай 1°. От формула (11.11) следва, че x_{n+1} е абсцисата на пресечната точка на оста Ox с допирателната към графиката на функцията f в точката $B_n(x_n, f(x_n))$ (на фиг. 11.8 са изобразени точките B_0, B_1 и B_2).

Приведената геометрична илюстрация оправдава названието — ***метод на допирателните***. Предлагаме на читателя самостоятелно да разгледа метода на допирателните за случаите 2°, 3° и 4°, посочени при излагането на метода на хордите.

Забележка 1. Възниква въпросът за оценка на грешката при метода на хордите и допирателните.

Като приложим към израза $f(x_n)=f(x_n)-f(c)$ формулата на Лагранж, имаме $f(x_n)=(x_n-c)f'(\xi_n)$. Оттук получаваме следната оценка:

(11.12) $$|x_n-c|\leqq|f(x_n)|/m,$$

където m е минималната стойност на $|f'|$ в сегмента $[a, b]$. Формула (11.12) позволява да се оцени отклонението на x_n от точната стойност на корена c чрез стойността на модула на дадената функция f в точката x_n.

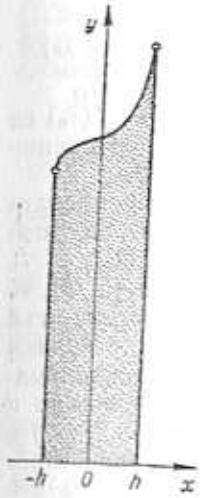
11.2. Приближени методи за пресмятане на определени интеграли

11.2.1. Уводни бележки. Ще се запознаем с три от най-често използваните приближени методи за пресмятане на определени интеграли: метод на правоъгълниците, метод на трапеците и метод на параболите.

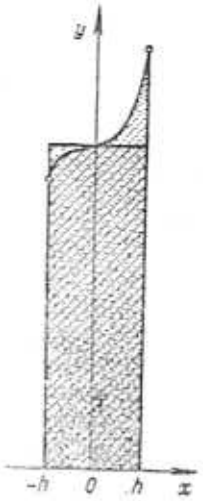
Основната идея на тези методи е да се замени подинтегралната функция с по-проста функция — полином, съвпадащ с f в някои точки. За изясняване на тази идея ще разгледаме при малко h интеграла $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$, представляващ лицето на тесен криволинеен трапец, лежащ под графиката на функцията f в сегмента $[-h, h]$ (вж. фиг. 11.10).

Заменяме функцията f с полином от нулева степен, а именно с константата $f(0)$. При това интегралът $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ приближено се заменя с лицето на правоъгълника, защрихован на фиг. 11.11. По-нататък ще покажем, че при определени условия за f грешката при такава замяна е от порядъка на h^3.

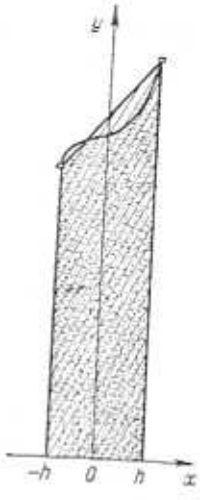
Да заменим сега функцията f с полином от първа степен, а именно с линейна функция $y=kx+b$, съвпадаща с $f(x)$ в точките $-h$ и h. При това интегралът $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ приближено се за-



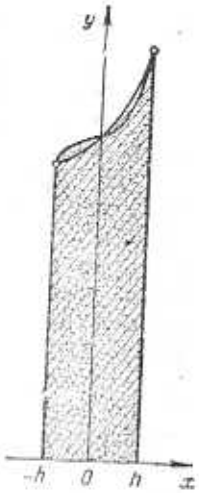
Фиг. 11.10



Фиг. 11.11



Фиг. 11.12



Фиг. 11.13

меня с лицето на праволинейния трапец, защрихован на фиг. 11.12. По-нататък ще покажем, че грешката, която се прави при тази замяна, е също от порядък h^3.

Заменяме накрая функцията f с полином от втора степен, т. е. с парабола $y=Ax^2+Bx+C$, съвпадаща с f в точките $-h$, 0, h. При това интегралът $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ се заменя приближено с лицето на лежащата под параболата фигура, защрихована на фиг. 11.13. По-нататък ще покажем, че при определени изисквания за функцията f грешката при такава замяна е от порядъка на h^5.

Ако трябва да се пресметне интегралът $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ за произволен сегмент $[a, b]$, естествено е този сегмент да се раздели на достатъчно голям брой малки сегменти и за всеки от тях да се приложат изложените разсъждения. Така идваме до методите на правоъгълниците, трапеците и параболите в техния общ вид. За да оценим грешката при прилагане на методите на правоъгълниците, трапеците и параболите, ще разгледаме тези методи от друга гледна точка.

Най-напред ще въведем понятието усреднение на n числа.

Нека $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ са произволни положителни числа.

Всяко число c от вида

(11.13) $$c=(\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n))/(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$$

се нарича усреднение на n-те числа $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$.

Очевидно е, че ако всички числа $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ са заключени между числата m и M $(m \leqq M)$, то и всяко усреднение c на тези числа удовлетворява неравенството $m \leqq c \leqq M$.

Ще предполагаме по нататък, че функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и точките $x_1, x_2, \cdots, x_n$ принадлежат на този сегмент. Тогава всеки усреднение на n-те числа $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ да вземем, съществува такава точка ξ на сегмента $[a, b]$, че това усреднение да е равно на стойността $f(\xi)$. Наистина, тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то всички нейни стойности в този сегмент са заключени между най-голямата ѝ стойност M и най-малката ѝ стойност m. Следователно и всяко усреднение c на числата $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n)$ е заключено между m и M. Но каквато и да е тази междинна стойност на c, съгласно теорема 4.12 съществува такава точка ξ в в сегмента $[a, b]$, че $c=f(\xi)$.

По такъв начин за непрекъснатата функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ формула (11.13) може да се напише във вида

(11.14) $$(\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n (x_n))/(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)=f(\xi)$$

или във вида

(11.15) $$(b-a)\frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}=(b-a)f(\xi).$$

От друга страна, за непрекъснатата функция в сегмента $[a, b]$ съгласно 9.4.2 съществува точка ξ' от сегмента $[a, b]$, за която е в сила формулата за средните стойности

(11.16) $$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi').$$

Съгоставянето на формули (11.15) и (11.16) позволява да се направи предположението, че при някой разумен избор на числата $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ и точките $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ пресмятането на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с голяма точност може да се замени с пресмятането на сумата от лягата страна на формула (11.15). Именно на тази идея за разумен избор на числата $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ и точките $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ са основани приближените методи за пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

11.2.2. Метод на правоъгълниците. Ще смятаме, че интегруемата функция f има непрекъсната втора производна в разглеждания сегмент.

Ще започнем с разглеждането на интеграл със симетрични граници $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$. За пресмятане на този интеграл ще тръгнем от формулите (11.15) и (11.16), в които полагаме $n=1$, $a=-c$, $b=c$, $x_1=0$, $\lambda_1=1$. Тогава очевидно и дясната страна на (11.15) е равна на $2c\,.\,f(0)$, така че

(11.17) $$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx=2c\,.\,f(0)+R,$$

където R е остатъчният член (т. е. отклонението на числото $2c\,.\,f(0)$ от точната стойност на интеграла). За да оценим остатъчния член R, означаваме с F примитивна функция на f. Тъй като е в сила формулата на Нютон — Лайбниц $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx=F(c)-F(-c)$, то

(11.18) $$R=F(c)-F(-c)-2c\,.\,f(0).$$

Разлагаме по формулата на Маклорен функцията $\Psi(x)=F(x)-F(-x)$. Като вземем остатъчния член във форма на Лагранж и означим с ξ' междинна променлива в интервала $(0, c)$, имаме

(11.19) $$\Psi(c)=F(c)-F(-c)=\Psi(0)+\frac{1}{1!}c\,\Psi'(0)+\frac{1}{2!}c^2\,\Psi''(0)+\frac{1}{3!}c^3\,\Psi'''(\xi').$$

Пресмятаме влизащите в тази формула стойности на $\Psi(0)$, $\Psi'(0)$, $\Psi''(0)$ и $\Psi'''(\xi')$:

$$\Psi(x)=F(x)-F(-x); \qquad \Psi(0)=F(0)-F(0)=0;$$
$$\Psi'(x)=F'(x)+F'(-x)=f(x)+f(-x); \qquad \Psi'(0)=f(0)+f(0)=2f(0);$$
$$\Psi''(x)=f'(x)-f'(-x); \qquad \Psi''(0)=f'(0)-f'(0)=0;$$
$$\Psi'''(x)=f''(x)+f''(-x); \qquad \Psi'''(\xi')=f''(\xi')+f''(-\xi')=2f''(\xi).$$

(В последното равенство използвахме формула (11.14) при $n=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$, $x_1=\xi'$, $x_2=-\xi'$ и сме означили с ξ някоя точка от интервала $(-c, c)$, в който по условие f'' е непрекъсната функция.)

Замествайки пресметнатите стойности във формула (11.19), ще имаме

(11.20) $$\Psi(c)=F(c)-F(-c)=2c\,.\,f(0)+\frac{2}{3!}c^3 f''(\xi).$$

От (11.20) и (11.18) окончателно получаваме

$$R=\frac{1}{3}c^3 f''(\xi)=\frac{1}{24}(2c)^3 f''(\xi). \tag{11.21}$$

От тази оценка за остатъчния член се вижда, че формула (11.17) е толкова по-точна, колкото е по-малка величината $2c$. Затова за пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ е удобно да се раздели сегментът $[a, b]$ на достатъчно голям брой части и към всяка от тези части да се приложи формулата за приближено интегриране (11.17). Като предполагаме, че функцията има в сегмента $[a, b]$ непрекъсната втора производна, ще разделим този сегмент на n равни части с помощта на точките $x_0=a<x_2<\cdots<x_{2n}=b$. Означаваме с x_{2k+1} средната точка на сегмента $[x_{2k}, x_{2+2}]$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})]+R, \tag{11.22}$$

където

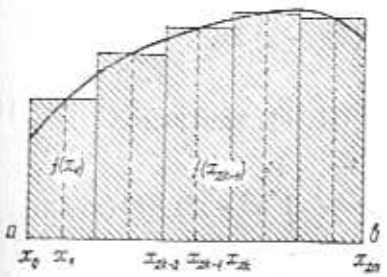
$$R=R_1+R_2+\cdots+R_n=\frac{1}{24}\frac{(b-a)^3}{n^3}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+\cdots+f''(\xi_n)]$$

$$=\frac{(b-a)^3}{24\,n^2}f''(\xi),\quad a<\xi<b. \tag{11.23}$$

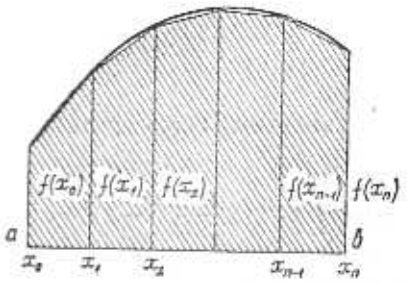
(Тук сме използвали формулата за усредняване (11.14) при $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ и сме означили с ξ някоя междинна стойност на аргумента в интервала (a, b).)

Формула (11.22) се нарича ***формула на правоъгълниците.*** Геометричният ѝ смисъл е ясен от фиг. 11.14: Лицето на криволинейния трапец под графиката на f в сегмента $[a, b]$ приближено се замеря със сумата от лицата на означените на този чертеж правоъгълници.

11.2.3. Метод на трапеците. Нека, както и по-горе, функцията f има непрекъсната втора производна в разглеждания сегмент. Отново ще пресметнем интеграла $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$, но този път ще изхождаме от формулите (11.15) и (11.16), като ще считаме, че $n=2$, $a=-c$, $b=c$, $x_1=-c$, $x_2=c$, $\lambda_1=\lambda_2=1$.



Фиг. 11.14



Фиг. 11.15

Тогава

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx=\frac{1}{2}[f(-c)+f(c)]\,2c+R, \tag{11.24}$$

където R е остатъчният член, подлежащ на оценка.

Означаваме с F примитивна на функцията f и от $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx=F(c)-F(-c)$ получаваме

$$R=F(c)-F(-c)-\frac{1}{2}[f(-c)+f(c)]\,.\,2c. \tag{11.25}$$

Нека, както в метода на правоъгълниците, $\Psi(x)=F(x)-F(-x)$. Като разложим функциите Ψ и Ψ' по формулата на Маклорен с остатъчен член в интегрална форма (вж. 9.5.4) и положим $x=c$, ще имаме

$$\Psi(c)=F(c)-F(-c)=\Psi(0)+\frac{1}{1!}c\,\Psi'(0)+\frac{1}{2!}c^2\,\Psi''(0)$$
$$+\frac{1}{2!}\int_0^c (c-x)^2\,\Psi'''(x)\,dx,$$

$$\Psi'(c)=f(c)+f(-c)=\Psi'(0)+\frac{1}{1!}c\,\Psi''(0)+\frac{1}{1!}\int_0^c (c-x)\,\Psi'''(x)\,dx.$$

Замествайки в тези формули стойностите на $\Psi(0)$, $\Psi'(0)$, $\Psi''(0)$, пресметнати в 11.2.2, получаваме

$$F(c)-F(-c)=2cf(0)+\frac{1}{2}\int_0^c \Psi'''(x)\,(c-x)^2\,dx,$$

$$f(c)+f(-c)=2f(0)+\int_0^c \Psi'''(x)(c-x)\,dx.$$

Като заместим последните два израза в (11.25), намираме

$$R=\int_0^c \Psi'''(x)\left[\frac{1}{2}(c-x)^2-c(c-x)\right]dx=-\frac{1}{2}\int_0^c (c^2-x^2)\,\Psi'''(x)\,dx.$$

Поради това, че функцията c^2-x^2 е неотрицателна в сегмента $[0, c]$, ще приложим към последния интеграл първата формула за средните стойности (гж. 9.4.2). Като вземем пред вид, че $\Psi'''(x)=f'''(x)+f'''(-x)$, и означим с ξ' подходяща стойност на аргумента от сегмента $[0, c]$, получаваме

$$R=-\frac{1}{2}[f'''(\xi')+f'''(-\xi'')]\int_0^c (c^2-x^2)\,dx=-\frac{1}{3}c^3[f'''(\xi')+f'''(-\xi')].$$

Като приложим към израза в средните скоби формулата за усредняване (11.14) при $n=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ и означим с ξ подходяща стойност на аргумента от сегмента $[-c, c]$, намираме окончателно

$$R=-\frac{2}{3}c^3f'''(\xi)=-\frac{1}{12}(2c)^3f'''(\xi).$$

За пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, както и при метода на правоъгълниците, разделяме сегмента $[a, b]$ на n равни части с помощта на точките $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ и прилагаме формула (11.14) за всеки от частичните сегменти. Получаваме

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \tag{11.26}$$

$$=\sum_{k=1}^n\left\{\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})(f(x_{k-1})+f(x_k))+R_k\right\}$$

$$=\frac{b-a}{2n}\{[f(x_0)+f(x_1)]+[f(x_1)+f(x_2)]+\cdots+[f(x_{n-1})+f(x_n)]\}+R$$

$$=\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right\}+R,$$

където

$$R=R_0+R_1+\cdots+R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+\cdots+f''(\xi_n)]$$

(11.27)

$$=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi),\qquad a\leqq\xi\leqq b.$$

(Използвали сме формулата за усредняване (11.14)). Формула (11.26) се нарича ***формула на трапеците.*** Геометричният смисъл на тази формула е ясен от фиг. 11.15: Лицето на криволинейния трапец, лежащ под графиката на функцията f в сегмента $[a, b]$, се заменя приближено със сумата от лицата на посочените на този чертеж праволинейни трапеци. Сравняването на остатъчния член (11.27) с остатъчния член (11.23) показва, че методът на трапеците не дава по-голяма точност в сравнение с метода на правоъгълниците.

11.2.4. Метод на параболите. Този път ще предполагаме, че функцията f има в разглеждания сегмент непрекъсната четвърта производна и отново ще пресметнем интеграла $\int_{-c}^c f(x)\,dx$.

Както и по горе, ще изходим от формулите (11.15) и (11.16), но този път при $n=3$, $a=-c$, $b=c$, $\lambda_1=\lambda_3=1$, $\lambda_2=\lambda$ (числото λ ще определим по-нататък), $x_1=-c$, $x_2=0$, $x_3=c$. Тогава

$$\int_{-c}^c f(x)dx=\frac{f(-c)+\lambda f(0)+f(c)}{2+\lambda}2c+R,$$

където R е остатъчният член, който трябва да определим. За оценка на остатъчния член ще означим, както и по-горе, с F примитивна функция на f и като отчетем, че $\int_{-c}^c f(x)\,dx=F(c)-F(-c)$, получаваме

$$R=F(c)-F(-c)-\frac{f(-c)+\lambda f(0)+f(c)}{2+\lambda}\cdot 2c. \tag{11.28}$$

Нека, както и по-горе, $\Psi(x)=F(x)-F(-x)$. Разлагаме функциите $\Psi(x)$ и $\Psi'(x)$ по формулата на Маклорен с остатъчен член в интегрална форма. Като заместим в тези разлагания $\Psi(0)$, $\Psi'(0)$, $\Psi'''(0)$, пресметнати в 11.2.2, и като отчетем, че $\Psi^{(4)}(0)=0$, имаме

(11.29) $$\Psi(c)=F(c)-F(-c)=2c\,f(0)+\frac{2}{3!}c^3 f''(0)+\frac{1}{4!}\int_0^c (c-x)^4\,\Psi^{(5)}(x)\,dx,$$

$$\Psi'(c)=f(c)+f(-c)=2\,.\,f(0)+\frac{2}{2!}c^2 f''(0)+\frac{1}{3!}\int_0^c (c-x)^3\,\Psi^{(5)}(x)\,dx.$$

От тези формули следва

(11.30) $$\frac{f(-c)+\lambda f(0)+f(c)}{2+\lambda}\,.\,2c$$

$$=2c\,.\,f(0)+2\frac{c^3}{2+\lambda}f''(0)+\frac{2}{3!\,(2+\lambda)}c\int_0^c (c-x)^3\,\Psi^{(5)}(x)\,dx.$$

От формула (11.28) се вижда, че остатъчният член R е равен на разликата на изразите (11.29) и (11.30). За да направим остатъчния член безкрайно малка величина от по-висок ред относно c, избираме λ така, че вторите членове в дясната страна на формулите (11.29) и (11.30) да съвпадат, т. е. полагаме $\frac{2}{3!}=\frac{2}{2+\lambda}$, или $\lambda=4$. При тази стойност на λ разликата на формулите (11.29) и (11.30) дава

$$R=\int^c\left[\frac{1}{24}(c-x)^4-\frac{c}{18}(c-x)^3\right]\Psi^{(5)}(x)\,dx$$

$$=-\frac{1}{24}\int_0^c\left[(c-x)^3\left(\frac{c}{3}+x\right)\right]\Psi^{(5)}(x)\,dx.$$

Като вземем пред вид, че функцията $[(c-x)^3(c/3+x)]$ е неотрицателна в сегмента $[0, c]$, ще приложим към последния интеграл първата формула за средните стойности. Отчитайки, че $\Psi^{(5)}(x)=f^{(4)}(x)+f^{(4)}(-x)$, и като означим с ξ' подходяща стойност на аргумента от сегмента $[0, c]$, получаваме

$$R=-\frac{1}{24}[f^{(4)}(\xi')+f^{(4)}(-\xi')]\int_0^c (c-x)^3(c/3+x)\,dx$$

$$=\frac{-(2c)^5}{2.2880}[f^{(4)}(\xi')+f^{(4)}(-\xi')].$$

Като приложим към израза в средните скоби формулата за усредняване (11.14) при $n=2$ и $\lambda_1=\lambda_2=1$ и като означим с ξ подходяща стойност на аргумента от сегмента $[-c, c]$, получаваме окончателно

$$R=-\frac{1}{2880}(2c)^5 f^{(4)}(\xi).$$

За пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ разделяме сегмента $[a, b]$ на n равни части с точките $a=x_0<x_2<x_4<\cdots x_{2n}=b$ и полагаме $x_{2k+1}=\frac{1}{2}(x_{2k}+x_{2k+2})$. Получаваме

(11.31) $$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^n\left\{(x_{2k}-x_{2k-2})\frac{f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})}{6}+R_k\right\}$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{2k+1})\right]+R,$$

където

(11.32) $$R=-\frac{(b-a)^5}{2880\,n^5}(f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)+\cdots+f^{(4)}(\xi_n))$$

$$=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\xi),$$

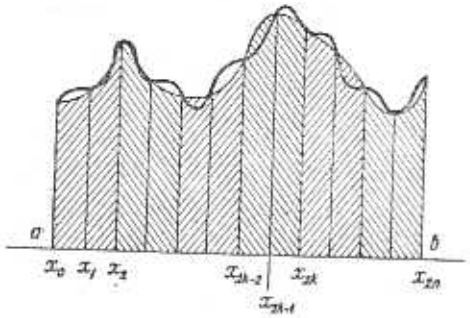
$$a<\xi<b.$$

(Тук използвахме формулата за усредняване (11.14).)

Формулата (11.31) се нарича ***формула на Симпсън**** или ***формула на параболите.*** Геометричният ѝ смисъл е ясен от фиг. 11.16: Лицето на криволинейния трапец под графиката на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ се заменя приближено със сумата от лицата на фигурите, защриховани на фиг. 11.16, лежащи под параболите. За да се убедим в това, е достатъчно да отбележим, че изразът в големите скоби на формула (11.31) дава лицето на фигурата, лежаща в сегмента $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ под параболата $y=Ax^2+Bx+C$, съвпадаща с f в точките x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}.

Формулата на Симпсън дава по-голяма точност от формулите на правоъгълниците и трапеците.

* Томас Симпсън — английски математик (1710 — 1761).



Фиг. 11.16

За да илюстрираме използването на формулата на Симпсън, ще пресметнем интеграла $J(x_0)=\int\limits_0^{x_0} e^{-x^2}dx$. Ще се ограничим за простота със стойности за x_0 от сегмента $0\leqq x_0\leqq 1$. Като положим $f(x)=e^{-x^2}$ и пресметнем производната $f^{(4)}(x)=4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2}$, лесно се вижда, че за всяко x от сегмента $0\leqq x\leqq x_0\leqq 1$ имаме $|f^{(4)}(x)|\leqq 20$. Оценката (11.32) ни дава, че $R<\frac{1}{144n^4}$. Следователно, като разделим сегмента $[0, x_0]$ на 5 равни части и заменим разглеждания интеграл със сумата от дясната страна на формулата на Симпсън, ще пресметнем този интеграл с точност $\frac{1}{144.5^4}<\frac{1}{90\,000}$.

12. Метрични, топологични, нормирани пространства

В тази глава ще бъдат изложени важни понятия и факти от общата топология, които се използват в различни области на математиката. Читателят без труд ще забележи, че тези понятия и факти са естествено обобщение на редица определения и твърдения, съдържащи се в предишните глави. Материалът от тази глава ще бъде използван също и в изложението по-нататък.

12.1. Метрични пространства

12.1.1. Определение на метрично пространство. Вече подчертахме, че фундаментална роля в анализа играе понятието граница. В основата на това понятие е определението за разстояние между числата, т. е. абсолютната стойност от разликата на тези числа. Затова е естествено да се въведе понятието разстояние вече не между две числа, а между два произволни елемента на някое абстрактно множество X. Това разстояние трябва да обобщава свойствата на разстоянието между числата от числовата ос. Във връзка с казаното ще дадем следното определение:

Определение 1. *В множеството X е определена* ***структура на метрично пространство,*** *ако е зададена реална функция ρ на две променливи x и y, $x, y\in X$, удовлетворяваща аксиомите:*

1) $\rho(x, y)=0$ *тогава и само тогава, когато* $x=y$;
2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ *(аксиома за симетрията);*
3) $\rho(x, y)\leqq\rho(x, z)+\rho(z, y)$ *(неравенство на триъгълника).*

Функцията ρ се нарича ***метрика*** *или* ***функция на разстоянието,*** *а числото $\rho(x, y)$ се нарича* ***разстояние*** *между точките x и y на множеството X.*

По такъв начин ***метричното пространство*** *се образува, от множеството X и от функцията разстояние ρ.* Затова обикновено метричното пространство R се означава така: $R=(X, \rho)$.

Ако в аксиома 3) положим $x=y$ и вземем пред вид 1) и 2), получаваме $0 \leqq \rho(y, z)$, т. е. функцията разстояние е неотрицателна функция на аргументите си.

Ще приведем за пример най-често срещащите се метрични пространства.

Примери:

1. Множеството на реалните числа се превръща в метрично пространство, ако за всеки две числа x, y положим $\rho(x, y) = |x-y|$. Това метрично пространство се означава обикновено с E^1.

2. Аритметичното n-мерно пространство $X=A^n$, точките на което (или елементите на множеството X) са наредените n-торки от числа $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, е очевидно метрично пространство, ако положим

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2},$$

където $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, и се означава с $E^n=(X, \rho)$. Аксиомите 1) и 2) от определението на метрично пространство, както лесно се вижда, са изпълнени. Верността на аксиома 3) следва от неравенството на Коши—Буняковски за сума (вж. 9.5). Действително

$$\rho^2(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2=\sum_{i=1}^{n}[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i)+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i||z_i-y_i|+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^2\right)^{1/2}+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

$$=\rho^2(x, z)+2\rho(x, z)\cdot\rho(z, y)+\rho^2(z, y)=[\rho(x, z)+\rho(z, y)]^2.$$

По такъв начин $\rho(x, y) \leqq \rho(x, z)+\rho(z, y)$ и неравенството на триъгълника е доказано. Ще отбележим, че по-горе приложихме неравенството на Коши — Буняковски към сумата

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|\cdot|z_i-y_i|=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i, \quad \text{където } a_i=|x_i-z_i|,\ b_i=|z_i-y_i|.$$

В множеството X, елементи на което са наредените n-орки от числа $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, може да се въведат и други функции разстояние, например: a) $\rho_0=\frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)}$, $x, y \in X$, където функцията ρ е въведената в пример 2; b) $\rho_1(x, y)=\max\{|x_i-y_i|: 1 \leqq i \leqq n\}$, $x, y \in X$; c) $\rho_2(x, y)=\sum^{n}|x_i-y_i|$, $x, y \in X$; d) $\rho_3(x, y)=\begin{cases}1, & \text{ако } x \neq y,\\ 0, & \text{ако } x=y;\end{cases}$ e) $\rho_4(x, y)=\begin{cases}\rho(x, y), & \text{ако } \rho(x, y)<1,\\ 1, & \text{ако } \rho(x, y) \geqq 1,\end{cases}$ където функцията ρ е определена по-рано в пример 2.

Естествено при това едно и също множество X се превръща в различни метрични пространства $R_i=(X, \rho_i)$, където $i=1, 2, 3, 4$.

3. Нека Y е множеството на непрекъснатите функции, дефинирани в сегмента $[a, b]$. Въвеждаме метрика, като полагаме $\rho(x, y) = \max\{|x(t)-y(t)|: t \in [a, b]\}$. Полученото пространство е метрично пространство. То се означава с

$$C_{[a, b]}=(Y, \rho).$$

По същия начин множеството Z на n пъти непрекъснато диференцируемите функции в сегмента $[a, b]$, $n \geqq 1$, става метрично пространство, ако въведем метрика по правилото:

$$\rho(x, y)=\max\{|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|: i=0, 1, \cdots, n,\ t \in [a, b]\},$$

$$x^{(0)}(t) \equiv x(t),\ y^{(0)}(t) \equiv y(t).$$

Това пространство се означава обикновено така:

$$C^n_{[a,b]}=(Z, \rho),\ n \geqq 1.$$

Пространството $C_{[a, b]}$ ще означаваме понякога и със символа $C^0_{[a, b]}$.

4. Нека V е множеството на всички ограничени редици $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ от реални числа. Полагаме $\rho(x, y)=\sup_i|x_i-y_i|$. Очевидно аксиомите 1) — 3) са изпълнени. Това пространство се означава с $m=(V, \rho)$.

Ще отбележим, че всяко подмножество X_0 на метричното пространство $R(X, \rho)$ е също на свой ред метрично пространство със същата функция разстояние ρ. Наистина, ако аксиомите, определящи метриката ρ, са изпълнени за всяко $x, y, z \in X$, те са изпълнени и за x, y, z, принадлежащи на X_0. Така всяко подмножество на E^n е метрично пространство с функция $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$. Също така всяко подмножество на $C^n[a, b]$ е

метрично пространство, $n=0, 1, 2, \ldots$

Двойката $(X_0, \rho)=R_0$ се нарича подпространство на $R=(X, \rho)$.

Ще отбележим също, че ако ρ е функция разстояние в някое метрично пространство, то по формулите а) или е) от пример 2 могат да се получат нови функции разстояния.

12.1.2. Отворени и затворени множества. Кълбо $O(a, r)$ в метричното пространство R (затворено кълбо $K(a, r)$) с център точката a и радиус r се нарича съвкупността от точките $x \in X$, за които $\rho(x, a)<r$ $(\rho(x, a) \leqq r)$.

Определение 2. *Множеството $\Sigma \subset X$ се нарича* ***отворено*** *в $R(X, \rho)$, ако заедно с всяка своя точка съдържа и някое кълбо $O(x, r)$.*

Определение 3. ***Околност*** *на точката $x \in X$ се нарича всяко отворено множество, съдържащо x. Околност на някое подмножество на X (може да бъде и самото X) се нарича всяко отворено множество, съдържащо даденото подмножество. Околност на точка x ще означаваме със Σ_x.*

Определение 4. *Нека $Y \subset X$, тогава точката $x \in X$ се нарича* ***точка на сгъстяване*** *на множеството Y, ако всяка околност на точката x съдържа поне една точка $y \in Y$, различна от x.*

Точката $y \in Y$ се нарича ***изолирана точка*** *за множеството Y, ако съществува околност на точката y, в която няма нито една точка от Y, различна от y.*

Определение 5. *Точката y, принадлежаща на множеството Y — подмножество на X, се нарича* ***вътрешна,*** *ако се съдържа в Y заедно с някоя своя околност. Точките, вътрешни за допълнението на Y в X, се наричат* ***външни*** *по отношение на Y. Ако точката не е нито вътрешна, нито външна по отношение на Y, тя се нарича* ***контурна точка*** *за Y. Множеството от контурните точки на Y се означава с ∂Y.*

Определение 6. *Едно множество в метрично пространство се нарича* ***затворено,*** *ако допълнението му е отворено.*

В сила е следното твърдение:

Лема 1. *Обединението на произволен брой отворени множества и сечението на краен брой отворени множества са отворени множества, $\varnothing$ и X са отворени.*

Сечението на произволен брой затворени множества и обединението на краен брой затворени множества са затворени множества, $\varnothing$ и X са затворени.

Доказателство. Нека $\{\Sigma_\alpha\}$ е семейство от отворени множества в X. Ако $x \in \bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$, то съществува такова α_0, че $x \in \Sigma_{\alpha_0}$,

следователно съществува такова число $r>0$, че $O(x, r) \subset \Sigma_{\alpha_0}$, т. е. $O(x, r) \subset \bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$. Следователно $\bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$ е отворено множество.

По-нататък, ако $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ са отворени в X, то от това, че $x \in \bigcap_{i=1}^n \Sigma_i$, следва, че за всяко $i=1, 2, 3, \ldots, n$ имаме $x \in \Sigma_i$, т. е. за всяко $i=1, 2, 3, \ldots, n$ съществуват такива $r_i>0$, че $O(x, r_i) \subset \Sigma_i$. Като изберем $r=\min_{1 \leq i \leq n} r_i$, за всяко $i=1, 2, 3, \ldots, n$ получаваме

$$O(x, r) \subset O(x, r_i), \text{ т. е. } O(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n \Sigma_i,$$

т. е. сечението на множествата Σ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, е отворено множество.

Второто твърдение непосредствено следва от първото, като използваме принципа на двойственост за множества. Например нека $\{F\}$ е семейство от затворени множества в X. За всяко α ще разгледаме отвореното множество $\Sigma_\alpha = F'_\alpha$.* Тогава $\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)' = \bigcup_\alpha F'_\alpha = \bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$, т. е. $\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)'$ е отворено множество: следователно $\bigcap_\alpha F_\alpha$ е затворено. Това, че $\varnothing$ и X са едновременно отворени и затворени, е очевидно.

Определение 7. ***Затворена обвивка*** *$\bar{Y}$ на множеството Y се нарича сечението на всички затворени множества, съдържащи Y.*

В сила е следната лема:

Лема 2. *Затворената обвивка на множество в метрично пространство има следните свойства:*

1) $\bar{A} \supset A$; 2) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$; 3) $\overline{A \cup B}=\bar{A} \cup \bar{B}$; 4) $\bar{\varnothing}=\varnothing$, $\bar{X}=X$.

Доказателство. Свойство 1) е очевидно: ако $x \in A$, то x принадлежи на всяко затворено множество, съдържащо A, и според лема 1 $x \in \bar{A}$. Свойство 2) следва от това, че $\bar{A}$ е затворен (лема 1). Ще докажем свойство 3). Тъй като $A \cup B \supset A$, а $\overline{A \cup B} \supset A \cup B$, то $\overline{A \cup B} \supset A$. Понеже $\overline{A \cup B}$ е затворено множество, то $\bar{A} \cup B \supset A$. Аналогично $\overline{A \cup B} \supset B$. По такъв начин $\bar{A} \cup B \supset \bar{A} \cup \bar{B}$. Обратно, $\bar{A} \cup \bar{B}$ е според лема 1 затворено множество и следователно $\bar{A} \cup \bar{B} \supset \overline{A \cup B}$. Твърдение 4) означава, че $\varnothing$ и X са затворени множества. □

* Ще напомним, че A' означава допълнението на множеството A.

Очевидно, ако $C \subset D$, то $\bar{C} \subset \bar{D}$.

Ще дадем следното определение:

Определение 8. *Нека $R=(X, \rho)$ е метрично пространство, а $R_0=(Y, \rho)$ $(Y \subset X)$ е негово подпространство. Множество Σ_Y от подпространството $R_0 (\Sigma_Y \subset Y)$ се нарича* ***отворено относно*** R_0, *ако съществува такова отворено в R множество Σ_X, че $\Sigma_Y = Y \cap \Sigma_X$. Аналогично множество F_Y от подпространството $R_0 (F_Y \subset Y)$ се нарича* ***затворено относно*** R_0, *ако съществува такова затворено в R множество F_X, че $F_Y = Y \cap F_X$.*

Множество, което е отворено относно R_0, ще наричаме ***„относително отворено“.***

Лесно се вижда, че едно отворено (затворено) относно R_0 множество $\Sigma_Y (F_Y)$ е отворено (затворено) в R_0 (разглеждано като подпространство на R). Вярно е и обратното: ако множеството е отворено (затворено) в R_0, то е отворено (затворено) относно R_0.

Ще подчертаем, че когато се говори за относително отворено (затворено) множество, наред с основното пространство се посочва и подпространството R_0, относно което се дава определението.* Аналогично на определението на относително отворени и относително затворени множества се определя и относително затворена обвивка. Относително затворена обвивка $\tilde{A}$ на множеството A в R_0 се определя чрез съотношението $\tilde{A} = \bar{A} \cap Y$, където $R_0 = (Y, \rho)$, $\bar{A}$ е затворената обвивка на A в R.

Определение 9. *Пространството $R=(X, \rho)$ се нарича* ***свързано,*** *ако не може да се представи като обединение на две непразни отворени непресичащи се множества.*

Очевидно пространството е свързано тогава и само тогава, когато не може да се представи като обединение на две непразни затворени непресичащи се множества.

Множеството Y, принадлежащо на метричното пространство R, е свързано, ако Y е свързано като подпространство в R.

12.1.3. Декартово произведение на метрични пространства. Ако $R_1 (X_1, \rho_1)$, $R_2 (X_2, \rho_2)$ са две метрични пространства, то може да се определи декартово произведение на тези метрични пространства. Нека $X = X_1 \times X_2$ е декартовото произведение на множествата X_1 и X_2, т. е. множеството от всевъзможните двойки (x_1, x_2),

* Например интервалът $\Sigma=(0,2)$ е отворен относно пространството E^1 и не е отворено множество относно пространството E^2. Действително, тъй като $\Sigma \subset E^1 \subset E^2$, то $\Sigma = E^1 \cap O(a, 1)$, където $O(a, 1)$ е отворен кръг в E^2 с център в точката $(1, 0)$ и радиус 1, т. е. интервалът е отворен в E^1 относно пространството E^1. Ако се разглежда интервалът $\Sigma=(0,2)$ в E^2, то той не е отворено множество, понеже не съдържа нито един кръг.

където $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Метрика ρ в множеството X може да се въведе например по следното правило:

$$\rho(x, y) = (\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2))^{1/2},$$

където $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, $x_i \in X_i$, $y_i \in X_i$, $i=1, 2$. Двойката $R(X, \rho)$, където $X = X_1 \times X_2$, ρ е функцията разстояние, въведена по-горе, е метрично пространство и се нарича ***декартово произведение*** на метричните пространства R_1 и R_2: $R = R_1 \times R_2$.

Ако е зададена изброима редица от метрични пространства $R_1 (X_1, \rho_1)$, $R_2 (X_2, \rho_2)$, $R_3 (X_3, \rho_3)$, . . . и с X е означено декартовото произведение на множествата X_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, т. е. X се състои от елементи $x=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $x_i \in X_i$, то може да се даде следното определение:

Определение 10. ***Декартово произведение*** *R на метричните пространства $R_1, R_2, R_3, \ldots$ се нарича двойката (X, ρ), където*

$$X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i, \qquad \rho(x, y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \rho(x_k, y_k)/(1 + \rho(x_k, y_k)),$$

$$x, y \in X, \; x_k, y_k \in X_k, \; x=(x_1, x_2, x_3, \ldots), \; y=(y_1, y_2, y_3, \ldots).$$

То се означава така: $R = \prod_{i=1}^{\infty} R_i$.

12.1.4. Навсякъде гъсти и съвършени множества

Определение 11. *Нека A и B са две множества от метричното пространство $R=(X, \rho)$. Множеството A се нарича* ***гъсто*** *в B, ако $\bar{A} \supset B$. Множеството A се нарича* ***навсякъде гъсто*** *в пространството R, ако $\bar{A} = R$.*

Пространства, в които има изброими, навсякъде гъсти множества, се наричат ***сепарабелни.***

Разгледаните примери на метрични пространства E^1, E^n, $C^n[a, b]$ са примери на сепарабелни метрични пространства. Така в E^n изброимо, навсякъде гъсто множество е множеството на точките с рационални координати. В пространствата $C^n[a, b]$, $n \geq 0$, такова множество е множеството на полиномите с рационални коефициенти.

Пространството m е пример за несепарабелно пространство.* За да се убедим в това, можем да постъпим така:

* Вж. пример 4 от 12.1.1.

Подмножеството E_0 на m от редиците, състоящи се само от нули и единици, е с мощността на континуума.

Взаимните разстояния в пространството m между два различни елемента a и b от множеството E_0 са равни на единица. Следователно е невъзможно да се приближи с произволна точност всеки от тези вектори с елементите на изброимо множество, тъй като кълбата с центрове в точките на множеството E_0 и радиуси 1/3 не се пресичат, а образуват множество с мощността на континуума. Тъй като $E_0 \subset m$, $m=(V, \rho)$, то пространството m е несепарабелно.

Множеството A се нарича ***навсякъде негъсто*** *в метричното пространство R, ако във всяко отворено множество на това пространство има отворено множество, несъдържащо нито една точка от множеството A.*

Например в пространството $C[0, 1]$ множеството A на функциите на вида $y=nx^2$ (n цяло число) е навсякъде негъсто. Друг пример за навсякъде негъсто множество в сегмента $[0, 1]$ (разглеждан като метрично пространство) е т. нар. канторово съвършено множество.

Множеството A, съдържащо се в метрично пространство, се нарича ***съвършено,*** *ако е затворено и всяка точка на множеството A е негова точка на сгъстяване.*

Канторовото съвършено множество в сегмента $I=[0, 1]$ се построява по следния начин: От сегмента $[0, 1]$ отделяме интервала $(1/3, 2/3)$ и останалото множество — обединението на двата сегмента $[0, 1/3,]$, $[2/3, 1]$, означаваме с I_1. От тези два сегмента на свой ред се отделя по една трета — интервалите $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9)$. Обединението на останалите сегменти означаваме с I_2. Продължаваме този процес неограничено. Очевидно $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ и I_n е обединение на 2^n сегмента, всеки от които има дължина 3^{-n}.

Множеството $K=\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ се нарича канторово множество.

Ще покажем, че K е съвършено. Това, че то е затворено, следва от построението и от лема 1; остава да се покаже, че не съдържа изолирани точки. Нека $x \in K$ и нека Σ_X е произволна околност на точката x, т. е. отворено множество. Тогава според определението на отворено множество съществува интервал σ_x (кълбо с център в точката x), съдържащ точката x и $\sigma_x \subset \Sigma_x$. Нека A_n е тази отсечка от множеството I_n, която съдържа точката x. Ако n е достатъчно голямо, то $A_n \subset \sigma_x$. Означаваме с a_n този край на отсечката A_n, който не съвпада с точката x. Очевидно от построението на множеството K имаме $a_n \in K$. Следователно произволната околност на точката x — множеството Σ_x, съдържа точ-

ката $a_n \neq x : a_n \in A_n \subset \sigma_x \subset \Sigma_x$, т. е. точката x е точка на сгъстяване за множеството K и K е съвършено.

Ще докажем сега, че K е навсякъде негъсто множество в сегмента $[0, 1]$, разглеждан като метрично пространство с обикновено евклидово разстояние. Тъй като всяко отворено множество в сегмента съдържа в себе си интервал, достатъчно е да покажем, че всеки интервал (кълбо) съдържа вътре в себе си друг интервал, в който няма точки, принадлежащи на K. Нека σ е произволен интервал от сегмента $[0, 1]$. Ако той не съдържа точки на K, построението е завършено. Ако съдържа точка $x \in K$ и $x \in \sigma$, то можем да изберем толкова голямо m, че $x \in A_m \subset I_m$ и $A_m \subset \sigma$. m е естествено число. Намираме интервала с дължина 3^{-m-1} и с център в средата на A_m. Този интервал не съдържа точки от K, а се съдържа в σ. □

12.1.5. Сходимост. Непрекъснати изображения

Определение 12. *Редицата $\{a_n\}$ от точки на метрично пространство се нарича* ***сходяща*** *към точката a от това пространство, ако всяка околност на точката a съдържа всички точки на редицата с изключение на краен брой. Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща към (клони към) a, това се записва $a_n \to a$, $n \to \infty$, или* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Непосредствено от определението следва, че ако $a_n \to a$, то $\rho(a_n, a) \to 0$, $n \to \infty$.

В сила е твърдението:

Лема 3. *Точката $a \in R$ принадлежи на затворената обвивка $\bar{A}$ на дадено множество A тогава и само тогава, когато съществува редица $\{a_n\}$ от точки на множеството A, сходяща към a.*

Доказателство. Нека $a \in \bar{A}$, тогава a принадлежи на всяко затворено множество, съдържащо A. Да вземем за околност на точката a кълбото $O(a, n^{-1})$, където n е естествено число, по-голямо от някое фиксирано число. В това кълбо има поне една точка $a_n \in A$. Ако това не е така, то $a \notin A$ и съществува околност на точката a, в която няма точки на A. Допълнението на тази околност е затворено множество, съдържащо множеството A, и точката a не може да принадлежи на това затворено множество. Така стигаме до противоречие и следователно $a_n \to a$ при $n \to \infty$, $a_n \in A$.

Вярно е и обратното: ако $a_n \to a$ и $a_n \in A$, то $a \in \bar{A}$.

Ако всяка околност на точката a се пресича с A, то $a \in \bar{A}$. Действително, ако $a \in A$, то $a \in \bar{A}$. Ако $a \notin A$, то ако допуснем, че $a \notin \bar{A}$ и вземем допълнението $\bar{A}'$, ще получим околност на точката

a — множеството $\bar{A}'$, която не се пресича с A, а това противоречи на условието, че всяка околност на точката a се пресича с A.

От $a_n \to a$ и $a_n \in A$ следва, че всяка околност на точката a съдържа точка a_n от множеството A, т. е. се пресича с A. □

Едновременно доказахме и следното твърдение:

Твърдение 1. *Точката $a \in \bar{A}$ тогава и само тогава, когато всяка околност Σ_a на точката a се пресича с A.*

Понятието непрекъснатост на функция на числов аргумент допуска естествено обобщение в случая, когато имаме изображение на едно метрично пространство в друго. Ще дадем следното определение:

Определение 13. *Изображението g на едно метрично пространство $R(X, \rho)$ в друго $R_0(Y, \rho_0)$ се нарича* ***непрекъснато*** *в точката x, ако за всяка околност $\Sigma_{g(x)}$ на точката $g(x)$ съществува такава околност Σ_x на точката x, че $g(\Sigma_x) \subset \Sigma_{g(x)}$. Ако g е непрекъснато във всяка точка на пространството R, то g се нарича непрекъснато изображение в R.*

В сила е следната лема:

Лема 4. *Изображението $g: R \to R_0$ на едно метрично пространство R в друго R_0 е непрекъснато в R тогава и само тогава, когато прообразът на всяко отворено множество е отворено множество.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека $g: R \to R_0$ е непрекъснато изображение на R в R_0 и Σ_0 е отворено множество в R_0. Ако $g^{-1}(\Sigma_0) = \{x : x \in R,\ g(x) \in \Sigma_0\} = \emptyset$, то $g^{-1}(\Sigma_0)$ е очевидно отворено, тъй като $\emptyset$ е отворено.

Нека $g^{-1}(\Sigma_0) \neq \emptyset$ и $x \in \Sigma = g^{-1}(\Sigma_0)$. Тъй като $x \in g^{-1}(\Sigma_0)$, то $g(x) \in \Sigma_0$; следователно Σ_0 може да се разглежда като околност на точката $g(x)$. Поради непрекъснатостта на g в R (а следователно и в точката x) съществува такава околност Σ_x на точката x, че $g(\Sigma_x) \subset \Sigma_0$, т. е. $\Sigma_x \subset g^{-1}(\Sigma_0)$. И така за произволна точка $x \in g^{-1}(\Sigma_0)$ съществува такава околност Σ_x, че $\Sigma_x \subset g^{-1}(\Sigma_0)$. Понеже $\Sigma = \bigcup_{x \in \Sigma} \Sigma_x$, то множеството Σ е отворено като обединение на отворените множества Σ_x. Така че прообразът на всяко отворено множество е отворено.

Достатъчност. Нека е дадено, че при изображението $g: R \to R_0$ прообразът на всяко отворено множество е отворено. Вземаме произволна точка $x \in X$, $R = (X, \rho)$, и произволна околност $\Sigma_{g(x)}$ на образа ѝ в R_0. Тогава $\Sigma_x = g^{-1}(\Sigma_{g(x)})$ по условие е отворено множество в R и е околност на точката x, като при това образът на Σ_x при изображението g се съдържа в $\Sigma_{g(x)}$. Следователно изображението g според определението е непрекъснато в точката x.

Тъй като тези разсъждения са приложими за всяка точка $x \in R$, то изображението g е непрекъснато в R. □

Определение 13 за непрекъснатост на изображение $g: R \to R_0$ в точка $x \in R$ очевидно може да се изкаже и по следния начин:

Определение 13'. *Изображението g на едно метрично пространство $R(X, \rho)$ в друго $R_0(Y, \rho_0)$ се нарича* ***непрекъснато*** *в точката x, ако за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува такова число $\delta > 0$, че ако точката y принадлежи на отвореното кълбо $O(x, \delta)$ с център в точката x и радиус δ, то точката $g(y)$ принадлежи на отвореното кълбо $O_0(g(x), \varepsilon)$ с център в точката $g(x)$ и радиус ε, лежащо в пространството R_0.*

Последното определение може да се изкаже и по следния начин: Изображението $g: R \to R_0$ е непрекъснато в точката x, ако $\lim_{y \to x} g(y) = g(x)$.

От неравенството на триъгълника лесно се получава, че функцията разстояние ρ е непрекъсната в точката x при фиксирано y. В действителност тя е непрекъсната функция и по двете променливи.

В случая, когато метричното пространство R е числовата ос с обичайното разстояние между числата, т. е. пространството E^1, а изображението g е реална функция в E^1, даденото определение 13 за непрекъснатост очевидно съвпада с определенията от гл. 4.

Ще дадем още следното определение:

Определение 14. *Изображението $g: R \to R_0$ на метричното пространство R в метричното пространство R_0 се нарича* ***хомеоморфизъм,*** *ако g изобразява R в R_0 взаимно еднозначно и g е непрекъснато заедно с обратното си изображение g^{-1}.*

12.1.6. Компактност. ***Покритие*** *на множество A в метрично пространство се нарича всяко семейство от отворени множества, обединението на които съдържа A.*

Определение 15. *Метричното пространство $R = (X, \rho)$ се нарича* ***компактно*** *или* ***компакт,*** *ако всяко покритие съдържа крайно подпокритие, т. е. от всяко покритие от отворени множества на пространството R може да се избере крайна система (подпокритие), съдържаща цялото пространство.*

Всеки сегмент $[a, b]$ от числовата права е компакт, което следва от това, че от всяко покритие на този сегмент с отворени множества може да се избере крайно подпокритие.

Може да се покаже, че едно метрично пространство е компактно тогава и само тогава, когато от всяка редица от точки може да се избере подредица, сходяща към точка от това пространство.

Лема 5. *Затворено подмножество на компактно метрично пространство е компактно.*

Доказателство. Нека F е затворено подмножество на компактното метрично пространство $R(X, \rho)$ и $\{\Sigma_\alpha\}$ е система от отворени подмножества, покриваща F. Към системата $\{\Sigma_\alpha\}$ присъединяваме отвореното множество $G=X\setminus F$ и полученото покритие на цялото пространство означаваме със $\{\Sigma'_\alpha\}=\{\Sigma_\alpha\}\cup G$. Поради компактността на R от системата $\{\Sigma'_\alpha\}$ можем да изберем крайно подпокритие на цялото пространство — системата $\{\Sigma'_i\}_{i=1}^N$. Премахвайки, ако е необходимо, от системата $\{\Sigma'_i\}_{i=1}^N$ множеството G, получаваме крайно покритие на множеството F, избрано от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. □

Лема 6. *Образът на компактно пространство $R=(X, \rho)$ при непрекъснато изображение е компактно пространство.*

Доказателство. Нека g е непрекъснато изображение на R в R_0. Нека $\{\Sigma_\alpha\}$ е покритие на R_0 с отворени множества, а $\Psi_\alpha=g^{-1}(\Sigma_\alpha)$. Множествата Ψ_α са отворени (вж. лема 4) и $\{\Psi_\alpha\}$ е покритие на R. Поради компактността на R можем да изберем от това покритие крайно подпокритие: $\{\Psi_i\}_{i=1}^m$; тогава $\{\Sigma_i\}_{i=1}^m$, $m<\infty$, е покритие на R_0, като $\Sigma_i=g(\Psi_i)$, $i=1, 2, 3, \cdots, m$. □

Лема 7. *Всяко компактно подмножество на метрично пространство $R(X, \rho)$ е затворено.*

Доказателство. Нека F е компактно подмножество на $R(X, \rho)$ и нека $a\in X\setminus F$; за всяко $x\in F$ съществуват съответно околности Σ_a и Σ_x на точките a и x, за които $\Sigma_a\cap\Sigma_x=\emptyset$. За такива околности могат да бъдат избрани например кълбата $O(a, r)$ и $O(x, r)$, $r=\frac{1}{3}\rho(a, x)$. Поради компактността на F можем да изберем от това покритие крайно подпокритие $\{\Sigma_{x_i}\}_{i=1}^m$. Да разгледаме съответстващите на Σ_{x_i} околности Σ'_a, които по построение не се пресичат със Σ_{x_i}, и $\bigcap_{i=1}^m \Sigma'_a=\Sigma$ е околност на точката a. Очевидно $\Sigma\cap\Sigma_{x_i}=\emptyset$, $i=1, 2, \cdots, m$, и затова $\Sigma\cap F=\emptyset$. Следователно $\Sigma\subset X\setminus F$, т. е. множеството $X\setminus F$ е отворено, а F е затворено. □

Лема 8. *Нека $g: R(X, \rho)\to E^1$, където E^1 е реалната числова ос. Ако g е непрекъснато изображение, R е компакт, то g е ограничено и достига точните си горна и долна граница.*

Доказателство. Според лема 6 подмножеството $g(R)$ на метричното пространство E^1 е компактно, а по лема 7 то е затворено. Тогава очевидно съществува такова неотрицателно число T, че $|g(R)|\leq T$, и $g(R)$ съдържа точните си горна и долна граница, тъй като всяко компактно множество от числовата ос е ограничено. □

По-рано бяха дадени (вж. определение 8) понятията относително отворени и относително затворени множества. Ще поясним още веднъж, че понятията отвореност и затвореност на множество са относителни. Едно и също множество може да бъде отворено в едно пространство и да не бъде отворено в друго метрично пространство, съдържащо първото. Например сегментът $[0, 1]$ е отворено множество в метричното пространство $R=(Y, \rho)$, където $Y=[0, 1]$, а ρ е обичайната евклидова метрика в сегмента. От друга страна, същият сегмент $[0, 1]$ е затворено, но не е отворено множество в метричното пространство $E^1=(X, \rho)$, където $X=(-\infty, \infty)$, а ρ е същата функция. Обаче компакт е абсолютно понятие, т. е. не зависи от съдържащото го пространство. В сила е твърдението:

Твърдение 2. *Нека $R_F=(F, \rho)$, $R_Y=(Y, \rho)$, $R_X=(X, \rho)$ са метрични пространства, при това $F\subset Y\subset X$. Тогава множеството F е компакт относно R_Y* тогава и само тогава, когато е компактно относно R_X.*

Да предположим, че F е компактно относно R_X. Нека $\{\Sigma_\alpha\}$ е семейство от множества, отворени относно R_Y, и $F\subset\bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$. Съгласно определение 8 за всяко α съществува такова множество G_α, отворено относно R_X, че $\Sigma_\alpha=Y\cap G_\alpha$. Тъй като F е компактно относно R_X, имаме $F\subset G_{\alpha_1}\cup\cdots\cup G_{\alpha_n}$ при някой избор на краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Тъй като $F\subset Y$, то от последното включване следва, че $F\subset\Sigma_{\alpha_1}\cup\cdots\cup\Sigma_{\alpha_n}$. С това е доказано, че множеството F е компактно относно $R_Y(Y, \rho)$.

Нека сега F е компактно относно R_Y. Нека $\{G_\alpha\}$ е отворено в R_X покритие на F и $\Sigma_\alpha=Y\cap G_\alpha$. Тогава съществуват краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, такива, че $F\subset\Sigma_{\alpha_1}\cup\cdots\cup\Sigma_{\alpha_n}$. Понеже $\Sigma_\alpha\subset G_\alpha$, то е изпълнено и включването $F\subset G_{\alpha_1}\cup\cdots\cup G_{\alpha_n}$. С това е доказано, че F е компактно относно R_X. □

12.1.7. Базис на пространство

Определение 16. *Системата от отворени множества $\{\Sigma_\alpha\}$ на метричното пространство $R=(X, \rho)$ се нарича* **базис** *на това пространство, ако всяко непразно отворено множество в пространството R може да се представи като обединение на множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$.*

В сила е следната лема:

Лема 9. *За да бъде системата $\{\Sigma_\alpha\}$ от отворени множества базис на пространството $R=(X, \rho)$, е необходимо и достатъчно*

* Множеството F е компактно относно R_Y, ако от всяко негово покритие с отворени относно R_Y множества може да се избере крайно подпокритие.

за всяко отворено множество G и всяка точка $a \in G$ да съществува такова множество Σ_{a_0} от тази система, че $a \in \Sigma_{a_0} \subset G$.

Доказателство. Нека системата $\{\Sigma_\alpha\}$ е базис на пространството. Тогава всяко отворено множество G е обединение на множества от $\{\Sigma_\alpha\}$. Затова за всяка точка $a \in G$ съществува такова множество Σ_{a_0}, че $a \in \Sigma_{a_0} \subset G$ и Σ_{a_0} принадлежи на дадената система $\{\Sigma_\alpha\}$.

Обратно, нека са изпълнени условията, формулирани в лемата. Тогава всяко отворено множество G може да се представи във вида

$$G = \bigcup_{a \in G} \Sigma_{a_0},$$

т. е. системата $\{\Sigma_\alpha\}$ е базис на пространството. Лемата е доказана. □

Определение 17. *Метричното пространство $R=(X, \rho)$ се нарича* ***пространство с изброим базис,*** *ако в него съществува поне един базис, състоящ се от не повече от изброим брой множества. Пространства с изброим базис се нарачат* ***пространства с втора аксиома за изброимост.***

Лема 10. *Метричното пространство $R=(X, \rho)$ е пространство с изброим базис тогава и само тогава, когато в него има изброимо, навсякъде гъсто множество.*

Доказателство. Нека $A=\{a_n\}_1^\infty$ е изброимо, навсякъде гъсто множество в R. Всевъзможните кълба $O(a_n, m^{-1})$, където n, m са всевъзможните естествени числа, образуват изброим базис на пространството.

Обратно, ако в R има изброим базис $\{\Sigma_n\}_1^\infty$, то като изберем по точка $a_n \in \Sigma_n$, получаваме множеството $A=\{a_n\}_1^\infty$, което е навсякъде гъсто. Действително, ако $A \neq X$, то отвореното множество $G=X \setminus A$ би било непразно и не би съдържало нито една точка от $A=\{a_n\}_1^\infty$, което е невъзможно, защото G е отворено множество и е обединение на някои от множествата на системата $\{\Sigma_n\}$, а $a_n \in \Sigma_n$. □

Примери:

1. Лесно е да се построят метрично пространство $R=(X, \rho)$ и затворени кълба $K_1(x_1, r_1)$ и $K_2(x_2, r_2)$, за които $K_1 \subset K_2$, а $r_1 > r_2$.

Действително нека $R(X, \rho)$ е метрично пространство, състоящо се от всички точки (x, y) на затворения кръг в равнината $xy: X=\{(x, y): x^2+y^2 \leq 9\}$ с обичайната евклидова метрика ρ. Кълбото K_2 ще определим така: $K_2 \equiv R=(X, \rho)$. Нека $K_1=K_2 \cap \{(x, y): (x-2)^2+y^2 \leq 16\}$. Тогава $K_1 \subset K_2$, $r_1=4$, $r_2=3$.

2. Множеството A от метрично пространство е затворено тогава и само тогава, когато съвпада със затворената си обвивка $\bar{A}$, т. е. $A=\bar{A}$.

Действително, ако $A=\bar{A}$, то понеже затворената обвивка на всяко множество е затворена (като сечение на затворени множества), A е затворено. Обратно, ако A е затворено, то $\bar{A} \subset A$. От друга страна, от определението на затворена обвивка следва $A \subset \bar{A}$, т. е. ако A е затворено, то $A=\bar{A}$.

3. Кълбо $O(x_0, r)$ в метричното пространство R е отворено множество. Ако $x \in O(x_0, r)$, т. е. $\rho(x, x_0)<r$, то кълбото $O(x, \varepsilon)$ при $0<\varepsilon<r-\rho(x_0, x)$ ще принадлежи на изходното множество: $O(x, \varepsilon) \subset O(x_0, r)$. Действително, ако $y \in O(x, \varepsilon)$, т. е. $\rho(x, y)<\varepsilon$, то

$$\rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x)+\rho(x, y)<\rho(x_0, x)+r-\rho(x_0, x)=r.$$

Затвореното кълбо — множеството $K(x, r)=\{y: \rho(x, y) \leq r\}$, е затворено множество в R, понеже допълнението му е отворено множество.

4. Затворената обвивка $\bar{A}$ на множеството A от метрично пространство се състои от всички точки, които са точки на сгъстяване за множеството A или са елементи на A. Действително цялото множество се съдържа в затворената си обвивка $A \subset \bar{A}$. Ще докажем, че затворената обвивка на A съдържа и точките на сгъстяване на A. Но затворената обвивка на множеството е затворено множество, а ако едно множество е затворено, то съдържа всички свои точки на сгъстяване: ако една точка не принадлежи на затворено множество, то тя принадлежи на допълнението му, което е околност на тази точка, несъдържаща точки от затвореното множество, т. е. точката не е точка на сгъстяване за затвореното множество. По такъв начин затворената обвивка на A съдържа точките на множеството A и точките на сгъстяване на A. Обратно, нека $x \in \bar{A}$, тогава или x е точка на сгъстяване на A, или $x \in A$. Ако $x \in \bar{A}$ и $x \in A$, то всичко е доказано. Ако $x \in \bar{A}$, но $x \notin A$, то x е точка на сгъстяване за A. Ако допуснем противното, тогава ще съществува околност Σ_x на точката x, несъдържаща точки от множеството A. Нейното допълнение е затворено множество, съдържащо A и несъдържащо x, т. е. точката $x \notin \bar{A}$, което е невъзможно.

5. В някои метрични пространства $R=(X, \rho)$ могат да се построят отворено кълбо $O(x, r)=\{y: \rho(x, y)<r\}$ и затворено кълбо $K(x, r)=\{y: \rho(x, y) \leq r\}$ с общ център и равни радиуси, за които $\bar{O}(x, r) \neq K(x, r)$. Действително нека X е множество, съдържащо повече от една точка, и нека

$$\rho(x, y)=\begin{cases}1, \text{ ако } x\neq y,\\ 0, \text{ ако } x=y;\end{cases}$$

тогава

$$K(x, 1)=X,\ O(x, 1)=x,\ \bar{O}(x, 1)=x+K(x, 1).$$

12.2. Свойства на метричните пространства

В предишния параграф бяха дадени основните свойства на метричните пространства въз основа на понятията отворено и затворено множество. Фактически всички те използват само свойствата на отворените множества, а именно че сума на произволен брой и сечение на краен брой отворени множества са отворени множества, цялото пространство и празното множество са отворени, и не използват понятия като кълбо и разстояние. Всичко това навежда на мисълта, че може да се построят пространства, в които отворено (затворено) множество се определя аксиоматично така, че да се запазват свойствата, формулирани в лема 1. Тогава необходимостта от определения 1 и 2 отпада, а твърдението на лема 1 става аксиома. Именно така и ще постъпим в следващия параграф при изучаването на топологични пространства. Ясно е, че така ще се стигне до пълно еднообразие при изучаване на основните свойства на метричните и топологичните пространства.

Такъв подход към изучаване свойствата на метричните пространства (формулировки и доказателства, използващи само свойствата на отворените (затворените) множества) притежава редица предимства — допуска например обобщение в по-общи пространства. Заедно с това, понеже в структурата на метричните пространства е въведена функция разстояние, тези пространства трябва да притежават и свойства, присъщи само на тях. Често именно тези свойства се изучават при разглеждане на метрични пространства.

В този параграф ще изложим тези фундаменталии свойства на метричните пространства. Всички те използват понятието пълнота на пространство.

Определение 1. *Редицата $\{x_n\}$ от елементи на метричното пространство $R=(X, \rho)$ се нарича* ***фундаментална,*** *ако $\rho(x_n, x_m)\to 0$ когато $n, m\to\infty$; n, m са естествени числа.*

Определение 2. *Метричното пространство $R=(X, \rho)$ се нарича* ***пълно,*** *ако всяка фундаментална редица е сходяща към елемент на това пространство.*

Както вече говорихме, ако редицата $\{x_n\}$ е сходяща към елемента x $(x_n\to x)$, то $\rho(x_n, x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема 12.1 (принцип на вложените кълба). *За да бъде едно метрично пространство пълно, е необходимо и достатъчно всяка редица от затворени, вложени едно в друго кълба, радиусите на които клонят към нула, да има непразно сечение.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека $R=(X, \rho)$ е пълно метрично пространство, а $K_1(x_1, r_1)\supset K_2(x_2, r_2)\supset K_3(x_3, r_3)\supset\dots$ са вложени едно в друго затворени кълба. Редицата от центровете им е фундаментална, тъй като $\rho(x_n, x_m)<r_n$, $m>n$, а $r_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Понеже пространството R е пълно, то съществува $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x\in R$. Очевидно $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Действително x е точка на сгъстяване за всяко K_n (вж. определение 4, 12.1.2), понеже при $m>n$ имаме $x_m\in K_m\subset K_n$, а тъй като K_n е затворено множество, то $x\in K_n$.

Достатъчност. Трябва да покажем, че ако $\{x_n\}$ е фундаментална редица, тя има граница $x\in R$. Избираме такава точка x_{n_1}, че $\rho(x_n, x_{n_1})<2^{-1}$, $n>n_1$. Приемаме x_{n_1} за център на затворено кълбо с радиус единица, което означаваме с $K(x_{n_1}, 1)$. Избираме след това точка x_{n_2} от редицата $\{x_n\}$, удовлетворяваща следните условия: $\rho(x_n, x_{n_2})<2^{-2}$ за всяко $n>n_2$, $n_2>n_1$. Приемаме точката x_{n_2} за център на кълбо с радиус $1/2$: $K(x_{n_2}, 2^{-1})$. Нека $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ $(n_1<n_2<\dots<n_k)$ са вече избрани. Тогава $x_{n_{k+1}}$ избираме така, че да бъде изпълнено условието: $\rho(x_n, x_{n_{k+1}})<2^{-k-1}$ за всяко $n>n_{k+1}$, $n_{k+1}>n_k$. Както и по горе, приемаме $x_{n_{k+1}}$ за център на затворено кълбо с радиус 2^{-k}: $K(x_{n_{k+1}}, 2^{-k})$, и т. н. Така получаваме редица от вложени едно в друго затворени кълба с радиуси, които клонят към нула. По предположение съществува точка x, обща за всички кълба. Ясно е, че $\rho(x_{n_k}, x)\to 0$, $n_k\to\infty$. Следователно фундаменталната редица $\{x_n\}$ съдържа подредица $\{x_{n_k}\}$, клоняща към точка x от пространството. Тогава и самата редица ще клони към същата граница. □

Забележка. Всички условия, изброени в теоремата, са съществени: пълнота на пространството, затвореност на кълбата, условието, че са вложени едно в друго и радиусите им клонят към нула. Най-малко е очевидна необходимостта на последното условие — да имат непразно сечение.

Ето например пълно метрично пространство и редица от вложени едно в друго кълба, имащи празно сечение.

Нека $R=(N, \rho)$, където N е множеството на естествените числа, а

$$\rho(m, n)=\begin{cases}1+1/(m+n), & \text{ако } n\neq m,\\ 0, & \text{ако } n=m.\end{cases}$$

Нека

$$K(n,\ 1+1/2n)=\{m:\rho(m,\ n)\leq 1+1/2n\},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Тогава е очевидно,че $K(n,\ 1+1/2n)$ са затворени и вложени едно в друго, а пространството е пълно, защото всяка фундаментална редица е сходяща в пространството. Но сечението на тези кълба е очевидно празно.

Определение 3. *Множеството M в метрично пространство R се нарича* ***множество от първа категория,*** *ако може да се представи като обединение на изброимо много навсякъде негъсти в R множества.*

Всички останали множества се наричат ***множества от втора категория.***

Теорема 12.2 (теорема за категориите). *Нека $R=(X,\ \rho)$ е непразно пълно метрично пространство. Тогава X е множество от втора категория, т. е. X не може да се представи като обединение на изброимо много навсякъде негъсти множества.*

Доказателство. Ще допуснем противното, че $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ и всяко от множествата A_n, $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, е навсякъде негъсто в R. Нека K_0 е затворено кълбо с радиус единица. Понеже множеството A_1 е навсякъде негъсто, то съществува такова затворено кълбо K_1 с радиус, по-малък от $1/2$, че $K_1\subset K_0$ и $K_1\cap A_1=\emptyset$. Тъй като множеството A_2 е навсякъде негъсто, то по същия начин съществува затворено кълбо с радиус, по-малък от $1/2^2$, за което $K_2\cap A_2=\emptyset$, $K_2\subset K_1$ и т. н. В резултат получаваме редица от вложени едно в друго затворени кълба $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, радиусите на които клонят към нула. Според теорема 12.1 съществува $x\in K_n$ за всяко n, $x\in X$. Тъй като по построение $K_n\cap A_n=\emptyset$, то $x\notin A_n$ за всяко n. Следователно $x\notin\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=X$. Това противоречи на допускането, че $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. □

Определение 4. *Изображението g на метричното пространство R в себе си се нарича* ***свиващо,*** *ако съществува такова число α, $0<\alpha<1$, че*

$$\rho(g(x),\ g(y))\leq\alpha\rho(x,\ y).$$

Теорема 12.3 (принцип на свиващите изображения). *Всяко свиващо изображение на пълно метрично пространство $R=(X,\ \rho)$ в себе си има, и то само една, неподвижна точка x, т. е. такава точка $x\in X$, че $g(x)=x$.*

Доказателство. Нека x_0 е точка от X. Определяме редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по правилото: $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, $x_3=g(x_2)$, . . . Редицата $\{x_n\}$ е фундаментална в R. Действително, ако $m>n$, то

$$\begin{aligned}\rho(x_n,\ x_m)&=\rho(g(x_{n-1}),\ g(x_{m-1}))\leq\alpha\rho(x_{n-1},\ x_{m-1})\\&\leq\ldots\leq\alpha^n\rho(x_0,\ x_{m-n})\leq\alpha^n\{\rho(x_0,\ x_1)+\rho(x_1,\ x_2)\\&+\ldots+\rho(x_{m-n-1},\ x_{m-n})\}\leq\alpha^n\rho(x_0,\ x_1)(1+\alpha+\ldots+\alpha^{m-n-1})\\&\leq\alpha^n\rho(x_0,\ x_1)/(1-\alpha),\end{aligned}$$

където $\alpha<1$.

По такъв начин $\rho(x_n,\ x_m)\to 0$, $m>n\to\infty$. Понеже пространството R е пълно, съществува $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Нека $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Тогава от непрекъснатостта* на изображението g имаме

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

Следователно съществува неподвижна точка. Ще докажем, че тя е единствена. Ако $g(x)=x$ и $g(y)=y$, то $\rho(x,\ y)\leq\alpha\rho(x,\ y)$, т. е. $c\rho(x,\ y)=0$; следователно $x=y$. □

Забележка. Ако изображението g на метричното пространство R в себе си притежава само свойството, че $\rho(g(x),\ g(y))<\rho(x,\ y)$, $x,\ y\in R$, $x\neq y$, то може и да няма неподвижна точка. Ето и пример: нека $R=(X,\ \rho)$, където $X=[1,\ \infty)$, а ρ е обичайната евклидова метрика. Нека $g(x)=x+1/x$. Тогава $\rho(g(x),\ g(y))=|x+1/x-y-1/y|<|x-y|$. Неподвижна точка няма, тъй като $g(x)=x+1/x\neq x$ за всяко $x\in X$.

Определение 5. *Ще казваме, че две изображения g и g_1 на метричното пространство $R=(X,\ \rho)$* ***комутират,*** *ако за всяко $x\in X$ е изпълнено равенството $g(g_1(x))=g_1(g(x))$.*

Теорема 12.4 (обобщение на принципа на свиващите изображения). *Нека g и g_1 са изображения на метричното пространство $R(X,\ \rho)$ в себе си. Тогава, ако изображението g_1 е свиващо и изображенията g и g_1 комутират, то уравнението $g(x)=x$ има решение $x\in R$.*

Доказателство. Според предишната теорема (теорема 12.3) съществува и при това само една такава точка $x\in R$, че $g_1(x)=x$. Прилагаме към двете страни на равенството изображението g. Като използваме, че изображенията комутират, получаваме

$$g(g_1(x))=g(x),\ g_1(g(x))=g(x),\ g_1(y)=y,$$

където $y=g(x)$. Като вземем пред вид, че изображението g_1 е свиващо и има единствена неподвижна точка, получаваме, че $x=y=g(x)$. Следователно и за изображението g съществува неподвижна точка.

* Непрекъснатостта следва от това, че g е свиващо изображение.

Забележка. Степен n на изображението g се нарича изображението g^n, получено в резултат на n последователни прилагания на изображението g:

$$g^n(x)=\underbrace{g(g(\cdots(g}_{n}(x)\cdots), \quad x\in X.$$

От теорема 12.4 следва, че ако изображенията g и g^n комутират и g е такова изображение, че някоя негова степен е свиващо изображение, то уравнението $g(x)=x$ има едно и само едно решение. Единствеността на решението следва от това, че всяка точка, неподвижна за изображението g, ще бъде неподвижна и за изображението g^n.

Примери:

1. Намиране на корени (нули) на функции. Нека $\varphi(t)$, $a\leq t\leq b$, е реална функция, удовлетворяваща условието на Липшиц:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leq\theta|t_1-t_2| \quad \text{и} \quad 0<\theta<1$$

и изобразяваща сегмента $[a, b]$ в себе си. Ако въведем метричното пространство $R=(X, \rho)$, където $X=[a, b]$ а ρ е обичайната евклидова метрика на сегмента, то изображението φ е свиващо и следователно числовата редица t_0, $t_1=\varphi(t_0)$, $t_2=\varphi(t_1)$, $\cdots$ е сходяща към единствения корен на уравнението $t=\varphi(t)$ за всяко $t_0\in[a, b]$. Изображението φ е свиващо, ако например $|\varphi'(t)|\leq\theta<1$, $t\in[a, b]$.

Нека имаме да решаваме уравнение от вида $F(t)=0$, като при това $F(t)$ е реална функция, дефинирана в $[a, b]$ и $F(a)<0$, $F(b)>0$, $0<\theta_1\leq F'(t)\leq\theta_2$, $t\in[a, b]$. Тогава, ако разгледаме функцията $\varphi(t)=t-\lambda F(t)$, $\lambda\in E^1$, и намерим корена на уравнението $\varphi(t)=t$, то ще решим и изходната задача. Към последното уравнение можем да приложим предишните разсъждения, ако например $|\varphi'(t)|\leq\theta<1$. Имаме $1-\lambda\theta_2\leq\varphi'(t)\leq1-\lambda\theta_1$. Не е трудно да се избере реалното число $\lambda>0$ така, че да е изпълнено условието: $0\leq\varphi'(t)\leq\theta<1$. Тогава, както не е трудно да се убедим, функцията φ ще изобразява сегмента $[a, b]$ в себе си. Наистина, тъй като $\varphi'(t)\geq0$, то φ не намалява; следователно $\varphi(a)\leq\varphi(t)\leq\varphi(b)$ за $t\in[a, b]$. Но $\varphi(a)=a-\lambda F(a)>a$, $\varphi(b)=b-\lambda F(b)<b$, т. е. $a<\varphi(t)<b$, $t\in[a, b]$.

2. Намиране решения на система уравнения от вида $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$. Нека $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ е изображение на n-мерното пространство X в себе си: наредената n-орка $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in X$ преминава в наредената n-орка $(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in X$, т. е, изображението $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$ привежда наредена n-орка от числа в наредена n-орка от числа. Тук $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ са вектори, $\mathbf{A}$ е матрица, $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$.

Ако изображението $\mathbf{g}$ е в някое пълно метрично пространство и при някакви условия е свиващо, то векторното уравнение $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ ще има едно и само едно решение. Ще намерим такива условия за изображението $\mathbf{g}$ и ще въведем метрика в множеството X, т. е. ще образуваме съответни метрични пространства:

а) Нека

$$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\max\{|x_i-y_i|: 1\leq i\leq n\} \text{ и } R^1=(X, \rho_1);$$

тогава

$$\rho_1(\mathbf{y}', \mathbf{y}'')\leq\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\rho_1(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \quad \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{y}', \mathbf{y}''\in X,$$

и условието $\mathbf{g}$ да бъде свиващо ще е изпълнено, ако

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leq\alpha<1, \quad i=1, 2, 3, \cdots, n.$$

в) Ако въведем метрика в X по правилото

$$\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

не е трудно да се види, че изображението е свиващо, ако

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\leq\alpha<1, \quad j=1, 2, 3, \cdots, n.$$

с) Накрая, ако метриката е зададена така:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2},$$

то изображението $\mathbf{g}$ е свиващо, ако

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\leq\alpha<1.$$

Изброените условия са достатъчни, за да има уравнението $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ и при това единствено решение, т. е. системата $x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i$, $i=1, 2, 3, \cdots, n$, да има, и то единствено решение.

3. Съществуване и единственост на решението на обикновено диференциално уравнение от първи ред. Ще разгледаме т. нар. задача на Коши. Трябва да се намери функция y, която удовлетворява уравнението $y'=f(t, y)$ и $y(t_0)=y_0$ при $t=t_0$, където y_0 е някакво число; при това трябва да докажем, че това решение y е само едно.

Ще предположим, че функцията $f(t, y)$ е непрекъсната в множеството: $a\leq t\leq b$, $-\infty<y<+\infty$, удовлетворява условието на Липшиц по y, т. е.

$$|f(t, y_1)-f(t, y_2)|\leq K|y_1-y_2|,$$

и точката t_0 е вътрешна за сегмента $[a, b]$. Понеже решаването на задачата на Коши е еквивалентно на решаването на интегралното уравнение: $y(t)=y_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\,d\xi$, то имаме дадено изображение на множеството от функции $\{y\}$ по правилото: $g(y(t))=y_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\,d\xi$. Въвеждаме пространството $C_{[a, b]}$. Тогава изображението g, определено в това пространство, го изобразяваме в себе си, а задачата за намиране решение на интегралното уравнение се свежда до намиране на неподвижната точка на изображението g, т. е. до намиране на такава функция y, че $g(y)=y$. За да съществува такава точка и за да бъде единствена, достатъчно е изображението g да бъде свиващо.

Понеже от условието на Липшиц следва, че

$$|f(t, y_1)-f(t, y_2)|\leq K|y_1-y_2|\leq K\rho(y_1, y_2),$$

то

$$\rho(g(y), g(z))\leq \max_{a\leq t\leq b}\int\limits_{t_0}^{t} K\rho(y, z)\,dt\leq K(b-a)\rho(y, z).$$

Тук ρ е метриката в $C[a, b]$, $\rho(y, z)=\max\limits_{a\leq t\leq b}|y(t)-z(t)|$. Следователно изображението е свиващо, ако сегментът $[a, b]$ е достатъчно малък, така че

$$K(b-a)=\theta<1.$$

При тези условия получаваме теоремата за съществуване и единственост на задачата на Коши.

4. Оператор на Волтера и свойства на неговата

n-та степен. Ще покажем, че някоя степен на изображението, зададено с интегралния оператор на Волтера:

$$g(f(t))=\lambda\int\limits_{a}^{t} K(t, \xi)f(\xi)\,d\xi+\varphi(t),$$

където λ е число, $K(t, \xi)$, $\varphi(t)$ са непрекъснати функции на аргументите си, е свиващо изображение в $C_{[a, b]}$, $a\leq t\leq b$.

Нека

$$M=\max\{|K(t, \xi)|: t, \xi\in[a, b]\},\ \rho(f_1, f_2)=\max_{a\leq t\leq b}|f_1(t)-f_2(t)|.$$

Тогава

$$|g(f_1)-g(f_2)|=|\lambda|\left|\int\limits_{a}^{t} K(t, \xi)(f_1(\xi)-f_2(\xi))\,d\xi\right|$$

$$\leq|\lambda|M(b-a)\rho(f_1, f_2).$$

Оттук

$$|g^n(f_1)-g^n(f_2)|\leq|\lambda|^n M^n(b-a)^n\rho(f_1, f_2)/n!.$$

Винаги може да се избере такова n, че $|\lambda|^n M^n(b-a)^n/n!<1$, и следователно при това n изображението g^n ще бъде свиващо. Съгласно забележката след теорема 12.4 интегрално уравнение от вида $g(f)=f$ има при всяко λ решение и то е единствено.

12.3. Топологични пространства. Отворени и затворени множества

В този параграф ще изложим основните определения и факти, отнасящи се до топологични пространства.

12.3.1. Определение на топологично пространство. Понятието топологично пространство е естествено обобщение на понятието метрично пространство. При определението на метрично пространство постъпихме по следния начин: с помощта на функцията разстояние въведохме отворени и затворени множества и доказахме редица техни свойства, а след това, като използвахме тези свойства, изучихме метричните пространства. Ако искаме да намерим по-широк клас пространства от метричните пространства, е естествено да определим отворените (или затворените) множества аксиоматично. Във връзка с това ще дадем следното определение:

Определение 1. *В множеството X е определена* ***структура на топологично пространство,*** *ако е дадена система $\{\Sigma\}$ от негови подмножества, притежаваща свойствата:*

1) Множеството X и празното множество $\varnothing$ принадлежат на $\{\Sigma\}$.

2) Обединението на произволен брой множества от системата $\{\Sigma\}$ и сечението на краен брой множества от системата $\{\Sigma\}$ принадлежат на $\{\Sigma\}$.

3) За всеки две точки $x, y \in X$, $x \neq y$, съществуват такива множества Σ_x, Σ_y от системата $\{\Sigma\}$, че $\Sigma_x \cap \Sigma_y = \varnothing$ и $x \in \Sigma_x$, $y \in \Sigma_y$.

Системата $\{\Sigma\}$, удовлетворяваща условията 1) и 2), се нарича ***топология на множеството*** X.

По такъв начин двойката: множеството X и топологията $\{\Sigma\}$, образуват ***топологично пространство***; то се означава с $T=(X, \Sigma)$; топологични пространства, за които е изпълнено и условие 3), се наричат ***хаусдорфови топологични пространства.***

Примери:

1. Да разгледаме произволно метрично пространство $R=(X, \rho)$. Отворените множества според лема 1 от 12.1.2 притежават свойствата 1) и 2) от определение 1 на топологично пространство. Аксиома 3) от определение 1 е също така изпълнена в метрично пространство — ако $x \neq y$, то $\rho(x, y)=a>0$ и за кълбата $O(x, a/3)$, $O(y, a/3)$, които са отворени множества в R, имаме $O(x, a/3) \cap O(y, a/3)=\varnothing$.

Така всяко метрично пространство R е и топологично пространство $T=(X, \Sigma)$, където $\{\Sigma\}$ е системата от отворени множества в $R=(X, \rho)$.

2. Да разгледаме множеството $X=[0, 1]$. Ще зададем в това множество топология, т. е. система $\{\Sigma\}$. Причисляваме към $\{\Sigma\}$ множествата $\varnothing$ и X и всички възможни интервали от вида (α, β), където $0<\alpha<\beta<1$; полуинтервалите $(\alpha, 1]$, където $0<\alpha<1$; полуинтервалите $[0, \alpha)$, където $0<\alpha<1$, от които са изключени точките от вида $1/n$, n — естествено число и всички техни обединения. Всички аксиоми 1)—3) от определение 1 са изпълнени.

3. Ще разгледаме множеството X от произволно естество. Ще причислим към системата $\{\Sigma\}$ само цялото множество X и празното множество $\varnothing$. Аксиомите 1) и 2) са очевидно изпълнени, обаче аксиома 3) не е изпълнена. Следователно системата $\{\Sigma\}$ не задава хаусдорфова топология.

4. Нека $X=E^1$ е съвкупността на реалните числа. Ще причислим към системата $\{\Sigma\}$ всички възможни обединения на интервали от X и празното множество $\varnothing$. Тогава $T=(X, \Sigma)$ е топологично пространство.

5. Нека $X=C$ е съвкупността на всички комплексни числа. Към системата $\{\Sigma\}$ причисляваме съвкупността на всички множества от вида $|z-z_0|<\varepsilon$ при всички възможни $z_0 \in C$ и $\varepsilon>0$, техните обединения, $\varnothing$ и X. Двойката $T=(X, \Sigma)$ е топологично пространство.

12.3.2. Отворени и затворени множества

Определение 2. *Множеството $\Sigma_a \subset X$ се нарича* ***отворено в*** *$T=(X, \Sigma)$, ако $\Sigma_a \in \{\Sigma\}$.*

Определение 3. ***Околност на точката*** *$x \in X$ се нарича всяко отворено множество, съдържащо x.* ***Околност на някое подмножество на*** *X (както и на самото X) се нарича всяко отворено множество, съдържащо даденото подмножество (или X). Околност на точката x ще означаваме със Σ_x.*

След като са определени отворените множества, в топологичните пространства могат да се въведат всички понятия за метрични пространства. Така дословно се запазват определенията 4—9, 11—17 от 12.1, твърденията на лемите 1, 2, 4—9 и твърдението 2, които се доказват по същия начин.

Едно топологично пространство ще наричаме ***пространство с първа аксиома за изброимост,*** *ако за всяка точка a съществува такава изброима система от околности $\{\Sigma_a^n\}$, че за всяко отворено множество Σ_a, съдържащо точката a, съществува околност $\Sigma_a^{n_0}$ със свойство: $\Sigma_a^{n_0} \subset \Sigma_a$.* В метрично пространство първата аксиома за изброимост, както вече казахме, е изпълнена.

В сила е твърдението. *Точката a от топологично пространство T с първа аксиома за изброимост принадлежи на затворената обвивка $\bar{A}$ на дадено множество A тогава и само тогава, когато съществува редица $\{a_n\}$ от точки на множеството A, сходяща към a.*

Доказателство (вж. лема 3 от 12.1). Редицата от кълба $O(a, n^{-1})$ трябва да се замени с околности от системата $\{\Sigma_a^n\}$. При това винаги може да смятаме, че $\Sigma_a^{n+1} \subset \Sigma_a^n$, иначе Σ_a^n ще заменим с $\bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_a^k$. □

Едновременно доказахме и следното твърдение:

Твърдение 1. *В топологично пространство с първа аксиома за изброимост точката $a \in \bar{A}$ тогава и само тогава, когато всяка околност Σ_a на точката a се пресича с A.*

Топологичното пространство $T=(X, \Sigma)$ се нарича ***пространство с изброим базис,*** *ако в него съществува поне един базис, съдържащ не повече от изброим брой множества. Пространство с изброим базис се нарича още* ***пространство с втора аксиома за изброимост.***

Топологичното пространство $T=(X, \Sigma)$ е пространство с изброим базис тогава, когато то е пространство с първа аксиома за изброимост и в него има изброимо навсякъде гъсто множество. Обратно, ако в пространството T, което не е задължително с първа

аксиома за изброимост, има изброим базис, то в него има и изброимо навсякъде гъсто множество.

(За доказателството вж. лема 10 от 12.1; редицата от кълбата $O(a, m^{-1})$ на метричното пространство, където m и n са естествени числа, трябва да се замени с редицата от околности $\{\Sigma_{a_n}^m\}$, $\Sigma_{a_n}^{m+1} \subset \Sigma_{a_n}^m$. Тези околности винаги съществуват за точката a_n, понеже $T=(X, \Sigma)$ е пространство с първа аксиома за изброимост.)

Примери и забележки:

1. При задаване на топология на множеството X можем да се ограничим само с аксиомите 1) и 2) от определение 1. Полученото определение за топологично пространство е най-общо. От този клас пространства може да се отдели по-тесен клас, за който аксиома 3) трябва да се замени с аксиома 3'): За всеки две точки x и y на пространството T, $x \neq y$, съществуват такава околност Σ_x на точката x, че $y \notin \Sigma_x$, и такава околност Σ_y на точката y, че $x \notin \Sigma_y$. Не за всяко пространство с топология, определена от аксиоми 1) и 2), е изпълнена аксиома 3). Ето един традиционен пример. Множеството $X=\{a, b\}$ се състои от две точки. Топологията ще зададем с отворените множества X, $\emptyset$ и точката b. Аксиомите 1) и 2) са изпълнени, а 3) не е изпълнена. Накрая ще отбележим, че не всяко пространство T, в което топологията се задава с аксиомите 1), 2) и 3'), удовлетворява определение 1. Например, ако $X=[0, 1]$ и към системата, определяща топологията, отнесем X, $\emptyset$ и $\Sigma_{a_n}=[0, 1] \setminus \{\alpha_n\}$, където $\{\alpha_n\}$ е произволно изброимо множество от сегмента $[0, 1]$, то аксиомите 1), 2), 3') са изпълнени, но пространството не е топологично в смисъл на определение 1. Но хаусдорфовите топологични пространства са очевидно пространства, удовлетворяващи аксиомите 1), 2), 3'). Ако заменим аксиома 3') с друга, може да се стигне до по-нататъшно стесняване на класа на пространствата (вж. за това 1.2.2).

2. Множеството A от топологичното пространство T е затворено тогава и само тогава, когато съвпада със затворената си обвивка $\overline{A}$, т. е. $A=\overline{A}$ (вж. пример 2 от 12.1).

3. Обединение на не повече от изброим брой затворени множества се нарича множество от тип F_σ. Сечение на не повече от изброим брой отворени множества се нарича множество от тип G_δ. Например множеството на рационалните числа в R_1 е множество от тип F_σ. Множеството на ирационалните числа е множество от тип G_δ.

4. Затворената обвивка $\overline{A}$ на множеството A от топологично пространство се състои от всички точки, които са или точки на сгъстяване за множеството A, или елементи на A (вж. пример 4 от 12.1).

5. Важен клас множества в топологични пространства са множествата, които се получават от отворени (затворени) множества с помощта на не повече от изброим брой операции обединение (сечение) и изваждане.

Семейството B на бореловите множества е най-малкото семейство от множества, удовлетворяващо следните свойства:

a) всяко отворено множество принадлежи на B;

b) ако $A \in B$, то $A' \in B$;

c) ако $A_n \in B$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in B$.

12.4. Свойства на топологичните пространства

В този параграф ще изложим основните свойства на топологичните пространства. Много от тях са свързани с т. нар. аксиоми за отделимост, които определят по-тесни класове топологични пространства.

12.4.1. Аксиоми за отделимост. Ще формулираме тези аксиоми в такъв ред, че условията на всяка аксиома да са следствие от условията на аксиомата, която я следва.

Определение 1. *Едно топологично пространство се нарича* ***регулярно,*** *ако за всяка точка a и всяко несъдържащо я затворено множество F съществуват такива две непресичащи се отворени множества Σ_a и Σ, че $a \in \Sigma_a$, $F \subset \Sigma$.*

Пример за нерегулярно топологично пространство е пример 2 от 12.3.1.*

Определение 2. *Едно топологично пространство T се нарича* ***напълно регулярно,*** *ако за всяка точка a и всяко затворено множество F, което не съдържа точката a, съществува такава непрекъсната числова функция f, дефинирана в това пространство, че $0 \leq f(x) \leq 1$, $x \in T$, $f(a)=0$, $f(x)=1$, $x \in F$.*

Напълно регулярните пространства се наричат още **тихоновски пространства.****

Всяко напълно регулярно пространство е регулярно. Действително нека $I_0=[0, 1/2)$, $I_1=(1/2, 1]$. Тогава $\Sigma_a=f^{-1}(I_0)$ и $\Sigma=f^{-1}(I_1)$ са отворени, тъй като f е непрекъснато изображение, $\Sigma_a \cap \Sigma=\emptyset$, $a \in \Sigma_a$, $F \subset \Sigma$. Следователно пространството е регулярно.

* Точката O и затвореното множество $\{1/n\}$ са неотделими в посоченият смисъл.

** Андрей Николаевич Тихонов — съветски математик (1906).

Определение 3. *Едно топологично пространство се нарича* ***нормално,*** *ако за всеки две затворени, непресичащи се множества F_1 и F_2 съществуват две такива непресичащи се отворени множества Σ_1 и Σ_2, че $F_1 \subset \Sigma_1$, $F_2 \subset \Sigma_2$.*

12.4.2. Нормални и напълно регулярни (тихоновски) пространства. Лема на Урисон*. В сила е следната лема:

Лема 1 (лема на Урисон). *За всеки две непресичащи се затворени множества F_1 и F_2 на нормално топологично пространство $T=(X, \Sigma)$ съществува такава непрекъсната числова функция f, дефинирана в T, че $0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in X$, $f(x)=0$, ако $x \in F_1$; $f(x)=1$, ако $x \in F_2$.*

Доказателство. Ще построим редица от отворени множества $\Sigma(r)$, съответстващи на рационалните числа от вида $r=k \cdot 2^{-n}$ ($k=0, 1, 2, \cdots, 2^n$, n е цяло положително число), притежаващи свойствата: 1) $F_1 \subset \Sigma(0)$, $F_2=\Sigma'(1)$ („$'$" означава допълнение) и 2) $\overline{\Sigma}(r) \subset \Sigma(r')$ за всеки $r<r'$, където $\overline{\Sigma}(r)$ е затворената обвивка на $\Sigma(r)$.

Построението ще направим с индукция по n. Нека $n=0$. Тогава системата $\Sigma(r)$ ще съдържа само двете множества: $\Sigma(1)$, $\Sigma(0)$. Тъй като пространството T е нормално, то съществуват такива отворени множества Σ_1 и Σ_2, че $F_1 \subset \Sigma_1$, $F_2 \subset \Sigma_2$. Тогава множеството $\Sigma(0)=\Sigma_1$ е търсеното.

Да допуснем сега, че множеството $\Sigma(r)$ е построено за числата $r=k \cdot 2^{-n+1}$, $k=0, 1, 2, \cdots, 2^{n-1}$ и при това е изпълнено условие 2). Нека k е цяло нечетно и $0<k<2^n-1$. Тогава $\Sigma((k-1)2^{-n}) \subset \Sigma((k+1) \cdot 2^{-n})$, тъй като числата $(k-1)2^{-n}$ и $(k+1) \cdot 2^{-n}$ имат вида $k' \cdot 2^{n-1}$, където $0 \leqq k' \leqq 2^{n-1}$. Понеже T е нормално пространство, а $\overline{\Sigma}((k-1) \cdot 2^{-n}) \cap \Sigma'((k+1) \cdot 2^{-n})=\emptyset$ и тези множества са затворени, то съществуват такива отворени множества G и G_1, че $\overline{\Sigma}((k-1) \cdot 2^{-n}) \subset G$, $\Sigma'((k+1) 2^{-n}) \subset G_1$ и $G \cap G_1=\emptyset$. Тогава G_1' е затворено и $G \subset G_1' \subset \Sigma((k+1) \cdot 2^{-n})$, т. е. $G \subset \Sigma((k+1) \cdot 2^{-n})$. Като положим $\Sigma(k \cdot 2^{-n})=\Sigma(r)=G$, завършваме построението по индукция.

Ще определим сега функцията $f(x)$, като положим:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{за } x \in \Sigma(0), \\ \sup\{r : x \overline{\in} \Sigma(r)\} & \text{за } x \in \Sigma'(0). \end{cases}$$

Тогава по условие 1) имаме $f(x)=0$, ако $x \in F_1$; $f(x)=1$, ако $x \in F_2$. Наистина, ако $x \in F_2$, то $x \in \Sigma'(1)$, т. е. $x \overline{\in} \Sigma(1)$ и от условие 2) следва, че $x \in \Sigma(r)$, $r<1$, т. е. $\sup\{r : x \in \Sigma(r)\}=1$.

* Павел Самуилович Урисон — руски математик (1898—1924).

Ще докажем непрекъснатостта на функцията f. Избираме произволно $x_0 \in X$ и цяло число $n>0$. Избираме такова r, че $f(x_0)<r<f(x_0)+2^{-n-1}$. Нека $\Sigma=\Sigma(r) \cap (\overline{\Sigma(r-2^{-n})})'$, където $\Sigma(s)=\emptyset$, $s<0$, $\Sigma(s)=X$, $s>1$. Отвореното множество Σ съдържа точката x_0, тъй като $f(x_0)<r$, и следователно $x_0 \in \Sigma(r)$; също така от това, че $r-2^{-n-1}<f(x_0)$, следва $x_0 \in \Sigma'(r-2^{-n-1}) \subset (\overline{\Sigma(r-2^{-n})})'$. По-нататък, ако $x \in \Sigma$, то $x \in \Sigma(r)$ и затова $f(x) \leqq r$. И още повече, $x \in (\overline{\Sigma(r-2^{-n})})' \subset \Sigma'(r-2^{-n})$ и следователно $r-2^{-n} \leqq f(x)$, така че ако $x \in \Sigma$, то $|f(x)-f(x_0)| \leqq 2^{-n}$. Така получаваме, че за всяка околност $\Sigma_{f(x_0)}$ (в числовия сегмент $[0, 1]$) съществува такава околност Σ на точката x_0, че $f(\Sigma) \subset \Sigma_{f(x_0)}$, т. е. функцията f е непрекъсната в T. □

Следствие. *Нормалните топологични пространства са напълно регулярни.* Това следва от лемата и от това, че в топологичните пространства всяка точка е затворено множество.*

12.4.3. Регулярни пространства с изброим базис. Теорема на Тихонов. В тази точка ще докажем теорема, която установява връзка между аксиомите за отделимост и аксиомите за изброимост:

Теорема 12.5 (теорема на Тихонов). *Всяко регулярно топологично пространство с изброим базис е нормално пространство.*

Доказателство. Нека $T=(X, \Sigma)$ е регулярно топологично пространство с изброим базис $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ и F_1, F_2 са две затворени непресичащи се множества. За всяка точка $x \in F_i$ ($i=1, 2$) съществува такава околност U_x, че $\overline{U}_x \cap F_i=\emptyset$. Това следва от факта, че всяка околност на точка съдържа затворена обвивка на някоя околност на тази точка.** От покритието $\{U_x : x \in F_i, i=1, 2\}$ на множеството F_i може да се избере изброимо подпокритие, т. е. в множеството F_i съществуват такива изброими системи от точки $x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,p}, \cdots$, че $F_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{xi,k}$, $i=1, 2$. При това $\overline{U}_{x1,k} \cap F_2=\emptyset$ и аналогично $U_{x2,k} \cap F_1=\emptyset$.

* Затова ще отбележим, че произволна точка x на едно топологично пространство може да се представи във вида $x=\bigcap_{y \neq x} \Sigma'_y$, където Σ_y са околности на точката $y \neq x$, които не съдържат точката x. Сечението на затворени множества е затворено множество.

** Нека Σ е някоя околност на точката a, $A=X \setminus \Sigma$ е затворено и съществуват такива отворени множества $\Sigma_a \ni a$, $G \supset A$, че $\Sigma_a \cap G=\emptyset$. Тогава $\overline{\Sigma}_a \subset X \setminus A=\Sigma$, което трябваше да се докаже.

Определяме по индукция при произволно $n \geq 1$ множествата $V_{1,n}$ и $V_{2,n}$ като полагаме

$$V_{1,n} = U_{x_{1,n}} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_{x_{2,k}}, \quad V_{2,n} = U_{x_{2,k}} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_{x_{1,k}}.$$

Лесно се вижда, че $V_{1,n}$ и $V_{2,m}$ не се пресичат. Наистина, ако $n \leq m$, то

$$V_{1,n} \cap V_{2,m} \subset U_{x_{1,n}} \cap U_{x_{2,m}} \setminus U_{x_{1,n}} = \emptyset,$$

а ако $n \geq m$, то $V_{1,n} \cap V_{2,m} \subset (U_{x_{1,n}} / U_{x_{2,n}}) \cap U_{x_{2,m}} = \emptyset$.

Следователно множествата $V_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{1,n}$ и $V_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{2,n}$ също не се пресичат. От друга страна, те съдържат съответно множествата F_1 и F_2. Така е доказано, че две произволни затворени непресичащи се множества от пространството T могат да се включат в непресичащи се отворени множества. С други думи, пространството T е нормално, което трябваше да се докаже.

12.4.4. Компактни и нормални пространства. Цел на тази точка е доказателството на следната теорема:

Теорема 12.6. *Компактното топологично пространство е нормално топологично пространство.*

Доказателство. Нека $T = (X, \Sigma)$ е компактно топологично пространство. Ще докажем най-напред, че то е регулярно. Нека a и F са точка и затворено множество, което не я съдържа: $a \notin F$. За всяка точка $x \in F$ и точката a съществуват такива околности Σ_a и Σ_x, че $\Sigma_x \cap \Sigma_a = \emptyset$. Подпространството F на компактното пространство е компактно (вж. лема 5 от 12.1). От покритието на F с отворените множества $\{\Sigma_x\}$ ще изберем крайно покритие $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$. Нека $\Sigma_1 = \bigcup_{k=1}^{n} \Sigma_{x_k}$, а сечението на съответните на Σ_{x_k} околности $\Sigma_a^{x_k}$ на точката a означим със $\Sigma_2 = \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_a^{x_k}$. Тогава $F \subset \Sigma_1$, $a \in \Sigma_2$ и $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Следователно пространството T е регулярно.

Нека сега F_1 и F_2 са две затворени множества, за които $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Поради регулярността на пространството за всяка точка $x \in F_1$ съществуват такива отворени множества Σ_x^1 и G_x^2, че $x \in \Sigma_x^1$, $F_2 \subset G_x^2$ и $\Sigma_x^1 \cap G_x^2 = \emptyset$. От покритието на компактното пространство F_1 с отворени множества $\{\Sigma_x^1\}$ избираме крайно подпокритие $\{\Sigma_{x_k}^1\}_{k=1}^{m}$ и означаваме $\Sigma^1 = \bigcup_{k=1}^{m} \Sigma_{x_k}^1$. Сечението на съответните отворени множества G_{x_k} означаваме със $\Sigma^2 = \bigcap_{k=1}^{m} G_{x_k}^2$. Тогава $F_1 \subset \Sigma^1$, $F_2 \subset \Sigma^2$ и $\Sigma^1 \cap \Sigma^2 = \emptyset$, т. е. пространството $T = (X, \Sigma)$ е нормално. Теоремата е доказана.

12.5. Линейни нормирани пространства, линейни оператори

Понятието линейно пространство играе основна роля в анализа. Линейните пространства и линейните оператори в тези пространства играят основна роля и в много други важни области на математиката.

12.5.1. Определение на линейно пространство.

Определение 1. *Множеството L, съдържащо поне един елемент, се нарича* ***линейно*** *или* ***векторно пространство,*** *ако са изпълнени следните аксиоми:*

1. *За всеки два елемента $x, y \in L$ еднозначно се определя трети елемент $z \in L$, наречен тяхна* ***сума,*** *който се означава с $x+y$, и при това:*

a) $x+y=y+x$ (*комутативност*);

b) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (*асоциативност*);

c) *съществува такъв елемент $0 \in L$, че $x+0=x$ за всеки елемент $x \in L$; елементът 0 се нарича* ***нулев*** *или* ***нула*** *на пространството L;*

d) *за всеки елемент $x \in L$ съществува такъв елемент $-x$, че $x+(-x)=0$; елементът $-x$ се нарича* ***противоположен*** *елемент на елемента x.*

2. *За всяко число α и всеки елемент $x \in L$ е определен елементът $\alpha x \in L$, наречен* ***произведение*** *на α и x, при което*

a) $\alpha(\beta x)=(\alpha . \beta) x$;

b) $(\alpha+\beta) x=\alpha x+\beta x$;

c) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;

d) $1 . x=x$ *за всеки елемент x.*

Ако в аксиома 2 се използват само реални числа, пространството L се нарича ***реално линейно пространство.*** *Ако се използват комплексни числа, пространството L се нарича* ***комплексно.***

Ще разгледаме някои примери на линейни пространства. При изучаване на метричните пространства бяха разгледани множеството на реалните числа, аритметичното n-мерно пространство, множеството на непрекъснатите функции в даден сегмент и множе-

ството на ограничените редици. Всички тези множества са примери за линейни пространства, ако се въведат операциите събиране и умножение по следните правила:

1) В съвкупността E^1 на реалните числа обичайните аритметични операции събиране и умножение.

2) В n-мерното аритметично пространство — по формулите

$$x+y=(x_1, x_2, \cdots, x_n)+(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$
$$\alpha . x=\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n).$$

3) В пространството на непрекъснатите в даден сегмент функции — обичайните операции за събиране на две функции, т. е. $f+g=f(x)+g(x)$, и умножение на функция и число, т. е. $\alpha f=\alpha . f(x)$.

4) В множеството на ограничените редици въвеждаме операциите събиране и умножение по формулите

$$x+y=(x_1, x_2, \cdots)+(y_1, y_2, \cdots)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots),$$
$$\alpha x=\alpha(x_1, x_2, \cdots)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots).$$

Не е трудно да се провери за всички изброени примери, че са изпълнени аксиомите, определящи линейно пространство. За тези линейни пространства ще запазим означенията, дадени при разглеждането им като метрични пространства, т. е. съответно в случая 1) — означението E^1, в случая 2) — означението E^n, в случая 3) — означението $C_{[a, b]}$ и в случая 4) — означението m.

Определение 2. *Линейните пространства L и L^* се наричат* ***изоморфни,*** *ако съществува такова взаимно еднозначно съответствие между елементите им, че ако на елемента $x \in L$ съответствува елементът $x^* \in L^*$, а на $y \in L$ съответствува $y^* \in L^*$, то на $x+y$ съответствува x^*+y^*, а на $\alpha . x$ съответствува αx^* (α е произволно число).*

Изоморфните пространства могат да се разглеждат като различни реализации на едно и също пространство и такива пространства няма да считаме различни.

12.5.2. Нормирани пространства. Банахови пространства

Определение 3. *Функцията $f(x)=\|x\|$, която съпоставя на всеки вектор x от линейното пространство L реалното число $\|x\|$, се нарича* ***норма*** *в линейното пространство L, ако удовлетворява следните аксиоми:*

1) $f(x)=\|x\|=0$ *тогава и само тогава, когато* $x=0$;

2) $f(\alpha x)=\|\alpha x\|=|\alpha| . \|x\|=|\alpha| . f(x)$ *за всяко число* α;

3) $f(x_1+x_2)=\|x_1+x_2\| \leq \|x_1\|+\|x_2\|=f(x_1)+f(x_2)$ *за всяко* x_1 *и всяко* x_2, *принадлежащи на* L.

Определение 4. *Линейно пространство L, в което е въведена функцията $f(x)=\|x\|$, се нарича* ***линейно нормирано пространство.***

За да подчертаем, че пространството L е нормирано, ще го означаваме обикновено с буквата N.

Стойността на нормата за даден вектор $x \in N$ се нарича ***норма*** на вектора, ***дължина*** на вектора или ***модул*** на вектора.

Нормата на вектор е винаги неотрицателна и е равна на нула само за нулевия вектор. Действително, като положим в аксиома 3) $x_1=-x_2$ и отчетем 1) и 2), получаваме

$0=\|0\|=\|x_1-x_1\| \leq \|x_1\|+\|-x_1\|=\|x_1\|+|-1| . \|x_1\|=2\|x_1\|$, т. е. $f(x_1)=\|x_1\| \geq 0$.

Във всяко нормирано пространство може да се въведе естествена метрика по правилото $\rho(x, y)=\|x-y\|$. От аксиомите за норма следва, че функцията $\rho(x, y)$ действително задава разстояние в пространството, т. е. удовлетворява аксиомите за разстояние.

Освен това, понеже N е линейно пространство, метриката $\rho(x, y)$ е инвариантна относно транслация, т. е.

$$\rho(x_1+x, x_2+x)=\|(x_1+x)-(x_2+x)\|=\|x_1-x_2\|=\rho(x_1, x_2),$$

и положително хомогенна, т. е.

$$\rho(\alpha x, \alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|=\|\alpha(x-y)\|=|\alpha| \|x-y\|=|\alpha| \rho(x, y).$$

С появата на естествена метрика в нормираните пространства могат да бъдат въведени всички понятия, които разгледахме при метричните пространства, като пълнота и др.

Следващото определение отделя от всички нормирани пространства най-важния клас пространства, наречени банахови*.

Определение 5. ***Банахово пространство*** *се нарича всяко пълно линейно нормирано пространство.*

Примери:

1. Пространството E^1 от реалните числа с обичайните аритметични операции, както знаем, е линейно пространство. То се превръща в нормирано пространство, ако за норма на числото x приемем абсолютната му стойност: $\|x\|=|x|$. От свойствата на абсолютната стойност следва, че са налице всички свойства за норма. Това нормирано пространство е пълно, т. е. банахово. Неговата пълнота, т. е. пълнотата на E^1, като метрично пространство с обичайното разстояние между реални числа ($\rho(x, y)=\|x-y\|=|x-y|$) беше установена в глава 3.

* Стефан Банах — полски математик (1892—1945).

2. Линейното пространство E^n, разгледано по-горе, е също нормирано пространство, ако за норма на вектора $x=(x_1, x_2, \cdots x_n)$ приемам

$$\|x\|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Аксиомите 1) и 2) са очевидно изпълнени, а неравенството на триъгълника се превръща в неравенството

$$\|x+y\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}=\|x\|+\|y\|,$$

което е частен случай ($p=2$) от неравенството на Минковски за суми (вж. 9.6.3). Това пространство E^n е пълно, тъй като сходимостта на $x^{(k)}\to x$ в E^n означава сходимост на всички координати $x_i^{(k)}$ на вектора $x^{(k)}$ към съответните координати на вектора x. Остава да се приложи твърдението от пример 1.

3. Пространството $C[a, b]$ от непрекъснати функции с обичайните операции за събиране на функции и умножение на функция с число, както вече говорихме, е линейно пространство. То се превръща в нормирано, ако положим $\|f(x)\|=\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|$, където $f(x)$ е непрекъсната функция в сегмента $[a, b]$. Като използваме свойствата на абсолютната стойност и на функцията max, лесно се убеждаваме, че всички аксиоми за норма са изпълнени. Може да се докаже, че това пространство е пълно.

4. Пространството m на ограничените редици също може да се нормира, като положим за $x\in m$, $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots)$

$$\|x\|=\sup\{|x_k|: k=1, 2, 3, \cdots\}.$$

Аксиомите за норма и тук се проверяват лесно. Можем да се убедим също така, че това пространство е пълно нормирано пространство, т. е. банахово пространство.

12.5.3. Оператори в линейни и нормирани пространства. Нека L_1 и L_2 са две линейни пространства и A е изображение на пространството L_1 в L_2, т. е. $A: L_1\to L_2$.

Определение 6. *Изображението $A: L_1\to L_2$ на едно линейно пространство L_1 в друго L_2 се нарича* ***линейно изображение*** *или* ***линеен оператор,*** *ако:*

a) $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$ *за всеки два вектора* $x_1, x_2\in L_1$;

b) $A(\alpha x)=\alpha Ax$ *за всеки вектор* $x\in L_1$ *и всяко число* α.

Изображението $A: L_1\times L_2\times\cdots\times L_n\to L$ на декартовото произведение на линейните пространства $L_1, L_2, \cdots, L_n$* в линейното пространство L се нарича ***полилинейно,*** ако са линейни всички изображения

$$A_i: L_i\to L,\ i=1, 2, 3, \cdots, n,$$

получени от $A(x, y, \cdots, z)$ чрез фиксиране на всички променливи освен променливата, стояща на i-то място. Тук $x\in L_1$, $y\in L_2$, $\cdots$, $z\in L_n$.

Ако е зададено линейното изображение $A: L_1\to L_2$ на линейното пространство L_1 в линейното пространство L_2 и пространството L_2 е реалната числова ос (или комплексната равнина), то операторът A се нарича ***функционал.***

Ще разгледаме някои примери на оператори и функционали.

Примери:

1. Нека L е произволно линейно пространство. Операторът E съпоставя на всеки елемент $x\in L$ същия елемент x от това пространство, т. е. $E: L\to L$ и $Ex=x$ за всяко $x\in L$. Такъв оператор се нарича единичен или единица.

2. В тримерното пространство E^3 ще зададем оператор A като линейно преобразуване, състоящо се в проектирането на всеки вектор върху оста Ox (т. е. на всеки вектор се съпоставя неговата координата от оста Ox). Операторът може да се зададе с матрица. Например в базиса от единичните вектори l_1, l_2, l_3, насочени съответно по координатните оси Ox, Oy, Oz, операторът A може да се зададе така:

$$Ax=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ x=(x_1, x_2, x_3)\in E^3.$$

3. В пространството $C[a, b]$ е зададен линейният оператор $A: Af(x)=\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Операторът A е изображение на $C_{[a, b]}$ в числовата ос и е функционал.

Модулът на непрекъснатост $\omega(f; \delta)$ (вж. глава 4) и функционалът $\delta f=f(a)$, който съпоставя на всяка непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция стойността ѝ в точката a, са примери за

* Линейните операции в $L_1\times L_2\times\cdots\times L_n$ са определени с равенствата $[x_1, x_2, \cdots, x_n]+[y_1, y_2, \cdots, y_n]=[x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n]$, $\alpha[x_1, x_2, \cdots, x_n]=[\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n]$, където $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $[y_1, y_2, \cdots, y_n]\in L_1\times\cdots\times L_n$, $x_i, y_i\in L_i$; $i=1, 2, \cdots, n$, α е число.

функционали в пространството $C_{[a,b]}$. Функционалът $\delta f = f(a)$ се нарича ***делта-функция.***

12.5.4. Пространство на операторите. Нека L_1 и L_2 са две линейни пространства. Ще разгледаме съвкупността $\{A\}$ от всички линейни оператори, изобразяващи L_1 в L_2. В множеството $\{A\}$, елементите на което са линейни оператори, изобразяващи L_1 в L_2, могат да се въведат алгебрични операции. Нека A_1 и A_2 са такива оператори. Определяме събиране на тези оператори посредством равенството

$$(A_1+A_2)\,x = A_1 x + A_2 x, \quad x \in L_1.$$

Умножение на линеен оператор с число определяме с формулата

$$(\alpha A)\,x = \alpha\, Ax.$$

Очевидно е, че при тези определения всички аксиоми, задаващи линейно пространство, ще бъдат изпълнени и разглежданото множество $\{A\}$ на линейните оператори ще бъде линейно пространство. Нула за това пространство ще бъде нулевият оператор O, т. е. операторът, привеждащ всеки вектор x в нулевия вектор: $Ox = o$.

Пространството на линейните оператори, което въведохме, обикновено се означава така: $(L_1 \to L_2)$. Ако пространствата L_1 и L_2 освен това имат и топология, например са нормирани, то и пространството на операторите $(L_1 \to L_2)$ ще има определена топология.

12.5.5. Норма на оператор. Нека N_1 и N_2 са две линейни нормирани пространства и операторът A изобразява N_1 в N_2.

Определение 7. *Линейният оператор $A: N_1 \to N_2$, изобразяващ линейното нормирано пространство N_1 в линейното нормирано пространство N_2, се нарича* ***ограничен,*** *ако съществува такава константа M, че $\|Ax\|_{N_2} \leqq M\,\|x\|_{N_1}$ за всяко $x \in N_1$.* Индексът долу на символа норма означава пространството, в което се разглежда нормата на вектора. Когато това няма да води до недоразумение, тези индекси ще се изпускат.

В сила е следното твърдение:

Теорема 12.8. *За да бъде линейният оператор $A: N_1 \to N_2$, който изобразява линейното нормирано пространство N_1 в N_2, непрекъснат, е необходимо и достатъчно той да бъде ограничен.*

(Ще отбележим, че тук под непрекъснатост на оператора се разбира непрекъснатост на съответното изображение.)

Доказателство. Нека A е непрекъснат оператор. Ако той не е ограничен, ще съществува такава редица от елементи $\{x_n\}$, че

$$\|A_{x_n}\| > n\,\|x_n\|.$$

Нека $y_n = x_n / n\,\|x_n\|$. Тогава $y_n \to 0$, тъй като $\|y_n\| = n^{-1} \to 0$ при $n \to \infty$. От друга страна,

$$\|A\,y_n\| = \frac{1}{n\,\|x_n\|}\,\|Ax_n\| > 1.$$

Ще отбележим, че от линейността на оператора A следва $Ao = o$; действително $Ao = A(x-x) = Ax - Ax = o$. Затова Ay_n не клони към $Ao = o$, т. е. операторът A не е непрекъснат в точката нула, което противоречи на условието на теоремата.

Обратно, ако A е ограничен, то $\|Ax\| \leqq M\,\|x\|$. Нека $x_n \to x$, т. е. $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогава $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leqq M\,\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Следователно $Ax_n \to Ax$ и операторът A е непрекъснат в точката x. □

Определение 8. *Нека A е линеен ограничен оператор. Най-малката от константите M, удовлетворяващи условието*

$$\|Ax\| \leqq M\,\|x\|,$$

се нарича ***норма*** *на оператора A и се означава с $\|A\|$.*

Следователно съгласно определение 8 нормата на оператора A притежава следните свойства:

а) $\|Ax\| \leqq \|A\| \cdot \|x\|$ за всяко $x \in N_1$;

б) за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува такъв елемент x_ε, че $\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\,\|x_\varepsilon\|$.

Ще покажем, че $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leqq 1\}$ или, което е същото, $\|A\| = \sup\{\|Ax\| / \|x\| : \|x\| \neq 0\}$. Действително, ако $\|x\| \leqq 1$, то $\|Ax\| \leqq \|A\| \cdot \|x\| \leqq \|A\|$. Следователно и $\sup\limits_{\|x\| \leqq 1} \|Ax\| \leqq \|A\|$. От друга страна, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такъв елемент x_ε, че

$$\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\,\|x_\varepsilon\|.$$

Нека $\xi_\varepsilon = x_\varepsilon / \|x_\varepsilon\|$. Тогава $\|A\xi_\varepsilon\| = \dfrac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} > \dfrac{1}{\|x_\varepsilon\|}(\|A\| - \varepsilon)\,\|x_\varepsilon\| = \|A\| - \varepsilon$. Тъй като $\|\xi_\varepsilon\| = 1$, то $\sup\{\|Ax\| : \|x\| \leqq 1\} \geqq \|A\xi_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon$.

Следователно $\sup\{\|Ax\| : \|x\| \leqq 1\} \geqq \|A\|$ или $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| \leqq 1\}$.

Забележка. От проведените разсъждения следва, че $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$.

В т. 4 беше въведено пространството $(L_1 \to L_2)$ на операторите, изобразяващи линейното пространство L_1 в линейното пространство L_2. Това пространство играе важна роля в различни области на анализа и сега ще продължим да го изучаваме.

Да предположим сега, че споменатите линейни пространства L_1 и L_2 са нормирани. Ще ги означим съответно с N_1 и N_2, а съответното линейно пространство, елементите на което са линейните ограничени оператори, ще означим с $(N_1 \to N_2)$. В простран-

ството $(N_1 \to N_2)$ може да се въведе норма. Норма на елемента A от пространството $(N_1 \to N_2)$ въвеждаме по правилото: $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$. Лесно се вижда, че са изпълнени всички аксиоми от определението за норма. По такъв начин линейното пространство $(N_1 \to N_2)$, елементи на което са линейните ограничени оператори, е линейно нормирано пространство. Възниква естественият въпрос: Кога това пространство е пълно, т. е. банахово?

Отговорът на този въпрос се съдържа в следната теорема.

Теорема 12.9. *Ако линейното нормирано пространство $N_2 = B_2$ е банахово, то пространството $(N_1 \to B_2)$ на линейните ограничени оператори е също банахово.*

Доказателство. Нека $\{A_n\}$ е фундаментална редица в пространството на операторите $(N_1 \to B_2)$, т. е. $\|A_n - A_m\| \to 0$, когато $n, m \to \infty$. За всяко x имаме $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Следователно, ако $x \in N_1$ е фиксирано, то редицата $\{A_n x\}$ от елементи на B_2 е фундаментална в B_2 и от пълнотата на B_2 следва, че тя е сходяща. Означаваме $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Получихме по този начин изображение на N_1 в B_2. Операторът, осъществяващ това изображение, означаваме с A. От свойствата на граница следва, че той е линеен. Ще покажем, че е ограничен. От това, че $\|A_n - A_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, следва $|\|A_n\| - \|A_m\|| \to 0$ при $n, m \to \infty$, т. е. числовата редица $\{\|A_n\|\}$ е фундаментална в E^1 и следователно е ограничена. Съществува такава константа M, че $\|A_n\| \leq M$ за всяко естествено n. Оттук получаваме $\|A_n x\| \leq \|A_n\| \, \|x\| \leq M\|x\|$, т. е. вземайки пред вид, че функцията, определяща норма (разстояние), е непрекъсната, имаме

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq M\|x\|.$$

Следователно операторът A е ограничен. Операторът A беше определен като оператор, изобразяващ N_1 в B_2 по даденото по-горе правило. Ще покажем, че A е граница на редицата $\{A_n\}$ в смисъл на сходимост по норма в пространството $(N_1 \to B_2)$. Фиксираме $\varepsilon > 0$ и избираме n_0 така, че $\|A_{n+p} x - A_n x\| < \varepsilon$ за $n > n_0$, $p > 0$ и всяко x, за което $\|x\| \leq 1$. Нека $p \to \infty$; тогава $\|Ax - A_n x\| < \varepsilon$ за $n \geq n_0$ и всяко x, за което $\|x\| \leq 1$. Затова за $n \geq n_0$ имаме $\|A_n - A\| = \sup\{\|(A_n - A)x\| : \|x\| \leq 1\} \leq \varepsilon$. Следователно $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в смисъл на сходимост по норма в пространството $(N_1 \to B_2)$, т. е. това пространство е банахово, което трябваше да се докаже. □

12.5.6. Понятие за хилбертово пространство. Ще дадем следното определение:

Определение 9. ***Хилбертово пространство*** *се нарича множество H от елементи $f, g, h, \ldots$, притежаващо следните свойства:*

1) *H е линейно пространство, т. е. в H са определени действията събиране и умножение с реално или комплексно число (в зависимост от това H се нарича реално или комплексно пространство).*

2) *H е метрично пространство, чиято метрика се въвежда с помощта на скаларно произведение, т. е. числова функция (f, g) на двойката аргументи f и g, наречена тяхно скаларно произведение, която удовлетворява аксиомите:*

а) $(af, g) = a(f, g)$ *за всяко число* a;

б) $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$;

в) $(f, g) = \overline{(g, f)}$;*

г) $(f, f) > 0$ *при* $f \neq 0$; $(f, f) = 0$ *при* $f = 0$. *Нормата* $\|f\|$ *на елемента* f *се определя с равенството*

$$\|f\| = (f, f)^{1/2},$$

а разстоянието между елементите f *и* g — *с равенството*

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

3) *H е пълно пространство като метрично пространство с въведеното по-горе разстояние. (Крайномерните пространства са винаги пълни.)*

Вземаме произволни елементи $f, g \in H$ и нека λ е реално число, тогава

$$0 \leq (f + \lambda(f, g)g, f + \lambda(f, g)g) = (f, f) + 2\lambda|(f, g)|^2 + \lambda^2|(f, g)|^2 \cdot (g, g),$$

следователно този полином относно λ не може да има различни реални корени, откъдето

$$|(f, g)|^4 - (f, f) \cdot |(f, g)|^2 (g, g) \leq 0.$$

Така (дори и в случая $(f, g) = 0$)

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g),$$

или

$$(f, g) \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Получихме ***неравенството на Коши — Буняковски.*** Знакът равенство в него освен в тривиалния случай $f = o$ или $g = o$ се достига само когато $f = -\lambda(f, g) \cdot g$ при някоя стойност на λ, т. е. когато векторите f и g са колинеарни.

Като използваме това неравенство, лесно се проверява, че нормата $\|f\|$ на f и разстоянието $\rho(f, g) = \|f - g\|$ удовлетворяват всички аксиоми от съответните определения.

Заедно с метриката в хилбертовото пространство се появяват и понятия, свързани с граничен преход, в смисъл на въведеното

* Тук $\overline{(g, f)}$ означава число, комплексно спрегнато на (g, f).

разстояние. Наличието на скаларното произведение позволява да се въведе в H понятието ъгъл между вектори (ако H е реално):

$$\cos(\widehat{f, g}) = (f, g) / \| f \| \cdot \| g \|.$$

Това понятие на свой ред позволява да наречем два вектора ортогонални, ако сключват ъгъл 90°. С други думи, векторите f и g се наричат ортогонални, ако $(f, g) = 0$.

Ако векторът f е ортогонален на векторите $g_1, g_2, \cdots, g_n$, то той е ортогонален и на всяка тяхна линейна комбинация $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$.

Ако векторите $g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots$ са ортогонални на вектора f и $g = \lim_{n \to \infty} g_n$, то векторът g е ортогонален на вектора f.

От казаното следва, че съвкупността от всички вектори, ортогонални на векторите $f_1, f_2, \cdots, f_n$ (n е фиксирано), образуват затворено линейно многообразие, т. е. подпространство—ортогонално допълнение на множеството $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$.

В хилбертово пространство H може да се въведе важното понятие спрегнат оператор.

Определение 10. *Операторът A^* се нарича* ***спрегнат*** *на линейния ограничен оператор A, ако за всеки два елемента $x, y \in H$ е изпълнено равенството $(Ax, y) = (x, A^*y)$.*

Ограничен линеен оператор A, действуващ в хилбертовото пространство H, се нарича ***самоспрегнат,*** *ако $(Ax, y) = (x, Ay)$ за всички $x, y \in H$.*

Примери:

1. В n-мерното пространство E^n, елементи на което са наредените n-орки от числа $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, може да се въведе скаларно произведение с формулата

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i.$$

Понеже крайномерното пространство E^n е пълно, то е хилбертово пространство. Аксиомите за скаларно произведение са очевидно изпълнени.

2. Операторите E (единичен) и O (нулев) са примери за самоспрегнати оператори, действуващи в хилбертовото пространство. За тях винаги са изпълнени съотношенията

$$(Ex, y) = (x, y) = (x, Ey), \ (Ox, y) = (o, y) = 0 = (x, o) = (x, Oy).$$

13. Функции на няколко променливи

Много въпроси от естествознанието водят до разглеждане на зависимости между няколко променливи величини, при което стойността на една от тях напълно се определя от стойностите на останалите. Така например при разглеждане на която и да е физическа характеристика на тяло (например плътността ρ или температурата T) трябва да отчитаме измененията на тази характеристика при прехода от една точка на тялото към друга. Понеже всяка точка на тялото се определя с трите ѝ декартови координати x, y и z, то разглежданата характеристика (плътност ρ или температура T) се определя от стойностите на трите променливи x, y и z.

При разглеждане на физически процеси, изменящи се във времето, стойностите на физическите характеристики се определят от стойностите на четири променливи: трите координати на точката x, y и z и времето t. Например при изучаване на звукови трептения в газ плътността ρ и налягането p на този газ се определят от стойностите на четирите променливи x, y, z и t.

За изучаването на такъв вид зависимости в тази глава се въвежда понятието функция на няколко променливи и се развива апарат за изследване на такива функции. Първата част на тази глава е посветена на построяването на диференциалното смятане на функции на няколко променливи.

В случая на функции на няколко променливи ще бъдат обобщени много понятия и твърдения, установени в глави 3—7 за функции на една променлива.

Във втората част на тази глава се изучават елементи на диференциалното смятане за абстрактни функции, т. е. изображения на едно нормирано пространство в друго. Частичен случай на такова изображение е доста често срещаното изображение на m-мерно евклидово пространство в n-мерно евклидово пространство.

13.1. Понятие за функция на m променливи

13.1.1. Понятия за m-мерно координатно и m-мерно евклидово пространство. При излагане на теорията на функции на m променливи е удобно да се използва геометрична терминология, обобщаваща и формализираща нашите представи за равнината и за реалното (тримерно) геометрично пространство.

Ще наричаме m-мерно координатно пространство множеството на всички възможни наредени m-орки $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ от реални числа $x_1, x_2, \cdots, x_m$. Ще означаваме m-мерното координатно пространство със символа A^m.

Всяка наредена m-орка $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ ще наричаме точка на m-мерното координатно пространство и ще я означаваме с главна буква M. При това числата $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ ще наричаме координати на точката M. Записването $M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ означава, че точката M има координати $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

Забележка 1. Ако разглеждаме координатното пространство A^m като множество на всички вектори x с координати $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ и определим за ***сума*** на векторите $x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ и $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ вектора с координати $(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_m+y_m)$, а ***произведение*** на вектора $x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ с реалното число λ — вектора с координати $(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_m)$, то координатното пространство се превръща в линейно пространство.

Обобщение на понятията координатна равнина и тримерно координатно пространство е понятието m-мерното координатно пространство A^m. Понятията координатна равнина и тримерно координатно пространство са източници на удобна геометрична терминология, която се употребява при изучаването на m-мерното координатно пространство A^m.

Ще отбележим, че понятието m-мерно координатно пространство A^m се оказва недостатъчно. Не можем да минем без измерване на разстояние между точките на това пространство. За въвеждане на понятието разстояние между точките на координатното пространство A^m е естествено да тръгнем от понятието разстояние между две точки в координатната равнина и в тримерното координатно пространство.

Определение. *Координатното пространство A^m се нарича m-мерно евклидово пространство, ако за всеки две точки $M'(x_1', x_2', \cdots, x_m')$ и $M''(x_1'', x_2'', \cdots, x_m'')$ на пространството A^m е определено разстояние, което се означава със символа $\rho(M', M'')$, като*

(13.1) $$\rho(M', M'')=[(x_1'-x_1'')^2+(x_2'-x_2'')^2+\cdots+(x_m'-x_m'')^2]^{1/2}.$$

Ще означаваме m-мерното евклидово пространство със символа E^m.

Забележка 2. В курса по линейна алгебра се дава общо определение на евклидово пространство като линейно пространство, за което е посочено правило, съпоставящо на всеки два елемента x и y от това пространство едно реално число, наречено скаларно произведение на тези елементи, което се означава със символа (x, y) и удовлетворява четирите аксиоми: 1) $(x, y)=(y, x)$; 2) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$; 3) $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$; 4) $(x, x)\geq 0$, при това $(x, x)=0$ само за $x=o$.

Лесно се проверява, че ако в пространството A^m, елементите на което се разглеждат като вектори x с координати $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, се определи скаларно произведение на два елемента $x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ и $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ чрез съотношението

(13.2) $$(x, y)=x_1 \cdot y_1+x_2 \cdot y_2+\cdots+x_m \cdot y_m,$$

то ще бъдат изпълнени изброените четири аксиоми и пространството A^m ще бъде евклидово пространство (съгласно общото определение за евклидово пространство).

Ще напомним, че едно линейно пространство се нарича нормирано, ако е дадено правило, съпоставящо на всеки елемент x едно реално число, наречено норма на този елемент, означавано с $\|x\|$, като при това нормата удовлетворява трите аксиоми: 1) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$; 2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$; 3) $\|x\|\geq 0$, при това $\|x\|=0$ само когато $x=o$.

13.1.2. Множество от точки в m-мерното евклидово пространство. Ако за функцията f на една независима променлива x с дефиниционна област някакво множество от точки $\{x\}$ от едномерното евклидово пространство E^1 заменим това множество $\{x\}$ с някакво множество $\{M\}$ от точки на m-мерното евклидово пространство E^m, естествено стигаме до понятието функция на m независими променливи.

Оттук е ясно, че въвеждането на функции на m променливи трябва да се предшествува от описването на важни типове множества от точки в m-мерното евклидово пространство E^m.

Минаваме към описването на такива множества.

1°. *Множеството $\{M\}$ на всички точки M на пространството E^m с координати $x_1, x_2, \cdots, x_m$, удовлетворяващи неравенството*

$$(x_1-\overset{\circ}{x}_1)^2+(x_2-\overset{\circ}{x}_2)^2+\cdots+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)^2<R^2,$$

се нарича **отворено m-мерно кълбо** *с радиус R и център в точката* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$.

С други думи, отворено m-мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0 е множеството на всички точки M, от които разстоянието до фиксирана точка M_0 удовлетворява неравенството $\rho(M, M_0) < R$.

2°. *Множеството $\{M\}$ на всички точки M от пространството E^m, чиито координати $x_1, x_2, \ldots, x_m$ удовлетворяват неравенството*

$$(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)^2 + (x_2 - \overset{\circ}{x}_2)^2 + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)^2 \leqq R^2,$$

се нарича **затворено m-мерно кълбо** *с радиус R и център в точката* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$.

3°. *Множеството $\{M\}$ на всички точки M от пространството E^m, чиито координати $x_1, x_2, \ldots, x_m$ удовлетворяват равенството*

$$(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)^2 + (x_2 - \overset{\circ}{x}_2)^2 + \ldots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)^2 = R^2,$$

се нарича m-мерна сфера с радиус R и център в точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$.

Забележка 1. Ще отбележим, че ако към отвореното m-мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0 присъединим m-мерната сфера с радиус R и център точката M_0, ще се получи затвореното m-мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0.

4°. *Отворено m-мерно кълбо с радиус $\varepsilon > 0$ и център в точката M_0 ще наричаме* **ε-околност** *на точката M_0.*

5°. *Множеството $\{M\}$ на всички точки M с координати $x_1, x_2, \ldots, x_m$, удовлетворяващи неравенствата*

$$|x_1 - \overset{\circ}{x}_1| < d_1, |x_2 - \overset{\circ}{x}_2| < d_2, \ldots, |x_m - \overset{\circ}{x}_m| < d_m,$$

където $d_1, d_2, \ldots, d_m$ са някакви положителни числа, се нарича **отворен m-мерен координатен паралелепипед** *с център в точката* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ *или* **правоъгълна околност** *на точката M_0.*

В сила е следното елементарно твърдение: Всяка ε-околност на точката M_0 съдържа правоъгълна околност на тази точка; всяка правоъгълна околност на точката M_0 съдържа някоя ε-околност на точката M_0.

6°. *Точката M от множеството $\{M\}$ на пространството E^m се нарича* **вътрешна точка** *за това множество, ако съществува ε-околност на точката M, всички точки на която принадлежат на множеството $\{M\}$.*

7°. *Точката M на пространството E^m се нарича* **външна точка** *за множеството $\{M\}$, ако съществува ε-околност на точката M, всички точки на която не принадлежат на множеството $\{M\}$.*

8°. *Точката M на пространството E^m се нарича* **контурна точка** *за множеството $\{M\}$, ако тази точка не е нито вътрешна, нито външна точка за множеството.*

Забележка 2. Една контурна точка M за множеството $\{M\}$ може да принадлежи и да не принадлежи на това множество. Така например всяка точка на m-мерната сфера с радиус R и център в точката M_0 е контурна както за отвореното m-мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0, така и за затвореното m-мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0. Но всяка точка от тази сфера не принадлежи на отвореното m-мерно кълбо с радиус R и център в M_0 и принадлежи на затвореното кълбо с радиус R и център в M_0.

9°. *Едно множество $\{M\}$ от точки на пространството E^m се нарича* **отворено**, *ако всяка точка на множеството е вътрешна точка.*

10°. *Произволно отворено множество, съдържащо дадена точка M_0, се нарича* **околност** *на точката M_0.*

11°. *Едно множество $\{M\}$ от точки на пространството E^m се нарича* **затворено**, *ако съдържа всичките си контурни точки.*

За да дадем друго, еквивалентно определение на затворено множество, ще въведем понятието точка на сгъстяване за произволно множество $\{M\}$ в пространството E^m.

12°. *Точката A на пространството E^m се нарича* **точка на сгъстяване** *за множеството $\{M\}$, ако във всяка ε-околност на точката A се съдържа поне една точка от това множество, различна от A.*

Ще се убедим, че множеството $\{M\}$ е затворено тогава и само тогава, когато съдържа всичките си точки на сгъстяване. Наистина, ако множеството $\{M\}$ е затворено, то съдържа всичките точки на пространството E^m с изключение на външните си точки. Но понеже между външните точки на множеството $\{M\}$ няма негови точки на сгъстяване, то множеството $\{M\}$ съдържа всичките си точки на сгъстяване.

Ако множеството $\{M\}$ не съдържа поне една своя точка на сгъстяване M_0, то не може да бъде затворено, тъй като тази точка M_0 (във всяка ε-околност на която ще се съдържат както точки, принадлежащи на множеството, така и точки, непринадлежащи на множеството) е контурна точка за множеството $\{M\}$.

Доказаното твърдение позволява да се даде друго, еквивалентно определение на затворено множество: Множеството $\{M\}$ се

нарича затворено, ако съдържа всичките си точки на сгъстяване.

13°. *Множеството $\{M\}$ от точки на пространството E^m се нарича* ***ограничено,*** *ако съществува m-мерно кълбо, съдържащо всички точки на това множество.*

14°. Ще въведем понятието непрекъсната крива в m-мерното евклидово пространство E^m.

Непрекъсната крива L в пространството E^m ще наричаме множество $\{M\}$ от точки на това пространство, чиито координати $x_1, x_2, \cdots, x_m$ са непрекъснати функции на параметъра t:

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),\ \cdots,\ x_m=\varphi_m(t),\ \alpha\leqq t\leqq\beta. \tag{13.3}$$

Ще казваме, че точките $M'(x_1', x_2', \cdots, x_m')$ и $M''(x_1'', x_2'', \cdots, x_m'')$ на пространството E^m могат да се съединят с непрекъсната крива L, ако съществува такава непрекъсната крива L, определена с параметричните уравнения (13.3), че

$$x_1'=\varphi_1(\alpha),\ x_2'=\varphi_2(\alpha),\ \cdots,\ x_m'=\varphi_m(\alpha),$$
$$x_1''=\varphi_1(\beta),\ x_2''=\varphi_2(\beta),\ \cdots,\ x_m''=\varphi_m(\beta).$$

Понятието непрекъсната крива в пространството E^m позволява да се въведе понятието свързано множество.

15°. *Множеството $\{M\}$ от точки на пространството E^m се нарича* ***свързано,*** *ако всеки две точки на това множество могат да се съединят с непрекъсната крива, всички точки на която принадлежат на множеството.*

Всяко свързано множество $\{M\}$ от пространството E^m притежава следното свойство: Ако множеството $\{M\}$ е свързано, то не съществуват две непресичащи се отворени множества G' и G'', за които сечението на всяко от тях с $\{M\}$ не е празно и множеството $\{M\}$ се съдържа в обединението на G' и G''.

Доказателството на това свойство ще проведем с допускане на противното. Приемаме, че съществуват две такива множества G' и G''. Тъй като сечението на всяко от тези множества с $\{M\}$ не е празно, то има две точки M' и M'' от множеството, първата от които принадлежи на G', а втората на G''.

За да получим противоречие, достатъчно е да установим, че точките M' и M'' не могат да се съединят с непрекъсната крива, всичките точки на която принадлежат на множеството $\{M\}$.

Да допуснем противното, че такава крива L съществува. Подреждаме всички точки на кривата L по нарастването на параметъра t, който се изменя в сегмента $\alpha\leqq t\leqq\beta$. Означаваме с γ точната горна граница на тези стойности на параметъра t, за които съответните точки от кривата L принадлежат на множеството G', а с N — точката от L, съответстваща на стойността на параметъра $t=\gamma$.

Достатъчно е да се докаже, че точката N не принадлежи на множеството $\{M\}$, а за това е достатъчно да се убедим, че N не принадлежи нито на множеството G', нито на множеството G''.

Ако точката N принадлежеше на G', което е отворено, би съществувала ε-околност на точката N, която също ще принадлежи на G', т. е. ще има точки от кривата, отговарящи на стойности на параметъра t, по-големи от γ, които принадлежат на G', а това противоречи на условието, че γ е точна горна граница на стойностите на параметъра t, за които съответните точки от кривата принадлежат на G'.

Аналогично, ако точката N принадлежеше на G'', то тя би принадлежала на това множество заедно с някоя своя ε-околност, т. е. би имало точки от кривата L, отговарящи на стойности на параметъра t, по-малки от γ и принадлежащи на G'' и затова непринадлежащи на G', което противоречи на условието, че γ е точна горна граница на стойностите на параметъра t, за които съответните точки от кривата L принадлежат на множеството G'. □

16°. *Всяко отворено и свързано множество в пространството E^m е прието да се нарича* ***област.***

17°. *Ако множеството $\{M\}$ е област, то множеството $\{\overline{M}\}$, получено, като присъединим към множеството $\{M\}$ всичките му точки на сгъстяване, се нарича* ***затворена област.***

Отвореното m-мерно кълбо и отвореният m-мерен координатен паралелепипед са ограничени, свързани и отворени множества, т. е. те са примери за ограничени области в пространството E^m.

m-мерната сфера в пространството E^m е пример за затворено и ограничено множество.

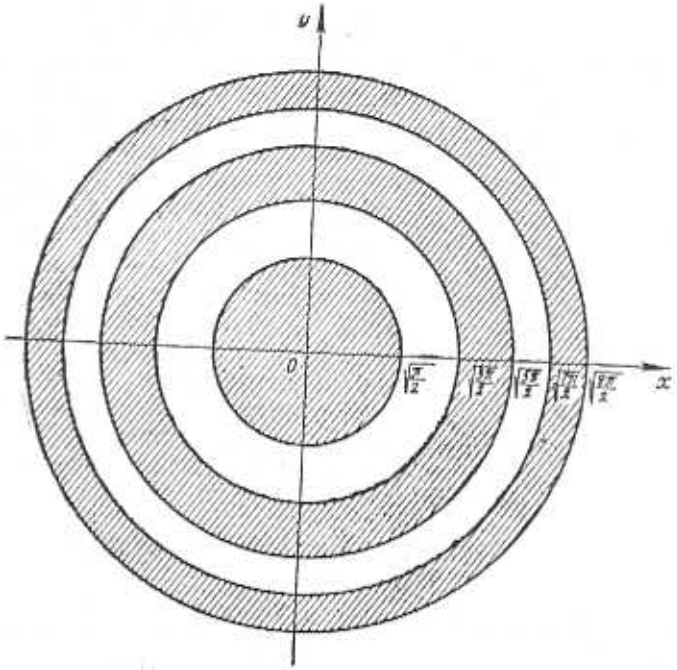
Затвореното m-мерно кълбо е ограничена затворена област в E^m.

Допълнението към отвореното m-мерно кълбо е неограничено затворено множество.

Обединението на две непресичащи се области в пространството E^m е пример за несвързано множество.

13.1.3. Понятие за функция на m променливи. Ако на всяка точка M на множеството $\{M\}$ от точки на m-мерното евклидово пространство E^m е съпоставено едно число $f(M)$, казваме, че в множеството $\{M\}$ е дефинирана функцията f. При това множеството $\{M\}$ се нарича дефиниционна област на функцията f.

Числото $f(M)$, съответстващо на дадена точка M от множеството $\{M\}$, ще наричаме частна стойност на функцията в точката M. Съвкупността $\{f(M)\}$ от всички частни стойности на функцията f се нарича множество от стойностите на тази функция



Фиг. 13.1

множество от функционалните стойности). Тъй като точката M се определя с координатните $x_1, x_2, \cdot\cdot\cdot, x_m$, то за частната стойност $f(M)$ на функцията на m променливи се използва още означението $f(x_1, x_2, \cdot\cdot\cdot, x_m)$.

Примери:

1. $u=(4-x^2-y^2)^{1/2}$. Дефиниционната област на тази функция е кръг с радиус 2 и с център в началото на координатната система. Множеството от функционалните ѝ стойности е сегментът $0 \leqq u \leqq 2$.

2. $u=(x^2+y^2-4)^{-1/2}$. Дефиниционната област на тази функция е множеството от точки, лежащи вън от кръга с радиус 2 и с център в началото на координатната система, а множеството от функционалните ѝ стойности е полуправата $u>0$.

3. $u=(\cos(x^2+y^2))^{1/2}$. Дефиниционната област на тази функция е множеството $\{M\}$ от точки, чиито координати удовлетворяват неравенството $\cos(x^2+y^2) \geq 0$. Това неравенство е еквивалентно на неравенствата $0 \leqq x^2+y^2 \leqq \pi/2$, $2k\pi-\pi/2 \leqq x^2+y^2 \leqq 2k\pi+\pi/2$ при $k=1, 2, 3, \cdot\cdot\cdot$ По такъв начин $\{M\}$ се състои от кръга с радиус $\sqrt{\pi/2}$ и център в точката $(0, 0)$ и пръстеновидни затворени области (фиг. 13.1).

4. $u=(1-x_1^2-x_2^2-\cdot\cdot\cdot-x_m^2)^{1/2}$. Дефиниционната област на тази функция е очевидно m-мерното кълбо с радиус 1 и с център в точката $(0, 0, \cdot\cdot\cdot, 0)$. Множеството на функционалните ѝ стойности е сегментът $[0, 1]$.

5. $u=(1-x_1^2/a_1^2-x_2^2/a_2^2-\cdot\cdot\cdot-x_m^2/a_m^2)^{-1/2}$. Дефиниционната област на тази функция е множеството $\{M\}$ на всички точки от пространството E^m, чиито координати $x_1, x_2, \cdot\cdot\cdot, x_m$ удовлетворяват неравенството

$$x_1^2/a_1^2+x_2^2/a_2^2+\cdot\cdot\cdot+x_m^2/a_m^2<1$$

(предполагаме, че $a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot, a_m$ са положителни числа).

Очевидно това множество $\{M\}$ е област в пространството E^m, всички точки на която лежат вътре в т. нар. m-мерен елипсоид, който от своя страна е множеството от точки с координати, удовлетворяващи уравнението

$$x_1^2/a_1^2+x_2^2/a_2^2+\cdot\cdot\cdot+x_m^2/a_m^2=1.$$

Множеството на функционалните стойности на функцията е полуправата $u \geq 1$.

Дефиниционната област на функция на m променливи е множество от точки на m-мерното евклидово пространство E^m, а множеството на функционалните ѝ стойности е множество в едномерното евклидово пространство E^1. По такъв начин функция на m променливи може да се разглежда като изображение на някое множество от пространството E^m в някое множество от пространството E^1.

13.2. Граница на функция на m променливи

13.2.1. Редица от точки в пространството E^m. Ще въведем понятието редица от точки в m-мерното пространство E^m. *Нека на всяко цяло положително число n съпоставим точка M_n от евклидовото пространство E^m. Получената редица от точки $M_1, M_2, \cdot\cdot\cdot, M_n, \cdot\cdot\cdot$, разглеждани в посочения ред, се нарича редица от точки в евклидовото пространство E^m. Тази редица кратко ще означаваме със символа $\{M_n\}$.*

Ще въведем освен това понятията сходяща редица от точки в пространството E^m и граница на сходяща редица.

Редицата $\{M_n\}$ от точки на евклидовото пространство E^m се нарича сходяща, ако съществува такава точка A от E^m, че за всяко положително число ε да съществува такъв номер N,

че при $n \geqq N$ да е изпълнено неравенството $\rho(M_n, A) < \varepsilon$. Точката A се нарича ***граница на редицата*** *$\{M_n\}$ и се означава с*

$$\lim_{n\to\infty} M_n = A \qquad \text{или} \qquad M_n \to A \text{ при } n \to \infty.$$

Лема 1. *Редицата $\{M_n\}$ от точки на m-мерното евклидово пространство E^m е сходяща (клони) към точката A на това пространство тогава и само тогава, когато числовите редици $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \cdots, \{x_m^{(n)}\}$ от координатите на точките M_n са сходящи съответно към числата $a_1, a_2, \cdots, a_m$, които са координати на точката A.*

Доказателство. *Необходимост.* Ако редицата $\{M_n\}$ клони към точката A, то за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери такъв номер N, че при $n \geqq N$ да е изпълнено неравенството $\rho(M_n, A) < \varepsilon$. Нека $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)})$ са координатите на точката M_n, а $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ са координатите на точката A. Тогава неравенството $\rho(M_n, A) < \varepsilon$ може да се запише по следния начин:

$$((x_1^{(n)} - a_1)^2 + (x_2^{(n)} - a_2)^2 + \cdots + (x_m^{(n)} - a_m)^2)^{1/2} < \varepsilon. \tag{13.4}$$

Оттук следва, че при $n > N$ са изпълнени и неравенствата

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon, \ |x_2^{(n)} - a_2| < \varepsilon, \cdots, |x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon,$$

т. е. редиците от координатите на точките M_n са сходящи съответно към $a_1, a_2, \cdots, a_m$. □

Достатъчност. Нека редиците от координатите на точките M_n са сходящи съответно към $a_1, a_2, \cdots, a_m$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват такива номера $N_1, N_2, \cdots, N_m$, че при $n > N_1, n > N_2, \cdots, n > N_m$ са изпълнени съответно неравенствата

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon/\sqrt{m}, \ |x_2^{(n)} - a_2| \leqq \varepsilon/\sqrt{m}, \cdots, |x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon/\sqrt{m}.$$

Оттук следва, че при $n > N = \max\{N_1, N_2, \cdots, N_m\}$ е изпълнено неравенството (13.4). С други думи, при $n \geqq N$ е изпълнено неравенството $\rho(M_n, A) < \varepsilon$, където A е точка от E^m с координати $a_1, a_2, \cdots, a_m$. Следователно редицата $\{M_n\}$ е сходяща към A. □

Ще въведем сега понятието фундаментална редица от точки в пространството E^m. *Редицата $\{M_n\}$ от точки на m-мерното евклидово пространство се нарича* ***фундаментална*** *или* ***редица на Коши****, ако за всяко положително число ε съществува такъв номер N, че при $n \geqq N$ и при всяко цяло $p \geqq 0$ да е изпълнено неравенството $\rho(M_{n+p}, M_n) < \varepsilon$.*

Напълно аналогично на лема 1 може да се докаже следното твърдение:

Лема 2. *Редицата $\{M_n\}$ от точки на m-мерното евклидово пространство E^m е фундаментална тогава и само тогава, когато е фундаментална всяка от числовите редици $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \cdots, \{x_m^{(n)}\}$, съответстващи на координатите на точките M_n.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека редицата от точки $\{M_n\}$ е фундаментална, т. е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такъв номер N, че при $n > N$ и за всяко цяло $p \geqq 0$ е изпълнено неравенството $\rho(M_{n+p}, M_n) < \varepsilon$, т. е. неравенството

$$((x_1^{(n+p)} - x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n+p)} - x_2^{(n)})^2 + \cdots + (x_m^{(n+p)} - x_m^{(n)})^2)^{1/2} < \varepsilon. \tag{13.4'}$$

От това неравенство следва, че при $n \geqq N$ и за всяко цяло $p \geqq 0$ са изпълнени неравенствата

$$|x_1^{(n+p)} - x_1^{(n)}| < \varepsilon, \ |x_2^{(n+p)} - x_2^{(n)}| < \varepsilon, \cdots, |x_m^{(n+p)} - x_m^{(n)}| < \varepsilon,$$

които показват, че всяка от числовите редици, съответстващи на координатите на точките M_n, е фундаментална.

Достатъчност. Нека всяка от числовите редици, съответстващи на координатите на точката M_n, е фундаментална.

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ ще съществуват такива номера $N_1, N_2, \cdots, N_m$, че при $n \geqq N_1, n \geqq N_2, \cdots, n \geqq N_m$ и за всяко цяло $p \geqq 0$ ще са изпълнени съответно неравенствата

$$|x_1^{(n+p)} - x_1^{(n)}| < \varepsilon/\sqrt{m}, \ |x_2^{(n+p)} - x_2^{(n)}| < \varepsilon/\sqrt{m}, \cdots, |x_m^{(n+p)} - x_m^{(n)}| < \varepsilon/\sqrt{m}.$$

Оттук следва, че при $n \geqq N = \max\{N_1, N_2, \cdots, N_m\}$ и за всяко цяло $p \geqq 0$ е изпълнено неравенството (13.4'), което показва, че редицата от точки $\{M_n\}$ е фундаментална. □

С помощта на леми 1 и 2 лесно се доказва критерият на Коши за сходимост на редица от точки в пространството E^m: *За да бъде редицата $\{M_n\}$ от точки на пространството E^m сходяща, е необходимо и достатъчно тя да бъде фундаментална.*

Наистина, ако редицата от точки $\{M_n\}$ е фундаментална, то според лема 2 е фундаментална и всяка от числовите редици, съответстващи на координатите на точките $\{M_n\}$. Съгласно критерия на Коши за сходимост на числови редици тези редици са сходящи и клонят съответно към някакви числа $a_1, a_2, \cdots, a_m$. Но тогава според лема 1 редицата от точки $\{M_n\}$ е сходяща към точката $A(a_1, a_2, \cdots, a_m)$.

Обратно, ако редицата от точки $\{M_n\}$ е сходяща към някоя точка A на пространството E^m, то според лема 1 всяка от числовите редици, съответстващи на координатите на точките $\{M_n\}$, клони към съответната координата на точката A. Но тогава (съгласно критерия на Коши за сходимост на числови редици) всяка от числовите редици, съответстващи на координатите на точките $\{M_n\}$, е фундаментална и съгласно лема 2 редицата $\{M_n\}$ е също фундаментална.

13.2.2. Свойство на ограничените редици от точки в E^m. *Редицата $\{M_n\}$ от точки на m-мерното евклидово пространство се нарича* ***ограничена****, ако съществува такова число $a>0$, че за всяко n да е изпълнено неравенството $\rho(O, M_n)\leq a$, където O е точката, всички координати на която са равни на нула.*

С други думи, ограничеността на редицата от точки $\{M_n\}$ означава, че всички точки на тази редица принадлежат на затворено кълбо с даден радиус и с център началото на координатната система O.

Ако $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ е произволна строго растяща редица от положителни числа, то редицата от точки

$$M_{n_1}, M_{n_2}, \ldots, M_{n_k}, \ldots$$

ще наричаме подредица на редицата от точки $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$

Теорема 13.1 (теорема на Болцано — Вайерщрас). *От всяка ограничена редица $\{M_n\}$ от точки на m-мерното евклидово пространство E^m може да се избере сходяща подредица.*

Доказателство. Ще се убедим най-напред, че редиците $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \ldots, \{x_m^{(n)}\}$ от координатите на точките M_n са ограничени. Действително, тъй като редицата $\{M_n\}$ е ограничена, то за всяко n е изпълнено неравенството $\rho(O, M_n)\leq a$. Понеже $\rho(O, M_n)=((x_1^{(n)})^2+(x_2^{(n)})^2+\ldots+(x_m^{(n)})^2)^{1/2}$, то за всяко n са изпълнени и неравенствата $|x_1^{(n)}|\leq a$, $|x_2^{(n)}|\leq a$, $\ldots$, $|x_m^{(n)}|\leq a$. С други думи, редиците $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \ldots, \{x_m^{(n)}\}$ от координатите на точките M_n са ограничени. Съгласно теоремата на Болцано — Вайерщрас за числови редици (вж. 3.3.1) от редицата $\{x_1^{(n)}\}$ може да се избере подредица $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$, сходяща към някое число a_1. Разглеждаме съответстващата ѝ подредица $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ на редицата от вторите координати на точките M_n. Съгласно същата теорема от подредицата $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ може да се избере подредица $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$, клоняща към някакво число a_2. Отбелязваме, че подредицата $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$ на подредицата $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$ клони към числото a_1. И така подредиците $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$ и $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ са сходящи съответно към a_1 и a_2.

Очевидно, ако от подредицата $\{x_3^{(n_{k_2})}\}$ на редицата от третите координати на точките M_n изберем сходяща към числото a_3 подредица $\{x_3^{(n_{k_3})}\}$, то подредиците $\{x_1^{(n_{k_3})}\}, \{x_2^{(n_{k_3})}\}, \{x_3^{(n_{k_3})}\}$ ще клонят съответно към числата a_1, a_2, a_3. Продължавайки този процес, накрая ще получим сходяща към някое число a_m подредица $\{x_m^{(n_{k_m})}\}$ на редицата от m-тите координати на точките M_n; при това подредиците $\{x_1^{(n_{k_m})}\}, \{x_2^{(n_{k_m})}\}, \ldots, \{x_m^{(n_{k_m})}\}$ ще клонят съответно към числата $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Но тогава съгласно лема I подредицата $\{M_{n_{k_m}}\}$ на редицата от точки $\{M_n\}$ ще клони към точката A с координати $a_1, a_2, \ldots, a_m$. □

Забележка. Границата A на редица $\{M_n\}$ от точки, принадлежащи на затворено множество $\{M\}$, също принадлежи на това множество. За да се убедим в това, е достатъчно да отбележим, че във всяка ε-околност на точката A има точки M_n, т. е. точки от множеството $\{M\}$, и затова точката A е или вътрешна, или контурна точка на $\{M\}$ и следователно принадлежи на $\{M\}$.

13.2.3. Граница на функция на m променливи. Да разгледаме функцията f, дефинирана в множеството $\{M\}$ от точки на m-мерното евклидово пространство E^m, и точката A от пространството E^m, която може и да не принадлежи на множеството $\{M\}$, но е точка на сгъстяване на множеството $\{M\}$.

Определение 1 (граница на функция в точката A по Хайне). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f в точката A (или при $M\to A$), ако за всяка сходяща към A редица $\{M_n\}$ от точки, принадлежащи на дефиниционната област на функцията, всичките членове M_n на която са различни от A, съответната числова редица от стойности на функцията $\{f(M_n)\}$ е сходяща към числото b.*

Определение 1′ (граница на функция в точката A по Коши). *Числото b се нарича* ***граница*** *(или* ***гранична стойност****) на функцията f в точката A (или при $M\to A$), ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяка точка M от дефиниционната област на функцията, удовлетворяваща условието $0<\rho(M, A)<\delta$, да е изпълнено неравенството $|f(M)-b|<\varepsilon$.*

За означаване на границата на функцията f в точката A се използва:

$$\lim_{M\to A} f(M)=b \text{ или } \lim_{\substack{x_i\to a_i\\ i=1,2,\ldots,m}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)=b$$

(тук $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$) са координатите на точката A).

Доказателството за еквивалентността на определенията 1′ и 1 се провежда точно както за функция на една променлива. Само в разсъжденията на теорема 3.19 (вж. 3.4.2) трябва да се замени редицата $\{x_n\}$ с редицата от точки $\{M_n\}$, точката a с точката $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, разликите $|x-a|$ и $|x_n-a|$ с разстоянията $\rho(M, A)$ и $\rho(M_n, A)$, а числовата редица $\{f(x_n)\}$ с числовата редица $\{f(M_n)\}$.

Ще въведем сега понятието граница на функция f при $M\to\infty$. Затова ще предполагаме, че в множеството $\{M\}$, в което е дефинирана функцията f, за всяко $\delta>0$ има поне един елемент M, лежащ вън от кълбото с радиус δ и с център в точката $O(0, 0, \ldots, 0)$.

Ще се ограничим с определението, съответстващо на граница на функция по Коши.

Определение 2. *Числото b се нарича* ***граница на функцията*** *f при $M\to\infty$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяка точка M от дефиниционната област $\{M\}$ на функцията, удовлетворяваща условието $\rho(O, M)>\delta$, е изпълнено неравенството $|f(M)-b|<\varepsilon$.*

За означаването на границата на функцията $u=f(M)$ при $M\to\infty$ се използва символът

$$\lim_{M\to\infty} f(M)=b.$$

Точно както при функции на една променлива, лесно се убеждаваме, че аритметичните операции над функции на m променливи, имащи граница в дадена точка A (или при $M\to\infty$), водят до функция, която също има граница в точката A (съответно при $M\to\infty$).

Ще формулираме съответното твърдение за случая на граница в точката A.

Нека двете функции f и g, дефинирани в едно и също множество $\{M\}$, имат граници в точката A, съответно равни на b и c. Тогава функциите $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ и f/g имат граници в точката A, съответно равни на $b+c$, $b-c$, $b\cdot c$ и b/c (при частно е необходимо допълнително изискване c да бъде различно от нула).

Доказателството на това твърдение е съвършено аналогично на доказателството на теорема 3.21 (вж. 3.4.4), само че вместо определението за граница на функция на една променлива по Хайне трябва да се използва определението за граница на функция на m променливи по Хайне.

Ще се спрем сега на критерия на Коши за съществуване на граница на функция на m променливи.

Определение 3. *Ще казваме, че функцията на m променливи f удовлетворява условието на Коши в точката $M=A$ (съответно при $M\to\infty$), ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всеки две точки M' и M'' от дефиниционната област на функцията — множеството $\{M\}$, удовлетворяващи условията $0<\rho(M', A)<\delta$, $0<\rho(M'', A)<\delta$ (съответно условията $\rho(M', 0)>\delta$, $\rho(M'', 0)>\delta$), е изпълнено неравенството $|f(M')-f(M'')|<\varepsilon$.*

Теорема 13.2 (критерий на Коши за съществуване на граница на функция на m променливи). *За да има функцията f крайна граница в точката $M=A$ (при $M\to\infty$), е необходимо и достатъчно функцията да удовлетворява условието на Коши в точката $M=A$ (при $M\to\infty$).*

Доказателството на тази теорема е напълно идентично с доказателството на теорема 3.20 (вж. 3.4.3) и може да се получи от него с формалната смяна на буквите x и a с буквите M и A и на $|x-a|$ с $\rho(M, A)$.

13.2.4. Безкрайно малки функции на m променливи. *Функцията $u=f(M)$ се нарича* ***безкрайно малка*** *в точката A (при $M\to A$), ако $\lim\limits_{M\to A} f(M)=0$.*

Лесно е да се убедим, че функцията $f(M)=(x_1-a_1)^{n_1}+(x_2-a_2)^{n_2}+\ldots+(x_m-a_m)^{n_m}$, където $n_1, n_2, \ldots, n_m$ са положителни числа, е безкрайно малка в точката $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Ако граничната стойност на функцията f в точката A е равна на b, то функцията $\alpha(M)=f(M)-b$ е безкрайно малка в точката A.

Действително $\lim\limits_{M\to A}\alpha(M)=\lim\limits_{M\to A}(f(M)-b)=\lim\limits_{M\to A} f(M)-\lim\limits_{M\to A} b=0$. Като използваме този резултат, ще получим специално представяне за функция, границата на която в точката A е равна на b: $f(M)=b+\alpha(M)$, където $\lim\limits_{M\to A}\alpha(M)=0$.

Сравняването на безкрайно малки функции на няколко променливи се прави точно както е показано в 3.4.5 за безкрайно малки функции на една променлива. Както и в случая на една променлива, под символа $o(\beta)$ ще разбираме коя да е безкрайно малка в дадена точка функция от по-висок ред от безкрайно малката в дадената точка функция β.

13.2.5. Многократна граница. За функцията $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на няколко променливи може да се определи понятието граница по една от променливите x_k при фиксирани стойности на останалите променливи. Във връзка с това възниква понятието ***многократна граница*** (двойна, тройна и т. н.). Ще поясним това понятие за функция f на две променливи x и y. Нека функцията f е дефинирана в правоъгълна околност $|x-x_0|<d_1$, $|y-y_0|<d_2$ на точката $M_0(x_0, y_0)$ с изключение евентуално на точката M_0. Нека за всяко фиксирано y, удовлетворяващо условието $0<|y-y_0|<d_2$, съществува границата на функцията f на една променлива x в точката $x=x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y)=\varphi(y),\quad y \text{ — фиксирано},$$

и нека освен това функцията φ има в точката $y=y_0$ граница, равна на b:

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = b.$$

В такъв случай се казва, че съществува **двойна граница** b за функцията f в точката M_0, която се означава по следния начин:

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) = b.$$

Аналогично се определя и двойната граница

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y).$$

Ще установим достатъчни условия за равенство на въведените двойни граници.

Теорема 13.3. *Нека функцията f е дефинирана в някоя правоъгълна околност $|x-x_0|<d_1$, $|y-y_0|<d_2$ на точката $M_0(x_0, y_0)$ и има в тази точка граница, равна на b. Нека освен това за всяко фиксирано x, $0<|x-x_0|<d_1$, да съществува границата $\psi(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ и за всяко фиксирино y, $0<|y-y_0|<d_2$, да съществува границата $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$. Тогава двойните граници $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ и $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ съществуват и са равни на b.*

Доказателство. Тъй като f има в точката M (x_0, y_0) граница b, то за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова $\delta>0$, че при $|x-x_0|<\delta$ и $|y-y_0|<\delta$ да бъде изпълнено неравенството $|f(x, y)-b|<\varepsilon$. Така в правоъгълната околност $|x-x_0|<\delta$ и $|y-y_0|<\delta$ на точката M_0 стойностите на функцията f се различават от b най-много с ε. Но тогава границите ψ и φ от формулировката на теоремата при x и y, удовлетворяващи неравенствата $|x-x_0|<\delta$ и $|y-y_0|<\delta$, също ще се различават от b най-много с ε. Следователно и границите на тези функции съответно в точките x_0 и y_0 съществуват и са равни на b. Теоремата е доказана.

Може да се определи и понятието двойна граница за т. нар. двойни редици $\{a_{mn}\}$, членовете a_{mn} на които се определят с два индекса m и n. Символът $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$ означава, че най-напред се определя редицата $\{b_n\}$, $b_n=\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$, а след това се намира границата на тази редица $\{b_n\}$.

Ще разгледаме например двойната редица $\{a_{mn}\}$, където $a_{mn}=\cos^m 2\pi n!x$, x е фиксирано число. Ще докажем, че

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos^m 2\pi n!x = \begin{cases} 1, \text{ ако } x \text{ е рационално число,} \\ 0, \text{ ако } x \text{ е ирационално число.} \end{cases}$$

Наистина, ако $x=p/q$, където p и q са цели числа, второто от които е положително, то при $n\geq q$ имаме $\cos 2\pi n!x=1$ и затова $\lim\limits_{m\to\infty,\, n\geq q} \cos^m 2\pi n!x=1$. С други думи, ако x е рационално число, то

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos^m 2\pi n!x = 1.$$

Ако x е ирационално число, то при всяко n е изпълнено неравенството $|\cos 2\pi n!x|<1$ и затова $\lim\limits_{m\to\infty} \cos^m 2\pi n!x=0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \cos^m 2\pi n!x=0$.

Забележка. Като използваме получения резултат, можем аналогично да зададем функцията на Дирихле (пр. 3.4.1) с двойната граница $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \cos^m 2\pi n!x$.

13.3. Непрекъснатост на функция на m променливи

13.3.1. Понятие за непрекъснатост на функция на m променливи. Да разгледаме функцията f на m променливи, дефинирана в някакво множество $\{M\}$ от пространството E^m. Нека A принадлежи на $\{M\}$ и е точка на сгъстяване за множеството $\{M\}$.

Формално определение на непрекъснатост на функция в точка. *Функцията f се нарича* **непрекъсната** *в точката A, ако границата на тази функция в точката A съществува и е равна на частната стойност $f(A)$.*

Понеже $A=\lim\limits_{M\to A} M$, то условието за непрекъснатост на функцията f в точката A може да се запише във вида

$$\lim_{M\to A} f(M)=f(\lim_{M\to A} M).$$

По такъв начин за непрекъсната в дадена точка A функция символът lim за граница и символът f могат да сменят местата си.

Точките от пространството E^m, в които функцията f не притежава свойството непрекъснатост, се наричат точки на прекъсване на тази функция.

Като използваме определенията за граница на функция в точка A по Хайне и по Коши, стигаме до двете еквивалентни определения за непрекъснатост на функция в дадена точка по Хайне и по Коши.

Определение 1 (непрекъснатост на функция в дадена точка по Хайне). *Функцията f се нарича* **непрекъсната** *в точката A ако за всяка сходяща към A редица $\{M_n\}$ от точки, принадлежа-*

щи на дефиниционната област на функцията, съответната числова редица $\{f(M_n)\}$ от стойности на функцията е сходяща към числото $f(A)$.

Определение 1′ (непрекъснатост на функция в дадена точка по Коши). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната*** *в точката A, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяка точка M от дефиниционната област на функцията, удовлетворяваща условието $\rho(M, A)<\delta$, е изпълнено неравенството $|f(M)-f(A)|<\varepsilon$.*

Забележка. За разлика от определението на граница по Хайне в определение 1 не се иска $M_n \neq A$. Това е възможно, защото функцията f е дефинирана в точката A и прибавянето към редицата $\{f(M_n)\}$, сходяща към числото $f(A)$, на произволен брой нови членове, равни на $f(A)$, не нарушава сходимостта на тази редица.

Аналогично за разлика от определението на граница по Коши в определение 1′ не се иска $\rho(M, A)>0$, което е равносилно на изискването $M \neq A$. Това е така, защото функцията f е дефинирана в точката A и при $M=A$ неравенството $|f(M)-f(A)|<\varepsilon$ е изпълнено за всяко $\varepsilon>0$.

Нека сега $\{M\}$ е множество от точки на пространството E^m и всяка δ-околност на всяка негова точка съдържа други точки от това множество. Такова множество се нарича ***гъсто в себе си.***

Определение 2. *Функцията f, дефинирана в множеството $\{M\}$, се нарича* ***непрекъсната*** *в това множество, ако тя е непрекъсната във всяка негова точка M.*

Ще наречем ***нарастване*** или ***пълно нарастване*** на функцията f в точката A функцията Δf, дефинирана с формулата

$$\Delta f = f(M)-f(A), \tag{13.5}$$

където M е точка от дефиниционната област на дадената функция. Нека точките A и M имат съответно координати $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Означаваме $x_1-a_1=\Delta x_1$, $x_2-a_2=\Delta x_2, \ldots, x_m-a_m=\Delta x_m$. Като използваме тези означения, за нарастването на функцията Δf получаваме по отношение на нарастването на аргументите $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ следния израз:

$$\Delta f = f(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_m+\Delta x_m)-f(a_1, a_2, \ldots, a_m). \tag{13.6}$$

Очевидно за непрекъснатостта на функцията f в точката A е необходимо и достатъчно

$$\lim_{M\to A} \Delta f = \lim_{M\to A} (f(M)-f(A))=0 \tag{13.7}$$

$$\text{или} \quad \lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ 1\le i\le m}} \Delta f = 0.$$

условието (13.7) е естествено да се нарича *диференчна форма* на условието за непрекъснатост на функцията f в точката A.

13.3.2. Непрекъснатост на функция на m променливи по една от променливите. За функцията f на няколко променливи може да се определи понятието непрекъснатост по една от променливите ѝ при фиксирани стойности на останалите променливи. За определянето на това понятие ще разгледаме т. нар. частни нараствания на функцията f в точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от дефиниционната ѝ област. Фиксираме всички аргументи освен първия, на който даваме такова произволно нарастване Δx_1, че точката с координати $x_1+\Delta x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ да принадлежи на дефиниционната област на функцията. Съответното нарастване се нарича ***частно нарастване**** на функцията в точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, отговарящо на нарастването Δx_1 на аргумента x_1 и се означава с

$$\Delta_{x_1} f = f(x_1+\Delta x_1, x_2, \ldots, x_m)-f(x_1, x_2, \ldots, x_m). \tag{13.8}$$

Аналогично се определят и частните нараствания на функцията, съответстващи на нарастванията на другите ѝ аргументи:

$$\begin{aligned} &\Delta_{x_2} f = f(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3, \ldots, x_m)-f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\Delta_{x_m} f = f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m+\Delta x_m)-f(x_1, x_2, \ldots, x_m). \end{aligned} \tag{13.9}$$

Функцията f се нарича ***непрекъсната в точката*** *$M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$* ***по променливата*** *x_k, ако частното нарастване $\Delta_{x_k} f$ на тази функция в точката M е безкрайно малка функция на Δx_k, т. е. ако*

$$\lim_{\Delta x_k\to 0} \Delta_{x_k} f = 0.$$

При фиксирани стойности на всичките променливи с изключение на променливата x_k функцията f е функция само на тази една променлива. Ще отбележим, че непрекъсността на функцията по променливата x_k означава непрекъснатост на тази функция на една променлива.

Очевидно от условието за непрекъснатост на функцията f в дадена точка M следва непрекъснатостта на тази функция в точката M по всяка от променливите $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$. От непрекъснатостта обаче на функцията в точката M по всяка от променливите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ не следва в общия случай непрекъснатостта на функцията в тази точка.

* Терминът „частно нарастване" се употребява, за да се различава това нарастване от пълното нарастване (13.6), съответстващо на произволни нараствания $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ на всичките аргументи $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Примери:

1. Ще казваме, че функцията f на две променливи е непрекъсната върху правата l, минаваща през точката M, ако за всяка редица от точки $\{M_n\}$ от тази права, сходяща към точката M, съответната редица $\{f(M_n)\}$ от стойности на функцията е сходяща и има за граница частната стойност $f(M)$ на функцията в точката M. Тъй като върху правата функцията f е функция на една променлива, то понятието непрекъснатост на функция върху права съвпада с понятието непрекъснатост на посочената функция на една променлива. Спецкали непрекъснатостта на функцията в точката M отделно по променливите x и y е в действителност непрекъснатост върху правите, минаващи през точката M и успоредни на координатните оси.

Ще докажем, че функцията

$$u=\begin{cases} xy/(x^2+y^2) & \text{при } x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0 \end{cases} \tag{13.10}$$

е непрекъсната в точката (0, 0) по всяка от променливите x и y, т. е. непрекъсната върху всяка от координатните оси, но не е непрекъсната върху всяка от останалите прави, минаващи през тази точка, и затова не е непрекъсната в точката O. Всяка права, различна от координатните оси и минаваща през точката (0, 0), може да се представи с уравнение от вида $y=kx$ при $k\neq 0$.

Във всяка точка на правата $y=kx$ при $k\neq 0$ функцията (13.10) има една и съща постоянна стойност $k/(1+k^2)$ с изключение на точка $O(0, 0)$. Оттук следва, че ако редицата $\{M_n\}$ от точки, различни от O, клони към точката O, то съответната редица от стойности на функцията има за граница $k/(1+k^2)$. Тъй като при $k\neq 0$ тази граница е различна от нула и не съвпада с частната стойност на функцията в точката O, то функцията е прекъсната в тази точка на разглежданата права. Непрекъснатостта на функцията върху координатните оси следва от това, че стойностите ѝ върху тези оси са равни на нула.

2. Може да се създаде впечатление, че ако функция на две променливи е непрекъсната върху всяка права, минаваща през дадена точка, то тази функция е непрекъсната в тази точка. Следващият пример показва, че това в общия случай не е така.

Да разгледаме функцията

$$u=\begin{cases} x^2y/(x^4+y^2) & \text{при } x^4+y^2\neq 0, \\ 0 & \text{при } x^4+y^2=0. \end{cases}$$

Ще докажем, че въпреки непрекъснатостта на тази функция върху всяка права, минаваща през точката $O(0, 0)$, тя не е непрекъсната в тази точка. Наистина стойностите на тази функция върху правата $y=kx$ са равни на $kx/(x^2+k^2)$ и затова $u\to 0$ при $x\to 0$. Непрекъснатостта на функцията върху оста Oy следва от това, че нейните стойности върху тази ос са равни на нула. От друга страна, стойностите на функцията върху параболата $y=px^2$ са постоянни и равни на $p/(1+p^2)$ и затова границата ѝ, когато точката M клони към O по тази парабола, е също равна на $p/(1+p^2)$. Понеже при $p\neq 0$ тази граница е различна от нула и не съвпада с частната стойност на функцията в точката O, то функцията е прекъсната в тази точка.

13.3.3. Основни свойства на непрекъснатите функции на няколко променливи. В тази точка ще изброим основните свойства на непрекъснатите функции на няколко променливи. Тъй като доказателствата на тези свойства са аналогични на доказателствата на съответните свойства на функции на една променлива, то ще даваме само кратки пояснения.

1°. Аритметични операции с непрекъснати функции. *Ако функциите $f(M)$ и $g(M)$ са дефинирани в едно и също множество $\{M\}$ и непрекъснати в някоя точка A от това множество, то функциите $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ и f/g са също непрекъснати в точката A.* (В случая на частно трябва да искаме допълнително $g(A)\neq 0$.)

2°. Непрекъснатост на сложна функция. Ще въведем понятието сложна функция на няколко променливи. Нека функциите

$$\begin{aligned} x_1&=\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ x_2&=\varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m&=\varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k) \end{aligned} \tag{13.11}$$

са дефинирани в множеството $\{N\}$ от евклидовото пространство $E^k(t_1, t_2, \ldots, t_k$ са координатите на точките в това пространство). Тогава на всяка точка $N(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ от множеството $\{N\}$ чрез формулите (13.11) се съпоставя точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от евклидовото пространство E^m. Да означим с $\{M\}$ множеството на всички такива точки. Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ е функция на m променливи, дефинирана в това множество $\{M\}$. В такъв случай ще казваме, че в множеството $\{N\}$ от евклидовото пространство E^k е дефинирана сложна функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, където $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са функции на променливите $t_1, t_2, \ldots, t_k$, определени от съотношенията (13.11). В сила е следното твърдение:

Нека функциите $x_1=\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $x_2=\varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $\ldots$, $x_m=\varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ са непрекъснати в точката $A(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, а функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ е непрекъсната в

точката $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, *където* $b_i=\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $i=1, 2, \ldots, m$. *Тогава сложната функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *където* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *са определените по-горе функции на аргументите* $t_1, t_2, \ldots, t_k$, *е непрекъсната в точката* $A(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

За доказателството на това твърдение разглеждаме произволна сходяща към A редица от точки $N_n=(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)})$ от множеството $\{N\}$. Ще означим с $\{M_n\}$ съответната редица от точки на пространството E^m, координатите $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ на която са равни на $x_i^{(n)}=\varphi_i(N_n)=\varphi_i(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)})$, $i=1, 2, 3, \ldots, m$.

От непрекъснатостта на функциите $\varphi_i(N)$ в точката A и от определението за непрекъснатост по Хайне следва сходимостта на редицата от точки $\{M_n\}$ към точката $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. По-нататък от непрекъснатостта на функцията $u=f(M)$ в точката B и от определението за непрекъснатост по Хайне следва сходимостта на редицата $\{f(M_n)\}$ към числото $f(A)$. Но това означава, че редицата $\{f(\varphi_1(N_n), \varphi_2(N_n), \ldots, \varphi_m(N_n))\}$ от стойности на тази сложна функция е сходяща към частната ѝ стойност $f(\varphi_1(A), \varphi_2(A), \ldots, \varphi_m(A))$, т. е. означава непрекъснатост на сложната функция в точката A.

3°. Теорема за постоянство на знака на непрекъснатата функция.

Теорема 13.4. *Ако функцията* f *е непрекъсната в точката* A *на евклидовото пространство* E^m *и ако* $f(A)\neq 0$, *то съществува* δ*-околност на точката* A, *в която* f *не се анулира и има знак, еднакъв със знака на* $f(A)$.

Верността на тази теорема следва непосредствено от определението за непрекъснатост на функция f в точката A по Коши. Действително от това определение имаме, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че $f(A)-\varepsilon<f(M)<f(A)+\varepsilon$ навсякъде в δ-околността на точката A. Ако при тези разсъждения за положителното число ε вземем $|f(A)|/2$, то ще получим, че и трите числа $f(A)-\varepsilon$, $f(M)$ и $f(A)+\varepsilon$ имат еднакъв знак и затова $f(M)$ има знака на $f(A)$ навсякъде в δ-околността на точката A.

4°. Теорема за приемане на всички междинни стойности от непрекъснатата функция.

Теорема 13.5. *Нека функцията* f *е непрекъсната във всички точки на свързаното множество* $\{M\}$ *от евклидовото пространство* E^m *и* $f(A)$ *и* $f(B)$ *са стойностите ѝ в точките* A *и* B *от това множество. Нека* C *е произволно число, заключено между* $f(A)$ *и* $f(B)$. *Тогава върху всяка непрекъсната крива* L, *съединяваща точките* A *и* B *и изцяло лежаща в* $\{M\}$, *съществува такава точка* N, *че* $f(N)=C$.

Доказателство. Нека

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t), \ldots, x_m=\varphi_m(t), \quad \alpha\leq t\leq\beta,$$

са уравненията на непрекъснатата крива L, съединяваща точките A и B от множеството M и изцяло съдържаща се в $\{M\}$ (вж. 13.1.2). В сегмента $[\alpha, \beta]$ е дефинирана сложната функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, където $x_i=\varphi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, m$; $\alpha\leq t\leq\beta$. Очевидно стойностите на тази функция в сегмента $[\alpha, \beta]$ съвпадат със стойностите на функцията f върху кривата L. Тази сложна функция на една променлива t според твърдението в 2° от тази точка е непрекъсната в сегмента $[\alpha, \beta]$ и съгласно теорема 4.13 в някоя точка ξ на сегмента $[\alpha, \beta]$ приема стойност C. Затова в точката N от кривата L с координати $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_m(\xi)$ получаваме $f(N)=C$. □

5°. Ограниченост на функция, непрекъсната в затворено и ограничено множество.

Теорема 13.6 (първа теорема на Вайерщрас). *Ако функцията* f *е непрекъсната в затвореното и ограничено множество* $\{M\}$, *тя е ограничена в това множество.*

Доказателство. Да изберем (както и при доказателството на аналогичната теорема 4.14) редица $\{M_n\}$ от точки на множеството $\{M\}$, за които $|f(M_n|>n$. Съгласно теоремата на Болцано — Вайерщрас (вж. 13.2.2) от $\{M_n\}$ може да се избере сходяща подредица $\{M_{k_n}\}$, границата M на която според забележката към теоремата на Болцано — Вайерщрас принадлежи на множеството $\{M\}$. Очевидно редицата $\{f(M_{k_n})\}$ е безкрайно голяма. От друга страна, поради непрекъснатостта на функцията в точката M тази редица $\{f(M_{k_n}\}$ трябва да клони към $f(M)$. □

6°. Достигане на точната горна и точната долна граница. Точната горна граница на функцията f в множеството $\{M\}$ се нарича такова число $\bar{u}$, което удовлетворява условията: 1) $f(M)\leq\bar{u}$ за всички точки M на множеството $\{M\}$; 2) за всяко $\varepsilon>0$ съществува поне една точка M от множеството $\{M\}$, за която $f(M)>\bar{u}-\varepsilon$.

Аналогично се определя и точна долна граница $\underline{u}$ на функцията f в множеството $\{M\}$.

За означаване на точните граници на функцията f в множеството $\{M\}$ се използват символите

$$\bar{u}=\sup_{\{M\}} f(M), \quad \underline{u}=\inf_{\{M\}} f(M),$$

или

$$\bar{u}=\sup\{f(M): M\in\{M\}\},$$

$$\underline{u}=\inf\{f(M): M\in\{M\}\}.$$

Теорема 13.7 (втора теорема на Вайерщрас). *Ако функцията f е непрекъсната в затвореното и ограничено множество $\{M\}$, тя достига в това множество точните си долна и горна граница.*

Доказателството на тази теорема почти дословно повтаря доказателството на теорема 4.15 (т. е. втората теорема на Вайерщрас за функция на една променлива).

7°. Понятието равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи. *Функцията f се нарича* ***равномерно непрекъсната*** *в множеството $\{M\}$ от евклидовото пространство E^m, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, зависещо само от ε, че за всеки две точки M' и M'' от множеството $\{M\}$, удовлетворяващи условието $\rho(M', M'')<\delta$, да е изпълнено неравенството $|f(M'')-f(M')|<\varepsilon$.*

В сила е следната теорема:

Теорема 13.8 (теорема на Кантор за равномерна непрекъснатост). *Всяка непрекъсната в ограничено и затворено множество функция е равномерно непрекъсната в това множество.*

Доказателството на тази теорема е съвсем аналогично на доказателството на теорема 4.16.

Забележка. Диаметър на ограничено множество $\overline{\{M\}}$ ще наричаме точната горна граница на числата $\rho(M', M'')$, където M' и M'' пробягват множеството $\{M\}$. Като използваме понятието диаметър на множество, ще изкажем следното свойство на непрекъснатата функция върху затворено и ограничено множество:

Нека функцията f е непрекъсната в затвореното и ограничено множество $\{M\}$. Тогава за всяко положително число ε може да се намери такова $\delta>0$, че на всяко, съдържащо се в множеството $\{M\}$ затворено подмножество $\overline{\{M\}}$ с диаметър, по-малък от δ, осцилацията ω* на функцията f да е по-малка от ε.

Доказателството на това свойство е извършено аналогично на доказателството на следствието на теорема 4.16.

Забележка. Множеството $\{M\}$ от m-мерното евклидово пространство E^m се нарича компакт, ако от всяка система от отворени множества, покриваща множеството $\{M\}$, може да се избере крайна подсистема, покриваща това множество.

Точно както за пространството на реалните числа (вж. 4.7.3), се доказва, че едно множество от m-мерното евклидово пространство E^m е компакт тогава и само тогава, когато е затворено и ограничено.

Следователно първата и втората теорема на Вайерщрас и теоремата на Кантор са валидни за функции, непрекъснати в компакт.

* Осцилация ω на функцията f върху множеството $\overline{\{M\}}$ се нарича разликата между точната горна и точната долна граница на функцията f в това множество.

13.4. Производни и диференциали на функция на няколко променливи

13.4.1. Частни производни на функции на няколко променливи. Нека точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ принадлежи на дефиниционната област на функцията f. Да разгледаме в дадена точка M отношението на частното нарастване $\Delta_{x_k} f$ (вж. (13.8) и (13.9)) и съответното нарастване Δx_k на аргумента x_k:

$$\frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k}=\frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k+\Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)-f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\Delta x_k}. \tag{13.12}$$

Отношението (13.12) е функция на Δx_k, дефинирана за всички различни от нула стойности на Δx_k, за които точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k+\Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)$ принадлежи на дефиниционната област на функцията f.

Определение. *Ако съществува границата на отношението (13.12), когато нарастването Δx_k на аргумента x_k клони към нула, то тази граница се нарича* ***частна производна*** *на функцията f в точката M по аргумента x_k и се означава с $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ или f'_{x_k}.*

Следователно

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k}. \tag{13.13}$$

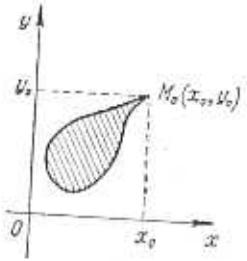
Ще отбележим, че частната производна на функцията f по аргумента x_k представлява обикновена производна на функция на една променлива x_k при фиксирани стойности на останалите променливи. Затова пресмятането на частните производни се извършва по правилата за пресмятане на производни на функция на една променлива.

Примери:

1. $u=\operatorname{arc\,tg}(xy^2)$, $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2/(1+x^2y^4)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2xy/(1+x^2y^4)$.

2. $u=e^{(x^2+y^2)/z}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=2xz^{-1}e^{(x^2+y^2)/z}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=2yz^{-1}e^{(x^2+y^2)/z}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-(x^2+y^2)z^{-2}e^{(x^2+y^2)/z}$; $z\neq 0$.



Фиг. 13.2

Забележка 1. От съществуването на всички частни производни за функцията в дадена точка не следва непрекъснатостта на функцията в тази точка. Вече се убедихме, че функцията (13.10):

$$f(x, y)=\begin{cases} xy/(x^2+y^2) & \text{при } x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0, \end{cases}$$

не е непрекъсната в точката $O(0, 0)$ (вж. пример 1 от 13.3.2). Но в тази точка функцията има частни производни по x и y, понеже $f(x, 0)=0$ и $f(0, y)=0$, и затова

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0.$$

Забележка 2. Ще подчертаем, че даденото определение за частни производни е приложимо за вътрешните точки на дефиниционната област на функцията, но не винаги може да се използва за контурните точки на тази област.

Това е така, защото в контурните точки на дефиниционната област на функцията не винаги могат да се пресметнат частните нараствания на функцията (такава е например контурната точка M_0 на областта, изобразена на фиг. 13.2).

Във връзка с казаното е прието частните производни в контурна точка да се определят като граници на съответните частни производни на вътрешните точки при клонене към разглежданата контурна точка.

13.4.2. Диференцируемост на функция на няколко променливи. Ще напомним, че нарастване (или пълно нарастване) на функцията f в точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, съответстващо на нарастванията $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ на аргументите, се нарича изразът (вж. (13.5) и (13.6))

$$\Delta f=f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_m+\Delta x_m)-f(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Определение. *Функцията f се нарича* ***диференцируема*** *в дадена точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ако пълното ѝ нарастване в тази точка може да се представи във вида*

$$\Delta f=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+\ldots+\alpha_m\Delta x_m, \tag{13.14}$$

където $A_1, A_2, \ldots, A_m$ са числа, независещи от $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ са безкрайно малки функции при $\Delta x_1\to 0, \Delta x_2\to 0, \ldots, \Delta x_m\to 0$.

Отношението (13.14) се нарича условие за диференцируемост на функцията в дадена точка M. Условието (13.14) за диференцируемост на функция може да се запише и в друга форма. За това ще разгледаме безкрайно малката функция $\rho=(\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_m^2)^{1/2}$ при $\Delta x_1\to 0, \Delta x_2\to 0, \ldots, \Delta x_m\to 0$, която се анулира само при $\Delta x_1=\Delta x_2=\ldots=\Delta x_m=0$. Ще се убедим, че сумата $\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+\ldots+\alpha_m\Delta x_m$ от дясната страна на (13.14) е безкрайно малка функция от по-висок ред в сравнение с ρ. С други думи, тази сума е $o(\rho)$. Наистина при $\rho\neq 0$ е изпълнено неравенството $|\Delta x_i|/\rho\leq 1$ и затова

$$\begin{aligned} &|\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+\ldots+\alpha_m\Delta x_m| \\ &\leq\{|\alpha_1|\cdot|\Delta x_1|/\rho+|\alpha_2|\cdot|\Delta x_2|/\rho+\ldots+|\alpha_m|\cdot|\Delta x_m|/\rho\}\rho \\ &\leq\{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_m|\}\cdot\rho=o(\rho). \end{aligned}$$

Следователно условието (13.14) за диференцируемост на функция може да се запише във вида

$$\Delta f=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m+o(\rho), \tag{13.15}$$

при което величината $o(\rho)$ ще смитаме равна на нула при $\rho=0$.

За да докажем, че условието (13.15) е еквивалентно на условието (13.14), трябва да се убедим, че от представянето (13.15) следва представянето (13.14). За тази цел да допуснем, че не всички $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ са равни на нула*. Представяме $o(\rho)$ във вида

$$o(\rho)=\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho^2}{\rho}=\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_m^2}{\rho}$$

$$=\left(\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)\Delta x_1+\left(\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_2}{\rho}\right)\Delta x_2+\ldots+\left(\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_m}{\rho}\right)\Delta x_m.$$

Като положим $\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_i}{\rho}=\alpha_i$ и отчетем, че α_i са безкрайно малки функции при $\rho\to 0$ (а следователно и при $\Delta x_1\to 0, \Delta x_2\to 0, \ldots, \Delta x_m\to 0$, идваме до представянето (13.14).

* Ако всички Δx_i са равни на нула, то всички членове в десните страни на формулите (13.14) и (13.15) са равни на нула.

И така условието за диференцируемост на функция може да се запише както във вида (13.14), така и във вида (13.15).

Ако поне едно от числата $A_1, A_2, \ldots, A_m$ е различно от нула, то сумата $A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m$ представлява главната, линейна относно нарастванията на аргументите част на нарастването на диференцируемата функция. Ще отбележим, че при определянето на понятието диференцируемост на функция не изключихме възможността всички числа $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ да са нули и затова, ако нарастването Δf на функцията може да се представи във вида (13.14) или (13.15) при $A_1=0, A_2=0, \ldots, A_m=0$, то функцията е диференцируема в дадената точка.

В сила е следната теорема:

Теорема 13.9. *Ако функцията f е диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то в тази точка съществуват частните производни по всичките ѝ аргументи и $\frac{\partial f}{\partial x_i}=A_i$, където A_i се определят от условията за диференцируемост на функция* (13.14) *или* (13.15).

Доказателство. От условието (13.14) за диференцируемост на функция в точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ следва, че частното ѝ нарастване $\Delta_{x_i}f$ в тази точка е $\Delta_{x_i}f=A_i\Delta x_i+\alpha_i\Delta x_i$. Оттук следва, че $\frac{\Delta_{x_i}f}{\Delta x_i}=A_i+\alpha_i$, и понеже $\alpha_i\to 0$ при $\Delta x_i\to 0$, имаме

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_{x_i}f}{\Delta x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}=A_i.$$

Следствие 1. *Условието* (13.15) *за диференцируемост на функция в дадена точка M може да се запише в следната форма:*

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m+o(\rho). \tag{13.16}$$

Следствие 2. *Ако функцията f е диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то представянето на нарастването ѝ Δf във форма* (13.14) *или* (13.15) *е единствено.*

Действително коефициентите A_i в тези представяния са равни на частните производни $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в дадената точка и затова се определят по единствен начин.

Ще установим едно важно свойство на диференцируемите функции.

Ако функцията f е диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то тя е непрекъсната в тази точка.

Наистина от условието (13.14) за диференцируемост в точка следва, че $\lim\limits_{\Delta x_1\to 0\ldots\Delta x_m\to 0}\Delta f=0$, а това означава, че функцията е непрекъсната в точката M (вж. (13.7)).

13.4.3. Геометричен смисъл на условието за диференцируемост на функция на две променливи. В случай на функция $u=f(x, y)$ на две променливи условието за диференцируемост може да бъде илюстрирано геометрично. Ще въведем понятието допирателна равнина към повърхнина в дадена точка.

Равнината Π, минаваща през дадената точка N_0 на повърхнината, се нарича допирателна равнина в тази точка, ако ъгълът между тази равнина и секущата (права), минаваща през точката N_0 и произволна точка N_1 от повърхнината, клони към нула, когато точката N_1 клони към N_0 (фиг. 13.3).

Ако в точката N_0 съществува допирателна равнина, то очевидно допирателната в тази точка към всяка крива, разположена на повърхнината и минаваща през N_0, лежи в допирателната равнина.

Ще се убедим, че от условието за диференцируемост на функцията f в дадена точка $M_0(x_0, y_0)$ следва съществуването на допирателна равнина към графиката S на тази функция в точката $N_0(x_0, y_0, u_0)$. Полагаме $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $\Delta u=u-u_0$, където $u_0=f(x_0, y_0)$, $u=f(x, y)$. Очевидно условието (13.14) за диференцируемост в разглеждания случай може да се запише по следния начин:

$$\begin{aligned}u-u_0&=A(x-x_0)+B(y-y_0)+\alpha\Delta x+\beta\Delta y\\&=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho),\end{aligned}$$

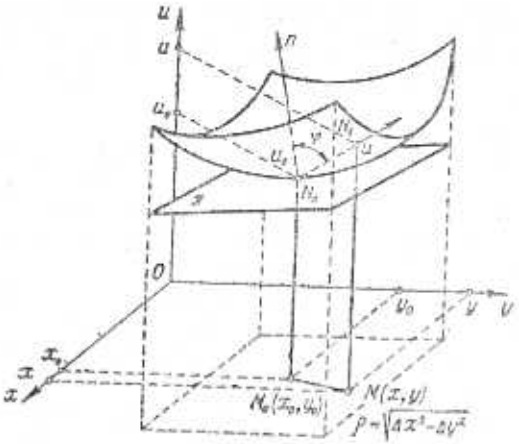
където A и B са константи, равни на частните производни $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точката M_0, а α и β са безкрайно малки функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ и $\rho=(\Delta x^2+\Delta y^2)^{1/2}$.

Да разгледаме следното уравнение:

$$U-u_0=A(x-x_0)+B(y-y_0).$$

Това е уравнение на равнината Π, минаваща през точката $N_0(x_0, y_0, u_0)$ и имаща нормален вектор $\mathbf{n}=\{A, B, -1\}$.

Ще докажем, че тази равнина Π е допирателна в точката N_0 към повърхнината S. Затова е достатъчно да се убедим, че: 1) равнината Π минава през точката N_0 на повърхнината S и 2) ъгълът φ между нормалата $\mathbf{n}$ на тази равнина и произволна секуща N_0N_1 клони към $\pi/2$, когато точката от повърхнината N_1 клони към N_0. Твърдението 1) е очевидно. Ще преминем към доказателството на твърдението 2). Ще пресметнем косинуса на ъгъла φ, като използваме известната формула за косинус на ъгъл между два вектора. Тъй като векторът $\mathbf{n}$ е с координати $A, B, -1$, а векторът $\overline{N_0N_1}$ върху секущата — с координати $x-x_0$, $y-y_0$, $u-u_0$ (вж. фиг. 13.3), то



Фиг. 13.3

$$\cos\varphi = \frac{A(x-x_0)+B(y-y_0)-(u-u_0)}{(A^2+B^2+1)^{1/2}((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(u-u_0)^2)^{1/2}}.$$

От условието за диференцируемост на функцията f следва, че

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)-(u-u_0)=o(\rho).$$

Затова

$$|\cos\varphi| \leq \frac{|o(\rho)|}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{1/2}} = \frac{|o(\rho)|}{\rho} \to 0,$$

когато $\rho \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\rho\to 0}\varphi=\pi/2$. Твърдението 2) е доказано.

Така диференцируемостта на функцията f в точката $M_0(x_0, y_0)$ от геометрична гледна точка означава съществуването на допирателна равнина към графиката на функцията f в точката $N_0(x_0, y_0, u_0)$.

Тъй като коефициентите A и B са равни на частните производни на функцията в точката $M_0(x_0, y_0)$, то уравнението на допирателната равнина може да се запише във вида

$$U-u_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0). \tag{13.17}$$

Нормалният вектор $n=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right\}$ на допирателната равнина е прието да се нарича нормала към повърхнината $u=f(x, y)$ в точката $N_0(x_0, y_0, u_0)$.

13.4.4. Достатъчни условия за диференцируемост. Ще се заемем с изясняване на достатъчни условия за диференцируемост на функция на m променливи. Ще докажем следната теорема:

Теорема 13.10. *Ако функцията f има частни производни по всичките си аргументи в някоя околност на точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ и частните ѝ производни са непрекъснати в точката M_0, то функцията е диференцируема в точката M_0.*

Доказателство. За да не пишем много, ще проведем доказателството за функция f на две променливи. И така нека двете частни производни f'_x и f'_y съществуват в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$ и са непрекъснати в тази точка. Даваме на аргументите x и y толкова малки нараствания, че точката $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ да остава в тази околност на точката M_0. Пълното нарастване $\Delta f=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$ може да се запише във вида

$$\Delta f=(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y))$$
$$+(f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)).$$

Изразът $(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y))$ може да се разглежда като нарастване на функцията $f(x, y_0+\Delta y)$ на една променлива x в сегмента $[x_0, x_0+\Delta x]$. Понеже функцията f има частни производни, функцията $f(x, y_0+\Delta y)$ е диференцируема и нейната производна по x е частната производна f'_x. Като приложим към посоченото нарастване формулата на Лагранж, ще получим

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\,.\,\Delta x,$$

където $0<\theta_1<1$.

Разсъждавайки съвсем аналогично, получаваме

$$f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y).\ \Delta y,\ 0<\theta_2<1.$$

Тъй като производните f'_x и f'_y са непрекъснати в точката M_0, то

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)=f'_x(x_0, y_0)+\alpha,$$
$$f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)=f'_y(x_0, y_0)+\beta,$$

където α и β са безкрайно малки функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. Оттук, като имаме пред вид изразите за

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y) \text{ и } f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0),$$

намираме

$$\Delta f=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\,.\,\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

Следователно функцията f е диференцируема в точката M_0.

За функция на m променливи $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ разсъжденията са аналогични, трябва само пълното нарастване на такава функция да се представи във вида

$$f(\overset{\circ}{x}_1+\Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2+\Delta x_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m+\Delta x_m)-f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\{f(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_{i-1}, \overset{\circ}{x}_i+\Delta x_i, \overset{\circ}{x}_{i+1}+\Delta x_{i+1}, \ldots, \overset{\circ}{x}_m+\Delta x_m)$$
$$-f(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_{i-1}, \overset{\circ}{x}_i, \overset{\circ}{x}_{i+1}+\Delta x_{i+1}, \ldots, \overset{\circ}{x}_m+\Delta x_m)\}. \quad \square$$

13.4.5. Диференциал на функция на няколко променливи

Определение. *Диференциал du на диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция u се нарича главната, линейна относно нарастванията на аргументите част на нарастването на функцията в точката M. Ако всички коефициенти A_i в представянето* (13.14) *на нарастването на диференцируема функция са равни на нула, то диференциалът du на функцията в точката M се приема равен на нула.*

Така диференциал du на диференцируема в точката M функция u се нарича изразът

$$du=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m. \tag{13.18}$$

Като използваме теорема 13.9, можем да запишем израза за диференциала (13.18) по следния начин:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m. \tag{13.19}$$

Ще въведем понятието диференциал dx_i на независима променлива x_i. Под ***диференциал dx_i на независимата променлива*** x_i може да се разбира всяко (независещо от $x_1, x_2, \ldots, x_m$) число. Ще се уговорим да избираме числото, равно на нарастването Δx_i на независимата променлива x_i. Тази уговорка ни позволява да запишем формулата (13.19) във вида

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m. \tag{13.20}$$

Подчертаваме, че валидността на формула (13.20) засега е установена само в случая, когато аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са независими променливи. В 13.4.6 ще докажем, че формула (13.20) остава вярна и за случая, когато аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ не са независими променливи, а сами са диференцируеми функции на няколко променливи.

13.4.6. Диференциране на сложна функция. В тази точка ще разгледаме въпроса за диференциране на сложна функция от вида $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, където

$$\begin{aligned} x_1&=x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k),\\ x_2&=x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_m&=x_m(t_1, t_2, \ldots, t_k). \end{aligned} \tag{13.21}$$

Ще докажем, че при определени условия тази сложна функция е диференцируема функция на аргументите си $t_1, t_2, \ldots, t_k$. При това частните производни на функцията по аргументите $t_1, t_2, \ldots, t_k$ се изразяват чрез частните производни на функцията u и чрез частните производни на функциите (13.21) с формулите

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_1}&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_1},\\ \frac{\partial u}{\partial t_2}&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial u}{\partial t_k}&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_k}. \end{aligned} \tag{13.22}$$

Ще докажем следната основна теорема:

Теорема 13.11. *Нека функциите* (13.21) *са диференцируеми в някоя точка $M(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$, а функцията u е диференцируема в съответната ѝ точка $N(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, където $\overset{\circ}{x}_i=x_i(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$, $i=1, 2, 3, \ldots, m$. Тогава сложната функция $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, където $x_1, x_2, \ldots, x_m$ се определят от съотношенията* (13.21), *е диференцируема в точката M. При това частните производни на тази сложна функция в точката M се определят по формулите* (13.22), *в които всички частни производни $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ са взети в точката N, а всички частни производни $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ са взети в точката M.*

Доказателство. Даваме на аргументите $t_1, t_2, \ldots, t_k$ в точката $M(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$ произволни нараствания $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_k$, които не са едновременно равни на нула. На тези нараствания съответстват нарастванията $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ на функциите (13.21) в точката M. На нарастванията $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ на свой ред съответствува нарастването Δu на функцията u в точката N. Понеже функцията u е диференцируема в

точката N, нарастването Δu на тази функция може да се запише във вида

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\alpha_m\Delta x_m, \tag{13.23}$$

където частните производни $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdot\ \cdot\ \cdot, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ са взети в точката N, а $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, \alpha_m$ са безкрайно малки функции при $\Delta x_1\to 0, \Delta x_2\to 0, \cdot\ \cdot\ \cdot, \Delta x_m\to 0$, равни на нула при $\Delta x_1=\Delta x_2=\cdot\ \cdot\ \cdot=\Delta x_m=0$. Подчертаваме, че в съотношенията (13.23) $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, \Delta x_m$ са нарастванията на функциите (13.21), отговарящи на избраните нараствания $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, \Delta t_k$ на аргументите на тези функции. Поради диференцируемостта на функциите (13.21) в точката $M(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, \overset{\circ}{t}_k)$ нарастванията Δx_i могат да се запишат в следната форма:

$$\Delta x_i=\frac{\partial x_i}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x_i}{\partial t_2}\Delta t_2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{\partial x_i}{\partial t_k}\Delta t_k+o(\rho),\quad i=1, 2, 3, \cdot\ \cdot\ \cdot, m, \tag{13.24}$$

където частните производни $\frac{\partial x_i}{\partial t_1}, \frac{\partial x_i}{\partial t_2}, \cdot\ \cdot\ \cdot, \frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ са взети в точката M, а $\rho=((\Delta t_1)^2+(\Delta t_2)^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +(\Delta t_k)^2)^{1/2}$.

Трябва да се убедим, че след заместването в дясната страна на (13.23) с изразите (13.24) нарастването Δu може да се приведе във вида

$$\Delta u=A_1\Delta t_1+A_2\Delta t_2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +A_k\Delta t_k+o(\rho), \tag{13.25}$$

където

$$A_i=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_i}, \quad i=1, 2, 3, \cdot\ \cdot\ \cdot, k. \tag{13.26}$$

С това доказателството на теоремата ще бъде завършено, тъй като формулата (13.25) показва, че сложната функция е диференцируема, а изразите (13.26) са частните производни на сложната функция по променливите t_i (вж. теорема 13.9). □

При заместването в дясната страна на (13.23) с изразите (13.24) освен групата събираеми

$$A_1\Delta t_1+A_2\Delta t_2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +A_k\Delta t_k$$

ще получим и други групи събираеми. Трябва да се убедим, че всички други групи събираеми са величини от вида $o(\rho)$.

Действително, ако заместим изразите (13.24) във формулата (13.23), имаме

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\Delta t_j+o(\rho)\right\}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Delta x_i=\sum_{j=1}^{k}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right\}\Delta t_j+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}o(\rho)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Delta x_i=\sum_{j=1}^{k}A_j\Delta t_j+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}o(\rho)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Delta x_i.$$

Последните две суми са величини от вида $o(\rho)$. Наистина производните $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ са взети в точката N и затова са константи, независещи от ρ. Следователно $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot o(\rho)=o(\rho)$. Величините Δx_i за $i=1, 2, 3, \cdot\ \cdot\ \cdot, m$ съгласно формулите (13.24) удовлетворяват неравенството $|\Delta x_i|\leq \text{const}\cdot\rho$, а за величините α_i имаме $\alpha_i=o(\rho)$ при $i=1, 2, 3, \cdot\ \cdot\ \cdot, m$, тъй като α_i са безкрайно малки функции при $\Delta x_1\to 0, \Delta x_2\to 0, \cdot\ \cdot\ \cdot, \Delta x_m\to 0$. Освен това от диференцируемостта и следващата от това непрекъснатост в точката M на функциите (13.21) имаме, че $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, \Delta x_m$ клонят към нула при $\rho\to 0$. Затова $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Delta x_i=o(\rho)$. □

Забележка. Ще разгледаме важния частен случай, когато функциите (13.21) зависят само от един аргумент t. Тогава ще имаме сложна функция на една променлива t: $u=u(x_1, x_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, x_m)$, където $x_i=x_i(t)$. Производната $\frac{du}{dt}$ на тази сложна функция се определя с формулата

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{dx_m}{dt}. \tag{13.27}$$

Ще приложим формулата (13.27) при доказателството на теоремата на Ойлер за хомогенните функции.

Функцията u, дефинирана в множеството $\{M\}$, се нарича ***хомогенна функция*** от степен p в това множество, ако за всяка точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от множеството $\{M\}$ и за всяко число t, за което точката $N(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)$ принадлежи на множеството $\{M\}$, е изпълнено равенството

(13.28) $$u(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^p u(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Теорема 13.12 (теорема на Ойлер за хомогенни функции). *Ако u е диференцируема и хомогенна функция от степен p в някоя област $\{M\}$, то във всяка точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на областта $\{M\}$ е изпълнено равенството*

(13.29) $$\frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} x_m = pu.$$

Доказателство. Нека $M(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ е произволна точка от областта $\{M\}$. Разглеждаме сложната функция $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, където $x_i = t\overset{\circ}{x}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$, т. е. функцията $u = u(t\overset{\circ}{x}_1, t\overset{\circ}{x}_2, \ldots, t\overset{\circ}{x}_m)$. Тъй като при $t = 1$ функциите $x_i = t\overset{\circ}{x}_i$ са диференцируеми и функцията u е диференцируема в съответната точка M_0, то съгласно теорема 13.11 и забележката към нея можем да пресметнем производната $\frac{du}{dt}$ на сложната функция в точката $t = 1$ по формулата (13.27). Тъй като $\frac{dx_i}{dt} = \overset{\circ}{x}_i$, то

(13.30) $$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\overset{\circ}{x}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\overset{\circ}{x}_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\overset{\circ}{x}_m,$$

където производните $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ са взети в точката M_0. От друга страна, според (13.28) разглежданата сложна функция може да се представи и така:

(13.31) $$u = u(t\overset{\circ}{x}_1, t\overset{\circ}{x}_2, \ldots, t\overset{\circ}{x}_m) = t^p u(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m).$$

От (13.31) следва, че

(13.32) $$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = pu.$$

Сравнявайки (13.30) и (13.32), получаваме съотношението (13.29) за точката M_0.

13.4.7. Инвариантност на формата на първия диференциал. В точка 13.4.3 въведохме понятието първи диференциал du на функция на няколко променливи и установихме, че когато аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са независими променливи, диференциалът du може да се представи във вида

(13.20) $$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m.$$

В тази точка ще докажем, че формула (13.20) е универсална и вярна и в случая, когато аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са диференцируеми функции на някои нови променливи $t_1, t_2, \ldots, t_k$, които са независими променливи. Това свойство на първия диференциал се нарича обикновено *инвариантност на неговата форма*.

И така нека аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ на функцията u са диференцируеми в точката $A(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$ функции $x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, а функцията $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ е диференцируема в точката $B(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, където $\overset{\circ}{x}_i = x_i(\overset{\circ}{t}_1, \overset{\circ}{t}_2, \ldots, \overset{\circ}{t}_k)$. В такъв случай можем да разглеждаме u като сложна функция на независимите променливи $t_1, t_2, \ldots, t_k$, която според теорема 13.11 е диференцируема в точката A. Затова диференциалът на тази сложна функция може да се представи във вида

(13.33) $$du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_k,$$

където $\partial u/\partial t_i$ се определят от съотношенията (13.22). Като заместим $\partial u/\partial t_i$ от (13.22) в (13.33) и съберем коефициентите пред $\partial u/\partial x_i$, получаваме

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_k\right)$$
$$+ \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k\right).$$

Остава да отбележим, че в последното съотношение коефициентът пред $\partial u/\partial x_i$ е равен на диференциала dx_i на функцията $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. □

Свойството инвариантност на формата на първия диференциал дава възможност да се установят следните правила за диференциране: Нека u и v са диференцируеми функции на произволен брой променливи. Тогава

$$d(cu) = cdu \qquad (c = \text{const}),$$
$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$
$$d(u \cdot v) = udv + vdu,$$
$$d(u/v) = (vdu - udv)v^{-2}.$$

Ще докажем например верността на третата от изброените фор-

мули. Разглеждаме функцията $w=u.v$ на двете променливи u и v. Диференциалът на тази функция е

$$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}.dv.$$

Тъй като $\frac{\partial w}{\partial u}=v$ и $\frac{\partial w}{\partial v}=u$, то $dw=udv+vdu$. Поради инвариантността на формата на първия диференциал изразът $udv+vdu$ ще бъде диференциал на функцията $u.v$ и в случая, когато u и v са диференцируеми функции на някакви други променливи.

13.4.8. Производна по посока. Градиент. Ще започнем с функция на три независими променливи $u=u(x, y, z)$. Предполагаме, че тази функция е дефинирана в някоя околност на точката $M_0(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{z})$ от пространството E^3 и диференцируема в тази точка.

Ще разгледаме всички лъчи, излизащи от точката M_0. Всеки такъв лъч се задава с единичен вектор $\mathbf{e}$ с координати $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и определя някаква посока.

Фиксираме някой лъч, излизащ от точката M_0 и определен с единичен вектор $\mathbf{e}$ с координати $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Върху правата, съдържаща този лъч, вземаме произволна различна от M_0 точка M и разглеждаме вектора или насочената отсечка $\overrightarrow{M_0M}$, като означаваме с l големината на тази насочена отсечка от оста, определена с единичния вектор $\mathbf{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.*

Ясно е, че векторът $\overrightarrow{M_0M}$ има координати

$$(l\cos\alpha,\ l\cos\beta,\ l\cos\gamma).$$

От друга страна, ако координатите на точката M са (x, y, z), то векторът $\overrightarrow{M_0M}$ има координати $(x-\overset{\circ}{x},\ y-\overset{\circ}{y},\ z-\overset{\circ}{z})$.

Като съпоставим двете получени съотношения за координатите на вектора $\overrightarrow{M_0M}$, идваме до равенствата

$$x=\overset{\circ}{x}+l\cos\alpha,\quad y=\overset{\circ}{y}+l\cos\beta,\quad z=\overset{\circ}{z}+l\cos\gamma. \tag{13.34}$$

Равенствата (13.34) показват, че върху правата, минаваща през точката M_0 и определена с единичния вектор $\mathbf{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, функцията u е сложна функция на една независима променлива l от вида $u=f(\overset{\circ}{x}_0+l\cos\alpha,\ \overset{\circ}{y}_0+l\cos\beta,\ \overset{\circ}{z}+l\cos\gamma)$.

* Големина l на насочената отсечка $\overrightarrow{M_0M}$ от оста, определена от единичния вектор $\mathbf{e}$, се нарича числото, равно на дължината на отсечката $\overrightarrow{M_0M}$, взета със знак плюс, ако векторите $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{e}$ са еднопосочни, и със знак минус, ако тези вектори са разнопосочни.

Определение 1. *Производната на посочената сложна функция по променливата l в точката $l=0$ ще наричаме производна на функцията u в точката M_0 по посока, определена от единичния вектор $\mathbf{e}$, и ще я означаваме със символа $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}$.*

И така по определение

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \tag{13.35}$$

Ще въведем понятието градиент на диференцируема в дадена точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функция.

Определение 2. ***Градиент** на функцията u в дадена точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ се нарича векторът с координати*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0),\quad \frac{\partial u}{\partial z}(M_0).$$

Градиентът на функцията u се означава с

$$\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0),\ \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right). \tag{13.36}$$

Тъй като скаларното произведение на два вектора е равно на сумата от произведенията на съответните им координати, то изразът (13.35) за производна по посока, определено от вектора $\mathbf{e}$, може да се разглежда като скаларно произведение на вектора (13.36) и $\mathbf{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Така получаваме, че

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}=\mathbf{e}.\operatorname{grad} u. \tag{13.37}$$

С помощта на равенство (13.37) ще се убедим, че градиентът на функцията u в точката M_0 характеризира посоката и големината на максималното нарастване на тази функция в точката M_0.

По-точно ще докажем двете твърдения:

1) Производната на функцията u в точката M_0 по посоката, определена от градиента на тази функция в дадената точка, има максимална стойност в сравнение с производната в тази точка по коя да е друга посока.

2) Стойността на производната на функцията u по посоката, определена от градиента на тази функция в дадена точка, е равна на $|\operatorname{grad} u|$, т. е. на дължината на вектора $\operatorname{grad} u$ в дадената точка.

Тъй като скаларното произведение на два вектора е равно на произведението от дължините на тези вектори и косинуса на ъгъла между тях, то изразът (13.37) може да се запише във вида

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = |\mathbf{e}|\,|\operatorname{grad} u|\,.\cos\varphi,$$

където φ е ъгълът между векторите $\mathbf{e}$ и $\overline{\operatorname{grad}}\ u$.

Тъй като $|\mathbf{e}| = 1$, получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = |\operatorname{grad} u|\,.\cos\varphi.$$

От последното равенство следват и двете твърдения 1) и 2). Наистина максималната стойност на производната $\partial u/\partial \mathbf{e}$ се получава при $\cos\varphi = 1$, т. е. при съвпадане на посоката $\mathbf{e}$ с посоката на grad u, при това производната $\partial u/\partial \mathbf{e}$ по тази посока е равна на $|\operatorname{grad} u|$.

Доказаните две твърдения показват, че градиентът не зависи от избора на координатната система (тъй като посоката и дължината на вектора grad u във всяка точка са инвариантни относно избора на координатната система).

Повърхнини на ниво на функцията u се наричат повърхнините, върху които тази функция има една и съща стойност, т. е. $u(x, y, z) = C = \text{const}$.

Ако във всяка точка $M_0(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{z})$ на повърхнината на ниво $u(x, y, z) = C$ построим допирателната равнина, то лесно можем да се убедим, че нормалният вектор на такава равнина е векторът (13.36), т. е. grad u. Оттук следва, че векторът grad u във всяка точка M на повърхнината на ниво е ортогонален на тази повърхнина.

Съвсем аналогично се определят производна по посока и градиент за диференцируема в дадена точка $M_0(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция на m променливи.

За такава функция производната $\partial u/\partial \mathbf{e}$ в дадена точка $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ по посока, определена от единичния вектор $\mathbf{e} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m)$,* се въвежда като обикновена производна по променливата l на сложната функция

$$u = u(\overset{\circ}{x}_1 + l\cos\alpha_1,\ \overset{\circ}{x}_2 + l\cos\alpha_2,\ \ldots,\ \overset{\circ}{x}_m + l\cos\alpha_m)$$

в точката $l = 0$.

* Тъй като всички координати на единичния вектор по модул не надминават единица, то за всяка от тези координати съществува такъв ъгъл α_i, че съответната i-та координата да е равна на $\cos\alpha_i$ (при това можем да считаме, че $0 \leq \alpha_i \leq \pi$).

Така единичният вектор e може да се запише във вида $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m)$. Величините $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m$ е прието да се наричат направляващи косинуси (директорни косинуси).

За всяка диференцируема в дадена точка $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ функция u производната в тази точка по посоката, определена от вектора $\mathbf{e} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m)$, е

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\cos\alpha_m. \tag{13.35'}$$

***Градиент** на диференцируемата в дадена точка $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ функция u се нарича векторът*

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0), \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\right).$$

Тъй като скаларното произведение на два вектора на пространството E^m е равно на сумата от произведенията на съответните координати на тези вектори, то равенството (13.35′) показва, че

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = (\mathbf{e}, \operatorname{grad} u).$$

От неравенството на Коши — Буняковски (вж. 9.6.2) следва, че

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}\right| \leq |\mathbf{e}|\,.\,|\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} u|,$$

при което равенство се достига само когато векторите grad u и $\mathbf{e}$ са колинеарни.

Оттук следва, че векторът grad u в пространството E^m притежава същите две свойства 1) и 2), както и в пространството E^3.

Ще отбележим, че в случай на функция u на две променливи x и y единичният вектор $\mathbf{e}$, определящ посока в точката M_0, има координати $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Затова в този случай (13.35) приема вида

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

13.5. Частни производни и диференциали от по-висок ред

13.5.1. Частни производни от по-висок ред. Нека частната производна $\partial u/\partial x_i$ по аргумента x_i на функцията $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, дефинирана в областта $\{M\}$, съществува във всяка точка на об-

ластта $\{M\}$. В такъв случай тази частна производна е функция на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_m$, също така дефинирана в областта $\{M\}$.

Може да се случи тази функция $\partial u/\partial x_i$ да има частна производна по аргумента x_k в някоя точка M на областта $\{M\}$. Тогава тази частна производна по аргумента x_k се нарича ***втора частна производна*** или ***частна производна от втори ред*** на функцията u в точката M най-напред по аргумента x_i, а след това по аргумента x_k и се означава с

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \text{ или } u^{(2)}_{x_i x_k}.$$

При това, ако $i \neq k$, частната производна $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$ се нарича смесена частна производна от втори ред. След като е въведено понятието втора частна производна, може да се въведе понятието трета частна производна, след това четвърта и т. н.

Ако предположим, че вече е въведено понятието $(n-1)$-ва частна производна на функцията u по аргументите $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}$ (някои, а даже и всичките индекси могат да съвпадат) и че тази $(n-1)$-ва частна производна има в точката M частна производна по аргумента x_{i_n}, то тази частна производна се нарича ***n-та частна производна*** (или ***частна производна от n-ти ред***) на функцията u в точката M по аргументите $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$.

Така въведохме понятието n-та частна производна чрез индукция от първата частна производна към следващите. Съотношението, определящо n-тата частна производна по аргументите $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$, има вида

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right).$$

Ако не всички индекси $i_1, i_2, \ldots, i_n$ съвпадат помежду си, то частна производна $\partial^n u/\partial x_{i_n} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}$ се нарича смесена частна производна от n-ти ред.

Тъй като частната производна на функция по аргумента x_i се определя като обикновена производна на функция на една променлива x_i при фиксирани стойности на останалите променливи, то методиката за пресмятане на частните производни от по-висок ред предполага само умението да се пресмятат обикновени производни от първи ред. За пример ще пресметнем частните производни от втори ред на функцията $u = \operatorname{arc\,tg}(x/y)$. Имаме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

В разглежданя пример смесените частни производни $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ са равни помежду си. Изобщо стойностите на смесените производни зависят от реда, в който се извършва диференцирането. Ще покажем например, че смесените частни производни $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ на функцията

$$u = \begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2) & \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

в точката (0, 0) съществуват, но не са равни помежду си. Наистина

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Затова

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = \lim_{y \to 0} y^{-1} \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} \right) = -1.$$

С аналогични пресмятания получаваме $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1$. Следователно в точката (0, 0) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Ще дадем достатъчни условия за независимост на стойността на смесената производна от реда на диференцирането.

Определение. *Функцията $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ се нарича* ***n пъти диференцируема*** *в точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, ако всичките ѝ частни производни от ред $n-1$ са диференцируеми функции в тази точка.*

От това определение следва, че ако функцията u е n пъти диференцируема в точката M_0, то при $n > 1$ всяка нейна производна от първи ред е $n-1$ пъти диференцируема в точката M_0, при $n > 2$ всяка нейна частна производна от втори ред е $n-2$ пъти диференцируема в точката M_0 и т. н.

Ще дадем достатъчно условие за n-кратна диференцируемост на функция в дадена точка.

За да бъде функцията и n пъти диференцируема в точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, е достатъчно всичките ѝ частни производни от n-ти ред да са непрекъснати в точката M_0.

Верността на това твърдение следва от определението за диференцируемост на функция и от теорема 13.10 за достатъчните условия за диференцируемост.

Теорема 13.13. *Нека функцията $f=f(x, y)$ е два пъти диференцирума в точката $M_0(x_0, y_0)$. Тогава в тази точка частните ѝ производни $f^{(2)}_{xy}$ и $f^{(2)}_{yx}$ са равни.*

Доказателство. Тъй като функцията f е два пъти диференцируема в точката $M_0(x_0, y_0)$, то частните ѝ производни f'_x и f'_y са дефинирани в някоя δ-околност на точката M_0 и са диференцируеми функции в тази точка. Разглеждаме израза

$$\Phi=f(x_0+h, y_0+h)-f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0+h)+f(x_0, y_0), \tag{13.38}$$

където h е толкова малко число, че точките $M(x_0+h, y_0+h)$, $M_1(x_0+h, y_0)$, $M_2(x_0, y_0+h)$ да принадлежат на δ-околността на точката M_0. Изразът Φ може да се разглежда като нарастване $\Delta\varphi=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$ на диференцируемата в сегмента $[x_0, x_0+h]$ функция $\varphi(x)=f(x, y_0+h)-f(x, y_0)$ на една променлива x. Затова по формулата на Лагранж за някое число θ от интервала $0<\theta<1$ ще имаме

$$\begin{aligned}\Phi=\Delta\varphi&=\varphi'(x_0+\theta h)h\\&=\{[f'_x(x_0+\theta h, y_0+y)-f'_x(x_0+\theta h, y_0)]\}h\\&=\{[f'_x(x_0+\theta h, y_0+h)-f'_x(x_0, y_0)]-[f'_x(x_0+\theta h, y_0)-f'_x(x_0, y_0)]\}h.\end{aligned} \tag{13.39}$$

Тъй като частната производна f'_x е диференцируема функция в точката M, то

$$[f'_x(x_0+\theta h, y_0+h)-f'_x(x_0, y_0)]=f^{(2)}_{xx}(x_0, y_0)\theta h+f^{(2)}_{xy}(x_0, y_0)h+\alpha_1\theta h+\beta_1 h,$$

$$[f'_x(x_0+\theta h, y_0)-f'_x(x_0, y_0)]=f^{(2)}_{xx}(x_0, y_0)\theta h+\alpha_2\theta h,$$

където α_1, β_1 и α_2 са безкрайно малки функции при $h\to 0$. Замествайки намерените изрази за $[f'_x(x_0+\theta h, y_0+h)-f'_x(x_0, y_0)]$ и $[f_x(x_0+\theta h, y_0)-f'_x(x_0, y_0)]$ във формула (13.39), получаваме

$$\Phi=[f^{(2)}_{xy}(x_0, y_0)+\alpha]h^2, \tag{13.40}$$

където $\alpha=\alpha_1\theta+\beta_1-\alpha_2\theta$ е безкрайно малка функция при $h\to 0$. От друга страна, изразът Φ, определен от съотношението (13.38), може да се разглежда като нарастване $\Delta\psi=\psi(y_0+h)-\psi(y_0)$ на диференцируемата в сегмента $[y_0, y_0+h]$ функция $\psi(y)=f(x_0+h, y)-f(x_0, y)$. От формулата на Лагранж и диференцируемостта на частната производна f'_y в точката M_0 ще получим за Φ аналогично на горния израз:

$$\Phi=[f^{(2)}_{yx}(x_0, y_0)+\beta]h^2, \tag{13.41}$$

където β е безкрайно малка функция при $h\to 0$. Като приравним десните страни на съотношенията (13.40) и (13.41) и съкратим на h^2, намираме, че $f^{(2)}_{xy}(x_0, y_0)+\alpha=f^{(2)}_{yx}(x_0, y_0)+\beta$. Тъй като α и β са безкрайно малки функции при $h\to 0$, от последното равенство следва, че $f^{(2)}_{xy}(x_0, y_0)=f^{(2)}_{yx}(x_0, y_0)$. □

Теорема 13.13 показва, че в дадена точка $M(x_0, y_0)$ е изпълнено равенството $f^{(2)}_{xy}=f^{(2)}_{yx}$, ако в тази точка са диференцируеми f'_x и f'_y. От диференцируемостта на f'_x и f'_y в точката M_0 следва съществуването в тази точка на всички частни производни от втори ред. Разбира се, равенството $f^{(2)}_{xy}=f^{(2)}_{yx}$ е изпълнено и при условие, че само съществуват производните $f^{(2)}_{xy}$ и $f^{(2)}_{yx}$, но при допълнителното изискване за непрекъснатост на тези производни в разглежданата точка. В сила е следната теорема:

Теорема 13.13. *Нека в някоя околност на точката $M(x_0, y_0)$ функцията $f=f(x, y)$ има частни производни f'_x, f'_y, $f^{(2)}_{xy}$, $f^{(2)}_{yx}$. Нека освен това производните $f^{(2)}_{xy}$ и $f^{(2)}_{yx}$ са непрекъснати в точката M_0. Тогава в тази точка $f^{(2)}_{xy}=f^{(2)}_{yx}$.*

При доказателството ще използуваме израза Φ, определен от съотношението (13.38). От (13.39) следва, че Φ е разликата от стойностите на функцията f'_x в точките $(x_0+\theta h, y_0+h)$ и $(x_0+\theta h, y_0)$, умножена с h. От формулата на Лагранж за крайните нарастания по променливата y в сегмента $[y_0, y_0+h]$ получаваме

$$\Phi=f^{(2)}_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 h)h^2,$$

където $0<\theta_1<1$.

Понеже $f^{(2)}_{xy}$ е непрекъсната в точката $M(x_0, y_0)$, от последното равенство имаме

$$\Phi=[f^{(2)}_{xy}(x_0, y_0)+\alpha(h)]h^2,$$

където $\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$.

От друга страна, Φ представлява разлика от стойностите на

функцията f'_y в точките $(x_0+h, y_0+\theta_2 h)$ и $(x_0, y_0+\theta_2 h)$, умножена с h. Като приложим към тази разлика формулата на Лагранж за крайните нараствания по променливата x в сегмента $[x_0, x_0+h]$ и вземем пред вид непрекъснатостта на f''_{yx} в точката $M_0(x_0, y_0)$, получаваме

$$\Phi = [f''_{yx}(x_0, y_0)+\beta(h)]\,h^2,$$

където $\beta(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Като приравним последните два израза за Φ и разсъждаваме, както в края на доказателството на теорема 13.13, се убеждаваме във верността на равенството

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Теорема 13.14. *Нека функцията $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ е n пъти диференцируема в точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$. Тогава в тази точка стойността на всяка смесена частна производна от n-ти ред не зависи от реда на диференцирането.*

Доказателство. Достатъчно е да докажем независимостта на стойността на коя да е n-та смесена производна от реда на две последователни диференцирания. С други думи, достатъчно е да докажем равенството

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n}\ldots\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}\ldots\partial x_{i_1}} = \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}\ldots\partial x_{i_1}} \tag{13.42}$$

Разглеждаме функцията $\dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial x_{i_{k-1}}\ldots\partial x_{i_1}}$. Тя е два пъти диференцируема функция на променливите x_{i_k} и $x_{i_{k+1}}$. Затова според теорема 13.13

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k-1}}\ldots\partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_{k-1}}\ldots\partial x_{i_1}}.$$

Оттук следва и верността на равенство (13.42). Теоремата е доказана.

Ще отбележим, че в случай на n пъти диференцируема в точката M_0 функция $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ всяка нейна частна производна от n-ти ред може да се напише във вида

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}},$$

където $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ са цели числа, удовлетворяващи условията $0\leqq\alpha_i\leqq n$, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n$.

13.5.2. Диференциали от по-висок ред. По-рано използвахме означаване на диференциалите на аргументите на функцията $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и за диференциала на самата функция символите $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ и du. Сега ще се наложи да използваме за означаване на диференциалите на аргументите на тази функция и диференциала на самата функция u други символи. По-специално ще означаваме диференциалите на аргументите на функцията u и диференциала на тази функция съответно със символите $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_m$ и δu. В тези означения инвариантният по форма израз за първия диференциал на тази функция (13.20) ще има вида

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\delta x_m.$$

Като се върнем към първоначалните означения, ще разгледаме израза (13.20) за първия диференциал на диференцируемата в дадена точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot dx_m. \tag{13.20}$$

Ще предполагаме, че величината в дясната страна на (13.20) е функция на аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$, диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. За това е достатъчно да поискаме функцията u да бъде два пъти диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ да бъдат или независими променливи, или два пъти диференцируеми функции на никакви независими променливи $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

При тези предположения можем да разгледаме диференциала

$$\delta(du) = \delta\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cdot dx_k\right].$$

Определение 1. *Стойността $\delta(du)$ на диференциала на първия диференциал (13.20), взет при $\delta x_1=dx_1$, $\delta x_2=dx_2, \ldots, \delta x_m=dx_m$, се нарича* ***втори диференциал*** *на функцията u (в дадената точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$) и се означава със символа d^2u.*

И така по определение

$$d^2u = \delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_i=dx_i\\ i=1,2,\ldots,m}} = \left\{\delta\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx_k\right]\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_i=dx_i\\ i=1,2,\ldots,m}}.$$

Диференциала d^nu от произволен ред n ще определим по индукция.

Предполагаме, че вече е въведен диференциалът $d^{n-1}u$ от ред

$n-1$ и че функцията u е n пъти диференцируема в дадената точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а аргументите ѝ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са или независими променливи, или n пъти диференцируеми функции на някакви независими променливи $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Определение 2. *Стойността* $\delta(d^{n-1}u)$ *на диференциала на* $(n-1)$*-вия диференциал* $d^{n-1}u$ *при* $\delta x_1 = dx_1$, $\delta x_2 = dx_2, \ldots, \delta x_m = dx_m$ *се нарича* ***n-ти диференциал на функцията*** u *(в дадената точка* $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$*) и се означава със символа* $d^n u$.

И така по определение

$$d^n u = \delta(d^{n-1}u)\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1,2,3,\ldots,m}}$$

При пресмятане на втория и следващите диференциали трябва съществено да се различават двата случая: 1) случаят, когато аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са независими променливи; 2) случаят, когато аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са съответният брой пъти диференцируеми функции на някакви независими променливи $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Ще разгледаме най-напред първия случай. Ако $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са независими променливи, имаме право да смятаме, че $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ не зависят от $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Всеки от диференциалите dx_k можем да вземем равен на едно и също нарастване Δx_k за всички точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Така ще получим

$$\delta(dx_k) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(dx_k)}{\partial x_i}\delta x_i = 0.$$

Последното съотношение и правилата за диференциране позволяват за два пъти диференцируема в дадена точка M функция u да се напише следната верига от равенства:

$$(13.43)\qquad d^2u = \delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1,2,\ldots,m}} = \delta\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]\Bigg|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1,2,\ldots,m}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\delta\left[\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right]\Bigg|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1,2,\ldots,m}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left\{dx_k\,\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_k}\delta(dx_k)\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1,2,\ldots,m}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left\{dx_k\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\delta x_i\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1,2,\ldots,m}}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\delta x_i dx_k\right]\Bigg|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1,2,\ldots,m}} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}dx_i dx_k.$$

(Използвахме и това, че за два пъти диференцируема функция смесените производни не зависят от реда на диференцирането.)

И така, когато аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са независими променливи, за втория диференциал на два пъти диференцируемата в дадена точка функция u получихме представянето

$$(13.44)\qquad d^2u = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}dx_i dx_k.$$

Забележка 1. Функция на m променливи $t_1, t_2, \ldots, t_m$ от вида $\Phi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}t_i t_k$, където a_{ik} са реални числа, се нарича *квадратична форма* на променливите $t_1, t_2, \ldots, t_k$, а числата a_{ik} — нейни коефициенти.

Квадратичната форма се нарича *симетрична*, ако коефициентите ѝ удовлетворяват условието $a_{ik} = a_{ki}$ (за всички $i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, m$).

Полученият израз (13.44) показва, че когато аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са независими променливи, вторият диференциал на два пъти диференцируема в дадена точка M функция u е симетрична квадратична форма на променливите $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ с коефициенти, равни съответно на стойностите на частните производни от втори ред на функцията u в точката M.

Изразът за диференциала от втори ред (13.44) може да се запише в друг вид, като се използва формалният символ

$$(13.45)\qquad d = dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + dx_m\frac{\partial}{\partial x_m}.$$

С помощта на този символ изразът (13.44) се записва във вида

$$(13.46)\qquad d^2u = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + dx_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 u.$$

По индукция лесно можем да се убедим, че когато аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ на n пъти диференцируема в дадена точка

$M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ са независими променливи, за n-тия диференциал на тази функция с в сила представянето

$$d^n u=\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\cdots\sum_{i_n=1}^{m}\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_n}}dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_m}.$$

Това представяне с помощта на формалния символ (13.45) може да се запише във вида

$$d^n u=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+dx_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n u. \tag{13.47}$$

В съвършено друг вид се представят вторият и следващите диференциали, когато аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ на функцията u са съответният брой пъти диференцируеми функции на някакви независими променливи $t_1, t_2, \ldots, t_k$. В този случай ще установим израз за втория диференциал на два пъти диференцируема в дадена точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция u на аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_m$, които са два пъти диференцируеми функции на независимите променливи $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Повтаряйки разсъжденията от веригата (13.43), този път ще получим

$$d^2u=\delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_i=dx_i\\ i=1,2,\ldots,m}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left\{dx_k\,\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial u}{\partial x_k}\delta(dx_k)\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_i=dx_i\\ i=1,2,\ldots,m}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left\{dx_k\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\delta x_i\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_i=dx_i\\ i=1,2,\ldots,m}}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_k}\delta(dx_k)\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_i=dx_i\\ i=1,2,\ldots,m}}.$$

Според определението за втори диференциал на функцията x_k (където k е кое да е от числата $1, 2, 3, \ldots, m$)

$$\{\delta(dx_k)\}\Big|_{\substack{\delta x_i=dx_i\\ i=1,2,\ldots,m}}=d^2x_k.$$

От тези съотношения стигаме до следното представяне за втория диференциал:

$$d^2u=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}dx_i dx_k+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}d^2x_k$$

или (при използване на символа (13.45))

$$d^2u=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+dx_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 u$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}d^2x_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}d^2x_m\right). \tag{13.48}$$

Като сравним получените представяния (13.48) и (13.46), се убеждаваме, че (за разлика от първия диференциал) вторият диференциал вече не притежава свойството инвариантност на формата. Още повече това свойство не притежават следващите диференциали.

Забележка 2. Ще посочим важен частен случай, когато вторият и следващите диференциали на функция на m променливи притежават свойството инвариантност на формата и се определят по същата формула (13.47), както в случая на независими променливи.

Казваме, че променливите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са линейни функции на независимите променливи $t_1, t_2, \ldots, t_k$, ако се определят с равенствата

$$x_i=a_{i0}+a_{i1}t_1+a_{i2}t_2+\cdots+a_{ik}t_k \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, m),$$

в които $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}$ са константи.

Ще отбележим, че ако функцията u е n пъти диференцируема в дадена точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а аргументите ѝ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са линейни функции на независимите променливи $t_1, t_2, \ldots, t_k$, то n-тият диференциал на функцията u се определя по същата формула (13.47), както и в случая на независими променливи $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Понеже $t_1, t_2, \ldots, t_k$ са независими променливи, n-тият диференциал на x_i, разглеждан като функция на аргументите $t_1, t_2, \ldots, t_k$, се определя с равенство от вида (13.47) или по-точно с равенството

$$d^n x_i=\left(dt_1\frac{\partial}{\partial t_1}+dt_2\frac{\partial}{\partial t_2}+\cdots+dt_k\frac{\partial}{\partial t_k}\right)^n x_i.$$

Но всяка частна производна от ред, по-висок от първи, на линейната функция x_i е равна на нула.

Следователно $d^2x_i=0$, $d^3x_i=0$, $\ldots$, $d^n x_i=0$.

Равенството $d^2x_i=0$ (за всички $i=1, 2, \ldots, m$) и представянето (13.48) показват, че d^2u се определя от (13.46). Съвсем ана-

логично, като използваме съотношенията $d^3x_i=0$, $d^4x_i=0, \cdots$, $d^nx_i=0$, се доказва по индукция, че d^3u, $d^4u, \cdots, d^nu$ се определят от равенството (13.47).

13.5.3. Формула на Тейлор с остатъчен член във форма на Лагранж и в интегрална форма. Ще означаваме k-тия диференциал на функция на m променливи u в точката M на пространството E^m със символа $d^ku|_M$.

Ще докажем следната важна теорема:

Теорема 13.15. *Нека $n\geq 1$ е цяло число, функцията u е дефинирана в някоя ε-околност на точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \cdots, \overset{\circ}{x}_m)$ и е $n+1$ пъти диференцируема в тази околност. Тогава пълното нарастване $\Delta u=f(M)-f(M_0)$ на тази функция в точката M може да се представи в следната форма:*

$$(13.49)\quad \Delta u=du|_{M_0}+\frac{1}{2!}d^2u|_{M_0}+\cdots+\frac{1}{n!}d^nu|_{M_0}+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u|_N,$$

където N е някоя точка от разглежданата околност, зависеща от $M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, а диференциалите dx_i на променливите x_i, влизащи в изразите $d^ku|_{M_0}$ и $d^{n+1}|_N$, са равни на $\Delta x_i=x_i-\overset{\circ}{x}_i$. Формула (13.49) се нарича ***формула на Тейлор*** за функцията u с център на разлагането в точката M_0, а последният член на формулата (13.49) се нарича ***остатъчен член, записан във форма на Лагранж.***

Доказателство. За краткост при записването ще проведем доказателството за функция u на две променливи x и y. Предварително ще запишем в специална форма формулата на Тейлор за $n+1$ пъти диференцируема в някоя околност на точката t_0 функция $u=F(t)$ на една променлива t. Ще напомним, че формулата на Тейлор за разлагане на функцията $u=F(t)$ около точката t_0 има вида

$$(13.50)\quad F(t)=F(t_0)+(t-t_0)F'(t_0)+\frac{1}{2!}(t-t_0)^2F^{(2)}(t_0)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}(t-t_0)^nF^{(n)}(t_0)$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}(t-t_0)^{n+1}F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0));\quad 0<\theta<1.$$

Тъй като аргументът t е независима променлива, то нарастването $\Delta t=t-t_0$ е диференциалът dt на независимата променлива t. Затова

$$(t-t_0)^kF^{(k)}(t_0)=F^{(k)}(t_0)\,dt^k=d^kF(t_0)=d^ku|_{t_0}$$

и

$$(13.51)\quad (t-t_0)^{n+1}F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))=d^{n+1}u|_{t_0+\theta(t-t_0)}.$$

Ако означим разликата $F(t)-F(t_0)$ с Δu, то съгласно (13.51) формулата на Тейлор (13.50) може да се запише в следната специална форма:

$$(13.52)\quad \Delta u=du|_{t_0}+\frac{1}{2!}d^2u|_{t_0}+\cdots+\frac{1}{n!}d^nu\Big|_{t_0}$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u\Big|_{t_0+\theta(t-t_0)}.$$

Разглеждаме сега в ε-околността на точката $M_0(x_0, y_0)$ произволна точка $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ и съединяваме точките M_0 и M с права линия. Очевидно координатите x и y на точките от тази права са следните линейни функции на новата променлива t

$$(13.53)\quad x=x_0+t\Delta x,\quad y=y_0+t\Delta y,$$

при това координатите на точките от отсечките M_0M съответстват на стойности на параметъра t от сегмента $[0, 1]$. Отбелязваме, че на стойността $t=0$ отговаря точката M_0, а на стойността $t=1$ — точката M. Тъй като по условие функцията u на двете променливи x и y в разглежданата околност на точката M_0 е $n+1$ пъти диференцируема, то от формула (13.53) следва, че върху правата M_0M тази функция е сложна функция на променливата t, най-малко $n+1$ пъти диференцируема за всички стойности на t от сегмента $[0, 1]$. Да означим тази сложна функция с $F(t)$ и да напишем за нея формулата на Тейлор с център на разлагане точката $t_0=0$ в специалната форма (13.52) при

$$\Delta u=F(1)-F(0)=f(M)-f(M_0).$$

Участвуващите във формула (13.52) диференциали от различен ред са диференциали на сложната функция $u=u(x, y)$, където x и y са линейните функции (13.53). Съгласно забележката към предишната точка при тези условия диференциалите от произволен ред на функцията u могат да се запишат във формата (13.47). Затова

$$(13.54)\quad d^ku|_{t_0}=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k u|_{M_0(x_0, y_0)}=d^ku|_{M_0},$$

$$d^{n+1}u|_{t_0+\theta(t-t_0)}=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}\Big|_{N(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)}=d^{N+1}|u_N,$$

при което във формулите (13.54) dx и dy се намират от съотношенията (13.53) при $dt=\Delta t=1-0=1$, така че във формулите (13.54)

$$(13.55)\quad dx=dt\,\Delta x=\Delta x \text{ и } dy=dt\,\Delta y=\Delta y.$$

Замествайки $d^ku|_{t_0}$ и $d^{n+1}u|_{t_0+\theta(t-t_0)}$ от (13.54) в (13.52) и отчи-

тайки съотношенията (13.55), получаваме формулата на Тейлор (13.49).

Ще дадем формулата на Тейлор в развита форма за функцията u:

$$(13.56)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = u(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-\overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots\right.$$

$$\left.+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}^k, \; u(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-\overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots\right.$$

$$\left.+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}^{n+1} u(\overset{\circ}{x}_1+\theta(x_1-\overset{\circ}{x}_1), \overset{\circ}{x}_2+\theta(x_2-\overset{\circ}{x}_2), \ldots,$$

$$\overset{\circ}{x}_m+\theta(x_m-\overset{\circ}{x})).$$

Следствие. *Ако функцията u удовлетворява условията на теорема 13.15 и освен това всичките ѝ частни производни от $(n+1)$-ви ред са непрекъснати в разглежданата ε-околност на точката M_0, то остатъчният член, т. е. последният член във формулите (13.49) и (13.56), може да се представи във вида*

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \left\{\sum_{j=1}^{m}(x_j-\overset{\circ}{x}_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right\}^{n+1} u(\overset{\circ}{x}_1+t(x_1-\overset{\circ}{x}_1), \ldots, \overset{\circ}{x}_m$$

$$+t(x_m-\overset{\circ}{x}_m))\,dt.$$

Тази форма на остатъчния член е естествено да се нарича ***интегрална форма.*** За получаване формулата на Тейлор с остатъчен член в интегрална форма трябва да се използва интегралната форма на остатъчния член във формулата на Тейлор за функцията на една променлива $F(t)$, разглеждана при доказателството на теорема 13.15, т. е. да се използват резултатите от 9.4.4. В разглеждания случай този остатъчен член има вида

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Оттук се получава написаният по-горе израз за остатъчния член на функцията u.

13.5.4. Формула на Тейлор с остатъчен член във форма на Пеано.

Теорема 13.15′. *Нека $n \geqq 1$ е цяло число, а функцията u е дефинирана и $n-1$ пъти диференцируема в ε-околност на точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ и n пъти диференцируема в самата точка M_0.*

Тогава за всяка точка M от разглежданата ε-околност е в сила следната формула:

$$(13.57)\qquad u(M) = u(M_0) + \frac{1}{1!}du\Big|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u\Big|_{M_0} + \ldots$$

$$+\frac{1}{n!}d^n u\Big|_{M_0} + o(\rho^n),$$

в която с ρ е означено разстоянието $\rho(M, M_0)$.

Формулата (13.57) се нарича ***формула на Тейлор*** (с център в точката M_0) ***с остатъчен член във форма на Пеано.***

Забележка. По-подробно записана, формулата на Тейлор има вида

$$(13.58)\qquad u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = u(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}^k u(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$$

$$+o(\rho^n).$$

Отбелязваме, че дясната страна на (13.58) съдържа многочлен от n-та степен на m променливи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и остатъчен член $o(\rho^n)$. Означаваме с g_n разликата между u и този многочлен, т. е. полагаме

$$(13.59)\qquad g_n(M) = u(M) - u(M_0) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\right.$$

$$\left.+\ldots+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}^k u(M_0).$$

Теорема 13.15′ ще бъде доказана, ако покажем, че когато са изпълнени нейните условия, $g_n(M) = o(\rho^n)$.

Преди да докажем теорема 13.15′, ще разгледаме две леми.

Лема 1. *Ако функцията u е n пъти диференцируема в точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, то функцията g_n, определена с равенството (13.59), и всичките ѝ частни производни по променливите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ до n-ти ред включително се анулират в точката M_0.*

Доказателство. При $n=1$ функцията (13.59) приема вида

$$g_1(M)=u(M)-u(M_0)-(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$$
$$-\cdot\cdot\cdot-(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)$$

и равенствата $g_1(M_0)=0$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(M_0)=0$ за $i=1, 2, 3, \cdot\cdot\cdot, m$ се проверяват елементарно.

За провеждане на индукцията предполагаме, че лемата е вярна за някой номер $n\geqq 1$, и ще докажем, че тя е вярна и за номер $n+1$. Нека функцията u е $n+1$ пъти диференцируема в точката M_0 и

$$(13.60)\qquad g_{n+1}(M)=u(M)-u(M_0)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\right.$$
$$\left.+\cdot\cdot\cdot+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}^k u(M_0).$$

Равенството $g_{n+1}(M_0)=0$ се проверява елементарно (достатъчно е да се вземе пред вид, че всеки множител $x_i-\overset{\circ}{x}_i$ в (13.60) се анулира в точката M_0).

Остава да докажем, че за всяко $i=1, 2, 3, \cdot\cdot\cdot, m$ функцията $\frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_i}$ и всичките ѝ частни производни до n-ти ред включително се анулират в точката M_0, а за това съгласно направеното предположение за верността на лемата за номер n е достатъчно да докажем, че функцията $\frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_i}$ се определя с равенство от вида (13.59) или по-точно с равенството

$$(13.61)\qquad \frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_i}(M)=\frac{\partial u}{\partial x_i}(M)-\frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdot\cdot\cdot+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}^k\frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0).$$

Тъй като всички променливи x_i $(i=1, 2, 3, \cdot\cdot\cdot, m)$ са равноправни и участвуват в израза за g_{n+1} симетрично, то е достатъчно да докажем равенството (13.61) за $i=1$, т. е. да докажем равенството

$$(13.62)\qquad \frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_1}(M)=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M)-\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdot\cdot\cdot+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}^k\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0).$$

От (13.60) е очевидно, че за доказателството на (13.62) е достатъчно да се убедим, че за всеки номер $k=1, 2, \cdot\cdot\cdot, m$ при фиксирани $x_2, x_3, \cdot\cdot\cdot, x_m$ имаме

$$(13.63)\qquad \frac{d}{dx_1}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdot\cdot\cdot+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}^k u(M_0)$$
$$=k\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{x}{\partial x_1}+\cdot\cdot\cdot+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right\}^{k-1}\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0).$$

Тъй като при диференциране по x_1 променливите $x_2, x_3, \cdot\cdot\cdot, x_m$ са фиксирани, то величината

$$D=(x_2-\overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdot\cdot\cdot+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}$$

при диференциране по x_1 се разглежда като константа. Към това ще добавим, че понеже символите $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdot\cdot\cdot, \frac{\partial}{\partial x_m}$ се използват за означаване на частните производни на функцията u във фиксирана точка M_0, то при диференциране по x_1 тези символи трябва да се разглеждат като константни величини.

От казаното се вижда, че равенството (13.63) следва от равенството

$$(13.64)\qquad \frac{d}{dx_1}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+D\right\}^k=k\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+D\right\}^{k-1},$$

което лесно се получава с помощта на формулата за нютоновия бином

$$\frac{d}{dx_1}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+D\right\}^k=\frac{d}{dx_1}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}\right.$$
$$+\frac{k!}{1!(k-1)!}(x_1-\overset{\circ}{x}_1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k-1}}D$$
$$+\frac{k!}{2!(k-2)!}(x_1-\overset{\circ}{x}_1)^{k-2}\frac{\partial^{k-2}}{\partial x_1^{k-2}}D^2+\cdot\cdot\cdot+\frac{k!}{(k-1)!1!}(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}D^{k-1}$$
$$\left.+D^k\right\}=k(x_1-\overset{\circ}{x}_1)^{k-1}\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}+\frac{k!(k-1)}{1!(k-1)!}(x_1-\overset{\circ}{x}_1)^{k-2}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}D$$
$$+\frac{k!(k-2)}{2!(k-2)!}(x_1-\overset{\circ}{x}_1)^{k-3}\frac{\partial^{k-2}}{\partial x_1^{k-2}}D^2+\cdot\cdot\cdot+\frac{k!1!}{(k-1)!1!}\frac{\partial}{\partial x_1}D^{k-1}$$
$$=k\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k-1}}+\frac{(k-1)!}{1!(k-2)!}(x_1-\overset{\circ}{x}_1)^{k-2}\frac{\partial^{k-2}}{\partial x_1^{k-2}}D\right.$$
$$\left.+\cdot\cdot\cdot+D^{k-1}\right\}=k\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{(x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+D\right\}^{k-1}.$$

Равенството (13.64) е установено. □

Лема 2. *Нека g е произволна функция, удовлетворяваща двете условия: 1) $g(M)$ е n пъти диференцируема в точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, x_m)$; 2) функцията g и всичките ѝ частни производни по променливите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ до n-ти ред включително се анулират в точката M_0. Тогава за функцията g е в сила оценката*

$$g(M)=o(\rho^n), \tag{13.65}$$

в която с ρ е означено разстоянието $\rho(M, M_0)$ между точките M и M_0.

Доказателство. При $n=1$ твърдението на лемата следва от условието за диференцируемост на функцията g в точката M_0, което има вида

$$g(M)-g(M_0)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0)(x_i-\overset{\circ}{x}_i)+o(\rho).$$

От $g(M_0)=0$ и $\frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0)=0$ за всички $i=1, 2, \ldots, m$ получаваме че $g(M)=o(\rho)$.

За провеждане на индукцията предполагаме, че лема 2 е вярна за някой номер $n\geqq 1$, и ще докажем, че е вярна за следващия номер $n+1$. Нека функцията g удовлетворява двете условия на лема 2 за номера $n+1$. Тогава очевидно всяка частна производна на тази функция от първи ред $\frac{\partial g}{\partial x_i}$; $i=1, 2, 3, \ldots, m$, ще удовлетворява двете условия на лема 2 за номера n и затова (съгласно допускането, че лема 2 е вярна за номер n) ще бъде в сила оценката

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(M)=o(\rho^n). \tag{13.66}$$

Ще отбележим сега, че понеже $n\geqq 1$, то $n+1\geqq 2$ и функцията g, удовлетворяваща двете условия на лема 2 за номера $n+1$, е поне един път диференцируема в околност на точката M_0. Затова за g са изпълнени условията на теорема 13.15 за номер $n=0$. Съгласно тази теорема за всяка точка M от достатъчно малка ε-околност на точката M_0 на отсечката M_0M има такава точка N, че е в сила формулата

$$g(M)=g(M_0)+\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\overset{\circ}{x}_i)\frac{\partial g}{\partial x_i}(N). \tag{13.67}$$

Понеже N лежи между точките M_0 и M, а ρ е разстоянието между M_0 и M, то $\rho(N, M_0)\leqq\rho$ и затова от (13.65) следва

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(N)=o(\rho^n).$$

Замествайки последната оценка в (13.67) и отчитайки, че $g(M_0)=0$, получаваме

$$g(M)=o(\rho^n)\sum_{i=1}^{m}|x_i-\overset{\circ}{x}_i|.$$

Тъй като $|x_i-\overset{\circ}{x}_i|\leqq\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\overset{\circ}{x}_i)^2\right)^{1/2}=\rho$, окончателно имаме $g(M)=o(\rho^{n+1})$. □

Доказателството на теорема 13.15′ се провежда лесно с помощта на леми 1 и 2. Наистина достатъчно е да установим, че ако са изпълнени условията на теоремата, за функцията (13.59) е в сила оценката

$$g_n(M)=o(\rho^n).$$

Според лема 1 функцията (13.59) и всичките ѝ частни производни по променливите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ до n-ти ред включително се анулират в точката M_0. Но тогава според лема 2 за функцията (13.59) имаме оценката $g_n(M)=o(\rho^n)$. □

13.6. Локален екстремум на функция на m променливи

13.6.1. Понятие за екстремум на функция на m променливи. Необходими условия за екстремум. Нека функцията на m променливи u е дефинирана в някоя околност на точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ от пространството E^m.

Определение 1. *Казваме, че функцията u има в точката M_0* ***локален максимум (локален минимум),*** *ако съществува δ-околност на точката M_0, в която стойността $u(M_0)$ е най-голяма (най-малка) измежду всички стойности $u(M)$ на тази функция в тази околност.*

Определение 2. *Казваме, че функцията u има в точката M_0* ***локален екстремум,*** *ако тя има в тази точка или локален максимум, или локален минимум.*

Ще установим необходими условия за локален екстремум на

функция u, имаща в дадената точка M_0 частни производни от първи ред по всичките си променливи.

В сила е следното твърдение: *Ако функцията u има в точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \cdots, \overset{\circ}{x}_m)$ частни производни от първи ред по всички променливи $x_1, x_2, \cdots, x_m$ и има в тази точка локален екстремум, то всичките ѝ частни производни от първи ред се анулират в точката M_0, т. е.*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)=0, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)=0. \tag{13.68}$$

Доказателство. Ще покажем верността на първото от равенствата (13.68). Фиксираме във функцията u аргументите $x_2, x_3, \cdots, x_m$, като ги полагаме равни на съответните координати на точката M_0, т. е. полагаме $x_2=\overset{\circ}{x}_2$, $x_3=\overset{\circ}{x}_3, \cdots, x_m=\overset{\circ}{x}_m$. При това получаваме функцията u на една променлива x_1. Производната на тази функция на една променлива в точката $x_1=\overset{\circ}{x}_1$ съвпада с частната производна $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$.

Тъй като функцията на m променливи u има локален екстремум в точката M_0, то съответната функция на една променлива $u=u(x_1, \overset{\circ}{x}_2, \cdots, \overset{\circ}{x}_m)$ има локален екстремум в точката $x_1=\overset{\circ}{x}_1$ и затова (съгласно 7.1.2) производната на тази функция на една променлива в точката $x=\overset{\circ}{x}_1$, съвпадаща с частната производна $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$, е равна на нула.

Първото равенство от (13.68) е доказано. Останалите се доказват аналогично. Равенствата (13.68) (т. е. анулирането в дадена точка M_0 на всички частни производни от първи ред) са само необходими, но не са достатъчни условия за локален екстремум на функцията u в точката M_0.

Например за функцията на две променливи $u=xy$ двете частни производни $\partial u/\partial x$ и $\partial u/\partial y$ се анулират в точката $M_0(0, 0)$, без да има екстремум в тази точка, тъй като функцията $u=xy$ е равна на нула в точката $M_0(0, 0)$, а във всяка δ-околност на тази точка тя приема както положителни, така и отрицателни стойности.

Точките, в които се анулират всичките частни производни от първи ред на функцията u, се наричат стационарни точки за тази функция.

Всяка стационарна точка за функцията u е възможно да бъде точка на локален екстремум, но наличието на такъв екстремум може да се установи само с помощта на достатъчни условия за локален екстремум.

От доказаното по-горе твърдение следва и една друга форма на необходимите условия за локален екстремум: Ако функцията u е диференцируема в точката M_0 и има в тази точка локален екстремум, то диференциалът $du|_{M_0}$ на тази функция в точката M_0 е тъждествено равен на нула относно диференциалите на независимите променливи $dx_1, dx_2, \cdots, dx_m$.

Наистина, понеже

$$du|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\,dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\,dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\,dx_m,$$

то от равенствата (13.68) следва, че при всички стойности на $dx_1, dx_2, \cdots, dx_m$ е изпълнено равенството $du|_{M_0}=0$.

13.6.2. Достатъчни условия за локален екстремум на функция на m променливи. При формулирането на достатъчните условия за локален екстремум на функция на m променливи важна роля ще играе вторият диференциал на функцията в изследваната точка.

В 13.5.2 показахме, че в случая, когато аргументите $x_1, x_2, \cdots, x_m$ на два пъти диференцируемата функция u са или независими променливи, или линейни функции на някакви независими променливи, вторият диференциал на тази функция в дадената точка представлява квадратична форма относно диференциалите на аргументите $dx_1, dx_2, \cdots, dx_m$ от следния вид:

$$d^2u|_{M_0}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\,dx_i\,dx_k, \tag{13.69}$$

където

$$a_{i,k}=a_{k,i}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(M_0). \tag{13.70}$$

За формулирането на достатъчни условия за локален екстремум са необходими някои сведения от теорията на квадратичните форми, които за удобство на читателя ще приведем по-нататък.

Квадратичната форма относно променливите $h_1, h_2, \cdots, h_m$

$$\Phi(h_1, h_2, \cdots, h_m)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\,h_i\,h_k \tag{13.71}$$

се нарича ***положително дефинитна**** ***(отрицателно дефинитна)****, ако за всички стойности на променливите $h_1, h_2, \cdots, h_m$, които не са едновременно равни на нула, тази форма приема строго положителни (строго отрицателни) стойности.*

* Използва се още названието положително определена (отрицателно определена).

Квадратичната форма (13.71) *се нарича* ***дефинитна,*** *ако тя е или положително дефинитна, или отрицателно дефинитна.*

Квадратичната форма (13.71) *се нарича* ***недефинитна,*** *ако тя приема както строго положителни, така и строго отрицателни стойности.*

Квадратичната форма (13.71) *се нарича* ***полудефинитна,*** *ако тя приема или само неотрицателни, или само неположителни стойности, но се анулира за някои стойности на* $h_1, h_2, \ldots, h_m$, *които не са едновременно равни на нула.*

Ще формулираме ***критерия на Силвестър**** за дефинитност на квадратичната форма.

Матрицата

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{Vmatrix} \tag{13.72}$$

ще наричаме матрица на квадратичната форма (13.71).

Ако всички елементи на матрицата **A** удовлетворяват условието $a_{ik}=a_{ki}$ $(i=1, 2, 3, \ldots, m,\ k=1, 2, 3, \ldots, m)$, тя се нарича симетрична.

Главни минори на симетричната матрица (13.77) ще наричаме следните детерминанти:

$$A_1=a_{11},\quad A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad A_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\ldots, A_m=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Критерия на Силвестър ще формулираме за двата вида дефинитност на квадратичната форма:

1°. *За да бъде квадратичната форма* (13.71) *със симетричната матрица* (13.72) *положително дефинитна, е необходимо и достатъчно всички главни минори на матрицата* (13.72) *да са положителни, т. е. да са изпълнени неравенствата*

$$A_1>0,\quad A_2>0, \ldots, A_m>0.$$

2°. *За да бъде квадратичната форма* (13.71) *със симетрична матрица* (13.72) *отрицателно дефинитна, е необходимо и достатъчно главните минори на матрицата* (13.72) *да сменят алтернативно знаците си, като знакът на* A_1 *е отрицателен, т. е. да са изпълнени неравенствата*

$$A_1<0,\quad A_2>0,\quad A_3<0,\quad A_4>0, \ldots$$

Сега вече сме готови да формулираме и докажем достатъчни условия за локален екстремум.

Теорема 13.16. *Нека функцията на* m *променливи* u *е един път диференцируема в някоя околност на точката* $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ *и два пъти диференцируема в точката* M_0. *Нека освен това точката* M_0 *е стационарна точка за функцията* u, *т. е.* $du|_{M_0}=0$. *Тогава, ако вторият диференциал* (13.69) — (13.70) *е положително дефинитна (отрицателно дефинитна) квадратична форма на променливите* $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, *то функцията* u *има в точката* M_0 *локален минимум (локален максимум). Ако вторият диференциал* (13.69) — (13.70) *е недефинитна квадратична форма, то функцията* u *няма локален екстремум в точката* M_0.

Доказателство. Ще докажем най-напред първата част на теоремата, като ще предположим за определеност, че вторият диференциал (13.69) — (13.70) е положително дефинитна квадратична форма на променливите $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$. Ще докажем, че в този случай функцията u има в точката M_0 локален минимум.

Разлагаме функцията u в околност на точката M_0 по формулата на Тейлор с остатъчен член във форма на Пеано при $n=2$. Така получаваме

$$u(M)-u(M_0)=du|_{M_0}+\frac{1}{2!}d^2u|_{M_0}+o(\rho^2), \tag{13.73}$$

при това в равенството (13.73) диференциалите dx_i на променливите x_i, влизащи в изразите за $du|_{M_0}$ и $d^2u|_{M_0}$, са равни на съответните нараствания $x_i-\overset{\circ}{x}_i$ на тези променливи, а за величината ρ имаме

$$\rho=((dx_1)^2+(dx_2)^2+\cdots+(dx_m)^2)^{1/2}=((x_1-\overset{\circ}{x}_1)^2+(x_2-\overset{\circ}{x}_2)^2+\cdots+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)^2)^{1/2}. \tag{13.74}$$

По условие точката M_0 е стационарна, затова $du|_{M_0}=0$. От

* Джеймс Силвестър — английски математик (1814—1897).

това равенство и от изразите (13.69) — (13.70) за втория диференциал при $dx_i = x_i - \overset{\circ}{x}_i$ формулата на Тейлор (13.73) приема вида

$$(13.75)\quad u(M) - u(M_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} u_{ik}(x_i - \overset{\circ}{x}_i)(x_k - \overset{\circ}{x}_k) + o(\rho^2).$$

Достатъчно е да докажем, че за всички достатъчно малки ρ дясната страна на (13.75) е положителна.

Полагаме $h_i = (x_i - \overset{\circ}{x}_i)/\rho$, където $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. Тогава от израза (13.74) за ρ следват съотношенията

$$(13.76)\qquad |h_i| \leq 1, \quad h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2 = 1.$$

С помощта на въведените означения равенството (13.75) може да се запише във вида

$$(13.75')\qquad u(M) - u(M_0) = \frac{1}{2}\rho^2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k + o(\rho^2).$$

Частното $o(\rho^2)/\rho^2$ е безкрайно малка функция при $\rho \to 0$ (или при $M \to M_0$), която ще означим с $\alpha(\rho)$. Въвеждането на тази функция ни дава възможност да напишем равенството $o(\rho^2) = \rho^2 . \alpha(\rho)$, с помощта на което ще дадем на съотношението (13.75′) вида

$$(13.75'')\qquad u(M) - u(M_0) = \rho^2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k + \alpha(\rho)\right).$$

Сега вече не е трудно да се докаже, че дясната страна на (13.75″) е положителна за всички достатъчно малки ρ. Квадратичната форма $\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k$ е функция, дефинирана и непрекъсната върху единичната сфера (13.76), която е ограничено и затворено множество. Според втората теорема на Вайерщрас (вж. теорема 13.7) тази функция достига в това множество точната си долна граница μ, при това от положителната дефинитност на квадратичната форма (13.71) и от това, че $h_1, h_2, \ldots, h_m$, удовлетворяващи съотношението (13.76), не са едновременно равни на нула, следва, че точната долна граница μ е строго положителна.

Тъй като безкрайно малката функция $\alpha(\rho)$ при $\rho \to 0$ при всички достатъчно малки ρ ще удовлетворява неравенството $|\alpha(\rho)| < \mu$, то дясната страна на (13.75″) ще бъде положителна за достатъчно малки ρ, т. е. за всички M, достатъчно близки

до M_0. Това показва, че функцията u има локален минимум в точката M_0.

Съвсем аналогично се доказва, че когато вторият диференциал (13.69)—(13.70) е отрицателно дефинитна квадратична форма, функцията u има в точката M_0 локален максимум.

Сега ще докажем втората част на теоремата, че когато вторият диференциал (13.69)—(13.70) е недефинитна квадратична форма, функцията u няма локален екстремум в точката M_0.

Най-напред ще установим едно свойство на недефинитната форма (13.71).

Ако квадратичната форма $\Phi(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ е недефинитна, то съществуват две такива съвкупности от променливи

$$h_1', h_2', \ldots, h_m' \text{ и } h_1'', h_2'', \ldots, h_m'', \text{ че}$$

$$(13.77)\quad (h_1')^2 + (h_2')^2 + \ldots + (h_m')^2 = 1, \quad (h_1'')^2 + (h_2'')^2 + \ldots + (h_m'')^2 = 1,$$

за които

$$(13.78)\qquad \Phi(h_1', h_2', \ldots, h_m') > 0, \quad \Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'') < 0.$$

Наистина според определението на недефинитна квадратична форма съществуват две съвкупности от аргументи $t_1', t_2', \ldots, t_m'$ и $t_1'', t_2'', \ldots, t_m''$, състоящи се от числа, които не са едновременно равни на нула и такива, че

$$(13.79)\qquad \Phi(t_1', t_2', \ldots, t_m') > 0, \quad \Phi(t_1'', t_2'', \ldots, t_m') < 0.$$

Като положим

$$(13.80)\qquad h_i' = t_i'((t_1')^2 + (t_2')^2 + \ldots + (t_m')^2)^{-1/2},$$
$$h_i'' = t_i''((t_1'')^2 + (t_2'')^2 + \ldots + (t_m'')^2)^{-1/2}$$

и вземем пред вид, че от определението (13.71) за квадратична форма непосредствено следва

$$\Phi(h_1', h_2', \ldots, h_m') = ((t_1')^2 + (t_2')^2 + \ldots + (t_m')^2)^{-1}\,\Phi(t_1', t_2', \ldots, t_m'),$$

$$\Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'') = ((t_1'')^2 + (t_2'')^2 + \ldots + (t_m'')^2)^{-1}\,\Phi(t_1'', t_2'', \ldots, t_m''),$$

получаваме (поради (13.79)) неравенствата (13.78), при което от (13.80) веднага следват равенствата (13.77).

Ако $h_1', h_2', \ldots, h_m'$ и $h_1'', h_2'', \ldots, h_m''$ са две фиксирани съвкупности от стойности за променливите, удовлетворяващи съотношенията (13.77) и (13.78), ще докажем, че за всяко $\rho > 0$ съществуват две такива точки $M'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ и $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ от пространството E^m, че $\rho(M', M_0) = \rho(M'', M_0) = \rho$, при което

$$(13.81)\quad (x_i' - \overset{\circ}{x}_i)/\rho = h_i', \quad (x_i'' - \overset{\circ}{x}_i)/\rho = h_i'' \quad \text{за } i = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Наистина, като положим за произволно $\rho>0$ и за всеки номер i

$$x_i'=\overset{\circ}{x}_i+\rho h_i',\quad x_i''=\overset{\circ}{x}_i+\rho h_i'',$$

ще удовлетворим съотношенията (13.81), при което съгласно равенствата (13.77) ще бъдат изпълнени и равенствата

$$\rho(M',\ M_0)=((x_1'-\overset{\circ}{x}_1)^2+(x_2'-\overset{\circ}{x}_2)^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +(x_m'-\overset{\circ}{x}_m)^2)^{1/2}=\rho,$$

$$\rho(M'',\ M_0)=((x_1''-\overset{\circ}{x}_1)^2+(x_2''-\overset{\circ}{x}_2)^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +(x_m''-\overset{\circ}{x}_m)^2)^{1/2}=\rho.$$

Сега вече е лесно да се убедим, че когато вторият диференциал (13.69)—(13.70) е недефинитна квадратична форма, функцията u няма екстремум в точката M_0.

Като разложим функцията u в околност на точката M_0 по формулата на Тейлор с остатъчен член във форма на Пеано и заместим M с точките M' и M'', ще получим вместо (13.75) следните две разлагания:

$$(13.82)\quad u(M')-u(M_0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(x_i'-\overset{\circ}{x}_i)(x_k'-\overset{\circ}{x}_k)+o(\rho^2),$$

$$(13.83)\quad u(M'')-u(M_0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(x_i''-\overset{\circ}{x}_i)(x_k''-\overset{\circ}{x}_k)+o(\rho^2),$$

валидни за всяко достатъчно малко $\rho>0$.

Като заместим в тези разлагания $x_i'-\overset{\circ}{x}_i$ и $x_i''-\overset{\circ}{x}_i$ с изразите, определени от равенствата (13.81), и $o(\rho^2)$ с $\rho^2\alpha(\rho)$, където $\alpha(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$, (13.82) и (13.83) приемат вида

$$u(M')-u(M_0)=\rho^2\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}h_i'h_k'+\alpha(\rho)\right\},$$

$$u(M'')-u(M_0)=\rho^2\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}h_i''h_k''+\alpha(\rho)\right\}.$$

Последните две съотношения могат да се запишат също така и във вида

$$(13.82')\quad u(M')-u(M_0)=\rho^2\{\Phi(h_1',\ h_2',\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ h_m')+\alpha(\rho)\},$$

$$(13.83')\quad u(M'')-u(M_0)=\rho^2\{\Phi(h_1'',\ h_2'',\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ h_m'')+\alpha(\rho)\}.$$

От равенствата (13.82′) и (13.83′), като вземем пред вид съотношенията (13.78) и това, че величините $\Phi(h_1',\ h_2',\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ h_m')$ и $\Phi(h_1'',\ h_2'',\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ h_m'')$ не зависят от ρ, $\rho=\rho(M',\ M_0)=\rho(M'',\ M_0)$, получаваме, че за достатъчно малко ρ са изпълнени неравенствата $u(M')>u(M_0)$ и $u(M'')<u(M_0)$, което показва, че в точката M_0 функцията няма екстремум. □

Забележка 1. Ако вторият диференциал в дадена стационарна точка M_0 на два пъти диференцируема функция u е полудефинитна квадратична форма в тази точка, то функцията може да има, а може и да няма екстремум в тази точка.

Така например за функциите $u_1=x^3+y^3$ и $u_2=x^4+y^4$ вторият диференциал в стационарната точка $M_0(0,\ 0)$ е тъждествено равен на нула (т. е. е полудефинитна квадратична форма), но само втората от тези функции има в точката $M_0(0,\ 0)$ локален екстремум.

За решаване на въпроса за локален екстремум в случая, когато вторият диференциал е полудефинитна квадратична форма, трябва да се привлекат диференциали от по-висок ред.

Забележка 2. Твърдението на теорема 13.16 заедно с необходимите условия за екстремум дават възможност да се направи следното заключение, към което ще се върнем, когато разглеждаме по-общо понятие за диференцируемост в 13.7, а именно:

1) Ако два пъти диференцируемата в точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1,\ \overset{\circ}{x}_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ \overset{\circ}{x}_m)$ функция f има в тази точка минимум, то $df|_{M_0}=0$ тъждествено относно диференциалите $dx_1,\ dx_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ dx_m$ на аргументите $x_1,\ x_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ x_m$ и в някоя околност на точката M_0 имаме $d^2f|_{M_0}\geq 0$, т. е. вторият диференциал е (в тази околност) полудефинитна квадратична форма. Аналогично, ако в точката M_0 има локален максимум, то $df|_{M_0}=0$ и $d^2f|_{M_0}\leq 0$ в някоя околност на тази точка.

2) Ако за два пъти диференцируемата в точката M_0 функция f са изпълнени условията $df|_{M_0}=0$ тъждествено относно нарастванията на аргументите $x_1,\ x_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ x_m$ и в някоя околност на точката M_0 имаме $d^2f>0$, то в точката M_0 има локален минимум, а ако са изпълнени условията $df|_{M_0}=0$, $d^2f|_{M_0}<0$, то функцията f има в точката M_0 локален максимум.

От пояснение се нуждае само твърдението 1), а именно това, че ако в точката M_0 функцията има локален минимум, то $d^2f|_{M_0}\geq 0$ в някоя нейна околност. Допускаме, че съществува вектор $h_0\neq 0$, за който $d^2f|_{M_0}=\frac{1}{2}\Sigma a_{ij}h_i^0h_j^0<0$. Полагаме $h=th_0$, където t е някакво число. Тогава, ако имаме минимум в точката M_0, то съществува такава нейна околност, че за всички точки M от тази околност да е изпълнено

$$f(M)-f(M_0)=\frac{1}{2}\,d^2f\,|_{M_0}+o(\rho^2)=\frac{1}{2}\,d^2f\,|_{M_0}+\rho^2\alpha(\rho),$$

където $\alpha(\rho)\to 0$, когато $\rho\to 0$.

Като оставим t да клони към нула и използваме означението $h=th_0$, последното съотношение може да се напише във вида

$$f(M)-f(M_0)=\frac{1}{2}\,t^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\,h_i^0h_j^0+d\,(t.(h_1^{0^2}+\cdot\cdot\cdot+h_m^{0^2})^{1/2})t^2\,(h_1^{0^2}$$

$$+\cdot\cdot\cdot+h_m^{0^2})=t^2\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\,h_i^0h_j^0+\alpha\,(t\,(h_1^{0^2}+h_2^{0^2}+\cdot\cdot\cdot+h_m^{0^2}))\right\}.$$

Знакът на израза в големите скоби съвпада при малки стойности на t (поради това, че $\alpha(t.(t_1^{0^2}+\cdot\cdot\cdot+t_m^{0^2})^{1/2})\to 0$ при $t\to 0$) със знака на първия член. Следователно $f(M)-f(M_0)$ за малки t става отрицателна величина, което противоречи на това, че в точката M_0 имаме локален минимум.

Пример:

Да се намерят точките на локални екстремуми за функцията на три променливи

$$u=\lambda x^2+y^2+z^2+2y+2z, \tag{13.84}$$

където λ е реално число, различно от нула.

Тъй като $\frac{\partial u}{\partial x}=2\lambda x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y+2$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2z+2$, то единствената стационарна точка е точката $M_0(0,\ -1,\ -1)$.

Очевидно вторият диференциал в тази точка има вида

$$d^2u\,|_{M_0}=2\lambda\,(dx)^2+2\,(dy)^2+2\,(dz)^2.$$

При $\lambda>0$ вторият диференциал в точката M_0 е положително дефинитна квадратична форма и затова функцията (13.84) има в точката $M_0(0,\ -1,\ -1)$ локален минимум.

При $\lambda<0$ вторият диференциал е недефинитна квадратична форма и затова функцията (13.84) няма локален екстремум в точката M_0.

13.6.3. Случай на функции на две променливи. На практика често се срещат задачи за екстремум на функция на две променливи. В тази точка ще приведем резултати, отнасящи се до този случай.

Нека частните производни $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$ в някоя точка $M_0(x_0,\ y_0)$ са означени съответно със символите a_{11}, a_{12}, a_{22}. В сила е следното твърдение:

*Нека функцията на две променливи и е един път диференцируема в околност на точката M_0 и два пъти диференцируема в точката M_0 и нека M_0 е стационарна точка. Тогава, ако в точката M_0 е изпълнено условието $a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2>0$, то функцията и има в точката M_0 локален екстремум (максимум при $a_{11}<0$ и минимум при $a_{11}>0$). Ако обаче в точката M_0 имаме $a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2<0$, функцията и няма в тази точка локален екстремум.**

Доказателство. Верността на първата част на формулираното твърдение следва непосредствено от теорема 13.16 и от критерия на Силвестър за дефинитност на квадратичната форма, тъй като $A_1=a_{11}$, $A_2=a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2$.

Ще докажем втората част на твърдението. И така нека в точката M_0 е изпълнено неравенството $a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2<0$. Ще докажем, че в този случай вторият диференциал d^2u в точката M_0 е недефинитна квадратична форма. Ще разгледаме най-напред случая $a_{11}\neq 0$. Като използваме въведените означения

$$\rho=((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{1/2},\quad h_1=(x-x_0)/\rho,\quad h_2=(y-y_0)/\rho,$$

получаваме следния израз за втория диференциал:

$$d^2u|_{M_0}=\rho^2\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}a_{ik}\,h_ih_k=\rho^2\,(a_{11}\,h_1^2+2a_{12}\,h_1\,h_2+a_{22}\,h_2^2)$$

$$=\frac{1}{a_{11}}\,\rho^2\left\{(a_{11}\,h_1+a_{12}\,h_2)^2+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2)\,h_2^2\right\}.$$

Оттук се вижда, че при $h_1=1$, $h_2=0$ и при $h_1=a_{12}\,(a_{11}^2+a_{12}^2)^{-1/2}$, $h_2=-a_{11}\,(a_{11}^2+a_{12}^2)^{-1/2}$ диференциалът $d^2u|_{M_0}$ има различни знаци, т. е. е недефинитна квадратична форма, и затова съгласно теорема 13.16 функцията няма локален екстремум в точката M_0.

Ще разгледаме сега случая $a_{11}=0$. От условието $a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2<0$ следва, че $a_{12}\neq 0$. Тогава, както и по-горе, имаме

$$d^2u|_{M_0}=\rho^2\,h_2\,(2a_{12}\,h_1+a_{22}h_2). \tag{13.85}$$

Нека $h_1\neq 0$ и h_2 е толкова малко (от условието $h_1^2+h_2^2=1$ следва, че такъв избор на h_1 и h_2 е възможен), че изразът $2a_{12}\,h_1+a_{22}\,h_2$ да има знака на $2a_{12}\,h_1$. Тогава от формула (13.85) следва, че $d^2u|_{M_0}$ има различни знаци при $h_2>0$ и $h_2<0$, т. е. функцията u няма локален екстремум в точката M_0. □

Забележка. Изискването $d^2f(M_0)\geqq 0$ (съответно $d^2f(M_0)\leqq 0$) е необходимо условие за локален минимум (максимум) в точката M_0 на два пъти диференцируемата в тази точка функция f.

* Случаят $a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2=0$ изисква допълнително изследване.

Наистина нека за определеност f има локален минимум в точката M_0, но условието $d^2 f(M_0) \geqq 0$ не е изпълнено. Тогава ще се намерят такива $h_1, h_2, \ldots, h_m$, че

$$d^2 f(M_0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(M_0)\, h_i h_k < 0.$$

Да разгледаме функцията $F(t) = f(\overset{\circ}{x}_1 + th_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m + th_m)$, която е дефинирана за всички достатъчно малки по абсолютна стойност стойности на t. Функцията F трябва да има локален минимум в точката $t=0$, но това противоречи на условието

$$F''(0) = d^2 f(M_0) < 0.$$

13.7. Диференциално смятане в линейни нормирани пространства

Дотук изучихме диференциалното смятане на числовите функции на една или повече променливи. Тези функции изобразяват дадено множество $\{M\}$ от числовата ос или от m-мерното евклидово пространство в подмножеството на числовата ос.

В глава 12 въведохме понятието функция като изображение на едно абстрактно множество в друго (например изображение на едно метрично пространство в друго метрично пространство, на едно нормирано пространство в друго нормирано пространство и т. н.). Такива функции се наричат *оператори, изображения, функции на множество* и т. н.

По-специално може да се разглежда функция, изобразяваща m-мерното евклидово пространство в n-мерно евклидово пространство. Такива функции се наричат векторни функции, тъй като стойностите им не са числа, а вектори в някакво пространство. Например, ако изображението е в n-мерно евклидово пространство, то стойностите на функцията са вектори в n-мерното пространство.

В този параграф ще бъде построено диференциално смятане на функции, дефинирани в нормирано пространство. Като елементарно следствие от тези построения могат да се получат всички факти, отнасящи се до функции, изобразяващи m-мерното евклидово пространство в n-мерно евклидово пространство, като m и n могат да съвпадат или да не съвпадат.

13.7.1. Понятие за диференцируемост. Силна и слаба диференцируемост в линейни нормирани пространства. Нека N_1 и N_2 са две нормирани пространства и F е изображение (функция) на N_1 в N_2 $(F: N_1 \to N_2)$, което е дефинирано в някое отворено множество Σ в пространството N_1. Понеже N_1 е нормирано пространство, то е и метрично пространство. Следователно всички понятия, въведени в метричните пространства, като отворено множество, затворено множество, ограничено множество, разстояние между точки и т. н., имат смисъл.

Определение. *Изображението $F: N_1 \to N_2$ ще наричаме* ***диференцируемо**** *в дадена точка x, принадлежащи на отвореното множество $\Sigma \subset N_1$, ако съществува такъв ограничен линеен оператор* (вж. 12.5.4) *$L_x \in (N_1 \to N_2)$, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че ако $h \in N_1$ и $\|h\|_{N_1} \leqq \delta$,* то

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x h\|_{N_2} \leqq \varepsilon \|h\|_{N_1} \tag{13.86}$$

или

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x h\|_{N_2} = o(h), \tag{13.87}$$

където $o(h)/\|h\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

Индексите N_1 или N_2 към знака за норма $\|\circ\|$ означават, че нормата е взета в пространството N_1 или N_2. За опростяване на записването ще се уговорим по-нататък да изпускаме тези индекси, когато няма опасност от недоразумения.

Да изберем във формулата (13.86) редица от числа $\varepsilon_n \to 0$. Съгласно формулираното определение на нея отговаря редицата от числа $\delta_n > 0$ и за всяка редица от точки h_n, за която $\|h_n\| < \delta_n$, $\|h_n\| \to 0$, от (13.86) ще получим

$$\|F(x+h_n) - F(x)\| = \|F(x+h_n) - F(x) - L_x h_n + L_x h_n\| \leqq \varepsilon_n \|h_n\| + \|L_x\| \cdot \|h_n\| \to 0,$$

$n \to \infty$ (тъй като $\|h_n\| \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$, а $\|L_x\| \leqq C$ поради ограничеността на линейния оператор L_x).

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} F(x+h_n) = F(x)$, $\|h_n\| \to 0$, т. е. ако означим $x + h_n$ с x_n, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x+h_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{x_n \to x} F(x_n) = F(x)$, така че

* Ако по-специално F е скаларна функция, дефинирана в някакъв интервал (α, β), F изобразява подмножество от числовата ос в подмножество от числовата ос — $F: (\alpha, \beta) \to E^1$, то когато тя е диференцируема в точката $x_0 \in (\alpha, \beta)$, имаме $F(x_0+h) - F(x_0) - Lh = o(h)$, където h е число — нараства-нето на аргумента на функцията, $L = L(x_0)$ е линеен оператор, представляващ производната на изображението F в точката x_0, който принадлежи в случая на пространството от оператори $(E^1 \to E^1)$, т. е. е просто операторът умножение с число. От друга страна, ако F се разглежда като числова функция, то L е очевидно производната на F в точката x_0, т. е. $L = F'(x_0)$.

диференцируемото в точката x изображение F е непрекъснато в тази точка.

При всяко $x \in N_1$ елементът $L_x h$ е от пространството N_2 и се нарича ***силен диференциал*** (или ***диференциал на Фреше***) на изображението F в точката x (понякога се означава със символа dF). Линейният оператор L_x се нарича ***производна*** или ***силна производна*** на изображението F в точката x. Тази производна ще означаваме със символа F', така че силният диференциал на изображението F по определение е равен на $L_x h$, т. е. $dF = L_x h$, а силната производна F' е равна на L_x, т. е. $F'(x) = L_x$.

Ако изображението F е диференцируемо в точката x, то съответната производна се определя по единствен начин. Действително нека

$$F(x+h) - F(x) - L_x^1 h = o(h)^*$$

и

$$F(x+h) - F(x) - L_x^2 h = o(h).$$

Тогава

$$L_x^1 h - L_x^2 h = o(h).$$

Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че от неравенството $\|h\| < \delta$ следва неравенството

$$\| L_x^1 h - L_x^2 h \| \leq \varepsilon \| h \|.$$

Разделяме двете части на това неравенство на $\|h\|$ и означаваме $\|h\|^{-1} \cdot h = e$, $\|e\| = 1$.

Поради свойствата на нормата и линейността на операторите L_x^1 и L_x^2 получаваме

$$\| L_x^1 e - L_x^2 e \| \leq \varepsilon$$

за всеки вектор e от единичната сфера (т. е. за всеки вектор с норма, равна на единица).

Понеже ε е произволно, операторите L_x^1 и L_x^2 съвпадат върху единичната сфера. Тъй като операторите L_x^1 и L_x^2 са линейни, те очевидно съвпадат навсякъде, т. е. $L_x^1 = L_x^2$.

За да илюстрираме определението за силна диференцируемост на изображение на едно нормирано пространство в друго с конкретен пример, ще разгледаме изображение $F: E^m \to E^1$, т. е. изображение на m-мерното евклидово пространство в числовата ос. В този случай** изображението $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ е обикновена числова функция на m променливи. Ако означим нарастването

* Това трябва да се разбира така: $\| F(x+h) - F(x) - L_x^1 h \|_{N_2} = o(h)$.

** Като изберем базис в E^m, независимо от естеството на елементите $x \in E^m$ можем да считаме, че те са наредени m-орки от числа.

на аргумента x_1 с h_1, на аргумента x_2 с h_2, . . . , на аргумента x_m с h_m, то както следва от формула (13.15), за функция F на m променливи, диференцируема в точката $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от някое отворено множество $\Sigma \subset E^m$, имаме

$$F(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_m+h_m) - F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = F(x+h) - F(x) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_m h_m + o(\rho),$$

където

$$x + h = (x_1+h_1, \ldots, x_m+h_m), \quad A_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, A_m = \frac{\partial F}{\partial x_m},$$

$$\rho = (h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2)^{1/2}.$$

Отбелязваме, че $\rho = \|h\|$, където $\|h\|$ е нормата на h в нормираното пространство E^m.

Следователно, ако една функция на m променливи е диференцируема, то тя е силно диференцируема като изображение на нормираното пространство E^m в нормираното пространство E^1, при което силната производна L_x се определя от условието

$$L_x = \begin{Vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\partial F}{\partial x_m} \end{Vmatrix}.$$

Така в случая на изображение на m-мерното евклидово пространство в числовата ос понятието силна диференцируемост на функция поради единствеността на производната съвпада с понятието диференцируемост.

Сега ще установим някои елементарни факти, следващи непосредствено от определението за производна.

Свойство 1. *Ако $F = \text{const}$, то $F'(x) \equiv O$, където O е нулевият оператор.*

Доказателството на това свойство е очевидно.

Свойство 2. *Производната на непрекъснато (т. е. ограничено) линейно изображение A е равна на самото изображение: $A' = A$.*

Наистина

$$A(x+h) - A(x) = A(x) + A(h) - A(x) = A(h).$$

Затова

$$A' = A. \tag{13.88}$$

Свойство 3. *Нека F и G са две непрекъснати изображения на N_1 в N_2. Ако F и G са диференцируеми в точката x_0, то и*

изображенията $F+G$ и aF (a е число) са също диференцируеми в тази точка и

(13.89) $$(F+G)'(x_0)=F'(x_0)+G'(x_0)$$

и

(13.90) $$(aF)'(x_0)=aF'(x_0).*$$

Наистина от определенията за сума на оператори и произведение на оператор с число получаваме

$$(F+G)(x_0+h)=F(x_0+h)+G(x_0+h)=F(x_0)+G(x_0)$$
$$+F'(x_0)h+G'(x_0)h+o(h),$$

където $\|o(h)\|/\|h\|\to 0$ при $\|h\|\to 0$;

(13.91) $$(aF)(x_0+h)=aF(x_0)+aF'(x_0)h+o(h),$$

където $\|o(h)\|/\|h\|\to 0$ при $\|h\|\to 0$. От тези равенства получаваме съотношенията (13.90) и (13.91).

Ще разгледаме сега още едно понятие за диференцируемост на изображението $F:N_1\to N_2$.

Определение. ***Слаб диференциал*** *(или* ***диференциал на Гато****) се нарича границата*

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t}=\frac{d}{dt}F(x+th)\Big|_{t=0},$$

където сходимостта е по норма в пространството N_2. Слабият диференциал се нарича още първа вариация на изображението F в точката x и се означава със символа $DF(x, h)$.

Слабият диференциал $DF(x, h)$ може да не бъде линеен по h. Ако операторът $DF(x, h)$ се окаже линеен по h, т. е. ако

(13.92) $$DF(x, h)=F'_c(x)h,$$

където $F'_c(x)$ е ограничен линеен оператор, то този оператор се нарича ***слаба производна*** *(или* ***производна на Гато****).*

13.7.2. Формула на Лагранж за крайните нараствания. При изучаването на диференцируемите числови функции важна роля играеше формулата на Лагранж за крайните нараствания. Ще изведем такава формула и в случая на диференцируемо изображение $F:N_1\to N_2$. Нека Σ е отворено множество в N_1, съдържащо точката x_0, и нека множеството от точки $x_0+t(x-x_0)$** се съдържа изцяло в Σ при $0\leq t\leq 1$.

* Със символите $(F+G)'(x_0)$ и $(aF)'(x_0)$ са означени стойностите на операторите $(F+G)'$ и $(aF)'$ в точката x_0.

** Множеството от точки $x_0+t(x-x_0)$, $0\leq t\leq 1$, се нарича сегмент $[x_0, x]$ в N_1. При $t=0$ получаваме точката x_0, а при $t=1$ — точката x; ако $0<t<1$, т. множеството от точки $x_0+t(x-x_0)$ се нарича интервал (x_0, x).

Теорема 13.17. *Нека $F:N_1\to N_2$ е изображение, дефинирано в отвореното множество $\Sigma\subset N_1$, което има силна производна F' във всяка точка на интервала (x_0, x). Тогава*

(13.93) $$\|F(x)-F(x_0)\|\leq\sup_{\xi\in(x_0, x)}\|F'(\xi)\|\cdot\|\Delta x\|$$
$$=\sup_{0<\theta<1}\|F'(x_0+\theta\Delta x)\|\cdot\|\Delta x\|,\ \Delta x=x-x_0.$$

Доказателство. Ще разгледаме най-напред непрекъснатото изображение $f(t)$, изобразяващо сегмента $[0, 1]$ в пространството N_2, $f:[0, 1]\to N_2$, и непрекъснатата функция g, дефинирана в сегмента $[0, 1]$ и приемаща числови стойности. Ще покажем, че ако f и g са силно диференцируеми в интервала $(0, 1)$ (f като изображение на едно нормирано пространство, а именно на интервала $[0, 1]$, в друго нормирано пространство N_2, а g като числова функция, дефинирана в интервала $(0, 1)$), и ако

$$\|f'(t)\|\leq g'(t),\ 0<t<1,$$

то

(13.94) $$\|f(1)-f(0)\|\leq g(1)-g(0).$$

От формула (13.94) вече лесно следва твърдението на теоремата.

Ще докажем формулата (13.94). При всяко фиксирано $\varepsilon>0$ означаваме с A_ε множеството от точки на сегмента $[0, 1]$, в които е изпълнено неравенството

(13.95) $$\|f(t)-f(0)\|\leq g(t)-g(0)+\varepsilon t+\varepsilon.$$

Ще покажем, че при всяко $\varepsilon>0$ числото 1 принадлежи на множеството A_ε. Тогава от (13.95) при $t=1$ и $\varepsilon\to 0$ получаваме (13.94).

Поради непрекъснатостта на изображението f и функцията g множеството A_ε е затворено в сегмента $[0, 1]$. Действително, ако $t_n\in A_\varepsilon$ и $t_n\to t_0$, то в неравенството

$$\|f(t_n)-f(0)\|\leq g(t_n)-g(0)+\varepsilon t_n+\varepsilon,$$

като използваме непрекъснатостта на функцията норма (или, което е същото, непрекъснатостта на функцията разстояние: $\|x\|=\rho(x, 0)$), непрекъснатостта на изображението f и непрекъснатостта на функцията $g(t)$, можем да минем към граница при $t_n\to t_0$ и да заключим, че

$$\|f(t_0)-f(0)\|\leq g(t_0)-g(0)+\varepsilon t_0+\varepsilon,$$

т. е. $t_0\in A_\varepsilon$, и следователно множеството A_ε е затворено.

Множеството A_ε не е празно, тъй като (13.95) е очевидно изпълнено при достатъчно малки t (лявата страна на неравенството (13.95) пр малки t поради непрекъснатостта на f е малка,

докато дясната страна съдържа положителния член ε като събираемо и той не зависи от t).

Нека $a=\sup A_\varepsilon$. Понеже множеството $A_\varepsilon \subset [0, 1]$ е затворено, то $a \in A_\varepsilon$. Ще покажем, че a не може да бъде по-малко от 1. Да допуснем противното: $a<1$, т. е. $0<a<1$. Понеже f и g са диференцируеми в точката a, за достатъчно малки положителни h ще имаме

$$\|f(a+h)-f(a)\|=\|f'(a)h+o(h)\| \leqq \|f'(a)h\|+\|o(h)\| \leqq \|f'(a)\|.h+\varepsilon.h/2$$

(в дадения случай $\|h\|=|h|=h$, понеже h е положително число, а нормата на елемента h от сегмента $[0, 1]$ съвпада с модула на h).

По-нататък

$$g(a+h)-g(a)=|g(a+h)-g(a)|, \quad h>0,$$

понеже функцията g не намалява в интервала $(0, 1)$. Това следва от обстоятелството, че $g(t)\geqq 0$, $0<t<1$, което на свой ред следва от неравенството $0 \leqq \|f'(t)\| \leqq g'(t)$, $0<t<1$. Но

$$|g(a+h)-g(a)|=|g'(a)h+o(h)| \geqq |g'(a)h|-o(h) \geqq g'(a).h-\varepsilon.h/2$$

за достатъчно малки h.

От горните оценки имаме

$$\|f(a+h)-f(a)\| \leqq \|f'(a)\|.h+(\varepsilon/2).h \leqq g'(a)h+\varepsilon h/2 \leqq g(a+h)-g(a)+\varepsilon h.$$

Понеже

$$\|f(a)-f(0)\| \leqq g(a)-g(0)+\varepsilon.a+\varepsilon,$$

то

$$\|f(a+h)-f(0)\|=\|f(a+h)-f(a)+f(a)-f(0)\| \leqq \|f(a+h)-f(a)\|+\|f(a)-f(0)\| \leqq g(a+h)-g(a)+\varepsilon h+g(a)-g(0)+\varepsilon a+\varepsilon=g(a+h)-g(0)+\varepsilon(a+h)+\varepsilon.$$

Виждаме, че $a+h \in A_\varepsilon$, но това противоречи на избора на числото a, т. е. числото a не може да бъде по-малко от единица. Следователно $a=1$ и $1 \in A_\varepsilon$. Формула (13.94) е доказана.

Ще завършим сега доказателството на теоремата. Полагаме

$$f(t)=F(x_0+t.\Delta x), \quad g(t)=M.\|\Delta x\|.t, \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

където

$$M=\sup\{\|f'(\xi)\|: \xi \in (x_0, x)\}.$$

Изображението f и функцията g очевидно удовлетворяват всички условия на помощното твърдение, доказано по-горе. Затова, като заместим тези изрази за f и g във формула (13.94), получаваме (13.93). □

Следствие. *Ако $A \in (N_1 \to N_2)$ е линейно непрекъснато изображение на нормираното пространство N_1 в нормираното пространство N_2, независещо от x, а F е изображение на отвореното множество $\Sigma \subset N_1$ в N_2, което удовлетворява условията на теоремата, то*

$$\|F(x)-F(x_0)-A\Delta x\| \leqq \sup\{\|F'(\xi)-A\|.\|\Delta x\|: \xi \in (x_0, x)\}.$$

Наистина, като приложим теоремата към изображението

$$F(x)-A.\Delta x, \quad \Delta x=x-x_0,$$

получаваме $\|F(x)-A\Delta x-F(x_0)\| \leqq \sup\limits_{\xi \in (x_0, x)} \|F'(\xi)-A(x-x_0)|_{x=\xi}\|.\|\Delta x\|=\sup\limits_{\xi \in (x_0, x)} \|F'(\xi)-A\|.\|\Delta x\|$. □

Може да се покаже, че теоремата 13.17 и следствието от нея са верни, ако навсякъде вместо силна производна F' разглеждаме слаба производна $F'_c(x)$.

13.7.3. Връзка между слаба и силна диференцируемост. Силната и слабата диференцируемост са различни понятия даже в случай на m-мерно евклидово пространство при $m \geqq 2$.

За пример ще разгледаме функцията на две променливи

$$f(x)=f(x_1, x_2)=\begin{cases} \dfrac{x_1^3.x_2}{x_1^4+x_2^2}, & x_1^2+x_2^2>0, \\ 0, & x=(x_1, x_2)=(0, 0). \end{cases}$$

Лесно се проверява, че тази функция е непрекъсната навсякъде в равнината, включително и в точката $(0, 0)$. В точката $(0, 0)$ имаме

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+th)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0} \frac{t^4h_1^3h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2}=\lim_{t\to 0} \frac{t^2h_1^3h_2}{h_2^2+t^2h_1^4}=0,$$

където $h=(h_1, h_2)$ е някакво нарастване на аргумента на функцията f в точката $(0, 0)$.

Следователно в точката $(0, 0)$ слабият диференциал на f съществува и е равен на нула.

От друга страна, в началото имаме

$$f'_{x_1}(0, 0)=f'_{x_2}(0, 0)=0;$$

това непосредствено следва от определението на частни производни и от това, че $f(x_1, 0)=0$, $f(0, x_2)=0$. Затова, като запишем

нарастването на функцията в точката (0, 0) във вида

$$f(h_1, h_2)-f(0, 0)=\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1}\cdot h_1+\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2}\cdot h_2+o(h),$$

където $h=(h_1, h_2)$ е нарастването на аргумента, $o(h)/\|h\|\to 0$ при $\|h\|=(h_1^2+h_2^2)^{1/2}\to 0$, получаваме

$$f(h_1, h_2)-f(0, 0)=o(h)=\frac{h_1^3 h_2}{h_1^4+h_2^2}.$$

Избирайки $h_2=h_1^2$, имаме $o(h)|_{h_2=h_1^2}=h_1/2$, което води до противоречие. Наистина величината $h_1/2$, разделена на нормата на h при $h_2=h_1^2$, клони към $1/2$ при $\|h\|\to 0$, а величината $o(h)$, разделена на $\|h\|$ при всяко h_1 и всяко h_2, клони към нула при $\|h\|\to 0$, което следва от определението на $o(h)$.

Следователно функцията f е недиференцируема в точката (0, 0) в силен смисъл.

Разбира се, ако изображението F има силна производна, то има и слаба производна и двете производни съвпадат. Наистина за силно диференцируемо изображение имаме

$$F(x+th)-F(x)=F'(x)(th)+o(th)=t\cdot F'(x)\,h+o(th)$$

и следователно

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(F(x+th)-F(x))=\lim_{t\to 0}(F'(x)\,h+t^{-1}o(th))=F'(x)\,h. \quad \square$$

13.7.4. Диференцируемост на функционали. В предишната точка въведохме понятието диференцируемо изображение $F: N_1\to N_2$, изобразяващо нормираното пространство N_1 в нормираното пространство N_2. Вече отбелязахме, че производната $F'(x)$ на такова изображение е линеен оператор при всяко x, действуващ от N_1 в N_2, т. е. елемент на пространството на операторите $(N_1\to N_2)$. По-специално при $N_2=P$, където P е числовата права или комплексната равнина, изображението F има числови стойности в N_1 и се нарича функционал. При това производната на функционала F в точката x_0 е линеен функционал, зависещ от x_0.

За пример ще намерим главната линейна част на нарастването на функционала $F(x)=\|x\|^2$, дефиниран в реалното хилбертово пространство H. Имаме

$$F(x+h)-F(x)=\|x+h\|^2-\|x\|^2=(x+h, x+h)-(x, x)$$
$$=(x,x)+2(x,h)+(h,h)-(x,x)=2(x,h)+\|h\|^2.$$

Може да се покаже, че $F'(x)=\frac{d}{dx}\|x\|^2=2x$.

13.7.5. Производни от втори ред. Да разгледаме диференцируемото изображение $F: N_1\to N_2$. Вече отбелязахме, че производната на това изображение при всяко фиксирано $x\in N_1$ е елемент на пространството $(N_1\to N_2)$ — пространството на линейните ограничени оператори от N_1, действуващи в N_2. Да допуснем, че изображението $F'(x)$ на свой ред е диференцируемо. *Производната на изображението $F'(x)$ се нарича* ***втора производна*** *на изображението $F(x)$ и се означава с $F''(x)$.* При всяко фиксирано x изображението $F''(x)$ е очевидно елемент на пространството $(N_1\to(N_1\to N_2))$ — пространството на линейните ограничени оператори, действуващи от N_1 в $(N_1\to N_2)$.

13.8. Изследване на екстремуми на функционали в нормирани пространства

Редица задачи с важно практическо приложение водят до намиране на екстремуми на функционали, определени в нормирани пространства. Така например още през 1696 г. Й. Бернули* публикува писмо, в което предлага на вниманието на математиците задачата за линията на най-бързото спускане — брахистохроната. В тази задача трябва да се намери линията, съединяваща две точки A_1 и A_2 (нележащи на една вертикална права), със следното свойство: спускането на материална точка от A_1 до A_2 по тази линия да става за най-кратко време. Тази задача води до изследване за екстремум на функционал F, определен в нормираното пространство $C_1[a, b]$ на непрекъснато диференцируемите функции (12.1.1) от вида

$$F(x)=\int_a^b \Phi(x(t), x'(t))\,dt,$$

където x е елемент на пространството $C_1[a, b]$. Оказало се, че линията на най-бързото спускане е циклоидата

$$t=A(\tau-\sin\tau),$$
$$x=A(1-\cos\tau).$$

Основният принцип в механиката е принципът на стационарното действие на Остроградски — Хамилтон, в който се твърди, че

* Йохан Бернули — швейцарски математик (1667—1748).

от възможните, т. е. съвместимите с връзките, движения на система от материални точки се осъществяват точно тези движения, които могат да се определят чрез изследване на екстремума на функционала $F=\int_a^b (T-U)\,dt$, където T е кинетичната, а U — потенциалната енергия на системата.

Изучаването на такива задачи, в които трябва да се изследват екстремуми на дадени функционали, съставлява съдържанието на т. нар. вариационно смятане. В тази точка само бегло ще засегнем някои основни факти на тази дисциплина.

13.8.1. Необходимо условие за екстремум. Нека F е реален функционал, определен в банаховото пространство B, т. е. F е изображение на пълното нормирано пространство B върху реалната права.

Определение. *Функционалът F достига в точката x_0* ***локален минимум (максимум),*** *ако за всички x, от достатъчно малка околност на точката x_0 (т. е. за всички x, за които нормата на разликата $x-x_0$ е достатъчно малка) е изпълнено неравенството $F(x)-F(x_0)\geqq 0$ $(F(x)-F(x_0)\leqq 0)$.*

Локалният минимум и локалният максимум се обединяват в общото наименование локален екстремум.

За функция на m променливи в 13.6 дадохме следното необходимо условие за екстремум: Ако функцията f е диференцируема в точката $x_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ и има в тази точка екстремум, то в тази точка или $df=0$, или, което е същото,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_m}=0.$$

За функционали в произволно нормирано пространство е в сила аналогична теорема.

Теорема 13.18. *Необходимо условие диференцируемият в нормирано пространство функционал F да има в точката x_0 екстремум е диференциалът му в тази точка да е тъждествено равен на нула относно h:*

$$F'(x_0)\,h\equiv 0,$$

т. е. необходимо е $F'(x_0)=0$.

Доказателство. Тъй като функционалът F е диференцируем, то по определението за диференцируемост имаме

$$F(x_0+h)-F(x_0)=F'(x_0)\,h+o(h).$$

Ако $F'(x_0)\,h\neq 0$ за някой елемент h, то за достатъчно малки реални числа λ знакът на израза $F'(x_0)(\lambda h)+o(\lambda h)$ съвпада със

знака на главния му член $F'(x_0)(\lambda h)$, понеже ако λ е малко, величината $\|\lambda h\|$ е също малка, и то от по-висок ред в сравнение с $F'(x_0)(\lambda h)$. Функционалът $F'(x_0)$ е линеен, затова $F'(x_0)(\lambda h)=\lambda F'(x_0)\,h$; следователно, ако $F'(x_0)\,h\neq 0$, то нарастването

$$F(x_0+\lambda h)-F'(x_0)=F'(x_0)(\lambda h)+o(\lambda h)$$

(при даденото h, за което $F'(x_0)\,h\neq 0$) може да приема при произволно малки елементи λh както положителни, така и отрицателни стойности, т. е. екстремум в точката x_0 не може да има. □

Пример:

Ще разгледаме функционала

$$F(x)=\int_a^b f(t,\ x(t),\ x'(t))\,dt, \tag{13.95}$$

зададен в пространството $C_1[a, b]$ на непрекъснато диференцируемите функции в сегмента $[a, b]$. Тук $x'(t)=\frac{dx(t)}{dt}$, а f е два пъти диференцируема функция на аргументите си в множеството $a\leqq t\leqq b$, $-\infty<x<\infty$, $-\infty<x'<\infty$. Този функционал играе важна роля във вариационното смятане.

Съгласно теорема 13.18, за да намерим точките, в които е възможен екстремум, т. е. стационарните точки, трябва да намерим силния диференциал на този функционал и да го положим равен на нула. По формулата на Тейлор с остатъчен член във форма на Пеано за функцията $f(t, x, x')$ имаме

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^b (f(t,\ x+h,\ x'+h')-f(t,\ x,\ x'))\,dt$$

$$=\int_a^b (f'_x(t,\ x,\ x')\,h(t)+f'_{x'}(t,\ x,\ x')\,h'(t)+o(\rho))\,dt,$$

където $\rho=(h^2+h'^2)^{1/2}$. Ще напомним, че нормата на елемента h в пространството $C_1[a, b]$ се определя така:

$$\|h\|_{C_1[a,\,b]}=\max\{\max_{a\leqq t\leqq b}|h(t)|,\ \max_{a\leqq t\leqq b}|h'(t)|\}.$$

Затова $\left|\int_a^b o(\rho)\,dt\right|\leqq (b-a)\,o(\|h\|_{C_1[a,\,b]})=o(\|h\|_{C_1[a,\,b]})$. И така необходимото условие за екстремум на дадения функционал F има вида

$$dF=\int_a^b (f'_x(t,\ x,\ x')\,h(t)+f'_{x'}(t,\ x,\ x')\,h'(t))\,dt=0.$$

Можем да се убедим, че това условие е еквивалентно на следните условия:

$$f'_x - \frac{d}{dt} f'_{x'} = 0, \quad f'_{x'}|_{t=a} = 0, \quad f'_{x'}|_{t=b} = 0.$$

Тази т. нар. гранична задача за функцията x определя някаква крива $y = x(t)$, за която е възможно функционалът да достига екстремум. Тази гранична задача е едно диференциално уравнение за функцията x (уравнение, съдържащо функцията x и нейните производни) от вида $f'(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} f'_{x'}(t, x(t), x'(t)) = 0$, което се нарича уравнение на Ойлер за функционала (13.95) с гранични условия от вида $f'_{x'}(t, x(t), x'(t))|_{t=a} = 0$, $f'_{x'}(t, x(t), x'(t))|_{t=b} = 0$.

14. Неявни функции

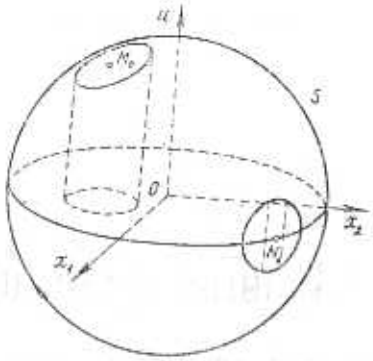
Често се стига до ситуация, когато една променлива u се задава като функция на променливите $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ посредством функционалното уравнение $F(u, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$.

В този случай се казва, че u е *зададена неявно* като функция на аргументите $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$. Естествено възниква въпросът, при какви условия функционалното уравнение $F(u, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ е еднозначно решимо относно u, т. е. еднозначно се определя явната функция $x = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, и още по-тънкият въпрос, при какви условия тази функция е непрекъсната и диференцируема.

Да се даде отговор на тези въпроси не е никак просто. За пример ще разгледаме функционалното уравнение $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, определящо в пространството на променливите (u, x_1, x_2) сфера S с радиус 1 и център в началото на координатната система (вж. фиг. 14.1). Очевидно това функционално уравнение определя безбройно много явни функции в кръга $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Такива са функциите $u = +\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, $u = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ и всяка функция, равна на $+\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ за едни от точките на кръга $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ и равна на $-\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ за другите точки от този кръг.

При какви условия съществува единствена явна функция, удовлетворяваща уравнението $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$?

Фиксираме върху посочената по-горе сфера S произволна точка $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$, нележаща в равнината Ox_1x_2, т. е. такава, че $\overset{\circ}{u} \neq 0$. Очевидно е, че част от сферата S, лежаща в достатъчно малка околност на точката M_0, се проектира еднозначно върху равнината Ox_1x_2 (фиг. 14.1). Аналитично това означава, че ако разгледаме функцията $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$ само в тази достатъчно малка околност на точката M_0, то уравнението $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ е еднозначно решимо относно u и определя



Фиг. 14.1

единствената явна функция $u=+\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ при $\overset{\circ}{u}>0$ и съответно $u=-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ при $\overset{\circ}{u}<0$.

Ако върху сферата S вземем точка $M_1(0, x_1, x_2)$, лежаща в равнината Ox_1x_2 (фиг. 14.1), то очевидно част от сферата, лежаща в произволна околност на точката M_1, се проектира върху равнината Ox_1x_2 неедноозначно. Аналитично това означава, че ако разглеждаме функцията $F(u, x_1, x_2)=u^2+x_1^2+x_2^2-1$ в произволна околност на точката M_1, то уравнението $F(u, x_1, x_2)=u^2+x_1^2+x_2^2-1=0$ не е еднозначно решимо относно u. Обръщаме внимание на това, че частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}=2u$ на функцията $F(u, x_1, x_2)=u^2+x_1^2+x_2^2-1$ не се анулира в точката M_0 и се анулира в точката M_1. По-нататък ще установим, че за еднозначната решимост на функционалното уравнение $F(u, x_1, x_2, \cdots)=0$ в околност на точката M_0 относно u основна роля играе неанулирането в точката M_0 на частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}$. Между другото ще установим и условия, при които явната функция, представляваща единственото решение на това уравнение, е непрекъсната и диференцируема.

Получените резултати ще бъдат пренесени за случая на неявни функции, определени със система функционални уравнения.

14.1. Съществуване и диференцируемост на неявно зададена функция

14.1.1. Теорема за съществуване и диференцируемост на неявна функция. Ще се уговорим да означаваме пространството на променливите $(u, x_1, x_2, \cdots)$ със символа R, а пространството на променливите $(x_1, x_2, \cdots)$ със символа R'. За краткост на записването и за удобство при геометричното илюстриране ще разгледаме случая на две променливи x_1 и x_2.

Теорема 14.1. *Нека функцията F е диференцируема в някоя околност на точката $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ от пространството R и частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}$ е непрекъсната в точката M_0. Тогава, ако в точката M_0 функцията F се анулира, а частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}$ не се анулира, то за всяко достатъчно малко положително число ε съществува околност на точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ от пространството R', в която има единствена функция $u=u(x_1, x_2)$, удовлетворяваща условието $|u-\overset{\circ}{u}|<\varepsilon$ и която е решение на уравнението*

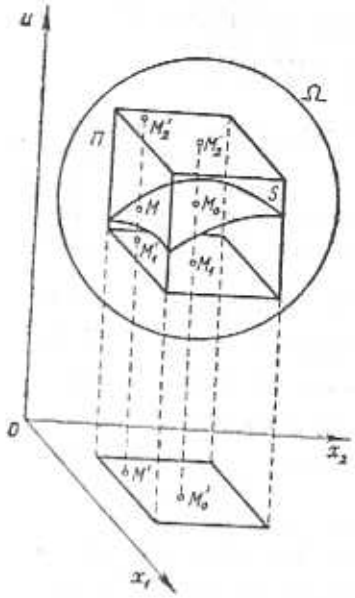
$$F(u, x_1, x_2)=0; \tag{14.1}$$

при това тази функция $u=u(x_1, x_2)$ е непрекъсната и диференцируема в посочената околност на точката M_0'.

Доказателство на теорема 14.1. 1. Най-напред ще докажем, че за достатъчно малко $\varepsilon>0$ в околност на точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ съществува единствена функция $u=u(x_1, x_2)$, която удовлетворява условието $|u-\overset{\circ}{u}|<\varepsilon$ и е решение на уравнението (14.1). За да направим доказателството по-нагледно, ще го придружим с геометрична илюстрация.

Известно е, че уравнението (14.1) определя в пространството R някаква повърхнина S (фиг. 14.2) и понеже $F(M_0)=0$, точката M_0 лежи на тази повърхнина. От геометрична гледна точка еднозначната решимост на уравнението (14.1) относно u означава, че частта от повърхнината S, която лежи в непосредствена близост до точката M_0, се проектира еднозначно върху координатната равнина Ox_1x_2.

За определеност ще смятаме, че частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}$ е положителна в точката M_0. Тогава от непрекъснатостта на производната в точката M_0 и от теоремата за постоянството на зна-



Фиг. 14.2

ка на непрекъснатите функции следва, че съществува околност на точката M_0, в която $\frac{\partial F}{\partial u}$ е положителна. За такава околност можем да вземем кълбо Ω с достатъчно малък радиус и с център в точката M_0. Избираме по-нататък положителното число $\varepsilon>0$ толкова малко, че всяка от точките $M_1(\overset{\circ}{u}-\varepsilon, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ и $M_2(\overset{\circ}{u}+\varepsilon, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ да лежи вътре в кълбото Ω (за това е достатъчно да изберем ε по-малко от радиуса на кълбото Ω). Ще подчертаем, че ε е ограничено отдолу само от нулата и може да бъде избрано произволно малко. Това ще бъде използвано по-нататък.

Разглеждаме функцията $F(u, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ на една променлива в сегмента $\overset{\circ}{u}-\varepsilon\leq u\leq\overset{\circ}{u}+\varepsilon$. От геометрична гледна точка това означава, че разглеждаме функцията на три променливи $F(u, x_1, x_2)$ по отсечката M_1M_2 (вж. фиг. 14.2). Тъй като производната $\frac{\partial F}{\partial u}(u, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ е положителна в сегмента $\overset{\circ}{u}-\varepsilon\leq u\leq\overset{\circ}{u}+\varepsilon$, то функцията $F(u, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ е растяща в този сегмент. Но тогава, понеже тази функция е равна на нула в средата на сегмента (т. е. при $u=\overset{\circ}{u}$), то $F(u, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ има отрицателна стойност в левия край и положителна стойност в десния край на този сегмент, т. е.

$$F(M_1)<0,\ F(M_2)>0.$$

По-нататък разглеждаме функциите $F(\overset{\circ}{u}-\varepsilon, x_1, x_2)$ и $F(\overset{\circ}{u}+\varepsilon, x_1, x_2)$ на двете променливи x_1 и x_2, което на геометричен език означава, че разглеждаме функцията $F(u, x_1, x_2)$ върху две равнини, успоредни на координатната равнина Ox_1x_2, първата от които минава през точката M_1, а втората — през точката M_2. Понеже $F(M_1)<0$, $F(M_2)>0$ и функцията $F(u, x_1, x_2)$ е непрекъсната навсякъде в кълбото Ω, то според теоремата за постоянство на знака на непрекъснатите функции в посочените равнини съществуват такива околности на точките M_1 и M_2, в които функцията F запазва този знак, който има съответно в точките M_1 и M_2. Тези околности могат да се вземат като отворени квадрати с центрове съответно в точките M_1 и M_2 и с достатъчно малка дължина на страната 2δ.

Аналогично фактът, че функцията $F(u, x_1, x_2)$ запазва постоянен знак в тези квадрати, се изразява с неравенствата

$$F(\overset{\circ}{u}+\varepsilon, x_1, x_2)>0,\quad F(\overset{\circ}{u}-\varepsilon, x_1, x_2)<0 \tag{14.2}$$

при $|x_1-\overset{\circ}{x}_1|<\delta$, $|x_2-\overset{\circ}{x}_2|<\delta$.

Избора на дължината на страната на тези квадрати ще подчиним на още едно условие: избираме δ така малко, че и двата квадрата да лежат вътре в кълбото Ω (това очевидно е възможно, защото центровете на квадратите — точките M_1 и M_2, са вътрешни точки за кълбото Ω). При този избор на δ всяка точка от пространството (u, x_1, x_2), координатите на която удовлетворяват неравенствата

$$|x_1-\overset{\circ}{x}_1|<\delta,\ |x_2-\overset{\circ}{x}_2|<\delta,\ |u-\overset{\circ}{u}|<\varepsilon, \tag{14.3}$$

ще лежи вътре в кълбото Ω. От геометрична гледна точка неравенствата (14.3) определят отворен правоъгълен паралелепипед с център в точката M_0 и със страни, успоредни на координатните оси u, x_1, x_2, и с дължини, съответно равни на 2ε, 2δ и 2δ. Този паралелепипед ще означим със символа π. Тъй като паралелепипедът π лежи вътре в кълбото Ω, то навсякъде в паралелепипеда π* производната $\frac{\partial F}{\partial u}$ е положителна. Освен това според неравенствата (14.2) функцията F е отрицателна върху долната основа и положителна върху горната основа на π.

Ще докажем сега, че уравнението (14.1) е еднозначно решимо относно u, ако разглеждаме функцията F само за стойности на u, x_1, x_2, лежащи вътре в паралелепипеда π. Нека $M'(x_1, x_2)$ е произволна точка от пространството R', координатите на която удовлетворяват неравенствата

$$|x_1-\overset{\circ}{x}_1|<\delta,\ |x_2-\overset{\circ}{x}_2|<\delta. \tag{14.4}$$

С други думи, нека $M'(x_1, x_2)$ е произволна точка от равнината Ox_1x_2, лежаща вътре в квадрата с център в точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ и дължини на страните, равни на 2δ. Трябва да се докаже, че за координатите x_1, x_2 на точката M' съществува и при това единствено число u от интервала $\overset{\circ}{u}-\varepsilon<u<\overset{\circ}{u}+\varepsilon$, такова, че

* Включително отворените квадрати, лежащи върху неговите основи.

$F(u, x_1, x_2)=0$. (От геометрична гледна точка това означава, че всяка права, успоредна на оста Ou и пресичаща паралелепипеда π, пресича повърхнината S вътре в паралелепипеда π в една и само в една точка.)

Фиксираме стойности за x_1 и x_2, удовлетворяващи неравенствата (14.4), и разглеждаме функцията $F(u, x_1, x_2)$ на аргумента u в сегмента $\overset{\circ}{u}-\varepsilon \leq u \leq \overset{\circ}{u}+\varepsilon$, т. е. разглеждаме функцията F върху отсечката $M_1'M_2'$, където M_1' и M_2' са точките на пресичане на правата, минаваща през точката $M'(x_1, x_2)$ и успоредна на оста Ou, с основите на паралелепипеда π (вж. фиг. 14.2). Тъй като производната $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x_1, x_2)$ е положителна в сегмента $\overset{\circ}{u}-\varepsilon \leq u \leq \overset{\circ}{u}+\varepsilon$, то функцията $F(u, x_1, x_2)$ расте в този сегмент (т. е. расте върху отсечката $M_1'M_2'$). Но тогава от условието $F(M_1')<0$, $F(M_2')>0$ следва, че вътре в сегмента $\overset{\circ}{u}-\varepsilon \leq u \leq \overset{\circ}{u}+\varepsilon$ съществува една единствена стойност на u, такава, че $F(u, x_1, x_2)=0$ (или геометрично вътре в отсечката $M_1'M_2'$ съществува единствена точка M, лежаща върху повърхнината S).

Нека сега функцията u се дефинира чрез правилото, посредством което на всяка точка $M'(x_1, x_2)$ от околността (14.4) се съпоставя единственото число u от интервала $\overset{\circ}{u}-\varepsilon<u<\overset{\circ}{u}+\varepsilon$, за което $F(u, x_1, x_2)=0$. Така доказахме, че в околността (14.4) съществува единствена функция $u=u(x_1, x_2)$, която удовлетворява условието $|u-u_0|<\varepsilon$ и е решение на уравнението (14.1).

2. Ще докажем сега, че функцията u е непрекъсната във всяка точка $M'(x_1, x_2)$ от околността (14.4). Тъй като за всяка точка $M'(x_1, x_2)$ от околността (14.4) са изпълнени същите условия*, както и за точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$, то достатъчно е да докажем непрекъснатостта на функцията u само в точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$. Трябва да докажем, че за всяко достатъчно малко положително ε съществува такова положително число δ, че за произволни x_1 и x_2, удовлетворяващи неравенствата $|x_1-\overset{\circ}{x}_1|<\delta$, $|x_2-\overset{\circ}{x}_2|<\delta$, да е изпълнено неравенството $|u-\overset{\circ}{u}|<\varepsilon$, където $u=u(x_1, x_2)$, $\overset{\circ}{u}=u(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$. Ако изберем за ε това число, което избрахме по-горе при разглежданията в т. 1, то съществуването на δ се гарантира от неравенствата (14.3). Остава да отбележим, че при разсъжденията в

* Именно условията на всяка точка $M'(x_1, x_2)$ от околността (14.4) да съответствува такава точка $M(u, x_1, x_2)$ от пространството R, че функцията $F(u, x_1, x_2)$ да се анулира в точката M, да е диференцируема в някоя околност на точката M и в тази околност да има различна от нула частна производна $\frac{\partial}{\partial u}$.

т. 1 положителното число ε може да бъде избрано произволно малко (това беше отбелязано в т. 1).

С това непрекъснатостта на функцията u е доказана. Ще запишем условието за непрекъснатост на функцията u в точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ в диференчна форма. Като означим с Δu пълното нарастване на функцията u в точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$, а съответните нараствания на аргументите с Δx_1 и Δx_2, ще получим, че $\Delta u \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0, \\ \Delta x_2 \to 0. \end{cases}$

3. Остава да се докаже диференцируемостта на функцията u във всяка точка $M'(x_1, x_2)$ от околността (14.4). Съгласно забележките, направени в т. 2, достатъчно е да се докаже диференцируемост на функцията u в точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$. За да направим това, ще пресметнем пълното нарастване Δu на функцията u в точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$, съответствуващо на нарастването на аргументите Δx_1 и Δx_2. Понеже $F(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)=0$ и $F(\overset{\circ}{u}+\Delta u, \overset{\circ}{x}_1+\Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2+\Delta x_2)=0$, то пълното нарастване ΔF на функцията F в точката $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$, съответствуващо на нарастването на аргументите Δu, Δx_1 и Δx_2, е равно на нула. Но поради условията за диференцируемост на функцията F в точката $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ това пълно нарастване има вида

$$\Delta F=\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma\right)\Delta u+\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}+\alpha\right)\Delta x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}+\beta\right)\Delta x_2. \tag{14.5}$$

Тук всички частни производни $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ са взети в точката $M_0(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$; α, β и γ клонят към 0 при $\Delta u \to 0$, $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$. От съотношението (14.5) поради това, че $\Delta F=0$, получаваме

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma\right)\Delta u+\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}+\alpha\right)\Delta x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}+\beta\right)\Delta x_2=0. \tag{14.6}$$

Съгласно диференчната форма на условието за непрекъснатост на функцията u в точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$, $\Delta u \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$. Следователно можем да твърдим, че α, β и γ клонят към 0 само при условието $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$.

Според условието на теоремата частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}$ е различна от нула в точката M_0. Тъй като $\gamma \to 0$, при $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, то при достатъчно малки Δx_1 и Δx_2 изразът $\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma$ не

се анулира. В такъв случай можем да разделим на $\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma$ израза във формула (14.6) и да получим

$$\Delta u=\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}+\alpha}{\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma}\right)\Delta x_1+\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}+\beta}{\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma}\right)\Delta x_2. \tag{14.7}$$

От теоремата за граница на частно на две функции можем да твърдим, че

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}+\alpha}{\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}}+\mu,\quad -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}+\beta}{\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial u}}+\nu, \tag{14.8}$$

където μ и ν клонят към 0 при $\Delta x_1\to 0$, $\Delta x_2\to 0$.

Като съпоставим формулите (14.7) и (14.8), окончателно получаваме

$$\Delta u=\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\right)\Delta x_1+\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\right)\Delta x_2+\mu\Delta x_1+\nu\Delta x_2. \tag{14.9}$$

Формула (14.9) доказва диференцируемостта на функцията u в точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$. □

Забележка 1. В условието на теорема 14.1 може да се изпусне изискването за непрекъснатост на частната производна $\frac{\partial F}{\partial x}$ в точката M_0, но тогава трябва да се поиска производната да не се анулира не само в точката M_0, но и в някаква околност на тази точка и да запазва един и същ знак в тази околност.

Забележка 2. Приведеното доказателство се пренася без никакви затруднения за случая на неявни функции, зависещи от произволен краен брой аргументи $x_1, x_2, \ldots, x_n$*. Случаят на два аргумента x_1 и x_2 има само това предимство, че допуска наглядна геометрична интерпретация в пространството (u, x_1, x_2).

14.1.2. Пресмятане на частните производни на функция, зададена неявно. Ще се спрем върху пресмятането на частните производни на неявна функция, зададена чрез уравнението (14.1). Нека са изпълнени условията на теорема 14.1. Тогава за пълното нарастване на функцията $u=u(x_1, x_2)$ е вярно представянето (14.9). Това представяне и теорема 13.9 ни дават право да твърдим, че частните производни на функцията u се определят по формулите

* И по-специално от един аргумент.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}},\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial u}}. \tag{14.10}$$

Аналогични формули са в сила и за случая, когато неявно зададената функция зависи не от два, а от произволен краен брой аргументи $x_1, x_2, \ldots, x_m$. В този случай

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\ (k=1, 2, 3, \ldots, m). \tag{14.11}$$

Ако искаме да осигурим съществуването на частни производни от втори ред за неявно зададената функция u, естествено трябва да засилим изискванията, наложени на функцията F в теорема 14.1, а именно трябва да искаме функцията F да бъде два пъти диференцируема в разглежданата точка. При тези предположения ще се спрем на пресмятането на производни от втори ред.

Ще въведем полезното понятие за пълна частна производна на функция. Да предположим, че е дадена диференцируема функция на три аргумента $\Phi(u, x_1, x_2)$, като единият от тези аргументи u сам е диференцируема функция на другите два аргумента x_1 и x_2. Тогава функцията $\Phi(u, x_1, x_2)$ може да се разглежда като сложна функция на двата аргумента x_1 и x_2. Частните производни на тази сложна функция по x_1 и x_2 ще наричаме пълни частни производни на функцията $\Phi(u, x_1, x_2)$ по x_1 и x_2 и ще ги означаваме със символите $\frac{D\Phi}{Dx_1}$ и $\frac{D\Phi}{Dx_2}$. По правилото за диференциране на сложна функция получаваме следните формули за тези пълни частни производни:

$$\frac{D\Phi}{Dx_1}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\quad \frac{D\Phi}{Dx_2}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}.$$

Ще преминем към пресмятане на частните производни от втори ред на неявно зададена функция. За определеност да пресметнем производната $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}$. Като диференцираме първата от формулите (14.10) по x_2 и вземем пред вид, че всяка от частните производни $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ зависи от три аргумента u, x_1, x_2, първият от които сам е функция на x_1 и x_2, ще имаме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{D\left(-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}\right)}{Dx_2} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{D\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right)}{Dx_2} + \dfrac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\dfrac{D\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)}{Dx_2}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)^2}$$

$$= \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \dfrac{\partial F}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial x_2}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)^2}.$$

Като заместим в получената формула израза $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, определен от втората от формулите (14.10), получаваме окончателно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial u}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial u}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)^3}. \tag{14.12}$$

Съвсем аналогично пресмятаме частните производни $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$. Също така могат да се пресметнат и частните производни от трети и по-висок ред.

Пример:

Ще пресметнем частната производна $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ на функцията, зададена неявно с уравнението

$$u^2 + x_1^4 + x_2^4 - 1 = 0.$$

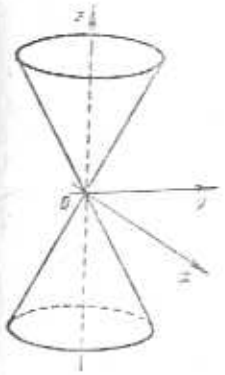
Като използваме равенството (14.10), получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{2x_1^3}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{2x_2^3}{u}.$$

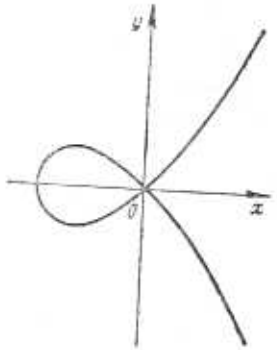
По-нататък получаваме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{D\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)}{Dx_2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{2x_1^3}{u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{2x_1^3}{u^2}\,\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{-4x_1^3 x_2^3}{u^3}.$$

14.1.3. Особени точки на повърхнина и равнинна крива. Ще разгледаме повърхнина S (равнинна крива L), определена в дадена правоъгълна декартова координатна система с уравнението $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$). За функцията F ще предполагаме, че тя има непрекъснати частни производни от първи ред по всичките си аргументи навсякъде в някоя околност на произволна точка от повърхнината S (кривата L). *Дадена точка от повърхнината S (кривата L) ще наричаме* ***особена,*** *ако в тази точка се анулират всички частни производни от първи ред на функцията F.* В околност на особена точка не може да се приложи теорема 14.1 към уравнението $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$), т. е. не може да се твърди, че това уравнение е решимо дори относно една от променливите x, y, z (x, y). По такъв начин частта от повърхнината S (кривата L) около особената точка може и да не допуска еднозначно проектиране върху нито една от координатните равнини (координатните оси). Структурата на повърхнината S (кривата L) в околност на особена точка може да бъде много сложна и изисква допълнително изследване.



Фиг. 14.3



Фиг. 14.4

Точките от повърхнината S (кривата L), които не са особени, е прието да се наричат ***обикновени.*** В околност на обикновена точка е в сила теорема 14.1, така че участък от повърхнината S (кривата L) от околност на обикновена точка допуска еднозначно проектиране поне върху една от координатните равнини (от координатните оси), което съществено улеснява изследването в такъв участък.

Примери:

1. Да се намерят особените точки на кръговия конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Понеже $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, то $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -2z$. Единствената особена точка е началото на координатната система. Добре е известно, че в околност на тази точка повърхнината на конуса не може еднозначно да се проектира нито върху една от координатните равнини (вж. фиг. 14.3).

2. Ще намерим особените точки на равнинната крива $x^2 - y^2 + x^3 = 0$.

Тъй като $\frac{\partial F}{\partial x}=2x+3x^2=x(2+3x)$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-2y$, то и двете частни производни $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ се анулират в двете точки $(0, 0)$ и $(-2/3, 0)$. От тези две точки само първата принадлежи на разглежданата крива, т. е. е особена. Като построим кривата $x^2-y^2+x^3=0$ в околност на точката $(0, 0)$, се убеждаваме, че тази точка е точка на самопресичане на графиката (фиг. 14.4). Ясно е, че в околност на тази точка кривата не може еднозначно да се проектира нито върху оста Ox, нито върху оста Oy.

14.2. Неявни функции, определени от система функционални уравнения

14.2.1. Теорема за решимост на система от функционални уравнения. В предишния параграф разгледахме въпроса за съществуване и диференцируемост на неявна функция, определена посредством едно функционално уравнение. В този параграф ще разгледаме аналогични въпроси за съвкупност от m неявни функции, определени посредством система функционални уравнения.

И така предполагаме, че m функции

$$
(14.13)\qquad
\begin{aligned}
u_1&=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
u_2&=\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_m&=\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

се търсят като решение на система от m функционални уравнения

$$
(14.14)\qquad
\begin{aligned}
&F_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,\\
&F_2(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_m(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0.
\end{aligned}
$$

Ще разгледаме въпроса за решимост на системата функционални уравнения (14.14) относно $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Под термина „решение на система (14.14)" ще разбираме съвкупност от такива m функции (14.13), че при заместването им в системата (14.14) всички уравнения на тази система да се превръщат в тъждества. Това решение ще наричаме непрекъснато и диференцируемо в някоя област D на изменение на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ако

всяка от функциите (14.13) е непрекъсната и диференцируема в областта D. Ще означаваме със символа R пространството на $m+n$ променливи $u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$, а със символа R' — пространството на n-те променливи $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Разглеждаме m-те функции $F_1, F_2, \ldots, F_m$ в лявата страна на система (14.14) и образуваме следната детерминанта от частните производни на тези функции.

$$
(14.15)\qquad
\Delta=\begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m}\\
\frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m}
\end{vmatrix}.
$$

Детерминантата от вида (14.15), която вече срещнахме в 13.7, ще наричаме ***детерминанта на Якоби**** (или накратко ***якобиан***) на функциите $F_1, F_2, \ldots, F_m$ по променливите $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и кратко ще я означаваме със символа

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}.$$

В сила е следното забележително твърдение:

Теорема 14.2 (обобщение на теорема 14.1). *Нека m-те функции*

$$
(14.16)\qquad
\begin{aligned}
&F_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&F_2(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F_m(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

са диференцируеми в някоя околност на точката $M_0(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \ldots, \overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ на пространството R и частните производни на тези функции по променливите $u_1, u_2, \ldots, u_m$ са непрекъснати в точката M_0. Тогава, ако в точката M_0 всички функции (14.16) се анулират, а якобианът $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$ е различен от нула, то за достатъчно малки положителни числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ може да се намери такава околност на точката $M_0^*(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ от пространството R', че за тази околност да съществува, и то единствена система от m функции (14.13), които удовлетворяват

* Карл Густав Яков Якоби — немски математик (1804—1851).

условията $|u_1-\overset{\circ}{u}_1|<\varepsilon_1, |u_2-\overset{\circ}{u}_2|<\varepsilon_2, \ldots, |u_m-\overset{\circ}{u}_m|<\varepsilon_m$ *и са решение на системата уравнения* (14.14), *при това тези функции са непрекъснати и диференцируеми в посочената околност на точкат* M_0'.

Доказателство. При $m=1$ теоремата е вече доказана. Тя съвпада с теорема 14.1, тъй като в този случай якобианът (14.15) е равен на частната производна $\frac{\partial F_1}{\partial u_1}$.

Да предположим, че теорема 14.2 е вярна за системи от $m-1$ функционални уравнения, и да я докажем за система от m функционални уравнения. Понеже по предположение якобианът

$$(14.17)\qquad \Delta=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

е различен от нула в точката M_0, то поне един от минорите от $(m-1)$-ви ред на този якобиан е различен от нула в точката M_0. Без да ограничаваме общността, можем да смятаме, че в точката M_0 ограденият с пунктир минор в горния ляв ъгъл е различен от нула. Тогава според индуктивното предположение първите $m-1$ уравнения на системата (14.14) са решими относно $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$. По-точно за достатъчно малки положителни числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ може да се намери такава околност на точката $M_0''(\overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$, от пространството R' на променливите $(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, че в тази околност са определени $m-1$ функции

$$(14.18)\qquad \begin{aligned} u_1&=\Phi_1(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{m-1}&=\Phi_{m-1}(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

които удовлетворяват условията $|u_1-\overset{\circ}{u}_1|<\varepsilon_1, |u_2-\overset{\circ}{u}_2|<\varepsilon_2, \ldots, |u_{m-1}-\overset{\circ}{u}_{m-1}|<\varepsilon_{m-1}$ и при тези условия са единствените диференцируеми решения на първите $m-1$ уравнения на (14.14).

Заместваме намерените функции (14.18) в лявата страна на последното от уравненията (14.14). Тогава лявата страна на това уравнение се превръща във функция, зависеща само от $u_m, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$(14.19)\qquad F_m(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)=F_m(\Phi_1(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_{m-1}(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n), u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)=\psi(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

По такъв начин от последното уравнение на системата (14.14) получаваме уравнението

$$(14.20)\qquad \psi(u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0.$$

Съгласно равенството (14.19) функцията F_m може да се разглежда като сложна функция на своите аргументи. Тогава, като използваме теоремата за диференцируемост на сложна функция, можем да твърдим, че функцията ψ е диференцируема в някоя околност на точката $M_0''(\overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ от пространството R''. Равенството (14.19) и последното от уравненията на (14.14) показват, че $\psi(\overset{\circ}{u}_m, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)=0$. Затова, за да докажем, че за уравнението (14.20) е приложима теорема 14.1 и че това уравнение е решимо относно u_m, е достатъчно да установим, че частната производна $\frac{\partial\psi}{\partial u_m}$ е непрекъсната и различна от нула в точката M_0''. Ще пресметнем тази частна производна. Заместваме в първите $m-1$ уравнения на системата (14.14) функциите (14.18), които са решение на тези уравнения, и диференцираме получените тъждества по u_m. Така намираме

$$(14.21^1)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_m}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial u_m}+\frac{\partial F_1}{\partial u_m}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(14.21^{m-1})\qquad \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_m}+\cdots+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}}\cdot\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial u_m}+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m}=0.$$

По-нататък диференцираме по u_m равенството (14.19). Получаваме

$$(14.21^m)\qquad \frac{\partial F_m}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_m}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}}\cdot\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial u_m}+\frac{\partial F_m}{\partial u_m}=\frac{\partial\psi}{\partial u_m}.$$

Умножаваме равенствата (14.21^1) — (14.21^m) със съответните адюнгирани количества $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ на елементите на последния стълб на якобиана (14.17) и ги сумираме. Получаваме

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_m}\left[\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_k} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_k} + \cdots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial u_k}\right]$$

$$+\left(\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_m} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_m} + \cdots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial u_m}\right) = \Delta_m \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u_m}.$$

Тъй като сумата от произведенията на елементите на даден стълб на детерминантата със съответните адюнгирани количества на елементите на този (на друг) стълб е равна на стойността на детерминантата (на нула), то изразите в средните скоби са равни на нула, а изразът в малките скоби е равен на якобиана (14.17).

Така получаваме, че

$$\Delta = \Delta_m \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u_m}. \tag{14.22}$$

Тук символът Δ означава якобиана (14.17), а Δ_m — адюнгираното количество на последния елемент от последния стълб, което съвпада с минора, ограден с пунктир и по предположение различен от нула в точката M_0. Като разделим равенството (14.22) на Δ_m, намираме окончателно

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_m} = \frac{\Delta}{\Delta_m}. \tag{14.23}$$

Равенството (14.23), изпълнено в точката M_0'', доказва непрекъснатостта на частната производна $\frac{\partial \psi}{\partial u_m}$ в точката M_0'' (тъй като Δ и Δ_m са съставени от частни производни на функциите (14.16) по $u_1, u_2, \ldots, u_m$, които са непрекъснати в точката M_0). Освен това от формулата (14.23) следва, че $\frac{\partial \psi}{\partial u_m}$ е различна от нула в точката M_0 (понеже якобианът Δ е различен от нула в точката M_0). С това доказахме, че към уравнението (14.20) може да се приложи теорема 14.1. Съгласно тази теорема за достатъчно малко положително число ε_m може да се намери такава околност на точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ от пространството R', че навсякъде в тази околност да е дефинирана функцията

$$u_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{14.24}$$

която удовлетворява условието $|u_m - \overset{\circ}{u}_m| < \varepsilon_m$ и при наличие на това условие е единственото непрекъснато и диференцируемо решение на уравнението (14.20). Тъй като функциите (14.20) са решение на първите $m-1$ уравнения (14.14) при произволни u_m,

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ от околност на точката M_0'', то като заместим намерената функция (14.24) в (14.18), получаваме функции, зависещи само от променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$u_1 = \Phi_1(\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$u_{m-1} = \Phi_{m-1}(\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

(Тези функции означихме със символите $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$.) Теоремата за диференцируемост на сложна функция дава право да се твърди, че всяка от функциите $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ е диференцируема в околност на точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$. Така доказахме, че m-те функции

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{14.25}$$

удовлетворяват в околност на точката M_0' условията $|u_1 - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_1, \ldots, |u_m - \overset{\circ}{u}_m| < \varepsilon_m$ и при наличието на тези условия са непрекъснато и диференцируемо в някоя околност на точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ решение на системата (14.14). Остава да се докаже, че функциите (14.25) са единствено решение на системата (14.14), удовлетворяващо условията $|u_1 - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_1, \ldots, |u_m - \overset{\circ}{u}_m| < \varepsilon_m$ (при достатъчно малки положителни $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$).

Допускаме, че освен функциите (14.25) съществуват още функции

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \hat{\varphi}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \hat{u}_2 &= \hat{\varphi}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \hat{u}_m &= \hat{\varphi}_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{14.25'}$$

които са също решение на системата (14.14) и удовлетворяват условията $|\hat{u}_1 - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_1, \ldots, |\hat{u}_m - \overset{\circ}{u}_1| < \varepsilon_m$.

Тогава съгласно индуктивното предположение първите $m-1$ функции (14.25) ще представляват при даденото $u_m = \hat{u}_m$ единственото диференцируемо решение на системата от първите $m-1$ уравнения на (14.14). Но при дадено u_m единственото решение на тази система се дава с равенствата (14.18), така че са изпълнени съотношенията

$$
(14.18')\qquad
\begin{aligned}
\hat{u}_1 &= \Phi_1(\hat{u}_m, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\hat{u}_{m-1} &= \Phi_{m-1}(\hat{u}_m, x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

в които $\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1}$ са същите функции, както в (14.18).

В такъв случай последното уравнение на (14.14) и съотношението (14.19) позволяват да се твърди, че $\hat{u}_m$ е единственото решение на уравнението (14.20), т. е. $\hat{u}_m = u_m$. От равенството $\hat{u}_m = u_m$ и съотношенията (14.18) и (14.18′) веднага следва, че $\hat{u}_1 = u_1$, $\hat{u}_2 = u_2$, $\ldots$, $\hat{u}_{m-1} = u_{m-1}$. □

14.2.2. Пресмятане на частните производни на функции, неявно определени посредством система функционални уравнения. В тази точка ще предполагаме, че са изпълнени условията на теорема 14.2, и ще пресметнем частните производни на функциите (14.25). Заместваме функциите (14.25) в системата уравнения (14.14), чието решение са точно тези функции, и диференцираме получените тъждества по x_l $(l = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Намираме

$$
(14.26)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial u_m}\cdot\frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial F_1}{\partial x_l} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial F_m}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial u_m}\cdot\frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial F_m}{\partial x_l} = 0.
\end{aligned}
$$

Уравненията (14.26) образуват линейна система уравнения относно m-те неизвестни $\frac{\partial u_1}{\partial x_l}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_l}$. Детерминантата на тази система — якобианът (14.17), е различна от нула в околност на точката M_0. Следователно системата (14.26) има единствено решение, което се дава с формулите на Крамер:

$$
\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = -\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_{k-1}, x_l, u_{k+1}, \ldots, u_m)} \Big/ \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}.
$$

Изразите за частните производни от втори и по-висок ред могат да се получат чрез диференциране на тези формули.

14.2.3. Взаимно еднозначно изображение на две множества от m-мерното пространство. Разглеждаме в някоя околност на точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ функциите

$$
(14.27)\qquad
\begin{aligned}
u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m),\\
u_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_m).
\end{aligned}
$$

Тези функции осъществяват изображение на споменатата околност на точката M_0 върху някое множество $\{N\}$ от m-мерното пространство на променливите $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Това изображение се нарича взаимно еднозначно, ако на всяка точка от разглежданата околност на точката M_0 съответствува само една точка от множеството $\{N\}$ и всяка точка на множеството $\{N\}$ съответствува само на една точка от споменатата околност на точката M_0.

От теорема 14.2 непосредствено следва твърдението:

Ако функциите (14.27) са диференцируеми в околност на точката M_0, всички частни производни от първи ред са непрекъснати в точката M_0 и якобианът $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$ е различен от нула в тази точка, то функциите (14.27) осъществяват взаимно еднозначно изображение на някоя околност на точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ в някоя околност на точката $N_0(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \ldots, \overset{\circ}{u}_m)$, където $u_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$.

Наистина съотношенията (14.27) могат да се разглеждат като система функционални уравнения относно $x_1, x_2, \ldots, x_m$, за която са изпълнени условията на теорема 14.2. Но тогава навсякъде в някоя околност на точката $M_0(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \ldots, \overset{\circ}{u}_m)$ тази система ще има единствено решение

$$
(14.27')\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= \psi_1(u_1, u_2, \ldots, u_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m &= \psi_m(u_1, u_2, \ldots, u_m).
\end{aligned}
$$

Очевидно функциите (14.27′) осъществяват обратното изображение.

Ще отбележим, че при условията на формулираното твърдение както функциите (14.27), осъществяващи правото изображение, така и функциите (14.27′), осъществяващи обратното изображение, са непрекъснати. Взаимно еднозначно изображение с тези свойства се нарича ***хомеоморфно***.

Освен това при условията на формулираното твърдение функциите (14.27), осъществяващи правото изображение, и функциите (14.27′), осъществяващи обратното изображение, са диференцируеми. Взаимно еднозначно изображение с тези свойства се нарича ***дифеоморфизъм.***

14.3. Зависимост на функции

14.3.1. Понятие за зависимост на функции. Достатъчно условие за независимост. Нека m-те функции на едни и същи n променливи

$$
(14.28)\qquad
\begin{aligned}
u_1&=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
u_2&=\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_m&=\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

са дефинирани и диференцируеми в някоя отворена n-мерна област D.

Ще казваме, че една от тези функции — например u_k, зависи в областта D от останалите функции, ако за всички точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от областта D имаме

$$
(14.29)\qquad u_k=\Phi(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_m),
$$

където Φ е функция, дефинирана и диференцируема в съответната област на изменение на своите аргументи. Функциите $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ще наричаме зависими в областта D, ако една от тези функции (независимо коя) зависи от останалите в областта D.

Ако не съществува такава диференцируема функция Φ, че за всички точки от областта D да е изпълнено тъждество от вида (14.29), функциите $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ще наричаме независими в областта D.

Примери:

1. Лесно е да се убедим, че трите функции на четири променливи

$$
\begin{aligned}
u_1&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,\\
u_2&=x_1+x_2+x_3+x_4,\\
u_3&=2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)
\end{aligned}
$$

са зависими във всяка област D на четиримерното пространство, тъй като за всяка точка (x_1, x_2, x_3, x_4) от тази област $u_1=u_2^2-u_3$.

2. Ще покажем, че двете функции на двете променливи $u_1=x+y$ и $u_2=x-y$ са независими във всяка област D на равнината x, y, съдържаща началото на координатната система. Очевидно функцията u_1 има една и съща стойност нула върху правата $x+y=0$, минаваща през началото (фиг. 14.5). По върху тази права функцията u_2 приема различни стойности $u_2=2x$. Затова върху тази част от правата, която лежи вътре в областта D, u_2 очевидно не зависи от u_1. Съвършено аналогично се до-

казва, че върху лежащата вътре в областта D част от правата $x-y=0$ имаме $u_2=0$, $u_1=2x$ и следователно u_1 не зависи от u_2.

Забележка. Линейната зависимост на функции е частен случай от зависимост на тези функции, тъй като, ако функциите $u_1, u_2, \ldots, u_m$ са линейно зависими в областта D, те са зависими в тази област. Обратното обаче не е вярно. Съществуват функции, зависими в областта D, които не са линейно зависими в D (например функциите от пример 1).

Теорема 14.3 (достатъчно условие за независимост на функции). *Нека m-те функции на $n\geqq m$ променливи*

$$
\begin{aligned}
u_1&=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_m&=\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

са дефинирани и диференцируеми в околност на точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m, \overset{\circ}{x}_{m+1}, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$. Тогава, ако якобианът на тези функции по които и да е m променливи е различен от нула в точката M_0, тези функции са независими в някоя околност на точката M_0.

Доказателство. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че в точката M_0 е различен от нула якобианът

$$
(14.30)\qquad \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}.
$$

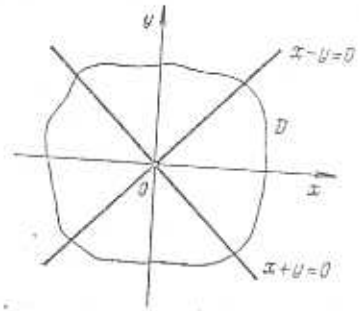
Ще докажем теоремата с допускане на противното. Да предположим, че функциите $u_1, u_2, \ldots, u_m$ са зависими в някоя околност на точката M_0, т. е. една от тези функции, например u_k, за всички точки от тази околност се представя във вида

$$
u_k=\Phi(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_m),
$$

където Φ е някоя диференцируема функция. Като използваме правилото за диференциране на сложна функция, ще пресметнем производните на функцията u_k по всяка от променливите x_l $(l=1, 2, \ldots, m)$. За производните получаваме

$$
(14.31)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial u_k}{\partial x_l}&=\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_l}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k-1}}\cdot\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_l}\\
&+\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k+1}}\cdot\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_l}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial u_m}\cdot\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\\
&(l=1, 2, 3, \ldots, m).
\end{aligned}
$$

Формулите (14.31), разгледани за всяко $l=1, 2, 3, \ldots, m$ в точката M_0, показват, че k-тият ред на якобиана (14.30) е линейна комбинация на останалите редове с коефициенти съответно



Фиг. 14.5

$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial u_{k-1}}, \frac{\partial\Phi}{\partial u_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial u_m}$. Но в такъв случай якобианът (14.30) е равен на нула в точката M_0, а това противоречи на условията на теоремата.

Пример:

Разгледаните по-рано две функции $u_1=x+y$ и $u_2=x-y$ са независими в околност на всяка точка $M(x, y)$, тъй като якобианът $\frac{D(u_1, u_2)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$ навсякъде.

14.3.2. Функционални матрици и тяхното приложение. Отново разглеждаме m-те функции на n променливи (14.28):

$$
(14.28)\qquad
\begin{aligned}
u_1&=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
u_2&=\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_m&=\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}
$$

Този път ще предполагаме, че функциите (14.23) са дефинирани и диференцируеми в някоя околност на точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ и частните им производни от първи ред са непрекъснати в самата точка M_0.

Образуваме следната функционална матрица от частните производни на функциите (14.28):

$$
(14.32)\qquad
\begin{Vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}
\end{Vmatrix},
$$

съдържаща m реда и n стълба.

В сила е следното твърдение:

Теорема 14.4. *Нека за функционалната матрица (14.32) имаме: 1) някой минор от r-ти ред е различен от нула в точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$; 2) всички минори от $(r+1)$-ви ред са равни на нула в някоя околност на точката M_0.* Тогава r-те функции, съответстващи на този минор от r-ти ред, са независими в околност на точката M_0, а всяка от останалите функции зависи от тези r функции в разглежданата околност на точката M_0.*

Доказателство. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че е различен от нула в точката M_0 минорът в левия горен ъгъл на матрицата (14.32), т. е. различна от нула е детерминантата

$$
(14.33)\qquad
\begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_r}\\
\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_r}
\end{vmatrix}.
$$

Тогава независимостта на функциите $u_1, u_2, \ldots, u_r$ в околност на точката M_0 следва веднага от теорема 14.3. Остава да докажем, че всяка от функциите $u_{r+1}, \ldots, u_m$** в околност на точката M_0 зависи от функциите $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Ще докажем например, че функцията u_{r+1} зависи в околност на точката M_0 от $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Разглеждаме първите r функции от (14.28). Ако означим с $\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \ldots, \overset{\circ}{u}_r$ числата $\overset{\circ}{u}_1=\varphi_1(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n), \ldots, \overset{\circ}{u}_r=\varphi_r(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$, то навсякъде в някоя околност на точката $N_0(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2, \ldots, \overset{\circ}{u}_r, \overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ на $(n+r)$-мерното пространство на променливите $(u_1, u_2, \ldots, u_r, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ първите r

* Когато $r=\min(m, n)$, условието 2) отпада.
** Предполага се, че $m>r$.

функции (14.28) са единственото диференцируемо решение на следната система уравнения*:

$$
(14.34)\quad
\begin{aligned}
F_1(u_1, u_2, \ldots, u_r, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - u_1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F_r(u_1, u_2, \ldots, u_r, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) - u_r = 0.
\end{aligned}
$$

От друга страна, понеже якобианът

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_r)},$$

съвпадащ с минора (14.33), е различен от нула в точката N_0, то системата (14.34) в околност на тази точка може еднозначно да се реши спрямо $x_1, x_2, \ldots, x_r$. С други думи, навсякъде в достатъчно малка околност на точката N_0 системата (14.34) има единствено и диференцируемо решение

$$
(14.35)\quad
\begin{aligned}
x_1 &= \psi_1(u_1, u_2, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_r &= \psi_r(u_1, u_2, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n).
\end{aligned}
$$

Да подчертаем, че равенствата (14.35) и първите r равенства на (14.28) са еквивалентни в околност на точката N_0. По-специално, ако заместим $x_1, x_2, \ldots, x_r$, определени от (14.35), в първите r равенства на (14.28), то тези равенства ще се обърнат в тъждества относно $x_{r+1}, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r$. Диференцирайки тези тъждества по променливите x_l $(l = r+1, r+2, \ldots, n)$, като вземем пред вид, че $u_1, u_2, \ldots, u_r$ не зависят от $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, ще получим

$$(14.36^1)\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial\psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_l} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(14.36^r)\quad \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial\psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_l} = 0.$$

Ще отбележим, че равенствата (14.36^1)—(14.36^r) са изпълнени за всички стойности на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ от някоя околност на точката M_0.

За да се убедим, че функцията u_{r+1} в някоя околност на точката M_0 зависи от $u_1, u_2, \ldots, u_r$, заместваме $x_1, x_2, \ldots, x_r$,

* Наистина в точката N_0 всички функции $F_1, F_2, \ldots, F_r$ се анулират, а якобианът $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_r)} = (-1)^r \neq 0$, така че са изпълнени условията на теоремата 14.2.

определени от (14.35), в $(r+1)$-вото равенство на (14.28). Така u_{r+1} става функция на аргументите $u_1, u_2, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$, тъй като

$$
\begin{aligned}
u_{r+1} - \varphi_{r+1}(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) &= \varphi_{r+1}(\psi_1(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \ldots, \psi_r(u_1, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), x_{r+1}, \ldots, x_n)\\
&= \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

тази функция означаваме със символа Φ). Остава да се докаже, че за всички стойности на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ от достатъчно малка околност на точката M_0 функцията Φ не зависи от $x_{r+1}, \ldots, x_n$. За това е достатъчно да покажем, че за всички $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от достатъчно малка околност на точката M_0 са изпълнени равенствата

$$(14.37)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_l} = 0 \quad (l = r+1, r+2, \ldots, n).$$

Диференцираме функцията Φ по променливите x_l $(l = r+1, r+2, \ldots, n)$ като сложна функция. Така получаваме

$$(14.36^{r+1})\quad \frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial\psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_l} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_l}.$$

Разглеждаме следния минор от $(r+1)$-ви ред на матрицата (14.32)

$$(14.38)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_r} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_l}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_r} & \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_l}\\ \dfrac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_l} \end{vmatrix}.$$

Според условието на теоремата този минор е равен на нула в околност на точката M_0. Умножаваме равенствата (14.36^1) — (14.36^{r+1}) съответно с адюнгираните количества $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r, \Delta_{r+1}$ на елементите на последния стълб на минора (14.38) и ги събираме. Понеже сумата от произведенията на елементите на даден стълб и адюнгираните количества на елементите от този (друг) стълб е равна на детерминантата (е равна на нула), получаваме*

$$(14.39)\quad \Delta = \frac{\partial\Phi}{\partial x_l}\Delta_{r+1}.$$

* Тук повтаряме разсъжденията, подробно описани при доказателството на теорема 14.2.

В равенството (14.39) със символа Δ е означен минорът (14.38), който е равен на нула навсякъде в околност на точката M_0, а адюнгираното количество Δ_{r+1}, съвпадащо с минора (14.33), е различно от нула в точката M_0 и следователно и в някоя околност на тази точка.* От равенството (14.39) заключаваме, че навсякъде в някоя околност на точката M_0 е в сила неравенството (14.37). □

Пример:

Ще се върнем към изследване на зависимостта на функциите

$$u_1=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,$$

$$u_2=x_1+x_2+x_3+x_4,$$

$$u_3=2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4).$$

Функционалната матрица (14.32) има вида

$$\begin{Vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2(x_2+x_3+x_4) & 2(x_1+x_3+x_4) & 2(x_1+x_2+x_4) & 2(x_1+x_2+x_3) \end{Vmatrix}.$$

Лесно се вижда, че всички детерминанти от 3-ти ред са тъждествено равни на нула, а във всяка точка на пространството (x_1, x_2, x_3, x_4), чиито четири координати x_1, x_2, x_3, x_4 не съвпадат, поне една от детерминантите от втори ред

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

е различна от нула. Следователно в околност на всяка такава точка u_1 и u_2 са независими, а u_3 зависи от u_1 и u_2.

14.4. Условен екстремум

14.4.1. Понятие за условен екстремум. В 13.6 се занимахме с намирането на локални екстремуми на функции, аргументите на които не са подчинени на никакви допълнителни условия.

Често се срещат задачи за намиране на екстремум на функции при условие, че аргументите удовлетворяват някои допълнителни връзки. Екстремуми от този вид ще наричаме ***условни*** за разлика от (безусловните) екстремуми, изучени в 13.6.

* Понеже всички частни производни, влизащи в минора (14.33), са непрекъснати в точката M_0, то и минорът (14.33) е непрекъснат в точката M_0. Но тогава съгласно теоремата за постоянството на знака на непрекъснатата функция този минор е различен от нула не само в точката M_0, но и в някоя нейна околност.

Ще дадем пример на задача за търсене на условен екстремум: Да се намери екстремумът на функцията $u=x^2+y^2$ при условие, че аргументите на тази функция удовлетворяват връзката $x+y-1=0$. Следователно екстремумът на функцията $u=x^2+y^2$ се търси не върху цялата равнина Oxy, а само върху правата $x+y-1=0$. За решаването на поставената задача заместваме в израза на функцията $u=x^2+y^2$ променливата y, определена от връзката $x+y-1=0$. По такъв начин свеждаме поставената задача към задача за търсене на безусловен екстремум на функцията $u=2x^2-2x+1$.

Този екстремум се намира лесно: тъй като $u'=4(x-1/2)$, $u''=4$, то функцията $u=2x^2-2x+1$ има минимум $u=1/2$ при $x=1/2$, така че функцията $u=x^2+y^2$ при условие $x+y-1=0$ има условен минимум $u=1/2$ в точката $(1/2, 1/2)$. Ще отбележим, че безусловният минимум на функцията $u=x^2+y^2$ се достига в точката $(0, 0)$ и е $u=0$. Впрочем даже и от нагледни съображения (фиг. 14.6) е очевидно, че минимумът на функцията $u=x^2+y^2$ (графиката на която е ротационен параболоид) върху цялата равнина Oxy не съвпада с нейния минимум върху правата $x+y-1=0$.

Ще минем към общата постановка на задачата за намиране на условен екстремум. Нека се търси екстремумът на функцията на $m+n$ променливи

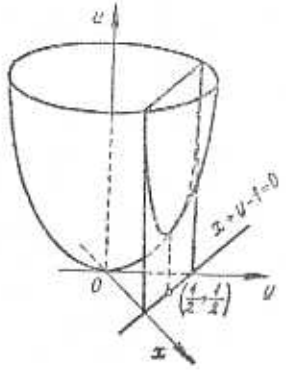
$$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) \tag{14.40}$$

при наличие на m ограничения от вида

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)=0, \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)=0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)=0. \end{aligned} \tag{14.41}$$

Най-напред ще уточним понятието условен екстремум на функцията (14.40) при наличие на връзките (на ограниченията) (14.41). Ще казваме, че функцията (14.40) при наличие на връзките (14.41) има условен максимум (минимум) в точката $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_1, \ldots, \overset{\circ}{y}_m)$, координатите на която удовлетворяват връзките (14.41), ако съществува такава околност на точката M_0, че стойността на функцията (14.40) в точката M_0 е най-голяма (най-малка) измежду стойностите ѝ във всички точки от околността, координатите на които удовлетворяват връзките (14.41).

За намиране на условния екстремум на функцията (14.40) при ограниченията (14.41) ще предположим, че функциите от лявата страна на равенствата на (14.41) са диференцируеми в някоя околност на разглежданата точка M_0, като в самата точка M_0 частните производни на функцията по $y_1, y_2, \ldots, y_m$ са непрекъснати и якобианът



Фиг. 14.6

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \tag{14.42}$$

е различен от нула.

В този случай съгласно теорема 14.2 за достатъчно малки положителни числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ съществува такава околност на точката $M_0'(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n)$ от пространството на променливите $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, че навсякъде в тази околност са дефинирани m-те функции

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{14.43}$$

които удовлетворяват условията $|y_1 - \overset{\circ}{y}_1| < \varepsilon_1, \ldots, |y_m - \overset{\circ}{y}_m| < \varepsilon_m$ и са при тези условия единствено и диференцируемо решение на системата (14.41). Като заместим намерените функции (14.43) в (14.40), свеждаме въпроса за съществуване на условен екстремум в точката M_0 за функцията (14.40) при наличие на ограниченията (14.41) до въпроса за съществуване на безусловен екстремум в точката M_0' на сложната функция на аргументите $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} u &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{14.44}$$

Въпросът за съществуване на безусловен екстремум на функцията (14.44) може да бъде решен с методите, дадени в 13.6.

Изложената обща схема за свеждане на условен екстремум към безусловен беше реализирана в разгледания по-горе частен пример. Ще се постараем сега, без да прибягваме до решаване на системата (14.41), да установим поне необходими условия за съществуване на условен екстремум в точката M_0. И така нека функцията (14.40) е диференцируема в точката M_0 и има в тази точка условен екстремум при ограничения (14.41), или (все едно) функцията (14.44) има в точката M_0' безусловен екстремум. Съгласно установеното в 13.6 необходимото условие за безусловен екстремум на функцията u в точката M_0' е анулирането в тази точка на диференциала на функцията

$$du = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n, \tag{14.45}$$

тъждествено относно $dx_1, \ldots, dx_n$. Вследствие инвариантността на формата на първия диференциал и равенствата (14.44) формулата (14.45) може да се запише във вида

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_m} dy_m = 0. \tag{14.46}$$

В тази формула всички частни производни са взети в точката M_0.) В равенството (14.46) $dy_1, \ldots, dy_m$ са диференциали на функциите (14.43), така че равенството (14.46) не е тъждествено относно $dy_1, \ldots, dy_m$. Да предположим, че в уравненията (14.41) сме заместили функциите (14.43) от решението на системата (14.41). Тогава уравненията (14.41) се обръщат в тъждества и като ги диференцираме, получаваме

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0. \end{cases} \tag{14.47}$$

Тъй като якобианът (14.42) по предположение е различен от нула в точката M_0, то от линейната система (14.47) $dy_1, \ldots, dy_m$ могат да се изразят като линейни функции на $dx_1, \ldots, dx_n$. Ако намерим тези изрази и ги заместим в (14.46) и направим приведение на членовете, съдържащи $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, ще получим

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n = 0, \tag{14.48}$$

където с $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са означени никакви рационални функции на частните производни на $f, F_1, F_2, \ldots, F_m$ в точката M_0.

Тъй като в равенството (14.48) фигурират само диференциали на независимите променливи, заключаваме, че $A_1=0,\ A_2=0,\ \ldots,\ A_n=0$. Като присъединим към тези равенства m-те ограничения (14.41), получаваме необходимото условие за съществуване на условен екстремум на функцията (14.40) при ограниченията (14.41) във вида

$$A_1=0,\ \ldots,\ A_n=0,\ F_1=0,\ \ldots,\ F_m=0. \tag{14.49}$$

Равенствата (14.49) представляват система от $m+n$ уравнения за определяне на $(m+n)$-те координати на точката на възможния екстремум.

14.4.2. Метод на неопределените множители на Лагранж. При изложения по-рано метод за намиране на точката на възможен условен екстремум нарушихме симетрията по отношение на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$. Част от променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разглеждахме като независими, а останалите — като функции на тези независими променливи. Това в редица случаи усложнява пресмятанията. От Лагранж е предложен метод, симетризиращ ролята на променливите. На изложението на този метод е посветена настоящата точка.

Умножаваме равенствата (14.47) съответно с произволни (все още неопределени) константни множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Получените след умножението равенства събираме почленно с равенството (14.46). В резултат стигаме до следното равенство:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial \Psi}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial \Psi}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\frac{\partial \Psi}{\partial y_m}dy_m=0, \tag{14.50}$$

където със символа $\Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ е означена функцията

$$\Psi=f+\lambda_1 F_1+\lambda_2 F_2+\ldots+\lambda_m F_m. \tag{14.51}$$

Тази функция по-нататък ще наричаме функция на Лагранж. Ще смятаме, че за функциите (14.41) са изпълнени условията, формулирани в предишната точка, и че функцията (14.40) е диференцируема. Избираме множителите $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ така, че да са изпълнени равенствата

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial \Psi}{\partial y_m}=0. \tag{14.52}$$

Това очевидно може да се направи, тъй като равенствата (14.52) водят до линейната система

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_1}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial f}{\partial y_m}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_m}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_m}=0,$$

детерминантата на която (якобианът (14.42)) е различна от нула. Съгласно (14.52) равенството (14.50) приема вида

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial \Psi}{\partial x_n}dx_n=0. \tag{14.53}$$

Понеже при направените предположения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са независими, то от равенството (14.53) заключаваме, че

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}=0. \tag{14.54}$$

Като присъединим към уравненията (14.52) и (14.54) връзките на ограниченията (14.41), получаваме система от $n+2m$ уравнения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}=0,\quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial \Psi}{\partial y_m}=0, \tag{14.55}$$
$$F_1=0,\ \ldots,\ F_m=0$$

за определяне на $(n+m)$-те координати на точката на възможния условен екстремум и m-те множителя $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Практически при реализация на този метод се постъпва по следния начин: Съставяме функцията на Лагранж (14.51) и за тази функция се намира точката на възможния безусловен екстремум. За изключване на множителите $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ се използват връзките на ограниченията (14.41). Този начин за намирането на точката на възможен условен екстремум е законен, тъй като той води веднага до системата от $n+2m$ уравнения (14.55). Пример за прилагане на метода на множителите на Лагранж ще бъде разгледан в края на 14.4.3.

14.4.3. Достатъчни условия. В тази точка ще разгледаме един от начините за допълнително изследване на точката на възможен условен екстремум. Предполагаме, че в точката M_0 са изпълнени необходимите условия за условен екстремум (14.55). Освен това ще искаме допълнително двукратна диференцируемост на функциите (14.40) и (14.41) в околност на точката M_0 и непрекъснатост на всичките частни производни от втори ред в самата точка M_0. От конструкцията на функцията на Лагранж (14.51) е очевидно, че при наличието на ограниченията (14.41) екстремумите на функ-

ците (14.40) и на функцията на Лагранж съвпадат.* Но тогава от резултатите на 13.6 следва, че за да получим достатъчно условие за екстремум в точката M_0 на функцията (14.40) при наличие на ограниченията (14.41), към условията (14.55) трябва да прибавим изискването за дефинитност в тази точка на $d^2\Psi$. При това при наличие на ограниченията (14.41) можем да констатираме минимум в точката M_0, ако $d^2\Psi|_{M_0}>0$, и максимум, ако $d^2\Psi|_{M_0}<0$. Ще направим още няколко забележки от практически характер. Най-напред ще отбележим, че вторият диференциал $d^2\Psi$ в точката M_0 на възможен екстремум може да се пресметне, като се счита, че всичките променливи $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ са независими. Наистина в общия случай вторият диференциал $d^2\Psi$ на функцията Ψ не притежава свойството инвариантност на формата и трябва да се отчита зависимостта на $y_1, y_2, \ldots, y_m$ от $x_1, x_2, \ldots, x_m$, така че

$$d^2\Psi=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}+dy_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\ldots+dy_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^2\Psi$$
$$+\frac{\partial\Psi}{\partial y_1}d^2y_1+\ldots+\frac{\partial\Psi}{\partial y_m}d^2y_m.$$

Но в точката на възможен екстремум M_0 са изпълнени равенствата

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y_1}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial\Psi}{\partial y_m}=0,$$

така че $d^2\Psi$ се определя от същата формула

$$(14.56)\quad d^2\Psi=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}+dy_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\ldots+dy_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^2\Psi,$$

както и в случая, когато всичките променливи $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ са независими. По-нататък ще отбележим, че понеже искаме да установим дефинитността на $d^2\Psi$ само при наличие на връзките (14.41), при провеждане на пресмятанията във формулата (14.56) за $d^2\Psi$ трябва да заместим $dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$ със стойностите им, определени от системата (14.47). След това трябва да изучим въпроса за дефинитност на $d^2\Psi$ в дадената точка M_0.

Пример:

Ще намерим екстремалните стойности на функцията на m променливи

$$(14.57)\qquad u=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2$$

* Поради това, че при наличието на връзките (14.41) разликата $f(M)-f(M_0)$ съвпада с разликата $\Psi(M)-\Psi(M_0)$.

при ограничението

$$(14.58)\qquad x_1+x_2+\ldots+x_m+1=0.$$

Съставяме функцията на Лагранж

$$(14.59)\quad \Psi=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2+\lambda_1(x_1+x_2+\ldots+x_m+1)$$

и за нея изучаваме въпроса за точките на безусловен екстремум.

Тъй като за всяко i, $i=1, 2, 3, \ldots, m$, имаме $\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}=2x_i+\lambda$, то единствената стационарна точка е точката M_0 с координати

$$M_0(-\lambda/2,\ -\lambda/2,\ \ldots,\ -\lambda/2).$$

За определяне на λ използваме връзката на ограничението (14.58), откъдето получаваме, че $(-\lambda/2)m+1=0$. Така $\lambda=2/m$ и единствената стационарна точка M_0 има координати $M_0(-1/m,\ -1/m, \ldots, -1/m)$.

Понеже вторият диференциал на функцията на Лагранж (14.59), равен на

$$d^2\Psi=2((dx_1)^2+(dx_2)^2+\ldots+(dx_m)^2),$$

е винаги положително дефинитен, то функцията (14.57) при ограничението (14.58) има в точката $M_0(-1/m,\ -1/m, \ldots, -1/m)$ условен минимум.

Като заместим координатите на точката M_0 в (14.57), получаваме, че минималната стойност на функцията (14.57) при ограничения (14.58) е $u_{\min}=1/m$.

14.4.4. Кривина на равнинна крива. Еволюта и еволвента. Ако равнинната крива L се определя с уравнение от вида $F(x, y)=0$, при което функцията F е диференцируема в някоя околност на точката $M_0=(x_0, y_0)$ (или $M_0(x_0, y_0)$) от тази крива и има в тази точка непрекъснати частни производни по x и y, то точката M съгласно определението в 14.1.3 е особена, когато и двете частни производни $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ в точката (x_0, y_0) са равни на нула.

Ако поне една от тези частни производни на функцията F е различна от нула, точката (x_0, y_0) е обикновена.

Ако параметризуемата равнинна крива L е зададена с уравненията

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$$

и функциите x, y имат при $t=t_0$ непрекъснати производни, то точката $M_0=(x_0, y_0)$ (или $M_0(x_0, y_0)$) на кривата L, координатите x_0 и y_0 на която са съответно равни на $\varphi(t_0)$ и $\psi(t_0)$, ще наричаме особена, ако едновременно са изпълнени съотношенията $\varphi'(t_0)=0$ и $\psi'(t_0)=0$. Ако поне една от производните $\varphi'(t_0)$ и $\psi'(t_0)$ е различна от нула, точката M_0 се нарича обикновена.

Лесно се убеждаваме, че ако точката M_0 от кривата L е обикновена, то в някоя околност на тази точка кривата L е или графика на някоя диференцируема функция $y=f(x)$, или графика на някоя диференцируема функция $x=g(y)$.

Наистина, ако кривата е зададена с уравнението $F(x, y)=0$, този факт е следствие от теорема 14.1 за неявни функции. Ако кривата L е зададена чрез уравненията $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то от това, че една от производните $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ не е равна на нула в точката t_0, например $\varphi'(t_0)\neq 0$, и тази производна е непрекъсната в точката t_0, следва, че в някоя околност на точката t_0 производната φ' не е равна на нула. Тогава функцията $x=\varphi(t)$ е строго монотонна в тази околност. Затова съществува диференцируемата и монотонна обратна функция $t=\varphi^{-1}(x)$. Следователно кривата L е графика на диференцируемата функция $y=f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x))$ в някоя околност на точката M_0.

Нека уравненията $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ задават параметрично кривата L. Ще предполагаме, че L няма точки на самопресичане и сливащи се участъци. В този случай във всяка точка M на кривата L може да се избере положителна посока. *Ще считаме за положителна посока в точка M на кривата L тази посока, в която ще се премества точката M при растене на параметъра t.*

Да изберем върху кривата произволна точка M_0, отговаряща на стойност на параметъра t_0, и да предположим, че тази точка е обикновена точка на кривата. Съгласно предишните разсъждения в околност на точката M_0 кривата L е графика или на функцията $y=f(x)$, или на $x=g(y)$, при което функциите f и g са диференцируеми в тази околност на точката M_0, и следователно съществува допирателна към кривата L в точката M_0.

Ще се договорим да наричаме положителна посока на допирателната посоката, в която ще се премества при нарастване на параметъра проекцията върху допирателната на точка от кривата L.

Да предположим сега, че всички точки на кривата L, разположени в околност на точката M_0, са обикновени, а върху допирателната към кривата L в точката M_0 е определена положителната посока. Нека M е някоя точка от околността на точката M_0, отговаряща на по-голяма стойност на параметъра, отколкото точката M_0.

Определение. ***Прилежащ ъгъл*** *на участъка M_0M на кривата L се нарича ъгълът между положително насочените допирателни към кривата L в точките M и M_0, взет със знак плюс, когато допирателната в точката M_0 при налагане по най-късия път върху допирателната в точката M трябва да се завърти в посока, обратна на часовниковата стрелка, и със знак минус в противния случай.*

Определение. ***Средна кривина*** *в участъка M_0M на кривата L се нарича отношението на прилежащия ъгъл на този участък към дължината на участъка M_0M.*

Тъй като точката M_0 е фиксирана, то средната кривина на участъка M_0M е функция на точката M или функция на параметъра t. Означаваме средната кривина в участъка M_0M на кривата L с $k_{\text{ср.}}(M_0M)$ (или $k_{\text{ср.}}(t)$).

Естествено възниква въпросът за границата на функцията $k_{\text{ср.}}(M_0M)$, когато точката M клони по кривата L към точката M_0 (или, което е същото, когато параметърът t клони към t_0).

Определение. ***Кривина*** *на кривата L в дадена точка M_0 се нарича границата на средната кривина в участъка M_0M от кривата, когато точката M клони по кривата L към точката M_0.*

Кривината на кривата L в точката M_0 се означава със символа

$$k(M_0)=\lim_{M\to M_0} k_{\text{ср.}}(M_0M)=\lim_{t\to t_0} k_{\text{ср.}}(t).$$

Не е трудно да се получат формули, по които да се намира кривината на кривата L, зададена с уравненията $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ или с уравнението $y=f(x)$.

Ще разгледаме случая, когато кривата е зададена с уравненията $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и функциите φ и ψ имат в точката t_0 втори производни.

Нека $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ са стойностите на първата и втора производна на функцията x в точката t_0, а $\dot{x}+\Delta\dot{x}$ е стойността на първата производна на тази функция в точката $t_0+\Delta t$, където Δt е някакво нарастване на параметъра t. Така $\Delta\dot{x}$ е нарастването на първата производна на функцията x. Нека $\dot{y}$, $\ddot{y}$ и $\dot{y}+\Delta\dot{y}$ са съответните стойности за функцията y.

Точката M_0 е фиксирана и отговаря на стойността на параметъра t_0, а точката M отговаря на стойност на параметъра t. Затова прилежащият ъгъл на участъка M_0M и дължината на този участък могат да се разглеждат като функции на аргумента Δt. Означаваме дължината на участъка M_0M с $l(\Delta t)$, а прилежащия ъгъл на този участък с $\alpha(\Delta t)$. Трябва да пресметнем величината

$$k(M_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha(\Delta t)}{l(\Delta t)}.$$

Ако означим с θ_0 и θ ъглите, които допирателните към кривата L, прекарани съответно през точките M_0 и M, сключват с оста Ox, то очевидно $\alpha(\Delta t)=\theta-\theta_0$, а също $\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)=\operatorname{tg}(\theta-\theta_0)=\frac{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\theta_0}{1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\theta_0}$. Тъй като $\operatorname{tg}\theta_0=\dot{y}/\dot{x}$, $\operatorname{tg}\theta=(\dot{y}+\Delta\dot{y})/(\dot{x}+\Delta\dot{x})$, след несложни преобразувания не е трудно да се заключи, че

$$\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)=\frac{\dot{x}\,\Delta\dot{y}-\dot{y}\,\Delta\dot{x}}{\dot{x}(\dot{x}+\Delta\dot{x})+\dot{y}(\dot{y}+\Delta\dot{y})}.$$

Тъй като функциите x, y имат в точката t_0 втори производни, то първите производни на тези функции са непрекъснати в точката t_0 и затова $\Delta\dot{y}\to 0$, $\Delta\dot{x}\to 0$ при $t\to t_0$ $(\Delta t\to 0)$. Но тогава $\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)\to 0$ при $\Delta t\to 0$ и $\alpha(\Delta t)\to 0$, ако $\Delta t\to 0$. Следователно

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha(\Delta t)}{\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)}=1.$$

Затова

$$k(M_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha(\Delta t)}{l(\Delta t)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha(\Delta t)}{l(\Delta t)}.$$

Понеже

$$l(\Delta t)=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}(\dot{x}^2(\tau)+\dot{y}^2(\tau))^{1/2}\,d\tau,$$

то по формулата за средните стойности

$$l(\Delta t)=\Delta t\,(\dot{x}^2(t')+\dot{y}^2(t'))^{1/2},\quad t_0\leq t'\leq t_0+\Delta t.$$

Следователно

$$k(M_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dot{x}\,.\,\Delta\dot{y}/\Delta t-\dot{y}\,.\,\Delta\dot{x}/\Delta t}{(\dot{x}(\dot{x}+\Delta\dot{x})+\dot{y}(\dot{y}+\Delta\dot{y}))(\dot{x}^2(t')+\dot{y}^2(t))^{3/2}}.$$

Тъй като функциите x, y имат в точката t_0 втори производни, то $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\dot{x}}{\Delta t}=\ddot{x}$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\dot{y}}{\Delta t}=\ddot{y}$. От непрекъснатостта на първите производни на функциите x, y следва, че при $\Delta t\to 0$ имаме

$$\Delta\dot{x}\to 0,\quad \Delta\dot{y}\to 0,\quad (\dot{x}^2(t')+\dot{y}^2(t'))^{1/2}\to(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}.$$

Затова

$$k(M_0)=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}. \tag{14.60}$$

Ако кривата L е графика на два пъти диференцируемата функция $y=f(x)$, като положим $x=t$, $y=f(x)$, получаваме за кривината следната формула:

$$k(M_0)=\frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}.$$

Радиус на кривината R на кривата L се нарича величината $1/k$, където k е кривината, а център на кривината се нарича точката върху нормалата към кривата L, която е на разстояние R от дадената точка на кривата в посоката на вдлъбнатост на L.

Ако разглежданата крива L е дъга от окръжност с радиус r, лесно се вижда, че кривината k е равна на $1/r$, а радиусът на кривината на тази крива L е равен на радиуса на окръжността r.

В заключение ще въведем още две понятия.

Определение. *Геометричното място на центровете на кривината на дадена крива L се нарича* ***еволюта*** *на кривата L.*

Кривата L по отношение на своята еволюта се нарича ***еволвента.***

Ясно е, че еволютата на окръжност е множество, състоящо се от една точка — центъра на окръжността. Окръжността по отношение на свои център е еволвента.

14.4.5. Смяна на променливите. Задачата за решимост на система от функционални уравнения е тясно свързана със задачата за смяна на променливите.

Нека е даден изразът

$$\begin{aligned}F(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,z_1(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n),\\ \ldots,z_k(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n),\frac{\partial z_1}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial z_1}{\partial x_m},\\ \ldots,\frac{\partial z_k}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial z_k}{\partial y_n}),\end{aligned} \tag{14.61}$$

съдържащ независимите променливи $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n$, функциите $z_1(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n),\ldots,z_k(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ и частните им производни по всички независими променливи.

Вместо независимите променливи $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n$ и функциите $z_1,\ldots,z_k$ се въвеждат нови независими променливи $u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n$ и нови функции $w_1,\ldots,w_k$, където $w_1=w_1(u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n),\ldots,w_k=w_k(u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n)$, при това са дадени съотношенията, с помощта на които се прави тази смяна:

$$\begin{aligned}u_1&=\varphi_1(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_k),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_m&=\varphi_m(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_k),\\ v_1&=\psi_1(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_k),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_n&=\psi_n(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_k),\\ w_1&=\theta_1(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_k),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ w_k&=\theta_k(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_k).\end{aligned} \tag{14.62}$$

Иска се да се преобразува изразът (14.61) по отношение на новите променливи $u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_k$. Ще пред-

полагаме, че функциите, участвуващи в изразите (14.62), са достатъчен брой пъти диференцируеми и че системата (14.62) може да се реши относно $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k$, а първите $m+n$ уравнения могат да се решат относно $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$.

Очевидно, ако можем да изразим частните производни $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial x_m}, \ldots$ чрез $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial w_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial w_1}{\partial u_m}, \ldots$, то поставената задача ще бъде решена.

Ще дадем алгоритъм за решаването на задачата за смяна на променливите. Предполагайки, че $z_1=z_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \ldots, z_k=z_k(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, а $w_1=w_1(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n), \ldots, w_k=w_k(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$, записваме първите диференциали на функциите u_i, v_j, w_s:

$$
(14.63)\qquad
\begin{aligned}
du_i &= \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_l}dx_l+\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_p}dy_p+\sum_{t=1}^{k}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_t}dz_t,\\
dv_j &= \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\psi_j}{\partial x_l}dx_l+\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial\psi_j}{\partial y_p}dy_p+\sum_{t=1}^{k}\frac{\partial\psi_j}{\partial z_t}dz_t,\\
dw_s &= \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial w_s}{\partial u_l}du_l+\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial w_s}{\partial v_p}dv_p,
\end{aligned}
$$

където $i=1, 2, \ldots, m, j=1, 2, \ldots, n, s=1, 2, \ldots, k$.

Понеже

$$dz_t=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial z_t}{\partial x_l}dx_l+\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial z_t}{\partial y_p}dy_p,\ t=1, 2, \ldots, k,$$

като заместим израза за dz_t в първите $m+n$ уравнения на системата (14.63) и от своя страна заместим изразите за du_i и dv_j, $i=1, 2, \ldots, m; j=1, 2, \ldots, n$, в изразите за dw_s, $s=1, 2, \ldots, k$, получаваме изрази за dw_s; $s=1, 2, \ldots, k$, в които влизат само диференциалите $dx_1, \ldots, dx_m, dy_1, \ldots, dy_n$. Като приравним коефициентите пред еднаквите независими нарастванія $dx_1, \ldots, dx_m, dy_1, \ldots, dy_n$, ще получим система от $k(m+n)$ уравнения с $k(m+n)$ неизвестни:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial x_m}, \ldots, \frac{\partial z_k}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z_k}{\partial y_n}.$$

Решаваме тази система и намираме изразите за частните производни $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial x_m}, \ldots$, което и беше необходимо.

В случая на две независими променливи x и y и една функция $z=z(x, y)$ не е трудно да се убедим, че

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\theta}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\theta}{\partial z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\theta}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\theta}{\partial z}},$$

където $u=\varphi(x, y, z)$, $v=\psi(x, y, z)$, $w=\theta(x, y, z)$.

Аналогично се извършва смяна, когато старите променливи с свързани с новите не посредством съотношенията (14.62), а с неявните съотношения $\Phi_i(u, v, w, x, y, z)=0$, $i=1, 2, \ldots, m+n+k$, които могат да се решат както относно u, v и w, така и относно x, y и z. Тук $u=(u_1, \ldots, u_m)$, $v=(v_1, \ldots, v_n)$, $w=(w_1, \ldots, w_k)$, $x=(x_1, \ldots, x_m)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$, $z=(z_1, \ldots, z_k)$, а решимостта е по отношение на всяка от координатите им.

По същия начин се разглежда и случаят, когато изходният израз съдържа частни производни от по-висок ред.

Пример:

Ще разгледаме оператора на Лаплас*:

$$\Delta F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2},\quad F=F(x, y, z).$$

Този оператор играе важна роля в математиката и физиката.

Иска се да се преобразува този оператор (изразът за ΔF) в цилиндрични координати u, v и w: $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=w$.

Като използваме изложения алгоритъм, ще получим по отношение на новите променливи уравнението

$$\Delta F=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}.$$

(Естествено операторът $\Delta F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, зададен в равнината x, y, в полярни координати $x=u\cos v$, $y=u\sin v$ ще има вида

$$\Delta F=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.\ )$$

Ще отбележим, че в този пример функцията F не се сменя, а се прави смяна само на независимите променливи x, y и z.

* Пиер Симон Лаплас — френски астроном, математик и физик (1749—1827).

Азбучен указател

Абел, Н. Х. 343
— лема на 343
абсолютно сходящ несобствен интеграл 373
абсолютна стойност 45
аксиома на Архимед 40
аксиоми на реалните числа 66
алгебричен полином 120, 299
аргумент 19, 108
— диференциал на 193
Архимед, аксиома на 40
асимптота 273
— вертикална 271
— наклонена 272

база 124
— граница на функция по 125
базис на пространство 457
— — филтър 124
— пространство с изброим 458
банахово пространство 477
безкрайно голяма редица 79
— — функция отдясно на точка 121
— — — отляво на точка 121
— малка от по-висок ред функция 122
— — редица 80
— — функция в точка 121, 499
— малки функции, еквивалентно 122
Бер, Р. 183
— горна функция на 184
— долна функция на 184
биективно съответствие 71
биекция 71
бином, диференциален 315
Болцано, Б. 101
— Вайерщрас, теорема на 101, 496
Борел, Е. 180
Буняковски, В. Я. 356
Вайерщрас, К. 101
— втора теорема на 172, 508
— първа теорема на 196, 507

вектор, дължина на 477
— модул на 477

векторно пространство 475
величина, математическа променлива 108
вертикална асимптота 271
взаимно еднозначно съответствие 62
втора забележителна граница 24, 158
— производна 209
— — на изображение 556
— субституция на Ойлер 314
— формула за средните стойности 342
— частна производна 526
втори диференциал 214
вътрешна точка 61, 402, 415, 488
външна точка 402, 415, 488

Гато, диференциал на 558
— производна на 558
главна стойност в смисъл на Коши 380, 382
голяма сума на Дарбу 324
— — — — Стилтес 383
горен интеграл на Дарбу 326
горна граница 49
— — на интегрирането 320
— — — редица 79
— — — функция 165
— мярка на лице 404
— точка на сгъстяване 98
— функция на Бер 183
граница, втора забележителна 158, 24
— горна 49
— — на редица 79
— — — функция 165
— двойна 500
— долна на редица 79
— — — функция 165
— дясна на функция 115
— лява на функция 115
— многократна 499

— на редица 83, 494
— — интегрирането, горна 320
— — — долна 320
— — функция 111, 116, 117
— — — по база 125
— първа забележителна 23, 157
— точна горна 49
— — — на функция 170
— — долна 49
— — — на функция 170
граничен екстремум 278
— максимум 278
— минимум 278
гранична стойност на функция 11, 112, 116, 117, 497
— точка 61
гъсто в себе си множество 502

Дарбу, Г. 279
— голяма сума на 324
— горен интеграл на 326
— долен интеграл на 326
— лема на 327
— малка сума на 324
— теорема на 279
— Стилтес, голяма сума на 383
— — малка сума на 383
двойка, наредена 296
двойна граница 500
декартово произведение 451
делта-функция 480
детерминанта на Якоби 579
дефиниционна област на функция 20
диаметър на деление 320
Дирихле, П. Г. 109
— Абел, критерий на 373
дифеоморфизъм 595
диференциал, втори 214, 531
— на аргумента 193
— — Гато 558
— — дъга 401
— — независимата променлива 516
— — Фреше 556
— — функция 193
— силен 556
— слаб 558
— n-ти 215
диференциален бином 315
диференциално смятане 25, 207
диференциране 21, 192
диференцируема в точка функция 190
— функция 511
диференцируемо изображение 555
диференчно частно 21, 187
долен интеграл на Дарбу 326
долна граница на интегрирането 320
— — — редица 79
— — — функция 165
— мярка на лице 404
— точка на сгъстяване 98
— долна функция на Бер 184
допирателна 189
дроб, рационална 120, 303
дробно-линейна рационалност 312
дясна граница на функция 115
— производна на функция 188
дължина на вектор 476
— — дъга 392
дъга, диференциал на 400

Евклидово пространство 486
еволвента 603
еволюта 603
еднакъв ред на нарастване 122
еднократен корен 301
елемент, максимален 75
— на редица 77
елементарна функция 25
елиптичен интеграл 317
— — във формата на Льожандър 318
— — от втори род 402
— — — 1-ви, 2-ри и 3-ти род 318
еквивалентни множества 71
еквивалентно безкрайно малки функции 122
екстремум, граничен 278
— контурен 278
— локален 217, 255, 543
— условен 592

Жордан, К. 409
— лице по 409
— мярка на 409
жорданова мярка нула 360, 406

затворен интервал 61
затворена обвивка 449
— област 491
затворено множество 448, 489
— относно 450
— m-мерно кълбо 488

изброимост, пространство с втора аксиома за 458
изброимо множество 71
измерима фигура 404
измеримо тяло 415
изображение, диференцируемо 555
— линейно 478
непрекъснато 454, 455

— производна на 556
— свиващо 462
— хомеоморфно 585
изображения, комутиращи 463
изолирана точка 448
изоморфизъм 66
изоморфни линейни пространства 476
— множества 62
изпъкналост 263
— насочена нагоре 263
— — надолу 263
имагинерна част 296
интеграл, елиптичен 317
— — от втори род 318,402
— каноничен 318
— линейни свойства на 286
— на грешките 288
— — Дарбу, горен 326
— — — долен 326
— — Поасон 288
— — Риман—Стилтес 382
— — Стилтес 382
— — Френел 288
— неопределен 26, 27, 283
— несобствен от втори род 377
— — — първи род 368
— определен 30
— псевдоелиптичен 317
— разходящ 378
— сходящ 368, 377
интегрален косинус 288
— логаритъм 288
— синус 288
интегрална сума 29, 319
— — на Стилтес 382
интегрално смятане 29
интегриране по части 292
интегриране чрез смяна на променливите 289
интегрираща функция 382
интегруема по Коши функция 380, 381
— — Риман функция 320
интервал 61
— затворен 61
— отворен 61
— полузатворен отгоре 61
— — отдолу 61
— — отляво 61
инфлексия 265
— точка на 265
инфлексна точка 265
ирационалност, дробно-линейна 312
— квадратична 313
итерационна редица 426
каноничен интеграл 318
Кантор, Г. 175
— теорема на 175
квадратична ирационалност 313
— форма, недефинитна 546
— — отрицателно дефинитна 545
— — положително дефинитна 545
— — полудефинитна 546
компакт 182, 455
компактно множество 182
— пространство 455
комплексно линейно пространство 475
— число 296
— — спрегнато 298
комутиращи изображения 463
континуум, множество с мощност на 73
— мощност на 73
контур на множество 402, 415
контурен екстремум 278
— максимум 278
— минимум 278
контурна точка 61, 402, 415, 488
корен, еднократен 301
— кратен 301
— многократен 301
— на полином 299
— прост 301
косинус 149
— интегрален 288
Коши, Л. О. 104
— Буняковски, неравенство за интеграли на 357
— — — — суми на 356
— — — на 483
— главна стойност в смисъл на 380, 382
— интегруема функция по 380, 381
— критерий за сходимост на несобствен интеграл 371, 378
— непрекъсната функция по 129
— остатъчен член във форма на 240
— редица на 104, 460
— теорема на 227
— формула на 227
кратен корен 301
крива, кривина на 601
— непрекъсната 490
— параметризуема 390
— проста равнинна 389
— пространствена 391
— ректифицируема 392
кривина 601
— на равнинна крива 601
— средна 601

криволинеен сектор 412
— трапец 30, 410
критерий за интегруемост на Лебег 364
— на Дирихле—Абел 373
— — Силвестър 546
кълбо, m-мерно, затворено 488
— — отворено 488

Лагранж, Ж. Л. 211
— метод на неопределените множители на 596
— остатъчен член във форма на 240
— теорема на 221
— формула на 221
Лайбниц, формула на 212
Лаплас, П. С. 605
Лебег, А. 352
— критерий за интегруемост на 358, 364
лема на Абел 343
— — Дарбу 327
— — Хайне—Борел 181
— — Урисон 472
— — Цорн 75
лимес инфериор 98
— супериор 98
линеен оператор 479
— — ограничен 480
— — спрегнат 484
линейни пространства, изоморфни 476
— свойства на интеграла 286
линейно изображение 478
— нормирано пространство 477
— пространство 475
— — комплексно 475
— — реално 475
Липшиц, условие на 334
Лиувил, Ж. 318
лице, горна мярка на 404
— долна мярка на 404
— по Жордан 409
логаритмична производна 208
— функция 146
логаритъм, интегрален 288
локален екстремум 217, 255
— максимум 217, 255, 564
— минимум 217, 255, 564
Лопитал, Г. Ф. 223
— правило на 228
лява граница на функция 115
— производна на функция 188
Льожандър, А. М. 318
Маклорен, К. 242
— формула на 242
максимален елемент 75
максимум, граничен 278
— контурен 278
— локален 217, 255, 543, 564
малка сума на Дарбу 324
— — — — Стилтес 383
математическа променлива величина 109
метод на „вилката" 426
— — допирателните 34, 42, 434
— — неопределените коефициенти 307
— — — множители на Лагранж 596
— — Нютон 34
— — последователните приближения 426
— — правоъгълниците 33
— — хордите 429, 432
метрика 445
метрично пространство 445
— — пълно 460
— — структура на 445
минимум, граничен 278
— контурен 278
— локален 217, 235, 543, 564
Минковски, Х. 356
— неравенство за интеграли на 357
— — — суми на 356
многократен корен 301
многократна граница 499
многостенно тяло 415
многоъгълна фигура 403
множества, еквивалентни 71
— изоморфни 62
— равномощни 74
множество, гъсто в себе си 502
— затворено 448, 489
— изброимо 71
— компактно 182
— контур на 402
— навсякъде гъсто 62, 451, 452
— напълно наредено 75
— наредено 75
— непразно 49
— ограничено 403, 415, 489
— — отгоре 49
— — отдолу 49
— от втора категория 462
— — първа категория 462
— отворено 448, 469, 489
— относително отворено 449
— плътно в себе си 62
— покритие на 455

— с жорданова мярка нула 360, 406
— — лебегова мярка нула 358
— — мощност на континуума 73
— — мярка нула 406
— — нулев обем 415
— свързано 490
— сепарабелно 151
— съвършено 452
— топология на 468
— филтър на 127
модул 45
— на вектор 476
— — непрекъснатост на функция 177

монотонна редица 90
мощност на континуум 73
мярка на Жордан 409
— нула, множество с 406
навсякъде гъсто множество 451
навсякъде негъсто множество 452
наклонена асимптота 272
намаляваща редица 90
— функция 133, 217
напълно регулярно топологично пространство 471
нарастване, единакъв ред на 122
— на функция 217
— по-висок ред на 122
наредена двойка 296
наредено множество 75
недефинитна квадратична форма 546
независима променлива 108
— — диференциал на 516
ненамаляваща редица 89
— функция 133
неограничена редица 79
неопределен интеграл 26, 27, 283
неправилна рационална дроб 303
непразно множество 49
непрекъсната в множество функция 131
— — сегмент функция 131
— — точка функция 128, 129
— крива 490
— по Коши 129
— — Хайне 128, 130
— отдясно функция 129, 130
— отляво функция 129, 130
— функция 22, 129, 130
— — в множество 131, 502
— — — точка 129, 130, 501
— — равномерно 173, 508
непрекъснато изображение 454, 455
непрекъснатост, модул на 177

неравенство на Коши—Буняковски 483
— — — — за интеграли 357
— — — — — суми 356
— — Минковски за интеграли 357
— — — — суми 356
— — Хьолдер за интеграли 356
— — — — за суми 355
— — Юнг 354
нерастяща редица 89
— функция 133
несобствен интеграл, абсолютно сходящ 373
— — критерий на Коши за сходимост 370, 378
— — от втори род 377
— — — първи род 368
— — условно сходящ 373
неявна функция 567
норма 476
— оператор 481
нормално топологично пространство 472
Нютон метод на 34

обвивка, затворена 449
обем на тяло 415
обикновена точка 577
област 491
— дефиниционна 108
— затворена 491
— на изменение на функция 108
обобщена формула за крайните нарастания 227
обратна функция 134
обратни тригонометрични функции 154
околност на точка 61, 448, 469
— — — правоъгълна 488
оператор, линеен 478
— норма на 480
определен интеграл 30
— — по Риман 320
основна елементарна функция 24, 201
особена точка 377, 576
остатъчен член 237
— — в интегрална форма 352, 538
— — — обща форма 237
— — във форма на Коши 240
— — — — — Лагранж 240, 536
— — — — — Пеано 241, 539
осцилация на функция 176
отворен интервал 61
отворена полуправа 61
отворено множество 448, 469, 489

— относно 450
— m-мерно кълбо 488
относително отворено множество 450
отрицателно дефинитна квадратична форма 545
отстранимо прекъсване 161
ограничен линеен оператор 480
ограничена отгоре редица 78
— — функция 165
— отдолу редица 78
— — функция 165
— редица 78, 496
— функция 165
ограничено множество 415, 489
— отгоре множество 49
— отдолу множество 49
ограниченост, условие за 79
Ойлер, Л. 93
— втора субституция на 314
— първа субституция на 313
— теорема на 520

паралелепипед, m-мерен координатен 488
параметризуема крива 390
Пеано, Дж. 241
— остатъчен член във форма на 241, 539
плътно в себе си множество 62
Поасон, интеграл на 288
по-висок ред на нарастване 122
подредица 96
показателна функция 139
покритие 180
— на множество 455
полином 120
— алгебричен 299
— корен на 299
— на два аргумента 310
положително дефинитна квадратична форма 545
полудефинитна квадратична форма 546
полузатворен интервал 61
— отгоре интервал 61
полунепрекъсната отгоре функция 185
— отдолу функция 185
полуправа, отворена 61
полусегмент 61
права линия 392
— числова 61
правило за наредба 39
— на Лопитал 228
— — — второ 233

правилна рационална дроб 303
правоъгълна околност на точка 488
прекъсване от втори род 162
— — първи род 161
— отстранимо 161
— точка на 130
прилежащ ъгъл 600
примитивна функция 26, 283
прободена δ-околност 111
произведение, декартово 451
производна 21, 187
— втора 209
— — частна 526
— дясна 188
— логаритмична 208
— лява 188
— — Гато 558
— — изображение 556
— — — втора 563
— — — силна 556
— — функция 187
— от n-ти ред 209
— — — — частна 527
— — 2-ри ред 209
— слаба 558
— частна 509
променлива величина, математическа 108
— независима 19, 108
прост корен 301
проста равнинна крива 389
пространствена крива 391
пространство, базис на 457
— банахово 477
— векторно 475
— евклидово 486
— компактно 455
— линейно 475
— — нормирано 477
— метрично 445
— напълно регулярно топологично 471
— нормално топологично 472
— пълно метрично 460
— регулярно топологично 471
— с втора аксиома за изброимост 458, 469
— — изброим базис 458, 469
— — първа аксиома за изброимост 469
— структура на топологично 467
— топологично 468
— хаусдорфово топологично 468
— хилбертово 482
псевдоелиптичен интеграл 317
пълно метрично пространство 460

— нарастване на функция 502
първа забележителна граница 23, 157
— субституция на Ойлер 313
— формула за средните стойности 341

равнинна крива, кривина на 601
— фигура 403
равномерно непрекъснатата функция 173, 508
равномощни множества 74
разстояние 445
— функция на 445
разходящ интеграл 378
разходяща редица 84
растяща функция 133
рационална дроб 120, 303
— — неправилна 303
— — правилна 303
— функция на два аргумента 310
рационално число 38
реална част 296
реални числа, аксиоми на 66
реално линейно пространство 475
— число 43
регулярно топологично пространство 471
редица 77
— безкрайно голяма 79
— — малка 80
— горна граница на 78
— граница на 83, 494
— долна граница на 78
— елемент на 77
— итерационна 426
— монотонна 90
— на Коши 104, 460
— намаляваща 89
— непамаляваща 89
— неограничена 79
— нерастяща 89
— ограничена 78, 496
— — отгоре 78
— — отдолу 78
— разходяща 84
— растяща 90
— сходяща 83, 84, 453
— фундаментална 104, 460, 494
— член на 77
— числова 77
ректифицируема крива 392
Риман, определен интеграл на 320
— функция интегруема по 320
— Стилтес интеграл на 382
риманова сума 29

свиваща се система от сегменти 91
свиващо изображение 462
свързано множество 450, 490
сегмент 61
— на нарастване 280
— на намаляване 280
сектор, криволинеен 412, 451
сепарабелно множество 451
Силвестър, Дж. 546
— критерий на 546
силен диференциал 556
силна производна на изображение 556
Симпсон, формула на 443
синус 149
синус, интегрален 288
система от сегменти, свиваща се 91
слаб диференциал 558
слаба производна 558
сложна функция 20, 132
смиване, диференциално 25, 207
— интегрално 29
спрегнат линеен оператор 484
спрегнато комплексно число 298
средна кривина 601
стационарна точка 255
степенна функция 147
Стилтес, Т. 382
— интеграл на 382
— интегрална сума на 382
стойност, абсолютна 45
стойност, частна 19
структура на метрично пространство 445
— — топологично пространство 467
сума, интегрална 29, 319
— — на Стилтес 382
— на Дарбу голяма 324
— — — малка 324
— — — Стилтес 383
— риманова 29
суперпозиция 20
сходяща редица 83, 453
съвършено множество 452
съответствие, биективно 71
— взаимно еднозначно 62
— 1,1-значно 62

Тейлор, Б. 236
— теорема на 236
— формула на 237, 536, 539
теорема на Болцано—Вайерщрас 101 476
— — Вайерщрас втора 172, 508
— — — първа 169, 507
— — Дарбу 279

— — Кантор 175, 508
— — Коши 227
— — Лагранж 221
— — Ойлер 520
— — Тейлор 236
— — Тихонов 520
— — Цермело 75
Тихонов, А. Н. 473
— теорема на 473
топология на множество 468
топологично пространство 468
— — напълно регулярно 471
— — нормално 472
— — регулярно 471
— — структура на 467
— — хаусдорфово 468
точка, външна 448, 402, 415, 488
— вътрешна 61, 443, 402, 415, 488
— гранична 61
— изолирана 448
— инфлексна 265
— контурна 61, 448, 102, 415, 488
— на инфлексия 265
— — отстранимо прекъсване 161
— — прекъсване 130
— — — от втори род 162
— — — — първи род 161
— — сгъстяване 96, 448, 489
— — — горна 98
— — — долна 98
— обикновена 577
— околност на 469
— особена 576
— правоъгълна околност на 488
— стационарна 255
— ε-околност на 402
точна горна граница 49
— — — на функция 170
— долна граница 49
— — — на функция 170
трапец, криволинеен 30, 410
тригонометрични функции 148
тяло 415
— измеримо 415
— имащо обем 415
— многостенно 415
— цилиндрично 416

условен екстремум 592
условие за ограниченост 79
— на Коши за функция 117
— — Липшиц 334
условно сходящ несобствен интеграл 373
Урисон, П. С. 472
— лема на 472

фигура, измерима 404
— многоъгълна 403
— равнинна 403
филтър, базис на 124
— на множество 127
формула за крайните нараствания 221, 222
— — — — обобщена 227
— — средните стойности 342
— — — — втора 343
— — — — първа 341
— на Коши 227
— — Лайбниц 212
— — Лагранж 221
— — Маклорен 242
— — Нютон—Лайбниц 32, 347
— — параболите 443
— — правоъгълниците 438
— — Симпсон 443
— — Тейлор 237, 536, 539
— — трапеците 441
Френел, интеграл на 288
Фреше, диференциал на 556
фундаментална редица 104, 460
функции, еквивалентно безкрайно малки 122
— обратни тригонометрични 154
— тригонометрични 148
— хиперболични 156
функционал 479
функция 19
— безкрайно голяма отдясно на точка 121
— — — отляво на точка 121
— — малка в точка 121
— — — от по-висок ред 122
— горна граница на 165
— градиент на 523
— граница на 111, 112, 116, 117
— гранична стойност на 111, 112, 116, 117
— делта 480
— дефиниционна област на 108, 20
— диференциал на 193
— диференцируема 190, 511
— — в точка 190
— долна граница на 165
— дясна граница на 115
— — производна на 187
— елементарна 25
— интегрираща 382
— интегруема по Коши 380, 381
— — — Риман 320
— логаритмична 146
— лява граница на 115

— — производна на 187
— модул на непрекъснатост на 177
— на Бер, горна 184
— — — долна 184
— намаляваща 133
— нарастване на 502
— ненамаляваща 133
— непрекъсната 22, 129, 130, 501
— — в множество 131, 502
— — — сегмент 131
— — — точка 129, 130, 132, 502
— — отдясно 129, 130
— — отляво 129, 130
— нерастяща 133
— неявна 567
— област на изменение на 108
— обратна 134
— ограничена 165
— — отгоре 165
— — отдолу 165
— основна елементарна 24, 201
— осцилация на 176
— показателна 139
— полунепрекъсната отгоре 185
— — отдолу 185
— примитивна 26, 283
— производна на 187
— пълно нарастване на 502
— равномерно непрекъсната 173, 508
— разстояние 445
— растяща 133
— рационална на два аргумента 310
— сложна 20, 132
— степенна 147
— точна горна граница на 170
— — долна граница на 170
— условие на Коши за 117
— характеристика на 108
— частично непрекъсната 163
— частно нарастване на 503
— n-пъти диференцируема 527

Хайне, Е. Х. 111
— Борел, лема на 181
— непрекъсната по 128
характеристика на функция 108
хармонично трептене 20
хаусдорфово топологично пространство 468
хилбертово пространство 482
хиперболични функции 156
хомеоморфизъм 455
хомеоморфно изображение 585
Хьолдер, О. 355
— неравенство за интеграли на 356
— — — суми на 355

Цермело, теорема на 75
цилиндрично тяло 416
Цорн, лема на 75

частично непрекъсната функция 163
частна производна на 35, 509
— — втора 526
— — от n-ти ред 527
— стойност 19
частно, диференчно 21, 187
— нарастване на функция 502
Чебишев, П. Л. 316
число, комплексно 296
— рационално 38
— реално 43
числова права 61
— редица 77
член на редица 77
— остатъчен 237

Юнг, У. Х. 354
— неравенство на 354

Якоби, К. Г. Я. 579
— детерминанта на 579
якобиан 579

ъгъл, прилежащ 600
m-мерен координатен паралелепипед 488
m-мерно кълбо, затворено 488
— — отворено 488
n пъти диференцируема функция 527
n-ти производна 209
n-ти диференциал 215
— — на функция 526

δ-околност, прободена 111
ε-околност 488
— на точка 402
1.1-значно съответствие 62

ПЕЧАТНИ ГРЕШКИ

Стр.	Ред	Написано	Да се чете	По вина на
130	19, 20 отд.	$a<x<a+$ $a^{1/n}-1<\varepsilon^{d_n}$	$a<x<a+\delta$ $a^{1/n}-1<\varepsilon/a^{d_n}$	печатн.
142	6 отд.	$<(a-1)/n<\varepsilon^{d_n}$	$<(a-1)/n<\varepsilon/a^{d_n}$	ред.
143	2 отг.	$a>1$	$a>0$	кор.
145	8, 10 отг.	(4.81)	(4.8)	ред.
152	6 отг.	$d^2f=f^{(2)}(x)(dx)^2$	$d^2f=f^{(2)}(x)(dx)^2$	•
212	9 отд.	R_{2n+3}	R_{2n+3}	печатн.
251	14 отг.	$x^4+0(x)$	$x^4+0(x^4)$	ред.
252	3 отг.	$[x_{2k}, x_{k+1}]$	$[x_{2k}, x_{2k+2}]$	печатн.
436	11 отг.	$2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+R$	$2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Big\}+$	•
440	1 отд.	$R=R_0+R_1+\cdots$ $x\in\Sigma$	$R=R_1+R_2+\cdots$ $x\in\Sigma_{d_n}$	ред.
441	2 отг.	$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$	$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$	•
448	1 отд.	$x\in A$ не единствена	$x\notin A$ е единствена	•
451	15 отг.	$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i+y_i^2\|\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i+y_i\|^2\right)^{1/2}$	печатн.
459	10 отд.	$\Delta_x f=$	$\Delta_{x_1} f=$	•
462	13 отг.	$+\Delta x_m)=f(x_1$	$+\Delta x_m)-f(x_1$	кор.
478	7 отг.	$\frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2)$	$\frac{\partial x_1}{\partial t_k}dt_k)$	ред.
503	18 отг.	$+\cdots$	$+\cdots$	•
510	1 отд.	$\cdots$	$\cdots$	•
521	14 отд.			

Математически анализ, ч. I

ЛИТЕРАТУРНА ГРУПА 1-4
КОД 02 /95323 72611/ 4805—244—84
ТИРАЖ 5089 ЦЕНА 2,94 ЛВ.
ДИ „НАУКА И ИЗКУСТВО" — СОФИЯ
ДП „ГЕОРГИ ДИМИТРОВ" — СОФИЯ

ХУДОЖЕСТВЕН РЕДАКТОР
ТАНЯ НИКОЛОВА
ТЕХНИЧЕСКИ РЕДАКТОР
ПРАВДА КОЛЕВА
КОРЕКТОР
АННА ЛУБИХ

СЪВМЕСТНО ИЗДАНИЕ
МЕЖДУ
МОСКОВСКИ ДЪРЖАВЕН УНИВЕРСИТЕТ
«М. В. ЛОМОНОСОВ»
И СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
«КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ».
НАПИСАНО ПО ЕДИННА ПРОГРАМА
ЗА ОБУЧЕНИЕТО НА СТУДЕНТИТЕ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ
ЗА СПЕЦИАЛНОСТИТЕ
МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, МЕХАНИКА
И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА

Владимир Александрович Илин
Виктор Антонович Садовничи
Благовест Христов Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

ВТОРА ЧАСТ

Под редакцията
на академик А. Н. Тихонов

НАУКА И ИЗКУСТВО
1989
СОФИЯ

Владимир Бабев 1990г

Индекс 51

Книгата е учебник по математически анализ по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за втората година на обучение на студентите от специалностите математика, информатика, механика и приложна математика. В нея са включени теорията на редовете от числа и функции, теорията на кратните собствени и несобствени интеграли на Риман, теорията на криволинейните интеграли и интегралите по повърхнина, както и теорията на интегралите, зависещи от параметри, теорията на полето (включително теорията на диференциалните форми в евклидови пространства), теорията на редовете и преобразованията на Фурие.

Както и първата част, този учебник съдържа три ясно отделени нива на изложение: елементарно, основно и повишено.

©
ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ИЛИН
ВИКТОР АНТОНОВИЧ САДОВНИЧИ
БЛАГОВЕСТ ХРИСТОВ СЕНДОВ
1989
c/o JUSAUTOR, SOFIA

Математически анализ

ВЛАДИМИР ИЛИН
ВИКТОР САДОВНИЧИ
БЛАГОВЕСТ СЕНДОВ

БЪЛГАРО-СЪВЕТСКА
ПЪРВО ИЗДАНИЕ
ДАДЕНА ЗА НАБОР НА 26. VIII. 1988
ПОДПИСАНА ЗА ПЕЧАТ НА 5. VII. 1989
ИЗЛЯЗЛА ОТ ПЕЧАТ ПРЕЗ август 1989
ФОРМАТ 60/90/16. ПЕЧАТНИ КОЛИ 23.50
ИЗДАТЕЛСКИ КОЛИ 23.50
УСЛОВНО ИЗДАТЕЛСКИ КОЛИ 22,87
ИЗДАТЕЛСКИ № 30131
ТИРАЖ 12094 ЦЕНА 1,95 лв.
КОД 02/95346/225114805—490—89
ДИ «НАУКА И ИЗКУСТВО» — СОФИЯ
ДП «ДИМИТЪР БЛАГОЕВ» — СОФИЯ

РЕЦЕНЗЕНТИ
ГЕНЧО СКОРДЕВ
ПЛАМЕН ДЖАКОВ
РЕДАКТОР
ВАСИЛ ЦАНОВ
ХУДОЖНИК
ЖЕКО АЛЕКСИЕВ
ХУДОЖЕСТВЕН РЕДАКТОР
КРЕМЕНА ФИЛЧЕВА
ТЕХНИЧЕСКИ РЕДАКТОР
ВЛАДИМИР БОЯДЖИЙСКИ
КОРЕКТОР
ТЕМЕНУЖКА БАЛАБАНОВА

Съдържание

Предговор — 11

1. Числови редове

§1. Понятие за числов ред — 13
1. Сходимост и разходимост на редове 13. 2. Критерий на Коши за сходимост на редове 16.

§2. Редове с неотрицателни членове — 19
1. Необходимо и достатъчно условие за сходимост на редове с неотрицателни членове 19. 2. Критерии за сравнение 19. 3. Критерии на Даламбер и Коши 23. 4. Интегрален критерий на Коши—Маклорен 28. 5. Критерий на Раабе 31. 6. Универсален ред за сравнение не съществува 34.

§3. Абсолютно и условно сходящи редове — 35
1. Понятията абсолютно и условно сходящи редове 35. 2. Разместване на членовете в условно сходящ ред 37. 3. Разместване на членовете на абсолютно сходящ ред 40.

§4. Критерии за сходимост на произволни редове — 42

§5. Аритметични действия със сходящи редове — 48

§6. Безкрайни произведения — 52
1. Основни понятия 52. 2. Връзка между сходимостта на безкрайни произведения и на редове 54. 3. Разлагане на функцията $\sin x$ в безкрайно произведение 58.

§7. Обобщени методи за сумиране на разходящи редове — 62
1. Метод на Чезаро 63. 2. Метод за сумиране на Поасон—Абел 64.

§8. Елементарна теория на двойни и повторни редове — 67

2. Функционални редици и редове

§1. Сходимост в точка и равномерна сходимост в множество — 74
1. Функционални редици и функционални редове 74. 2. Сходимост на функционална редица (функционален ред) в точка и в множество 76. 3. Равномерна сходимост в множество 77. 4. Критерий на Коши за равномерна сходимост на редица (ред) 80.

§2. Достатъчни условия (признаци) за равномерна сходимост на функционални редици и редове — 81

§ 3. Почленен граничен преход 91

§ 4. Почленно интегриране и почленно диференциране на функционални редици и редове 49

1. Почленно интегриране 94. 2. Почленно диференциране 98. 3. Интегрална сходимост 101.

§ 5. Равностепенна непрекъснатост на редица от функции 105

§ 6. Степенни редове 109

1. Степенен ред. Област на сходимост 109. 2. Непрекъснатост на сумата на степенен ред 113. 3. Почленно интегриране и почленно диференциране на степенен ред 113.

§ 7. Разлагане на функции в степенни редове 115

1. Разлагане на функция в степенен ред 115. 2. Разлагане на някои елементарни функции в ред на Тейлор 116. 3. Елементарни понятия за функции на комплексна променлива 118. 4. Равномерно апроксимиране на непрекъсната функция с многочлени (теорема на Вайерщрас) 120.

3. Двойни и n-кратни интеграли

§ 1. Определение и условия за съществуване на двоен интеграл 126

1. Определение на двоен интеграл за правоъгълник 126. 2. Условия за съществуване на двоен интеграл за правоъгълник 128. 3. Определение и условия за съществуване на двоен интеграл за произволна област 130. 4. Общо определение за двоен интеграл 133.

§ 2. Основни свойства на двойния интеграл 136

§ 3. Свеждане на двоен интеграл към повторен еднократен интеграл 138

1. Случай на правоъгълник 138. 2. Случай на произволна област 140.

§ 4. Тройни и n-кратни интеграли 143

§ 5. Смяна на променливите в n-кратния интеграл 149

§ 6. Пресмятане на обеми на n-мерни тела 162

§ 7. Теорема за почленно интегриране на редици и редове от функции 167

§ 8. n-кратни несобствени интеграли 169

1. Понятие за n-кратни несобствени интеграли 169. 2. Два признака за сходимост на несобствени интеграли от неотрицателни функции 170. 3. Несобствени интеграли от знакопроменливи функции 172. 4. Главна стойност на n-кратен несобствен интеграл 176.

4. Криволинейни интеграли

§ 1. Понятие за криволинейни интеграли от първи и втори род 178

§ 2. Условия за съществуване на криволинейни интеграли 181

5. Повърхнинни интеграли

§ 1. Понятие за повърхнина и лице на повърхнина 187

1. Понятие за повърхнина 187. 2. Помощни леми 192. 3. Лице на повърхнина 194.

§ 2. Повърхнинни интеграли 198

6. Теория на полето. Основни интегрални формули на анализа

§ 1. Означения. Биортогонални базиси. Инварианти на линеен оператор 203

1. Означения 203. 2. Биортогонални базиси в пространството 204. 3. Смяна на базиси. Коварианти и контравариантни координати на вектор 205. 4. Инварианти на линеен оператор. Дивергенция и ротор 208. 5. Изрази за дивергенцията и ротора на линеен оператор относно ортонормиран базис 211.

§ 2. Скаларни и векторни полета. Диференциални оператори на векторния анализ 212

1. Скаларни и векторни полета 212. 2. Дивергенция, ротор и производна по посока на векторно поле 217. 3. Някои други формули на векторния анализ 219. 4. Заключителни бележки 220.

§ 3. Основни интегрални формули на анализа 221

1. Формула на Грийн 222. 2. Формула на Остроградски—Гаус 225. 3. Формула на Стокс 229.

§ 4. Условия за независимост на криволинейния интеграл в равнината от пътя на интегриране 233

§ 5. Някои приложения 238

1. Изразяване лицето на област в равнината чрез криволинеен интеграл 238. 2. Изразяване на обеми с помощта на интеграл по повърхнина 239.

Допълнение към глава 6. Диференциални форми в евклидово пространство 241

§ 1. Антисиметрични полилинейни форми 241

1. Линейни форми 241. 2. Билинейни форми 242. 3. Полилинейни форми 243. 4. Антисиметрични полилинейни форми 244. 5. Външно произведение на антисиметрични форми 244. 6. Свойства на външното произведение на антисиметрични форми 248. 7. Базис в пространството на антисиметричните форми 249.

§ 2. Диференциални форми 251

1. Определение 251. 2. Външен диференциал 253. 3. Свойства на външния диференциал 254.

§ 3. Диференцируеми изображения 256

1. Определение за диференцируеми изображения 256. 2. Свойства на изображението φ^* 257.

§ 4. Интегриране на диференциални форми 260

1. Определения 260. 2. Диференцируеми вериги 262. 3. Формула на Стокс 265. 4. Примери 267.

7. Интеграли, зависещи от параметър

§ 1. Равномерна сходимост по едната променлива на функции на две променливи 269

1. Връзка между равномерната сходимост по едната променлива на функции на две променливи с равномерната сходимост на редици от

функции 269. 2. Критерий на Коши за равномерна сходимост на функция 271. 3. Приложения на понятието равномерна сходимост на функция 271.

§2. Собствени интеграли, зависещи от параметър 273

1. Свойства на интегралите, зависещи от параметър 273. 2. Случай, когато границите на интегриране зависят от параметъра 275.

§3. Несобствени интеграли, зависещи от параметри 277

1. Несобствени интеграли от първи род, зависещи от параметър 277. 2. Несобствени интеграли от втори род, зависещи от параметър 284.

§4. Приложение на теорията на интегралите, зависещи от параметър, за пресмятане на някои несобствени интеграли 285

§5. Ойлерови интеграли 289

1. Г-функция 289. 2. В-функция 293. 3. Връзка между Г-функцията и В-функцията 295. 4. Примери за пресмятане на интеграли с помощта на ойлеровите интеграли 297.

§6. Формула на Стирлинг 298

§7. Кратни интеграли, зависещи от параметър 300

1. Собствени кратни интеграли, зависещи от параметър 300. 2. Несобствени кратни интеграли, зависещи от параметър 301.

8. Редове на Фурие

§1. Ортонормирани системи и общи редове на Фурие 305

1. Ортонормирани системи 305. 2. Понятие за общ ред на Фурие 311.

§2. Затворени и пълни ортонормирани системи 315

§3. Затвореност на тригонометричната система и следствия от нея 317

1. Равномерно приближаване на непрекъсната функция с тригонометрични полиноми 317. 2. Доказателство на затвореността на тригонометричната система 321. 3. Следствия от затвореността на тригонометричната система 323.

§4. Най-прости условия за равномерна сходимост и за почленна диференцуемост на тригонометричния ред на Фурие 324

1. Уводни бележки 324. 2. Най-прости условия за абсолютна и равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие 326. 3. Най-прости условия за почленно диференциране на тригонометричния ред на Фурие 328.

§5. По-точни условия за равномерна сходимост и условия за сходимост в точка 330

1. Модул на непрекъснатост на функция. Класи на Хьолдер. 330. 2. Формула за частичната сума на тригонометричния ред на Фурие 332. 3. Спомагателни твърдения 334. 4. Принцип за локализация 338. 5. Равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие за функции от класа на Хьолдер 340. 6. Върху сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на частично хьолдерова функция. 346. 7. Сумируемост на тригонометричния ред на Фурие на непрекъсната функция по метода на средните аритметични 350. 8. Заключителни бележки 352.

§6. Кратни тригонометрични редове на Фурие 354

1. Понятие за кратен тригонометричен ред на Фурие и за неговите правоъгълни и сферични частични суми 354. 2. Модул на непрекъснатост и класове на Хьолдер за функции на n променливи 356. 3. Условия за абсолютна сходимост на кратен тригонометричен ред на Фурие 357.

9. Преобразование на Фурие

§1. Представяне на функция с интеграл на Фурие 362

1. Помощни твърдения 362. 2. Основна теорема. Формула за обръщане 364. 3. Някои примери 370.

§2. Някои свойства на преобразованието на Фурие 371

§3. Кратен интеграл на Фурие 375

Предговор

Настоящата книга е учебник по математически анализ по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за втори курс.

Тя обхваща напълно материала за втората година на обучение, предвиден от програмата за студентите от университетите в СССР и България, по специалностите математика, приложна математика, информатика и механика.

Учебникът съдържа теорията на редовете от числа и функции, теорията на кратните собствени и несобствени интеграли на Риман, теорията на криволинейните интеграли и на интегралите на повърхнина, както и теорията на интегралите, зависещи от параметри, теорията на полето (включително теорията на диференциалните форми в евклидови пространства), теорията на редовете и преобразованията на Фурие.

Както и първата част, настоящият учебник съдържа три лесноразличими нива на изложение: елементарно, основно и повишено.

Елементарното ниво отговаря на програмата на техническите вузове на СССР със задълбочено изучаване на математически анализ; основното ниво на изложение отговаря на програмата на специалността приложна математика и информатика, а материалът на повишеното ниво на изложение допълва основното ниво с редица раздели, които обикновено се изучават в механо-математическите факултети на университетите.

Текстът, означен в книгата с две отвесни черти, се отнася до повишеното ниво на изложение; текстът, означен с една отвесна черта — до основното ниво на изложение, останалият

текст представлява съдържание на елементарно ниво на изложение.

За усвояването на материала на елементарно ниво не се изисква четене на материал от основното и повишеното ниво, а за разбиране на материала на основно ниво не се изисква четене на този с повишено ниво.

Като цяло материалът в настоящия учебник много се доближава до курса, който реално може да се прочете за студентите от университетите.

При създаването на учебника авторите са използували традиционните лекционни курсове в Московския и Софийския университет, както и част от материала от книгата на В. А. Илин и Е. Г. Позняк «Основи на математическия анализ».

Авторите изразяват дълбока благодарност на главния редактор на тази книга акад. А. Н. Тихонов за многобройните ценни съвети и забележки.

Авторите дължат особена благодарност на И. С. Ломов и С. Л. Троянски, които оказаха неоценима помощ на всички етапи от написването на тази книга.

Москва, януари 1986 г.

1. Числови редове

Още в средния курс читателите са се срещали със суми, които съдържат безбройно много членове (например със сумата на безкрайна геометрична прогресия).

Макар че изследването на подобни суми, наречени редове, може да бъде сведено към изследване на числови редици, то тези суми изискват самостоятелно задълбочено изучаване. Същите представляват важно средство за представяне на различни функции, срещащи се в анализа.

§ 1. Понятие за числов ред

1. Сходимост и разходимост на редове. Да разгледаме произволната числова редица $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ и формално да образуваме от нейните елементи безкрайната сума

$$u_1+u_2+\cdots+u_k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.1}$$

Формално съставената сума (1.1) е прието да се нарича числов ред или просто ред. При това отделните събираеми u_k е прието да се наричат членове на реда (1.1).

Сумата на първите n члена на реда (1.1) е прието да се нарича n-та частична сума на този ред и да се означава със символа S_n.

И така по определение

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{1.2}$$

Редът (1.1) се нарича сходящ, ако е сходяща редицата $\{S_n\}$ от частичните суми (1.2) на този ред. При това границата S на тази редица се нарича сума на реда (1.1).

По този начин за сходящия ред (1.1) със сума S можем формално да напишем равенството

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

В случай че за дадения ред (1.1) редицата от частичните суми (1.2) е разходяща, то редът се нарича **разходящ**.

Виждаме, че понятието сума е дефинирано само за сходящи редове, при това (за разлика от понятието сума на краен брой събираеми) понятието сума на ред се въвежда чрез граничен преход.

В съвременната математика и в нейните приложения често се сблъскваме с редове, за които редицата от частичните суми (1.2) е разходяща. За някои такива редове се въвежда понятие сума в обобщен смисъл. В § 7 от тази глава ще бъдат разгледани най-употребяваните методи за обобщено сумиране на разходящи редове.

Един от основните проблеми на теорията на редовете е този за намиране на признаци за сходимост и разходимост на редове. В § 2 ще бъдат доказани такива признаци за редове с неотрицателни членове, а в § 4 — за редове с произволни членове.

Да се спрем на някои примери на сходящи и разходящи редове.

1°. Ще изучим въпроса за сходимостта на реда, съставен от членовете на геометричната прогресия

$$1+q+q^2+\cdots+q^k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}. \tag{1.3}$$

Тъй като n-тата частична сума S_n на този ред при $q\neq 1$ има вида

$$S_n=1+q+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}, \tag{1.4}$$

то очевидно при $|q|<1$ редицата от частичните суми $\{S_n\}$ клони към $\frac{1}{1-q}$.

Следователно при $|q|<1$ редът (1.3) е сходящ и има сума, равна на $\frac{1}{1-q}$.

Ако $|q|>1$, то, от израза (1.4) се вижда, че редицата от частичните суми $\{S_n\}$ е разходяща, т. е. при $|q|>1$ редът (1.3) е разходящ.

За пълнота остава да разгледаме случая $|q|=1$, т. е. случая, когато q е равно на $+1$ или -1.

В случая $q=+1$ всички членове на реда (1.3) са равни на

единица и n-тата частична сума на реда S_n е равна на n. Оттук следва, че в случая $q=+1$ редицата $\{S_n\}$ е разходяща, т. е. редът (1.3) е разходящ.

Накрая в случая $q=-1$ редът (1.3) има вида $1-1+1-1+\cdots$ и следователно редицата $\{S_n\}$ от частичните суми съвпада с очевидно разходящата редица 1, 0, 1, 0, ... Така че и при $q=-1$ редът (1.3) е разходящ.

2°. За фиксирано число x да разгледаме въпроса за сходимостта на следните редове*:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{1.5}$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \tag{1.6}$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-2}}{(2k-2)!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-2}}{(2k-2)!}. \tag{1.7}$$

Означавайки n-тите частични суми на редовете (1.5), (1.6) и (1.7) съответно с $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ и $S_n^{(3)}(x)$, можем да пишем

$$S_n^{(1)}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{1.8}$$

$$S_n^{(2)}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \tag{1.9}$$

$$S_n^{(3)}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}. \tag{1.10}$$

Като съпоставим изразите (1.8), (1.9) и (1.10) с разлаганията по формулата на Маклорен на функциите e^x, $\sin x$ и $\cos x$ (вж. п. 2, § 9 от глава 6 на част I), получаваме, че

$$\begin{aligned} e^x&=S_n^{(1)}(x)+R_n^{(1)}(x),\\ \sin x&=S_n^{(2)}(x)+R_n^{(2)}(x),\\ \cos x&=S_n^{(3)}(x)+R_n^{(3)}(x), \end{aligned} \tag{1.11}$$

където $R_n^{(1)}(x)$, $R_n^{(2)}(x)$, $R_n^{(3)}(x)$ означават n-тите остатъчни членове в разлаганията по формулата на Маклорен съответно на функциите e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

* Символът 0! отъждествяваме с числото 1.

В пунктове 1 и 2, § 9, глава 2 на част 1 е доказано, че във всяка точка x от реалната права тези остатъчни членове клонят към нула при $n\to\infty$. Следователно съгласно с (1.11) във всяка точка x от безкрайната права частичните суми $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ и $S_n^{(3)}$ клонят към граници, съответно равни на e^x, $\sin x$ и $\cos x$. Това означава, че редовете (1.5), (1.6) и (1.7) са сходящи във всяка точка x от безкрайната права и техните суми са равни съответно на e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

Забележка 1. Ще подчертаем, че от формална гледна точка изучаването на числовите редове е нова форма на изучаване на числовите редици, понеже: 1) на всеки ред (1.1) еднозначно се съпоставя редицата $\{S_n\}$ от неговите частични суми, 2) на произволна числова редица $\{S_n\}$ еднозначно се съпоставя числовият ред (1.1) с членове $u_1=S_1$, $u_k=S_k-S_{k-1}$ при $k>1$, за който тази редица служи за редица от частични суми.

Забележка 2. Ще отбележим две прости свойства на произволен ред, които следват непосредствено от определението за сходимост на ред.

I. Премахването на краен брой членове на реда (или добавянето към реда на краен брой нови членове) не влияе на сходимостта или разходимостта му.

II. Ако C е различна от нула константа, $u_k'=C\,.\,u_k$, то редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'$ е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

За обосноваването на първото от тези свойства е достатъчно да се забележи, че в резултат на казаното премахване (или добавяне) на краен брой членове всички частични суми на реда от известно място нататък се изменят с една и съща константа.

За доказателството на второто свойство нека означим с S'_n и S_n n-тите частични суми съответно на редовете $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Вижда се, че $S'_n=C.\ S_n$, където $C\neq 0$. Оттук следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n$ съществува тогава и само тогава, когато съществува $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

2. Критерии на Коши за сходимост на редове. Тъй като въпросът за сходимост на даден ред е еквивалентен по определение на въпроса за сходимост на редицата от частичните му суми, то ние ще получим необходимо и достатъчно условие за сходимост на даден ред, формулирайки критерия на Коши за редицата от неговите частични суми. За удобство да формулираме отново критерия на Коши за редици. *За да бъде редицата $\{S_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува номер N такъв, че за всеки номер n, удовлетворяващ условието $n\geq N$, и за всяко естествено p $(p=1, 2, 3, \ldots)$ да е в сила $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$.*

Като следствие от това твърдение получаваме следната теорема.

Теорема 1.1 (критерий на Коши за редове). *За да е сходящ редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува номер N такъв, че за всеки номер n, удовлетворяващ условието $n\geq N$, и за всяко естествено число p $(p=1, 2, \ldots)$ да е в сила*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon. \tag{1.12}$$

За доказателството на тази теорема е достатъчно да забележим, че величината, стояща под знака за модул в неравенство (1.12), е равна на $S_{n+p}-S_n$.

Ще отбележим, че критерият на Коши представлява главно теоретичен интерес. Неговото практическо използване за доказване на сходимостта или разходимостта на конкретни редове обикновено е свързано с трудности. Затова наличието на критерия на Коши не изключва необходимостта от намиране на други, практически по-ефективни критерии за сходимост и разходимост на редове.

От теорема 1.1 се получават две елементарни, но важни следствия.

Следствие 1. *Ако редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ е сходящ, то редицата $r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k$ е безкрайно малка.* Прието е r_n да се нарича *n-ти остатък* на реда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

За да докажем следствие 1, е достатъчно да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че $|r_n|\leq\varepsilon$ при $n\geq N$. Последното неравенство следва непосредствено от неравенство (1.12),

което е вярно при $p=1, 2, 3, \ldots$ и от теорема 3.13 от т.4, § 1, глава 3, част I.

Следствие 2 (необходимо условие за сходимост на редове). *За да бъде сходящ редът* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, *е необходимо редицата* $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots$ *от членовете на реда да е безкрайно малка.*

Достатъчно е да се докаже, че за дадения сходящ ред и за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N_0 такъв, че при $n \geq N_0$ е в сила $|u_n|<\varepsilon$. Нека е дадено произволно $\varepsilon>0$. Съгласно теорема 1.1 съществува номер N такъв, че при $n \geq N$ и за всяко естествено p е изпълнено неравенство (1.12). В частност при $p=1$ това неравенство има вида

$$|u_{n+1}|<\varepsilon \quad (\text{при } n \geq N). \tag{1.12'}$$

Ако сега положим $N_0=N+1$, то при $n \geq N_0$, имайки предвид неравенство (1.12'), получаваме $|u_n|<\varepsilon$, което трябваше да се докаже.

С други думи, следствие 2 може да се формулира така: за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е необходимо $\lim_{k\to\infty} u_k=0$. Следователно при изследване сходимостта на даден ред трябва преди всичко да се провери дали клони към нула k-тият член на реда при $k\to\infty$. Ако това не е така, то редът е разходящ. Така например редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{7k^2+8\,000k}$$

е очевидно разходящ, понеже

$$\lim_{k\to\infty} u_k=\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{7k^2+8\,000k}=\frac{1}{7}\neq 0.$$

Аналогично разходимостта на вече познатия ни ред $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ следва от факта, че $\lim_{k\to\infty} (-1)^{k-1}$ не съществува.

Да подчертаем обаче, че клоненето към нула на k-тия член на реда при $k\to\infty$ е необходимо, но не е достатъчно условие за сходимост на реда. Като пример да разгледаме реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots \tag{1.13}$$

Този ред обикновено се нарича *хармоничен* ред. Очевидно за хармоничния ред е изпълнено необходимото условие за сходимост, но (както е доказано в т. 3, § 3, глава 3, част I) редицата от частичните суми на този ред е разходяща.

§ 2. Редове с неотрицателни членове

1. Необходимо и достатъчно условие за сходимост на ред с неотрицателни членове. В този параграф ще разгледаме редове, всички членове на които са неотрицателни.

Редове с неотрицателни членове се срещат често в приложенията. Освен това тяхното предварително изучаване ще облекчи изучаването на редове с членове с произволни знаци. По-нататък, за да подчертаем, че става дума за редове с неотрицателни членове, ще означаваме членовете на такъв ред с символа p_k вместо u_k.

Можем веднага да отбележим основното характеристично свойство на ред с неотрицателни членове: *редицата от частичните суми на такъв ред е ненамаляваща.*

Това ни позволява да докажем следното твърдение.

Теорема 1.2. *За да бъде един ред с неотрицателни членове сходящ, е необходимо и достатъчно редицата от частичните му суми да е ограничена.*

Необходимостта следва от факта, че всяка сходяща редица е ограничена (предвид теорема 3.8 от § 1, глава 3, част I).

Достатъчността следва от това, че редицата от частичните суми е ненамаляваща и следователно за сходимостта ѝ е достатъчно тя да бъде ограничена (предвид теорема 3.15 от точка 2, § 2, глава 3, част I).

2. Критерии за сравнение. В тази точка ще докажем редица критерии, позволяващи да се направи заключение за сходимостта (или разходимостта) на разглеждания ред чрез сравнението му с друг ред, чиято сходимост (или разходимост) е известна.

Теорема 1.3. *Нека* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ *са два реда с неотрицателни членове. Нека за всеки номер* k *е изпълнено*

$$p_k \leq p_k'. \tag{1.14}$$

Тогава от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *следва сходимоста на реда* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$; *от разходимостта на реда* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *следва разходимостта на реда* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Доказателство. Да означим n-тите частични суми на редовете $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ съответно с S_n и S_n'. От (1.14) следва, че $S_n \leq S_n'$. Последното неравенство ни позволява да заключим, че от ограничеността на редицата от частични суми $\{S_n'\}$ следва ограниченост на редицата от частични суми $\{S_n\}$ и, обратно, от неограничеността на редицата от частични суми $\{S_n\}$ следва неограниченост на редицата от частични суми $\{S_n'\}$. Вземайки под внимание теорема 1.2, теорема 1.3 е доказана.

Забележка 1. В условията на теорема 1.3 може да се поиска неравенство (1.14) да бъде изпълнено не за всички номера k, а само за тези, които са по-големи от някой номер k_0. Наистина съгласно забележка 2 в края на т. I, § 1 премахването на краен брой членове не влияе на сходимостта на реда.

Забележка 2. Теорема 1.3 остава вярна, ако в предположенията на теоремата заменим неравенство (1.14) със следното неравенство:

$$p_k \leq C p_k', \tag{1.15}$$

където C е произволна положителна константа.

Наистина от забележка 2 от т. I, § 1 следва, че проблемът за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ е еквивалентен на проблема за сходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} (Cp_k')$. При това естествено можем да поискаме неравенството (1.15) да бъде изпълнено, започвайки от някой достатъчно голям номер k.

Следствие от теорема 1.3. *Ако $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е ред с неотрицателни членове, а $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ е ред със строго положителни членове и ако съществува крайната граница*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L,$$

то от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ следва сходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$; от разходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ следва разходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Доказателство. Тъй като $\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'} = L$, то съгласно определението за граница на редица за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер N такъв, че при $k \geq N$ е в сила

$$L - \varepsilon < \frac{p_k}{p_k'} < L + \varepsilon.$$

Следователно при $k \geq N$ е вярно неравенството $p_k < (L+\varepsilon) p_k'$. Последното неравенство съвпада с неравенство (1.15) при $C = L + \varepsilon$. Предвид забележка 2 към теорема 1.3 следствието е доказано.

Теорема 1.4. *Нека $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ са два реда със строго положителни членове. Нека за всички номера k е вярно неравенството*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p_k'}. \tag{1.16}$$

Тогава от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ следва сходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$; от разходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ следва разходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Доказателство. Нека да запишем неравенство (1.16) за $k = 1, 2, \ldots, n-1$, където n е произволен номер. Ще имаме

$$\frac{p_2}{p_1} \leq \frac{p'_2}{p'_1},$$

$$\frac{p_3}{p_2} \leq \frac{p'_3}{p'_2},$$

$$\ldots$$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{p'_n}{p'_{n-1}}.$$

Като умножим почленно всички написани неравенства, получаваме $\frac{p_n}{p_1} \leq \frac{p_n'}{p_1'}$, или $p_n \leq \frac{p_1}{p_1'} p_n'$. Тъй като в последното неравенство величината $C = \frac{p_1}{p_1'}$ е абсолютна положителна константа, независеща от номера k, то съгласно забележка 2 към теорема 1.3 теорема 1.4 е доказана.

Забележка 3. В условията на теорема 1.4 може да се поиска неравенство (1.16) да бъде изпълнено не за всички номера k, а само започвайки от някой номер k (тъй като отстраняването на краен брой членове на реда не влияе на сходимостта на реда).

Двете доказани в тази точка теореми се наричат теореми за сравнение или критерии за сравнение.

Ще дадем примери за прилагане на критериите за сравнение.

1. Да изследваме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+b^k}, \text{ където } b>0.$$

Ако $b \leq 1$, то k-тият член на разглежданият ред не клони към нула при $k \to \infty$. Следователно необходимото условие за сходимост на редове е нарушено и значи редът е разходящ. Ако $b>1$, то понеже за всяко k е в сила неравенството

$$\frac{1}{2+b^k} < \frac{1}{b^k}$$

и понеже редът $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k}$ е сходящ, теоремата за сравнение 1.3 ни позволява да твърдим, че разглежданият ред е сходящ.

2. Да изследваме въпроса за сходимост при произволно $\alpha \leq 1$ на следния ред:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{k^\alpha} + \cdots \tag{1.17}$$

Този ред се нарича често обобщен хармоничен ред. Тъй като при $\alpha \leq 1$ за всеки номер k е в сила неравенството

$$\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$$

и понеже хармоничният ред е разходящ*, то теоремата за сравнение 1.3 позволява да се твърди, че редът (1.17) е разходящ за всяко $\alpha \leq 1$.

* Разходимостта на хармоничния ред е доказана в края на т. 2, § 1.

3. Критерии на Даламбер и Коши. Критериите на Даламбер и Коши се основават на сравнението на даден ред с геометрична прогресия

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + \cdots + q^k + \cdots, \ |q|<1, \tag{1.18}$$

или с разходящия ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \tag{1.19}$$

Теорема 1.5 (критерий на Даламбер)*. 1. *Ако за всички номера k или най-малкото започвайки от някой номер k, е в сила неравенството*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1^{**} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1\right), \tag{1.20}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ).

Г. *Ако съществува границата*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \tag{1.21}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ при $L<1$ и е разходящ при $L>1$.

Теорема Г обикновено се нарича критерий на Даламбер *в гранична форма*. В тази форма той се използува най-често.

Доказателство. Ще докажем поотделно твърденията 1 и Г.

1) За доказателството на теорема 1 да положим $p_k' = q^k$ $(p_k = 1)$. Тогава $\frac{p_{k+1}'}{p_k'} = q$, където $q<1$ $\left(\frac{p_{k+1}'}{p_k'} = 1\right)$ и ние можем да запишем неравенство (1.20) във вида

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}'}{p_k'} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{p_{k+1}'}{p_k'}\right). \tag{1.22}$$

* Жак Лерон Даламбер — френски математик и философ (1717—1783).

** При това естествено се предполага, че всички членове на реда (най-малкото от някой номер нататък) са строго положителни.

Понеже редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, съвпадащ с реда (1.18) ((1.19)), е сходящ (разходящ), то неравенството (1.22) въз основа на теоремата за сравнение 1.4 гарантира сходимостта (разходимостта) на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Твърдението 1 е доказано.

2) Сега ще докажем теорема Г. Ако $L<1$, то съществува положително число ε такова, че $L=1-2\varepsilon$ и $L+\varepsilon=1-\varepsilon$. По определението за граница на редица за избраното ε съществува номер N такъв, че при $k\geq N$

$$L-\varepsilon<\frac{p_{k+1}}{p_k}<L+\varepsilon=1-\varepsilon. \tag{1.23}$$

Числото $L+\varepsilon=1-\varepsilon$ играе ролята на q в теорема 1. Следователно редът е сходящ.

Ако $L>1$, съществува *положително* число ε такова, че $L=1+\varepsilon$ и $L-\varepsilon=1$. В този случай лявото от неравенствата (1.23) ни дава

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}>L-\varepsilon=1 \qquad (\text{при } k\geq N).$$

Редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е разходящ съгласно твърдение 1. Теорема 1.5 е доказана напълно.

Забележки към теорема 1.5

1) Да обърнем внимание на факта, че в теорема 1.5 (1) неравенството $\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq q<1$ (за всички k от някой номер нататък) не може да се замени с $\frac{p_{k+1}}{p_k}<1$.

Наистина, както беше доказано по-горе, хармоничният ред (1.13) е разходящ, но за този ред $\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{k}{k+1}<1$ (за всички номера k).

2) Ако в предположенията на теорема 1.5 (Г) $L=1$, то не може да се каже нищо определено за сходимостта на реда (т. е. при $L=1$ критерият на Даламбер «не работи»). Наистина за хармоничния ред (1.13) $L=1$, а както знаем, той е разходящ. При това за реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \tag{1.24}$$

също имаме $L=1$, но този ред е сходящ, както ще бъде доказано в следващата точка.

Теорема 1.6 (критерии на Коши). 1. *Ако за всички номера k или най-малкото започвайки от някой номер k нататък, е вярно неравенството*

$$\sqrt[k]{p_k}\leq q<1 \qquad (\sqrt[k]{p_k}\geq 1), \tag{1.25}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ).

Г. Ако съществува границата

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=L, \tag{1.26}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ при $L<1$ и разходящ при $L>1$.

Теорема Г се нарича обикновено критерий на Коши *в гранична форма*.

Доказателство. Твърдения 1 и Г ще докажем поотделно.

1) За доказателството на теорема 1 да положим $p_k'=q^k$ $(p_k'=1)$. Тогава от неравенствата (1.25) получаваме

$$p_k\leq p_k' \qquad (p_k\geq p_k'). \tag{1.27}$$

Тъй като редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, съвпадащ с реда (1.18) ((1.19)), е сходящ (разходящ), то неравенство (1.27) на основата на теоремата за сравнение 1.3 гарантира сходимостта (разходимостта) на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Теорема 1.6 (1) е доказана.

2) За доказателството на теорема 1.6 (Г) трябва дословно да се повтори схемата на доказателство на теорема 1.5 (Г), като се замени във всички разсъждения $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ с $\sqrt[k]{p_k}$.

Теорема 1.6 е доказана напълно.

Забележки към теорема 1.6

1) Както и в предходната теорема, в теорема 1.6 (1) неравенството $\sqrt[k]{p_k}\leq q<1$ не може да се замени с $\sqrt[k]{p_k}<1$.

2) При $L=1$ критерият на Коши в гранична форма «не работи».

Тези забележки могат да се обосноват веднага чрез двата при-

мера, дадени към съответните забележки към критерия на Даламбер.

3) Възниква въпросът, кой от двата критерия — на Даламбер или на Коши, е по-силен. Да анализираме този въпрос по отношение на критериите на Даламбер и Коши, взети в гранична форма. Може да се докаже, че от съществуването на границата (1.21) следва съществуването на границата (1.26) и равенство на двете граници. (Доказателството е дадено в края на тази част.) Обратното не е вярно. Наистина вижда се, че за реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k+3}{2^{k+1}} \tag{1.28}$$

границата (1.26) съществува и е равна на $\frac{1}{2}$, докато в същото време границата (1.21) не съществува. Следователно критерият на Коши е по-силен от критерия на Даламбер, понеже винаги когато работи критерият на Даламбер, работи и критерият на Коши, но съществуват редове (например редът (1.28)), за които критерият на Коши работи успешно, а критерият на Даламбер не дава резултат. Въпреки това критерият на Даламбер се използва по-често, отколкото критерият на Коши.

Примери. 1) Да изследваме въпроса за сходимостта на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!}. \tag{1.29}$$

Да приложим критерия на Даламбер в гранична форма. Имаме

$$p_k=\frac{(\sqrt{k})^k}{k!},\quad \frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{(\sqrt{k+1})^{k+1}\cdot k!}{(k+1)!\,(\sqrt{k})^k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}. \tag{1.30}$$

От (1.30) следва, че

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}\right\}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}$$
$$=0\,.\,\sqrt{e}=0<1,$$

т. е. редът (1.29) е сходящ.

2) Да разгледаме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,.\,2^{-k}. \tag{1.31}$$

Ще приложим критерия на Коши в гранична форма. Имаме

$$\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\sqrt[k]{k}. \tag{1.32}$$

От равенство (1.32) получаваме* $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=\frac{1}{2}<1$

и от критерия на Коши следва сходимостта на реда (1.31).

В заключение ще докажем, че ако съществува и е равна на L границата (1.21), то съществува и също е равна на L границата (1.26). При доказателството ще използуваме две леми.

Лема 1. *Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща и има граница l, то към същата граница клони и редицата $\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ от средноаритметичните на числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Доказателство. Тъй като редицата $\{a_n\}$ има граница l, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че $|a_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ за всички $n\geqq N$. Фиксираме N и отбелязваме, че при $n>N$ е в сила равенството

$$\sigma_n-l=\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}$$
$$=\left[\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_N-l)}{n}\right]+\left\{\frac{(a_{N+1}-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}\right\}.$$

Модулът на дробта, заключена в големите скоби, не надвишава числото $\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{(n-N)}{n}$, което е по-малко от $\frac{\varepsilon}{2}$. Понеже номерът N е фиксиран, то модулът на дробта, заключена в средните скоби, не надминава $\frac{\varepsilon}{2}$ за всички $n\geqq N_1$, където N_1 е достатъчно голямо число.

Следователно $|\sigma_n-l|<\varepsilon$ при всички $n\geqq N_1$, където N_1 е достатъчно голямо.

Лема 1 е доказана.

Лема 2. Ако редицата от положителни числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е сходяща и има граница L, то към същата граница L клони и редицата от средногеометричните числа

$$b_k=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}.$$

* За намирането на $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ е достатъчно да се логаритмува изразът $x^{\frac{1}{x}}$ и да се приложи правилото на Лопитал.

Доказателство. Преди всичко да отбележим, че от непрекъснатостта на логаритмичната функция получаваме $\lim\limits_{k\to\infty} \ln a_k = \ln L$ при $L>0$. (Последното равенство формално е в сила и при $L=0$, когато $\ln L=-\infty$.) Но тогава по лема 1 за сходимост на средноаритметичните съществува границата

$$\lim_{k\to\infty} \ln \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_k}{k} = \ln L.$$

(Последното равенство е вярно и при $L=0$, когато $\ln L=-\infty$.) От последното равенство и от непрекъснатостта на показателната функция получаваме

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \lim_{k\to\infty} e^{\ln \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}} = e^{\ln L} = L.$$

(Тези разсъждения са верни и при $L=0$.) Лема 2 е доказана.

Като приложим лема 2 към числата $a_1=p_1$, $a_2=\frac{p_2}{p_1}, \ldots, a_k=\frac{p_k}{p_{k-1}}$ и използуваме факта, че границата (1.21) съществува и е равна на L, получаваме, че границата (1.26) съществува и е равна също на L.

4. Интегрален критерий на Коши—Маклорен. Критериите на Даламбер и Коши се оказват непригодни за изясняване на въпроса за сходимост на някои често срещани редове с положителни членове. Така например с помощта на тези критерии не може да се изясни въпросът за сходимост на обобщения хармоничен ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \tag{1.33}$$

(α е произволно реално число).

Всъщност в края на точка 2 установихме, че при $\alpha\leq 1$ редът (1.33) е разходящ, но остава открит въпросът за сходимост на този ред при $\alpha>1$. В тази точка ще докажем един общ критерий за сходимост на редове с неотрицателни членове, от който в частност ще следва сходимостта на реда (1.33) при $\alpha>1$.

Теорема 1.7 (теорема на Коши—Маклорен). Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна и нерастяща върху полуправата $x\geq m$, където m е произволно фиксирано число. Тогава редът

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(m+k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots \tag{1.34}$$

е сходящ тогава и само тогава, когато съществува границата на редицата

$$a_n = \int_m^{m+n} f(x)dx \tag{1.35}$$

при $n\to\infty$.

Доказателство. Нека k е произволен номер, удовлетворяващ условието $k\geq 1$, а x е произволна стойност на аргумента от сегмента $m+k-1\leq x\leq m+k$. Тъй като по условие функцията $f(x)$ е нерастяща в този сегмент, то за всяко x от същия сегмент са верни неравенствата

$$f(m+k)\leq f(x)\leq f(m+k-1). \tag{1.36}$$

Функцията $f(x)$, след като е ограничена и монотонна, е интегруема в интервала $[m+k-1,\ m+k]$ (вж. т. 2, §3, глава 9, част I). Освен това от свойствата на интегралите (вж. свойство 6), т. 2, §4, глава 9, част I) следва, че

$$\int_{m+k-1}^{m+k} f(m+k)dx \leq \int_{m+k-1}^{m+k} f(x)dx \leq \int_{m+k-1}^{m+k} f(m+k-1)dx$$

или

$$f(m+k)\leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq f(m+k-1). \tag{1.37}$$

Неравенствата (1.37) сме доказали за всяко $k\geq 1$. Да запишем тези неравенства за значения на k, равни на $1,2,\ldots,n$, където n е произволен номер. Имаме

$$f(m+1)\leq \int_m^{m+1} f(x)dx \leq f(m),$$

$$f(m+2)\leq \int_{m+1}^{m+2} f(x)dx \leq f(m+1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(n)\leq \int_{m+n-1}^{m+n} f(x)dx \leq f(m+n-1).$$

Като съберем почленно горните неравенства, получаваме

$$\sum_{k=1}^{n} f(m+k) \leq \int_{m}^{m+n} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{m+n-1} f(m+k). \tag{1.38}$$

Да означим с S_n n-тата частична сума на реда (1.34), равна на

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(m+k).$$

Отчитайки означението (1.35), можем да напишем неравенството (1.38) по следния начин:

$$S_n - f(m) \leq a_n \leq S_{n-1}. \tag{1.39}$$

Неравенствата (1.39) позволяват без труд да докажем теоремата. Наистина от формулата (1.35) очевидно следва, че редицата $\{a_n\}$ е ненамаляваща. Следователно, за да бъде тя сходяща, е необходимо и достатъчно да е ограничена. За сходимостта на реда (1.34) предвид теорема 1.2 е необходимо и достатъчно да бъде ограничена редицата $\{S_n\}$. От неравенствата (1.39) следва, че редицата $\{S_n\}$ е ограничена тогава и само тогава, когато е ограничена редицата $\{a_n\}$, т. е. тогава и само тогава, когато е сходяща редицата $\{a_n\}$. Теоремата е доказана.

Примери. 1) Преди всичко да приложим интегралния критерий на Коши—Маклорен за изясняване сходимостта на обобщения хармоничен ред (1.33). Понеже редът (1.33) може да се разглежда като ред от вида (1.34) при $m=1$, $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ и функцията $f(x)$ е намаляваща и положителна върху полуправата $x \geq 1$, то въпросът за сходимостта на реда (1.33) е еквивалентен на въпроса за сходимост на редицата $\{a_n\}$, където

$$a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x=1}^{x=n} = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \left.\ln x\right|_{n=1}^{x=n} = \ln n & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

От вида на елементите a_n следва, че редицата $\{a_n\}$ е разходяща при $\alpha \leq 1$ и сходяща при $\alpha > 1$, при това в последния случай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\alpha-1}$. Следователно редът (1.33) е разходящ при $\alpha \leq 1$ (това вече установихме по-горе по друг начин) и е сходящ при $\alpha > 1$. В частност при $\alpha = 2$ редът (1.33) преминава в реда (1.24), чиято сходимост вече можем да твърдим.

2) Да изследваме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^\beta k}, \tag{1.40}$$

където β е фиксирано положително число. Редът (1.40) може да се разглежда като ред от вида (1.34) при $m=2$ и $f(x)=\frac{1}{x \ln^\beta x}$.

Понеже функцията $f(x)$ е неотрицателна и нерастяща върху полуправата $x \geq 2$, то въпросът за сходимостта на реда (1.40) е еквивалентен на въпроса за сходимост на редицата $\{a_n\}$, където

$$a_n = \int_2^n \frac{dx}{x \ln^\beta x} = \begin{cases} \left.\frac{\ln^{1-\beta} x}{1-\beta}\right|_{x=2}^{x=n} = \frac{\ln^{1-\beta} n - \ln^{1-\beta} 2}{1-\beta} & \text{при } \beta \neq 1, \\ \left.\ln \ln x\right|_{x=2}^{x=n} = \ln \ln n - \ln \ln 2 & \text{при } \beta = 1. \end{cases}$$

От вида на елементите a_n следва, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща при $\beta > 1$ и разходяща при $\beta \leq 1$. Следователно редът (1.40) е сходящ при $\beta > 1$ и разходящ при $\beta \leq 1$.

5. Критерии на Раабе. Критериите на Даламбер и Коши бяха основани на сравнението на разглеждания ред с ред, представляващ сума на геометрична прогресия. Естествено възниква идеята за получаване на по-тънки критерии, основаващи се на сравнение на разглеждания ред с други стандартни редове, сходящи или разходящи «по-бавно» от реда на геометричната прогресия.

В тази точка ще установим един критерий, основаващ се на сравнението на разглеждания ред с изучения в предната точка стандартен ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots \tag{1.41}$$

Теорема 1.8 (критерий на Раабе*). 1. Ако за всички номера k или поне от известен номер нататък е вярно неравенството

$$k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \geq q > 1^{**} \quad \left(k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \leq 1\right), \tag{1.42}$$

то редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ).

* Йозеф Лудвиг Раабе — швейцарски математик (1801—1859).

** Естествено ние предполагаме, че редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ поне от някой номер нататък има строго положителни членове.

Г. Ако съществува границата

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=L, \tag{1.43}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ при $L>1$ и разходящ при $L<1$. Теорема Г обикновено се нарича критерий на Раабе в гранична форма.

Доказателство. Твърденията 1 и Г ще докажем поотделно.

1. За да докажем твърдение 1, да запишем неравенства (1.42) във вида

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq 1-\frac{q}{k}\quad\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geq 1-\frac{1}{k}\right). \tag{1.44}$$

Тъй като $q>1$, то съществува число α такова, че $q>\alpha>1$. Като разложим функцията $(1+x)^\alpha$ по формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Пеано (вж. т. 2, § 9, глава 6, част I), получаваме

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\bar{\bar{o}}(x).$$

Като положим в последното равенство $x=-\frac{1}{k}$, намираме

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha=1-\frac{\alpha}{k}+\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{k}\right). \tag{1.45}$$

Понеже редицата $\dfrac{\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}$ е безкрайно малка, то от някой номер k_0 нататък е в сила неравенството

$$\frac{o\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\leq q-\alpha. \tag{1.46}$$

От (1.45) и (1.46) получаваме неравенството

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha\geq 1-\frac{q}{k}\quad(\text{при } k\geq k_0). \tag{1.47}$$

Като сравним неравенствата (1.44) и (1.47), получаваме

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq\left(1-\frac{1}{k}\right)^\alpha\quad\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geq 1-\frac{1}{k}\right)\quad(\text{при } k\geq k_0).$$

Последните неравенства могат да се запишат още във вида

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq\frac{\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(k-1)^\alpha}}\quad\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geq\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}}\right)\quad(\text{при } k\geq k_0). \tag{1.48}$$

Понеже редът 1.41) е сходящ при $\alpha>1$ и разходящ при $\alpha=1$, то от неравенство (1.48) и теоремата за сравнение 1.4 следва, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ). Теорема 1 е доказана.

2) Точно както при критериите на Даламбер и Коши, ще сведем твърдение Г към твърдението 1. Нека $L>1$. Да положим $\varepsilon=\frac{L-1}{2}$, $q=1+\varepsilon=L-\varepsilon$. По определението за граница от (1.43) следва, че за това ε може да се намери номер k_0 такъв, че $\left|k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)-L\right|<\varepsilon$ при $k>k_0$. Следователно лявото неравенство (1.42) е вярно. Ако $L<1$, то полагаме $\varepsilon=1-L$ и по определението за граница от (1.43) следва, че от някой номер k_0 нататък е в сила дясното неравенство (1.42). Теорема 1.8 е доказана напълно.

Забележка. Ще отбележим, че в теорема 1.8 (I) в лявото неравенство (1.42) не може да се вземе $q=1$ (в такъв случай редът може да не е сходящ). При $L=1$ теорема 1.8 (Г) «не работи» (възможна е и сходимост, и разходимост на реда).

Пример. Да изследваме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k,\ \text{където}\ p_k=a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k-1}\right)},\ a=\text{const}>0.$$

Непосредствено се проверява, че критериите на Даламбер и Коши, приложени към този ред, «не действуват». Да приложим критерия на Раабе. Лесно се проверява, че

$$k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=\frac{a^{-\frac{1}{k}}-1}{-\frac{1}{k}}.$$

Вижда се, че последната дроб при $k\to\infty$ клони към производната на функцията a^x в точката $x=0$, т. е. клони към $\ln a$. Съгласно критерия на Раабе разглежданият ред е сходящ при $\ln a>1$, т. е. при $a>e$, и разходящ при $\ln a<1$, т. е. при $a<e$. При $a=e$ въпросът за сходимостта на разглеждания ред изисква допълнително

изследване, тъй като критерият на Раабе «не работи». Друг пример на ред, за който критерият на Раабе «не работи», е редът (1.40).

6. Универсален ред за сравнение не съществува. Вече отбелязахме, че критериите на Даламбер и Коши се основават на сравнението на разглеждания ред с реда на геометричната прогресия, а критерият на Раабе — на сравнение с по-бавно сходящия (или разходящ) ред (1.41).

Естествено възниква въпросът не съществува ли такъв универсален сходящ (или разходящ) (възможно най-бавно) ред, с който може да бъде сравнен произволен ред с неотрицателни членове.

Ще докажем, че такъв универсален ред не съществува. Нека са дадени два сходящи реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$. Да означим съответно с r_n и r_n' техните n-ти остатъци*. Ще казваме, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ е сходящ по-бавно от реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, ако $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_n'}=0$. Ще докажем, че *за всеки сходящ ред съществува ред, който е по-бавно сходящ от него.* Наистина нека $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е произволен сходящ ред и r_n е неговият n-ти остатък. Ще докажем, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, където $p_k'=\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}$, е по-бавно сходящ от реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$. Наистина ако r_n' е n-тият остатък на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_n'}=\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{\sqrt{r_n}}=0.$$

Сега да докажем, че не съществува универсален сходящ ред, с който може да бъде сравнен произволен ред. Наистина, ако допуснем, че такъв универсален сходящ ред $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ съществува, като вземем за него построения по-горе ред $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, ще имаме

* За r_0 вземаме цялата сума $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'}=\lim_{k\to\infty} \frac{r_{k-1}-r_k}{\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}}=\lim_{k\to\infty} \left(\sqrt{r_{k-1}}+\sqrt{r_k}\right)=0.$$

Следователно от сравнение с реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ не може да се направи заключение за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$. Аналогично се доказва, че не съществува универсален разходящ ред, сравнението с който би позволило да установим разходимостта на произволен разходящ ред.

§ 3. Абсолютно и условно сходящи редове

1. Понятията абсолютно и условно сходящи редове. Преминаваме към изучаването на редове, чиито членове са реални числа с произволен знак.

Определение 1. *Ще казваме, че редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.49}$$

е абсолютно сходящ, ако е сходящ редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \tag{1.50}$$

Да отбележим, че в това определение не се предполага сходимост на самия ред (1.49). Оказва се, че това предположение е излишно, понеже е вярна следната теорема.

Теорема 1.9. *От сходимостта на реда* (1.50) *следва сходимост на реда* (1.49).

Доказателство. Ще използуваме критерия на Коши за сходимост на редове, т.е. теорема 1.1. Трябва да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geq N$, и за всяко естествено p е в сила неравенството

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon. \tag{1.51}$$

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Понеже редът (1.50) е сходящ, то

съгласно теорема 1.1 съществува номер N такъв, че за всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N$, и за всяко естествено p е в сила неравенството

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon. \tag{1.52}$$

От друга страна, валидно е очевидното неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|. \tag{1.53}$$

Като съпоставим неравенства (1.52) и (1.53), получаваме неравенство (1.51). Теоремата е доказана.

Определение 2. *Редът* (1.49) *се нарича условно сходящ, ако е сходящ и в същото време съответният ред от модулите на членовете му* (1.50) *е разходящ.*

Като пример за абсолютно сходящ ред може да служи редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots, \text{ където } \alpha > 1.$$

Този ред е абсолютно сходящ, понеже при $\alpha > 1$ е сходящ редът (1.33). Ще дадем пример за условно сходящ ред. Ще докажем, че е условно сходящ следният ред:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{1.54}$$

Понеже съответният ред от модулите е хармоничният ред, за който знаем, че е разходящ, за да докажем условната сходимост на реда (1.54), е достатъчно да докажем, че този ред е сходящ. Ще докажем, че редът (1.54) има сума $\ln 2$. В т. 2, § 9, глава 6, част I получихме развитието на функцията $\ln(1+x)$ по формулата на Маклорен

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

На същото място за всички x от сегмента $0 \leq x \leq 1$ е получена следната оценка за остатъчния член:

$$\left| R_{n+1}(x) \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Като положим в последните две съотношения $x = 1$, ще имаме

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1),$$

където

$$\left| R_{n+1}(1) \right| < \frac{1}{n+1},$$

или

$$\left| \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right] - \ln 2 \right| < \frac{1}{n+1}. \tag{1.55}$$

Като означим с S_n n-тата частична сума на реда (1.54), можем да запишем неравенство (1.55) във вида

$$\left| S_n - \ln 2 \right| < \frac{1}{n+1}. \tag{1.56}$$

От (1.56) следва, че разликата $S_n - \ln 2$ е безкрайно малка редица. Това доказва сходимостта на реда (1.54) към $\ln 2$.

2. Разместване на членовете в условно сходящ ред. Едно от най-важните свойства на сумите на краен брой реални числа е свойството комутативност. Това свойство твърди, че при разместване на събираемите сборът не се променя. Естествено възниква въпросът, остава ли в сила това свойство за сумата на сходящ ред, т. е. може ли да се измени сумата на сходящ ред при разместване на членовете на този ред. В тази точка ще изясним този въпрос по отношение на условно сходящите редове. Ще започнем нашите разглеждания с изучаването на едно конкретно разместване членовете на реда (1.54). За удобство да запишем реда (1.54) във вида

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}} + \cdots$$

В края на предната точка доказахме, че редът (1.54) е условно сходящ и има сума $\ln 2$. Сега да разместим членовете на реда (1.54) така, че след един положителен член да стоят два отрицателни члена. След такова разместване на членовете получаваме реда

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}} + \cdots \tag{1.57}$$

Ще докажем, че редът (1.57) е сходящ и има сума, два пъти по-малка от сумата на реда (1.54). Да означим с S_m и S'_m m-те частични суми съответно на редовете (1.54) и (1.57). Можем да пишем

$$S'_{3m} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) =$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

И така

(1.58) $$S'_{3m}=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

Очевидно имаме

(1.59) $$S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S_{2m}+\frac{1}{4m},$$

(1.60) $$S'_{3m-2}=S'_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}.$$

Понеже $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}=S$, то след граничен преход при $m\to\infty$ в равенствата (1.58), (1.59) и (1.60) получаваме

$$\lim_{m\to\infty} S'_{3m}=\frac{1}{2}S,\ \lim_{m\to\infty} S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S,\ \lim_{m\to\infty} S'_{3m-2}=\frac{1}{2}S.$$

Оттук следва, че редът (1.57) е сходящ и има сума, равна на $\frac{1}{2}S$. Понеже $S=\ln 2\neq 0$, то е ясно, че $\frac{1}{2}S\neq S$. Следователно в резултат на направеното по-горе разместване на членовете на реда (1.54) сумата му се измени. Разгледаният конкретен пример показва, че условно сходящите редове не притежават свойството комутативност. Пълна яснота по въпроса за влиянието на разместването на членовете върху сумата на условно сходящ ред дава следното забележително твърдение, принадлежащо на Риман.

Теорема 1.10 (теорема на Риман). *Ако един ред е условно сходящ, то за всяко отнапред избрано число L съществува такова разместване на членовете на този ред, че новият ред да е сходящ и сумата му е равна на L.*

Доказателство. Нека

(1.61) $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

е произволен условно сходящ ред. Да означим с $p_1, p_2, p_3, \ldots$ положителните членове на реда (1.61), написани по реда, по който те стоят в реда, а с $q_1, q_2, q_3, \ldots$ модулите на отрицателните членове на реда (1.61), записани в същия ред, по който те стоят в реда. Редът (1.61) съдържа безбройно много както положителни, така и отрицателни членове. Наистина, ако членовете с един и същ знак са краен брой, то условната сходимост няма да се повлияе от премахването на краен брой членове от началото на реда. Същевременно ще получим ред, състоящ се от членове с

еднакъв знак, който е сходящ и значи абсолютно сходящ. И така с реда (1.61) са свързани два безкрайни реда с положителни членове $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k$. Ще означаваме първия ред със символа P, а втория — със символа Q. Ще докажем, че двата реда са разходящи. Да означим с S_n n-тата частична сума на реда (1.61), с P_n — сумата на всички положителни членове, влизащи в S_n, с Q_n — сумата от модулите на отрицателните членове, влизащи в S_n. Тогава очевидно $S_n=P_n-Q_n$ и понеже по условие редът (1.61) е сходящ и има някаква сума S, то

(1.62) $$\lim_{n\to\infty}(P_n-Q_n)=S.$$

От друга страна, понеже редът (1.61) не е абсолютно сходящ, то

(1.63) $$\lim_{n\to\infty}(P_n+Q_n)=+\infty.$$

От (1.62) и (1.63) следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n=+\infty$, т. е. двата реда P и Q са разходящи. От разходимостта на редовете P и Q следва, че даже след премахване на произволен краен брой членове на тези редове можем да изберем както от P, така и от Q такъв брой членове, че тяхната сума да надмине всяко отнапред избрано число. Опирайки се на този факт, ще докажем, че може така да се разместят членовете на изходния ред (1.61), че полученият ред да е сходящ и да има сума, равна на отнапред избрано число L. Ще получим търсения ред по следния начин. Най-напред да изберем от изходния ред (1.61) *точно толкова* положителни членове $p_1, p_2, \ldots, p_{k_1}$ така, че сумата $p_1+p_2+\cdots+p_{k_1}$ да надхвърли L. След това да добавим към избраните вече членове *точно толкова* отрицателни членове $-q_1, -q_2, \ldots, -q_{k_2}$ така, че общата сума $p_1+p_2+\cdots+p_{k_1}-q_1-q_2-\cdots-q_{k_2}$ да стане по-малка от L. След това отново да добавим *точно толкова* положителни членове $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \ldots, p_{k_3}$ така, че общата сума $p_1+p_2+\cdots+p_{k_1}-q_1-q_2-\cdots-q_{k_2}+p_{k_1+1}+\cdots+p_{k_3}$ да стане по-голяма от L. Продължавайки по същия начин по-нататък, ще получим един безкраен ред, в който ще влязат всички членове на изходния ред (1.61), тъй като всеки път ще трябва да добавяме поне един положителен или отрицателен член на изходния ред. Остава да се докаже, че полученият ред е сходящ и има сума L. Да отбележим, че в получения ред последователно има групи от положителни и отрицателни членове. Ако една частична сума на получения ред завършва с напълно завършена група, то отклонението на тази частична сума от числото L няма да надминава модула на послед-

ния неин член*. Ако частичната сума завършва на ненапълно завършена група, то отклонението на тази частична сума от числото L не надминава модула на последния член от предпоследната група. За да докажем сходимостта на реда към L, е достатъчно да се убедим в това, че модулите на последните членове на последователните групи образуват безкрайно малка редица. Това непосредствено следва от необходимото условие за сходимост на изходния ред (1.61). Теоремата на Риман е доказана.

Забележка. Аналогично може да се докаже, че ако един ред е условно сходящ, то неговите членове могат да бъдат разместени така, че редицата от частичните суми на преобразуваният ред да бъде безкрайно голяма, като всички елементи на същата от някой номер нататък са положителни (съответно отрицателни).

3. Разместване членовете на абсолютно сходящ ред. В предния пункт доказахме, че условно сходящите редове не притежават свойството комутативност. В този пункт ще докажем, че абсолютно сходящите редове притежават това свойство.

Теорема 1.11 (теорема на Коши). *Ако един ред е абсолютно сходящ, то всеки ред, получен от него чрез разместване на членовете му, е също абсолютно сходящ и има същата сума, както първоначалният ред.*

Доказателство. Нека редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.64}$$

е абсолютно сходящ и сумата му е равна на S. Нека освен това

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'. \tag{1.65}$$

е ред, получен от реда (1.64) чрез разместване на членовете му. Трябва да докажем: 1) че редът (1.65) е сходящ и има сума, равна на S, 2) че редът (1.65) е абсолютно сходящ. Да докажем най-напред 1). Достатъчно е да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че при $n\geq N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'-S\right|<\varepsilon. \tag{1.66}$$

Нека фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Понеже редът (1.64) е абсолютно

* Тъй като добавяме към дадената група нови членове точно дотогава, докато общата сума «не премине» през числото L.

сходящ и сумата му е равна на S, то за избраното ε съществува номер N_0 такъв, че са в сила неравенствата

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (p \text{ — произволно естествено число}) \tag{1.67}$$

и

$$\left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k-S\right|<\frac{\varepsilon}{2}\,^{*}. \tag{1.68}$$

Сега да изберем номер N така, че всяка частична сума S_n' на реда (1.65) с номер n, надминаващ N, да съдържа първите N_0 членове на реда (1.64)**.

Ще оценим разликата, стояща в лявата страна на (1.66), и ще докажем, че при $n\geq N$ за тази разлика е в сила неравенство (1.66).

Наистина посочената разлика може да се представи във вида

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'-S=\left(\sum_{k=1}^{n} u_k'-\sum_{k=1}^{N_0} u_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k-S\right). \tag{1.69}$$

Понеже модулът на сума от две числа не надминава сумата от модулите им, то от (1.69) следва, че

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'-S\right|\leq\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'-\sum_{k=1}^{N_0} u_k\right|+\left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k-S\right|. \tag{1.70}$$

От неравенствата (1.68) и (1.70) очевидно следва, че за доказателството на неравенство (1.66) е достатъчно да се докаже при $n\geq N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'-\sum_{k=1}^{N_0} u_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.71}$$

За доказателството на неравенството (1.71) отбелязваме, че при $n\geq N$ първата от сумите, стоящи в лявата страна на (1.71), съдържа всичките N_0 начални членове на реда (1.64). Следователно разликата

* Номерът N_0 в неравенствата (1.67) и (1.68) може да се вземе един и същ. Наистина, ако предварително напишем посочените неравенства с различни номера N_0, то след това можем да вземем по-големия от двата номера N_0.

** Такъв номер N може да бъде избран, тъй като редът (1.65) се получава от (1.64) чрез разместване на някои членове.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \tag{1.72}$$

представлява сума на $(n-N_0)$ члена на реда (1.64) с номера, *не надминаващи* N_0.

Ако изберем естественото число p толкова голямо, че номерът N_0+p да надминава номерата на всичките $(n-N_0)$ членове на токущо посочената сума, то за разликата (1.72) е вярно неравенството

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| \leq \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|. \tag{1.73}$$

От неравенства (1.73) и (1.67) следва неравенство (1.71). С това е доказано неравенство (1.66), т. е. доказано е, че редът (1.65) е сходящ и има сума, равна на S. Остава да докажем твърдение 2) за това, че редът (1.65) е абсолютно сходящ. Доказателството на това твърдение следва от твърдение 1), ако го приложим към редовете

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} |u_k'|. \tag{1.74}$$

По този начин ще докажем сходимостта на втория ред от (1.74), т. е. ще докажем абсолютната сходимост на реда (1.65). Теорема 1.11 е напълно доказана.

§ 4. Критерии за сходимост на произволни редове

В § 2 получихме критерии за сходимост на редове с неотрицателни членове. В този параграф ще изучим критерии за сходимост на редове, чиито членове имат произволен знак. И така нека

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.75}$$

е ред, чиито членове имат произволен знак. Преди всичко ще отбележим, че за да изследваме абсолютната сходимост на този ред, т. е. за да изследваме сходимостта на реда с положителни членове

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|, \tag{1.76}$$

можем да приложим всеки от критериите от § 2 (критериите на Даламбер, Коши, Раабе и интегралния критерий). Но нито един от посочените критерии не може да се приложи за изясняването на по-тънкия въпрос за условната сходимост на реда (1.75)*.

По-долу ще се заемем с намирането на по-тънки критерии, позволяващи да се докаже сходимостта на реда (1.75) и в тези случаи, когато редът не е абсолютно сходящ.

Ще започнем нашите разглеждания с извода на едно важно тъждество, което представлява основен инструмент за доказателството на формулираните по-долу критерии.

Нека $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ са две произволни редици, $S_k=u_1+u_2+\dots+u_k$, n и p са два произволни номера. Тогава вярно е следното тъждество:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} \cdot v_{n+1} - S_n v_{n+1}, \tag{1.77}$$

което се нарича преобразование на Абел.

Понеже за всяко $k \geq 2$ е вярно равенството $u_k = S_k - S_{k-1}$, то лявата страна на (1.77) може да се представи във вида

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k \cdot v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} \cdot v_k. \tag{1.78}$$

В последната сума в дясната страна на (1.78) да сменим индекса на сумиране k с $k-1$. Получаваме

* Да отбележим, че критериите на Даламбер и Коши могат да се прилагат за доказателство на разходимостта на реда (1.75), чиито членове имат произволни знаци. Наистина във всеки случай, когато критерият на Даламбер или Коши констатира разходимостта на реда от модулите $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$, k-тият член на реда (1.76) $|u_k|$ не клони към нула при $k \to \infty$, т. е. редът (1.75) е разходящ. Като пример ще докажем, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} k! \left(\frac{x}{k}\right)^k$ е разходящ при всяко фиксирано x, удовлетворяващо неравенството $|x| > e$. Нека подчертаем, че непосредствената проверка на факта, че k-тият член на разглеждания ред клони към нула при $k \to \infty$, е затруднително. Ще приложим критерия на Даламбер към разглеждания ред. Като означим с a_k k-тия член на този ред, ще имаме $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$, откъдето $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|}{e} > 1$. Разходимостта на реда е доказана.

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k \cdot v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) +$$
$$+ S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}.$$

С това тъждеството на Абел е доказано.

Определение. *Редицата $\{v_k\}$ се нарича редица с ограничена вариация, ако е сходящ редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|. \tag{1.79}$$

Очевидно *всяка редица с ограничена вариация е сходяща.*

Наистина от сходимостта на реда от модулите (1.79) следва сходимостта на реда без модулите

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1} - v_k]. \tag{1.80}$$

Като означим с S сумата на реда (1.80), а с S_n — n-тата частична сума на този ред и като отчетем, че $S_n = v_{n+1} - v_1$, получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_{n+1}$ съществува и е равна на $S + v_1$. Това означава, че редицата $\{v_k\}$ е сходяща и има граница $S + v_1$.

Теорема 1.12 (първи критерий на Абел). *Ако редицата от частичните суми на реда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.81}$$

е ограничена, а $\{v_k\}$ е редица с ограничена вариация, която клони към нула, то редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \tag{1.82}$$

е сходящ.

Доказателство. По условие съществува число $M > 0$ такова, че редицата от частичните суми $\{S\}$ на реда (1.81) удовлетворява условието $|S_n| \leq M$.

Да фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и заедно с него номер N такъв, че при $n \geq N$ и за произволно естествено p са в сила неравенствата

$$|v_n| < \frac{\varepsilon}{3M}, \tag{1.83}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{1.84}$$

(Тук ние използувахме, че редицата $\{v_k\}$ клони към нула и че редът (1.79) е сходящ.)

От тъждеството на Абел (1.77) и от факта, че модулът на сума от три числа не надминава сумата от техните модули, получаваме

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1})\right| + |S_{n+p}||v_{n+p}| + |S_n||v_{n+1}|.$$

Като вземем под внимание, че за всеки номер n е в сила неравенството $|S_n| \leq M$, получаваме

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| + M|v_{n+p}| + M \cdot |v_{n+1}|.$$

Като съпоставим последното неравенство с (1.83) и (1.84), получаваме, че при $n \geq N$ и за произволно естествено p

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon, \tag{1.85}$$

а това означава, че редът (1.82) е сходящ (по критерия на Коши).

Теорема 1.12 е доказана.

Теорема 1.13 (втори критерий на Абел). *Ако редът (1.18) е сходящ, а $\{v_k\}$ е произволна редица с ограничена вариация, то редът (1.82) е сходящ.*

Доказателство. Тъй като сходящият ред (1.81) има сходяща, а значи и ограничена редица от частични суми $\{S_n\}$, то съществува константа $M > 0$ такава, че $|S_n| \leq M$ за всички номера n.

Да означим с S сумата на реда (1.81), а с v границата на редицата $\{v_k\}$. Тогава можем да твърдим, че всяка от редиците $\{S_n \cdot v_n\}$ и $\{S_n v_{n+1}\}$ клони към $S \cdot v$ при $n \to \infty$ и следователно всяка от редиците

$$\{S_n v_n - Sv\} \quad \text{и} \quad \{S_n v_{n+1} - Sv\} \tag{1.86}$$

е безкрайно малка.

Отчитайки това и сходимостта на реда (1.79) и фиксирайки произволно $\varepsilon > 0$, можем да намерим номер N такъв, че за всяко $n \geq N$ и за произволно естествено p да имаме

$$|S_n v_n - Sv| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |S_n v_{n+1} - Sv| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{1.87}$$

Неравенствата (1.87), оценката $|S_n| \leqq M$ и тъждеството на Абел (1.77), което можем да запишем във вида

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + [S_{n+p} v_{n+p} - Sv] + [S \cdot v - S_n v_{n+1}],$$

ни позволяват да твърдим, че е в сила неравенство (1.85) (при всички $n \geqq N$ и за произволно естествено p). Съгласно критерия на Коши теорема 1.13 е доказана.

Следствие 1 от теорема 1.12 (критерий на Дирихле—Абел). *Ако редицата от частичните суми на реда (1.81) е ограничена, а редицата $\{v_k\}$ нерастяща и клони към нула, то редът (1.82) е сходящ.*

Достатъчно е да се забележи, че нерастящата редица $\{v_k\}$, която клони към нула, има ограничена вариация, понеже n-тата частична сума S_n на реда (1.79) е равна на $v_1 - v_{n+1}$ и има граница, равна на v_1.

За да формулираме още едно следствие от теорема 1.12, ще въведем понятието ред на Лайбниц.

Ще казваме, че един ред е с алтернативно сменящи се знаци, ако всички членове на реда с нечетни номера са положителни, а всички членове с четни номера — отрицателни.

Ще казваме, че един ред е ред на Лайбниц, ако той е с алтернативно сменящи се знаци и модулите на членовете му образуват нерастяща и сходяща към нула редица.

Следствие 2 от теорема 1.12 (критерий на Лайбниц). *Ако един ред е ред на Лайбниц, то той е сходящ.*

Наистина всеки ред на Лайбниц може да се запише във вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot v_k = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots, \tag{1.88}$$

където $\{v_k\}$ е нерастяща и клоняща към нула редица (всички $v_k > 0$).

Горният ред е частен случай на реда (1.82) при $u_k = (-1)^{k-1}$, като редът (1.81) е с ограничена редица от частичните суми*. Следователно критерият на Лайбниц следва непосредствено от доказания вече критерий на Дирихле—Абел (следствие 1 от теорема 1.12).

Забележка. Лесно се вижда, че за произволен ред на Лайбниц (1.88) редицата $\{S_{2n}\}$ от частичните суми с четни номера е ненамаляваща, а редицата $\{S_{2n-1}\}$ от частичните суми с нечетни номера е нерастяща. Оттук и от забележка 3 към теорема 3.15 от

* Редицата от частичните суми на реда (1.81) с членове $u_k = (-1)^{k-1}$ ще има вида 1, 0, 1, 0, . . .

част 1 следва, че сумата S на реда на Лайбниц (1.88) за всеки номер n удовлетворява неравенствата

$$S_{2n} \leqq S \leqq S_{2n-1},$$

и понеже $S_{2n-1} - S_{2n} = v_{2n}$, то всяка от сумите S_{2n} и S_{2n-1} се отличава от S с не повече от v_{2n}. Оттук и от факта, че $v_{2n-1} \geqq v_{2n}$, следва, че за произволен номер n е в сила оценката

$$|S_n - S| \leqq v_n.$$

Тази оценка играе важна роля при приближеното пресмятане на сумите на редовете на Лайбниц с помощта на техните частични суми.

Ще дадем примери за използване на доказаните критерии.

1°. По-горе чрез формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$ ние доказахме сходимостта на реда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \cdots$

Да отбележим, че сходимостта на този ред следва непосредствено от критерия на Лайбниц.

2°. Ще изучим въпроса за сходимостта на реда

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k} + \cdots$$

Този ред е ред от вида (1.82) при $v_k = \frac{1}{k}$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -2$, $u_4 = 1$, $u_5 = 1$, $u_6 = -2$, . . .

Вижда се, че редицата от частичните суми на реда (1.81) с такива u_k има вида 1, 2, 0, 1, 2, 0, . . ., т.е. същата е ограничена.

Тъй като редицата $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ е нерастяща и клони към нула, то разглежданият ред е сходящ по критерия на Дирихле—Абел.

3°. Да изясним въпроса за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$, където x е някое фиксирано реално число. Като използуваме означенията на теорема 1.13, да положим $u_k = \cos kx$, $v_k = \frac{1}{k}$. Да оценим редицата от частичните суми $\{S_n\}$ на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Понеже за всеки номер k имаме

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx,$$

то като сумираме тези равенства по k от 1 до n, ще получим

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=2S_n\cdot\sin\frac{x}{2}.$$

Оттук

$$S_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Следователно за всяко x, което *не е кратно на* 2π, редицата от частичните суми $\{S_n\}$ е ограничена:

$$|S_n|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Съгласно теорема 1.13 *разглежданият ред е сходящ за всяко x, което не е кратно на* 2π. Ако x е кратно на 2π, то разглежданият ред се превръща в хармоничния ред и, както беше доказано по-преди, е разходящ.

§ 5. Аритметични действия със сходящи редове

В този параграф ще разгледаме въпроса за почленно събиране и за умножение на сходящи редове.

Теорема 1.14. *Ако редовете* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ *са сходящи и имат суми съответно равни на U и V, то редът* $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k\pm v_k)$ *е също сходящ и има сума, равна на* $U\pm V$.

Доказателство. Да означим с S_n, U_n и V_n n-тите частични суми съответно на редовете $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k\pm v_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$. Тогава очевидно $S_n=U_n\pm V_n$. Тъй като $\lim_{n\to\infty}U_n=U$, $\lim_{n\to\infty}V_n=V$, то съгласно теореми 3.9 и 3.10 от глава 3, част I съществува границата $\lim_{n\to\infty}Sn=U\pm V$. Теоремата е доказана.

И така можем почленно да събираме и изваждаме сходящи редове.

Преминаваме към въпроса за почленно умножаване на редове.

Теорема 1.15. *Ако двата реда* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ *и* $\sum_{l=1}^{\infty}v_l$ *са абсолютно сходящи и имат суми, съответно равни на U и V, то редът, съставен от всички произведения от вида* $u_k.v_l$ $(k=1, 2, \ldots; l=1, 2, \ldots)$, *номерирани в произволен ред, също е абсолютно сходящ и сумата му е равна на* $U.V$.

Доказателство. Да означим с $w_1, w_2, w_3, \ldots$ произведенията от вида u_kv_l $(k=1, 2, \ldots; l=1, 2, \ldots)$, номерирани в произволен ред. Ще докажем, че редът $\sum_{i=1}^{\infty}|w_i|$ е сходящ. Нека S_n е n-тата частична сума на този ред. Сумата S_n се състои от членове от вида $|u_kv_l|$. Измежду индексите k и l на членовете, влизащи в S_n, съществува най-голям индекс, който да означим с m. Тогава очевидно

$$(1.89)\qquad S_n\leq(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_m|)(|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_m|).$$

В дясната страна на неравенството (1.89) стои произведението на m-тите частични суми на редовете $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|$. По предположение тези редове са сходящи и следователно всички техни частични суми (значи и всички произведения от частични суми) са ограничени. Следователно ограничена е и редицата от частичните суми $\{S_n\}$. Оттук следва сходимостта на реда $\sum_{i=1}^{\infty}|w_i|$, т. е. абсолютната сходимост на реда $\sum_{i=1}^{\infty}w_i$.

Остава да се докаже, че последният ред има сума S, равна на $U.V$. Понеже този ред е абсолютно сходящ, то съгласно теорема 1.11 неговата сума S не зависи от реда, по който ние го сумираме. Произволна редица (а значи и подредица*) от частични суми на този ред клони към S. Но в такъв случай сумата S на реда $\sum_{i=1}^{\infty}w_i$ е сигурно равна на $U.V$, тъй като именно към това число клони подредицата W_m от частични суми на този ред от вида $W_m=(u_1+u_2+\cdots+u_m)(v_1+v_2+\cdots+v_m)$. Теоремата е доказана.

* Вж. твърдение 1° от т. 1, § 3, глава 3, част I.

Произведението на редовете $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ за много цели е удобно да се записва във вида

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right)=$$

$$=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots+(u_1v_k+u_2v_{k-1}+\cdots+u_kv_1)+\cdots$$

Мертенс е доказал следното твърдение: *всеки ред, който е получен при умножението на два реда по посочения начин, е сходящ и сумата му е равна на произведението от сумите на тези два реда, при условие че единият от умножените редове е абсолютно сходящ, а другият е сходящ.*

Нека например редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е абсолютно сходящ, а редът $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ е сходящ. Да означим с U_n и V_n n частични суми съответно на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, а съответно с U и V — техните суми. Да положим $w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1$, $W_n=w_1+w_2+\cdots+w_n$. Достатъчно е да докажем, че $\lim_{n\to\infty} W_n=U\,.\,V$. Елементарно се проверява, че $W_n=u_1V_n+u_2V_{n-1}+\cdots+u_nV_1$.

От сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ следва, че неговият остатък $\alpha_n=V-V_n$ е безкрайно малка, а значи и ограничена редица, т. е. съществува константа M такава, че $|\alpha_n|\leq M$ за всички номера n. Вижда се, че

$$W_n=u_1(V-\alpha_n)+u_2(V-\alpha_{n-1})+\cdots+u_n(V-\alpha_1)=U_n\,.\,V-\beta_n,$$

където

$$\beta_n=u_1\alpha_n+u_2\alpha_{n-1}+\cdots+u_n\alpha_1.$$

Тъй като $\lim_{n\to\infty} U_n=U$, то за нашата цел е достатъчно да докажем, че $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка редица. Понеже редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е абсолютно сходящ, то за произволно $\varepsilon>0$ съществува номер m такъв, че $\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|<\frac{\varepsilon}{2M}$. Освен това по същата причина съществува константа M_1 такава, че $\sum_{k=1}^{n} |u_k|\leq M_1$ за всеки номер n.

Сега да представим β_n във вида

$$\beta_n=[u_1\alpha_n+\cdots+u_m\,.\,\alpha_{n+1-m}]+[u_{m+1}\,.\,\alpha_{n-m}+\cdots+u_n\,.\,\alpha_1]$$

и да изберем в зависимост от m номер n_1 толкова голям, че $|\alpha_k|<\frac{\varepsilon}{2M_1}$ при $k>n_1-m$ (това може да се направи, тъй като редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка). Следните четири неравенства

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|<\frac{\varepsilon}{2M};\quad \sum_{k=1}^{n} |u_k|<M_1;\ |\alpha_n|\leq M \text{ и } |\alpha_k|<\frac{\varepsilon}{2M_1} \text{ (при } k>n_1-m)$$

ни позволяват да се убедим, че при $n\geq n_1$ всеки израз в средните скоби в представянето на β_n по модул не надминава $\frac{\varepsilon}{2}$. Оттук следва, че $|\beta_n|<\varepsilon$ при $n\geq n_1$ и понеже ε е произволно положително число, то формулираното твърдение е доказано.

Забележка. В случай че двата реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ са само условно сходящи, то тяхното почленно умножение даже по указания по-горе специален начин дава в общия случай разходящ ред.

Например, ако редовете $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ съвпадат с условно сходящия по критерия на Лайбниц ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, то за такива редове определената по-горе величина w има вида

$$w_n=(-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1}\,.\,\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\,.\,\sqrt{1}}\right\}.$$

Тъй като в средните скоби има n положителни събираеми, всяко от които е не по-малко от числото $\frac{1}{n}$, то $|w_n|\geq 1$, а това показва, че е нарушено необходимото условие за сходимост на реда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ — n-тият член на реда да клони към нула.

§ 6. Безкрайни произведения

1. Основни понятия. С понятието числов ред е тясно свързано понятието *безкрайно числово произведение*. Нека е дадена една безкрайна числова редица $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ Написаният формално израз

$$v_1 . v_2 . v_3 \ldots v_k \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k \tag{1.90}$$

се нарича безкрайно произведение. Отделните елементи v_k се наричат членове на даденото произведение. Произведението на първите n члена на даденото произведение се нарича n-то частично произведение и се означава със символа

$$P_n = v_1 . v_2 . \ldots v_n = \prod_{k=1}^{n} v_k.$$

Безкрайното произведение (1.90) се нарича сходящо, ако редицата от частичните произведения P_n има крайна граница P, различна от нула*. Ако безкрайното произведение (1.90) е сходящо, посочената граница P се нарича стойност на това безкрайно произведение, т. е. пише се

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Да подчертаем, че последното равенство има смисъл само за сходящи безкрайни произведения. Ясно е, че разглеждането на безкрайните произведения е по същество форма на изучаване на числовите редици, тъй като на всяко безкрайно произведение се съпоставя еднозначно редицата от частичните му произведения и на всяка числова редица $\{P_k\}$, всички членове на която са различни от нула, се съпоставя еднозначно безкрайно произведение, за което тази редица е редицата от частичните произведения (достатъчно е членовете на безкрайното произведение да се положат равни на $v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$ при $k > 1$ и $v_1 = P_1$).

Теорема 1.16. *Необходимо условие за сходимостта на безкрайното произведение (1.90) е k-тият член на това произведение да клони към единица при $k \to \infty$.*

* При $P=0$ безкрайното произведение е прието да се счита разходящо. Както ще видим по-долу, това позволява да се направи ясна аналогия между сходимостта на редовете и безкрайните произведения.

Доказателство. Нека безкрайното произведение (1.90) е сходящо и има стойност P, различна от нула. Тогава имаме $\lim\limits_{k\to\infty} P_{k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} P_k = P \neq 0$. Понеже $v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} v_k$ съществува и е равна на единица.

Да отбележим, че сходимостта на едно безкрайно произведение не се влияе от отстраняването на произволен краен брой членове на произведението (естествено, ако сред тези членове няма равни на нула). Понеже безкрайно произведение, в което поне един член е равен на нула, съгласно приетото по-горе определение е разходящо, то по-нататък ние изобщо не разглеждаме безкрайни произведения, в които, макар и един член е равен на нула.

Примери за безкрайни произведения

1.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} = \cos \frac{x}{2} . \cos \frac{x}{4} \ldots \cos \frac{x}{2^n} \ldots \tag{1.91}$$

(x—произволно фиксирано число).

Ще докажем, че безкрайното произведение (1.91) е сходящо за всяко $x \neq \pi . n$ и има стойност $\frac{\sin x}{x}$. Да пресметнем n-тото частично произведение

$$P_n = \cos \frac{x}{2} . \cos \frac{x}{4} \ldots . \cos \frac{x}{2^n}. \tag{1.92}$$

Като умножим двете страни на (1.92) със $\sin \frac{x}{2^n}$ и използуваме последователно формулата за синус от двоен ъгъл $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$, получаваме

$$P_n . \sin \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sin x.$$

От последната формула* намираме

$$P_n = \frac{\sin x}{x} \left\{ \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \right\}.$$

Понеже изразът в големите скоби клони към единица при $n \to \infty$, то

* Считаме, че $x \neq 0$. Ако $x=0$, то всички членове на (1.91) и неговата стойност са равни на единица.

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ съществува и е равна на $\frac{\sin x}{x}$. Следователно доказано е, че безкрайното произведение (1.91) е сходящо и има стойност $\frac{\sin x}{x}$ за всяко $x \neq \pi . n$.

2.

$$(1.93)\qquad 2.\prod_{k=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{k(k+1)}\right]=\prod_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{(k-1)}{k}\cdot\frac{(k+2)}{(k+1)}\cdots$$

Ще докажем, че безкрайното произведение (1.93) е сходящо и има стойност $\frac{1}{3}$. Да пресметнем частичното произведение P_n:

$$P_n=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{(n-1)}{n}}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{(n+2)}{(n+1)}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}.$$

Оттук следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}$ съществува и е равна на $\frac{1}{3}$.

2. Връзка между сходимостта на безкрайни произведения и на редове. Ако безкрайното произведение (1.90) е сходящо, то съгласно теорема 1.16 $\lim\limits_{k\to\infty} v_k=1$ и следователно всички негови членове v_k от някой номер k_0 нататък са положителни. Понеже краен брой начални членове изобщо не влияят на сходимостта на безкрайното произведение, то при изучаването на въпроса за сходимостта на безкрайните произведения без ограничение на общността можем да разглеждаме само безкрайни произведения с положителни членове.

Теорема 1.17. *За да бъде безкрайното произведение* (1.90) *с положителни членове сходящо, е необходимо и достатъчно да бъде сходящ редът*

$$(1.94)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\ln v_k.$$

В случай на сходимост сумата S на реда (1.94) и стойността P на произведението (1.90) са свързани с равенството

$$(1.95)\qquad P=e^S.$$

Доказателство. Да означим с P_n n-тото частично произведение на безкрайното произведение (1.90), а с S_n — n-тата частична сума на реда (1.94). Имаме

$$S_n=\ln P_n,\quad P_n=e^{S_n}.$$

От непрекъснатостта на показателната и логаритмичната функция следва, че редицата P_n е сходяща тогава и само тогава, когато е сходяща редицата S_n, при това, ако $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=e^S$. Теоремата е доказана.

При изследването на сходимостта на едно безкрайно произведение е удобно това произведение да се представи във вида

$$(1.96)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_k)\ldots$$

При това съгласно възприетото по-горе предположение считаме, че $u_k>-1$.

Теорема 1.17 твърди, че въпросът за сходимостта на произведението (1.96) е еквивалентен на въпроса за сходимостта на реда

$$(1.97)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+u_k).$$

Сега можем да докажем още едно твърдение.

Теорема 1.18. *Ако всички u_k (или поне от някой номер k_0 нататък) имат един и същ знак, то за сходимостта на безкрайното произведение* (1.96) *е необходимо и достатъчно да бъде сходящ редът*

$$(1.98)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}u_k.$$

Доказателство. Понеже условието $\lim\limits_{k\to\infty} u_k=0$ е необходимо и за сходимостта на реда (1.98), и за сходимостта на произведението (1.96), ще считаме, че това условие е изпълнено както при доказателството на необходимостта, така и при доказателството на достатъчността. Но от посоченото условие и от асимптотичното равенство*

$$\ln(1+y)=y+\bar{o}(y)$$

следва, че

$$(1.99)\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+u_k)}{u_k}=1$$

и

* Вж. т. 6, § 10, глава 5, част I.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{\ln(1+u_k)} = 1. \tag{1.100}$$

Понеже по условие от известен номер k_0 нататък всички членове имат един и същ знак, то от условията (1.99) и (1.100) и от теоремата за сравнение 1.3 следва, че редът (1.98) е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът (1.97). Теоремата е доказана.

Примери. 1) От разходимостта на хармоничния ред и от теорема 1.18 следва разходимостта на следните безкрайни произведения:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+1)}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)}\right).$$

Вижда се, че първото произведение е разходящо към $+\infty$, а второто — към нула.

2) От същата теорема 1.18 и от сходимостта на реда (1.33) при $\alpha>1$ следва сходимостта при $\alpha>1$ на следните безкрайни произведения:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^{\alpha}}\right)=(1+1)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{3^{\alpha}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\cdots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{\alpha}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right)\cdots$$

Както и при редовете за безкрайните произведения, се въвеждат понятията абсолютна и условна сходимост. Безкрайното произведение (1.96) се нарича абсолютно сходящо тогава и само тогава, когато е абсолютно сходящ редът (1.97). Теоремите на Коши 1.11 и Риман 1.10 позволяват да се заключи, че абсолютно сходящите произведения притежават свойството комутативност, докато в същото време условно сходящите произведения не притежават това свойство.

Доказателството на следното твърдение оставяме на читателя.

Теорема 1.19. *Безкрайното произведение (1.96) е абсолютно сходящо тогава и само тогава, когато е абсолютно сходящ редът (1.98).*

Упътване. За доказателството на тази теорема е достатъчно

да се докаже, че редът $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът $\sum_{k=1}^{\infty}|\ln(1+u_k)|$. Това следва лесно от съществуването на границите (1.99) и (1.100).

Накрая ще разгледаме още няколко примера.

1°. Да разгледаме безкрайното произведение

$$x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\cdots \tag{1.101}$$

Тъй като редът $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ е сходящ, като използуваме теорема 13.19, заключаваме, че безкрайното произведение (1.101) е абсолютно сходящо за фиксирано x, различно от $l\pi$ (където $l=0, \pm1, \ldots$). В т. 3 ще докажем, че това произведение има стойност $\sin x$. По така начин ще получим разлагането на функцията $\sin x$ в безкрайно произведение

$$\sin x = x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{1.102}$$

2°. От разлагането (1.102) и от съотношението $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$ се получава непосредствено следното разлагане:

$$\cos x=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right]. \tag{1.103}$$

Абсолютната сходимост на произведението в дясната страна на (1.103) за всяко x, различно от $\frac{\pi}{2}(2l-1)$ ($l=0, \pm1, \ldots$), следва от теорема 1.19 и от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

3°. Като положим в разлагането (1.102) $x=\frac{\pi}{2}$, получаваме

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}. \tag{1.104}$$

От (1.104) получаваме така наречената формула на Валис*

* Джон Валис — английски математик (1616—1703).

$$(1.105)\qquad \frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2k}{(2k-1)}\cdot\frac{2k}{(2k+1)}\cdots$$

С прости преобразувания формулата на Валис може да се приведе във вида

$$(1.106)\qquad \frac{\pi}{2}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\left[\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\right]^2.$$

Първоначално формулата на Валис е била използувана за приближено пресмятане на числото π. Понастоящем за пресмятането на π съществуват по-ефикасни методи. Формулата на Валис (1.105) и (1.106) представлява интерес за редица теоретични изследвания*.

3. Разлагане на функцията $\sin x$ в безкрайно произведение. За удобство ще разделим извода на формула (1.102) на няколко части.

1°. Нека m е произволно положително нечетно число: $m=2n+1$. Преди всичко ще докажем, че за всяка различна от $k\pi$ $(k=0,\pm1,\ldots)$ стойност на θ** е в сила следното равенство:

$$(1.107)\qquad \frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}\right),\ n=\frac{m-1}{2}.$$

За да докажем равенство (1.107), ще използуваме формулата на Муавър***

$$\cos m\theta+i\sin m\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^m.$$

Като представим дясната страна на това равенство по формулата на Нютон и сравним имагинерните части, получаваме

$$\sin m\theta=m\cos^{m-1}\theta\,.\,\sin\theta-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}\theta\,.\,\sin^3\theta+\cdots$$

Отчитайки, че $m=2n+1$, намираме

$$(1.108)\qquad \frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=\cos^{2n}\theta-\frac{(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta+\cdots$$

В дясната страна на (1.108) всички степенни показатели на косинусите и синусите са четни. Следователно, ако заменим $\cos^2\theta$ с $1-\sin^2\theta$, то в дясната страна на (1.108) ще се получи *полином от n-та степен* по отношение на $\sin^2\theta$. Полагайки $z=\sin^2\theta$, да означим този полином с $F(z)$, а неговите корени с $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Тъй като $z=\sin^2\theta\to0$ при $\theta\to0$ и лявата страна на (1.108) клони към единица при $\theta\to0$, то полиномът $F(z)$ може да се представи във вида

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=F(z)=\left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Остана да намерим корените $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Като забележим, че тези корени съответствуват на нулите на функцията $\sin m\theta$, получаваме

$$\alpha_1=\sin^2\frac{\pi}{m},\ \alpha_2=\sin^2\frac{2\pi}{m},\ \ldots,\ \alpha_n=\sin^2\frac{n\pi}{m}.$$

И така равенство (1.107) е доказано.

2°. Като положим в (1.107) $\theta=\frac{x}{m}$ и считайки, че $0<|x|<\pi m$, получаваме

$$(1.109)\qquad \frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right).$$

Фиксираме произволно (различно от нула) x и избираме произволни естествени числа p и n такива, че $2\frac{|x|}{\pi}<p<n=\frac{m-1}{2}$. Тогава равенство (1.109) може да се запише във вида

$$(1.110)\qquad \frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}}=\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right).R_p(x),$$

където

$$(1.111)\qquad R_p(x)=\prod_{k=p+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right).$$

Най-напред ще оценим $R_p(x)$. Понеже $2\frac{|x|}{\pi}<p<n=\frac{m-1}{2}$, то аргументите на всички синуси, намиращи се в равенство (1.111), принадлежат на интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Освен това ясно е, че за

* В частност тя може да бъде използувана за доказателството на така наречената формула на Стирлинг (вж. § 6, глава 7). Джеймс Стирлинг — английски математик (1692—1770).

** В бъдеще ще разглеждаме само стойности на θ, за които $0<|\theta|<\pi$.

*** Тази формула се получава от определението за произведение на две комплексни числа $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$, (вж. т. I, § 3, гл. 8, част I). Наистина по индукция лесно се доказва чрез това определение, че $(\cos\theta,\sin\theta)^n=(\cos n\theta,\sin n\theta)$.

всички k, участвуващи в това равенство, имаме $|x|<\frac{k\pi}{2}$ и следователно

$$0<\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{\sin^2\frac{k\pi}{2m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}=\frac{1}{4\cos^2\frac{k\pi}{2m}}<\frac{1}{2}$$

(имаме $\frac{k\pi}{m}<\frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{k\pi}{2m}<\frac{\pi}{4}$ и затова $\cos^2\frac{k\pi}{2m}>\frac{1}{2}$). Тъй като за всяко β от интервала $0<\beta<\frac{1}{2}$ са в сила неравенствата $1>1-\beta>e^{-2\beta}$*, то за всички номера k, които надминават p, имаме

$$1>1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}>e^{-2\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}. \tag{1.112}$$

Като умножим почленно неравенствата (1.112), записани при $k=p+1, p+2, \ldots, n$, получаваме следната оценка:

$$1>R_p(x)>e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}. \tag{1.113}$$

Знаем, че $\frac{k\pi}{m}<\frac{\pi}{2}$ и че за всяко β, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, имаме $1\geq\frac{\sin\beta}{\beta}\geq\frac{2}{\pi}$**, поради което

$$\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\frac{k\pi}{m}\right)^2}=\frac{n^2}{4k^2}<\frac{m^2}{4}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right).$$

Следователно

$$e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}>e^{-\frac{m^2}{2}\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)}\geq e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}.$$

* Дясното от тези неравенства следва елементарно от формулата на Маклорен: $e^{-2\beta}=1-2\beta+\frac{(2\beta)^2}{2}-\cdots<1-2\beta+2\beta^2<1-\beta$, тъй като $2\beta^2<\beta$.

** Тези неравенства следват от факта, че частното $\frac{\sin\beta}{\beta}$ намалява от 1 до $\frac{2}{\pi}$, когато β се мени от 0 до $\frac{\pi}{2}$. От своя страна функцията $\frac{\sin\beta}{\beta}$ намалява, тъй като $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^1=\frac{\cos\beta}{\beta^2}(\beta-\operatorname{tg}\beta)<0$ при $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Последното неравенство позволява да се усили оценка (1.113) по следния начин:

$$1>R_p(x)>e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}. \tag{1.114}$$

3°. Сега да оставим в равенство (1.110) m да клони към безкрайност при фиксирани стойности на x и номера p. Тъй като $\lim\limits_{m\to\infty} m\cdot\sin\frac{x}{m}=x$, $\lim\limits_{m\to\infty} m^2\sin^2\frac{k\pi}{m}=(k\pi)^2$, то лявата страна на (1.110) клони към $\frac{\sin x}{x}$, а крайното произведение $\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)$ клони към $\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. По-нататък ще считаме, че последната граница е различна от нула, тъй като, ако тя е равна на нула, то $\sin x=0$ и разлагането (1.102) е доказано. Но тогава съществува границата $\lim\limits_{m\to\infty}R_p(x)$. Да означим тази граница с $\hat{R}_p(x)$. От неравенствата (1.114), които са в сила за всеки номер m, и от теорема 3.13 от глава 3, част I следва, че

$$1\geq\hat{R}_p(x)\geq e^{-\frac{x^2}{2p}}. \tag{1.115}$$

От равенство (1.110) при $m\to\infty$ получаваме

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\hat{R}_p(x). \tag{1.116}$$

4°. Да фиксираме x и да оставим номерът p да клони към безкрайност в равенство (1.116). Лявата страна на (1.116) не зависи от p, а границата $\lim\limits_{p\to\infty}\hat{R}_p(x)$ съществува (вземаме под внимание неравенство (1.115) и теорема 3.14 от глава 3) и е равна на единица. Следователно съществува и границата

$$\lim_{p\to\infty}\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=\frac{\sin x}{x}.$$

Следователно разлагането (1.102) за $\sin x$ е доказано.

Забележка. Напълно аналогично на разлагането (1.102) за $\sin x$ и (1.103) за $\cos x$ могат да се получат разлагания в безкрайни произведения за хиперболичните функции

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = x \text{ и } \prod_{k=1}^{\infty} \left[1+\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right].$$

Да отбележим, че от разлаганията за $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ непосредствено се получават разлагания в безкрайни произведения за функциите $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$.

§ 7. Обобщени методи за сумиране на разходящи редове

В глава 1 определихме сума на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots \tag{1.117}$$

като границата S на редицата $\{S_n\}$ от частичните суми на този ред (при условие че тази редица е сходяща).

В много задачи от математическия анализ от теоретичен и практически интерес се налага да се използват редове, чиито редици от частични суми не са сходящи и значи сумите на тези редове не съществуват в обичайния смисъл. Естествено възниква въпросът за обобщаване на понятието сума на ред и за сумиране на разходящи в обичайния смисъл редове.

В този параграф ще се спрем на някои обобщени методи за сумиране на разходящи редове.

Най-напред ще дадем обща характеристика на методите за сумиране, с които ще се занимаем. Разумно е да поискаме обобщеното понятие за сума да включва в себе си обичайното понятие за сума на ред. По-точно ред, сходящ в обичайния смисъл със сума S, трябва да има и обобщена сума, при това равна на S. Метод за сумиране, който притежава посоченото свойство, се нарича **регулярен**.

Естествено е да се подчини понятието обобщена сума на условието: ако редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ има обобщена сума U, а редът $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ има обобщена сума V, то редът $\sum_{k=1}^{\infty} (Au_k + Bv_k)$, където A и B са произволни константи, да има обобщена сума $AU+BV$. Метод за сумиране, който удовлетворява посоченото свойство, се нарича **линеен**.

В анализа и в неговите приложения обикновено се използват регулярни линейни методи за сумиране. Ще разгледаме два метода за сумиране, които представляват особен интерес за приложенията.

1. Метод на Чезаро* (или метод на средноаритметичните). Казваме, че редът (1.117) е **сумируем по метода на Чезаро**, ако е сходяща редицата от средноаритметичните на частичните суми на този ред, т. е. съществува границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}. \tag{1.118}$$

При това границата (1.118) се нарича *обобщена сума на реда* (1.117) **в смисъл на Чезаро**.

Методът на Чезаро е очевидно линеен метод за сумиране. Регулярността на метода на Чезаро следва от лема 1, доказана в края на т. 3, § 2. Наистина от посочената лема следва, че ако редицата $\{S_n\}$ от частичните суми на реда (1.117) клони към S, то границата (1.118) съществува и е равна на S.

Ще дадем примери на редове, които не са сходящи в обичайния смисъл, но са сумируеми по метода на Чезаро.

1. Да разгледаме очевидно разходящия ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1-1+1-1+\cdots$$

Понеже всички **четни** частични суми S_{2n} на този ред са равни на нула, а всички нечетни частични суми S_{2n-1} са равни на единица, то границата (1.118) съществува и е равна на $\frac{1}{2}$. Следователно разглежданият ред е сумируем по метода на Чезаро и неговата сума в смисъл на Чезаро е равна на $\frac{1}{2}$.

2. Нека x е произволно фиксирано реално число от интервала $(0, 2\pi)$. Да разгледаме разходящия ред**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots \tag{1.119}$$

Вече пресметнахме частичната сума S_n на този ред в точка 2 в края на § 2. Имаме

* Ерчесто Чезаро — италиански математик (1859—1906).

** Разходимостта на реда (1.119) следва непосредствено от дадения по-долу израз за неговата частична сума.

$$S_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Да пресметнем средното аритметично на частичните суми:

$$\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}=\frac{1}{2n\sin\frac{x}{2}}\sum_{m=1}^{n}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}=$$

$$\frac{1}{4n\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{m=1}^{n}[\cos mx-\cos(m+1)x]-\frac{1}{2}=\frac{\cos x-\cos(n+1)x}{4n\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}.$$

Оттук очевидно следва, че

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}=-\frac{1}{2}.$$

Следователно редът (1.119) е сумируем по метода на Чезаро и сумата му в смисъл на Чезаро е равна на $-\frac{1}{2}$.

2. Метод за сумиране на Поасон* — Абел. Този метод за сумиране се състои в следното. По зададения ред (1.117) съставяме степенния ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k x^{k-1}=u_1+u_2x+u_3x^2+\cdots+u_kx^{k-1}+\cdots \tag{1.120}$$

Ако този степенен ред е сходящ за всяко x от интервала (0,1) и ако сумата му $S(x)$ има лява граница $\lim\limits_{x\to1-0}S(x)$ в точката $x=1$, то тогава ще казваме, че редът (1.117) е сумируем по метода на Поасон — Абел. При това посочената граница ще наричаме сума на реда (1.117) в смисъл на Поасон — Абел.

Линейността на метода на Поасон — Абел е очевидна. Ще докажем регулярността на този метод. Нека редът (1.117) е сходящ в обичайния смисъл и сумата му е равна на S. Трябва да се докаже:

1) че редът (1.120) е сходящ за всяко x от интервала (0, 1),

2) че сумата $S(x)$ на реда (1.120) има в точката $x=1$ лява граница, равна на S.

Най-напред ще докажем твърдение 1). Тъй като редът (1.117) е сходящ, то редицата от членовете му е безкрайно малка и следователно е ограничена, т.е. съществува число M такова, че за всички номера k е в сила

$$|u_k|\leq M. \tag{1.121}$$

Използуваме неравенство (1.121), за да оценим модула на k-тия член на реда (1.120), като считаме, че x е произволно число от интервала (0,1). Получаваме

$$|u_kx^{k-1}|\leq M|x|^{k-1}.$$

Тъй като $|x|<1$, то редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x|^{k-1}$ е сходящ. Като използуваме забележка 2 към теоремата за сравнение 1.3, заключаваме, че е сходящ и редът (1.120).

Сега да докажем твърдение 2). Нека S_n е n-та частична сума на реда (1.117), а S е неговата обичайна сума. Чрез преобразуването на Абел* се убеждаваме, че за всяко x от интервала (0,1) е в сила тъждеството

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_kx^{k-1}=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}S_kx^{k-1}. \tag{1.122}$$

Да извадим почленно (1.122) от следното очевидно равенство:

$$S=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}S\,x^{k-1}.$$

Като означим с r_k k-тия остатък на реда (1.117), ще имаме

$$S-\sum_{k=1}^{\infty}u_kx^{k-1}=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}r_kx^{k-1}$$

или

$$S-S(x)=(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}r_kx^{k-1}. \tag{1.123}$$

Нашата цел е да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че лявата страна на (1.123) е по-малка от ε за всички x, удовлетворяващи неравенствата $1-\delta<x<1$. Тъй като остатъкът r_k на реда (1.117) клони към нула при $k\to\infty$, то за положителното число $\frac{\varepsilon}{2}$ може да се намери номер k_0 такъв, че $r_k<\frac{\varepsilon}{2}$ при $k\geq k_0$. Следователно

* Симон Дени Поасон — френски математик (1781—1840).

* Преобразованието на Абел (13.82) въведохме в т. 2, § 4. В разглеждания случай трябва да се положи в (1.82) $n=1$, $S_{n-1}=0$ и да се остави след това p да клони към безкрайност.

$$\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Остава да докажем, че за всички x, които са достатъчно близки до единица, имаме

$$(1-x)\left|\sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

но това е очевидно, понеже сумата, стояща под знака за модул, е ограничена. Регулярността на метода на Поасон — Абел е доказана.

Като пример да разгледаме отново разходящия ред

$$\sum (-1)^{k-1} = 1-1+1-\ldots \tag{1.124}$$

За този ред да построим степенния ред от вида (1.120)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = 1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Очевидно този ред е сходящ за всички x от интервала $(0,1)$ и сумата му е равна на $\frac{1}{1+x}$. Тъй като

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

то редът (1.124) е сумируем по метода на Поасон — Абел и неговата сума в смисъл на Поасон — Абел е равна на $\frac{1}{2}$.

Да обърнем внимание на факта, че сумата на реда (1.124) в смисъл на Поасон — Абел съвпада с неговата сума в смисъл на Чезаро. Този факт не е случаен: може да се докаже, че ако един ред е сумируем по метода на Чезаро, то той е сумируем и по метода на Поасон — Абел, при това сумата му в смисъл на Чезаро съвпада със сумата му в смисъл на Поасон — Абел. Освен това съществуват редове, които са сумируеми по метода на Поасон — Абел, но не са сумируеми по метода на Чезаро*. Детайлно изследване на различни методи за обобщено сумиране на разходящи редове е дадено в монографията на Г. Харди «Расходящиеся ряды». ИЛ, Москва, 1951.

* Следователно може да се каже, че методът на Поасон — Абел е «по-силен» метод за сумиране от метода на Чезаро.

§ 8. Елементарна теория на двойни и повторни редове

Да разгледаме изброимо множество от безкрайни числови редици:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \ldots, & a_{1n}, \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \ldots, & a_{2n}, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, \ldots, & a_{nn}, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{1.125}$$

(Първият индекс на числото a_{kl} означава номера на числовата редица, а вторият — номера на елемента.)

Иначе казано, разглеждаме матрицата (1.125), състояща се от безбройно много стълбове и безбройно много редове. Ако формално сумираме елементите на матрицата (1.125), ние можем да съставим от нея различни редове.

Ако отначало сумираме всеки ред на матрицата (1.125), ще получим безкрайна редица от редове от вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \quad (k=1,2,\ldots). \tag{1.126}$$

Като сумираме по-нататък получената редица, ще получим формалната сума

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right). \tag{1.127}$$

Тази сума е прието да се нарича **повторен ред**.

Друг повторен ред

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}\right) \tag{1.128}$$

се получава, ако отначало сумираме поотделно всеки стълб на матрицата (1.125), а след това образуваме сумата на елементите на получената по този начин редица.

Повторният ред (1.127) *се нарича* **сходящ**, *ако всеки от редовете* (1.126) *е сходящ и ако освен това е сходящ редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

където с A_k е означена сумата на k-тия ред (1.126).

Аналогично *повторният ред* (1.128) *се нарича* с х о д я щ, *ако е сходящ всеки от редовете*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (l=1, 2, \ldots) \tag{1.129}$$

и ако е сходящ и редът

$$\sum_{l=1}^{\infty} \widetilde{A}_l ,$$

където $\widetilde{A}_l$ *е сумата на* l*-тия ред* (1.129).

С матрицата (1.125) свързваме освен повторните редове (1.127) и (1.128) още и така наречения д в о е н р е д:

$$\sum_{k,\, l=1}^{\infty} a_{kl} , \tag{1.130}$$

който се нарича с х о д я щ, когато съществува крайната граница

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} \tag{1.131}$$

на така наречените правоъгълни частични суми

$$S_{mn}=\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \tag{1.132}$$

при m и n, к л о н я щ и н е з а в и с и м о към безкрайност.

В този случай границата (1.131) се нарича с у м а на двойния ред (1.130).

От тази дефиниция веднага следва, че ако двойният ред (1.130) е получен чрез умножаване членовете на два сходящи «обикновени» реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} c_l , \tag{1.133}$$

т. е. ако членовете на двойния ред (1.130) са $a_{kl}=b_k c_l$, то този двоен ред е сходящ и сумата му е равна на произведението от сумите на редовете (1.133).

По-нататък ще отбележим, че от (1.132) следва, че за произволни $m\geqq 2$, $n\geqq 2$

$$a_{mn}=S_{mn}-S_{m(n-1)}-[S_{(m-1)n}-S_{(m-1)(n-1)}] .$$

Това равенство означава, че едно *необходимо условие за сходимост на двойния ред* (1.130) *е общият му член да клони към нула*, т. е. съществуването на равната на нула граница

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn}$$

при независимо клонене на m и n към безкрайност.

Ще докажем следното твърдение, хвърлящо светлина върху въпроса за връзката между сходимостта на двойния и повторния ред.

Теорема 1.20. *Ако двойният ред* (1.130) *е сходящ и ако са сходящи всички редове* (1.126) *по редовете на матрицата* (1.125), *то и повторният ред* (1.12) *е сходящ, при това има същата сума, както и двойният ред* (1.130).

Д о к а з а т е л с т в о. Извършваме граничен преход по $n\to\infty$ при фиксирано m в равенство (1.132) и вземаме под внимание, че редът (1.126) има сума A_k. Получаваме

$$\lim_{n\to\infty} S_{mn}=\sum_{k=1}^{m} A_k . \tag{1.134}$$

От съотношение (1.134) е ясно, че сумата на повторния ред (1.127), която е равна на границата при $m\to\infty$ на дясната страна на (1.134), е точно повторната граница

$$\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} S_{mn}).$$

Остава да докажем съществуването на повторната граница при предположение, че съществува границата (1.131) и че за всяко m съществува границата (1.134). Също така трябва да докажем, че указаната повторна граница е равна на границата (1.131).

От това, че границата (1.131) съществува и е равна на S, следва, че за всяко $\varepsilon>0$ съществуват номера m_0 и n_0 такива, че при $m\geqq m_0$, $n\geqq n_0$ е в сила неравенството

$$|S_{mn}-S|<\varepsilon .$$

Като използуваме, че за всеки номер m съществува границата (1.134), ще получим от последното неравенство, че за всяко $m\geqq m_0$ е изпълнено неравенството

$$\lim_{n\to\infty} |S_{mn}-S| \leqq \varepsilon .$$

Следователно повторната граница $\lim\limits_{m\to\infty} (\lim\limits_{n\to\infty} S_{mn})$ съществува и е равна на S. Теоремата е доказана.

Както за обикновените редове с неотрицателни членове, за

двойните редове с неотрицателни членове е вярно следното твърдение.

Теорема 1.21. *Ако всички елементи на матрицата* (1.125) *са неотрицателни, то за сходимостта на съставения от тази матрица двоен ред* (1.130) *е необходимо и достатъчно да са ограничени частичните му суми* (1.132).

Доказателство. Необходимостта е очевидна. За доказателството на достатъчността ще отбележим, че от ограничеността на множеството от частичните суми S_{mn} следва съществуването на точна горна граница на това множество, която ще означим с S:

$$S = \sup_{\substack{1\leq m<\infty \\ 1\leq n<\infty}} S_{mn}.$$

Съгласно дефиницията на точна горна граница за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери частична сума $S_{m_0n_0}$ такава, че

$$S-\varepsilon<S_{m_0n_0}\leq S. \tag{1.135}$$

Поради това, че елементите са неотрицателни, за всички номера m и n, удовлетворяващи условията $m\geq m_0$, $n\geq n_0$, ще бъде в сила неравенството $S_{mn}\geq S_{m_0n_0}$.

От това неравенство и от (1.135) следва, че

$$S-\varepsilon\leq S_{mn}\leq S$$

за всички m и n, за които $m\geq m_0$, $n\geq n_0$.

Следователно границата (1.132) съществува и е равна на S, т. е. двойният ред (1.130) е сходящ.

Определение. *Двойният ред* (1.130) *се нарича* **абсолютно сходящ**, *ако е сходящ двойният ред*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|, \tag{1.130'}$$

съставен от модулите на елементите на матрицата (1.125).

Теорема 1.22. *Ако двойният ред от модулите* (1.130′) *е сходящ, то и двойният ред* (1.130) *е сходящ.*

Доказателство. Да положим $p_{kl}=\frac{|a_{kl}|+a_{kl}}{2}$, $q_{kl}=\frac{|a_{kl}|-a_{kl}}{2}$. Тогава

$$a_{kl}=p_{kl}-q_{kl}. \tag{1.136}$$

Очевидно p_{kl} и q_{kl} са неотрицателни и двете не надминават $|a_{kl}|$. От сходимостта на двойния ред (1.130′) и теорема 1.21 следва, че

редицата от частичните суми на този ред е ограничена. Следователно частичните суми на всеки от двойните редове

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} p_{kl} \quad \text{и} \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} q_{kl}$$

са ограничени. Но тогава съгласно теорема 1.21 тези редове са сходящи. Да означим сумите им съответно с P и Q. От (1.136) следва, че двойният ред (1.130) е сходящ и сумата му е равна на $P-Q$.

Сега да разгледаме обичайния ред

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \tag{1.137}$$

членовете на който са елементите на матрицата (1.125), номерирани в произволен ред.

Вярно е следното твърдение.

Теорема 1.23. *Да разгледаме следните четири реда: двата повторни реда* (1.127) *и* (1.128), *двойния ред* (1.130) *и реда* (1.137). *Ако поне един от посочените четири реда е сходящ при замяната на членовете му с техните абсолютни стойности, то всички посочени редове са сходящи и имат една и съща сума.*

Доказателство. Най-напред ще докажем, че ако един от посочените четири реда е сходящ при замяната на членовете му с техните абсолютни стойности, то и останалите три реда са сходящи при замяна на членовете им с техните абсолютни стойности.

Тъй като за повторните редове (1.127) и (1.128) разсъжденията са напълно аналогични (трябва само да се смени ролята на първия и втория индекс на членовете), то по-нататък ще разгледаме само повторния ред (1.127). Достатъчно е да се докажат следните три твърдения:

I) сходимостта на повторния ред (1.127), при който всички членове са заменени с техните модули, влече абсолютната сходимост на реда (1.137);

II) от абсолютната сходимост на реда (1.137) следва абсолютната сходимост на двойния ред (1.130);

III) от абсолютната сходимост на реда (1.130) следва сходимостта на повторния ред (1.127), на който всички членове са заменени с техните модули.

За да докажем твърдение I, да означим с S^* сумата на повторния ред (1.127), на който всички членове са заменени с техните модули, т. е. на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|\right). \tag{1.127}$$

Тогава при произволни m и n имаме

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|\leq S^*. \tag{1.138}$$

Нека $S_r^*=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_r|$ е произволна частична сума на реда

$$\sum_{r=1}^{\infty}|a_r|, \tag{1.137'}$$

който се получава при замяната на членовете на реда (1.137) с техните модули. Очевидно съществуват толкова големи номера m и n, че всички членове на реда (1.137), които влизат в частичната му сума с номер r, да влизат в първите m реда и първите n стълба на матрицата (1.125).

Но тогава от (1.138) следва, че

$$S_r^*\leq S^*.$$

Това неравенство показва, че всички частични суми на реда с неотрицателни членове (1.137) са ограничени. Следователно този ред е сходящ (предвид теорема 1.2).

За да докажем твърдение II, да предположим, че редът (1.137) е сходящ. Тогава от теорема 1.2 следва, че редицата от частичните му суми $\{S_r^*\}$ е ограничена. Да фиксираме произволна частична сума S_{mn}^* на двойния ред от модулите (1.130'). Ясно е, че съществува толкова голям номер r, че r-тата частична сума на реда (1.137) съдържа всички членове, влизащи в сумата S_{mn} на реда (1.130). Но тогава частичната сума S_{mn}^* на реда (1.130') не надминава частичната сума S_r^* на реда (1.137). Следователно множеството на всички частични суми на двойния ред (1.130') е ограничено и значи този ред е сходящ по теорема 1.21.

Остава да докажем твърдение III. Нека е сходящ двойният ред (1.130'). Предвид теорема 1.20 за доказателството на сходимостта на повторния ред от модулите (1.127) е достатъчно да докажем сходимостта на всеки от редовете

$$\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|,\ k=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.139}$$

За това съгласно теорема 1.2 е достатъчно да се докаже, че редицата от частичните суми на всеки от тези редове е ограничена. Но това е очевидно вярно, тъй като при произволни k и n сумата

$$\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|,$$

е ограничена от сумата на двойния ред от модулите (1.130').

Сега остана да докажем, че сумите на трите реда (1.127), (1.130) и (1.137) съвпадат*. Да означим с S сумата на двойния ред (1.130). Очевидно е, че сумата на реда (1.137) е равна на S. Наистина от абсолютната сходимост на този ред следва, че сумата му не се мени при смяна на реда на сумиране, а редът на сумиране може да се измени така, че частичните му суми след изменението да съдържат като подмножество частичните суми S_{mn} на двойния ред (1.130).

За да се убедим, че и сумата на повторния ред (1.127) е равна на S, е достатъчно да забележим, че от сходимостта на реда (1.139) следва сходимостта на реда (1.126), и да използуваме теорема 1.20. Теорема 1.23 е доказана.

* Аналогични разсъждения позволяват да заключим, че и сумата на повторния ред (1.128) съвпада със сумата на посочените три реда.

2. Функционални редици и редове

За представяне на различни функции в анализа широко се използват редове и редици, чиито членове не са числа, а функции, определени в дадено множество.

В настоящата глава се изучават такива редове и редици, които ще наричаме функционални.

§ 1. Сходимост в точка и равномерна сходимост в множество

1. Функционални редици и функционални редове. Да означим с $\{x\}$ едно подмножество на m-мерното евклидово пространство E^m*.

Ако на всяко естествено число n съпоставим някаква функция $f_n(x)$, дефинирана в множеството $\{x\}$, то множеството на номерираните функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... ще наричаме функционална редица.

Отделните функции $f_n(x)$ ще наричаме членове или елементи на разглежданата редица, а множеството $\{x\}$, в което са дефинирани всички функции $f_n(x)$, ще наричаме дефиниционна област на тази редица.

Ще подчертаем, че ако дефиниционната област $\{x\}$ е подмножество на m-мерното евклидово пространство E^m, то всяка функция $f_n(x)$ е функция на m променливи $f_n(x)=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, където $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са координати на точките x.

За означаване на функционална редица обикновено ще използваме символа $\{f_n(x)\}$.

Нека разгледаме функционалната редица $\{u_n(x)\}$, чиято дефиниционна област е дадено множество $\{x\}$.

* Елементите на множеството $\{x\}$ са точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ с координати $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Формално написаната безкрайна сума

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{2.1}$$

на членовете на посочената функционална редица ще наричаме функционален ред.

При това отделните функции $u_n(x)$ ще наричаме членове на разглеждания ред, а множеството $\{x\}$, в което са дефинирани тези функции, ще наричаме дефиниционна област на разглеждания ред.

Както в случай на числов ред, сумата на първите n члена на функционалния ред (2.1) ще наричаме n-та частична сума на този ред.

Ще отбележим, че изучаването на функционални редове е напълно еквивалентно на изучаването на функционални редици, защото на всеки функционален ред (2.1) еднозначно съответствува функционалната редица

$$S_1(x),\ S_2(x),\ \ldots,\ S_n(x),\ \ldots, \tag{2.2}$$

съставена от неговите частични суми, и, обратно, на всяка функционална редица (2.2) еднозначно съответствува функционалният ред (2.1) с членове $u_1(x)=S_1(x)$, $u_n(x)=S_n(x)-S_{n-1}(x)$ при $n\geq 2$.

Ще дадем примери на функционални редици и редове.

Пример 1. Да разгледаме редицата от функции $\{f_n(x)\}$, всяка от които е определена в сегмента $0\leq x\leq 1$ и има вида

$$f_n(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi n x}{2} & \text{при } 0\leq x\leq \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{1}{n}<x\leq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

На фиг. 2.1 са дадени графиките на функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_n(x)$. Дефиниционна област на функционалната редица (2.3) е сегментът $[0, 1]$. Ще отбележим, че всяка функция $f_n(x)$ е непрекъсната в сегмента $[0, 1]$.

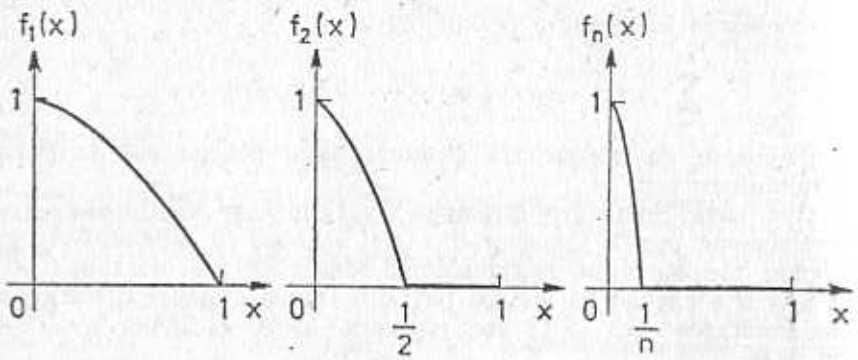
Пример 2. Да разгледаме следния функционален ред:

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x+y)^n}{n!}+\cdots, \tag{2.4}$$

чиято дефиниционна област е цялата равнина $E^2=\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty\}$.

Като използуваме развитието по формулата на Маклорен на функцията

$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\cdots+\frac{u^n}{n!}+R_{n+1}(u)$$



Фиг. 2. 1

(гл. п. 2, § 9, глава 6, част I), ще видим, че $n+1$-та частична сума

$$S_{n+1}(x,y)=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x+y)^n}{n!}$$

на реда (2.4) се различава от функцията e^{x+y} с величината $R_{n+1}(x+y)$, където $R_{n+1}(u)$ е остатъчният член във формулата на Маклорен за e^u от ред $n+1$.

2. Сходимост на функционална редица (функционален ред) в точка и в множество. Да предположим, че дефиниционната област на функционалната редица (функционалния ред) е множеството $\{x\}$ в пространство E^m. Да фиксираме произволна точка $x_0=\{\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m\}$ на множеството $\{x\}$ и да разгледаме всички членове на функционалната редица (функционалния ред) в тази точка x_0. Така ще получим числова редица (числов ред). Ако посочената числова редица (посоченият числов ред) е сходяща (сходящ), то казваме, че функционалната редица (функционалният ред) е сходяща (сходящ) в точката x_0.

Множеството, състоящо се от всички точки x_0, в които дадената функционална редица (даденият функционален ред) е сходяща (сходящ), се нарича област на сходимост на дадената редица (дадения ред), а редицата (редът) се нарича сходяща (сходящ) в това множество.

В конкретните ситуации областта на сходимост може да съвпада с дефиниционната област, да бъде подмножество на дефиниционната област или изобщо да бъде празното множество.

Съответните примери се намират по-долу.

Да предположим, че функционалната редица $\{f_n(x)\}$ има за област на сходимост някакво множество $\{x\}$. За произволна точка x от множеството $\{x\}$ да означим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Очевидно дефиниционната област на така определената функция $f(x)$ съвпада с множеството $\{x\}$. Тази функция наричаме гранична функция на функционалната редица $\{f_n(x)\}$ или кратко — нейна граница.

Аналогично, ако функционалният ред (2.1) има за област на сходимост някое множество $\{x\}$, то на това множество е определена функцията $S(x)$, която е гранична функция на редицата от частични суми на този ред и се нарича негова сума.

Редицата (2.3) от разгледания в предния пункт пример 1 има за област на сходимост целия сегмент $0\leq x\leq 1$.

Наистина $f_n(0)=1$ за всички номера n, т.е. в точката $x=0$ редицата (2.3) клони към единица. Ако фиксираме произволно x от полусегмента $0<x\leq 1$, то всички функции, започвайки от някакъв номер (зависещ, разбира се, от x), ще бъдат равни на нула в тази точка x. Оттук следва, че във всяка точка x на полусегмента $0<x\leq 1$ редицата (2.3) клони към нула.

И така редицата (2.3) е сходяща на целия сегмент $0\leq x\leq 1$ и клони към граничната функция $f(x)$, която има вида

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x=0, \\ 0 & \text{при } 0<x\leq 1. \end{cases}$$

Графиката на тази функция е дадена на фиг. 2.2. Ще отбележим веднага, че тази функция не е непрекъсната в сегмента $[0, 1]$ (тя има прекъсване отдясно в точката $x=0$).

Сега ще се убедим, че редът (2.4) от разглеждания в предния пункт пример 2 има за област на сходимост цялата безкрайна равнина $E^2=\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty\}$.

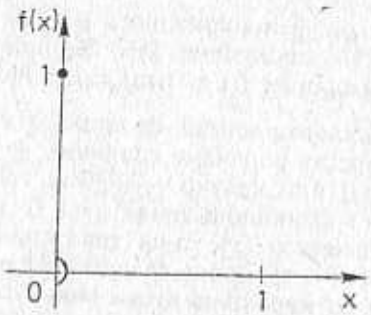
Наистина в п. 2, § 9, глава 6, част I е доказано, че остатъчният член $R_{n+1}(u)$ във формулата на Маклорен за функцията e^u клони към нула при $n\to\infty$ за всяко реално u, а това всъщност означава, че $(n+1)$-та частична сума $S_{n+1}(x,y)$ на реда (2.4) се различава от e^{x+y} с величината $R_{n+1}(x+y)$, която клони към нула при $n\to\infty$ във всяка точка (x, y) от равнината E^2.

И така редът (2.4) е сходящ в цялата равнина E^2 и неговата сума е равна на e^{x+y}.

3. Равномерна сходимост в множество. Нека функционалната редица

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{2.5}$$

е сходяща в множеството $\{x\}$ от пространството E^m и нека $f(x)$ е нейната гранична функция.



Фиг. 2. 2

Определение 1. Ще казваме, че редицата (2.5) клони към $f(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geq N(\varepsilon)$, и за всички точки x от множеството $\{x\}$ да е изпълнено неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{2.6}$$

В този случай ще казваме, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Забележка 1. В това определение твърде съществено е това, че номерът N зависи само от ε, но не и от x, т. е. твърди се, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери универсален номер $N(\varepsilon)$, започвайки от който неравенството (2.6) да е изпълнено едновременно при всички точки x от множеството $\{x\}$.

Забележка 2. Ще отбележим, че равномерната сходимост на функционалната редица $f_n(x)$ към функцията $f(x)$ в множеството $\{x\}$ е еквивалентна на това числовата редица ε_n, членовете на която са точните горни граници на функцията $|f_n(x)-f(x)|$ в множеството $\{x\}$, да бъде безкрайно малка (в частност тази точна горна граница трябва да съществува).

Забележка 3. От определение 1 непосредствено следва, че ако редицата $\{f_n(x)\}$ клони равномерно към $f(x)$ в цялото множество $\{x\}$, то $\{f_n(x)\}$ клони равномерно към $f(x)$ и във всяко подмножество на множеството $\{x\}$.

Ще приведем пример, показващ, че от сходимостта на функционалната редица $\{f_n(x)\}$ в множеството $\{x\}$ не следва, изобщо казано, равномерна сходимост на $\{f_n(x_n)\}$ за това множество.

Да се върнем към редицата (2.3) от пример 1, разгледан в п. 1. В п. 2 беше доказано, че тази редица клони в целия сегмент $[0, 1]$ към граничната функция

$$f(x=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x=0, \\ 0 & \text{при} \quad 0<x\leq 1. \end{cases}$$

Ще докажем, че тази редица не е равномерно сходяща в $[0, 1]$.

Да разгледаме редицата от точки $x_n=\frac{1}{2_n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, принадлежащи на сегмента $[0, 1]$. Във всяка от тези точки (т. е. за всеки номер n) са в сила съотношенията

$$f_n(x_n)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f(x_n)=0.$$

Така за всеки номер n имаме

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а това означава, че при $\varepsilon\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ неравенството (2.6) не може да бъде удовлетворено за всички точки x от сегмента $[0, 1]$ едновременно при никакъв номер n, т. е. означава липса на равномерна в сегмента $[0, 1]$ сходимост на разглежданата редица.

Ще отбележим, че разглежданата редица клони към граничната функция $f(x)$ равномерно във всеки сегмент $[\delta, 1]$, където δ е произволно фиксирано число от интервала $0<\delta<1$. Наистина за всяко дадено δ ще се намери номер, започвайки от който всички елементи $f_n(x)$ са равни на нула в целия сегмент $[\delta, 1]$. Тъй като и граничната функция $f(x)$ е равна на нула в сегмента $[\delta, 1]$, то лявата част на (2.6) е равна на нула в целия сегмент $[\delta, 1]$, започвайки от посочения номер. По този начин от посочения номер нататък неравенството (2.6) е изпълнено за всички x от сегмента $[\delta, 1]$ при произволно $\varepsilon>0$.

Определение 2. Ще казваме, че даден функционален ред е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, ако редицата от частичните му суми е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Ще отбележим, че функционалният ред (2.4) от пример 2, разгледан в п. 1, е равномерно сходящ в кръга $x^2+y^2\leq r^2$ с произволен фиксиран радиус r и неговата сума е e^{x+y}.

Наистина навсякъде в посочения кръг имаме $|x|\leq r$, $|y|\leq r$ и затова $|x+y|\leq|x|+|y|\leq 2r$, откъдето поради наличието на оценка (6.62') от п. 2, §9, глава 6, част I ще получим, че навсякъде в посочения кръг имаме

$$|R_{n+1}(x+y)|\leq\frac{(2r)^{n+1}}{(n+1)!}e^{2r}.$$

От последното неравенство следва, че $R_{n+1}(x+y)$ клони към нула при $n\to\infty$ равномерно в кръга $x^2+y^2\leq r^2$, а това значи, че редът (2.4) е равномерно сходящ в посочения кръг и сумата му е e^{x+y}.

4. Критерий на Коши за равномерна сходимост на редица (ред). Валидни са следните две фундаментални теореми.

Теорема 2.1. За да бъде функционалната редица $\{f_n(x)\}$ равномерно сходяща в множеството $\{x\}$, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува номер $N(\varepsilon)$ такъв, че за всяко n, удовлетворяващо условието $n>N(\varepsilon)$, всички естествени числа $p(p=1, 2, \ldots)$ и всички точки x от множеството $\{x\}$ е вярно неравенството

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2. За да бъде функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.8}$$

равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува номер $N(\varepsilon)$ такъв, че за всяко n, удовлетворяващо условието $n\geq N(\varepsilon)$, всички естествени числа $p(p=1, 2, \ldots)$ и всички точки x от множеството $\{x\}$ е изпълнено

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon. \tag{2.9}$$

Достатъчно е да докажем само теорема 2.1, тъй като теорема 2.2 е следствие на теорема 2.1 (достатъчно е да отбележим, че в лявата част на (2.9) под знака за абсолютна стойност стои разликата $S_{n+p}(x)-S_n(x)$ на частичните суми с номера $n+p$ и n на функционалния ред (2.8)).

Доказателство на теорема 2.1

Необходимост. Да предположим, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони равномерно в множеството $\{x\}$ към граничната функция $f(x)$. Тогава, като фиксираме произволно $\varepsilon>0$, ще намерим за него номер $N(\varepsilon)$ такъв, че неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.10}$$

да е в сила за всяко n, удовлетворяващо условието $n\geq N(\varepsilon)$, и за всички точки x от множеството $\{x\}$.

Ако p е произволно естествено число, то при $n\geq N(\varepsilon)$ номерът $n+p$ още повече ще удовлетворява условието $n+p\geq N(\varepsilon)$, а затова за всички n, удовлетворяващи условието $n\geq N(\varepsilon)$, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$, толкова повече ще е в сила неравенството

$$|f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Тъй като модулът на сума от две величини не надминава сумата на техните модули, то от (2.10) и (2.11) ще получим, че

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|=|[f_{n+p}(x)-f(x)]+[f(x)-f_n(x)]|\leq$$
$$\leq|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

(за всяко n, удовлетворяващо условието $n\geq N(\varepsilon)$, всички естествени числа p и всяко x от множеството $\{x\}$).

Необходимостта е доказана.

Достатъчност. Да предположим, че за произволно $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че неравенството (2.7) да е в сила за всички n, удовлетворяващи условието $n\geq N(\varepsilon)$, за всички естествени p и за всички точки x от множеството $\{x\}$. От неравенството (2.7) и от критерия на Коши за сходимост на числова редица (гл. п. 3, § 3, глава 3, част I) следва сходимост на редицата $\{f_n(x)\}$ във всяка точка x от множеството $\{x\}$ и съществуването на определена във всяка точка x от множеството $\{x\}$ гранична функция $f(x)$.

Като фиксираме произволен номер n, удовлетворяващ условието $n\geq N(\varepsilon)$, и произволна точка x от множеството $\{x\}$, да направим граничен преход при $p\to\infty$ в неравенството (2.7). Като използуваме теорема 3.13 от п. 4, § 1, глава 3, част I, ще получим, че за произволен номер n, удовлетворяващ условието $n\geq N(\varepsilon)$, и произволна точка x от множеството $\{x\}$ е валидно неравенството

$$|f(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon<2\varepsilon.$$

Това всъщност доказва, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони към граничната функция $f(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$.

Достатъчността е доказана.

§ 2. Достатъчни условия (признаци) за равномерна сходимост на функционални редици и редове

В п. 1, § 1 се убедихме, че изучаването на функционалните редове е еквивалентно на изучаването на функционални редици. От тази гледна точка всеки признак за равномерна сходимост има две еквивалентни формулировки: една на езика на функционалните редове, друга — на езика на функционалните редици. Ще изразяваме установените признаци на езика на редиците или редовете в

по-удобната формулировка, понякога ще привеждаме и двете еквивалентни формулировки.

Теорема 2.3 (признак на Вайерщрас).

Ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.12}$$

е дефиниран в множество $\{x\}$ и ако съществува сходящ числов ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{2.13}$$

такъв, че за всички точки x от множеството $\{x\}$ и за всички номера k е изпълнено неравенството

$$|u_k(x)| \leq c_k, \tag{2.14}$$

то функционалният ред (2.12) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Доказателство. Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. Тъй като числовият ред (2.13) е сходящ, то по критерия на Коши за сходимост на числови редове (гл. теорема 1.1 от глава 1) ще се намери $N(\varepsilon)$ такова, че

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \tag{2.15}$$

за всяко n, удовлетворяващо $n \geq N(\varepsilon)$, и за всички естествени числа p.

От неравенства (2.14) и (2.15) и от това, че модулът на сума от p събираеми не надминава сумата от модулите им, ще получим, че

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

(за всяко n, удовлетворяващо условието $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени числа p и всички точки x от множеството $\{x\}$).

По критерия на Коши за равномерна сходимост (т. е. по теорема 2.2) следва, че редът (2.12) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Накратко критерият на Вайерщрас може да бъде формулиран така: един функционален ред е равномерно сходящ в дадено множество, ако той може да бъде мажориран в това множество от сходящ числов ред.

Забележка 2. Трябва да се подчертае, че критерият на

Вайерщрас е само достатъчно и не необходимо условие за равномерната сходимост на функционален ред.

Наистина функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

е равномерно сходящ в сегмента $0 \leq x \leq 1$ и неговата сума е $\ln(1+x)$, защото, както е показано в п. 2, § 9, глава 6, част I, разликата между $\ln(1+x)$ и n-тата частична сума на този ред е равна на остатъчния член $R_{n+1}(x)$ във формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$ и удовлетворява неравенството

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

за всички x от сегмента $0 \leq x \leq 1$.

За посочения функционален ред обаче не съществува мажориращ го в сегмента $0 \leq x \leq 1$ сходящ числов ред, защото за всеки номер k имаме

$$\sup_{[0,1]} \left| \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| = \frac{1}{k},$$

а числовият ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ е разходящ.

Да приложим признака на Вайерщрас, за да установим равномерната сходимост на функционалния ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2x+ky+z)}{k^2}.$$

Може да се твърди, че този ред е равномерно сходящ в цялото тримерно евклидово пространство E^3, защото за всяка точка (x, y, z) от това пространство той се мажорира от сходящия числов ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Теорема 2.4 (признак на Дини*)

Ако за всяка точка x от затвореното ограничено множество $\{x\}$ в пространството E^m редицата $\{f_n(x)\}$ е ненамаляваща (нарастяща) и клони в това множество към граничната функция $f(x)$ и ако всички членове на редицата $\{f_n(x)\}$ и граничната функция

* Улис Дини — италиански математик (1845—1918).

$f(x)$ са непрекъснати в множеството $\{x\}$, то сходимостта на редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерна в множеството $\{x\}$.

Доказателство. Без да намаляваме общността, ще предположим, че редицата $\{f_n(x)\}$ не намалява в затвореното ограничено множество $\{x\}$ (случаят на нерастяща редица се свежда до този чрез умножаване на всички елементи на редицата с числото -1). Да положим $r_n(x)=f(x)-f_n(x)$. Редицата $r_n(x)$ има следните свойства:

1) всички $r_n(x)$ са неотрицателни и непрекъснати в множеството $\{x\}$.

2) $\{r_n(x)\}$ не расте в множеството $\{x\}$;

3) във всяка точка x от множеството $\{x\}$ съществува границата

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

Достатъчно е да се докаже, че редицата $\{r_n(x)\}$ клони към функцията, тъждествено равна на нула, равномерно в множеството $\{x\}$, т. е. достатъчно е да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери поне един номер n такъв, че $r_n(x)<\varepsilon$ за всички x от множеството $\{x\}$. (Тогава поради това, че редицата $\{r_n(x)\}$ е нерастяща, неравенството $r_n(x)<\varepsilon$ ще бъде изпълнено и за всички следващи номера.) Да допуснем, че за някое $\varepsilon>0$ не може да се намери нито един номер n такъв, че да имаме $r_n(x)<\varepsilon$ едновременно за всички x от множеството $\{x\}$. Тогава за всеки номер n ще се намери поне една точка x_n от множеството $\{x\}$ такава, че

$$r_n(x_n)\geqq\varepsilon. \tag{2.16}$$

Поради ограничеността на множеството $\{x\}$ по теоремата на Болцано—Вайерщрас (гл. теорема 12.1 от глава 12, част I) от редицата от точки $\{x_n\}$ може да се избере подредица $\{x_{n_k}\}$, клоняща към някаква точка x_0, която поради това, че множеството $\{x\}$ е затворено, му принадлежи. Тъй като функцията $r_m(x)$ (с произволен номер m) е непрекъсната в точката x_0, то за всеки номер m имаме

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k})=r_m(x_0). \tag{2.17}$$

От друга страна, като изберем за всеки номер m надминаващ го номер n_k, ще получим (поради това, че редицата $r_m(x)$ е нерастяща), че

$$r_m(x_{n_k})\geqq r_{n_k}(x_{n_k}).$$

Като съпоставим последното неравенство с неравенство (2.16), което е вярно за всеки номер n, ще получим, че

$$r_m(x_{n_k})\geqq\varepsilon \tag{2.18}$$

(за всеки номер n_k, надминаващ фиксирания от нас произволен номер m).

От (2.17) и (2.18) следва, че

$$r_m(x_0)\geqq\varepsilon$$

(за всеки номер m), а това противоречи на условието, че редицата $\{r_m(x)\}$ клони към нула в точка x_0. Полученото противоречие доказва теоремата.

Забележка. В теоремата на Дини изискването за монотонност на редицата $\{f_n(x)\}$ е множеството $\{x\}$ е твърде съществено, защото немонотонна в множеството $\{x\}$ редица от непрекъснати в това множество $\{x\}$ функции може да клони във всяка точка x от множеството $\{x\}$ към непрекъсната в това множество функция $f(x)$, но да не е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Като пример да разгледаме редицата от функции $\{f_n(x)\}$, за която $f_n(x)$ е равна на $\sin x$ при $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{n}$ и е равна на нула при $\frac{\pi}{n}\leqq x\leqq\pi$. Тази редица клони към $f(x)\equiv0$ във всяка точка на сегмента $0\leqq x\leqq\pi$, но не е равномерно сходяща в този сегмент, защото $|f_n(x_n)-f(x_n)|=1$ при $x_n=\frac{\pi}{2n}$ за всички номера n.

Ще приведем еквивалентна формулировка на теоремата на Дини на езика на функционалните редове: ако всички членове на функционалния ред са непрекъснати и неотрицателни (или неположителни) в затвореното ограничено множество $\{x\}$ и ако във всяка точка от множеството $\{x\}$ този ред е сходящ и сумата му е непрекъсната функция, то сходимостта на посоченият ред е равномерна в множеството $\{x\}$.

Като пример за използване на признака на Дини ще изучим въпроса за характера на сходимост на редицата

$$\{(x^2+y^2)^n\}$$

в кръга $x^2+y^2\leqq\frac{1}{4}$ с радиус $\frac{1}{2}$ и с център в точката (0,0). Тази сходимост е равномерна в посоченият кръг, защото разглежданата редица клони във всяка точка на този кръг към граничната функция $f(x,y)=0$, не расте във всяка точка на кръга и се състои от функции, непрекъснати в посоченият кръг.

Преди да формулираме още два признака за равномерна сходимост на функционални редове, ще въведем някои нови понятия.

Определение 1. Ще казваме, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно ограничена в множеството $\{x\}$, ако съществува такова число $M>0$,

че за всяко n и за всички точки x от множеството $\{x\}$ да е изпълнено неравенството

$$|f_n(x)| \leq M.$$

Определение 2. Ще казваме, че функционалната редица $\{v_n(x)\}$ има в множеството $\{x\}$ равномерно ограничена вариация, ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \tag{2.19}$$

е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Веднага ще отбележим, че всяка редица, която има в множеството $\{x\}$ равномерно ограничена вариация, е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Наистина от равномерната сходимост на реда (2.19) в множеството $\{x\}$ и от критерия на Коши следва равномерната сходимост в множеството $\{x\}$ на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x) - v_k(x)], \tag{2.19*}$$

чиято n-та частична сума $S_n(x)$ има вида $S_n(x) = v_{n+1}(x) - v_1(x)$. От последното равенство следва, че редицата $\{v_n(x)\}$ е равномерно сходяща и клони към граничната функция $v(x)$, равна на $S(x) + v_1(x)$, където $S(x)$ е сумата на реда (2.19*).

Сега можем да формулираме и да докажем следните два признака.

Теорема 2.5 (първи признак на Абел)

Ако функционалният ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2.1}$$

има равномерно ограничена в множеството $\{x\}$ редица от частичните суми, а функционалната редица $v_n(x)$ има равномерно ограничена в множеството $\{x\}$ вариация и гранична функция, тъждествено равна на нула, то функционалният ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) \cdot v_n(x)] \tag{2.20}$$

е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Доказателство. По условие съществува число $M > 0$ такова, че редицата $\{S_n(x)\}$ от частичните суми на реда (2.1) удовлетворява неравенството $|S_n(x)| \leq M$ за всички номера n и всички точки x от множеството $\{x\}$.

Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и намираме номер N такъв, че за всички $n > N$, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$ да са в сила неравенствата

$$|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \tag{2.21}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{2.22}$$

Тук използувахме това, че редицата $\{v_n(x)\}$ клони равномерно в множеството $\{x\}$ към функция, тъждествено равна на нула, а също така и равномерната сходимост на реда (2.19) в множеството $\{x\}$.

От тъждеството на Абел (1.77) и понеже модулът на сума от три числа не надвишава сумата от модулите им, получаваме

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) \cdot v_k(x)] \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)\,[v_k(x) - v_{k+1}(x)] + \right.$$
$$+ |S_{n+p}(x)| \cdot |v_{n+p}(x)| + |S_n(x)| \cdot |v_{n+1}(x)|.$$

Като използуваме условието $|S_n(x)| \leq M$, ще получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)] \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| +$$
$$+ M\,|v_{n+p}(x)| + M\,|v_{n+1}(x)|.$$

Съпоставяме последното неравенство с (2.21) и (2.22) и получаваме, че за всеки номер n, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$ имаме

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\, v_k(x)] < \varepsilon,$$

а това означава, че редът (2.20) е равномерно сходящ в множеството (по теорема (2.2).

Теоремата е доказана.

Теорема 2.6 (втори признак на Абел). Ако функционалният ред (2.1) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$ и сумата му $S(x)$ е ограничена в $\{x\}$, а функционалната редица $\{v_n(x)\}$ притежава равномерно ограничена в множеството $\{x\}$ вариация и граничната ѝ функция $v(x)$ е ограничена в $\{x\}$, то функционалният ред (2.20) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Доказателство. Ще започнем от тъждеството на Абел (1.77) от глава 1. Това тъждество може да бъде записано във вида

$$+ [S_{n+p}(x) - S_n(x)] \cdot v_{n+p}(x) + S_n(x)\,[v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)].$$

(Тук символът $S_k(x)$ означава k-тата частична сума на реда (2.1).)

От последното тъждество следва неравенството

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\,.\,v_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)|\,.\,|v_{k+1}(x)-v_k(x)| + \tag{2.23}$$
$$+|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\,.\,|v_{n+p}(x)| + |S_n(x)|\,.\,|v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)|.$$

Тъй като по условие сумата $S(x)$ на реда (2.1) и граничната функция $v(x)$ на редицата $\{v_n(x)\}$ са ограничени в множеството $\{x\}$, то ще се намерят константи M_1 и M_2 такива, че за всички x от множеството $\{x\}$

$$|S(x)| \leq M_1, \quad |v(x)| \leq M_2. \tag{2.24}$$

От неравенство (2.24) и от равномерната сходимост на редиците $\{S_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ (клонящи съответно към $S(x)$ и $v(x)$) в множеството $\{x\}$ следва, че съществува такъв номер N_1, че за всички точки x от множеството $\{x\}$ и всички номера $n \geq N_1$ да бъдат изпълнени неравенствата

$$|S_n(x)| \leq M_1+1, \quad |v_n(x)| \leq M_2+1. \tag{2.25}$$

От друга страна, от равномерната в множеството $\{x\}$ сходимост на функционалните редове (2.1) и (2.19) и от критерия на Коши за равномерна сходимост следва, че за произволно $\varepsilon>0$ могат да бъдат намерени номера $N_2(\varepsilon)$ и $N_3(\varepsilon)$ такива, че неравенството

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_2+1)} \tag{2.26}$$

да е изпълнено за точките x от множеството $\{x\}$, всички естествени p и всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N_2(\varepsilon)$, и неравенството

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x)-v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \tag{2.27}$$

да е изпълнено за всички точки x от множеството $\{x\}$, всички естествени p и всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N_3(\varepsilon)$.

Накрая от тъждеството

$$v_{n+p}(x)-v_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [v_{k+1}(x)-v_k(x)],$$

от следващото от него неравенство

$$|v_{n+p}(x)-v_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x)-v_k(x)|$$

и от неравенство (2.27) следва, че

$$|v_{n+p}(x)-v_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \tag{2.28}$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, всички естествени p и всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N_3(\varepsilon)$.

Да означим с $N(\varepsilon)$ най-големия от трите номера N_1, $N_2(\varepsilon)$ и $N_3(\varepsilon)$. Тогава при $n \geq N(\varepsilon)$ за всички точки x от множеството $\{x\}$ и за всички естествени p да бъде изпълнено всяко от четирите неравенства (2.25) — (2.28).

От тези неравенства и от (2.23) следва, че

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\,v_k(x)\right| < \varepsilon$$

при всички $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени p и за всички точки x от множеството $\{x\}$.

По критерия на Коши редът (2.20) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$. Теоремата е доказана.

Следствие от теорема 2.5 — признак на Дирихле — Абел

Ако редицата от частичните суми на функционалния ред (2.1) е равномерно ограничена в множеството, а функционалната редица $\{v_n(x)\}$ е нерастяща във всяка точка от множеството $\{x\}$ и клони към нула равномерно в това множество, то функционалният ред (2.20) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Достатъчно е да се отбележи, че нерастяща във всяка точка от множеството $\{x\}$ и клоняща равномерно в това множество към нула редица $\{v_n(x)\}$ притежава в множеството $\{x\}$ равномерно ограничена вариация, защото за нея n-тата частична сума $S_n(x)$ на реда (2.19) е равна на $v_1(x)-v_{n+1}(x)$. Следователно съществува равномерна в множеството $\{x\}$ граница

$$\lim S_n(x) = \lim_{n\to\infty} [v_1(x)-v_{n+1}(x)] = v_1(x).$$

Като пример да изучим въпроса за равномерната сходимост на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k+(1+|x|)^k}. \tag{2.29}$$

Тъй като редицата

$$v_n(x)=\frac{1}{n+(1+|x|)^n}$$

е нарастяща и равномерно клони към нула върху правата $-\infty<x<\infty$, то по признака на Дирихле—Абел редът (2.29) е равномерно сходящ в произволно множество, в което редицата от частичните суми на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx \tag{2.30}$$

е равномерно ограничена.

За да пресметнем n-тата частична сума $S_n(x)$ на реда (2.30), сумираме

$$2\sin\frac{x}{2}\sin kx=\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x$$

по всички k от 1 до n. При това получаваме съотношението

$$2\sin\frac{x}{2}S_n(x)=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

от което следва равенството

$$S_n(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Значи за всички номера n е вярно неравенството

$$|S_n(x)|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

от което следва, че редицата от частичните суми на реда (2.30) е равномерно ограничена във всеки сегмент, който не съдържа точките $x_m=2\pi m$, където $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ (защото във всеки такъв сегмент $\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ има положителна точна долна граница).

И така редът (2.29) е равномерно сходящ във всеки фиксиран сегмент, който не съдържа точките $x_m=2\pi m$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

По втория признак на Абел редът

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\sin kx}{k+(1+|x|)^k}\right]\cdot\frac{k+1+|x|}{k+|x|}\right\}$$

е равномерно сходящ във всеки сегмент, който не съдържа точките $x_m=2\pi m$, $m=0,\pm1,\ldots$, защото, както вече доказахме, редът (2.29) е равномерно сходящ в такъв сегмент и има ограничена

сума, а редицата $v_k=\frac{k+1+|x|}{k+|x|}$ има равномерно ограничена във всеки сегмент варнация, защото редът

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}-v_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+|x|)(k+|x|+1)}$$

се мажорира на цялата права от сходящия числов ред $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, следователно е сходящ на цялата права и сумата му е ограничена.

§ 3. Почленен граничен преход

Да разгледаме произволно подмножество $\{x\}$ на пространство E^m и нека $\mathring{x}$ е точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$.

Вярно е следното твърдение.

Теорема 2.7. Ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x) \tag{2.31}$$

е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, сумата му е $S(x)$ и всички членове на този ред имат в точката $\mathring{x}$ граница

$$\lim_{x\to\mathring{x}}u_k(x)=b_k,\quad k=1,2,\ldots,$$

то и сумата $S(x)$ има в точката $\mathring{x}$ граница, при това

$$\lim_{x\to\mathring{x}}S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[\lim u_k(x)]=\sum_{k=1}^{\infty}b_k, \tag{2.32}$$

т.е. символът lim за граница и символът $\sum$ за сумиране могат да си разменят местата (може да се направи почленен граничен преход).

Доказателство. Най-напред ще докажем сходимостта на числовия ред $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$.

По критерия на Коши, приложен към функционалния ред (2.31), за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon \tag{2.33}$$

за всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$. В неравенството (2.33) фиксираме номерата n и p и правим граничен преход при $x \to \overset{\circ}{x}$ (такъв граничен преход може да се осъществи по произволна редица от точки от множеството $\{x\}$, клоняща към $\overset{\circ}{x}$). Получаваме

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$$

(за всяко $n \geq N(\varepsilon)$ и всяко естествено p). Съгласно критерия на Коши редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ е сходящ.

Да оценим сега разликата

$$S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Тъй като

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, то за всеки номер n е в сила тъждеството

$$S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} b_k\right]+\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)-\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

от което получаваме неравенството

$$(2.34)\quad \left|S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} b_k\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|,$$

което е вярно за всички точки x от множеството $\{x\}$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Тъй като редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ е сходящ, а редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, то за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер n такъв, че за всички точки x от множеството $\{x\}$

$$(2.35)\quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тъй като границата на крайна сума е равна на сумата от границите на събираемите, то за фиксираното от нас $\varepsilon>0$ и за избрания номер n може да се посочи $\delta>0$ такова, че

$$(2.36)\quad \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, които удовлетворяват условието $0<\rho(x, \overset{\circ}{x})<\delta$.

От (2.34), (2.35) и (2.36) следва, че

$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| < \varepsilon$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, удовлетворяващи условието $0<\rho(x, \overset{\circ}{x})<\delta$. Това всъщност доказва, че границата на $S(x)$ в точката $\overset{\circ}{x}$ съществува и че е вярно равенството (2.32).

Теоремата е доказана.

На езика на функционалните редици теорема 2.7 звучи така:

Ако функционалната редица $f_n(x)$ клони равномерно в множеството $\{x\}$ към граничната функция $f(x)$ и всички елементи на тази редица имат граница в точката $\overset{\circ}{x}$, то и граничната функция $f(x)$ има граница в точката $\overset{\circ}{x}$ и при това

$$\lim_{x\to\overset{\circ}{x}} f(x)=\lim_{x\to\overset{\circ}{x}}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\overset{\circ}{x}} f_n(x)\right),$$

т. е. символът $\lim\limits_{n\to\infty}$ за граница на редица и символът $\lim\limits_{x\to\overset{\circ}{x}}$ за граница на функция могат да си разменят местата (или както се казва, може да се направи почленен граничен преход при $x\to\overset{\circ}{x}$).

Следствие 1 от теорема 2.7

Ако в условието на теорема 2.7 поискаме допълнително точката $\overset{\circ}{x}$ да принадлежи на множеството $\{x\}$ и всички членове $u_k(x)$ на функционалния ред (2.31) да бъдат непрекъснати в точката $\overset{\circ}{x}$, то и сумата $S(x)$ на този ред ще бъде непрекъсната в точката $\overset{\circ}{x}$.

Наистина в този случай $b_k=u_k(\overset{\circ}{x})$ и равенството (2.32) ще има вида

$$\lim_{x\to x_0} S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\overset{\circ}{x})=S(\overset{\circ}{x}),$$

а това означава, че сумата $S(x)$ е непрекъсната в точката $\overset{\circ}{x}$.

Следствие 2 от теорема 2.7

Ако всички членове на функционалния ред (функционалната редица) са непрекъснати в гъстото в себе си множество $\{x\}$* и ако този функционален ред (функционална редица) е равномерно сходящ (сходяща) в множеството $\{x\}$, то и сумата на реда (граничната функция на редицата) е непрекъсната в множеството $\{x\}$.

Достатъчно е да се приложи предното следствие във всяка точка x от множеството $\{x\}$.

§ 4. Почленно интегриране и почленно диференциране на функционални редици и редове

1. Почленно интегриране

Ще докажем следната основна теорема.

Теорема 2.8. Ако функционалната редица $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$ и ако всяка функция $f_n(x)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$, то и граничната функция $f(x)$ е интегруема в този сегмент, при това посочената редица може да се интегрира в сегмента $[a, b]$ почленно, т. е. границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

съществува и е равна на $\int_a^b f(x)dx$.

Доказателство. Най-напред ще докажем, че граничната функция $f(x)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Достатъчно е да се докаже, че за граничната функция $f(x)$ ще се намери поне едно деление на сегмента $[a, b]$, за чиято горна сума S и долна сума s е в сила неравенството $S-s<\varepsilon$ (гл. II, § 3, глава 9, част I).

За целта е достатъчно да се покаже, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ може да се намери номер n такъв, че за всяко деление на сегмента $[a, b]$ горната сума S и долната сума s на функцията $f(x)$ и горната сума S_n и долната сума s_n на функцията $f_n(x)$ са свързани с неравенството

$$S-s\leq(S_n-s_n)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.37}$$

* Ще напомним, че множеството $\{x\}$ се нарича гъсто в себе си, ако всяка негова точка е точка на сгъстяване за това множество.

Наистина от интегруемостта на функцията $f_n(x)$ в $[a, b]$ следва, че може да се избере деление така, че да бъде вярно неравенството $S_n-s_n<\frac{\varepsilon}{2}$, от което и от (2.37) ще получим, че $S-s<\varepsilon$, което довършва доказателството на интегруемостта в $[a, b]$ на функцията $f(x)$.

Да разгледаме произволно деление $\{x_k\}$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ на сегмента $[a, b]$ и да означим със символа $\omega_k(f_n)$ осцилацията* на k-тия частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ на функцията $f_n(x)$, а със символа $\omega_k(f)$ — осцилацията в същия частичен сегмент на граничната функция $f(x)$.

Неравенството 2.27 ще бъде доказано, ако установим, че за достатъчно голям номер е в сила неравенството

$$\omega_k(f)\leq\omega_k(f)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.38}$$

(Наистина, като умножим (2.38) с дължината $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ на частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ и като сумираме така полученото неравенство по всички $k=1, 2, \ldots, m$, ще получим неравенството (2.38).)

Ще установим, че за достатъчно големи номера n неравенството (2.38) е изпълнено във всеки сегмент $[x_{n-1}, x_n]$.

За всеки номер n и за всеки две точки x' и x'' от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ е вярно тъждеството

$$f(x')-f(x'')=[f(x')-f_n(x')]+[f_n(x')-f_n(x'')]+[f_n(x'')-f(x'')],$$

от което следва неравенството

$$|f(x')-f(x'')|\leq|f(x')-f_n(x')|+|f_n(x')-f_n(x'')|+|f_n(x'')-f(x'')|. \tag{2.39}$$

От това, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони към функцията $f(x)$ равномерно в сегмента $[a, b]$, следва, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ ще се намери номер n такъв, че за всички точки x от сегмента $[a, b]$

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{2.40}$$

Като използуваме в дясната страна на (2.39) неравенството (2.40), взето за точка $x=x'$ и за точка $x=x''$, ще получим от (2.39)

$$|f(x')-f(x'')|\leq|f_n(x')|-f_n(x'')|+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.41}$$

* Ще напомним, че осцилация на функцията в произволен сегмент се нарича разликата между точната горна и точната долна граница на тази функция в посоченото сегмент.

(за избрания от нас достатъчно голям номер n и за всеки две точки x' и x'' от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$).

Тъй като при произволно разположение на точките x' и x'' в сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ е вярно неравенството

$$|f_n(x')-f_n(x'')| \leq \omega_k(f_n),$$

то от (2.41) ще получим

$$|f(x')-f(x'')| \leq \omega_k(f_n)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.42}$$

Ще отбележим, че неравенство (2.42) е вярно при произволно разположение на точките x' и x'' в частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$.

Нека означим точната горна и точната долна граница на функцията $f(x)$ в посоченият частичен сегмент съответно с M_k и m_k. От определението на точните граници следва, че можем да намерим две редици от точки $\{x_p'\}$ и $\{x_p''\}$ $(p=1, 2, \ldots)$ от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ такива, че

$$\lim_{p\to\infty} x_p'=M_k, \quad \lim_{p\to\infty} x_p''=m_k.$$

От (2.42) следва за всеки номер p

$$|f(x_p')-f(x_p'')| \leq \omega_k(f_n)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.43}$$

Като направим в неравенство (2.43) граничен преход по $p\to\infty$ и като отбележим, че границата на лявата част на (2.43) е равна на $M_k-m_k=\omega_k(f)$, ще получим като граница от (2.43) исканото неравенство (2.38).

По такъв начин доказателството на интегруемостта на граничната функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ е завършено.

Ще отбележим, че ако в условието на теорема 2.8 бяхме поискали допълнително непрекъснатост за всяка от функциите $f_n(x)$ в сегмента $[a, b]$ (което се прави в повечето учебници по математически анализ), доказателството на интегруемостта на граничната функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ би станало съвсем тривиално: от следствие 2 от теорема 2.7 при такова допълнително изискване граничната функция $f(x)$ би била непрекъсната в сегмента $[a, b]$, а следователно и интегруема в този сегмент.

Остава да докажем второто твърдение на теорема 2.8, че редицата $\{f_n(x)\}$ може да се интегрира почленно в сегмента $[a, b]$.

Достатъчно е да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$$

за всички $n\geq N(\varepsilon)$.

Но $\{f_n(x)\}$ клони равномерно към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, следователно съществува номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{2.44}$$

за всички x от сегмента $[a, b]$ и за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geq N(\varepsilon)$.

От неравенството (2.44) получаваме*

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]dx\right| \leq$$

$$\leq\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

(за всички $n\geq N(\varepsilon)$).

Доказателството на теорема 2.8 е завършено.

Ще формулираме теорема 2.8 на езика на функционалните редове: Ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

е равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$ и всеки член $u_k(x)$ е интегруема функция в сегмента $[a, b]$, то сумата му $S(x)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$, при това редът може да бъде почленно интегриран в $[a, b]$, т. е. числовият ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)dx$$

е сходящ и сумата му е $\int_a^b S(x)dx$.

Забележка. В следващата глава ще бъде получен аналог

* Използуваме следните установени в п. 2, § 4, глава 9, част I оценки: 1) ако $F(x)$ е интегруема в $[a, b]$, то и $|F(x)|$ е интегруема в $[a, b]$, като при това $\left|\int_a^b F(x)dx\right| \leq \int_a^b |F(x)|dx$; 2) ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в сегмента $[a, b]$ и навсякъде в този сегмент $f(x)\leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx\leq \int_a^b g(x)dx$.

на теорема 2.8 за случая, когато функционалната редица е определена и интегруема в някаква област на m-мерното евклидово пространство E^m (при $m \geq 2$).

2. Почленно диференциране. Занапред под думите «функцията $f(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$» ще разбираме, че функцията $f(x)$ има обикновена (двустранна) производна във всяка вътрешна точка от сегмента $[a, b]$, дясна производна $f'(a+0)$ в точката a и лява производна $f'(b-0)$ в точката b.

Вярно е следното твърдение.

Теорема 2.9. Ако всяка функция $f_n(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$, като при това редицата от производните $f_n'(x)$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$, а самата редица $\{f_n(x)\}$ е сходяща поне в една точка x_0 от сегмента $[a, b]$, то редицата $\{f_n(x)\}$ клони към някаква гранична функция $f(x)$ равномерно в сегмента $[a, b]$, като при това тази редица може да бъде диференцирана почленно, т. е. в сегмента $[a, b]$ граничната функция е диференцируема и производната $f'(x)$ е гранична функция за редицата $\{f_n'(x)\}$.

Доказателство. Ще докажем най-напред, че редицата $f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$. От сходимостта на числовата редица $\{f_n(x_0)\}$ и от равномерната сходимост на $\{f_n'(x)\}$ в сегмента $[a, b]$ следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ ще се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$(2.45) \qquad \left| f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| f_{n+p}'(x) - f_n'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

за всички $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени p и за всички x от сегмента $[a, b]$.

Нека x е произволна точка от сегмента $[a, b]$. Тъй като за функцията $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ при произволни фиксирани номера n и p в сегмента, ограничен от точките x и x_0, са изпълнени всички условия на теоремата на Лагранж, то между x и x_0 ще се намери точка ξ такава, че

$$[f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)] = [f'_{n+p}(\xi) - f_n'(\xi)](x - x_0).$$

От последното равенство и от това, че модулът на сумата на две величини не надминава сумата от техните модули, ще получим, като използуваме (2.45) и неравенството $|x - x_0| \leq b - a$, че

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

за всяко x от $[a, b]$, за всяко $n \geq N(\varepsilon)$ и всяко естествено p.

От критерия на Коши следва, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$.

Остава да покажем, че граничната функция $f(x)$ има производна във всяка фиксирана точка x от сегмента $[a, b]$ (в крайните точки — едностранна производна) и тази производна е гранична функция на редицата $\{f_n'(x)\}$.

Да фиксираме произволна точка x от сегмента $[a, b]$ и по нея $\delta < 0$ такова, че δ-околността на точка x изцяло да се съдържа в $[a, b]$ (ако x е крайна точка на сегмента $[a, b]$, под δ-околност на точка x ще разбираме дясна полуоколност $[a, a+\delta)$ на точката a и лява полуоколност $(b-\delta, b]$ на точката b).

Да означим със символа $\{\Delta x\}$ множеството от всички числа Δx, удовлетворяващи условието $0 < |\Delta x| < \delta$ при $a < x < b$, условието $0 < \Delta x < \delta$ при $x = a$ и условието $-\delta < \Delta x < 0$ при $x = b$, и да докажем, че редицата от функции на аргумента Δx

$$(2.46) \qquad \varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x}$$

е равномерно сходяща в посоченото множество $\{\Delta x\}$.

За произволно $\varepsilon > 0$ по критерия на Коши за равномерна сходимост на редицата $\{f_n'(x)\}$ ще се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$(2.47) \qquad |f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon$$

за всички x от $[a, b]$, всички $n \geq N(\varepsilon)$ и всички естествени p.

Да фиксираме сега произволно Δx от множеството $\{\Delta x\}$ и при произволни фиксирани номера n и p да приложим теоремата на Лагранж към функцията

$$[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$$

в сегмента, ограничен от точките x и $x + \Delta x$.

Съгласно тази теорема ще се намери число θ от интервала $0 < \theta < 1$ такова, че

$$\frac{[f_{n+p}(x+\Delta x) - f_n(x+\Delta x)] - [f_{n+p}(x) - f_n(x)]}{\Delta x} = f_{n+p}'(x+\theta\Delta x) - f_n'(x+\theta\Delta x).$$

Като използуваме (2.46), последното равенство може да се пренапише във вида

$$\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x) = f'_{n+p}(x+\theta\Delta x) - f_n'(x+\theta\Delta x).$$

От последното равенство и от (2.47) заключаваме, че

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x)| < \varepsilon$$

за всяко Δx от $\{\Delta x\}$, всяко $n \geq N(\varepsilon)$ и всяко естествено p. По критерия на Коши (т. е. теорема 2.1) редицата $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ е равномерно сходяща в множеството $\{\Delta x\}$. Но тогава към тази редица може да се приложи теорема 2.7 за почленния граничен преход в точката $\Delta x = 0$ (на езика на функционалните редици).

Съгласно тази теорема функцията

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

която е гранична функция за редицата (2.46), има граница в точката $\Delta x=0$, като при това тази граница може да бъде пресметната почленно, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\lim \varphi_n(\Delta x)]=\lim_{n\to\infty}[\lim \varphi_n(\Delta x)]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\lim \frac{f_n(x+\Delta x)-f_n(x)}{\Delta x}\right]=\lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Това всъщност доказва, че производната на граничната функция $f(x)$ в точката x съществува и е равна на $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Теоремата е доказана.

На езика на функционалните редове теорема 2.8 се формулира така: ако всяка функция $u_k(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$ и ако редът от производните $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ е равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$, а самият ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ е сходящ поне в една точка x_0 от сегмента $[a, b]$, то този ред е равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$, като при това може да бъде диференциран в сегмента $[a, b]$ почленно, т. е. неговата сума $S(x)$ има производна, която съвпада със сумата на реда от производните $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$.

Забележка 1. Ще подчертаем, че в теорема 2.9 се предполага само съществуване на производна за всеки член на редицата $f_n(x)$ в сегмента $[a, b]$. Нито ограниченост, нито още повече непрекъснатост на посочената производна (както това се прави в повечето учебници по математически анализ) не се предполага.

Забележка 2. Ако все пак предположим допълнително непрекъснатостта на производната на всеки член на редицата в сегмента $[a, b]$, по следствие 2 от теорема 2.7 и граничната функция $f(x)$ ще има производна, непрекъсната в сегмента $[a, b]$.

Забележка 3. За функции на m променливи теорема 2.9 може да бъде формулирана в следния вид: ако всяка от функциите $f_n(x)=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ има в затворената ограничена област G на пространството E^m частна производна $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$ по променливата x_k и

ако редицата от производните $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right\}$ е равномерно сходяща в областта G, а самата редица $\{f_n(x)\}$ е сходяща във всяка точка от областта G, то редицата $\{f_n(x)\}$ може да бъде диференцирана почленно по променливата x_k в областта G.

От теорема 2.9 лесно се получава следното твърдение.

Теорема 2.10. Ако всяка функция $f_n(x)$ има примитивна в сегмента $[a, b]$ и ако редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$, то и граничната функция $f(x)$ има примитивна в сегмента $[a, b]$. Още повече, ако x_0 е произволна точка от сегмента $[a, b]$, то редицата от онези примитивни $\Phi_n(x)$ на функциите $f_n(x)$, които удовлетворяват условието $\Phi_n(x)=0$, е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$ и клони към онази примитивна $\Phi(x)$ на граничната функция $f(x)$, която удовлетворява условието $\Phi(x_0)=0$.

Доказателство. За редицата от примитивни $\Phi_n(x)$ на функциите $f_n(x)$, които удовлетворяват условието $\Phi_n(x_0)=0$, са изпълнени всички условия на теорема 2.9. Това осигурява равномерната сходимост на редицата $\{\Phi_n(x)\}$ в $[a, b]$, при това нейната гранична функция $\Phi(x)$ има производна във всяка точка от $[a, b]$, равна на граничната функция на редицата $\{f_n(x)\}$. Теоремата е доказана.

Забележка към теорема 2.10

Ще подчертаем, че в условията на теорема 2.10 не изискваме ограниченост, нито още повече интегруемост на функциите $f_n(x)$ в сегмента $[a, b]$.

Теоремите, доказани в този и предните параграфи, ни позволяват да направим следния забележителен извод: равномерната сходимост не извежда от класа на функциите, които имат граница в дадена точка (теорема 2.7), от класа на непрекъснатите функции (следствие 2 от теорема 2.7), от класа на интегруемите функции (теорема 2.8), от класа на функциите, които имат примитивна (теорема 2.10) и (в случай на равномерна сходимост на производните) от класа на диференцируемите функции (теорема 2.9).

3. Интегрална сходимост. Ще поискаме всяка функция $f_n(x)$ от функционалната редица $\{f_n(x)\}$ и функцията $f(x)$ да бъдат интегруеми в сегмента $[a, b]$.

Тогава (както следва от резултатите в § 4, глава 9, част I) и функцията

$$[f_n(x)-f(x)]^2=f_n^2(x)-2f_n(x)\,.\,f(x)+f^2(x)$$

също ще бъде интегруема в сегмента $[a, b]$.

Ще въведем фундаменталното понятие за интегрална сходимост.

Определение 1. Ще казваме, че функционалната редица

$\{f_n(x)\}$ клони интегрално в сегмента $[a, b]$ към функцията $f(x)$, ако съществува и е равна на нула границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx. \tag{2.48}$$

Определение 2. Ще казваме, че функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

е интегрално сходящ в сегмента $[a, b]$, ако редицата от частичните му суми клони интегрално към функцията $S(x)$ (която ще наричаме сума на реда).

Забележка. От определение 1 непосредствено следва, че ако функционалната редица клони интегрално към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, то тази редица клони интегрално към $f(x)$ и във всеки сегмент $[c, d]$, който се съдържа в $[a, b]$.

Аналогична забележка е валидна за интегралната сходимост на функционалните редове.

Ще изясним въпроса за връзката между интегралната сходимост и равномерната сходимост на редици.

Най-напред ще докажем, че ако редицата $\{f_n(x)\}$ клони към $f(x)$ равномерно в сегмента $[a, b]$, то тази редица клони към $f(x)$ и интегрално в сегмента $[a, b]$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От равномерната сходимост на редицата $\{f_n(x)\}$ към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ следва, че за положителното число $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че е валидно неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \tag{2.49}$$

за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geqq N(\varepsilon)$, и всички точки x от сегмента $[a, b]$.

Но тогава от теоремите за определен интеграл (гл. п. 2, § 4, глава 9, част I) следва, че

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

за всички $n\geqq N(\varepsilon)$. Това означава, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони интегрално към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$.

Сега ще се убедим, че интегралната сходимост в някакъв сегмент не влече след себе си не само равномерна сходимост в този сегмент, но и сходимост в поне една точка от посоченото сегмент.

Да разгледаме редицата от съдържащи се в $[0, 1]$ сегменти $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, които имат следния вид:

$$I_1=[0,1],$$

$$I_2=\left[0,\frac{1}{2}\right],\ I_3=\left[\frac{1}{2},\ 1\right],$$

$$I_4=\left[0,\frac{1}{4}\right],\ I_5=\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right],\ I_6=\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right],\ I_7=\left[\frac{3}{4},\ 1\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_{2^n}=\left[0,\frac{1}{2^n}\right],\ I_{2^n+1}=\left[\frac{1}{2^n},\ \frac{2}{2^n}\right],\ldots,\ I_{2^{n+1}-1}=\left[1-\frac{1}{2^n},\ 1\right],$$

Определяме n-тия член $f_n(x)$ на функционалната редица $\{f_n(x)\}$ по следния начин:

$$f_n(x)=\begin{cases}1 \text{ на сегмента } I_n,\\ 0 \text{ в останалите точки на } [0, 1].\end{cases}$$

Да се убедим, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони към граничната функция $f(x)\equiv 0$ интегрално в сегмента $[0, 1]$. Наистина

$$\int_0^1 [f_n(x)-f(x)]^2dx=\int_{I_n} dx=\text{дължината на сегмента } I_n,$$ така че

съществува границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 [f_n(x)-f(x)]^2dx=0.$$

Да се убедим накрая, че построената редица не е сходяща нито в една точка на сегмента $[0, 1]$.

Наистина каквато и точка x_0 от сегмента $[0, 1]$ да фиксираме, ще се намерят произволно големи номера n, както такива, за които сегментът I_n съдържа точката x_0 (за тези номера $f_n(x_0)=1$), така и такива, за които сегментът I_n не съдържа точка x_0 (за такива номера $f_n(x_0)=0$). По такъв начин редицата $\{f_n(x_0)\}$ съдържа безброй много членове, равни на единица, и безброй много членове, равни на нула. Такава редица е разходяща.

Оказва се, че интегралната сходимост на една редица осигурява възможност за почленно интегриране на тази редица.

Теорема 2.11. Ако редицата $\{f_n(x)\}$ клони интегрално към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, то тази редица може да бъде почленно интегрирана в сегмента $[a, b]$, т. е. границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

съществува и е равна на $\int_a^b f(x)dx$.

Доказателство. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От интегралната сходимост на $\{f_n(x)\}$ към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ следва, че ще се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 dx<\frac{\varepsilon^2}{b-a} \tag{2.50}$$

за всички $n\geq N(\varepsilon)$.

Като запишем очевидното неравенство* $|A|.|B|\leq\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}$ за величините

$$A=[f_n(x)-f(x)]\cdot\sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}},\quad B=\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}},$$

ще получим, че

$$|f_n(x)-f(x)|\leq[f_n(x)-f(x)]^2\frac{b-a}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.51}$$

От (2.51) и от теорията на определения интеграл ще получим

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx\leq\frac{b-a}{2\varepsilon}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

От последното неравенство и от (2.50) ще получим при всички $n\geq N(\varepsilon)$

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{2.52}$$

Тъй като

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]dx\right|\leq\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx,$$

то от (2.52) ще получим

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$$

за всички $n\geq N(\varepsilon)$.

Теоремата е доказана.

* Това неравенство е еквивалентно на неравенството $(|A|-|B|)^2\geq 0$.

§ 5. Равностепенна непрекъснатост на редица от функции

Да предположим, че всяка от функциите $f_n(x)$ от една функционална редица $\{f_n(x)\}$ е дефинирана в някакво гъсто в себе си множество $\{x\}$ от пространство E^m.

Определение. Ще казваме, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната в множеството $\{x\}$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че неравенството

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon \tag{2.53}$$

да е изпълнено за всички номера n и всички точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, които са свързани с условието $\rho(x', x'')<\delta$.

От това определение е очевидно, че ако цялата редица е равностепенно непрекъсната в множеството $\{x\}$, то и всяка нейна подредица е равностепенно непрекъсната в това множество.

За простота на изложението ще разглеждаме редицата $\{f_n(x)\}$ от функции на една променлива x, равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$. По определение за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери $\delta>0$ такова, че неравенство (2.53) е изпълнено за всички номера n и всички точки x' и x'' от сегмента $[a, b]$, които са свързани с условието $|x'-x''|<\delta$.

Ще докажем следното твърдение, което може да се разглежда като функционален аналог на теоремата на Болцано—Вайерщрас.

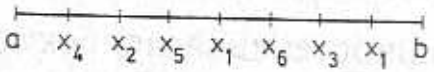
Теорема 2.12 (теорема на Арцела)

Ако функционалната редица $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната и равномерно ограничена в сегмента $[a, b]$, то от тази редица може да се избере подредица, равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$.

Доказателство. Да разгледаме в сегмента $[a, b]$ следната специална редица от точки $\{x_i\}$: за x_1 ще вземем тази точка, която дели сегмента $[a, b]$ на две равни части, за x_2 и x_3 ще вземем тези две точки, които заедно с x_1 делят сегмента $[a, b]$ на четири равни части, за x_4, x_5, x_6 и x_7 ще вземем тези четири точки, които заедно с x_1, x_2 и x_3 делят сегмента $[a, b]$ на 8 равни части (гл. рис. 2.3)... Така построената редица има следното свойство: за всяко $\delta>0$ може да се намери номер n_0 такъв, че във всеки принадлежащ на $[a, b]$ сегмент с дължина δ лежи поне един от елементите $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$*.

Сега пристъпваме към избора на редица $\{f_n(x)\}$ на равномерно сходяща в $[a, b]$ подредица. Най-напред да разгледаме редицата $\{f_n(x_1)\}$. Тя е ограничена и на основание на теоремата на Болцано—Вайерщрас (ч. I, гл. 3, § 4) можем да изберем сходяща подредица

* За редица, която няма такова свойство, казват, че тя е гъста в сегмента $[a, b]$.



Фиг. 2. 3

$$f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1), \ldots$$

По-нататък разглеждаме числовата редица

$$f_{11}(x_2), f_{12}(x_2), \ldots, f_{1n}(x_2), \ldots.$$

По теоремата на Болцано—Вайерщрас от нея може да се избере сходяща подредица

$$f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), \ldots, f_{2n}(x_2), \ldots$$

Така функционалната редица

$$f_{21}(x), f_{22}(x), \ldots, f_{2n}(x), \ldots \tag{2.54}$$

е сходяща и в точка x_1, и в точка x_2.

По-нататък разглеждаме функционалната редица (2.54) в точка x_3 и избираме от нея сходяща подредица

$$f_{31}(x_3), f_{32}(x_3), \ldots, f_{3n}(x_3), \ldots$$

С аналогични разсъждения ще получим безброй много подредици:

$$\begin{array}{l}
f_{11}(x), f_{12}(x), f_{13}(x), \ldots, f_{1n}(x), \ldots \\
f_{21}(x), f_{22}(x), f_{23}(x), \ldots, f_{2n}(x), \ldots \\
f_{31}(x), f_{32}(x), f_{33}(x), \ldots, f_{3n}(x), \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_{n1}(x), f_{n2}(x), f_{n3}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

при това подредиците, стояща в n-тия ред, е сходяща във всяка от точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Да разгледаме сега така наречената «диагонална» подредица

$$f_{11}(x), f_{22}(x), f_{33}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots$$

Ще докажем, че тази подредица е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$.

За краткост на записа по-долу ще означаваме тази диагонална подредица (както и изходната редица) със символа

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots,$$

т. е. вместо удвоения индекс ще пишем единичен. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$.

Тъй като диагоналната редица е равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то за фиксираното $\varepsilon>0$ ще се намери $\delta>0$ такова, че за всеки две точки x и x_m от сегмента $[a, b]$, свързани с неравенството $|x-x_m|<\delta$, е вярно неравенството

$$|f_n(x)-f_n(x_m)|<\varepsilon \tag{2.55}$$

за всички номера n. Забелязвайки това, делим сегмента $[a, b]$ на краен брой отсечки с дължина, по-малка от δ. От редицата $\{x_n\}$ ще изберем n_0 първи членове $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ така, че във всяка от споменатите отсечки да се съдържа поне една от точките $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Очевидно е, че диагоналната редица е сходяща във всяка от точките $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Затова за фиксираното по-горе $\varepsilon>0$ ще се намери номер N такъв, че

$$|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2.56}$$

за всички $n\geqq N$, всички естествени p и всички $m=1, 2, \ldots, n_0$.

Нека сега x е произволна точка от сегмента $[a, b]$. Тази точка задължително лежи в една от споменатите по-горе отсечки с дължина, по-малка от δ. Затова за тази точка x ще се намери поне една точка x_m (m е един от номерата, равни на $1, 2, \ldots, n_0$), която да удовлетворява условието $|x-x_m|<\delta$.

Поради това, че модулът от сумата на три величини не надминава сумата на техните модули, можем да напишем

$$\begin{aligned}
|f_{n+p}(x)-f_n(x)| \leqq & |f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_m)|+ \\
& +|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|+|f_n(x_m)-f_n(x)|.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Вторият член в дясната част на (2.57) ще оценим с помощта на неравенство (2.56), а за оценката на първия и третия член в дясната част ще вземем под внимание, че $|x-x_m|<\delta$, и ще привлечем неравенство (2.55), което е изпълнено за всеки номер n (а значи и за всяко $n+p$).

Окончателно ще получим, че за произволно $\varepsilon>0$ ще се намери номер N такъв, че

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

за всички $n\geqq N$, всички естествени p и всяка точка x от $[a, b]$. Равномерната сходимост на диагоналната редица е доказана. Теорема 2.12 е доказана.

Забележка 1. В теоремата на Арцела вместо равномерната ограниченост на редицата $\{f_n(x)\}$ в сегмента $[a, b]$ е достатъчно да се поиска ограниченост на тази редица поне в една точка на този

сегмент. Наистина вярно е следното твърдение: ако редицата $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и е ограничена поне в една точка x_0 от този сегмент, то тази редица е равномерно ограничена в сегмента $[a, b]$. За доказателството на това твърдение ще отбележим, че по определението на равностепенната непрекъснатост за $\varepsilon=1$ ще се намери $\delta>0$ такова, че осцилацията на всяка функция $f_n(x)$ в произволен сегмент с дължина, ненадминаваща δ, не надминава числото $\varepsilon=1$. Тъй като целият сегмент $[a, b]$ може да се покрие с краен брой n_0 сегменти с дължина, ненадминаваща δ, то колебанието на всяка функция $f_n(x)$ в целия сегмент $[a, b]$ не надминава числото n_0. Но тогава от неравенството $|f_n(x_0)|\leq A$, изразяващо ограничеността на редицата $\{f_n(x)\}$ в точка x_0, следва неравенството $|f_n(x)|\leq A+n_0$, което е изпълнено за всяка точка x от сегмента $[a, b]$ и изразява равномерната ограниченост на разглежданата редица в този сегмент.

Забележка 2. Ще установим признак за равностепенна непрекъснатост: ако редицата $\{f_n(x)\}$ се състои от диференцируеми в сегмента $[a, b]$ функции и ако редицата от производните $\{f_n'(x)\}$ е равномерно ограничена в този сегмент, то редицата $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$.

За доказателство да вземем в сегмента $[a, b]$ две произволни точки x' и x'' и да напишем за функцията $f_n(x)$ в сегмента $[x', x'']$ формулата на Лагранж (гл. част I, глава 6, § 3).

Съгласно теоремата на Лагранж в сегмента $[x', x'']$ ще се намери точка ξ_n такава, че

$$|f_n(x')-f_n(x'')|=|f_n'(\xi_n)|\cdot|x'-x''|. \tag{2.58}$$

Тъй като редицата от производните $\{f_n'(x)\}$ е равномерно ограничена в сегмента $[a, b]$, то ще се намери константа A такава, че за всички номера n да е изпълнено неравенството

$$|f_n'(\xi_n)|\leq A. \tag{2.59}$$

Като поставим (2.59) в (2.58), ще получим

$$|f_n(x')-f_n(x'')|\leq A\,|x'-x''|. \tag{2.60}$$

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Тогава, ако вземем $\delta=\frac{\varepsilon}{A}$ и използуваме (2.60), ще получим, че за всички номера n и за всички x' и x'' от $[a, b]$, които са свързани с условието $|x'-x''|<\delta$, ще бъде вярно неравенството

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon.$$

Равностепенната непрекъснатост на редицата $\{f_n(x)\}$ е доказана.

Като пример ще разгледаме редицата $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$. Тази редица

е равностепенно непрекъснатата във всеки сегмент $[a, b]$, защото във всеки сегмент $[a, b]$ редицата от производните $\{\cos nx\}$ е равномерно ограничена.

Забележка 3. Понятието равностепенна непрекъснатост може да се въведе не по отношение на редица от функции, а по отношение на произволно множество от функции.

§ 6. Степенни редове

1. Степенен ред. Област на сходимост. Степенен ред ще наричаме функционален ред от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots, \tag{2.61}$$

където $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ са постоянни реални числа, наречени коефициенти на реда (2.61).

Ще изясним как е устроена областта на сходимост на произволен степенен ред.

Ще отбележим, че всеки степенен ред е сходящ в точката $x=0$, като при това съществуват степенни редове, които са сходящи само в тази точка (например редът $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$).

С помощта на коефициентите a_n на реда (2.61) съставяме следната числова редица:

$$\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{2.62}$$

Възможни са два случая: 1) редицата (2.62) е неограничена; 2) редицата (2.62) е ограничена.

В случай 2) редицата (2.62) има крайна горна точка на сгъстяване (лимес супериор) (гл. п. 1, § 3, глава 3, част I), която ние ще означим с L. Ще подчертаем, че посочената горна точка на сгъстяване сигурно е неотрицателна (защото всички елементи на редицата (2.62) са неотрицателни, а следователно и всяка точка на сгъстяване на тази редица е неотрицателна).

Достигаме до извода, че са възможни три случая: I) редицата (2.62) е неограничена; II) редицата (2.62) е ограничена и има крайна горна точка на сгъстяване $L>0$; III) редицата (2.62) е ограничена и има горна точка на сгъстяване $L=0$.

Ще докажем следното забележително твърдение.

Теорема 2.13 (теорема на Коши—Адамар)

I. Ако редицата (2.62) е неограничена, то степенният ред (2.61) е сходящ само при $x=0$.

II. Ако редицата (2.62) е ограничена и има горна точка на сгъстяване $L>0$, то редът (2.61) е абсолютно сходящ за онези значения на x, които удовлетворяват неравенството $|x|<\frac{1}{L}$, и е разходящ за онези значения на x, които удовлетворяват неравенството $|x|>\frac{1}{L}$.

III. Ако редицата (2.62) е ограничена и нейната горна точка на сгъстяване L е равна на нула, то редът (2.61) е абсолютно сходящ за всички значения на x.

Доказателство

I. Нека редицата (2.62) е неограничена. Тогава при $x\neq 0$ редицата

$$|x|\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{|a_n x^n|}$$

също ще бъде неограничена, т. е. тази редица ще има членове с произволно големи номера n, удовлетворяващи неравенството

$$\sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|}<1 \quad \text{или} \quad |a_n x^n|>1.$$

Но това означава, че за реда (2.61) (при $x\neq 0$) е нарушено необходимото условие за сходимост (гл. п. 2, § 1, глава 1), т. е. редът (2.61) е разходящ при $x\neq 0$.

II. Нека редицата (2.62) е ограничена и нейната горна точка на сгъстяване L е строго положителна. Ще докажем, че редът (2.61) е абсолютно сходящ при $|x|<\frac{1}{L}$ и разходящ при $|x|>\frac{1}{L}$.

а) Фиксираме отначало произволно x, удовлетворяващо неравенството $|x|<\frac{1}{L}$. Тогава ще се намери $\varepsilon>0$ такова, че $|x|<\frac{1}{L+\varepsilon}$. От свойствата на горната точка на сгъстяване следва, че всички елементи на $\sqrt[n]{|a_n|}$, като започнем от някакъв номер n, удовлетворяват неравенството

$$\sqrt[n]{|a_n|}<L+\frac{\varepsilon}{2}.$$

По такъв начин от посочения номер n нататък е вярно неравенството

$$\sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|}=|x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{L+\varepsilon/2}{L+\varepsilon}<1,$$

т. е. редът (2.61) е абсолютно сходящ по признака на Коши (гл. п. 3, § 2, глава 1).

б) Сега фиксираме произволно x, удовлетворяващо неравенството $|x|>\frac{1}{L}$.

Тогава ще се намери $\varepsilon>0$ такова, че $|x|>\frac{1}{L-\varepsilon}$. [По определението на горната точка на сгъстяване имаме, че от редицата (2.62) може да се избере подредица $\left\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, клоняща към L.

Но това означава, че от някакъв номер k нататък е вярно неравенството

$$L-\varepsilon<\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}<L+\varepsilon.$$

По такъв начин от посочения номер k нататък е изпълнено неравенството

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}\cdot x^{n_k}|}=|x|\cdot\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon}=1$$

или

$$|a^{n_k}\cdot x^{n_k}|>1,$$

т. е. нарушено е необходимото условие за сходимост на реда (2.61) и този ред е разходящ.

III. Нека редицата (2.62) е ограничена и нейната горна точка на сгъстяване е $L=0$. Ще докажем, че редът (2.61) е абсолютно сходящ при всяко x.

Фиксираме произволно $x\neq 0$ (при $x=0$ редът (2.61) е абсолютно сходящ). Т. к. горната точка на сгъстяване L е равна на нула и редицата (2.62) не може да има отрицателни точки на сгъстяване, то числото $L=0$ е единствена точка на сгъстяване, а следователно и граница на тази редица, т. е. редицата (2.62) е безкрайно малка.

Но тогава за положителното число $\frac{1}{2|x|}$ ще се намери номер, започвайки от който

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{2|x|}.$$

Значи от посочения номер нататък

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1,$$

т. е. редът (2.61) е абсолютно сходящ по признака на Коши (гл. II, § 2, глава 1). Теоремата е доказана.

Доказаната теорема води непосредствено до следното фундаментално твърдение.

Теорема 2.14. За всеки степенен ред (2.61) съществува неотрицателно число R (което може да бъде ∞) такова, че този ред е абсолютно сходящ при $|x|<R$ и разходящ при $|x|>R$.

Това число R се нарича радиус на сходимост на разглеждания степенен ред, а интервалът $(-R, R)$ се нарича интервал на сходимост. Радиусът на сходимост се пресмята по формулата

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2.63}$$

(в случай на $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ имаме $R = \infty$).

Забележка 1. В краищата на интервала на сходимост, т. е. в точките $x=-R$ и $x=R$, степенният ред може да бъде както сходящ, така и разходящ*.

Тъй като за реда $1+\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ радиусът на сходимост R е равен на единица, то интервалът на сходимост има вида $(-1, 1)$ и този ред е разходящ в краищата на посоченото интервал.

За реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ интервалът на сходимост е същият $(-1, 1)$, но този ред е сходящ в двата края на посоченото интервал.

Забележка 2. Всички резултати от настоящия пункт са валидни за реда (2.61), в който реалната променлива x е заместена с комплексната променлива z и коефициентите a_n са произволни комплексни числа.

За такъв ред се установява съществуването на положително число R такова, че редът е абсолютно сходящ при $|z|<R$ и разходящ при $|z|>R$.

За пресмятане на R е валидна формула (2.63). Числото R се

* Ще отбележим следната теорема на Абел: ако степенният ред (2.61) е сходящ при $x=R$, то неговата сума $S(x)$ е непрекъсната в точката R отляво. Без ограничения на общността може да се смята, че $R=1$, но в такъв вид теоремата на Абел (фактически установяваща регулярността на метода за сумиране на Поасон—Абел) е доказана в п. 2, § 7, глава 1.

нарича радиус на сходимост, а областта $|z|<R$ — кръг на сходимост на посоченото ред.

2. Непрекъснатост на сумата на степенен ред. Нека степенният ред (2.61) има радиус на сходимост $R>0$.

Лема 2. Ако положителното число r удовлетворява условието $r<R$, то редът (2.61) е равномерно сходящ в сегмента $[-r, r]$, т. е. при $|x|\leq r$.

Доказателство. От теорема 2.14 следва, че редът (2.61) е абсолютно сходящ при $x=r$, т. е. сходящ е редът

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n.$$

Но последният числов ред мажорира реда (2.61) при всички x от сегмента $[-r, r]$. По признака на Вайерщрас редът (2.61) е равномерно сходящ в сегмента $[-r, r]$. Лемата е доказана.

Следствие. В условията на лема 2 сумата на реда (2.61) е непрекъсната функция в сегмента $[-r, r]$ (по теорема 2.7).

Теорема 2.15. Сумата на степенния ред е непрекъсната функция във всички вътрешни точки от неговия интервал на сходимост.

Доказателство. Нека $S(x)$ е сумата на степенния ред (2.61), а R — неговият радиус на сходимост. Фиксираме произволно x от вътрешността на интервала на сходимост, т. е. такова, че $|x|<R$. Винаги ще се намери число r такова, че $|x|<r<R$. Съгласно следствието от лема 2 функцията $S(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-r, r]$. Следователно $S(x)$ е непрекъсната и в точката x. Теоремата е доказана.

3. Почленно интегриране и почленно диференциране на степенен ред

Теорема 2.16. Ако $R>0$ е радиусът на сходимост на степенния ред (2.61), а x удовлетворява условието $|x|<R$, то редът (2.61) може да бъде интегриран почленно в сегмента $[0, x]$. Полученият в резултат на почленното интегриране ред има същия радиус на сходимост R, както и изходният ред.

Доказателство. За всяко x, удовлетворяващо условието $|x|<R$, ще се намери r такова, че $|x|<r<R$. Съгласно лема 2 редът (2.61) е равномерно сходящ в сегмента $[0, x]$, а значи и в сегмента $[0, x]$. Но тогава от теорема 2.8 следва, че този ред може да бъде интегриран почленно в сегмента $[0, x]$.

В резултат на почленното интегриране ще се получи степенният ред

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\ldots,$$

радиусът на сходимост на който съгласно теорема 2.4 е реципрочната стойност на горната точка на сгъстяване на редицата

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}}=\frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}. \tag{2.64}$$

Тъй като горната точка на сгъстяване на редицата (2.64) е същата като тази на редицата (2.62)*, то теоремата е доказана.

Теорема 2.17. Степенният ред (2.61) може да бъде диференциран почленно във всяка вътрешна точка от неговия интервал на сходимост. Редът, получен при почленното диференциране, има същия радиус на сходимост R, какъвто и изходният ред.

Доказателство. Достатъчно е (съгласно теорема 2.9 и лема 2) да се докаже само второто твърдение на теоремата.

В резултат на почленното диференциране на (2.61) ще получим реда

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_{n-1}x^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\ldots,$$

чийто радиус на сходимост R съгласно теорема 2.14 е реципрочен на горната точка на сгъстяване на редицата

$$\left\{\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}\right\}. \tag{2.65}$$

Тъй като редицата (2.65) има същата горна точка на сгъстяване като (2.62)**, то теоремата е доказана.

Следствие. Степенният ред може да бъде диференциран по-

* Защото $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n-1}|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n+1]{|a_n|}=$

$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}^{\frac{n}{n+1}}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$.

** Защото $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n-1]{|a_n|}=$

$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}^{\frac{n}{n-1}}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$.

членно във вътрешността на интервала на сходимост произволен брой пъти.

Редът, получен при n-кратното почленно диференциране на изходния ред има същия радиус на сходимост, както изходният ред.

§ 7. Разлагане на функции в степенни редове

1. Разлагане на функция в степенен ред

Определение. Ще казваме, че функцията $f(x)$ може да бъде разложена в степенен ред в интервала $(-R, R)$ (в множеството $\{x\}$), ако съществува сходящ в посоченият интервал (посоченото множество) степенен ред, чиято сума е $f(x)$.

В сила са следните твърдения.

1°. Ако една функция $f(x)$ се разлага в степенен ред в интервала $(-R, +R)$, то тя има в този интервал производни от произволен ред*.

Наистина вътре в интервала на сходимост, който съдържа интервала $(-R, +R)$, степенният ред може да бъде диференциран почленно произволен брой пъти, като получените при това редове са сходящи във вътрешността на същия интервал на сходимост (теорема 2.17).

Но тогава сумите на редовете, получени чрез произволен брой диференцирания по теорема 2.15, са непрекъснати функции в интервала $(-R, +R)$.

2°. Ако функцията $f(x)$ може да бъде разложена в интервала $(-R,R)$ в степенен ред, то това може да стане само по един начин.

Наистина нека функцията $f(x)$ се разлага в интервала $(-R,+R)$ в степенен ред (2.61).

Като диференцираме посочения ред почленно n пъти (което със сигурност може да се направи вътре в интервал $(-R, +R)$), ще получим

$$f^{(n)}(x)=a_n\,.\,n!+a_{n+1}\,.\,(n+1)!x+\ldots$$

Оттук при $x=0$ ще намерим

* Ще отбележим, че съществуват функции, които имат в даден интервал непрекъснати производни от произволен ред, но не могат да бъдат разложени в този интервал в степенен ред. Такава функция е например

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

$$f^{(n)}(0)=a_n \cdot n!$$

или

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{2.66}$$

Така коефициентите на степенния ред (2.61), в който може да бъде разложена $f(x)$, се определят еднозначно по формула (2.66).

Да предположим сега, че функцията $f(x)$ има в интервала $(-R, +R)$ непрекъснати производни от произволен ред.

Определение 2. Степенният ред (2.61), коефициентите на който се определят по формула (2.66), се нарича ред на Тейлор за функцията $f(x)$.

Твърдение 2° ни води до следното твърдение.

3°. Ако функция $f(x)$ може да бъде разложена в интервала $(-R, +R)$ в степенен ред, то този ред съвпада с реда на Тейлор за функцията $f(x)$.

В заключение ще формулираме следното твърдение, което следва непосредствено от § 8, глава 6, част I.

4°. За да може функцията $f(x)$ да бъде разложена в ред на Тейлор в интервала $(-R, +R)$ (в множеството $\{x\}$), е необходимо и достатъчно остатъчният член във формулата на Маклорен за тази функция да клони към нула в посоченото интервал (посоченото множество).

2. Разлагане на някои елементарни функции в ред на Тейлор. В част I (п. 2, § 9, глава, 6) е доказано, че остатъчните членове във формулата на Маклорен за функциите e^x, $\cos x$ и $\sin x$ клонят към нула на цялата безкрайна права, а остатъчният член във формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$ клони към нула в полусегмента $-1<x\leq+1$.

Като използуваме твърдение 4° от предния пункт, получаваме следните разлагания:

$$e^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

Първите три разлагания са сходящи за всички значения на x, а последното — за значенията на x от полусегмента $-1<x\leq+1$.

Да се спрем сега на разлагането в степенен ред на функцията $(1+x)^\alpha$ (наречено биномен ред).

Ако $f(x)=(1+x)^\alpha$, то

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Затова формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Коши има вида (гл. част I, глава 6, § 8)

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+R_{n+1}(x), \tag{2.67}$$

където

$$\begin{aligned}R_{n+1}(x)&=\frac{(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}f^{(n+1)}(\theta x)=\\&=\frac{(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}\cdot\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}=\\&=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}\cdot x^{n+1}\end{aligned} \tag{2.68}$$

(θ — някакво число от интервала $0<\theta<1$).

Най-напред ще се убедим в това, че при $\alpha>0$ навсякъде в интервала $-1<x<1$ остатъчният член $R_{n+1}(x)$ клони към нула (при $n\to\infty$).

Наистина всички членове на редицата $\left\{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)\right\}^n$ навсякъде в посочения интервал не надминават единица; редицата $\left\{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\right\}$ е ограничена, а числото $\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}$ е ограничено при всяко фиксирано $\alpha>0$ и при всяко x от интервала $-1<x<1$; и най-после редицата $\{x^{n+1}\}$ е безкрайно малка за произволно x от интервала $-1<x<1$.

Следователно от (2.67) следва, че при $\alpha>0$ навсякъде в интервала $-1<x<1$ е валидно разлагането

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k. \tag{2.69}$$

Сега ще докажем, че при $\alpha>0$ редът, стоящ в дясната част (2.69), е равномерно сходящ в затворения сегмент $-1\leq x\leq 1$ и неговата сума е $(1+x)^\alpha$.

Навсякъде в посоченото сегмент този ред се мажорира от следния числов ред:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\alpha|\,|1-\alpha|\,\ldots\,|k-1-\alpha|}{k!}. \tag{2.70}$$

От признака на Вайерщрас следва, че за установяване на равномерната в сегмента $-1\leq x\leq +1$ сходимост на реда, стоящ в дясната част на (2.69), е достатъчно да се докаже сходимостта на мажориращия ред (2.70).

Да означим k-тия член на реда (2.70) със символа p_k. Тогава за всички достатъчно големи k ще получим

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{k-\alpha}{k+1}=1-\frac{1+\alpha}{k+1}. \tag{2.71}$$

От формула (2.71) следва, че

$$\lim_{k\to\infty}k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=(1+\alpha)\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=1+\alpha>1,$$

т. е. редът (2.70) е сходящ по признака на Раабе (глава 1, § 2, п. 5).

С това е доказано, че при $\alpha>0$ редът, стоящ в дясната част на (2.69), е равномерно сходящ в сегмента $-1\leq x\leq +1$. Остава да се покаже, че сумата на посоченото ред в сегмента $-1\leq x\leq +1$ съвпада с функцията $(1+x)^\alpha$.

От казаното по-горе сумата на посоченото ред $S(x)$ и функцията $(1+x)^\alpha$ съвпадат навсякъде в интервала $-1<x<+1$. Освен това двете функции $S(x)$ и $(1+x)^\alpha$ са непрекъснати в сегмента $-1\leq x\leq +1$ (сумата $S(x)$ като сума на равномерно сходящ ред от непрекъснати функции; непрекъснатостта на функцията $(1+x)^\alpha$ при $\alpha>0$ е очевидна).

Но тогава значенията на функциите $S(x)$ и $(1+x)^\alpha$ в точките $x=-1$ и $x=1$ съвпадат, т. е. сумата на реда, стоящ в дясната част на (2.69), е $(1+x)^\alpha$ в затворения сегмент.

3. Елементарни понятия за функции на комплексна променлива. По-горе вече бе отбелязано, че за степенен ред относно комплексна променлива z

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

са валидни теоремите (2.13) и (2.14) (за съществуването и големината на радиуса на сходимост). Редове от този тип се използват за определяне функции на комплексната променлива z.

Функциите e^z, $\cos z$ и $\sin z$ на комплексната променлива z се определят като суми на следните редове:

$$e^z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \tag{2.72}$$

$$\cos z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.73}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{2.74}$$

Лесно се проверява, че посочените три реда са абсолютно сходящи за всички значения на z (техният радиус на сходимост е $R=\infty$).

Сега ще установим връзка между функциите e^z, $\cos z$ и $\sin z$.

Като заместим във формула (2.72) z с iz, ще получим

$$e^{iz}=1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right). \tag{2.75}$$

Като съпоставим дясната част на равенство (2.75) с разлаганията (2.73) и (2.74), стигаме до следната забележителна формула:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \tag{2.76}$$

Формула (2.76) играе фундаментална роля в теорията на функциите на комплексна променлива и се нарича формула на Ойлер.

Като положим във формулата на Ойлер променливата z, равна отначало на реалното число x, а след това на реалното число $-x$, ще получим следните две формули:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\qquad e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

Като съберем и извадим тези две формули, ще получим формули, изразяващи $\cos x$ и $\sin x$ чрез показателната функция

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\\[2ex] \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}.\end{cases} \tag{2.77}$$

Накрая ще се спрем на определението на логаритмичната функция $w=\ln z$ на комплексната променлива z. Тази функция естест-

вено се определя като функция, обратна на показателната, т. е. от съотношението $z=e^w$. Полагаме $w=u+iv$, $z=x+iy$ и си поставяме за цел да изразим u и v чрез $z=x+iy$.

От съотношението

$$z=x+iy=e^{u+iv}=e^u(\cos v+i\sin v)$$

ще получим, като използуваме понятията модул и аргумент на комплексното число,

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=e^u, \quad \arg z=v-2\pi k,$$

където

$$k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

От последните равенства намираме, че

$$u=\ln|z|=\ln\sqrt{x^2+y^2},$$

$$v=\arg z+2\pi k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

или окончателно

(2.78) $\ln z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)$, където $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Формула (2.78) показва, че логаритмичната функция в комплексната равнина не е еднозначна: нейната имагинерна част за едно и също значение на z има безброй много значения, отговарящи на различни $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Лесно се вижда, че аналогична ситуация ще имаме и при определянето даже в реалната област на обратните тригонометрични функции.

4. Равномерно апроксимиране на непрекъсната функция с многочлени (теорема на Вайерщрас). В този пункт ще докажем фундаментална теорема, принадлежаща на Вайерщрас и установена от него в 1895 г.

Теорема 2.18 (теорема на Вайерщрас). Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то съществува редица от многочлени $\{P_n(x)\}$, равномерно в сегмента $[a, b]$ клоняща към $f(x)$, т. е. за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери многочлен $P(x)$ такъв, че

$$|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

едновременно за всички x от сегмента $[a, b]$.

С други думи, непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция $f(x)$ може равномерно в този сегмент да се апроксимира с многочлен с отнапред зададена точност ε.

Доказателство. Без да ограничаваме общността, можем

вместо сегмента $[a, b]$ да разглеждаме сегмента $[0,1]$*. Освен това достатъчно е да докажем теоремата за непрекъсната функция $f(x)$, която става нула в краищата на сегмента $[0,1]$, т. е. удовлетворява условията $f(0)=0$ и $f(1)=0$. Наистина, ако $f(x)$ не удовлетворява тези условия, като положим

$$g(x)=f(x)-f(0)-x[f(1)-f(0)],$$

ще получим непрекъсната в сегмента $[0,1]$ функция $g(x)$, удовлетворяваща условията $g(0)=0$ и $g(1)=0$, и от възможността за представяне на $g(x)$ като граница на равномерно сходяща редица от многочлени ще следва, че и $f(x)$ е граница на равномерно сходяща редица от многочлени (защото разликата $f(x)-g(x)$ е многочлен от първа степен).

И така нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[0,1]$ и удовлетворява условията $f(0)=0$, $f(1)=0$. Такава функция можем да продължим в цялата безкрайна права, като я положим равна на нула извън границите на сегмента $[0,1]$, и можем да твърдим, че така продължената функция е равномерно непрекъсната в цялата права.

Да разгледаме следната конкретна редица от неотрицателни многочлени от степен $2n$:

(2.79) $$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n \quad (n=1, 2, \ldots),$$

за всеки от които константата c_n е избрана така, че е изпълнено равенството

(2.80) $$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx=1.$$

Без да пресмятаме точното значение на константата c_n, ще я оценим отгоре.

За целта ще отбележим, че за всеки номер $n=1, 2, \ldots$ и за всички x от сегмента $[0,1]$ е вярно неравенството**

(2.81) $$(1-x^2)^n \geq 1-nx^2.$$

Като приложим неравенство (2.81) и вземем под внимание, че $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ при всяко $n \geq 1$, ще имаме

* Тъй като единият от тези сегменти се преобразува в другия посредством линейната смяна $x=(b-a)t+a$.

** Това неравенство следва от това, че при $n \geq 1$ функцията $\varphi(x)=(1-x^2)^n-(1-nx^2)$ е неотрицателна навсякъде в сегмента $0 \leq x \leq 1$, защото тази функция става нула при $x=0$ и има навсякъде в посоченият сегмент неотрицателна производна $\varphi'(x)=2nx[1-(1-x^2)^{n-1}]$.

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n dx \geq$$

(2.82) $$\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)dx = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

От (2.79), (2.80) и (2.82) заключаваме, че за всички номера $n=1, 2, \ldots$ е вярна следната оценка отгоре за постоянната c_n:

(2.83) $$c_n < \sqrt{n}.$$

От (2.83) и (2.79) следва, че при всяко $\delta>0$ за всички x от сегмента $\delta \leq |x| \leq 1$ е вярно неравенството

(2.84) $$0 \leq Q_n(x) \leq \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n.$$

От (2.84) следва, че при всяко фиксирано $\delta>0$ редицата от неотрицателни многочлени $\{Q_n(x)\}$ клони към нула равномерно в сегмента $\delta \leq |x| \leq 1$*.

Да положим сега за всяко x от сегмента $0 \leq x \leq 1$

(2.85) $$P_n(x) = \int_{-1}^{+1} f(x+t)\,Q_n(t)dt$$

и да се убедим в това, че за всяко $n=1, 2, \ldots$ функцията $P_n(x)$ е многочлен от степен $2n$ и при това $\{P_n(x)\}$ е търсената редица от многочлени, която клони равномерно в сегмента $[0,1]$ към функцията $f(x)$.

Тъй като изучаваната функция $f(x)$ е равна на нула извън сегмента $[0,1]$, то за всяко x от сегмента $[0,1]$ интегралът (2.85) може да бъде записан във вида

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,dt.$$

Като заменим в последния интеграл променливата t с $t-x$, ще му придадем следния вид:

(2.86) $$P_n(x) = \int_0^1 f(t)\,Q_n(t-x)\,dt.$$

* Наистина достатъчно е да се докаже, че редицата $a_n = (1-\delta^2)^n\sqrt{n}$ клони към нула, но тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = (1-\delta^2)\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2n}} = (1-\delta^2) < 1$, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ по признака на Коши (гл. теорема 1.6 от глава 1).

От (2.86) и (2.79) е ясно, че функцията $P_n(x)$ е многочлен от степен $2n$.

Остава да се докаже, че редицата $\{P_n(x)\}$ клони към $f(x)$ равномерно в сегмента $0 \leq x \leq 1$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. За фиксираното ε от равномерната непрекъснатост на $f(x)$ на цялата безкрайна права следва, че ще се намери $\delta>0$ такова, че

(2.87) $$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x-y| < \delta.$$

Ще отбележим още, че тъй като $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[0,1]$, то тя е и ограничена в този сегмент, а следователно и навсякъде в безкрайната права. Това означава, че съществува константа A такава, че за всички x

(2.88) $$|f(x)| \leq A.$$

Като използуваме (2.80), (2.84), (2.87) и (2.88) и като използуваме неотрицателността на $Q_n(x)$, да оценим разликата $P_n(x)-f(x)$.

За всички x от сегмента $0 \leq x \leq 1$ ще имаме

$$|P_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-1}^{1} [f(x+t)-f(x)]\,Q_n(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t)-f(x)|\,Q_n(t)\,dt \leq 2A\int_{-1}^{\delta} Q_n(t)\,dt +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt + 2A\int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt \leq 4A\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

За да завършим доказателството на теоремата, е достатъчно да отбележим, че за всички достатъчно големи номера n е вярно неравенството

$$4A\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следствие. Ако не само функцията $f(x)$, но и нейните производни до някакъв ред k включително са непрекъснати в сегмента $[0,1]$*, то съществува редица от многочлени $\{P_n(x)\}$ такава, че всяка от редиците $\{P_n(x)\}, \{P_n'(x)\}, \ldots, \{P_n^{(k)}(x)\}$ е равномерно сходяща и клони съответно към $f(x), f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$.

Наистина, без да ограничаваме общността, можем да смятаме, че всяка от функциите $f(x), f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ приема стойност нула

* Разбира се, вместо $[0,1]$ може да се вземе $[a, b]$.

при $x=0$ и при $x=1$*, а при такива условия функцията $f(x)$ може да се продължи в цялата безкрайна права, като я положим равна на нула извън $[0,1]$ така, че продължената функция и всичките ѝ производни до k-тия ред включително ще се окажат равномерно непрекъснати в цялата безкрайна права.

Но тогава, като означим с $P_n(x)$ същия като по-горе многочлен (2.85) и повторим разсъжденията, проведени при доказателството на теорема (2.18), ще докажем, че всяка от разликите

$$P_n(x)-f(x),\ P_n'(x)-f'(x),\ \ldots,\ P_n^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)$$

е безкрайно малка равномерно относно x в сегмента $0\leq x\leq 1$.

Забележка 1. Изложеното от нас доказателство лесно се обобщава за случая на функция на m променливи $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, непрекъсната в m-мерния куб $0\leq x_i\leq 1$ $(i=1,2,\ldots, m)$. По същия начин, както в теорема 2.18, се доказва, че за всяка функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ съществува равномерно сходяща в m-мерния куб редица от многочлени на m променливи $x_1, x_2, \ldots, x_m$, която клони към нея в този куб.

Забележка 2. Ще отбележим, че фигуриращите в теорема 2.18 многочлени може да бъдат заменени с по-общи класове функции, като се запази при това твърдението за възможността за апроксимиране с такива функции на произволна непрекъсната функция f.

Ще се уговорим да наричаме произволна съвкупност A от функции, определени в някакво множество E, алгебра, ако**
1) $f+g\in A$; 2) $f.g\in A$; 3) $\alpha.f\in A$ при произволни $f\in A$ и $g\in A$ и при всяко реално α.

С други думи, алгебрата е съвкупност от функции, затворена относно събирането и умножението на функции и умножението на функции с реални числа.

Ако за всяка точка x от множеството E може да се намери някаква функция $g\in A$ такава, че $g(x)\neq 0$, ще казваме, че алгебрата A не се анулира в нито една точка x от множеството E.

Ще казваме, че съвкупността A от функции, определени в множеството E, разделя точките на множеството E, ако за всеки две различни точки x_1 и x_2 от това множество може да се намери функция f от A такава, че $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Вярно е следното забележително твърдение, наречено теорема на Вайерщрас — Стоун***:

* Ако $f(x)$ удовлетворява тези условия, то ние можем да намерим многочлен $P_k(x)$ от степен $2k$ такъв, че за функцията $g(x)=f(x)-P_k(x)$ тези условия да бъдат изпълнени.
** Ще напомним, че символът $f\in A$ означава принадлежността на f към A.
*** М. Стоун — съвременен американски математик.

Нека A е алгебра от непрекъснати в компактното* множество E функции, която разделя точките на множеството E и не се анулира в нито една точка на това множество. Тогава всяка непрекъсната в множеството E функция $f(x)$ може да бъде представена като граница на равномерно сходяща редица от функции от алгебрата A.

* Ще напомним, че компактно се нарича всяко затворено и ограничено подмножество на E^n.

3. Двойни и n-кратни интеграли

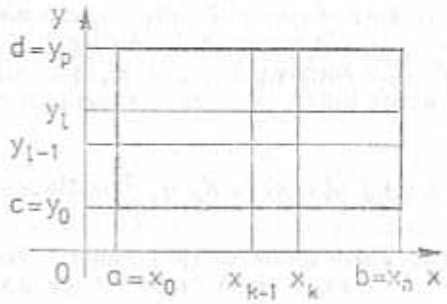
В първата глава на част I бяха формулирани важните задачи за пресмятане лицето на криволинеен трапец и на пътя, изминат от материална точка, които водят до понятието определен интеграл. Аналогични «многомерни» задачи, като например задачата за пресмятане на обема или задачата за пресмятане на масата на нееднородно тяло, по естествен начин водят до разглеждането на двойни и тройни интеграли.

В тази глава се излага теорията на n-кратните интеграли ($n \geq 2$). Построяването на теорията на n-кратните интеграли се извършва напълно аналогично на построяването на теорията на еднократните интеграли. За по-ефективно използуване на аналогията с еднократните интеграли отначало се въвежда понятието двоен интеграл върху правоъгълник. След това се въвежда понятието двоен интеграл върху произволна област както с помощта на праволинейно, така и с помощта на произволно разбиване на тази област. Построената теория се пренася за случая на n-кратен интеграл. В края на главата се изучават n-кратни несобствени интеграли.

§ 1. Определение и условия за съществуване на двоен интеграл

1. Определение на двоен интеграл за правоъгълник. Да разгледаме произволна функция $f(x, y)$, зададена навсякъде в правоъгълника $R=[a, b]\times[c, d]$ (фиг. 3.1). Ще въведем понятието интегрална сума на функцията $f(x, y)$.

Да разделим сегмента $[a, b]$ на n частични сегмента с помощта на точките $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, а сегмента $[c, d]$ на p частични сегмента с помощта на точките $c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_p=d$. На това деление на сегментите съответствува деление на правоъгълника R с прави, успоредни на осите Ox и Oy, на np частични пра-



Фиг. 3.1

воъгълника $R_{kl}=[x_{k-1}, x_k]\times[y_{l-1}, y_l]$ ($k=1, 2, \ldots, n$; $l=1, 2, \ldots, p$). Да означим построеното деление на правоъгълника R със символа T. Деление на правоъгълника R, получено от делението T чрез добавяне на нови прави, успоредни на осите Ox и Oy, наричаме дробно на делението T.

Навсякъде в тази глава под термина «правоъгълник» ще разбираме правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси.

Във всеки частичен правоъгълник R_{kl} избираме произволна точка (ξ_k, η_l). Полагаме $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_l=y_l-y_{l-1}$, а с ΔR_{kl} означаваме площта на правоъгълника R_{kl}. Очевидно $\Delta R_{kl}=\Delta x_k \cdot \Delta y_l$. Под диаметър на правоъгълника R_{kl} ще разбираме дължината на диагонала, равна на $\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_l)^2}$. Най-големия от диаметрите на всички частични правоъгълници ще наричаме диаметър на делението T на правоъгълника R и ще означаваме с Δ.

Определение 1. *Числото*

$$\sigma=\sigma(f, T)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l)\cdot\Delta R_{kl} \tag{3.1}$$

ще наричаме интегрална сума *на функцията $f(x, y)$, съответствуваща на делението T на правоъгълника R и дадения избор на междинните точки (ξ_k, η_l) в частичните правоъгълници на делението T.*

Определение 2. *Числото I се нарича* граница на интегралните суми *(3.1) при $\Delta\to 0$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че при $\Delta<\delta$ е изпълнено неравенството $|\sigma-I|<\varepsilon$ независимо от избора на междинните точки (ξ_k, η_l) на R_{kl}.*

Определение 3. *Функцията $f(x, y)$ се нарича* интегруема

(по Риман) в правоъгълника R, ако съществува крайна граница на интегралните суми на тази функция при $\Delta \to 0$.

Тази граница I се нарича двоен интеграл на функцията $f(x, y)$ върху правоъгълника R и се означава с един от следните символи:

$$I = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(M)\, d\sigma .$$

Забележка. По същия начин, както и за еднократен интеграл (вж. част I, глава 9, § 1), чрез допускане на противното, се установява, че всяка интегруема върху правоъгълника R функция $f(x, y)$ е ограничена в този правоъгълник. Затова в цялата глава освен в последния параграф ще разглеждаме само ограничени функции, без това да бъде явно споменавано.

2. Условия за съществуване на двоен интеграл за правоъгълник. Теорията на Дарбу, развита в глава 9 от част I за еднократен определен интеграл, напълно се пренася в случая на двоен интеграл за правоъгълника R. Поради пълната аналогия се ограничаваме само със скициране на общата схема на разсъжденията.

За дадено деление T на правоъгълника R съставяме две суми: голяма сума

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \,.\, \Delta R_{kl} \qquad (M_{kl} = \sup_{R_{kl}} f(x, y))$$

и малка сума

$$s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl} \,.\, \Delta R_{kl} \qquad (m_{kl} = \inf_{R_{kl}} f(x, y)).$$

В сила са следните твърдения (доказателствата им са напълно аналогични на доказателствата, дадени в п. 2, § 2, глава 9, част I).

Лема 1. За всяко деление T на правоъгълника R при всеки избор на междинните точки (ξ_k, η_l) в частичните правоъгълници R_{kl} интегралната сума σ удовлетворява неравенствата $s \leq \sigma \leq S$.

Лема 2. За всяко фиксирано деление T и за всяко число $\varepsilon > 0$ междинните точки $(\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$ могат да се изберат така, че интегралната сума σ да удовлетворява неравенствата $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$.

Точките (ξ_k, η_l) могат да се изберат и по такъв начин, че интегралната сума да удовлетворява неравенствата $0 \leq \sigma - s < \varepsilon$.

Лема 3. Нека T' е дробно на делението T на правоъгълника R и нека s' и S' са съответните малка и голяма сума на делението T'. Тогава са изпълнени неравенствата

$$s \leq s', \qquad S' \leq S.$$

Лема 4. Нека T' и T'' са две произволни деления на правоъгълника R; S', s' и S'', s'' са съответните големи и малки суми за тези деления. Тогава

$$s' \leq S''.$$

Лема 5. Множеството $\{S\}$ на големите суми на дадена функция $f(x, y)$ за всевъзможните деления на правоъгълника R е ограничено отдолу. Множеството от малките суми $\{s\}$ е ограничено отгоре.

Следователно съществуват числа

$$\bar{I} = \inf \{S\}, \quad \underline{I} = \sup \{s\},$$

наричани съответно горен и долен интеграл на Дарбу (от функцията $f(x, y)$ върху правоъгълника R). Лесно се вижда, че $\underline{I} \leq \bar{I}$.

Лема 6. Нека T' е дробно на делението T на правоъгълника R, получено от T с добавянето на l нови прави, и нека S', s' и S, s са съответните голяма и малка интегрална сума на делениятa T' и T. Тогава са верни оценките

$$S - S' \leq (M - m) \,.\, l \,.\, \Delta \,.\, d; \quad s' - s \leq (M - m) \,.\, l \,.\, \Delta \,.\, d,$$

където $M = \sup_R f(x, y)$, $m = \inf_R f(x, y)$, Δ е диаметърът на делението T, d е диаметърът на правоъгълника R.

Аналогично на понятието граница на интегралните суми (§ 1, определение 2) се въвеждат понятията граница на голямата и малката сума. Например числото $\bar{I}$ се нарича граница на големите суми S при $\Delta \to 0$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че $|S - \bar{I}| < \varepsilon$ при $\Delta < \delta$.

Лема 7. Горният и долният интеграл на Дарбу $\bar{I}$ и $\underline{I}$ на функцията $f(x, y)$ върху правоъгълника R са съответно границите на големите и малките суми при $\Delta \to 0$.

От леми 1—7 следва

Теорема 3.1. *За да бъде ограничената в правоъгълника R функция $f(x, y)$ интегруема в този правоъгълник, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да съществува такова деление T на правоъгълника R, за което $S - s < \varepsilon$.*

Както и в глава 9 на част I, теорема 3.1 заедно с теоремата за равномерна непрекъснатост ни позволява да намерим много важни класове от интегруеми функции.

Теорема 3.2. *Всяка непрекъсната в правоъгълника R функция $f(x, y)$ е интегруема в този правоъгълник.*

Определение 1. *Елементарна фигура се нарича множе-*

ство от точки, което е обединение на краен брой правоъгълници (със страни, успоредни на координатните оси).

Да отбележим, че правоъгълниците от определение 1 могат да имат или да нямат общи вътрешни точки.

Определение 2. *Ще казваме, че функцията $f(x, y)$ притежава в правоъгълника R (в произволна затворена област D) I-свойство, ако 1) $f(x, y)$ е ограничена в R (в D); 2) за всяко $\varepsilon>0$ съществува елементарна фигура с лице, по-малко от ε, съдържаща всички точки на прекъсване на функцията $f(x, y)$.*

Теорема 3.3. *Ако функцията $f(x, y)$ притежава в правоъгълника R I-свойство, то тя е интегруема в този правоъгълник.*

Доказателствата на теореми 3.2 и 3.3 са напълно аналогични на доказателствата на теореми 9.1 и 9.2 от част I.

3. Определение и условия за съществуване на двоен интеграл за произволна област. В п. 2, § 2, глава 10, част I бяха въведени понятията измеримост и лице на равнинни фигури. Да напомним, че равнинна фигура наричаме част от равнината, заградена от проста затворена крива. Една равнинна фигура се нарича измерима, ако горната и долната мярка на лицето на тази фигура* са равни. Това число се нарича лице на фигурата. Тези понятия без изменение се пренасят и в случая на произволно ограничено множество Q от точки в равнината.

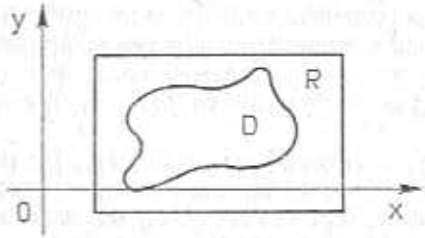
Във всички определения и твърдения на споменатата подточка вместо равнинна фигура може да се постави произволно ограничено множество Q в равнината.

В същата подточка беше дадено определение за крива (или граница на фигура) с нулево лице: казваме, че кривата има лице, равно на нула, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува многоъгълник, съдържащ Г, чието лице е по-малко от ε. В това определение терминът «многоъгълник» може да се замени с термина «елементарна фигура». Това е така, защото всяка елементарна фигура е многоъгълник, а всеки многоъгълник с лице, по-малко от ε, се съдържа в елементарна фигура с лице, по-малко от $32\,\varepsilon$ (вж. теорема 10.2″, част I).

В сила е следното твърдение.

Твърдение 1. Нека кривата Г има лице нула и равнината е покрита с квадратна мрежа със стъпка h. Тогава за всяко $\varepsilon>0$ съществува $h>0$ такова, че сумата от лицата на всички квадрати, имащи общи точки с Г, е по-малка от ε.

* Горна мярка на лицето се определя като точната долна граница на лицата на всички многоъгълници, съдържащи фигурата, а долна мярка на лицето — като точната горна граница на лицата на всички многоъгълници, съдържащи се във фигурата.



Фиг. 3. 2

Наистина за всяко $\varepsilon>0$ съществува елементарна фигура Q, съдържаща Г, и с лице, по-малко от $\varepsilon/4$. При достатъчно малко h всички квадрати, имащи общи точки с Г, ще се съдържат в елементарна фигура, получаваща се от Q след замяната на всеки правоъгълник с правоъгълник с два пъти по-големи страни и със същия център.

Нека отбележим, че класът на криви с лице нула е много широк. Например в този клас са всички ректифицируеми криви (вж. § 1, глава 10, част I).

Сега ще въведем понятието двоен интеграл за произволна двумерна област D.

Нека D е произволна ограничена затворена област, границата Г на която има лице нула, а $f(x, y)$ е произволна ограничена функция, дефинирана в областта D.

Нека означим с R някой правоъгълник, съдържащ областта D (фиг. 3.2). Определяме в правоъгълника R следната функция:

$$F(x, y)=\begin{cases} f(x, y), & (x, y)\in D, \\ 0, & (x, y)\in R\setminus D. \end{cases} \tag{3.2}$$

Определение. *Функцията $f(x, y)$ се нарича интегруема в областта D, ако функцията $F(x, y)$ е интегруема в правоъгълника R. Числото $I=\iint\limits_R F(x, y)\,dx\,dy$ се нарича двоен интеграл от функцията $f(x, y)$ върху областта D и се означава*

$$I=\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(M)\,d\sigma.$$

От това определение следва

Твърдение 2. *Интегралът $\iint\limits_D 1\,dx\,dy$ е равен на лицето на областта D.*

Наистина, вземайки все по-фини деления на правоъгълника

R, получаваме, че големите интегрални суми за тези деления са равни на лицата на елементарни фигури, съдържащи R, а малките суми са равни на лицата на елементарни фигури, съдържащи се в R. Интегруемостта на функцията $f(x, y)=1$ в областта D следва от теорема 3.3.

Твърдение 3. *Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в ограничената измерима област D, равнината е покрита с квадратна мрежа със стъпка h, $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ са тези квадрати от мрежата, които се съдържат в областта D, (ξ_k, η_k) е произволна точка от квадрата C_k, $m_k=\inf\limits_{C_k} f(x, y)$, $k=1, 2, \ldots, n(h)$. Тогава всяка от сумите*

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_k, \eta_k)\, h^2, \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k h^2$$

има граница $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ при $h \to 0$.

Доказателството следва непосредствено от факта, че тези суми се отличават от обикновената интегрална сума или от малката сума на функцията $f(x, y)$ в областта D съответно само по липсата на събираеми по квадратите, имащи общи точки с границата Γ на областта D, като сумата на всички липсващи събираеми по модул е по-малка от произведението на числото $M=\sup\limits_D |f(x, y)|$ и лицето S на елементарната фигура, състояща се от квадрати, имащи общи точки с Γ. Тъй като границата Γ има лице нула, то $S \to 0$ при $h \to 0$ поради твърдение 1.

От теорема 3.3 и определението за двоен интеграл, дадено по-горе, получаваме следната основна теорема.

Теорема 3.4. *Ако функцията $f(x, y)$ притежава I-свойство в областта D, то тя е интегруема в тази област.*

Доказателство. Функцията $F(x, y)$, определена с (3.2), ще притежава I-свойство в правоъгълника R.

Наистина функцията $F(x, y)$ е ограничена в R и всички нейни точки на прекъсване съвпадат или с прекъсванията на $f(x, y)$, или лежат на границата Γ на областта D. Но границата Γ има лице нула. Така твърдението на теоремата следва от теорема 3.3. С това теорема 3.4 е доказана.

Следствие 1. *Ако функцията $f(x, y)$ е ограничена в областта D и има в тази област прекъсвания само по краен брой ректифицируеми криви, то $f(x, y)$ е интегруема в областта D.*

Следствие 2. *Ако функцията $f(x, y)$ притежава I-свойство в областта D, а функцията $g(x, y)$ е ограничена и съвпада с $f(x, y)$ навсякъде в D освен върху множество с мярка нула, то функцията $g(x, y)$ е интегруема в областта D, като*

$$\iint\limits_D g(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Не сме изяснили коректно ли е горното определение на понятието двоен интеграл, по-точно зависи ли съществуването на двойния интеграл и големината му от: 1) избора на координатните оси Ox и Oy; 2) избора на правоъгълника R, върху който определяме функцията $F(x, y)$.

В следващата подточка ще бъде дадено друго определение за интегруемост на функцията $f(x, y)$ и двоен интеграл, независещо от избора на координатната система и правоъгълника R, и ще бъде доказана еквивалентността на това определение с даденото по-горе.

4. Общо определение на двоен интеграл. Нека D е затворена ограничена област, чиято граница Γ има лице нула. Разделяме областта D с помощта на краен брой произволни криви с лице нула на краен брой r (не непременно свързани) затворени частични области $D_1, D_2, \ldots, D_r$. Всяка област D_i има граница с лице нула и затова е измерима. Означаваме лицето на областта D_i със символа ΔD_i.

Във всяка област D_i избираме произволна точка $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Определение 1. *Числото*

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} f(p_i)\, \Delta D_i \tag{3.3}$$

се нарича интегрална сума на функцията $f(x, y)$, съответстваща на даденото деление на областта D на частични области D_i и на дадения избор на междинните точки P_i в частичните области.

Диаметър на областта D_i се нарича числото $d_i = \sup\limits_{M_1, M_2 \in D_i} \rho(M_1, M_2)$ ($\rho(M_1, M_2)$ е разстоянието между точките M_1 и M_2). Диаметър на деленето на областта D се нарича числото $\tilde{\Delta} = \max\limits_{1 \le i \le r} d_i$.

Определение 2. *Числото I се нарича граница на интегралните суми (3.3) при $\tilde{\Delta} \to 0$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че при $\tilde{\Delta} < \delta$ независимо от избора на точките P_i в частичните области D_i е изпълнено неравенството $|\tilde{\sigma} - I| < \varepsilon$.*

Определение 3 (общо определение за интегруемост). *Функция-*

та $f(x, y)$ се нарича интегруема (по Риман) върху областта D, ако съществува крайна граница I на интегралните суми $\tilde{\sigma}$ на тази функция при $\tilde{\Delta}\to 0$. Тази граница I се нарича двоен интеграл от функцията $f(x, y)$ върху областта D.

Ще докажем следната основна теорема.

Теорема 3.5. *Общото определение за интегруемост е еквивалентно на определението, дадено в п. 3.*

Доказателство I. Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D съгласно общото определение за интегруемост и двойният ѝ интеграл според това определение е I. Построяваме правоъгълник R, съдържащ D, разделяме го на частични правоъгълници и определяме в R функцията $F(x, y)$ по (3.2). Разглеждаме интегралната сума (3.3) $\tilde{\sigma}$ на функцията $f(x, y)$ и интегралната сума (3.1) σ на функцията $F(x, y)$. Тези суми може да се отличават една от друга само по събираеми, съответстващи на частични правоъгълници, имащи общи точки с границата Γ на областта D. Тъй като Γ има лице нула, а функцията $f(x, y)$ е ограничена, то тази функция е интегруема съгласно определението от п. 3 и има съгласно това определение същия двоен интеграл I.

II. Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D съгласно определението от п. 3 и I е двойният интеграл от $f(x, y)$ върху областта I съгласно това определение. Ще покажем, че за $f(x, y)$ границата на интегралните суми $\tilde{\sigma}$ при $\tilde{\Delta}\to 0$ съществува и е равна на I.

Съставяме за дадено деление на областта D голямата и малката сума

$$\tilde{S}=\sum_{i=1}^{r} \tilde{M}_i \,.\, \Delta D_i \quad \text{и} \quad \tilde{s}=\sum_{i=1}^{r} \tilde{m}_i \,.\, \Delta D_i$$

тук $\tilde{M}_i=\sup\limits_{D_i} f(x, y)$, $\tilde{m}_i=\inf\limits_{D_i} f(x, y)$. Тъй като за всяко деление при всеки избор на междинните точки в интегралната сума $\tilde{\sigma}$ имаме

$$\tilde{s}\leq\tilde{\sigma}\leq\tilde{S},$$

то е достатъчно да се докаже, че сумите $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ клонят към I при $\tilde{\Delta}\to 0$, т.е. за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че всяка сума $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ се различава от I по-малко от ε при $\tilde{\Delta}<s$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От теорема 3.1 и твърдение 1 за това ε съществува деление T на правоъгълника R $(D\subset R)$ на частични правоъгълници R_k такова, че

$$S-s<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{R_k\cap\Gamma\neq\varnothing} \Delta R_k<\frac{\varepsilon}{6M_0}, \tag{3.4}$$

където $M_0=\sup\limits_{D}|f(x, y)|$.

Нека Q е елементарна фигура с лице, по-малко от $\frac{\varepsilon}{6M_0}$, която съдържа във вътрешността си всички отсечки от правите, определящи делението T, и границата Γ на областта D. Нека δ е положителната точна долна граница на разстоянието между две точки, едната от които принадлежи на границата на Q, а другата на отсечките от правите, определящи делението T, или на границата Γ. Построяването на фигурата Q може да се осъществи по схемата, приложена при доказателството на твърдение 1 от п. 3.

Ще докажем, че сумите $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ за всяко деление на областта D, удовлетворяващо условието $\tilde{\Delta}<\delta$, изпълняват неравенствата

$$\tilde{S}<S+\frac{\varepsilon}{2}, \qquad s-\frac{\varepsilon}{2}<\tilde{s}. \tag{3.5}$$

Ще докажем само първото от неравенствата (3.5), защото второто се доказва аналогично.

От сумата $\tilde{S}$ премахваме всички събираеми $\tilde{M}_i \,.\, \Delta D_i$, съответстващи на области D_i, всяка от които не лежи изцяло в някой от частичните правоъгълници на делението T. За всички такива области имаме $D_i\subset Q$ (поради $d_i\leq\tilde{\Delta}<\delta$) и следователно общата сума от лицата на тези области е по-малка от $\frac{\varepsilon}{6M_0}$.

Следователно сумата на всички премахнати събираеми $\tilde{M}_i \,.\, \Delta D_i$ е по-малка от $\frac{\varepsilon}{6}$ и е в сила оценката

$$\tilde{S}<\sum_{i}{}' \tilde{M}_i \Delta D_i+\frac{\varepsilon}{6}, \tag{3.6}$$

където примът означава, че сумираме само по тези частични области D_i, които изцяло се съдържат в някой от правоъгълниците на делението T.

Нека сега заменим в дясната част на (3.6) точните горни граници $\tilde{M}_i$ в областите D_i, съдържащи се в частичния правоъгълник R_k, с точната горна граница M_k в правоъгълника R_k. Означаваме $\tilde{R}_k=\bigcup\limits_{D_i\subset R_k} D_i$ и нека $\Delta\tilde{R}_k$ означава лицето на областта $\tilde{R}_k$. Тогава

$$\tilde{S}<\sum_{k} M_k \Delta\tilde{R}_k+\frac{\varepsilon}{6}. \tag{3.7}$$

За правоъгълниците $R_k \subset D$ имаме $R_k \setminus \widetilde{R}_k \subset Q$ и затова за тях

$$\sum_k \Delta(R_k \setminus \widetilde{R}_k) = \sum_k (\Delta R_k - \Delta \widetilde{R}_k) \leq \Delta Q < \frac{\varepsilon}{6M_0},$$

а за правоъгълниците R_k, пресичащи се с Γ, е изпълнено

$$\sum_k \Delta(R_k \setminus \widetilde{R}_k) \leq \sum_k \Delta R_k < \frac{\varepsilon}{6M_0}$$

и следователно

$$|S - \sum_k M_k \widetilde{\Delta} R_k| = |\sum_k M_k (\Delta R_k - \Delta \widetilde{R}_k)| < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3},$$

откъдето

$$\sum_k M_k \Delta \widetilde{R}_k < S + \frac{\varepsilon}{3}.$$

От последното неравенство и неравенството (3.7) получаваме

$$\widetilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = S + \frac{\varepsilon}{2},$$

с което първото неравенство (3.5) е доказано. Второто неравенство (3.5) се доказва аналогично.

От (3.5) получаваме

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \widetilde{s} \leq \widetilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

Поради (3.4) всяка от сумите s и S се различава от I по-малко от $\frac{\varepsilon}{2}$, откъдето поради (3.8) всяка от сумите $\widetilde{s}$ и $\widetilde{S}$ се отличава от I по-малко от ε. Теоремата е доказана.

§ 2. Основни свойства на двойния интеграл

Свойствата на двойния интеграл са аналогични на свойствата на еднократния определен интеграл.

1°. **Адитивност.** *Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D и ако областта D с помощта на крива Γ с лице нула е разделена на две свързани области D_1 и D_2 без общи вътрешни точки, то функцията $f(x, y)$ е интегруема върху всяка от областите D_1 и D_2, като*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy. \tag{3.9}$$

За да докажем това свойство, разделяме областите D_1 и D_2 на краен брой измеримо области, като по този начин получаваме и деление на D. Нека $\widetilde{S}$ и $\widetilde{s}$, $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{s}_1$, $\widetilde{S}_2$ и $\widetilde{s}_2$ са големите и малките суми на функцията $f(x, y)$ съответно в областите D, D_1, D_2.

Тъй като $D_1 \subset D$ и $D_2 \subset D$, то

$$\widetilde{S}_1 - \widetilde{s}_1 \leq \widetilde{S} - \widetilde{s} \text{ и } \widetilde{S}_2 - \widetilde{s}_2 \leq \widetilde{S} - \widetilde{s},$$

откъдето следва интегруемостта на функцията $f(x, y)$ върху всяка от областите D_1 и D_2.

Равенството (3.9) следва от равенствата

$$\widetilde{S} = \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2, \quad \widetilde{s} = \widetilde{s}_1 + \widetilde{s}_2. \tag{3.10}$$

Забележка. Вярно е и обратното твърдение: от интегруемостта на функцията $f(x, y)$ върху всяка от областите D_1 и D_2 следва интегруемостта на функцията върху областта D и равенството (3.9).

Наистина, като разделим областта D на краен брой измеримо части D_i и въведем големите и малките суми за функцията $f(x, y)$ върху областите D, D_1, D_2, получаваме равенствата (3.10) с точност до събираеми, съответстващи на тези области D_i, които имат общи вътрешни точки с кривата Γ. Кривата Γ има лице нула, функцията $f(x, y)$ е ограничена и затова сумата на тези събираеми ще клони към нула заедно с диаметъра на деленето $\widetilde{\Delta}$.

Доказателството на следващите свойства (както и доказателството на свойство 1°) е напълно аналогично на доказателството на съответните свойства на еднократния определен интеграл. Затова ще се ограничим само с формулирането на тези свойства.

2°. **Линейно свойство.** *Нека функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта D, α и β са произволни реални числа. Тогава функцията $\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)$ е интегруема в областта D, като*

$$\iint_D [\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]dx\,dy =$$

$$= \alpha \iint_D f(x, y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

3°. *Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта D, то и произведението им е интегруемо в D.*

4°. *Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта D и навсякъде в тази област е изпълнено $f(x, y) \leq g(x, y)$, то*

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

5°. *Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D, то и функцията $|f(x, y)|$ е интегруема в областта D, като*

$$\left|\iint_D f(x, y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_D |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

(Обратното твърдение е невярно: от интегруемостта на $|f(x, y)|$ в D, изобщо казано, не следва интегруемостта на $f(x, y)$ в D.)

6°. *Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D, а $g(x, y)$ е ограничена и съвпада с $f(x, y)$ навсякъде в D с изключение на множество от точки с мярка нула, то и $g(x, y)$ е интегруема в областта D.*

7°. **Теорема за средните стойности.** *Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта D, като функцията $g(x, y)$ е неотрицателна (неположителна) навсякъде в тази област, $M = \sup_D f(x, y)$, $m = \inf_D f(x, y)$, то съществува число $\mu \in [m, M]$, за което е изпълнено*

$$\iint_D f(x, y)\ g(x, y)\ dx\,dy = \mu \iint_D g(x, y)\ dx\,dy.$$

Ако освен това функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в D, а областта D е свързана, то в тази област съществува такава точка (ξ, η), за която $\mu = f(\xi, \eta)$.

8°. **Геометрично свойство.** $\iint_D 1\,dx\,dy$ *е равен на лицето на областта D* (вж. твърдение 2, п. 3).

§ 3. Свеждане на двоен интеграл към повторен еднократен интеграл

Ефективен начин за пресмятане на двоен интеграл е свеждането му към повторен еднократен интеграл.

1. Случай на правоъгълник. Ще започнем с простия случай, когато областта на интегриране е правоъгълник $R = [a, b] \times [c, d]$.

Теорема 3.6. *Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в правоъгълника R и за всяко $x \in [a, b]$ съществува еднократният интеграл*

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{3.11}$$

Тогава съществува повторният интеграл

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$

и е изпълнено равенството

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx. \tag{3.12}$$

Доказателство. Разделяме правоъгълника R с помощта на точките $\{x_k\}$, $\{y_l\}$ на $n.p$ частични правоъгълника

$$R_{kl} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$$

($k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, p$), като $x_0 = a$, $x_n = b$, $y_0 = c$, $y_p = d$ и $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1} > 0$.

Нека, както и в § 1, с Δ да означим диаметъра на деленето на правоъгълника R, $M_{kl} = \sup_{R_{kl}} f(x, y)$, $m_{kl} = \inf_{R_{kl}} f(x, y)$, а S и s да са голямата и малката сума на функцията $f(x, y)$. Тогава навсякъде в правоъгълника R_{kl} е изпълнено

$$m_{kl} \leq f(x, y) \leq M_{kl}. \tag{3.13}$$

Фиксираме произволно число $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и интегрираме неравенството (3.13) по y в граници от y_{l-1} до y_l, като полагаме в него $x = \xi_k$. Получаваме

$$m_{kl} \cdot \Delta y_l \leq \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y)\,dy \leq M_{kl} \cdot \Delta y_l. \tag{3.14}$$

Умножаваме (3.14) с Δx_k и сумираме получените неравенства отначало по l от 1 до p, а след това по k от 1 до n. Използувайки означението (3.11), имаме

$$\begin{aligned} s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl}\,\Delta x_k\,\Delta y_l &\leq \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\,\Delta x_k \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl}\,\Delta x_k\,\Delta y_l = S'. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Нека диаметърът на деленето $\Delta \to 0$. Тогава и $\max_k \Delta x_k \to 0$. При това s и S клонят към двойния интеграл $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$. Следователно средният член в (3.15) клони към същия двоен интеграл.

Но тази граница по определението на еднократен интеграл е равна на

$$\int_a^b I(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx.$$

По такъв начин е доказано съществуването на повторния интеграл и равенството (3.12). Теоремата е доказана.

Забележка. От доказателството на теорема 3.6 е ясно, че можем да сменим местата на x и y, т.е. можем да предположим съществуването на двойния интеграл и съществуването за всяко $y\in[c,d]$ на еднократния интеграл

$$K(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Тогава теоремата ще твърди съществуването на повторния интеграл

$$\int_c^d K(y)\,dy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

и равенството му с двойния интеграл.

2. Случай на произволна област. Да разгледаме сега произволна ограничена затворена измерима област D с граница Γ.

Теорема 3.7. *Нека са изпълнени следните условия: 1) областта D е такава, че всяка права, успоредна на оста Oy, пресича границата Γ по цяла отсечка $[y_1(x), y_2(x)]$ или в не повече от две точки, ординатите на които са $y_1(x)$ и $y_2(x)$, където $y_1(x)\leq y_2(x)$ (фиг. 3.3); 2) функцията $f(x,y)$ е интегруема в областта D и за всяко $x\in[x_1,x_2]$ съществува еднократният интеграл*

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

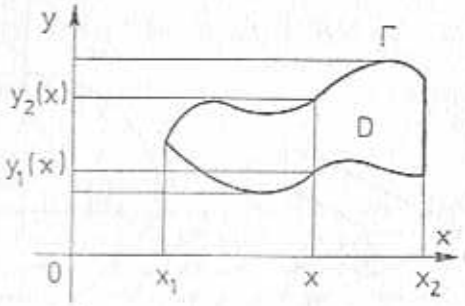
($[x_1,x_2]$ е проекцията на областта D върху оста Ox).

Тогава съществува повторният интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

и е изпълнено равенството

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx. \tag{3.16}$$



Фиг. 3. 3

Доказателство. Нека R е правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси, съдържащ областта D, а $F(x,y)$ е функцията (3.2), съвпадаща с $f(x,y)$ в D и равна на нула в останалите точки на R. За $F(x,y)$ са изпълнени в R всички условия на теорема 3.6 и следователно е вярна формула (3.12), която е еквивалентна на формула (3.16) (поради определението на функцията $F(x,y)$). Теоремата е доказана.

Забележка 1. В теорема 3.7 можем да сменим ролите на x и y, т.е. може да се предположи, че са изпълнени следните условия: 1) областта D е такава, че всяка права, успоредна на оста Ox, пресича границата Γ или по цяла отсечка $[x_1(y), x_2(y)]$, или в не повече от две точки, абсцисите на които са $x_1(y)$ и $x_2(y)$, където $x_1(y)\leq x_2(y)$; 2) функцията $f(x,y)$ е интегруема в областта D и за всяко $y\in[y_1,y_2]$ съществува еднократният интеграл

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

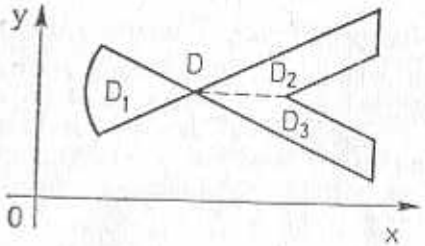
($[y_1,y_2]$ е проекцията на D върху оста Oy).

При изпълняването на тези условия съществува повторният интеграл

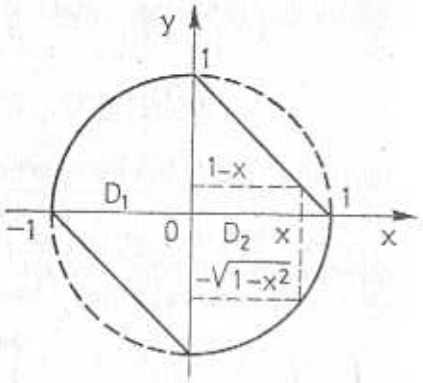
$$\int_{y_1}^{y_2}\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

и е в сила равенството

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{y_1}^{y_2}\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy.$$



Фиг. 3. 4



Фиг. 3. 5

Забележка 2. Ако областта D не удовлетворява условията на теорема 3.7 или забележка 1 към тази теорема, понякога можем да разделим тази област на сума от краен брой области от този тип, които нямат общи вътрешни точки. Тогава интегралът върху областта D поради свойството адитивност е равен на сумата от интегралите по съответните области. Например областта D от фиг. 3.4 се разделя на сума от три области D_1, D_2, D_3, към всяка от които е приложима или теорема 3.7, или забележка 1.

Пример. Нека областта D е сечение на областите $|x+y|\leq 1$ и $x^2+y^2\leq 1$, а $f(x, y)=x\cdot y$ (фиг. 3.5). Всяка права, успоредна на оста Oy, пресича границата на D в не повече от две точки. За удобство при записването на повторните интеграли разделяме областта D на две области D_1 и D_2 (както е показано на фиг. 3.5). Прилагайки за всяка от областите формула (3.16), получаваме

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} xy\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} xy\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{0} x\,dx\int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy+\int_0^1 x\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} y\,dy=-\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx+$$

$$+\int_0^1 (x^3-x^2)\,dx=-\frac{1}{6}.$$

§ 4. Тройни и n-кратни интеграли

Изложената теория на двойния интеграл без някакви съществени усложнения и нови идеи се пренася за случая на троен или въобще на n-кратен интеграл. Ще се спрем на основните моменти на теорията на n-кратния интеграл.

При определяне на класовете от измерими множества в E^2 или E^3 ние заимствувахме от материала в средното училище понятията лице на многоъгълник и обем на многостен, които притежават свойствата адитивност, инвариантност и монотонност (вж. § 2 и 3, глава 10, част I). В пространствата E^n, $n>3$, положението се усложнява от това, че не ни е известен обемът на множества (тела) в E^n, ограничени от хиперравнини. За да определим класа на измеримите тела в E^n, ще започнем от обема на тяло от специален вид в E^n — n-мерния правоъгълен паралелепипед.

Да припомним (вж. § 1, гл. 13, част I), че множеството $R=[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_n, b_n]$ от всички точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в E^n, за които $a_i\leq x_i\leq b_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, се нарича n-мерен координатен правоъгълен паралелепипед. Ако $b_i-a_i=h$ за всяко i, то R се нарича n-мерен координатен куб със страна h. Точките $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, където c_i е равно или на a_i, или на b_i, се наричат върхове на R, а сегментите, съединяващи два върха от вида $(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, a_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ и $(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, b_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ — ръбове на R. Всички ръбове на R са успоредни на координатните оси.

По аналогия с E^1, E^2 и E^3 е естествено да определим обема на n-мерния правоъгълен паралелепипед R като число, равно на произведението от дължините на всички негови ръбове, излизащи от един връх, т. е. като числото $\mu(R)=\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

Ще наречем елементарно тяло множество от точки в E^n, представляващо обединение на краен брой n-мерни правоъгълни паралелепипеди, нямащи общи вътрешни точки, с ръбове, успоредни на координатните оси. Обемът на всяко елементарно тяло естествено определяме като сумата от обемите на съставящите го паралелепипеди.

Нека сега D е произволна ограничена област (множество) в E^n. Долна мярка на обема на областта D се нарича точната горна граница $\mu_*=\mu_*(D)$ на обемите на всички елементарни тела, съдържащи се в D, а горна мярка на обема на областта D — точната долна граница $\mu^*=\mu^*(D)$ на обемите на всички елементарни тела, съдържащи областта D.

Лесно се вижда, че $\mu_*\leq\mu^*$.

Областта D се нарича измерима, ако $\mu_* = \mu^*$. При това числото $\mu(D) = \mu_*(D) = \mu^*(D)$ се нарича n-мерен обем на областта D.

Както в случая на равнинна област, се доказва следното твърдение.

Една n-мерна област D е измерима тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват две елементарни тела, едното от които съдържа D, а другото се съдържа в D, разликата от обемите на които по абсолютна стойност не надминава ε.

В частност едно подмножество Γ на E^n има n-мерен обем 0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува елементарно тяло с обем, по-малък от ε, което съдържа Γ.

От приведеното твърдение получаваме, че n-мерната област D е измерима тогава и само тогава, когато границата на тази област е множество с n-мерен обем нула.

Първо ще определим интеграл от функция на n променливи $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ върху n-мерен координатен правоъгълен паралелепипед R. За тази цел построяваме деление T на паралелепипеда R на краен брой частични n-мерни паралелепипеди чрез краен брой хиперравнини, успоредни на координатните хиперравнини.

За това деление T аналогично на случая $n=2$ се определя интегрална, голяма и малка сума за всяка ограничена в R функция $f(x)$.

n-кратен интеграл от функцията $f(x)$ върху паралелепипеда R определяме като граница (ако съществува) на интегралните суми, когато диаметърът на деленето T на паралелепипеда R клони към нула.

Както в случая $n=2$, теорията на Дарбу дава необходимо и достатъчно условие за интегруемост в следната форма: за интегруемост на функцията $f(x)$ върху паралелепипеда R е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да съществува деление T на паралелепипеда R, за което разликата между голямата и малката сума е по-малка от ε.

Нека сега D е произволна затворена ограничена n-мерна област, границата на която има n-мерен обем нула. n-кратен интеграл от функцията f върху областта D се определя като интеграл върху n-мерен координатен правоъгълен паралелепипед R, съдържащ областта D, от функция F, съвпадаща с f в D и равна на нула извън D.

Ще означаваме n-кратния интеграл от функцията $f(x)$ върху областта D по един от следните начини:

$$(3.17) \qquad \int_D f(x)dx = \iint\limits_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n.$$

Ще отбележим, че произведението $dx = dx_1dx_2 \ldots dx_n$ обикновено се нарича елемент на обема в пространството E^n.

По същия начин, както в случая $n=2$, се доказва интегруемост върху n-мерна област на всяка непрекъсната функция, а също на функция f, притежаваща I-свойство в областта D (т. е. ограничена в D функция, множеството от точки на прекъсване на която има n-мерен обем нула). Въобще изменение на интегруема функция върху множество от точки с n-мерен обем нула не променя интеграла на тази функция.

За определяне на n-кратен интеграл може да се използува и разделяне на областта D с помощта на краен брой произволни множества с обем нула на краен брой частични области с произволна форма. Напълно аналогично с теорема 3.5 се доказва, че такова общо определение на n-кратен интеграл е еквивалентно на даденото по-горе определение.

За n-кратен интеграл също са верни осемте основни свойства, формулирани в § 2 за двоен интеграл.

Напълно аналогично на теореми 3.6 и 3.7 се доказва формула за повторно интегриране за интеграла (3.17).

Нека n-мерната област D_n е такава, че всяка права, успоредна на оста Ox_1, пресича границата ѝ в не повече от две точки (или по цял сегмент, ограничен от две точки), проекциите на които по оста Ox_1 са $a(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, където $a(x_2, x_3, \ldots, x_n) \leq b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Нека функцията $f(x)$ е интегруема в областта D_n и за всяка точка $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ от $(n-1)$-мерната област D_{n-1}, представляваща проекцията на D_n върху координатната хиперравнина $Ox_2x_3 \ldots x_n$, съществува еднократният интеграл

$$J(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1.$$

Тогава съществува $(n-1)$-кратният интеграл

$$\iint\limits_{D_{n-1}} \ldots \int J(x_2, x_3, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{D_{n-1}} \ldots \int \Big[\int\limits_{a(x_2, \ldots, x_n)}^{b(x_2, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \Big] dx_2 \ldots dx_n$$

върху областта D_{n-1} и е вярна формулата за повторно интегриране

$$\iint\limits_{D_n} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n =$$

(3.18)

$$=\iint\limits_{D_{n-1}}\cdots\int\Big[\int\limits_{a(x_2,x_3,\ldots,x_n)}^{b(x_2,x_3,\ldots,x_n)} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1\Big]\,dx_2dx_3\ldots dx_n$$

В горното твърдение ролята на x_1 може да играе всяка от останалите променливи $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Областта D ще наричаме проста, ако за всяка от координатните оси всяка права, успоредна на тази ос, или пресича границата на областта в не повече от две точки, или има по тази граница цяла отсечка. Пример за проста област е всеки n-мерен правоъгълен паралелепипед (с ребра не непременно успоредни на координатните оси).

За проста област формулата за повторно интегриране може да се прилага по всяка от променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Нека отбележим накрая, че както и в случая $n=2$, е вярно твърдението:

Нека функцията $f(x)$ е интегруема в ограничената измерима област D. Нека пространството E^n е покрито с мрежа от n-мерни кубове със страна h, $C_1, C_2, \ldots, C_m(h)$ са тези кубове от мрежата, които се съдържат в D, $\xi^{(k)}=(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$ е произволна точка от куба C_k, $m_k=\inf\limits_{C_k} f(x)$, $k=1, 2, \ldots, m(h)$. Тогава всяка от сумите

$$\sum_{k=1}^{m(h)} f(\xi^{(k)})h^n \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m(h)} m_k h^n$$

има граница при $h\to 0$, равна на n-кратния интеграл (3.17) от функцията $f(x)$ върху областта D.

Примери. 1) Да се пресметне обемът $T_n(h)$ на n-мерния симплекс

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E^n : x_i\geq 0,\ i=1, 2, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i\leq h\}.$$

Прилагайки формулата (3.18) за повторно интегриране последователно по променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получаваме следния израз за обема:

$$(3.19)\qquad T_n(h)=\int_0^h\Big(\int_0^{h-x_1}\Big(\cdots\Big(\int_0^{h-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i} 1.dx_n\Big)\cdots\Big)dx_2\Big)dx_1.$$

Във всеки от интегралите в дясната част на (3.19) правим смяна на променливите $x_1=h\xi_1$, $x_2=h\xi_2, \ldots, x_n=h\xi_n$. Получаваме

$$(3.20)\qquad T_n(h)=h^n\int_0^1\Big(\int_0^{1-\xi_1}\Big(\cdots\Big(\int_0^{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i} d\xi_n\Big)\cdots\Big)d\xi_2\Big)d\xi_1.$$

От (3.19) и (3.20) следва, че $T_n(h)=h^nT_n(1)$. За пресмятане на $T_n(1)$ получаваме следната рекурентна формула:

$$T_n(1)=\int_0^1\Big(\int_0^{1-\xi_1}\Big(\cdots\Big(\int_0^{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i} d\xi_n\Big)\cdots\Big)d\xi_2\Big)\,d\xi_1=\int_0^1 T_{n-1}(1-\xi_1)d\xi_1=$$

$$=\int_0^1(1-\xi_1)^{n-1}T_{n-1}(1)d\xi_1=T_{n-1}(1)\int_0^1(1-\xi_1)^{n-1}d\xi_1=T_{n-1}(1)\cdot\frac{1}{n}.$$

Следователно $T_n(1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}\cdot T_1(1)$ и тъй като $T_1(1)=1$, то $T_n(h)=\frac{h^n}{n!}$.

2) Пресметнете обема $V_n(R)$ на n-мерното кълбо $B(R)$ с радиус R:

$$B(R)=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2\leq R^2\}.$$

Използуваме формулата (3.18) и получаваме

$$V_n(R)=\iint\limits_{B(R)}\cdots\int 1\,dx_1dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\int_{-R}^{R}\Big(\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}}\Big(\cdots\Big(\int_{-\sqrt{R^2-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2}}^{\sqrt{R^2-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2}} 1.dx_n\Big)\cdots\Big)dx_2\Big)dx_1.$$

В еднократните интеграли по променливата x_i правим смяна на променливите $x_i=R\xi_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и получаваме

$$V_n(R)=R^n\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-\sqrt{1-\xi_1^2}}^{\sqrt{1-\xi_1^2}}\left(\cdots\left(\int\limits_{-\sqrt{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i^2}}^{\sqrt{1-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\xi_i^2}} d\xi_n\right)\ldots\right)d\xi_2\right)d\xi_1=R^nV_n(1).$$

За пресмятане на $V_n(1)$, както и в предишния пример, получаваме рекурентното съотношение

$$V_n(1)=\int\limits_{-1}^{1}V_{n-1}(\sqrt{1-\xi_1^2})\,d\xi_1=\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi_1^2)^{\frac{n-1}{2}}V_{n-1}(1)d\xi_1=$$

$$=V_{n-1}(1)\cdot\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi_1^2)^{\frac{n-1}{2}}d\xi_1.$$

В последния интеграл правим смяна на променливите $\xi_1=\cos\theta$, въвеждаме означението $I_k=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^k\theta\,d\theta$ и вземаме предвид, че $V_1(1)=2$. Тогава

$$V_n(1)=2V_{n-1}(1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta=2V_{n-1}(1)\;I_n=\ldots=$$

$$=2^{n-1}I_n\cdot I_{n-1}\ldots I_2\cdot V_1(1)=2^nI_n\;I_{n-1}\ldots I_2,$$

откъдето обемът $V_n(R)$ на n-мерното кълбо с радиус R се дава от формулата

$$V_n(R)=2^nR^nI_nI_{n-1}\cdots I_2,$$

откъдето, използувайки известните формули за интегралите I_k*, окончателно получаваме

$$V_n(R)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}}{n!!}R^n\pi^{\frac{n-1}{2}}, & \text{ако } n \text{ е нечетно;}\\[2ex] \dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{n!!}R^n\pi^{\frac{n}{2}}, & \text{ако } n \text{ е четно.}\end{cases}$$

* В п. 4, § 5, глава 9, част I е показано, че

$$I_k=\begin{cases}\dfrac{(k-1)!!}{k!!}, & \text{ако } k \text{ е нечетно;}\\[2ex] \dfrac{(k-1)!!}{k!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{ако } k \text{ е четно.}\end{cases}$$

§ 5. Смяна на променливите в n-кратния интеграл

Формулата за смяна на променливите, която ще бъде доказана в този параграф, е едно от най-важните средства за пресмятане на n-кратни интеграли.

Предполагаме, че функцията $f(y)=f(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ е интегруема в някоя затворена, ограничена измерима област D в пространството E^n. Предполагаме също, че от променливите $y_1,y_2,\ldots,y_n$ преминаваме към променливите $x_1,x_2,\ldots,x_n$, т. е. извършваме преобразованието

$$(3.21)\qquad\begin{cases}y_1=\psi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ y_2=\psi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n=\psi_n(x_1,x_2,\ldots,x_n),\end{cases}$$

което може кратко да бъде записано като

$$(3.21^*)\qquad y=\psi(x),$$

разбирайки под y точка от n-мерното пространство $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, под x — точка от n-мерното пространство $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, а под ψ — съвкупността от n функции $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n$.

Означаваме с D' тази област в E^n, която при преобразованието (3.21) или (3.21*) преминава в D, т. е. полагаме $D=\psi(D')$. При това винаги ще предполагаме, че преобразованието (3.21) или (3.21*) допуска обратно преобразование, така че $D'=\psi^{-1}(D)$.

Ще докажем, че ако функциите (3.21) имат в областта D' непрекъснати частни производни от първи ред и ако в тази област якобианът

$$(3.22)\qquad \frac{D(y)}{D(x)}=\frac{D(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

е различен от нула, то за n-кратния интеграл от функцията $f(y)$ върху областта D е вярна следната формула за смяна на променливите:

$$(3.23)\qquad \int\limits_D f(y)dy=\int\limits_{D'}f[\psi(x)]\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|dx,$$

която в подробен запис има следния вид:

$$\iint\limits_D\ldots\int f(y_1,y_2,\ldots,y_n)dy_1dy_2\ldots dy_n=$$

(3.23*)

$$=\iint\limits_{D'}\cdots\int f[\psi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n)]\left|\frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\right|dx_1\ldots dx_n.$$

По-точно ще докажем следната основна теорема:

Теорема 3.8. *Нека преобразованието (3.21) изобразява взаимно еднозначно околността U' на областта D' в околността U на областта D (съответно D' в D). Ако функциите (3.21) имат в областта D' непрекъснати частни производни от първи ред по всички променливи и различен от нула якобиан (3.22), то за всяка интегруема в D функция $f(y)$ е вярна формулата за смяна на променливите (3.23*).*

Нека отбележим, че при условията на теорема 3.8 съществува преобразованието ψ^{-1}, обратно на ψ.

За доказателството на теорема 3.8 са необходими седем леми. Отначало формула (3.23) ще бъде доказана в случая, когато преобразованието (3.21) е линейно (леми 1—4), а след това общото преобразование (3.21) се свежда към този случай (леми 5—7).

Лема 1. *Ако преобразованието $z=\psi(x)$ е суперпозиция на две преобразования $z=\psi_1(y)$ и $y=\psi_2(x)$, т. е. $z=\psi_1[\psi_2(x)]$, като всички участвуващи в тези преобразования функции имат непрекъснати частни производни от първи ред, то якобианът $\frac{D(z)}{D(x)}$, взет в точката $\mathring{x}=(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_n)$, е равен на произведението на якобиана $\frac{D(y)}{D(x)}$, взет в точката $\mathring{x}$, и якобиана $\frac{D(z)}{D(y)}$, взет в точката $\mathring{y}=(\mathring{y}_1,\ldots,\mathring{y}_n)$, където $\mathring{y}=\psi_2(\mathring{x})$, т. е.*

$$\frac{D(z)}{D(x)}=\frac{D(z)}{D(y)}\cdot\frac{D(y)}{D(x)} \tag{3.24}$$

или в подробен запис

$$\frac{D(z_1,\ldots,z_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{D(z_1,\ldots,z_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\cdot\frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Доказателство на лема 1. За всеки $i=1,2,\ldots,n$ и $k=1,2,\ldots,n$ елементът $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(\mathring{x})$, стоящ в k-тия ред и i-тия стълб на якобиана $\frac{D(z)}{D(x)}$, взет в точката $\mathring{x}=(\mathring{x}_1,\ldots,\mathring{x}_n)$, по правилото за диференциране на сложна функция е равен на

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(\mathring{x})=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial y_l}(\mathring{y})\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_k}(\mathring{x}), \tag{3.25}$$

където $\mathring{x}=\psi_2(\mathring{x})$.

Но по правилото за умножение на детерминанти равенството (3.25) означава, че якобианът $\frac{D(z)}{D(x)}$, взет в точката $\mathring{x}$, е равен на произведението на якобиана $\frac{D(y)}{D(x)}$, взет в точката $\mathring{x}$, и якобиана $\frac{D(z)}{D(y)}$, взет в точката $\mathring{y}$. Лема 1 е доказана.

Нека напомним, че линейно преобразование на координатите се нарича преобразование от вида

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n,\end{cases} \tag{3.26}$$

където a_{ik} $(i,k=1,2,\ldots,n)$ са произволни константи.

За линейното преобразование (3.26) якобианът $\frac{D(y)}{D(x)}$ съвпада с детерминантата на матрицата на това преобразование $T=\|a_{ij}\|$, т. е.

$$\frac{D(y)}{D(x)}=\det T. \tag{3.27}$$

Ако тази детерминанта е различна от нула, то линейното преобразование (3.26) се нарича неизродено. В този случай съществува обратното преобразование, също линейно и неизродено, и уравненията (3.26) могат да бъдат решени относно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Линейното преобразование (3.26) накратко ще означаваме със символа $y=Tx$, а обратното му преобразование — със символа $x=T^{-1}y$.

Основната цел на следващите три леми е доказателството на факта, че за неизродено линейно преобразование (3.26) и за всяка непрекъсната функция $f(y)$ е вярна формулата за смяна на променливите (3.23), която поради формула (3.27) може да се представи във вида

$$\int\limits_D f(y)dy=\int\limits_{D'}f(Tx)\,|\det T|\,dx=|\det T|\cdot\int\limits_{D'}f(Tx)dx, \tag{3.28}$$

където $D'=T^{-1}D$.

Отначало ще разгледаме две линейни преобразования от специален вид:

1) линейното преобразование T_{ij}, което към i-тата координата прибавя j-тата координата, а всички останали координати се запазват:

$$y_k = x_k \quad \text{при } k=1,2,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,n,$$
$$y_i = x_i + x_j,$$

накратко записано като $y = T_{ij}x$;

2) линейното преобразование T_i^λ, което умножава i-тата координата с число $\lambda \neq 0$, а всички останали координати се запазват:

$$\begin{cases} y_k = x_k & \text{при } k=1,2,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,n, \\ y_i = \lambda x_i, \end{cases}$$

накратко записане като $y = T_i^\lambda x$.

Лесно се вижда, че

$$\det T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \det T_i^\lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} = \lambda$$

$$\begin{array}{cc} i & j \end{array}$$

и следователно преобразованията T_{ij} и T_i^λ са неизродени.

Лема 2. *За преобразованията T_{ij} и T_i^λ и за всяка непрекъсната в областта D функция $f(y)$ е вярна формулата за смяна на променливите* (3.28).

Доказателство на лема 2. Нека R е n-мерен правоъгълен паралелепипед, съдържащ D, а функцията $F(y)$ е зададена с

$$F(y) = \begin{cases} f(y) & \text{при } y \in D, \\ 0 & \text{при } y \in R \setminus D. \end{cases}$$

Достатъчно е да докажем, че

$$\int_R F(y)\,dy = \int_{T^{-1}R} F(Tx)\,|\det T|\,dx, \tag{3.28*}$$

където символът T означава едно от преобразованията T_{ij} или T_i^λ.

Ако R е правоъгълният паралелепипед

$$\{(y_1,\ldots,y_n):\ a_k \leq y_k \leq b_k,\ k=1,2,\ldots,n\},$$

то $[T_i^\lambda]^{-1}R$ е отново правоъгълен паралелепипед

$$\left\{(x_1,\ldots,x_n): a_k \leq x_k \leq b_k,\ k \neq i,\ \frac{a_i}{\lambda} \leq x_i \leq \frac{b_i}{\lambda}\right\} \text{ при } \lambda > 0 \text{ или}$$

$$\left\{(x_1,\ldots,x_n): a_k \leq x_k \leq b_k,\ k \neq i,\ \frac{b_i}{\lambda} \leq x_i \leq \frac{a_i}{\lambda}\right\} \text{ при } \lambda < 0,$$

а $[T_{ij}]^{-1}R$ е измеримата област

$$\{(x_1,\ldots,x_n): a_k \leq x_k \leq b_k,\ k \neq i,\ a_i - x_j \leq x_i \leq b_i - x_j\}.$$

От формулата за повторно интегриране (3.18) получаваме

$$\int_R F(y)\,dy = \tag{3.29}$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \left[\int_{a_i}^{b_i} F(y_1,\ldots,y_n)\,dy_i\right] dy_1 \ldots dy_{i-1}\,dy_{i+1} \ldots dy_n.$$

Прилагайки в еднократния интеграл по променливата y_i формулата за смяна на променливите $y_i = \lambda x_i$ за случая на преобразование T_i^λ и $y_i = x_i + x_j$ за случая на преобразование T_{ij} (вж. § 5, глава 9, част I), получаваме:

а) за случая на преобразование T_i^λ

$$\int_{a_i}^{b_i} F(y_1,\ldots,y_n)\,dy_i =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{a_i/\lambda}^{b_i/\lambda} F(y_1,\ldots,y_{i-1},\ \lambda x_i,\ y_{i+1},\ldots,y_n)\,\lambda\,dx_i & \text{при } \lambda > 0, \\ \displaystyle\int_{b_i/\lambda}^{a_i/\lambda} F(y_1,\ldots,y_{i-1},\ \lambda x_i,\ y_{i+1},\ldots,y_n)(-\lambda)\,dx_i & \text{при } \lambda < 0; \end{cases} \tag{3.30¹}$$

б) за случая на преобразование T_{ij}

$$\int_{a_i}^{b_i} F(y_1,\ldots,y_n)\,dy_i = \int_{a_i - x_j}^{b_i - x_j} F(y_1,\ldots,y_{i-1},\ x_i + x_j,\ y_{i+1},\ldots,y_n)\,dx_i. \tag{3.30²}$$

Замествайки (3.30¹) (или (3.30²)) в (3.29), използувайки отново формулата за повторно интегриране (3.18) и отчитайки, че

$$|\det T| = \begin{cases} 1, & \text{ако } T = T_{ij}, \\ |\lambda|, & \text{ако } T = T_i^\lambda, \end{cases}$$

а също полагайки $y_k=x_k$ при $k=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, получаваме равенството (3.28*). Лема 2 е доказана.

Лема 3. *Всяко неизродено линейно преобразование* (3.26) *може да се представи като суперпозиция на краен брой преобразования от вида* T_{ij} *или* T_i^λ *за* $\lambda \neq 0$.

Доказателство на лема 3. Ще разделим доказателството на 3 стъпки.

I стъпка. Ще покажем, че линейното преобразование T', сменящо местата на i-тата и j-тата координата (при запазване на останалите координати), може да се представи като суперпозиция на шест преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ.

Наистина, запазвайки в записа на $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ само i-тата и j-тата координата (останалите се запазват непроменени), имаме

$$(x_i, x_j) \xrightarrow[T_{ij}]{} (x_i+x_j, x_j) \xrightarrow[T_i^{-1}]{} (-x_i-x_j, x_j) \xrightarrow[T_{ji}]{}$$

$$\longrightarrow (-x_i-x_j, -x_i) \xrightarrow[T_i^{-1}]{} (-x_i-x_j, x_i) \xrightarrow[T_{ij}]{}$$

$$\longrightarrow (-x_j, x_i) \xrightarrow[T_i^{-1}]{} (x_j, x_i),$$

т. е. $T'=T_i^{-1}T_{ij}T_i^{-1}T_{ji}T_i^{-1}T_{ij}$.

2 стъпка. С краен брой смени на местата на два реда или стълба (т. е. с краен брой преобразования от вида T') всяко линейно неизродено преобразование може да се доведе до линейно преобразование с матрица $\|a_{ij}\|$, всички главни миньори на която са различни от нула, т. е.

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

3 стъпка. Остава да се докаже, че линейно преобразование с различни от нула главни миньори може да се представи като суперпозиция на линейни преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ. Това ще докажем по индукция.

За $k=1$ разглеждаме преобразование T с матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1=a_{11}\neq 0.$$

Преобразованието $T_1^{a_{11}}$ изобразява $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $(a_{11}x_1, x_2, \ldots, x_n)=Tx$, т. е. $T=T_1^{a_{11}}$ и твърдението е вярно.

Разглеждаме сега преобразования T с матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & 0 \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Предполагаме, че такива преобразования T могат да се представят като суперпозиция на преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ, т. е. съществуват краен брой преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ, изобразяващи $x=(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ в

$$\{a_{11}x_1+\cdots+a_{1k}x_k, \ldots, a_{k1}x_1+\cdots+a_{kk}x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}=Tx. \tag{3.31}$$

Трябва да докажем, че с помощта на суперпозиция на краен брой преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ векторът (3.31) може да се приведе във вида

$$\begin{aligned} &(a_{11}x_1+\cdots+a_{1(k+1)}x_{k+1}, \ldots, a_{k1}x_1+\cdots+a_{k(k+1)}x_{k+1}, \\ &a_{(k+1)1}x_1+\cdots+a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{3.32}$$

т. е. преобразование T с матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1(k+1)} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & 0 \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k(k+1)} & & & \\ a_{(k+1)1} & \ldots & a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

може да се представи като суперпозиция на краен брой преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ.

За да докажем това, отначало за всеки номер $i=1, 2, \ldots, k$, за който елементът $a_{i(k+1)}\neq 0$, извършваме преобразование, което е суперпозиция на три преобразования:

$$T_{k+1}^{1/a_{i(k+1)}} \; T_{i(k+1)} \; T_{k+1}^{a_{i(k+1)}}$$

(за тези i, за които $a_{i(k+1)}=0$, такова преобразование не извършваме). Суперпозицията на всички такива тройки от преобразования за $i=1, 2, \ldots, k$ изобразява вектора (3.31) в

$$[(a_{11}x_1+\dots+a_{1k}x_k+a_{1(k+1)}x_{k+1},\dots,a_{k1}x_1+\dots+a_{kk}x_k+ \tag{3.34}$$
$$+a_{k(k+1)}x_{k+1},\ x_{k+1},\ x_{k+2},\dots,x_n).$$

Тъй като миньорът Δ_k на матрицата (3.33) е различен от нула, то различна от нула е и равната му детерминанта на матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Следователно съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$ такива, че сумата на редовете на матрицата (3.35), умножени с тези числа, е

$$(a_{(k+1)1},\dots,a_{(k+1)k},\ a_{(k+1)(k+1)}),$$

т. е. е равна на първите $k+1$ елемента на $(k+1)$-вия ред на матрицата (3.33).

Това означава, че ако за всяко $j=1,2,\dots,k+1$ такова, че $\lambda_j\neq 0$, извършим суперпозицията от трите преобразования $T_j^{1/\lambda_j}T_{(k+1)j}T_j^{\lambda_j}$ (за тези j, за които $\lambda_j=0$, не извършваме съответната суперпозиция), то суперпозицията на всички тройки преобразования изобразява вектора (3.34) във вектора (3.32).

С това лема 3 е доказана по индукция.

Лема 4. *За всяко неизродено линейно преобразование* (3.26) *и всяка непрекъсната в областта D функция f е вярна формулата за смяна на променливите* (3.28).

Наистина формула (3.28) е вярна за всяко от преобразованията T_{ij} и T_i^{λ} (лема 2), но всяко неизродено линейно преобразование се представя като суперпозиция на преобразования (лема 3), като якобианът на тази суперпозиция от преобразования е равен на произведението от якобианите им (лема 1).

Следствие от лема 4. *Ако G е произволна измерима област в E^n, T е произволно линейно неизродено преобразование, то n-мерният обем V(G) на областта G и n-мерният обем V (TG) на образа ѝ TG са свързани с равенството*

$$V(TG)=|\det T|\,.\,V(G). \tag{3.36}$$

За доказателството на това твърдение е достатъчно във формула (3.28) да положим $D=TG$, $D'=T^{-1}D=G$ и $f(y)\equiv 1$ в областта D.

Нека сега е дадено произволно преобразование (3.21) или (3.21*) и са изпълнени условията на теорема 3.8.

При това двата интеграла в (3.23) съществуват, ако $D'=\psi^{-1}(D)$ е измерима област, така че е необходимо да докажем измеримостта на D' и равенството на интегралите в (3.23).

Нека $\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(x)=J_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ са елементите на матрицата на Якоби, взети в точката $x=(x_1,\dots,x_n)$, а самата матрица на Якоби $\|J_{ij}(x)\|$ означаваме с $J_\psi=J_\psi(x)$. Наричаме **норма на точката** $x=(x_1,\dots,x_n)$ величината $\|x\|=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$, а **норма на матрицата** $A=\|a_{ij}\|$ $(i,j=1,\dots,n)$ числото $\|A\|=\max\limits_{1\le i\le n}\left[\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right]$. Очевидно, че ако $y=Ax$, то

$$\|y\|=\|Ax\|\le\|A\|\,.\,\|x\|. \tag{3.37}$$

Освен това е ясно, че за единичната матрица имаме $\|E\|=1$.

Лема 5. Ако са изпълнени условията на теорема 3.8 и C е n-мерен координатен куб, принадлежащ на областта D', то n-мерният обем на куба C и n-мерният обем на образа му $\psi(C)$ са свързани с неравенството

$$V(\psi(C))\le[\max_{x\in C}\|J_\psi(x)\|]^n\,.\,V(C). \tag{3.38}$$

Доказателство на лема 5. Нека C е n-мерен куб с център в точката $\mathring{x}=(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_n)$ и със страна $2s$. Тогава кубът C може да се определи с неравенството

$$\|x-\mathring{x}\|\le s. \tag{3.39}$$

От формулата на Тейлър за функцията на n променливи $\psi_i(x)$ (вж. п. 3, § 5, глава 13, част I) съществува число θ_i в интервала (0, 1) такова, че

$$\psi_i(x)-\psi_i(\mathring{x})=\sum_{j=1}^{n}J_{ij}[\mathring{x}+\theta_i(x-\mathring{x})](x_j-\mathring{x}_j).$$

Оттук и от формула (3.37) следва

$$\|\psi(x)-\psi(\mathring{x})\|\le(\max_{x\in C}\|J_{ij}(x)\|).\,\|x-\mathring{x}\|. \tag{3.40}$$

Полагайки $y=\psi(x)$, $\mathring{y}=\psi(\mathring{x})$, от (3.40) и (3.39) получаваме

$$\|y-\mathring{y}\|\le s\,.\max_{x\in C}\|J_\psi(x)\|.$$

По такъв начин, ако точката x принадлежи на куб C със страна $2s$ и с център в точката $\mathring{x}$, то образът $y=\psi(x)$ на точката x при-

надлежи на куб с център в точката $\overset{\circ}{y}=\psi(\overset{\circ}{x})$ и със страна $2s\,.\max\limits_{x\in C}\|J_\psi(x)\|$. Следователно множеството $\psi(C)$ е измеримо и

$$V(\psi(C))\leq[\max_{x\in C}\|J_{i/}(x)\|]^n\,.\,V(C).$$

С това лема 5 е доказана.

Следствие 1 от лема 5. *Ако са изпълнени условията на теорема 3.8 и областта G е измерима, то и нейният образ $\psi(G)$ е измерим. В частност, ако D е измерима, то и $D'=\psi^{-1}(D)$ е измерима.*

Действително границата на всяко измеримо множество G е множество с n-мерен обем нула, а такова множество съгласно лема 5 се преобразува в множество, чийто n-мерен обем също е нула. Измеримостта на областта $D'=\psi^{-1}(D)$ следва от това, че по условието на теорема 3.8 за преобразованието ψ^{-1} са изпълнени същите условия, както и за ψ.

Следствие 2 от лема 5. *Ако функцията $f(y)$ е интегруема в облаастта D, $D'=\psi^{-1}(D)$ и са изпълнени условията на теорема 3.8, то $f(\psi(x))$, а следователно и $f(\psi(x))\,.\,|\det J_\psi(x)|$ са интегруеми в D'.*

Лема 6. *Нека са изпълнени условията на теорема 3.8 и нека G е произволно измеримо подмножество на D', а $\psi(G)$ е образът му при преобразованието* (3.21). *Тогава за n-мерния обем на областта $\psi(G)$ е изпълнено неравенството*

$$V(\psi(G))\leq\int_G|\det J_\psi(x)|\,dx\,. \tag{3.41}$$

Доказателство на лема 6. Първа стъпка. Ще докажем, че за всяко неизродено линейно преобразование T и за всеки n-мерен куб $C\subset D'$ е изпълнено неравенството

$$V(\psi(C))\leq|\det T|\,.\,[\max_{x\in C}\|T^{-1}J_\psi(x)\|]^n\,.\,V(C). \tag{3.42}$$

Следствието от лема 4 гласи, че за всяко измеримо множество G и за всяко линейно преобразование T е изпълнено равенството (3.36)

$$V(TG)=|\det T|\,.\,V(G).$$

Полагаме $G=T^{-1}\psi(C)$. Тогава $TG=T(T^{-1}\psi(C))=\psi(C)$ и

$$V(\psi(C))=|\det T|\,.\,V(T^{-1}\psi(C)). \tag{3.43}$$

Дясната страна на (3.43) оценяваме с помощта на неравенството (3.38), в което вместо преобразованието ψ разглеждаме суперпозицията на преобразованията $T^{-1}\psi$. Получаваме

$$V(\psi(C))\leq|\det T|\,.\,[\max_{x\in C}\|J_{T^{-1}\psi}(x)\|]^n\,.\,V(C). \tag{3.44}$$

От лема 1 $J_{T^{-1}\psi}=J_{T^{-1}}J_\psi=T^{-1}J_\psi$, защото матрицата на Якоби на линейно преобразование съвпада с матрицата на това преобразование. Но това означава, че неравенството (3.44) може да бъде записано като (3.42). С това неравенството (3.42) е доказано.

Втора стъпка. Сега ще докажем неравенството (3.41). Покриваме пространството E^n с мрежа от n-мерни кубове със страна h. Нека $C_1, C_2, \ldots, C_{m(h)}$ са тези кубове, които изцяло се съдържат в G, и нека $G_h=\bigcup\limits_{1\leq k\leq m(h)}C_k$.

Във всеки от кубовете C_k фиксираме произволна точка x_k и записваме за всеки такъв куб C_k неравенството (3.42), като полагаме $T=J_\psi(x_k)$. Получаваме

$$V(\psi(C_k))\leq|\det J_\psi(x_k)|\,.\,\{\max_{x\in C_k}\|[J_\psi(x_k)]^{-1}.\,J_\psi(x)\|\}^n.\,V(C_k). \tag{3.45}$$

Тъй като елементите на матрицата на Якоби са непрекъснати функции на променливата x в областта D', то функцията $\varphi(x,\xi)=\|[J_\psi(\xi)]^{-1}J_\psi(x)\|$ е непрекъсната (следователно и равномерно непрекъсната) функция на променливите x и ξ в областта $D'\times D'$. Поради това за всяко $\varepsilon>0$ можем да изберем такова $\delta>0$, че щом $\rho(\xi,\bar\xi)<\delta$, $\rho(x,\bar x)<\delta$, да имаме $|\varphi(x,\xi)-\varphi(\bar x,\bar\xi)|<\varepsilon$. Тъй като $\varphi(\xi,\xi)=1$, полагайки $\bar x=\bar\xi=\xi$, получаваме, че при $\rho(x,\xi)<\delta$ е изпълнено $\varphi(x,\xi)<\varepsilon$. По такъв начин, ако изберем $h<\delta$, то $\max\|[J_\psi(x_k)]^{-1}J_\psi(x)\|^n<1+\varepsilon$ (за всички k) и оценката (3.45) може да се запише във вида

$$V(\psi(C_k))\leq(1+\varepsilon)\,.\,|\det J_\psi(x_k)|\,.\,V(C_k).$$

Сумирайки последното неравенство по всички $k=1,2,\ldots,m(h)$, получаваме

$$V(\psi(G_h))\leq(1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m(h)}|\det J_\psi(x_k)|\,.\,V(C_k). \tag{3.46}$$

От твърдението, формулирано в края на § 4 на тази глава, следва, че границата при $h\to0$ на дясната част на (3.46) съществува и е равна на $(1+\varepsilon)\int_G|\det J_\psi(x)|\,dx$ (ε е произволно положително число). Освен това $\lim\limits_{h\to0}G_h=G$, така че при $h\to0$ от неравенството (3.46) получаваме неравенството (3.41). Лема 6 е доказана.

Лема 7. *Ако са изпълнени условията на теорема 3.8 и освен*

това предполагаме, че функцията $f(y)$ е неотрицателна в D, то е вярна формулата за смяна на променливите (3.23).

Доказателство на лема 7. Покриваме пространството E^n с мрежа от n-мерни кубове със страна h и означаваме с $C_1, C_2, \ldots, C_{m(h)}$ тези от кубовете, които изцяло се съдържат в D. Нека $G_k=\psi^{-1}(C_k)$. За всяка от областите G_k записваме неравенството (3.41)

$$V(C_k)\leq\int_{G_k}|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.47}$$

Умножаваме двете страни на (3.47) с m_k, където

$$m_k=\inf_{C_k}f(y)=\inf_{G_k}f[\psi(x)],$$

и сумираме получените неравенства по k от 1 до $m(h)$:

$$\sum_{k=1}^{m(h)}m_kV(C_k)\leq\sum_{k=1}^{m(h)}m_k\int_{G_k}|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.48}$$

По формулата за средните стойности имаме

$$\int_{G_k}f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx=\mu_k\int_{G_k}|\det J_\psi(x)|\,dx,$$

където $\mu_k\in[m_k, M_k]$, $M_k=\sup_{G_k}f[\psi(x)]$. Следователно

$$[m_k\int_{G_k}|\det J_\psi(x)|\,dx\leq\mu_k\int_{G_k}|\det J_\psi(x)|\,dx=\int_{G_k}f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx$$

и неравенството (3.48) може да се усили:

$$\sum_{k=1}^{m(h)}m_kV(C_k)\leq\sum_{k=1}^{m(h)}\int_{G_k}f[\psi(x)]\,.\,|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.49}$$

От твърдението, формулирано в края на § 4 на тази глава, получаваме, че лявата страна на (3.49) при $h\to0$ има граница, равна на $\int_D f(y)dy$, и тъй като $\lim_{h\to0}\sum_{k=1}^{m(h)}G_k=D'=\psi^{-1}(D)$, то при $h\to0$ от (3.49) получаваме

$$\int_D f(y)\,dy\leq\int_{D'}f[\psi(x)]\,.\,|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.50}$$

Сменяйки в горните разсъждения ролята на D и D', разглеждайки в D' функцията $g(x)=f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|$, и използвайки лема 1 и

теоремата за детерминантата на произведение на две матрици, получаваме обратното неравенство

$$\int_{D'}f[\psi(x)]\,.\,|\det J_\psi(x)|\,dx\leq\int_D f(y)\,dy. \tag{3.51}$$

От (3.50) и (3.51) следва формулата за смяна на променливите, с което лема 7 е доказана.

Доказателство на теорема 3.8. Нека $f(y)$ е произволна интегруема върху областта D функция и са изпълнени условията на теорема 3.8. От интегруемостта на функцията $f(y)$ в областта D следва, че съществува константа $M>0$ такава, че $|f(y)|\leq M$ в D. За всяка от неотрицателните функции $f_1(y)\equiv M$ и $f_2(y)=M-f(y)$ теорема 3.8 е вярна поради лема 7. Тогава от линейното свойство на интеграла следва верността на формулата (3.23) и за разликата $f_1(y)-f_2(y)=f(y)$. С това теорема 3.8 е доказана.

Забележка 1. В условията на теорема 3.8 може да се допуска анулирането на якобиана (3.22) върху някое подмножество S' на D' с n-мерен обем нула. Наистина множеството S може да се вложи в елементарна фигура C с произволно малък обем, като съгласно доказания вариант на теорема 3.8 имаме

$$\int_{\psi(D'/C)}f(y)\,dy=\int_{D'/C}f[\psi(x)]\,|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{3.52}$$

Извършваме във формулата (3.52) граничен преход по редица от елементарни фигури $\{C_k\}$, $S\subset C_k$, n-мерният обем $V(C_k)$ на които клони към нула, и получаваме, че формула (3.23) е валидна и в разглеждания случай.

Забележка 2. Както се вижда от примера, приведен по-долу, изискването за взаимноеднозначност на преобразованието ψ е съществено дори в случая на свързана област, в която е изпълнено условието $\det J_\psi(x)\neq0$ за всички $x\in E^n$.

Пример. Нека $D'=\{(x_1, x_2)\in E^2:\ x_1\in[0,1],\ x_2\in[-2\pi, 2\pi]\}$, а $y=\psi(x)$ е зададено с равенствата

$$y_1=e^{x_1}\cos x_2,$$
$$y_2=e^{x_1}\sin x_2.$$

Тогава $D=\psi(D')=\{(y_1, y_2)\in E^2:\ 1\leq(y_1^2+y_2^2)^{1/2}\leq e\}$.
Лесно се вижда, че якобианът на преобразованието ψ е $\det J_\psi(x)=e^{2x_1}\neq0$ за всички $x\in E^2$. Освен това

$$\iint_D dy_1dy_2=\pi(e^2-1);$$

$$\iint\limits_{D'} |\det J_\psi(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \left[\int\limits_0^1 e^{2x_1}\, dx_1 \right] dx_2 = 2\pi\,(e^2-1),$$

т. е. формулата за смяна на променливите не е валидна.

§ 6. Пресмятане на обеми на n-мерни тела

В § 4 на тази глава отбелязахме, че интегралът

$$I = \iint\limits_{D} \cdots \int 1\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n \tag{3.53}$$

е равен на n-мерния обем $V(D)$ на областта D. Затова е естествено да наричаме величината $dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$ елементарен обем в разглежданата декартова координатна система $Oy_1 y_2 \ldots y_n$.

С помощта на преобразованието (3.21) преминаваме от декартовите координати $y_1, y_2, \ldots, y_n$ към нови, изобщо казано, криволинейни координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тъй като при такава смяна (съгласно формулата за смяна на променливите (3.23)) интегралът (3.53) се преобразува в

$$I = \iint\limits_{D'} \cdots \int \left| \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

то е естествено да наричаме величината

$$\left| \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

елементарен обем в криволинейната координатна система $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

И така модулът на якобиана характеризира «разтягането» (или «свиването») на обема при прехода от декартови координати $y_1, y_2, \ldots, y_n$ към криволинейни координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Да пресметнем елементарния обем в сферични и цилиндрични координати.

1°. За сферичните координати в пространството E^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (r \geq 0,\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi])$$

якобианът е

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Следователно елементарният обем е $r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

2°. За цилиндричните координати в пространството E^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \qquad (r \geq 0,\ \varphi \in [0,2\pi),\ z \in R)$$

якобианът е

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Следователно елементарният обем е $r\, dr\, d\varphi\, dz$. В частност за полярните координати в равнината елементарното лице е $r dr d\varphi$.

3°. В пространството E^n сферичните координати се определят с

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta_1\, \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1}, \\ x_m = r\cos\theta_{m-1} \prod\limits_{k=m}^{n-1} \sin\theta_k, \qquad m = 2, 3, \ldots, n-1, \\ x_n = r\cos\theta_{n-1} \end{cases} \quad (r \geq 0,\ \theta_1 \in [0,2\pi),\ \theta_m \in [0,\pi],\ m = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Якобианът е

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})} = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k.$$

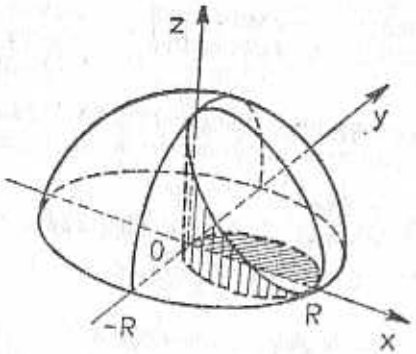
Следователно елементарният обем в n-мерни сферични координати е $r^{n-1} \prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k\, d\theta_k\, dr$.

Примери. 1. Да се пресметне обемът V на тялото, което цилиндърът $x^2+y^2=Rx$ изрязва от кълбото $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ (фиг. 3.6)*.

Тялото е симетрично относно координатните равнини Oxy и Oxz и е разположено вдясно от равнината Oyz. Затова е достатъчно да се изчисли обемът на четвъртинката от тялото, лежаща в първи октант, т. е.

$$V = 4 \iiint\limits_D dx\, dy\, dz,$$

* Тази фигура се нарича «тяло на Вивиани» по името на италиански математик от XVII в.



Фиг. 3. 6

$$D=\{(x, y, z)\in E^3 : x\in[0,R],\ y\in[0, \sqrt{Rx-x^2}],\ z\in[0, \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}]\}.$$

Преминаваме към цилиндрични координати. Областта D' се задава с

$$D'=\{(\varphi, r, z)\in E^3 : \varphi\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right], r\in[0, R\cos\varphi], z\in[0, \sqrt{R^2-r^2}]\}.$$

От формулата за смяна на променливите получаваме

$$V=4\iiint\limits_{D'} r\,dr\,d\varphi\,dz=4\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{R\cos\varphi} r\int\limits_0^{\sqrt{R^2-r^2}} 1.\,dz\,dr\,d\varphi=$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{R\cos\varphi} r\sqrt{R^2-r^2}\,dr\,d\varphi=\frac{4}{3}\int\limits_0^{\pi/2} R^3(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Получихме

$$V=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Като запишем резултата във вида $V=\frac{2}{3}\pi R^3-\frac{8}{9}R^3$, забелязваме, че полученият обем е с $\frac{8}{9}R^3$ по-малък от обема на полукълбото, от което е изрязано тялото.

2. Да се пресметне интегралът

$$I=\iiint\limits_D \frac{xyz}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

където D е тялото, ограничено отгоре от повърхността

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy, \tag{3.54}$$

а отдолу от равнината $z=0$.

Преминаваме към сферични координати. Уравнението на повърхността (3.54) приема вида

$$r^2=a^2\sin^3\theta\sin\varphi\cos\varphi.$$

Забелязваме, че $z\geq 0$ за точките от повърхността на D и отчитайки симетричността на тялото относно оста Oz, след смяна на променливите получаваме

$$I=2\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{a\sin\theta\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^4}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi\,.\int\limits_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{a^4}{144}.$$

3. Да се пресметне интегралът

$$I=\iint\limits_D\ldots\int\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

където D е n-мерното кълбо с радиус R и с център в началото на координатите $D=\{(x_1,\ldots,x_n)\in E^n : \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\leq R^2\}$, $n\geq 2$.

Преминаваме към сферични координати в E^n. Областта е паралелепипедът

$$D'=\{(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})\in E^n : r\in[0,R], \theta_1\in[0,2\pi], \theta_k\in[0,\pi], k=2,3,\ldots,n-1\}.$$

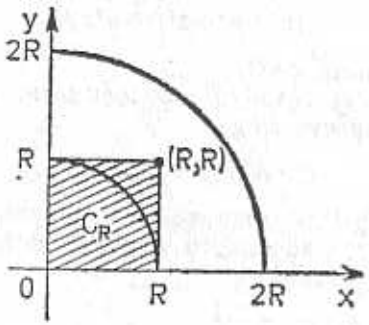
Формулите за смяна на променливите (3.23) и повторно интегриране (3.18) свеждат пресмятането на интеграла до

$$I=\int\limits_0^R r^n dr\,.\int\limits_0^{2\pi} d\theta_1\,.\int\limits_0^{\pi}\sin\theta_2\,d\theta_2\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_{n-1}\,d\theta_{n-1}\,.$$

Използувайки формулата за пресмятане на интеграл от степените на синуса (вж. п. 4, § 5, глава 9, част I), получаваме

$$I=2^n\frac{R^{n+1}}{n+1}A(n),$$

където



Фиг. 3. 7

$$A(n)=\begin{cases} \dfrac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)!!}\,\pi^{\frac{n}{2}} & \text{ако } n \text{ е четно,} \\ \dfrac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!}\,\pi^{\frac{n-1}{2}}, & \text{ако } n \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

4. Да се пресметне интегралът на Поасон

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Разглеждаме в равнината областите

$$C_R=\{(x,y)\in E^2 : x^2+y^2\leq R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\},$$
$$K_R=\{(x,y)\in E^2 : 0\leq x\leq R,\ 0\leq y\leq R\}$$

и неотрицателната функция на две променливи $e^{-(x^2+y^2)}$. На фиг. 3.7 са показани областите C_R, C_{2R} — четвъртинки от кръгове с радиуси R и $2R$ в първи квадрант — и областта K_R — защрихованият квадрат.

Тъй като $C_R\subset K_R\subset C_{2R}$, то

$$\text{(3.55)}\qquad \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\leq\iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\leq\iint_{C_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

За средния интеграл в (3.55) получаваме

$$\iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^R e^{-x^2}\,dx\,.\int_0^R e^{-y^2}\,dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

За да пресметнем оставащите два интеграла, правим полярна смяна на координатите. Областта, която при това преобразование преминава в C_R, е

$$C'_R=\{(r,\varphi)\in E^2 : r\in[0,R],\ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\}.$$

Прилагаме формулата за смяна на променливите и получаваме

$$\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\iint_{C'_R} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\pi/2} d\varphi\,.\int_0^R e^{-r^2}\,r\,dr=\frac{\pi}{4}\,(1-e^{-R^2}),$$

$$\iint_{C_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}\,(1-e^{-4R^2}).$$

Замествайки получените изрази в (3.55), получаваме

$$\text{(3.56)}\qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}}\leq\int_0^R e^{-x^2}\,dx\leq\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-4R^2}}\,.$$

Преминавайки към граница в (3.56) при $R\to\infty$, получаваме

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Този елегантен начин за пресмятане принадлежи на Поасон.

§ 7. Теорема за почленно интегриране на редици и редове от функции

В § 4, глава 2 беше доказана теорема 2.8 за почленно интегриране на редица от функции $\{f_n(x)\}$ върху сегмент $[a,b]$ от реалната права. Аналогична теорема е вярна и в случая, когато редицата от функции е зададена и интегруема в някоя област в пространството E^m $(m\geq 1)$.

Теорема 3.9. Нека D е затворена ограничена измерима област в E^m. Ако редицата от функции $\{f_n(x)\}$ клони равномерно в D към функцията $f(x)$ и ако всяка от функциите $f_n(x)$ е интегруема в областта D, то и граничната функция е интегруема в тази област, като редицата може да се интегрира почленно в областта D, т.е.

$$\int_D f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)\,dx.$$

Доказателство. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Както при

доказателството на теорема 2.8, за доказателството на интегруемостта на f в областта D е достатъчно да се докаже, че съществува цяло число n такова, че за всяко деление на областта D голямата сума S и малката сума s на граничната функция $f(x)$ и голямата сума S_n и малката сума s_n на интегруемата в D функция $f_n(x)$ са свързани с неравенството

$$S-s\leq(S_n-s_n)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.57}$$

Разглеждаме произволно деление на областта D на краен брой частични области D_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ с произволна форма без общи вътрешни точки. Означаваме със символа $\omega_i(f_n)$ осцилацията на функцията $f_n(x)$ в областта D_i $(\omega_i(f_n)=\sup\limits_{D_i} f_n(x)-\inf\limits_{D_i} f_n(x))$, а със символа $\omega_i(f)$ — осцилацията в D_i на граничната функция $f(x)$.

Ще докажем, че за всяко достатъчно голямо n е изпълнено неравенството

$$\omega_i(f)\leq\omega_i(f_n)+\frac{\varepsilon}{2\Delta D}, \quad i=1, 2, \ldots, r, \tag{3.58}$$

където ΔD означава n-мерния обем на областта D (можем да считаме $\Delta D_i\neq 0$). Като умножим (3.58) с обемите ΔD_i на частичните области D_i и сумирайки получените неравенства по i, получаваме (3.57).

За всяко цяло n и за всеки две точки x' и x'' от областта D_i е в сила тъждеството

$$f(x')-f(x'')=[f(x')-f_n(x')]+[f_n(x')-f_n(x'')]+[f_n(x'')-f(x'')]. \tag{3.59}$$

Поради равномерната сходимост на редицата $\{f_n(x)\}$ към функцията $f(x)$ в D за всяко фиксирано $\varepsilon>0$ съществува n_0 такова, че за всяко $n>n_0$ и всяка точка $x\in D$ е изпълнено

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4\Delta D}. \tag{3.60}$$

Прилагайки в дясната страна на (3.59) неравенството (3.60) за точките $x=x'$ и $x=x''$ съответно, получаваме

$$|f(x')-f(x'')|\leq|f_n(x')-f_n(x'')|+\frac{\varepsilon}{2\Delta D} \tag{3.61}$$

за всяко $n>n_0$ и за всеки две точки $x', x''\in D_i$.

От неравенството (3.61) следва

$$|f(x')-f(x'')|\leq\omega_i(f_n)+\frac{\varepsilon}{2\Delta D},$$

от където получаваме неравенството (3.58).

С това доказателството на интегруемостта на граничната функция е завършено.

Възможността на почленно интегриране на редицата $\{f_n(x)\}$ следва от неравенството (3.60), изпълнено за всяко $x\in D$, и от отбелязания в § 4 факт: стойността на интеграла $\int\limits_D 1\,dx$ е равна на n-мерния обем ΔD на областта D. С това теорема 3.9 е доказана.

Ще приведем формулировката на теорема 3.9 на езика на редове от функции.

Ако редът от функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \qquad (x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in E^m)$$

е сходящ равномерно към сумата си $S(x)$ в някоя ограничена затворена измерима област $D\subset E^m$ и ако всеки член на реда $u_k(x)$ е интегруема в областта D функция, то и сумата $S(x)$ е интегруема в областта D, като редът може да се интегрира почленно в областта D, т. е.

$$\int\limits_D S(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_D u_k(x)dx.$$

§ 8. n-кратни несобствени интеграли

В този параграф понятието n-кратен интеграл се обобщава за случаите на неограничена област и неограничена подинтегрална функция. Понятието несобствен n-кратен интеграл е формулирано така, че да обхваща и двата отбелязани случая.

1. Понятие за n-кратни несобствени интеграли.

Нека D е отворено свързано множество в пространството E^m. Със символа $\overline{D}$ означаваме затворената обвивка на D, която се получава, като прибавим към множеството D неговата граница.

Определение 1. *Ще казваме, че редицата $\{D_n\}$ от отворени свързани множества* монотонно запълва множеството *D, ако: 1) за всяко цяло n е изпълнено $\overline{D}_n\subset D_{n+1}$; 2) обединението на всички множества D_n съвпада с D.*

Нека върху множеството D е дефинирана функция $f(x)$, интегруема по Риман върху всяко затворено измеримо подмножество на множеството D. Ще разглеждаме всевъзможни редици $\{D_n\}$ от отворени множества, монотонно запълващи множеството D, и такива, че затворената обвивка $\overline{D}_n$ на всяко множество D_n е изме-

римо множество (оттук в частност следва, че всяко от множествата D_n е ограничено).

Определение 2. *Ако за всяка такава редица $\{D_n\}$ съществува границата на числовата редица*

$$a_n = \int_{\overline{D}_n} f(x)dx \tag{3.63}$$

и тази граница не зависи от избора на редицата $\{D_n\}$, то тази граница се нарича несобствен интеграл *от функцията $f(x)$ върху областта D и се означава с един от следните символи:*

$$\int_D f(x)dx \text{ или } \int \ldots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dx_1dx_2\ldots dx_m. \tag{3.64}$$

При това несобственият интеграл (3.64) се нарича сходящ.

Нека отбележим, че символите (3.64) се използват и в случая, когато границата на редицата (3.63) не съществува. В този случай интегралът (3.64) се нарича разходящ.

2. Два признака за сходимост на несобствени интеграли от неотрицателни функции

Теорема 3.10. *За сходимостта на несобственния интеграл (3.64) от неотрицателната в областта D функция $f(x)$ е необходимо и достатъчно да съществува редица от измерими области $\{D_n\}$, монотонно запълващи D, за която числовата редица (3.63) е ограничена.*

Доказателство. Необходимост. Сходимостта на несобственния интеграл (3.64) по определение означава, че редицата $\{a_n\}$, зададена с равенството (3.63), е сходяща за всяка редица от области $\{D_n\}$, монотонно запълващи D, и следователно редицата $\{a_n\}$ е ограничена за всяка такава редица $\{D_n\}$.

Достатъчност. Нека редицата (3.36) е ограничена. Следователно тя е сходяща, защото е ненамаляваща ($\overline{D}_n \subset \overline{D}_{n+1}$ и $f(x) \geq 0$). Означаваме границата ѝ с I. Остава да се докаже, че ако изберем друга редица от измерими области $\{D_n'\}$, монотонно запълващи D, то редицата

$$a_n' = \int_{\overline{D}_n'} f(x)dx$$

има за граница същото число I. Нека n_0 е фиксирано. Разглеждаме множеството $\overline{D}_{n_0}'$. Ще докажем, че съществува такова n_1, че $\overline{D}_{n_0}' \subset D_{n_1}$. Ако допуснем противното, то за всяко k съществува

точка $M_k \in \overline{D}_{n_0}'$ такава че $M_k \overline{\in} D_k$. Поради затвореността и ограничеността на множеството $\overline{D}_{n_0}'$ от редицата $\{M_k\}$ може да се избере подредица, сходяща към някоя точка M, принадлежаща на $\overline{D}_{n_0}'$. Точката M заедно с някоя своя околност принадлежи на някое множество D_{k_1}. Но тогава на това множество D_{k_1} (и на всички множества D_k с $k > k_1$) ще принадлежат точки от редицата $\{M_k\}$ с произволно големи индекси. А това противоречи на избора на точките M_k.

И така съществува индекс n_1 такъв, че $\overline{D}_{n_0}' \subset D_{n_1}$. Следователно

$$a_{n_0}' \leq a_{n_1} \leq I,$$

откъдето следва, че редицата $\{a_n'\}$ има за граница някое число $I' \leq I$. Сменяйки в горните разсъждения местата на редиците $\{a_n'\}$ и $\{a_n\}$, достигаме до неравенството $I \leq I'$. Следователно $I' = I$ и теоремата е доказана.

В края на § 6 на тази глава бе даден пример (пример 4) за пресмятане на несобственния интеграл

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{C_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4},$$

където
$$C_n = \{(x, y) \in E^2,\ x^2+y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad D = \{(x, y) \in E^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

(в пример 4, § 6 трябва само да се смени означението R с n).

Теорема 3.11 (общ признак за сравнение). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ навсякъде в отвореното множество D удовлетворяват условието

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Тогава от сходимостта на несобственния интеграл $\int_D g(x)dx$ следва сходимостта на несобственния интеграл $\int_D f(x)dx$, а от разходимостта на $\int_D f(x)dx$ следва разходимостта на $\int_D g(x)dx$.

Доказателство. Нека $\{D_n\}$ е редица от измерими области, монотонно запълващи областта D. Поради очевидните неравенства

$$a_n = \int_{\overline{D}_n} f(x)dx \leq \int_{\overline{D}_n} g(x)dx = b_n$$

от ограничеността на $\{b_n\}$ следва ограничеността на $\{a_n\}$ и от неограничеността на $\{a_n\}$ следва неограничеността на $\{b_n\}$ (за всяка редица от области $\{D_n\}$). Оттук и от теорема 3.10 получаваме теорема 3.11.

Обикновено за проверка на сходимостта на несобствени интеграли се използуват стандартни (еталонни) функции за сравнение. Най-често употребяваните такива функции са $g(x)=|x|^{-p}$, $p>0$, $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2}$. Лесно проверяваме, че ако областта D е кълбо с радиус R $(R>0)$ и с център в началото на координатната система, то несобственият интеграл от функцията $|x|^{-p}$ върху областта D е сходящ при $p<m$ и разходящ при $p\geq m$. Ако D е външността на горното кълбо, то несобственият интеграл от функцията $|x|^{-p}$ върху областта D е сходящ при $p>m$ и разходящ при $p\leq m$.

3. Несобствени интеграли от знакопроменливи функции

В тази подточка изучаваме връзките между сходимост и абсолютна сходимост на m-кратни несобствени интеграли. Както и в едномерния случай, несобственият интеграл $\int\limits_D f(x)dx$ се нарича **абсолютно сходящ**, ако е сходящ интегралът $\int\limits_D |f(x)|dx$. За разлика от едномерния случай от сходимостта на един m-кратен интеграл $(m\geq 2)$ следва неговата абсолютна сходимост.

Теорема 3.12. За несобствените m-кратни интеграли понятията сходимост и абсолютна сходимост са еквивалентни при $m\geq 2$, при условие че собствените интеграли, чиято граница търсим, са добре дефинирани.

Доказателство. 1. Ще докажем, че от абсолютната сходимост на m-кратния несобствен интеграл в областта D следва неговата обикновена сходимост в тази област. Разглеждаме двете неотрицателни функции

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2},\quad f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2} \tag{3.65}$$

и ги представяме в следния вид:

$$\begin{aligned} f_+(x)&=\begin{cases} f(x), & \text{ако } f(x)\geq 0;\\ 0, & \text{ако } f(x)<0;\end{cases}\\ f_-(x)&=\begin{cases} -f(x), & \text{ако } f(x)\leq 0;\\ 0, & \text{ако } f(x)>0.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.66}$$

Следните съотношения се получават непосредствено от определението на функциите f_+ и f_-:

$$0\leq f_+(x)\leq |f(x)|,\quad 0\leq f_-(x)\leq |f(x)|, \tag{3.67}$$

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x),\quad |f(x)|=f_+(x)+f_-(x). \tag{3.68}$$

От интегруемостта в собствен смисъл на функцията $f(x)$ върху всяка измерима подобласт на областта D следва интегруемостта върху всяка такава подобласт и на функцията $|f(x)|$, а следователно и на функциите $f_+(x)$ и $f_-(x)$ (чрез формулите (3.65)). От сходимостта на интеграла $\int\limits_D |f(x)|\,dx$, току-що показаното свойство на функциите $f_+(x)$ и $f_-(x)$, неравенствата (3.67) и теорема 3.11 получаваме, че несобствените интеграли $\int\limits_D f_+(x)dx$ и $\int\limits_D f_-(x)dx$ са сходящи в несобствен смисъл. От определението за несобствен интеграл следва, че ако са сходящи несобствените интеграли от функциите $f_+(x)$ и $f_-(x)$ върху областта D, то върху тази област са сходящи сумата и разликата на тези функции. От първото равенство в (3.68) следва сходимостта на интеграла $\int\limits_D f(x)dx$. Първата част на теоремата е доказана.

2. Нека многократният несобствен интеграл $\int\limits_D f(x)dx$ е сходящ. Ще покажем, че той е абсолютно сходящ. Допускаме, че това не е вярно. Тогава от теорема 3.10 следва, че редицата от интеграли от функцията $|f(x)|$ върху всяка редица от измерими множества $\{D_n\}$, монотонно запълващи D, е монотонно растяща към безкрайност редица. В частност редицата $\{D_n\}$ може да бъде избрана така, че за всяко $n=1,2,\ldots$ е изпълнено неравенството

$$\int\limits_{D_{n+1}} |f(x)|dx>3\int\limits_{D_n} |f(x)|\,dx+2n+4 \tag{3.69}$$

(достатъчно е да се вземе коя да е редица $\{D_n\}$ и да се «разреди» така, че неравенството (3.69) да е изпълнено за получената подредица). Означаваме с p_n множеството $D_{n+1}\setminus D_n$. Тогава от (3.69) получаваме, че за всяко n е в сила

$$\int\limits_{P_n} |f(x)|\,dx>2\int\limits_{D_n} |f(x)|+2n+4. \tag{3.70}$$

От второто равенство в (3.68) следва, че

$$\int\limits_{P_n} |f(x)|\,dx=\int\limits_{P_n} f_+(x)dx+\int\limits_{P_n} f_-(x)dx. \tag{3.71}$$

Фиксираме произволно цяло n. Нека за това n първият интеграл в дясната част на (3.71) е по-голям от вторя. Тогава от (3.70) и 3.71) получаваме

$$\int_{\tilde{P}_n} f_+(x)dx > \int_{\tilde{D}_n} |f(x)|dx + n + 2. \tag{3.72}$$

Разделяме областта P_n на краен брой области P_n^i така, че малката сума $\sum_i m_i \Delta P_n^i$ на функцията $f_+(x)$ (тук $m_i = \inf_{P_n^i} f_+(x)$ и ΔP_n^i е m-мерният обем на P_n^i) за това деление да удовлетворява неравенството

$$0 \leq \int_{\tilde{P}_n} f_+(x)dx - \sum_i m_i \Delta P_n^i < 1.$$

Тогава, заменяйки в лявата част на (3.72) интеграла с малката сума, получаваме неравенството

$$\sum_i m_i \Delta P_n^i > \int_{\tilde{D}_n} |f(x)|dx + n + 1. \tag{3.73}$$

Тъй като $m_i \geq 0$, то в сумата $\sum_i m_i \Delta P_n^i$ можем да оставим само тези членове, за които $m_i > 0$, като неравенството (3.73) продължава да е в сила. Означаваме с $\tilde{P}_n$ обединението на областите P_n^i, съответстващи на останалите в сумата събираеми.

В областта $\tilde{P}_n$ функцията $f_+(x)$ е положителна и затова $f_+(x) = f(x)$ в тази област (вж. (3.66)). Следователно от (3.73) получаваме неравенството

$$\int_{\tilde{P}_n} f(x)dx > \int_{\tilde{D}_n} |f(x)|dx + n + 1. \tag{3.74}$$

Означаваме с D_n^* обединението на D_n и $\tilde{P}_n$. Тогава, събирайки неравенството (3.74) и тривиалното неравенство

$$\int_{\tilde{D}_n} f(x)dx \geq -\int_{\tilde{D}_n} |f(x)|dx,$$

получаваме

$$\int_{\tilde{D}_n^*} f(x)dx > n + 1. \tag{3.75}$$

Ако за фиксираното n от двата интеграла в дясната страна на (3.71) по-голям беше вторият, провеждайки подобни разсъждения и отчитайки, че в областта $\tilde{P}_n$ е вярно $f_-(x) = -f(x)$, получаваме

$$\int_{\tilde{D}_n^*} f(x)dx < -n - 1. \tag{3.76}$$

От неравенствата (3.75) и (3.76) следва, че за всяко $n = 1, 2, \ldots$ е в сила

$$\left| \int_{\tilde{D}_n^*} f(x)dx \right| > n + 1. \tag{3.77}$$

Редицата от области $\{D_n^*\}$ удовлетворява всички условия в определение 1 освен може би условието за свързаност на областите D_n^* (свързаността на областта D_n^* може да бъде нарушена, когато от областта P_n изваждаме тези области P_n^i, в които $m_i = 0$). *С малка деформация ще направим тези области свързани**.

Съединяваме всяка от областите P_n^i от $\tilde{P}_n$ с областта D_n с m-мерна измерима свързана област K_n^i (която ще наричаме к а н а л) така, че полученото множество да бъде свързано. Тъй като броят на областите P_n^i в $\tilde{P}_n$ е краен, то и броят на каналите е краен. Означаваме обединението на всички канали с K_n. Ще наложим ограничение на m-мерния обем на каналите $V(K_n)$.

Тъй като функцията $f(x)$ е интегруема, а следователно и ограничена в P_n, то

$$\left| \int_{K_n} f(x)dx \right| \leq \int_{K_n} |f(x)|dx \leq M \cdot V(K_n),$$

където $M = \sup_{\tilde{P}_n} |f(x)|$. Ще искаме m-мерният обем на каналите $V(K_n)$ да удовлетворява условието $V(K_n) < \frac{1}{M}$. Тогава

$$\left| \int_{K_n} f(x)\,dx \right| < 1. \tag{3.78}$$

От неравенствата (3.77) и (3.78) получаваме, че за всяко n е в сила неравенството

* Именно в този момент от доказателството съществено се използва, че $m \geq 2$. При $m = 1$ горните разсъждения не могат да бъдат проведени.

(3.79) $$\left| \int\limits_{\overline{D_n^* \cup K_n}} f(x)dx \right| > n.$$

Ако $K_n \subset P_n$, което винаги може да бъде удовлетворено, то редицата от свързани измерими области $\{D_{2n}^* \cup K_{2n}\}$ монотонно запълва областта D, защото

$$\overline{D_{2n}^* \cup K_{2n}} \subset D_{2n+1} \subset D_{2(n+1)} \subset D_{2(n+1)}^* \cup K_{2(n+1)}.$$

От неравенствата (3.79) следва, че редицата от интеграли в лявата част на това неравенство е разходяща, т. е. несобственият интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ е разходящ. Но по условие този интеграл е сходящ. Полученото противоречие доказва нашето твърдение. Теоремата е доказана напълно.

4. Главна стойност на n-кратен несобствен интеграл

Означаваме с $B(R, x_0)$ m-мерното кълбо с радиус R и с център в точката x_0 и нека началото на координатната система е точката $0 \in E^m$.

Определение. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко $x \in E^m$ и интегруема върху всяко кълбо $B(R, 0)$, $R>0$. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е интегруема по Коши в E^m, ако съществува границата*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(R,\,0)} f(x)dx.$$

Тази граница ще наричаме главна стойност в смисъл на Коши на несобственият интеграл от функцията $f(x)$ и ще означаваме с

$$V.p \int\limits_{E^m} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(R,\,0)} f(x)dx.$$

Пример. Не е трудно да се пресметне, че за функцията $f(x, y)=x$ в E^2 имаме

$$\int\limits_{B(R,\,0)} x\,dx\,dy = 0$$

и следователно функцията $f(x, y)=x$ е интегруема по Коши в E^2 и

$$V.p \int\limits_{E^2} x dx\,dy = 0.$$

Трябва да се отбележи, че несобственият интеграл $\int\limits_{E^2} x dx dy$ е разходящ.

В случай че функцията $f(x)$ има особеност в някоя точка x_0 в областта $D \subset E^m$ и $f(x)$ е интегруема във всяка област $D_R = D \setminus B(R, x_0)$, където $B(R, x_0) \subset D$ и $R>0$, то главна стойност на интеграл в смисъл на Коши се въвежда като

$$V.p \int\limits_D f(x)dx = \lim_{R\to 0} \int\limits_{D_R} f(x)dx.$$

4. Криволинейни интеграли

В тази глава ще разширим понятието едномерен определен интеграл по праволинеен сегмент в случая, когато областта на интегриране е сегмент от някаква равнинна или пространствена крива. Интеграли от този вид се наричат криволинейни.

§ 1. Понятие за криволинейни интеграли от първи и втори род

Нека разгледаме в равнината Oxy някаква ректифицируема крива L, която няма точки на самопресичане и повтарящи се участъци. Да предположим, че тази крива се определя от параметричните уравнения

$$(4.1)\qquad \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (a\leq t\leq b),$$

и в началото ще смятаме, че тя не е затворена и има за краища точките A и B с координати $A(\varphi(a), \psi(a))$, $B(\varphi(b), \psi(b))$.

Нека върху кривата $L=AB$ са дефинирани три функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, всяка от които е непрекъсната (а следователно и равномерно непрекъсната) по тази крива (за функцията $f(x, y)$ например това означава, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че $|f(M_1)-f(M_2)|<\varepsilon$ за всички точки $M_1, M_2\in L$, разстоянието между които е по-малко от δ).

Да разделим сегмента $[a, b]$ с помощта на точките $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ на n сегмента $[t_{k-1}, t_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. При това кривата L се разпада на n дъги $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, където точките $M_k(x_k, y_k)$, $k=0, 1, \ldots, n$, имат координати $x_k=\varphi(t_k)$, $y_k=\psi(t_k)$.

Избираме на всяка от дъгите $M_{k-1}M_k$ произволна точка $N_k(\xi_k, \eta_k)$, координатите на която съответстват на някаква стойност τ_k на параметъра t, принадлежаща на сегмента $[t_{k-1}, t_k]$ и така-

ва, че $\xi_k=\varphi(\tau_k)$, $\eta_k=\psi(\tau_k)$. Дължината на дъгата $M_{k-1}M_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ означаваме с Δl_k. В § 1 на глава 10 от част I е доказана следната формула за Δl_k*:

$$(4.2)\qquad \Delta l_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Числото $\Delta=\max\limits_{1\leq k\leq n} \Delta l_k$ ще наричаме диаметър на деление на кривата L.

Образуваме следните три интегрални суми:

$$(4.3^1)\qquad \sigma_1=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,.\,\Delta l_k,$$

$$(4.3^2)\qquad \sigma_2=\sum_{k=1}^{n} p(\xi_k, \eta_k)\,.\,\Delta x_k,$$

$$(4.3^3)\qquad \sigma_3=\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\,.\,\Delta y_k,$$

където $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$.

Определение 1. *Числото I ще наричаме граница на интегралната сума σ_s $(s=1, 2, 3)$, когато диаметърът на деление Δ клони към нула, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова $\delta>0$, че (независимо от избора на точките N_k от дъгите $M_{k-1}M_k$) $|\sigma_s-I|<\varepsilon$, когато $\Delta<\delta$.*

Определение 2. *Ако съществува границата на интегралната сума σ_1 при $\Delta\to 0$, то тази граница се нарича криволинеен интеграл от първи род от функцията $f(x, y)$ по кривата L и се означава с един от символите*

$$(4.4^1)\qquad \int_L f(x, y)dl, \qquad \int_{AB} f(x, y)dl.$$

Определение 3. *Ако съществува границата на интегралната сума σ_2 [съответно σ_3] при $\Delta\to 0$, то тази граница се нарича криволинеен интеграл от втори род от функцията $P(x, y)$ [$Q(x, y)$] по кривата $L=AB$ и се означава със символа*

$$(4.4^2)\qquad \int_{AB} P(x, y)dx \quad \left[\text{съответно} \int_{AB} Q(x, y)\,dy\right].$$

Сумата

* При условие че кривата (4.1) е гладка (т. е. φ и ψ имат непрекъснати производни).

$$\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)\,dy$$

е прието да се нарича **пълен криволинеен интеграл от втори род** *и се означава със символа*

$$(4.4^3) \qquad \int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

От определението на криволинейните интеграли следва, че:

1) криволинейният интеграл от първи род не зависи от това, в каква посока (от A към B или от B към A) се обхожда кривата L, а за криволинейния интеграл от втори род изменението на посоката води до смяна на знака, т.е.

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

2) физически криволинейният интеграл от първи род (4.4^1) може да се представи като масата на кривата L с линейна плътност $f(x,y)$, а общият криволинеен интеграл от втори род (4.4^3) — като работата по преместването на материална точка от A до B по кривата L под действието на сила с проекции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в точката (x, y).

Забележка. За пространствената крива $L = AB$ аналогично се определят криволинеен интеграл от първи род —

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl,$$

и три криволинейни интеграла от втори род —

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx, \quad \int_{AB} Q(x, y, z)dy, \quad \int_{AB} R(x, y, z)dz.$$

Сумата от трите последни интеграла е прието да се нарича **пълен криволинеен интеграл от втори род** и да се означава със символа

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

§ 2. Условия за съществуване на криволинейни интеграли

Определение. *Кривата L се нарича* **гладка**, *ако функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ от определящите я параметрични уравнения (4.1) имат в сегмента $[a, b]$ непрекъснати производни $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ (т.е. производните са непрекъснати в интервала $a<t<b$ и имат крайни гранични стойности в точката a отдясно и в точката b отляво).*

Ще напомним, че в глава 13 на първа част нарекохме **особени точки** на кривата L точките, съответстващи на такива стойности на параметъра t от $[a, b]$, за които $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = 0$, т.е. и двете производни се анулират. Точките от кривата L, за които $[\varphi'(t)]^2 + [\psi(t)]^2 \neq 0$, нарекохме **обикновени точки**.

Теорема 4.1. *Ако кривата $L = AB$ е гладка и няма особени точки и ако функциите $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекъснати върху тази крива, то криволинейните интеграли (4.4^1), (4.4^2) съществуват и могат да се пресметнат по следните формули, които свеждат тези интеграли до обикновени определени интеграли:*

$$(4.5^1) \qquad \int_{AB} f(x, y)dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt,$$

$$(4.5^2) \qquad \int_{AB} P(x, y)dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt,$$

$$(4.5^3) \qquad \int_{AB} Q(x, y)\,dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)\,dt.$$

Доказателство. Преди всичко ще отбележим, че определените интеграли в десните части на формулите (4.5^1), (4.5^2), (4.5^3) съществуват, тъй като при направените предположения подинтегралните функции във всеки от тези интеграли са непрекъснати в сегмента $a \leq t \leq b$.

Ще отбележим също така, че формулите (4.5^2) и (4.5^3) се доказват по един и същ начин, и затова ще изведем само равенствата (4.5^1) и (4.5^2) и ще докажем съществуването на интегралите (4.4^1) и (4.4^2).

Както в § 1, да разделим сегмента $[a, b]$ на n сегмента $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и да съставим интегралните суми (4.3^1), (4.3^2). Като вземем предвид (4.2) и равенството

$$\Delta x_k=\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi'(t)\,dt,$$

да представим интегралните суми (4.3¹), (4.3²) във вида

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{n}\left\{f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt\right\},$$

$$\sigma_2=\sum_{k=1}^{n}\left\{P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi'(t)\,dt\right\}.$$

Нека означим определените интеграли от десните части на формулите (4.5¹), (4.5²) съответно с I_1 и I_2 и да представим тези интеграли по сегмента $[a, b]$ във вида на сума от n интеграла по сегментите $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Да разгледаме и да оценим разликите

$$(4.6^1)\quad \sigma_1-I_1=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))-f(\varphi(t),\psi(t))\right\}\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

$$(4.6^2)\quad \sigma_2-I_2=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))-P(\varphi(t),\psi(t))\right\}\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

При направените предположения функциите $f(\varphi(t), \psi(t))$ и $P(\varphi(t), \psi(t))$ като сложни функции на аргумента t са непрекъснати в сегмента $a\leq t\leq b$, а следователно и равномерно непрекъснати в този сегмент.

Ще отбележим, че когато диаметърът на деление Δ на кривата L клони към нула, тогава клони към нула и най-голямата от разликите $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

Наистина, тъй като функциите $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и не се анулират едновременно, то числото $m=$

$$=\min_{a\leq t\leq b}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}>0 \text{ и } \Delta l_k\geq m\int_{t_{k-1}}^{t_k}dt=m\,.\,\Delta t_k, \text{ т. е. } \Delta t_k\leq\frac{1}{m}\cdot\Delta l_k$$

(тук използувахме формулата (4.2) за дължината Δl_k).

По този начин за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че при $\Delta<\delta$ изразът във фигурни скоби от формулата (4.6¹) по модул да бъде по-малък от ε/l, където l е дължината на кривата L,

а изразът във фигурни скоби от (4.6²) по модул да бъде по-малък от $\frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, където $M=\max\limits_{a\leq t\leq b}|\varphi'(t)|$.

След като предположим, че за диаметъра на деление е изпълнено $\Delta<\delta$, получаваме следните оценки за разликите (4.6¹) и (4.6²):

$$|\sigma_1-I_1|\leq\frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt=\frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k=\varepsilon,$$

$$|\sigma_2-I_2|\leq\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|\varphi'(t)|\,dt\leq\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot M\,.\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=\varepsilon.$$

С това доказахме, че интегралните суми σ_1 и σ_2 имат граници при $\Delta\to 0$ съответно равни на I_1 и I_2. С това е доказано съществуването на криволинейните интеграли (4.4¹), (4.4²) и верността на формулите (4.5¹), (4.5²). Ще отбележим, че при извеждането на формулата (4.5²) никъде не използувахме условието за непрекъснатост на функцията $\psi'(t)$. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Кривата L ще наричаме частично гладка, ако тя е непрекъсната и се разпада на краен брой части, които нямат общи вътрешни точки и всяка от тях е гладка крива. За частично гладка крива L е естествено криволинейните интеграли по тази крива да се дефинират като сума от съответните криволинейни интеграли по всички гладки части, съставящи кривата L. При това равенствата (4.5¹), (4.5²), (4.5³) ще бъдат в сила и за частично гладка крива L. Тези равенства са верни и в случая, когато функциите $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са само частично непрекъснати по кривата L (т. е. когато кривата L се разпада на краен брой части, нямащи общи вътрешни точки, във всяка от които дадените функции са непрекъснати).

Забележка 2. Аналогични резултати и формули са в сила и за криволинейни интеграли по пространствената крива

$$L=AB=\{(x, y, z): x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ x=\chi(t);\ a\leq t\leq b\}.$$

Така например формулите за пресмятане на тези интеграли са:

$$\int_{AB}f(x, y, z)dl=\int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt,$$

$$\int_{AB}P(x, y, z)\,dx=\int_a^b P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} Q(x, y, z)\, dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \psi'(t)\, dt,$$

$$\int_{AB} R(x, y, z)\, dz = \int_a^b R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \chi'(t)\, dt.$$

Забележка 3. По-горе беше отбелязано, че криволинейният интеграл от втори род зависи от посоката на описване на кривата $L = AB$. Затова трябва да бъде направена специална уговорка за това, какво ще разбираме под символа

$$\int_L P(x, y)\, dx + Q(x, y) dy \tag{4.7}$$

в случая, когато L е затворена крива (т. е. в случая, когато точката B съвпада с точката A).

От двете възможни посоки на описване на затворения контур L ще наричаме положителна тази посока, при движението по която областта, лежаща във вътрешността на контура, остава от лявата страна (т. е. движение, «обратно на часовниковата стрелка»).

Ще смятаме, че в интеграла (4.7) *по затворения контур* L *този контур винаги се описва в положителна посока.*

В случая, когато е необходимо да се подчертае, че контурът L е затворен, ще използуваме следното означение за интеграла (4.7):

$$\oint_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Забележка 4. Криволинейните интеграли имат същите свойства, както обикновените определени интеграли (доказателствата са аналогични на изложените в § 4, глава 9 на част I). Ще отбележим, че при по-силни предположения тези свойства следват непосредсвено от формулите (4.5^1), (4.5^2), (4.5^3).

Ще формулираме тези свойства за криволинейните интеграли от първи род.

1. Линейно свойство. Ако за функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ съществуват криволинейни интеграли по кривата AB и ако α и β са произволни константи, то за функцията $[\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]$ съществува криволинейният интеграл по кривата AB и при това

$$\int_{AB} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\, dl = \alpha \int_{AB} f(x, y) dl + \beta \int_{AB} g(x, y)\, dl.$$

2. Адитивност. Ако дъгата AB се състои от две дъги AC и CB, нямащи общи вътрешни точки, и ако за функцията $f(x, y)$ съществува криволинеен интеграл по всяка от дъгите AC и CB,

то за тази функция съществува криволинеен интеграл по дъгата AB и при това

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_{AC} f(x, y)\, dl = \int_{CB} f(x, y)\, dl.$$

3. Оценка на модула на интеграла. Ако съществува криволинеен интеграл по кривата AB от функцията $f(x, y)$, то съществува и криволинейният интеграл по кривата AB от функцията $|f(x, y)|$ и при това

$$\left| \int_{AB} f(x, y)\, dl \right| \leq \int_{AB} |f(x, y)|\, dl.$$

4. Формула за средните стойности. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната по кривата AB, то може да се намери точка M от тази крива такава, че

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = l f(M),$$

където l е дължината на кривата.

Забележка 5. Аналогично на изложената тук теория на криволинейния интеграл в равнината се изгражда и теорията на криволинейния интеграл в пространството E^n $(n > 2)$.

Примери. 1°. Да се намери дължината на пространствената крива L, зададена с параметричните уравнения

$$x = e^{-t} \cos t,\ y = e^{-t} \sin t,\ z = e^{-t} \text{ при } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Задачата се свежда до пресмятането на криволинейния интеграл от първи род $\int_L 1\, dl$.

От формулата за изчисляване на криволинейния интеграл от първи род, дадена в забележка 2, получаваме

$$\int_L 1\, dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(e^{-t} \cos t)']^2 + [(e^{-t} \sin t)']^2 + [(e^{-t})']^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{-2t}(2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t) + e^{-2t}}\, dt = \sqrt{3}(1 - e^{-2\pi}).$$

2°. Да се изчисли криволинейният интеграл от втори род

$$I = \int_{AB} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy,$$

където AB е част от елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $x, y \geqq 0$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$. Тази крива може да се зададе и с параметричните уравнения

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t \quad \text{при } 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Така от формулите (4.5²), (4.5³) получаваме

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(a\cos t+b\sin t).(-a\sin t)+(a\cos t-b\sin t)\,b\cos t]\,dt=$$

$$=\left[\frac{ab}{2}\sin(2t)+\frac{a^2+b^2}{4}\cos(2t)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Ще отбележим, че изразът под знака на интеграла $(x+y)dx+(x-y)\,dy$ е пълният диференциал на функцията

$$u(x, y)=\frac{x^2-y^2}{2}+xy.$$

Както ще бъде доказано в глава 6, от този факт следва, че стойността на интеграла I не зависи от избора на частично гладкия път на интегриране, който свързва точките A и B (разгледаната част от елипса е само една от тези криви), и е равен на разликата

$$u(B)-u(A)=u(0, b)-u(a, 0)=-\frac{a^2+b^2}{2}.$$

5. Повърхнинни интеграли

В тази глава ще бъде разгледан въпросът за интегриране на функции, дефинирани върху повърхнини от тримерното евклидово пространство E^3. Обект на изследване са и понятията повърхнина и лице на повърхнина.

§ 1. Понятие за повърхнина и лице на повърхнина

1. Понятие за повърхнина

Определение 1. Изображение f на област G от равнината върху множество G^* от тримерното пространство се нарича *хомеоморфно*, ако това изображение осъществява взаимно еднозначно съответствие между точките на G и G^*, при което всяка сходяща редица от точки от G се изобразява в сходяща редица от точки в G^* и, обратно: всяка сходяща редица от точки от G^* е образ на сходяща редица от точки от G.

Тук под сходяща редица от точки на G (съответно G^*) разбираме такава сходяща редица, която принадлежи на G (съответно G^*) заедно с границата си. Множествата G и G^* се наричат *хомеоморфни*, ако между тях съществува хомеоморфизъм.

Определение 2. Изображение f на област G върху G^* се нарича *локално хомеоморфно*, ако за всяка точка от G съществува околност, която се изобразява хомеоморфно върху своя образ.

Определение 3. Областта G от равнината T се нарича *елементарна*, ако тази област е образ на някакъв отворен кръг D при хомеоморфно изображение на този кръг върху равнината T.

Определение 4. Свързаната област G от равнината T се нарича *проста*, ако всяка точка от G има околност, която е елементарна област.

Определение 5. Множество Φ от точки в пространството се нарича *повърхнина*, ако е образ на проста равнинна област

G при локално хомеоморфно изображение f на областта G в пространството E^3.

По-нататък под **околност на точката** M **от повърхнината** Φ ще разбираме подмножеството от точки на Φ, принадлежащи на околност на точката M в E^3.

Да разгледаме един пример. Нека G е проста област в равнината Oxy (например кръг), (x, y) са координатите на точката $M \in G$, $z=z(M)$ е непрекъсната функция в G, а G^* е графиката на тази функция. Очевидно изображението f на областта G върху G^*, зададено с равенствата

$$x=u, \quad y=v, \quad z=z(u, v),$$

е хомеоморфно изображение на тази област върху множеството G^*, а $\Phi=G^*$ е повърхнина.

Нека в равнината (u, v) е дадена проста област G и за всички точки от тази област са дефинирани три функции

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \tag{5.1}$$

или, което е същото, една векторна функция

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v), \tag{5.1*}$$

където $\mathbf{r}(u, v)$ е вектор с компоненти $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Ще смятаме, че са изпълнени следните две условия А:

1) функциите (5.1) имат непрекъснати частни производни от първи ред в областта G;

2) навсякъде в областта G матрицата

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

има ранг, равен на две.

Ще докажем, че *ако са изпълнени тези две условия А, то множеството* Φ *от точки, определени от уравненията* (5.1), *е повърхнина*, т. е. то е област на равнинна област G при локално хомеоморфно изображение от G в E^3.

Нека $N_0(u_0, v_0)$ е произволна точка от G. Ясно е, че малка околност на тази точка се изобразява в малка околност на точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, където $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$ (за това е достатъчно функциите (5.1) да са непрекъснати в G, което е изпълнено в нашия случай).

Очевидно, ако $N_n(u_n, v_n)$ е фундаментална редица от точки в малка околност на точката N_0, то редицата от образите на тези точки $M_n(x_n, y_n, z_n)$, където $x_n=x(N_n)$, $y_n=y(N_n)$, $z_n=z(N_n)$,

е също фундаментална във Φ; това следва непосредствено от непрекъснатостта на функциите (5.1); например разликата $|x_{n+p}-x_n|=|x(N_{n+p})-x(N_n)|$ може да бъде направена по-малка от произволно число $\varepsilon>0$ при $\rho(N_{n+p}, N)<\delta=\delta(\varepsilon)$.

Остава да се докаже, че при изображението, определено от уравненията (5.1), на всяка точка от множеството Φ от достатъчно малка околност на точката M_0 съответствува определена точка от малка околност на точката N_0 в областта G, при това на всяка сходяща редица от точки $\{M_n\}$ от тази околност на точката M_0 съответствува сходяща редица $\{N_n\}$ от точки на G.

Тъй като във всяка точка $N_0(u_0, v_0) \in G$ рангът на матрицата (5.2) е равен на две, то в тази точка е различен от нула поне един минор от втори ред на матрицата (5.2).

Нека този минор е

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \quad \text{в точката } N_0.$$

След като обединим това условие с първото условие от двете условия А, получаваме, че за системата

$$\begin{cases} x(u, v)-x=0 \\ y(u, v)-y=0 \end{cases} \tag{5.3}$$

в околност на точката M_0 са изпълнени всички условия на теоремата за обратната функция (вж. § 2, глава 14 на първа част). Затова системата (5.3) има в околност на точката M_0 единствено непрекъснато и диференцируемо решение

$$\begin{cases} u=u(x, y) \\ v=v(x, y) \end{cases}. \tag{5.4}$$

Това означава, че съществува хомеоморфно изображение на малка околност на точката $N_0 \in G$ върху малка околност на точката $P_0(x, y)$ от равнината Oxy. (В едната посока това изображение се задава с непрекъснатите функции (5.4), а в другата — с първите две равенства на (5.1), в които функциите $x=x(u, v)$ и $y=y(u, v)$ са също непрекъснати; непрекъснатостта и на едните, и на другите функции осигурява изобразяването на сходяща редица от околността на едната от точките N_0 или P_0 в сходяща редица в околност на другата от тези точки.)

Като заместим функциите (5.4) в третата функция на (5.1), получаваме непрекъсната в околност на точката функция

$$z=z(u(x, y), v(x, y))=\varphi(x, y). \tag{5.5}$$

Тази функция осъществява хомеоморфно изображение на малка околност на точката $P_0(x_0, y_0)$ от равнината Oxy върху малка околност на точката $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$. Може да се каже, че (5.5) представя Φ в малка околност на точката M_0 като графика на функция на x, y.

Тъй като суперпозиция на хомеоморфни изображения е също хомеоморфно изображение, то изображението на малка околност на точката $N_0 \in G$ върху малка околност на точката $M_0 \in \Phi$ е хомеоморфно.

От това множество от точки Φ, определено от уравненията (5.1), е повърхнина, ако са изпълнени двете условия А.

Забележка 1. Повърхнината Φ, определена от уравненията (5.1), е прието да се нарича гладка, когато е изпълнено първото от двете условия А, а когато е изпълнено второто от условията А — повърхнина без особени точки.

И така може да се каже, че повърхнината Φ, определена от уравненията (5.1) при изпълнени и двете условия А, е гладка и няма особени точки.

Забележка 2. Между другото установихме, че всяка гладка и без особени точки повърхнина в достатъчно малка околност на всяка от своите точки може еднозначно да се проектира на поне една от трите координатни равнини.

Да разгледаме повърхнината Φ, определена от уравненията (5.1), за които са изпълнени двете условия А.

След като запишем уравненията (5.1) във векторния вид (5.1*), да видим какъв е геометричният смисъл на векторната функция $\mathbf{r}(u, v)$. Ако фиксираме някоя стойност на $v = v_0 = \text{const}$ от областта G, то уравнението $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ ще определя крива върху повърхнината Φ, наричана координатна линия, а векторът $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v_0)$ ще се допира до тази линия. Аналогично при $u = u_0 = \text{const}$ уравнението $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ ще определя друга координатна линия, а векторът $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v)$ ще се допира до нея. През точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, където $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, ще минават и двете координатни линии.

Второто от условията А, т. е. условието за липса на особени точки, изисква рангът на матрицата (5.2) да бъде равен на две. Това означава, че векторите $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$, координатите на които съставят редовете на матрицата (5.2), са линейно независими, т. е. неколинеарни, и следователно определят равнина,

която е допирателна равнина на повърхнината Φ в точката M_0. Вектор, който е перпендикулярен към тази допирателна равнина, се нарича нормален вектор (или нормала) на повърхнината Φ в точката M_0. Такъв вектор може да се определи като векторно произведение на векторите $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Така векторът

$$\mathbf{n} = \frac{\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]}{\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|} \tag{5.6}$$

е единичен нормален вектор към повърхнината Φ. По силата на условията, наложени на функциите (5.1), този вектор е непрекъснат по u и v в някаква околност на произволна точка от повърхнината, т. е. *в околността на всяка точка от гладка повърхнина без особени точки съществува непрекъснато векторно поле от нормали.*

Изобщо върху цялата повърхнина такова непрекъснато векторно поле от нормали може и да не съществува.

Пример. Лист на Мьобиус. Ако залепим правоъгълника $ABB'A'$ така, че A да съвпада с B' и B да съвпада с A', то ще се получи повърхнина, която се нарича лист на Мьобиус*. След като направи една обиколка, нормалата сменя посоката си с противоположната (вж. фиг. 5.1).

Ще разглеждаме само такива повърхнини Φ, за които съществува непрекъснато векторно поле от нормали върху цялата повърхнина. Прието е такива повърхнини да се наричат двустранни.

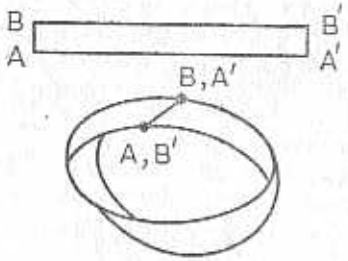
Повърхнината Φ се нарича пълна, ако всяка фундаментална редица от точки от тази повърхнина има за граница точка от тази повърхнина.

Повърхнината Φ се нарича ограничена, ако съществува тримерно кълбо, съдържащо всички точки от тази повърхнина.

Примери за пълни повърхнини са равнината, сферата, елипсоидът, простият хиперболоид. При това сферата и елипсоидът са ограничени повърхнини. Кръгът без границата си, както и всяко отворено свързано множество върху сферата (което не съвпада с цялата сфера) не са пълни повърхнини.

По-нататък ще разглеждаме повърхнина Φ, определена от уравненията (5.1), която притежава следните пет свойства: 1) гладка; 2) без особени точки; 3) двустранна: 4) пълна и 5) ограничена.

* А. Мьобиус — немски математик (1790—1868).



Фиг. 5. 1

2. Помощни леми

Лема 1. *Ако Φ е гладка повърхнина и M_0 е нейна неособена точка, то достатъчно малка околност на точката M_0 еднозначно се проектира върху допирателната равнина за която и да е точка от тази околност.*

Доказателство. Нека околността $\hat{\Phi}$ на точката M_0 е такава, че 1) нормалата във всяка точка от тази околност сключва с нормалата в точката M_0 ъгъл, по-малък от $\frac{\pi}{4}$; 2) околността $\hat{\Phi}$ еднозначно се проектира върху някакъв кръг в една от координатните равнини (например Oxy). Възможността за избора на такава околност $\hat{\Phi}$ следва от установеното в предната точка съществуване на околност на разглежданата точка със следните две свойства: 1) в тази околност съществува непрекъснато векторно поле от нормали; 2) тази околност еднозначно се проектира върху една от координатните равнини (очевидно има част от тази околност, която се проектира върху някакъв кръг в координатната равнина).

Ще отбележим, че кои да е две нормали от непрекъснатото векторно поле в точки от $\hat{\Phi}$ сключват ъгъл, по-малък от $\frac{\pi}{2}$.

Да допуснем, че разглежданата околност $\hat{\Phi}$ не се проектира еднозначно върху допирателната равнина в някоя точка $M \in \hat{\Phi}$. Тогава в тази околност ще има две точки P и Q такива, че хордата PQ ще е успоредна на нормалата на Φ в точката M. Да разгледаме линията, получена от пресичането на $\hat{\Phi}$ с равнината, успоредна на оста Oz и минаваща през хордата PQ (предполагаме, че $\hat{\Phi}$ еднозначно се проектира върху равнината Oxy). Върху тази линия според теоремата на Лагранж може да се намери точка N, допирателната в която е успоредна на хордата PQ, а от това е успоредна и на нормалата в точката M. Това означава, че нор-

малите в точките M и N сключват ъгъл $\frac{\pi}{2}$, което противоречи на избора на $\hat{\Phi}$. Полученото противоречие ни убеждава във верността на лемата. Лемата е доказана.

Ще казваме, че част от повърхнина има размери, по-малки от δ ($\delta>0$), ако тази част е във вътрешността на някакво кълбо с радиус $\delta/2$.

Лема 2. *За всяка гладка, ограничена, пълна и без особени точки повърхнина Φ може да се намери число $\delta>0$ такова, че за всяка част от Φ с размери, по-малки от δ, еднозначно се проектира* а) *на една от координатните равнини;* б) *на допирателната равнина в произволна точка от тази част.*

Доказателство. По-горе в забележка 2 и в лема 1 доказахме, че за всяка точка от повърхнината Φ може да се намери достатъчно малка околност $\hat{\Phi}$, която еднозначно се проектира а) на една от координатните равнини; б) на допирателната равнина в произволна точка от $\hat{\Phi}$.

Да допуснем, че твърдението на лемата не е вярно, т. е. не може да се намери числото $\delta>0$ от формулировката на лемата. Тогава за всяко $\delta_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ще се намери част $\hat{\Phi}_n$ с размери, по-малки от δ_n, и такава, че не се проектира еднозначно на никоя от координатните равнини или на допирателната равнина в някоя точка $M_n \in \hat{\Phi}_n$. Да изберем във всяка част $\hat{\Phi}_n$ точка $\hat{M}_n$ и да изберем от редицата $\{\hat{M}_n\}$ от точки от ограничената и пълна повърхнина Φ подредица $\{M_{k_n}\}$, която има за граница някоя точка $M_0 \in \Phi$.

От забележка 2 и лема 1 имаме, че може да се намери достатъчно малка околност $\hat{\Phi}$ на точката M_0, която еднозначно се проектира върху една от координатните равнини и върху допирателната равнина в произволна точка от $\hat{\Phi}$. Всички $\hat{\Phi}_{k_n}$, започвайки от някакъв номер k_n, ще бъдат вътре във $\hat{\Phi}$, а това противоречи на избора на частите $\hat{\Phi}_n$. Лемата е доказана.

Лема 3. *Нека Φ е гладка, без особени точки, двустранна, пълна, ограничена повърхнина, определена от уравненията* (5.1). *Тогава за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че за всяка част от повърхнината Φ с размери, по-малки от δ, ъгълът γ между нормалите в кои да е две точки от тази част удовлетворява условието*

$$\cos\gamma=1-\alpha, \tag{5.7}$$

където

$$0\leqq\alpha<\varepsilon.$$

Доказателство. Повърхнината Φ е двустранна и затова векторното поле от нормали е непрекъснато, а следователно и равномерно непрекъснато върху цялата повърхнина Φ. Това означава, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че за произволни две точки M_1 и M_2, за които $\rho(M_1, M_2)<\delta$, е вярно неравенството

$$|\mathbf{n}(M_2)-\mathbf{n}(M_1)|<\sqrt{2\varepsilon} \tag{5.8}$$

($\mathbf{n}$ е единичният вектор на нормалата).

Тъй като

$$\cos\gamma=(\mathbf{n}(M_1),\ \mathbf{n}(M_2)),$$

а числото

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\mathbf{n}(M_2)-\mathbf{n}(M_1)\right)^2=\frac{1}{2}\left|\mathbf{n}(M_2)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\mathbf{n}(M_1)\right|^2-$$

$$-(\mathbf{n}(M_1),\ \mathbf{n}(M_2))=1-\cos\gamma,$$

то

$$\cos\gamma=1-\alpha$$

и за α поради (5.8) са в сила неравенствата $0\leq\alpha<\frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon})^2=\varepsilon$. Лемата е доказана.

3. Лице на повърхнина. Нека Φ е повърхнина, определена от уравненията (5.1) и притежаваща отбелязаните по-горе пет свойства (гладка, без особени точки, ограничена, пълна, двустранна). С помощта на гладки криви да разбием Φ на краен брой гладки части Φ_i с размери, по-малки от δ, където δ е достатъчно малко (и се определя от условията на лема 2). Да означим с Δ максималния размер на частите Φ_i (диаметър на деление). Върху всяка част Φ_i да изберем произволна точка M_i и да проектираме Φ_i върху допирателната равнина в точката M_i. Нека σ_i е лицето на проекцията на Φ_i върху допирателната равнина. Да съставим сумата от лицата на проекциите на всички части

$$\sum_i \sigma_i. \tag{5.9}$$

Определение 1. *Числото σ се нарича граница на сумите* (5.9) *при $\Delta\to 0$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че за всички разбивания на Φ с гладки криви на краен брой части Φ_i, за които $\Delta<\delta$ независимо от избора на точките M_i върху частите Φ_i, е изпълнено неравенството*

$$\left|\sum_i \sigma_i-\sigma\right|<\varepsilon.$$

Определение 2. *Ако за повърхнината Φ съществува границата σ на сумите* (5.9) *при $\Delta\to 0$, то повърхнината Φ се нарича квадрируема, а числото σ се нарича лице на Φ.*

Забележка. Не може лицето на повърхнината да бъде получено, като се апроксимира повърхнината с вписани многостени при намаляване размерите на стените, като за лице се взема точната горна граница на лицата на вписаните многостени (както направихме при намиране на дължината на крива). Има класически пример на Шварц* (така нареченият «ботуш на Шварц»), показващ, че лицата на вписаните в цилиндрична повърхнина многостени нямат крайна точна горна граница.

Теорема 5.1. *Всяка гладка, ограничена, пълна, двустранна и без особени точки повърхнина Φ, определена с уравненията* (5.1), *е квадрируема и за лицето ѝ е в сила равенството*

$$\sigma=\iint_G \left|\left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right]\right| du\,dv. \tag{5.10}$$

Забележка. Формулата (5.10) е инвариантна относно избора на координатните оси.

Доказателство на теоремата. При условията на теоремата подинтегралната функция в (5.10) е непрекъсната в G и интегралът (5.10) съществува.

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$ и в зависимост от него да изберем $\delta>0$ така, че да са изпълнени двете условия: 1) всяка част Φ_i от повърхнината Φ с размери, по-малки от δ, еднозначно се проектира върху допирателната равнина в произволна точка на Φ_i; 2) косинусът на ъгъла γ между две нормали от всяка част Φ_i с размери, по-малки от δ, може да се представи във вида $\cos\gamma=1-\alpha_i$ където $\alpha_i<\frac{\varepsilon}{\sigma}$ и $\alpha_i\leq 1$ (σ е стойността на интеграла (5.10)).

Поради лема 2 и лема 3 такъв избор на $\delta>0$ е възможен.

Да разбием с помощта на гладки криви повърхнината Φ на части Φ_i с размери, по-малки от δ, и след като изберем във всяка от тях по една произволна точка M_i, да проектираме Φ_i върху допирателната равнина в точката M_i. Да означим със σ_i лицето на проекцията и да съставим сумата (5.9).

За да пресметнем лицето σ_i на плоска област, ще използуваме формулата за смяна на променливите при двойни интеграли.

* Г. А. Шварц — немски математик (1843—1921). По-подробно за примера на Шварц вж. края на т. 1, § 2, глава 5 на книгата на В. А. Илин и Е. Г. Позняк «Основы математического анализа. Часть 2».

то, тъй като за всички вектори **a** и **b** е в сила равенството $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 . |\mathbf{b}|^2$, получаваме, че

$$\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right| = ED - F^2, \tag{5.16}$$

и изразът за лицето на повърхнина (5.10) може да се запише и в следната форма:

$$\sigma = \iint_G \sqrt{ED - F^2}\, du\, dv. \tag{5.17}$$

Забележка 4. Лицето на повърхнина притежава свойството адитивност: ако повърхнината Φ е разделена от частично гладка крива на две части Φ_1 и Φ_2, които нямат общи вътрешни точки, то лицето на повърхнината Φ е равно на сумата от лицата на частите Φ_1 и Φ_2.

Това свойство следва от представянето на лицето на повърхнина с помощта на интеграл и от адитивността на интеграла.

§ 2. Повърхнинни интеграли

Нека Φ е гладка, двустранна, пълна, ограничена и без особени точки повърхнина, определена от уравненията (5.1) (или което е все същото, от (5.1*)) в областта G.

Нека върху Φ са дефинирани четири функции $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, всяка от които е непрекъсната (а следователно и равномерно непрекъсната) в множеството от точки на повърхнината Φ.

Да разделим повърхнината Φ с помощта на гладки или частично гладки криви на краен брой части Φ_i и да означим с Δ максималния размер на частите Φ_i (диаметър на деление на повърхнината). Да изберем от всяка част Φ_i по една произволна точка M_i.

Нека $\mathbf{n}(M_i)$ е единичната нормала в точката M_i, а $(\cos X_i, \cos Y_i, \cos Z_i)$ са координатите на тази единична нормала (или, както ги наричат, директорните косинуси). Да означим със σ_i лицето на частта Φ_i. Тогава, както е показано по-горе (вж. (5.17)),

$$\sigma_i = \iint_{G_i} \sqrt{ED - F^2}\, du\, dv,$$

където G_i е подобластта на G, образът на която е Φ_i.

Да съставим четирите суми

$$\sum\nolimits_1 = \sum_i f(M_i)\sigma_i, \tag{5.18^1}$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_i P(M_i) . \sigma_i . \cos X_i, \tag{5.18^2}$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_i Q(M_i) . \sigma_i . \cos Y_i, \tag{5.18^3}$$

$$\sum\nolimits_4 = \sum_i R(M_i) . \sigma_i . \cos Z_i. \tag{5.18^4}$$

Определение 1. *Числото I_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ се нарича граница на сумите $\sum_k$ при $\Delta \to 0$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такова, че при $\Delta < \delta$* (независимо от избора на точките $M_i \in \Phi_i$) *е изпълнено неравенството*

$$\left|\sum\nolimits_k - I_k\right| < \varepsilon.$$

Определение 2. *Ако съществува граница при $\Delta \to 0$ на сумите $\sum_1$, то тази граница се нарича повърхнинен интеграл от първи род от функцията $f(x, y, z)$ по повърхнината Φ и се означава със символа*

$$I_1 = \iint_\Phi f(M)\, d\sigma. \tag{5.19^1}$$

Определение 2*. *Ако съществуват граници при $\Delta \to 0$ на сумите $\sum_k$, където $k = 2, 3$ или 4, то тези граници се наричат повърхнинни интеграли от втори род и се означават съответно със символите*

$$I_2 = \iint_\Phi P(M) \cos X\, d\sigma, \tag{5.19^2}$$

$$I_3 = \iint_\Phi Q(M) \cos Y\, d\sigma, \tag{5.19^3}$$

$$I_4 = \iint_\Phi R(M) \cos Z\, d\sigma. \tag{5.19^4}$$

Сумата на последните три интеграла се нарича пълен повърхнинен интеграл от втори род. Този интеграл може да бъде записан във вида

$$\iint_\Phi (\mathbf{A}, \mathbf{n})\, d\sigma, \tag{5.19^5}$$

Следствие. Ако повърхнината Φ е зададена с уравнението $z=z(x, y)$ (т. е. $x=u$, $y=v$, $z=z(u, v)$), където $z(x, y)$ е непрекъснато диференцируема в областта G от равнината Oxy функция, след като изберем тази страна от повърхнината Φ, за която векторът на нормалата на повърхнината сключва остър ъгъл с оста Oz, можем да запишем формулата (5.20[4]) във вида

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z)\cos z\, d\sigma=\iint_{G} R(x, y, z(x, y))\, dx\, dy .$$

Наистина достатъчно е да вземем предвид равенствата

$$d\sigma=\sqrt{ED-F^2}\, dx\, dy, \quad ED-F^2=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

$$\cos z=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Това е причината за въвеждането на следното означение за повърхнинния интеграл от втори род:

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z)\cos Z\, d\sigma=\iint_{\Phi} R(x, y, z)\, dx\, dy. \tag{5.23}$$

Ще отбележим, че означението (5.23) се използва и в случая, когато Φ не е графика на функцията $z=z(x, y)$.

За пълния повърхнинен интеграл от втори род също се използва и следното означение:

$$\iint_{\Phi} (P\cos X+Q\cos Y+R\cos Z)\, d\sigma=$$

$$=\iint_{\Phi} P\, dy\, dz+Q\, dz\, dx+R\, dx\, dy.$$

Забележка. Понятието повърхнинен интеграл от първи и втори род естествено се разширява и в случая, когато повърхнината Φ е частично гладка. За такива повърхнини очевидно е вярна и доказаната в този параграф теорема за съществуване.

6. Теория на полето. Основни интегрални формули на анализа

В тази глава ще бъдат разгледани скаларните и векторните полета, а също така основните понятия и операции, свързани със скаларно и векторно поле. Особено важна за анализа формула е известната ни вече формула на Нютон—Лайбниц. В тази глава ще бъдат получени формулите на Грийн, Остроградски—Гаус и Стокс, които са обобщение на формулата на Нютон—Лайбниц в многомерния случай.

§ 1. Означения. Биортогонални базиси. Инварианти на линеен оператор

1. Означения. По-долу ще се налага често да записваме суми от известен брой събираеми. Да поясним означенията, които ще използваме. Ще имаме работа със системи величини, белязани с няколко индекса, например a_k^i. Обикновено в такива случаи единият индекс се пише долу, а другият — горе. Ако индексите се менят независимо, те се означават с различни букви. Ако индексите са много, те се означават с една буква с подиндекс. Например $\omega_{i_1\ldots i_p}$ или $\xi_1^{i_1}\ldots\xi_p^{i_p}$. В някои случаи за означаване на сумиране ще се използва символиката: $\sum_{\sigma} A(\sigma)$, където сумирането се извършва по някое множество от величини σ. Ако индексите на сумиране $i_1, i_2, \ldots, i_p$ се менят така, че $i_1<i_2<\ldots<i_p$, то ще пишем

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} B_{i_1 i_2\ldots i_p} .$$

Накрая да сключим следното съглашение за сумиране. Нека ни е даден израз, представляващ произведение. Ако в този израз се срещат два еднакви буквени индекса, от които единият е го-

рен, а другият — долен, то ще смятаме, че по тези индекси се извършва сумиране. При това индексите вземат последователно стойностите $1, 2, \ldots,$ а получените произведения се събират.

Например, ако $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то

$$a_i e^i = a_1 e^1 + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n,$$

$$a_{ij} e^i e^j = a_{1j} e^1 e^j + a_{2j} e^2 e^j + \cdots + a_{nj} e^n e^j =$$
$$= a_{11} e^1 e^1 + a_{12} e^1 e^2 + \cdots + a_{1n} e^1 e^n + a_{21} e^2 e^1 + a_{22} e^2 e^2 + \cdots +$$
$$+ a_{2n} e^2 e^n + \cdots + a_{n1} e^n e^1 + a_{n2} e^n e^2 + \cdots + a_{nn} e^n e^n.$$

При тези означения например разлагането на вектора **a** по базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ на пространството E^n се записва така:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i,$$

където a^i са коефициентите в разлагането на този вектор. Последният запис означава, че

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i.$$

Със символа δ_i^j ще означаваме величината, приемаща само две стойности:

$$\delta_i^i = 1, \quad \delta_i^j = 0 \quad \text{при } i \neq j;$$

δ_i^j е така наречения символ на Кронекер*.

Скаларното произведение на два вектора **a** и **b** в пространството E^n ще означаваме с $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

2. Биортогонални базиси в пространството E^n. Нека $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, е базис** в n-мерното пространство E^n. Очевидно $\mathbf{e}_i$ са линейно независими вектори.

Определение 1. Базисът e^j (индексът е горен), $j = 1, 2, \ldots, n$, се нарича биортогонален базис за базиса $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ако са в сила съотношенията

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Вярно е следното твърдение.

Твърдение. За всеки базис $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, на пространство-

* Л. Кронекер — немски математик (1823—1891).

** Векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуват базис в E^n, ако всеки вектор **a** от E^n се представя по единствен начин във вида

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a^n \mathbf{e}_n = a^i \mathbf{e}_i.$$

вото E_n съществува единствен биортогонален базис $\mathbf{e}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, т. е. такъв базис, че

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказателство. Да означим линейната обвивка (т. е. множеството от всички линейни комбинации) на векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ с M_i. Избираме от ортогоналното допълнение на M_i* вектор $\mathbf{e}^i$, нормиран с условието

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i) = 1.$$

Очевидно ще имаме

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Векторите $\mathbf{e}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, също образуват базис на пространството E^n. Наистина, ако това не е така, то би съществувал вектор от пространството, който се разлага неедзначно по системата $\mathbf{e}^j$, т. е. нулевият вектор би имал разлагане по базиса с коефициенти, които не са всичките равни на нула. Тогава някой вектор $\mathbf{e}^k$ от системата $\mathbf{e}^j$ ще принадлежи на линейната обвивка** M^k на векторите $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^{k-1}, \mathbf{e}^{k+1}, \ldots, \mathbf{e}^n$. Но това не е възможно, тъй като в този случай $\mathbf{e}^k$ би бил ортогонален на вектора $\mathbf{e}^k$ (поради $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^p) = 0$ при $k \neq p$). Но векторът $\mathbf{e}^k$ не може да бъде ортогонален на $\mathbf{e}_k$, понеже по построение $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^k) = 1$.

По такъв начин за произволен базис $\mathbf{e}_i$ е построен биортогонален базис $\mathbf{e}^j$, всички вектори на който се определят по единствен начин. Наистина, ако наред с $\mathbf{e}^j$ би съществувал още един биортогонален базис $\tilde{\mathbf{e}}^j$, то бихме имали $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j - \tilde{\mathbf{e}}^j) = 0$ за всички $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Оттук следва, че $\mathbf{e}^j = \tilde{\mathbf{e}}^j$. Действително, ако един вектор е ортогонален на всички вектори от даден базис, то той е ортогонален и на себе си, поради което той е нулевият вектор.

Твърдението е доказано.

Ще отбележим, че ако базисът $\mathbf{e}^i$ е ортонормиран, то биортогоналният му базис съвпада с него.

3. Смяна на базиси. Ковариантни и контравариантни координати на вектор. Често ще използваме преход от биортогонални базиси $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ към нови биортогонални базиси $\mathbf{e}_{i'}$, $\mathbf{e}^{i'}$.

Да запишем разлаганията на базисните вектори, използвайки нашето съглашение за сумиране:

* Т. е. от подпространството $E^n \ominus M_i$ — подпространството от всички вектори, ортогонални на M_i.

** Т. е. векторът $\mathbf{e}^k$ би бил линейна комбинация на векторите $\mathbf{e}^p$ с $p \neq k$.

(6.1) $$\mathbf{e}_{i'} = b^i_{i'}\,\mathbf{e}_i\,,\quad \mathbf{e}_i = b^{i'}_i\,\mathbf{e}_{i'}\,,\quad i, i' = 1, 2, \ldots, n,$$

(6.2) $$\mathbf{e}^{i'} = \tilde{b}^{i'}_i\,\mathbf{e}^i,\quad \mathbf{e}^i = \tilde{b}^i_{i'}\,\mathbf{e}^{i'}\,,\quad i, i' = 1, 2, \ldots, n.$$

Тук $(b^i_{i'})$ е матрицата на прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия $\mathbf{e}_{i'}$, а $(b^{i'}_i)$ — матрицата на обратния преход — от базиса $\mathbf{e}_{i'}$ към $\mathbf{e}_i$.

Аналогично матриците $(\tilde{b}^{i'}_i)$ и $(\tilde{b}^i_{i'})$ са матриците на правия и обратния преход от базиса $\mathbf{e}^i$ към базиса $\mathbf{e}^{i'}$.

Формулите (6.1) са формули за прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия $\mathbf{e}_{i'}$ и формули за обратния преход.

Формули (6.2) са формули за прехода от стария базис $\mathbf{e}^i$ към новия $\mathbf{e}^{i'}$ и формули за обратния преход.

Трансформациите (6.1) са взаимнообратни, поради което и матриците $(b^i_{i'})$ и $(b^{i'}_i)$ са обратни една на друга. Наистина да умножим първото от равенствата (6.1) скаларно с $\mathbf{e}^{j'}$, а второто от равенствата (6.1) — с $\mathbf{e}^j$. Използувайки биортогоналността на базисите, ще получим

$$\delta^{j'}_{i'} = b^j_{i'}\,(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{j'}),\quad \delta^j_i = b^{i'}_i\,(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^j).$$

Обаче, както това следва от същите формули (6.1),

(6.3) $$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{j'}) = b^{i'}_i\,\delta^{j'}_{i'} = b^{j'}_i,\quad (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^j) = b^j_{i'}\,\delta^j_i = b^j_{i'}.$$

По такъв начин

$$\delta^{j'}_{i'} = b^j_{i'}\,b^{j'}_i\,,\quad \delta^j_i = b^{i'}_i\,b^j_{i'}\,,$$

т. е. матриците $(b^i_{i'})$ и $(b^{i'}_i)$ са взаимнообратни.

Аналогично следва, че и матриците $(\tilde{b}^{i'}_i)$ и $(\tilde{b}^i_{i'})$ са взаимнообратни.

Вярно е следното твърдение за връзката между матриците $(b^i_{i'})$ и $(\tilde{b}^i_{i'})$, $(b^{i'}_i)$ и $(\tilde{b}^{i'}_i)$.

Твърдение. Матрицата $(b^i_{i'})$ съвпада с матрицата $(\tilde{b}^i_{i'})$; матрицата $(b^{i'}_i)$ съвпада с матрицата $(\tilde{b}^{i'}_i)$.

Доказателство. Очевидно поради взаимната обратност на матриците $(b^i_{i'})$ и $(b^{i'}_i)$ и на матриците $(\tilde{b}^i_{i'})$ и $(\tilde{b}^{i'}_i)$ е достатъчно да се докаже, че съвпадат $(b^i_{i'})$ и $(\tilde{b}^i_{i'})$.

От (6.3) получаваме, че

(6.4) $$b^i_{i'} = (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^i).$$

Аналогично с помощта на (6.2) ще получим, че

(6.4′) $$\tilde{b}^i_{i'} = (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^i).$$

Десните страни на равенствата (6.4) и (6.4′) са равни, поради което $b^i_{i'} = \tilde{b}^i_{i'}$, което и трябваше да се докаже.

Следствие. За прехода от базисите $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ към базисите $\mathbf{e}_{i'}$, $\mathbf{e}^{i'}$ е достатъчно да се знае само матрицата $(b^i_{i'})$ на прехода от базиса $\mathbf{e}_i$ към базиса $\mathbf{e}_{i'}$. (Матрицата $(b^{i'}_i)$ е обратна на $(b^i_{i'})$ и се пресмята от нея.)

По такъв начин стигаме до следните формули за смяна на базисите:

(6.5) $$\begin{aligned} \mathbf{e}_{i'} &= b^i_{i'}\,\mathbf{e}_i\,, & \mathbf{e}_i &= b^{i'}_i\,\mathbf{e}_{i'}\,, \\ \mathbf{e}^{i'} &= b^{i'}_i\,\mathbf{e}^i\,, & \mathbf{e}^i &= b^i_{i'}\,\mathbf{e}^{i'}\,. \end{aligned}$$

Да намерим сега формули за смяната на координатите на вектор при преход към нов базис. Отначало ще направим следните разсъждения.

Нека $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ са биортогонални базиси, а $\mathbf{a}$ — произволен вектор. Тогава, разлагайки вектора $\mathbf{a}$, ще получим

(6.6) $$\mathbf{a} = a^i\,\mathbf{e}_i\,,\quad \mathbf{a} = a_i\,\mathbf{e}^i\,.$$

Биортогоналният базис дава много удобен начин за пресмятане на коефициентите a^i и a_i в разлаганията (6.6). Наистина, умножавайки първото равенство скаларно с $\mathbf{e}^j$, а второто — с $\mathbf{e}_j$, получаваме

(6.7) $$a^j = (\mathbf{a}, \mathbf{e}^j)\,,\quad a_j = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)\,,\quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Следователно, като се вземат предвид равенствата (6.7), формулите (6.6) добиват вида

(6.8) $$\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}^i)\,\mathbf{e}_i\,,\quad \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}^i\,.$$

В частност, ако заместим вектора $\mathbf{a}$ в първото равенство (6.8) с вектора $\mathbf{e}^j$, а във второто равенство (6.8) с вектора $\mathbf{e}_j$, ще получим

(6.9) $$\begin{aligned} \mathbf{e}^j &= (\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i)\,\mathbf{e}_i = g^{ji}\mathbf{e}_i, \\ \mathbf{e}_j &= (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}^i = g_{ji}\,\mathbf{e}^i\,, \end{aligned}$$

където $g^{ji} = (\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i)$, $g_{ji} = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$.

Ако умножим първото от съотношенията (6.9) скаларно с $\mathbf{e}_k$, а второто — с $\mathbf{e}^k$, ще получим

$$g^{ji}\,g_{ik} = \delta^k_j\,,\quad g_{ji}\,g^{ik} = \delta^k_j\,,\quad j, k = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. матриците (g^{ji}) и (g_{ji}) са взаимнообратни и поради симетричността на скаларното произведение — симетрични.

Сега ще получим формули за смяната на координатите на

вектор при преход към нов базис. Ако $\mathbf{e}_i$ е старият базис, а $\mathbf{e}_{i'}$ — новият, $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}^{i'}$ — съответните биортогонални базиси и ако

$$\mathbf{a}=a_{i'}\,\mathbf{e}^{i'},$$

то, както знаем, от формулите (6.7) следва, че

$$a_{i'}=(\mathbf{a},\,\mathbf{e}_{i'}).$$

Замествайки в дясната част на това съотношение $\mathbf{e}_{i'}$ с израза за него от (6.5), ще получим

$$a_{i'}=(\mathbf{a},\,b^i_{i'}\,\mathbf{e}_i)=b^i_{i'}\,(\mathbf{a},\,\mathbf{e}_i)=b^i_{i'}\,a_i\,.$$

И така координатите $a_{i'}$ на вектора $\mathbf{a}$ в разлагането му по базиса $\mathbf{e}^{i'}$ (биортогонален към новия базис $\mathbf{e}_{i'}$) при прехода към този нов базис $\mathbf{e}^{i'}$ имат вида

$$a_{i'}=b^i_{i'}\,a_i\,, \tag{6.10}$$

тук $(b^i_{i'})$ е матрицата на прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия базис $\mathbf{e}_{i'}$, a_i са координатите на вектора $\mathbf{a}$ в разлагането му по биортогоналния базис $\mathbf{e}^i$:

$$\mathbf{a}=a_i\,\mathbf{e}^i\,.$$

По такъв начин координатите a_i при прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия $\mathbf{e}_{i'}$ се преобразуват с помощта на матрицата $(b^i_{i'})$ на прехода от стария базис към новия по формулата (6.10).

Ето защо казваме, че координатите a_i се преобразуват «съгласувано», и наричаме тези координати ковариантни (което означава съгласувано изменящи се) координати на вектора $\mathbf{a}$.

Ако сега съгласно формули (6.7) запишем, че

$$a^{i'}=(\mathbf{a},\,\mathbf{e}^{i'})$$

и заместим $\mathbf{e}^{i'}$ с израза му от (6.5), ще получим

$$a^{i'}=(\mathbf{a},\,b^{i'}_i\,\mathbf{e}^i)=b^{i'}_i\,(\mathbf{a},\,\mathbf{e}^i)=b^{i'}_i\,a^i. \tag{6.11}$$

От формула (6.11) виждаме, че при прехода към новия базис координатите a^i в разлагането на вектора $\mathbf{a}$ по стария базис $\mathbf{e}_i$ $(\mathbf{a}=a^i\,\mathbf{e}_i)$ се преобразуват с помощта на матрицата $(b^{i'}_i)$ на прехода от новия базис към стария.

Затова казваме, че координатите $\mathbf{a}^i$ се преобразуват «несъгласувано» и наричаме тези координати контравариантни (което означава противоположно изменящи се) координати на вектора $\mathbf{a}$.

4. Инварианти на линеен оператор. Дивергенция и ротор. Навсякъде по-нататък ще предполагаме, че се разглежда тримерното пространство E^3. Да разгледаме произволен линеен оператор A

в това пространство. Ще припомним, че операторът A се нарича линеен, ако за всеки два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и за всеки две реални числа λ и μ е в сила равенството

$$A\,(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda A\mathbf{a}+\mu A\mathbf{b}.$$

Нека $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ са биортогонални базиси в E^3. По-долу ще имаме нужда от две равенства, които са в сила за произволен линеен оператор A:

1) $\quad (\mathbf{e}_i\,,\ A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}^i,\ A\mathbf{e}_i)^*,$

2) $\quad \mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i=\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i$

(с $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ е означено векторното произведение на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

Да докажем тези съотношения. Съгласно формули (6.9) имаме $\mathbf{e}^i=g^{ik}\,\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_i=g_{ip}\,\mathbf{e}^p$. Поради това $(\mathbf{e}_i,\,A\mathbf{e}^i)=(g_{ip}\,\mathbf{e}^p,\ Ag^{ik}\,\mathbf{e}_k)=$

$$=g_{ip}g^{ik}\,(\mathbf{e}^p,\,A\mathbf{e}_k)=\delta^k_p\,(\mathbf{e}^p,\ A\mathbf{e}_k)=(\mathbf{e}^k,\ A\mathbf{e}_k)=(\mathbf{e}^i,\ A\mathbf{e}_i).$$

Тук използувахме това, че матриците (g_{ip}) и (g^{ik}) са взаимнообратни и симетрични.

Съотношение 1) е доказано. Ще преминем към доказателството на 2). Използувайки същите равенства за $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}_i$ и свойствата на матриците (g_{ip}) и (g^{ik}), имаме

$$\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i=g_{ip}\,\mathbf{e}^p\times Ag^{ik}\,\mathbf{e}_k=g_{ip}\,.\,g^{ik}\mathbf{e}^p\times A\mathbf{e}_k=$$

$$=\delta^k_p\,\mathbf{e}^p\times A\mathbf{e}_k=\mathbf{e}^k\times A\mathbf{e}_k=\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i\,.$$

Един израз се нарича инвариант (инвариантен), ако не се изменя при смяна на базиса на пространството. Например инвариантти са скаларното произведение на два вектора, стойността на скаларна функция в дадена точка от пространството.

Сега ще изучим някои инварианти, свързани с даден оператор A. Нека $\mathbf{e}_i$ е базис в пространството E^3, а $\mathbf{e}^i$ — биортогоналният му базис.

Твърдение. Величината $(\mathbf{e}_i\,,\ A\mathbf{e}^i)$ (или което е същото $(\mathbf{e}^i,\ A\mathbf{e}_i)$) е инвариант.

Доказателство. Трябва да се докаже, че при преминаване към друг базис $\mathbf{e}_{i'}$ (с биортогонален базис $\mathbf{e}^{i'}$) ще бъде изпълнено равенството

$$(\mathbf{e}_i\,,\ A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}_{i'}\,,\ A\mathbf{e}^{i'}).$$

Да запишем, използувайки формули (6.5),

$$\mathbf{e}_i=b^{i'}_i\,\mathbf{e}_{i'}\,,\ \ \mathbf{e}^i=b^i_{p'}\mathbf{e}^{p'}\,,$$

* Да напомним, че ако в множителите на даден израз се срещат повтарящи се индекси, единият от които е горен, а другият — долен, то по тези индекси се извършва сумиране.

където $(b_i^{i'})$ е матрицата на прехода от базиса $\mathbf{e}_{i'}$ към базиса $\mathbf{e}_i$, а $(b_{p'}^i)$ е обратната ѝ.

Следователно можем да запишем

$$(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)=b_i^{i'}\cdot b_{p'}^i(\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{p'})=$$
$$=\delta_{p'}^{i'}(\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{p'})=(\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{i'}).$$

Доказателството на твърдението получаваме, като сравним първия и последния член в тази верига от равенства.

Определение 2. Инвариантът $(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)$ (или $(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)$) на линейния оператор A се нарича дивергенция на този оператор и се бележи с $\operatorname{div} A$.

Следователно

$$\operatorname{div} A=(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i).$$

Забележка 1. Всеки линеен оператор може да бъде зададен еднозначно относно даден базис с помощта на матрица, наречена матрица на линейния оператор. Затова очевидно е достатъчно да се зададе операторът в базисните вектори, т. е. да се зададат векторите $A\mathbf{e}_i$. Разлагайки тези вектори по базиса $\mathbf{e}_j$, получаваме

$$A\mathbf{e}_i=a_i^k\mathbf{e}_k, \quad (\mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_i)=a_i^k(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k)=a_i^j. \tag{6.12}$$

Матрицата (a_i^k) е точно матрицата на линейния оператор A относно базиса $\mathbf{e}_i$.

Дивергенцията на оператора A може сега да се изрази чрез елементите на матрицата (a_i^k):

$$\operatorname{div} A=(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)=a_1^1+a_2^2+a_3^3.$$

Забележка 2. В линейната алгебра сумата от диагоналните елементи $a_1^1+a_2^2+a_3^3$ се нарича следа на оператора A. Припомняме, че уравнението за собствените стойности на оператора A има вида

$$\det(\lambda E-A)=\lambda^3-(a_1^1+a_2^2+a_3^3)\lambda^2+\ldots=0.$$

От формулите на Виет получаваме

$$a_1^1+a_2^2+a_3^3=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,$$

където λ_1, λ_2, λ_3 са всички собствени стойности на оператора A. Тъй като собствените стойности на един оператор не зависят от избора на координатната система, получаваме ново доказателство за инвариантността на дивергенцията.

Ще въведем и един векторен инвариант.

Твърдение. Величината $\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i$ (или което е същото $\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i$) е инвариант.

Доказателство. Нека $\mathbf{e}_{i'}$ е новият базис ($\mathbf{e}^{i'}$ — биортогоналният базис на $\mathbf{e}_{i'}$). Да запишем съгласно формули (6.5)

$$\mathbf{e}_i=b_i^{i'}\mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}^i=b_{p'}^i\mathbf{e}^{p'}.$$

Да заместим тези величини в израза $\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i$. Получаваме

$$\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i=b_i^{i'}\cdot b_{p'}^i\mathbf{e}_{i'}\times A\mathbf{e}^{p'}=\delta_{p'}^{i'}\mathbf{e}_{i'}\times A\mathbf{e}^{p'}=$$
$$=\mathbf{e}_{i'}\times A\mathbf{e}^{i'}.$$

Следователно инвариантността на величината $\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i$ е доказана.

Ще дадем следното определение.

Определение 3. Инвариантът $\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i$ (или $\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i$) на линейния оператор A се нарича ротор на този оператор и се означава с $\operatorname{rot} A$.

Така

$$\operatorname{rot} A=\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i=\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_1\times A\mathbf{e}^1+\mathbf{e}_2\times A\mathbf{e}^2+$$
$$+\mathbf{e}_3\times A\mathbf{e}^3=\mathbf{e}^1\times A\mathbf{e}_1+\mathbf{e}^2\times A\mathbf{e}_2+\mathbf{e}^3\times A\mathbf{e}_3.$$

5. Изрази за дивергенцията и ротора на линеен оператор относно ортонормиран базис. Нека в пространството E^3 е избран ортонормиран базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. В този случай, както вече отбелязахме, биортогоналният базис на избрания съвпада с него (вж. т. 2).

Съгласно формули (6.12) получаваме

$$\begin{aligned} &a_1^1=(\mathbf{i}, A\mathbf{i}), \ a_2^1=(\mathbf{i}, A\mathbf{j}), \ a_3^1=(\mathbf{i}, A\mathbf{k}),\\ &a_1^2=(\mathbf{j}, A\mathbf{i}), \ a_2^2=(\mathbf{j}, A\mathbf{j}), \ a_3^2=(\mathbf{j}, A\mathbf{k}),\\ &a_1^3=(\mathbf{k}, A\mathbf{i}), \ a_2^3=(\mathbf{k}, A\mathbf{j}), \ a_3^3=(\mathbf{k}, A\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Поради това

$$\operatorname{div} A=a_1^1+a_2^2+a_3^3=(\mathbf{i}, A\mathbf{i})+(\mathbf{j}, A\mathbf{j})+(\mathbf{k}, A\mathbf{k}). \tag{6.14}$$

Да намерим израз за $\operatorname{rot} A$. Имаме

$$\operatorname{rot} A=\mathbf{i}\times A\mathbf{i}+\mathbf{j}\times A\mathbf{j}+\mathbf{k}\times A\mathbf{k}.$$

Остава да пресметнем чрез елементите на матрицата на оператора векторните произведения в събираемите отдясно. По формула (6.12) ще запишем

$$A\mathbf{i}=a_1^1\mathbf{i}+a_1^2\mathbf{j}+a_1^3\mathbf{k}.$$

Ето защо

$$\mathbf{i}\times A\mathbf{i}=a_1^1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_1^2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_1^3\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-a_1^3\mathbf{j}+a_1^2\mathbf{k}.$$

Аналогично

$$\mathbf{j}\times A\mathbf{j}=a_2^3\mathbf{i}-a_2^1\mathbf{k},\quad \mathbf{k}\times A\mathbf{k}=-a_3^2\mathbf{i}+a_3^1\mathbf{j}.$$

Поради това

$$\operatorname{rot} A=(a_2^3-a_3^2)\mathbf{i}+(a_3^1-a_1^3)\mathbf{j}+(a_1^2-a_2^1)\mathbf{k}. \tag{6.15}$$

§ 2. Скаларни и векторни полета. Диференциални оператори на векторния анализ

1. Скаларни и векторни полета. В теорията на полето се разглеждат функции, които на всяка точка M от фиксирана област D съпоставят един специален обект $a(M)$, наречен тензор. В този случай казваме, че в областта D е зададено тензорно поле. Ще изучаваме само два най-прости случая на тензорно поле, а именно — скаларно и векторно поле.

Ще казваме, че в областта D е зададено скаларно поле, ако на всяка точка M от тази област по някакъв закон е съпоставено определено число $u(M)$, т. е. понятията скаларно поле и скаларна функция, дефинирана в областта D, съвпадат.

Аналогично казваме, че в областта D е зададено векторно поле, ако на всяка точка от M от тази област е съпоставен по някакъв закон вектор $\mathbf{a}(M)$, т. е. понятията векторно поле и векторна функция, дефинирана в бластта D, съвпадат.

Нека например $\mathbf{E}(M)$ е векторът напрежение на електричното поле, породено от единичен отрицателен товар, разположен в началото на координатната система на тримерното пространство E^3. Тогава в точката $M(x, y, z)$ векторът $\mathbf{E}(M)$ има, както е известно, дължина $1/\rho^2$, където $\rho=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, и е насочен от точката към началото на координатната система. Ето защо формулата, задаваща векторното поле $\mathbf{E}(M)$, е

$$\mathbf{E}(M)=\left(-\frac{x}{\rho^3}, -\frac{y}{\rho^3}, -\frac{z}{\rho^3}\right).$$

Други примери на векторни полета са полето на температурите във вътрешността на нагрято тяло, полето на скоростите на стационарен флуиден поток и др.

Ще приведем още примери на скаларни и векторни полета, които играят важна роля в анализа и физиката. За целта ще трябва да изучим понятието диференцируемост на скаларно и векторно поле.

Понеже скаларното поле представлява числова функция, зададена в област D, понятието диференцируемост на скаларното поле (на тази числова функция) ни е вече известно (вж. определение т. 2, § 4, глава 12, част I).

Ще припомним това определение, заменяйки думата «функция» с думите «скаларно поле». Нека в областта D на E^3 е зададено скаларното поле $u=f(x, y, z)$.

Определение 1. Скаларното поле $u=f(x, y, z)=f(M)$ се нарича диференцируемо в дадена точка $M(x, y, z)$ на областта D, ако пълното нарастване $\Delta u(M)$ в тази точка може да се представи във вида

$$\Delta u(M)=A_1\Delta x+A_2\Delta y+A_3\Delta z+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y+\alpha_3\Delta z,$$

където A_1, A_2, A_3 са числа, независещи от Δx, Δy, Δz, а α_1, α_2, α_3 са безкрайно малки функции при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$, равни на нула при $\Delta x=0$, $\Delta y=0$, $\Delta z=0$.

Условието за диференцируемост на скаларното поле $u=f(x, y, z)$, както е показано на същото място в част I, може да се запише във вида

$$\Delta u(M)=A_1\Delta x+A_2\Delta y+A_3\Delta z+o(\rho),$$

където $\rho=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2}$, като това представяне е единствено.

Тази формула може да се запише в по-компактна форма:

$$\Delta u(M)=(A, \mathbf{h})+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.16}$$

където $(A, \mathbf{h})$ е скаларното произведение на векторите

$$A=(A_1, A_2, A_3),\quad \mathbf{h}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z),\quad \|\mathbf{h}\|=\rho.$$

Следователно горното определение може да се запише и така:

Определение 1′. Скаларното поле $u(M)$ е диференцируемо в точката M, ако в тази точка за пълното нарастване е вярно съотношението

$$\Delta u(M)=(A, \mathbf{h})+o(\|\mathbf{h}\|).$$

Скаларното поле $u(M)$ е диференцируемо в областта D, ако то е диференцируемо във всяка точка на тази област.

Ще припомним, че (вж. т. 8, § 4, глава 12, част I) условието за диференцируемост (6.16) може да се запише във вида

$$\Delta u(M)=(\operatorname{grad} u, \mathbf{h})+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.17}$$

където векторът $\operatorname{grad} u(M)=\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)$.

Формула (6.17) ни дава още един пример на векторно поле, а именно градиента на диференцируемо в областта D скаларно поле $u(M)$. Определението на градиента не зависи от избора на координатната система и поради това представлява инвариант.

Съгласно разглежданията в т. 8, § 4, глава 12, част I в случая на диференцируемо поле $u(M)$ може да се въведе производна на $u(M)$ по посока на вектор $\mathbf{e}$:

$$\frac{\partial u}{\partial e}=(\mathbf{e}, \operatorname{grad} u). \tag{6.18}$$

Производната по посока очевидно задава някакво ново скаларно поле в областта D.

Понятието градиент дължи появата си на бял свят на изтъкнатия физик Джеймс Клерк Максуел* и произлиза от латинската дума gradior, означаваща «раста». Както знаем от част I, главното свойство на градиента е, че той определя посоката на най-бързото спускане. Максуел възнамерявал отначало да нарече този вектор slope — «наклон». Уилям Роуен Хамилтън** създал за този вектор специално означение ∇ — обърнатата гръцка буква Δ (делта). И така, ако $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ е фиксиран ортонормиран базис, то

$$\operatorname{grad} u=\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Отначало и наименованието на знака ∇ било «атлед» — прочетена отзад напред думата делта. По-късно английските учени (О. Хевисайд, Р. Смит) започнали по-често да употребяват думата «набла», която и влязла трайно в литературата. Знакът ∇ бил наречен набла поради сходството му с рамката на древноасирийския музикален инструмент набла. Набла е много удобно означение във физиката — много формули силно се опростяват при неговото използуване. Самият Максуел посветил на означението набла специална ода в осем части.

Да преминем към изучаването на диференцируемото векторно поле. Понятието диференцируемост на векторно поле се определя в пълна аналогия с понятието диференцируемост на скаларно поле и това понятие беше дадено още в допълнението 2 към глава 12, част I.

Нека в областта D на пространството E^3 е зададено векторното поле $\mathbf{a}(M)$ (векторната функция $\mathbf{a}(M)$ на точките M, принадлежащи на D). Ще поясним, че $\mathbf{a}(M)$ на всяка точка $M(x, y, z)$ съпоставя вектор $\mathbf{a}(M)$.

Формулираме следното определение.

Определение 2. Векторното поле $\mathbf{a}(M)$ се нарича диференцируемо в точката M на областта D, ако пълното нарастване $\Delta\mathbf{a}(M)$ се представя във вида

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.19}$$

където A е линеен оператор в E^3:

$$\mathbf{h}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z),\ \|\mathbf{h}\|=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2},$$

а $o(\|\mathbf{h}\|)$ — вектор, дължината на който клони към нула при $\|\mathbf{h}\|\to 0$.

Ако векторното поле е диференцируемо, то представянето (6.19) е единствено.

Наистина (вж. и допълнение 2 към глава 12, част I), ако съществуват две представяния от вида (6.19), т. е.

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o_1(\|\mathbf{h}\|),\ \Delta\mathbf{a}(M)=B\mathbf{h}+o_2(\|\mathbf{h}\|),$$

то

$$(A-B)\mathbf{h}=o(\|\mathbf{h}\|),$$

където $o(\|\mathbf{h}\|)=o_1(\|\mathbf{h}\|)-o_2(\|\mathbf{h}\|)$.

Разделяйки на $\|h\|$ двете части на полученото равенство, получаваме

$$(A-B)\mathbf{e}=\frac{o(\|\mathbf{h}\|)}{\|\mathbf{h}\|},$$

където $\mathbf{e}=\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ е вектор с дължина единица. Отдясно стои безкрайно малък вектор (неговата дължина клони към нула при $\|\mathbf{h}\|\to 0$), и следователно за произволен единичен вектор $\mathbf{e}$ величината в лявата страна е равна на нула:

$$(A-B)\mathbf{e}=0.$$

Но щом два линейни оператора A и B съвпадат върху единичната сфера, то те са равни очевидно за произволен вектор, т. е. те съвпадат навсякъде. Следователно $A=B$.

Също както в случая на скаларно поле, векторното поле е диференцируемо в областта D, ако то е диференцируемо във всяка точка на областта D.

Както и при скаларното поле, възниква въпросът за дефиниране на производна по посока за векторно поле $\mathbf{a}(M)$.

Нека M е точка от областта D, $\mathbf{e}$ — единичен вектор с координати $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, определящ някаква посока.

Нека M' е произволна точка от D, различна от M и такава, че векторът $\overline{MM'}$ е колинеарен с вектора $\mathbf{e}$. Да означим разстоянието между M и M' с ρ.

* Д. К. Максуел — шотландски физик, създател на математическата теория на електромагнитното поле (1831—1879).

** У. Р. Хамилтън — ирландски математик и механик (1805—1865).

Определение 3. Производна по посоката $\mathbf{e}$ на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в точката M се нарича границата на отношението

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}(M)}{\rho}=\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}$$

(когато тази граница съществува).

Тук $\Delta\mathbf{a}(M)=\mathbf{a}(M')-\mathbf{a}(M)$.

Ще докажем следното твърдение.

Твърдение. Нека $\mathbf{a}(M)$ е диференцируемо векторно поле, а A — линейният оператор, определен от съотношението за диференцируемост (т. е. от съотношението $\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|)$). Тогава производната $\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}$ на полето в точка M по произволна посока $\mathbf{e}$ съществува и се определя с равенството

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}=A\mathbf{e}. \tag{6.20}$$

Интересно е да сравним тази формула с формула (6.18). Във формула (6.18) вдясно стои също резултатът от прилагането на оператора $A=(A_1, A_2, A_3)$ към вектора $\mathbf{e}$. Резултатът от това прилагане е точно скаларното произведение на градиента на полето и вектора $\mathbf{e}$.

Доказателство. Нека $\mathbf{e}$ е фиксиран вектор. Избираме точката M' така, че $\mathbf{h}=\rho\mathbf{e}$. Тогава съгласно (6.19) получаваме

$$\Delta\mathbf{a}(M)=\rho A\mathbf{e}+o(\|\mathbf{h}\|).$$

Понеже $\|\mathbf{h}\|=\rho$, то

$$\frac{\Delta\mathbf{a}(M)}{\rho}=A\mathbf{e}+\frac{o(\rho)}{\rho}.$$

Извършвайки граничен преход при $\rho\to 0$ в това съотношение, получаваме формула (6.20), т. е. това, което трябваше да докажем.

Да се върнем отново към разглеждане на формула (6.19):

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|).$$

Тук A е линеен оператор, приложен към вектора $\mathbf{h}$ от E^3. Както знаем, относно фиксиран базис всеки линеен оператор се определя от своята матрица. Да намерим матрицата на линейния оператор A относно ортонормирания базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, с който е свързана правоъгълната декартова координатна система $Oxyz$. Нека векторът $\mathbf{a}(M)$ има относно този базис координати P, Q, R. Съгласно формули (6.20)

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{i}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}=A\mathbf{i},\quad \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{j}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}=A\mathbf{j},\quad \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{k}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}=A\mathbf{k}. \tag{6.21}$$

Елементите на матрицата $\mathring{A}$ на оператора A пресмятаме по формули (6.13):

$$\mathring{A}=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z}\\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z}\end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

2. Дивергенция, ротор и производна по посока на векторно поле. Нека $\mathbf{a}(M)$ е векторно поле, диференцируемо в областта D. Тогава съгласно (6.19)

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.19}$$

където A е линеен оператор, зависещ от точката M, векторът $\mathbf{h}$ е нарастването на аргумента на $\mathbf{a}(M)$, а $o(\|\mathbf{h}\|)$ — вектор, клонящ към нула при $\|\mathbf{h}\|\to 0$.

Определение 4. Дивергенция на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в точката M се нарича дивергенцията на линейния оператор A от условието за диференцируемост (6.19):

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\operatorname{div}A.$$

Определение 5. Ротор на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в точката M наричаме ротора на линейния оператор A от условието за диференцируемост (6.19):

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)=\operatorname{rot}A.$$

Ще отбележим, че $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ са дефинирани във всяка точка M от областта D. Тези величини са инвариантни по определение, т. е. не зависят от избора на базиса. Ето защо $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ представлява скаларно поле, а $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ — векторно поле.

Да изберем ортонормиран базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и да означим с $Oxyz$ свързаната с него ортогонална декартова координатна система. Нека координатите на полето $\mathbf{a}(M)$ относно базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ са P, Q, R.

Матрицата на оператора A относно този базис е вече намерена (вж. формула (6.22)). Понеже $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\operatorname{div}A$, по формула (6.14) веднага получаваме

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{a}(M)&=(\mathbf{i}, A\mathbf{i})+(\mathbf{j}, A\mathbf{j})+(\mathbf{k}, A\mathbf{k})=\\ &=a_1^1+a_2^2+a_3^3=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=(\nabla, \mathbf{a}(M)),\end{aligned} \tag{6.23}$$

където

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{a}(M) = \mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

По-нататък поради $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \operatorname{rot} A$ чрез формули (6.16) и (6.22) получаваме

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

(6.24)

$$= \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Последната детерминанта представлява удобен за запомняне символичен запис на ротора.

Да пресметнем производната на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ по посоката $\mathbf{e}$. Ще се възползуваме от формула (6.20):

$$\frac{\partial \mathbf{a}(M)}{\partial \mathbf{e}} = A\mathbf{e}.$$

Понеже единичният вектор $\mathbf{e}$ има координати $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то

$$\frac{\partial \mathbf{a}(M)}{\partial \mathbf{e}} = A\mathbf{e} = A(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma) =$$

$$= \cos\alpha A\mathbf{i} + \cos\beta A\mathbf{j} + \cos\gamma A\mathbf{k}.$$

По-нататък по формули (6.21)

$$A\mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}, \quad A\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}, \quad A\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z},$$

поради което

$$\frac{\partial \mathbf{a}(M)}{\partial \mathbf{e}} = \cos\alpha\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}.$$

Като вземем предвид, че $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, можем да напишем и следния израз за производната по посока

$$\frac{\partial \mathbf{a}(M)}{\partial \mathbf{e}} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{k}.$$

3. Някои други формули на векторния анализ. Да предположим, че в областта D са зададени скаларното поле $u(M)$ и векторното поле $\mathbf{a}(M)$, като всички частни производни от втори ред на функциите $u(M)$ и $a(M)$ са непрекъснати в областта D. Тогава векторното поле $\operatorname{grad} u$ е диференцируемо, а $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ е диференцируемо скаларно поле; $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ е диференцируемо векторно поле. Следователно диференциалните оператори grad, div, rot могат да се приложат още веднъж и имат смисъл следните операции:

$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$,

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

Нека $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ е фиксиран ортонормиран базис, а $Oxyz$ е свързаната с него правоъгълна декартова координатна система.

Твърдение. В сила са следните съотношения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u = 0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\mathbf{k},$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla(\nabla \times \mathbf{a}) = 0,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a},$$

където

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Доказателство. Всичките формули се доказват по обща схема: последователно се прилагат към скаларното или векторното поле съответните диференциални оператори. Да докажем например първото равенство. Векторът $\operatorname{grad} u = \nabla u$ има координати $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, поради което за $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \operatorname{grad} u$ получаваме по формули (6.24) израза

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k} = 0.$$

Да докажем второто съотношение (вж. формула (6.23)):

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u.$$

Символът Δ (делта) има специално име — оператор на Лаплас*. По такъв начин символно можем да запишем $\Delta=\nabla^2$.

Ще докажем и третото съотношение, предоставяйки доказателството на останалите две равенства на читателя. Да запишем

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}=\nabla(\nabla,\mathbf{a})=\nabla\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=\nabla\mathbf{b},$$

където

$$\mathbf{b}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

По-нататък

$$\nabla\mathbf{b}=\frac{\partial b}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial b}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial b}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

и замествайки $\mathbf{b}$ с неговия израз, получаваме дясната страна на третото съотношение. Твърдението е доказано.

Забележка. Както вече нееднократно отбелязахме, величините $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} u$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ са инвариантни. Тогава са инвариантни и величините $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Следователно относно всяка ортогонална координатна система имаме например

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u=0,\quad \operatorname{div}\operatorname{grad} u=\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0.$$

4. Заключителни забележки. Да обсъдим физическия смисъл на разгледаните понятия дивергенция и ротор. Дивергенцията на векторна функция $\operatorname{div}\mathbf{a}=(\nabla,\mathbf{a})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ се определя от скоростта на изменение на всички компоненти на вектора в «собственото» им направление. Ако векторното поле описва флуиден поток, то положителност на дивергенцията ($\operatorname{div}\mathbf{a}>0$) в дадена точка означава, че от тази точка изтича повече течност, отколкото се влива в нея. Казваме, че такава точка представлява извор. Ако $\operatorname{div}\mathbf{a}<0$, то наблюдаваме обратния баланс и точката представлява бездна, т. е. в нея се влива повече, отколкото изтича. Ако $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$, то съществува баланс — влива се толкова течност, колкото и изтича.

Величината ротор на векторно поле

* П. С. Лаплас — изтъкнат френски астроном, математик и физик (1749—1827).

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=\nabla\times\mathbf{a}=\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

се нарича още вихър. Това название е свързано с това, че той като че «смесва» производните и компонентите. Той като че «следи» как се изменят компонентите на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в «чуждите» направления. По такъв начин ротор представлява мярка на «въртенето» на векторното поле. Впрочем, ако $\mathbf{v}$ е линейна скорост, то векторът $\boldsymbol{\omega}$ на ъгловата скорост на въртене е $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}$. Този вектор е насочен по оста на въртене. Оттук е дошло и названието ротор.

В заключение ще приведем системата от уравнения на Максуел за електромагнитното поле във вакуум.

$$1.\ \operatorname{div}E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\qquad 2.\ \operatorname{div}B=0.$$

$$3.\ \operatorname{rot}E=-\frac{\partial B}{\partial t}\cdot\qquad 4.\ \operatorname{rot}B=\frac{j}{\varepsilon_0 c^2}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial E}{\partial t}\cdot$$

Тук $\rho(M,t)$ е плътността на електрическия товар (количеството на товара в единица обем), $\mathbf{j}(M,t)$ е векторът плътност на електричния ток (скоростта на протичане на товара през единично сечение), $E(M,t)$ и $B(M,t)$ са съответно векторите напрежение на електричното и магнитното поле, ε_0 и $\mathbf{e}$ са размерни константи, а c — скоростта на светлината във вакуум.

§ 3. Основни интегрални формули на анализа

В този параграф ще бъдат доказани основните интегрални формули на анализа — формулата на Грийн*, формулата на Остроградски—Гаус** и формулата на Стокс***. Тези формули представляват, от една страна, отиващи далече обобщения на формулата на Нютон—Лайбниц — основната формула на интегралното

* Дж. Грийн — английски математик (1793—1841).
** М. В. Остроградски — руски математик (1801—1861).
К. Ф. Гаус — немски математик (1777—1855).
*** Дж. Г. Стокс — английски физик и математик (1819—1903).

смятане, а, от друга — особено важни формули на математическия анализ и математическата физика.

1. Формула на Грийн. Нека π е равнина в пространството E^3, $\mathbf{k}$ — единичен нормален вектор към π, а D — едносвързана област в π (ще напомним, че областта D се нарича едносвързана, ако всяка частично гладка затворена крива без самопресичания, разположена в D, огражда област, всичките точки на която принадлежат на D). Нека областта D удовлетворява следните две условия:

1) границата C на областта D представлява затворена частично гладка крива без особени точки;

2) в равнината π може да се избере такава правоъгълна декартова координатна система, че всички прави, успоредни на координатните оси, пресичат C в не повече от две точки.

Нека накрая $\mathbf{t}$ е единичният вектор, допирателен към кривата C, съгласуван с $\mathbf{k}$, т. е. положителната посока на обхождане на кривата C съвпада в приложната точка на вектора $\mathbf{t}$ с посоката на този вектор, и ако гледаме от края на нормалата $\mathbf{k}$, контурът C е положително ориентиран (обхождането му се осъществява в посока, обратна на часовниковата стрелка). Казваме, че ориентацията на кривата C е съгласувана с нормалата «по правилото на тирбушона».

В сила е следната теорема.

Теорема 6.1 (формула на Грийн). Нека $\mathbf{a}$ е векторно поле, диференцируемо в областта D, удовлетворяваща условията 1), 2), и нека производната на $\mathbf{a}$ по всяка посока е непрекъсната в обединението $D \cup C = \overline{D}$. Тогава е вярна формулата

$$\iint_D (\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a})\, d\sigma = \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl. \tag{6.25}$$

Интегралът отдясно обикновено се нарича циркулация на векторното поле $\mathbf{a}$ по кривата C, а този отляво — поток на векторното поле $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ през областта D.

Дадената формула допуска следната физическа трактовка: потокът на векторното поле $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ през областта D (потокът топлина, течност и др.) е равен на циркулацията на векторното поле $\mathbf{a}$ по затворения контур C (на работата на силите на полето $\mathbf{a}$ за преместване на точката по C).

Доказателство. Тъй като всички влизащи във формула (6.25) функции са непрекъснати, то двата интеграла съществуват.

Ще отбележим също така, че интегралите в лявата и дясната страна на формула (6.25) са инвариантни относно избора на правоъгълна координатна система, понеже величините $(\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$

са инвариантни, елементарните лице $d\sigma$ и дължина на дъгата dl не зависят от избора на декартовата координатна система.

Ще изберем ортогонална декартова координатна система $Oxyz$ така, че да е изпълнено условие 2) и оста Oz да е насочена в посоката на $\mathbf{k}$. Понеже векторното поле $\mathbf{a} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} + R(x, y)\,\mathbf{k}$ е равнинно, то $R(x, y) \equiv 0$,

$\mathbf{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\cos\alpha, \cos\beta, 0) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$.

Следователно можем да запишем, че

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$
$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

По-нататък

$$(\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{t}) = P\cos\alpha + Q\sin\alpha.$$

Понеже за области в равнината $d\sigma = dxdy$, то формула (6.25) добива вида

$$\iint_D (\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a})\, d\sigma = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{6.25'}$$

$$\oint_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\, dl = \oint_C P dx + Q dy.$$

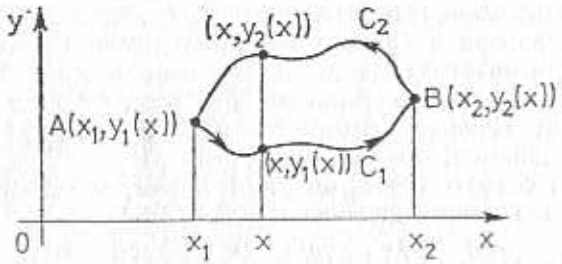
(Тук използувахме, че $dx = \cos\alpha\, dl$, $dy = \sin\alpha\, dl$, l е дължината на дъгата по C, избрана като параметър, чието нарастване е съгласувано с направлението на описване на C.)

За да докажем формулата на Грийн, е достатъчно да докажем двете равенства:

$$I = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \oint P dx,$$

$$J = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \oint_C Q dy.$$

Да разгледаме фиг. 6.1. Нека права, успоредна на оста Oy, пресича C в точки с ординати $y_1(x)$ и $y_2(x)$, $y_1(x) \leq y_2(x)$. Нека x_1 и x_2 са най-малката и най-голямата абсциса на точки от областта $\overline{D}$, кривата C_1 съединява точката $(x_1, y(x_1))$ с точката $(x_2, y(x_2))$, а кривата C_2 — точката $(x_2, y(x_2))$ с точката $(x_1, y(x_1))$, така че $C = C_1 \cup C_2$ и C_1, C_2 са ориентирани съгласувано с C. Тогава по формулата за изразяване на двойния интеграл чрез повторен получаваме



Фиг. 6. 1

$$I=-\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\right]dx=\int_{x_1}^{x_2}P(x,y_1(x))\,dx-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}P(x,y_2(x))\,dx=\int_{C_1}P\,dx-\left(-\int_{C_2}P\,dx\right)=\oint_C P\,dx.$$

Аналогично се пресмята интегралът J. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Теорема 6.1 е вярна и за по-общи области D с граница C, които с помощта на краен брой частично гладки криви могат да се разделят на краен брой подобласти D_i с граници C_i, $i=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяващи условията 1) и 2). Наистина за всяка от областите D_i съгласно доказаното е вярна формула (6.26). Събирайки получените равенства, поради адитивността на двойния интеграл в лявата страна $\sum_{i=1}^{n}\iint_{D_i}$ можем да заменим с $\iint_D$, а отдясно $\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i}$ — с $\oint_C$, понеже интегралите по «вътрешните» криви се унищожават поради интегриране в противоположни посоки.

Забележка 2. Можем да се откажем във формулировката на теорема 6.1 от условието 2), т. е. да смятаме, че границата на областта D е затворена частично гладка крива C без особени точки. Доказателството на този вариант на теоремата обаче малко се усложнява.

Забележка 3. Условието за гладкост на векторното поле може също малко да се отслаби. Достатъчно е да поискаме полето

* Т. е. по помощните частично гладки криви, разделящи областта D.

а да бъде непрекъснато в $D\cup C=\overline{D}$, а диференцируемо само в D, като производната му по всяка посока да бъде непрекъсната в D. Формула (6.25) се запазва, обаче влизащите в нея интеграли са, изобщо казано, несобствени.

Забележка 4. Теорема 6.1, т. е. формулата на Грийн, е вярна и в общия случай, когато областта D има граница C, която е само ректифицируема крива*.

Забележка 5. Формулата на Грийн (6.25) може да се запише, както това следва от доказателството, във вида (6.25′)

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C P\,dx+Q\,dy. \tag{6.25′}$$

Ще отбележим, че интегралите в лявата и дясната страна на равенството имат инвариантен характер, т. е. стойността и формата им не се изменят при преминаване към нова декартова координатна система. Наистина стойностите на подинтегралните изрази отляво и отдясно на формула (6.25′) са съответно равни на $(\mathbf{k}, \operatorname{rot}\mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, които са инвариантни величини. Формата на подинтегралните изрази във формула (6.25′) също очевидно не се изменя при преминаване към нова декартова координатна система $Ox'y'$ — ако векторното поле $\mathbf{a}$ има относно новия базис координати P' и Q', то

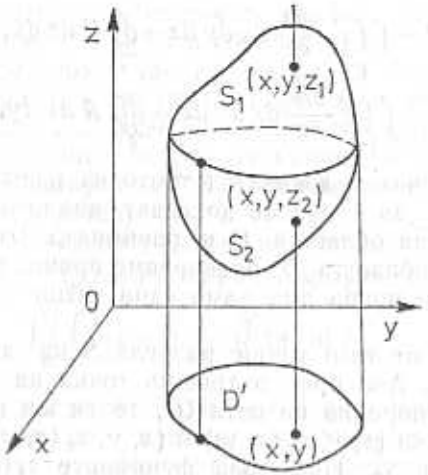
$$(\mathbf{k}, \operatorname{rot}\mathbf{a})=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\left(\mathbf{k}, \left(\frac{\partial Q'}{\partial x'}-\frac{\partial P'}{\partial y'}\right)\mathbf{k}\right)=\frac{\partial Q'}{\partial x'}-\frac{\partial P'}{\partial y'},$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{t})\,dl=P\,dx+Q\,dy=(P'\cos\alpha'+Q'\sin\alpha')dl=P'dx'+Q'dy'.$$

Остава да отбележим, че якобианът на трансформацията при преминаване към новата координатна система е равен по абсолютна стойност на единица, а параметризацията с помощта на дължината на дъгата като параметър не зависи от координатната система. Ето защо интегралите в лявата и дясната страна на (6.25′) не менят стойността и формата си.

2. Формула на Остроградски — Гаус. Нека D е едносвързана област в E^3, т. е. за всяка частично гладка затворена крива C, лежаща в D, може да се намери ориентируема частично гладка повърхнина G, която лежи в D и има граница C. Нека границата S на областта D удовлетворява следните две условия:

* Виж статията на Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин в ДАН СССР, 1980, т. 253, № 1, 42—44.



Фиг. 6. 2

интеграла в лявата страна ще получим интеграл върху D, а в дясната страна поради това, че външните нормали към границите на подобластите D_i в точки, принадлежащи на границите на две такива подобласти, са противно насочени, интегралите по повърхнините, които са общи части от границите на две подобласти, имат сума нула. Следователно остават само интеграли по повърхнини, които са части от границите на D_i и които имат обединение точно границата S на областта D.

Забележка 2. Във формулировката на теорема 6.2 можем да се откажем от изискването на условието 2) и да смятаме, че повърхнината S е частично гладка, двустранна, пълна, ограничена, затворена и без особени точки. Доказателството на теоремата в този случай е по-сложно.

Забележка 3. Можем да смятаме, че векторното поле a съществува в $D \cup S = \bar{D}$ и е непрекъснато диференцируемо само в отворената област D. Тогава тройният интеграл във формула (6.26) трябва да се разбира като несобствен.

Забележка 4. Формулата на Остроградски — Гаус може да се запише, както това следва от доказателството, във вида

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \tag{6.26'}$$

$$=\oiint_S (P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy).$$

Ще отбележим, че интегралите в лявата и дясната страна имат инвариантен характер, т. е. стойността и формата им не се менят при преминаване към нова декартова координатна система. За да се уверим в това, е достатъчно да направим разсъждения, аналогични на тези от забележка 5 след доказателството на теорема 6.1.

3. Формула на Стокс. Нека S е едносвързана повърхнина в E^3 (т. е. всяка частично гладка затворена крива без точки на самопресичане, която лежи в S, огражда множество от S, хомеоморфно на кръг), удовлетворяваща следните условия:

1) повърхнината S е частично гладка, двустранна, пълна, ограничена, без особени точки и има граница затворен частично гладък контур C;

2) може да се избере декартова координатна система такава, че S се проектира еднозначно върху всяка от координатните равнини.

Нека $\mathbf{n}$ е единичният вектор на нормалата към S, $\mathbf{t}$ — единичният вектор, допирателен към C, съгласуван с $\mathbf{n}$ (вж. т. 1 на този параграф).

В сила е следната теорема.

Теорема 6.3 (формула на Стокс). Нека $\mathbf{a}$ е векторно поле, непрекъснато диференцируемо в околност на повърхнината S (т. е. в отворено множество, от E^3, съдържащо S). Тогава е изпълнена формулата

$$\oiint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})\,ds=\oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\,dl. \tag{6.27}$$

Теорема 6.3 допуска и такава формулировка: потокът на вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ през повърхнината S е равен на циркулацията на вектора $\mathbf{a}$ по затворения контур C.

Доказателство. При условията на теоремата интегралите във формула (6.27) имат смисъл. Формула (6.27) очевидно е инвариантна относно избора на базис. Да изберем правоъгълна декартова координатна система $Oxyz$ такава, че S се проектира еднозначно върху трите координатни равнини. Нека

$$\mathbf{a}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k},\quad \mathbf{n}=(\cos X,\ \cos Y,\ \cos Z),$$
$$\mathbf{t}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

Ориентираме координатната система така, че нормалният вектор $\mathbf{n}$ да образува остри ъгли с координатните оси.

Използувайки израза за rot a спрямо декартова правоъгълна координатна система, можем да запишем:

$$\oiint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{a})\, ds =$$

$$(6.27') \quad = \oiint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cos Z \right\} ds$$

$$= \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl = \oint_C (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma)\, dl = \oint_C (P\, dx + Q\, dy + R\, dz).$$

Очевидно достатъчно е да докажем, че

$$I = \oiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cos Z\right) ds = \oint_C P\, dx.$$

Доказателството за останалите събираеми:

$$J = \oiint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos X\right) ds = \oint_S Q\, dy,$$

$$L = \oiint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos X - \frac{\partial R}{\partial x} \cos Y\right) ds = \oint_C R\, dz,$$

е аналогично.

Ще отбележим, че S е частично гладка и се проектира еднозначно в Oxy. Нека D е нейната проекция, а Γ — проекцията на C в равнината Oxy (вж. фиг. 6.3). Поради това S се задава с уравнение от вида $z = z(x, y)$, където $z(x, y)$ е диференцируема функция. Имаме

$$\cos Y = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & z'_x \\ 0 & z'_y \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} = -\frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}.$$

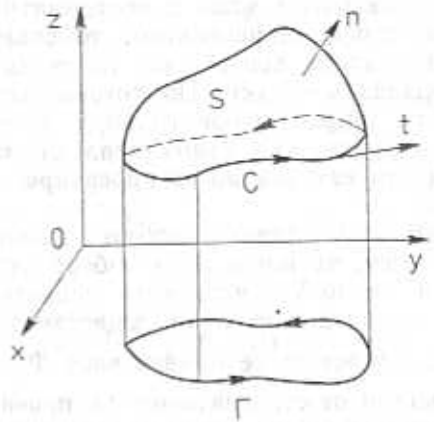
Аналогично $\cos Z = \dfrac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$.

Тогава, вземайки предвид тези формули, получаваме

$$I = -\oiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cos Z\, ds$$

$$= -\iint_D \frac{\partial}{\partial y} \left[P(x, y, z(x, y)) \right] dx\, dy,$$

понеже върху повърхнината S функцията $P(x, y, z)$ е равна на



Фиг. 6. 3

$P(x, y, z(x, y))$ и $\dfrac{\partial P}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y}$, а интегралът по повърхнината S е равен на двоен интеграл върху D.

Сега, като използуваме формулата на Грийн, имаме

$$-\iint_D \frac{\partial}{\partial y} \left[P(x, y, z(x, y)) \right] dx\, dy = \oint_\Gamma P(x, y, z(x, y))\, dx = \oint_C P(x, y, z)\, dx.$$

Тук използувахме, че ако една точка (x, y) лежи на кривата Γ, то точката $(x, y, z(x, y))$ очевидно принадлежи на кривата C. Теоремата е доказана.

Формулата на Стокс е вярна и за по-общи ограничени, пълни, частично гладки, двустранни повърхнини с частично гладка граница.

Забележка 1. Преди всичко ще покажем, че формулата на Стокс е в сила за повърхнини S, които удовлетворяват условието 1), но, изобщо казано, не удовлетворяват условието 2) за еднозначно проектиране на S във всяка от координатните равнини.

Оказва се, че съществува число $\delta > 0$ такова, че за всяка част Φ на повърхнината S с размери, по-малки от δ*, може да се избере координатна система такава, че Φ се проектира еднозначно във всички координатни равнини. Наистина нека M_0 е фиксирана точка от S. Прекарваме допирателната равнина през точката M_0 и нека $\mathbf{n}_{M_0}$ е единичен нормален вектор към повърхнината в точката M_0. Избираме координатна правоъгълна система такава, че

* Такава част от повърхнината се съдържа в кълбо с радиус δ.

векторът $\mathbf{n}_{M_0}$ сключва остри ъгли с координатните оси. Понеже полето от нормалите $\mathbf{n}$ е непрекъснато, то съществува околност на точката M_0, нормалите във всички точки на която сключват остри ъгли с координатните оси. Но тогава съгласно доказателството на първото твърдение от глава 5 и забележка 2 към него можем да твърдим, че съществува околност на точката M_0 с радиус δ, която еднозначно се проектира върху всички координатни равнини.

Ще подчертаем, че числото δ изобщо зависи от точката M_0: $\delta=\delta(M_0)$. Ще докажем, че може да се избере универсално, независещо от точката число δ с указаното свойство. Да допуснем противното, т. е. че такова число не съществува. Тогава за всяко $\delta_n=\frac{1}{n}$, $n=1, 2, \ldots$, може да се намери част Φ_n на повърхнината S с размери, по-малки от δ_n, която не се проектира еднозначно върху трите координатни равнини на произволна декартова координатна система. Избираме във всяка част Φ_n по една точка M_n и от получената редица избираме подредица, клоняща към точка M от повърхнината S. Съгласно предишните разглеждания съществува околност на точката M, която се проектира еднозначно в координатните равнини на подходящо избрана правоъгълна координатна система. Но тази околност за някой номер n съдържа частта Φ_n от S, която поради това също ще се проектира еднозначно върху трите координатни равнини на координатната система. Получи се противоречие с избора на Φ_n, което и трябваше да се докаже.

Сега вече не е трудно да заключим, че формулата на Стокс е вярна за повърхнини, които удовлетворяват условието 1), но не удовлетворяват в общия случай условието 2). За тази цел ще раздробим повърхнината S на краен брой гладки части Φ_n с размери, по-малки от указаното по-горе число δ. Формулата на Стокс е вярна за всяка от частите Φ_n, понеже Φ_n се проектира еднозначно върху всички координатни равнини на подходяща декартова координатна система. Сумираме левите и десните страни на получените формули. Интегралите по общите участъци от границите на частите Φ_n се вземат в противоположни посоки и поради това се унищожават. По тази причина отляво ще получим интеграл по повърхнината S от величината $(\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})$, а отдясно — интеграл по границата C на повърхнината S от величината $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, т. е. формулата на Стокс за разглежданата повърхнина от по-общ вид.

Забележка 2. Формулата на Стокс е вярна и за повърхнини S, които с помощта на частично гладки криви могат да се раздробят на краен брой односвързани повърхнини, удовлетворяващи условието 1). Доказателството на този факт е очевидно: достатъчно е да сумираме интегралите от лявата и дясната страна на формулите на Стокс за указаните повърхнини и да отчетем, че интегралите по кривите, осъществяващи раздробяването, се вземат в различни посоки и поради това се унищожават.

Забележка 3. Както следва от доказателството, формулата на Стокс (6.27) може да се запише във вида (6.27′)

$$\oiint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y \right.$$

(6.27′)

$$\left. +\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z \right\} ds=\oint_C (P\,dx+Q\,dy+R\,dz).$$

Ще отбележим, че интегралите отляво и отдясно имат инвариантен характер, т. е. стойността и формата им не се променят при преминаване към нова декартова координатна система. За да се убедим в това, е достатъчно да проведем разсъждения, аналогични на тези от забележка 5 след доказателството на теорема 6.1.

§ 4. Условия за независимост на криволинейния интеграл в равнината от пътя на интегриране

Нека $\mathbf{a}(M)$ е векторно поле, дефинирано в свързана област D в равнината.

Определение 1. Функцията $U(M)$ се нарича потенциал на полето $\mathbf{a}(M)$ в областта D, ако в тази област

$$\mathbf{a}(M)=\operatorname{grad} U(M).$$

Поле $\mathbf{a}$, което притежава потенциал, се нарича потенциално поле.

Теорема 6.4. Нека функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ са непрекъснати в D. Стойността на интеграла

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

за произволни точки $A\in D$, $B\in D$ не зависи от частично гладката крива $\overset{\smile}{AB}\subset D$, съединяваща точките A и B, тогава и само тогава, когато полето

$$\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y),\ Q(x, y))$$

е потенциално. В този случай

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy=U(B)-U(A),$$

където $U(x, y)$ е потенциал на полето $\mathbf{a}(x, y)$.

Доказателство. **Достатъчност.** Нека

$$\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y),\ Q(x, y))=\operatorname{grad} U(x, y)$$
$$=\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Да съединим точките A и B, избрани произволно в D, с гладка крива $\overset{\frown}{AB}\subset D$ и нека $x=x(t), y=y(t),\ a\leq t\leq b$ е параметричното представяне на тази крива. От непрекъснатостта на $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ заключаваме, че функцията $U(x, y)$ е диференцируема в D. Тогава по формулата на Нютон—Лайбниц получаваме

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_a^b P(x(t), y(t))\,x'(t)$$
$$+Q(x(t), y(t))\,(y'(t))\,dt=\int\limits_a^b U'_t\,dt$$
$$=U(x(b), y(b))-U(x(a), y(a))=U(B)-U(A).$$

Необходимост. Фиксираме произволно в D точка $M_0(x_0, y_0)$ и нека $M(x, y)$ е произволна точка от областта D.

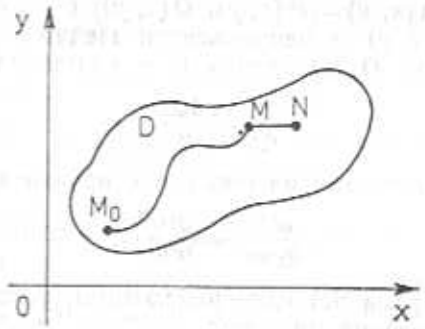
Полагаме

$$U(M)=\int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} P\,dx+Q\,dy,$$

където интегралът е взет върху произволна частично гладка крива, съединяваща точките M_0 и M (вж. фиг. 6.4).

Ще покажем, че така дефинираната функция $U(x, y)$ е търсеният потенциал на полето $\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y),\ Q(x, y))$. Да докажем например съществуването на $\frac{\partial U}{\partial x}$ и равенството $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)$.

Да се преместим от точката $M(x, y)$ в точката $N(x+\Delta x, y)$, така че отсечката MN да се съдържа в D. Това може да се направи за всички достатъчно малки нараствания Δx, тъй като D е отворено множество. При такова преместване функцията $U(x, y)$ ще получи нарастване



Фиг. 6. 4

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int\limits_{\overset{\frown}{M_0MN}} P\,dx+Q\,dy$$
$$-\int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overset{\frown}{MN}} P\,dx+Q\,dy.$$

Координатата y е константа по отсечката MN и следователно

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int\limits_{\overset{\frown}{MN}} P\,dx=\int\limits_x^{x+\Delta x} P(t, y)\,dt.$$

Поради непрекъснатостта на функцията $P(x, y)$ съгласно теоремата за крайните нараствания имаме

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=P(x+\theta\Delta x, y)\,\Delta x,$$

където $0<\theta<1$.

$$\text{Оттук } \frac{U(x+\Delta x, y)-U(x, y)}{\Delta x}=P(x+\theta\Delta x, y).$$

Използувайки непрекъснатостта на функцията $P(x, y)$, след граничен преход при $\Delta x\to 0$ получаваме

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y).$$

Съвършено аналогично се доказва и равенството

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}=Q(x, y).$$

Теорема 6.4 е доказана.

Ако полето $\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y), Q(x, y))$ е потенциално и функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ са непрекъснати заедно с частните си производни в областта D, то трябва да е в сила равенството

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

което означава равенство на смесените производни:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}.$$

Съгласно теорема 6.4 едно необходимо условие за независимост на криволинейния интеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

от пътя на интегриране в случая, когато функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и техните частни производни са непрекъснати в областта D, е да бъде в сила леснопроверяемото равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ако областта е едносвързана, то това условие е и достатъчно за независимостта на интеграла $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$ от избора на кривата, съединяваща дадените точки A и B. За да избегнем използването на недоказаната в общия случай формула на Грийн (забележка 2 към теорема 6.1), отначало ще разгледаме случая, когато областта D е кръг.

Теорема 6.5. Нека функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и техните частни производни са непрекъснати в кръга K. Тогава полето $\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y), Q(x, y))$ е потенциално в този кръг тогава и само тогава, когато

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{в } K.$$

Доказателство. Нужно е да докажем само достатъчността на условието. През центъра M_0 на кръга прекарваме правите M_0x' и M_0y', успоредни съответно на осите Ox и Oy. От произволна точка $M(x, y)\in K$ спускаме перпендикуляри MM_1 и MM_2 към M_0x' и M_0y' съответно. Точката M_0 съединяваме с точките M_1 и M_2 с помощта на отсечките M_0M_1 и M_0M_2.

Прилагайки формулата на Грийн (6.25′) за правоъгълника, получаваме

$$\int\limits_{M_0M_1MM_2} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,dy=0,$$

откъдето следва, че

$$\int\limits_{M_0M_1M} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{M_0M_2M} P\,dx+Q\,dy,$$

т.е. интегралът $\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy$ не зависи от начупената γ от две отсечки, успоредни на координатните оси, свързваща фиксираната точка M_0 с точката M. Тогава дефинираме функцията

$$U(M)=\int\limits_{M_0M} P\,dx+Q\,dy,$$

където M_0M е начупена от две отсечки, успоредни на координатните оси. Проверката, че така определената функция $U(x, y)$ представлява потенциал на даденото поле $\mathbf{a}(x, y)$, се извършва аналогично на проверката, извършена при доказателството на теорема 6.4.

Теорема 6.5 е доказана.

Забележка. Теорема 6.5 е в сила за произволна едносвързана област D. За целта трябва да се докаже, че условието

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{в областта } D$$

е достатъчно за независимостта на криволинейния интеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

от избора на кривата $\overset{\frown}{AB}$, съединяваща точките A и B. Да докажем това.

Нека L е произволна затворена частично гладка крива, лежаща в D. Да означим с D^* областта, оградена от кривата L. Поради едносвързаността на областта D всяка точка от областта D^* принадлежи на D. Прилагайки за областта D^* формулата на Грийн (6.25′) (вж. забележка 2 към теорема 6.1), имаме

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{D^*}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0,$$

откъдето следва, че за произволно фиксирани точки A и B от областта D и за всеки две частично гладки криви $\overset{\frown}{ACB}$ и $\overset{\frown}{AC'B}$, съединяващи тези точки, са в сила равенствата

$$0=\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}\cup\overset{\frown}{BC'A}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overset{\frown}{BC'A}} P\,dx+Q\,dy$$

$$=\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx+Qdy-\int\limits_{\overset{\frown}{AC'B}} P\,dx+Q\,dy.$$

Поради това

$$\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overset{\frown}{AC'B}} P\,dx+Q\,dy.$$

Следователно стойността на интеграла

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

не зависи от частично гладката крива $\overset{\frown}{AB}$, съединяваща точките A и B.

§ 5. Някои приложения

1. Изразяване лицето на област в равнината чрез криволинеен интеграл. Нека едносвързаната област D с граница C удовлетворява условията от теорема 6.1. Полагайки във формулата на Грийн (формула (6.25')) $P=-y$, $Q=x$, ще получим

$$\iint\limits_D 2\,dx\,dy=\oint\limits_C -ydx+xdy.$$

За лицето $\sigma(D)$ на областта D в равнината имаме следното изразяване с помощта на криволинеен интеграл по ориентираната граница на тази област:

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\oint\limits_C -ydx+xdy.$$

С получената формула ще намерим лицето на областта, ограничена от кривата $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$, $a>0$, (циклоида) и правата $y=0$. Понеже интегралът

$$\int\limits_\gamma -ydx+xdy=0,$$

където γ е отсечката $0\leq x\leq 2\pi$, $y=0$, то съответно на положителната ориентация на контура имаме

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi}^{0}(-a^2(1-\cos t)^2+a^2(t-\sin t)\sin t)\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(2-2\cos t-t\sin t)\,dt=2\pi a^2-\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} t\sin t\,dt$$

$$=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}(t\cos t)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

2. Изразяване на обеми с помощта на интеграл по повърхнина. Нека D е едносвързана област в E^3 с граница S, удовлетворяваща условията на теорема 6.2 (формулата на Остроградски — Гаус). Нека в областта D

$$P(x,y,z)=x,\ Q(x,y,z)=y,\ R(x,y,z)=z.$$

Тези функции удовлетворяват условията, при които е в сила формулата на Остроградски — Гаус, и затова

$$\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_D 3\,dx\,dy\,dz=3\,V(D),$$

където $V(D)$ е обемът на областта D.

3. Да разгледаме векторното поле, породено от електричен товар с големина q. Разполагаме този товар в началото на координатната система. Силата, която действа на единичен товар, разположен в точката $M(x,y,z)$, се пресмята съгласно закона на Кулон по формулата

$$E(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

където $\mathbf{r}$ е радиус-векторът на точката M, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ε_0 е константа.

Електростатичното поле E е потенциално в $E^3\setminus\{0\}$. Ще напомним, че полето $\mathbf{a}(M)$ се нарича потенциално в областта D, ако съществува функция $U(M)$, дефинирана в областта D, такава, че

$$\mathbf{a}(M)=\operatorname{grad}U(M).$$

Потенциал за полето E е функцията

$$\Phi(M)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}.$$

Полето F, породено от материална точка с маса m, разполо-

жена в началото на координатната система, се нарича гравитационно и също е потенциално.

По закона на Нютон силата $F(M)$, с която полето действува на маса с големина единица, разположена в точката $M(x, y, z)$, се пресмята по формулата

$$F(M) = -gm\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

За потенциал на полето F в цялото пространство E^3 с изключение на началото на координатнатата система служи функцията

$$U(M) = gm\frac{1}{r}.$$

За потенциалното поле

$$\mathbf{a}(M) = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)),$$

дефинирано в областта D, лежаща в E^3, независимостта на интеграла

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

от пътя на интегриране (интегралът зависи само от началото и края на пътя) се доказва по същия начин, както и в теорема 6.4. третираща случая на област D, лежаща в E^2.

Ето защо работата, извършвана от всяко поле за преместване на единична пробна частица от точката A до точка B, не зависи от пътя, по който се извършва преместването. Ако разстоянията от началото на координатната система до точките A и B са съответно r_1 и r_2, то тази работа за полето E е равна на

$$\Phi(B) - \Phi(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

а за полето F — на

$$U(B) - U(A) = gm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Допълнение към глава 6*

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ФОРМИ В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Антисиметрични полилинейни форми

1. Линейни форми. Нека V е произволно n-мерно векторно пространство, чиито елементи ще означаваме със символите $\xi, \eta, \ldots$. Предмет на нашето изучаване ще бъдат функциите, които на всеки елемент $\xi \in V$ съпоставят някакво реално число.

Определение 1. Функцията $\mathbf{a}(\xi)$ се нарича линейна форма, ако за всички $\xi \in V$, $\eta \in V$ и всяко реално число λ са изпълнени равенствата

1) $\mathbf{a}(\xi + \eta) = \mathbf{a}(\xi) + \mathbf{a}(\eta)$,
2) $\mathbf{a}(\lambda\xi) = \lambda\,\mathbf{a}(\xi)$.

Определение 2. Сума на две линейни форми $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ще наречем линейната форма $\mathbf{c}$, която на всеки вектор $\xi \in V$ съпоставя числото

$$\mathbf{c}(\xi) = \mathbf{a}(\xi) + \mathbf{b}(\xi).$$

Произведение на линейната форма $\mathbf{a}$ с реалното число λ ще наричаме линейната форма $\mathbf{b}$, която на всеки вектор $\xi \in V$ съпоставя числото

$$\mathbf{b}(\xi) = \lambda\,\mathbf{a}(\xi).$$

По такъв начин множеството на всички линейни форми образува векторно пространство, което ще означим със символа $L(V)$**. Ще намерим представяне на линейната форма $\mathbf{a}$ спрямо даден базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$. Нека

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathbf{e}_i.$$

Ако означим $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}(\mathbf{e}_i)$, то търсеното представяне ще има вида

$$\mathbf{a}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mathbf{a}_i$$

Ще докажем, че размерността $\dim L(V)$ на линейното простран-

* Текстът на това допълнение е взет от книгата на В. А. Илин, Е. Г. Позняк «Основи на математическия анализ», част II, М., Наука, 1973.

** Пространството $L(V)$ се означава също така и със символа V^* и се нарича спрегнато (или дуално) на V.

ство $L(V)$ е равна на n. За това е достатъчно да намерим някакъв базис в $L(V)$, съдържащ точно n елемента, т. е. n линейни форми. Да фиксираме произволен $\{e_k\}$ на пространството V и да разгледаме следните линейни форми:

$$e^k(\xi)=\xi^k \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

където $\{\xi^k\}$ са коефициентите на разлагането на вектора ξ по елементите на базиса $\{e_k\}$. С други думи, линейната форма e^k действува върху елементите на базиса $\{e_i\}$ по правилото

$$e^k(e_i)=\delta_{ik}=\begin{cases} 1 \text{ при } i=k, \\ 0 \text{ при } i\neq k. \end{cases}$$

В такъв случай спрямо дадения базис $\{e_i\}$ линейната форма $\mathbf{a}$ има вида

$$\mathbf{a}(\xi)=\sum_{i=1}^{n} a_i e^i(\xi), \quad a_i=\mathbf{a}(e_i),$$

т. е. линейните форми $e^1(\xi), e^2(\xi), \ldots, e^n(\xi)$ образуват базис в $L(V)$. Този базис се нарича спрегнат (или дуален) на базиса $\{e_i\}$.

2. Билинейни форми. Да означим с $V\times V$ множеството на всички наредени двойки (ξ_1, ξ_2), където $\xi_1\in V$, $\xi_2\in V$, и да разгледаме функциите $\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2)$, които съпоставят на всеки елемент от $V\times V$ (т. е. на всеки два елемента $\xi_1\in V$ и $\xi_2\in V$) някое реално число.

Определение. Функцията $\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2)$ се нарича билинейна форма, ако за всяка фиксирана стойност на едната променлива тя е линейна форма относно другата променлива.

С други думи, за произволни вектори $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ и произволни реални числа $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ е изпълнено равенството

$$\mathbf{a}(\lambda_1\xi_1+\mu_1\eta_1, \lambda_2\xi_2+\mu_2\eta_2)=$$
$$=\lambda_1\lambda_2\,\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2)+\lambda_1\mu_2\,\mathbf{a}(\xi_1, \eta_2)+\mu_1\lambda_2\,\mathbf{a}(\eta_1, \xi_2)+\mu_1\mu_2\,\mathbf{a}(\eta_1, \eta_2).$$

Множеството на всички билинейни форми лесно може да се превърне в линейно пространство, като се въведат в него по естествен начин операциите събиране и умножение с реално число. Полученото пространство от билинейни форми ще означим с $L_2(V)$.

Ще намерим представянето на билинейната форма $\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2)$ спрямо някакъв базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ на пространството V. Нека $\xi_k=\sum_{j=1}^{n} \xi_k^j e_j$, $k=1, 2$. Като положим $\mathbf{a}(e_i, e_j)=a_{ij}$, ще получим търсеното представяне

$$\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_1^i\xi_2^j.$$

За да определим размерността на пространството $L_2(V)$, ще образуваме с помощта на линейните форми $e^i(\xi)$, представляващи в $L(V)$ базис, спрегнат на базиса $\{e_i\}$, следните билинейни форми:

$$e^{ij}(\xi_1, \xi_2)=e^i(\xi_1)e^j(\xi_2).$$

Тогава произволна билинейна форма се представя еднозначно във вида

$$\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e^{ij}(\xi_1, \xi_2).$$

Това означава, че формите $e^{ij}(\xi_1, \xi_2)$ образуват базис в $L_2(V)$ и следователно размерността на $L_2(V)$ е равна на n^2.

3. Полилинейни форми. Нека p е естествено число. Да означим със символа $V^p=V\times V\times\cdots\times V$ множеството на всички наредени набори $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ от p вектора, всеки от които принадлежи на V, и да разгледаме функциите, които на всеки такъв набор съпоставят някое реално число.

Определение. Функцията $\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ се нарича полилинейна форма от степен p (или p-форма), ако тя е линейна форма по всеки аргумент при фиксирани стойности на останалите.

Като въведем линейните операции в множеството на всички p-форми, ще получим линейно пространство, което ще означим със символа $L_p(V)$.

Ще намерим представянето на произволна полилинейна форма $\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ относно някакъв базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ на пространството V. Да означим

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_p}=\mathbf{a}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}).$$

Тогава, ако $\xi_k=\sum_{i=1}^{n} \xi_k^i e_i$, то

$$\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\ldots\xi_p^{i_p}.$$

Ако $e^k(\xi)$ е базис в $L(V)$, спрегнат на $\{e_i\}$, то е очевидно, че p-формите

$$\mathbf{e}^{i_1 i_2 \ldots i_p}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = \mathbf{e}^{i_1}(\xi_1)\,\mathbf{e}^{i_2}(\xi_2)\ldots\mathbf{e}^{i_p}(\xi_p)$$

образуват базис в $L_p(V)$ и следователно $L_p(V)$ има размерност n^p.

4. Антисиметрични полилинейни форми

Определение. Полилинейната форма $\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ се нарича антисиметрична, ако при разместване на произволни два аргумента тя сменя знака си*. С други думи,

$$\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_p) = -\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_p).$$

Очевидно множеството на всички полилинейни антисиметрични форми от степен p образуват подпространство на линейното пространство $L_p(V)$, което ще означим със символа $A_p(V)$**. Елементите на пространството $A_p(V)$ ще означаваме със символа $\omega = \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$.

Да забележим, че ако $\{\mathbf{e}_i\}$ е произволен базис във V и

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 \ldots i_p}\, \xi_1^{i_1} \ldots \xi_p^{i_p},$$

то числата $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ сменят знака си при разместване на два индекса. Това следва от факта, че

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} = \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p}).$$

Естествено е да считаме, че $A_1(V) = L_1(V)$, а $A_0(V)$ се състои от всички константи, т. е. съвпада с реалната права.

5. Външно произведение на антисиметрични форми. Да разгледаме две антисиметрични форми $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$. В тази точка ще въведем основната операция в теорията на антисиметричните форми — операцията външно умножение.

Нека

$$\omega^p = \omega^p(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p), \quad \eta_i \in V,$$
$$\omega^q = \omega^q(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q), \quad \zeta_j \in V.$$

Да разгледаме следната полилинейна форма: $\mathbf{a} \in L_{p+q}(V)$

$$\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+q}) = \omega^p(\xi_1, \ldots, \xi_p) \cdot \omega^p(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q}). \tag{6.1.1}$$

Тази форма, изобщо казано, не е антисиметрична. Именно при разместване на аргументите ξ_i и ξ_j, където $1 \leq i \leq p$ и $p+1 \leq j \leq p+q$, формата (6.1.1) може да не смени знака си. От това обстоятелство

* Антисиметричните полилинейни форми се наричат също знакопременливи или външни.

** Това пространство се означава също и със символа $A^p V^*$ и се нарича p-та външна степен на пространството V^*.

е предизвикана необходимостта от въвеждане на външно произведение.

За да въведем външно произведение, ще ни потрябват някои факти от теорията на пермутациите.

Да напомним, че пермутация на числата $\{1, 2, \ldots, m\}$ се нарича функция $\sigma = \sigma(k)$, дефинирана върху множеството на тези числа, която го изобразява взаимноеднозначно върху себе си. Множеството на всички такива пермутации се означава със символа $\sum_m$. Очевидно съществуват $m!$ различни пермутации от $\sum_m$. За две пермутаци $\sigma \in \sum_m$ и $\tau \in \sum_m$ се определя по естествен начин суперпозиция $\sigma\tau \in \sum_m$. Пермутацията σ^{-1} се нарича обратна на σ, ако $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$, където ε е тъждествената пермутация (т. е. $\varepsilon(k) = k$, $k = 1, 2, \ldots, m$).

Пермутацията σ се нарича транспозиция, ако тя размества две числа, като запазва местата на останалите. С други думи, съществува двойка числа i и j ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$) такава, че $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ и $\sigma(k) = k$ за $k \neq i$ и $k \neq j$. Очевидно, ако σ е транспозиция, то $\sigma^{-1} = \sigma$, т. е. $\sigma\sigma = \varepsilon$.

Известно е, че всяка пермутация σ се разлага на суперпозиции от транспозиции, при това четността на броя на транспозициите в такова разлагане не зависи от неговия избор и се нарича четност на пермутацията σ.

Да въведем следното означение:

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \text{ако пермутацията } \sigma \text{ е четна,} \\ -1, & \text{ако пермутацията } \sigma \text{ е нечетна.} \end{cases}$$

Забелязваме, че формата $a \in L_p(V)$ принадлежи на $A_p(V)$, ако за всяка пермутация $\sigma \in \sum_p$

$$\mathbf{a}(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p).$$

Да разгледаме отново полилинейната форма (6.1.1). За всяка пермутация $\sigma \in \sum_{p+q}$ ще положим

$$\sigma\mathbf{a}(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = \mathbf{a}(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}). \tag{6.1.2}$$

Лесно можем да се убедим, че ако $\tau \in \sum_{p+q}$ и $\sigma \in \sum_{p+q}$, то $(\tau\sigma)\mathbf{a} = \tau(\sigma\mathbf{a})$.

Ще въведем следното определение.

Определение. Външно произведение на формата $\omega^p \in A_p(V)$ и формата $\omega^q \in A_q(V)$ се нарича формата $\omega \in A_{p+q}(V)$, определена с равенството

(6.1.3) $$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \,.\, \tau\mathbf{a},$$

където сумата се взема по всички пермутации $\sigma \in \sum_{p+q}$, удовлетворяващи условието

(6.1.4) $$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p),\ \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q),$$

а величината $\sigma\mathbf{a}$ се определя от равенствата (6.1.1) и (6.1.2).

Външното произведение на формите ω^p и ω^q се означава със символа $\omega = \omega^p \wedge \omega^q$.

Ще илюстрираме например как действува пермутация σ, удовлетворяваща условието (6.1.4). Да предположим, че по някакъв път се движат успоредно две автомобилни колони, в първата от които има p, а във втората q коли. След известно време пътят се стеснява и двете колони в движение се престройват в една. При това автомобилите от първата колона заемат мястта някъде между автомобилите на втората, като вътре във всяка от двете колони се запазва редът на следване. Като резултат получаваме пермутация, която удовлетворява условието (6.1.4). Лесно се вижда, че е вярно и обратното, всяка такава пермутация може да се реализира в нашия модел.

За да се убедим, че даденото от нас определение е коректно, е необходимо да докажем, че $\omega = \omega^p \wedge \omega^q \in A_{p+q}(V)$. Очевидно от доказателство се нуждае само антисиметричността на формата ω.

Ще покажем, че при разместване на два аргумента ξ_i и ξ_{i+1} формата ω сменя знака си. Оттук лесно следва, че $\omega \in A_{p+q}(V)$. Нека $\tau \in \sum_{p+q}$ е такава пермутация. Да се убедим, че

(6.1.5) $$\tau\omega = -\omega = (\operatorname{sgn}\tau)\,\omega.$$

От равенството (6.1.3) получаваме

$$\tau\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma) \,.\, (\tau\sigma)\mathbf{a}.$$

Да разбием тая сума на две:

(6.1.6) $$\tau\omega = \sum_{\sigma}{}' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,\mathbf{a} + \sum_{\sigma}{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,\mathbf{a}.$$

Към първата сума ще отнесем онези пермутации σ, за които или $\sigma^{-1}(i) \leq p$, $\sigma^{-1}(i+1) \leq p$, или $\sigma^{-1}(i) \geq p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \geq p+1$. За всяка такава пермутация

$$(\tau\sigma)\,\mathbf{a} = -\sigma\mathbf{a}.$$

За да направим това твърдение очевидно, да означим $k = \sigma^{-1}(i)$, $l = \sigma^{-1}(i+1)$, т. е. $i = \sigma(k)$, $i+1 = \sigma(l)$. Формата $\sigma\mathbf{a}$ представлява произведение на формите ω^p и ω^q, като аргументи на ω^p са векторите $\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}$, а аргументи на ω^q — векторите $\xi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}$. Ако $k \leq p$ и $l \leq p$, то $\xi_i = \xi_{\sigma(k)}$ и $\xi_{i+1} = \xi_{\sigma(l)}$ са аргументи на формата ω^p, която по условие е антисиметрична. Тогава при разместването на ξ_i и ξ_{i+1} формата ω^p, а следователно и $\sigma\mathbf{a}$ сменя знака си. Аналогично се разглежда случаят, когато $k \geq p+1$ и $l \geq p+1$.

И така за първата сума е изпълнено равенството

(6.1.7) $$\sum_{\sigma}{}' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,\mathbf{a} = -\sum_{\sigma}{}' (\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma\mathbf{a}.$$

Към втората сума ще отнесем онези пермутации σ, за които или $\sigma^{-1}(i) \leq p$, $\sigma^{-1}(i+1) \geq p+1$, или $\sigma^{-1}(i) \geq p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \leq p$. Ще покажем, че множеството от пермутациите $\{\sigma\}$, които удовлетворяват това условие (а също, разбира се, и условието (6.1.4)), съвпада с множеството от пермутациите от вида $\tau\sigma$, където $\sigma \in \{\sigma\}$. Да се върнем на нашия модел с двете автомобилни колони. Твърдението приема следната очевидна форма.

Ако при някакво пренареждане автомобилът с номер k от първата колона се окаже непосредствено пред автомобила с номер l от втората колона, то лесно може да се посочи друго пренареждане, в резултат на което тези автомобили ще си сменят местата, а редът на движение на останалите ще се запази.

Тъй като $\operatorname{sgn}\tau\sigma = -\operatorname{sgn}\sigma$, получаваме

(6.1.8) $$\sum_{\sigma}{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,\mathbf{a} = -\sum_{\sigma}{}'' (\operatorname{sgn}\tau\sigma)(\tau\sigma)\,\mathbf{a} = -\sum_{\sigma}{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma\mathbf{a}.$$

Като заместим (6.1.7) и (6.1.8) в (6.1.6), ще получим (6.1.5).

Пример 1. Да разгледаме две линейни форми $\mathbf{f}(\xi) \in A_1(V)$ и $\mathbf{g}(\xi) \in A_1(V)$. Външно произведение ще бъде формата

$$\mathbf{f} \wedge \mathbf{g} = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma) \,.\, \sigma\,\mathbf{f}(\xi_1)\mathbf{g}(\xi_2) = \mathbf{f}(\xi_1)\,\mathbf{g}(\xi_2) - \mathbf{g}(\xi_1)\,\mathbf{f}(\xi_2).$$

Пример 2. Нека $\mathbf{f}(\xi) \in (A_1(V)$, $\mathbf{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q) \in A_q(V)$. Външно произведение $\omega = \mathbf{f} \wedge \mathbf{g}$ е $(q+1)$-форма, аргументите на която ще означим с $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_q$,

$$\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma\,\mathbf{f}(\xi_0)\,\mathbf{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q) =$$

$$=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i f(\xi_i)g(\xi_0,\ldots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\ldots,\xi_q).$$

6. Свойства на външното произведение на антисиметрични форми. 1) Очевидно свойство на външното произведение е линейността:

а) ако $\omega^p\in A_p(V)$, $\omega^q\in A_q(V)$, то за всяко реално число λ

$$(\lambda\omega^p)\wedge\omega^q=\omega^p\wedge(\lambda\omega^q)=\lambda(\omega^p\wedge\omega^q);$$

б) ако $\omega_1^p\in A_p(V)$, $\omega_2^p\in A_p(V)$ и $\omega^q\in A_q(V)$, то

$$(\omega_1^p+\omega_2^p)\wedge\omega^q=\omega_1^p\wedge\omega^q+\omega_2^p\wedge\omega^q.$$

2) Антикомутативност. Ако $\omega^p\in A_p(V)$ и $\omega^q\in A_q(V)$, то

$$\omega^p\wedge\omega^q=(-1)^{pq}\omega^q\wedge\omega^p.$$

Доказателство. Нека

$$\omega^p\wedge\omega^q=\omega=\omega(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{p+q}).$$

Лесно се вижда, че

$$\omega^q\wedge\omega^p=\omega(\xi_{p+1},\xi_{p+2},\ldots,\xi_{p+q},\xi_1,\ldots,\xi_p).$$

Ще се убедим в това, че пермутацията $(\xi_{p+1},\ldots,\xi_{p+q},\xi_1,\ldots,\xi_p)$ може да се получи от векторите $(\xi_1,\ldots,\xi_{p+q})$ чрез pq последователни транспозиции. Векторът ξ_{p+1} може да се придвижи на първо място, като се използуват p транспозиции. След това с помощта на същия брой транспозиции ще придвижим на второ място вектора ξ_{p+2} и т. н. Ще придвижим всичко q вектора, като всеки път използуваме p транспозиции, т. е. общият брой на транспозициите е равен на pq. В такъв случай антикомутативността ще следва от антисиметричността на външното произведение.

3) Асоциативност. Ако $\omega^p\in A_p(V)$, $\omega^q\in A_q(V)$, $\omega^r\in A_r(V)$, то $(\omega^p\wedge\omega^q)\wedge\omega^r=\omega^p\wedge(\omega^q\wedge\omega^r)$.

Доказателство. Нека $\sigma\in\sum_{p+q+r}$. Да разгледаме следната величина:

$$(6.1.9)\quad \omega=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma[\omega^p(\xi_1,\ldots,\xi_p)\omega^q(\xi_{p+1},\ldots,\xi_{p+q})\omega^r(\xi_{p+q+1},\ldots,\xi_{p+q+r})].$$

Сумата (6.1.9) ще бъде равна на $(\omega^p\wedge\omega^q)\wedge\omega^r$, ако отначало изпълним сумирането по всички пермутации, които оставят числата $p+q+1$, $p+q+2,\ldots,p+q+r$ без промяна и удовлетворяват условието (6.1.4), а след това да сумираме по всички пермутации, които запазват получения ред на първите $p+q$ аргумента и реда на аргументите $\xi_{p+q+1},\ldots,\xi_{p+q+r}$.

Аналогично можем да получим величината $\omega^p\wedge(\omega^q\wedge\omega^r)$.

Ще покажем, че и в двата случая се получава сума по всички пермутации, удовлетворяващи условията

$$(6.1.10)\quad \begin{cases}\sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(p),\\ \sigma(p+1)<\sigma(p+2)<\cdots<\sigma(p+q),\\ \sigma(p+q+1)<\cdots<\sigma(p+q+r).\end{cases}$$

За целта ще се върнем отново на нашия модел с автомобилните колони. Да предположим, че по пътя се движат три автомобилни колони, в първата от които има p, във втората q, а в третата r коли. Един от начините за престрояване на трите колони в една се състои в това, че отначало се сливат първата и втората колона, а след това така получената колона се съединява с третата. При другия начин отначало се сливат втората и третата колона, а към тях се присъединява първата. Очевидно е, че пермутацията σ, която се получава в резултат на всяко едно от тези пренареждания, удовлетворява условието (6.1.10) и, обратно, всяка пермутация, която удовлетворява условието (6.1.10), може да се получи както с помощта на първия, така и с помощта на втория начин за пренареждане. Това означава съвпадане на $(\omega^p\wedge\omega^q)\wedge\omega^r$ и $\omega^p\wedge(\omega^q\wedge\omega^r)$.

Асоциативността на външното умножение дава възможност да се разглежда произволно крайно произведение

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_m,\ \text{където}\ \omega_i\in A_{p_i}(V).$$

Пример 1. Нека $\mathbf{a}_1(\xi),\mathbf{a}_2(\xi),\ldots,\mathbf{a}_m(\xi)$ са линейни форми. Тогава

$$(6.1.11)\quad \mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_m=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma[\mathbf{a}_1(\xi_1)\mathbf{a}_2(\xi_2)\ldots\mathbf{a}_m(\xi_m)],$$

където сумирането се извършва по всички пермутации $\sigma\in\sum_m$.

Това равенство лесно се проверява по индукция. Забелязваме, че ако въведем матрицата $\{\mathbf{a}_i(\xi_j)\}$, то равенството (6.1.11) може да се запише в следния вид:

$$(6.1.12)\quad (\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_m)(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)=\det\{\mathbf{a}_i(\xi_j)\}.$$

7. Базис в пространството на антисиметричните форми. Да изберем някакъв базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ в пространството V и да означим с $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^n$ спрегнатия му базис в пространството $L(V)$. Ще напомним, че $\mathbf{e}^i(\xi)$ е линейна форма, която в елементите на базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ приема стойностите $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j)=\delta_{ij}$.

В точка 3 показахме, че всевъзможните произведения

$$\mathbf{e}^{i_1}(\xi_1)\,\mathbf{e}^{i_2}(\xi_2)\ldots\mathbf{e}^{i_p}(\xi_p)$$

образуват базис в $L_p(V)$. Тъй като $A_p(V)\subset L_p(V)$, то всяка анти-

симетрична p-форма може да се разложи по естествен начин като линейна комбинация на посочените произведения. Тези произведения обаче не образуват базис в $A_p(V)$, тъй като не са антисиметрични p-форми, т.е. не принадлежат на $A_p(V)$. Въпреки това чрез тях може да се конструира с помощта на външно произведение базис в $A_p(V)$.

Теорема 6.6. Нека $\{e_i\}_{i=1}^n$ е базис в пространството V, а $\{e^i\}_{i=1}^n$ е спрегнатият му базис в пространството $L(V)$. Всяка антисиметрична p-форма $\omega \in A_p(V)$ може да се представи, и то по единствен начин, във вида

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}. \tag{6.1.13}$$

Всяко събираемо в сумата от дясната част на (6.1.13) представлява произведение на константата $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ с антисиметричната p-форма $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$.

Доказателство. Съгласно резултатите от точка 4 можем да запишем

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} e^{i_2} \ldots e^{i_p}, \tag{6.1.14}$$

където числата $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \omega(e^{i_1}, e^{i_2}, \ldots, e^{i_p})$ са определени еднозначно.

Тъй като формата $\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ е антисиметрична, то за всяка пермутация $\sigma \in \sum_p$

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) = (\operatorname{sgn} \sigma)\, \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p).$$

Следователно

$$\omega_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(p)}} = (\operatorname{sgn} \sigma)\, \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}. \tag{6.1.15}$$

Групираме събираемите в сумата (6.1.14), различаващи се с пермутация на индекса $i_1 i_2 \ldots i_p$, и се възползуваме от равенството (6.1.15). Получаваме

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \sum_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}} =$$

(6.1.16)

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} \Big[\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}} \Big].$$

Съгласно примера от точка 6 сумата в квадратните скоби е $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$. Теоремата е доказана.

Следствие 1. Елементите $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$ $(1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n)$ образуват базис в пространството $A_p(V)$. Този базис е празен за $p > n$ и се състои от един елемент, ако $p = n$.

Следствие 2. Размерността на пространството $A_p(V)$ е равна на C_n^p.

По-нататък обикновено ще считаме, че сме фиксирали избрания базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, и ще означаваме линейните форми $e^i(\xi)$ със символа $e^i(\xi) = \xi^i$. Тогава всяка форма $\omega \in A_p(V)$ приема вида

$$\omega = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}. \tag{6.1.17}$$

Пример 1

$$\xi^1 \wedge \xi^2 = (e^1 \wedge e^2) = (\xi_1, \xi_2) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\, \sigma [e^1(\xi_1)\, e^2(\xi_2)] =$$

$$= e^1(\xi_1)\, e^2(\xi_2) - e^1(\xi_2)\, e^2(\xi_1) = \xi_1^1 \xi_2^2 - \xi_2^1 \xi_1^2,$$

където ξ_i^j е j-тият коефициент в разлагането на вектора ξ_i по базиса $\{e_j\}$.

Пример 2

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^n = \det \{\xi_j^i\},$$

където $\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_i^j e_j$.

§ 2. Диференциални форми

1. Определение. Да разгледаме произволна отворена област G в n-мерното евклидово пространство E^n. Точките в областта G ще означаваме със символите $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ и т. н.

Определение. Диференциална (външна) форма от степен p, дефинирана в областта G, ще наричаме функция $\omega(x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, стойността на която за всяко фиксирано $x \in G$ представлява антисиметрична p-форма от $A_p(E^n)$.

Множеството на всички диференциални p-форми в областта G ще означим с $\Omega_p(G) = \Omega_p(Q, E^n)$.

Ще считаме, че при фиксирани $\xi_1, \ldots, \xi_p \in E^n$ p-формата ω е

безкрайно диференцируема в G функция. Като използуваме резултатите от § 1, можем да запишем всяка p-форма ω във вида

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}. \tag{6.1.18}$$

Навсякъде по-нататък ще означаваме вектора ξ със символа $dx = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$, а векторите ξ_k — със символите $d_k x = (d_k x^1, d_k x^2, \ldots, d_k x^n)$. За базис в E^n ще изберем векторите $\mathbf{e}_k = \{0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}$, където единицата стои на k-то място. Елементи на спрегнатия базис ще бъдат функциите $\mathbf{e}^k(\xi) = \mathbf{e}^k(dx)$, определени от равенствата $\mathbf{e}^k(dx) = dx^k$.

Тогава диференциалната форма (6.1.18) приема вида

$$\omega(x, d_1 x, \ldots, d_p x) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Пример 1. Диференциална 0-форма — това е произволна функция, дефинирана в областта G (и съгласно нашите предположения безкрайно диференцируема в G).

Пример 2. Всяка диференциална 1-форма има вида

$$\omega(x, dx) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x)\, dx^k.$$

В частност, когато $n=1$, $\omega(x, dx) = f(x)dx$. Диференциалните форми от степен 1 се наричат също така линейни диференциални форми.

Пример 3. Всяка диференциална 2-форма има вида

$$\omega(x, d_1 x, d_2 x) = \sum_{i<k} \omega_{ik}(x) dx^i \wedge dx^k.$$

По определение

$$dx^i \wedge dx^k = (\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^k)(d_1 x, d_2 x) =$$
$$= \mathbf{e}^i(d_1 x)\, \mathbf{e}^k(d_2 x) - \mathbf{e}^i(d_2 x)\, \mathbf{e}^k(d_1 x) =$$
$$= d_1 x^i d_2 x^k - d_2 x^i d_1 x^k = \begin{vmatrix} d_1 x^i & d_1 x^k \\ d_2 x^i & d_2 x^k \end{vmatrix}.$$

В частност при $n=2$ получаваме

$$\omega(x, d_1 x, d_2 x) = f(x) \begin{vmatrix} d_1 x^1 & d_1 x^2 \\ d_2 x^1 & d_2 x^2 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата е равна на елементарното лице, съответствуващо на векторите $d_1 x$ и $d_2 x$.

В случая, когато $n=3$, означавайки $\omega_{12} = R$, $\omega_{23} = P$, $\omega_{13} = -Q$, получаваме

$$\omega = P dx^2 \wedge dx^3 - Q dx^1 \wedge dx^3 + R dx^1 \wedge dx^2 = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ d_1 x^1 & d_1 x^2 & d_1 x^3 \\ d_2 x^1 & d_2 x^2 & d_2 x^3 \end{vmatrix}.$$

Пример 4. Всяка диференциална 3-форма в тримерното пространство има вида

$$\omega(x, d_1 x, d_2 x, d_3 x) = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = f(x) \begin{vmatrix} d_1 x^1 & d_1 x^2 & d_1 x^3 \\ d_2 x^1 & d_2 x^2 & d_2 x^3 \\ d_3 x^1 & d_3 x^2 & d_3 x^3 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата е равна на елементарния обем, отговарящ на векторите $d_1 x$, $d_2 x$, $d_3 x$.

2. Външен диференциал

Определение. Външен диференциал на p-линейна диференциална форма $\omega \in \Omega(G)$ ще наричаме формата $d\omega \in \Omega_{p+1}(G)$, определена от съотношенията

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} d\omega_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

където

$$d\omega_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^k}\, dx^k.$$

По такъв начин, ако

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^k}\, dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Пример 1. Диференциалът на форма от нулева степен (т. е. функция $f(x)$) има вида

$$df(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}\, dx^k.$$

Пример 2. Да изчислим диференциала на линейната форма

$$\omega=\omega(x, dx)=\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx^i.$$

Ще получим

$$d\omega=d\omega(x, d_1x, d_2x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\omega_i(x)}{\partial x^k}\, dx^k\wedge dx^i.$$

Тъй като $dx^k\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^k$ и $dx^k\wedge dx^k=0$, то

$$d\omega=\sum_{k<i} \frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\, dx^k\wedge dx^i+\sum_{i<k} \frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\, dx^k\wedge dx^i=$$

$$=\sum_{k<i} \frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\, dx^k\wedge dx^i-\sum_{k<i} \frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\, dx^k\wedge dx^i=$$

$$=\sum_{k<i} \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}-\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\right) dx^k\wedge dx^i.$$

В частност, когато $n=2$, за $\omega=Pdx^1+Qdx^2$ получаваме

$$d\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx^1\wedge dx^2.$$

3. Свойства на външния диференциал. Непосредствено от определението получаваме следните свойства:

1) ако $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_p(G)$, то $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$;
2) ако $\omega\in\Omega_p(G)$ и λ е реално число, то $d(\lambda\omega)=\lambda d\omega$;
3) ако $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_q(G)$, то
$$d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2.$$

Ще докажем свойство 3). Нека

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Ще въведем следното означение:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Тогава $d\omega$ може да се запише във вида

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n} dx^k\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^k}.$$

Да си припомним, че

$$\omega=\omega_1\wedge\omega_2=(-1)^{pq}\omega_2\wedge\omega_1.$$

По-нататък

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+(-1)^{pq}\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}\wedge\omega_1.$$

Тогава

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n} dx^k\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\sum_{k=1}^{n} dx^k\wedge\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+$$

$$+(-1^{pq}\sum_{k=1}^{n} dx^k\wedge\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}\wedge\omega_1=$$

$$=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1^{pq}\, d\omega_2\wedge\omega_1.$$

Тъй като $d\omega_2$ е $(q+1)$-форма, то

$$d\omega_2\wedge d\omega_1=(-1)^{p(q+1)}\omega_1\wedge d\omega_2.$$

Оттук $d\omega=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2$.

В сила е следното важно свойство на диференциала.

Основно свойство на външния диференциал:

$$d(d\omega)=0.$$

Доказателство. Да предположим отначало, че ω е форма от нулева степен, т. е. $\omega(x)=f(x)$. Тогава

$$d(df)=d\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^i}\, dx^k\wedge dx^i.$$

Тъй като $dx^k\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^k$, това равенство може да се препише във вида

$$d(df)=\sum_{i<k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^i}\right) dx^i\wedge dx^k,$$

откъдето следва, че $d(df)=0$.

Нека сега

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Тогава

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_p} d\omega_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Забелязваме, че всеки член на сумата представлява външно произведение на диференциали на форми от нулева степен, именно

на формите $\omega_{i_1\ldots i_p}(x)$, $e^{i_1}(dx), \ldots, e^{i_p}(dx)$. Остава да приложим свойство 3) и да се възползуваме от това, че за форми от нулева степен основното свойство е доказано.

§ 3. Диференцируеми изображения

1. Определение за диференцируеми изображения. Да разгледаме произволна m-мерна област D в евклидовото пространство E^m и n-мерна област $G\subset E^n$. Точките от областта D ще означаваме със символите $t=(t^1, t^2, \ldots, t^m)$, а точките от областта G — със символите $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Ще казваме, че φ изобразява D в G, ако

$$\varphi=\{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\},$$

където $\varphi^k(t)$ са дефинирани в областта D, а векторите x с координати $x^k=\varphi^k(t)$ лежат в областта G.

Ще дефинираме изображение φ^*, което преобразува $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ за всяко p, $0\leq p\leq n$. При това ще считаме, че всеки компонент $\varphi^k(t)$ на изображението φ е безкрайно диференцируем.

Определение. Нека φ е изображение на $D\subset E^m$ в $G\subset E^n$. Ще означим с φ^* изображението, което за всички $0\leq p\leq n$ действува от $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ по следното правило: ако

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

то

$$\varphi^*(\omega)=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}(\varphi(t))\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{i_p}),$$

където

$$\varphi^*(dx^i)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^k}dt^k.$$

Пример 1. Нека ω е форма от нулева степен, т. е. $\omega=f(x)$. Тогава

$$\varphi^*(f)=f(\varphi(t)).$$

Пример 2. Нека φ изобразява n-мерната област $D\subset E^n$ в n-мерна област $G\subset E^n$ и нека ω е следната n-форма:

$$\omega=dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

Тогава

$$\varphi^*(\omega)=\left(\sum_{k_1=1}^{n}\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{k_1}}dt^{k_1}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{k_n=1}^{n}\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^{k_n}}dt^{k_n}\right)=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_n=1}^{n}\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{k_1}}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial t^{k_n}}dt^{k_1}\wedge\ldots\wedge dt^{k_n}=$$

$$=dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{\sigma(1)}}\cdots\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^{\sigma(n)}}=$$

$$=dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\det\left\{\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^j}\right\}.$$

По такъв начин

$$\varphi^*(dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n)=\frac{D(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n)}{D(t^1,t^2,\ldots,t^n)}dt^1\wedge dt^2\wedge\ldots\wedge dt^n.$$

Забележка. Формата $\varphi^*(\omega)$ се нарича диференциална форма, получена от формата ω със смяна на променливите φ.

2. Свойства на изображението φ^*. Изображението φ^* има следните свойства:

1) Ако $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_q(G)$, то

$$\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\varphi^*(\omega_1)\wedge\varphi^*(\omega_2).$$

Доказателство. Нека

$$\omega_1=\sum_{i_1<\ldots<i_p}a_{i_1\ldots i_p}(x)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2=\sum_{k_1<\ldots<k_q}b_{k_1\ldots k_q}(x)dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_q}.$$

Тогава

$$\omega_1\wedge\omega_2=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\sum_{k_1<\ldots<k_q}a_{i_1\ldots i_p}(x)b_{k_1\ldots k_q}(x)\times$$
$$\times dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_q}$$

и следователно

$$\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\sum_i\sum_k a_i(\varphi(t))b_k(\varphi(t))\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{k_q})=$$

$$=\sum_i a_i(\varphi)\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{i_p})\wedge\Big[\sum_k b_k(\varphi)\varphi^*(dx^{k_1})\wedge$$
$$\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{k_q})\Big]=\varphi^*(\omega_1)\wedge\varphi^*(\omega_2).$$

2) Ако $\omega \in \Omega_p(G)$, то $\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega)$.

Доказателство. Отначало ще докажем това равенство за $p=0$, т. е. за $\omega = f(x)$. Получаваме

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad \varphi^*(\omega) = f(\varphi(t)),$$

$$d\varphi^*(\omega) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^k} f(\varphi(t))\, dt^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} dt^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \varphi^*(dx^i) = \varphi^*(d\omega).$$

За произволно p ще проведем доказателството по индукция. Нека $\omega = f_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. Тогава $d\omega = df_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. От свойство 1) и от току-що доказаното съотношение имаме

$$\varphi^*(d\omega) = \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}).$$

От друга страна,

$$d\varphi^*(\omega) = d\varphi^*[(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge dx^{i_p}] =$$
$$= d[\varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(dx^{i_p})].$$

По-нататък съгласно свойство 3) на външния диференциал

$$d\varphi^*(\omega) = d\varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(dx^{i_p}) +$$
$$+ (-1)^{p-1} \varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge d\varphi^*(dx^{i_p}).$$

Забелязваме, че от горното следва $\varphi^*(dx^{i_p}) = d\varphi^*(x^{i_p})$, и тогава от основното свойство на външния диференциал имаме

$$d\varphi^*(dx^{i_p}) = 0.$$

Съгласно индуктивното предположение за $p-1$

$$d\varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) = \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}).$$

Оттук получаваме

$$d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(dx^{i_p})$$

и съгласно свойство 1)

$$d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}).$$

Следното важно свойство се нарича транзитивност.

3) Да разгледаме отворените области $U \subset E^l$, $V \subset E^m$, $W \subset E^n$, точките на които са съответно $u = (u^1, u^2, \ldots, u^l)$, $v = (v^1, v^2, \ldots, v^m)$, $w = (w^1, w^2, \ldots, w^n)$. Нека φ изобразява $U \to V$, а ψ изобразява

$V \to W$. С $\psi \circ \varphi$ ще означим изображението, наречено композиция, което действува по правилото

$$(\psi \circ \varphi)(u) = \psi[\varphi(u)].$$

Аналогично ще въведем композицията $\varphi^* \circ \psi^*$, която за всяко p преобразува $\Omega_p(W)$ в $\Omega_p(U)$, т. е.

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(\omega) = \varphi^*[\psi^*(\omega)].$$

Вярно е следното равенство:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

Доказателство. Да означим $\beta = \psi \circ \varphi$. Това означава, че $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$, където $\beta^k = \psi^k(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$.

Отначало ще извършим доказателството за линейната форма $dw^k \subset \Omega_1(W)$. Получаваме $\beta^*(dw^k) = d\beta^*(w^k) =$

$$= d\beta^k(u) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \beta^k}{\partial u^i} du^i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i.$$

По-нататък

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k) = \varphi^*[\psi^*(dw^k)] = \varphi^*[d\psi^*(w^k)] =$$
$$= \varphi^*(d\psi^k) = \varphi^*\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} dv^j\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \varphi^*(dv^j).$$

Но

$$\varphi^*(dv^j) = d\varphi^*(v^j) = d\varphi^j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i;$$

тогава

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i$$

и равенството е доказано. Оттук следва верността на свойство 3) за произволна линейна форма. По-нататък ще проведем доказателството по индукция. Нека

$$\omega = f(w)\, dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_p} \in \Omega(W).$$

Тогава

$$\beta^*(\omega) = \beta^*(f dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_{p-1}}) \wedge \beta^*(dw^{i_p}) =$$
$$= (\varphi^* \circ \psi^*)(f dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_{p-1}}) \wedge (\varphi^* \circ \psi^*)(dw^{i_p}) =$$
$$= (\varphi^* \circ \psi^*)(f dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_p}) = (\varphi^* \circ \psi)(\omega).$$

$$\int_{C_2} \omega = \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} \frac{D(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^p)}{D(s^1, s^2, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge ds^2 \wedge \ldots \wedge ds^p =$$

$$= \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \ldots, \varphi_2^p)}{D(s^1, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^p = \int_{C_1} \omega.$$

Аналогично може да се покаже, че ако $C_1 = -C_2$, то

$$\int_{C_1} \omega = -\int_{C_2} \omega.$$

2. Диференцируеми вериги. Ще ни потрябват повърхности, които се разпадат на няколко парчета, всяко едно от които е образ на някой m-мерен куб. За пример на такава повърхност може да служи състоящата се от две окръжности граница на пръстен, лежащ в двумерната равнина. При това ще различаваме ориентациите на тези окръжности. Във връзка с това много полезно се оказва въвеждането на линейни комбинации с реални коефициенти на сингулярни кубове.

Определение 1. Ще наричаме p-мерна верига C произволен набор

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, C_1, C_2, \ldots, C_k\},$$

където λ_i са реални числа, а C_i са p-мерни сингулярни кубове. Ще използуваме означението

$$C = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_k C_k.$$

Ще казваме, че C принадлежи на G, ако всичките C_i принадлежат на G.

Множеството на всички p-мерни вериги образува линейно пространство, ако въведем по естествен начин операциите събиране и умножение с реални числа.

Определение 2. Интеграл от формата ω по p-мерна верига C, съдържаща се в G, се нарича числото

$$\int_C \omega = \lambda_1 \int_{C_1} \omega + \lambda_2 \int_{C_2} \omega + \cdots + \lambda_k \int_{C_k} \omega.$$

Сега можем да дефинираме граница на произволен сингулярен куб. За целта ще дефинираме най-напред граница на единичен куб.

Определение 3. Граница на куба I^p ще наречем $(p-1)$-мерната верига

$$\partial I^p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^p [I_0^p(i) - I_1^p(i)],$$

където $I_\alpha^p(i)$ е сечението на куба I^p с хиперравнината

$$x^i = \alpha \quad (\alpha = 0, 1).$$

За да бъде коректно това определение, е необходимо да се разясни какъв смисъл сме вложили в твърдението, че $I_\alpha^p(i)$ е $(p-1)$-мерен сингулярен куб.

Да построим каноничното изображение $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_i^{\alpha, p}$ на куба I^{p-1} върху $I_\alpha^p(i)$. Нека $s = (s^1, s^2, \ldots, s^{p-1}) \in I^{p-1}$. Полагаме

$$\tilde{\varphi}^k(s) = \begin{cases} s^k, & \text{ако } 1 \leq k < i, \\ \alpha, & \text{ако } k = i, \\ s^{k-1}, & \text{ако } i < k \leq p. \end{cases}$$

Очевидно $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \ldots, \tilde{\varphi}^p)$ изобразява взаимноеднозначно I^{p-1} върху $I_\alpha^p(i)$. В частност за $\alpha = 0$ и $i = p$ изображението φ е рестрикция върху $I_0^p(p-1)$ на тъждественото изображение на пространството E^p върху себе си.

Определение 4. Граница на p-мерния сингулярен куб $C = \varphi : I^p \to E^n$ се нарича $(p-1)$-мерната верига

$$\partial C = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i [\varphi(I_0^p(i)) - \varphi(I_1^p(i))].$$

По този начин границата на образа на куба I^p е образ на границата на I^p с естествената ориентация.

Пример 1. Да разгледаме в равнината квадрата I^2. Очевидно можем да разглеждаме този квадрат като сингулярен куб, където φ е тъждественото изображение. На фиг. 6.5 е показана границата на този квадрат, като посоката на стрелките съвпада с посоката на нарастване на параметъра t^k, по който се извършва интегрирането, в случая, когато тази страна на квадрата влиза във веригата ∂I^2 със знак $+$ и посоката на стрелките е противоположна, ако страната се взема със знак $-$. Виждаме, че нашето договаряне за знаците води до обичайното обхождане на границата обратно на часовниковата стрелка.

Пример 2. Да разгледаме сингулярния куб $C = \varphi : I^2 \to R^2$, където φ има вида

$$\varphi^1 = (a + Rt^1) \cos 2\pi t^2,$$
$$\varphi^2 = (a + Rt^1) \sin 2\pi t^2.$$

Лесно се вижда, че $\varphi(I^2)$ е пръстен, границата на който е съставена от окръжности с радиуси a и $a + R$. Ще изясним какво

$$\int\limits_{I^p_\alpha(i)} \omega\,, \text{ където } i=1, 2, \ldots, p, \quad \alpha=0,1.$$

Разглеждаме каноничното изображение $\widetilde{\varphi}: I^{p-1} \to I^p_\alpha(i)$. Съгласно резултатите от точка 1 на този параграф

$$\int\limits_{I^p_\alpha(i)} \omega = \int\limits_{I^{p-1}} f[\widetilde{\varphi}(s)] \frac{D(\widetilde{\varphi}^2, \ldots, \widetilde{\varphi}^p)}{D(s^1, \ldots, s^{p-1})} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

По определението за канонично изображение $\widetilde{\varphi}_i^{\alpha, p}$ якобианът има вида

$$J = \frac{D(s^2, \ldots, s^{i-1}, \alpha, s^i, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 0, \text{ ако } i \neq 1,$$

и

$$J = \frac{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 1, \text{ ако } i = 1.$$

По такъв начин само интегралите по $I^p_\alpha(i)$ могат да бъдат различни от нула. Получаваме

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = (-1)\Big(\int\limits_{I^p_0(1)} \omega - \int\limits_{I^p_1(1)} \omega\Big) = \int\limits_{I^{p-1}} f(1, s^1, s^2, \ldots, s^{p-1}) ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1} -$$

$$- \int\limits_{I^{p-1}} f(0, s^1, \ldots, s^{p-1}) ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

По определението за интеграл по куба I^{p-1}

$$\int\limits_{\partial I^p} \omega = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 [f(1, s^1, \ldots, s^{p-1}) - f(0, s^1, \ldots, s^{p-1})]\, ds^1 ds^2 \ldots ds^{p-1} =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial s^0} ds^0\, ds^1 \ldots ds^{p-1} = \int\limits_{I^p} \frac{\partial f}{\partial s^0} ds^0 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

От друга страна,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial t^1} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Следователно

$$\int\limits_{I^p} d\omega = \int\limits_{I^p} \frac{\partial f}{\partial t^1} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Равенството (6.1.19) е доказано.

Доказателство на теоремата на Стокс. По определението за интеграл по сингулярен куб

$$\int\limits_C d\omega = \int\limits_{I^p} \varphi^*(d\omega).$$

Съгласно свойство 2) на диференцируемите изображения (вж. точка 2, § 3)

$$\int\limits_{I^p} \varphi^*(d\omega) = \int\limits_{I^p} d\varphi^*(\omega).$$

По-нататък ще използуваме вече доказаната формула на Стокс за куба I^p

$$\int\limits_{I^p} d\varphi^*(\omega) = \int\limits_{\partial I^p} \varphi^*(\omega).$$

Остава да забележим, че от свойството на интегралите по границата на сингулярен куб (вж. края на точка 2 от настоящия параграф)

$$\int\limits_{\partial I^p} \varphi^*(\omega) = \int\limits_{\partial C} \omega.$$

Теоремата окончателно е доказана.

4. Примери. 1) Да разгледаме случая $p=1$. Едномерен сингулярен куб C в E^n — това е някаква крива, чиито граници ще означим с a и b. Формулата на Стокс приема вида

$$\int\limits_C df = \int\limits_{\partial C} f = f(b) - f(a).$$

В частност, когато $n=1$, получаваме формулата на Нютон — Лайбниц

$$\int\limits_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

2) Нека сега $p=2$. Двумерен сингулярен куб C — това е двумерна повърхност, формата $\omega \in \Omega_1$ има вида

$$\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k dx^k.$$

Като използуваме пример 2 от точка 2, § 2, получаваме

$$\int_C \sum_{k<i} \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega^k}{\partial x^i} \right) dx^k \wedge dx^i = \int_{\partial C} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, dx^k .$$

Ако $n=2$, като означим $\omega = P dx^1 + Q dx^2$, получаваме формулата на Грин

$$\int_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\partial C} P dx^1 + Q dx^2 .$$

Ако $n=3$, получаваме обичайната формула на Стокс.

3) Нека $p=n$. Тогава $\omega \in \Omega_{n-1}$ има вида

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

По-нататък

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \omega^k}{\partial x^k} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

В частност при $n=3$

$$\omega = P dx^2 \wedge dx^3 - Q dx^1 \wedge dx^3 + R dx^1 \wedge dx^2 ,$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

и получаваме формулата на Остроградски—Гаус.

7. Интеграли, зависещи от параметри

Тази глава е посветена на изучаването на функции, представени във вид на собствени или несобствени интеграли от функции, които освен от интеграционната променлива зависят и от още една променлива, която се нарича параметър. Функции, които се представят чрез такива интеграли, е прието да се наричат интеграли, зависещи от параметър.

Естествено възниква въпросът за непрекъснатост, интегруемост и диференцируемост на такива функции по параметъра.

§ 1. Равномерна сходимост по едната променлива на функции на две променливи

1. Връзка между равномерната сходимост по едната променлива на функции на две променливи с равномерната сходимост на редици от функции. Нека ни е дадена функция на две променливи $f(x, y)$, където двойката (x, y) принадлежи на подмножеството Z на пространството E^2, а x принадлежи на някакво подмножество на числовата ос $\{x\} = X$ и y принадлежи на някакво подмножество на числовата ос $\{y\} = Y$. Например Z може да бъде правоъгълникът $\prod = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, където $\{x\} = X = [a, b]$, $y = Y = [c, d]$, а $f(x, y)$ е функция, зададена в правоъгълника $\prod$.

Нека по-нататък y_0 е гранична точка на множеството $\{y\}$.

Ако за всяко x от множеството $\{x\}$ съществува крайна граница

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = g(x),$$

то ще казваме, че функцията $f(x, y)$ поточково клони към функцията $g(x)$ в множеството $\{x\}$ при y, клонящо към y_0, и ще пишем

$$f(x, y) \to g(x) \quad \text{при} \quad y \to y_0.$$

Понятието поточкова сходимост на функцията $f(x, y)$ към $g(x)$ обобщава понятието сходимост в точка на редици от функции (вж. § 11, глава 2).

Действително в частния случай, когато множеството $\{y\}$ е редицата $\{y_n\}$ и $y_n \to y_0$, то функцията $f(x, y)$ може да се разглежда като редицата от функции $f_n(x)=f(x, y_n)$, зададени в множеството $\{x\}$.

Сега ще дефинираме понятието равномерна сходимост по едната променлива x на функцията $f(x, y)$ на двете променливи към граничната функция $g(x)$ при $y \to y_0$.

Дефиниция. Функцията $f(x, y)$ клони равномерно относно x в множеството $\{x\}$ към функцията $g(x)$ при y, клонящо към y_0, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всяко $y \neq y_0$ от множеството $\{y\}$, за което $|y-y_0|<\delta$, и за всички x от множеството $\{x\}$ е изпълнено неравенството

$$|f(x, y)-g(x)|<\varepsilon.$$

Ще докажем едно твърдение, което дава връзка между равномерната сходимост в множеството $\{x\}$ на функцията $f(x, y)$ към $g(x)$ при $y \to y_0$ и равномерната сходимост в множеството $\{x\}$ на редицата от функции $f_n(x)=f(x, y_n)$ при $y_n \to y_0$, където $y_n \neq y_0$ за всяко n и y_0 е гранична точка на множеството $\{y\}$.

Твърдение 1. Функцията $f(x, y)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ относно x в множеството $\{x\}$ при $y \to y_0$ тогава и само тогава, когато редицата от функции $f_n(x)=f(x, y_n)$ е сходяща равномерно в множеството $\{x\}$ към граничната функция $g(x)$ за всяка редица $\{y_n\}$, $y_n \to y_0$, където y_n принадлежат на $\{y\}$ и $y_n \neq y_0$.

Необходимост. Нека $f(x, y)$ клони към $g(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$ при $y \to y_0$. Да вземем произволна редица $\{y_n\}$, където y_n принадлежат на $\{y\}$, $y_n \neq y_0$ и $y_n \to y_0$. Ще покажем, че редицата $f_n(x)$, където $f_n(x)=f(x, y_n)$, клони към $g(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$.

За произволно число $\varepsilon>0$ съществува число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всички y от множеството $\{y\}$, за които $0<|y-y_0|<\delta$, и за всички x от $\{x\}$ е изпълнено неравенството

$$|f(x, y)-g(x)|<\varepsilon.$$

Тъй като $y_n \to y_0$, то съществува такъв номер $N=N(\delta)$, че за всички $n \geqq N$ е изпълнено неравенството

$$|y_n-y_0|<\delta,$$

откъдето следва, че

$$|f(x, y_n)-g(x)|<\varepsilon$$

за всички x, принадлежащи на $\{x\}$, и при всяко $n \geqq N$. Това означава, че $f_n(x)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ в множеството $\{x\}$.

Достатъчност. Нека за всяка редица $\{y_n\}$, сходяща към y_0, където y_n принадлежат на $\{y\}$, $y_n \neq y_0$, съответната редица $f_n(x)=f(x, y_n)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ в множеството $\{x\}$. Ще докажем, че функцията $f(x, y)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$ в множеството $\{x\}$. Допускаме противното, т. е. че съществува число $\varepsilon>0$ такова, че за всяко $\delta>0$ може да се намери $y_\delta \neq y_0$, $|y_\delta-y_0|<\delta$ и точка x_δ от $\{x\}$, за които е изпълнено неравенството

$$|f(x_\delta, y_\delta)-g(x_\delta)| \geqq \varepsilon.$$

Нека δ_n е редица от положителни числа, клонящо към 0. Тогава за съответните редици y_n и x_n ще имаме $y_n \to y_0$, $|y_n-y_0|>0$ и $|f(x_n, y_n)-g(x_n)| \geqq \varepsilon$. Следователно редицата от функции $f(x, y_n)$ не клони към $g(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$. Стигнахме до противоречие. С това твърдение 1 е доказано.

2. Критерий на Коши за равномерна сходимост на функция. Вярна е следната теорема.

Теорема 7.1. *Необходимо и достатъчно условие за равномерна сходимост на функцията $f(x, y)$ в множеството $\{x\}$ към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$ е за всяко число $\varepsilon>0$ да съществува $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всеки две точки y', y'' от множеството $\{y\}$, за които $0<|y'-y_0|<\delta$, $0<|y''-y_0|<\delta$, и за всяко x от $\{x\}$ да бъде изпълнено неравенството*

$$|f(x, y')-f(x, y'')|<\varepsilon.$$

Доказателство. Съгласно твърдение 1 е достатъчно да разгледаме редицата от функции $\{f(x, y_n)\}$, съответстваща на редицата $\{y_n\}$, където $y_n \to y_0$, $0<|y_n-y_0|$, $y_n \in \{y\}$, и да използваме критерия на Коши за равномерна сходимост на редица от функции (вж. § 1, глава 2).

2. Приложения на понятието равномерна сходимост на функция. Нека множеството $\{x\}=X$ съвпада със сегмента $[a, b]$ и y_0 е гранична точка на множеството $\{y\}=Y$. Да разгледаме функцията $f(x, y)$, където x принадлежи на $[a, b]$, а y е от множеството Y. Ще формулираме няколко твърдения, произтичащи от съответните твърдения за равномерна сходимост на редица от функции (вж. глава 2). Тези твърдения се доказват чрез преминаване към произволна редица $\{y_n\}$, където $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$.

Твърдение 2. Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в сег-

мента $[a, b]$ при всяко фиксирано y от Y и равномерно в $[a, b]$ клони към $g(x)$ при $y \to y_0$. Тогава функцията $g(x)$ е интегруема в $[a, b]$ и са верни равенствата

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b \left[\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right] dx.$$

За доказателството на това твърдение е достатъчно да се приложи теорема 2.8 от § 4, глава 2.

Твърдение 3. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната по x, $x \in [a, b]$ при всяко фиксирано y от множеството Y и $f(x, y)$ равномерно в $[a, b]$ клони към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$, то $g(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$.

Доказателството се получава от следствие 1 на теорема 2.7, глава 2.

Твърдение 4. Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната по x в $[a, b]$ при всяко фиксирано y от Y и при $y \to y_0$ тази функция монотонно клони към непрекъснатата функция $g(x)$ във всяка фиксирана точка x от $[a, b]$. Тогава $f(x, y)$ клони към $g(x)$ равномерно в $[a, b]$.

Това твърдение е аналог на теорема 2.4 от глава 2 (признак на Дини).

При прехода към редицата $\{y_n\}$ е необходимо тя да се избере монотонна такава, че $y_n \to y_0$.

Твърдение 5. Ако при всяко фиксирано y от множеството Y функциите на x: $f(x, y)$ и $f'_x(x, y)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и при $y \to y_0$ функцията $f(x, y)$ клони към $g(x)$, а функцията $f'_x(x, y)$ клони към $h(x)$ равномерно в $[a, b]$, то функцията $g(x)$ е диференцируема в $[a, b]$ и при това

$$g'(x) = h(x)$$

или

$$\{\lim_{y \to y_0} f(x, y)\}'_x = \lim_{y \to y_0} f'_x(x, y).$$

За доказателството на това твърдение е необходимо да използуваме теорема 2.9, глава 2.

Твърдение 6. Нека функцията $f(x, y)$ е зададена и непрекъсната в правъгълника $\Pi = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Тогава за всяко y_0 от сегмента $[c, d]$ при $y \to y_0$ функцията $f(x, y)$ клони равномерно по x в $[a, b]$ към функцията $f(x, y_0)$.

Доказателство. Тъй като непрекъснатата функция $f(x, y)$ в правоъгълника Π е и равномерно непрекъсната в него, то за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такова, че за всеки две

точки (x', y'), (x'', y'') от Π, за които $|x' - x''| < \delta$, $|y' - y''| < \delta$, е вярно неравенството

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Нека $x' = x'' = x$, $y' = y$, $y'' = y_0$. Тогава за всички $y \in [c, d]$ и такива, че $|y - y_0| < \delta$, и за всички x от $[a, b]$ е изпълнено неравенството

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

Това доказва твърдението.

§ 2. Собствени интеграли, зависещи от параметър

1. Свойства на интегралите, зависещи от параметър. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана за x, принадлежащи на сегмента $[a, b]$, и y, принадлежащи на някакво множество $\{y\} = Y$. Да допуснем, че при всяко фиксирано y от Y функцията $f(x, y)$ е интегруема в $[a, b]$. Тогава в множеството Y е дефинирана функцията

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{7.1}$$

която се нарича интеграл, зависещ от параметъра y.

Ще изучим свойствата на интеграли, зависещи от параметър.

Да отбележим най-напред, че съгласно твърдение 2 от § 1, ако функцията $f(x, y)$ клони равномерно в $[a, b]$ към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$, то в интеграла (7.1) може да се извърши граничен преход под знака на интеграла.

Теорема 7.2 (за непрекъснатост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника $\Pi = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Тогава интегралът $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ е непрекъсната функция на параметъра y в $[c, d]$.*

Доказателство. От твърдение 6 на § 1 следва, че функцията $f(x, y)$ клони равномерно към функцията $f(x, y_0)$ при $y \to y_0$ в сегмента $[a, b]$. Следователно, както беше отбелязано по-горе, може да се извърши граничен преход под знака на интеграла и да се получи

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)dx=\int_a^b f(x, y_0)dx=I(y_0),$$

което и трябваше да се докаже.

Теорема 7.3 (за интегриране на интеграла по параметъра). *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника $\Pi=\{a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$, то функцията $I(y)=\int_a^b f(x, y)dx$ е интегруема в сегмента $[c, d]$. Освен това е вярна формулата*

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d\left[\int_a^b f(y, y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx.$$

С други думи, ако са изпълнени условията на теоремата, то в интеграла, зависещ от параметъра, може да се интегрира по този параметър под знака на интеграла.

Доказателство. Съгласно предходната теорема 7.2 функцията $I(y)$ е непрекъсната в Π. Затова тя е интегруема в този сегмент. Верността на формулата следва от равенството на повторните интеграли, тъй като те са равни на двойния интеграл $\iint_\Pi f(x,y)dx\,dy$ (вж. глава 3).

Теоремата е доказана.

Теорема 7.4 (за диференцируемост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника Π и има в него непрекъснатата производна $f'_y(x, y)$. Тогаза функцията, определена от (7.1), е диференцируема в $[c, d]$ и*

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x, y)\,dx. \tag{7.2}$$

С други думи, ако са изпълнени условията на теоремата, то можем да диференцираме под знака на интеграла.

Доказателство. Да разгледаме равенството

$$\frac{f(x, y+h)-f(x, y)}{h}=f'_y(x, y+\theta h),\ 0<\theta<1,$$

което следва от формулата на Лагранж, и да забележим, че $f'_y(x, y+\theta h)$ клони равномерно в $[a, b]$ към $f'_y(x, y)$ при $h\to 0$.

Следователно можем да направим граничен преход под знака на интеграла в равенството

$$\frac{I(y+h)-I(y)}{h}=\int_a^b f'_y(x, y+\theta h)dx$$

при $h\to 0$. Оттук получаваме формула (7.2), което доказва теоремата.

2. Случай, когато границите на интегриране зависят от параметъра. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в правоъгълника $\Pi=\{a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$, а зададените в $[c, d]$ функции $a(y)$ и $b(y)$ изобразяват $[c, d]$ в сегмента $[a, b]$.

Ако за всяко фиксирано y от $[c, d]$ функцията $f(x, y)$ е интегруема по x в сегмента $[a(y), b(y)]$, то очевидно в $[c, d]$ е дефинирана функцията

$$I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx. \tag{7.1*}$$

Вярна е следната теорема.

Теорема 7.5 (за непрекъснатост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника Π, а функциите $a(y)$ и $b(y)$ са непрекъснати в сегмента $[c, d]$. Тогава функцията $I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx$ е непрекъсната в $[c, d]$.*

Доказателство. Да фиксираме произволно y_0 от сегмента $[c, d]$. Тогава от свойството за адитивност на интеграла получаваме

$$I(y)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y)dx+\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)dx+\int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x, y)dx.$$

Първият интеграл на равенството представлява интеграл, зависещ от параметър, с постоянни граници на интегриране. Следователно той е непрекъсната функция по y и затова при $y\to y_0$ той клони към $\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)dx$. За другите два интеграла получаваме оценките

$$\left|\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)dx\right|\leq M\,|b(y)-b(y_0)|,$$

$$\left|\int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x, y)dx\right|\leq M\,|a(y_0)-a(y)|,$$

където $M=\sup\limits_{\Pi}|f(x, y)|$. От непрекъснатостта на функциите $a(y)$ и $b(y)$ следва, че при $y\to y_0$ и двата интеграла клонят към нула. Следователно $I(y)\to I(y_0)$ при $y\to y_0$. Теоремата е доказана.

Сега ще докажем теорема за диференцируемост на интеграла $I(y)$, определен от равенството (7.1).

Теорема 7.6 (за диференцируемост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната заедно с производната си $f'_y(x, y)$ в правоъгълника Π, а функциите $a(y)$ и $b(y)$ са диференцируеми в $[c, d]$. Тогава интегралът $I(y)$, определен от равенството (7.1), е диференцируема функция по y в $[c, d]$ и е вярно равенството*

$$I'(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)dx+f[b(y), y]b'(y)-f[a(y), y]a'(y). \tag{7.3}$$

Доказателство. Фиксираме произволно y_0 от сегмента $[c, d]$ и записваме диференчното частно във вида

$$\frac{I(y_0+h)-I(y_0)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int\limits_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx-\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)dx\right] \tag{7.4}$$

(h е избрано така, че $y_0+h\in[c, d]$). Тъй като

$$\int\limits_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx=\int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)dx+\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0+h)dx+$$
$$+\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx,$$

$$\frac{I(y_0+h)-I(y_0)}{h}=\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{f(x, y_0+h)-f(x, y_0)}{h}dx+$$
$$+\frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)dx+\frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx.$$

В първото събираемо на това равенство съгласно теорема 7.4 можем да направим граничен преход под знака на интеграла при $h\to 0$.

Използувайки първата формула за средните стойности за интеграли, представяме второто и третото събираемо във вида

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)dx=f(\xi, y_0+h)\,\frac{a(y_0)-a(y_0+h)}{h},$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx=f(\eta, y_0+h)\,\frac{b(y_0+h)-b(y_0)}{h},$$

където $\xi\in[a(y_0), a(y_0+h)]$ и $\eta\in[b(y_0), b(y_0+h)]$.

От тези равенства и от непрекъснатостта на функциите $a(y)$ и $b(y)$ получаваме

$$\frac{1}{h}\int\limits_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)dx\to -f[a(y_0), y_0]a'(y_0) \text{ при } h\to 0,$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx\to f[b(y_0), y_0]b'(y_0) \text{ при } h\to 0.$$

Следователно в равенството (7.4) може да се направи граничен преход при $h\to 0$ и е вярна формулата (7.3). Теоремата е доказана.

§ 3. Несобствени интеграли, зависещи от параметри

В този параграф ще изучим случая на равномерната относно $y\in\{y\}$ сходимост на функция на две променливи $F(x, y)$ към граничната функция $G(y)$ при $x\to\infty$.

Нека функцията $F(x, y)$ е дефинирана в множеството Z, състоящо се от двойките числа (x, y), където x принадлежи на множеството $\{x\}=X$, а y принадлежи на множеството $\{y\}=Y$, X и Y са множества от числовата ос. Да предположим, че $+\infty$ е гранична точка на множеството X (т. е. за всяко число a множеството $(a, +\infty)$ съдържа поне една точка от множеството X).

Определение 1. Функцията $F(x, y)$ клони към функцията $G(y)$ при x, клонящо към $+\infty$ равномерно относно y в множеството Y, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери число x_0 такова, че ако x принадлежи на множеството X и удовлетворява условието $x>x_0$, то за всички y от Y е изпълнено неравенството

$$|F(x, y)-G(y)|<\varepsilon.$$

1. Несобствени интеграли от първи род, зависещи от параметър. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана за всички $x\geqq a$ при всички y от някакво множество $\{y\}=Y$ и при всяко фиксирано y от Y е интегруема в $[a, +\infty)$, т. е. за всяко y от Y е сходящ интегралът

$$I(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx. \tag{7.5}$$

Определение 2. Несобственият интеграл (7.5) се нарича равномерно сходящ по параметъра y в множеството Y, ако функцията

$$F(t, y)=\int_a^{t} f(x, y)dx \tag{7.6}$$

клони към граничната функция $I(y)$ при $t\to+\infty$ равномерно в множеството Y.

Следващата теорема се нарича критерий на Коши за равномерна сходимост на несобствен интеграл, зависещ от параметър.

Теорема 7.7. *Необходимо и достатъчно условие за равномерна сходимост в множеството Y на несобственния интеграл (7.5) е за всяко $\varepsilon>0$ да съществува число $t_0\geqq a$ такова, че за всички t', t'', по-големи от t_0, и при всички y от Y да бъде изпълнено неравенството*

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)dx\right|<\varepsilon.$$

Верността на този критерий следва от теорема 7.1, приложена за функцията

$$F(t, y)=\int_a^{t} f(x, y)dx.$$

От критерия на Коши в частност следва следният признак за сравняване:

Теорема 7.8 (признак на Вайерщрас). *Нека за всички y от Y и всички x от $[a_1, +\infty)$, където $a_1\geqq a$, е изпълнено неравенството*

$$|f(x, y)|\leqq\varphi(x),$$

където $\varphi(x)$ е интегруема (в несобствен смисъл) функция в $[a, +\infty)$. Тогава интегралът (7.5) е равномерно сходящ по y.

Доказателство. Тъй като интегралът $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ е сходящ, то за за всяко число $\varepsilon>0$ съществува число $t_0\geqq\alpha$ такова, че за всички t', t'', за които $t_0\leqq t'\leqq t''$, е изпълнено неравенството $\int_{t'}^{t''}\varphi(x)dx<\varepsilon$. Тогава

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)dx\right|\leqq\int_{t'}^{t''}|f(x, y)|\,dx\leqq\int_{t'}^{t''}\varphi(x)dx<\varepsilon,$$

което и трябваше да се докаже.

Забележка 1. От критерия на Коши за равномерна сходимост на несобствени интеграли следва, че интегралът (7.5) и неговият «остатък» (т. е. интегралът $\int_{a'}^{\infty} f(x, y)dx$, където $a'>a$) имат еднакъв характер на равномерна сходимост.

Забележка 2. Аналогично на доказателството на признака на Дирихле — Абел за несобствени интеграли (вж. част 1, допълнение 1 към глава 9) се доказва следното твърдение (признак на Дирихле — Абел).

Ако интегралът $F(t, y)=\int_a^{t} f(x, y)dx$ е равномерно ограничен, т. е. за всички $t>a$ и y от Y е изпълнено неравенството $|F(t, y)|\leqq M$ и функцията $g(x)$ е ограничена и монотонно клони към нула при $x\to+\infty$, то интегралът $\int_a^{\infty} f(x, y)\,g(x)dx$ е равномерно сходящ.

Преминаваме към изучаването на свойствата на несобствени интеграли, зависещи от параметър.

Теорема 7.9. *Нека за всяко b, по-голямо от a, функцията $f(x, y)$ клони към функцията $g(x)$ при $y\to y_0$ равномерно в сегмента $[a,b]$, където y_0 е гранична точка на множеството Y и интегралът $I(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)dx$ е равномерно сходящ в множеството Y. Тогава*

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^{\infty} f(x, y)dx=\int_a^{\infty} g(x)dx.$$

Доказателство. Ще докажем, че функцията $g(x)$ е интегруема в интервала $[a, \infty)$. За произволно число $\varepsilon>0$ съществува число $t_0=t_0(\varepsilon)>0$ такова, че за всеки t', t'', по-големи от t_0, и за всяко y от Y е изпълнено неравенството

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)dx\right|<\varepsilon.$$

Ако в горното неравенство оставим y да клони към y_0 при фиксирани t', t'', то ще получим

$$\left| \int_{t'}^{t''} g(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Това доказва сходимостта на интеграла $\int_a^\infty g(x)dx$.

Нека $\{t_n\}$ е произволна редица, клоняща към $+\infty$. Да разгледаме функционалната редица

$$I_n(y) = \int_a^{t_n(y)} f(x, y)dx,$$

която равномерно в множеството Y клони към $I(y)$, определена в равенството (7.5). Поради твърдение 2 от § 1 всяка от функциите $I_n(y)$ има крайна граница при $y \to y_0$. Освен това

$$\lim_{y\to y_0} I_n(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^{t_n} f(x, y)dx = \int_a^{t_n} [\lim_{y\to y_0} f(x, y)]dx = \int_a^{t_n} g(x)dx.$$

Но тогава съществува и границата

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{t_n\to\infty} \int_a^{t_n} g(x)dx = \int_a^\infty g(x)dx,$$

тъй като съгласно теорема 2.7 от глава 2 символът $\lim\limits_{t_n\to\infty}$ за равномерно сходяща редица $I_n(y)$ и символът $\lim\limits_{y\to y_0}$ за граница на функциите $I_n(y)$ може да си разменят местата.

Теоремата е доказана.

В частност, ако точката y_0 принадлежи на множеството Y и функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката y_0, т. е. за всяко $b > a$ функцията $f(x, y)$ в сегмента $[a, b]$ равномерно клони към функцията $f(x, y_0)$ при $y \to y_0$, то $\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$, т. е. $I(y)$ е непрекъсната в точката y_0.

По-точно вярна е следната теорема.

Теорема 7.9* (за непрекъснатост на равномерно сходящ несобствен интеграл по параметър). *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е непрекъсната за $x \geq a$ и $y \in [c, d]$ и интегралът $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ е равномерно сходящ в $[c, d]$. Тогава функцията $I(y)$ е непрекъсната в $(c, d]$.*

Доказателство. Във всеки правоъгълник $\Pi = \{a \leq x \leq t,$

$c \leq y \leq d\}$ функцията $f(x, y)$ равномерно в сегмента $[a, t]$ клони към функцията $f(x, y_0) = g(x)$ при $y \to y_0$ (вж. твърдение 6 от § 1). Затова при $t = t_n$ за интегралите $I_n(y)$, въведени при доказателството на теорема 7.9, са изпълнени условията за граничен преход под знака на интеграла. Оттук и от равномерната сходимост в $[c, d]$ на $I_n(y)$ към $I(y)$ получаваме, че $\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$, т. е. функцията $I(y)$ е непрекъсната. Теоремата е доказана.

Теорема 7.10. *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е непрекъсната и неотрицателна за $x \in [a, \infty)$ и $y \in [c, d]$. Нека понататък интегралът $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ е непрекъснат по y в $[c, d]$. Тогава този интеграл е равномерно сходящ по y в $[c, d]$.*

Доказателство. Да разгледаме редицата $I_n(y) = \int_a^{t_n} f(x, y)dx$ от непрекъснати в $[c, d]$ функции и нека t_n монотонно клони към $+\infty$. Тогава редицата $\{I_n(y)\}$, монотонно не намалявайки, клони към непрекъснатата функция $I(y)$. Следователно можем да приложим признака на Дини (теорема 2.4, глава 2).

Теоремата е доказана.

Теорема 7.11. *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е непрекъсната и неотрицателна за x и y, принадлежащи съответно на интервалите $[a, \infty)$ и $[c, d]$. Нека освен това функцията $f(x, y)$ във всяка точка x от $[a, \infty)$, монотонно не намалявайки, клони към непрекъснатата функция $g(x)$ при $y \to y_0$. Тогава от сходимостта на интеграла $\int_a^\infty g(x)dx$ следва, че може да се направи граничен преход под знака на интеграла (7.5) при $y \to y_0$.*

Доказателство. От признака на Вайерщрас (теорема 7.8) следва, че интегралът (7.5) е равномерно сходящ в $[c, d]$, тъй като $f(x, y) \leq g(x)$ и $g(x)$ е интегруема в $[a, \infty)$. Затова от теорема 7.9* следва, че може да се направи граничен преход под знака на интеграла.

Да преминем сега към въпроса за интегриране на несобствен интеграл по параметър.

Теорема 7.12 (за интегриране на несобствен интеграл по параметър). *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната за x и y, принадлежащи съответно на интервалите $[a, \infty)$ и $[c, d]$, и нека интегралът $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ е равно-*

мерно сходящ. Тогава функцията $I(y)$ е интегруема в $[c, d]$ и е вярна формулата

$$(*)\quad \int_c^d I(y)dy=\int_c^d dy\int_a^\infty f(x, y)dx=\int_a^\infty dx\int_c^d f(x, y)dy.$$

Доказателство. Съгласно теорема 7.9* функцията $I(y)$ е непрекъсната в $[c, d]$, а следователно и интегруема в този интервал. Да докажем сега формулата (*). Ще разгледаме функциите $I_n(y)=\int_a^{t_n} f(x, y)dx$ при $t_n\to\infty$. За всяка функция $I_n(y)$ от теорема 7.3 получаваме

$$(7.7)\qquad \int_c^d I_n(y)dy=\int_a^{t_n} dx\int_c^d f(x, y)dy.$$

Тъй като в интервала $[c, d]$ редицата $\{I_n(y)\}$ равномерно клони към $I(y)$, то в лявата страна на равенството (7.7) може да се направи граничен преход под знака на интеграла при $n\to\infty$. Следователно при $n\to\infty$ съществува и границата на редицата от интеграли, стоящи в дясната страна на (7.7). Така получаваме

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^d I_n(y)dy=\int_c^d I(y)dy=\lim_{n\to\infty}\int_a^{t_n} dx\int_c^d f(x, y)dy=\int_a^\infty dx\int_c^d f(x, y)dy,$$

което трябваше да се докаже.

Ще докажем сега теорема за интегриране на несобствен интеграл (7.5) по параметър, който се изменя в безкраен интервал.

Теорема 7.13. *Нека $f(x, y)$ е функция, непрекъсната и неотрицателна в областта $a\leq x<\infty$, $c\leq y<\infty$, интегралът $I(y)=\int_a^\infty f(x, y)dx$ е непрекъснат в интервала $[c, \infty)$, а интегралът $K(x)=\int_c^\infty f(x, y)dy$ е непрекъснат в интервала $[a, \infty)$. Тогава от сходимостта на единия от интегралите $\int_c^\infty I(y)\,dy$ и $\int_a^\infty K(x)\,dx$ следва сходимостта на другия и са верни равенствата*

$$\int_c^\infty I(y)\,dy=\int_a^\infty K(x)\,dx$$

или

$$\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x, y)\,dx=\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x, y)\,dy.$$

По такъв начин, ако са изпълнени условията на теорема 7.13, може да се интегрира по параметъра в безкраен интервал под знака на несобственния интеграл.

Доказателство. От условията на теоремата и от теорема 7.10 интегралите $I(y)$ и $K(x)$ са равномерно сходящи съответно първият в сегмента $[c, d]$ при всяко $d>c$, а вторият в сегмента $[a, b]$ при всяко $b>a$. Нека например е сходящ повторният интеграл $\int_c^\infty I(y)\,dy$. Да разгледаме ненамаляваща редица $\{t_n\}$, $t_n\to+\infty$. Тогава

$$\int_a^{t_n} K(x)\,dx=\int_a^{t_n} dx\int_0^\infty f(x, y)\,dy=\int_c^\infty dy\int_a^{t_n} f(x, y)\,dx.$$

Редицата $I(y, t_n)=\int_a^{t_n} f(x, y)\,dx$, $n=1, 2, \ldots$, за всяко d, по-голямо от c, клони равномерно в сегмента $[c, d]$ към $I(y)$. При това редицата $\{I(y, t_n)\}$ не намалява в $[c, d]$. Оттук и от теорема 7.11 следва равномерната сходимост на интеграла $\int_c^\infty I(y, t)\,dy$. Но тогава съгласно теорема 7.9 може да се направи граничен преход под знака на интеграла, т. е. имаме

$$\int_a^\infty K(x)\,dx=\lim_{t_n\to\infty}\int_a^{t_n} K(x)dx=\lim_{t_n\to\infty}\int_c^\infty I(y, t_n)\,dy=\int_c^\infty I(y)\,dy,$$

което трябваше да се докаже.

Да разгледаме сега въпроса за диференциране по параметър на несобствен интеграл.

Теорема 7.14 (за диференциране на несобствен интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ и нейната производна $f'_y(x, y)$ са непрекъснати в областта $a\leq x<\infty$, $c\leq y\leq d$. Нека по-нататък интегралът $I(y)=\int_a^\infty f(x, y)\,dx$ е сходящ във всяка точка y от сегмента $[c, d]$, а интегралът $\int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx$ е равномерно сходящ в*

сегмента $[c, d]$. *Тогава функцията* $I(y)$ *има производна** *за всяко* y *от* $[c, d]$, *при това*

$$I'(y)=\int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx.$$

Доказателство. Нека $t_n\to\infty$ и $I_n(y)=\int_a^{t_n} f(x, y)\,dx$. Редицата от непрекъснати функции $I_n(y)$ е сходяща във всяка точка от $[c, d]$ към функцията $I(y)$, а редицата от производни $I'_n(y)$ е равномерно сходяща в сегмента $[c, d]$. Тогава съгласно твърдение 5 от § 1 за всяка точка y от сегмента $[c, d]$ съществува $I'(y)=\lim\limits_{n\to\infty} I'_n(y)$. Но $I'_n(y)=\int_a^{t_n} f'_y(x, y)\,dx$. Следователно

$$I'(y)=\int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx.$$

2. Несобствени интеграли от втори род, зависещи от параметри. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана за x, принадлежащо на $[a, b]$, и y, принадлежащо на Y. Нека за всяко фиксирано y от Y функцията $f(x, y)$ е неограничена при $x\to a$, но такава, че интегралът

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{7.8}$$

е сходящ.

Определение 3. Несобственият интеграл от втори род (7.8) се нарича *равномерно сходящ по параметъра* y в множеството Y, ако за всяко t, удовлетворяващо неравенството $a<t<b$, функцията

$$F(t, y)=\int_t^b f(x, y)\,dx$$

при $t\to a+0$ равномерно клони относно $y\in Y$ към функцията $I(y)$.

Ще отбележим, че с помощта на смяна на променливата x, приведена в допълнение 2 към глава 9, част I, несобственият интеграл от втори род се свежда към несобствен интеграл от първи род. Затова за интеграла (7.8) могат да бъдат формулирани ос-

* При $y=c$ $I(y)$ има дясна производна $I'(c+0)$, а при $y=d$ — лява производна $I'(d-0)$.

новните теореми за граничен преход под знака на несобственния интеграл от първи род, за непрекъснатост по параметъра, за интегриране и диференциране по параметъра под знака на интеграла.

Накрая ще отбележим, че интеграл от вида

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx=\int_a^b f(x, y)\,dx+\int_b^\infty f(x, y)\,dx,$$

където първото събираемо е интеграл от неограничена функция, а второто събираемо — интеграл с неограничени граници, се нарича равномерно сходящ, ако и двата интеграла в дясната част са равномерно сходящи.

§ 4. Приложение на теорията на интегралите, зависещи от параметър, за пресмятане на някои несобствени интеграли

Описаните в предишните параграфи методи позволяват да се пресметнат някои несобствени интеграли.

1°. Да пресметнем интеграла

$$Q=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Сходимостта на този интеграл беше установена по-рано (вж. допълнение 2, глава 9, част I).

Ще разгледаме помощната функция

$$f(x, y)=\begin{cases} e^{-yx}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Функцията $f(x, y)$ и нейната производна $f'_y(x, y)=e^{-yx}\sin x$ са непрекъснати в областта $x\geq 0$, $y\geq 0$ и $f(x, 0)=\dfrac{\sin x}{x}$. Нека

$$I(y)=\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^\infty f(x, y)\,dx.$$

Ще докажем равномерната сходимост на този интеграл при $y\geq 0$. За това е достатъчно да установим равномерната сходимост на

интеграла $\int_1^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$. За този интеграл ще приложим признака на Дирихле — Абел от § 3. Интегралът

$$\int_1^t e^{-yx}\sin x\,dx=-\frac{e^{-yx}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\Bigg|_1^t$$

е ограничен, тъй като

$$\left|\int_1^t e^{-yx}\sin x\,dx\right|\leq\left|\frac{e^{-yt}(y\sin t+\cos t)}{1+y^2}\right|+$$

$$\left|\frac{e^{-1}(y\sin 1+\cos 1)}{1+y^2}\right|\leq\frac{2(1+y)}{1+y^2}\leq 3.$$

Функцията $\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$ монотонно клони към нула.

От равномерната сходимост на интеграла и непрекъснатостта на подинтегралната функция съгласно теорема 7.9 от § 3 следва непрекъснатостта на функцията $I(y)$ в $[0,\infty)$, т. е. вярно е равенството

$$\lim_{y\to 0+0} I(y)=I(0)=I.$$

Да намерим стойността на $I(y)$. Ще разгледаме спомагателния интеграл

$$\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx.$$

Съгласно признака на Дирихле — Абел, който очевидно е приложим за този интеграл, заключаваме, че този интеграл е равномерно сходящ в областта $[y_0,\infty)$, ако $y_0>0$. Оттук съгласно теорема 7.14, § 3 следва, че интегралът $I(y)$ може да се диференцира по параметъра y във всяка точка $y>0$. Така за всяко $y>0$ получаваме

$$I'(y)=-\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx=\frac{e^{-yx}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\Bigg|_0^\infty=-\frac{1}{1+y^2}.$$

Интегрираме това равенство в граници $[y,\infty)$ и получаваме

$$I(\infty)-I(y)=-\operatorname{arc\,tg} t\,\Big|_y^\infty=-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}(y).$$

Тъй като $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq 1$, то при $y\geq y_0$ имаме

$$|I(y)|\leq\int_0^\infty e^{-y_0x}\,dx=-\frac{1}{y_0}e^{-y_0x}\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{y_0}\to 0$$

при $y_0\to\infty$. Оттук получаваме, че $I(\infty)=0$, и следователно за всяко $y>0$ имаме

$$I(y)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} y.$$

Преминаваме към граница в последното равенство при $y\to 0+0$ и получаваме

$$I(0)=I=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

2°. Да разгледаме интеграла

$$I(y)=\int_0^\infty\frac{\sin yx}{x}\,dx.$$

Ще намерим неговото значение за $y>0$, $y<0$ и $y=0$. При $y>0$ в интеграла $I(y)$ правим смяна на променливата, полагайки $yx=t$. Тогава

$$I(y)=\int_0^\infty\frac{\sin yx}{x}\,dx=\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

При $y<0$ правим смяна на променливата $yx=-t$, $(t>0)$. Имаме

$$I(y)=-\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt=-\frac{\pi}{2}.$$

При $y=0$ интеграла $I(y)$ е очевидно равен на нула. Следователно

$$I(y)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{при} \quad y>0,\\ 0 & \text{при} \quad y=0,\\ -\frac{\pi}{2} & \text{при} \quad y<0.\end{cases}$$

Този интеграл понякога се нарича прекъснат множител на Дирихле. В частност с помощта на прекъснатия множител на Дирихле получаваме представяне на функцията $\operatorname{sgn} y$, т. е. на функцията

$$\operatorname{sgn} y=\begin{cases}1 & \text{при} \quad y>0,\\ 0 & \text{при} \quad y=0,\\ -1 & \text{при} \quad y<0\end{cases}$$

във вида

$$\operatorname{sgn} y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx.$$

3°. Да пресметнем интеграла на Поасон $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ (вж. също § 6, гл. 3). Нека

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

За пресмятането на този интеграл полагаме $x=yt$, където $y>0$, и разглеждаме интеграла

$$I=I(y)=\int_0^\infty ye^{-y^2t^2}\,dt.$$

Да умножим двете части на горното равенство с e^{-y^2} и да интегрираме в граници $[0, \infty)$. Получаваме

$$I\int_0^\infty e^{-y^2}dy=I^2=\int_0^\infty e^{-y^2}\cdot y\left\{\int_0^\infty e^{-y^2t^2}dt\right\}dy.$$

Да разгледаме функцията $f(y, t)=ye^{-(1+t^2)y^2}$. В областта $y\geq 0$, $t\geq 0$ тази функция е непрекъсната, ограничена и неотрицателна. Интегралите

$$\int_0^\infty f(y, t)\,dt=ye^{-y^2}\int_0^\infty e^{-y^2t^2}dt=e^{-y^2}\cdot I$$

и

$$\int_0^\infty f(y, t)\,dy=\int_0^\infty ye^{-(1+t^2)y^2}dy=-\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-(1+t^2)y^2}\Big|_0^\infty=\frac{1}{2(1+t^2)}$$

са непрекъснати функции в областта на изменение на параметъра, т. е. съответно в областите $y\geq 0$ и $t\geq 0$. Освен това

$$\int_0^\infty dt\int_0^\infty f(y, t)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Следователно са изпълнени всички условия на теорема 7.13 от § 3. Затова

$$I^2=\int_0^\infty e^{-y^2}y\left\{\int_0^\infty e^{-y^2t^2}dt\right\}dy=\int_0^\infty dt\int_0^\infty f(y, t)\,dy=\frac{\pi}{4},$$

т. е.

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

§ 5. Ойлерови интеграли

В този параграф ще изучим някои свойства на един важен клас неелементарни функции, наречени ойлерови интеграли*.

Ойлеров интеграл от първи род или «бетафункция» (B-функция) се нарича интегралът

$$B(\alpha, \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

В този интеграл α и β са параметри. Ако тези параметри удовлетворяват условията $\alpha<1$ и $\beta<1$, то интегралът $B(\alpha, \beta)$ е несобствен интеграл, зависещ от параметри, при това подинтегралната функция има особености в точките $x=0$ и $x=1$.

Ойлеров интеграл от втори род или «гамафункция» (Г-функция) се нарича интегралът

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Ще отбележим, че областта на интегриране е $[0, \infty)$ и при $\alpha<1$ точката $x=0$ е особена точка за подинтегралната функция.

1. Г-функция. Интегралът

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

е сходящ за всяко $\alpha>0$, тъй като $0\leq x^{\alpha-1}e^{-x}\leq x^{\alpha-1}$, и интегралът $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$ е сходящ при $\alpha>0$.

В областта $\alpha\geq\alpha_0$, където α_0 е произволно положително число, този интеграл е равномерно сходящ, тъй като $0\leq x^{\alpha-1}e^{-x}\leq x^{\alpha_0-1}$ и може да се приложи признакът на Вайерщрас (теорема 7.8, § 3). И при всички $\alpha>0$ е сходящ интегралът

* По-подробно теорията на интегралите на Ойлер е изложена в книгата на Е. Г. Уитъкер и Д. Н. Уотсън «Курс современного анализа», т. II, Физматгиз, 1963.

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx+\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$

тъй като второто събираемо в дясната част е очевидно сходящ интеграл при $\alpha>0$. Лесно се вижда, че този интеграл е равномерно сходящ в областта $0<\alpha_0\leqq\alpha\leqq A_0<\infty$, където числото A_0 е произволно. Действително за всички такива α и за всички $x>0$ $x^{\alpha-1}e^{-x}\leqq e^{-x}[x^{\alpha_0-1}+x^{A_0-1}]$ и тъй като $\int_0^\infty e^{-x}[x^{\alpha_0-1}+x^{A_0-1}]\,dx$ е сходящ интеграл, то може да се приложи признакът на Вайерщрас. По такъв начин в областта $0<\alpha_0\leqq\alpha\leqq A_0<\infty$ интегралът $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ е равномерно сходящ. Оттук следва непрекъснатост на функцията $F(\alpha)$ в областта $\alpha>0$. Да докажем сега диференцируемостта на тази функция при $\alpha>0$. Да забележим, че функцията $f'_\alpha(x,\alpha)=\ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}$ е непрекъсната за $\alpha>0$ и $x>0$, и да покажем, че интегралът

$$\int_0^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx=\int_0^\infty \ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

е равномерно сходящ по α във всеки сегмент $[\alpha_0, A_0]$, $0<\alpha_0<A_0<\infty$. Да изберем число ε_0 такова, че $0<\varepsilon_0<\alpha_0$. Имаме $\lim\limits_{x\to 0} x^{\varepsilon_0}\ln x=0$. Затова съществува число δ такова, че $|x^{\varepsilon_0}\ln x|\leqq 1$ за $x\in(0,\delta]$. тогава в $(0,\delta]$ е вярно неравенството

$$|\ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}|\leqq x^{\alpha_0-\varepsilon_0-1}$$

и тъй като интегралът $\int_0^\delta \frac{dx}{x^{1-(\alpha_0-\varepsilon_0)}}$ е сходящ, то интегралът $\int_0^\delta \ln x\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ е равномерно сходящ относно α в $[\alpha_0, A_0]$. Аналогично за $\alpha<A_0$ съществува такова число $\delta_1>1$, че за всички $x\geqq\delta_1$ е изпълнено неравенството $\left|\frac{\ln x}{x}\,.\,\frac{x^{\delta_1+2}}{e^x}\right|\leqq 1$. За тези x и всички $\alpha\leqq A_0$ получаваме $|\ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}|\leqq\frac{1}{x^2}$. Оттук и от признака за сравнение следва, че интегралът $\int_{\delta_1}^\infty \ln x\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ е равномерно сходящ относно α в $[\alpha_0, A_0]$. Накрая интегралът

$$\int_\delta^{\delta_1} \ln x\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

е равномерно сходящ относно α в $[\alpha_0, A_0]$, тъй като подинтегралната функция е непрекъсната в областта $\delta\leqq x\leqq\delta_1$, $\alpha_0\leqq\alpha\leqq A_0$. Следователно интегралът

$$\int_0^\infty \ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

е равномерно сходящ в областта $[\alpha_0, A_0]$ относно α и следователно функцията $\Gamma(\alpha)$ е диференцируема при всяко $\alpha>0$ и е вярно равенството

$$\Gamma'(\alpha)=\int_0^\infty \ln x\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

За интеграла $\Gamma'(\alpha)$ може да се повторят същите разсъждения, откъдето следва

$$\Gamma''(\alpha)=\int_0^\infty \ln^2 x\;x^{\alpha-1}\;e^{-x}\,dx.$$

По индукция се доказва, че Г-функцията е безкрайно диференцируема за $\alpha>0$ и за n-тата производна е вярно равенството

$$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^\infty \ln^n x\,.\,x^{\alpha-1}\,.\,e^{-x}\,dx.$$

Да интегрираме по части функцията $\Gamma(\alpha+1)$. Имаме

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx=-x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty+\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Следователно

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha).$$

Горното равенство се нарича функционално уравнение на Г-функцията. Ако $\alpha>1$, като приложим функционалното уравнение на $\Gamma(\alpha)$, ще получим

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

Ако $n-1<\alpha<n$, то в резултат на последователно прилагане на функционалното уравнение ще получим

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1).$$

Последното равенство показва, че е достатъчно да знаем $\Gamma(\alpha)$ в интервала $(0, 1]$, за да пресметнем нейното значение за всяко $\alpha>0$. Например, ако $\alpha=n$, получаваме

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\ldots 2\,.\,1\,\Gamma(1).$$

Тъй като $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx=1$, то

$$\Gamma(n+1)=n!\,.$$

От тази формула например получаваме

$$\Gamma(1)=1=0!\,,$$

което отговаря на приетото означение $0!=1$.

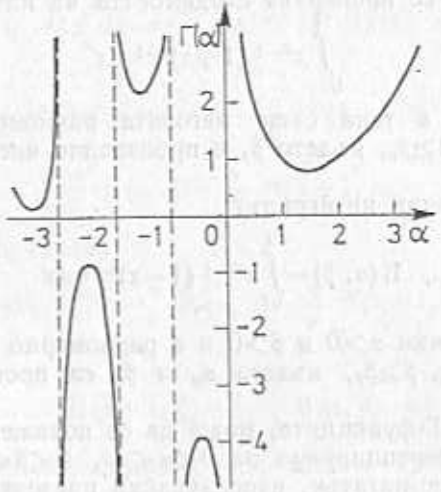
Сега ще изучим поведението на Г-функцията и ще построим нейната графика.

От израза за втората производна на Г-функцията се вижда, че $\Gamma''(\alpha)>0$ за всички $\alpha>0$. Следователно $\Gamma'(\alpha)$ е растяща функция. Тъй като $\Gamma(2)=1$, $\Gamma(1)=1$, то от теоремата на Рол следва, че в сегмента $[1,2]$ производната $\Gamma'(\alpha)$ има единствена нула в някоя точка α_1. Следователно $\Gamma'(\alpha)<0$ при $\alpha<\alpha_1$ и $\Gamma'(\alpha)>0$ при $\alpha>\alpha_1$, т. е. $\Gamma(\alpha)$ монотонно намалява в интервала $(0,\alpha_1)$ и монотонно расте в интервала (α_1, ∞). По-нататък, тъй като $\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$, то $\Gamma(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to 0+0$. При $\alpha>2$ от формулата $\Gamma(\alpha)=\alpha\,\Gamma(\alpha-1)>$ $>\alpha\,\Gamma(1)=\alpha$ следва, че $\Gamma(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to+\infty$.

Равенството $\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$ може да се използува за продължаване на Г-функцията и за отрицателни значения на α.

Полагаме за $-1<\alpha<0$, че $\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$. Дясната страна на това равенство е определена за всички α от $(-1,0)$. Получаваме, че така определената функция $\Gamma(\alpha)$ приема отрицателни значения в интервала $(-1,0)$ и при $\alpha\to-1+0$, а също така и при $\alpha\to 0-0$ функцията $\Gamma(\alpha)$ клони към $-\infty$.

След като сме дефинирали по такъв начин функцията $\Gamma(\alpha)$ в интервала $(-1,0)$, ние можем по същата формула да я продължим и в интервала $(-2, -1)$. В този интервал продължението на Г-функцията ще се окаже функция, която приема положителни значения и такава, че $\Gamma(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to-2+0$ и $\alpha\to-1-0$. Продължавайки този процес, ще определим функцията $\Gamma(\alpha)$, която ще има прекъсвания от втори род в целочислените точки $\alpha=-k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ (вж. фиг. 7.1). Да подчертаем още веднъж, че интегралът



Фиг. 7. 1

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\,e^{-x}\,dx$$

дефинира Г-функцията само за положителни значения на α. Продължението на тази функция за отрицателни значения на α е осъществено с помощта на функционалното уравнение $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$.

2. B-функция. Да разгледаме интеграла, определящ B-функцията

$$B(\alpha, \beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

Интегралът $\int\limits_0^{1/2} x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\,dx$ е сходящ за $\alpha>0$ и за всяко β, тъй като за $0<x\leq\frac{1}{2}$ е вярно неравенството $0\leq x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\leq Cx^{\alpha-1}$ за някакво $C>0$ и интегралът $\int\limits_0^{1/2} x^{\alpha-1}\,dx$ е сходящ за $\alpha>0$.

Този интеграл е равномерно сходящ относно α и β в областта $\alpha\geq\alpha_0>0$, $\beta\geq 0$, тъй като

$$0\leq x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\leq Cx^{\alpha_0-1}$$

за всички $\alpha\geq\alpha_0$ и $\beta\geq 0$ и за всички $x\in[0, 1/2]$.

Аналогично се проверява сходимостта на интеграла

$$\int_{1/2}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

за $\alpha\geqq 0$ и $\beta>0$, а така също неговата равномерна сходимост в областта $\alpha\geqq 0$, $\beta\geqq\beta_0$, където β_0 е произволно число, по-голямо от нула.

По такъв начин интегралът

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

е сходящ за всички $\alpha>0$ и $\beta>0$ и е равномерно сходящ по α и β в областта $\alpha\geqq\alpha_0$, $\beta\geqq\beta_0$, където α_0 и β_0 са произволни положителни числа.

Както и за Г-функцията, може да се покаже, че В-функцията е безкрайно диференцируема за $0<\alpha<\infty$, $0<\beta<\infty$. Но ние ще установим това по-нататък, използвайки представяне на В-функцията чрез Г-функцията. Затова няма да показваме непосредствено диференцируемост на В-функцията.

Ще докажем някои свойства на В-функцията.

1°. Симетричност на В-функцията. Ще покажем, че при всички $\alpha>0$, $\beta>0$ е изпълнено равенството

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha),$$

т. е. В-функцията е симетрична относно своите аргументи.

В интеграла, определящ В-функцията, правим смяна на променливата $t=1-x$. Получаваме

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx=-\int_1^0 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,dt=$$

$$=\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt=B(\beta,\alpha).$$

2°. Функционално уравнение на В-функцията. Ще покажем, че за всички $\alpha>0$ и $\beta>0$ е вярно следното функционално уравнение:

$$B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,B(\alpha,\beta).$$

Наистина имаме

$$B(\alpha+1,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx=-\frac{1}{\beta}\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1+$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\,dx=\frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)(1-x)^{\beta-1}\,dx=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\left[\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx-\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha,\beta)-\frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha+1,\beta).$$

Следователно получаваме

$$B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha,\beta)-\frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha+1,\beta),$$

т. е.

$$B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,B(\alpha,\beta).$$

От свойството симетричност за всички $\alpha>0$ и $\beta>0$ получаваме също така формулата

$$B(\alpha,\beta+1)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,B(\alpha,\beta).$$

Последователното прилагане на тази формула ни дава възможност да изразим всяко значение на $B(\alpha,\beta)$ чрез стойностите на тази функция в правоъгълника $\prod=\{0<\alpha\leqq 1, 0<\beta\leqq 1\}$.

3. Връзка между Г-функцията и В-функцията. В интеграла, определящ Г-функцията, да направим смяна на променливата, полагайки $x=ut$, където $u>0$, а в интеграла, определящ В-функцията — $x=\frac{t}{1+t}$. Получаваме

$$\Gamma(\alpha)=u^{\alpha}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-ut}\,dt,\quad B(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt.$$

След заменяне в първия интеграл u с $1+v$, а α с $\alpha+\beta$ получаваме

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+v)^{\alpha+\beta}}=\int_0^{\infty} t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}\,v^{\alpha-1}\,dt.$$

Да предположим, че $\alpha>1$, $\beta>1$, и да разгледаме в областта $t\geqq 0$, $v\geqq 0$ функцията

$$f(t,v)=t^{\alpha+\beta-1}\cdot v^{\alpha-1}\cdot e^{-(1+v)t}.$$

Очевидно, че $f(t,v)\geqq 0$ в тази област. Интегралът

$$I(v)=\int_0^\infty f(t, v)\,dt=\Gamma(\alpha+\beta)\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}$$

е непрекъсната функция по v на полуправата $v\geq 0$. Интегралът по другата променлива от тази функция е също непрекъсната функция на полуправата $t\geq 0$, тъй като

$$K(t)=\int_0^\infty f(t, v)\,dv=t^{\alpha+\beta-1}\,e^{-t}\int_0^\infty e^{-tv}\,v^{\alpha-1}\,dv=\Gamma(\alpha)\,t^{\beta-1}\,e^{-t}.$$

И накрая съществува повторният интеграл

$$\int_0^\infty K(t)\,dt=\int_0^\infty dt\int_0^\infty f(t, v)\,dv=\int_0^\infty \Gamma(\alpha)\,t^{\beta-1}\,e^{-t}\,dt=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta).$$

Следователно от теорема 7.13, § 3 следва равенството

$$=\int_0^\infty \Gamma(v)\,dv=\int_0^\infty K(t)\,dt$$

или

$$\int_0^\infty I(v)\,dv=\int_0^\infty \Gamma(\alpha+\beta)\,\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=$$

$$\int_0^\infty K(t)\,dt=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta).$$

По такъв начин получаваме

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=\Gamma(\alpha+\beta)\,\mathrm{B}(\alpha, \beta)=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta),$$

като се възползувахме от установената по-горе формула

$$\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=\mathrm{B}(\alpha, \beta).$$

Получихме, че за всички $\alpha>1$ и $\beta>1$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Да разпространим тази формула за $\alpha>0$, $\beta>0$. Да запишем установената формула за значения на α и β такива, че $\alpha+1>1$, $\beta+1>1$:

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Като използуваме функционалните уравнения, получаваме

$$\mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\,\mathrm{B}(\alpha, \beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\mathrm{B}(\alpha, \beta),$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha),\quad \Gamma(\beta+1)=\beta\,\Gamma(\beta),$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+2)=(\alpha+\beta+1)\,(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta).$$

Заместваме тези изрази във формулата за $\mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1)$. Получаваме формулата

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

вярна за всички α и β, за които $\alpha>0$, $\beta>0$.

4. Примери за пресмятане на интеграли с помощта на ойлеровите интеграли. Ще посочим някои примери за пресмятане на интеграли, които се свеждат към ойлеровите интеграли.

1°. Да пресметнем интеграла

$$I=\int_0^\infty x^{\frac{1}{4}}\,(1+x)^{-2}\,dx.$$

Очевидно е, че

$$I=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

2°. Да пресметнем стойността на интеграла:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} t\cos^{\beta-1} t\,dt.$$

Полагаме $x=\sin^2 t$. Получаваме

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-1}\,(1-x)^{\frac{\beta}{2}-1}\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

3°. Да пресметнем интеграла

$$I_{\alpha-1}=\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} t\,dt.$$

Като използуваме пример 2° (при $\beta=1$), получаваме

$$I_{\alpha-1}=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

Тъй като

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\int_0^\infty e^{-(\sqrt{t})^2}d\sqrt{t}=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx,$$

то $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}/2$ (вж. пример 3°, § 4). Затова

$$I_{\alpha-1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

§ 6. Формула на Стирлинг

Вече знаем, че

$$n!=\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx.$$

Ще намерим представяне на величината $n!$ за големи стойности на n (така нареченото асимптотическо представяне). Ще докажем, че

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),$$

където величината ω се намира между -1 и $+1$. Това е формулата на Стирлинг.

Преминаваме към нейното доказателство. Да отбележим, че функцията $x^n e^{-x}$ расте в интервала $[0, n]$ от 0 до $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ и намалява в интервала $[n, \infty)$ от $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ до 0. Тъй като

$$x^n e^{-x}=\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x},$$

то

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}dx.$$

Функцията $\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}$ расте от 0 до 1 в интервала $[0, n]$ и намалява от 1 до 0 в интервала $[n, \infty)$. Затова може да се направи смяна на променливата

$$(*)\qquad \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}=e^{-t^2}.$$

При това сегментът $[0, n]$, където се изменя x, ще отговаря на полуправата $(-\infty, 0]$, където се изменя t, а полуправата $[n, \infty)$ на изменението на x ще отговаря на полуправата $[0, \infty)$ на изменението на t.

За да направим смяната (*), е необходимо да намерим производната $\frac{dx}{dt}$. За всяко $x\neq n$, диференцирайки лявата и дясната страна на (*) по t, получаваме

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2tx}{x-n}.$$

От друга страна, логаритмувайки равенството (*), получаваме

$$t^2=x-n-n\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right).$$

Записваме за функцията $f(y)=\ln(1+y)$ формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Лагранж. Получаваме, че съществува число θ от интервала $(0,1)$ такова, че

$$\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta y)^2}.$$

Оттук получаваме, че за $y=\frac{x-n}{n}$

$$\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right)=\frac{x-n}{n}-\frac{1}{2}\,\frac{(x-n)^2}{[n+\theta(x-n)]^2}$$

и затова

$$t^2=\frac{n}{2}\,\frac{(x-n)^2}{[n+\theta(x-n)]^2}.$$

Оттук следва

$$t=\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{x-n}{n+\theta(x-n)}=\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{1}{\theta+\frac{n}{x-n}}.$$

Затова $\frac{n}{x-n}=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta$ и следователно

$$\frac{dx}{dt}=2t\frac{x}{x-n}=2t\left[1+\frac{n}{x-n}\right]=2t\left[\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}+1-\theta\right]=2\sqrt{\frac{n}{2}}+2t(1-\theta).$$

Сега в интеграла $\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}dx$ да направим смяна на променливата, съответстваща на равенството (*). Получаваме

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\,dx=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\left[2\sqrt{\frac{n}{2}}+2t(1-\theta)\right]dt=$$

$$=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt+\frac{2}{\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt.\right.$$

Да оценим интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt$. Имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}t(1-\theta)\,dt\leq 2\int_0^\infty te^{-t^2}dt=-e^{-t^2}\Big|_0^\infty=1.$$

Отчитайки, че $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ и че $\sqrt{\pi}>\sqrt{2}$, окончателно получаваме

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),$$

където $|\omega|\leq 1$. Формулата на Стирлинг е доказана.

Да забележим, че с по-прецизни оценки може да се докаже следната формула*:

$$n!=\Gamma(n+1)=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\frac{139}{5184n^3}+0\left(\frac{1}{n^4}\right)\right].$$

§ 7. Кратни интеграли, зависещи от параметър

1. Собствени кратни интеграли, зависещи от параметър. Нека $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е точка от ограничената област Ω_n на n-мерното евклидово пространство E^n, а $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ е точка от ограничената област D_m на m-мерното пространство E^m. Да означим с $\Omega_n\times D_m$ декартовото произведение на областите Ω_n и D_m, което е подмножество на $(n+m)$-мерното евклидово пространство E^{n+m}, състоящо се от точки $z=(z_1, z_2, \ldots, z_{n+m})$ такива, че точката $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ принадлежи на Ω_n, а точката $(z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{n+m})$ принадлежи на D_m (често се пише: $z=(x, y)$).

* Вж. например § 5, гл. 9 от книгата «Основы математического анализа, часть 2» на В. А. Илин и Е. Г. Позняк.

Фактът, че точката z принадлежи на $\Omega_n\times D_m$, обикновено се записва по следния начин: $z=(x, y)\in\Omega_n\times D_m$.

Затворената обвивка на областта Ω_n ще означаваме със символа $\bar{\Omega}_n$, а затворената обвивка на D_m — с $\bar{D}_m$. Лесно се вижда, че затворената обвивка на $\Omega_n\times D_m$ съвпада с $\bar{\Omega}_n\times\bar{D}_m$.

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в $\Omega_n\times D_m$, при това за всяко y_0 от D_m функцията $f(x, y_0)$ е интегруема по x в областта Ω_n. Тогава функцията

$$I(y)=\int_{\Omega_n}f(x, y)\,dx, \tag{7.9}$$

дефинирана в D_m, се нарича интеграл, зависещ от параметър $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, т. е. от m числови параметри.

Точно така, както и в § 2, се доказват теоремите:

Теорема 7.15 (за непрекъснатост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на $n+m$ променливи в областта $\bar{\Omega}_n\times\bar{D}_m$. Тогава интегралът (7.9) е непрекъсната функция по параметъра y в областта D_m.*

Теорема 7.16 (за интегриране на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на $n+m$ променливи в областта $\bar{\Omega}_n\times\bar{D}_m$. Тогава функцията (7.9) може да се интегрира по параметъра, т. е. вярно е равенството*

$$\int_{D_m}I(y)\,dy=\int_{\Omega_n}dx\int_{D_m}f(x, y)\,dy.$$

Теорема 7.17 (за диференцируемост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ и нейната частна производна $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ са непрекъснати в областта $\bar{\Omega}_n\times\bar{D}_m$. Тогава интегралът (7.9) има в областта D_m непрекъсната частна производна*

$$\frac{\partial I(y)}{\partial y_k},\quad \text{при това}\quad \frac{\partial I(y)}{\partial y_k}=\int_{\Omega_n}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y_k}\,dx.$$

2. Несобствени кратни интеграли, зависещи от параметър. Ще разгледаме за простота случая, когато $\Omega_n=D_m=D$. Нека функцията $f(x, y)$ също така има специален вид: $f(x, y)=F(x, y)\,g(x)$, където $F(x, y)$ е непрекъсната при $x\neq y$ в $\bar{D}\times\bar{D}$, а функцията $g(x)$ е ограничена в D, $|g(x)|\leq M$. Да разгледаме интеграла

$$V(y)=\int_D F(x, y)\,g(x)\,dx, \tag{7.10}$$

където подинтегралната функция може да има особеност само за $x=y$. По такъв начин особеностите на подинтегралната функция зависят от параметъра.

Ще дефинираме понятието равномерна сходимост на интеграла (7.10) в точка. Да означим с $O(y_0, \delta)$ m-мерното кълбо с радиус δ и с център точката y_0.

Определение. Интегралът (7.10) се нарича равномерно сходящ по параметъра y в точката $y_0 \in D$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че $O(y_0, \delta) \subset D$ и за всяка кубируема област $G \subset O(y_0, \delta)$ и за всички $y \in O(y_0, \delta)$ е изпълнено неравенството

$$\left| \int_G F(x, y)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 7.18. *Ако интегралът* (7.10) *е равномерно сходящ по y в точката $y_0 \in D$, то той е непрекъснат в тази точка.*

Доказателство. Трябва да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за $|y-y_0| = \rho(y, y_0) < \delta$ е изпълнено неравенството $|V(y)-V(y_0)| < \varepsilon$. От равномерната сходимост на интеграла в точката y_0 следва съществуването на число $\delta_1>0$ такова, че $O(y_0, \delta_1) \subset D$ и при $y \in O(y_0, \delta_1)$ е изпълнено неравенството

$$\left| \int_{O(y_0, \delta_1)} F(x, y)\, g(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нека

$$V_1(y) = \int_{O(y_0, \delta_1)} F(x, y)\, g(x)\, dx,$$

$$V_2(y) = \int_{O'(y_0, \delta_1)} F(x, y)\, g(x)\, dx,$$

където $O'(y_0, \delta_1) = D \setminus O(y_0, \delta_1)$ е допълнението на кълбото $O(y_0, \delta_1$ до областта D.

Ще отбележим, че за $x \in O'(y_0, \delta_1)$, $y \in O\left(y_0, \frac{\delta_1}{2}\right)$ функцията $F(x, y)$ е равномерно непрекъсната като функция и на двата аргумента. Затова съществува положително число $\delta < \frac{\delta_1}{2}$ такова, че за $\rho(y, y_0) < \delta$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|F(x, y_0) - F(x, y)| < \frac{\varepsilon}{3M|D|},$$

където M е константата, ограничаваща $g(x)$ в D, и $|D|$ е обемът на областта D. Тъй като при $\rho(y, y_0) < \delta$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|V_2(y) - V_2(y_0)| \leq M \int_{O'(y_0, \delta_1)} |F(x, y_0) - F(x, y)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$V_1(y) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad V_1(y_0) < \frac{\varepsilon}{3},$$

то

$$|V(y) - V(y_0)| \leq |V_1(y)| + |V_1(y_0)| + |V_2(y) - V_2(y_0)| < \varepsilon.$$

Теоремата е доказана.

Ще посочим достатъчно условие за равномерна сходимост на интеграла (7.10) по параметъра във всяка точка $y_0 \in D$.

Теорема 7.19. *Нека функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в $\overline{D} \times \overline{D}$ при $x \neq y$, а $g(x)$ е ограничена в D. Да предположим, че съществуват константи λ, $0<\lambda<m$ и $C>0$ такива, че за всички $x \in D$ и $y \in D$ е изпълнено неравенството*

$$|F(x, y)| \leq C\, |x-y|^{-\lambda}.$$

Тогава интегралът (7.10) *е равномерно сходящ по y във всяка точка $y_0 \in D$.*

Доказателство. Ще докажем, че за всяка точка y_0 от областта D и всяко число $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за всяка кубируема област $G \subset O(y_0, \delta)$ и всички $y \in O(y_0, \delta)$ е изпълнено неравенството

$$\left| \int_G F(x, y)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Отчитайки оценката за $F(x, y)$ и ограничеността на $g(x)$, получаваме

$$\left| \int_G F(x, y)\, g(x)\, dx \right| \leq M_1 \int_G |x-y|^{-\lambda}\, dx.$$

Да фиксираме точка $y \in O(y_0, \delta)$. От условието $G \subset O(y_0, \delta)$ следва че $G \subset O(y, 2\delta)$. Затова

$$\left| \int_G F(x, y)\, g(x)\, dx \right| \leq M_1 \int_{O(y, 2\delta)} |x-y|^{-\lambda}\, dx.$$

Интегралът в дясната част може да се пресметне в m-мерните сферически координати. Имаме

$$\left| \int_G F(x, y)\, g(x)\, dx \right| \leq M_2 \int_0^{2\delta} r^{m-1-\lambda} dr = \frac{M_2\, 2^{m-\lambda}\, \delta^{m-\lambda}}{m-\lambda} = M_3 \delta^{m-\lambda}.$$

Ясно е, че за достатъчно малко δ величината $\left|\int\limits_G F(x, y)\, g(x)\, dx\right|$ може да се направи по-малка от ε. Теоремата е доказана.

Пример. Да приложим получените резултати към теорията на така наречените нютонови потенциали. Нека в някоя точка $A_0(x, y, z)$ е поместена маса m_0. Нека маса m, поместена в точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$, по закона за всемирното привличане действува сила

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m m_0}{R^2} \vec{r},$$

където $R = \rho(A_0, A_1)$, γ е гравитационна константа и $\vec{r} = \frac{\vec{R}}{R}$ е единичен вектор, имащ едно и също направление с вектора $\overrightarrow{A_0A_1}$. Нека $\gamma = 1$, $m = 1$. Тогава

$$\vec{F} = -\frac{m_0}{R} \vec{r},$$

или покомпонентно

$$X = -\frac{m_0}{R^3}(x_1 - x),\quad Y = -\frac{m_0}{R^3}(y_1 - y),\quad Z = -\frac{m_0}{R^3}(z_1 - z).$$

Очевидно потенциалът на силата на привличане, определен като скаларна функция U такава, че $\vec{F} = \operatorname{grad} U$, е равен на

$$U = \frac{m_0}{R}.$$

Ако масата е съсредоточена не в точката $A_0(x, y, z)$, а е разпределена в областта D с плътност $\mu(x, y, z)$, то за потенциала и за компонентите на силата ще получим

$$u(x_1, y_1, z_1) = \iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R}\, dx\, dy\, dz,$$

$$X = -\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(x_1 - x)\, dx\, dy\, dz,$$

$$Y = -\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(y_1 - y)\, dx\, dy\, dz,$$

$$Z = -\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(z_1 - z)\, dx\, dy\, dz.$$

Интегралите за X, Y и Z са частните производни на потенциала U. Подинтегралните изрази за всички интеграли може да се оценят чрез $CR^{-\lambda}$, където $\lambda = 1$ за интеграла, определящ потенциала U, и $\lambda = 2$ за интегралите, определящи компонентите на силата. Тъй като $\lambda < 3$, то от теорема 7.19 следва равномерната сходимост на тези интеграли по параметъра във всяка точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

Следователно по теорема 7.18 те са непрекъснати функции на точката $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

8. Редове на Фурие

Изучаваното в тази глава разлагане на функция в ред на Фурие е обобщение и развитие на идеята за разлагане на вектор по базис.

От линейната алгебра е известно, че ако в крайномерно линейно пространство изберем някакъв базис, то всеки вектор от това пространство може да бъде разложен по базиса, т. е. да се представи като линейна комбинация на базисните вектори. Съществено по-сложни са въпросите за избор на базис и разлагане по базиса в случай на безкрайномерно пространство. В тази глава тези въпроси се изучават за случая на така наречените евклидови безкрайномерни пространства и за базиси от специален тип (така наречените ортонормирани базиси).

Особено подробно се изучава базисът в пространството от всички частично непрекъснати върху даден затворен интервал функции, образуван от така наречената тригонометрична система.

§ 1. Ортонормирани системи и общи редове на Фурие

1. Ортонормирани системи. Ще разглеждаме произволно евклидово пространство.

Ще припомним, че линейното пространство R се нарича евклидово, ако е зададено правило, чрез което на всеки два елемента $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ от пространството R се съпоставя число, наричано скаларно произведение на тези елементи, което означаваме със символа $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$.

При това скаларното произведение удовлетворява следните четири аксиоми:

1°. $(\mathbf{f}, \mathbf{g})=(\mathbf{g}, \mathbf{f})$ (симетричност);
2°. $(\mathbf{f}+\mathbf{g}, \mathbf{h})=(\mathbf{f}, \mathbf{h})+(\mathbf{g}, \mathbf{h})$;
3°. $(\lambda\mathbf{f}, \mathbf{g})=\lambda(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ за всяко реално λ;

4°. $(\mathbf{f}, \mathbf{f})>0$, ако $\mathbf{f}$ е ненулев елемент,
$(\mathbf{f}, \mathbf{f})=0$, ако $\mathbf{f}$ е нулевият елемент.

Свойства 2° и 3° означават, че скаларното произведение е линейна функция на първия си аргумент.

Ще припомним още, че линейното (и в частност евклидовото) пространство се нарича безкрайномерно, ако в това пространство съществуват произволно много линейно независими елементи.

Ще дадем класически пример на евклидово пространство с безкрайна размерност.

Ще припомним, че функцията $f(x)$ се нарича частично непрекъсната в сегмента $[a, b]$, ако тя е непрекъсната навсякъде в сегмента с изключение може би на краен брой точки, във всяка от които тя има прекъсване от I род*.

За линейното пространство от всички частично непрекъснати върху сегмента $[a, b]$ функции е естествено да въведем скаларно произведение на функциите $f(x)$ и $g(x)$ чрез равенството

$$(f, g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{8.1}$$

Тривиално се проверява, че при такова определение на скаларното произведение са изпълнени първите три аксиоми: 1°. $(f, g)=(g, f)$; 2°. $(f+g, h)=(f, h)+(g, h)$; 3°. $(\lambda f, g)=\lambda(f, g)$ за всяко реално λ.

Обаче за да се окаже, че е справедлива и четвъртата аксиома [$(f, f)\geqq 0$ и е равно на нула тогава и само тогава, когато f е нулевият елемент], се налага да приемем допълнително уговорката, че стойността на частично непрекъснатата функция $f(x)$ във всяка нейна точка на прекъсване x_i да е равна на полусумата от лявата и дясната ѝ граница в тази точка:

$$f(x_i)=\frac{f(x_i+0)+f(x_i-0)}{2}. \tag{8.2}$$

Да се убедим, че ако във всяка точка на прекъсване x_i е изпълнено условието (8.2), то за скаларното произведение (8.1) е в сила аксиома 4°.

Наистина първо винаги $(f, f)=\int_a^b f^2(x)\geqq 0$. Освен това да отбележим, че понеже $f(x)$ е частично непрекъсната в $[a, b]$, то сегментът $[a, b]$ се представя като обединение на краен брой сегменти $[x_{i-1}, x_i]$, във всеки от които функцията $f(x)$ е непрекъсната, при условие че за стойност на $f(x)$ в краищата на съответния сегмент

* Т. е. във всяка точка на прекъсване x_0 на функцията $f(x)$ съществуват крайна лява и дясна граница.

$[x_{i-1}, x_i]$ се вземат $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$ съответно. От равенството $\int_a^b f^2(x)dx=0$ следва, че за всеки сегмент $[x_{i-1}, x_i[$ е изпълнено равенството $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx=0$.

От последното равенство и от непрекъснатостта на $f(x)$ в сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ следва, че $f(x)\equiv 0$ в $[x_{i-1}, x_i]$. В частност $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$ са равни на нула. Понеже тези разсъждения са верни за всеки сегмент $[x_{i-1}, x_i]$, т. е за всяко $i=1, 2, \ldots, n$, то лявата и дясната граница във всяка точка x_i са равни на нула, а оттук и от равенството (8.2) следва, че и самата стойност $f(x_i)$ във всяка точка x_i е равна на нула. И така функцията $f(x)$ е равна на нула във всички точки на сегмента $[a, b]$, т. е. е нулевият елемент на линейното пространство от всички частично непрекъснати в сегмента $[a, b]$ функции.

По такъв начин доказахме, че пространството от всички частично непрекъснати функции в сегмента $[a, b]$ с условие (8.2) във всяка точка на прекъсване и със скаларно произведение, определено чрез съотношението (8.1), е евклидово пространство.

Това евклидово пространство по-нататък ще обозначаваме със символа R_0.

Ще припомним сега две общи свойства на произволно евклидово пространство, които естествено ще притежава и пространството R_0.

1. Във всяко евклидово пространство за произволни елементи **f** и **g** е изпълнено неравенството

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})^2 \leq (\mathbf{f}, \mathbf{f}) \,.\, (\mathbf{g}, \mathbf{g}), \tag{8.3}$$

наричано неравенство на Коши—Буняковски*.

2. Във всяко евклидово пространство за произволен елемент **f** от това пространство можем да въведем понятието **норма** на този елемент, определяйки я като число, означавано със символа $\|\mathbf{f}\|$ и определено с равенството

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} \tag{8.4}$$

така, че са изпълнени следните три свойства:

* Ще отбележим, че за доказателството на неравенството (8.3) вследствие на аксиома 4° на скаларното произведение за произволно реално λ е изпълнено неравенството $(\lambda \,.\, \mathbf{f}-\mathbf{g},\ \lambda \,.\, \mathbf{f}-\mathbf{g})\geq 0$, което от аксиомите 1°—4° е еквивалентно на неравенството $\lambda^2 \,.\, (\mathbf{f}, \mathbf{f})-2\lambda \,.\, (\mathbf{f}, \mathbf{g})+(\mathbf{g}, \mathbf{g})\geq 0$. Необходимо и достатъчно условие за неотрицателност на квадратния тричлен, стоящ в лявата част на последното неравенство, е неговата дискриминанта да е неположителна, т. е. неравенството $(\mathbf{f}, \mathbf{g})^2-(\mathbf{f}, \mathbf{f}) \,.\, (\mathbf{g}, \mathbf{g})\leq 0$, което е еквивалентно на неравенството (8.3).

1°. $\|\mathbf{f}\|\geq 0$, като $\|\mathbf{f}\|=0$ само когато **f** е нулевият елемент;
2°. $\|\lambda \,.\, \mathbf{f}\|=|\lambda| \,.\, \|\mathbf{f}\|$ за всеки елемент **f** и всяко реално λ;
3°. за всеки два елемента **f** и **g** е в сила неравенството

$$\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\|\leq\|\mathbf{f}\|+\|\mathbf{g}\|, \tag{8.5}$$

наричано неравенство на триъгълника.

Наистина верността на свойство 1° веднага следва от (8.4) и аксиома 4° на скаларното произведение.

За да обосновем свойството 2°, ще отбележим, че от (8.4) и аксиомите на скаларното произведение имаме

$$\|\lambda \,.\, \mathbf{f}\|=\sqrt{(\lambda\mathbf{f}, \lambda\mathbf{f})}=\sqrt{\lambda \,.\, (\mathbf{f}, \lambda\mathbf{f})}=\sqrt{\lambda(\lambda\mathbf{f}, \mathbf{f})}=\sqrt{\lambda^2(\mathbf{f}, \mathbf{f})}=|\lambda| \,.\, \|\mathbf{f}\|.$$

Накрая верността на свойство 3° следва от (8.4), аксиомите на скаларното произведение и неравенството на Коши—Буняковски (8.3). Наистина

$$\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\|=\sqrt{(\mathbf{f}+\mathbf{g}, \mathbf{f}+\mathbf{g})}=\sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})+2(\mathbf{f}, \mathbf{g})+(\mathbf{g}, \mathbf{g})}\leq$$

$$\leq\sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})+2\sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} \,.\, \sqrt{(\mathbf{g}, \mathbf{g}+(\mathbf{g}, \mathbf{g})}}=\sqrt{[\sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}+\sqrt{(\mathbf{g}, \mathbf{g})}]^2}=$$

$$=\sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}+\sqrt{(\mathbf{g}, \mathbf{g})}=\|\mathbf{f}\|+\|\mathbf{g}\|.$$

В частност във въведеното по-горе евклидово пространство R_0 от всички частично непрекъснати в сегмента $[a, b]$ функции нормата (8.4) за произволен елемент f се определя с равенството

$$\|\mathbf{f}\|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}, \tag{8.6}$$

а неравенствата на Коши—Буняковски (8.3) и на триъгълника (8.5) добиват следния вид:

$$\left(\int_a^b f(x) \,.\, g(x)dx\right)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx \,.\, \int_a^b g^2(x)\,dx, \tag{8.7}$$

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx}\leq\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}. \tag{8.8}$$

Ще въведем сега за произволно безкрайномерно евклидово пространство R понятията ортогонални елементи и ортонормирана система от елементи.

Определение 1. Елементите **f** и **g** от евклидовото пространство се наричат ортогонални, ако скаларното произведение $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ на тези елементи е равно на нула.

Нека да разгледаме в произволното безкрайномерно евклидово пространство R една редица от елементи

$$\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots \tag{8.9}$$

Определение 2. Редицата (8.9) се нарича ортонормирана система, ако всеки два елемента от тази редица са ортогонални и всеки елемент има норма, равна на единица.

Класическ и пример за ортонормирана система в пространството R_0 от всички частично непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$ функции е тригонометричната система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{8.10}$$

Читателят лесно ще провери, че функциите (8.10) са две по две ортогонални (относно скаларното произведение (8.1) при $a=-\pi$ и $b=\pi$) и че нормата на всяка от тези функции (определена с равенството (8.6) при $a=-\pi$ и $b=\pi$) е равна на единица.

В математиката и в нейните приложения често се срещат различни ортонормирани (в съответните множества) системи от функции.

Ще дадем няколко примера на такива системи.

1°. Полиномите, определени с равенството

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d[(x^2-1)^n]}{dx^n} \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{8.11}$$

е прието да се наричат полиноми на Лежандър.

Не е трудно да се убедим, че образуваните с помощта на полиномите (8.11) функции

$$\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(x) \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

образуват ортонормирана (в сегмента $[-1, +1]$) система от функции.

2°. Полиномите, определени с равенствата $T_0(x)=1$, $T_n(x)=2^{1-n}\cos(n \arccos x)$ при $n=1, 2, \ldots$, се наричат полиноми на Чебишев. Измежду всички полиноми от n-та степен с коефициент пред x^n, равен на единица, полиномът на Чебишев $T_n(x)$ има най-малък максимум на модула на сегмента $-1 \leq x \leq 1$. Може да се докаже, че получените с помощта на полиномите на Чебишев функции

$$\Psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}}, \quad \Psi_n(x)=\frac{2^{n-0,5}\, T_n(x)}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

образуват ортонормирана (в сегмента $[-1, +1]$) система.

3°. В теорията на вероятностите често се използва така наречената система на Радемахер*

* Радемахер — немски математик (род. 1892 г.).

$$\Psi_n(x)=\varphi(2^n \cdot x) \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

където $\varphi(t)=\operatorname{sgn}(\sin 2 \cdot \pi \cdot t)$.

Лесно се проверява, че тази система е ортонормирана в сегмента $0 \leq x \leq 1$.

4°. В редица изследвания намира приложение така наречената система на Хаар*, която е ортонормирана в сегмента $0 \leq x \leq 1$. Елементите на тази система $\chi_n^{(k)}(x)$ се определят за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ и за всички k, приемащи стойности $1, 2, 4, \ldots, 2^n$. Те имат вида

$$=\begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq x < \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } \frac{2k-1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{в останалите точки от } [0, 1]. \end{cases}$$

Всяка функция на Хаар е стъпалце от същия вид, както функцията $\sqrt{2^n} \cdot \operatorname{sgn} x$ в сегмента $[-2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)}]$. За всяко фиксирано число n при увеличаване стойността на k това стъпалце се придвижва надясно. Навсякъде извън съответното стъпалце всяка функция на Хаар е тъждествено равна на нула.

2. Понятие за общ ред на Фурие. Нека в произволното безкрайномерно евклидово пространство R е зададена ортонормираната система от елементи $\{\Psi_k\}$.

Определение 1. Ред на Фурие на елемента $\mathbf{f}$ от R по ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ ще наричаме реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \Psi_k, \tag{8.12}$$

където с f_k са обозначени числата, наричани коефициенти на Фурие на елемента $\mathbf{f}$ и определени чрез равенствата

$$f_k=(\mathbf{f}, \Psi_k), \qquad k=1, 2, \ldots$$

Естествено е да наречем крайната сума

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot \Psi_k \tag{8.13}$$

n-та частична сума на реда на Фурие (8.12).

Да разгледаме наред с n-тата частична сума (8.13) произволна линейна комбинация на първите n елемента от ортонормираната система $\{\Psi_k\}$:

* Хаар — немски математик (1885—1933).

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \Psi_k, \tag{8.14}$$

където $c_1, c_2, \ldots, c_n$ са някакви константи.

Ще изясним по какво се отличава n-тата частична сума на реда на Фурие (8.13) от всички други суми (8.14).

Нека се договорим да наричаме израза $\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|$ **отклонение** $\mathbf{f}$ от $\mathbf{g}$ (относно нормата в даденото евклидово пространство).

Справедлива е следната основна теорема.

Теорема 8.1. Най-малко отклонение на елемента $\mathbf{f}$ от всевъзможните суми от вида (8.14) относно нормата на даденото евклидово пространство има n-тата частична сума (8.13) на реда на Фурие на елемента $\mathbf{f}$.

Доказателство. Отчитайки ортонормираността на системата $\{\Psi_k\}$ и използувайки аксиомите на скаларното произведение, може да запишем

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_k - \mathbf{f}\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_k - \mathbf{f},\ \sum_{l=1}^{n} c_l \Psi_l - \mathbf{f}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\Psi_k, \Psi_k) - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k (\mathbf{f}, \Psi_k) + (\mathbf{f}, \mathbf{f}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot f_k + \|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|\mathbf{f}\|^2.$$

И така

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_k - \mathbf{f}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 + \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{8.15}$$

В лявата част на (8.15) стои квадратът от отклонението на сумата (8.14) от елемента $\mathbf{f}$ (относно нормата на даденото евклидово пространство). От вида на дясната част на (8.15) следва, че указаният квадрат на отклонението е най-малък при $c_k = f_k$ (тъй като тогава първата сума и дясната част на (8.15) става равна на нула, а останалите събираеми в дясната част на (8.15) не зависят от c_k). Теоремата е доказана.

Следствие 1. За произволен елемент f от дадено евклидово пространство, за всяка ортонормирана система $\{\Psi_n\}$, за всеки избор на константите c_k и за всяко n е изпълнено неравенството

$$\|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_k - \mathbf{f}\right\|^2. \tag{8.16}$$

Неравенството (8.16) е директно следствие от тъждеството (8.15).

Следствие 2. За произволен елемент $\mathbf{f}$ от дадено евклидово пространство, всяка ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ и всяко натурално число n е в сила равенството.

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k \Psi_k - \mathbf{f}\right\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2, \tag{8.17}$$

често наричано равенство на Бесел*.

За доказателството на равенството (8.17) е достатъчно да положим в (8.15) $c_k = f_k$.

Теорема 8.2. За всеки елемент $\mathbf{f}$ от дадено евклидово пространство и всяка ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ е изпълнено следното неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|\mathbf{f}\|^2, \tag{8.18}$$

наричано неравенство на Бесел.

Доказателство. От неотрицателността на лявата част на (8.17) следва, че за всяко n

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \|\mathbf{f}\|^2. \tag{8.19}$$

Но това означава, че редът с неотрицателни членове, стоящ в лявата страна на (8.18), има ограничена редица от частични суми и затова е сходящ. След граничен преход при $n \to \infty$ (вж. теорема 3.13 от част I) в неравенството (8.19) се получава неравенството (8.18). Теоремата е доказана.

За пример нека да разгледаме пространството R_0 от всички частично непрекъснати в сегмента $-\pi \leq x \leq \pi$ функции и в това пространство реда на Фурие по тригонометричната система (8.10) (този ред е прието да се нарича **тригонометричен ред на Фурие**). За произволна частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ указаният ред на Фурие е от вида

$$\bar{f}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \bar{\bar{f}}_k \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right), \tag{8.20}$$

където коефициентите на Фурие $\bar{f}_k$ и $\bar{\bar{f}}_k$ се определят чрез формулите

* Ф. Бесел—немски астроном и математик (1784—1846).

$$\bar{f}_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$\bar{f}_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\quad \bar{\bar{f}}_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\ (k=1,2,\ldots).$$

Неравенството на Бесел за всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$ придобива вида

$$\bar{f}_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\bar{f}_k^2+\bar{\bar{f}}_k^2)\leq\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{8.21}$$

Отклонението на $f(x)$ от $g(x)$ по норма в този случай е равно на така нареченото средно квадратично отклонение:

$$\|f-g\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\,dx}. \tag{8.22}$$

Ще отбележим, че в теорията на тригонометричните редове на Фурие е приета по традиция друга форма на запис както на самия ред на Фурие (8.20), така и на неравенството на Басел (8.21). А именно тригонометричният ред на Фурие (8.20) обикновено се записва във вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{8.20'}$$

където

$$\left\{\begin{aligned} a_0&=\frac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\\ a_k&=\frac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\\ b_k&=\frac{\bar{\bar{f}}_k}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \end{aligned}\right. \tag{8.23}$$

$$(k=1,2,\ldots).$$

При такава форма на запис неравенството на Бесел 8.21 придобива вида

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{8.21'}$$

Забележка. От неравенството на Бесел (8.21') следва, че за всяка частично непрекъсната в затворения интервал $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$ коефициентите a_k и b_k, наричани тригонометрични коефициенти на Фурие, на функцията $f(x)$ клонят към нула при $n\to\infty$ (поради необходимото условие за сходимост на реда от лявата страна на (8.21)).

§ 2. Затворени и пълни ортонормирани системи

Както и в предишния параграф, ще разглеждаме произволна ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ в някое безкрайномерно евклидово пространство R.

Определение 1. Ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ се нарича затворена, ако за всеки елемент $\mathbf{f}$ от даденото евклидово пространство R и за всяко положително ε може да се намери такава линейна комбинация (8.14) от краен брой елементи на $\{\Psi_k\}$, че отклонението ѝ от $\mathbf{f}$ (относно нормата на пространството R) да е по-малко от ε.

С други думи, системата $\{\Psi_k\}$ се нарича затворена, ако произволен елемент $\mathbf{f}$ от даденото евклидово пространство R може да се приближи с произволна точност с линейна комбинация от краен брой елементи от $\{\Psi_k\}$ относно нормата на това пространство.

Забележка 1. Тук не разглеждаме въпроса за съществуване на затворени ортонормирани системи в произволно евклидово пространство. Ще отбележим, че в трета част ще бъде изучен един важен клас евклидови пространства — така наречените хилбертови пространства и ще бъде установено съществуването във всяко такова пространство на затворени ортонормирани системи.

Теорема 8.3. Ако ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ е затворена, то за всеки елемент $\mathbf{f}$ от разглежданото евклидово пространство неравенството на Бесел се превръща в точно равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2=\|\mathbf{f}\|^2, \tag{8.24}$$

наричано равенство на Парсевал*.

* М. Парсевал — френски математик, умрял през 1836 г.

Доказателство. Да фиксираме произволен елемент f от разглежданото евклидово пространство и произволно положително число ε. Тъй като системата $\{\Psi_k\}$ е затворена, то съществува естествено число n и числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такива, че квадратът на нормата, стояща в дясната част на (8.16), е по-малък от ε. Поради (8.16) това означава, че за произволното $\varepsilon>0$ ще се намери естествено число n, за което

$$\|\mathbf{f}\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2<\varepsilon. \tag{8.25}$$

За всички естествени числа, по-големи от n, неравенството (8.25) ще бъде също изпълнено, тъй като при растенето на n сумата, стояща в лявата страна на (8.25), може само да расте.

И така доказахме, че за произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число n, започвайки от което е изпълнено неравенството (8.25).

Съвместно с неравенството (8.19) това означава, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ е сходящ към сумата $\|\mathbf{f}\|^2$. Теоремата е доказана.

Теорема 8.4. Ако ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ е затворена, то за произволен елемент f редът на Фурие на този елемент е сходящ към него относно евклидовата норма, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Psi_k-\mathbf{f}\|=0. \tag{8.26}$$

Доказателство. Твърдението на тази теорема непосредствено следва от равенството (8.17) и от предишната теорема.

Забележка 2. В пространството от всички частично непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции сходимостта относно нормата (8.26) преминава в средноквадратична сходимост на този сегмент (вж. п. 3, §4, гл. 2). По такъв начин, ако докажем затвореността на тригонометричната система (8.10), то твърдението на теорема 8.4 ще означава, че за всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ тригонометричният ред на Фурие на тази функция е сходящ към нея в указания сегмент относно средноквадратичното разстояние.

Определение 2. Ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ се нарича пълна, ако освен нулевия елемент не съществува друг елемент от даденото евклидово пространство, който да е ортогонален на всички елементи Ψ_k от системата $\{\Psi_k\}$.

С други думи, системата $\{\Psi_k\}$ се нарича пълна, ако всеки елемент f, който е ортогонален на всички елементи Ψ_k от системата $\{\Psi_k\}$, е нулевият елемент.

Теорема 8.5. Всяка затворена ортонормирана система е пълна система.

Доказателство. Нека системата $\{\Psi_k\}$ е затворена и нека f да е елемент от даденото евклидово пространство, който е ортогонален на всички елементи Ψ_k от системата $\{\Psi_k\}$.

Тогава всички коефициенти на Фурие f_k на елемента f по системата $\{\Psi_k\}$ са равни на нула и следователно поради равенството на Парсевал (8.24) и $\|\mathbf{f}\|=0$. Последното равенство (по силата на свойство 1° на нормата) означава, че f е нулевият елемент. Теоремата е доказана.

Забележка 3. Показахме, че в произволно евклидово пространство от затвореността на ортонормираната система следва нейната пълнота. Ще отбележим без доказателство, че в произволно евклидово пространство от пълнотата на ортонормираната система в общия случай не следва затвореността на тази система. В третата част ще бъде доказано, че за един важен клас евклидови пространства — така наречените хилбертови пространства — пълнотата на ортонормираната система е еквивалентна на нейната затвореност.

Теорема 8.6. За всяка пълна (и още повече за всяка затворена) ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ два различни елемента f и g от едно евклидово пространство не могат да имат еднакви редове на Фурие.

Доказателство. Ако коефициентите на Фурие на елементите f и g съвпадат, то всички коефициенти на Фурие на разликата $(\mathbf{f}-\mathbf{g})$ са равни на нула. Т. е. разликата $(\mathbf{f}-\mathbf{g})$ е ортогонална на всички елементи Ψ_k от пълната система $\{\Psi_k\}$. Но това означава, че разликата $(\mathbf{f}-\mathbf{g})$ е нулевият елемент, т. е. f съвпада с g. Теоремата е доказана.

С това завършваме разглеждането на общите редове на Фурие по произволни ортонормирани системи в произволно евклидово пространство R.

Нашата следваща цел ще бъде по-детайлното изучаване реда на Фурие по тригонометричната система (8.10).

§ 3. Затвореност на тригонометричната система и следствия от нея

1. Равномерно приближаване на непрекъсната функция с тригонометрични полиноми. В този параграф ще установим затвореността (а следователно и пълнотата) на тригонометричната система

(8.10) в пространството от всички частично непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции. Но преди да пристъпим към доказателството на затвореността на тригонометричната система, ще установим важната теорема за равномерното приближаване на непрекъсната функция с така наречените тригонометрични полиноми.

Тригонометричен полином ще наричаме произволна линейна комбинация на крайно число елементи от тригонометричната система (8.10), т. е. израз от вида

$$T(x)=\bar{c}_0+\sum_{k=1}^{n}(\bar{c}_k\cos kx+\bar{\bar{c}}_k\sin kx),$$

където n е произволно естествено, а $\bar{c}_0, \bar{c}_k$ и $\bar{\bar{c}}_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ са произволни реални числа.

Ще отбележим две елементарни твърдения:

1°. Ако $P(x)$ е някакъв алгебричен полином, то $P(\cos x)$ и $P(\sin x)$ са тригонометрични полиноми.

2°. Ако $T(x)$ е тригонометричен полином, то всеки от изразите $[T(x).\sin x]$ и $[T(x).\sin^2 x]$ също е тригонометричен полином.

И двете твърдения следват от факта, че произведението на две (а следователно и на произволен краен брой) тригонометрични функции* на аргумента x се представя като крайна линейна комбинация от тригонометрични функции с аргумент от типа kx (убедете се в това).

В теорията на тригонометричните редове на Фурие важна роля играе понятието периодична функция.

Функцията $f(x)$ се нарича периодична функция с период T, ако: 1) $f(x)$ е определена за всички реални x; 2) за всяко реално x е изпълнено равенството

$$f(x+T)=f(x).$$

Това равенство обикновено се нарича условие за периодичност. Към разглеждане на периодични функции ни довежда изучаването на различни колебателни процеси.

Ще отбележим, че елементите от тригонометричната система (8.10) са периодични функции с период 2π.

Теорема 8.7 (теорема на Вайерщрас). Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$, то функцията $f(x)$ може равномерно да се приближи с тригонометрични полиноми в $[-\pi, \pi]$, т. е. за тази функция $f(x)$ и за всяко положително число ε съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ е изпълнено неравенството

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon. \tag{8.27}$$

* Под тригонометрични функции в дадения случай се разбира функциите синус и косинус.

Доказателство. За удобство ще разделим доказателството на две части.

1°. Отначало допълнително ще предположим, че функцията $f(x)$ е четна, т. е. за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ удовлетворява условието $f(-x)=f(x)$.

Поради теоремата за непрекъснатост на съставна функция (вж. ч. I, гл. 4, § 1) функцията $F(t)=f(\arccos t)$ е непрекъсната функция като функция на аргумента t в сегмента $-1\leq t\leq 1$. Тогава поради теоремата на Вайерщрас за алгебрични полиноми (вж. теорема 2.18 от глава 2) за всяко $\varepsilon>0$ съществува алгебричен полином $P(t)$ такъв, че $|f(\arccos t)-P(t)|<\varepsilon$ за всички t от сегмента $-1\leq t\leq 1$.

Полагайки $t=\cos x$, получаваме, че

$$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon \tag{8.28}$$

за всички x от сегмента $0\leq x\leq\pi$.

Тъй като двете функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ са четни, то неравенството (8.28) е изпълнено и за всички x от сегмента $-\pi\leq x\leq 0$. По такъв начин неравенството (8.28) е изпълнено за всички x от сегмента $-\pi\leq x\leq\pi$ и понеже (по силата на отбелязаното по-горе твърдение 1°) $P(\cos x)$ е тригонометричен полином, то за четна функция $f(x)$ теоремата е доказана.

Да отбележим сега, че една функция $f(x)$, удовлетворяваща условията на доказваната теорема, може периодично с период 2π да бъде продължена на цялата безкрайна права $-\infty<x<+\infty$, при това така, че продължената функция ще бъде непрекъсната във всяка точка x от безкрайната права. Ако функцията $f(x)$ е продължена по такъв начин, то, понеже $P(\cos x)$ е периодична функция с период 2π, получаваме, че за четна функция $f(x)$ неравенството (8.28) е изпълнено върху безкрайната права $-\infty<x<+\infty$.

2°. Нека сега $f(x)$ е произволна функция, която удовлетворява условията на доказаната теорема. Тази функция ще продължим върху цялата безкрайна права периодично с период 2π и ще образуваме следните две четни функции:

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \tag{8.29}$$

$$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.\sin x. \tag{8.30}$$

По доказаното в пункт 1° за всяко $\varepsilon>0$ съществуват тригономе-

трични полиноми $T_1(x)$ и $T_2(x)$ такива, че върху цялата безкрайна права

$$|f_1(x)-T_1(x)|<\frac{\varepsilon}{4}, \qquad |f_2(x)-T_2(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$$

и затова

$$|f_1(x)\sin^2 x-T_1(x)\sin^2 x|<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$|f_2(x)\sin x-T_2(x)\sin x|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Събираме последните две неравенства и отчитаме, че модулът от сумата на две величини не надминава сумата от техните модули.

От равенствата (8.29) и (8.30) получаваме, че на цялата безкрайна права е изпълнено неравенството

$$|f(x)\sin^2 x-T_3(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{8.31}$$

където с $T_3(x)$ е означен тригонометричният полином

$$T_3(x)=T_1(x)\sin^2 x+T_2(x)\sin x.$$

В проведените от нас разсъждения вместо функцията $f(x)$ може да вземем функцията $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$*. Напълно аналогично с (8.31) ще получим, че за функцията $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ съществува тригонометричен полином $T_4(x)$ такъв, че върху цялата безкрайна права

$$\left|f\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\sin^2 x-T_4(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.32}$$

Заменяме в (8.32) x с $x-\frac{\pi}{2}$ и въвеждаме тригонометричния полином $T_5(x)=T_4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Получаваме, че върху цялата безкрайна права е вярно неравенството

$$|f(x).\cos^2 x-T_5(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.33}$$

Накрая събираме неравенствата (8.31) и (8.33) и обозначаваме с $T(x)$ тригонометричния полином $T_3(x)+T_5(x)$. Получаваме, че върху цялата безкрайна права е вярно неравенството (8.27). Теоремата е доказана.

Забележка. Всяко от условията 1) непрекъснатост на $f(x)$ върху сегмента $[-\pi, \pi]$; 2) равенство на стойностите $f(-\pi)$ и $f(\pi)$

* Тъй като тази функция удовлетворява същите условия, както и получената след продължението на функцията $f(x)$.

са необходими условия за равномерното приближение на функцията $f(x)$ с тригонометрични полиноми в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Теоремата на Вайерщрас може да се преформулира по следния начин: за да може функцията $f(x)$ равномерно върху сегмента $[-\pi, \pi]$ да се приближи с тригонометрични полиноми с произволна точност, е необходимо и достатъчно тя да бъде непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и да удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$.

Достатъчността е точно съдържанието на теорема 8.7.

Ще се спрем на доказателството на необходимостта. Нека съществува редица от тригонометрични полиноми $\{T_n(x)\}$, която равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$ клони към функцията $f(x)$. Тъй като всяка от функциите $T_n(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$, то по следствие 2 от теорема 2.7 и функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$. За всяко $\varepsilon>0$ съществува полином $T_n(x)$ такъв, че $|f(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$. Следователно

$$|f(-\pi)-T_n(-\pi)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(\pi)-T_n(\pi)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

От последните две неравенства и от равенството $T_n(-\pi)=T_n(\pi)$ заключаваме, че $|f(-\pi)-f(\pi)|<\varepsilon$, откъдето $f(-\pi)=f(\pi)$ (тъй като $\varepsilon>0$ е произволно).

2. Доказателство на затвореността на тригонометричната система. Опирайки се на теоремата на Вайерщрас, ще докажем следната основна теорема.

Теорема 8.8. Тригонометричната система (8.10) е затворена*, т. е. за всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ и за всяко положително ε съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че

$$\|f(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx}<\varepsilon. \tag{8.34}$$

Доказателство. Преди всичко да отбележим, че за произволна, частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ и за всяко $\varepsilon>0$ съществува непрекъсната в този сегмент функция $F(x)$, удовлетворяваща условието $F(-\pi)=F(\pi)$ и такава, че

$$\|f(x)-F(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x)]^2\,dx}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.35}$$

* А следователно (теорема 8.5) и пълна.

Наистина достатъчно е да изберем функцията $F(x)$ да съвпада с $f(x)$ навсякъде освен в достатъчно малки околности на точките на прекъсване на функцията $f(x)$ и на точката $x=\pi$, а в указаните околности да изберем $F(x)$ линейна функция така, че $F(x)$ да е непрекъсната върху целия сегмент $[-\pi, \pi]$ и да удовлетворява условието $F(-\pi)=F(\pi)$.

Тъй като частично непрекъснатата функция и срязващата я линейна функция са ограничени, избирайки указаните околности в точките на прекъсване на $f(x)$ и в точката $x=\pi$ достатъчно малки, ще осигурим изпълнението на неравенството (8.35).

По теоремата на Вайерщрас 8.7 за функцията $F(x)$ съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че за всички x от сегмента $[-\pi, \pi]$ е изпълнено неравенството

$$|F(x)-T(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}. \tag{8.36}$$

От (8.36) заключаваме, че

$$\|F(x)-T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [F(x)-T(x)]^2\,dx} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.37}$$

От (8.35) и (8.37) и от неравенството на триъгълника за нормата следва неравенството (8.34). Теоремата е доказана.

Забележка 1. От теоремите 8.8 и 8.5 веднага следва, че тригонометричната система (8.10) е пълна. Това от своя страна дава, че системата $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ е пълна в множеството от всички частично непрекъснати в сегмента $[0, \pi]$ (или съответно в сегмента $[-\pi, 0]$) функции. Наистина всяка частично непрекъсната в сегмента $[0, \pi]$ функция $f(x)$, която е ортогонална в този сегмент към всички елементи от системата $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$, след нечетно продължение върху сегмента $[-\pi, 0]$ се оказва, че е ортогонална върху сегмента $[-\pi, \pi]$ на всички елементи от тригонометричната система (8.10). От пълнотата на системата (8.10) следва, че тази функция е равна на нула в $[-\pi, \pi]$, а следователно и в $[0, \pi]$. Съвършено аналогично се доказва, че и системата $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ $(n=1, 2, \ldots)$ е пълна в множеството от всички функции, които са частично непрекъснати в сегмента $[0, \pi]$ (или съответно в сегмента $[-\pi, 0]$).

Забележка 2. Може да се покаже, че измежду ортонормираните системи, указани в § 1, системите, образувани с помощта

на полиномите на Лежандър, полиномите на Чебишев и функциите на Хаар, са затворени, а системата на Радемахер не е затворена.

3. Следствия от затвореността на тригонометричната система

Следствие 1. За всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ е изпълнено равенството на Парсевал

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \tag{8.38}$$

(следва от теорема 8.3).

Следствие 2. Тригонометричният ред на Фурие на произволна, частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ клони към тази функция в указания сегмент относно средноквадратичното разстояние (следва от теорема 8.4 и забележка 2 към същата теорема).

Следствие 3. Тригонометричният ред на Фурие на произволна, частично непрекъсната функция в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ може почленно да се интегрира в този сегмент (следва от предишното следствие и теорема 2.11, глава 2).

Следствие 4. Ако две частично непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имат еднакви тригонометрични редове на Фурие, то тези функции съвпадат тъждествено на този сегмент (следва от теорема 8.6).

Следствие 5. Ако тригонометричният ред на Фурие на частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ е равномерно сходящ в някакъв сегмент $[a, b]$, съдържащ се в сегмента $[-\pi, \pi]$, то той клони в сегмента $[a, b]$ именно към функцията $f(x)$.

Доказателство. Нека $g(x)$ е тази функция, към която клони равномерно в $[a, b]$ тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$. Ще докажем, че $f(x)\equiv g(x)$ на целия сегмент $[a, b]$. Тъй като от равномерната сходимост в сегмента $[a, b]$ следва средноквадратичната сходимост в този интервал (вж. гл. 2, § 4, п. 3), то тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ клони към функцията $g(x)$ в сегмента $[a, b]$ относно средноквадратичното разстояние. Това означава, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува n_1, започвайки от което n-тата частична сума на тригонометричния ред на Фурие удовлетворява неравенството

$$\|g(x)-S_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b [g(x)-S_n(x)]^2\,dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.39}$$

От друга страна, по силата на следствие 2 редицата $S_n(x)$ клони

към $f(x)$ относно средноквадратичното разстояние в целия сегмент $[-\pi, \pi]$ и в частност и на сегмента $[a, b]$, т. е. за фиксираното >0 съществува число n_2, започвайки от което

$$(8.40) \qquad \| S_n(x)-f(x) \| = \sqrt{\int_a^b [S_n(x)-f(x)]^2\, dx} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

От (8.39) и (8.40) и от неравенството на триъгълника

$$\| g(x)-f(x) \| \leq \| g(x)-S_n(x) \| + \| S_n(x)-f(x) \|$$

следва, че $\| g(x)-f(x) \| < \varepsilon$. От последното неравенство и от произволността на $\varepsilon > 0$ следва, че $\| g(x)-f(x) \| = 0$, а оттук въз основа на първото свойство на нормата получаваме, че $g(x)-f(x)$ е нулевият елемент в пространството от всички частично непрекъснати в $[a, b]$ функции, т. е. е тъждествено равна на нула в сегмента $[a, b]$. Следствие 5 е доказано.

Забележка 1. Разбира се, в следствие 5 сегментът $[a, b]$ може да съвпада с целия сегмент $[-\pi, \pi]$, т. е. от равномерната сходимост на реда на Фурие на функцията $f(x)$ върху целия сегмент $[-\pi, \pi]$ следва, че този ред клони в указания сегмент именно към функцията $f(x)$.

Забележка 2. Аналогични следствия са в сила и за реда на Фурие по произволна друга затворена ортонормирана система в пространството от частично непрекъснатите в произволен сегмент $[a, b]$ функции със скаларно произведение (8.1) и норма (8.7). Примери на такива системи са указаните в § 1 ортонормирани системи, получени от полиномите на Лежандър и Чебишев, и системата на Хаар.

§ 4. Най-прости условия за равномерна сходимост и за почленна диференцируемост на тригонометричния ред на Фурие

1. Уводни бележки. В математичната физика и в други раздели от математиката съществена роля играе въпросът за условията, при които тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ (към тази функция) в дадена точка x от сегмента $[-\pi, \pi]$.

Още в края на миналия век е било известно, че съществуват непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции, удовлетворяващи условието $f(-\pi)=f(\pi)$, тригонометричните редове на които са разходящи в отнапред зададена точка от сегмента $[-\pi, \pi]$ (или даже са разходящи върху безкрайно множество от точки от сегмента $[-\pi, \pi]$, навсякъде гъсто в този сегмент)*.

По такъв начин само непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$ без допълнителни условия не осигурява не само равномерната сходимост на тригонометричния ред на Фурие на тази функция, но дори и сходимостта на този ред в отнапред зададена точка от този сегмент.

В този и в следващите параграфи ще изясним какви изисквания трябва да добавим към непрекъснатостта на функцията $f(x)$ (или да поставим вместо непрекъснатостта на $f(x)$), за да осигурим сходимостта на тригонометричния ред на Фурие в зададена точка, а също и за да осигурим равномерната сходимост на указания ред в целия сегмент $[-\pi, \pi]$ или в някаква негова част.

При изучаването на сходимостта на реда на Фурие възниква и друг въпрос: обезателно ли тригонометричният ред на Фурие на произволно частично непрекъсната (или непрекъсната) в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ е сходящ поне в една точка от този сегмент?

Положителен отговор на този въпрос беше получен едва през 1966 г.

Отговорът на този въпрос е следствие от фундаменталната теорема, доказана през 1966 г. от Л. Карлесон**, която реши знаменитата проблема на Н. Н. Лузин***, поставена още през 1914 г.: тригонометричният ред на Фурие на всяка функция, за която съществува в смисъл на Лебег интегралът $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$, е сходящ към тази функция почти навсякъде в сегмента $[-\pi, \pi]$****.

От теоремата на Карлесон следва, че редът на Фурие не само за всяка частично непрекъсната, но и за всяка интегруема в сегмента $[-\pi, \pi]$ в собствен смисъл на Риман функция $f(x)$ е сходящ към тази функция почти навсякъде в сегмента $[-\pi, \pi]$ (тъй като

* Първи пример на такава функция е бил построен от френския математик Дю Буа Раймон през 1876 г.

** Л. Карлесон — съвременен шведски математик. Пълното доказателство на теоремата на Карлесон може да се намери в сборника от преводни статии «Математика», т. II, № 4, 1967, стр. 113—132.

*** Николай Николаевич Лузин — съветски математик, основател на съвременната московска математическа школа по теория на функциите (1883—1950). Постановката на проблемата на Лузин, решена от Карлесон, и други негови проблеми могат да се намерят в книгата на Н. Н. Лузин «Интеграл и тригонометричен ред», Москва—Ленинград, Гостехиздат, 1951.

**** Определеното на интеграл в смисъл на Лебег и сходимост почти навсякъде в даден сегмент вж. в част 3 на тази книга.

за такава функция съществува интегралът $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ в смисъл на Риман, а следователно и в смисъл на Лебег).

Ще отбележим, че ако функцията $f(x)$ е интегруема в сегмента $[-\pi, \pi]$ не в смисъл на Риман, а само в смисъл на Лебег, то тригонометричният ред на Фурие на тази функция може да не е сходящ в нито една точка от сегмента $[-\pi, \pi]$. Първият пример на интегруема в сегмента $[-\pi, \pi]$ в смисъл на Лебег функция $f(x)$ с навсякъде разходящ тригонометричен ред на Фурие беше построен през 1923 г. от съветския математик А. Н. Колмогоров*.

2. Най-прости условия за абсолютна и равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие. Да установим следната терминология.

Определение 1. Ще казваме, че функцията $f(x)$ има в сегмента $[a, b]$ *частично непрекъсната производна*, ако производната $f'(x)$ съществува и е непрекъсната навсякъде в сегмента $[a, b]$ с изключение може би на краен брой точки, във всяка от които функцията $f'(x)$ има крайна лява и дясна граница**.

Определение 2. Ще казваме, че функцията $f(x)$ има в сегмента $[a, b]$ частично непрекъсната производна от ред $n \geq 1$, ако функцията $f^{(n-1)}(x)$ има на този сегмент частично непрекъсната производна в смисъл на определението 1.

Теорема 8.9. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$, има в този сегмент частично непрекъсната производна и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$, то тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ към тази функция равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$. Нещо повече, редът, съставен от модулите на членовете на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$, е сходящ равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че редът от модулите на членовете на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k \cos kx| + |b_k \sin kx|\} \tag{8.41}$$

е сходящ равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$, тъй като оттук ще следва

* Примерът на А. Н. Колмогоров може да се намери на стр. 412—421 от книгата на Н. К. Бари «Тригонометрични редове», Москва, Физматгиз, 1961.

** При това функцията $f'(x)$ може да се окаже недефинирана в краен брой точки от сегмента $[a, b]$. В тези точки ще я додефинираме по произволен начин (например ще я положим равна на полусумата на лявата и дясната ѝ граница).

както равномерната в сегмента $[-\pi, \pi]$ сходимост на самия тригонометричен ред на Фурие на функцията $f(x)$, така и сходимостта на този ред (следствие 5 от п. 3, § 3) именно към функцията $f(x)$.

Предвид признака на Вайерщрас (вж. теорема 2.3 от глава 2) за доказателството на равномерната в сегмента $[-\pi, \pi]$ сходимост на реда (8.41) е достатъчно да докажем сходимостта на мажориращия го числов ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k| + |b_k|\}. \tag{8.42}$$

Да означим с α_k и β_k тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f'(x)$ (дефинирайки я по произволен начин в крайния брой точки, в които не съществува производната на $f(x)$*).

Интегрираме по части и отчитаме, че $f(x)$ е непрекъсната в целия сегмент $[-\pi, \pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$. Получаваме следните съотношения:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)\,dx = k\,.\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = k\,.\,b_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)\,dx = -k\,.\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = -k\,.\,a_k,$$

които свързват тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f'(x)$ и функцията $f(x)$**.

По такъв начин

$$|a_k| + |b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}$$

и за да докажем сходимостта на реда (8.42), е достатъчно да докажем сходимостта на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}\right\}. \tag{8.43}$$

* Например може да положим функцията $f'(x)$ в указаните точки да е равна на полусумата от лявата и дясната ѝ граница.

** При интегрирането по части е необходимо да се раздели сегментът $[-\pi, \pi]$ на краен брой подсегменти без общи вътрешни точки, така че на всеки от тях производната $f'(x)$ да е непрекъсната. Прилагаме формулата за интегриране по части на всеки от тези подсегменти и сумираме всички интеграли, като отчитаме, че сумата от всички проинтегрирани членове е нула (тъй като $f(x)$ е непрекъсната в целия сегмент $[-\pi, \pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$).

Сходимостта на реда (8.43) следва от елементарните неравенства*

$$\frac{|\alpha_k|}{k} \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_k^2+\frac{1}{k^2}\right),$$

(8.44)

$$\frac{|\beta_k|}{k} \leq \frac{1}{2}\left(\beta_k^2+\frac{1}{k^2}\right)$$

и от сходимостта на редовете

(8.45) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right), \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

първият от които е сходящ по силата на равенството на Парсевал за частично непрекъснатата функция $f'(x)$, а вторият — по силата на интегралния признак на Коши—Маклорен (вж. гл. 1, п. 4, § 2). Теоремата е доказана.

Забележка. Ако функцията $f(x)$, удовлетворяваща условията на теорема 8.9, я продължим периодически (с период 2π) върху цялата безкрайна права, то теорема 8.9 дава сходимостта на тригонометричния ред на Фурие към така продължената функция, като тази сходимост е равномерна в цялата безкрайна права.

3. Най-прости условия за почленно диференциране на тригонометричен ред на Фурие. Преди всичко ще докажем следната лема за реда на тригонометричните коефициенти на Фурие.

Лема 1. Нека функцията $f(x)$ и всички нейни производни до някакъв ред m (m е цяло неотрицателно число) са непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяват условията

(8.46) $$\begin{cases} f(-\pi)=f(\pi), \\ f'(-\pi)=f'(\pi), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi). \end{cases}$$

Нека освен това функцията $f(x)$ да има в сегмента $[-\pi, \pi]$ частично непрекъсната производна от ред $m+1$. Тогава следният ред е сходящ:

(8.47) $$\sum_{k=1}^{\infty} k^m\left(|a_k|+|b_k|\right),$$

в който с a_k и b_k сме означили тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f(x)$.

* Имаме предвид елементарното неравенство $|a|\cdot|b| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, следващо от неотрицателността на израза $(|a|-|b|)^2$.

Доказателство. Да означим с α_k и β_k тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f^{(m+1)}(x)$, определяйки тази функция по произволен начин в крайния брой точки, в които не съществува производната от ред $m+1$ на функцията $f(x)$. Като интегрираме изразите за α_k и β_k по части m пъти, използуваме непрекъснатостта на самата функция $f(x)$, както и на всички нейни производни до ред m в сегмента $[-\pi, \pi]$, и съотношенията (8.46), ще установим следната връзка между тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f^{(m+1)}(x)$ и на самата функция $f(x)$*:

$$|\alpha_k|+|\beta_k|=k^{m+1}\left(|a_k|+|b_k|\right).$$

По такъв начин

$$k^m\left(|a_k|+|b_k|\right)=\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k}$$

и сходимостта на реда (8.47) следва от елементарните неравенства (8.44) и от сходимостта на редовете (8.45), първият от които е сходящ поради равенството на Парсевал за частично непрекъснатата функция $f^{(m+1)}(x)$, а вторият — по силата на признака на Коши — Маклорен. Лемата е доказана.

Непосредствено следствие от лема 1 е следната теорема.

Теорема 8.10. Нека функцията $f(x)$ да удовлетворява условията на лема 1, като $m \geq 1$. Тогава тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ може да се диференцира почленно m пъти в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Нека S да е някое от числата $1, 2, \ldots, m$. След S-кратно почленно диференциране на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ се получава редът

(8.48) $$\sum_{k=1}^{\infty} k^s\left\{a_k\cos\left(kx-\frac{\pi s}{2}\right)+b_k\sin\left(kx-\frac{\pi s}{2}\right)\right\}.$$

Ще отбележим, че за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ както първоначалният ред на Фурие, така и редът (8.48) (с произволно $s=1, 2, \ldots, m$) се мажорират от сходящите числови редове (8.47). По признака на Вайерщрас (вж. теорема 2.3 от глава 2) както изходният ред на Фурие, така и всеки от редовете (8.48) (при $s=1, 2, \ldots, m$) са сходящи равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$, а това (по силата на теорема 2.9 от глава 2) осигурява възможността за m-кратното почленно диференциране на първоначалния ред на Фурие. Теоремата е доказана.

* При интегрирането по части сегментът $[-\pi, \pi]$ трябва да се раздели на краен брой без вътрешни точки подсегменти, на всеки от които функцията $f^{(m+1)}(x)$ да е непрекъсната, и да се отчете, че при събирането на всички интеграли по подсегментите сумата от проинтегрираните членове е равна на нула.

§ 5. По-точни условия за равномерна сходимост и условия за сходимост в точка

1. Модул на непрекъснатост на функция. Класи на Хьолдер. Ще започнем с изясняване на понятията, характеризиращи гладкостта на изучаваните функции, и с определяне на класовете от функции, чрез които ще бъдат формулирани условията за сходимост на тригонометричния ред на фурие.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в сегмента $[a, b]$.

Определение 1. За всяко $\delta>0$ ще наречем модул на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ точната горна граница от модула на разликата $|f(x')-f(x'')|$ върху множеството от всички x' и x'', принадлежащи на сегмента $[a, b]$ и удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$.

Ще означаваме модула на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ със символа $\omega(\delta, f)$, така по дефиниция*

$$\omega(\delta, f)=\sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x', x'' \in [a, b]}} |f(x')-f(x'')|.$$

Директно следствие от теоремата на Кантор (вж. част I, теорема 4.16) е, че модулът на непрекъснатост $\omega(\delta, f)$ на произволна, непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция $f(x)$ клони към нула при $\delta\to 0$**.

Обаче за произволна, непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ не може да се твърди нищо повече за реда на нейния модул на непрекъснатост $\omega(\delta, f)$ при малки δ.

Ще покажем сега, че ако функцията $f(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$ и нейната производна $f'(x)$ е ограничена в този сегмент, то модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в указания сегмент $\omega(\delta, f)$ има ред $\omega(\delta, f)=O(\delta)$***.

Наистина от теоремата на Лагранж**** следва, че за произволни точки x' и x'' от сегмента $[a, b]$ съществува точка ξ между точките x' и x'' и такава, че

$$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)|\cdot|x'-x''|. \tag{8.49}$$

Тъй като производната $f'(x)$ е ограничена в сегмента $[a, b]$, то съществува константа M такава, че за всички x от този сегмент е изпълнено $|f'(x)|\leq M$ и следователно $|f'(\xi)|\leq M$. От последното неравенство и от (8.49) следва, че $|f(x')-f(x'')|\leq M\cdot\delta$ за всички x' и x'' от $[a, b]$, които удовлетворяват условието $|x'-x''|<\delta$. Но това означава, че $\omega(\delta, f)\leq M\cdot\delta$, т.е. че $\omega(\delta, f)=O(\delta)$.

Нека α е произволно реално число от полусегмента $0<\alpha\leq 1$.

Определение 2. Ще казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в сегмента $[a, b]$ на класа на Хьолдер C^α с показател α $(0<\alpha\leq 1)$, ако модулът на непрекъснатост $\omega(\delta, f)$ на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ има ред $\omega(\delta, f)=O(\delta^\alpha)$.

Фактът, че функцията $f(x)$ принадлежи в сегмента $[a, b]$ на класа на Хьолдер C^α, обикновено се изразява чрез следното означение: $f(x)\in C^\alpha[a, b]$.

Веднага ще отбележим, че ако функцията $f(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$ и нейната производна е ограничена в този сегмент, то тази функция обезателно принадлежи в сегмента $[a, b]$ на класа на Хьолдер C^1* (това твърдение веднага следва от доказаното по-горе съотношение $\omega(\delta, f)=O(\delta)$).

Забележка. Нека $f(x)\in C^\alpha[a, b]$. Точната горна граница на дробта $\dfrac{|f(x')-f(x'')|}{|x'-x''|^\alpha}$ върху множеството от всички различни помежду си точки x' и x'', принадлежащи на сегмента $[a, b]$, се нарича константа на Хьолдер (или коефициент на Хьолдер) на функцията $f(x)$ (в сегмента $[a, b]$). Сумата от константата на Хьолдер на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ и точната горна граница на $|f(x)|$ в този сегмент се нарича хьолдерова норма на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ и се обозначава със символа

$$\|f\|_{C^\alpha[a,b]}.$$

Пример. Функцията $f(x)=\sqrt{x}$ принадлежи в сегмента $[0, 1]$ на класа $C^{1/2}$, тъй като за произволни x' и x'' от $[0, 1]$, свързани с условието $x'>x''$, е изпълнено неравенството

* Ще напомним, че символът $\in$ означава «принадлежи», така че записът $x', x''\in[a, b]$ означава, че точките x' и x'' принадлежат на сегмента $[a, b]$.

** Тъй като (по силата на теоремата на Кантор) за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ за всички x' и x'' от сегмента $[a, b]$, удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$.

*** Ще напомним, че символът $\alpha=O(\delta)$ беше въведен в част I и означава, че съществува константа M такава, че $|\alpha|\leq M\delta$.

**** Вж. теорема 6.5 от част I.

* Класът на Хьолдер C^1, съответстващ на стойността $\alpha=1$, често се нарича клас на Липшиц.

$$|f(x')-f(x'')|=\sqrt{x'-x''}\cdot\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\leqq\sqrt{x'-x''}$$

(при това константата на Хьолдер, която е равна на точната горна граница в $[0,1]$ на дробта $\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}$, е равна на едно, а хьолдеровата норма е равна на две).

2. Формула за частичната сума на тригонометричния ред на Фурие. Нека $f(x)$ да е произволна функция, която е дефинирана и е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi,\pi]$.

Периодично продължение на тази функция върху цялата безкрайна права ще наричаме тази дефинирана върху цялата безкрайна права функция $f(x)$, която удовлетворява следните три изисквания: 1) съвпада с първоначално зададената функция в интервала $-\pi<x<\pi$; 2) приема в краищата на сегмента $[-\pi,\pi]$ стойността

$$f(\pi)=f(-\pi)=\frac{1}{2}\,(f(-\pi+0)+f(\pi-0));$$

3) удовлетворява условието за периодичност с период 2π, т. е. за всяко x удовлетворява съотношението $f(x+2\pi)=f(x)$.

Ще докажем следното просто твърдение.

Лема 1. Ако функцията $F(x)$ е периодичното продължение върху цялата безкрайна права на функцията $F(x)$, която първоначално е дефинирана и е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi,\pi]$, то всички интеграли от тази функция върху интервали с дължина 2π са равни помежду си, т. е. за всяко x е изпълнено равенството

$$\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt=\int_{-\pi+x}^{\pi+x}F(t)\,dt. \tag{8.50}$$

Доказателство. От адитивността на интеграла имаме

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x}F(t)dt=\int_{-\pi+x}^{-\pi}F(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt+\int_{\pi}^{\pi+x}F(t)dt. \tag{8.51}$$

С помощта на смяната $y=t+2\pi$ ще получим, използвайки условието за периодичност $F(y-2\pi)=F(y)$, че

$$\int_{-\pi+x}^{-\pi}F(t)dt=\int_{\pi+x}^{\pi}F(y-2\pi)dy=\int_{\pi+x}^{\pi}F(y)dy=-\int_{\pi}^{\pi+x}F(y)dy. \tag{8.52}$$

От (8.51) и (8.52) следва съотношението (8.50).

Нека сега функцията $f(x)$ е периодичното продължение върху цялата безкрайна права на функцията $f(x)$, която първоначално е дефинирана и частично непрекъсната в сегмента $[-\pi,\pi]$.

Да пресметнем частичната сума на тригонометричния ред на Фурие $S_n(x,f)$ на функцията f в точката x:

$$S_n(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\,.\cos kx+b_k\,.\sin kx).$$

Като използуваме формулите за коефициентите на Фурие

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)dy,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos(ky)dy,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin(ky)dy\quad(k=1,2,\ldots)$$

и линейното свойство на интеграла, изразът за $S_n(x,f)$ може да се запише в следния вид:

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ky.\cos kx+\sin ky\,.\sin kx)\right]dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right]dy.$$

Чрез смяна на променливата $y=t+x$ получаваме

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt.$$

Накрая използуваме лема 1 и забелязваме, че подинтегралната функция в последния интеграл е периодична функция на аргумента t с период 2π. Получаваме

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt. \tag{8.53}$$

Да пресметнем сумата, стояща в квадратните скоби на (8.53). За тази цел да отбележим, че за всяко естествено число k и за всяко реално число t е изпълнено равенството

$$2\sin\frac{t}{2}\cos kt=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t.$$

Като сумираме това равенство по всички стойности на k от 1 до n, ще получим

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{t}{2}.$$

Оттук имаме

$$2\sin\frac{t}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

и следователно

$$\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}. \tag{8.54}$$

Заместваме (8.54) в (8.53) и окончателно получаваме следната формула за n-тата частична сума на тригонометричен ред на Фурие:

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt, \tag{8.55}$$

която е валидна за всяка точка от безкрайната права.

Забележка. От формула 8.55 и от факта, че всички частични суми $S_n(x, 1)$ на функцията $f(x)\equiv 1$ са равни на единица, следва равенството

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.56}$$

3. Спомагателни твърдения. Ще докажем следното твърдение.

Лема 2. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е продължена периодично с период 2π върху цялата безкрайна права. Тогава за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всички u, удовлетворяващи условието $|u|\leq\delta$, е изпълнено неравенството

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+t)-f(t)|\,dt<\varepsilon.$$

Доказателство. Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Съгласно теорема 8.8 (за затвореността на тригонометричната система) съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че

$$\|f(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T(t)]^2dt}<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}},$$

и затова въз основа на неравенството на Коши—Буняковски* имаме

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|\,dt\leq\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T(t)]^2\,dt\,.\int_{-\pi}^{\pi}dt}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.57}$$

От неравенството (8.57) и от периодичността (с период 2π) на функциите $f(t)$ и $T(t)$ получаваме, че за всяко реално u

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-T(t+u)|\,dt<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.58}$$

Тъй като модулът от сумата на три израза не надминава сумата от модулите на тези изрази, то за всяко реално u е изпълнено неравенството

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-f(t)|\,dt\leq\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-T(t+u|\,dt+ \tag{8.59}$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}|T(t+u)-T(t)|\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}|T(t)-f(t)|\,dt.$$

Сега остава само да забележим, че от непрекъснатостта на тригонометричния полином и теоремата на Кантор (вж. теорема 4.16 от част I) за фиксираното от нас $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за $|u|\leq\delta$ и за всички t от $[-\pi, \pi]$

$$|T(t+u)-T(t)|<\frac{\varepsilon}{6\pi},$$

поради което

* Вж. неравенство (8.7) за $a=-\pi$ и $b=\pi$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u)-T(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.60}$$

Съпоставяме неравенството (8.59) с неравенствата (8.57), (8.58) и (8.60). Получаваме

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|\,dt < \varepsilon \tag{8.61}$$

за всички u, за които $|u| \leq \delta$. Лемата е доказана.

Ще изведем от лема 2 редица важни за по-нататък следствия.

Следствие 1. Ако функцията $f(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е периодично (с период 2π) продължена върху цялата реална права, а x е произволна фиксирана точка от сегмента $[-\pi, \pi]$, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt < \varepsilon \tag{8.62}$$

за $|u| \leq \delta$.

Доказателство. Извършваме в интеграла, стоящ в лявата част на (8.62), смяна на променливата $\tau = x+t$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau,$$

и забелязваме, че (поради равенството (8.50))

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau.$$

Очевидно е, че неравенството (8.62) е следствие от (8.61).

Следствие 2. Ако всяка от функциите $f(t)$ и $g(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права, то функцията

$$I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\,dt$$

е непрекъсната функция на променливата x в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Нека x е произволна точка от сегмента $[-\pi, \pi]$. Тогава

$$I(x+u)-I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+u)-f(x+t)]g(t)\,dt$$

и понеже частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $g(t)$ удовлетворява условието за ограниченост $|g(t)| \leq M$ в този сегмент, то

$$|I(x+u)-I(x)| \leq M \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt$$

и затова поради (8.62) за всяко x

$$|I(x+u)-I(x)| < \varepsilon, \qquad \text{ако } |u| \leq \delta(\varepsilon).$$

Непрекъснатостта на функцията $I(x)$ в точката x е доказана.

Следствие 3. Ако всяка от функциите $f(t)$ и $g(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодично (с период 2π) са продължени върху цялата безкрайна права, то тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $F(x, t) = f(x+t)\,g(t)$ при разлагането ѝ по променливата t

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\cos(nt)\,dt, \tag{8.63}$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(nt)\,dt \tag{8.64}$$

клонят към нула (при $n \to \infty$) равномерно по x в сегмента $[-\pi, \pi]$ (а следователно и на цялата безкрайна права).

Доказателство. За произволна фиксирана точка x от сегмента $[-\pi, \pi]$ функцията $F(x, t) = f(x+t)\,g(t)$ е частично непрекъсната функция на аргумента t в сегмента $[-\pi, \pi]$ и затова за тази функция е в сила равенството на Парсевал*

$$\frac{a_0^2(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^2(x) + b_k^2(x)] =$$

* Вж. следствие I от п. 3, § 3 на тази глава.

$$(8.65)\qquad =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)\,g^2(t)\,dt.$$

От равенството (8.65) следва сходимостта на реда, стоящ в лявата му част, във всяка фиксирана точка x от сегмента $[-\pi, \pi]$. Тъй като указаният ред е с *неотрицателни* членове, то за доказателството на равномерната в сегмента $[-\pi, \pi]$ сходимост на указания ред по силата на теоремата на Дини* е достатъчно да докажем, че както функциите $a_n(x)$ и $b_n(x)$, така и сумата на реда (8.65) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)g^2(t)dt$ са непрекъснати функции на променливата x в сегмента $[-\pi, \pi]$. Но това веднага следва от предишното следствие (достатъчно е да отчетем, че квадратът на частично непрекъсната функция е пак частично непрекъсната функция и че $\cos nt$ и $\sin nt$ при произволно фиксирано n са непрекъснати функции).

Следствие 4. Ако всяка от функциите $f(t)$ и $g(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е продължена периодично (с период 2π) върху цялата безкрайна права, то редицата

$$(8.66)\qquad \bar{\bar{c}}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$$

клони към нула равномерно по x в сегмента $[-\pi, \pi]$ (а следователно и на цялата безкрайна права).

Доказателство. Достатъчно е да отчетем, че

$$\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]=\cos(nt)\sin\frac{t}{2}+\sin(nt)\cos\frac{t}{2},$$

и да приложим предишното следствие, вземайки в (8.63) вместо функцията $g(t)$ функцията $g(t)\sin\frac{t}{2}$, а в (8.64) вместо $g(t)$ функцията $g(t)\cos\frac{t}{2}$.

4. Принцип за локализация. В тази точка ще докажем, че въпросът за това, сходящ или разходящ е тригонометричният ред на Фурие на частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодичната (с период 2π) функция $f(x)$ в дадена точка x, се решава от поведението на функцията $f(x)$ в колкото искаме малка околност на точката x. Това забележително свойство на тригонометричния ред

* Вж. теорема 2.4 (формулировката в термини на редове).

на Фурие е прието да се нарича принцип за локализация.

Ще започнем с доказателството на една важна лема.

Лема 3 (лема на Риман). Ако функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права и ако тази функция е равна на нула в някакъв сегмент $[a, b]$*, то за произволно положително число δ, по-малко от $\frac{b-a}{2}$, тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ клони към нула равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$.

Доказателство. Нека δ е произволно положително число, по-малко от $\frac{b-a}{a}$. Частичната сума на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ в произволна точка x от безкрайната права се определя от равенството (8.55). Полагайки

$$(8.67)\qquad g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{при } \delta\leq|t|\leq\pi,\\[2ex] 0 & \text{при } |t|<\delta\end{cases}$$

и отчитайки, че $f(x+t)$ е равна на нула, при условие че x принадлежи на сегмента $[a+\delta, b-\delta]$, а t принадлежи на сегмента $|t|\leq\delta$**, можем по следния начин да препишем равенството (8.55) за произволна точка x от сегмента $[a+\delta, b-\delta]$:

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

Остава да ввемем предвид, че редицата, стояща в дясната част на последното равенство, поради следствие 4 от т. 3 клони към нула равномерно по x върху цялата безкрайна права. Лемата е доказана.

Следните теореми следват непосредствено от доказаната лема.

Теорема 8.11. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е продължена периодично (с период 2π) върху цялата безкрайна права и нека $[a, b]$ е някакъв сегмент. При произволно положително δ, по-малко от $\frac{b-a}{2}$, за да бъде тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ сходящ (към тази функция) равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$, достатъчно е да съ-

* Сегментът $[a, b]$ е съвсем произволен. В частност този сегмент може да не се съдържа изцяло в $[-\pi, \pi]$.

** Поради това, че функцията $f(x)$ е равна на нула върху целия сегмент $[a, b]$.

ществува частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодична (с период 2π) функция $g(x)$, имаща равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$ тригонометричен ред на Фурие и съвпадаща в сегмента $[a, b]$ с функцията $f(x)$.

Доказателство. Прилагаме лема 3 за разликата $[f(x)-g(x)]$. Получаваме, че тригонометричният ред на Фурие на разликата $[f(x)-g(x)]$ при произволно δ от интервала $0<\delta<(b-a)/2$ клони към нула равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$, а оттук и от равномерната в сегмента $[a, b]$ сходимост на тригонометричния ред на Фурие на функцията $g(x)$ следва равномерната в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$ сходимост на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$. Фактът, че последният ред клони в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$ именно към функцията $f(x)$, се получава непосредствено от следствие 5, т. 3, § 3 на тази глава. Теоремата е доказана.

Теорема 8.12. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и продължена периодично (с период 2π) върху цялата безкрайна права и нека x_0 е някоя точка от безкрайната права. За да бъде тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ сходящ в точката x_0, е достатъчно да съществува частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодична (с период 2π) функция $g(x)$, имаща сходящ в точката x_0 тригонометричен ред на Фурие и съвпадаща с $f(x)$ в произволно малка δ-околност на точката x_0.

Доказателство. Достатъчно е да приложим лема 3 към разликата $[f(x)-g(x)]$ върху сегмента $\left[x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}\right]$ и да отчетем, че от сходимостта на тригонометричните редове на функциите $[f(x)-g(x)]$ и $g(x)$ в точката x_0 следва сходимостта в тази точка и на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$. Теоремата е доказана.

Теорема 8.12 не дава конкретни условия, осигуряващи сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ в точката x_0. Тя показва само, че тези условия се определят единствено от поведението на $f(x)$ в произволно малка околност на точката x_0 (т. е. имат локален характер)

5. Равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие за функции от класа на Хьолдер. В тази и в следващите точки ще се занимаваме с уточняване на условията, осигуряващи равномерна сходимост и сходимост в дадена точка x_0 на тригонометричния ред на Фурие.

Ще докажем следната основна теорема.

Теорема 8.13. Ако функцията $f(x)$ принадлежи в сегмента $[-\pi, \pi]$ на класа на Хьолдер C^α с произволен положителен показател α $(0<\alpha\leq 1)$ и ако освен това $f(-\pi)=f(\pi)$, то тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ (към тази функция) равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Както обикновено, ще считаме, че функцията $f(x)$ е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права. Условието $f(-\pi)=f(\pi)$ осигурява така продължената функция да принадлежи на класа на Хьолдер C^α върху цялата безкрайна права.

Нека x да е произволна точка от сегмента $[-\pi, \pi]$. Умножаваме двете страни на равенството (8.56) с $f(x)$ и изваждаме така полученото равенство от (8.55). Получаваме равенството

$$S_n(x, f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.68}$$

От условието, че $f(x)$ принадлежи на класа на Хьолдер C^α, следва, че съществува константа M такава, че

$$|f(x+t)-f(x)|\leq Mt^\alpha \tag{8.69}$$

поне когато x и t принадлежат на сегмента $[-\pi, \pi]$.

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$ и нека $\delta>0$ да удовлетворява неравенството

$$\frac{M}{\alpha}\cdot\delta^\alpha<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.70}$$

Представяме сегмента $[-\pi, \pi]$ като сума от сегмента $|t|\leq\delta$ и на множеството $\delta\leq|t|\leq\pi$ и записваме равенството (8.68)

$$\begin{aligned} S_n(x, f)-f(x)=&\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leq\delta}[f(x+t)-f(x)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+\\ &+\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}f(x+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt-\frac{f(x)}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \end{aligned} \tag{8.71}$$

За оценката на първия от интегралите в дясната страна на (8.71) ще се възползуваме от неравенството (8.69) и ще използуваме, че $\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\leq\frac{\pi}{2|t|}$ за всички t от сегмента $[-\pi, \pi]$*. Ще получим, че

* Отбеляваното неравенство веднага следва от факта, че функцията

за всяко естествено число n и за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ е вярно

$$\left|\int\limits_{|t|\leq\delta} [f(x+t)-f(x)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{|t|\leq\delta} |f(x+t)-f(x)| \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\,dt \leq$$

$$\leq \frac{M\pi}{2}\int\limits_{|t|\leq\delta} |t|^{\alpha-1}\,dt = M\pi\int\limits_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt =$$

$$= \frac{M\pi}{\alpha}\cdot\delta^{\alpha}.$$

Оттук въз основа на (8.70) за всяко естествено число n и за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ имаме

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leq\delta} [f(x+t)-f(x)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.72}$$

Вторият от интегралите в дясната страна на (8.71) с помощта на частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $g(t)$ (8.67) се записва във вида

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

По силата на следствие 4 от т. 3 дясната страна на последното равенство клони към нула (при $n\to\infty$) равномерно по x в сегмента $[-\pi, \pi]$. Затова за фиксираното от нас $\varepsilon>0$ съществува естествено число N_1 такова, че

$\frac{\sin x}{x}$ при изменението на x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ намалява от 1 до $2/\pi$. Намаляването на функцията $\frac{\sin x}{x}$ от своя страна следва от това, че $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg} x)<0$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$, тъй като $x<\operatorname{tg} x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$ (вж. глава 4, част I).

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{8.73}$$

за всички $n\geq N_1$ и всички x от сегмента $[-\pi, \pi]$.

За да оценим последния интеграл от дясната страна на (8.71), ще отбележим, че с помощта на частично непрекъснатата функция (8.67) този интеграл се записва във вида

$$\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

Интегралът, стоящ в дясната част на последното равенство, клони към нула (при $n\to\infty$) по силата на все същото следствие 4 от т. 3 (достатъчно е да приложим това следствие към функцията $f(x)\equiv 1$). Отчитаме също, че функцията $f(x)$ е ограничена в сегмента $[-\pi, \pi]$, и получаваме, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число N_2 такова, че

$$\left|\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{8.74}$$

за всички $n\geq N_2$ и всички точки x от сегмента $[-\pi, \pi]$.

Обозначаваме с N по-голямото от числата N_1 и N_2 и получаваме по силата на (8.71) — (8.74), че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число N такова, че

$$|S_n(x, f)-f(x)|<\varepsilon$$

за всяко $n\geq N$ и всички x от сегмента $[-\pi, \pi]$. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Очевидно при условията на теорема 8.13 тригонометричният ред на Фурие е сходящ равномерно не само в сегмента $[-\pi, \pi]$, но и равномерно върху цялата безкрайна права (към функцията, която е периодичното (с период 2π) продължение на функцията $f(x)$ върху цялата безкрайна права).

Забележка 2. Ще отбележим, че при оценката на интегралите (8.73) и (8.74) използувахме само частичната непрекъснатост (и следващата от нея ограниченост) на функцията $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$ (принадлежността на $f(x)$ на класа C^{α} на Хьолдер при оценката на тези интеграли не се използува).

Забележка 3. Естествено възниква въпросът за това, може ли в теорема 8.13 да се намали изискването за гладкост на функ-

цията $f(x)$ със запазване на твърдението на тази теорема за равномерна сходимост на реда на Фурие на функцията $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Ще припомним, че принадлежността на $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$ към класа на Хьолдер C^α по дефиниция означава, че модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в този сегмент има ред

$$\omega(\delta, f)=O(\delta^\alpha).$$

Ще формулираме без доказателство така наречената теорема на Дини—Липшиц, която твърди, че за равномерната в сегмента $[-\pi, \pi]$ сходимост на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ е достатъчно тази функция да удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$ и нейният модул на непрекъснатост в сегмента $[-\pi, \pi]$ да има ред

$$\omega(x, f)=\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right),$$

т. е. да бъде безкрайно малка величина при $\delta\to 0$, имаща по-висок ред, отколкото $\frac{1}{\ln(1/\delta)}$.

Теоремата на Дини—Липшиц съдържа окончателно (чрез модула на непрекъснатост) условие за равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие към тази функция, тъй като може да се построи функция $f(x)$, удовлетворяваща условието $f(-\pi)=f(\pi)$ с модул на непрекъснатост, имащ в сегмента $[-\pi, \pi]$ ред $O\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right)$, и с тригонометричен ред на Фурие, който е разходящ на множество от точки, което е навсякъде гъсто в сегмента $[-\pi, \pi]$*.

В условията на теорема 8.13 след периодичното (с период 2π) продължение на функцията $f(x)$ се оказа, че тя принадлежи класа на Хьолдер C^α върху цялата безкрайна права. Естествено възниква въпросът за поведението на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$, която принадлежи на класа на Хьолдер C^α само в някакъв сегмент $[a, b]$, а навсякъде извън този сегмент удовлетворява само обикновеното изискване за частична непрекъснатост.

Отговор на този въпрос дава следната теорема.

Теорема 8.14. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодично (с период 2π) е продължена върху цялата безкрайна права. Нека освен това в някакъв сегмент $[a, b]$,

* Доказателство на теоремата на Дини — Липшиц и конструкция на току-що указания пример може да намерите например в книгата А. Зигмунд, «Тригонометрические ряды», т. I, «Мир», 1965, стр. 108 и 477.

имащ дължина, по-малка от 2π, тази функция принадлежи на класа на Хьолдер C^α с произволен положителен показател α $(0<\alpha\leq 1)$. Тогава за всяко δ от интервала $0<\delta<(b-a)/2$ тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ клони (към тази функция) равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$.

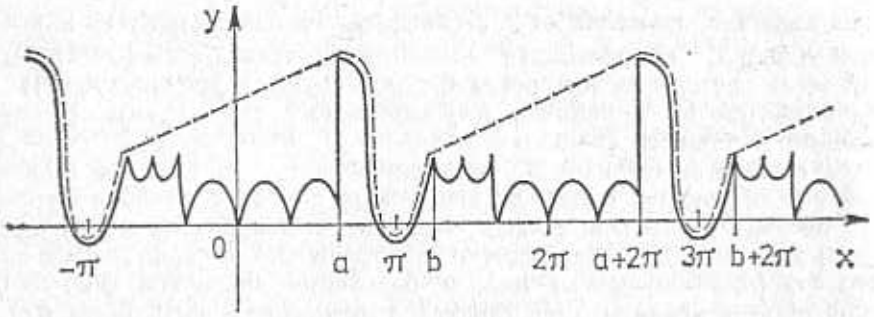
Доказателство. Да построим функция $g(x)$, която в сегмента $[a, b]$ съвпада с $f(x)$, в сегмента $[b, a+2\pi]$ е линейна функция от вида $Ax+B$, приемаща значение $f(b)$ при $x=b$ и $f(a)$ при $x=a+2\pi$*, и която периодично (с период 2π) е продължена от сегмента $[a, a+2\pi]$ върху цялата безкрайна права (на фиг. 8.1 непрекъснатата линия представлява графиката на функцията $f(x)$, а пунктираната линия — графиката на построената по нея функция $g(x)$.

Очевидно, че построената от нас функция $g(x)$ удовлетворява условието $g(-\pi)=g(\pi)$ и принадлежи на класа на Хьолдер C^α (със същия положителен показател α, както и $f(x)$) върху цялата безкрайна права**. Поради теорема 8.13 и забележка 1 тригонометричният ред на Фурие на функцията $g(x)$ е равномерно сходящ в цялата безкрайна права, а затова поради теорема 8.11 тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ (към тази функция) равномерно в сегмента $[a-\delta, b+\delta]$ за всяко δ от интервала $0<\delta<(b-a)/2$. Теоремата е доказана.

Забележка 4. Твърдението на теорема 8.14 остава в сила и за сегмент $[a, b]$, имащ дължина, равна на 2π (т. е. за случая $b=a+2\pi$), но в този случай при доказателството на теоремата трябва, фиксирайки произволно δ от интервала $0<\delta<\pi$, да вземем функцията $g(x)$, съвпадаща с $f(x)$ в сегмента $\left[a+\frac{\delta}{2}, a+2\pi-\frac{\delta}{2}\right]$, линейна в сегмента $\left[a+2\pi-\frac{\delta}{2}, a+2\pi+\frac{\delta}{2}\right]$ и периодично (с период 2π) продължена от сегмента $\left[a+\frac{\delta}{2}, a+2\pi+\frac{\delta}{2}\right]$ върху цялата безкрайна права. Ако сегментът $[a, b]$ има дължина, по-голяма от 2π, то от принадлежността на $f(x)$ на класа на Хьолдер C^α в този сегмент и от условието за периодичност на $f(x)$ (с период 2π)

* Условието функцията $Ax+B$ да приема стойността $f(b)$ при $x=b$ и $f(a)$ при $x=a+2\pi$ еднозначно определя константите A и B: $A=\frac{f(a)-f(b)}{a+2\pi-b}$, $B=\frac{(a+2\pi)f(b)-bf(a)}{a+2\pi-b}$.

** Достатъчно е да отчетем, че $g(x)$ е навсякъде непрекъсната и че линейната функция има ограничена производна и затова принадлежи на класа на Хьолдер C^α за всяко $\alpha\leq 1$.



Фиг. 8. 1

следва, че $f(x)$ принадлежи към класа C^{α} върху цялата безкрайна права, т. е. този случай се свежда към теорема 8.13.

6. Върху сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на частично хьолдерова функция

Дефиниция 1. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е частично хьолдерова в сегмента $[a, b]$, ако тази функция е частично непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и ако сегментът $[a, b]$ с помощта на краен брой точки $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ се разделя на подсегменти $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, на всеки от които тази функция принадлежи към класа C^{α_k} с някакъв положителен показател α_k $(0<\alpha_k\leq 1)$, като при определянето на класа на Хьолдер в подсегмента $[x_{k-1}, x_k]$ за стойността на функцията в краищата на сегмента трябва да се вземат граничните стойности $f(x_{k-1}+0)$ и $f(x_{k-1}-0)$*.

С други думи, областта, където е зададена всяка частично хьолдерова функция, се разпада на краен брой сегменти без общи вътрешни точки, на всеки от които тази функция принадлежи към класа на Хьолдер с някакъв положителен показател.

Всеки от тези сегменти ще наричаме област на гладкост на функцията.

Дефиниция 2. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е частично гладка в сегмента $[a, b]$, ако тази функция е частично непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и притежава в този сегмент частично непрекъсната производна**, т. е. ако функцията $f(x)$ е частично

* Както за всяка частично непрекъсната функция, за частично хьолдерова функция стойностите във всяка точка x_k трябва да са равни на полусумата от дясната и лявата гранична стойност в тази точка, т. е. трябва да е в сила равенството $f(x_k)=\frac{1}{2}[f(x_k+0)+f(x_k-0)]$.

** Вж. дефиниция 1 от т. 2, § 4 на тази глава.

непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и нейната производна $f'(x)$ съществува и е непрекъсната навсякъде в този сегмент с изключение може би на краен брой точки, във всяка от които функцията $f'(x)$ има крайна дясна и лява гранична стойност.

Ясно е, че всяка частично гладка в сегмента $[a, b]$ функция $f(x)$ е частично хьолдерова в този сегмент.

В сила е следната основна теорема.

Теорема 8.15. Нека $f(x)$ е частично хьолдерова в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция, която е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права. Тогава тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ във всяка точка x от безкрайната права към стойността $f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, при това сходимостта на този ред е равномерна във всеки фиксиран сегмент, лежащ в областта на гладкост на функцията $f(x)$.

Доказателство. Твърдението на теоремата за равномерната сходимост във всеки фиксиран сегмент, лежащ в областта на гладкост, веднага следва от теорема 8.14. Оттук следва и сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ във всяка вътрешна точка от областта на гладкост на функцията $f(x)$*. Остава да докажем сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ във всяка точка на съединение на две области на гладкост.

Да фиксираме една от тези точки и да я означим с x. Тогава съществуват константи M_1 и M_2 такива, че при всяко достатъчно малко положително t е изпълнено неравенството

$$|f(x+t)-f(x+0)|\leq M_1 . t^{\alpha_1} \quad (0<\alpha_1\leq 1), \tag{8.75}$$

а при всяко достатъчно малко отрицателно t е в сила неравенството

$$|f(x+t)-f(x-0)|\leq M_2 |t|^{\alpha_2} \quad (0<\alpha_2\leq 1). \tag{8.76}$$

Да означим с M по-голямото от числата M_1 и M_2, а с α по-малкото от числата α_1 и α_2. Тогава при $|t|\leq\delta$ в дясната част на всяко от неравенствата (8.75) и (8.76) може да напишем $M.|t|^{\alpha}$.

Да фиксираме сега произволно $\varepsilon>0$ и по него $\delta>0$, удовлетворяващо неравенството (8.70) и толкова малко, че при $|t|\leq\delta$ са в сила и двете неравенства (8.75) и (8.76), като в дясната част на тези неравенства може да вземем числото $M.|t|^{\alpha}$. Повтаряйки разсъжденията, проведени при доказателството на теорема 8.13, ще достигнем до равенството (8.71) и за доказателството на тео-

* Тъй като всяка вътрешна точка от участъка на гладкост може да се обхване със сегмент, лежащ в този участък изцяло.

ремата остава да се убедим, че във фиксираната точка x са справедливи оценките (8.72), (8.73) и (8.74). В забележка 2 на т. 5 отбелязахме, че оценките (8.73) и (8.74) са валидни за всяка частично непрекъсната и периодична (с период 2π) функция. Остава да докажем валидността на оценката (8.72) за всички естествени числа.

Имайки предвид, че $f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ и че*

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=2\int_{0}^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=$$

$$=2\int_{-\delta}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt,$$

може да запишем интеграла, стоящ в лявата част на (8.72), по следния начин:

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leq\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=$$

$$(8.77)\qquad =\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt+$$

* Тъй като функцията

$$\varphi(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

е четна, т. е. за всяко t удовлетворява условието $\varphi(-t)=\varphi(t)$, то имаме $\int_{0}^{\delta}\varphi(t)\,dt=\int_{\delta}^{0}\varphi(t)\,dt$ (достатъчно е в един от тези интеграли да извършим смяната $t=-\tau$) и затова

$$\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(t)\,dt=2\int_{0}^{\delta}\varphi(t)\,dt=2\int_{-\delta}^{0}\varphi(t)\,dt.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x+0)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

За да оценим интегралите, стоящи в дясната част на (8.77), ще се възползуваме от неравенствата (8.75) и (8.76), като поставим в десните части на тези неравенства числото $M\cdot|t|^{\alpha}$. Като използуваме вече приложената при доказателството на теорема 8.13 оценка

$$\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\leq\frac{\pi}{2|t|}\quad(\text{при }|t|\leq\pi)$$

и неравенството (8.70), ще получим

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leq\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|\leq$$

$$\leq\frac{M}{2}\left[\int_{0}^{\delta}t^{\alpha-1}\,dt+\int_{-\delta}^{0}|t|^{\alpha-1}\,dt\right]=$$

$$=\frac{M}{\alpha}\cdot\delta^{\alpha}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценката (8.72), а с нея и теоремата са доказани.

Следствие 1. Твърдението на теорема 8.15 ще бъде сигурно вярно, ако в нейната формулировка вместо частично хьолдерова вземем частично гладка (в сегмента $[-\pi,\pi]$) функция, която е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права.

За да формулираме още едно следствие, ще въведем едно ново понятие. Нека $0<\alpha\leq1$.

Определение 3. Ще казваме, че функцията $f(x)$ удовлетворява в дадената точка x отляво (отдясно) условието на Хьолдер от ред α, ако за функцията $f(x)$ съществува в точката x дясната (лявата) граница и ако съществува такава константа M, че за всички достатъчно малки положителни (отрицателни) t е изпълнено неравенството

$$\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t^{\alpha}}\leq M\quad\left(\frac{|f(x+t)-f(x-0)|}{|t|^{\alpha}}\leq M\right)$$

Очевидно, че ако функцията $f(x)$ има в дадената точка x дясна (лява) производна, т. е. съществува границата

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\quad\left(\lim_{t\to 0-0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right),$$

то функцията $f(x)$ удовлетворява в тази точка отдясно (отляво) условието на Хьолдер от произволен ред $\alpha\leq 1$.

Следствие 2 (условие за сходимост на тригонометричен ред на Фурие в дадена точка). За сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на частично непрекъснатата и периодична (с период 2π) функция $f(x)$ в дадена точка от безкрайната права е достатъчно функцията $f(x)$ да удовлетворява в точката x отдясно условието на Хьолдер от някакъв положителен ред α_1 и отляво условието на Хьолдер от някакъв положителен ред α_2 (и още повече достатъчно е функцията $f(x)$ да има в точката x лява и дясна производна).

Доказателство. Достатъчно е да забележим, че ако функцията $f(x)$ удовлетворява в точката x отдясно (отляво) условието на Хьолдер от ред α_1 (от ред α_2), то съществува константа M_1 (константа M_2) такава, че за всички достатъчно малки положителни (отрицателни) t е в сила неравенството (8.75) (неравенството (8.76)). Но изложеното от нас доказателство на теорема 8.15 използва само неравенствата (8.75) и (8.76), частичната непрекъснатост и периодичността на функцията $f(x)$.

Пример. Без да пресмятаме коефициентите на Фурие на функцията

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{при}\quad -\pi\leq x<0,\\ 1/2 & \text{при}\quad x=0,\\ \sqrt{x} & \text{при}\quad 0<x\leq\pi,\end{cases}$$

може да твърдим, че тригонометричният ред на Фурие на тази функция е сходящ в точката $x=0$ към стойността $\frac{1}{2}$, тъй като функцията $f(x)$ има в тази точка лява производна и удовлетворява отдясно условието на Хьолдер от ред $\alpha_2=\frac{1}{2}$.

7. Сумируемост на тригонометричния ред на Фурие на непрекъснатата функция по метода на средните аритметични. Вече отбелязахме, че тригонометричният ред на Фурие от непрекъснатата и периодична (с период 2π) функция може да бъде разходящ (вж. т. 1). Ще докажем, че този ред въпреки това винаги е сумируем (равномерно в цялата безкрайна права) по метода на Чезаро (или по метода на средните аритметични)*.

Теорема 8.16 (теорема на Фейер)**. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi,\pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$, то средното аритметично от частичните суми на нейния тригонометричен ред на Фурие

$$\sigma_n(x,f)=\frac{S_0(x,f)+S_1(x,f)+\cdots+S_{n-1}(x,f)}{n}$$

клони (към тази функция) равномерно в сегмента $[-\pi,\pi]$ (а когато функцията е продължена върху цялата безкрайна права с период 2π, то равномерно в цялата безкрайна права).

Доказателство. От равенството (8.55) за $S_n(x,f)$ получаваме

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right]dt. \tag{8.78}$$

За да пресметнем сумата, стояща в квадратните скоби на (8.78), ще сумираме тъждествата

$$2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\cos kt-\cos(k+1)t$$

за всички $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Ще получим

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=$$

$$=1-\cos nt=2\sin^2\frac{nt}{2}.$$

С помощта на последното равенство (8.78) се преобразува във вида

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.79}$$

От (8.79) веднага следва, че

$$\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=1, \tag{8.80}$$

тъй като лявата част на (8.80) е равна на средното аритметично на частичните суми на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)\equiv 1$, а всички указани частични суми са тъждествено равни на единица (вж. т. 2).

* Вж. т. 1, § 7, гл. 1.

** Л. Фейер е доказал своята теорема през 1904 г. Л. Фейер — унгарски математик (1880—1959).

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. По теоремата на Вайерщрас 8.7 съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че

$$|f(x)-T(x)|\leqq\frac{\varepsilon}{2} \tag{8.81}$$

за всички x от безкрайната права. От линейността на средните аритметични имаме $\sigma_n(x,f)=\sigma_n(x,f-T)+\sigma_n(x,T)$, така че

$$|\sigma_n(x,f)-T(x)|\leqq|\sigma_n(x,f-T)+|\sigma_n(x,T)-T(x)|. \tag{8.82}$$

Записваме равенството (8.79) за функцията $[f(x)-T(x)]$, отчитайки неотрицателността на функцията $\dfrac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$, наричана ядро на Фейер, и използуваме оценката (8.81) и равенството (8.80). Получаваме

$$|\sigma_n(x,f-T)|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-T(x+t)|\,\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\leqq \tag{8.83}$$

$$\leqq\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi\cdot n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Неравенството (8.83) е изпълнено за всяко естествено число n. Да отбележим сега, че тригонометричният ред на Фурие на полинома $T(x)$ съвпада с този полином. Оттук следва, че всички частични суми $S_n(x,T)$, започвайки от някакво естествено число n_0, са равни на $T(x)$. Но това ни позволява за фиксираното по-горе произволно $\varepsilon>0$ да намерим естествено число N такова, че

$$|\sigma_n(x,T)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{8.84}$$

за всяко $n\geqq N$ и всяко x.

От неравенствата (8.82), (8.83) и (8.84) заключаваме, че $|\sigma_n(x,f)-f(x)|<\varepsilon$ за всяко $n\geqq N$ и всяко x. Теоремата е доказана.

8. Заключителни бележки. 1°. За решаването на редица конкретни задачи се налага да развиваме функцията в тригонометричен ред на Фурие не на сегмента $[-\pi,\pi]$, а на сегмента $[-l,l]$, където l е произволно положително число. За прехода към този случай е достатъчно във всички изложени по-горе разсъждения да заменим

променливата x с $\frac{\pi}{l}\cdot x$. Разбира се, при такава линейна смяна на променливите всички установени от нас резултати остават валидни. Тези резултати ще се отнасят за тригонометричния ред на Фурие

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right) \tag{8.85}$$

със следните формули за коефициентите на Фурие:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left(\frac{\pi}{l}kt\right)dt,\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\left(\frac{\pi}{l}kt\right)dt \tag{8.86}$$

$$(k=1,2,\ldots).$$

Няма да формулираме отново всички установени теореми, а само ще отбележим, че във всички формулировки сегментът $[-\pi,\pi]$ трябва да се замени със сегмента $[-l,l]$, а периодът 2π — с период $2l$.

2°. Ще напомним, че функцията $f(x)$ се нарича четна, ако удовлетворява условието $f(-x)=f(x)$, и нечетна, ако удовлетворява условието $f(-x)=-f(x)$.

От вида (8.86) на тригонометричните коефициенти на Фурие следва, че за четна функция $f(x)$ всички коефициенти b_k $(k=1,2,\ldots)$ са равни на нула, а за нечетна функция всички коефициенти a_k $(k=0,1,2,\ldots)$ са равни на нула. По такъв начин една четна функция $f(x)$ се разлага в тригонометричен ред на Фурие само по косинуси:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi}{l}kx,$$

а една нечетна функция $f(x)$ се разлага в тригонометричен ред на Фурие само по синуси:

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{\pi}{l}kx.$$

3°. Ще въведем често употребяваната комплексна форма на записване на тригонометричния ред на Фурие (8.85).

Като използуваме съотношенията (вж. т. 3, § 7, гл. 2)

$$e^{-i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx-i\sin\frac{\pi}{l}kx,$$

$$e^{i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx+i\sin\frac{\pi}{l}kx,$$

лесно е да се убедим, че тригонометричният ред на Фурие (8.85) с коефициенти на Фурие (8.86) се записва във вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{\pi}{l}kx}, \tag{8.87}$$

в който комплексните коефициенти c_k имат вида

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,.\,e^{i\frac{\pi}{l}kt}\,dt$$

и се изразяват чрез коефициентите (8.86) по формулите

$$c_0=\frac{a_0}{2},\ c_{-k}=\frac{a_k-ib_k}{2},\quad c_k=\frac{a_k+ib_k}{2}\quad (k=1,2,\ldots).$$

§ 6. Кратни тригонометрични редове на Фурие

1. Понятие за кратен тригонометричен ред на Фурие и за неговите правоъгълни и сферични частични суми. Нека функцията на N променливи $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е дефинирана и интегруема в N-мерния куб $-\pi\leq x_k\leq\pi$ $(k=1, 2, \ldots, N)$. Този куб ще обозначим със символа $\prod$. Удобно е да запишем кратния тригонометричен ред на такава функция направо в комплексна форма, използувайки за съкръщаване на записа понятието за скаларно произведение на два N-мерни вектора.

Нека $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е вектор с произволни реални координати $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а $n=(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ да е вектор с целочислени координати $n_1, n_2, \ldots, n_N$.

Кратен тригонометричен ред на Фурие на функцията $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ се нарича ред

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\hat{f}_n\, e^{-i(x,n)}, \tag{8.88}$$

в който числата $\hat{f}_n$, наричани коефициенти на Фурие, се определят с равенствата

$$\hat{f}_n=\hat{f}_{n_1n_2\ldots n_N}=$$

$$=(2\pi)^{-N}\,.\int\ldots\int_{\prod} f(y_1, y_2, \ldots, y_N)\, e^{i(y_1n_1+\cdots+y_Nn_N)}\, dy_1\ldots dy_N, \tag{8.89}$$

а символът (x, n) обозначава скаларното произведение на векторите x и n, равно на $x_1\,.\,n_1+x_2\,.\,n_2+\cdots+x_N\,.\,n_N$.

Разбира се, кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) може да се разглежда като ред на Фурие по ортонормираната (в N-мерния куб $\prod$) система*, образувана с помощта на всевъзможните произведения от елементите на едномерни тригонометрични системи, взети по променливите $x_1, x_2, \ldots, x_N$ съответно. Тази ортонормирана система е прието да се нарича кратна тригонометрична система.

Както и за всяка ортонормирана система, за кратната тригонометрична система е вярно неравенството на Бесел:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}_n\right|^2\leq(2\pi)^{-N}\int\ldots\int_{\prod} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,dx_1\ldots dx_N \tag{8.90}$$

(тук $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е произволна непрекъсната (или интегруема) в N-мерния куб функция).

Да разгледаме въпроса за сходимост на кратен тригонометричен ред на Фурие. Ако в дадена точка $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ такъв ред не е сходящ абсолютно, то въпросът за неговата сходимост (поради теоремата на Риман 1.10) зависи от реда, в който се вземат неговите членове (или което е същото, зависи от реда на сумиране по индексите $n_1, n_2, \ldots, n_N$).

Широко са разпространени два начина за сумиране на кратния тригонометричен ред на Фурие — сферичен и правоъгълен.

Сферични частични суми на кратния тригонометричен ред на Фурие (8.88) се наричат сумите от вида

$$S_\lambda(x, f)=\sum_{|n|\leq\lambda}\hat{f}_n\, e^{-i(x,n)},$$

където сумирането е по всички целочислени стойности $n_1, n_2, \ldots, n_N$, удовлетворяващи условието $|n|=\sqrt{n_1^2+n_2^2+\cdots+n_N^2}\leq\lambda$.

Ще казваме, че кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88)

* При това скаларното произведение на две произволни функции се дефинира като интеграл от произведението на тези функции върху куба $\prod$.

е сумируем в дадената точка x по сферичния метод, ако в тази точка съществува границата $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(x, f)$.

Правоъгълни частични суми на кратния тригонометричен ред на Фурие (8.88) се наричат сумите от вида

$$S_{m_1, m_2, \ldots, m_N}(x, f) = \sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \cdots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \hat{f}_n e^{-i(x, n)}.$$

Ще казваме, че кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) е сумируем в дадената точка x по правоъгълния метод (или по метода на Принсхейм), ако в тази точка съществува границата

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty \\ m_2\to\infty \\ \cdots\cdots \\ m_N\to\infty}} S_{m_1, m_2, \ldots, m_N}(x, f)$$

всеки от индексите $m_1, m_2, \ldots, m_N$ клони независимо към безкрайност).

И двата метода за сумиране имат своите преимущества и недостатъци. При разглеждането на кратен тригонометричен ред на Фурие като ред на Фурие по ортонормирана система е естествено да подредим неговите членове по нарастването на $|n|$ и да използуваме сферичните частични суми.

Правоъгълните частични суми се използват при изследване на поведението на кратните степенни редове около границата на областта му на сходимост. Трябва да отбележим, че определението на сумата на реда като граница на правоъгълните суми (за разлика от определението, опиращо се на границата на сферичните суми) не налага никакви ограничения на безкрайното множество от парциални суми на този ред.

Преди да формулираме условия за сходимост на кратен тригонометричен ред на Фурие, ще определим някои характеристики за гладкост на функция на N променливи.

2. Модул на непрекъснатост и класове на Хьолдер за функции на N променливи. Нека функцията $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е дефинирана и непрекъсната в N-мерната област D.

Определение 1. За всяко $\delta > 0$ модул на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в областта D наричаме точната горна граница от модула на разликата $|f(x') - f(x'')|$ по множеството от всички точки x' и x'', които принадлежат на областта D и разстоянието $\rho(x', x'')$ между които е по-малко от δ.

Модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в областта D ще означаваме със символа $\omega(\delta, f)$.

Определение 2. За произволно $\varkappa$ от полусегмента $(0, 1]$ ще казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в областта D на класа на Хьолдер $C^\varkappa$ с показател $\varkappa$ и ще пишем $f(x) \in C^\varkappa(D)$, ако модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в областта D има ред $\omega(\delta, f) = \bar{\bar{O}}(\delta^\varkappa)$

Нека сега α е произволно (не непременно цяло) положително число. Винаги можем да представим това число във вида $\alpha = r + \varkappa$, където r е цяло, а $\varkappa$ се съдържа в полусегмента $(0, 1]$.

Определение 3. Ще казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в областта D на класа на Хьолдер C^α с показател $\alpha > 0$ и ще пишем $f(x) \in C^\alpha(D)$, ако всички частни производни на функцията $f(x)$ от ред r са непрекъснати в областта D и всяка частна производна от ред r принадлежи на класа $C^\varkappa(D)$, въведен в определение 2.

3. Условия за абсолютна сходимост на кратен тригонометричен ред на Фурие

Теорема 8.17. Ако функцията $f(x)$ периодично (с период 2π по всяка от променливите) е продължена върху цялото пространство E^N и притежава в E^N непрекъснати производни от ред $s = [N/2] + 1$, където $[N/2]$ е цялата част на числото $N/2$, то кратният тригонометричен ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ към тази функция абсолютно и равномерно в цялото пространство E^N.

Доказателство. Да се договорим да означаваме със символа $\left(\frac{\partial^m \widehat{f}}{\partial x_k^m}\right)_n$ коефициента на Фурие на производната $\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ с номер $n = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$. Чрез интегриране по части получаваме, че $\left(\frac{\widehat{\partial f}}{\partial x_k}\right)_n = i\, n_k . \hat{f}_n$ (за всяко $k = 1, 2, \ldots, N$), така че $\sum\limits_{k=1}^{N} \left|\left(\frac{\widehat{\partial f}}{\partial x_k}\right)_n\right| = |\hat{f}_n| . (|n_1| + |n_2| + \cdots + |n_N|)$ и следователно

$$|\hat{f}_n| = (|n_1| + |n_2| + \cdots + |n_N|)^{-1} . \sum_{k=1}^{N} \left|\left(\frac{\widehat{\partial f}}{\partial x_k}\right)_n\right|. \tag{8.91}$$

Формулата (8.91) е вярна не само за функцията f, но и за всяка частна производна на функцията f до ред $s-1$ включително.

Оттук веднага следва съотношението

$$|\hat{f}_n| \leq (|n_1| + |n_2| + \cdots + |n_N|)^{-s} \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_N=s} \left|\left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}}\right)_n\right|, \tag{8.92}$$

като в дясната част сумираме по всички цели неотрицателни

$s_1, s_2, \ldots, s_N$, удовлетворяващи условието $s_1+s_2+\cdots+s_N=s$ (така че броят на събираемите в тази сума е равен на N^s). От (8.92) следва*, че

$$|\hat{f}_n| \leq$$

(8.93)

$$\leq \frac{1}{2}(|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-2s}+\frac{N^s}{2}\sum_{s_1+\ldots+s_N=s}\left|\left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_n\right|^2.$$

Отчитаме, че $s=\frac{N}{2}+\varepsilon$, където $\varepsilon=1$ за четно N и $\varepsilon=\frac{1}{2}$ за нечетно N, и че

$$(|n_2|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-2s}=(|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-N-2\varepsilon}\leq$$

$$\leq |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\cdot|n_2|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\ldots|n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}},$$

и получаваме от (8.93), че

$$|\hat{f}_n|\leq\frac{1}{2}|n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\cdot|n_2|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\cdot|n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}+$$

(8.94)

$$+\frac{N^s}{2}\sum_{s_1+s_2+\ldots+s_N=s}\left|\left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_n\right|^2.$$

За да бъде кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) абсолютно и равномерно сходящ, е достатъчно (поради признака на Вайерщрас) да докажем сходимостта на мажориращия го числов ред

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_n|,$$

но (поради неравенството (8.94)) сходимостта на последния ред е директно следствие от сходимостта за всяко $k=1, 2, \ldots, N$ на числовия ред $\sum_{n_k=-\infty}^{\infty}|n_k|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}$ и от сходимостта за произволни $s_1, s_2, \ldots, s_N$ на реда

* Използувахме неравенствата $|a|\cdot|b|\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ и $(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_p|)^2\leq p\,(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_p^2)$.

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_n\right|^2,$$

следваща от неравенството на Бесел (8.90), приложено към непрекъснатата функция $\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_N^{s_N}}$.

Фактът, че кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) е сходящ именно към функцията $f(x)$, следва от пълнотата на кратната тригонометрична система*. Наистина, ако редът (8.88) би бил равномерно сходящ към някаква функция $g(x)$, то от възможността за почленно интегриране на такъв ред би следвало, че всички коефициенти на Фурие на функцията $g(x)$ съвпадат със съответните коефициенти на Фурие на функцията $f(x)$. Но тогава разликата $[f(x)-g(x)]$ би била ортогонална на всички елементи на кратната тригонометрична система и (поради пълнотата на тази система) би била равна на нула. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Теорема 8.17 може да бъде уточнена. Вярно е следното твърдение: ако функцията $f(x)$, периодична по всяка от променливите си (с период 2π), принадлежи в E^N на класа на Хьолдер C^α при $\alpha>\frac{N}{2}$, то кратният тригонометричен ред на Фурие на $f(x)$ е сходящ (към тази функция) абсолютно и равномерно в цялото пространство E^N.

Изясняването на условията за неабсолютна сходимост на кратния тригонометричен ред на Фурие изисква привличането на по-тънка техника.

* Пълнотата на кратната тригонометрична система веднага следва от пълнотата на съставящите я едномерни тригонометрични системи.

9. Преобразование на Фурие

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в цялата безкрайна права или в полуправата и не е периодична, то естествено е тази функция да се разложи не в тригонометричен ред на Фурие, а в така наречения интеграл на Фурие. Настоящата глава е посветена на изучаването на това разлагане.

Ще започнем с някои насочващи съображения. Нека периодичната в сегмента $[-l, l]$ функция $f(x)$ е разложена в ред на Фурие:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right),$$

където

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,\ a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt,\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt.$$

Като заместим формално изразите за a_k и b_k в разлагането на функцията $f(x)$, получаваме

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}kx\,.\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi}{l}kx\,.\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\left[\cos\frac{\pi}{l}kx\,.\cos\frac{\pi}{l}kt+\sin\frac{\pi}{l}kx\,.\sin\frac{\pi}{l}kt\right]dt,$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}k(t-x)\,dt.$$

Да предположим, че функцията $f(x)$ е абсолютно интегруема върху цялата права, т.е. че е сходящ несобственият интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$, и да извършим в равенството за $f(x)$ формално граничен преход при $l\to\infty$. Първото събираемо в дясната страна на горното равенство клони към нула при $l\to\infty$, а второто събираемо е интегрална сума за интеграла $\int_0^{\infty}g(\lambda)d\lambda$ на функцията

$$g(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt,$$

ако положим $\lambda_k=\frac{\pi}{l}k$ и $\Delta\lambda=\frac{\pi}{l}$.

Формалният граничен преход води до равенството

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Това равенство се нарича **формула на Фурие** (за обръщане).

Ако положим

$$a_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,\ b_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt,$$

то формулата на Фурие може да се запише във вида

$$f(x)=\int_0^{\infty}(a_\lambda\cos\lambda x+b_\lambda\sin\lambda x)\,d\lambda.$$

Да пристъпим сега към по-строго изложение на теорията на преобразованието на Фурие.

§ 1. Представяне на функция с интеграл на Фурие

Навсякъде по-нататък ще искаме функцията $f(x)$ да е абсолютно интегруема върху безкрайната права $(-\infty, \infty)$, т. е. ще искаме да е сходящ несобственият интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx. \tag{9.1}$$

Определение 1. Казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в безкрайната права $(-\infty, \infty)$ на класа L_1, т. е. $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, ако функцията $f(x)$ е интегруема по Риман върху всеки сегмент (казваме, че $f(x)$ е локално интегруема) и ако е сходящ несобственият интеграл (9.1).

1. Помощни твърдения. Една комплекснозначна функция $g(\lambda)$ на реална променлива λ ще разглеждаме като двойка реални функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$: $g(\lambda)=u(\lambda)+iv(\lambda)$. Комплексната функция $g(\lambda)$ е непрекъсната в дадена точка λ, ако и само ако всяка от функциите $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ е непрекъсната в тази точка.

Лема 1. Ако $f \in L_1(-\infty, \infty)$, то за произволно реално число λ съществува несобственият интеграл

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx, \tag{9.2}$$

наричан преобразование на Фурие на функцията $f(x)$ (или Фурие-образ на f). Функцията (9.2) непрекъсната по λ във всяка точка от безкрайната права.

Доказателство. От равенството $|f(x)e^{i\lambda x}|=|f(x)|$ и от сходимостта на интеграла (9.1) следва съществуването на несобственият интеграл $g(\lambda)$: $|g(\lambda)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx<\infty$. От признака на Вайерщрас (вж. теорема 7.8, § 3, гл. 7) следва равномерната сходимост на интеграла (9.2) и поради непрекъснатостта на $e^{i\lambda x}$ по λ от теорема 7.9, § 3, гл.7 следва непрекъснатостта на $g(\lambda)$ във всеки сегмент, т. е. във всяка точка от безкрайната права.

Лема 2 (лема на Риман). Нека функцията $f(x)$ е интегруема и абсолютно интегруема в интервала (a, b). Тогава

$$\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx \to 0$$

при $\lambda \to \infty$ (λ е реално).

Доказателство. Нека $\varepsilon>0$ и да изберем сегмент $[c, d]$, съдържащ се в (a, b), такъв, че при всяко λ

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx-\int_c^d f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|<\varepsilon.$$

Наистина от оценките

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx-\int_c^d f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \leq \int_a^c |f(x)\;e^{i\lambda x}|\,dx+$$

$$+\int_d^b |f(x)e^{i\lambda x}|\,dx=\int_a^c |f(x)|\,dx+\int_d^b |f(x)|\,dx$$

и от абсолютната интегруемост на $f(x)$ върху (a, b) следва съществуването на такъв сегмент $[c, d]$.

Тъй като f е абсолютно интегруема в $[a, b]$, то съществува такава малка сума на Дарбу

$$\sum_{j=1}^{n} m_j\Delta x_j, \quad m_j=\inf_{x\in[x_{j-1},\,x_j]} f(x),$$

че

$$0\leq\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{m} m_j\Delta x_j<\varepsilon, \quad \Delta x_j=x_j-x_{j-1}.$$

Да определим частично постоянна функция $p(x)$ в $[c, d]$ чрез $p(x)=m_j$ при $x\in[x_{j-1}, x_j]$ $j=1, 2, \ldots, k$. Ясно е, че $p(x)<f(x)$ в $[c, d]$ и

$$0\leq\left|\int_c^d f(x)e^{i\lambda x}\,dx-\int_c^d p(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|\leq\int_c^d |f(x)-p(x)|\,|e^{i\lambda x}|\,dx\leq$$

$$\leq\int_a^b (f(x)-p(x))\,dx<\varepsilon.$$

Обаче

$$\int_c^d p(x)e^{i\lambda x}\,dx=\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x}\,dx-\frac{1}{i\lambda}\sum_{j=1}^{m}\left(m_j e^{i\lambda x}\right)\Big|_{x_{j-1}}^{x_j}\to 0$$

при $\lambda\to\infty$. Следователно $\int_c^d p(x)e^{i\lambda x}\,dx$ клони към нула при $\lambda\to\infty$ и с произволна точност приближава интеграла $\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx$. Следователно последният интеграл също клони към нула при $\lambda\to\infty$. Лемата е доказана.

Лема 3. Преобразованието на Фурие $g(\lambda)$ на функцията $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ клони към нула при $|\lambda|\to\infty$, т. е.

$$\lim_{\lambda\to\infty}|g(\lambda)|=0.$$

Доказателство. Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От сходимостта на интеграла (9.1) следва, че може да изберем число $A>0$ такова, че

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\,dx+\int_{A}^{\infty}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

За така избраното A е в сила неравенството

$$|g(\lambda)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|\leq\left|\int_{-A}^{A}f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поради предишната лема интегралът, стоящ в дясната част, може да бъде направен при достатъчно голямо λ по-малък от $\frac{\varepsilon}{2}$ и следователно $|g(\lambda)|<\varepsilon$.

Лемата е доказана.

Като следствие от нашите разсъждения получаваме, че

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x.\,f(x)\,dx=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda x\,.\,f(x)\,dx=0.$$

2. Основна теорема. Формула за обръщане

Определение 2. За произволна функция $f(x)$ от класа $L_1(-\infty,\infty)$ границата

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(t-x)}f(t)\,dt\right]d\lambda \tag{9.3}$$

(при условие че тази граница съществува) ще наричаме разлагане на функцията $f(x)$ в интеграл на Фурие.

Възниква въпросът за съществуването на разлагане на функцията $f(x)$ в интеграл на Фурие.

Отговор дава следната теорема.

Теорема 9.1. Ако функцията $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ и ако f удовлетворява в дадена точка x отдясно условието на Хьолдер от ред α_1, където $0<\alpha_1\leq 1$, а отляво — условието на Хьолдер от ред α_2, където $0<\alpha_2\leq 1$, то в точката x е изпълнено равенството

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

По такъв начин във всяка точка x, в която имаме $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ (в частност във всяка точка на непрекъснатост на f) и за която са изпълнени условията на теоремата, е налице равенството

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda, \tag{9.4}$$

където несобственият интеграл се разбира в смисъл на главна стойност, т. е. при симетрично клонене на границите на интегриране към безкрайност.

Доказателство. Тъй като $g(\lambda)$ е непрекъсната функция, то за всяко $A>0$ съществува интегралът

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}e^{-ix\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}f(t)\,dt\right]d\lambda.$$

В интеграла отдясно поради равномерната по λ върху сегмента $[-A,A]$ сходимост на вътрешния (ограден с квадратни скоби) интеграл можем да сменим реда на интегриране по t и λ и да се възползуваме от равенствата

$$e^{i\lambda(t-x)}=\cos\lambda(t-x)+i\sin\lambda(t-x),$$

$$\int_{-A}^{A}\cos\lambda(t-x)\,d\lambda=\frac{2\sin A(t-x)}{(t-x)},\quad \int_{-\lambda}^{\lambda}\sin\lambda(t-x)\,d\lambda=0,$$

и сменяме променливата $t=x+u$. Получаваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-A}^{A} e^{i\lambda(t-x)}\,d\lambda\right]f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Следователно за всяко $A>0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)\,e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+u)\,\frac{\sin Au}{u}\,du+$$

(9.5)

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Тъй като $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du=\frac{\pi}{2}$ и $\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin Au}{u}\,du=\frac{\pi}{2}$,

то

$$f(x+0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+0)\,\frac{\sin Au}{u}\,du,$$

$$f(x-0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x-0)\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Изваждаме последните две равенства от (9.5) и получаваме

$$\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda-\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x+u)-f(x+0)]\times$$

(9.6)

$$\times\frac{\sin Au}{u}\,du+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Тъй като функцията $f(x)$ удовлетворява отдясно условието на Хьолдер от ред α_1, то съществува константа M_1 такава, че за достатъчно малки положителни u ще бъде изпълнено неравенството

$$|f(x+u)-f(x+0)|\leq M_1u^{\alpha_1},\ 0<\alpha_1\leq 1.$$

Аналогично от условието на Хьолдер отляво от ред α_2 ще получим неравенството

$$|f(x+u)-f(x-0)|\leq M_2|u|^{\alpha_2}$$

за всички достатъчно малки по модул отрицателни u. Нека $M=\max\{M_1, M_2\}$ и $\alpha=\min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Тогава горните две оценки са еквивалентни на следното неравенство:

(9.7) $$|f(x+u)-f(x\pm 0)|\leq M|u|^{\alpha}$$

при $|u|<\delta$, където $\delta>0$ е достатъчно малко.

Да препишем съотношението (9.6) по следния начин:

$$\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\times$$

(9.8)

$$\times\frac{\sin Au}{u}\,du+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\,\frac{\sin Au}{u}\,du-$$

$$-\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du-\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Нека е фиксирано произволно $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ изпълнява условието $\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}<\frac{\varepsilon}{4}$.

Да оценим първите два интеграла в дясната част на (9.8). От (9.7) получаваме

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{0}^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\,\frac{\sin Au}{u}\,du\right|\leq\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}|f(x+u)-f(x+0)|\,\frac{du}{u}\leq$$

$$\leq\frac{M}{\pi}\int_{0}^{\delta}u^{\alpha-1}\,du=\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{0}^{\delta}[f(x-u)-f(x-0)]\,\frac{\sin Au}{u}\,du\right|\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}|f(x+u)-f(x-0)|\,\frac{du}{|u|}\leq$$

$$\leq\frac{M}{\pi}\int_{-\delta}^{0}|u|^{\alpha-1}\,du=\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}.$$

Затова

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin Au}{u}\,du\right|+$$

(9.9)
$$+\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\delta}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\frac{\sin Au}{u}\,du\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

За да оценим третия интеграл в дясната част на (9.8), ще разгледаме функцията

$$g(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{f(x+u)}{u} & \text{при } |u|\geq\delta,\\ 0 & \text{при } |u|<\delta.\end{cases}$$

Функцията $g(u)\in L_1(-\infty,\infty)$ и затова поради лемата на Риман

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\sin Au\,du=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{|u|\geq\delta}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du=0.$$

Но това и означава, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число N_1 такова, че при $A\geq N_1$

(9.10)
$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{|A|\geq\delta}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Освен това

$$\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}\,du=\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du=\int_{A\delta}^{\infty}\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\longrightarrow 0$$

при $A\longrightarrow\infty$. Оттук следва, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ и за разглежданата точка x ще се намери N_2 такова, че

(9.11)
$$\left|\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du\right|+\left|\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}\,du\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

при $A\geq N_2$. Нека $N=\max\{N_1, N_2\}$. Заместваме (9.9), (9.10) и (9.11) в (9.8) и получаваме

$$\left|\int_{-A}^{A}g(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\varepsilon$$

при $A\geq N$. Теоремата е доказана.

Забележка. **Определение 3.** Ще казваме, че функцията $f(x)$, дефинирана в някоя прободена околност на точката x, удовлетворява в точката x условието на Дини, ако:

а) в точката x съществуват двете едностранни граници

$$f(x+0)=\lim_{u\to 0+0}f(x+u),\quad f(x-0)=\lim_{u\to 0+0}f(x-u);$$

б) двата интеграла

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\,du,\quad\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\,du$$

са *абсолютно* сходящи за някаква положителна стойност на ε.

Ясно е, че ако непрекъснатата в околност на точката x функция $f(x)$ удовлетворява в точката x условието на Хьолдер

$$|f(x+u)-f(x)|\leq M|u|^{\alpha},\ 0<\alpha\leq 1,$$

имаме

$$\frac{|f(x+u)-f(x)|}{u}\leq\frac{M}{|u|^{\alpha-1}},$$

следователно за функцията $f(x)$ е изпълнено и условието на Дини.

Обратното, разбира се, не е вярно.

Може да се докаже, че условието на Дини също осигурява разлагането на функцията $f(x)$ в интеграл на Фурие в дадената точка.

Да направим някои изводи от получените резултати. При условие че $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$, за функцията $f(x)$ съществува преобразование на Фурие

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx.$$

Да го означим по следния начин: $g(\lambda)=F(f)$, където с F сме означили оператора на Фурие.

Ако са изпълнени условията на теорема 9.1 и условието $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, то, както доказахме, функцията се разлага в интеграл на Фурие, т. е. вярна е формулата

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

Тази формула се нарича обратно преобразование на Фурие.

Да го означим по следния начин: $f(x)=\frac{1}{2\pi}\ F^{-1}(g)$, където с F^{-1} е означен обратният оператор на Фурие, приложен към функцията $g(\lambda)$, т. е. към образа на Фурие на функцията $f(x)$.

Да подчертаем, че въпреки че формулите за преобразованието на Фурие и за обратното преобразование на Фурие външно си приличат (вж. формулите (9.2) и (9.4)), по същество те са различни: в първата от тях интегралът съществува в обикновен смисъл (понеже $f\in L_1(-\infty,\infty)$), а във втората, изобщо казано, само в смисъл на главна стойност. Освен това равенството (9.2) е определението на функцията $g(\lambda)$, а равенството (9.4) съдържа твърдението, че интегралът вдясно е равен на изходната функция $f(x)$.

3. Някои примери. Да разгледаме правото и обратното преобразование на Фурие в случая на четна и нечетна функция.

1°. Случай на четна функция $f(x)$. Очевидно в случая, когато $f(x)=f(-x)$, от формула (9.2) получаваме

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)\,dx=2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx.$$

Оттук следва, че $g(\lambda)$ също е четна функция. Затова

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} g(\lambda)\cos\lambda x\,dx.$$

Първата от тези формули се нарича косинус преобразование на Фурие на функцията $f(x)$, а втората — обратно косинус преобразование на Фурие.

2°. Случай на нечетна $f(x)$. Нека $f(x)=-f(-x)$. Тогава очевидно получаваме синус преобразование на Фурие

$$g(\lambda)=2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx$$

и обратно синус преобразование на Фурие

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx.$$

3°. Нека $f(x)=e^{-\gamma|x|}$, $\gamma>0$. Тогава

$$F(f)=g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|}e^{i\lambda x}\,dx=2\int_{0}^{\infty} e^{-\gamma x}\cos\lambda x\,dx.$$

След двукратно интегриране по части получаваме

$$F(f)=g(\lambda)=\frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}.$$

4°. Нека

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } |x|\leq a,\\ 0 & \text{при } |x|>a.\end{cases}$$

Тогава

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx=\int_{-a}^{a} e^{i\lambda x}\,dx=\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Да отбележим, че $g(\lambda)$ не принадлежи на $L_1(-\infty,\infty)$.

§ 2. Някои свойства на преобразованието на Фурие

Да установим връзка между скоростта на намаляване на функцията $f(x)$ и гладкостта (диференцируемостта) на нейното преобразование на Фурие, а също и между гладкостта на функцията и скоростта на намаляване на нейното преобразование на Фурие.

Верни са твърденията.

Твърдение 1. Нека за някое естествено число k функцията $(1+|x|)^k f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Тогава преобразованието на Фурие $g(\lambda)$ на функцията $f(x)$ е диференцируемо k пъти, при това производната по λ от произволен ред $m=1,2,\ldots$ може да се пресметне чрез диференциране под знака на интеграла (9.2), т. е. по формулата

$$g^{(m)}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(ix)^m e^{i\lambda x}\,dx,\ m=1,2,\ldots,k. \tag{9.12}$$

Доказателство. За всяко $m=1,2,\ldots,k$ е вярно неравенството

$$|(e^{ix\lambda}f(x))^{(m)}|=|e^{ix\lambda}(ix)^m f(x)|\leq(1+|x|^k)\cdot|f(x)|.$$

Интегралът $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^k)|f(x)|\,dx$ е сходящ. От сходимостта на този интеграл и от признака на Вайерщрас (вж. теорема 7.8 от § 3, гл. 7) следва равномерната по λ сходимост на интеграла

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx$ в произволен сегмент. От теорема 7.14, § 3, гл. 7 следва възможността да се диференцира този интеграл по λ до ред $m=1, 2, \ldots, k$, а също и верността на формула (9.12). Твърдението е доказано.

Твърдение 2. Нека функцията $f(x)$ да има във всяка точка x всички производни до ред $k\geq 1$ включително, като при това $f(x)$ и всички $f^{(m)}(x)$, $m=1, 2, \ldots, k$, са абсолютно интегруеми в $(-\infty, \infty)$ и за произволно m между 0 и $k-1$ $f^{(m)}(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$ $(f^{(0)}(x)\equiv f(x))$.

Тогава $|g(\lambda)|=\overline{\overline{O}}(|\lambda|^{-k})$ при $|\lambda|\to\infty$, където $g(\lambda)$ е преобразованието на Фурие на $f(x)$.

Доказателство. Нека $A>0$. Тогава

$$\int\limits_{-A}^{A} f^{(k)}(x)\, e^{i\lambda x}\, dx=\Big[f^{(k-1)}(x)\, e^{i\lambda x}\Big]_{-A}^{A}-\Big[f^{(k-2)}(x)\,(i\lambda)\, e^{i\lambda x}\Big]_{-A}^{A}+$$

$$+\cdots+(-i)^k\lambda^k\int\limits_{-A}^{A} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx.$$

Оставяме A да клони към безкрайност и отчитаме, че производните на функцията $f(x)$ клонят към нула. Получаваме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)\, e^{i\lambda x}\, dx=(-i\lambda)^k\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx=(-i\lambda)^k\, g(\lambda).$$

Съгласно лема 3 преобразованието на Фурие на функцията $f^{(k)}(x)$ клони кум нула при $|\lambda|\to\infty$. Следователно

$$|g(\lambda)|=O(|\lambda|^{-k}).$$

Твърдението е доказано.

Твърдение 3 (равенство на Планшерел*). Нека функцията $f(x)$ и нейната втора производна да са абсолютно интегруеми в $(-\infty, \infty)$, $f(x)\to 0$, $f'(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Нека функцията $\varphi(x)$ да е абсолютно интегруема в $(-\infty, \infty)$. Тогава

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\, dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,\overline{\psi(\lambda)}\, d\lambda,$$

където $g(\lambda)=F(f)$, $\psi(\lambda)=F(\varphi)$ са преобразованията на Фурие на

* М. Планшерел — швейцарски математик (1885—1967).

функциите f и φ съответно и $\overline{\psi(\lambda)}$ е функцията, комплексно спрегната към $\psi(\lambda)$.

Доказателство. По формулата за обръщане $f(x)=$ $=\frac{1}{2\pi}\, F^{-1}(g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, dx$, като съгласно твърдение 2

$$|g(\lambda)|\leq c(1+|\lambda|)^{-2}.$$

Следователно интегралът за $f(x)$ е сходящ абсолютно и равномерно (относно x) върху $(-\infty, \infty)$.

Умножаваме двете части на формулата за $f(x)$ с $\varphi(x)$ и интегрираме по x от $-A$ до A. Получаваме

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,\varphi(x)\, dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}\varphi(x)\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda\Big]\, dx.$$

В дясната част на тази формула можем да сменим реда на интегриране, тъй като интегралът $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\, d\lambda$ е равномерно сходящ по λ върху $(-\infty, \infty)$. Затова

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\, g(x)\, dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\int\limits_{-A}^{A}\varphi(x)\, e^{i\lambda x}\, dx\Big]\, g(\lambda)\, d\lambda, \tag{9.13}$$

където чертата означава комплексното спрягане.

От оценката

$$\Big|\int\limits_{-A}^{A}\varphi(x)\, e^{i\lambda x}\, dx\Big|\,|g(\lambda)|\leq\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\, dx\,.\, c(1+|\lambda|)^{-2}$$

и от признака на Вайерщрас интегралът в дясната част на (9.13) е сходящ равномерно по A върху цялата безкрайна права. Следователно в (9.13) може да извършим граничен преход при $|A|\to\infty$ под знака на интеграла. Получаваме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,\overline{\psi(\lambda)}\, d\lambda,$$

което и трябваше да докажем.

В края на този параграф ще докажем теоремата на Котелни-

ков*, която играе важна роля в теорията на радиовръзките. За тази цел да направим няколко предварителни пояснения. Нека функцията $f(x)$ е периодична в сегмента с период $2l$ и абсолютно интегруема върху интервала $[-l, l]$. Да разложим функцията $f(x)$ в ред на Фурие (който в случая, когато удовлетворява допълнителни условия, е сходящ към нея)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{\pi}{l}kx}.$$

Функцията $f(x)$ се нарича сигнал, числата $\{a_0, a_k, b_k\}$ или $\{c_k\}$ — спектър на сигнала, числото $\frac{k}{2l}$ се нарича честота на сигнала f. Разлагането на периодична функция в ред на Фурие се нарича хармоничен анализ на дадената функция.

Ако функцията $f(x)$ не е периодична, то нейният ред на Фурие, както знаем, може да бъде заменен с интеграла на Фурие на функцията $f(x)$ и

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

Функцията $f(x)$ може, както преди, да наричаме сигнал, функцията $g(\lambda)$ — спектър на сигнала (в дадения случай спектърът е непрекъснат), λ — честота на сигнала.

Задачата за възстановяване на сигнал по неговия спектър е важна за практиката. Ще подчертаем, че често не е необходимо да знаем спектъра $g(\lambda)$ за всички честоти λ, а и приборите улавят спектъра само в някакъв диапазон от честоти $|\lambda|\leq a$ (например човешкото ухо улавя сигнали в диапазон от 20 херца до 20 килохерца).

Затова ще считаме, че сигналът $f(x)$ (x е времето, $-\infty<x<\infty$) има финитен спектър, различен от нула само за честоти λ, $|\lambda|\leq a$. По такъв начин при $|\lambda|>a$ имаме, че $g(\lambda)\equiv 0$. Следователно

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda. \tag{9.14}$$

Да разложим в сегмента $[-a, a]$ функцията $g(\lambda)$ в ред на Фурие

$$g(\lambda)=\sum_{-\infty}^{\infty}d_k e^{i\frac{\pi}{a}k\lambda}.$$

* В. А. Котельников (роден през 1908 г.) — известен съветски академик, специалист в теорията на радиовръзките.

Отчитаме (9.14) и получаваме, че

$$d_k=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}g(\lambda)e^{-i\frac{\pi}{a}\lambda k}\,d\lambda=\frac{\pi}{a}f\left(+\frac{\pi}{a}k\right). \tag{9.15}$$

Заместваме в реда за $g(\lambda)$ тези коефициенти и после $g(\lambda)$ в интеграла (9.14). Получаваме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\pi}{a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)e^{-i\lambda x+i\frac{\pi}{a}\lambda k}\right)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)\int_{-a}^{a}e^{i\lambda\left(\frac{\pi}{a}k-x\right)}\,d\lambda.$$

Доказахме следната теорема.

Теорема 9.2 (на Котелников). За сигнала $f(x)$ с финитен спектър $g(\lambda)$ е в сила съотношението

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)\frac{\sin a\left(x-\frac{\pi}{a}k\right)}{a\left(x-\frac{\pi}{a}k\right)}.$$

Теорема 9.2 показва, че сигнал, зададен от функцията $f(x)$ с финитен спектър $g(\lambda)$, съсредоточен в ивицата честоти $|\lambda|\leq a$, се възстановява само по отчетените стойности $f\left(\frac{\pi}{a}k\right)$, предавани през равни интервали от време $\frac{\pi}{a}$.

§ 3. Кратен интеграл на Фурие

В този параграф ще обсъдим началните понятия за кратен интеграл на Фурие. Нека функцията на $N\geq 2$ променливи $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е такава, че съществува несобственият интеграл

$$\int\ldots\int_{E^N}f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N.$$

Преобразование на Фурие (образ на $f(x)$) на тази функция ще наричаме израза

$$g(\lambda)=g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)=\int\ldots\int_{E^N}f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,e^{i(x,\lambda)}\,dx_1dx_2\ldots dx_N,$$

където (x, λ) означава скаларното произведение на векторите $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ и $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$, т. е.

$$(x, \lambda)=\sum_{i=1}^{N} x_i\lambda_i.$$

По същия начин, както в § 1, можем да докажем, че $g(\lambda)$ е непрекъсната функция на λ в E^N и клони към нула при

$$|\lambda|=\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2\right)^{1/2} \to 0.$$

Границата

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int \underset{E^N}{\ldots} \int g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)\, e^{-(x, \lambda)}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_N,$$

при условие че тя съществува, се нарича разлагане на функцията $f(x)$ в N-кратен интеграл на Фурие. С граничен преход получаваме, както и в случая на една променлива, следната формула за обръщане:

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^N} \int \underset{E^N}{\ldots} \int g(\lambda)\, e^{-i(x, \lambda)}\, d\lambda,$$

където

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_N),\ \lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N).$$