

## Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

**Ορισμός Συνάρτησης:** Συνάρτηση από ένα σύνολο  $A$  σε ένα σύνολο  $B$ , λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου  $A$  αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου  $B$ .

#### Περιορισμοί για πεδίο ορισμού:

1. Όταν έχω παρονομαστή, πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός
2. Όταν έχω ρίζα, πρέπει το υπόρριζο να είναι μη-αρνητικό
3. Όταν έχω ρίζα σε παρονομαστή, πρέπει το υπόρριζο να είναι αυστηρά θετικό

#### MUST SEE!!!

Σχολικό βιβλίο σελ. 150 Α1,2,3,4,5



### ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

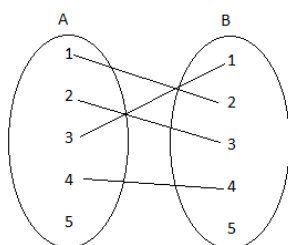
#### Θέμα 2ο

12765. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x-2}$ .

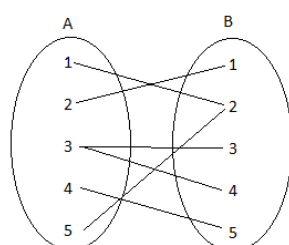
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης  $f$  για όποιους από τους αριθμούς  $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$ , είναι αυτό δυνατό.

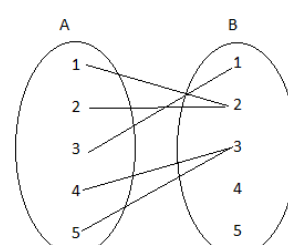
12908. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο  $A$  σε ένα σύνολο  $B$ .



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B.

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση  $f$ ,

- i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης  $f$ .
- ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών  $f(A)$  της συνάρτησης  $f$ .
- iii. Να βρείτε τις τιμές  $f(1)$  και  $f(2)$ .

**12997.** Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α' λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα A, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση  $f: A \rightarrow B$  σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την  $g: B \rightarrow A$  με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση  $f: A \rightarrow B$  ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B.

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση  $g: B \rightarrow A$  αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

**13026.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές  $f(\sqrt{2})$  και  $f\left(\frac{1}{2}\right)$

β) Αν  $x$  ρητός, να λύσετε την εξίσωση  $[f(x)]^2 = 4x - 1$ .

**13031.** Δίνεται η συνάρτηση G, με  $G(x) = \frac{2 \cdot x + 3}{x - 4}$ ,

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για  $x=2$ ,  $x=0$ ,  $x=-\frac{1}{2}$ .

β) Να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G.

γ) Να βρείτε την τιμή του  $x$  που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3.

**13032.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 1 - 3 \cdot x$ ,  $g(x) = \sqrt{x+5}$ .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$

β) Να δείξετε ότι:  $f(-1)=g(11)$

γ) Να βρείτε την τιμή του  $x$ , ώστε  $f(x)=g(4)$

**14681.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ 2x+2, & x\geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές  $f(3)$  και  $f(-3)$ .

β) Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:  $f(x)=8$ .

**14728.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<0 \\ x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$ .

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης  $f(-1)$  και  $f(1)$ .

β) Για  $x \geq 0$  να λύσετε την ανίσωση:  $f(x) \geq 2$ .

**14781.** Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης  $x \rightarrow y$  με το  $x$  να παίρνει μόνο τις τιμές:

$-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$  και  $3$ .

$x$	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$y$	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση  $x \rightarrow y$  είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση  $y \rightarrow x$  συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $x \rightarrow y$ .

**34446.** Η απόσταση  $y$  (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη  $A$ , μετά από  $x$  λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y=35+0,8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη  $A$  μετά από 25 λεπτά;

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

**35298.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$ .

α) Να δείξετε ότι  $f(-1) = f(3)$ .

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , ώστε:  $f(x) = 0$ .

**35405.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

β) Να δείξετε ότι:  $f(2) + f(4) = 0$ .

**37170.** Η θερμοκρασία  $T$  σε βαθμούς Κελσίου ( $^{\circ}\text{C}$ ), σε βάθος  $x$  χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \quad \text{όταν } 0 \leq x \leq 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης.

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με  $290^{\circ}\text{C}$ .

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από  $440^{\circ}\text{C}$ ;

**37175.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \begin{cases} 8-x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x+5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ .

α) Να δείξετε ότι  $f(-5) = f(4)$ .

β) Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , ώστε  $f(x) = 9$ .

**37185.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και να αποδείξετε ότι, για τα  $x$  που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι  $f(x) = x^2 + 4x$ .

β) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) = 32$ .

**37189.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$ .

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \frac{5}{2}$ .

**37202.** α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο  $x^2 - 5x + 6$ .

β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$ .

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = \frac{1}{x-3}$ .

#### **Θέμα 4ο**

**12689.** Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του  $Y_1(t)$ , σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, \quad t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_2(t) = 650 - 25t.$$

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5<sup>ο</sup> μέχρι το 10<sup>ο</sup> λεπτό της κίνησής του;

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $Y_2(t)$ , και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

δ)

i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

**13114.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2}$ .

α) Να δείξετε ότι  $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$ .

β) Αν τα σημεία  $A$  και  $B$  παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης  $f(x) = 0$  και να προσδιορίσετε τη λύση της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

**14375.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \mu x - 2, \mu \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε  $\mu \in \mathbb{R}$ .

β) Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  για τις οποίες οι αριθμοί  $x = -2$  και  $x = 3$  βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$  ενώ ο  $x = 1$  βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

γ) Αν επιπλέον οι τιμές  $f(-2), f(1), f(3)$  με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του  $\mu$ .

ii. Για  $\mu = \frac{13}{7}$  να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

**14562.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$ .

α)

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$ .

ii. Να δείξετε ότι  $f(x) = \frac{x}{x-2}$  για κάθε  $x \in A$ .

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία  $y = 1$  έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της  $|f(x)|$ .

**14655.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη  $x$  και  $y$  τέτοια, ώστε  $x+y=10$ .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E$  του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του  $x$  δίνεται από τον τύπο

$E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$  με  $x \in (0, 10)$ .

β) i. Να αποδείξετε ότι  $E(x) \leq \frac{25}{2}$  για κάθε  $x \in (0,10)$ .

ii. Για ποια τιμή του  $x$  το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με  $\frac{25}{2}$ ;

γ) Αν  $x=5$ , ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;

**14759.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι:  $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$

β) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$ .

γ) Αν  $\alpha = 2$  και  $\beta = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 6x$ .

ii. Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γι), να δείξετε ότι ισχύει:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$ .

**33582.** Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο  $\Pi = 40 \text{ cm}$ . Αν  $x \text{ cm}$  είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α)  $0 < x < 20$ .

β) Το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση  $E(x) = 20x - x^2$ .

γ) Για το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου ισχύει:  $E(x) \leq 100$ , για κάθε  $x \in (0,20)$ .

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο  $40 \text{ cm}$ , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς  $10 \text{ cm}$ .

**33855.** α) Θεωρούμε την εξίσωση  $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ , με παράμετρο  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha$  η εξίσωση  $x^2 + 2x + 3 = \alpha$  έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

ii. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

i. Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ii. Να λύσετε την ανίσωση  $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$ .

**36679.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$ .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = |x| - 2$ .

γ) Για  $x \in A$ , να λύσετε την εξίσωση  $(f(x) + 2)^2 - 4 \cdot f(x) - 5 = 0$ .

**36680.** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \text{ και } g(x) = \alpha x - 5, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει  $f(2) = g(2)$ , να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

β) Για  $\alpha = 1$ ,

i) να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = g(x)$ .

ii) να λύσετε την ανίσωση:  $f(x) \geq g(x)$  και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση:  $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$

