ΑΝΑΛΥΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $\sqrt[3]{1-2\sigma\upsilon\nu x}$ β) $f(x)=\sqrt{\frac{2x-4}{x+3}}$ γ) $f(x)=\sqrt[5]{|2x-1|+|x+3|-1}$ δ) $f(x)=\log(9^x-4\cdot 3^x-45)$

ε) $f(x)=\sqrt{\log(\log\frac{5x+3}{5-2x})}$

2. Αν f: [0,1] → R , να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(3\cdot x^2)$ ii) $f(x^2-4x+3)$

3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ β) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}$ γ) $f(x)=1-\sqrt{1-x}$ δ) $f(x)=-\frac{|x+1|}{2x+10}, x\in[-2,2]$

4. Αν $f(x)=x^2-2x+3$ τότε: i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , ii) να βρεθεί το σύνολο τιμών της $g(x)=f(x), x\in(1,2]$

5. Αν το σύνολο τιμών της $f(x)=2\cdot\eta\mu x-3$ είναι το [-2,-1] να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

6. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{\lambda\cdot x^2-2\cdot x+1}, \lambda\in\mathbb{R}$

7. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)=\frac{\eta\mu x+3}{\eta\mu x-2}$

8. Αν $f(x)=\frac{x^2-\lambda x}{x^2+2}$, να βρεθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το σύνολο τιμών της f να είναι το διάστημα [-1,2].

9. i) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x-2\cdot\sigma\upsilon\nu x-1$, ii) Να βρεθεί το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να έχει μία τουλάχιστον λύση η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu^2 x-2\cdot\sigma\upsilon\nu x+\alpha-2=0$

10. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)=2+\sqrt{x-1}$ και της $g(x)=2\cdot\eta\mu\frac{\pi\cdot x}{2}$. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f, C_g .

11. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις f,g ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει:

i) $f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=x$ ii) $g^2(x^2)+g(2^x)+1=0$

12. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $f(x)\cdot f(y)=f(x)+f(y)+x\cdot y-1$

i) Να βρεθεί το f(1)

ii) Να προσδιοριστεί η f

13. Αν για την f ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $3\cdot f(x)-5\cdot f(-x)=2\cdot x^2+24\cdot x+4$, να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

14. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να ισχύει: $f(x+1994)\le x\le f(x)+1994$, να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f, C_g με $g(x)=x^2-4\cdot x-1998, x\in\mathbb{R}$.

15. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μη σταθερή συνάρτηση ώστε για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}$ να δειχθεί ότι: i) f(0) = 0 , ii) f = περιττή , iii) $f(\mathbb{R})\subseteq[-1,1]$.

16. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων: α) $f(x)=\begin{cases}|x^2-4| & ,x\le 0\\ 3 & ,x>0\end{cases}$, β) $f(x)=\left|\frac{x-1}{x^2-2\cdot x+3}\right|-1$

17. Αν $f(x)=x^2+6\cdot x+8$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $g(2\cdot x-3)=4\cdot x^2-1$ να δείξετε ότι f(x)=g(x).

18. Αν $f(x)=\frac{\lambda\cdot x^3+4\cdot\lambda\cdot x^2+4\cdot x+3}{x^2+\lambda\cdot x+1}$ και $g(x)=\lambda\cdot x+3$, να βρεθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε f(x) = g(x).

19. Αν $f,g:A\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει ότι: $(f^2+g^2)(x)+10\le 2\cdot[(f+g)(x)+2\cdot g(x)]$ να δείξετε ότι: $g(x)=3\cdot f(x)$.

20. Αν $f,g:A\to(0,+\infty)$ και αν το σύνολο Α έχει τουλάχιστον 3 στοιχεία να δείξετε ότι f = g αν και μόνο αν για κάθε $\alpha,\beta\in A$ με $\alpha\neq\beta$ ισχύει: $f(\alpha)\cdot f(\beta)=g(\alpha)\cdot g(\beta)$.

21. Αν f έτσι ώστε για κάθε $x,y,z\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $f(x\cdot y)+f(x\cdot z)-f(x)\cdot f(y\cdot z)\ge 1$ να δείξετε ότι: i) $f(0)=f(1)$, ii) f = σταθερή

22. Αν $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=\sqrt{x-3}$, να βρεθούν αν ορίζονται οι fog, gof.

23. Αν $f(x)=x^2-x+2, \varphi(x)=x+3$ και $g(x)=(\alpha+2\beta)\cdot x^2-(2\alpha+\beta)\cdot x+4\beta-\alpha+\gamma$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε φof=g.

24. Αν f έτσι ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (fof)(x)=2x-3 , να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το σύστημα:

$\begin{cases}(\lambda+2)x+7(\lambda-3)y=(fof)(3)-3\\ x+(\lambda-3)y=3-f(3)\end{cases}$ να έχει και μη μηδενικές λύσεις.

25. Αν η f ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f(x-1)=\eta\mu x$, να δείξετε ότι $(fog)^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2(\sigma\upsilon\nu x+1)=1$, όταν $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

26. Αν $f,g,\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κι αν $g(x)=2x+1$, $(fog)(x)=x^2+x-1$ και $(fo\varphi)(x)=x^2+x-\frac{1}{4}$, να βρείτε i) την f και ii) την φ , όταν: $\varphi(\mathbb{R})=(0,+\infty)$.

27. Να βρεθεί η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, όταν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: i) $f(x)=4x-1$ και $(fog)(x)=\eta\mu\frac{x}{2}+3$

ii) $f(x)=4x^2-4x+1$ και $(fog)(x)=x^2+1$ και $g(x)\ge-\frac{1}{2}$.

28. Αν $f(x)=x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{64}$ και $g(x)=-x^2+\frac{5}{4}x-\frac{1}{64}$ να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν: i) α) $f(x)\ge x$, β) $g(x)\le x$ ii) $(fofof)(x)\ge(gogog)(x)$

29. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{1995}+x^{1993}+x+1$ είναι γνησίως αύξουσα. Ύστερα να λυθεί η ανίσωση: $x^{1995}+x^{1993}+x+1<4$. Τέλος να λυθεί η ανίσωση: $(fof)(x)>4$.

30. Αν $f(x)=\frac{x+1}{x+3}$ να εξετάσετε αν η f είναι i) φραγμένη ii) φραγμένη στο [0,1]

31. Να εξετάσετε αν είναι φραγμένη η συνάρτηση $f(x)=\frac{4\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

32. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^4+2\cdot x^3-x^2+5$ είναι φραγμένη στο (-1,3) .

33. Να δείξετε ότι: i) αν $f(-1)=0, f(2)=7$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο [-1,2], τότε η f είναι φραγμένη στο [-1,2] , ii) αν $f(3)+f(4)=2, f(3)\cdot f(4)=-24$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [3,4] τότε η f είναι φραγμένη στο [3,4] .

34. Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $f(x)=\frac{g^2(x)}{1+g^2(x)}$ να δείξετε ότι η f είναι φραγμένη.

35. Αν $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ ώστε για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $[f(x)+f(3)]\cdot[f(x)-f(y)]\cdot(|x+y|+4-y)\leq 0$, να δείξετε ότι η f έχει μέγιστο το f(3).

36. Αν $f:[3,,11]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα, να μελετηθεί η μονοτονία της $g(x)=f(x^2+2)$.

37. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(fofof)(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως μονότονη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x)=x, x\in\mathbb{R}$.

38. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f(\frac{2x+5\cdot f(x)}{7})=x$, να δείξετε ότι $f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

39. Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει ότι $f(x)<0$ και $g(x)>0$ και αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε:

i) Να δείξετε ότι f – g είναι γνησίως μονότονη

ii) Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{f(x^2)}{f(3\cdot x-2)}<\frac{g(3\cdot x-2)}{g(x^2)}$.

40. Αν $f(x)=x^2+2x+3$ και η συνάρτηση $g(x)=\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 2x}{f(x)}$

i) Να βρεθούν τα ακρότατα της f

ii) Να δείξετε ότι η g είναι φραγμένη

41. Αφού δείξετε ότι $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$ με α>0 , και ελέγξετε πότε ισχύει η ισότητα, να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

42. Αν f,g με: $f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu y$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να βρεθούν τα ακρότατα της f+g.

43. Να βρεθούν όπου ορίζονται οι αντίστροφες των συναρτήσεων: α) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x-3}}$,

β) $f(x)=\begin{cases} 3x-5, x\geq 6 \\ 2x+1, x<6 \end{cases}$

44. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, i) να δείξετε ότι η g(x) = f(x) + x – 2 είναι γνησίως αύξουσα, ii) να λυθεί η εξίσωση $f(\lambda^2+4\lambda)-(5\lambda+12)=f(5\lambda+12)-(\lambda^2+4\lambda)$

45. Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τότε i) Αν οι f,g είναι αντιστρέψιμες να δείξετε ότι η fog είναι αντιστρέψιμη ii) Αν η fog είναι αντιστρέψιμη να δείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη

46. Αν $f(x)=-2x^3+4$ i) να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία ii) να λυθεί η εξίσωση: $f(x^2-3x-9)=2$ iii) να βρεθεί αν ορίζεται η f^{-1} .

47. Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $(fog)(x)=x$, να λυθεί η εξίσωση: $g(\eta\mu x)=g(\sigma\upsilon\nu x)$.

48. Αν $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να είναι: $8f(x^2)-f^2(x^2)\geq 16$ να δείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

49. Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $(gog)(x)=\alpha\cdot g(x)+\beta\cdot f(x^3+x+1995)$, όπου $\alpha,\beta\neq 0$ και αν η f είναι ένα προς ένα να δείξετε ότι η g είναι ένα προς ένα.

50. Αν $f:A\to B$ και $g:B\to\Gamma$ και i) αν η gof είναι ένα προς ένα να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.
ii) Αν $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $(fof)(x)=x^2$, να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

51. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(f(x))=x^2-x+1,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι i) f(1)=1 ii) $\alpha\nu\, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2-xf(x)+1$ να δείξετε ότι η g δεν αντιστρέφεται.

52. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση g τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(g(x+\nu))\geq f(x)\geq f(g(x)+1)$ να δείξετε ότι: i) g(1995) = 1994 , ii) (gogog...(ν-φορές)...og)(x)=x-ν, $\nu\in\mathbb{N}\setminus 0$

53. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $f(x+y)=f^2(x)+f^2(y)$ (1), να δείξετε ότι: i) $f(0)\geq 0$ ii) να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν την σχέση (1).

54. Αν $f,g:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ ώστε i) η συνάρτηση f να είναι αύξουσα ii) η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα iii) για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ να ισχύει: $f(x)>g(x)$. Να δείξετε ότι i) gof < fog , ii) gof<fof.

55. Αν f,g συναρτήσεις τέτοιες ώστε i) η f να είναι περιττή , ii) f(0)=0 , iii) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\neq 0$, iv) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $f(x+y)=f(x)\cdot g(y)+g(x)\cdot f(y)$ και $g(x+y)=g(x)\cdot g(y)-f(x)\cdot f(y)$ να δείξετε ότι i) Η συνάρτηση g είναι άρτια , ii) g(0)=1 , iii) $f^2(x)+g^2(x)=1$.

56. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ να δείξετε ότι: i) α) $f(0)=0$ β) $f(-x)=-f(x)$ ii) Αν $f(\rho)=0\Leftrightarrow\rho=0$ να δείξετε ότι α) η συνάρτηση f αντιστρέφεται β) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$.

57. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $(fofof)(x)=(fof)(x)+x$ να δείξετε ότι: i) η f αντιστρέφεται , ii) f(0)=0 , iii) να βρείτε την αντίστροφη της f

58. Να βρεθεί ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να έχει νόημα το όριο: $\lim\limits_{x \to \lambda^2 - 3\lambda + 3} f(x)$, όταν $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

59. Αν $f(x) = x + x^2 + ... + x^\nu, \nu \in \mathbb{N} \setminus 0$ να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - \nu}{x - 1}$.

60. Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim\limits_{x \to -4^+} \frac{|x^2 + 3x - 4| + x^2 + 4x}{|x+5| - 1}$ β) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2 \cdot |x+3| + |x-4| - 7}{x^2 + 9x + 8}$ γ) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{|x+3| + x^2 - x - 12}{|x| \cdot (x+3)}$

δ) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x + x^2}$ ε) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{x^2}$ στ) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu^2 x}$

61. Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu(x - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} - 2 \cdot \sigma\upsilon\nu x}$ β) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sqrt{1 + \eta\mu x} + \sigma\upsilon\nu x}{\pi - x}$ γ) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, αν $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + \frac{x^2 - 2x}{\eta\mu x}] = 1$

62. i) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \eta\mu \frac{5}{x^2} - 4 \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$ ii) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f(x) + 1| \leq 2 \cdot (x-5)^{1996}$

63. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\beta \cdot x^2 + (\alpha^2 - 1) \cdot x}{\eta\mu^2 x + 3 \cdot \eta\mu x} = 1$

64. Αν $f(x) = \frac{\eta\mu(x^2 - 4x + 3)}{x - 3}$ να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lambda^2 + 5\lambda - 4, \lambda \in \mathbb{R}$. Ποιό είναι τότε το $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$;

65. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε: $\lim\limits_{x \to -\alpha^2 + 4\alpha - 3} f(x) = 2$, με $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ και $f(x) = \frac{(1-\beta) \cdot x + 2 - \beta}{x + 1}$.

66. Αν $f(x) = \frac{\alpha x^3 - \beta x^2 - 2}{x - 1}$ να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$

67. Αν $f(x) = \frac{\eta\mu^3 \pi |x|}{x^2}$, να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

68. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε: $x \cdot \varepsilon\varphi x \cdot f(x) + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

69. Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε: $\lim\limits_{x \to 3} [f(x) - g(x)] = 1$ και $\lim\limits_{x \to 3} [f(x) - \sqrt{x+1} \cdot g(x)] = 0$, να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x \to 3} f(x), \lim\limits_{x \to 3} g(x)$.

70. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι: $f(x) = f(2 - x)$ και αν $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + x^3 - \eta\mu \frac{\pi x}{2} + 1] = 10$, να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

71. Αν f τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)+f(x+3)=x^2-x+1$, κι αν $\lim\limits_{x\to -3}[f(x)+4x-3]=2$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

72. Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu^2 x}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}[g(x)\cdot(\sqrt{x^2+4}-2)]=2$ να βρεθεί το i) $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)]$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^4\cdot g(x)}$

73. Αν f ώστε για κάθε x>1 να ισχύει: $|(x-1)\cdot f(x)-x+1|\le|\eta\mu(x-1)|$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

74. Αν f ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $|f(x)-\eta\mu(x-3)|\le(x-3)^2$ να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

75. Αν $f:\mathbb{R}\setminus(-2)\to(0,+\infty)$ ώστε για κάθε $x\neq -2$ να ισχύει: $x^2+\eta\mu^2 x+f^2(x)=xf(x)+\dfrac{16\cdot\eta\mu^2 x-8x^2}{x+2}$ κι αν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, τότε να βρείτε πόσο κάνει το προηγούμενο όριο.

76. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}:f(x+y)=f(x)+f(y)+\alpha\cdot x\cdot y$, να βρεθεί ο αριθμός $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\alpha^2-\alpha+4$

77. Αν f ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}:x^2\cdot f(x)\eta\mu x\le x^3+\eta\mu^3 x$, να βρεθεί αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

78. Αν f,g ώστε $f(4)\ge g(4)$ και $f(x)+\gamma\cdot\eta\mu(x-4)\le g(x)$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\beta$, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{g(x)-g(4)}{x-4}=-\alpha$, να δείξετε ότι: $\alpha+\beta+\gamma=0$.

79. Να βρεθούν εφόσον υπάρχουν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-4}{x\cdot|x|}+\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x+\varepsilon\varphi^2 x}{x^2\cdot\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x-\eta\mu x}{x^3}$

80. Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^2-9}{x^3+3x^2}<-2$

81. Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2+\alpha x+\beta}{x^2-4x}=2$

82. Αν $f(x)=\dfrac{\alpha x-\beta+\sigma\upsilon\nu(x-1)}{(x-1)^2}+\alpha x$ και $g(x)=\dfrac{\alpha}{x}-\dfrac{\beta}{2\cdot(\sqrt{x+1}-1)}$ και $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{3}{2}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x),\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

83. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε: $\lim\limits_{x\to 4}[(x-4)\cdot f(x)-\sigma\upsilon\nu\dfrac{3}{x-4}]=+\infty$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$.

84. Αν $f(x)=\frac{x+1}{x-5}$, να βρεθούν , εφ' όσον υπάρχουν τα όρια: i) $\lim_{x\to 1}\left|f^{-1}(x)\right|$ ii) $\lim_{x\to 1} g(x)$, όπου $g(x)=\begin{cases}(x-1)^2-(x-1)\cdot συν\frac{1}{x-1}, x<1\\ f^{-1}(x), x\geq 1\end{cases}$

85. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ώστε $f^3(x)-3\cdot f^2(x)+3\cdot f(x)=x+2$, να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)}{ημx}$

86. Να μελετηθεί η συνάρτηση f στο $x_o = 0$ ως προς την συνέχεια: $f(x)=\begin{cases}\frac{1-συν^2 x}{x^2}, x<0\\ \frac{6\cdot\sqrt{x+9}-18}{x}, x>0\end{cases}$

87. Αν $f(x)=\begin{cases}α\cdot ημ\frac{π\cdot x}{6}+\frac{β\cdot x}{3}-1, x<3\\ \frac{3\cdot(α^2+β^2)}{x^2-x}, x\geq 3\end{cases}$ να βρεθούν τα $α, β\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής

88. Αν $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+1}{x+1}, x<-1\\ \frac{α\cdot x+β+2}{x+1}, x>-1\\ 3, x=-1\end{cases}$, να βρεθούν οι αριθμοί α,β ώστε η f να είναι συνεχής στο -1.

89. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\lim_{x\to 0}\left(4-x^2\cdot ημ\frac{1}{x}+5\cdot|f(x)|\right)=4$, να βρεθεί το f(0).

90. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε: $ημ^2 x-x^2\leq f(x)\leq x^4+x^3\cdot συνx$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: η f είναι συνεχής στο 0

ii) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε να είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση: $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x^2}, x\neq 0\\ α^2-4, x=0\end{cases}$

91. Αν $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ και $g(x)=\begin{cases}f(x)+\frac{4-α^2}{\sqrt[3]{x^2-1}}, x\neq -1,+1\\ \frac{\sqrt[3]{4}\cdot(α^2-5)}{2}, x=-1,+1\end{cases}$ τότε:

i) Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1} f(x)$

ii) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η g να είναι συνεχής στο 1

92. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε: $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1996$ και $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2000$, να δείξετε ότι: η f είναι συνεχής στο x_0

93. Αν $f(x)=x^3-\eta\mu\pi\cdot x+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}+5$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-1,3)$ ώστε $f(\xi)=5$

94. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3x-\pi}=\frac{\eta\mu x}{3x+\pi}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$.

95. Αν $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής να δείξετε ότι η Cf τέμνει σε ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in[\alpha,\beta]$ την ευθεία y=x

96. Αν $f:[-1,0]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^4-2x+\alpha,\alpha\in(0,1)$

i) Να εξετασθεί ως προς την μονοτονία

ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μία ακριβώς λύση στο (-1,0)

97. Αν $f:[-1,3]\to\mathbb{R}$ ώστε $f(1)+f(2)+f(3)=0$ και αν για κάθε $x\in\mathbb{R},f(x)\neq0$, να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής

98. Αν η f είναι συνεχής στο [-1,1] ώστε: $x^2-x+f^3(x)=6$, να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1).

99. Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ να ισχύει: $x\cdot\eta\mu x-\alpha\cdot\eta\mu\alpha\leq f(x)\leq x^3-\beta\cdot x^2+\beta\cdot(x-\beta)$, να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [α,β]

100. Αν $f:[0,3]\to\mathbb{R},g:[0,3]\to\mathbb{R}$, συνεχείς συναρτήσεις με κοινό σύνολο τιμών το [0,3] και αν f(0)=0 και f(3)=3 , να δείξετε ότι οι Cf,Cg τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο.

101. Αν $f:[0,\alpha]\to[0,1)$ συνεχής, να δείξετε ότι για κάθε θετική λύση της ανίσωσης $\eta\mu\alpha>\frac{1}{4}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[0,\alpha)$ ώστε $f^2(x)+\eta\mu x=f(x)$

102. Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$, ώστε: $2\cdot f(\xi)=(2-\lambda)\cdot f(\alpha)+\lambda\cdot f(\beta)$, λ>0

103. Έστω $f(x)=x^4+\lambda\cdot x+e$ και $g(x)=-x^4+\lambda\cdot x+e,\lambda\in\mathbb{R}$. Αν η Cf περνά από το (ρ1,0) και η Cg περνά από το (ρ2,0) με ρ1<ρ2 , να δείξετε ότι η Cφ με $\varphi(x)=\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x),\alpha,\beta>0$ περνά από ένα τουλάχιστον σημείο (ρ,0) με ρ1<ρ<ρ2.

104. i) Αν α1,α2,α3 >0 και β1<β2<β3, να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{\alpha_1}{x-\beta_1}+\frac{\alpha_2}{x-\beta_2}+\frac{\alpha_3}{x-\alpha_3}=0$.

ii) Να δείξετε χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα ότι η εξίσωση: $\frac{\eta\mu\frac{\pi}{5}}{x+2}+\frac{\eta\mu\frac{\pi}{7}}{x+1}+\frac{\eta\mu\frac{\pi}{9}}{x}=0$, δεν έχει ακέραια ρίζα.

105. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $x^2+\eta\mu x\leq f(x)\leq x^3+x$, να δείξετε ότι: i) η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, ii) η $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}, & x\neq\kappa\pi\\ 1, & x=\kappa\pi\end{cases}$ είναι επίσης συνεχής στο $x_0=0$

106. Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt{x^2-4}-3}{\sqrt{4x^4+x^3+1}-2x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{9x^2+x+2})$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x})$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^2+2x}{x-1}+3\cdot\eta\mu x)$ ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+2}-x)$ στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x\cdot(\dfrac{x+2}{x-1}+\eta\mu\dfrac{1}{x}-1)+3\eta\mu x+\sqrt{x^2-x+2}]$

ζ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(4-\lambda^2)\cdot x^3+x^2-x+1}{\lambda x^2-x+2},\lambda\in\mathbb{R}$

106. Αν $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\alpha x+\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος (α,β) ώστε: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3}{2}$

107. Αν $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ και αν $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)-x\cdot\eta\mu\dfrac{3}{2x}}{\sqrt{x^2+3x+5}+x}=-1$, να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

108. Αν $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, ώστε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1996$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-1996\cdot\eta\mu x]=0$.

109. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\alpha}=\dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\sigma\upsilon\nu^2x]=1$, να βρεθεί ο μη-μηδενικός αριθμός α ώστε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+\alpha\cdot(\sqrt{x^2+x+5}-x)}{f(x)+\eta\mu^2x+x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}}=1$

110. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια: i) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(\eta\mu\dfrac{1}{x})+\ln x]$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{3x}-e^{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+x+1}})$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ με $f(x)=\dfrac{\alpha^{x+2}+\beta^x}{\alpha^x+\beta^{x+2}},\alpha,\beta>0$

111. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση: $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{e^t+x^t},x>0$

112. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει: $2\cdot f(x)-3\cdot f(-x)=5\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,

i) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

ii) Να βρεθεί η συνάρτηση f

iii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

iv) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης αν υπάρχει

v) Να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$