ΑΛΓΕΒΡΑ Α’ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7
ΠΡΟΟΔΟΙ

Ι) Αριθμητικές Πρόοδοι

Συμβολισμοί: ω: διαφορά της προόδου, $α_ν$: ν-οστός όρος ακολουθίας, $S_ν$: άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής ακολουθίας $α_ν$

Χρήσιμοι τύποι:

1. $α_{ν+1} = α_ν + ω$
2. $α_ν = α_1 + (ν-1)ω$
3. $α_λ = α_κ + (λ-κ)ω$
4. $S_ν = \frac{ν}{2} \cdot (α_1 + α_ν)$
5. $S_ν = \frac{ν}{2} \cdot [2 \cdot α_1 + (ν-1) \cdot ω]$

Αριθμητικός μέσος: Αν α,β,γ τρεις διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει: $β = \frac{α+γ}{2}$

MUST SEE!!!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΠΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

σελ.128 Παραδείγματα 1,2,3

σελ.129 Α2, Α3, Α4, Α5, Α6, Α7

σελ. 130 Α8, Α11, Β1, Β2, Β4

σελ. 131 Β6, Β8, Β9

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 2ο

14259. Σε μια αριθμητική πρόοδο $α_ν$ δίνονται οι δύο πρώτοι όροι , $α_1 = 2$ και $α_2 = 7$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου

β) Να δείξετε ότι ο 20^{ος} όρος της προόδου ισούται με 97

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα 1+2+...+97

14476. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $α_ν$ των θετικών περιττών αριθμών 1,3,5,7, …

α) i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο

β) Να δείξετε ότι το άθροισμα των πρώτων 30 όρων της προόδου ισούται με 30^2.

14512. α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2=1$, $x^2=9$.

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του ερωτήματος α σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια: i. Να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου $α_ν$ της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω, ii. Να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου $α_ν$

14573. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $α_ν$ για την οποία ισχύει: $α_4-α_2=10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω=5

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων είναι της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου

14597. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα .

α)Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά;

34145. Δίνεται αριθμητική πρόοδος $α_ν$ με διαφορά ω

α) Να δείξετε ότι: $\frac{a_{15}-a_9}{a_{10}-a_7}=2$. β) Αν $α_{15}-α_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

34153. Οι αριθμοί $x+6, 5x+2, 11x-6$ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $α_1$ και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι ω=4

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου $α_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων της προόδου

34158. Σε αριθμητική πρόοδο $α_ν$ είναι $α_1=2$ και $α_5=14$.

α) Να αποδείξετε ότι ω=3 β) Να βρείτε πόσος αρχικούς πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77

(Δίνεται ότι: $\sqrt{1849}=43$)

34877. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-2x-3=0 \ (1)$.

β) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, 1, x_2 με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

35046. Σε μία αριθμητική πρόοδο α_ν ισχύουν: $\alpha_1=2$ και $\alpha_{25}=\alpha_{12}+39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω = 3

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152

35299. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

Θέμα 4ο

12764. Σε γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστης σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω.

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

12945. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ με $\alpha_3=8$, $\alpha_{11}=32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1=2$ και ω = 3.

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο γ) Αν το άθροισμα των πρώτων 2ν όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν.

13171. Το άθροισμα των πρώτων ν διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=S_\nu=2\cdot\nu^2+3\cdot\nu,\ \nu\in\mathbb{N}$ με $\nu\geq1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1}=2\cdot\nu^2-\nu-1,\ \nu\geq2$

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu=4\cdot\nu+1,\ \nu\geq1$

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω

14809. Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1=5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23η φορά το γράμμα Β.

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

33579. Οι αριθμοί : $x^2+5, x^2+x, 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i. Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. ii. Τον πρώτο όρο της προόδου.

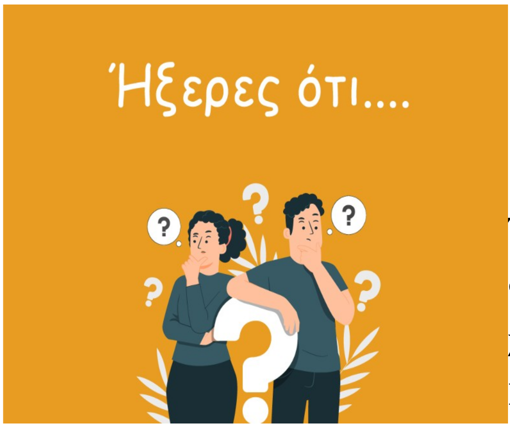
iii. Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+...+\alpha_{24}$.

36662. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου.

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.



Ένας αρκετά διαδεδομένος θρύλος, από τον χώρο των Μαθηματικών, σχετίζεται με έναν ευφυή υπολογισμό αθροίσματος. Η ιστορία έλαβε χώρα κατά τα πρώιμα σχολικά χρόνια του κορυφαίου Γερμανού Μαθηματικού Gauss.

Κάποια μέρα, λοιπόν, στο Γερμανικό σχολείο που φοιτούσε ο Gauss, ο δάσκαλος ζήτησε από τους μικρούς μαθητές του να υπολογίσουν το άθροισμα, S , όλων των (φυσικών) αριθμών, από το 1 μέχρι και το 100. Λίγο αργότερα, ο Gauss τον εξέπληξε, ευχάριστα, βρίσκοντας τη σωστή απάντηση μ’ ένα ευρηματικό τρόπο.

Υποδείξεις

12764. α) $\alpha_1=32$ ω = 2 β) $S_{40}=2840$ γ) $S_{20}=1400$

12945. α) Λύνουμε το σύστημα β) ν = 20 γ) ν = 11

13171. α) $\alpha_1=5$ β) Θέτουμε όπου ν το ν-1 γ) **Σκέψη:** $\alpha_\nu=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu)-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{\nu-1})$ $\kappa\tau\lambda.$ δ) ω = 4

14809. α) ω = 7 β) $\alpha_{23}=159$ γ) Το γράμμα Ε

33579. α) x = 3 ή x = -3 β) i) ω = -2 ii) $\alpha_1=20$ iii) S = -170

36662. α) Μεσαία σειρά $\alpha_{13}=36$, τελευταία σειρά $\alpha_{25}=60$ β) $S_{25}=900$ γ) $S=S_{14}-S_6$

II) Γεωμετρικές πρόοδοι

Συμβολισμοί:

λ: λόγος γεωμετρικής προόδου , α_ν : ν-οστος όρος προόδου, S_ν : άθροισμα ν-οστών όρων προόδου

Χρήσιμοι τύποι:

1. $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot\lambda$
2. $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$
3. $S_\nu=\alpha_1\cdot\dfrac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$

Γεωμετρικός μέσος:

$\beta^2=\alpha\cdot\gamma$

MUST SEE!!!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΠΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

σελ. 134-135 Την παρατήρηση και παραδείγματα 1,2

σελ. 136 Α2, Α3, Α4, Α5, Α6

σελ. 137 Α7, Α8, Α10, Α11, Α12

σελ. 138 Β1, Β2, Β5

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 2ο

12763. Δίνεται πρόοδος (α_ν) με πρώτους όρους $2, 2\cdot\sqrt{2}, 4, 4\cdot\sqrt{2}, \ldots$

α) Να εξετάσετε αν η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος

β) Να αποδείξετε ότι η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν-οστο της όρο

12787. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-x-6=0$.   β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ , ώστε οι αριθμοί κ – 2, κ , 2κ + 3 να είναι διαδοχικοί όροι σε μία γεωμετρική πρόοδο

14920. Μια γεωμετρική πρόοδος (α_ν) έχει πρώτο όρο $\alpha_1=20$, λόγο λ>0 και $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}=4$

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι λ = 2 β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της προόδου

34874. α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2-5x+2=0$ (1)

β) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

35411. α) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

β) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x, ώστε οι αριθμοί $4-x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου

36891. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με θετικό λόγο λ, για την οποία ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστος όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu=2^{\nu-3}$

<u>**Θέμα 4ο**</u>

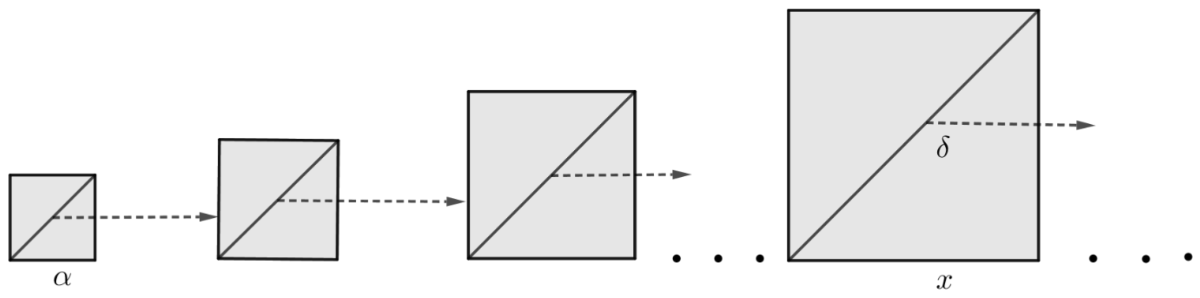
12731. Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa\neq 0$, $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa\cdot\lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa\cdot\lambda$, (κ>0, $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+10x+16=0$ να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa\cdot\lambda$.

14645. Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α)

i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta=\sqrt{2}\cdot x$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda=2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu=\alpha^2 2^{\nu-1}$.

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με $8\,\tau.\mu.$, να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν $255\,\tau.\mu.$

33891. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3=4, \alpha_5=16$ και $\lambda>0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu=\frac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των πρώτων 10 όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η σχέση $S'_{10}=\frac{1}{2^9}\cdot S_{10}$

34181. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε. Οι αριθμοί α, Ε, β με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του Εμβαδού Ε

β) Αν Ε = 1 και α + β = 10 ,

i. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες α και β

ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου

36649. Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης (ν≤5).

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii.Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από από την στιγμή της επιδείνωσης;

Υποδείξεις

12763. α) Με αριθμητικό μέσο β) $\lambda=\sqrt{2}$ και $\alpha_\nu=2\cdot(\sqrt{2})^{\nu-1}$

12787. α) x = 3 ή x = -2 β) κ = - 2 (απορρίπτεται) , κ = 3 δεκτή

14920. α) λ = - 2 (απορρίπτεται) , λ = 2 (δεκτή) β) $\alpha_{10}=2048$ γ) $S_{10}=4092$

34874. α) $x_1=\frac{1}{2}$ και $x_2=2$ β) με γεωμετρικό μέσο

35411. α) x = 2 β) x = 2 ή x = - 4

36891. α) λ = 2 , $\alpha_1=\frac{1}{4}$ β) Από τον τύπο του ν-οστού όρου

12731. α) Ιδιότητα γεωμετρικού μέσου β) Ομώνυμα κλάσματα και διακρίνουσα τριωνύμου γ) Χρησιμοποιώντας τύπους Vietta λύνουμε τις εξισώσεις

14645. α) i. Από Π.Θ. $\delta=\sqrt{2}\cdot x$ ii. Τα εμβαδά των τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου β) i. α = 1 ii. Ν = 8

33891. α) λ = 2 , $\alpha_1=1$ β) Υπολογίζουμε το $\beta_{\nu+1}$ προς το β_ν γ) Χρησιμοποιούμε τον τύπου του αθροίσματος

34181. α) Χρησιμοποιούμε τον τύπο εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του γεωμετρικού μέσου β) i. Από τύπους Vietta, $x^2-10x+1=0$ ii. Οι δύο λύσεις του τριωνύμου

36649. α) $\alpha_6=3200$ β) i. λ = 3 , $\beta_1=9600$ ii. $\beta_\nu=9600\cdot 3^{\nu-1}$, $\nu\leq 5$ iii. $\beta_3=86400$