Ειδικό θέμα προετοιμασίας για τη Γ' λυκείου

Ανισώσεις που λύνονται με τη βοήθεια μονοτονίας

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η ανίσωση $logx>\frac{20}{x}-1$

Λύση

Ο περιορισμός που έχουμε είναι x>0. Άρα για x>0, η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$logx>\frac{20}{x}-1\Leftrightarrow logx-\frac{20}{x}+1>0$ (1)

Θέτουμε $f(x)=logx-\frac{20}{x}+1$, με $x\in(0,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, με $x_1<x_2$. Έχουμε

- $x_1<x_2\Leftrightarrow logx_1<logx_2$ (2)
- $x_1<x_2\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Leftarrow\frac{20}{x_1}>\frac{20}{x_2}\Leftarrow-\frac{20}{x_1}<-\frac{20}{x_2}$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (2) και (3) προκύπτει:

$logx_1-\frac{20}{x_1}<logx_2-\frac{20}{x_2}\Leftrightarrow logx_1-\frac{20}{x_1}+1<logx_2-\frac{20}{x_2}+1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Αποδείξαμε ότι για $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $f(x)=logx-\frac{20}{x}+1$ είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης παρατηρούμε ότι:

$f(10)=\log 10-\frac{20}{10}+1=1-2+1=0$. Άρα η ανίσωση (1) γίνεται: $(1)\Leftrightarrow logx-\frac{20}{x}+1>0\Leftrightarrow f(x)>f(10)\Leftrightarrow x>10$.

Παράδειγμα 2

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x)=(\frac{1}{2})^x-logx$ είναι γνησίως φθίνουσα

β) Να λύσετε την ανίσωση $(\frac{1}{2})^{2x^2+3}-(\frac{1}{2})^{x^2+12}<\log\frac{2x^2+3}{x^2+12}$

Λύση

α) Η συνάρτηση $f(x)=(\frac{1}{2})^x-logx$ έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

Έχουμε:

- $x_1<x_2\Leftrightarrow(\frac{1}{2})^{x_1}>(\frac{1}{2})^{x_2}$ (1)
- $x_1<x_2\Leftrightarrow logx_1<logx_2\Leftrightarrow-logx_1>-logx_2$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), προκύπτει:

$(\frac{1}{2})^{x_1}-logx_1>(\frac{1}{2})^{x_2}-logx_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Αποδείξαμε ότι για $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η ανίσωση γράφεται:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+12}<\log(2x^2+3)-\log(x^2+12)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3}-\log(2x^2+3)<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+12}-\log(x^2+12)\Leftrightarrow f(2x^2+3)<f(x^2+12)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3>x^2+12\Leftrightarrow x^2>9\Leftrightarrow\sqrt{x^2}>\sqrt{9}\Leftrightarrow|x|>3\Leftrightarrow x<-3 \text{ ή } x>3$$

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x\leq 11-\log x$ β) $3^x+logx\geq 3$ γ) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\leq lnx+\frac{1}{2}$

Απ.: α) $x\leq 10$. β) $x\geq 1$. γ) $x\geq 1$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+logx$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$(2x^2+1)^3-(x^2+x+3)\leq\log\frac{x^2+x+3}{2x^2+1}$$

Απ.: α) Η g είναι γνησίως αύξουσα. β) $-1\leq x\leq 2$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^x-lnx$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{1}{3|x|+5}-\frac{1}{|x|+13}+\left(\frac{1}{3}\right)^{3|x|+5}-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|+13}\geq\ln\frac{3|x|+5}{|x|+13}$$

Απ. α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα β) $0<x\leq 4$.