Α1.5. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1. Να συμπληρώσετε τα κενά

i. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$...

ii. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$.....................................

iii. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$................................

iv. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$................................

v. $\vec{i}\cdot\vec{j}=$..............$,\vec{i}^2=$..........$=$..............

vi. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$...............................

vii. $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=$..

viii. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \not\parallel$ y'y , τότε $\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1\Leftrightarrow$......................................

ix. Αν θ η γωνία των διανυσμάτων α, β , τότε $\sigma\upsilon\nu\theta=$.............................

x. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$ και $\vec{\alpha}, \vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=$................................

xi. $\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}=$.......................$,\vec{\alpha}\neq\vec{0}$

2. Σ-Λ

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}), \vec{\alpha}, \vec{\beta}\neq\vec{0}$

ii. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$

iii. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=0$

iv. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

v. $\sqrt{\vec{\alpha}^2}=|\vec{\alpha}|$

vi. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2$

vii. $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}\neq\vec{0}$

viii. $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{v}}\vec{\alpha}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω παραστάσεις με την ένδειξη Δ (διάνυσμα), ή Α (αριθμός) αναλόγως.

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ii. $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ iii. $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}$ iv. $\vec{\alpha}^2$ v. $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

4. Έστω θ η γωνία των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Να αντιστοιχίσετε τις προτάσεις της στήλης Α με τις ισοδύναμες της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$	1. θ: οξεία
Β. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$	2. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$
Γ. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$	3. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$
Δ. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$	4, $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$
Ε. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0$	5. $\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
	6. θ: αμβλεία

Α	Β	Γ	Δ	Ε

Ασκήσεις

8. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $\lvert\vec{\beta}\rvert=2$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ii. $(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ iii. $(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})^2$

9. Αν $\lvert\vec{\beta}\rvert=2\lvert\vec{\alpha}\rvert=2$ και η γωνία των διανυσμάτων α,β είναι π/2, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}+2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

10. Αν τα διανύσματα α,β είναι μοναδιαία και ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

11. Αν $\lvert\vec{\alpha}\rvert=1$, και $\lvert\vec{\beta}\rvert=2$, και η γωνία των διανυσμάτων α και β είναι 60^o και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να υπολογίσετε το:

i. $\lvert\vec{\gamma}\rvert$ ii. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$

12. Αν $\lvert\vec{\beta}\rvert=2\cdot\lvert\vec{\alpha}\rvert=2\sqrt{5}$, και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=120^o$ και $\vec{v}=2\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, να υπολογίσετε:

i. το $\lvert\vec{v}\rvert$ ii. τις γωνίες $(\vec{\alpha},\vec{v}),(\vec{v},\vec{\beta})$

13. Αν $\lvert\vec{\alpha}\rvert=\sqrt{2}\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert=2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{4}$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-\vec{\beta},\vec{\beta}$.

14. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=120^o$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων: $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta},\vec{u}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$

15. Αν $|\vec{\alpha}|=3, |\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+4\cdot\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε:

i. να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ii. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ iii. Να δείξετε ότι: $\vec{\alpha}=3\vec{\beta}$.

16. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και τα $\vec{v}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}, \vec{u}=-7\vec{\alpha}+8\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

17. Αν $|\vec{\alpha}|=3, |\vec{\beta}|=1$ και $|\vec{\alpha}-\vec{b}|=2$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

18. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta})=60^o$ και το τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{AB}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}, \vec{B\Gamma}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

19. Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ και η γωνία των διανυσμάτων α και β $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=135^o$.

20. Αν $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(1,3)$, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ii. $(-\vec{\alpha})\cdot(2\vec{\beta})$ iii. $\vec{\alpha}^2$ iv. $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})$

21. Αν $\vec{\alpha}=(3,-4)$ και $\vec{\beta}=\frac{1}{7}\vec{i}+\vec{j}$, να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-7)$ και $\vec{\beta}=(-3,\lambda)$. Αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=135^o$, να βρείτε το λ.

23. Αν $\vec{\alpha}=(1,-1), \vec{\beta}=(1,1), 2\vec{v}+\vec{u}=\vec{\beta}$ και $\vec{v}+2\vec{u}=\vec{\alpha}$, να βρείτε:

i. τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ ii. Το $\sigma\upsilon\nu(\vec{u}, \vec{v})$.

24. Αν $|\vec{\alpha}|=3$ και $|\vec{\beta}|=6$, να βρείτε το λ, ώστε τα διανύσματα $\vec{v}=3\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $\vec{u}=3\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$, να είναι κάθετα.

25. Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-1,2)$.

i. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$, ώστε: $\vec{v}\perp\vec{\alpha}$ και $|\vec{v}|=5$.

ii. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$, ώστε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{u}=\sqrt{45}$

26. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,3), \vec{\beta}=(1,-2), \vec{\gamma}=(4,-3)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$ ώστε να είναι: $|\vec{v}|=10$ και $\vec{v}\perp\vec{\gamma}$.