

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΛΛΕΙΨΗ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

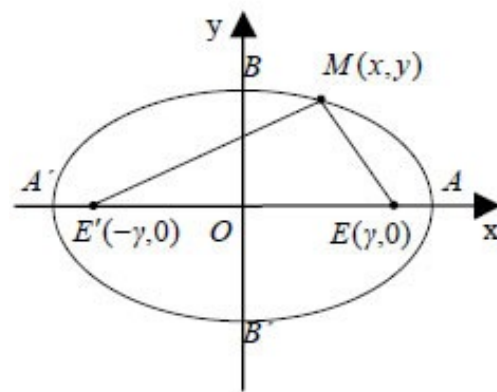
Ορισ. Έλλειψη με εστίες E και E' ονομάζουμε το γεωμετρικό τόπο C των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E και E' είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $E'E$.

Ισχύει: Αν η έλλειψη C με εστίες τα E, E' και σταθερό άθροισμα $2a$, τότε: $M \in C \Leftrightarrow (ME') + (ME) = 2a$

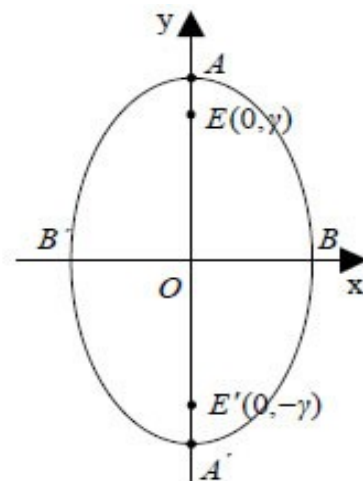
Εστιακή απόσταση: Ονομάζεται η απόσταση των εστιών της έλλειψης

Εξισώσεις:

Εστίες: $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$



Εστίες: $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$: $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$



Προσοχή!!! Τα α και β δεν τα βλέπουμε σαν θέσεις. Το α είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που υπάρχει σαν παρονομαστής είτε βρίσκεται κάτω από το x^2 είτε κάτω από το y^2

Έστω η έλλειψη με τύπο C : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,

Κέντρο της έλλειψης: Το σημείο O

Κορυφές της έλλειψης: Τα σημεία τομής της έλλειψης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, δηλαδή τα σημεία:

$A'(-\alpha, 0)$, $A(\alpha, 0)$ και $B'(0, -\beta)$, $B(0, \beta)$

Μεγάλος άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα $A'A$

Μικρός άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα $B'B$

Διάμετρος της έλλειψης: Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς το O σημεία της έλλειψης

Εκκεντρότητα: Ονομάζουμε το λόγο $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$, με $\varepsilon < 1$ (Ουσιαστικά μας δείχνει πόσο πεπλατυσμένη είναι η έλλειψη)

Όμοιες ελλείψεις: Όταν έχουν την ίδια εκκεντρότητα

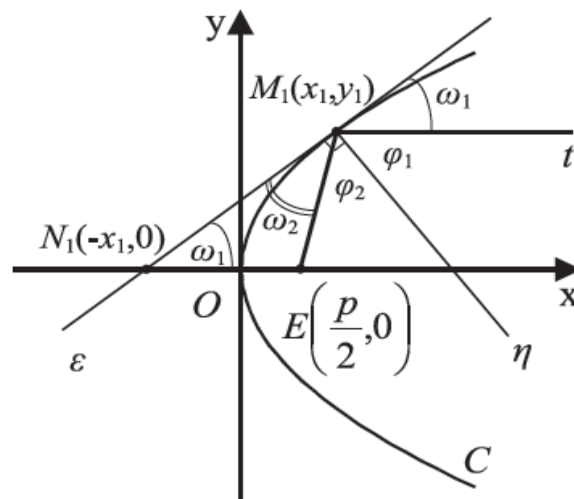
Εξισώσεις εφαπτομένων στο σημείο επαφής $M_1(x_1, y_1)$

$$\text{Αν } C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad (\varepsilon): \frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$$

$$\text{Αν } C_2: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \quad (\varepsilon): \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} + \frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} = 1$$



Ανακλαστική ιδιότητα: Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M , διχοτομεί τη γωνία EME' , όπου E, E' οι εστίες της έλλειψης



Τράπεζα Θεμάτων

Θέμα 2ο

20658. Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι $a=4$, $b=2$ και $c=2\sqrt{3}$.

β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης (c).

γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη (c) και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

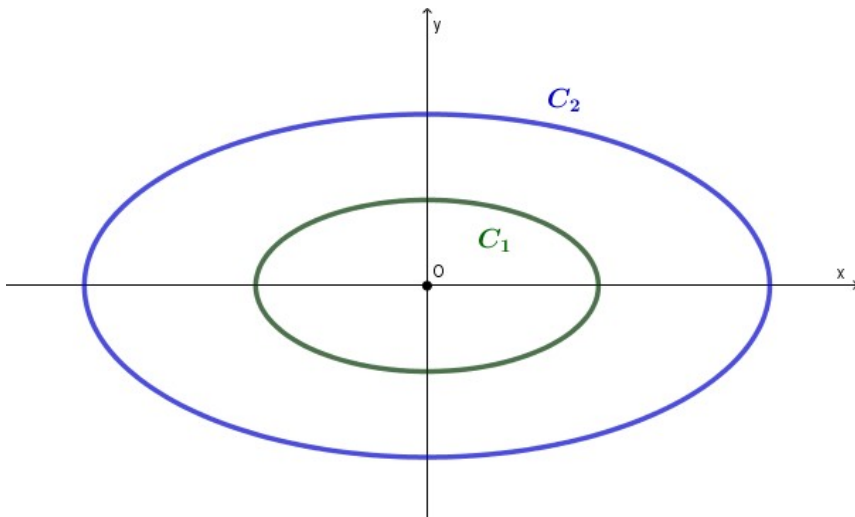
20718. Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της.

β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

20865. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: x^2 + 4y^2 = 4$, $C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ και οι γραφικές τους παραστάσεις στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων.

β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές

20883. Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης C: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

α) Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E'.

β) Αν $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα γ'γ.

21308. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους.

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0,4)$.

21647. Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4,0)$, $E'(-4,0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C.

β) την εκκεντρότητά της C.

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{9}{5})$.

21648. Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3,0)$, $E'(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, \frac{12}{5})$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{12}{5})$.

Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$