

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1**  
**ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ**

**1.1.** Να σημειώσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι: α) φυσικοί, β) ακέραιοι, γ) ρητοί, δ) άρρητοι, ε) πραγματικοί.

$$0, \quad 3, \quad -5, \quad \frac{2}{3}, \quad \sqrt{2}, \quad -7,13, \quad \frac{\sqrt{3}}{5}, \quad 4,\bar{1}2$$

**1.2.** Να κάνετε απολοιφή των παρενθέσεων στις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) -(\alpha+\beta+\gamma) \quad \beta) -(-\alpha-\beta) \quad \gamma) -\alpha \cdot (\beta-\gamma+\delta)$$

**1.3.** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει:  $(2 \cdot x - 6) \cdot (3 \cdot x + 12) = 0$

**1.4.** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς y, για τους οποίους ισχύει:  $(y+3) \cdot (18-3 \cdot y) \neq 0$

**1.5.** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{1}{4} : \frac{1}{2}}{5 - \frac{3}{2} : \frac{2}{5}}$

Απ.: 2

**1.6.** Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση που ακολουθεί:

$$A = -2 \cdot [-3 \cdot (1-x) - (x+3)] - [ -(-x-2) - 2 \cdot (x+1) ]$$

Απ.:  $-3x+12$

**1.7.** Να βρείτε την τιμή της παράστασης A, για  $x = -\frac{2}{3}$  και  $y = \frac{5}{6}$  :

$$A = 6 \cdot x \cdot y - [-3 \cdot x \cdot (1-2 \cdot y) - 3 \cdot (x+2 \cdot y)]$$

Απ.: 1

**1.8.** Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης;

$$A = 2 \cdot (\alpha - 3 \cdot \beta) - 5 \cdot [\beta \cdot (\alpha - 1) - 1] - \alpha \cdot (3 - 5 \cdot \beta)$$

Απ.: 5

**1.9.** Να βρείτε για ποιες τιμές του x, ορίζεται η παράσταση:  $A = \frac{\frac{x-1}{2x+6} + \frac{5}{x-2}}{1 - \frac{1}{x}}$

**1.10.** Αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α)  $\beta\gamma - \alpha\delta = 2$

β)  $\beta\delta - \alpha\gamma$  είναι περιττός αριθμός

γ)  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$  είναι άρτιος, αλλά όχι πολλαπλάσιο του 4

**1.11.** Αν ισχύει  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{4}$ , να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

α)  $A = \frac{4\alpha - 3\beta}{\beta}$     Απ.: 2

β)  $B = \frac{2\alpha + \beta}{\alpha - 3\beta}$     Απ.: -2

**1.12.** Οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ανάλογοι των αριθμών 2 και 3 και ισχύει:  $\alpha + \beta = 25$

Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ .

Απ.:  $\alpha=10, \beta=15$

**1.13.** Δίνεται η παράσταση:  $A = \frac{6}{2 - \frac{3}{x}} - \frac{3}{\frac{2x}{3} - 1}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $A$

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $A$  είναι ανεξάρτητη του  $x$

**1.14.** Ισχύει ότι:  $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = 8$ , (με  $\alpha, \beta \neq 0$ ) και  $\alpha + \beta = 251$ .

α) Να βρείτε το άθροισμα  $x + y$

Απ.: 2008

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{2008 - [6 - 10x + 2(4x - y - 3)]}{-3 \cdot (x - \omega) - 3 \cdot (y + \omega)}$

Απ.: -1

**1.15.** Έστω  $\alpha \neq 0$ . Αν ο  $\beta$  είναι ο αντίστροφος του  $\alpha$  και ο  $\gamma$  είναι ο αντίθετος του  $\beta$ , να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$A = \alpha + \frac{1}{\gamma}$     και     $B = \alpha\gamma$

### ΔΥΝΑΜΕΙΣ

**1.16.** Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:

α)  $(-3)^3 =$

β)  $0^5 =$

γ)  $5^{-2} =$

δ)  $8^0 =$

ε)  $0^0 =$

στ)  $(-2)^4 =$

ζ)  $-2^4 =$

η)  $-19^0 =$

1.17. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A=1^{2010}+(-1)^{2011}-(-1)^{2012}+0^{2015}+2004^0$

Απ.: 0

1.18. α) Για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει ότι:  $\alpha^2+\beta^2=0$ . Τι συμπεραίνετε για τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ ?

β) Αν ισχύει:  $(2x-6)^2+(3y+12)^2=0$ , να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  και  $y$ .

1.19. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A=8-3\cdot 2^3-(-1)^7\cdot [(2^6:4+3^3:3):5-3^2]$

1.20. Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α)  $10^6=$                       β)  $10^{-5}=$                       γ)  $10^{-1}=$                       δ)  $10^0=$

1.21. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α)  $2^{-6}\cdot 2^{11}=$                       β)  $3^{21}:3^{18}=$                       γ)  $\frac{(-6)^{-9}}{(-6)^{-11}}$                       δ)  $2^7\cdot 5^7=$   
ε)  $\frac{18^4}{9^4}=$                       στ)  $(2^{-3})^2=$                       ζ)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=$                       η)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}=$

1.22. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $8^{20}:4^{28}=$                       β)  $4^{12}:0,5^{26}=$                       γ)  $8^{10}\cdot 9^{15}\cdot 6^{-30}=$

Απ.: α) 16, β)  $\frac{1}{4}$ , γ) 1

1.23. Αν  $x, y \neq 0$ , να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α)  $A=\frac{2^7\cdot x^8\cdot y^{-5}}{2^5\cdot x^6\cdot y^{-2}}$                       β)  $B=\frac{x\cdot y^9+(x^2\cdot y^3)^4}{x^6\cdot y^7}$

Απ.: α)  $\frac{4x^2}{y^3}$ , β)  $\frac{y^2}{x^5}+x^2\cdot y^5$

1.24. Αν  $x=9$  και  $y=\frac{1}{27}$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A=\frac{(x^{-3}\cdot y^{-2}):(x^7\cdot y^5)^{-2}}{(x^{-2}\cdot y^{-1})^2}$

Απ.: 1

1.25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $3^x=9$                       β)  $4^x\cdot 8^{-x+2}=\frac{1}{16}$

Απ.: α) 2, β) 10

1.26. Να γράψετε ως δύναμη του 2 τον αριθμό:  $\alpha=2^{31}-2^{30}$

**1.27.** Αν οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι αντίθετοι και ο  $n$  είναι ακέραιος, να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}$

### ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

**1.28.** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α)  $(2x+3y)^2$     β)  $(5x^2-y^3)^2$     γ)  $(x^2+2y)^3$     δ)  $(2x^3-1)^3$     ε)  $(-\alpha-\beta)^2$     στ)  $(-\alpha-\beta)^3$   
ζ)  $(-\alpha-\beta) \cdot (\alpha-\beta)$

**1.29. α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

**β)** Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα, να βρείτε το ανάπτυγμα του  $(\alpha-\beta-\gamma)^2$

**1.30.** Να εφαρμόσετε την ταυτότητα:  $\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$ , όπου  $n$  θετικός ακέραιος, στις περιπτώσεις:

α)  $\alpha^4 - \beta^4$     β)  $\alpha^5 - \beta^5$     γ)  $\alpha^5 + \beta^5$

**1.31. α)** Να αποδείξετε τις ταυτότητες: i)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$     ii)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$

β) Αν ισχύει  $x + \frac{1}{x} = 5$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$

γ) Αν ισχύει  $y - \frac{3}{y} = 4$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $B = y^2 + \frac{9}{y^2}$

**1.32.** Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $(2\alpha - \beta) \cdot (2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 2\alpha^2 - 3\beta^2$

**1.33.** Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $(x-1)^3 + (2x)^2 = x \cdot (x+1)^2 - (x-1)^2$

**1.34.** Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $(\alpha\beta - 1)^2 - (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - 1)(\beta - 1)(\alpha + 1)(\beta + 1)$

**1.35.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ , με  $\alpha \neq 0$ , ισχύει:  $(\alpha + \beta)^3 + \alpha(\alpha - 3\beta)(\alpha + 3\beta) = (\beta - \alpha)^3$ , να αποδείξετε ότι:  $\alpha^2 = \beta^2$ .

**1.36.** Αν ισχύει ότι  $\alpha - \beta = 3$ , να αποδείξετε ότι:  $3\alpha - \beta^2 - 3\beta + 2\alpha\beta = \alpha^2$

1.37. Αν ισχύει ότι  $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$ , να αποδείξετε ότι:  $(\tau - \alpha)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 + \tau^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

1.38. (Ταυτότητα Euler:  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$  )

α) Αν  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

β) Αν  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  ή  $\alpha = \beta = \gamma$

1.39. Έστω ένας φυσικός αριθμός  $\alpha$ . Αν ο αριθμός  $\alpha^2 + 2\alpha$  είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι και ο  $\alpha$  είναι άρτιος.

1.40. Για τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει:  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  και  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 6$

α) Να αποδείξετε ότι  $(\alpha + \gamma)^2 = \beta^2$

β) Να βρείτε την τιμή του γινομένου  $\alpha\beta\gamma$

Απ.: 2

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A = (\alpha\gamma + \beta)^2 - (\alpha + \gamma)^2 + (1 - \alpha\gamma)(1 + \alpha\gamma)$

Απ.: 5

1.41. Οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι αντίστροφοι και ισχύει  $\alpha^2 + \beta^2 = 3$ . Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $(\alpha - \beta)^{2020}$

Απ.: 1

1.42. Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = x^2 - y^2$ ,  $\beta = 2xy$  και  $\omega = x^2 + y^2$  (όπου  $x > y > 0$ ). Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \omega$  είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα την  $\omega$ .

1.43. Αν ισχύει ότι:  $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = (\alpha\beta - 1)^{2010}$ .

Απ.: 1

1.44. Να αποδείξετε ότι:  $(x - 2y)^3 + 3(x - 2y)^2(x + 2y) + 3(x - 2y)(x + 2y)^2 + (x + 2y)^3 = 8x^3$

### ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1.45. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i)  $xy - 5x + x^2$     ii)  $6\alpha^4\beta^2 + 9\alpha^3\beta^3 - 12\alpha^5\beta^6$     iii)  $x(\alpha - \beta) + y(\beta - \alpha)$     iv)  $\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$

v)  $\alpha^{2\beta} - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha + \beta - 1$     vi)  $x^2 - 16$     vii)  $25\alpha^2 - 9\beta^2$     viii)  $(2x + 3y)^2 - (x + y)^2$     ix)  $x^4 - y^4$

x)  $x^3+27$  xi)  $1-8x^3$  xii)  $4x^2+12x+9$  xiii)  $(x-2)^2-6(x-2)+9$  xiv)  $2x^3-4x^2+2x$  xv)  $x^2+5x+6$   
xvi)  $x^2-7x+12$  xvii)  $2x^2+5xy+3y^2$  xviii)  $x^7+x^5-x^3-x$  xix)  $x^2+6x-4y^2+9$   
xx)  $x+y-3x^2-6xy-3y^2$

**1.46.** Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α)  $\frac{x^3-6x^2+9x}{2x^4-18x^2}$  β)  $\frac{(2x+y)^2-(x-3y)^2}{27x^4-8xy^3}$

**1.47.** Δίνεται η παράσταση:  $A = \frac{x^2+2}{x^2+3x} - \frac{3x-2}{x^2-3x} + \frac{14}{x^2-9}$

α) Να βρείτε για ποιές τιμές του x, ορίζεται η παράσταση A

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A

**1.48.** Αν ισχύει  $\beta(\alpha^2+2)=\alpha(\beta^2+2)$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = \beta$  ή  $\alpha\beta = 2$ .

**1.49.** Να βρείτε την τιμή του κλάσματος:  $A = \frac{3+6+9+\dots+300}{2+4+6+\dots+200}$

## ΔΙΑΒΑΣΜΑ ΑΠΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

### ΘΕΩΡΙΑ

σελίδες: 44, 45, 46, 47, 50

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#### MUST SEE!!!

σελίδα 52: A1, A2, A4, A5, A6

σελίδα 53: B1, B2, B3, B4, B7

