ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Θ.ROLLE-ΘΜΤ-ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ

1. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) να δείξετε ότι: i) *Για την* $G(x)=(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot e^{f(x)}$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο [α,β] , ii) υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε: $f'(\xi)=\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1}{\beta-\xi}$

2. Αν οι f,g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,\frac{\pi}{2})$ και $g(0)=f(\frac{\pi}{2})$, να δείξετε ότι: i) Για την $F(x)=f(x)\cdot\eta\mu x+g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$, ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[0,\frac{\pi}{2}]$

ii) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $[g(\xi)-f'(\xi)]\cdot\varepsilon\varphi\xi=f(\xi)+g'(\xi)$

3. Αν f,g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] και παραγωγίσιμες στο (α,β) και $f(x)\neq 0, x\in[\alpha,\beta]$ και αν $g(\alpha)-g(\beta)=\ln[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}]$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f'(x_o)}{f(x_o)}=g'(x_o)$

4. Αν $f(x)=x^4+\mu^2\cdot x^2+(\mu^4+1)\cdot x^2+\mu^3$, να δείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ το f(x) δεν μπορεί να έχει όλες τις ρίζες του πραγματικές και άνισες

5. Αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο [1,2] και $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και $f(2)=2\cdot f(1)$

i) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(1,2)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o)=\frac{f(x_o)}{x_o}$

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(1,2)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_o, f(x_o))$ να περνά από την αρχή των αξόνων

6. Αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο [1,3] και $2\cdot f(2)=f(1)+f(3)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(1,3)$ τέτοιο ώστε: $f''(x_o)=0$

7. Αν η f είναι συνεχής στο [1,4] , παραγωγίσιμη στο (1,4) και η f’ γνησίως φθίνουσα στο (1,4) να συγκρίνετε τους αριθμούς: $f(2)+f(3)$ *και* $f(1)+f(4)$

8. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)-2\cdot f(-x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η $g(x)=f^2(x)+f^2(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και αν f(0) = 4 , να βρεθεί ο τύπος της g

9. Να βρεθεί η συνάρτηση f για την οποία είναι: $f''(x)=6\cdot x,\ x\in\mathbb{R}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(0)=f(2)=2$

10. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και αν $g'(e^x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ g(1)=1$, να βρεθεί το $g(\pi)$

11. Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και για κάθε $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ ισχύει: $f(\alpha\cdot\beta)=\alpha\cdot f(\beta)+\beta\cdot f(\alpha)$ να δείξετε ότι: i) f(1) = 0 , ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$, με $f'(1)=1993$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για κάθε x > 0 είναι: $x\cdot f'(x)-f(x)=1993\cdot x$. Μετά να βρεθεί η f.

12. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ σε κατάλληλη συνάρτηση , να δείξετε ότι: $(\beta-\alpha)\cdot\varepsilon\varphi\alpha<\ln(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta})<(\beta-\alpha)\cdot\varepsilon\varphi\beta$, όπου $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

13. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ σε κατάλληλη συνάρτηση , να δείξετε ότι $2\cdot\ln(1+x)<2\cdot x+x^2,\ \ x>0$

14. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι i) η εξίσωση: $2\cdot f(x)=f(\alpha)+f(\beta)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β) ii) υπάρχουν 2 τουλάχιστον σημεία $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$, ώστε: $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{2\cdot(\beta-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}$

15. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x\cdot lnx=1$ έχει μοναδική ρίζα στο [1, e]

16. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα [0, +oo) και παραγωγίσιμη στο (0, +oo) με την f’ να είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+oo) και f(0) = 0 , να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+oo)

17. Αν η f είναι συνεχής στο [1,3] , παραγωγίσιμη στο (1,3) και αν: $f(1)=\frac{f(3)}{3}=1$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in(1,3)$ με $1<\alpha<2<\beta<3$, ώστε f’(α) + f’(β) =2

18. i) Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x)=\frac{e^x}{x^\nu}$, $x>0$, $\nu\in\mathbb{N}/0$ ii) Να δείξετε ότι για κάθε x>0 : $e^x\geq\left(\frac{x\cdot e^x}{\nu}\right)^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}/0$

19. Αν $f(x)=x^3+\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma$ με ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι: i) $\alpha^3>3\cdot\beta$ ii) η f έχει 2 τοπικά ακρότατα iii) Αν η f έχει στο ξ τοπικό ακρότατο τότε: $\frac{1}{\xi-\rho_1}+\frac{1}{\xi-\rho_2}+\frac{1}{\xi-\rho_3}=0$

20. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ και με τιμές στο Δ όπου Δ = [0,1] και f(0) = 0 και f(1) = 1 , να δείξετε ότι: i) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\gamma\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $f(\gamma)=1-\gamma$ ii) υπάρχουν $\alpha,\beta\in\Delta,\ \mu\varepsilon\ \alpha\neq\beta$, ώστε $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 2.5-2.6-2.7

21. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3\cdot x^5-5\cdot x^3+5\cdot x+1=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$

22. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4\cdot x^3+3\cdot(\alpha-1)\cdot x^2+2\cdot\beta\cdot x=\alpha+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

23. Να δείξετε ότι για κάθε x>0 είναι: $\frac{1}{x+1}<\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}$

24. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) , να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\gamma)=\frac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\gamma-\beta}$

25. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{2\cdot x+2}{x^2+2\cdot x+2}$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(-1)=1$ να βρεθεί ο τύπος της f

26. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f(0)=-2 και $f'(x^5+x)=6\cdot x$, $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A(2,f(2))

27. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f(x)\cdot f'(-x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f(0) = 1 , να δείξετε ότι:

i) $f'(x)\cdot f(-x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $f(x)\cdot f(-x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii) $f(x)=e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

28. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\frac{\pi}{2}-x)=f'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f(0) = 0, f'(0) = 1, να δείξετε ότι:

i) $f''(x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) η $h(x)=[f'(x)]^2+[f(x)]^2$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή

iii) $f(x)=\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$

29. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και αν ισχύει: $(x^2+1)\cdot f''(x)+4\cdot x\cdot f'(x)+2\cdot f(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι η $g(x)=2\cdot x cdot f(x)+(x^2+1)\cdot f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή

ii) Αν η κλίσης της C_f στο σημείο Μ(1,2) είναι -2 , να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f

30. Να λυθεί η εξίσωση $2^x+3^x+4^x=9^x$

31. Να δείξετε ότι $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$, $x>0$

32. Να λυθεί η ανίσωση: $\alpha^{x^2-2x}-\alpha^{x-2}<-x^2+3\cdot x-2$, $\alpha>1$. Πότε ισχύει η ισότητα?

33. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και αν f(α) = f(β) =1 και f''(x) > 0 , για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι f(x)<1, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$

34. Αν $f(x)=2\cdot x^3+3\cdot x^2+6\cdot \sigma\upsilon\nu x$, i) να μελετηθεί η μονοτονία της f , ii) να λυθεί η εξίσωση: f(x) = 6

35. Αν $\alpha^x\geq x^\alpha$, για κάθε x > 0 , να δείξετε ότι: α = e (όπου $0<\alpha\neq 1$)

36. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f^2(x)+x^2=1+2\cdot x\cdot f(x)$, *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα

37. Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=6 \cdot x \cdot e^{-x}+5 \cdot e^{-x}+2 \cdot x-7$ *και* $g(x)=x^3-4 \cdot x+5-7 \cdot e^{-x}$, τότε:

i) Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη

ii) Να βρεθούν τα ακρότατα της $h(x)=f(x)-g(x)$, $x \in \mathbb{R}$