1.4. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1. Να συμπληρώσετε τα κενά:

i. Αν Α(x,y), τότε d(A, x’x) = …………… , d(A, y’y) = …………, $\vec{OA}=(....,.....)$.

ii. Αν $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$, τότε $\vec{a}=(....,....)$ και τα διανύσματα $x\cdot\vec{i}, y\cdot\vec{j}$, λέγονται……….. του $\vec{a}$.

iii. Αν $\vec{a}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε:

α. $\vec{a}=\vec{\beta}\Leftrightarrow$..............................

β. $\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow$.....................$,\vec{a}\neq\vec{0}\Leftrightarrow$.......................

γ. $(\vec{a},\vec{\beta}: αντίθετα)\Leftrightarrow$...........................

δ. Αν $\vec{a}\neq\vec{0}$, ισχύει ότι $\vec{a}\parallel x'x\Leftrightarrow$.................................

$\vec{a}\parallel y'y\Leftrightarrow$...............................

iv. Αν $\vec{a}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε

α. $\vec{a}+\vec{\beta}=(..............,..................)$

β. $\lambda\cdot\vec{a}=(................,...................)$

γ. $\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{\beta}=(...................,...................)$

v. Αν Μ(x,y) μέσον του ΑΒ με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε

$x=$................................. και $y=$...................................

vi. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε $\vec{AB}=(..................,....................)$ και $|\vec{AB}|=$..................................

vii. Αν $\vec{a}=(x, y)$, τότε $|\vec{\alpha}|=$..............................

viii. $det(\vec{a},\vec{\beta})=0\Leftrightarrow$......................................

ix. Αν φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x’x, τότε ……...φ < …………..

x. Αν $\vec{\alpha}=(x, y), x\neq 0$ και $\vec{\alpha}$ να μην είναι παράλληλο με τον άξονα y’y και φ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x’x, τότε $\lambda_{\vec{\alpha}}=$....................=............................

xi. Αν $\vec{\alpha}=(x, y), x\neq 0$ και $\vec{\alpha}\parallel x'x$, τότε $\lambda_{\vec{\alpha}}=$...............

xii. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα με τον άξονα y’y, τότε $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}=$...........................

2. Σωστό- Λάθος

i. Αν Α(x,y), τότε d(A, x’x) = |x|

ii. Αν $\vec{OA}=(x, y,)$ τότε Α(x,y)

iii. Αν $\vec{\alpha}=(x, y)$, τότε:

α. $\vec{\alpha}\parallel x'x\Leftrightarrow x=0$

β. $\vec{\alpha}\parallel x'x\Leftrightarrow y=0$

γ. $\vec{\alpha}\parallel y'y\Leftrightarrow y=0$

iv. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε

α. (Μ(x,y): μέσον του ΑΒ) $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2\cdot x$ και $y_1 + y_2 = 2\cdot y$

β. $\vec{AB} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

γ. (AB) = $\sqrt{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)}$

v. Αν φ η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ σχηματίζει με τον άξονα x'x, τότε

α. $0 \leq \varphi < \pi$ β. $\lambda_{\vec{\alpha}} = \varepsilon\varphi\varphi, \vec{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο με τον άξονα y'y

vi. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα με τον άξονα y'y, τότε $\vec{\alpha} \| \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} - \lambda_{\vec{\beta}} = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (3,1)$.

i. Να βρείτε τα παρακάτω διανύσματα:

α. $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ β. $\vec{u} = 2\cdot\vec{\alpha} - 3\cdot\vec{\beta} - \vec{v}$

ii. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$, όταν: $2\cdot(\vec{\alpha} - \vec{x}) - 3\cdot\vec{\beta} = \vec{x} - \vec{\alpha}$.

2. Αν Α(1,-3) και Β(-2,1), να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v} = 2\cdot\vec{OA} - 3\cdot\vec{OB}$, (Ο: η αρχή των αξόνων).

3. Αν $\vec{\alpha} = (x^2 - 4y, 2z - 3)$, $\vec{\beta} = (y^2 + 2x + 5, z)$, να βρείτε τα x, y, z, ώστε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι αντίθετα.

4. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α(1,-2) ως προς το σημείο Β(-1,3).

5. Αν Α(-2,1), Β(3,-2) και ισχύει $2\vec{AM} - 3\vec{BM} = \vec{0}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

6. Αν $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (3,-2)$, να υπολογίσετε το μέτρο:

i. $|-2\vec{\alpha}|$ ii. $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$

7. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$, για το οποίο ισχύει η σχέση: $\vec{\alpha} = (-4, -2) + |\vec{\alpha}|\cdot(1,1)$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσος του. Αν Α(-1,3) , Β(-2, -3), Γ(2,4), να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του $\vec{AM}$

ii. το $|\vec{AM}|$

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-1,0), Β(2,-3) και Γ(0,1). Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$, για το οποίο ισχύει $2\vec{v}=\vec{AB}-|\vec{v}|\vec{A\Gamma}$

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,1)$, $\vec{\beta}=(-2,1)$ και $\vec{\gamma}=(12,-5)$

i. Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμικά

ii. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda-1,\kappa),\vec{\beta}=(\kappa,2-2\lambda)$ και $\vec{\gamma}=(1,5)$

i. Να βρείτε τα κ,λ, ώστε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να είναι συγγραμικά.

ii. Για λ=2 και κ=-1 να αναλύσετε το $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες στα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

12. Να βρείτε τις τιμές του κ, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\kappa-1),\vec{\beta}=(k-1,9)$ να είναι αντίρροπα

13. Να βρείτε διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}=(1,4)$ με μέτρο $\sqrt{17}$.

14. Έστω το σύστημα Oxy και τα σημεία Α(3,1), Β(5,1). Αν $4\vec{O\Gamma}=2\vec{OA}+\vec{AB}$ και Μ το μέσον του ΑΒ,

i. να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{O\Gamma}$ και $\vec{OM}$.

ii. να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Γ, Μ είναι συνευθειακά.

iii. Να βρείτε το λ, όταν $\vec{O\Gamma}=\lambda\cdot\vec{\Gamma M}$

15. Αν τα σημεία Α,Β,Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το Ο τα $\vec{\alpha}=(-1,3)$, $\vec{\beta}=(3,5)$, $\vec{\gamma}$ =(-3,2) αντίστοιχα, τότε:

i. να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$

ii. να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

iii. να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β, Γ

16. Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda-1,4)$, $\vec{\beta}$ = (1, λ-1) είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Α, Β με σημείο αναφοράς το Ο. Να βρείτε το λ, ώστε τα σημεία Ο, Α, Β να είναι συνευθειακά.

17. Αν φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x'x, να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $\varphi=\frac{\pi}{6}$ ii. φ= 120^o iii. $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ iv. φ=0

18. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{AB}$ με τον άξονα x'x σε κάθε περίπτωση, αν:

i. A(3,0), $B(0,-\sqrt{3})$ ii. A(1,5), B(-2,5) iii. A(3,-2) , B(3,2)

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,2)$ και $\vec{\beta}=(1,-\sqrt{3})$.

i. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα α και β με τον άξονα x'x

ii. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων α και β

20. Δίνονται τα σημεία A(3x,y) και B(4x+3y, 2y). Να βρείτε τα x,y έτσι, ώστε το διάνυσμα $\vec{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 135^o και να έχει μέτρο $2\sqrt{2}$.