

Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

7ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Σημείωση

Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή αν και μόνο αν ισχύει $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν δεν ισχύει $A = 0$ και $B = 0$.

1. Δίνεται η εξίσωση

$$(\mu^2 - 9)x + (\mu^2 + 3\mu)y + \mu + 1 = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

(α) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

(β) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία παράλληλη:

i. στον άξονα $x'x$,

ii. στον άξονα $y'y$.

(γ) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Σημείωση

Έστω η ευθεία ϵ με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.
Ισχύει ότι:
 $\rho \in \parallel y'y \Leftrightarrow B = 0$
 $\rho \in \parallel x'x \Leftrightarrow A = 0$
 $\rho \in \epsilon$ διέρχεται από $O \Leftrightarrow \Gamma = 0$.

2. Δίνονται οι ευθείες

$$\epsilon_1 : 2x + y = 6 \text{ και } \epsilon_2 : x - 2y = -2.$$

(α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M.

(β) Να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και $\epsilon_3 : 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

3. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda(x + y - 1) + 2x - y - 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή που διέρχεται από σταθερό σημείο, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.

(β) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες η ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση (1),

i. είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$,

ii. είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$,

iii. διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$,

iv. σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° ,

v. είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta : -2x + y - 1 = 0$.

(γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία

$$\zeta : x + y + 1 = 0,$$

δεν ανήκει στην οικογένεια των ευθειών που ορίζονται από την εξίσωση (1).

Σημείωση

Έστω η ευθεία ϵ με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.
Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι παράλληλο στην ϵ .
Το διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$ είναι κάθετο στην ϵ .

4. Δίνονται οι ευθείες:

$$\epsilon_1 : x + 2y - 5 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : x - 3y + 4 = 0.$$

- (α) Να βρείτε δύο διανύσματα \vec{d}_1 και \vec{d}_2 τέτοια, ώστε να είναι παράλληλα προς τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 αντίστοιχα.
 (β) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 .

5. Δίνονται οι ευθείες:

$$\epsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 2)y + 8 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : (\lambda - 1)x + \lambda y + \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε:

- (α) $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$, (β) $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$.

6. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(2\lambda - 1)x + (18 - 11\lambda)y + 9\lambda - 17 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 (β) Αν ϵ_1 , ϵ_2 είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση για $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$ αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.
 7. (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 2)$ και $B(8, 5)$.
 (β) Αν $\epsilon_1 : 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία $\epsilon_2 : 7x - y - 1 = 0$ είναι $\phi = 45^\circ$.
 (γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ϵ_1 και ϵ_2 .
 (δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_3 τέτοιας ώστε η ϵ_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_3 .
 8. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ οι πλευρές του AB και $A\Delta$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις:

$$\epsilon_1 : 2x + y + 2 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : x - 2y + 6 = 0$$

αντίστοιχα.

Αν το κέντρο του $AB\Gamma\Delta$ είναι το σημείο $K(-1, -2)$, να βρείτε:

- (α) τις συντεταγμένες του σημείου A και να αποδείξετε ότι $\Gamma(0, -6)$,
 (β) την εξίσωση της πλευράς $\Gamma\Delta$ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ .

“Κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα, καλή ή κακή, έχει ένα τέλος...εκτός από τα Μαθηματικά”.

Erdos, Paul, 1913 – 1996, Ούγγρος μαθηματικός.