①

# §1.3. Πολ/μος αριθμού με διάνυσμα.

## Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Συμπληρώστε τα κενά.

i) Αν $\lambda \le 0$, τότε το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι ______ του $\vec{\alpha}$.
ii) Το μέτρο του διανύσματος $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι ______.
iii) Αν $\lambda$ .... $0$, τότε το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$.
iv) Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε ______
v) $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0} \iff \lambda =$ .... ή $\vec{\alpha} =$ ____
vi) Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε ______
vii) Γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, ονομάζουμε κάθε διάνυσμα της μορφής ______
viii) Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:
1. $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} =$ ______ , $\kappa \in \mathbb{R}$
2. $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \iff$ ______ , με ______
3. $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \iff$ ______ , με ______

ix) Αν $M$: μέσον του $AB$, τότε $\vec{OM} =$ ______

2) Σ-Λ
i) $|\lambda \cdot \vec{\alpha}| = |\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$
ii) Αν $\lambda \ge 0$ και $\vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$, τότε $\vec{\beta} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}$
iii) Αν $\vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$, τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$
iv) Αν $M$: μέσον του $AB$, τότε $\vec{OA} + \vec{OB} = 2 \cdot \vec{OM}$
v) Αν $\lambda \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$
vi) Αν $\lambda \vec{\alpha} = \mu \vec{\alpha}$, τότε $\lambda = \mu$.
vii) Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$

3) Σ-Λ (λίγο πιο δύσκολα)
i) Αν $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\alpha \uparrow\downarrow \beta$
ii) Αν $\vec{\alpha} = -3 \cdot \vec{\beta}$, τότε $|\vec{\alpha}| = -3 \cdot |\vec{\beta}|$.
iii) Αν το $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο και $|\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| = 0$, τότε $|\vec{\beta}| = 3$.
iv) Αν $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$, τότε $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 0$
v) Αν $AB = 2B\Gamma$, τότε $|\vec{AB}| = 2|\vec{B\Gamma}|$.
vi) Αν $(AB) = 3 \cdot (B\Gamma)$, τότε $\vec{AB} = 3 \cdot \vec{B\Gamma}$

vii) Το διάνυσμα $\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ είναι μοναδιαίο.

viii) Αν $\vec{AB} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ και $\vec{A\Gamma} = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

ix) Αν $\vec{AB} = 2 \cdot \vec{B\Gamma}$ τότε τα $A, \Gamma$ βρίσκονται εκατέρωθεν του $B$.

x) Αν $\vec{AB} = -\frac{1}{4}\vec{B\Gamma}$, τότε τα $A, B$ βρίσκονται εκατέρωθεν του $\Gamma$.

## Ασκήσεις

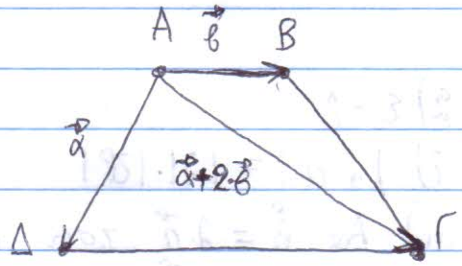
1) Βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$, αν ισχύει: $|\vec{\alpha}| \cdot (\vec{\beta} - \vec{x}) = \vec{x}$.

2) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει: $\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} = |\vec{\beta}| \cdot \vec{\alpha}$, ν.α.ο. $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

3) Αν ισχύει $\vec{MA} + 2 \cdot \vec{MB} + 3 \cdot \vec{M\Gamma} = \vec{NA} + 2\vec{NB} + 3 \cdot \vec{N\Gamma}$, ν.α.ο. $M \equiv N$.

4) Αν $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \frac{4}{3}\vec{\gamma}$ και $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{\alpha} - \frac{3}{4}\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ ν.α.ο. $\vec{u}, \vec{v}$ είναι συγγραμμικά.

5) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο στο διπλανό σχήμα είναι τραπέζιο.




6) Δίνονται τα διαφορετικά σημεία $A, B$ και $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης αυτών. Αν ισχύει $3 \cdot \vec{A\Gamma} + 2\vec{\Gamma B} = \vec{0}$, να βρείτε:

i. Το διάνυσμα θέσης του σημείου $\Gamma$

ii. Τη σχετική θέση των σημείων $A, B, \Gamma$.

7) Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = 3\vec{\beta}$ και $\vec{O\Gamma} = 6\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, ν.δ.ο. τα $A, B, \Gamma$ είναι συνευθειακά.

8) Αν οι διανυσματικές θέσεις των σημείων $A, B, \Gamma$ ως προς το σημείο $O$ είναι αντίστοιχα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta}$, ν.α.ο. τα $A, B, \Gamma$ είναι συνευθειακά.

③

9) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και το μέσον Ζ της διαμέσου του ΑΜ. Αν $\vec{AB}=\vec{\alpha}$, $\vec{A\Gamma}=\vec{\beta}$ και για τα σημεία Δ, Ε ισχύει: $\vec{A\Delta}=3\cdot\vec{\Delta B}$, $\vec{AE}=\frac{3}{5}\cdot\vec{E\Gamma}$,

i) να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$ και $\vec{\Delta Z}$.

ii) να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ζ, Ε είναι συνευθειακά.

10) Αν ισχύει $(k+2)\cdot\vec{MA}+3\cdot\vec{MB}=(k+5)\cdot\vec{M\Gamma}$, ν.α.ο. τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

11) Μαζί!! Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$. Να βρείτε το σημείο Μ τέτοιο ώστε:

$\vec{MA}-2\cdot\vec{MB}+3\cdot\vec{M\Gamma}=\vec{0}$.

12) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$\vec{AM}+3\vec{BM}=\vec{\Gamma M}$.

13) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$. Αν ισχύει $k+\lambda+\mu=0$, ν.δ.ο. για οποιοδήποτε σημείο Μ, το διάνυσμα $\vec{u}=k\cdot\vec{MA}+\lambda\cdot\vec{MB}+\mu\cdot\vec{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

14) ! Αν $|\vec{\alpha}|=6$ και τα διανύσματα $\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία, ν.α.ο. $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}\neq\vec{0}$.

15) Αν τα σημεία Γ, Δ είναι διαφορετικά και ισχύουν $\vec{AB}=3\vec{\Gamma\Delta}$, $\vec{A\Gamma}+\vec{\Delta B}=x\cdot\vec{\Gamma\Delta}$, να βρείτε το x.

16!) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\vec{BM}=2\cdot\vec{M\Gamma}$,

i) ν.α.ο. $\vec{AM}=\dfrac{\vec{AB}+2\cdot\vec{A\Gamma}}{3}$

ii) να βρείτε τα κ, λ ώστε να ισχύει: $k\cdot\vec{AB}+\lambda\cdot\vec{A\Gamma}=3\cdot\vec{AM}+\vec{B\Gamma}$

# Διαγώνισμα

## Θέμα 1

Α. Αν $\vec{a},\vec{b}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{b}\neq\vec{0}$ τότε ν.α.ο. $\vec{a}/\!/\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}, \lambda\in\mathbb{R}$.

Β. Σ-Λ.

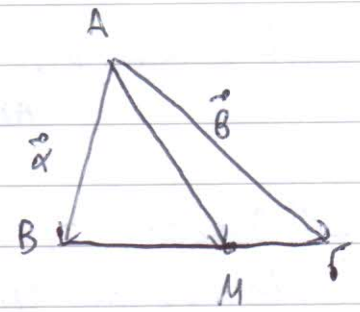
1. Αν Μ: μέσον του ΑΒ, τότε $\vec{OA}+\vec{OB}=2\cdot\vec{OM}$
2. Αν $\vec{a}/\!/\vec{b}$, τότε υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$
3. Αν $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ και $|\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{b}|$, τότε $\vec{a}=-|\lambda|\cdot\vec{b}$
4. Αν $\lambda\cdot\vec{a}=\mu\cdot\vec{a}$, τότε $\lambda=\mu$
5. Το μηδενικό διάνυσμα είναι ομόρροπο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

## Θέμα 2

Στο διπλανό σχήμα είναι $(\vec{BM})=3\cdot(\vec{\Gamma M})$.

i) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{a},\vec{b}$.

ii) Αν $\vec{x}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$ και για τα Δ, Ε ισχύουν $\vec{A\Delta}=\frac{1}{2}\vec{x}$ και $\vec{AE}=\frac{3}{7}\vec{A\Gamma}$, ν.α.ο τα Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά.




## Θέμα 3

Έστω ότι για τα διακεκριμένα σημεία Α, Β, Γ ισχύει: $4\vec{OA}+\vec{\Gamma A}=3\cdot\vec{OB}+\vec{O\Gamma}$.

α. Ν.δ.ο. τα Α, Β, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

β. Να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β, Γ.

γ. Να βρείτε το $x$, ώστε να ισχύει: $\vec{AM}=x\cdot\vec{AB}$ και το Μ: μέσον του ΑΓ.

## Θέμα 4

Δίνεται το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:

α. $(\lambda+1)\cdot\vec{MA}=\lambda\cdot(\vec{M\Gamma}+\vec{BA})$

β. $|\vec{MA}+\vec{MB}|=|\vec{A\Gamma}+\vec{M\Gamma}-\vec{AM}|$

γ. $|\vec{MB}-\vec{\Gamma M}|=|\vec{MA}+\vec{MB}-2\cdot\vec{M\Gamma}|$.