

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Θεωρία – Τυπολόγιο

- ◆ Εξίσωση Παραβολής με Εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$ και διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$, $C: y^2 = 2 \cdot p \cdot x$
 - ◆ Εφαπτομένη στο σημείο επαφής $M_1(x_1, y_1): y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)$
- ◆ Εξίσωση Παραβολής με Εστία $E(0, \frac{p}{2})$ και διευθετούσα $\delta: y = -\frac{p}{2}$, $C: x^2 = 2 \cdot p \cdot y$
 - ◆ Εφαπτομένη στο σημείο επαφής $M_1(x_1, y_1): x \cdot x_1 = p \cdot (y + y_1)$

Βασικές ασκήσεις

1. Αν η παραβολή C έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x=3$,
 - i. Να βρείτε την εξίσωση της C
 - ii. να βρείτε την εστία της C
 - iii. Να βρείτε το λ , ώστε το σημείο $A(\lambda, \lambda-3)$ να ανήκει στη C
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 4x$, που είναι κάθετη στην ευθεία $\epsilon: x+2y+1=0$
3. Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = 4x$ και ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.
 - i. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ϵ) της παραβολής C_1 στο σημείο της $A(1, \mu)$, $\mu > 0$ εφάπτεται και στον κύκλο C_2 .
 - ii. Αν η (ϵ) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο B , να βρείτε την άλλη κοινή εφαπτομένη (η) του κύκλου C_2 και της παραβολής C_1 καθώς και το σημείο επαφής της C_1 με την η .
4. Αν $B\Gamma$ είναι χορδή της παραβολής $C: y^2 = 4px$ που διέρχεται από την εστία της, να δείξετε ότι ο κύκλος διαμέτρου $B\Gamma$ εφάπτεται της διευθετούσας της παραβολής C .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

- i. Αν A είναι η προβολή της εστίας E μιας παραβολής στη διευθετούσα της, τότε το μέσον K του EA λέγεται της παραβολής
- ii. Αν η παραβολή C έχει εστία το σημείο $E(\frac{p}{2}, 0)$ και διευθετούσα δ: $2x+p=0$, τότε η C έχει εξίσωση.....
- iii. Η παραβολή C: $x^2 = 2py$ έχει εστία το σημείο και διευθετούσα την ευθεία.....
- iv. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C: $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι:
- v. Η παραβολή C: $y^2 = 2px$ έχει άξονα συμμετρίας τον
- vi. Η παραβολή C: $y^2 = 2px$ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα δ και
- vii. Αν η χορδή AB της παραβολής C: $y^2 = 2px$ διέρχεται από την εστία της E και είναι $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, τότε $y_1 y_2 = \dots\dots\dots$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

- i. Η εστία της παραβολής $x^2 = 2py$ είναι το σημείο $E(\frac{p}{2}, 0)$
- ii. Η διευθετούσα της παραβολής C: $x^2 = 2py$ είναι η ευθεία $2y + p = 0$
- iii. Αν $p < 0$ η παραβολή C: $y^2 = 2px$ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία $2x + p = 0$ και το σημείο $(\frac{p}{2}, 0)$
- iv. Ο άξονας x'x είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής C: $x^2 = 2py$
- v. Η εφαπτομένη της παραβολής C: $y^2 = 2px$ στην κορυφή της είναι ο άξονας y'y.
- vi. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C: $y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι: $xx_1 = p(y + y_1)$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ**Θέμα 2ο**

18242. Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση: $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της M(4,4)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C, τη διευθετούσα δ και την ευθεία ε

18701. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση: $y = \frac{1}{2} \cdot x^2$ (1) .

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο A(2,2)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της C.

20235. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8 \cdot x$.

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $8x - 2y + 3 = 0$

21248. Δίνεται το σημείο E(2,0) , η ευθεία $\delta_1: x = -2$ και το τυχαίο σημείο του επιπέδου M(x,y).

α) i. Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου M από την εστία E(2,0) ως συνάρτηση των x,y.

ii. Να βρείτε την απόσταση d(M, δ) του σημείου M από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x,y.

β) Αν ισχύει (ME) = d(M,δ) να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8 \cdot x$

21307. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy, δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο E(0,3) και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες (ε₁) και (ε₂) της παραβολής στα σημεία A(6,3) και B(-6,3) αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε₁) και (ε₂)

22190. Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = x$ (1).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της Εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο A(1,-1) είναι σημείο της παραβολής.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής στο σημείο της $A(1,-1)$.

21306. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$, κορυφή $O(0,0)$ και εστία $E(2,0)$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο A .

