ΦΥΛΛΑΔΙΟ 12

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

<u>Βασική Θεωρία</u>

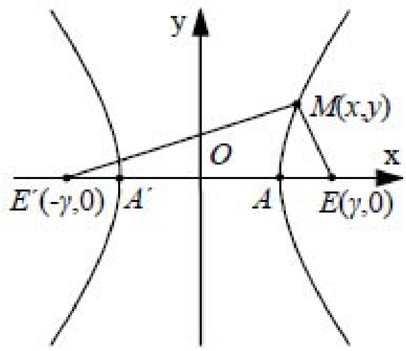
Ορς. Υπερβολή με εστίες τα σημεία E' και E ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $(E'E)$

Αν η υπερβολή C έχει εστίες τα E' , Ε και σταθερή διαφορά 2α , τότε: $M \in C \Leftrightarrow |(ME') - (ME)| = 2\alpha$

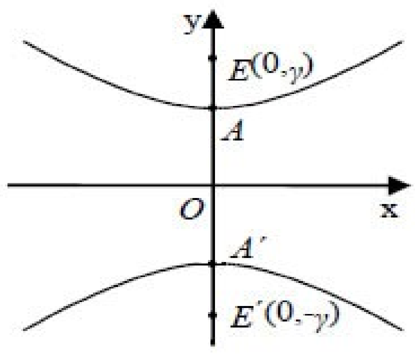
Εστιακή απόσταση: Ονομάζεται η απόσταση των εστιών της

Εξίσωση της υπερβολής με σταθερή διαφορά 2α και

i. εστίες $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ **:** $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, **όπου** $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$



ii. εστίες $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ **:** $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, **όπου** $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$



Ισοσκελής Υπερβολή: Όταν α = β

Εξίσωση Ισοσκελούς Υπερβολής: $x^2 - y^2 = \alpha^2$

Εκκεντρότητα Ισοσκελούς υπερβολής: $\varepsilon = \sqrt{2}$

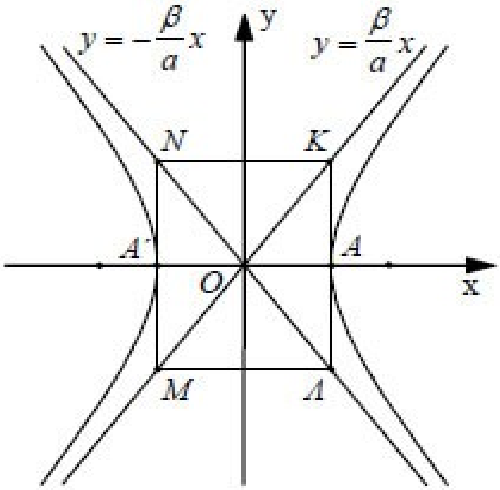
Ιδιότητες Υπερβολής

- Έχει άξονες συμμετρίας τους $x'x$ και $y'y$ και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων
- Η υπερβολή C βρίσκεται έξω από την “ταινία” των ευθειών $x=-\alpha$ και $x=\alpha$
- Έχει την ανακλαστική ιδιότητα
- Όταν οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$ τότε έχει κορυφές τα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$ και ασύμπτωτες τις ευθείες: $y=\frac{\beta}{\alpha}\cdot x$, $y=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot x$. Έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$
- Όταν οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $y'y$ τότε έχει κορυφές τα σημεία $A'(0,-\alpha)$ και $A(0,\alpha)$ και ασύμπτωτες τις ευθείες: $y=\frac{\beta}{\alpha}\cdot x$, $y=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot x$

Ορθογώνιο βάσης της υπερβολής C: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$,

λέγεται το ορθογώνιο που έχει κορυφές τα σημεία:

Κ(α,β) , Λ(α,-β), Μ(-α, -β), Ν(-α, β)

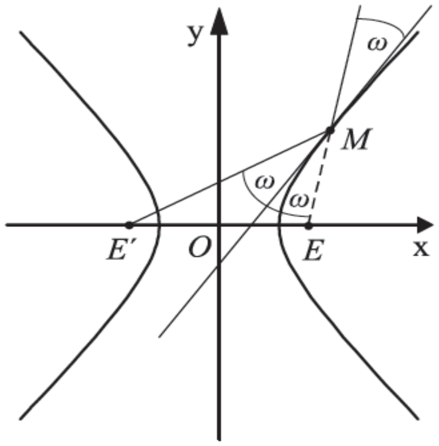


Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο επαφής $M(x_1, y_1)$

i. της υπερβολής C: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, **ε :** $\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}-\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1$

ii. της υπερβολής C: $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$, **ε:** $\frac{y\cdot y_1}{\alpha^2}-\frac{x\cdot x_1}{\beta^2}=1$

Ανακλαστική Ιδιότητα: Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της Μ διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E', E οι εστίες της υπερβολής



ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

<u>Θέμα 2ο</u>

16128. Δίνεται η υπερβολή $(C): \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$**.**

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E.

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE')-(NE)|$.

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C).

17942. Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση (C) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(1,2022) μπορεί να ανήκει στην (C).

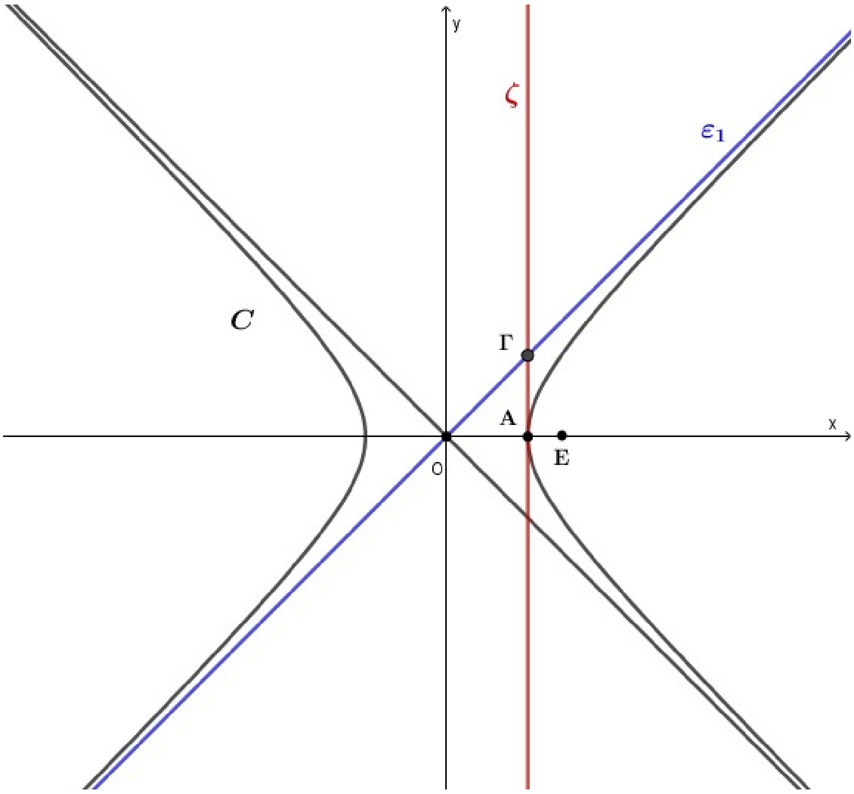
20721. Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$**.**

α) Να βρείτε τις εστίες της C.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C.

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

20869. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή $C: x^2-y^2=1$, η εστία της E, η εφαπτομένη της ζ στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.



α) Να βρείτε τις εστίες E', E και τις ασύμπτωτες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της υπερβολής.

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ.

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$.

21218. Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2-y^2=1, (C_2): y^2-x^2=1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1είναι οι $E_1(\sqrt{2},0), E'_1(-\sqrt{2},0)$.

β) Αν E_2, E'_2 οι εστίες της C_2τότε να αποδείξετε ότι το $E_1E_2E'_1E'_2$είναι τετράγωνο.