ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΜΤ

ΕΎΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΆΡΤΗΣΗΣ

1. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη με f’(1) = f(1) = 1, f(x) > 0 και $x^3\cdot f''(x)-x\cdot f'(x)+2\cdot f(x)=0$ για κάθε x>0.

i) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι: $f(x)=e^{\frac{x-1}{x}}$, x>0

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της\

2. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν :

$f''(x)\cdot f(x)+(f'(x))^2=f'(x)\cdot f(x)\ \ (1)$, $f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι: $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$.

23199.

Έστω $f:(1,+\infty)\to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$να ισχύει

$$xf(x)f'(x)=\frac{1}{2} \text{ και } f(e)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x, x>1$είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f.

(Μονάδες 9)

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x}, x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$.

(Μονάδες 8)

26605.

Δίνεται συνεχής συνάρτηση f : $R\to R$ για την οποία ισχύουν :

- f^2(x) - 5 = x^2 για κάθε x ∈ R
- $f(2)=3$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. f(x) ≠ 0 για κάθε x ∈ R . (Μονάδες 4)

ii. f(x) = $\sqrt{x^2+5}$ για κάθε x ∈ R. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με g(x) = x^2– συνx, με x ∈ R. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + συνx$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-π,π)$.

(Μονάδες 9)

27092.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(3,2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f.

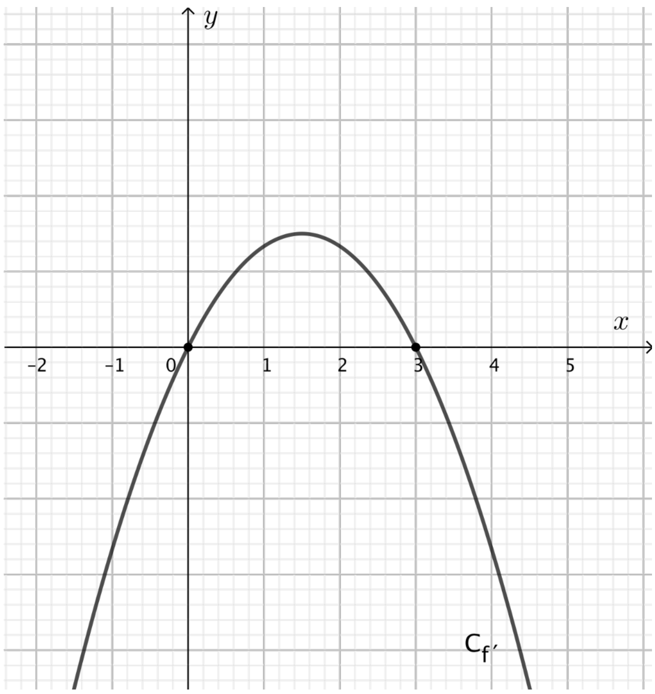
(Μονάδες 04)

γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f.

(Μονάδες 08)

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=α, α \in R$, στο διάστημα $(0,3)$.

(Μονάδες 07)



Απαντήσεις

1. i) Πολλαπλασιάζω με $x \neq 0$ την αρχική σχέση και θα γίνει:

$$x^4 \cdot f''(x) - x^2 \cdot f'(x) + 2 \cdot x \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 \cdot f''(x) = x^2 \cdot f'(x) - 2 \cdot x \cdot f(x) \Leftrightarrow f''(x) = \frac{x^2 \cdot f'(x) - 2 \cdot x \cdot f(x)}{x^4} \Leftrightarrow$$

$f''(x) = (\frac{f(x)}{x^2})'$. *Τότε υπάρχει* $c_1 \in \mathbb{R}$ *τ.ω.* $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + c_1$ *και για* $x = 1$ *έχουμε*: $f'(1) = f(1) + c_1 \Leftrightarrow$ $c_1 = 0$. *Άρα* $f^2(x) = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (\ln(f(x)))' = (-\frac{1}{x})'$. *Τότε υπάρχει* $c_2 \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε*

$$\ln(f(x)) = -\frac{1}{x} + 1 \Leftrightarrow \ln(f(x)) = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$$

ii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$f'(x) = (e^{\frac{x-1}{x}})' = e^{\frac{x-1}{x}} \cdot (\frac{x}{x-1})' = e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{x-1}{x}} > 0$ *για κάθε* $x > 0$, *άρα η* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* $D_f = (0, +\infty)$. *Το σύνολο τιμών της θα είναι* $f(D_f) = (\lim_{x \to 0^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)) = (0, e)$ *χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής*

2.Έχουμε: $f''(x) f(x) + (f'(x))^2 = f'(x) f(x) \Leftrightarrow (f'(x) f(x))' = f'(x) f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f'(x) f(x))' e^{-x} - f'(x) f(x) e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (f'(x) f(x) e^{-x})' = 0.$ Οπότε: $f'(x) f(x) e^{-x} = c, c \in \mathbf{R}. (2)$

Για $x = 0 \Rightarrow f'(0) f(0) = c \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = c \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$

23199.

α) Για κάθε $x > 1$είναι:

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}[2xf(x)f'(x) - 1] = \frac{1}{x}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) = 0$$

οπότε η g είναι σταθερή.

Ισχύει $g(x) = c, c \in R$ και $g(e) = f^2(e) - \ln e \Rightarrow c = 1 - 1 \Rightarrow c = 0$.

Άρα $g(x) = 0$, οπότε $f^2(x) = \ln x, x > 1$.

Επιπλέον η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και ισχύει $f^2(x)=\ln x\neq 0$ για κάθε $x>1$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο και $f(e)>0$.

Άρα, για κάθε $x>1$ έχουμε $f(x)>0$, οπότε $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $x>1$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο Β, διέρχεται από το Α.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}, x>1$ και $f'(e)=\frac{1}{2e}$, οπότε η εφαπτομένη της C_fστο Β έχει εξίσωση $y-1=\frac{1}{2e}(x-e)$ δηλαδή $y=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$.

Με $x=-e$ έχουμε: $y=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}=0$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Β διέρχεται πραγματικά από το Α.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει:

$$\frac{1}{x+1}<\ln(¿x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x, x>1$ η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε διάστημα της μορφής $[x,x+1], x>1$. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ ώστε

$$h'(\xi)=\frac{h(x+1)-h(x)}{x+1-x}\Rightarrow\frac{1}{\xi}=\ln(¿x+1)-\ln x,\ (1)$$

Αλλά,

$$x<\xi<x+1\Rightarrow\frac{1}{x+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$$

που είναι το ζητούμενο.

26605.

α)

i. Ισχύει ότι f^2(x) - 5 = x^2 για κάθε x $\in R$ ή f^2(x) = x^2+ 5 για κάθε x $\in R$.

f(x) = 0 ⇔ f^2(x) = 0 ⇔ $x^2+5=0$, αδύνατο. Οπότε f(x) ≠0 για κάθε x $\in R$.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R με f(x) ≠0 για κάθε x $\in R$. Οπότε η f διατηρεί πρόσημο στο R. Δίνεται ότι f(2) = 3 > 0, οπότε η συνάρτηση f παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε x $\in R$. Ισχύει f^2(x) = x^2+ 5 ⇔ $|f(x)|$ = $\sqrt{x^2+5}$, και επειδή η f παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε x ∈ R, θα ισχύει f(x) = $\sqrt{x^2+5}$ για κάθε x $\in R$.

β)

i. Αν g(x) = x^2– συνx, με x $\in$ R, g'(x) = $2x$+ ημx και g''(x) = 2+ συνx για κάθε x $\in$ R. Παρατηρούμε ότι g''(x) > 0 για κάθε x $\in$ R, αφού 1 ≤ 2 + συνx ≤ 3, και η συνάρτηση g'(x) είναι συνεχής στο R, οπότε η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Για x < 0 ισχύει g'(x) < g'(0) = 0, αφού η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα, ενώ για x > 0 ισχύει g'(x) > g'(0) = 0. Άρα για τη συνάρτηση g έχουμε:

g συνεχής στο (-∞, 0] με g'(x) < 0 στο (-∞, 0), άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞, 0]. Αντίστοιχα

g συνεχής στο [0, +∞) με g'(x) > 0 στο (0, +∞), άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∞).

(Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το g(0) = -1).

ii. Η εξίσωση f^2(x) = 5 + συνx με x $\in$ R , γράφεται ισοδύναμα x^2+ 5 = 5 + συνx ⇔ x^2- συνx=0 ⇔ g(x) = 0 με x $\in$ R. Ζητείται να δείξουμε ότι η εξίσωση g(x) = 0 έχει δύο ρίζες αντίθετες στο (-π,π) και δεν έχει άλλες ρίζες στο R.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [0,π], με

g(π)= π^2 – συνπ = π^2 +1 >0

g(0) = -συν0 = -1 <0

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα [0,π], οπότε η εξίσωση g(x) = 0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα ρ $\in$ (0, π)$\subset(0,+\infty)$. Επιπλέον η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞), οπότε η ρίζα ρ είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

Επειδή g(-ρ) = $(-ρ)^2$ – συν(-ρ) = $ρ^2$ – συνρ = g(ρ) = 0, άρα και το -ρ είναι ρίζα της εξίσωσης g(x)=0. Επειδή 0 < ρ < π ⇔ -π < -ρ < 0, η ρίζα –ρ της εξίσωσης g(x)=0 βρίσκεται στο διάστημα (-π,0).

Επιπλέον η ρίζα -ρ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης g(x)=0 στο διάστημα (-∞ , 0] αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Άρα η εξίσωση g(x)=0 ⇔ x^2- συνx=0 ⇔ f^2(x) = 5 + συνx με x $\in$ R έχει ακριβώς δύο ρίζες αντίθετες μεταξύ τους οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (-π,π).

27092.

α) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' συμπεραίνουμε ότι:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(0,3)$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$¿	0	$+$¿	0	$-$¿	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα ¿ και ¿ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$, αφού είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

β) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(3,2)$, τότε θα είναι:

$$f(0)=-1 \quad \text{και} \quad f(3)=2$$

Από τον πίνακα του ερωτήματος (α) προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=-1$, και τοπικό μέγιστο για $x=3$, το $f(3)=2$.

γ) Αφού η f' είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, τότε η συνάρτηση f θα είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Έστω ότι:

$$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta, \alpha \neq 0$$

Τότε είναι:

$$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$$

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι:

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \gamma=0 \,\text{και}\, f(0)=-1 \Leftrightarrow \delta=-1$$

Επίσης, είναι:

$$\begin{cases} f'(3)=0 \\ f(3)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27\alpha+6\beta=0 \\ 27\alpha+9\beta-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow 3\beta=3 \Leftrightarrow \beta=1 \,\text{και}\, \alpha=\frac{-2}{9}$$

Επομένως, ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x)=\frac{-2}{9}x^3+x^2-1, x \in R$$

δ) Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f στο $(0,3)$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,3)=A_2$, οπότε:

$$f(A_2)=f((0,3))=(f(0), f(3))=(-1,2)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $\alpha \in (-\infty,-1] \cup$ ¿, τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ δεν έχει λύση.
2) Αν $\alpha \in (-1,2)$, τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μία ακριβώς λύση, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,3)$.