ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ

Θέμα Α

Α1. σχολικό βιβλίο σελίδα 41

Α2. α) σχολικό σελίδα 41 κάτω κάτω β) σχολικό σελίδα 43 στο πάνω μέρος η απόδειξη της 2ης κουκίδας

Α3. 1) Σ 2) Λ 3) Σ 4) Λ 5) Σ

Θέμα Β

Τράπεζα θεμάτων άσκηση 16580

Β1. $\vec{AB}=(11-2{,}5-4)=(9{,}1)$, $\vec{A\Gamma}=(3-2{,}7-4)=(1{,}3)$

Β2. $\vec{A\Delta}=\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=(9{,}1)+(1{,}3)=(10{,}4)$

Β3. $\vec{A\Delta}=(x_\Delta-x_A, y_\Delta-y_A)\Leftrightarrow(10{,}4)=(x_\Delta-2, y_\Delta-4)\Leftrightarrow x_\Delta-2=10\Leftrightarrow x_\Delta=12$ και $y_\Delta-4=4\Leftrightarrow y_\Delta=8$,

άρα Δ(12,8)

Θέμα Γ

Γ1. $\vec{AB}=(\kappa-1,-2)$, $\vec{B\Gamma}=(-\kappa,-\kappa)$, $\vec{A\Gamma}=(-1,-\kappa-2)$.

Αφού $|\vec{AB}+2\vec{B\Gamma}|=|\vec{A\Gamma}|\Leftrightarrow|(\kappa-1,-2)+2\cdot(-\kappa,-\kappa)|=|(-1,-\kappa-2)|\Leftrightarrow|(\kappa-1,-2)+(-2\kappa,-2\kappa)|=|(-1,-\kappa-2)|$

$\Leftrightarrow|(-\kappa-1,-2-2\kappa)|=|(-1,-\kappa-2)|\Leftrightarrow\sqrt{(-\kappa-1)^2+(-2-2\kappa)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-\kappa-2)^2}\Leftrightarrow\kappa^2+2\kappa+1^2+(2+2\kappa)^2=1+(\kappa+2)^2$

$\Leftrightarrow2\kappa+1+\kappa^2+4+4\kappa^2+8\kappa=1+\kappa^2+4+4\kappa\Leftrightarrow4\kappa^2+6\kappa=0\Leftrightarrow2\kappa\cdot(2\kappa+3)=0\Leftrightarrow\kappa=0$ ή $\kappa=-\frac{3}{2}$.

Γ2. Για κ=-3/2, τότε $\vec{AB}=(-\frac{5}{2},-2)$ και $\vec{B\Gamma}=(-\frac{5}{2},\frac{3}{2})$. $det(\vec{AB},\vec{B\Gamma})=-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\cdot2=-\frac{15}{4}-5=-\frac{35}{4}\neq0$.

Άρα τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα και εφόσον έχουν κοινό άκρο δεν είναι ούτε συνευθειακά τα σημεία Α,Β,Γ. (γιατί αν ήταν συνευθειακά θα ήταν τα διανύσματα παράλληλα, οπότε άτοπο.)

Γ3. $|\vec{AB}|=\sqrt{(-\frac{5}{2})^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+4}=\sqrt{\frac{41}{4}}$, $|\vec{B\Gamma}|=\sqrt{(-\frac{5}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=\sqrt{\frac{34}{4}}$ και $|\vec{A\Gamma}|=\sqrt{(-1)^2+(-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}$

άρα $|\vec{AB}|\neq|\vec{B\Gamma}|\neq|\vec{A\Gamma}|$ και άρα το τρίγωνο είναι σκαληνό εφόσον όλες οι πλευρές του είναι άνισες.

Θέμα Δ

Τράπεζα θεμάτων άσκηση 21885

Δ1. Είναι $\vec{AB}=\kappa\cdot\vec{A\Delta}\Leftrightarrow\vec{A\Delta}=\frac{1}{\kappa}\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}=\lambda\cdot\vec{AE}\Leftrightarrow\vec{AE}=\frac{1}{\lambda}\vec{A\Gamma}$.

$\vec{\Delta E}=\vec{AE}-\vec{A\Delta}=\frac{1}{\lambda}\vec{A\Gamma}-\frac{1}{\kappa}\vec{AB}=\frac{1}{\lambda}\vec{\beta}-\frac{1}{\kappa}\vec{\alpha}$, $\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}-\vec{AB}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$.

Δ2. Αφού κ = λ , τότε $\vec{\Delta E}=\frac{1}{\kappa}\vec{\beta}-\frac{1}{\kappa}\vec{\alpha}=\frac{1}{\kappa}\vec{B\Gamma}\Leftrightarrow\vec{B\Gamma}=\kappa\cdot\vec{\Delta E}\Rightarrow\vec{B\Gamma}\parallel\vec{\Delta E}$ και άρα $|\vec{B\Gamma}|=\kappa|\vec{\Delta E}|$

Δ3. Αφού κ=λ=2 τότε $\vec{AB}=2\vec{A\Delta}$ και $\vec{A\Gamma}=2\vec{AE}$, δηλαδή τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ.

Είναι $\vec{B\Gamma}\parallel\vec{\Delta E}$ και $|\vec{B\Gamma}|=2|\vec{\Delta E}|\Leftrightarrow|\vec{\Delta E}|=\frac{1}{2}|\vec{B\Gamma}|$, δηλαδή αποδείξαμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.

Θέμα Ε

Ε1. $det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(x+1)(2x+1)-2x=2x^2+x+1$, και η διακρίνουσα $\Delta=-7<0$ άρα το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και άρα δεν μηδενίζεται η ορίζουσα , άρα τα διανύσματα δεν είναι συγγραμμικά.

Ε2. $\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{y_{\vec{\alpha}}}{x_{\vec{\alpha}}}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\varphi=\frac{2}{-2}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\varphi=-1\Leftrightarrow\varphi=135^o$

Ε3. $\vec{\gamma}=\lambda\cdot\vec{\alpha}+\mu\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow(3,0)=\lambda(0,2)+\mu(-1,-1)\Leftrightarrow(3,0)=(-\mu,2\lambda-\mu)\Leftrightarrow\mu=-3$ και $2\lambda-\mu=0\Leftrightarrow\lambda=-\frac{3}{2}$.

Άρα $\vec{\gamma}=-\frac{3}{2}\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$

Ε4. $\vec{\alpha}=(-1,2),\vec{\beta}=(-2,-3)$. Έστω διάνυσμα $\vec{\gamma}=(x,y)$. Αφού το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο με το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σημαίνει ότι είναι παράλληλα, άρα $det(\vec{\alpha},\vec{\gamma})=0\Leftrightarrow 2\cdot x+y=0\Leftrightarrow y=-2x$ (1)

Επίσης $|\vec{\gamma}|=\sqrt{10}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow x^2+y^2=10\Leftrightarrow x^2+(-2x)^2=10\Leftrightarrow 5x^2=10\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ή $x=-\sqrt{2}$.

Άρα για $x=\sqrt{2}\Rightarrow y=-2\sqrt{2}\Rightarrow\vec{\gamma}=(\sqrt{2},-2\sqrt{2})=-\sqrt{2}(-1,2)=-\sqrt{2}\cdot\vec{\alpha}$, άρα $\vec{\gamma}\uparrow\downarrow\vec{\alpha}$, άρα δεκτό το διάνυσμα.

Για $x=-\sqrt{2}\Rightarrow\vec{\gamma}=(-\sqrt{2},2\sqrt{2})=-\sqrt{2}\cdot(-1,2)=\sqrt{2}\cdot\vec{\alpha}\Rightarrow\vec{\gamma}\uparrow\uparrow\vec{\alpha}$, άρα αυτό το διάνυσμα απορρίπτεται.