

Ο Κύκλος

9ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (α) Όταν έχει κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.
 (β) Όταν έχει κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και εφάπτεται της ευθείας $\epsilon : x + y - 2 = 0$.
 (γ) Όταν έχει κέντρο το σημείο $K(-1, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$.
 (δ) Όταν έχει κέντρο το σημείο $K(-3, 1)$ και εφάπτεται της ευθείας $\epsilon : 4x - 3y + 5 = 0$.
 (ε) Όταν έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB , με $A(1, 3)$ και $B(-3, 5)$.
 (ς) Όταν έχει κέντρο το σημείο $K(-2, 3)$ και εφάπτεται στον άξονα $x'x$.
 (ζ) Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(2, 3)$ και το κέντρο του είναι στον άξονα $y'y$.
 (η) Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ και $\Gamma(2, 0)$.

2. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
 (β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(3, 0)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C .
 (γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $A(3, 0)$ και ορίζει χορδή του κύκλου C , στην οποία το A είναι το μέσο της.

3. Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ και η ευθεία $\epsilon : 3x - 4y = 8$.

- (α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.
 (β) Αν $K(1, 2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ϵ είναι $d(K, \epsilon) = \frac{13}{5}$.
 (γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

4. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
 (β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\epsilon : y = x - 3$ εφάπτεται του κύκλου C και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής τους.

Σημείωση

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα $\rho > 0$, είναι:
 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

Σημείωση

Η ευθεία ϵ εφάπτεται του κύκλου (K, ρ) αν και μόνο αν $d(K, \epsilon) = \rho$.

Σημείωση

Όταν ένας κύκλος διέρχεται από δύο σημεία τότε το κέντρο του βρίσκεται στην μεσοκάθετο της χορδής που ορίζουν αυτά τα σημεία.

Σημείωση

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ και αντι-στρόφος κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

5. Δίνονται οι κύκλοι :

$$C_1 : x^2 + y^2 = 9 \quad \text{και} \quad C_2 : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4.$$

(α') Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

(β') Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

(γ') Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

6. Δίνεται ο κύκλος

$$C : x^2 + y^2 = 25 \quad \text{και το σημείο} \quad P(7, 1).$$

(α') Να αποδείξετε ότι το σημείο P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C .

(β') Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες, από το σημείο P προς τον κύκλο C , είναι μεταξύ τους κάθετες.

7. Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{10}$.

Αν το $A(3, \mu)$, με $\mu > 0$, είναι σημείο του κύκλου C , να βρείτε :

(α') την εξίσωση του κύκλου C και τον αριθμό μ ,

(β') την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ του C στο σημείο του A ,

(γ') τις συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού σημείου A' του A .

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου

$$C : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$

οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία $\eta : x - 2y + 2021 = 0$.

9. Δίνεται ο κύκλος

$$C : (x - 1)^2 + y^2 = 4.$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\Sigma(3, 3)$.

10. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + 4y + 2\alpha = 0, \quad \text{όπου} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

(β') Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α έτσι, ώστε η ακτίνα του κύκλου αυτού να είναι ίση με 2.

(γ') Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι, ώστε το κέντρο του κύκλου να βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $\epsilon : 5x + 3y + 1 = 0$.

(δ') Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι, ώστε ο κύκλος να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

“Καμία ανθρώπινη δραστηριότητα δεν μπορεί να ονομαστεί επιστήμη αν δεν μπορεί να στηριχτεί στα Μαθηματικά”.

Da Vinci, Leonardo, 1452 – 1519, Ιταλός ζωγράφος.

Σημείωση

Για τις σχε-
τικές θέσεις
2 κύκλων
στην ενότητα
3.16. εδώ :



Σημείωση

Η εφαπτομένη
του κύκλου $C : x^2 + y^2 = \rho^2$, στο σημείο
του $A(x_1, y_1)$
έχει εξίσωση
 $x_1 x + y_1 y = \rho^2$.