Επαναληπτικά θέματα

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x)=\ln(1-x)-x$

με $x<1$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

α)Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β)Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

γ)Να λύσετε την εξίσωση $\ln(1-x)=x$.

δ)Να λύσετε την εξίσωση $f\left(1+f^{-1}(x)\right)=0$

2. Δίνεται η συνάρτηση :

$f(x)=\ln\left(4-\sqrt{x^2-9}\right)$

α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β)Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ)Να εξετάσετε αν η f είναι $\ll 1-1 \gg$

δ)Αν $g(x)=e^x$, με $x\in\mathbb{R}$, να ορίσετε τη συνάρτηση g o f και να εξετάσετε

αν η γραφική παράσταση της g o f τέμνει τον άξονα $x'x$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x)=e^{x-1}+x-e$ με $x\in\mathbb{R}$

α)Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β)Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $f(x)=f^{-1}(x)$

ii) $f\left(\ln x^2-1\right)=f(\ln x-1)$

iii) $f(\ln x-1)=f^{-1}(\ln x-1)$

4. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και θεωρούμε τη συνάρτηση :

$g(x)=f(x)-2e^x$

α)Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη.

β)Να λύσετε την ανίσωση :

$f(x-1)+2<f(0)+2e^{x-1}$

γ)Να λύσετε την εξίσωση:

$g\left(\ln\frac{1}{x-1}\right)=g\left(2e^{x-1}-2e\right)$

5. Δίνεται η συνάρτηση :

$f(x)=1-\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)$ με $x\geq 1$

α)Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β)Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ)Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=1$

δ)Να βρείτε τα κοινά της C_f και της ευθείας $y=x$.

6. Δίνεται η συνάρτηση :

$f(x)=\ln\left(1-e^x\right)-\ln\left(1+e^x\right)$ με $x<0$

α)Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β)Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ)Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με την ευθεία $y=x$

δ)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$.

ε)Να λύσετε την ανίσωση :

$f(x)-f(-1)<x+1$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την f γνησίως αύξουσα και τη g γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι :

α) αν h>0 , τότε ισχύει:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}<\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο,

γ) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$f(x)=e^x+x^3$ και $g(x)=e^{-x}-2x$

τέμνονται μόνο σε ένα σημείο, το οποίο και να βρείτε.

8. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση :

$(fof)(x)-f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α)Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β)Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

γ)Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

δ)Να λύσετε την εξίσωση :

$f(\ln^3 x+\ln x)=f(2)$

δ) δεν υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(a)=a$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με :

$f(x)=\ln(1+e^x)$

α)Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β)Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ)Να λύσετε την ανίσωση :

$f^{-1}(x^2-x+1)<\ln(e-1)$

δ)Να βρείτε τη συνάρτηση $g:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$g(-\ln(1+e^x))=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

10. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(\ln x)=\frac{1-x-x\ln x}{x}$$ για κάθε $x>0$

α)Να αποδείξετε ότι :

$f(x)=e^{-x}-x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β)Να μελετήσετε τη f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

γ)Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $e^{-x}>x+1+e$

ii) $e^x(x+1)<1$

δ)Να αποδείξετε ότι :

$f(x)+f(-x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

11. Θεωρούμε τις συναρτήσεις :

$f,g:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$

με την g γνησίως φθίνουσα ,οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση :

$f(x)-g(x)=x^2$ για κάθε $x\leq 0$

α)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

β)Αν $g(0)=1$, να αποδείξετε ότι:

$f((-\infty,0])\subseteq[1,+\infty)$

γ)Να αποδείξετε ότι:

$g(-x^2)-g(2x+1)\geq -x^4+4x^2+4x+1$ για κάθε $x\leq -\frac{1}{2}$

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$f^3(x)+f(x)=2e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α)Να αποδείξετε ότι :
$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β)Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

γ)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

δ)Να λύσετε την ανίσωση $\ln f(x) > 0$.

13. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση :
$g(x) = f^3(x) + (fof)(x)$ με $x \in \mathbb{R}$

α)Να αποδείξετε ότι η g είναι $\ll 1-1 \gg$.

β)Να αποδείξετε ότι :
$(gof^{-1})(x) = x^3 + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ)Αν $f(1) = 1$, να λύσετε :

i) την εξίσωση $x^3 + f(x) = 2$,

ii) την ανίσωση :
$x^3 + f(x-1) > 3(x^2 - x + 1)$

ΛΥΣΕΙΣ

1. α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι και «1-1», άρα είναι αντιστρέψιμη.

γ)Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(0) \Leftrightarrow x=0$$

δ) Ισοδύναμα παίρνουμε:

$$f\left(1+f^{-1}(x)\right)=0 \Leftrightarrow f\left(1+f^{-1}(x)\right)=f(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=f(-1) \Leftrightarrow x=1+\ln 2$$

Για να είναι δεκτή η λύση, θα πρέπει να ικανοποιεί τον περιορισμό:

$$1+f^{-1}(x)\in D_f \Leftrightarrow f^{-1}(x)<0$$

Πράγματι, επειδή η $f^{-1}:\mathbb{R}\to(-\infty,1)$ είναι γνησίως φθίνουσα, έχουμε:

$$f^{-1}(1+\ln 2)<0 \Leftrightarrow f^{-1}(1+\ln 2)<f^{-1}(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\ln 2>0, \ \textit{που ισχύει.}$$

2. α) Είναι $D_f=(-5,-3]\cup[3,5)$.

δ) Είναι $(g\circ f)(x)=4-\sqrt{x^2-9}$ με $x\in D_f$
.

Η γραφική παράσταση της $g\circ f$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

3. α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) i) Είναι:

$$f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow e^{x-1}-e=0 \Leftrightarrow x=2$$

ii) Είναι:

$$f\left(\ln x^2-1\right)=f\left(\ln x-1\right) \Leftrightarrow \ln x^2=\ln x \Leftrightarrow x^2=x \Leftrightarrow x=1$$

iii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i) έχουμε:

$$\ln x-1=2 \Leftrightarrow x=e^3$$

4. α) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Ισοδύναμα παίρνουμε:

$$g(x-1)<g(0) \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

γ) Με $x>1$ παίρνουμε:

$$\ln\frac{1}{x-1}=2e^{x-1}-2e \Leftrightarrow \ln(x-1)+2e^{x-1}-2e=0$$

Η συνάρτηση $h(x)=\ln(x-1)+2e^{x-1}-2e$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ και επιπλέον ισχύει $h(2)=0$. Άρα το 2 είναι η μοναδική λύση της δοσμένης εξίσωσης.

5. α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο .

β)Είναι $f^{-1}:(-\infty,1]\to[1,+\infty)$ με:

$$f^{-1}(x)=1+\left(e^{1-x}-1\right)^2$$

γ) Είναι:

$$f^{-1}(x)=1 \Leftrightarrow x=f(1) \Leftrightarrow x=1$$

δ) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $g(1)=0$.

Άρα η C_f και η ευθεία $y=x$ τέμνονται μόνο στο σημείο Μ(1,1) .

6. α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

β) Είναι $f^{-1}:(-\infty,0)\to(-\infty,0)$ με:

$$f^{-1}(x)=\ln\left(1-e^x\right)-\ln\left(1+e^x\right)$$

γ) Από την επίλυση της εξίσωσης $f(x)=x$, προκύπτει ότι η C_f και η ευθεία $y=x$ τέμνονται στο σημείο:

$$M\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right),\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$$

δ) Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

ε) Είναι:

$$f(x)-f(-1)<x+1 \Leftrightarrow f(x)-x<f(-1)+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(x)<g(-1) \Leftrightarrow x\in(-1,0)$$

7. α) Η αποδεικτέα γράφεται:

$$g(x+h)-f(x+h)<g(x)-f(x)$$

που ισχύει, αφού έχουμε $x+h>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $h(x)=g(x)-f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Προκύπτει άμεσα από τη μονοτονία της h.

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα , ενώ η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως από το ερώτημα (β) προκύπτει ότι οι C_f και C_g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Επιπλέον ισχύει $f(0)=1$ και $g(0)=1$, δηλαδή:

$$f(0)=g(0)$$

Άρα οι C_f και C_g τέμνονται μόνο στο σημείο $M(0,1)$.

8. α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Τότε είναι:

$$f(f(x_1))=f(f(x_2))$$

οπότε έχουμε:

$$f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1-1».

β) Από τη δοσμένη σχέση για $x=0$ παίρνουμε:

$$f(f(0))=f(0)$$

άρα είναι $f(0)=0$.

γ) Αν η f ήταν άρτια, θα είχαμε:

$$f(-1)=f(1)\Rightarrow -1=1$$

που είναι αδύνατο.

δ) Είναι:

$$f(\ln^3 x+\ln x)=f(2)\Leftrightarrow \ln^3 x+\ln x=2$$

Η συνάρτηση:

$$g(x)=x^3+x$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$\ln^3 x+\ln x=2\Leftrightarrow g(\ln x)=g(1)\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$$

9. α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $f^{-1}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x)=\ln(e^x-1)$.

γ) $x\in(0,1)$.

δ) $g(x)=1+\ln(e^{-x}-1)$ με $x<0$.

10. α) Θέτουμε $\ln x=t\in\mathbb{R}$, οπότε είναι $x=e^t$. Έτσι έχουμε:

$$f(t)=\frac{1-e^t-te^t}{e^t}=e^{-t}-t-1 \text{ για κάθε } t\in\mathbb{R}.$$

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f(x)>0\Leftrightarrow x<0 \text{ και } f(x)<0\Leftrightarrow x>0$$

γ) **i)** $x<-1$ **ii)** $x<0$

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f(x)+f(-x)=e^{-x}+e^x-2=\frac{(e^x-1)^2}{e^x}\geq 0$$

11. α) Αν $x_1,x_2\leq 0$ με $x_1<x_2$, τότε είναι:

$${x_1}^2>{x_2}^2 \text{ και } g(x_1)>g(x_2)$$

Επομένως ισχύει:

$${x_1}^2+g(x_1)>{x_2}^2+g(x_2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

β) Είναι $f(0)=1$ και για κάθε $x\leq 0$ ισχύει:

$$f(x)\geq f(0)=1$$

γ) Ισοδύναμα έχουμε:

$$g(-x^2)+x^4\geq g(2x+1)+4x^2+4x+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(-x^2)\geq f(2x+1)\Leftrightarrow -x^2\leq 2x+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0$$

που είναι προφανής.

12. α) Από τη δοσμένη σχέση παίρνουμε:

$f(x)=\dfrac{2e^x}{1+f^2(x)}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Από τη δοσμένη σχέση για $x=0$ παίρνουμε:

$$f^3(0)+f(0)-2=0$$

Η εξίσωση $t^3+t-2=0$ έχει μοναδική λύση την $t=1$, άρα είναι $f(0)=1$.

γ) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε είναι:

$$2e^{x_1}<2e^{x_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2) \qquad (1)$$

Η συνάρτηση $g(x)=x^3+x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$g\left(f(x_1)\right)<g\left(f(x_2)\right)\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Είναι:

$$\ln f(x)>0\Leftrightarrow \ln f(x)>\ln f(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow x>0$$

13. α) Αποδεικνύουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Προκύπτει από τη δοσμένη σχέση για x το $f^{-1}(x)$.

γ) i) Ισοδύναμα παίρνουμε:

$$x^3+f(x)=2\Leftrightarrow g\left(f^{-1}(x)\right)=g(1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=1\Leftrightarrow x=f(1)\Leftrightarrow x=1$$

ii) Η δοσμένη ανίσωση γράφεται:

$$(x-1)^3+f(x-1)>2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g\left(f^{-1}(x-1)\right)>g(1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x-1)>1\Leftrightarrow f^{-1}(x-1)>f^{-1}(1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x>2$$