

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1
ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

1.1. Να σημειώσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι: α) φυσικοί, β) ακέραιοι, γ) ρητοί, δ) άρρητοι, ε) πραγματικοί.

$$0, \quad 3, \quad -5, \quad \frac{2}{3}, \quad \sqrt{2}, \quad -7,13, \quad \frac{\sqrt{3}}{5}, \quad 4,\bar{1}2$$

1.2. Να κάνετε απολοιφή των παρενθέσεων στις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) -(\alpha+\beta+\gamma) \quad \beta) -(-\alpha-\beta) \quad \gamma) -\alpha \cdot (\beta-\gamma+\delta)$$

1.3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει: $(2 \cdot x - 6) \cdot (3 \cdot x + 12) = 0$

1.4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς y, για τους οποίους ισχύει: $(y+3) \cdot (18-3 \cdot y) \neq 0$

1.5. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{1}{4} : \frac{1}{2}}{5 - \frac{3}{2} : \frac{2}{5}}$

Απ.: 2

1.6. Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση που ακολουθεί:

$$A = -2 \cdot [-3 \cdot (1-x) - (x+3)] - [-(-x-2) - 2 \cdot (x+1)]$$

Απ.: $-3x+12$

1.7. Να βρείτε την τιμή της παράστασης A, για $x = -\frac{2}{3}$ και $y = \frac{5}{6}$:

$$A = 6 \cdot x \cdot y - [-3 \cdot x \cdot (1-2 \cdot y) - 3 \cdot (x+2 \cdot y)]$$

Απ.: 1

1.8. Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης;

$$A = 2 \cdot (\alpha - 3 \cdot \beta) - 5 \cdot [\beta \cdot (\alpha - 1) - 1] - \alpha \cdot (3 - 5 \cdot \beta)$$

Απ.: 5

1.9. Να βρείτε για ποιες τιμές του x, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{\frac{x-1}{2x+6} + \frac{5}{x-2}}{1 - \frac{1}{x}}$

1.10. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $\beta\gamma - \alpha\delta = 2$

β) $\beta\delta - \alpha\gamma$ είναι περιττός αριθμός

γ) $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ είναι άρτιος, αλλά όχι πολλαπλάσιο του 4

1.11. Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{4}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

α) $A = \frac{4\alpha - 3\beta}{\beta}$ Απ.: 2

β) $B = \frac{2\alpha + \beta}{\alpha - 3\beta}$ Απ.: -2

1.12. Οι αριθμοί α και β είναι ανάλογοι των αριθμών 2 και 3 και ισχύει: $\alpha + \beta = 25$

Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

Απ.: $\alpha=10, \beta=15$

1.13. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{6}{2 - \frac{3}{x}} - \frac{3}{\frac{2x}{3} - 1}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του x

1.14. Ισχύει ότι: $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = 8$, (με $\alpha, \beta \neq 0$) και $\alpha + \beta = 251$.

α) Να βρείτε το άθροισμα $x + y$

Απ.: 2008

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2008 - [6 - 10x + 2(4x - y - 3)]}{-3 \cdot (x - \omega) - 3 \cdot (y + \omega)}$

Απ.: -1

1.15. Έστω $\alpha \neq 0$. Αν ο β είναι ο αντίστροφος του α και ο γ είναι ο αντίθετος του β , να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$A = \alpha + \frac{1}{\gamma}$ και $B = \alpha\gamma$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1.16. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:

α) $(-3)^3 =$

β) $0^5 =$

γ) $5^{-2} =$

δ) $8^0 =$

ε) $0^0 =$

στ) $(-2)^4 =$

ζ) $-2^4 =$

η) $-19^0 =$

1.17. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A=1^{2010}+(-1)^{2011}-(-1)^{2012}+0^{2015}+2004^0$

Απ.: 0

1.18. α) Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι: $\alpha^2+\beta^2=0$. Τι συμπεραίνετε για τους αριθμούς α και β ?

β) Αν ισχύει: $(2x-6)^2+(3y+12)^2=0$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y .

1.19. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A=8-3\cdot 2^3-(-1)^7\cdot [(2^6:4+3^3:3):5-3^2]$

1.20. Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $10^6=$ β) $10^{-5}=$ γ) $10^{-1}=$ δ) $10^0=$

1.21. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α) $2^{-6}\cdot 2^{11}=$ β) $3^{21}:3^{18}=$ γ) $\frac{(-6)^{-9}}{(-6)^{-11}}$ δ) $2^7\cdot 5^7=$
ε) $\frac{18^4}{9^4}=$ στ) $(2^{-3})^2=$ ζ) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=$ η) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}=$

1.22. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $8^{20}:4^{28}=$ β) $4^{12}:0,5^{26}=$ γ) $8^{10}\cdot 9^{15}\cdot 6^{-30}=$

Απ.: α) 16, β) $\frac{1}{4}$, γ) 1

1.23. Αν $x, y \neq 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\frac{2^7\cdot x^8\cdot y^{-5}}{2^5\cdot x^6\cdot y^{-2}}$ β) $B=\frac{x\cdot y^9+(x^2\cdot y^3)^4}{x^6\cdot y^7}$

Απ.: α) $\frac{4x^2}{y^3}$, β) $\frac{y^2}{x^5}+x^2\cdot y^5$

1.24. Αν $x=9$ και $y=\frac{1}{27}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{(x^{-3}\cdot y^{-2}):(x^7\cdot y^5)^{-2}}{(x^{-2}\cdot y^{-1})^2}$

Απ.: 1

1.25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3^x=9$ β) $4^x\cdot 8^{-x+2}=\frac{1}{16}$

Απ.: α) 2, β) 10

1.26. Να γράψετε ως δύναμη του 2 τον αριθμό: $\alpha=2^{31}-2^{30}$

1.27. Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι και ο n είναι ακέραιος, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}$

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1.28. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(2x+3y)^2$ β) $(5x^2-y^3)^2$ γ) $(x^2+2y)^3$ δ) $(2x^3-1)^3$ ε) $(-\alpha-\beta)^2$ στ) $(-\alpha-\beta)^3$
ζ) $(-\alpha-\beta) \cdot (\alpha-\beta)$

1.29. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

β) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα, να βρείτε το ανάπτυγμα του $(\alpha-\beta-\gamma)^2$

1.30. Να εφαρμόσετε την ταυτότητα: $\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$, όπου n θετικός ακέραιος, στις περιπτώσεις:

α) $\alpha^4 - \beta^4$ β) $\alpha^5 - \beta^5$ γ) $\alpha^5 + \beta^5$

1.31. α) Να αποδείξετε τις ταυτότητες: i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$

β) Αν ισχύει $x + \frac{1}{x} = 5$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$

γ) Αν ισχύει $y - \frac{3}{y} = 4$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $B = y^2 + \frac{9}{y^2}$

1.32. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(2\alpha - \beta) \cdot (2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 2\alpha^2 - 3\beta^2$

1.33. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(x-1)^3 + (2x)^2 = x \cdot (x+1)^2 - (x-1)^2$

1.34. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha\beta - 1)^2 - (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - 1)(\beta - 1)(\alpha + 1)(\beta + 1)$

1.35. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β , με $\alpha \neq 0$, ισχύει: $(\alpha + \beta)^3 + \alpha(\alpha - 3\beta)(\alpha + 3\beta) = (\beta - \alpha)^3$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 = \beta^2$.

1.36. Αν ισχύει ότι $\alpha - \beta = 3$, να αποδείξετε ότι: $3\alpha - \beta^2 - 3\beta + 2\alpha\beta = \alpha^2$

1.37. Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, να αποδείξετε ότι: $(\tau - \alpha)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 + \tau^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

1.38. (Ταυτότητα Euler: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$)

α) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

β) Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$

1.39. Έστω ένας φυσικός αριθμός α . Αν ο αριθμός $\alpha^2 + 2\alpha$ είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι και ο α είναι άρτιος.

1.40. Για τους αριθμούς α, β, γ ισχύει: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 6$

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \gamma)^2 = \beta^2$

β) Να βρείτε την τιμή του γινομένου $\alpha\beta\gamma$

Απ.: 2

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = (\alpha\gamma + \beta)^2 - (\alpha + \gamma)^2 + (1 - \alpha\gamma)(1 + \alpha\gamma)$

Απ.: 5

1.41. Οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι και ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 3$. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(\alpha - \beta)^{2020}$

Απ.: 1

1.42. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = x^2 - y^2$, $\beta = 2xy$ και $\omega = x^2 + y^2$ (όπου $x > y > 0$). Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β, ω είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα την ω .

1.43. Αν ισχύει ότι: $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = (\alpha\beta - 1)^{2010}$.

Απ.: 1

1.44. Να αποδείξετε ότι: $(x - 2y)^3 + 3(x - 2y)^2(x + 2y) + 3(x - 2y)(x + 2y)^2 + (x + 2y)^3 = 8x^3$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1.45. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $xy - 5x + x^2$ ii) $6\alpha^4\beta^2 + 9\alpha^3\beta^3 - 12\alpha^5\beta^6$ iii) $x(\alpha - \beta) + y(\beta - \alpha)$ iv) $\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$

v) $\alpha^{2\beta} - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha + \beta - 1$ vi) $x^2 - 16$ vii) $25\alpha^2 - 9\beta^2$ viii) $(2x + 3y)^2 - (x + y)^2$ ix) $x^4 - y^4$

x) x^3+27 xi) $1-8x^3$ xii) $4x^2+12x+9$ xiii) $(x-2)^2-6(x-2)+9$ xiv) $2x^3-4x^2+2x$ xv) x^2+5x+6
 xvi) $x^2-7x+12$ xvii) $2x^2+5xy+3y^2$ xviii) $x^7+x^5-x^3-x$ xix) $x^2+6x-4y^2+9$
 xx) $x+y-3x^2-6xy-3y^2$

1.46. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\frac{x^3-6x^2+9x}{2x^4-18x^2}$ β) $\frac{(2x+y)^2-(x-3y)^2}{27x^4-8xy^3}$

1.47. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2+2}{x^2+3x} - \frac{3x-2}{x^2-3x} + \frac{14}{x^2-9}$

α) Να βρείτε για ποιές τιμές του x, ορίζεται η παράσταση A

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A

1.48. Αν ισχύει $\beta(\alpha^2+2)=\alpha(\beta^2+2)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$ ή $\alpha\beta = 2$.

1.49. Να βρείτε την τιμή του κλάσματος: $A = \frac{3+6+9+\dots+300}{2+4+6+\dots+200}$

ΔΙΑΒΑΣΜΑ ΑΠΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

ΘΕΩΡΙΑ

σελίδες: 44, 45, 46, 47, 50

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

MUST SEE!!!

σελίδα 52: A1, A2, A4, A5, A6

σελίδα 53: B1, B2, B3, B4, B7



ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 2ο

12685. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4, \text{ τότε να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2.$

β) $\alpha = \beta.$

13088. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

13053. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta + \gamma = -\alpha.$

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha.$

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$$

13472. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta.$

ii. $\alpha + \beta = 1.$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

14458. Έστω x , υπαγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$

ii. $y=\frac{x}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

14473. Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να δείξετε ότι $y=2x$.

β) Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

14555. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση $(x-2y)^2-2(3-2xy)=5y^2-1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2-y^2=5$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P=(x+y)^3(x-y)^3$.

35388. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$

Θέμα 3ο

14329. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A=\frac{-\alpha}{\beta}, B=\alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

Θέμα 4ο

15052. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες EZ και $H\Theta$ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0,6)$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y .

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x=4$ και $y=2$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα EZ και $H\Theta$ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου.

