ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1.η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$

2. $f(2) - f(1) < 3$

3.υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

2. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$.

ii.Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$.

iii.Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

3. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν ότι η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με f(0) = 2 και $f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = f(x) \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$, για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, τότε να βρείτε τον τύπο της.

4. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{\lambda \cdot x}}{x+1}$, $x > -1$ και $\lambda > 0$

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο

ii. Να βρείτε για ποιά τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του

5. i. Να αποδείξετε ότι: $e^x \le 1 + x \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$

ii. Να λυθεί η εξίσωση: $e^x = 1 + x \cdot e^x$

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $h(x) = 2 \cdot (1 + x \cdot e^x)$

6. α. Να λύσετε την εξίσωση: $3^x + 2^x = 5^x$

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = -2 \cdot f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

ii. Να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(0) = 1$

iii. Αν h,φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $h'(x)+2\cdot h(x)=\varphi'(x)+2\cdot\varphi(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h(0)=\varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι: $h=\varphi$

7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x}-\ln(x+1)-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $2\cdot\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\cdot\beta-1>0$, ισχύει:
$e^{2\cdot\alpha+\beta-1}-\ln(2\cdot\alpha+\beta)+e^{\alpha+2\cdot\beta-2}-\ln(\alpha+2\cdot\beta-1)\leq 2$, να υπολογίσεις τους α, β

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{1}{2\cdot x}},\ x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

ii. Να δείξετε ότι: $\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

33999. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x}\leq f(x)\leq 1+\frac{1}{x},\ \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=+\infty$

β) Αν επιπλέον ισχύει $(x+1)f'(x)\cdot\ln(x+1)=-f(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\ln(x+1),x>0$ είναι σταθερή.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\frac{\ln(x+1)}{x}\leq g(x)\leq\ln(x+1)+\frac{\ln(x+1)}{x}$ και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f.

33995. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{x-1}{x^{2}+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): y = x , είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της C_f, με την ευθεία ε

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι “1-1”