Μεθοδολογία για ανακάλυψη ριζών εξίσωσης

Αν μου ζητούν σε εξίσωση $f(x)=0$ να δείξω ότι:

α) έχει μία τουλάχιστον ρίζα, τότε:

i) **Χρησιμοποιώ για την f(x) το Θ.Bolzano**

π.χ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4-20x^3-25x^2-x+1=0$ (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-1,0)

Λύση

Έστω $f(x)=x^4-20x^3-25x^2-x+1$. Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο [-1,0] και

$f(-1)=1+20-25+1+1=-2<0$

$f(0)=1>0$ Άρα $f(-1)\cdot f(0)<0$ και από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε: $f(x_o)=0$. Άρα η (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (-1,0)

ii) **Ανακαλύπτω ότι το σύνολο τιμών της f περιέχει το 0**.

π.χ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2-2-(1-x)(lnx-2)=0$ (2) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,+\infty)$

Λύση

Έστω $f(x)=x^2-2-(1-x)(lnx-2)$, $x>1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f'(x)=2x+lnx-2-\frac{1}{x}+1=2x+lnx-\frac{1}{x}-1>0$, γιατί για κάθε

$$x>1\Leftrightarrow\begin{cases}2x>2\\-x<-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1>1\\-\frac{1}{x}>-1\end{cases}$$

και $lnx>0$ και προσθέτοντας κατά μέλη: $2x-1-\frac{1}{x}+lnx>0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ και συνεχής (ως παραγωγίσιμη)

Και $f((1,+\infty))=(\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x))=(-1,+\infty)$, άρα το $0\in f((1,+\infty))$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$. Άρα η (2) έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_o\in(1,+\infty)$

iii) **Βρίσκω προφανή ρίζα** της $f(x)=0$

π.χ. Να δειχθεί ότι η εξίσωση: $2\cdot x+lnx-1-\frac{1}{x}=0$ (3) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,+\infty)$

Λύση

Αν $f(x)=2\cdot x+lnx-1-\frac{1}{x}$, $x>0$, τότε προφανώς $f(1)=0$. Άρα η (3) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,+\infty)$, την x =1.

iv) **<u>Βρίσκω μία αρχική συνάρτηση F παραγωγίσιμη ώστε F΄(x) = f(x), για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f και εφαρμόζω για την F το θεώτημα Rolle σε κατάλληλο διάστημα</u>**

π.χ. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(1-x)\cdot συνx-ημx=0$ (4) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

<u>Λύση</u>

Έστω $F(x)=(1-x)\cdot ημx$, $x\in[0,1]$

- Η F είναι συνεχής , ως γινόμενο συνεχών , στο [0,1]
- Η F είναι παραγωγίσιμη, ως γινόμενο παραγωγισίμων, στο (0,1) με $F'(x)=-ημx+(1-x)\cdot συνx$
- $F(0)=0=F(1)$

Άρα από θεώρημα Rolle , υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$: $F'(x_o)=0\Leftrightarrow(1-x_o)\cdot συνx_o-ημx_o=0$. Άρα η (4) έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_o\in(0,1)$

β) Έχει μία <u>το πολύ</u> ρίζα, τότε δέχομαι ότι έχει 2 διαφορετικές ρίζες $ρ_1,ρ_2$ $(ρ_1<ρ_2)$ και αποδεικνύω το θεώρημα Rolle για την f στο $[ρ_1,ρ_2]$, ότι αυτό είναι <u>άτοπο</u>.

π.χ. Αν για τη συνάρτηση f , ισχύει ότι: $f'(x)\neq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μία το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$

<u>Λύση</u>

Έστω ότι έχω τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ και έστω ότι η $g(x)=0$ έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες $ρ_1,ρ_2$ $(ρ_1<ρ_2)$. Τότε η g στο $[ρ_1,ρ_2]$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και στο $(ρ_1,ρ_2)$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων με $g'(x)=f'(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(ρ_1)=g(ρ_2)=0$. Άρα από θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(ρ_1,ρ_2)$: $g'(x_o)=0\Leftrightarrow f'(x_o)-1=0\Leftrightarrow f'(x_o)=1$, που είναι άτοπο. Άρα η $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x$ έχει μία το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$

γ) Έχει μία <u>ακριβώς</u> ή <u>μόνο</u> ρίζα, τότε αφού αποδείξω ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα όπως είδαμε στο α, αποδεικνύω την μοναδικότητά της με:

i) την <u>μονοτονία</u> της f

π.χ. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x-συνx-2=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $[0,π]$

<u>Λύση</u>

Έστω $f(x)=x-συνx-2$, $x\in[0,π]$. Η f στο $[0,π]$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και $f(0)=-3<0$, $f(π)=π-1>0\Leftrightarrow f(0)\cdot f(π)<0$, άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $x_o\in(0,π)$ τέτοιος ώστε: $f(x_o)=0$. Αλλά $f'(x)=1+ημx>0$, για κάθε $x\in[0,π]$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,π] και άρα το $x_o\in(0,π)$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης στο [0,π].

ii) Με <u>εις άτοπο απαγωγή</u> χρησιμοποιώντας το θεώρημα Rolle, δεχόμενος ότι υπάρχει κι άλλη ρίζα.

π.χ. Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και οι f,g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και αν ισχύει: $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε α) να δείξετε ότι υπάρχουν οι f'', g'', ότι είναι συνεχείς και επίσης ότι ισχύουν $f''(x)+f(x)=g''(x)+g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Αν για τις παραπάνω f,g τα x_1, x_2 είναι 2 ρίζες της $f(x)$ και $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(x_1,x_2)$, να δείξετε ότι η $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (x_1,x_2) (ΘΕΜΑ Α' , ΔΕΣΜΗ 1996)

<u>Λύση</u>

α) Αφού $f'(x)=g(x)$ και είναι παραγωγίσιμη τότε: $f''(x)=g'(x)=-f(x)$ είναι συνεχής , άρα: $f''(x)+f(x)=0$. Ομοίως, αφού $g'(x)=-f(x)$ και είναι παραγωγίσιμη, τότε: $g''(x)=-f'(x)=-g(x)$ που είναι συνεχής και άρα: $g''(x)+g(x)=0$. Άρα $f''(x)+f(x)=0=g''(x)+g(x)$. Τέλος $h'(x)=2\cdot f(x)\cdot f'(x)+2\cdot g(x)\cdot g'(x)\Leftrightarrow h'(x)=2\cdot f(x)\cdot g(x)-2\cdot g(x)\cdot f(x)=0\Leftrightarrow h=$ σταθερή στο $\mathbb{R}$

β) Η f στο $[x_1,x_2]$ είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και στο (x_1,x_2) είναι παραγωγίσιμη (υπόθεση) και $f(x_1)=0=f(x_2)$ (αφού x_1, x_2 είναι ρίζες της f) , από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(x_1,x_2)$: $f'(x_o)=0\Leftrightarrow g(x_o)=0$.

Αν η $g(x)=0$ έχει και άλλη ρίζα έστω ρ στο (x_1,x_2) με $x_1<\rho<x_o<x_2$ τότε η g στο $[\rho, x_o]$ είναι συνεχής, $\text{στο}(\rho, x_o)$ είναι παραγωγίσιμη και $g(\rho)=0=g(x_o)$. Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(\rho,x_o)\subseteq(x_1,x_2)$ ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow -f(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=0$, άτοπο, αφού $f(\xi)\neq 0$, για κάθε $x\in(x_1,x_2)$. Άρα η $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x_o\in(x_1,x_2)$.

<u>Μεθοδολογία για απόδειξη ανισοτήτων</u>

α) Με <u>μονοτονία</u> και <u>ακρότατα</u>

π.χ. 1) Αν οι f,g είναι παρααγωγίσιμες στο $[0,+\infty)$ και αν ισχύει $f'(x)=g'(x)+\eta\mu^2 x+e^x$, για κάθε $x\geq 0$ να δείξετε ότι $f(0)+g(x)<g(0)+f(x)$, για κάθε $x>0$

<u>Λύση</u>

Αφού $f'(x)=g'(x)=\eta\mu^x+e^x>0$, για κάθε $x\geq 0\Rightarrow$ η $[f(x)-g(x)]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Άρα για κάθε $x>0\Rightarrow$ $f(x)-g(x)>f(0)-g(0)\Leftrightarrow g(0)+f(x)>f(0)+g(x)$, για κάθε $x>0$

2) Αν $f(x)=x-1-lnx$, $x>0$ τότε i) να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, ii) να δειχθεί ότι $lnx \le x-1$, για κάθε $x>0$

Λύση

i) $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, $x>0$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	+
$f(x)$	‖	φθ/σα	αυ/σα

Άρα από το πινακάκι των προσήμων η f έχει ολικό ελάχιστον στο x =1 , το f(1) = 0

ii) Αφού για κάθε $x>0$ $f(x) \ge f(1) \Leftrightarrow x-1-lnx \ge 0 \Leftrightarrow x-1 \ge lnx$, για κάθε $x>0$

β) Με **<u>Θ.Μ.Τ.</u>**

π.χ. 1) Αν $f(x)=e^x$, $x \in [\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι $e^{\alpha} < \frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha} < e^{\beta}$

Λύση

Η f στο [α,β] είναι συνεχής ως εκθετική και στο (α,β) είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x \overset{ΘΜΤ}{\Leftrightarrow}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow e^{\xi}=\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}$ (1)

Αφού $\alpha<\xi<\beta \overset{e^x \text{ αύξουσα}}{\Rightarrow} e^{\alpha}<e^{\xi}<e^{\beta} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} e^{\alpha}<\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}<e^{\beta}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν επιπλέον μου δίνουν τη μονοτονία της f' (ή το πρόσημο της f'') και f(0) = 0, τότε χρησιμοποιώ το Θ.Μ.Τ. για την f στο [0,x] ή στο [x,0]

π.χ. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και f(0) = 0, να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Λύση

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη , με $\varphi'(x)=\frac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x}$, $x>0$. Η f στο [0,x] είναι συνεχής (x>0) και παραγωγίσιμη στο (0,x) , άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,x)$: $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi)=\frac{f(x)}{x}$ (1).

Αφού $0<\xi<x \overset{f'\,αύξουσα}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(\xi)<f'(x) \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{x}<f'(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x)<x\cdot f'(x)\Leftrightarrow 0<x\cdot f'(x)-f(x),\ x>0$

Άρα $\varphi'(x)>0$, για κάθε $x>0\Rightarrow\varphi$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!!

Αν μου δίνουν ανισότητα και θέλω να αποδείξω ισότητα, τότε χρησιμοποιώ θ. Fermat

π.χ. Αν α,β > 0 και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x+\beta^x\geq 2$, να δείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=1$

Λύση

Έστω $f(x)=\alpha^x+\beta^x-2$, $x\in\mathbb{R}$. Αφού $f(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$, άρα η f έχει στο $x_o=0$ ελάχιστο. Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων στο $\mathbb{R}$ και άρα στο $x_o=0 \overset{Θ.\,Fermat}{\Rightarrow} f'(0)=0$ με $f'(x)=\alpha^x\cdot ln\alpha+\beta^x\cdot ln\beta$. Άρα $\alpha^0\cdot ln\alpha+\beta^0\cdot ln\beta=0\Leftrightarrow ln\alpha+ln\beta=0\Leftrightarrow\ln(\alpha\cdot\beta)=0\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta=1$.