Ρούσσος Γιάννης

ΆΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΊΟΥ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5
ΕΞΙΣΏΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Ι. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΈΣ ΕΞΙΣΏΣΕΙΣ

5.1. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $\lambda\cdot x+\lambda+1=x$ β) $(\lambda^3-4\lambda)\cdot x=\lambda^2+4\lambda+4$ γ) $(\lambda-1)\cdot x=\lambda^2-1$ δ) $\lambda\cdot x+8\cdot x=2\cdot(\lambda-1)\cdot x+10$

ε) $\alpha\cdot x+\alpha=\beta\cdot x+\beta$ στ) $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\beta}=1$

5.2. Να εξετάσετε πότε η εξίσωση $\frac{\alpha x-\beta}{3}+\frac{x}{2}=3\cdot x-\alpha$, έχει μία λύση, είναι ταυτότητα, είναι αδύνατη.

5.3. Για ποιές τιμές των λ και μ η εξίσωση: $\frac{5\lambda y-5\mu}{4}=\frac{3\lambda-3\mu y}{4}+8y-4$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό y?

12857. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)\cdot x=2\cdot\lambda-2$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) i) Να λύσετε την εξίσωση για λ = - 2 (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του λ, αν γνωρίζετε ότι το x = 1, είναι ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή του λ, για την οποία η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις. (Μονάδες 8)

36896. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)\cdot x=\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1).

α) Επιλέγοντας 3 διαφορετικές τιμές για λ, να γράψετε 3 εξισώσεις (Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει μοναδική λύση (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η μοναδική εξίσωση της (1) να ισούται με 4 (Μονάδες 8)

ΙΙ. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ – ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σκέψη: Πρέπει ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι διάφορος του μηδενός. Συνήθως βολεύει πρώτα να παραγοντοποιώ τους παρονομαστές και ύστερα να λύνω τη διαφορά, δηλαδή να βρίσκω για ποιες τιμές του αγνώστου μου δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής. **ΠΡΟΣΟΧΗ!! Δεν μπορώ να απλοποιήσω κλάσμα πριν βάλω περιορισμούς!!!**

14224. Δίνεται η παράσταση $A=\frac{x^2-1}{x^2-x}$, $x\neq0$, $x\neq1$.

α) Να δείξετε ότι: $A=\frac{x+1}{x}$. (Μονάδες 8) β) i. Να βρείτε για ποιά τιμή του x , η παράσταση Α μηδενίζεται (Μονάδες 8)

ii. Μπορεί η παράσταση Α να πάρει την τιμή 2;

5.4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2\cdot x+3}{x}+\frac{x}{2\cdot x+3}=2$ β) $\frac{x^2-x}{x}-\frac{1}{1-x}=-2$

5.5. Να λύσετε την παραμετρική εξίσωση: $\frac{x+\lambda+\mu}{x+\lambda}-\frac{x+\lambda-\mu}{x-\lambda}=\frac{\mu^2-\lambda^2}{\lambda^2-x^2}$

ΙΙΙ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Σκέψη: Πρέπει να θυμηθούμε τον ορισμό και να μηδενίσουμε το εσωτερικό του απολύτου. Ύστερα διακρίνουμε περιπτώσεις για τις διάφορες τιμές του αγνώστου ώστε να εξετάσουμε που αλλάζει πρόσημο το εσωτερικό του απολύτου και βγάζουμε την απόλυτη τιμή κατάλληλα με βάση τον ορισμό.

13169. Αν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός x είναι πραγματικός αριθμός με $3\leq x\leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $x-5\leq 0<x-2$ (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x-2|-|x-5|=2$

5.6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|x|=3$ ii) $|x|=-2$ iii) $\frac{|x|-1}{3}=2$ iv) $2\cdot|x|-12=0$ v) $|5-3\cdot x|=1$ vi) $3\cdot|2\cdot x-5|-21=0$

vii) $\frac{5-|x-2|}{2}=4$ viii) $2+\frac{|3\cdot x-4|-1}{3}=3-\frac{|3\cdot x-4|}{3}$ ix) $5-|2\cdot x+2|=7-|3\cdot x+3|$

x) $\frac{|x-3|}{2}+\frac{|6-2\cdot x|}{3}=8-\frac{|3-x|}{6}$ xi) $|2\cdot x+1|=|x-4|$ xii) $|3\cdot x-2|-|x+6|=0$

5.7. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i) $|x^2-3\cdot x+2|=|x^2+3\cdot x-20|$ ii) $||x|-3|=1$ iii) $||x+3|-2|=4$ iv) $|1-|3-2x||=6$

v) $||x|-3|=|2\cdot|x|-1|$ vi) $x^2-10\cdot|x|+25=0$ vii) $|x|^3-5\cdot x^2=0$ viii) $|x-5|-(x-5)^2=0$

ix) $\frac{2\cdot|x|+3}{|x|-x}=3$

5.7. Ο Γιώργος λέει στον Μανώλη: «Πάρε έναν αριθμό, πολλαπλασίασε τον με το 5, πρόσθεσε το 20

στο γινόμενο, διαίρεσε το άθροισμα με το 5 και αφαίρεσε τώρα τον αριθμό που πήρες στην αρχή. Θα βρεις αποτέλεσμα 4.» Έχει δίκιο ο Γιώργος;

5.8. Για την αποπεράτωση ενός έργου εργάζονται δύο εργάτες, ο Α και ο Β. Ο Α εργάζεται για 26 μέρες και ο Β για 21 μέρες. Ο Α έχει ημερομίσθιο κατά 5 ευρώ μεγαλύτερο από του Β και στο τέλος η αμοιβή του είναι κατά 150 ευρώ μεγαλύτερη. Να βρείτε το ημερομίσθιο των δύο εργατών.

5.9. Ένας πατέρας είναι 34 χρονών και ο γιος του 7 ετών. Μετά από πόσα χρόνια ο πατέρας θα έχει τετραπλάσια ηλικία από τον γιο του?

5.10. Να βρεθεί αριθμός του οποίου το μισό αυξημένο κατά 30 είναι ισούται με το διπλάσιό του ελαττωμένο κατά 20.

5.11. Μια βρύση Α γεμίζει μια δεξαμενή σε 5 ώρες και μια βρύση Β τη γεμίζει σε 6 ώρες. Αν ανοιχτούν και οι 2 βρύσες μαζί, σε πόσες ώρες θα γεμίσουν τη δεξαμενή?

5.12. Να βρεθεί διψήφιος αριθμός, αν είναι γνωστό ότι το ψηφίο των δεκάδων του είναι τριπλάσιο από το ψηφίο των μονάδων και αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του να προκύψει αριθμός κατά 36 μικρότερος.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

ΘΥΜΑΜΑΙ: Ο τύπος της διακρίνουσας είναι: Δ=…………………

- Αν η Διακρίνουσα είναι θετική , τότε η εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει ………….. ρίζες
- Αν η Διακρίνουσα είναι μηδέν, τότε η εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει …………… ρίζες
- Αν η Διακρίνουσα είναι αρνητική , τότε η εξίσωση δευτέρου βαθμού ……………. ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς

37178. Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x+1$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)

5.13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2-4\cdot\sqrt{3}\cdot x+9=0$ ii) $x^2-(1+\sqrt{2})\cdot x+\sqrt{2}=0$ iii) $x^4-8x^2+12=0$ iv) $x^6+7\cdot x^3-8=0$ v) $x^2-3\cdot|x|+2=0$

14749. α) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in R$, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{x}{x - |x|}$.

(Μονάδες 9)

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A, να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x - |x|} = \frac{3}{2}x + 2$.

(Μονάδες 9)

5.14. Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2 - 3x + 3)^2 - 8(x^2 - 3x) = 17$

I. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

37181. Δίνεται η εξίσωση**:** $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, (1)$ με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ. (Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 12)

5.15. Να βρείτε το λ έτσι ώστε η εξίσωση $(3\lambda - 5)x^2 - (\lambda + 4)x + (2\lambda + 5) = 0$ να έχει διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε

5.16. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $\lambda x^2 - 2(1 - 2\lambda)x + 2 = 0$ είναι ο αριθμός 1, να βρεθεί η άλλη ρίζα της εξίσωσης

5.17. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές λύσεις

5.18. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 3\lambda x + (\lambda^2 - 1) = 0$. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες

α) ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = 9$ β) οι δύο ρίζες της εξίσωσης είναι αντίστροφοι αριθμοί

5.19. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό λ

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε την τιμή του λ , ώστε $x_1^3 \cdot x_2^3 = -8$

5.20. Δίνεται η εξίσωση $2x^2-(\lambda^3+8)x-1=0$. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να είναι αντίθετες

5.21. Δίνεται η εξίσωση $(3\lambda-1)x^2-x-1=0$. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για τις οποίες να ισχύει $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = -1$.

34327. (Θέμα 4)

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-3x-4=0$ **(1)** (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β. (Μονάδες 8)

ΤΥΠΟΙ VIETTA

ΘΥΜΆΜΑΙ: Για να χρησιμοποιήσω τους τύπους Vietta, πρέπει η διακρίνουσα να είναι θετική.

Συμπληρώνω τους τύπους και θυμάμαι: $S=x_1+x_2=$............ , $P=x_1 \cdot x_2=$................

14577. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x-2=0$ (1)

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζα τον αριθμό -1 (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1) (Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=\frac{x^2-x-2}{x^2+x}, x\neq 0, x\neq -1$ (Μονάδες 9)

Άσκηση: Δίνεται το τριώνυμο: $2\cdot x^2+x-1$ (1)

α) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου (1) , να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1+x_2, x_1\cdot x_2, \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}, x_1^2+x_2^2$

β) Αν $\frac{1}{x_1}=-1$ και $\frac{1}{x_2}=2$, να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ρίζες τι; $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

5.22. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x-1=0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $x_1^2+x_2^2$ β) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ γ) $x_1 \cdot x_2^2+x_1^2 \cdot x_2$ δ) $x_1^3+x_2^3$

34920. Δίνεται η εξίσωση $3 \cdot x^2+6 \cdot x-12 \quad (1)$. Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου (1):

α) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων x_1+x_2, $x_1 \cdot x_2$ (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $4 \cdot x_1, 4 \cdot x_2$

33584. (Θέμα 4) Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2 \cdot x+\lambda=0$, με παράμετρο $\lambda<1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $x_1+x_2=2$. (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1-2|=|x_2+2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $x_1-x_2=4$ (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ (Μονάδες 8)

36675. (Θέμα 4) Δίνεται η εξίσωση $x^2-4 \cdot x+2-\lambda^2=0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή λ η (1) έχει δύο ρίζες άνισες (Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) , τότε:

i. Να βρείτε το $S=x_1+x_2$

ii. Να βρείτε το P = $x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ

(Μονάδες 5)

γ) Αν μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$

ii. Να βρείτε τον αριθμό λ

(Μονάδες 10)

14406. (Θέμα 4) Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Κ = $\dfrac{\alpha^{22}\cdot\left(\beta^{3}\right)^{8}}{\alpha^{-2}\cdot\left(\alpha\beta\right)^{25}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\dfrac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

(Μονάδες 5)