ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

2.2. ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2.1. Αν οι αριθμοί α,β είναι ομόσημοι, να αποδείξετε ότι: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$

2.2. Να αποδείξετε ότι $(x^2+1)(y^2+4)\geq(xy+2)^2$

2.3. Αν ισχύει ότι $\alpha>\beta>1$, να αποδείξετε ότι: $\beta(\alpha+1)>\alpha+\beta^2$

2.4. Αν ισχύει $\alpha>\beta>0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^7-\frac{1}{\alpha}>\beta^7-\frac{1}{\beta}$

2.5. Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta\leq\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\leq\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$, για $\alpha\neq\beta$.

2.6. α) Αν $x\neq3$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha=x^2+4$ και $\beta=6x-5$

β) Αν α < β, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^3-\beta$ και $\alpha^2\beta-\alpha$

2.7. Αν ισχύει $0<\alpha<\beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\frac{\alpha}{\beta}, 1, \frac{\beta}{\alpha}$ β) $(\alpha\beta)^{10}$ και β^{20}

2.8. Να αποδείξετε ότι $x^2+xy+y^2\geq0$

2.9. α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+5\geq2(\alpha-2\beta)$

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση?

2.10. Να αποδείξετε ότι $2\alpha^2-6\alpha+9>0$

2.11. α) Αν $x\neq1$, να αποδείξετε ότι $\frac{x^3-2}{x-1}>\frac{x^2-2x}{x-1}$

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}$

2.12. Αν ισχύει $1 \leq \alpha \leq 3$ και $-4 \leq \beta \leq -2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι τιμές των επόμενων παραστάσεων:

α) 2α + 3β β) α – β γ) $\alpha^2+\beta^2$ δ) $\frac{\alpha}{\beta}$

2.13. Έστω οι αριθμοί α,β,γ > 0. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$

β) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\geq 8\alpha\beta\gamma$

γ) Αν επιπλέον ισχύει α + β + γ =1, τότε: $(\frac{\alpha}{\beta}-1)(\frac{1}{\beta}-1)(\frac{1}{\gamma}-1)\geq 8$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 2ο

12673. Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: 0<α<β **.**

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$.

12922. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\alpha^2+\beta^2$ και $B=2\alpha\beta$**,** $\alpha,\beta\in R$**.**

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ για τις οποίες $A=0$.

β) Να αποδείξετε ότι $A-B\geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta\in R$.

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha,\beta\in R$ ώστε να ισχύει $A-B=0$**.**

13266. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\alpha^2+4\alpha+5$ και $B=(2\beta+1)^2-1$**,** με $\alpha,\beta\in R$**.**

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει $A=(\alpha+2)^2+1$.

β) i. Να δείξετε ότι $A+B\geq 0$.

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ισχύει $A+B=0$;

13323. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17 .$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2+y^2-2x+8y+17=0$.

14410. Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A=\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}$ και $B=(\beta-3)^2$.

α)

i. Να δείξετε ότι $A+B\geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta\in R$.

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β έτσι, ώστε $A+B=0$.

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha,\beta\in R$, ώστε $A=-B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14475. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2\leq\alpha\leq 4$ και $-4\leq\beta\leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha+2\beta$ β) $\alpha-\beta$.

14492. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\leq x\leq 7\, και\, 2\leq y\leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

14704. Αν 2 ≤ x ≤3 και 1 ≤ y ≤ 2, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) x + y β) 2x-3y γ) $\frac{x}{y}$

35040. Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in R$.

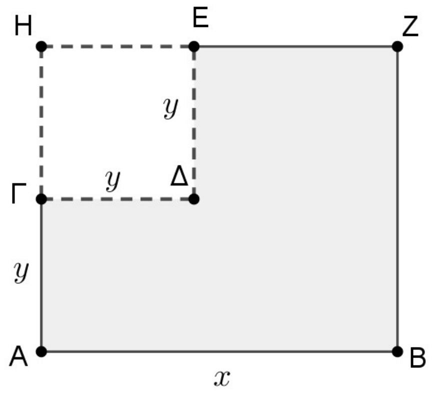
α) Να δείξετε ότι: $K-\Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$.

β) Να δείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α,β.

γ) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

35549. Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi=2x+4y$.



β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

36884. α) Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10.$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y, ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.

36899. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha>0$ και $\beta>0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\geq 4$.

β) $\left(\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{4}{\beta}\right)\geq 16$.

37179. Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2a^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$;

37817. Δίνεται η παράσταση $A=x^4+\dfrac{x^4-4}{x^2-2}$, $x\neq\pm\sqrt{2}$..

α) Να δείξετε ότι $A=x^4+x^2+2$.

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $A>0$ για κάθε $x\neq\pm\sqrt{2}$.

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

Θέμα 3ο

14602. Αν $0<\alpha<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<\alpha^3<\alpha$.

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \quad \alpha^3, \quad 1, \quad \alpha, \quad \frac{1}{\alpha}.$$

14713. Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}$, $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=(\alpha^2+9)(\alpha+2)$.

β) Για κάθε $\alpha>0$ισχύει

i. $A=\dfrac{\alpha^2+9}{\alpha}$.

$A\geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A=6$;

Θέμα 4ο

14820. α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x\in$⌈ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2+x+1\geq \dfrac{3}{4}$.

ii. $x^2-x+1\geq \dfrac{3}{4}$.

β) Να δείξετε ότι $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>\dfrac{9}{16}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2-1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Α.

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση Α μπορεί να πάρει την τιμή $\dfrac{9}{16}$.

Σχολικό Βιβλίο

MUST SEE!!!

Θεωρία: Ιδιότητες σελ. 54,55, πως γράφω διαστήματα: σελ. 57, 58

Εφαρμογή: 1, 2 (SOS)

Ασκήσεις: Α1,2,3, 4,5,6,7 Β1,2,3,4